А. А. КИРИЛЛОВ
А. Д. ГВИШИАНИ

ТЕОРЕМЫ И ЗАДАЧИ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов вузов, обучающихся по специальностям
«Математика» и «Прикладная математика»*

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1988

ББК 22.162
К43
УДК 517.5

Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.
Теоремы и задачи функционального анализа: Учеб. пособие для вузов.— 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.— 400 с.— ISBN 5-02-013797-9

Книга состоит из трех разделов. Первый раздел представляет собой изложение теоретического материала, входящего в курс лекций, читаемых на механико-математическом факультете МГУ. Второй раздел книги содержит задачи по этому курсу, многие из которых предлагались на семинарских занятиях. Третий раздел содержит указания к решению задач.

Для студентов и аспирантов университетов, изучающих функциональный анализ; может быть использована преподавателями в качестве пособия при подготовке различных курсов анализа.

Табл. 1. Илл. 18. **Библиогр. 55 назв.**

Рецензент
член-корреспондент АН СССР
Л. Д. Кудрявцев

$$К\ \frac{1702050000-057}{053(02)-88}\ 75\text{-}88$$

ISBN 5-02-013797-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке второго издания мы несколько реорганизовали материал книги. В частности, были изъяты простые задачи на вычисление. Они будут включены в готовящийся нами специальный сборник задач и упражнений по функциональному анализу. В то же время мы постарались уточнить и несколько упростить теоретические задачи.

Расширен теоретический раздел книги. Добавлены приложения функционального анализа в математическом прогнозировании, а также математическая модель квантовой механики. В большем объеме изложена спектральная теория, добавлена теория расширений операторов. В настоящем виде книга полностью охватывает программу кандидатского экзамена по функциональному анализу.

Первое издание книги было переведено на английский, французский, итальянский и венгерский языки. При подготовке этих переводов было сделано достаточно много исправлений и добавлений. Все они учтены в настоящем издании книги. Кроме того, существенно переработаны указания к решению задач.

А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани

ПРЕДИСЛОВИЕ

Уже простейшая математическая абстракция явлений реальной действительности — прямая линия — рассматривается с разных точек зрения различными математическими дисциплинами. Так, алгебраический подход к изучению этого объекта состоит в описании его свойств как множества, к элементам которого можно применять «операции», и в получении его алгебраической модели на основании этих свойств, абстрагируясь от свойств топологических. С другой стороны, топология абстрагируется от алгебраической структуры объекта и строит формальную модель прямой линии, выделяя в качестве основы модели ее непрерывность. Анализ рассматривает прямую и функции на прямой в единстве всей системы их алгебраических и топологических свойств, получая свои основные выводы путем использования взаимосвязи алгебраической и топологической структур.

Такая же картина наблюдается и на более высоких ступенях абстракции. Алгебра изучает линейные пространства, группы, кольца, модули и т. д. Топология — различного рода структуры на произвольных множествах, придающие математический смысл понятиям предела, непрерывности, окрестности и т. д. Функциональный анализ рассматривает топологические линейные пространства, топологические группы, нормированные кольца, модули представлений топологических групп в топологических линейных пространствах и т. д. Таким образом, основным предметом изучения функционального анализа следует считать объекты, наделенные согласованными алгебраической и топологической структурами.

Курс функционального анализа, впервые прочитанный на механико-математическом факультете МГУ А. Н. Колмогоровым и традиционно включающий в себя теорию меры и интеграла Лебега, в основном посвящен классическим разделам функционального анализа. Предлагаемая читателю книга является результатом попытки обобщения и систематизации опыта преподавания авторами этого курса на механико-математическом факультете МГУ и преследует следующие цели.

Изложить необходимые теоретические сведения по курсу функционального анализа в объеме программы математических факультетов университетов.

Снабдить преподавателей, читающих лекции и ведущих упражнения по функциональному анализу, а также студентов, изучающих этот предмет, пособием, органически соединяющим в себе учебник и задачник с достаточно подробными указаниями к решениям задач.

Дать читателю представление о некоторых элементах аппарата, используемого для решения задач современного функционального анализа (категории, функторы, пространства когомологий, характеры групп и т. д.).

Снабдить читателя пособием, пригодным для самостоятельного изучения классических глав функционального анализа и освоения методики решения соответствующих задач.

Книга делится на три тесно связанные между собой части — теорию, задачи и указания к решению задач. Соответствующие разделы каждой из трех частей объединены общим названием. Главы подразделяются на параграфы, а параграфы (как правило) — на пункты (кроме главы I). Система деления книги на пункты может быть рекомендована в качестве схемы примерного распределения материала по семинарским занятиям, где на материал каждого пункта отводится 1—3 занятия в зависимости от направленности курса, уровня подготовки студентов и их интересов. По каждому пункту приводятся задачи различной трудности, причем те, которые составляют необходимый минимум, помечены кружочком, а сложные — звездочкой. Небольшое число особо трудных задач отмечено двумя звездочками. Решения этих задач могут быть изложены преподавателем либо предложены студентам как темы индивидуальных докладов. С другой стороны, задачи с кружочком разумно рекомендовать для письменных контрольных работ.

Авторы благодарны С. М. Агаяну, А. В. Зелевинскому и А. В. Трусову за помощь в составлении указаний к решениям задач.

А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани

РАЗДЕЛ I

ТЕОРИЯ

ГЛАВА I

СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И ТОПОЛОГИИ

§ 1. Отношения. Аксиома выбора и лемма Цорна

Пусть X — множество, R — подмножество в $X \times X$. Говорят, что точки x и y из X находятся в *отношении* R, и пишут xRy, если $(x, y) \in R$.

Примеры отношений. 1) Отношение равенства:

$$R = \Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}.$$

2) Отношение порядка на вещественной прямой:

$$R = \{(x, y) \mid x \geqslant y\}.$$

3) Отношение линейной зависимости в линейном пространстве L над полем K:

$$R = \{(x, y) \mid y = 0 \quad \text{либо} \quad x = \lambda y, \lambda \in K\}.$$

Отношение R называется *отношением эквивалентности*, если оно обладает свойствами:

1) рефлексивности: $(x, x) \in R \quad \forall x \in X$ (или $R \supset \Delta_X$);

2) симметричности: $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ (или $R' = R$, где R' означает *транспонированное отношение*: $R' = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$);

3) транзитивности: $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ (или $R \circ R \subset R$, где знак $\circ$ означает *композицию отношений*: $R_1 \circ R_2 = \{(x, z) \mid \exists y: (x, y) \in R_1, (y, z) \in R_2\}$).

Пусть R — отношение эквивалентности. В этом случае будем писать $x \sim y$ вместо xRy и говорить, что x *эквива-*

лентен y. Обозначим через $R(x)$ совокупность всех элементов из X, эквивалентных x. Из свойств 1), 2), 3) вытекает, что подмножества вида $R(x)$ исчерпывают все X и попарно либо не пересекаются, либо совпадают. Эти подмножества называются *классами эквивалентности*. Совокупность классов эквивалентности обозначается $X_{(R)}$ и называется *фактормножеством* X по отношению R.

Примеры. 1) Проективное пространство $P(L)$, связанное с данным линейным пространством L. 2) Факторпространство L_1/L_2 линейного пространства L_1 по подпространству L_2 (для x, $y \in L_1$ считаем, что $x \sim y$, если $x - y \in L_2$). 3) Совокупность вычетов по модулю n. 4) Совокупность положительных рациональных или всех целых чисел как классов эквивалентности пар натуральных чисел.

Отношение R на множестве X называется *отношением частичного порядка*, если оно обладает свойствами:

1) транзитивности ($R \circ R \subset R$);

2) антисимметричности ($R \cap R' \subset \Delta_X$).

Вместо xRy обычно пишут $x \geqslant y$ и говорят «x следует за y». Знак $>$ (читается «x строго следует за y») мы будем употреблять для обозначения отношения $R_1 = R \setminus \Delta_X$. Таким образом, $x > y$ означает $x \geqslant y$ и $x \neq y$. Если, кроме того, выполняется свойство

3) $R \cup R' = X \times X$ (т. е. любые два элемента сравнимы), то отношение R называется *отношением порядка*.

Примеры. 1) Обычное отношение порядка на вещественной прямой. 2) Отношение включения для подмножеств данного множества (это отношение обозначают знаком $\subset$), которое является отношением частичного порядка (но не порядка). 3) Отношение делимости для целых чисел (обычно обозначаемое знаком $|$), также являющееся отношением частичного порядка.

Подмножество Y в частично упорядоченном множестве X называется *ограниченным сверху* (*снизу*), если оно допускает *мажоранту* (*миноранту*), т. е. такой элемент $x \in X$, что $y \leqslant x$ (соотв. $y \geqslant x$) для всех $y \in Y$.

Множество X с отношением частичного порядка R называется *направленным множеством*, если R обладает свойством $R' \circ R = X \times X$ (другими словами, для любых x и y из X найдется элемент z, следующий и за x, и за y). Если (X, R) — направленное множество, M — произвольное множество, то отображение X в M называется *направленностью* или *сетью* в M. Это понятие является обобщением понятия последовательности, к которому оно сводится, если X — натуральный ряд с обычным отношением порядка.

В курсах высшей математики нередко говорят, что понятие *множества* «является настолько общим, что ему трудно дать какое-либо определение», и поэтому ограничиваются указанием ряда синонимов: набор, совокупность, семейство и т. д. На самом деле существует строгая теория множеств, в которой это понятие точно определяется (разумеется, не сведе́нием к другим, более простым или общим понятиям, а описанием тех свойств, которыми обладает понятие множества). При этом оказывается, что вовсе не всякие «набор», «совокупность», «семейство» и т. д. можно считать множеством. (Например, понятие множества всех множеств, как известно, противоречиво.) Тем не менее существуют непротиворечивые теории с достаточно богатым запасом множеств.

Для большинства разделов математики достаточно, чтобы рассматриваемый запас множеств содержал хотя бы одно бесконечное множество и допускал следующие операции:

1) объединение $\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$;

2) пересечение $\bigcap\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$;

3) разность $X \setminus Y$;

4) построение множества отображений X в Y, обозначаемого Y^X;

5) произведение $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Здесь X, Y, A и все X_α, $\alpha \in A$, являются множествами, и мы предполагаем, что результатом операции также является множество.

Последняя операция заслуживает более подробного обсуждения. Пусть A — некоторое множество и каждому элементу $\alpha \in A$ поставлено в соответствие непустое множество X_α. По определению, элементом множества $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ является такое отображение $\alpha \mapsto x_\alpha$ множества A в $\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$, что $x_\alpha \in X_\alpha$ для всех $\alpha \in A$. Если множество A бесконечно, то существование такого отображения неочевидно (и, как сейчас известно, не может быть выведено из его существования для конечных A и других естественных аксиом). Поэтому утверждение о непустоте $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ для непустых X_α принимают в качестве самостоятельной аксиомы. Она получила название *аксиомы выбора* или *ак-*

сиомы Цермело. Приведем два утверждения, эквивалентные аксиоме выбора.

Лемма Цорна. *Если в частично упорядоченном множестве X всякое упорядоченное подмножество ограничено сверху (снизу), то в X есть хотя бы один максимальный (минимальный) элемент x_0.*

Замечание. Термин «максимальный элемент» не означает, что $x_0 \geqslant x$ для всех $x \in X$ (такой элемент мы будем называть *наибольшим*). Максимальность x_0 означает лишь, что в X нет элемента, строго следующего за x_0.

Теорема Цермело. *Каждое множество можно вполне упорядочить, т. е. ввести на нем такое отношение порядка, при котором любое подмножество содержит наименьший элемент.*

Оба эти утверждения являются, по существу, обобщением известного принципа математической индукции и заменяют этот принцип в тех случаях, когда приходится иметь дело с несчетными множествами.

Читателю, желающему подробнее познакомиться с основами теории множеств, мы рекомендуем просмотреть «Сводку результатов» книги [6], а также предисловия автора и редактора перевода к этой книге; см. также [20*].

§ 2. Метрические пространства и их приложения

Важнейшие понятия анализа — предел и непрерывность — опираются на понятие расстояния между точками числовой оси. Формализация этого понятия приводит к определению метрического пространства.

Определение. *Метрическим пространством* называется множество X вместе с вещественной функцией d на $X \times X$, обладающей свойствами:

1) $d(x, y) \geqslant 0$; $d(x, y) = 0$, если и только если $x = y$;
2) $d(x, y) = d(y, x)$ (симметричность);
3) $d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z)$ (неравенство треугольника).

Функция d называется *расстоянием* или *метрикой* на X.

Мы предоставляем читателю убедиться, что определения предела числовой последовательности и непрерывности вещественной функции от вещественного аргумента можно дословно перенести на последовательности точек метрического пространства и отображения одного метрического пространства в другое.

Приведем еще несколько определений, связанных с понятием расстояния и имеющих смысл в любом метрическом пространстве.

Замкнутым шаром с центром a и радиусом r в метрическом пространстве (X, d) называется подмножество в X, состоящее из точек x, находящихся на расстоянии $\leqslant r$ от точки $a \in X$. Мы будем обозначать этот шар $B(a, r)$. Если в определении замкнутого шара заменить неравенство $d(a, x) \leqslant r$ на строгое неравенство $d(a, x) < r$, то получится определение *открытого шара*, обозначаемого $\overset{\circ}{B}(a, r)$.

Точка a называется *точкой прикосновения* для множества A, если для любого $r > 0$ в шаре $B(a, r)$ есть точки множества A.

Множество A называется *замкнутым*, если оно содержит все свои точки прикосновения, и *открытым*, если вместе с каждой точкой a оно содержит некоторый шар $B(a, r)$ с $r > 0$.

Читателю, который впервые знакомится с этими понятиями, полезно будет самостоятельно доказать, что замкнутый шар является замкнутым множеством, а открытый шар — открытым множеством.

Метрическое пространство X называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность имеет предел в X.

Полные пространства обладают важным свойством: в них справедливы два утверждения, служащие основой для вывода многочисленных «теорем существования» в анализе.

Теорема о стягивающихся шарах. *Пусть $\{B_n\}$ — последовательность замкнутых шаров в метрическом пространстве (X, d), обладающая свойствами:*

1) $B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots$ *(т. е. каждый шар содержится в предыдущем)*;

2) *радиусы шаров стремятся к нулю.*

Тогда если X — полное пространство, то все шары B_n имеют ровно одну общую точку.

Принцип сжимающих отображений. *Пусть $f\colon X \to X$ — отображение метрического пространства в себя, обладающее свойством: для некоторого числа $\lambda < 1$ выполняется неравенство*

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \lambda d(x, y)$$

для всех $x, y \in X$.

Тогда если X полно, то отображение f имеет ровно одну неподвижную точку $x \in X$ (т. е. такую, что $f(x)=x$).

По существу, эти два утверждения являются характеристическими свойствами полных пространств (см. задачу 18). Однако часто приходится иметь дело с неполными пространствами. Существует замечательная конструкция, позволяющая изготовить из каждого неполного пространства соответствующее ему полное пространство, присоединяя «недостающие» точки.

Определение. Пусть X — метрическое пространство. *Пополнением* X называется метрическое пространство Y, обладающее свойствами:

1) Y — полное пространство;

2) в Y есть подмножество Y_0, изометричное X;

3) Y_0 плотно в Y (т. е. замыкание Y_0 совпадает с Y; другими словами, каждая точка из Y является точкой прикосновения для Y_0).

Пример. Множество $\mathbf{R}$ вещественных чисел является пополнением множества $\mathbf{Q}$ рациональных чисел с обычным расстоянием.

Теорема 1. *Каждое метрическое пространство X допускает пополнение Y. Для любых двух пополнений Y' и Y'' пространства X существует изометрия Y' на Y'', оставляющая на месте точки X.*

Доказательство состоит в явной конструкции пополнения. Пусть F — множество всех фундаментальных последовательностей точек из X. Если $x=\{x_n\}$ и $y=\{y_n\}$ — две точки из F, то числовая последовательность $d(x_n, y_n)$ будет фундаментальной, так как $|d(x_n, y_n)-d(x_m, y_m)| \leqslant \leqslant d(x_n, x_m)+d(y_n, y_m)$. Значит, эта последовательность имеет предел, который мы обозначим $d(x, y)$. Величина $d(x, y)$ обладает почти всеми свойствами расстояния. В самом деле, неравенства $d(x, y) \geqslant 0$, $d(x, y) \leqslant d(x, z)+ +d(y, z)$ и равенства $d(x, x)=0$, $d(x, y)=d(y, x)$ легко получаются предельным переходом из соответствующих неравенств и равенств, где вместо x, y, z стоят x_n, y_n, z_n. Не выполняется лишь свойство отделимости: $d(x, y)=0$ не означает, вообще говоря, что $x=y$.

Введем на F отношение $R=\{(x, y) \mid d(x, y)=0\}$. Из приведенных выше свойств величины $d(x, y)$ следует, что R — отношение эквивалентности. Положим $Y=F_{(R)}$ и определим расстояние на Y, полагая $d(R(x), R(y))= =d(x, y)$. Проверка корректности этого определения предоставляется читателю.

Покажем теперь, что Y — пополнение X. Для этого рассмотрим отображение $\varphi\colon X\to Y$, которое каждой точке x ставит в соответствие класс $\varphi(x)$, содержащий постоянную (и, следовательно, фундаментальную) последовательность $\bar{x}=(x, x, x, \ldots, x, \ldots)$. Ясно, что отображение φ изометрично. Мы обозначим через Y_0 образ X при отображении φ. Далее, пусть y — любой элемент из Y и $\{x_n\}\in F$ — какая-нибудь последовательность из класса y. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} d(\varphi(x_n), y)=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} d(x_n, x_m)=0.$$

Это значит, что y является пределом последовательности $\{\varphi(x_n)\}$ и, значит, точкой прикосновения для Y_0.

Докажем полноту Y. Пусть $\{y_n\}$ — фундаментальная последовательность в Y. Так как Y_0 плотно в Y, можно указать такую последовательность $\{\varphi(x_n)\}$ в Y_0, что $d(\varphi(x_n), y_n)\to 0$. Ясно, что $\{y_n\}$ и $\{\varphi(x_n)\}$ сходятся или расходятся одновременно. Но последовательность $\{\varphi(x_n)\}$ имеет своим пределом точку y — класс последовательности $\{x_n\}$. В самом деле,

$$\lim_{n\to\infty} d(\varphi(x_n), y)=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} d(x_n, x_m)=0.$$

Пусть теперь Y' и Y'' — два пополнения X и $\varphi'\colon X\to Y'_0$, $\varphi''\colon X\to Y''_0$ — соответствующие изометрические отображения. Рассмотрим отображение $\psi_0=\varphi'\circ(\varphi'')^{-1}$ из Y''_0 в Y'_0. Оно изометрично и, значит, переводит фундаментальные последовательности в фундаментальные. Поскольку Y' и Y'' полны, фундаментальные последовательности в Y'_0 $\left(Y''_0\right)$ являются сходящимися в $Y'(Y'')$. Это позволяет однозначно продолжить изометрию $\psi_0\colon Y''_0\to Y'_0$ до изометрии $\psi\colon Y''\to Y'$, полагая $\psi(\lim\limits_{n\to\infty} y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\psi_0(y_n)$.

Теорема доказана.

Практически пополнение чаще строится с помощью другой конструкции.

Теорема 2. *Пусть M — полное метрическое пространство и X — подмножество в M. Тогда X полно тогда и только тогда, когда оно замкнуто в M. В частности, в качестве пополнения X можно взять его замыкание в M.*

(По поводу доказательства см. задачу 25.)

Пример. Пополнением интервала (a, b) относительно обычного расстояния является отрезок $[a, b]$ — замыкание интервала (a, b) в $\mathbf{R}$.

Понятие метрического пространства имеет много хорошо известных приложений в анализе, дифференциальных уравнениях, теории функций и других разделах математики.

Например, специальный класс метрических пространств используется в прикладных исследованиях по распознаванию образов и математическому прогнозированию. Приведем соответствующие определения.

Обозначим через Ω_n множество всех векторов $\omega = (\omega(1), \ldots, \omega(n))$ с двоичными координатами $\omega(i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Введем в Ω_n метрику по формуле $d^\sigma(\omega, \omega') = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i |\omega(i) - \omega'(i)|$, где $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $\sigma_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ — вектор весов. Метрическое пространство (Ω_n, d^σ) называется *пространством Хемминга.* Это пространство играет важную роль в алгоритмическом распознавании.

Приведем пример. Пусть W — конечное множество объектов, $t \in [T_0, T_1]$ — параметр, имеющий смысл времени $(T_1 \leqslant \infty)$. Предположим, что при всех t имеется разбиение $p(t)$: $W = \bigsqcup_{i=1}^{r} W_i(t)$ множества W на r непересекающихся классов. Иными словами, задано отображение

$$\Psi: W \times [T_0, T_1] \to \{1, \ldots, r\}.$$

В каждый момент времени объекты $w \in W$ характеризуются значениями некоторых двоичных параметров, т. е. имеется отображение Φ: $W \times [T_0, T_1] \to \Omega_n$ (кодировка).

Пусть фиксирован момент времени t, в который решается задача. Исходную информацию в динамической задаче распознавания составляют данные о поведении системы на отрезке времени $[T_0, t]$. Таким образом, функции Ψ и Φ предполагаются известными для некоторых подмножеств из $W \times [T_0, t]$, составляя материал обучения $O(t)$.

Рассмотрим другой момент времени t', такой, что $t < t' < T_1$. Под *решением динамической задачи распознавания* или *прогнозом* понимается алгоритмическое определение классификации $W = \bigsqcup_{i=1}^{r} W_i(t')$ на основе материала обучения $O(t)$. Иными словами, $\Pi(t, t')$ есть прогноз неизвестных на данный момент значений функции Ψ на множестве $W \times \{t'\}$.

Зависимость классификации от времени позволяет выделить класс наиболее достоверных прогнозов, обладающих свойством стабильности. При этом используются довольно тонкие свойства метрических пространств. Определение стабильности сводится к следующему. Допустим, что в момент времени t_0, исходя из разбиения $P(t_0)$, с помощью некоторого алгоритма A мы получили прогноз $\Pi(t_0, t')$. Затем мы стали решать ту же задачу в более поздний момент времени t_1 $(t_0 < t_1 < t')$. Разбиение $P(t_1)$ назовем допустимым, если возможны такие переходы объектов, что в моменты времени t_0, t_1, t' множество W представляется соответственно разбиениями $P(t_0)$, $P(t_1)$, $\Pi(t_0, t')$. Прогноз $\Pi(t_0, t')$ называется *стабильным*, если для любого t_1 такого, что $t_0 < t_1 < t'$, и любого допустимого разбиения $P(t_1)$ алгоритм A, исходя из разбиения $P(t_1)$, дает прогноз $\Pi(t_1, t')$, совпадающий с $\Pi(t_0, t')$.

Стабильность прогноза означает, что любое изменение со временем материала обучения, не противоречащее сделанному прогнозу, не меняет его результата. Тем самым нестабильные прогнозы внутренне противоречивы и их не следует рассматривать как достоверные при поиске точной классификации.

В геофизических приложениях, связанных с сейсмическим районированием, особое значение имеет случай, когда $r = 2$. Соответствующие разбиения будем обозначать через $W = \text{В}(t) \sqcup \text{Н}(t)$ (высокосейсмичные и низкосейсмичные объекты). Здесь мы имеем возможность перехода объектов только из класса $\text{Н}(t)$ в класс $\text{В}(t)$. (Низкосейсмичные области после сильного землетрясения могут стать высокосейсмичными, но не наоборот.)

Алгоритмы дихотомии (разбиение на два класса) осуществляют представление Ω_n в виде непересекающегося объединения множеств $\Lambda_\text{в}$ и $\Lambda_\text{н}$ (или, что то же самое, представление множества W в виде $W = \text{В} \sqcup \text{Н}$, где $\text{В} = \Phi^{-1}(\Lambda_\text{в})$, $\text{Н} = \Phi^{-1}(\Lambda_\text{н})$), основываясь на информации о кодировке Φ и множествах В_0 и Н_0, составляющих исходное разбиение. Дадим формулировку алгоритма ГЭП-1, простейшего из класса алгоритмов ГНП [8*].

Введем следующие обозначения: a_l (соответственно b_l, c_l, d_l) — число объектов $w \in \text{В}_0$ (соответственно Н_0, В_0, Н_0) таких, что l-я компонента вектора $\omega = \Phi(w)$ равна нулю (соответственно 0, 1, 1); $r_l = \{\omega: \omega(l) = 0\}$, $\bar{r}_l = \{\omega: \omega(l) = 1\}$, $R_l = \Phi^{-1}(r_l)$, $\bar{R}_l = \Phi^{-1}(\bar{r}_l)$. Как легко видеть, $\Omega_n = r_l \sqcup \bar{r}_l$ (здесь и ниже чертой обозначен переход к дополнению), $a_l = |B_0 \cap R_l|$, $b_l = |\text{Н}_0 \cap R_l|$, $c_l = |\text{В}_0 \cap \overline{R}_l|$, $d_l = |\text{Н}_0 \cap \overline{R}_l|$. Таким образом, отношения $a_l/(a_l + c_l)$ и $b_l/(b_l + d_l)$ характеризуют частоту встречаемости нулей в l-ом разряде для объектов из В_0 и Н_0 соответственно.

Определим вектор $z \in \Omega_n$ следующим образом: $z(l) = 0$, если $\frac{a_l}{a_l + c_l} \geqslant \frac{b_l}{b_l + d_l}$ и $z(l) = 1$ в противном случае. Вектор z называется ядром класса В. Рассмотрим в метрическом пространстве Хемминга (Ω_n, ρ^σ) шар $B(z, R) = \{\omega\colon \rho(\omega, z) \leqslant R\}$ и положим $\Lambda_\text{в} = B(z, R)$. Алгоритм ГЭП-1 осуществляет представление множества объектов в виде $\Pi(t_0, T_1)$: $W = \text{В} \sqcup \text{Н}$, где $\text{В} = \Phi^{-1}(\Lambda_\text{в})$, $\text{Н} = W \setminus \text{В}$.

Шар $B(z, R)$ в (Ω_n, ρ^σ) может иметь не один, а несколько центров (см. задачу 37). Множество всех центров шара будем называть его *центроидом*. Достаточные условия стабильности прогноза, полученного алгоритмом ГЭП-1, дает следующая

Теорема 3. *Для стабильности прогноза* $\Pi(t_0)$: $W = \text{В}(t_0) \sqcup \text{Н}(t_0)$, *полученного алгоритмом* ГЭП-1, *достаточно, а если отображение* Φ *сюръективно, то и необходимо, чтобы при любом допустимом исходном разбиении* P *ядро* $z(P)$ *принадлежало центроиду шара* $\Lambda_\text{в}(t_0)$.

Для того чтобы провести в этом случае конструктивную проверку стабильности, надо иметь классификацию всех центроидов в пространстве (Ω_n, ρ^σ). Такая классификация дается в задаче 42.

Стабильность можно проверить и для произвольного алгоритма класса ГНП. Методы такой проверки разработаны в [8*].

§ 3. Категории и функторы

Многие определения и конструкции, употребляемые в математике, удобно получать из небольшого числа общих понятий, которые в последнее время составили особую область исследования — теорию категорий. Мы познакомим читателя с элементами этой теории.

Говорят, что задана *категория* K, если задана совокупность (вообще говоря, не множество, см. § 1) $\mathrm{Ob}(K)$ *объектов категории* и для каждой пары объектов A, B указано множество $\mathrm{Mor}(A, B)$ *морфизмов категории* из A в B. При этом морфизмы можно перемножать, т. е. задано отображение $\mathrm{Mor}(A, B) \times \mathrm{Mor}(B, C) \to \mathrm{Mor}(A, C)$:

образ пары морфизмов $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ и $g \in \mathrm{Mor}(B, C)$ принадлежит $\mathrm{Mor}(A, C)$ и обозначается $g \circ f$. Предполагается, что он обладает обычными свойствами композиции отображений: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ для $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}(B, C)$, $h \in \mathrm{Mor}(C, D)$. Кроме того, в множестве $\mathrm{Mor}(A, A)$ выделен так называемый *единичный морфизм*, обозначаемый 1_A и обладающий свойствами: $1_A \circ f = f$, $g \circ 1_A = g$ для всех $f \in \mathrm{Mor}(B, A)$, $g \in \mathrm{Mor}(A, B)$. Часто для наглядности объекты категории обозначают точками, а морфизмы — стрелками, соединяющими эти точки.

Примеры. 1) Категория множеств (объекты — множества, морфизмы — отображения множеств).

2) Категория групп (соотв. колец, алгебр) (объекты — группы (соотв. кольца, алгебры), морфизмы — гомоморфизмы).

3) Категория топологических пространств (объекты — топологические пространства, морфизмы — непрерывные отображения).

4) Категория линейных пространств над данным полем K (объекты — линейные пространства над K, морфизмы — линейные операторы).

Два объекта A и B категории K называются *изоморфными*, если существуют такие морфизмы $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ и $g \in \mathrm{Mor}(B, A)$, что $f \circ g = 1_B$, $g \circ f = 1_A$.

Объект A в категории K называется *универсальным отталкивающим* *) *объектом*, если для любого объекта B из K множество $\mathrm{Mor}(A, B)$ состоит ровно из одного элемента. (Выражаясь наглядно: из точки A в любую другую точку B ведет ровно одна стрелка.)

Покажем в качестве упражнения на введенные понятия, что любые два универсальных отталкивающих объекта A и B изоморфны (если они существуют). В самом деле, пусть f — единственный морфизм из A в B и g — единственный морфизм из B в A. Тогда $f \circ g \in \mathrm{Mor}(B, B)$, $g \circ f \in \mathrm{Mor}(A, A)$. Но $\mathrm{Mor}(B, B)$ содержит единственный элемент 1_B (поскольку B универсален), а $\mathrm{Mor}(A, A)$ — единственный элемент 1_A (поскольку A универсален). Значит, $f \circ g = 1_B$, $g \circ f = 1_A$.

Покажем теперь, что понятия фактормножества и пополнения являются частными случаями понятия универсального объекта. В первом случае мы рассмотрим сле-

*) Слово «отталкивающий» мы для краткости будем иногда опускать.

дующую категорию K, построенную по множеству X и отношению R. Объектом K будем считать отображение φ множества X в какое-нибудь другое множество Y (свое для каждого объекта), обладающее свойством: $xRy \Rightarrow \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$. Морфизмом объекта $\varphi\colon X \to Y$ в объект $\psi\colon X \to Z$ назовем такое отображение $\chi\colon Y \to Z$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "\chi"] \\ X \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\psi"'] & Z \end{tikzcd} \tag{1}$$

Последнее означает, что $\chi \circ \varphi = \psi$. (Вообще, *коммутативность диаграммы*, составленной из объектов и морфизмов некоторой категории, означает, что для любого пути из одной точки диаграммы в другую по стрелкам этой диаграммы произведение соответствующих морфизмов зависит только от начального и конечного объектов, а не от выбора пути. В приведенном выше примере есть два пути из X в Z, что и дает условие $\chi \circ \varphi = \psi$.)

Проверим, что каноническая проекция $p\colon X \to X_{(R)}$ является универсальным объектом в категории K. Пусть $\varphi\colon X \to Y$ — объект из K. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} & X_{(R)} \arrow[d, dashed] \\ X \arrow[ur, "p"] \arrow[r, "\varphi"'] & Y \end{tikzcd}$$

Легко убедиться, что условие коммутативности однозначно определяет отображение, соответствующее пунктирной стрелке. Это значит, что $\mathrm{Mor}(p, \varphi)$ состоит из одного элемента. Поэтому $p\colon X \to X_{(R)}$ — универсальный объект.

Разберем теперь конструкцию пополнения. Пусть X — метрическое пространство. Рассмотрим категорию K, объектами которой являются изометрические отображения $\varphi\colon X \to Y$, где Y — полное метрическое пространство (свое для каждого объекта). Морфизмом из $\varphi\colon X \to Y$ в $\psi\colon X \to Z$ назовем такое изометрическое отображение $\chi\colon Y \to Z$, для которого коммутативна диаграмма (1).

Проверим, что каноническое вложение φ пространства X в его пополнение Y является универсальным объектом. В самом деле, для любого объекта $\psi\colon X \to Z$

диаграмма

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & Y \\ X \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \\ & Z \end{tikzcd} \tag{2}$$

может быть единственным образом достроена до коммутативной диаграммы вида (1). Искомое отображение χ определяется на подмножестве $\varphi(X)$ по формуле $\chi = \psi \circ \varphi^{-1}$ (условие коммутативности) а дальше распространяется по непрерывности:

$$\chi(\lim y_n) = \lim \chi(y_n).$$

Отметим, что единственность пополнения (с точностью до изометрии) вытекает из доказанной выше общей теоремы об изоморфизме универсальных объектов.

Одно из основных понятий в теории категорий — понятие функтора.

Определение. *Ковариантным функтором* из категории K_1 в категорию K_2 называется отображение F, которое каждому объекту A из K_1 ставит в соответствие объект $F(A)$ из K_2, а каждому морфизму φ из $\mathrm{Mor}(A, B)$ — морфизм $F(\varphi)$ из $\mathrm{Mor}(F(A), F(B))$, причем выполняются условия:

1) $F(1_A) = 1_{F(A)}$;

2) $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$.

Часто также встречаются отображения F категорий, ставящие в соответствие каждому морфизму $\varphi \in \mathrm{Mor}(A, B)$ морфизм $F(\varphi) \in \mathrm{Mor}(F(B), F(A))$ и удовлетворяющие вместо условия 2) условию

2′) $F(\varphi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$.

Они называются *контравариантными функторами.*

Примеры. 1) Переход от метрического пространства к его пополнению является ковариантным функтором из категории метрических пространств в категорию полных метрических пространств (морфизмами в обеих категориях являются изометрические отображения).

2) Переход от линейного пространства L над полем K к двойственному пространству L' (пространству K-линейных функционалов на L) является контравариантным функтором из категории линейных пространств над K в себя.

3) Для любой категории K отображения $A \to \mathrm{Mor}(\cdot, A)$ ($A \to \mathrm{Mor}(A, \cdot)$) продолжаются до ковариантного (контравариантного) функтора из K в категорию множеств.

Для этого нужно морфизму $\varphi \in \mathrm{Mor}(A_1, A_2)$ поставить в соответствие отображение $\mathrm{Mor}(\cdot, A_1)$ в $\mathrm{Mor}(\cdot, A_2)$ ($\mathrm{Mor}(A_2, \cdot)$ в $\mathrm{Mor}(A_1, \cdot)$), состоящее в умножении слева (справа) на морфизм φ.

Совокупность ковариантных функторов из K_1 в K_2 сама образует категорию $\mathrm{Cov}(K_1, K_2)$. Морфизмами в ней являются так называемые *функторные морфизмы* или *естественные преобразования функторов*. Они определяются так: пусть F_1 и F_2 — функторы из K_1 в K_2. Морфизмом φ из F_1 в F_2 называется такой набор отображений $\varphi(A) \in \mathrm{Mor}_{K_2}(F_1(A), F_2(A))$ (где A пробегает $\mathrm{Ob}(K_1)$), что для любого $\psi \in \mathrm{Mor}_{K_1}(A, B)$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F_1(A) & \xrightarrow{F_1(\psi)} & F_1(B) \\ {\scriptstyle \varphi(A)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi(B)} \\ F_2(A) & \xrightarrow{F_2(\psi)} & F_2(B) \end{array}$$

Аналогично определяется категория $\mathrm{Cont}(K_1, K_2)$ контравариантных функторов из K_1 в K_2.

Многие утверждения о функторах достаточно доказывать только в случае ковариантных функторов в силу следующего общего приема. Для любой категории K определим *дуальную категорию* K^0, для которой $\mathrm{Ob}(K^0) = \mathrm{Ob}(K)$, $\mathrm{Mor}_{K^0}(A, B) = \mathrm{Mor}_K(B, A)$, а произведение $f \circ g$ в категории K^0 определяется как произведение $g \circ f$ в категории K. Иногда говорят, что K^0 получается из K *обращением стрелок*. Ясно, что контравариантный функтор из K_1 в K_2 — это то же самое, что ковариантный функтор из K_1^0 в K_2 (или из K_1 в K_2^0).

Две категории K_1 и K_2 называют *эквивалентными*, если существуют такие ковариантные функторы $F\colon K_1 \to K_2$, $G\colon K_2 \to K_1$, что функторы $F \circ G$ и $G \circ F$ изоморфны тождественным функторам в категориях $\mathrm{Cov}(K_2, K_2)$ и $\mathrm{Cov}(K_1, K_1)$ соответственно.

Пример. Знаменитые три теоремы Софуса Ли вместе с теоремой Эли Картана по существу утверждают эквивалентность трех категорий: категории односвязных групп Ли, категории локальных групп Ли и категории вещественных алгебр Ли.

Более простой пример: категория дискретных топологических пространств (в которых все подмножества открыты) эквивалентна категории множеств.

Хорошей иллюстрацией к понятию эквивалентности категорий является

Теорема 4. *Если в категории K все объекты изоморфны, то K эквивалентна категории K_0, состоящей из одного объекта $A_0 \in \mathrm{Ob}(K)$ и всех морфизмов из* $\mathrm{Mor}_K(A_0, A_0)$.

Примером такой категории может служить категория n-мерных линейных пространств над данным полем или категория всех групп из p элементов (p — простое число).

Доказательство. Выберем для каждого объекта $A \in \mathrm{Ob}\, K$ фиксированный изоморфизм $\alpha(A)\colon A \to A_0$ и построим функтор $F\colon K \to K_0$ следующим образом: $F(A) = A_0$ для всех $A \in \mathrm{Ob}\, K$; если $\beta \in \mathrm{Mor}(A, B)$, то положим $F(\beta) = \alpha(B) \circ \beta \circ \alpha(A)^{-1} \in \mathrm{Mor}(A_0, A_0)$. Кроме того, обозначим через G функтор вложения K_0 в K. Ясно, что $F \circ G = 1_{K_0}$, $G \circ F = F$. Покажем, что функторы F и 1_K изоморфны. Для этого определим функторные морфизмы $\varphi\colon F \to 1_K$ и $\psi\colon 1_K \to F$ так, чтобы $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = 1$. По определению функторного морфизма, для любого β следующие диаграммы должны быть коммутативны:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\beta"] & B \\ A_0 \arrow[u, "\varphi(A)"] \arrow[r, "F(\beta)"] & A_0 \arrow[u, "\varphi(B)"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\psi(A)"'] & B \arrow[d, "\psi(B)"] \\ A_0 \arrow[r, "F(\beta)"] & A_0 \end{tikzcd}$$

Кроме того, должны выполняться соотношения $\varphi(A) \circ \psi(A) = 1_A$, $\psi(A) \circ \varphi(A) = 1_{A_0}$. Ясно, что этого можно добиться, полагая $\varphi(A) = \alpha(A)^{-1}$, $\psi(A) = \alpha(A)$. Теорема доказана.

ГЛАВА II

ТЕОРИЯ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛА

§ 1. Теория меры

1. Алгебра множеств. Пусть X — некоторое множество. Через $P(X)$ будем обозначать совокупность всех подмножеств множества X.

Определение. *Кольцом подмножеств* множества X называется непустое семейство $R \subset P(X)$, замкнутое относительно операций объединения, пересечения и разности.

В этом случае R замкнуто также относительно операции симметрической разности $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Усиления структуры кольца. 1) *Алгеброй множеств* называется кольцо $R \subset P(X)$, содержащее в качестве элемента все множество X.

2) *σ-кольцом* называется кольцо R, замкнутое относительно операции счетного объединения.

3) *δ-кольцом* называется кольцо, замкнутое относительно операции счетного пересечения.

4) *σ-алгеброй* (соотв. *δ-алгеброй*) называется кольцо, которое одновременно является алгеброй и σ-кольцом (соотв. δ-кольцом).

Ослабление структуры кольца. *Полукольцом* называется семейство $S \subset P(X)$, замкнутое относительно пересечения и обладающее свойством: если A, $B \in S$, то существуют такие $C_1, \ldots, C_n \in S$, что $A \setminus B = C_1 \sqcup C_2 \sqcup \ldots \sqcup C_n$ (символ $\sqcup$ означает *дизъюнктное объединение*, т. е. объединение непересекающихся множеств).

Примеры. 1) Совокупность S всех полуинтервалов вида $[a, b)$ на вещественной прямой является полукольцом, но не кольцом.

2) Если $R_1 \subset P(X_1)$ и $R_2 \subset P(X_2)$ — кольца множеств, то семейство

$$R_1 \times R_2 = \{A \times B \in P(X \times Y) \mid A \in R_1,\ B \in R_2\}$$

является полукольцом (но, вообще говоря, не кольцом). То же верно, если R_1 и R_2 — полукольца (см. задачу 81).

Если S — любое семейство подмножеств X, то среди колец (соотв. σ-колец), содержащих S, имеется минимальное. Оно обозначается $R(S)$ (соотв. $R_\sigma(S)$) и называется *кольцом* (соотв. *σ-кольцом*), *порожденным* S (см. задачу 78).

Пусть A — подмножество в X. *Характеристической функцией* подмножества A называется функция χ_A на X, заданная условием

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in A, \\ 0, & \text{если} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Удобно считать, что значения характеристической функции — не числа, а вычеты по модулю 2. В этом случае будут справедливы равенства (см. задачу 87)

1) $\chi_{A_1 \cap A_2} = \chi_{A_1} \cdot \chi_{A_2}$,

2) $\chi_{A_1 \cup A_2} = \chi_{A_1} + \chi_{A_2} - \chi_{A_1} \cdot \chi_{A_2}$,

3) $\chi_{A_1 \triangle A_2} = \chi_{A_1} + \chi_{A_2}$,

4) $\chi_{A_1 \setminus A_2} = \chi_{A_1} - \chi_{A_1} \cdot \chi_{A_2}$.

Пусть X — топологическое пространство (см. гл. I, § 4), $U \subset P(X)$ — семейство открытых множеств в X. Элементы $R_\delta(U)$ называются *борелевскими подмножествами* в X.

Пример. Множество всех рациональных точек отрезка $[0, 1]$ является борелевским множеством на вещественной прямой.

2. Продолжение меры.

Определение. *Мерой* на полукольце $S \subset P(X)$ называется вещественная неотрицательная функция μ на S, обладающая свойством аддитивности:

$$\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Мера μ называется *счетно-аддитивной* (или *σ-аддитивной*), если она обладает свойством:

$$\mu\left(\coprod_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \tag{1}$$

(Более точно: если все A_k и $A = \coprod_{k=1}^{\infty} A_k$ принадлежат S, то правая часть равенства (1) сходится и ее сумма равна левой части.)

Примеры. 1) Пусть x_0 — фиксированная точка X. Для любого множества $A \subset X$ положим

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x_0 \in A, \\ 0, & \text{если} \quad x_0 \notin A. \end{cases}$$

Это — σ-аддитивная мера на $P(X)$.

2) Пусть S — рассмотренное выше полукольцо полуинтервалов вида $[a, b)$ на $\mathbf{R}$. Положим $\mu([a, b)) = b - a$. Тогда μ — мера на S. Счетная аддитивность этой меры будет установлена ниже.

Теорема 1. *Всякая мера μ' на полукольце S однозначно продолжается до меры μ на кольце $R(S)$. Если исходная мера счетно-аддитивна, то тем же свойством обладает и ее продолжение.*

Доказательство. Воспользуемся тем, что каждое множество $A \in R(S)$ имеет вид $A = \coprod_{k=1}^{n} A_k$ $(A_k \in S)$ (см. задачу 77). Поэтому величина $\mu(A)$ (если она определена) должна равняться $\sum_{k=1}^{n} \mu'(A_k)$. Покажем, что это равенство действительно определяет меру μ на $R(S)$.

1) Корректность определения. Пусть A_k, $B_l \in S$, $\coprod_{l=1}^{m} B_l = \coprod_{k=1}^{n} A_k = A$. Положим $C_{kl} = A_k \cap B_l$. Тогда ясно, что $A_k = \coprod_{l} C_{kl}$, $B_l = \coprod_{k} C_{kl}$. Поэтому $\sum_{k} \mu'(A_k) = \sum_{k,l} \mu'(C_{kl}) = \sum_{l} \mu'(B_l)$.

2) Аддитивность. Пусть $A = \coprod_{k=1}^{n} A_k$ $(A_k \in R(S))$. Положим $A_k = \coprod_{l=1}^{N(k)} C_{kl}$, где $C_{kl} \in S$. Тогда $A = \coprod_{k,l} C_{kl}$ и $\mu(A) = \sum_{k,l} \mu'(C_{kl}) = \sum_{k} \sum_{l=1}^{N(k)} \mu'(C_{kl}) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$. Остается проверить σ-аддитивность продолженной меры μ, если исходная мера σ-аддитивна. Пусть $A = \coprod_{k=1}^{\infty} A_k$ $(A, A_k \in R(S))$. Тогда $A = \coprod_{i=1}^{n} B_i$, $A_k = \coprod_{l=1}^{N(k)} B_{kl}$, где $B_i, B_{kl} \in S$. Положим $C_{ikl} = B_i \cap B_{kl}$. Имеем

$$\mu(A) = \sum_{i} \mu'(B_i) = \sum_{i} \sum_{k,l} \mu'(C_{ikl}) = \sum_{k} \sum_{i,l} \mu'(C_{ikl}) = \sum_{k} \mu(A_k).$$

(Мы воспользовались соотношениями $B_i = \coprod_{k,l} C_{ikl}$, $A_k = \coprod_{i,l} C_{ikl}$ и возможностью менять порядок суммирования в рядах с неотрицательными членами.) Теорема доказана.

Важным свойством счетно-аддитивных мер является *счетная монотонность*: если A, $A_k \in S$ и $A \subset \cup A_k$, то $\mu(A) \leqslant \sum \mu(A_k)$.

Оказывается, счетно-аддитивная мера, заданная на полукольце S, продолжается не только на кольцо $R(S)$ и даже не только на σ-кольцо $R_\sigma(S)$, но на гораздо более широкую совокупность так называемых измеримых множеств.

Определение. Пусть задано множество X, полукольцо $S \subset P(X)$ и σ-аддитивная мера μ на S. Для любого $A \in P(X)$ определим *внешнюю меру* $\mu^*(A)$ равенством

$$\mu^*(A) = \inf \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k), \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad A_k \in S.$$

Назовем подмножество $A \in P(X)$ *измеримым по Лебегу* относительно меры μ, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $B \in R(S)$, что $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$. (В дальнейшем множества, измеримые по Лебегу относительно меры μ, будут для краткости называться просто *измеримыми* или μ-*измеримыми*, если надо подчеркнуть, о какой мере μ идет речь.)

Пусть теперь кольцо $R(S)$ является алгеброй (т. е. содержит максимальный элемент X). В этом случае справедлива

Теорема Лебега. *Совокупность $L(S, \mu)$ измеримых множеств образует σ-алгебру, на которой μ^* является σ-аддитивной мерой.*

Доказательство. Проверим сначала, что для множеств из исходного полукольца S (соотв. $R(S)$) внешняя мера μ^* совпадает с исходной мерой μ' (соотв. с ее продолжением μ). В самом деле, если $A \in R(S)$ и $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, то $\mu(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ в силу счетной монотонности меры μ. Переходя к нижней грани по всем покрытиям, мы получаем отсюда, что $\mu(A) \leqslant \mu^*(A)$. С другой стороны, поскольку $A \in R(S)$, можно представить A в виде $A = \coprod_{k=1}^{n} B_k$, где $B_k \in S$. Поэтому $\mu^*(A) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \mu(A)$. Отметим, что из самого определения внешней меры легко выводится ее счетная монотонность: если $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, то $\mu^*(A) \leqslant \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$.

Оставшуюся часть доказательства теоремы можно кратко описать следующим образом. Элементы кольца $R(S)$ образуют некоторое неполное метрическое пространство, на котором мера μ является равномерно непрерывной функцией. Измеримые множества — это точки пополнения, а мера μ^* — продолжение по непрерывности функции μ (см. задачу 95).

Перейдем к деталям. Определим расстояние между множествами A и B формулой $d(A, B) = \mu^*(A \triangle B)$. Для проверки обычных свойств расстояния полезно отметить, что само множество $A \triangle B$ можно рассматривать как своеобразное «расстояние» между A и B, принимающее значения не в числах, а в множествах. Аксиома треугольника для этого расстояния имеет вид (см. задачу 73)

$$A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (B \triangle C).$$

Отсюда и из монотонности μ^* непосредственно следует обычная аксиома треугольника: $d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(B, C)$. Свойства $d(A, B) = d(B, A)$ и $d(A, B) \geqslant 0$ очевидны. Последнее свойство $d(A, B) = 0 \Rightarrow A = B$, вообще говоря, не выполняется. Стандартный выход из этого затруднения состоит в том, что мы объявляем множества A и B эквивалентными, если $d(A, B) = 0$. Функция d переносится на классы эквивалентных множеств и обладает там всеми свойствами расстояния.

Теперь определение измеримого множества можно сформулировать так: множество A *измеримо*, если оно с любой точностью приближается множествами B из $R(S)$. Другими словами, совокупность $L(S)$ измеримых множеств совпадает с замыканием $R(S)$ в построенном метрическом пространстве. Можно показать (см. задачу 95), что пространство $P(X)$ (точнее, соответствующее факторпространство классов эквивалентных множеств) полно. Поэтому $L(S)$ можно также рассматривать как пополнение $R(S)$.

Прежде всего проверим, что $L(S)$ является алгеброй. Пусть A_1 и A_2 измеримы, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие множества B_1 и B_2 из $R(S)$, что $\mu^*(A_1 \triangle B_1) < \varepsilon$ и $\mu^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon$. Тогда (см. задачу 74) будут справедливы оценки

$$\mu^*((A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2)) < 2\varepsilon,$$

$$\mu^*((A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2)) < 2\varepsilon,$$

$$\mu^*((A_1 \setminus A_2) \triangle (B_1 \setminus B_2)) < 2\varepsilon,$$

что доказывает измеримость множеств $A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2$ и $A_1 \setminus A_2$.

Покажем теперь, что $L(S)$ есть σ-алгебра. Пусть $A_k \in L(S)$ и $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие множества $B_k \in R(S)$, что $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon/2^k$. Положим $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Из включения $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \triangle \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \triangle B_k)$ вытекает, что $\mu^*(A \triangle B) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$. Далее, пусть $B'_k = B_k \setminus (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_{k-1})$ при $k > 1$ и $B'_1 = B_1$. Тогда $B'_k \in R(S)$ и $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B'_k$. Поскольку ряд $\sum_k \mu(B'_k)$ сходится (его частичные суммы ограничены числом $\mu(X)$), существует такой номер N, что $\sum_{k=N+1}^{\infty} \mu(B'_k) < \varepsilon$. Положим $B' = \bigcup_{k=1}^{N} B'_k$. Тогда $B' \in R(S)$ и $\mu^*(B \triangle B') < \varepsilon$. Отсюда $\mu^*(A \triangle B') \leqslant \mu^*(A \triangle B) + \mu^*(B \triangle B') < 2\varepsilon$, что и доказывает измеримость A.

Проверим, что μ^* — счетно-аддитивная мера на $L(S)$.

Лемма. $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \triangle B)$.

Другими словами, функция μ^* равномерно непрерывна относительно расстояния $d(A, B) = \mu^*(A \triangle B)$.

Доказательство вытекает из монотонности μ^* и включений $A \subset B \cup (A \triangle B)$, $B \subset A \cup (A \triangle B)$.

Пусть теперь $A_1, A_2 \in L(S)$ и $A = A_1 \sqcup A_2$. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем B_1 и B_2 из $R(S)$ так, чтобы $d(A_i, B_i) < \varepsilon$ $(i = 1, 2)$. Тогда $d(A, B_1 \cup B_2) < 2\varepsilon$. Поэтому $|\mu^*(A) - \mu^*(B_1 \cup B_2)| < 2\varepsilon$. С другой стороны, $\mu^*(B_1 \cup B_2) = \mu(B_1 \cup B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2) - \mu(B_1 \cap B_2)$. Но $\mu(B_1 \cap B_2) = d(B_1 \cap B_2, \varnothing) = d(B_1 \cap B_2, A_1 \cap A_2) < 2\varepsilon$, значит, $|\mu^*(B_1 \cup B_2) - \mu_1(B_1) - \mu(B_2)| < 2\varepsilon$. Соединяя все полученные и исходные неравенства, получаем, что $|\mu^*(A) - \mu^*(A_1) - \mu^*(A_2)| < 6\varepsilon$. Поскольку это верно для всех $\varepsilon > 0$, это значит, что $\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$, т. е. μ^* аддитивна на $L(S)$.

Наконец, докажем счетную аддитивность μ^* на $L(S)$. Пусть $A = \coprod_{k=1}^{\infty} A_k$. Неравенство $\mu^*(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$ следует из счетной монотонности μ^*. Неравенство $\mu^*(A) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$ получается предельным переходом из неравенства $\mu^*(A) \geqslant \sum_{k=1} \mu^*(A_k)$, которое вытекает из конечной аддитивности и монотонности μ. Теорема доказана.

Условие $X \in R(S)$ оказывается в ряде случаев слишком сильным. Рассмотрим более слабое условие $X \in R_\sigma(S)$. Тогда $X = \coprod_{k=1}^{\infty} X_n$, где $X_n \in S$; таким образом, все пространство является счетным объединением множеств из полукольца. Мера μ в этом случае называется *σ-конечной*.

Определение. Множество A называется *измеримым по Лебегу* относительно σ-конечной меры μ, если измеримы все множества $A \cap X_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. *Мерой* A называется сумма ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap X_i)$, если он сходится, и $+\infty$ в противном случае.

Нетрудно проверить, что измеримые множества по-прежнему образуют σ-алгебру, а определенная выше мера μ^* является σ-аддитивной (с очевидной поправкой: обе части равенства $\mu\left(\coprod A_k\right) = \sum \mu(A_k)$ могут быть бесконечны).

Знакопеременным аналогом мер являются заряды.

Определение. Пусть X — множество и $R \subset P(X)$ — некоторое σ-кольцо. Вещественная (соотв. комплексная) функция ν на R называется *зарядом* (соотв. *комплексным зарядом*), если она счетно-аддитивна в следующем смысле: для любых $A_k \in R$ из того, что $A = \coprod_{k=1}^{\infty} A_k$ принадлежит R, следует, что ряд $\sum \nu(A_k)$ абсолютно сходится и его сумма равна $\nu(A)$ (ср. с задачей 117).

Пример. Любая линейная комбинация σ-аддитивных мер на R с вещественными (соотв. комплексными) коэффициентами является зарядом (соотв. комплексным зарядом).

Оказывается, справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2. *Всякий заряд (соотв. комплексный заряд) ν может быть записан в виде $\nu = \mu_1 - \mu_2$ (соотв. $\nu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$), где μ_k — счетно-аддитивные меры.*

Определение. *Вариацией заряда* ν на множестве A называется величина

$$|\nu|(A) = \sup \sum_k |\nu(A_k)|, \quad A = \coprod_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Пример. Если $\nu=\mu_1-\mu_2$, то $|\nu|(A)\leqslant\mu_1(A)+\mu_2(A)$. Это неравенство превращается в равенство, если меры μ_1 и μ_2 *дизъюнктны* на A (т. е. существует такое разложение $A=A_1\sqcup A_2$, что $\mu_2(A_1)=\mu_1(A_2)=0$).

Теорема 3. *Функция* $|\nu|$ *является счетно-аддитивной мерой на* R. (См. задачу 124.)

3. Конструкции мер. Рассмотрим полукольцо S, состоящее из всех полуинтервалов вида $[a, b)$ на вещественной прямой. Совокупность всех мер на этом полукольце допускает простое описание. А именно, сопоставим каждой мере μ на S функцию F_μ на вещественной прямой $\mathbf{R}$, определенную формулой

$$F_\mu(t)=\begin{cases}\mu([0, t)) & \text{при} \quad t>0,\\ 0 & \text{при} \quad t=0,\\ -\mu([t, 0)) & \text{при} \quad t<0.\end{cases}$$

Очевидно, что функция F_μ — неубывающая. Обратно, если F — неубывающая функция на $\mathbf{R}$, то можно определить меру μ_F на S, полагая $\mu_F([a, b))=F(b)-F(a)$. (Проверка аддитивности μ_F предоставляется читателю.) Соответствие между мерами на S и неубывающими функциями на $\mathbf{R}$ становится взаимно-однозначным, если рассматривать лишь функции с дополнительным условием $F(0)=0$.

Теорема 4. *Для того чтобы мера* μ *на* S *была счетно-аддитивной, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая функция* F *на* $\mathbf{R}$ *была непрерывна слева, т. е.* $F(t-0)=F(t)$ *для всех* $t\in\mathbf{R}$.

Доказательство. Необходимость следует из соотношения $F(t)-F(t-0)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mu([t-\varepsilon, t))=0$. (Ср. с задачей 94.) Для доказательства достаточности предположим, что $[a, b)=\coprod\limits_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k)$. Тогда для любого N справедливо включение $[a, b)\supset\coprod\limits_{k=1}^{N}[a_k, b_k)$ и, следовательно, $\mu([a, b))\geqslant\sum\limits_{k=1}^{N}\mu([a_k, b_k))$ в силу аддитивности и монотонности μ. Устремляя N к бесконечности, получаем $\mu([a, b))\geqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu([a_k, b_k))$. Докажем обратное неравенство. Для любого $\varepsilon>0$ выберем положительные числа $\delta, \delta_1, \delta_2, \ldots$ так, чтобы выполнялись неравенства $F(b)-$

$-F(b-\delta)<\varepsilon$, $F(a_k)-F(a_k-\delta_k)<\varepsilon/2^k$. Это можно сделать, так как F непрерывна слева. Заметим теперь, что отрезок $[a, b-\delta]$ покрывается целиком интервалами $(a_k-\delta_k, b_k)$. Значит, существует такое N, что уже первые N интервалов покрывают этот отрезок*). Отсюда $\mu([a, b-\delta))\leqslant\sum_{k=1}^{N}\mu([a_k-\delta_k, b_k))$, поскольку $[a, b-\delta)\subset$ $\subset[a, b-\delta]\subset\coprod_{k=1}^{N}(a_k-\delta_k, b_k)\subset\coprod_{k=1}^{N}[a_k-\delta_k, \delta_k)$. Вместе с написанными выше неравенствами это дает $\mu([a, b))\leqslant$ $\leqslant\sum_{k=1}^{N}\mu([a_k, b_k))+2\varepsilon$. Теорема доказана.

Отметим важный пример: $F(t)\equiv t$. В этом случае мера на S совпадает с обычной длиной, а ее продолжение μ^* на $L(S)$ называется *мерой Лебега* на $\mathbf{R}$.

Другой пример: пусть $[t]$ — целая часть t, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее t. Положим $F(t)=-[-t]$. Легко проверить, что $F(t)$ непрерывна слева. Соответствующая мера продолжается на все подмножества $\mathbf{R}$ по формуле

$$\mu(A)=\text{число целых точек в } A.$$

Опишем теперь все заряды, определенные на $R_\sigma(S)$, где S — рассмотренное выше полукольцо полуинтервалов. Для каждого заряда ν положим

$$F_\nu(t)=\begin{cases}\nu([0, t)) & \text{при } t>0,\\ 0 & \text{при } t=0,\\ -\nu([t, 0)) & \text{при } t<0.\end{cases}\tag{2}$$

Чтобы описать множество функций F_ν на $\mathbf{R}$, соответствующих зарядам ν, нам понадобится

Определение. *Вариацией* функции f на отрезке $[a, b]$ называется величина

$$\operatorname{Var}_a^b f=\sup\sum_{k=1}^{n-1}|f(\xi_k)-f(\xi_{k+1})|,$$
$$a=\xi_1\leqslant\xi_2\leqslant\ldots\leqslant\xi_n=b,$$

где верхняя грань берется по всем конечным наборам точек $\xi_1, \ldots, \xi_n$ на отрезке $[a, b]$. Множество функций ограниченной вариации обозначается через $V[a, b]$.

*) Здесь используется компактность отрезка (см. гл. III, § 2).

Теорема 5. *Вещественная функция f на отрезке $[a, b]$ имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда она представима в виде разности двух монотонных функций.*

Доказательство. Для монотонных функций вариация совпадает с приращением: $\mathrm{Var}_a^b f = |f(b) - f(a)|$ (см. задачу 181). Поэтому все монотонные функции и их линейные комбинации имеют ограниченную вариацию. Обратно, пусть $\mathrm{Var}_a^b f < \infty$. Положим $\varphi(t) = \mathrm{Var}_a^t f$. Ясно, что φ — неубывающая функция. Кроме того, рассматривая простейший набор точек $\xi_1 = a$, $\xi_2 = b$, мы видим, что $\mathrm{Var}_a^b f \geqslant |f(b) - f(a)|$. Отсюда $\varphi(t_1) - \varphi(t_2) = \mathrm{Var}_{t_1}^{t_2} f \geqslant |f(t_1) - f(t_2)|$ при $t_1 > t_2$. Это значит, что функция $\psi(t) = \varphi(t) - f(t)$ — также неубывающая. Поэтому $f(t) = \varphi(t) - \psi(t)$ — разность двух монотонных функций.

Теорема 6. *Для того чтобы функция F на $\mathbf{R}$ соответствовала некоторому заряду ν по формуле* (2), *необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условиям*:

1) $F(0) = 0$;

2) *F непрерывна слева*;

3) *F имеет ограниченную вариацию на любом отрезке.*

Доказательство. Достаточность следует из теорем 4 и 5. В самом деле, представим F в виде разности двух неубывающих функций F_+ и F_-. Ясно, что если F удовлетворяет условиям 1) и 2), то F_+ и F_- можно выбрать так, чтобы они тоже удовлетворяли этим условиям.

По теореме 4 функции F_+, F_- соответствуют некоторым счетно-аддитивным мерам μ_+, μ_-. Тогда функция $F = F_+ - F_-$ соответствует заряду $\mu_+ - \mu_-$.

Необходимость условия 1) очевидна, необходимость 2) доказывается так же, как и в теореме 4. Докажем необходимость 3). Для этого заметим, что по определению вариации заряда ν справедливо равенство $\mathrm{Var}_a^b F_\nu = |\nu|([a, b))$. Таким образом, нужное нам утверждение является частным случаем общей теоремы о конечности вариации заряда (см. задачу 124). Теорема доказана

Пусть X и Y — два множества, $S \subset P(X)$ и $T \subset P(Y)$ — два полукольца, а μ и ν — меры на S и T. Рассмотрим полукольцо $S \times T \subset P(X \times Y)$, состоящее из множеств вида $A \times B$, $A \in S$, $B \in T$ (см. задачу 81), и определим на нем функцию $\mu \times \nu$, полагая $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \times \nu(B)$. Легко проверить, что эта функция аддитивна.

Теорема 7. *Если меры μ и ν счетно-аддитивны, то этим свойством обладает и мера $\mu \times \nu$.*

Доказательство этой теоремы мы отложим до построения теории интегрирования (см. гл. II, § 3).

Ясно, что аналогичная теорема верна для произведения любого конечного числа мер. Оказывается, что при небольших добавочных ограничениях она справедлива и для бесконечного произведения.

Пусть задано некоторое множество индексов A и для каждого $\alpha \in A$ заданы непустое множество X_α, полукольцо $S_\alpha \subset P(X_\alpha)$ и счетно-аддитивная мера μ_α на S_α. Предположим, что для всех $\alpha \in A$, кроме конечного числа, полукольцо S_α содержит X_α и $\mu_\alpha(X_\alpha) = 1$. Положим $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ и назовем *цилиндрическими* подмножества $Y \subset X$ вида

$$Y = \prod_{\alpha \in A_0} Y_\alpha \times \prod_{\alpha \in A \setminus A_0} X_\alpha, \tag{3}$$

где A_0 — любое конечное подмножество в A, содержащее все индексы α, для которых $\mu(X_\alpha) \neq 1$, а Y_α — любое подмножество из S_α. Для Y вида (3) положим

$$\mu(Y) = \prod_{\alpha \in A_0} \mu_\alpha(Y_\alpha).$$

Теорема 8. *Цилиндрические подмножества образуют полукольцо S, на котором μ является счетно-аддитивной мерой.*

Доказательство см., например, в книге [29].

Есть один важный случай, когда счетная аддитивность меры-произведения (и даже более общих мер) устанавливается весьма просто.

Лемма. *Пусть $A = \mathbf{N}$ и все X_n $(n \in \mathbf{N})$ — конечные множества. В этом случае соотношение $Y = \coprod_k Y_k$ для непустых цилиндрических множеств возможно, лишь если сумма конечна.*

Следствие. *Всякая аддитивная мера на полукольце S счетно-аддитивна.*

Доказательство леммы. Мы введем в $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ такую метрику, что все цилиндрические множества будут открыты, замкнуты и компактны. Утверждение леммы будет тогда следовать из леммы о конечном покрытии. Искомая метрика может быть задана так.

Будем записывать элемент $x \in X$ в виде последовательности $\{x_n\}$, $x_n \in X_n$. Положим

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x = y, \\ 1/k, & \text{где } k \text{ — наименьший номер, для} \\ & \text{которого } x_k \neq y_k. \end{cases}$$

Ясно, что замкнутый шар радиуса $1/k$ с центром в точке x совпадает с открытым шаром радиуса $1/(k+1)$ и является цилиндрическим множеством. Отсюда следует открытость и замкнутость цилиндрических множеств. Компактность их следует из компактности X, которая в свою очередь легко доказывается предъявлением конечной ε-сети для любого $\varepsilon > 0$ и тривиальной проверкой полноты X. (По поводу компактности см. гл. III, § 3, п. 2.)

Пример. На множестве X бесконечных десятичных дробей вида $x = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots$ можно определить меру описанным выше способом, полагая $X_k = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $S_k = P(X_k)$, $\mu_k(Y) = \frac{1}{10} \operatorname{card} Y$, где $\operatorname{card} Y$ — число элементов множества Y. Можно проверить, что лебеговское продолжение этой меры по существу совпадает с мерой Лебега на отрезке $[0, 1]$.

Очень интересный пример меры возникает из физических приложений (броуновское движение). В пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ рассмотрим подмножества вида

$$X(t_1, \ldots, t_n; \Delta_1, \ldots, \Delta_n) = \{x \in C[a, b] \mid x(t_k) \in \Delta_k\},$$

где $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n$ — точки отрезка $[a, b]$, а $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ — интервалы на вещественной оси. Легко проверить, что такие множества образуют полукольцо S. Оказывается, формула

$$\mu(X(t_1, \ldots, t_n; \Delta_1, \ldots, \Delta_n)) = \pi^{\frac{1-n}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} (t_{k+1} - t_k)^{-1/2} \times$$

$$\times \int\limits_{\Delta_1} \ldots \int\limits_{\Delta_n} \exp\left\{-\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\tau_{k+1} - \tau_k)^2}{(t_{k+1} - t_k)}\right\} d\tau_1 \ldots d\tau_n$$

задает на S счетно-аддитивную меру. При $n = 1$ эту формулу надо понимать так:

$$\mu(X(t, \Delta)) = \int\limits_{\Delta} d\tau = |\Delta|.$$

Лебеговское продолжение меры μ называется *мерой Винера* на $C[a, b]$. Эта мера обладает многими интересными свойствами. Отметим, например, что функции, дифференцируемые хотя бы в одной точке отрезка $[a, b]$, образуют множество нулевой меры.

Физическая интерпретация меры Винера (точнее, связанной с ней меры μ_0, см. задачу 179) — вероятность того, что частица, совершающая броуновское блуждание по прямой, в моменты $t_1, t_2, \ldots, t_n$ находится в интервалах $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ соответственно. Таким образом, график движения этой частицы с вероятностью 1 является нигде не дифференцируемой непрерывной функцией на $[a, b]$ (см. [6*]).

§ 2. Измеримые функции

1. Свойства измеримых функций. Пусть задано множество X и σ-алгебра $\mathfrak{A} \subset P(X)$. Вещественная функция f на X называется $\mathfrak{A}$-*измеримой*, если для любого $c \in \mathbf{R}$ множество

$$E_c(f) = \{x \in X:\ f(x) < c\}$$

(так называемое *лебеговское множество* функции f) принадлежит $\mathfrak{A}$. Можно показать (см. задачу 125), что в этом определении знак $<$ можно заменить любым из знаков $\leqslant, >, \geqslant$ (но не знаком $=$).

Комплекснозначная функция $f(x) = u(x) + iv(x)$ называется $\mathfrak{A}$-*измеримой*, если таковыми являются ее вещественная часть $u(x)$ и мнимая часть $v(x)$. Более общо: вектор-функция $\xi(x)$ со значениями в конечномерном вещественном линейном пространстве L называется $\mathfrak{A}$-*измеримой*, если для некоторого базиса $e_1, \ldots, e_n$ в L в разложении $\xi(x) = \xi_1(x)e_1 + \ldots + \xi_n(x)e_n$ все коэффициенты $\xi_i(x)$ являются $\mathfrak{A}$-измеримыми функциями. Это определение не зависит от выбора базиса в L (см. задачу 142).

Часто, когда речь идет о пространстве X с мерой μ, определенной на σ-алгебре $\mathfrak{A} \subset P(X)$, вместо «$\mathfrak{A}$-измеримая» говорят «$\mu$-*измеримая*» или просто *измеримая* функция. Основные свойства измеримых функций описывает

Теорема 9. *Множество измеримых функций образует алгебру, замкнутую относительно сходимости почти всюду.*

Доказательство. Если функция f измерима, то функции λf, $|f|$ и f^2 измеримы в силу следующей общей леммы.

Лемма. *Пусть f — измеримая, а g — непрерывная функции. Тогда композиция $g(f(x))$ измерима.*

Доказательство вытекает из утверждения задачи 128. Пусть функции f_1 и f_2 измеримы. Докажем измеримость суммы f_1+f_2. Для этого заметим, что лебеговское множество $E_c(f_1+f_2)$ можно представить в виде объединения счетного числа измеримых множеств:

$$E_c(f_1+f_2)=\bigcup_{r\in Q}(E_r(f_1)\cap E_{c-r}(f_2)),$$

где Q — множество рациональных чисел.

Далее, измеримость произведения f_1f_2 следует из вышесказанного и из тождества $f_1f_2=\frac{(f_1+f_2)^2}{4}-\frac{(f_1-f_2)^2}{4}$. Аналогично, тождество $\max(f_1, f_2)=\frac{1}{2}(f_1+f_2)+\frac{1}{2}|f_1-f_2|$ показывает, что максимум двух, а значит, и любого конечного числа измеримых функций измерим. Пусть $\{f_n\}$ — невозрастающая последовательность измеримых функций и f — ее предел. Тогда множество $E_c(f)$ является объединением множеств $E_c(f_n)$ и, следовательно, измеримо. Таким образом, алгебра измеримых функций замкнута относительно монотонных предельных переходов. Но, как известно, всякий предельный переход можно заменить двумя монотонными. А именно,

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\max\{f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots, f_{n+k}(x)\}.$$

Очевидно, что если f_1 измерима, а f_2 совпадает с f_1 почти всюду, то f_2 также измерима. Теорема доказана.

2. Сходимость измеримых функций. Для измеримых функций можно определить несколько разных типов сходимости. Наиболее употребительны следующие три типа:

1) *Равномерная сходимость* на множестве X обозначается $f_n\rightrightarrows f$ и означает, что

$$\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

2) *Сходимость почти всюду* (относительно меры μ) обозначается $f_n\xrightarrow{\text{п.в.}}f$ и означает, что

$$f_n(x)\to f(x) \quad \text{при} \quad n\to\infty$$

для всех точек x вне некоторого подмножества меры нуль.

3) *Сходимость по мере* обозначается $f_n\xrightarrow{\mu}f$ и означает, что для любого $\varepsilon>0$ мера множества $A_n(\varepsilon)=$

$=\{x\in X\colon |f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}$ стремится к нулю при $n\to\infty$.

Перечисленные типы сходимости связаны между собой. Ясно, что из равномерной сходимости вытекает сходимость почти всюду и сходимость по мере.

Теорема 10. *Если последовательность f_n сходится к f почти всюду на X и $\mu(X)<\infty$, то $f_n\xrightarrow{\mu}f$.*

Доказательство. Пусть $A_n(\varepsilon)=\{x\in X\colon |f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}$. Положим $B_n(\varepsilon)=\bigcup\limits_{k\geqslant n}A_k(\varepsilon)$. Ясно, что $B_1(\varepsilon)\supset B_2(\varepsilon)\supset\ldots\supset B_n(\varepsilon)\supset\ldots$ Пусть $B(\varepsilon)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n(\varepsilon)$. Если $x\in B(\varepsilon)$, то x принадлежит $A_n(\varepsilon)$ для сколь угодно больших номеров n. Отсюда следует, что $f_n(x)$ не сходится к $f(x)$ при $n\to\infty$. Значит, множество $B(\varepsilon)$ имеет меру нуль. Но $\mu(B(\varepsilon))=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(B_n(\varepsilon))$, так как $\mu(X)<\infty$ (см. задачу 94). Так как $\mu(A_n(\varepsilon))\leqslant\mu(B_n(\varepsilon))$, мы видим, что $\mu(A_n(\varepsilon))\to 0$ при $n\to\infty$, т. е. $f_n\xrightarrow{\mu}f$. Теорема доказана.

Итак, равномерная сходимость влечет сходимость почти всюду, а сходимость почти всюду влечет (на множестве конечной меры) сходимость по мере. Обратные утверждения неверны (см. задачи 143, 144, 148). Интересный и важный факт состоит в том, что эти утверждения становятся верными, если «подправить» последовательность $\{f_n\}$ или множество X. А именно, имеет место

Теорема Егорова. *Если $f_n\xrightarrow{\text{п.в.}}f$ на X и $\mu(X)<\infty$, то для любого $\sigma>0$ существует такое подмножество $E_\sigma\subset X$, что $\mu(E_\sigma)<\sigma$ и $f_n\rightrightarrows f$ вне E_σ.*

Теорема 11. *Если $f_n\xrightarrow{\mu}f$ на X, то существует такая подпоследовательность $\{n_k\}$ натурального ряда, что*

$$f_{n_k}\xrightarrow{\text{п.в.}}f \quad \textit{на } X \quad \textit{при} \quad k\to\infty.$$

Доказательство теоремы Егорова. Воспользуемся обозначениями $A_n(\varepsilon)$ и $B_n(\varepsilon)$ из доказательства теоремы 10. Мы видели, что для любого $\varepsilon>0$ $\mu(B_n(\varepsilon))\to 0$ при $n\to\infty$. Поэтому для любого k найдется такой номер $N(k)$, что $\mu(B_{N(k)}(1/k))<\sigma/2^k$. Возьмем в качестве E_σ множество $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B_{N(k)}(1/k)$. Тогда $\mu(E_\sigma)<\sigma$ и при $n > N(k)$ справедливо равенство $|f_n(x) - f(x)| < 1/k$ вне E_σ.

Доказательство теоремы 11. В тех же обозначениях, что и выше, выберем для каждого k такой номер n_k, что $\mu\left(A_{n_k}(1/k)\right) < 1/2^k$. Покажем, что подпоследовательность n_k — искомая. В самом деле, множество тех точек x, в которых $f_{n_k}(x)$ не стремится к $f(x)$ при $k \to \infty$, содержится в $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_{n_k}(1/k)$ и, следовательно, имеет меру нуль.

§ 3. Интеграл

1. Интеграл Лебега. Пусть заданы множество X, σ-алгебра $\mathfrak{A} \subset P(X)$ и счетно-аддитивная мера μ на $\mathfrak{A}$. Измеримая (вещественная или комплексная) функция f на X называется *простой*, если она принимает не более чем счетное множество значений. Такая функция может быть записана в виде счетной линейной комбинации характеристических функций:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{A_k}(x), \tag{4}$$

причем можно предполагать, что все A_k измеримы и $X = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

Замечание. Если все значения c_k попарно различны, то измеримость A_k следует из измеримости f. Кроме того, при этом условии представление f в виде (4) однозначно. Однако мы предпочитаем не требовать различия c_k.

Функция f вида (4) называется *суммируемой* на X, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \mu(A_k). \tag{5}$$

Можно проверить, что это определение, как и следующее ниже определение интеграла, не зависит от выбора представления (4) (см. задачу 165). Пусть $A \subset \mathfrak{A}$; определим *интеграл* $f(x)$ по множеству A формулой

$$\int_A f(x)\, d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mu(A \cap A_k). \tag{6}$$

Сходимость этого ряда вытекает из суммируемости f.

Совокупность всех суммируемых простых функций на X мы будем обозначать $S(X, \mu)$ или просто $S(X)$, если из контекста ясно, о какой мере μ идет речь. Когда нужно подчеркнуть, что мы рассматриваем вещественные или комплексные функции, мы будем использовать обозначения $S^{\mathbf{R}}(X)$, $S^{\mathbf{C}}(X)$. Основные свойства простых функций описывает

Теорема 12. 1) *Множество $S(X)$ является линейным пространством.*

2) *Соответствие* $f \mapsto \int\limits_A f(x)\,d\mu$ *является линейным функционалом на $S(X)$.*

3) *Соответствие* $A \mapsto \int\limits_A f(x)\,d\mu$ *является зарядом на $\mathfrak{A}$.*

4) *Величина* $d_1(f, g) = \int\limits_X |f(x) - g(x)|\,d\mu(x)$ *обладает всеми свойствами расстояния, кроме, быть может, отделимости.*

5) *Справедлива оценка* $\left|\int\limits_A f\,d\mu - \int\limits_A g\,d\mu\right| \leqslant d_1(f, g)$ *для всех $f, g \in S(x)$ и всех $A \in \mathfrak{A}$.*

Доказательство. Утверждения 1), 2), 4) и 5) выводятся непосредственно из определения (ср. с задачей 162). Докажем 3). Если f — характеристическая функция некоторого множества $B \in \mathfrak{A}$, то соответствие $A \to \int\limits_A f\,d\mu = \mu(A \cap B)$ является счетно-аддитивной мерой и, следовательно, зарядом на $\mathfrak{A}$. В силу задачи 110 аналогичное утверждение верно для конечных линейных комбинаций характеристических функций и их пределов в смысле расстояния d_1. Теорема доказана.

В дальнейшем мы будем отождествлять функции, совпадающие почти всюду, как правило, не оговаривая этого особо. После такого отождествления множество $S(X)$ превращается в метрическое пространство с расстоянием d_1. Легко убедиться, что это пространство может быть неполно (см. задачу 166). Как мы увидим ниже, пополнение $S(X, \mu)$ допускает явную реализацию в виде некоторого пространства функций на X (точнее, в виде классов эквивалентности таких функций).

Определение. Функция f на X называется *суммируемой по мере* μ, если существует такая последовательность $\{f_n\} \subset S(X, \mu)$, что

1) последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна в $S(X, \mu)$ в смысле расстояния d_1;

2) $f_n \to f$ почти всюду относительно меры μ на X.

Ясно, что если функция f суммируема, а g эквивалентна f, то g также суммируема (достаточно рассмотреть ту же самую последовательность $\{f_n\}$). Пространство классов эквивалентности суммируемых функций обозначается $L_1(X, \mu)$.

Покажем, что если $\mu(X) < \infty$, то всякая ограниченная измеримая функция f принадлежит $L_1(X, \mu)$. В самом деле, пусть $E_{kn}(f) = \{x \in X: k/n \leqslant f(x) < (k+1)/n\}$. Положим $f_n(x) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{n} \chi_{E_{kn}}(x)$. (Фактически, в силу ограниченности f, эта сумма конечна.) Ясно, что $|f_n(x) - f(x)| < 1/n$, так что $f_n \rightrightarrows f$ и тем более $f_n \xrightarrow{\text{п в}} f$. Кроме того, $\{f_n\}$ фундаментальна, так как $d_1(f_n, f_m) = \int\limits_X |f_n(x) - f_m(x)|\, d\mu \leqslant \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\mu(X)$. (Мы пользуемся утверждением в) задачи 162.)

Полученный результат допускает обобщение. Назовем измеримую функцию f на X *существенно ограниченной*, если найдется такая константа C, что $|f(x)| \leqslant C$ почти всюду на X.

Наименьшая из таких констант (докажите ее существование!) называется *существенной верхней гранью* функции $|f|$ и обозначается $\operatorname{ess\,sup} |f(x)|$. Величина $d_\infty(f, g) = \operatorname{ess\,sup} |f(x) - g(x)|$ обладает всеми свойствами расстояния, кроме отделимости. Соответствующее фактор-пространство, состоящее из классов эквивалентности существенно ограниченных функций, обозначается $L_\infty(X, \mu)$. Это пространство полно относительно расстояния d_∞. Суммируемость существенно ограниченной функции на множестве конечной меры доказывается так же, как и суммируемость ограниченной функции. Поэтому при $\mu(X) < \infty$ мы имеем включение

$$L_\infty(X, \mu) \subset L_1(X, \mu).$$

Построим теперь интеграл для суммируемых функций. Для этого нам понадобится

Лемма. *Если $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ — две фундаментальные последовательности в $S(X, \mu)$, которые почти всюду сходят-*

ся к одной и той же функции $h \in L_1(X, \mu)$, *то* $d_1(f_n, g_n) \to$ $\to 0$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть $\varphi_n = f_n - g_n$. Тогда $\{\varphi_n\}$ — фундаментальная последовательность в $S(X, \mu)$ и $\varphi_n \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$. Мы должны доказать, что $\int\limits_X |\varphi_n|\, d\mu \to 0$. Предположим, что это не так. Тогда найдется такое число $\delta > 0$ и такая подпоследовательность $\{n_k\}$, что $\int\limits_X |\varphi_{n_k}|\, d\mu \geqslant \delta$ для всех k. Произведя перенумерацию и умножив все функции на δ^{-1}, мы можем считать, что для исходной последовательности выполняются неравенства $\int\limits_X |\varphi_n|\, d\mu \geqslant 1$ для всех n.

Теперь выберем из $\{\varphi_n\}$ так называемую «быстро сходящуюся» подпоследовательность $\{\varphi_{n_k}\}$, обладающую свойством

$$d_1(\varphi_{n_k}, \varphi_{n_{k+1}}) \leqslant 1/2^k.$$

Для этого достаточно в качестве n_k взять тот номер, начиная с которого члены последовательности $\{\varphi_n\}$ отстоят друг от друга не более чем на $1/2^k$. Произведя еще раз перенумерацию, мы можем считать, что выполняются оценки $d_1(\varphi_n, \varphi_{n+1}) \leqslant 1/2^{n+2}$. Вспомним теперь, что φ_1 — простая функция вида (4):

$$\varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{A_k}(x).$$

Поскольку $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|\, \mu(A_k) = \int\limits_X |\varphi_1(x)|\, d\mu(x) \geqslant 1$, существует такой номер N, что $\sum\limits_{k=1}^{N} |c_k|\, \mu(A_k) \geqslant 3/4$. Положим $A = \coprod\limits_{k=1}^{N} A_k$, и пусть $C = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant N} |c_k| = \max\limits_{x \in A} |\varphi_1(x)|$. По теореме Егорова в множестве A можно указать такое подмножество E, что $\mu(E) < 1/(4C)$ и $\varphi_n \rightrightarrows 0$ на множестве $B = A \setminus E$. Тогда $\int\limits_B |\varphi_n|\, d\mu \to 0$. С другой стороны,

$$\int\limits_B |\varphi_1|\, d\mu \geqslant \int\limits_A |\varphi_1|\, d\mu - \int\limits_E |\varphi_1|\, d\mu \geqslant \frac{3}{4} - \frac{1}{4C} \cdot C = \frac{1}{2},$$

$$\int\limits_B |\varphi_n|\, d\mu - \int\limits_B |\varphi_{n+1}|\, d\mu \leqslant d_1(\varphi_n, \varphi_{n+1}) \leqslant \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Поэтому

$$\int\limits_B |\varphi_n|\,d\mu \geqslant \int\limits_B |\varphi_1|\,d\mu - \sum_{k=1}^{n-1}\left|\int\limits_B |\varphi_k|\,d\mu - \int\limits_B |\varphi_{k+1}|\,d\mu\right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k+2}} > \frac{1}{4}.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Следствие. *Функционал* $I_A(f) = \int\limits_A f(x)\,d\mu(x)$, *определенный для любого* $A \in \mathfrak{A}$ *на пространстве* $S(X, \mu)$, *продолжается по непрерывности до функционала на пространстве* $L_1(X, \mu)$.

В самом деле, если $f \in L_1(X, \mu)$ и $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность в $S(X, \mu)$, сходящаяся к f почти всюду, то можно положить

$$I_A(f) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_A f_n(x)\,d\mu(x).$$

В силу доказанной леммы предел в правой части не зависит от выбора последовательности $\{f_n\}$.

Построенный таким образом функционал называется *интегралом Лебега* от суммируемой функции f по множеству A и обозначается $\int\limits_A f(x)\,d\mu(x)$.

Теорема 13. 1) *Множество* $L_1(X, \mu)$ *является линейным пространством.*

2) *Для любого множества* $A \in \mathfrak{A}$ *соответствие* $f \mapsto \int\limits_A f(x)\,d\mu(x)$ *является линейным функционалом на* $L_1(X, \mu)$.

3) *Для любой функции* $f \in L_1(X, \mu)$ *величина* $\nu(A) = \int\limits_A f(x)\,d\mu(x)$ *является зарядом на* $\mathfrak{A}$.

4) *Величина* $d_1(f, g) = \int\limits_X |f-g|\,d\mu$ *обладает на* $L_1(X, \mu)$ *всеми свойствами расстояния.*

Доказательство. Пусть f и g — суммируемые функции, $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ — сходящиеся к ним почти всюду фундаментальные последовательности простых функций. Тогда последовательность $\{\alpha f_n + \beta g_n\}$ фундаментальна и сходится почти всюду к $\alpha f+\beta g$. Это доказывает утверждение 1). Утверждение 2) следует из $\int\limits_A (\alpha f+\beta g)\,d\mu = \lim\limits_n \int\limits_A (\alpha f_n+\beta g_n)\,d\mu = \alpha \lim\limits_n \int\limits_A f_n\,d\mu + \beta \lim\limits_n \int\limits_A g_n\,d\mu = \alpha \int\limits_A f\,d\mu + \beta \int\limits_A g\,d\mu$. Утверждение 3) доказывается так же, как аналогичное утверждение теоремы 12. Наконец, 4) выводится переходом к пределу из соответствующих свойств d_1 в пространстве $S(X, \mu)$.

Замечание 1. Ниже мы покажем, что пространство $L_1(X, \mu)$ полно относительно расстояния d_1. Отметим, что во многих вопросах функционального анализа пространство $L_1(X, \mu)$ естественно возникает как пополнение того или иного класса функций относительно интегральной метрики d_1. Тот факт, что точки этого пространства можно реализовать классами эквивалентности суммируемых функций, играет подчиненную роль.

Замечание 2. Распространение интеграла с простых функций на суммируемые можно проводить многими способами (см. по этому поводу задачи 171—173).

2. Функции ограниченной вариации и интеграл Лебега — Стилтьеса. Пусть φ и f — две вещественные функции на отрезке $[a, b]$. Для любого разбиения $T=(t_0=a<t_1<\ldots<t_{n-1}<t_n=b)$ отрезка $[a, b]$ и любого набора точек $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, удовлетворяющего условиям $t_{i-1}\leqslant \xi_i \leqslant t_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ составим *интегральную сумму Римана — Стилтьеса*:

$$S(T, \xi, f, \varphi)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,[\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]. \tag{7}$$

Назовем величину $\lambda(T)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(t_i-t_{i-1})$ *диаметром* разбиения T. Если существует предел

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} S(T, \xi, f, \varphi), \tag{8}$$

то он называется *интегралом Римана — Стилтьеса* и обозначается

$$\int\limits_a^b f(t)\,d\varphi(t).$$

Классическая теорема Стилтьеса утверждает, что для существования этого интеграла *достаточно*, чтобы функция φ имела ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$, а функция f была непрерывна на этом отрезке. Отметим, что в частном случае, когда $\varphi(t)=t$, интеграл Римана — Стилтьеса превращается в обычный интеграл Римана.

Условие ограниченности вариации для φ является естественным: иначе уже для кусочно-постоянных функций f, принимающих значения ± 1, выражение (7) будет неограниченным. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать в качестве φ только функции с ограниченной вариацией. Далее, если функции f и φ имеют общую точку разрыва, то легко убедиться, что предел (8) не существует. Если же функция f непрерывна в точке разрыва функции φ, то значение φ в этой точке не влияет на величину (7) (см. задачу 194). Значит, мы можем в дальнейшем считать функцию φ непрерывной слева. Каждой такой функции φ соответствует некоторый заряд ν (см. теорему 6).

Интеграл функции f по этому заряду называется *интегралом Лебега — Стилтьеса*. Мы будем обозначать его $\int\limits_a^b f(x)\,d\nu(x)$. Справедлива

Теорема 14. *Интеграл Римана — Стилтьеса* $\int\limits_a^b f(x)\,d\varphi(x)$ *существует тогда и только тогда, когда f ограничена и почти всюду непрерывна на $[a, b]$ относительно меры $|\nu|$. В этом случае определен также интеграл Лебега — Стилтьеса* $\int\limits_a^b f(x)\,d\nu(x)$ *и его значение совпадает со значением интеграла Римана — Стилтьеса.*

Доказательство. Необходимость. Представим φ в виде суммы непрерывной функции φ_0 и функции скачков φ_1 (см. задачу 186). Тогда заряд ν также будет суммой зарядов ν_0 и ν_1. Уже отмечалось, что функция f должна быть непрерывной в точках разрыва φ. Поэтому множество Ω_f точек разрыва f имеет нулевую $|\nu_1|$-меру. Покажем, что оно имеет нулевую $|\nu_0|$-меру. Пусть $\omega_f[\alpha, \beta]$ означает *колебание функции f на отрезке* $[\alpha, \beta]$, а $\omega_f(x)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\omega_f[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ — *колебание f в точке x*. Обозначим через $\Omega_f(\delta)$ множество точек, где колебание функции f не меньше δ:

$$\Omega_f(\delta)=\{x\in[a, b]:\ \omega_f(x)\geqslant\delta\}.$$

Ясно, что $\Omega_f = \bigcup\limits_{\delta>0} \Omega_f(\delta) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_f\left(\frac{1}{n}\right)$. Поэтому достаточно доказать, что каждое из множеств $\Omega_f(\delta)$ при $\delta > 0$ имеет $|\nu_0|$-меру нуль. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Существует настолько мелкое разбиение $T = (t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b)$, что

$$\sum_{i=1}^{n} |\varphi_0(t_i) - \varphi_0(t_{i-1})| > |\nu_0|([a, b]) - \varepsilon.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \{|\nu_0|([t_{i-1}, t_i]) - |\varphi_0(t_i) - \varphi_0(t_{i-1})|\} < \varepsilon. \tag{9}$$

Измельчая, если нужно, разбиение T, мы можем считать, что справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_f[t_{i-1}, t_i] |\varphi_0(t_i) - \varphi_0(t_{i-1})| < \varepsilon\delta, \tag{10}$$

так как функция f интегрируема, а выражение в левой части (10) можно представить в виде

$$\sup_{\xi_1, \xi_2} [S(T, \xi_1, f, \varphi) - S(T, \xi_2, f, \varphi)].$$

Рассмотрим те слагаемые в сумме (10), которые соответствуют отрезкам разбиения $[t_{i-1}, t_i]$, содержащим внутри себя точки множества $\Omega_f(\delta)$. Для этих слагаемых величина $\omega_f[t_{i-1}, t_i]$ ограничена снизу константой δ. Поэтому из (10) следует, что

$$\Sigma' |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| < \varepsilon,$$

где символ Σ' означает, что сумма распространяется на указанные выше отрезки разбиения.

Из (9) следует, что $\Sigma' |\nu_0|([t_{i-1}, t_i]) < 2\varepsilon$, т. е. суммарная $|\nu_0|$-мера указанных отрезков меньше 2ε.

Но эти отрезки покрывают все множество $\Omega_f(\delta)$, кроме, быть может, конечного числа точек, совпавших с точками разбиения T. Так как $|\nu_0|$-мера точки равна нулю (функция φ_0 непрерывна), мы видим, что $|\nu_0(\Omega_f(\delta))| < 2\varepsilon$.

Достаточность. Пусть заряд ν представлен в виде $\mu_+ - \mu_-$, где μ_+ и μ_- — конечные меры на отрезке $[a, b]$ и $|\nu| = \mu_+ + \mu_-$.

Если $|\nu|(\Omega_f) = 0$, то $\mu_+(\Omega_f) = \mu_-(\Omega_f) = 0$. С другой стороны, если функция φ μ_+-интегрируема и μ_--интегрируема, то она и ν-интегрируема. Это показывает, что в доказательстве достаточности мы можем ограничиться случаем положительного заряда (или монотонной функции φ). В этом случае, как и в обычной теории интеграла Римана, мы можем воспользоваться критерием Дарбу: для интегрируемости f достаточно, чтобы нижняя грань по T выражений в левой части (10) была равна нулю.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Обозначим через M колебание f на $[a, b]$ и через V вариацию функции φ на $[a, b]$. Множество $\Omega_f(\delta)$ при любом $\delta > 0$ имеет меру нуль. Кроме того, это множество замкнуто и, следовательно, компактно. Значит, его можно покрыть конечным числом отрезков общей μ-меры $\leqslant \varepsilon/(2M)$. На оставшейся части отрезка $[a, b]$ колебание f во всех точках меньше δ. Легко показать (аналог теоремы о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке), что существует такое разбиение этого множества на конечное число отрезков, что колебание f на каждом из отрезков разбиения будет $\leqslant \delta$. Выберем в качестве δ величину $\varepsilon/(2V)$. Тогда для построенного разбиения T левую часть (10) можно оценить константой $M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2V} \cdot V = \varepsilon$. Теорема доказана.

Для практического вычисления интегралов Римана — Стилтьеса и Лебега — Стилтьеса удобно пользоваться свойствами, описанными в задачах 191, 194, 195, 196.

3. Свойства интеграла Лебега. Некоторые важные свойства интеграла Лебега были уже описаны выше (см. теорему 13); мы будем постоянно пользоваться этими результатами. Здесь мы рассмотрим свойства интеграла, связанные с предельными переходами, произведениями мер и дифференцированием зарядов.

Теорема 15. (*Теорема Лебега об ограниченной сходимости.*) *Пусть $\{f_n\}$ — последовательность μ-суммируемых функций на множестве X, ограниченная по модулю фиксированной неотрицательной μ-суммируемой на X функцией φ и сходящаяся μ-почти всюду на X к функции f.*

Тогда f μ-суммируема на X и

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f\, d\mu$$

для любого μ-измеримого множества A.

Доказательство. Положим для любого измеримого множества A $\nu(A) = \int\limits_A \varphi\, d\mu(x)$. По теореме 13 ν — конечная мера на X.

Лемма. *Если функция g измерима и ограничена на X, то функция $f = \varphi g$ μ-суммируема и $\int\limits_A f(x)\, d\mu(x) = \int\limits_A g(x)\, d\nu(x)$ для любого μ-измеримого множества A.*

Доказательство. Рассмотрим множество M тех функций g на X, для которых утверждение леммы справедливо. Очевидно, M содержит все характеристические функции измеримых множеств. В самом деле, если $g = \chi_B$, то

$$\int\limits_A f\, d\mu = \int\limits_A \varphi \chi_B d\mu = \int\limits_{A \cap B} \varphi\, d\mu = \nu(A \cap B) = \int\limits_A g\, d\nu.$$

Значит, M содержит и конечные линейные комбинации таких функций. Пусть теперь g — любая ограниченная измеримая функция на X. Положим $g_-(x) = \frac{1}{n}[ng(x)]$, $g_+(x) = g_-(x) + \frac{1}{n}$. Тогда $g_\pm(x) \in M$ и $g_-(x) \leqslant g(x) \leqslant g_+(x)$. Поэтому $\int\limits_A g_- d\nu = \int\limits_A \varphi g_-(x)\, d\mu(x) \leqslant \int\limits_A \varphi g d\mu \leqslant \int\limits_A \varphi g_+ d\mu = \int\limits_A g_+ d\nu$. При $n \to \infty$ первый и последний члены этого соотношения стремятся к $\int\limits_A g\, d\nu$. Значит, $g \in M$, и лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 15. Определим функции

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x)/\varphi(x), & \text{если } \varphi(x) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \varphi(x) = 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x)/\varphi(x), & \text{если } \varphi(x) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

По предположению теоремы, функции $g_n(x)$ обладают свойствами $|g_n(x)| \leqslant 1$, $g_n(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} g$. Мы должны доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n(x)\, d\mu = \int\limits_A f\, d\mu$. В силу леммы, это равносильно утверждению $\lim\limits_{n\to 0} \int\limits_A g_n(x)\, d\nu = \int\limits_A g\, d\nu$. Таким образом, мы свели доказательство теоремы Лебега к частному случаю, когда мера пространства X конечна, а рассматриваемые функции ограничены по модулю одной и той же константой. В этом случае утверждение теоремы без труда выводится из теоремы Егорова.

Теорема 16. (*Теорема Б. Леви о монотонной сходимости.*) *Пусть* $\{f_n\}$ — *монотонно возрастающая последовательность* μ-*суммируемых функций на множестве* X. *Положим* $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ (*допуская значение* $+\infty$).

1) *Если интегралы* $\int\limits_X f_n(x)\,d\mu(x)$ *ограничены в совокупности, то* $f(x)$ *суммируема и* $\int\limits_X f(x)\,d\mu(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X f_n(x)\,d\mu(x)$.

2) *Если* $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X f_n(x)\,d\mu(x) = +\infty$, *то функция* $f(x)$ *несуммируема.*

Доказательство. 1) Вычитая из всех f_n и из f функцию f_1, мы можем считать, что $f_n \geqslant 0$ и $f \geqslant 0$. Пусть E — множество, где $f(x)$ принимает значение $+\infty$. Тогда $E = \bigcap\limits_N \bigcup\limits_n E_{Nn}$, где $E_{Nn} = \{x \in X\colon\ f_n(x) \geqslant N\}$. Имеем $\int\limits_{E_{Nn}} f_n(x)\,d\mu \geqslant N\cdot\mu(E_{Nn})$. Так как $\int\limits_X f_n(x)\,d\mu \leqslant C$ для всех n, мы получаем $\mu(E_{Nn}) \leqslant C/N$; отсюда $\mu(E) = \lim\limits_{N\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_{Nn}) = 0$.

Итак, функция f почти всюду конечна. Докажем, что она суммируема. Проще всего воспользоваться результатом задачи 173. Пусть A — такое множество конечной меры, на котором $f(x)$ ограничена сверху. Тогда

$$\int\limits_A f(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_A f_n(x)\,d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty}\int\limits_X f_n(x)\,d\mu(x) \leqslant C,$$

что и доказывает суммируемость f. Оставшаяся часть утверждения 1) и утверждение 2) вытекают из теоремы Лебега об ограниченной сходимости.

Лемма Фату. *Если последовательность* $\{f_n\}$ μ-*суммируемых неотрицательных функций обладает свойствами:*

1) $\int\limits_X f_n(x)\,d\mu \leqslant C$ *для всех* n;

2) $f_n(x) \to f(x)$ *почти всюду на* X,

то f — μ-*суммируемая функция и* $\int\limits_X f\,d\mu \leqslant C$.

Замечание. Сходимость $\int\limits_X f_n d\mu \to \int\limits_X f d\mu$ в условиях леммы Фату может не иметь места.

Доказательство. Заменим предельный переход $f_n \to f$ двумя монотонными предельными переходами. А именно, положим

$$g_{kn}(x) = \min\{f_n(x),\ f_{n+1}(x),\ \ldots,\ f_{n+k}(x)\},$$
$$g_n(x) = \lim_{k\to\infty} g_{kn}(x).$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$ для почти всех x. Из монотонности интеграла следует, что $\int\limits_X g_n d\mu \leqslant C$, а из теоремы 16 вытекает, что f суммируема и $\int\limits_X f\, d\mu \leqslant C$, что и доказывает лемму.

Выведем из полученных свойств интеграла упоминавшуюся выше полноту пространства $L_1(X, \mu)$.

Теорема 17. *Пространство* $L_1(X, \mu)$ *полно.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность в $L_1(X, \mu)$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что $\{f_n\}$ обладает свойством $d_1(f_n, f_{n+1}) < 1/2^n$. Положим $\varphi_1 = f_1$, $\varphi_n = f_n - f_{n-1}$ при $n \geqslant 2$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)|$ по теореме 16 сходится всюду к некоторой почти всюду конечной суммируемой функции $\varphi(x)$. Значит, ряд $\sum \varphi_n(x)$ сходится почти всюду к некоторой функции $f(x)$. Отсюда вытекает, что $f_n \to f$ почти всюду на X. Кроме того, все функции f_n ограничены по модулю функцией $\varphi(x)$. По теореме об ограниченной сходимости (см. теорему 15) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X |f_n(x) - f(x)|\, d\mu = 0$. Значит, $f_n \to f$ в пространстве $L_1(X, \mu)$. Теорема доказана.

Еще одно полезное свойство интеграла Лебега — его так называемая *абсолютная непрерывность.*

Теорема 18. *Пусть* $f \in L_1(X, \mu)$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что из* $\mu(A) < \delta$ *следует* $\left|\int\limits_A f(x)\, d\mu\right| < \varepsilon$.

Доказательство. Утверждение теоремы означает по существу непрерывность отображения $I_f\colon A \to \int\limits_A f(x)\, d\mu$, действующего из метрического пространства $L(X)$ измеримых множеств (см. задачу 95) в $\mathbf{R}$. Если χ — характеристическая функция измеримого подмножества конечной меры в X, то отображение I_χ, очевидно, непрерывно. То же самое верно для I_f, если f — линейная комбинация характеристических функций. Далее, если $f_n \to f$ в $L_1(X, \mu)$, то $I_{f_n} \to I_f$ равномерно на $L(X)$. Остается воспользоваться известным фактом: равномерный предел непрерывных функций является непрерывной функцией. Теорема доказана.

Вернемся теперь к доказательству теоремы 7 § 1, п. 3, о произведении мер. Пусть (X, S, μ), (Y, T, ν) означают то же, что и в указанной теореме. Для каждого множества $C = A \times B$ из полукольца $S \times T$ положим $f_C(x) = \chi_A(x)\nu(B)$. Ясно, что $(\mu \times \nu)(C) = \mu(A) \times \nu(B) = \int\limits_X f_C(x)\,d\mu$. Если множество C представлено в виде $C = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} C_k$, $C_k \in S \times T$, то из счетной аддитивности ν вытекает равенство $f_C(x) = \sum\limits_k f_{C_k}(x)$. По теореме Лебега об ограниченной сходимости отсюда следует равенство

$$\int\limits_X f_C(x)\,d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_X f_{C_k}(x)\,d\mu(x),$$

и значит,

$$(\mu \times \nu)(C) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mu \times \nu)(C_k).$$

Теорема 7 доказана.

Изучим подробнее отображение $C \mapsto f_C$, определенное выше. Распространим его на кольцо $R(S \times T)$ по формуле

$$f_{\coprod\limits_{k=1}^{n} C_k} = \sum_{k=1}^{n} f_{C_k}.$$

Легко проверяется оценка

$$\| f_{C_1} - f_{C_2} \|_{L_1(X,\mu)} \leqslant (\mu \times \nu)(C_1 \vartriangle C_2).$$

(В самом деле, если $C_1 = A_1 \sqcup B$, $C_2 = A_2 \sqcup B$, где $B = C_1 \cap C_2$, то $f_{C_1} - f_{C_2} = f_{A_1} - f_{A_2}$, $f_{C_1 \vartriangle C_2} = f_{A_1} + f_{A_2}$.)

Поэтому соответствие $C \mapsto f_C$ продолжается до отображения всей σ-алгебры $(\mu \times \nu)$-измеримых множеств

$L(X\times Y)$ в $L_1(X, \mu)$ по формуле $f_{\lim\limits_n C_n} = \lim\limits_n f_{C_n}$ (первый предел рассматривается в $L(X\times Y)$, второй — в $L_1(X, \mu)$).

Лемма. *Пусть* $C \in L(X\times Y)$. *Для почти всех* $x \in X$ *множество* $C_x \subset Y$, *задаваемое формулой* $C_x = \{y \in Y: (x, y) \in C\}$, *измеримо по мере* ν *и* $\nu(C_x) = f_C(x)$.

Доказательство. Для элементарных множеств (т. е. множеств из кольца $R(S\times T)$) это верно по определению f_C. Далее, если $\{C^{(n)}\}$ — монотонная последовательность множеств, то в силу счетной аддитивности меры ν справедливо равенство $\nu\left(\lim\limits_n C_x^{(n)}\right) = \lim\limits_n \nu\left(C_x^{(n)}\right)$. Поэтому свойство $\nu(C_x) = f_C(x)$ сохраняется при монотонных предельных переходах. Но всякое измеримое множество C может быть с точностью до множества меры нуль получено из элементарных множеств двумя монотонными предельными переходами. В самом деле, пусть C_n — элементарное множество, аппроксимирующее C с точностью до 2^{-n} по мере $\mu\times\nu$. Положим $\tilde{C} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C_{n+k}$. Тогда $(\mu\times\nu)\, C \Big\backslash \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C_{n+k} = 0$, $(\mu\times\nu)\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C_{n+k} \diagdown C\right) \leqslant 2^{1-n}$. Отсюда $(\mu\times\nu)(\tilde{C} \triangle C) = 0$.

Значит, f_C и $f_{\tilde{C}}$ совпадают почти всюду и, следовательно, для почти всех $x \in X$ $f_C(x) = f_{\tilde{C}}(x) = \nu\left(\tilde{C}_x\right) = \nu(C_x)$. Лемма доказана.

Теорема 19. *Пусть* μ *и* ν — σ*-конечные меры,* C — $(\mu\times\nu)$*-измеримое подмножество в* $X\times Y$. *Положим* $C_x = \{y \in Y: (x, y) \in C\}$. *Тогда для* μ*-почти всех* $x \in X$ *множество* C_x ν*-измеримо, функция* $f_C(x) = \nu(C_x)$ μ*-измерима и справедливо равенство*

$$(\mu\times\nu)(C) = \int\limits_X f_C(x)\, d\mu(x), \tag{11}$$

в котором обе части могут одновременно принимать значение $+\infty$.

Доказательство. Если множество C имеет конечную меру, то утверждения теоремы вытекают из доказанной выше леммы и из того факта, что равенство (11) сохраняется при переходе к пределу (слева в пространстве $L(X\times Y)$, справа в пространстве $L_1(X, \mu)$).

Если мера множества C бесконечна, то существует возрастающее семейство подмножеств конечной меры $C_n \subset C$, для которого $\cup C_n = C$ и $(\mu\times\nu)(C_n) \to \infty$. Тогда

$f_C(x) = \lim\limits_n f_{C_n}(x)$ и

$$\int\limits_X f_{C_n}(x)\,d\mu = (\mu \times \nu)(C_n) \to \infty.$$

Поэтому f_C измерима и несуммируема. Теорема доказана.

Эта теорема, в частности, обосновывает хорошо известный способ вычисления площадей плоских фигур (соответственно объемов пространственных тел) с помощью интегрирования длин (соответственно площадей) их сечений.

Замечание 1. Поскольку пространства (X, μ) и (Y, ν) входят в условие теоремы 19 симметрично, заключение теоремы останется верным, если поменять их местами. Таким образом,

$$(\mu \times \nu)(C) = \int\limits_Y \mu\left(C'_y\right) d\nu\,'y), \tag{11'}$$

где $C'_y = \{x \in X\colon\ (x,\ y) \in C\}$. Отсюда следует также, что

$$\int\limits_X \nu\,(C_x)\,d\mu\,(x) = \int\limits_Y \mu\left(C'_y\right) d\nu\,'y). \tag{12}$$

Замечание 2. Аналогичная теорема справедлива для произведения любого конечного числа пространств. В случае трех пространств (X, μ), (Y, ν), (Z, λ) она имеет вид

$$(\mu \times \nu \times \lambda)(C) =$$

$$= \int\limits_{X \times Y} \lambda\,(C_{x,y})\,d\,(\mu \times \nu)(x,\ y) = \int\limits_Z (\mu \times \nu)(C_z)\,d\lambda\,(z), \tag{13}$$

где

$$C_{x,\,y} = \{z \in Z\colon\ (x,\ y,\ z) \in C\},$$
$$C_z = \{(x,\ y) \in X \times Y\colon\ (x,\ y,\ z) \in C\}.$$

Теорема Фубини. *Пусть $f(x,\ y)$ — суммируемая функция на произведении пространств (X, μ) и (Y, ν). Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *Для μ-почти всех $x \in X$ функция $f(x,\ y)$ суммируема на Y и ее интеграл по Y является суммируемой функцией на X.*

2) *Для ν-почти всех $y \in Y$ функция $f(x,\ y)$ суммируема на X, а ее интеграл по X является суммируемой функцией на Y.*

3) *Справедливы равенства*

$$\int\limits_{X\times Y} f(x, y)\, d(\mu\times\nu)(x, y) =$$

$$= \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y)\, d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x, y)\, d\mu(x)\right) d\nu(y). \quad (14)$$

4) *Для неотрицательных* $(\mu\times\nu)$*-измеримых функций существование одного из повторных интегралов в* (14) *влечет суммируемость* f *на* $X\times Y$.

Доказательство. Разложение $f = f_+ \to f_-$ сводит доказательство к случаю неотрицательной функции. Рассмотрим произведение пространств (X, μ), (Y, ν), $(\mathbf{R}, \lambda)$, где $\lambda = dz$ — обычная мера Лебега, и множество $C\subset X\times\times Y\times\mathbf{R}$, заданное условием

$$C = \{(x, y, z)\in X\times Y\times\mathbf{R}\colon 0\leqslant z\leqslant f(x, y)\}.$$

Применим к этому случаю соотношение (13). Имеем

$$C_{xy} = \{z\in\mathbf{R}\colon 0\leqslant z\leqslant f(x, y)\};\quad \lambda(C_{xy}) = f(x, y),$$

$$C_x = \{(y, z)\in Y\times\mathbf{R}\colon 0\leqslant z\leqslant f(x, y)\};$$

$$(\nu\times\lambda)(C_x) = \int\limits_Y f(x, y)\, d\nu(y).$$

Отсюда непосредственно вытекают все утверждения теоремы.

Отметим существенность условий суммируемости f в пп. 1), 2), 3) и условия неотрицательности в п. 4).

Определение. Пусть заданы множество X, σ-алгебра $\mathfrak{A}\subset P(X)$, σ-конечная мера μ и конечный заряд ν на $\mathfrak{A}$. Заряд ν называется *абсолютно непрерывным* относительно μ, если из условия $\mu(A) = 0$ следует $\nu(A) = 0$. Два заряда ν_1 и ν_2 называются *эквивалентными*, если условие $|\nu_1|(A) = 0$ равносильно условию $|\nu_2|(A) = 0$.

Теорема Радона—Никодима. *Всякий конечный заряд* ν, *абсолютно непрерывный относительно меры* μ, *имеет вид*

$$\nu(A) = \int\limits_A f(x)\, d\mu(x), \quad (15)$$

где f — *некоторая функция из* $L_1(X, \mu)$. *Функция* f (*как элемент пространства* $L_1(X, \mu)$) *однозначно определяется зарядом* ν.

Доказательство. Для любого рационального числа r положим $\nu_r = \nu - r\mu$. В силу результата задачи 122 множество X представляется в виде $A_r^+ \sqcup A_r^-$ так, что заряд ν_r неотрицателен на A_r^+ и неположителен на A_r^-. Для любого вещественного числа c положим $A_c = \bigcup_{r>c} A_r^+$. Ясно, что $\{A_c\}$ — убывающее семейство измеримых множеств: $A_{c_1} \subset A_{c_2}$ при $c_1 > c_2$. Покажем, что $A_{-\infty} = \bigcap_c A_c$ и дополнение к $A_\infty = \bigcup_c A_c$ имеют меру нуль. В самом деле, если $A \subset A_{-\infty}$, то $\nu_r(A) \geqslant 0$ для всех r, что возможно лишь при $\mu(A) = 0$. Если же $A \subset X \setminus A_\infty$, то $\nu_r(A) \leqslant 0$ для всех r, что также возможно лишь при $\mu(A) = 0$. Далее, семейство $\{A_c\}$ по построению непрерывно справа: $A_c = \bigcup_{\varepsilon>0} A_{c+\varepsilon}$. Поэтому существует такая функция f на X, что $A_c = \{x \in X\colon f(x) > c\}$. Функция f измерима, так как все множества A_c измеримы по построению.

Пусть теперь E — любое множество конечной меры. Тогда (см. задачу 163)

$$\int_E f(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_k \frac{k}{n}\,\mu\left(E \cap A_{\frac{k}{n}} \setminus A_{\frac{k+1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_k \frac{k+1}{n}\,\mu\left(E \cap A_{\frac{k}{n}} \setminus A_{\frac{k+1}{n}}\right).$$

С другой стороны, по определению A_c, справедливы оценки

$$\frac{k}{n}\,\mu\left(E \cap A_{\frac{k}{n}} \setminus A_{\frac{k+1}{n}}\right) \leqslant \nu\left(E \cap A_{\frac{k}{n}} \setminus A_{\frac{k+1}{n}}\right) \leqslant \frac{k+1}{n}\,\mu\left(E \cap A_{\frac{k}{n}} \setminus A_{\frac{k+1}{n}}\right).$$

Чтобы доказать суммируемость f на E, положим $E = E_+ \sqcup E_-$, где для всех $x \in E_+$ $f(x) \geqslant 0$, а для всех $x \in E_-$ $f(x) < 0$. Проведенное рассуждение показывает, что $\int_{E_+} f\,d\mu = \nu(E_+) < \infty$, $\int_{E_-} f\,d\mu = \nu(E_-) > -\infty$. Таким образом, $f \in L_1(E, \mu)$. Это доказывает (15) для множеств конечной меры. Действительно,

$$\sum_k \nu\left(E \cap \left(A_{\frac{k}{n}} \setminus A_{\frac{k+1}{n}}\right)\right) = \nu\left(E \cap \tilde{X}\right) = \nu(E),$$

так как ν абсолютно непрерывен, а $\mu(X \setminus \tilde{X}) = 0$. Теперь из конечности заряда ν (см. задачу 120) вытекает суммируемость и справедливость (15) в общем случае. Единственность f (как элемента $L_1(X, \mu)$) следует из результата задачи 168. Теорема доказана.

Следствие. *Если μ — мера на X, ν — конечный заряд, абсолютно непрерывный по мере μ, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $\mu(A) < \delta$ следует $|\nu|(A) < \varepsilon$.*

В самом деле, по теореме Радона — Никодима существует такая функция $f \in L_1(X, \mu)$, что $\nu(A) = \int\limits_A f\, d\mu$. Тогда $|\nu|(A) = \int\limits_A |f|\, d\mu$ и утверждение вытекает из теоремы 18.

ГЛАВА III

ЛИНЕЙНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. Нормированные пространства

1. Основные определения. Наиболее интересные и полезные математические понятия получаются, когда на одном и том же множестве вводят несколько структур, согласованных между собой. Пусть, например, на множестве L заданы структура линейного пространства (вещественного или комплексного) и структура метрического пространства. Естественные условия согласования состоят в том, чтобы выполнялись соотношения:

1) $d(x, y) = d(x + a, y + a)$ для любого $a \in L$;

2) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ для любого числа λ из основного поля $K (= \mathbf{R}$ или $\mathbf{C})$.

Из первого условия видно, что расстояние $d(x, y)$, т. е. функция на $L \times L$, полностью определяется функцией $p(x) = d(0, x)$ на L, а именно $d(x, y) = p(x - y)$.

Функция p обладает следующими свойствами, вытекающими из 1), 2) и из свойств расстояния:

3) $p(x) \geqslant 0$, причем $p(x) = 0$ только при $x = 0$;

4) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$;

5) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$.

Такие функции получили название *нормы*, а линейные пространства, снабженные нормой,— название *нормиро-*

ванного пространства. Каждое нормированное пространство является метрическим, а значит, и топологическим пространством. Тем самым к нормированным пространствам применимы методы и алгебры и анализа, что и объясняет богатство теории этих пространств и большое число их приложений.

Определение. *Банаховым* пространством называется полное нормированное пространство.

Это понятие, введенное в 1931 г. львовским математиком Стефаном Банахом, быстро превратилось в рабочий инструмент, используемый почти во всех разделах математики. С него начинается история функционального анализа как самостоятельной области. Изучение банаховых пространств и линейных операторов в них составляет основу линейного функционального анализа и продолжается до сих пор. Кроме того, в банаховых пространствах справедливы теоремы об обратной и неявной функциях, на которые опираются многие результаты нелинейного функционального анализа.

Приведем основные примеры нормированных и банаховых пространств.

Начнем с конечномерных пространств. Самым известным примером банахова пространства является пространство $l_2(n, K)$, $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. Оно состоит из всех векторов $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, а норма в нем определяется формулой

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}. \tag{1}$$

Если $K = \mathbf{R}$, а $n = 1$, 2 или 3, мы получаем хорошо известные из элементарной геометрии евклидову прямую, плоскость или пространство.

Естественным обобщением этого примера является пространство $l_p(n, K)$. Оно также состоит из векторов $x \in K^n$, а норма имеет вид

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}. \tag{2}$$

При $p \to \infty$ выражение в правой части имеет предел, равный

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|. \tag{2'}$$

Оказывается, величина $\|x\|_p$ обладает свойствами нормы, когда p принадлежит сегменту $[1, \infty]$, включая концы. Доказательство этого утверждения не очевидно и приведено в решении задачи 217.

Пространство $l_p(n, K)$ допускает бесконечномерные обобщения. Простейшее из них — пространство $l_p(K)$, состоящее из всех последовательностей $\{x_n\}$ в K со свойством $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty$. (Для $p=\infty$ обозначим через $l_\infty(K)$ пространство ограниченных последовательностей в K.)

Положим

$$\|\{x_n\}\|_p=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p} \quad \text{для } 1\leqslant p<\infty, \tag{3}$$

$$\|\{x_n\}\|_\infty=\sup_n|x_n| \qquad \text{для } p=\infty. \tag{3'}$$

Оказывается (см. задачи 218, 221), что $l_p(K)$ — банаховы пространства для всех $p\in[1, \infty]$.

Пусть теперь X — пространство с мерой μ. Обозначим через $L_p(X, \mu)$ $(1\leqslant p<\infty)$ пространство классов эквивалентности измеримых функций (две функции эквивалентны, если они совпадают почти всюду по мере μ) на X, для которых p-я степень суммируема по мере μ.

Положим для $f\in L_p(X, \mu)$

$$\|f\|_p=\left(\int_X|f(x)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p}. \tag{4}$$

Определение пространства $L_\infty(X, \mu)$ несколько сложнее. Оно состоит из всех существенно ограниченных измеримых функций на X с нормой

$$\|f\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_X|f|. \tag{4'}$$

Пространства $L_p(X, \mu)$ также являются банаховыми при $1\leqslant p\leqslant\infty$.

Еще один важный пример. Пусть X — любой компакт, $C(X, K)$ — пространство непрерывных K-значных функций на X (здесь, как обычно, $K=\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$) с нормой

$$\|f\|=\max_{x\in X}|f(x)|. \tag{5}$$

Из основных свойств компактов вытекает, что правая часть в (5) существует. Легко проверяется, что она обладает свойством нормы. Кроме того (см. задачу 219), пространство $C(X, K)$ оказывается банаховым. Символ K часто опускают. Так, $C[a, b]$ означает пространство непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ с вещественными или комплексными значениями в зависимости от контекста.

Большой запас нормированных (но, вообще говоря, не банаховых) пространств получается, если рассматривать линейные подпространства одного из введенных выше пространств. Отметим среди них подпространство $l_p^0(K)$ финитных последовательностей в $l_p(K)$ (т. е. последовательностей, у которых лишь конечное число элементов отличны от нуля) и подпространство $\mathscr{P}[a, b] \subset C[a, b]$, состоящее из многочленов от одного переменного x с нормой

$$|P| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |P(x)|.$$

2. Сопряженные пространства. Основным объектом изучения являются не сами нормированные пространства, а *операторы* в них, т. е. отображения одного пространства в другое. Среди них особую роль играют линейные непрерывные функционалы.

Определение. *Линейным непрерывным функционалом* на нормированном пространстве L называют линейное непрерывное отображение L в основное поле K.

Совокупность всех линейных непрерывных функционалов на L обозначается L' и называется *сопряженным пространством* к L. В дальнейшем элементы L' будут называться просто функционалами.

Ясно, что если L — линейное пространство над K, то L' — также линейное пространство над K: линейные непрерывные отображения можно складывать и умножать на числа. Кроме того, в L' можно ввести норму, полагая

$$\| f \|_{L'} = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\| x \|_L} \tag{6}$$

(ср. с задачей 229), где $\|x\|_L$ означает норму элемента $x \in L$.

Теорема 1. *Для любого нормированного пространства L сопряженное пространство L' полно (и, следовательно, является банаховым).*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность в L'. Из определения нормы (6) вытекает полезное неравенство

$$|f(x)| \leqslant \| f \|_{L'} \cdot \| x \|_L. \tag{7}$$

Отсюда видно, что для любого $x \in L$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ фундаментальна и, следовательно, имеет предел, который мы обозначим $f(x)$. Линейность построенной функции $x \to f(x)$ получается предельным переходом из линейности f_n. Докажем непрерывность f. Для этого воспользуемся следующим утверждением, представляющим самостоятельный интерес.

Теорема 2. 1) *Непрерывность линейного функционала f на нормированном пространстве L равносильна его ограниченности на единичном шаре этого пространства.*

2) *Справедливо равенство*

$$\|f\|_{L'} = \sup_{\|x\|_L \leqslant 1} |f(x)|. \tag{8}$$

Последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна; поэтому последовательность $\|f_n\|_{L'}$ ограничена. Значит, ограничены значения $f_n(x)$ на единичном шаре пространства L, а стало быть и значения предельной функции $f(x)$. Это доказывает, что $f \in L'$. Далее, для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n и m справедливо неравенство $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$. Поэтому для x из единичного шара $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем, что $\|f_n - f\| < \varepsilon$ для достаточно большого n. Тем самым $f_n \to f$ в L' и теорема 2 доказана.

Линейные нормированные пространства и линейные непрерывные операторы в них образуют категорию N, а банаховы пространства — подкатегорию B в N. Соответствие $L \to L'$ можно продолжить до контравариантного функтора из N в B. А именно, каждому оператору A: $L_1 \to L_2$ поставим в соответствие *сопряженный оператор* A': $L_2' \to L_1'$, действующий по формуле

$$(A'f)(x) = f(Ax), \tag{9}$$

где $f \in L_2'$, $x \in L_1$.

Для любого нормированного пространства L существует естественное отображение его во второе сопряженное пространство $L'' = (L')'$: каждый элемент $x \in L$ задает функционал F_x на L' по формуле $F_x(f) = f(x)$, это отображение является изометрическим вложением (см. теорему 8). Если оно является изоморфизмом на все L'', то пространство L называется рефлексивным.

3. Операторы в нормированных пространствах. Совокупность линейных непрерывных операторов из нормированного пространства L_1 в нормированное пространство L_2 обозначим $\mathscr{L}(L_1, L_2)$. Ясно, что $\mathscr{L}(L_1, L_2)$ —

линейное пространство над основным полем K. Введем в $\mathscr{L}(L_1, L_2)$ норму, полагая

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_{L_2}}{\|x\|_{L_1}}. \tag{10}$$

Заметим, что это определение является обобщением (6), поскольку при $L_2 = K$ $\mathscr{L}(L_1, L_2)$ превращается в L_1'. Полезным следствием формулы (10) является неравенство

$$\|Ax\|_{L_2} \leqslant \|A\|_{\mathscr{L}(L_1, L_2)} \cdot \|x\|_{L_1}, \tag{11}$$

обобщающее (7). Индексы у норм в этом неравенстве часто опускаются (обычно их легко восстановить из контекста), и неравенство (11) приобретает легко запоминающийся вид $\|Ax\| \leqslant \|A\|\,\|x\|$.

Теоремы 1 и 2 для линейных функционалов обобщаются на случай линейных операторов. А именно, справедливы

Теорема 3. *Если L_1 — нормированное, а L_2 — банахово пространство, то $\mathscr{L}(L_1, L_2)$ — банахово пространство.*

Теорема 4. *Пусть L_1 и L_2 — нормированные пространства.*

1) *Линейный оператор A из L_1 в L_2 непрерывен тогда и только тогда, когда ограничены в L_2 его значения на единичном шаре в L_1.*

2) *Справедливо равенство*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\|. \tag{12}$$

Доказательства этих теорем полностью аналогичны доказательствам теорем 1 и 2. Мы оставляем их читателю.

Замечание. Линейный оператор A, для которого ограничена правая часть в (12), называется *ограниченным*. Не следует путать этот термин с ограниченностью A как функции из L_1 в L_2 (в этом смысле линейный оператор никогда не бывает ограниченным, если только он не нулевой).

Помимо обычных свойств нормы в линейном пространстве операторная норма обладает полезным мультипликативным свойством: если L_1, L_2, L_3 — нормированные пространства, $A = \mathscr{L}(L_2, L_3)$, $B = \mathscr{L}(L_1, L_2)$, то $AB \in \mathscr{L}(L_1, L_3)$ и

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|. \tag{13}$$

4. Конструкции банаховых пространств. Приведем теперь несколько конструкций, позволяющих строить новые банаховы пространства из имеющихся.

1. Пополнение любого нормированного пространства является банаховым пространством.

2. Если L — банахово пространство, а L_0 — его замкнутое подпространство, то L_0 само является банаховым пространством.

3. Пусть L_0 — замкнутое подпространство в банаховом пространстве L, $L_1 = L/L_0$ — соответствующее факторпространство. Тогда L_1 является банаховым пространством относительно нормы $\|x\|_{L_1} = \inf\limits_{y \in x} \|y\|_L$. (См. задачи 256, 257.)

4. Пусть L_1 и L_2 — два банаховых пространства, $L_1 \otimes L_2$ — их алгебраическое *тензорное произведение*. (Напомним определение $L_1 \otimes L_2$ (см. также задачу 56). Пусть $L_1 \square L_2$ — совокупность всех формальных линейных комбинаций символов $x \square y$, где $x \in L_1$, $y \in L_2$; $L_1 \circ L_2$ — подпространство в $L_1 \square L_2$, порожденное выражениями вида

а) $(x_1 + x_2) \square y - x_1 \square y - x_2 \square y$,

б) $x \square (y_1 + y_2) - x \square y_1 - x \square y_2$,

в) $\lambda x \square \mu y - \lambda\mu (x \square y)$; $\lambda, \mu \in K$.

Тогда $L_1 \otimes L_2 = (L_1 \square L_2)/(L_1 \circ L_2)$. Если $x \in L_1$, $y \in L_2$, то класс эквивалентности, содержащий $x \square y$, обозначают $x \otimes y$.)

Замечание. Не следует думать, что каждый элемент пространства $L_1 \otimes L_2$ имеет вид $x \otimes y$ (см., например, задачу 262).

Если L_1 конечномерно и имеет базис $e_1, \ldots, e_n$, то, как легко проверить, каждый элемент $a \in L_1 \otimes L_2$ однозначно записывается в виде $\sum\limits_{k=1}^{n} e_k \otimes y_k$. Если L_2 также конечномерно и имеет базис $f_1, \ldots, f_m$, то элементы $e_i \otimes f_j$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$ образуют базис в $L_1 \otimes L_2$. В $L_1 \otimes L_2$ можно различными способами вводить норму. При этом естественно потребовать, чтобы эта норма p обладала свойством $p(x \otimes y) = p_1(x) p_2(y)$, где $x \in L_1$, $y \in L_2$, а p_1 и p_2 — нормы в пространствах L_1 и L_2 соответственно. Такие нормы называются *кросс-нормами*.

Заметим теперь, что пространство $L_1' \otimes L_2'$ естественно отображается в $(L_1 \otimes L_2)'$: элементу $f_1 \otimes f_2 \in L_1' \otimes L_2'$ соответствует линейный функционал f на $L_1 \otimes L_2$, определяемый формулой $f(x \otimes y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$. Потребуем от нормы p в $L_1 \otimes L_2$ выполнения условия $p'(f) = p_1'(f_1) \times \times p_2'(f_2)$, где p', p_1', p_2' — нормы в пространствах $(L_1 \otimes L_2)'$, L_1', L_2' соответственно. Такие нормы называют *равномерными кросс-нормами*. Оказывается, что среди всех кросс-норм есть наибольшая — она обозначается $p_1 \widehat{\otimes} p_2$, а среди равномерных кросс-норм есть наименьшая — она обозначается $p_1 \underset{\smile}{\otimes} p_2$. Пополнения $L_1 \otimes L_2$ по этим нормам обозначаются $L_1 \widehat{\otimes} L_2$ и $L_1 \underset{\smile}{\otimes} L_2$ соответственно.

5. Если L_1 и L_2 — банаховы пространства, то в их прямой сумме $L_1 \oplus L_2$ можно определить норму формулой

$$\|x_1 \oplus x_2\| = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2.$$

Полученное пространство также будет банаховым. Отметим, что топологически эквивалентное (но не изометричное) пространство можно получить, если положить

$$\|x_1 \oplus x_2\| = \sup(\|x_1\|_1, \|x_2\|_2).$$

§ 2. Линейные топологические пространства

1. Топология, выпуклость и полунормы. Мы будем рассматривать линейные пространства L над полями $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$. В тех случаях, когда утверждение не зависит от выбора поля, мы будем вместо $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ писать K. Если A и B — два подмножества в L, а λ и μ — два числа из K, то через $\lambda A + \mu B$ мы будем обозначать множество элементов $z \in L$ вида $\lambda x + \mu y$, где $x \in A$, $y \in B$.

Определения. *Отрезком* (соотв. *интервалом*) в L с концами в точках x и y называется совокупность точек $z \in L$ вида $z = \tau x + (1-\tau) y$ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ (соотв. $0 < \tau < 1$).

Множество $E \subset L$ называется *выпуклым*, если оно вместе с любыми двумя точками содержит целиком отрезок с концами в этих точках.

Для любого множества $E \subset L$ существует наименьшее выпуклое множество, его содержащее (см. задачу 281). Оно обозначается $\mathrm{co}(E)$ и называется *выпуклой оболочкой* множества E. Множество $E \subset L$ называется *уравновешенным*, если для любого $\alpha \in K$, $|\alpha| \leqslant 1$, справедливо включение $\alpha E \subset E$.

Множество $E \subset L$ называется *поглощающим*, если $\bigcup\limits_{\lambda \in K} \lambda E = L$.

Полунормой называется функция p на L, принимающая неотрицательные значения (допускается значение $p(x)=\infty$) и обладающая свойствами:

1) $p(\lambda x)=|\lambda|p(x)$, $\lambda\in K$, $x\in L$. Считается, что $0\cdot\infty=0$ (однородность);

2) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$ (полуаддитивность).

Из условия 1) следует, что $p(0)=0$.

Нормой называется такая полунорма, которая для любого ненулевого $x\in L$ принимает конечное ненулевое значение.

Единичным шаром для полунормы p называется множество $B_p=\{x\in L\colon\ p(x)\leqslant 1\}$.

Функционалом Минковского множества $B\subset L$ называется функция $p_B(x)=\inf\limits_{\lambda>0,\,x\in\lambda B}\lambda$ (если $x\notin\lambda B$ ни при каком $\lambda>0$, то полагаем $p_B(x)=+\infty$).

Оказывается, соответствия $p\mapsto B_p$ и $B\mapsto p_B$ почти обратны друг к другу, если p пробегает множество полунорм в L, а B — множество выпуклых уравновешенных множеств. Оговорка «почти» связана с тем, что разные множества B могут иметь один и тот же функционал Минковского p_B (см. задачу 280).

Теорема 5. 1) *Если p — полунорма, то ее единичный шар B_p — выпуклое уравновешенное множество.*

2) *Если p — норма, то B_p — поглощающее множество, не содержащее целиком никакой прямой (т. е. одномерного подпространства) в L.*

3) *Если B — выпуклое уравновешенное множество, то p_B — полунорма.*

4) *Если B — выпуклое, уравновешенное, поглощающее множество, не содержащее ни одной прямой, то p_B — норма.*

5) *Для любой полунормы p справедливо равенство $p_{B_p}=p$.*

Доказательство. Утверждения 1) и 2) непосредственно вытекают из определений. Докажем 3). Однородность функционала p_B очевидна. Пусть B — выпуклое множество. Докажем, что p_B — полуаддитивная функция. Пусть $x,\ y\in L$. Если $p_B(x)$ или $p_B(y)$ бесконечны, доказывать нечего. Если $p_B(x)=0$, то $\lambda x\in B$ при всех $\lambda>0$. Поэтому из $y\in B$ следует, что $(1-\varepsilon)y+x=(1-\varepsilon)y+\varepsilon\cdot\frac{x}{\varepsilon}\in B$ при $1>\varepsilon>0$. Таким образом, неравенство $p_B(y)<1$ влечет $p_B((1-\varepsilon)y+x)\leqslant 1$ при всех $\varepsilon\in(0,1)$. Отсюда следует, что $p_B(y+x)\leqslant p_B(y)$. Остается исследовать случай, когда $p_B(x)$ и $p_B(y)$ отличны от нуля. Рассмотрим векторы $x_\varepsilon = \frac{1-\varepsilon}{p_B(x)} x$ и $y_\varepsilon = \frac{1-\varepsilon}{p_B(y)} y$. По определению функционала Минковского имеем $x_\varepsilon, y_\varepsilon \in B$ при $\varepsilon > 0$. Так как B выпукло, отсюда следует, что $\tau x_\varepsilon + (1-\tau) y_\varepsilon \in B$ при $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. В частности, при $\tau = \frac{p_B(x)}{p_B(x) + p_B(y)}$ получаем $\frac{1-\varepsilon}{p_B(x) + p_B(y)} (x+y) \in B$. Значит, $p_B(x+y) \leqslant \frac{p_B(x) + p_B(y)}{1-\varepsilon}$ при $\varepsilon > 0$, откуда и следует полуаддитивность p_B. Утверждения 4) и 5) теоремы проверяются без труда.

Определение. *Линейным топологическим пространством* (сокращенно ЛТП) называется линейное пространство L над полем K, снабженное топологией, относительно которой операции сложения и умножения на число непрерывны.

Пример 1. Пусть p — конечная полунорма в L; примем в качестве базы топологии в L совокупность открытых шаров $\mathring{B}_p(x, r) = \{y \in L\colon p(x-y) < r\}$.

Проверим, что таким образом получается линейное топологическое пространство. В самом деле, пусть $x, y \in L$ и U — окрестность точки $x+y \in L$. По определению топологии множество U содержит некоторый шар вида $\mathring{B}_p(x+y, r)$ $(r > 0)$. Положим $U_1 = \mathring{B}_p(x, r/2)$, $U_2 = \mathring{B}_p(y, r/2)$. Тогда U_1 и U_2 открыты и $U_1 + U_2 \subset \mathring{B}_p(x+y, r) \subset U$ в силу полуаддитивности p. Тем самым доказана непрерывность операции сложения.

Пусть теперь $x \in L$, $\lambda \in K$ и U — окрестность точки $\lambda x \in L$. Тогда U содержит шар вида $\mathring{B}_p(\lambda x, r)$ $(r > 0)$. Положим $V_\varepsilon = \{\mu \in K\colon |\lambda - \mu| < \varepsilon\}$, $U_\delta = \mathring{B}_p(x, \delta)$. Если $\mu \in V_\varepsilon$, $y \in U_\delta$, то

$$p(\lambda x - \mu y) \leqslant p(\lambda x - \mu x) + p(\mu x - \mu y) \leqslant \varepsilon p(x) + (|\lambda| + \varepsilon)\delta.$$

Ясно, что для достаточно малых положительных ε и δ последнее выражение будет меньше r. Поэтому $V_\varepsilon U_\delta \subset \mathring{B}_p(\lambda x, r) \subset U$, и мы доказали непрерывность умножения.

Пример 2. Пусть $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — любое семейство конечных полунорм в L. Примем в качестве базы топологии в L совокупность шаров $\mathring{B}_{p_\alpha}(x, r)$ $(\alpha \in A,\ x \in L,\ r > 0)$ и их конечных пересечений. Как и в примере 1, можно проверить, что эта топология превращает L в линейное топологическое пространство. Такие ЛТП называют *полинормированными*.

Замечание 1. Каждая конечная полунорма в пространстве L определяет отображение L в множество $\mathbf{R}^+$, состоящее из всех вещественных неотрицательных чисел. Определенная выше топология — это слабейшая топология, относительно которой все полунормы семейства $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ непрерывны.

Замечание 2. Непрерывность полунормы p равносильна открытости шара $\mathring{B}_p(0, 1)$.

Определение. *Локально выпуклым* линейным топологическим пространством (сокращенно ЛВП) называется такое ЛТП, которое обладает базой топологии, состоящей из выпуклых множеств.

Ясно, что ЛТП из примеров 1 и 2 являются ЛВП. Оказывается, что ЛТП примера 2 является самым общим примером ЛВП. А именно, справедлива

Теорема 6. *Во всяком ЛВП L топология может быть определена с помощью семейства полунорм $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$. В качестве такого семейства можно взять совокупность всех непрерывных полунорм на L.*

Доказательство основано на следующем утверждении.

Лемма. *Всякая окрестность нуля в ЛВП L содержит открытое выпуклое уравновешенное множество.*

Доказательство леммы. Пусть U — произвольная, а $\tilde{U} \subset U$ — открытая выпуклая окрестности нуля в L. Из непрерывности операции умножения на число в L вытекает, что существует такое число $\varepsilon > 0$ и такая открытая окрестность нуля $V \subset L$, что $B_\varepsilon \cdot V \subset \tilde{U}$, где $B_\varepsilon = \{\lambda \in K\colon |\lambda| < \varepsilon\}$. Пусть W означает выпуклую оболочку множества $B_\varepsilon V$. Тогда множество W открыто, выпукло, уравновешено и содержится в $\tilde{U} \subset U$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 6. В силу леммы и утверждения 3) теоремы 5 на L определено некоторое непустое семейство непрерывных полунорм, обладающее свойством, описанным в примере 2. Введем в L топологию полинормированного пространства, взяв в качестве семейства $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ совокупность всех непрерывных полунорм на L. Ясно, что эта топология не сильнее исходной, так как все шары $\mathring{B}_\alpha(x, r)$ открыты в исходной топологии. С другой стороны, в каждую окрестность нуля в исходной топологии можно вписать выпуклое уравновешенное открытое множество W, а значит, и шар $\mathring{B}_{p_W}(0, 1)$. Таким образом, топология полинормированного пространства не слабее исходной. Теорема доказана.

Обычно рассматривают лишь *отделимые* или *хаусдорфовы* ЛТП, т. е. такие, в которых любые две различные точки обладают непересекающимися окрестностями.

Теорема 7. *В любом ЛТП L существует и единственно такое подпространство L_0, что*

1) *любая непустая окрестность точки $x \in L$ содержит множество $x + L_0$;*

2) *факторпространство L/L_0, снабженное естественной фактортопологией, отделимо.*

Доказательство. Пусть L_0 — пересечение всех окрестностей нуля. Из непрерывности операций сложения и умножения на число вытекает, что L_0 — подпространство и что справедливо утверждение 1). Далее, если x и y — две различные точки факторпространства L/L_0, то существует окрестность нуля U в L/L_0, не содержащая $x - y$. Из непрерывности операции вычитания вытекает, что существует такая окрестность нуля V, что $V - V \subset \subset U$. Тогда $x + V$ и $y + V$ — непересекающиеся окрестности точек x и y. Теорема доказана.

Пример. В полинормированном пространстве $(L, \{p_\alpha\}_{\alpha \in A})$ L_0 совпадает с множеством, где все полунормы p_α обращаются в нуль.

Одна и та же топология в ЛВП L может задаваться разными наборами полунорм. Два набора полунорм $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и $\{q_\beta\}_{\beta \in B}$ называются *эквивалентными*, если они определяют одну и ту же топологию. Можно показать, что два набора полунорм эквивалентны тогда и только тогда, когда любая полунорма одного набора мажорируется конечной линейной комбинацией полунорм другого набора и обратно.

В дальнейшем, как правило, будут рассматриваться лишь отделимые полинормированные пространства. Среди них особенно важны пространства $(L, \{p_\alpha\}_{\alpha \in A})$, для которых семейство A конечно или счетно. Если A конечно, то можно заменить набор полунорм одной полунормой $p = \sum\limits_{\alpha \in A} p_\alpha$, которая задает ту же топологию, что и весь набор. Для отделимости L необходимо и достаточно, чтобы полунорма p была нормой. Такие ЛТП называются *нормируемыми*, а если норма p, задающая топологию, фиксирована,— *нормированными*. Если A счетно, то, вообще говоря, L не является нормируемым. Однако всякое счетно-нормированное ЛТП *метризуемо.* Более того, метрику можно считать инвариантной относительно сдвигов. Такова функция

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}.$$

Множество $E \subset L$ *ограничено*, если оно поглощается любой окрестностью нуля в E.

Для полинормированных пространств это определение эквивалентно следующему более естественному:

Множество E *ограничено*, если его элементы ограничены по каждой из полунорм, определяющих топологию в E.

2. Сопряженные пространства. Линейные топологические пространства образуют категорию, морфизмами которой являются линейные непрерывные отображения (операторы). Как и выше, мы обозначим через $\mathscr{L}(L_1, L_2)$ совокупность всех морфизмов из ЛТП L_1 в ЛТП L_2. Ясно, что $\mathscr{L}(L_1, L_2)$ — линейное пространство над K. Особый интерес представляет случай $L_2 = K$. Для любого ЛТП L пространство $\mathscr{L}(L, K)$ мы обозначим через L' и назовем пространством, *сопряженным* к L.

В сопряженном пространстве можно ввести много разных топологий (см., например, [7, 18*]), из которых мы укажем лишь три наиболее важных.

Слабая топология определяется для любого ЛТП L системой полунорм $p_f(x) = |f(x)|$, где f пробегает сопряженное пространство L'; для слабой сходимости последовательностей используют обозначение $x_n \rightharpoonup x$;

**-слабая топология* определяется в пространстве L', сопряженном к L, системой полунорм $p_x(f) = |f(x)|$, где x пробегает L;

сильная топология в пространстве L', сопряженном к L, определяется системой полунорм $p_E(f) = \sup |f(x)|$, где E пробегает все ограниченные подмножества в L.

Отметим, что для нормированного пространства L каждое ограниченное подмножество содержится в некотором шаре и поэтому сильная топология в L' совпадает с топологией нормы, введенной в § 1.

Как и для нормированных пространств, существует естественное вложение ЛВП L во второе сопряженное пространство L''. Если оно является изоморфизмом, L называется *рефлексивным* ЛВП. В этом случае слабая и *-слабая топологии в L' совпадают.

Соответствие $L \to L'$, как и в случае нормированных пространств, продолжается до контрвариантного функтора в категории ЛТП, и сопряженный оператор определяется той же формулой.

3. Теорема Хана — Банаха. Если ЛТП L_1 и L_2 отделимы и конечномерны, то всякое линейное отображение из L_1 в L_2 непрерывно (см. задачу 294) и, следовательно, $\dim \mathscr{L}(L_1, L_2) = \dim L_1 \cdot \dim L_2$. В частности, $\dim L' = \dim L$. В бесконечномерном случае это не так. Известно (см. задачу 314), что бывают такие отделимые бесконечномерные ЛТП L, для которых $L' = \{0\}$. Оказывается, в ЛВП такой неприятности не возникает.

Теорема Хана — Банаха. *Пусть p — полунорма на L, L_0 — подпространство в L и f_0 — линейный функционал на L_0, обладающий свойством $|f_0(x_0)| \leqslant p(x_0)$ для всех $x_0 \in L_0$. Тогда существует линейный функционал f на L, совпадающий с f_0 на L_0 и обладающий свойством $|f(x)| \leqslant p(x)$ для всех $x \in L$.*

Доказательство. Рассмотрим совокупность $\mathscr{L}$ всех пар (L_1, f_1), где L_1 — подпространство в L, содержащее L_0, а f_1 — линейный функционал на L_1, обладающий свойством $|f_1(x_1)| \leqslant p(x_1)$ $(x_1 \in L_1)$ и совпадающий с f_0 на L_0. Отметим, что $\mathscr{L}$ непусто, так как содержит пару (L_0, f_0). Определим на множестве $\mathscr{L}$ частичный порядок, полагая $(L_1, f_1) < (L_2, f_2)$, если $L_1 \subset L_2$ и ограничение f_2 на L_1 совпадает с f_1. Множество $\mathscr{L}$ удовлетворяет условиям леммы Цорна: всякое его упорядоченное подмножество $\{(L_\alpha, f_\alpha)\}$ $(\alpha \in A)$ имеет мажоранту: $(\cup L_\alpha, f)$, $\alpha \in A$, где f — функционал, совпадающий с f_α на L_α. Значит, в $\mathscr{L}$ есть максимальный элемент $(\tilde{L}, \tilde{f})$.

Предположим, что $\tilde{L} \neq L$. Пусть $x \in L$ — элемент, не лежащий в $\tilde{L}$. Построим продолжение $\tilde{f}_1$ функционала $\tilde{f}$ на пространство $\tilde{L}_1 = \tilde{L} + Kx$, полагая $\tilde{f}_1(\tilde{x} + \lambda x) = \tilde{f}(\tilde{x}) + \lambda c$. Выпишем условия, которым должна удовлетворять константа $c \in K$ для того, чтобы это продолжение обладало свойством $|\tilde{f}_1(x)| \leqslant p(x)$ $(x \in \tilde{L}_1)$:

$$|f(\tilde{x}) + \lambda c| \leqslant p(\tilde{x} + \lambda x), \quad \tilde{x} \in \tilde{L}, \quad \lambda \in K.$$

Заменяя $\tilde{x}$ на $-\lambda y$ и деля обе части неравенства на $|\lambda|$, мы приходим к равносильному условию

$$|c - f(y)| \leqslant p(x - y), \quad y \in \tilde{L}.$$

Разберем сначала случай $K = \mathbf{R}$. В этом случае мы должны проверить, что семейство отрезков $[f(y) - p(x - y),$

$f(y)+p(x-y)]$, $y\in\tilde{L}$, имеет общую точку. Для этого достаточно проверить, что левый конец любого отрезка лежит левее, чем правый конец любого другого отрезка. Искомой точкой будет тогда верхняя грань всех левых концов.

Итак, осталось проверить неравенство

$$f(y_1)-p(x-y_1)\leqslant f(y_2)+p(x-y_2),\quad y_1,\ y_2\in\tilde{L}.$$

Но оно сразу следует из неравенства

$$f(y_1)-f(y_2)\leqslant p(y_1-y_2)\leqslant p(y_1-x)+p(x-y_2).$$

Непосредственное перенесение этого рассуждения на комплексный случай может быть проведено с помощью *теоремы Хелли* (см. задачу 313). Мы укажем здесь более простой обходной путь. Рассмотрим пространство $\tilde{L}_1$ как вещественное. Тогда его можно получить из $\tilde{L}$, последовательно присоединяя $\mathbf{R}\cdot x$ и $\mathbf{R}\cdot ix$. Последовательные продолжения функционала $\tilde{f}$ приведут нас к вещественнолинейному функционалу φ, совпадающему с $\tilde{f}$ на $\tilde{L}$, обладающему свойством $|\varphi(x)|\leqslant p(x)$ для $x\in\tilde{L}_1$. Ясно, что теми же свойствами обладает и функционал $\psi(x)=-i\varphi(ix)$. Наконец, полагая $\tilde{f}_1(x)=\frac{\varphi(x)+\psi(x)}{2}$, мы получим искомое продолжение: $|\tilde{f}_1(x)|=\frac{|\varphi(x)|+|\psi(x)|}{2}\leqslant p(x)$ и $\tilde{f}_1(ix)=\frac{\varphi(ix)-i\varphi(-x)}{2}=i\tilde{f}_1(x)$. Итак, мы построили пару $(\tilde{L}_1,\ \tilde{f}_1)$, следующую за $(\tilde{L},\ \tilde{f})$, что противоречит максимальности последней. Значит, предположение $\tilde{L}\neq L$ неверно, и теорема доказана.

Следствие 1. *В любом отделимом полинормированном пространстве L имеется достаточно много линейных непрерывных функционалов, чтобы разделить любые две точки.*

В самом деле, если $x,y\in L$, $x\neq y$, то по лемме п. 1 существует выпуклая уравновешенная окрестность нуля U, не содержащая $x-y$. Положим $p=p_U$, $L_0=K(x-y)$, $f_0(x-y)=1$. По теореме Хана — Банаха существует такой функционал $f\in L'$, что $f(x)-f(y)=1$ и $|f(x)|\leqslant p_U(x)$.

Следствие 2. *Для любого нормированного пространства $(L,\ p)$ и любого вектора $x\in L$, $x\neq 0$ существует такой ненулевой функционал $f\in(L',\ p')$, что*

$$f(x)=p'(f)\,p(x). \tag{3'}$$

С л е д с т в и е 3. *Для любого нормированного пространства* (L, p) *естественное вложение* L *в* L'' *(переводящее* $x \in L$ *в функционал* $x(f) = f(x)$*) изометрично.* (Ср. с задачами 297, 298 и с теоремой 8.)

З а м е ч а н и е. В доказательстве теоремы Хана — Банаха свойство полунормы p использовались не полностью. А именно, можно показать, что все рассуждения остаются в силе, если от p потребовать полуаддитивности и положительной однородности: $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ для $\lambda \geqslant 0$.

Кроме того, можно ослабить условия теоремы, потребовав выполнения неравенства $f_0(x) \leqslant p(x)$ (т. е. функционал ограничивается лишь сверху); при этом для функционала $f(x)$ также гарантируется односторонняя оценка $f(x) \leqslant p(x)$.

Приведем геометрическую интерпретацию теоремы Хана — Банаха.

О п р е д е л е н и е. Пусть L и M — линейные пространства. *Линейным многообразием* в линейном пространстве L называется прообраз точки при линейном отображении $A\colon L \to M$. Если образ L в M при отображении A имеет размерность n, то говорят, что линейное многообразие $A^{-1}(x)$ $(x \in A(L))$ имеет *коразмерность* n. Многообразие коразмерности 1 называется *гиперплоскостью*. Таким образом, гиперплоскости — это множества уровня линейных функционалов.

Г е о м е т р и ч е с к а я ф о р м а т е о р е м ы Х а н а — Б а н а х а. *Пусть* $K = \mathbf{R}$. *Если* U *— открытое выпуклое множество в ЛТП* L *и* S *— линейное многообразие, не пересекающее* U, *то существует гиперплоскость* T, *содержащая* S *и не пересекающая* U.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать, что U содержит нуль. Пусть L_0 — подпространство, порожденное S, и f_0 — линейный функционал на L_0, определенный равенством $f_0(x) = 1$ для $x \in S$ (функционал f_0 определен корректно, поскольку S порождает L_0 и не содержит нуля). Поскольку S не пересекает U, функционал f_0 обладает свойством $f_0(x) \leqslant p_U(x)$ для $x \in L_0$. Функционал Минковского p_U полуаддитивен и положительно однороден: $p_U(\lambda x) = \lambda p_U(x)$ при $\lambda > 0$. В силу сделанного выше замечания, этих свойств достаточно для справедливости аналога теоремы Хана — Банаха в вещественном случае. Продолжим f_0 до функционала f во всем пространстве, обладающего свойством $f(x) \leqslant p_U(x)$, и положим $T = \{x \in L,\ f(x) = 1\}$. Тогда T — искомая гиперплоскость. В самом деле, на U $f(x) \leqslant 1$, а в силу открытости U $f(x) < 1$ для $x \in U$.

С л е д с т в и е. *Пусть в ЛТП L заданы два выпуклых непересекающихся множества U_1 и U_2, одно из которых открыто. Тогда существует гиперплоскость T, разделяющая U_1 и U_2.*

В самом деле, положим $U=U_1-U_2$, $S=\{0\}$. Тогда U — выпуклое открытое множество, S — линейное многообразие, не пересекающее U. Пусть T_0 — гиперплоскость, содержащая S и не пересекающая U. Поскольку T содержит нуль, она задается уравнением $f(x)=0$, где f — некоторый линейный функционал на L. Так как U выпукло и не пересекает T, функционал f принимает на U значения одного знака.

Пусть для определенности $f(x)>0$ для $x\in U$. Вспоминая определение U, мы видим, что $f(x_1)>f(x_2)$ для всех $x_1\in U_1$, $x_2\in U_2$. Пусть $c=\sup\limits_{x_2\in U_2} f(x_2)$. Тогда гиперплоскость $T=\{x\colon f(x)=c\}$ разделяет U_1 и U_2.

З а м е ч а н и е. Требование открытости U_1 или U_2 в формулировке следствия существенно (см. задачу 295). Другую теорему о разделении выпуклых множеств см. в задаче 296.

Теперь мы в состоянии доказать утверждение об изометричном вложении L в L'', о котором говорилось в п. 2 § 1.

Т е о р е м а 8. *Пусть L — нормированное пространство, L' — его сопряженное пространство и $L''=(L')'$ — второе сопряженное пространство. Каждому $x\in L$ поставим в соответствие линейный функционал F_x на L', действующий по формуле*

$$F_x(f)=f(x).$$

Тогда $\|F_x\|_{L''}=\|x\|_L$ и тем самым отображение $x\mapsto F_x$ задает изометричное вложение L в L''.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению нормы в L'' имеем $\|F_x\|_{L''}=\sup\limits_{\|f\|_{L'}\leqslant 1}|f(x)|$. Поскольку $|f(x)|\leqslant\|f\|_{L'}\cdot\|x\|_L$, отсюда следует, что $\|F_x\|_{L''}\leqslant\|x\|_L$. Далее, в одномерном пространстве $L_0\subset L$, порожденном вектором x, зададим функционал f_0 формулой

$$f_0(\lambda x)=\lambda\cdot\|x\|_L.$$

Ясно, что $\|f_0\|_{L_0'}=1$. По теореме Хана — Банаха f_0 продолжается до функционала f_1 на L, причем $\|f\|_{L'}=1$. Поэтому $\|F_x\|_{L''}\geqslant|f_1(x)|=\|x\|_L$. Теорема доказапа.

§ 3. Линейные операторы

1. Пространство линейных операторов. Линейные топологические пространства над данным полем K ($K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$) образуют категорию $\mathscr{L}_K$, морфизмами которой являются линейные непрерывные отображения, называемые обычно *линейными непрерывными операторами*. Если L_1 и L_2 — два ЛТП над полем K, то совокупность всех линейных непрерывных операторов из L_1 в L_2 обозначается $\mathscr{L}(L_1, L_2)$ (см. гл. III, § 2, п. 2). Ясно, что $\mathscr{L}(L_1, L_2)$ — линейное пространство над K; если же $L_1 = L_2 = L$, то $\mathscr{L}(L)$ или $\mathscr{L}(L_1, L_2)$, обозначаемое чаще $\operatorname{End} L$, является к тому же алгеброй над полем K.

Пространство $\mathscr{L}(L_1, L_2)$ можно снабдить различными топологиями. Наиболее употребительными являются следующие три.

1. *Слабая топология.* Базис окрестностей нуля*) в этой топологии составляют множества

$$U(x, f) = \{A \in \mathscr{L}(L_1, L_2) \colon \ |f(A(x))| < 1\}, \quad x \in L_1, \quad f \in L_2'.$$

Легко проверить, что последовательность $\{A_n\}$ сходится к A в слабой топологии тогда и только тогда, когда для любого $x \in L_1$ последовательность $\{A_n(x)\}$ сходится к $A(x)$ в слабой топологии пространства L_2. Это соотношение записывают так: $A_n \rightharpoonup A$ или $A = \text{w-}\lim A_n$.

2. *Сильная топология.* Базис окрестностей нуля составляют множества $U(x, V) = \{A \in \mathscr{L}(L_1, L_2) \colon Ax \in V\}$, где $x \in L_1$, а V — окрестность нуля в L_2. Ясно, что сильная сходимость A_n к A равносильна сходимости $A_n x$ к Ax в топологии L_2 для любого $x \in L_1$. Это записывают так: $A_n \to A$ или $A = \text{s-}\lim A_n$.

3. *Равномерная топология.* Пусть L_1 и L_2 — нормированные пространства с нормами p_1 и p_2. Тогда в $\mathscr{L}(L_1, L_2)$ можно ввести норму p по формуле

$$p(A) = \sup_{x \neq 0} \frac{p_2(Ax)}{p_1(x)}.$$

Базис окрестностей нуля составляют множества

$$U(\varepsilon) = \{A \in \mathscr{L}(L_1, L_2) \colon \ p(A) < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

---

*) Для определения топологии в ЛТП достаточно задать базис окрестностей нуля. В качестве такой системы можно рассматривать любое семейство подмножеств, содержащих нуль, сдвиги которых образуют базу топологии.

Тот факт, что последовательность A_n стремится к A в равномерной топологии (т. е. $p(A_n - A) \to 0$ при $n \to \infty$), записывают так: $A_n \rightrightarrows A_n$ или $A = \operatorname{u-lim}\limits_{n\to\infty} A_n$.

Несложное рассуждение показывает, что слабая топология слабее сильной, а сильная — слабее равномерной. Отметим, что в конечномерном случае (т. е. когда $\dim L_1 < \infty$, $\dim L_2 < \infty$) все три топологии совпадают. В бесконечномерной ситуации это уже не так (ср. с задачами 316—318).

Отметим некоторую несогласованность описанной (общепринятой) терминологии с введенными раньше (и тоже общепринятыми) понятиями слабой и сильной топологий в пространстве $L' = \mathscr{L}(L, K)$. А именно, если рассматривать линейные функционалы $f \in L'$ как операторы из L в K, то слабая и сильная операторные топологии соответствуют $*$-слабой топологии в L', а равномерная операторная топология соответствует сильной топологии в L'.

Линейный функциональный анализ в основном покоится на трех китах — трех теоремах, связанных с именем Стефана Банаха. Одна из них — теорема Хана — Банаха — разобрана в § 2. Здесь мы приведем две другие.

Теорема Банаха — Штейнгауза. *Пусть L_1 — полное линейное метрическое пространство, L_2 — нормированное пространство и $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ — семейство линейных непрерывных операторов из L_1 в L_2. Если для каждого $x \in L_1$ множество $\{A_\gamma x\}_{\gamma\in\Gamma}$ ограничено в L_2* (т. е. $\|A_\gamma x\| \leqslant C(x)$ $\forall x \in L_1 (\gamma \in \Gamma)$), *то семейство $\{A_\gamma\}$ равномерно ограничено на некотором шаре с центром в нуле в L_1 (т. е. $\|A_\gamma x\| \leqslant C$ для всех $\gamma \in \Gamma$ и всех x из шара $B(0, r) = \{x \in L_1\colon d(0, x) \leqslant r\}$).*

Следствие. *В условиях теоремы семейство $\{A_\gamma\}$ равностепенно непрерывно*: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \|A_\gamma(x_1) - A_\gamma(x_2)\| < \varepsilon\ \forall \gamma \in \Gamma$.

Доказательство следствия. Пусть $\|A_\gamma x\| \leqslant c$ на шаре $B(0, r)$. Выберем δ настолько маленьким, чтобы шар $B(0, \delta)$ содержался в множестве $\frac{\varepsilon}{c} B(0, r)$. (Это возможно в силу непрерывности операции умножения на число в L_1.) Тогда, если $d(x_1, x_2) < \delta$, то $\|A_\gamma(x_1) - A_\gamma(x_2)\| = \|A_\gamma(x_1 - x_2)\| = \frac{\varepsilon}{c}\left\|A_\gamma \cdot \frac{c(x_1 - x_2)}{\varepsilon}\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon$, так как

$$\frac{c(x_1 - x_2)}{\varepsilon} \in \frac{c}{\varepsilon} B(0, \delta) \subset B(0, r).$$

Доказательство теоремы Банаха — Штейнгауза. Предположим, что семейство $\{A_\gamma\}$ неограничено ни на каком шаре вида $B(0, r)$ $(r>0)$. Тогда оно неограничено ни на каком шаре вообще. В самом деле, пусть $B(x_1, r_1)$ — любой шар в L_1. Из инвариантности метрики относительно сдвигов вытекает, что шар $B(x_1, r_1) = x_1 + B(0, r_1)$. Так как семейство $\{A_\gamma\}$ ограничено на векторе x_1 и неограничено на шаре $B(0, r_1)$, оно неограничено на шаре $B(x_1, r_1)$.

Построим теперь последовательность шаров $B(x_n, r_n)$ и последовательность индексов $\{\gamma_n\}$, обладающих следующими свойствами:

1) $B(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n)$; 2) $r_{n+1} \leqslant r_n/2$;

3) $\|A_{\gamma_n}(x)\| \geqslant n$ для всех $x \in B(x_n, r_n)$.

Положим $x_0 = 0$, $r_0 = 1$ и воспользуемся тем, что семейство $\{A_\gamma\}$ неограничено на шаре $B(x_0, r_0)$. Значит, найдется такой индекс γ_1 и такой элемент $x_1 \in \mathring{B}(x_0, r_0)$, что $\|A_{\gamma_1}x_1\| > 1$. По непрерывности A_{γ_1} существует такое число r_1, что $\|A_{\gamma_1}x\| \geqslant 1$ для всех $x \in B(x_1, r_1)$. Уменьшая, если нужно, r_1, можно считать, что $r_1 < r_0/2$ и $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0)$. Предположим, что шары $B(x_k, r_k)$ и индексы γ_k уже выбраны для $k \leqslant n-1$. Поскольку семейство $\{A_\gamma\}$ неограничено на $B(x_{n-1}, r_{n-1})$, существует такой индекс γ_n и такой элемент $x_n \in \mathring{B}(x_{n-1}, r_{n-1})$, что $\|A_{\gamma_n}(x_n)\| > n$. По непрерывности A_{γ_n} существует такое число r_n, что $\|A_{\gamma_n}x\| \geqslant n$ для всех $x \in B(x_n, r_n)$. Уменьшая, если нужно, r_n, можно добиться выполнения соотношений $r_n < r_{n-1}/2$ и $B(x_n, r_n) \subset B(x_{n-1}, r_{n-1})$.

Воспользуемся теперь полнотой L_1. Пусть x — точка, общая для всех шаров $B(x_n, r_n)$. Такая точка найдется по теореме о стягивающихся шарах (см. гл. I, § 2). Тогда $\|A_{\gamma_n}(x)\| \geqslant n$ для любого n, что противоречит ограниченности семейства $\{A_\gamma\}$ на векторе x. Теорема доказана.

Одно из важных следствий теоремы Банаха — Штейнгауза — слабая полнота пространства $\mathscr{L}(L_1, L_2)$ в случае, когда L_1 — полное метрическое линейное пространство, а L_2 — банахово пространство. В частности, справедлива

Теорема 9. *Если L — полное метрическое линейное пространство, то сопряженное пространство L' *-слабо секвенциально полно.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ — слабо фундаментальная последовательность в L'. Это значит, что для любого $x \in L$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ фундаментальна и, значит, имеет предел, который мы обозначим $f(x)$. Для доказательства теоремы мы должны проверить, что $f \in L'$. Линейность f получается переходом к пределу из линейности f_n. Непрерывность f вытекает из следствия теоремы Банаха — Штейнгауза. В самом деле, семейство $\{f_n\}$ отображений L в K ограничено на каждом векторе $x \in L$. Значит, оно равностепенно непрерывно. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f_n(x)| < \varepsilon$ на шаре $B(0, \delta)$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $|f(x)| \leqslant \varepsilon$ на шаре $B(0, \delta)$, что и доказывает непрерывность f.

Еще одно полезное следствие теоремы Банаха — Штейнгауза формулируется так.

Теорема 10. *В нормированном пространстве L всякое слабо ограниченное множество X (т. е. такое, что $|f(x)| \leqslant c(f)$ для любого $x \in X$ и $f \in L'$) ограничено.*

Доказательство. Рассмотрим элементы $x \in X$ как линейные функционалы на L'. По условию, семейство X ограничено на каждом $f \in L'$. Так как L' полно, по теореме Банаха — Штейнгауза X ограничено на некотором шаре $B(0, r)$ в L', т. е. $|f(x)| \leqslant c$ для всех $x \in X$ и всех $f \in B(0, r)$. В силу следствия 3 теоремы Хана — Банаха (см. § 2 гл. III) отсюда вытекает, что $\|x\| \leqslant c/r$ для всех $x \in X$, т. е. X ограничено.

Третьим основным принципом линейного функционального анализа является

Теорема Банаха об обратном операторе. *Пусть L_1 и L_2 — полные метрические линейные пространства, A — линейный непрерывный оператор, взаимно однозначно отображающий L_1 на L_2. Тогда обратный оператор A^{-1}: $L_2 \to L_1$ непрерывен.*

Доказательство. Мы должны проверить, что для любого $r > 0$ образ шара $\mathring{B}(0, r) \subset L_1$ при отображении A содержит окрестность нуля в L_2, что и означает непрерывность A^{-1}. Воспользуемся тем, что для любого $\varepsilon > 0$ объединение $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} n\mathring{B}(0, \varepsilon)$ содержит L_1. Поэтому объединение образов $X_n = A(n\mathring{B}(0, \varepsilon))$ содержит L_2. Пусть $\overline{X}_n$ — замыкание X_n. Покажем, что $\overline{X}_n$ содержит целиком некоторый шар положительного радиуса в L_2. В противном случае дополнение Y_n к $\overline{X}_n$ в L_2 было бы всюду плотным открытым множеством. В силу задачи 26 пересечение

$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$ было бы всюду плотно, в то время как оно на самом деле пусто. Итак, существуют такие $n \in \mathbf{N}$, $x_0 \in L_2$ и $r_0 > 0$, что $\overline{X}_n \supset \mathring{B}(x_0, r_0)$. Это значит, что замыкание образа $\mathring{B}(0, \varepsilon)$ содержит шар $\mathring{B}(x_0/n, r_0/n)$. Выберем ε настолько малым, чтобы выполнялось условие $\mathring{B}(0, \varepsilon) - \mathring{B}(0, \varepsilon) \subset \mathring{B}(0, r)$. Это можно сделать в силу непрерывности отображения $(x, y) \mapsto x - y$. Мы доказали, что замыкание образа $\mathring{B}(0, \varepsilon)$ содержит шар $\mathring{B}(x_0/n, r_0/n)$. Поэтому замыкание образа $\mathring{B}(0, r)$ содержит множество $\mathring{B}(x_0/n, r_0/n) - \mathring{B}(x_0/n, r_0/n)$, которое в свою очередь содержит $\mathring{B}(0, r_0/n)$.

Итак, образ любого шара $\mathring{B}(0, r) \subset L_1$, $r > 0$, плотен в некотором шаре вида $\mathring{B}(0, \rho) \subset L_2$. Пусть образ шара $\mathring{B}(0, r/2^n) \subset L_1$ плотен в шаре $\mathring{B}(0, \rho_n) \subset L_2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\rho_n \to 0$. Покажем, что образ шара $\mathring{B}(0, r)$ содержит шар $\mathring{B}(0, \rho_1)$. Пусть $y \in \mathring{B}(0, \rho_1)$. Поскольку образ $\mathring{B}(0, r/2)$ плотен в $\mathring{B}(0, \rho_1)$, найдется такой вектор $x_1 \in \mathring{B}(0, r/2)$, что $d(y, Ax_1) < \rho_2$. Далее, поскольку образ $\mathring{B}(0, r/4)$ плотен в $\mathring{B}(0, \rho_2)$, найдется такой вектор $x_2 \in \mathring{B}(0, r/4)$, что $d(y - Ax_1, Ax_2) < \rho_3$ и т. д. Ряд $\sum x_n$ сходится в L_1 к некоторому вектору $x \in \mathring{B}(0, r)$. Имеем $d(y, Ax) = d\left(y, \sum Ax_n\right) = 0$. Теорема доказана.

Эта теорема часто используется в такой ситуации. Пусть в пространстве L заданы две нормы p_1 и p_2, причем $p_2 \leqslant cp_1$ и пространство L полно относительно каждой из норм. Тогда нормы p_1 и p_2 эквивалентны, т. е. $p_1 \leqslant c' p_2$ для некоторой константы c'. (Для доказательства достаточно рассмотреть тождественный оператор из (L, p_1) в (L, p_2).)

Аналогичное рассуждение применимо и к двум счетным семействам полунорм, превращающих L в полное метрическое пространство; если одна система полунорм мажорирует другую, то эти системы задают одну и ту же топологию. Этот факт широко используется в теории обобщенных функций. (Ср. теорему 30 § 4 п. 3.)

2. Компактные множества и компактные операторы. Понятия компактного и относительно компактного множеств предполагаем известными. (См. задачи 69—72.) Из обычного курса анализа известно, что на вещественной прямой относительная компактность множества равносильна его ограниченности. То же самое справедливо и в любом конечномерном нормированном пространстве.

Теорема 11. *Пусть L — конечномерное нормированное пространство, A — подмножество в L.*

Тогда:

1) *A относительно компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено*;

2) *A компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Если A относительно компактно, то его замыкание $\bar{A}$ — компакт. Норма — непрерывная функция, и, значит, она ограничена на $\bar{A}$. Поэтому $\bar{A}$, а следовательно, и A — ограниченные множества.

Пусть теперь A — ограниченное множество в L. Построим для него конечную ε-сеть. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — координаты в L относительно какого-нибудь базиса $e_1, \ldots, e_n$. Назовем кубом и обозначим K_c подмножество в L, выделяемое условиями $|x_i| \leqslant c$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Лемма. *Существуют такие положительные числа M и m, что единичный шар пространства L содержит куб K_m и содержится в кубе K_M.*

Доказательство. Пусть ∂K_1 — граница куба K_1. Она состоит из $2n$ кубов размерности $(n-1)$, задаваемых условиями $x_i = \pm 1$ для некоторого i, $|x_j| \leqslant 1$ при $j \neq i$. Индукцией по n легко доказать, что ∂K_1 — компакт. Поэтому норма принимает на ∂K_1 наибольшее значение B и наименьшее значение b. Заметим, что $b > 0$, так как $0 \notin \partial K_1$. Утверждение леммы будет выполнено, если положить $M = b^{-1}$, $m = B^{-1}$.

Пусть теперь дано ограниченное подмножество $A \subset L$. По определению оно содержится в некотором шаре радиуса R и тем самым в кубе K_{RM}. Разобьем этот куб на N^n кубов, конгруэнтных $K_{RMN^{-1}}$. Каждый из них содержится в шаре радиуса RM/Nm. Выбирая $N > RM/\varepsilon m$, получим искомую ε-сеть, составленную из центров маленьких кубов. Тем самым искомое утверждение доказано.

Замечание. Число элементов в построенной ε-сети равно, как легко видеть, $(RM/\varepsilon m)^n$, т. е. имеет порядок $O(\varepsilon^{-n})$ при $\varepsilon \to 0$. Показатель n здесь напоминает нам о размерности пространства L, в котором лежит наше множество. Важной и интересной характеристикой относительно компактного множества A является асимптотическое поведение при $\varepsilon \to 0$ функции $N(\varepsilon)$ — числа элементов в минимальной ε-сети для A. В частности, если $N(\varepsilon) \sim C \cdot \varepsilon^{-\gamma}$, то говорят, что A имеет *аппроксимативную размерность* γ. Можно показать, что в n-мерном нормированном пространстве существуют относительно компактные подмножества любой аппроксимативной размерности, заключенной между 0 и n.

В бесконечномерных пространствах ограниченности, как правило, уже недостаточно для того, чтобы множество было относительно компактно.

Теорема 12. *Пусть L — бесконечномерное линейное нормированное пространство. Тогда единичный шар $B = \{x \in L\colon \|x\| \leqslant 1\}$ в L не является относительно компактным множеством.*

Доказательство. Предположим, что B относительно компактен. Тогда он покрывается конечным числом шаров $B_1, \ldots, B_N$ радиуса $r < 1$. Рассмотрим n-мерное подпространство L_n в L, содержащее центры этих шаров. Такое подпространство заведомо существует при $n \geqslant N$. Пусть $\widetilde{B}, \widetilde{B}_1, \ldots, \widetilde{B}_N$ — пересечения шаров $B, B_1, \ldots, B_N$ с L_n. Ясно, что множества $\widetilde{B}, \widetilde{B}_i$ являются шарами в L_n радиуса 1 и r соответственно. Пусть μ — мера Лебега в L_n, нормированная условием $\mu(\widetilde{B}) = 1$. Тогда $\mu(\widetilde{B}_i) = r^n$. Так как B содержится в объединении B_i $(1 \leqslant i \leqslant N)$ справедливо неравенство $Nr^n \geqslant 1$. Но при $r < 1$ и достаточно большом n это невозможно. Теорема доказана.

Некоторой компенсацией служит следующий результат.

Теорема 13. *В нормированном рефлексивном пространстве L всякое слабо ограниченное множество слабо относительно компактно.*

Мы докажем эту теорему в предположении, что пространство L' сепарабельно, т. е. содержит счетное плотное подмножество $\{f_n\}$. (Общий случай требует применения теоремы Тихонова о компактности бесконечного произведения компактов.) В этом случае слабая топология на каждом слабо ограниченном подмножестве $X \subset L$ метризуема. В самом деле, если X слабо ограничено, то оно и сильно ограничено по теореме 10. Значит, X содержится в шаре радиуса r. Определим счетное семейство полунорм $p_n(x) = |f_n(x)|$. Покажем, что это семейство определяет слабую топологию на X. В самом деле, база слабой топологии в множестве X состоит из множеств вида

$$U(x, f) = \{y \in X : |f(x-y)| < 1\}, \quad x \in L, \quad f \in L',$$

и их конечных пересечений.

Пусть f_i — функционал из плотного подмножества $\{f_n\}$, обладающий свойством $\|f - f_i\| < 1/(4r)$. Тогда подмножество тех $y \in X$, для которых $p_i(y-x) < 1/2$, содержится в $U(x, f)$, так как $|f(x-y)| = |f_i(x-y) + (f - f_i)(x - -y)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{4r} \cdot 2r = 1$.

Покажем теперь, что X — слабо предкомпактное множество. Для этого проверим, что из каждой последовательности $\{x_n\} \subset X$ можно выбрать слабо сходящуюся в замыкании X подпоследовательность. Так как числовая последовательность $f_i(x_n)$ ограничена при каждом i, то, применяя стандартный диагональный процесс, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся по каждой полунорме p_i. Поскольку семейство $\{p_i\}$ определяет слабую топологию на X, эта подпоследовательность будет слабо сходящейся. Теорема доказана.

Очень интересная и красивая область линейного функционального анализа — теория компактных выпуклых множеств. Мы приведем здесь лишь наиболее яркий и полезный результат из этой теории — теорему Крейна — Мильмана о крайних точках.

Точка x, принадлежащая выпуклому множеству K в ЛТП, называется *крайней* (или *экстремальной*), если она не является серединой отрезка, целиком лежащего в K. Например, крайние точки замкнутого шара в евклидовом пространстве — это все точки ограничивающей его сферы; крайние точки замкнутого куба — это его вершины; открытое множество вообще не имеет крайних точек.

Теорема 14 (Крейна — Мильмана). *Пусть L — ЛВП, K — выпуклый компакт в L, E — совокупность крайних точек K. Тогда K совпадает с замыканием выпуклой оболочки E.*

Доказательство теоремы см. в задачах 329—333.

Одно из приложений этой теоремы — доказательство неизоморфности различных банаховых пространств (ср. с задачами 334—336); другое — изящное доказательство де Бранжа теоремы Стоуна — Вейерштрасса (см. [28]).

Критерии компактности множеств в различных конкретных пространствах мы приведем ниже, но один случай — пространства $C(X)$ — разберем здесь, поскольку он используется в общей теории нормированных пространств.

Т е о р е м а 15 (А р ц е л а — А с к о л и). *Пусть $C(X)$ — нормированное пространство вещественных непрерывных функций на метрическом компакте X с нормой $\|f\| = \max\limits_x |f(x)|$. Для того чтобы семейство $A \subset C(X)$ было предкомпактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было 1) равномерно ограниченным (т. е. существовала бы такая константа C, что $|f(x)| \leqslant C$ для $f \in A$) и 2) равностепенно непрерывным (т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ существовало бы такое $\delta > 0$, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, как только $d(x, y) < \delta$, для всех $f \in A$).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть A предкомпактно. Тогда оно допускает конечную $\varepsilon/3$-сеть $f_1, \ldots, f_N$. Каждая из функций f_i непрерывна и, следовательно, ограничена на X. Отсюда следует равномерная ограниченность A. Каждая из функций f_i равномерно непрерывна на X. Поэтому существует такое $\delta_i > 0$, что $|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon/3$ при $d(x, y) < \delta_i$. Тогда из рассмотрения четырехугольника $f(x)$, $f_i(x)$, $f_i(y)$, $f(y)$ вытекает требуемое свойство равностепенной непрерывности для $\delta = \min(\delta_1 \ldots \delta_N)$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Построим явно конечную ε-сеть для A, если известно, что семейство A равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Пусть δ выбрано так, чтобы выполнялось неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$ при $d(x, y) < \delta$ для $f \in A$. На компакте X существует конечная δ-сеть $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Рассмотрим ограничение функции $f \in A$ на множество S как вектор пространства $l_\infty(n, \mathbf{R})$. Образом A в $l_\infty(n, \mathbf{R})$ является некоторое ограниченное множество $\widetilde{A}$. Значит, $\widetilde{A}$ относительно компактно и обладает конечной $\varepsilon/3$-сетью $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_N$. Покажем, что набор функций $f_1, \ldots, f_N$ является ε-сетью в A. Пусть $f \in A$. Ограничение $\tilde{f}$ функции f на S отстоит не больше чем на $\varepsilon/3$ от некоторой $\tilde{f}_i$ в смысле метрики $l_\infty(n, \mathbf{R})$. Оценим расстояние между f и f_i в $C(X)$. Пусть x — любая точка из X и $x_k \in S$ — ближайший к ней элемент S. Тогда $d(x, x_k) < \delta$. Поэтому $|f(x) - f(x_k)| < \varepsilon/3$ и $|f_i(x) - f_i(x_k)| < \varepsilon/3$. Кроме того, $|f(x_k) - f_i(x_k)| < \varepsilon/3$ согласно выбору f_i. Значит, $\|f - f_i\| < \varepsilon$. Теорема доказана.

Более общий результат см. в задаче 337.

О п р е д е л е н и е. Оператор A, действующий из нормированного пространства L_1 в нормированное пространство L_2, называется *компактным* (в другой терминологии — *вполне непрерывным*), если он переводит всякое ограниченное множество в относительно компактное.

Это понятие было введено Д. Гильбертом при изучении интегральных операторов. Примером компактного оператора может служить любой ограниченный оператор *конечного ранга* (т. е. оператор с конечномерным образом). В самом деле, в конечномерном пространстве всякое ограниченное множество относительно компактно. Совокупность всех компактных операторов, действующих из L_1 в L_2, мы будем обозначать $\mathscr{K}(L_1, L_2)$.

Теорема 16. 1) *$\mathscr{K}(L_1, L_2)$ — замкнутое по норме подпространство в $\mathscr{L}(L_1, L_2)$.*

2) *Если $A \in \mathscr{L}(L_0, L_1)$, $B \in \mathscr{K}(L_1, L_2)$, $C \in \mathscr{L}(L_2, L_3)$, то $C \circ B \circ A \in \mathscr{K}(L_0, L_3)$; в частности, $\mathscr{K}(L, L)$ — идеал в $\mathscr{L}(L, L)$.*

3) *Если $A \in \mathscr{K}(L_1, L_2)$, то сопряженный оператор A': $L_2' \to L_1'$ принадлежит $\mathscr{K}(L_2', L_1')$.*

Доказательство. 1) Пусть A и B — компактные операторы из L_1 в L_2, X — ограниченное подмножество в L_1. Множества AX и BX предкомпактны. Поэтому предкомпактно и множество $\alpha AX + \beta BX$. Значит, $\alpha A + \beta B \in \mathscr{K}(L_1, L_2)$. Далее, пусть $A_n \in \mathscr{K}(L_1, L_2)$ и $A_n \rightrightarrows A$ при $n \to \infty$. Покажем, что множество AX предкомпактно. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем номер n таким, чтобы выполнялось неравенство $\|A - A_n\| < \varepsilon/(2R)$, где $R = \sup\limits_{x \in X}\|x\|$. Тогда множество A_nX будет $\varepsilon/2$-сетью для множества AX, так как $\|Ax - A_nx\| < \varepsilon/2$ для $x \in X$. Множество A_nX по условию предкомпактно и, следовательно, имеет конечную $\varepsilon/2$-сеть S. Ясно, что S будет ε-сетью для AX.

2) Пусть X — ограниченное множество в L_0. Тогда AX — ограниченное множество в L_1, $B \circ AX$ — предкомпактное множество в L_2. Покажем, что $C \circ B \circ AX$ — предкомпактное множество в L_3. В самом деле, если S — конечная $\varepsilon/\|C\|$-сеть для $B \circ AX$, то CS — конечная ε-сеть для $C \circ B \circ AX$.

3) Пусть $A \in \mathscr{K}(L_1, L_2)$, M — ограниченное множество в L_2'. Покажем, что множество $A'M \subset L_1'$ предкомпактно. Для этого построим изометрическое вложение этого множества в некоторое пространство типа $C(X)$. А именно, в качестве X мы возьмем замыкание множества AB, где B — единичный шар в пространстве L_1 (AB предкомпактно, так как A — компактный оператор, B — ограниченное множество). Каждому функционалу $f \in A'M$ мы поставим в соответствие функцию $\tilde{f}(x)$ на X по формуле $\tilde{f}(x) = g(x)$, где $g \in M$ выбирается так, чтобы выполнялось равенство $f = A'g$. (Этим свойством g определяется,

вообще говоря, неоднозначно, но если $f = A'g_1 = A'g_2$, то для точек $x \in AB$ значения $g_1(x)$ и $g_2(x)$ совпадают. Таким образом, соответствие $f \mapsto \tilde{f}$ определено корректно и, очевидно, является вложением.) Покажем, что это соответствие изометрично. В самом деле,

$$\|\tilde{f}\|_{C(X)} = \max_{x \in X} |\tilde{f}(x)| = \sup_{x \in AB} |g(x)| = \sup_{y \in B} |g(Ay)| =$$
$$= \sup_{y \in B} |A'g(y)| = \sup_{y \in B} |f(y)| = \|f\|_{L_1'}.$$

Остается проверить, что функции $\tilde{f}$, соответствующие функционалам $f \in A'M$, образуют равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное семейство. Это вытекает из оценок

$$|\tilde{f}(x)| \leqslant \|f\|_{L_1'} \leqslant \|A\| \|g\|_{L_2'} \leqslant \|A\| \cdot \operatorname{diam} M,$$

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leqslant \|g\|_{L_2} \|x - y\|_{L_2} \leqslant \operatorname{diam} M \cdot \|x - y\|_{L_2},$$

где $\operatorname{diam} M = \sup_{g \in M} \|g\|_{L_2'}$. Теорема доказана.

Одно из самых полезных свойств компактных операторов описывает

Теорема 17. *Компактные операторы переводят слабо сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся.*

Доказательство. Пусть $A\colon L_1 \to L_2$ — компактный оператор и $x_n \rightharpoonup x$ в L_1. По теореме 10 последовательность $\{x_n\}$ ограничена по норме. Поэтому последовательность $\{Ax_n\}$ предкомпактна. Значит, существует подпоследовательность $\{Ax_{n_k}\}$, сходящаяся к некоторому вектору $y \in L_2$. Покажем, что и вся последовательность $\{Ax_n\}$ сходится к y. Действительно, в противном случае нашлось бы $\varepsilon > 0$ и бесконечная подпоследовательность $\{Ax_{m_k}\}$, обладающая свойством $\|Ax_{m_k} - y\| \geqslant \varepsilon$. Так как $\{Ax_{m_k}\}$ — предкомпактное множество, оно обладает подпоследовательностью, сходящейся к некоторому вектору $z \in L_2$. Можно считать, что $\{Ax_{m_k}\}$ и есть эта подпоследовательность. Ясно, что $\|y - z\| \geqslant \varepsilon$. По следствию 1 из теоремы Хана — Банаха существует такой линейный функционал $f \in L_2'$, что $f(y) \neq f(z)$. Пусть $\varphi = A'f \in L_1'$. Тогда $\varphi(x_{n_k}) = f(Ax_{n_k}) \to f(y)$, $\varphi(x_{m_k}) = f(Ax_{m_k}) \to f(z)$. Это противоречит сходимости последовательности $\varphi(x_n)$. Теорема доказана.

Замечание. В рефлексивных пространствах с сепарабельным сопряженным доказанное свойство компактных операторов является характеристическим: всякий ограниченный оператор, переводящий слабо сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся, является компактным. В самом деле, в этом случае слабая топология на ограниченных множествах метризуема и поэтому определяется сходимостью последовательностей. Поэтому наш оператор непрерывен на ограниченных множествах, если снабдить L_1 слабой, а L_2 сильной топологией. Так как ограниченные множества слабо предкомпактны, их образы сильно предкомпактны.

3. Теория фредгольмовых операторов. Пусть L_1 и L_2 — банаховы пространства и $T \in \mathscr{L}(L_1, L_2)$. Уравнение

$$T(x) = y, \quad x \in L_1, \quad y \in L_2, \tag{14}$$

является естественным обобщением системы линейных алгебраических уравнений на бесконечномерный случай. Оказывается, что при некоторых дополнительных предположениях теория таких систем почти полностью аналогична конечномерной теории. Однако имеется и различие. Помимо более сложных доказательств, в бесконечномерной ситуации возникает новое понятие — индекс линейного оператора. Для введения этого понятия нам понадобятся некоторые приготовления. Будем обозначать через $\ker T$ *ядро* оператора T, т. е. совокупность всех решений уравнения

$$Tx = 0, \quad x \in L_1. \tag{15}$$

Через $\operatorname{im} T$ обозначим *образ* оператора T, т. е. совокупность тех $y \in L_2$, для которых разрешимо уравнение (14). Ясно, что $\ker T$ — замкнутое подпространство (как прообраз точки при непрерывном отображении). Множество $\operatorname{im} T$ не всегда замкнуто (см. задачу 350). Мы будем вместе с оператором T рассматривать сопряженный оператор $T' = \mathscr{L}(L_2', L_1')$ и соответствующие уравнения

$$T'g = f, \quad g \in L_2', \quad f \in L_1', \tag{16}$$

$$T'g = 0, \quad g \in L_2'. \tag{17}$$

Если $\operatorname{im} T$ и $\operatorname{im} T'$ — замкнутые подпространства, то можно определить банаховы пространства

$$\operatorname{coker} T = L_2/\operatorname{im} T, \quad \operatorname{coker} T' = L_1'/\operatorname{im} T'.$$

Они называются *коядром* операторов T и T' соответственно. Положим

$$\alpha(T) = \dim \ker T, \quad \beta(T) = \dim \operatorname{coker} T,$$

$$i(T) = \alpha(T) - \beta(T).$$

Оператор T назовем *фредгольмовым*, если числа $\alpha(T)$, $\beta(T)$ конечны. В этом случае число $i(T)$ называется *индексом* оператора T.

В конечномерном случае, когда $\dim L_1 = N_1$, $\dim L_2 = N_2$, легко проверить равенства

$$\begin{gathered} N_1 - \alpha(T) = N_2 - \beta(T) = \operatorname{rang} T, \\ N_2 - \alpha(T') = N_1 - \beta(T') = \operatorname{rang} T', \end{gathered} \tag{18}$$

которые в сочетании с равенством $\operatorname{rang} T = \operatorname{rang} T'$ (теорема о ранге матрицы) дают соотношения

$$\alpha(T) = \beta(T'), \quad \beta(T) = \alpha(T'), \quad i(T) = -i(T'). \tag{19}$$

Цель этого пункта — доказать соотношения (19) в бесконечномерном случае (для фредгольмовых операторов) и дать удобные критерии для вычисления индекса и для разрешимости уравнений (14) — (17).

Пусть задана последовательность линейных пространств и линейных операторов:

$$\ldots \to L_{k-1} \xrightarrow{T_k} L_k \xrightarrow{T_{k+1}} L_{k+1} \to \ldots \tag{20}$$

Эта последовательность называется *точной в члене* L_k, если $\operatorname{im} T_k = \ker T_{k+1}$. Говорят, что последовательность (20) *точна*, если она точна в каждом члене. Ясно, что точность в члене L_k влечет равенство $T_{k+1} \circ T_k = 0$. Последнее свойство получило название *полуточности*. Если последовательность (20) полуточна в члене L_k, то $\operatorname{im} T_k \subset \ker T_{k+1}$. Факторпространство $H_k = \ker T_{k+1}/\operatorname{im} T_k$ измеряет «отклонение от точности» в члене L_k. Оно называется k-м *пространством когомологий* последовательности (20). Если $H_k = \{0\}$ для всех k, то последовательность (20) точна.

Нас будет интересовать случай, когда все пространства L_k — банаховы, а операторы T_k непрерывны. Основной результат в этом случае

Теорема 18. *Пусть дана точная последовательность (20) банаховых пространств и непрерывных операторов.*

Тогда сопряженная последовательность

$$\ldots \leftarrow L'_{k-1} \xleftarrow{T'_k} L'_k \xleftarrow{T'_{k+1}} L'_{k+1} \leftarrow \ldots \tag{21}$$

также точна.

Доказательство. Рассмотрим сначала один частный случай. А именно, пусть последовательность (20) имеет вид

$$0 \to L_1 \xrightarrow{T} L_2 \to 0, \tag{22}$$

где 0 означает тривиальное (нульмерное) пространство, и соответственно последовательность (21) — вид

$$0 \leftarrow L'_1 \xleftarrow{T'} L'_2 \leftarrow 0. \tag{23}$$

Точность последовательности (22) означает, что $\ker T = \{0\}$ и $\operatorname{im} T = L_2$, т. е. T — изоморфизм линейных (но не банаховых!) пространств L_1 и L_2. По теореме Банаха об обратном операторе, T^{-1} непрерывен и, следовательно, T осуществляет топологический изоморфизм (линейный гомеоморфизм) банаховых пространств L_1 и L_2. Поэтому T' — топологический изоморфизм L'_2 и L'_1. Отсюда вытекает точность последовательности (23). Итак, справедливость теоремы 18 в этом простейшем частном случае следует из теоремы Банаха. Можно проверить, что верно и обратное: теорема Банаха является следствием рассмотренного случая теоремы 18.

Вернемся к рассмотрению общего случая. Полуточность сопряженной последовательности очевидна, так как $T'_k \circ T'_{k+1} = (T_{k+1} \circ T_k)' = 0$. Остается доказать, что $\operatorname{im} T'_{k+1} \supset \ker T'_k$. Пусть $f \in \ker T'_k$. Это означает, что функционал $f \in L'_k$ обращается в нуль на $\operatorname{im} T_k = \ker T_{k+1}$. Значит, он определяет некоторый линейный функционал F_0 на подпространстве $\operatorname{im} T_{k+1} \subset L_{k+1}$ по формуле $F_0(T_{k+1}(x)) = f(x)$. На пространстве $\operatorname{im} T_{k+1}$ есть две нормы: одна — заимствованная из L_{k+1}, другая — перенесенная из $L_k/\ker T_{k+1}$ с помощью оператора T_{k+1}. Так как T_{k+1} ограничен, первая норма мажорируется второй. По теореме Банаха, эти нормы должны быть эквивалентны. Значит, F_0 непрерывен в топологии L_{k+1} и по теореме Хана — Банаха допускает непрерывное продолжение до функционала $F \in L'_{k+1}$. Ясно, что $T'_{k+1}F = f$, и теорема доказана.

Эта теорема допускает обращение и обобщение (см. задачи 355, 356).

Теорема 19. *Пусть T — фредгольмов оператор из $\mathscr{L}(L_1, L_2)$. Тогда $T' \in \mathscr{L}(L_2', L_1')$ также фредгольмов и справедливы равенства* (19).

Доказательство. По определению пространств $\ker T$ и $\operatorname{coker} T$ имеет место точность последовательности

$$0 \to \ker T \xrightarrow{i} L_1 \xrightarrow{T} L_2 \xrightarrow{p} \operatorname{coker} T \to 0,$$

где i — вложение, а p — естественная проекция. По теореме 17 отсюда следует точность последовательности

$$0 \leftarrow (\ker T)' \xleftarrow{i'} L_1' \xleftarrow{T'} L_2' \xleftarrow{p'} (\operatorname{coker} T)' \leftarrow 0.$$

А это означает, что имеют место изоморфизмы

$$\ker T' \approx (\operatorname{coker} T)', \quad \operatorname{coker} T' \approx (\ker T)'. \tag{24}$$

Отсюда вытекает фредгольмовость T' и справедливость равенств (18) и (19).

Примером фредгольмова оператора может служить любой обратимый оператор $T \in \mathscr{L}(L_1, L_2)$, т. е. такой, для которого существует оператор $S \in \mathscr{L}(L_2, L_1)$, обладающий свойствами: $T \circ S = 1_{L_2}$, $S \circ T = 1_{L_1}$. В этом случае $\alpha(T) = \beta(T) = 0$. Оказывается, что фредгольмовы операторы в определенном смысле близки к обратимым.

Назовем оператор $T \in \mathscr{L}(L_1, L_2)$ *почти обратимым*, если найдутся такие операторы S_1 и S_2 в $\mathscr{L}(L_2, L_1)$, что

$$S_1 \circ T = 1_{L_1} + K_1, \quad T \circ S_2 = 1_{L_2} + K_2, \tag{25}$$

где $K_1 \in \operatorname{End} L_1$ и $K_2 \in \operatorname{End} L_2$ — компактные операторы.

Теорема 20 (С. М. Никольский). *Каждый фредгольмов оператор почти обратим. Более того, операторы S_1 и S_2 можно выбрать так, чтобы K_1 и K_2 были операторами конечного ранга.*

Доказательство. Покажем, что существуют такое замкнутое подпространство $M \subset L_1$ и такое конечномерное подпространство $N \subset L_2$, что $L_1 = \ker T \oplus M$, $L_2 = \operatorname{im} T \oplus N$. Выберем в $\ker T$ базис $x_1, \ldots, x_{\alpha(T)}$ и в $(\ker T)'$ — дуальный базис $f_1, f_2, \ldots, f_{\alpha(T)}$. (Дуальность этих базисов означает, что $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ *) $(i, j = 1, \ldots, \alpha(T))$.) Продолжим по теореме Хана — Банаха функционалы f_i до линейных непрерывных функционалов $F_i \in L_1'$ и положим $M = \bigcap_{i=1}^{\alpha(T)} \ker F_i$.

*) δ_{ij}, как обычно, означает символ Кронекера: $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Тогда для каждого $x \in L_1$ существует и единственно представление в виде

$$x = \sum_{i=1}^{\alpha(T)} c_i x_i + y, \text{ где } y \in M. \tag{26}$$

В самом деле, применяя к обеим частям равенства F_i, мы видим, что $c_i = F_i(x)$. Обратно, при таком выборе коэффициентов c_i вектор y обязан лежать в M. Значит, $L_1 = \ker T \oplus M$.

Пусть теперь $\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_{\beta(T)}$ — базис в $\operatorname{coker} T = L_2/\operatorname{im} T$, и пусть z_i — представитель класса $\tilde{z}_i$. Обозначим через N линейную оболочку векторов z_i $(1 \leqslant i \leqslant \beta(T))$. Пусть z — любой вектор из L_2, $\tilde{z}$ — его образ в $\operatorname{coker} T$. Тогда существует и единственно разложение $\tilde{z} = \sum_{i=1}^{\beta(T)} c_i \tilde{z}_i$, откуда следует существование и единственность представления z в виде

$$z = \sum_{i=1}^{\beta(T)} c_i z_i + t, \text{ где } t \in \operatorname{im} T. \tag{27}$$

Значит, $L_2 = \operatorname{im} T \oplus N$. По теореме Банаха оператор $T|_M$ осуществляет топологический изоморфизм M и $\operatorname{im} T$. Обозначим через $\check{T}$ оператор, обратный к $T|_M$, и определим оператор $S \in \mathscr{L}(L_2, L_1)$ равенством

$$S(z) = \check{T}(t), \tag{28}$$

где $z \in L_2$ и $t \in \operatorname{im} T$ связаны равенством (27). Операторы ST и TS легко вычисляются в явном виде с помощью разложений (26) и (27):

$$S \circ T(x) = S \circ T\left(\sum_{i=1}^{\alpha(T)} c_i x_i + y\right) = S \circ T(y) = y,$$

$$T \circ S(z) = T \circ S\left(\sum_{j=1}^{\beta(T)} c_j z_j + t\right) = T \circ \check{T}(t) = t.$$

Отсюда $K_1 = ST - 1_{L_1}$: $x \mapsto -\sum_{i=1}^{\alpha(T)} F_i(x) x_i$, $K_2 = TS - 1_{L_2}$: $z \mapsto -\sum_{j=1}^{\beta(T)} c_j z_j$, где c_j — координаты вектора $\tilde{z}$ в базисе $\{\tilde{z}_i\}$. Теорема доказана.

Отметим, что операторы K_1 и K_2, построенные в доказательстве теоремы, являются проекторами (на пространство $\ker T$ параллельно M и на пространство N параллельно $\operatorname{im} T$ соответственно).

Теорема 21 (Ф. Рисс). *Если $K \in \operatorname{End} L$ — компактный оператор, то оператор $T = 1 - K$ — фредгольмов.*

Доказательство. Пространство $\ker T$ состоит из тех векторов x, для которых $K(x) = x$. Поэтому оператор K в пространстве $\ker T$ является одновременно компактным и единичным. Отсюда следует конечномерность $\ker T$ (ср. с задачей 339).

Выберем, как и в доказательстве теоремы 20, замкнутое подпространство $M \subset L$, дополнительное к $\ker T$. Оператор T взаимно однозначно отображает M на $\operatorname{im} T$. Пусть $\breve{T}$ — обратное отображение. Покажем, что оператор $\breve{T}$ ограничен (т. е. $\|\breve{T}(y)\|/\|y\| \leqslant c < \infty$ для всех $y \in \operatorname{im} T$). В противном случае можно было бы найти последовательность векторов единичной длины $\{x_n\} \subset M$, для которых $y_n = T(x_n) \to 0$. Но $T(x_n) = x_n - K(x_n)$. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, и, следовательно, последовательность $\{K(x_n)\}$ предкомпактна. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, мы можем считать, что $\{K(x_n)\}$ имеет предел x. Так как $T(x_n) \to 0$, отсюда следует, что $x_n \to x$. Вектор x лежит в M (так как M замкнуто), имеет единичную норму (как предел x_n) и обладает свойством $T(x) = 0$ (так как T непрерывен, а $T(x_n) \to 0$). Значит, $x \in M \cap \ker T$, что невозможно. Мы доказали ограниченность $\breve{T}$. Выведем отсюда замкнутость $\operatorname{im} T$.

Пусть $y_n \in \operatorname{im} T$ и $y_n \to y$. Тогда последовательность y_n фундаментальна и, значит, фундаментальна и последовательность $x_n = \breve{T}(y_n)$. Поскольку M полно (см. теорему 2 гл. I), существует $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тогда $T(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Замкнутость $\operatorname{im} T$ доказана. Осталось доказать неравенство $\beta(T) < \infty$, т. е. конечномерность $\operatorname{coker} T$. Это следует из соотношений (24) и уже доказанного утверждения о конечномерности ядра, примененного к оператору T'. (Мы используем здесь теорему о том, что оператор K' компактен, если компактен K.)

Выведем теперь из всего сказанного выше

Критерий фредгольмовости. *Оператор $T \in \mathscr{L}(L_1, L_2)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда он почти обратим.*

Доказательство. Вторая часть критерия составляет утверждение теоремы 20. Докажем первую часть.

Пусть T почти обратим, т. е. выполнены равенства (25). Тогда $\ker T \subset \ker S_1 \circ T = \ker(1+K_1)$. Последнее пространство конечномерно по теореме Рисса. Далее, $\operatorname{im} T \supset \operatorname{im} T \circ S_2 = \operatorname{im}(1+K_2)$. Последнее пространство замкнуто и имеет конечную коразмерность в L_2 по теореме Рисса. Тогда $\operatorname{im} T$ обладает теми же свойствами (как прообраз $\operatorname{im} T/\operatorname{im} T \circ S_2 \subset L_2/\operatorname{im} T \circ S_2$), что и завершает доказательство критерия.

Обозначим множество всех фредгольмовых операторов из L_1 в L_2 через $\mathcal{F}(L_1, L_2)$.

Теорема 22. *Множество $\mathcal{F}(L_1, L_2)$ открыто в $\mathcal{L}(L_1, L_2)$ (относительно равномерной топологии) и инвариантно относительно сдвигов на элементы $\mathcal{K}(L_1, L_2)$.*

Доказательство. Пусть $T \in \mathcal{F}(L_1, L_2)$. Тогда T почти обратим и справедливы соотношения (25). Пусть норма оператора $A \in \mathcal{L}(L_1, L_2)$ строго меньше каждого из чисел $\|S_1\|^{-1}$, $\|S_2\|^{-1}$. Тогда операторы $1+S_1A$ и $1+AS_2$ обратимы. (Если $\|B\|<1$, то в качестве $(1+B)^{-1}$ можно взять сумму сходящегося ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-B)^k$.) Поэтому

$$(1+S_1A)^{-1}S_1(T+A)=(1+S_1A)^{-1}(1+K_1+S_1A)=$$
$$=1+(1+S_1A)^{-1}K_1=1+\tilde{K}_1,$$
$$(T+A)S_2(1+AS_2)^{-1}=(1+K_2+AS_2)^{-1}=$$
$$=1+K_2(1+AS_2)^{-1}=1+\tilde{K}_2,$$

что доказывает почти обратимость оператора $T+A$. Значит, $\mathcal{F}(L_1, L_2)$ содержит окрестность точки T.

Пусть теперь $T \in \mathcal{F}(L_1, L_2)$, $K \in \mathcal{K}(L_1, L_2)$. Равенства

$$S_1(T+K)=1+K_1+S_1K=1+\tilde{K}_1,$$
$$(T+K)S_2=1+K_2+KS_2=1+\tilde{K}_2$$

показывают почти обратимость $T+K$. (Мы использовали тот факт, что произведение компактного оператора на ограниченный есть компактный оператор.) Теорема доказана.

Теорема 23. *Функция i (индекс) локально постоянна на $\mathcal{F}(L_1, L_2)$, не меняется при сдвигах на элементы $\mathcal{K}(L_1, L_2)$ и обладает свойством $i(AB)=i(A)+i(B)$, где $A \in \mathcal{F}(L_0, L_2)$, $B \in \mathcal{F}(L_1, L_0)$.*

Доказательство. Докажем сначала полезную техническую лемму, позволяющую иногда явно вычислить индекс оператора. Пусть пространства L_1 и L_2 разложены в прямые суммы замкнутых подпространств $L_i = M_i \oplus N_i$

$(i=1,\ 2)$. Тогда каждый оператор $T\in\mathscr{L}(L_1,\ L_2)$ может быть записан в виде операторной матрицы второго порядка: $T=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$, где $A\in\mathscr{L}(N_1,\ N_2)$, $B\in\mathscr{L}(M_1,\ N_2)$, $C\in\in\mathscr{L}(N_1,\ M_2)$, $D\in\mathscr{L}(M_1,\ M_2)$.

Лемма. *Если оператор T фредгольмов, а D обратим, то $i(T)=i(A-BD^{-1}C)$.*

Доказательство леммы. Заметим, что умножение оператора T слева или справа на обратимый оператор не меняет чисел $\alpha(T)$ и $\beta(T)$, а значит, и индекс T. Поэтому

$$i(T)=i\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=i\left[\begin{pmatrix}1 & -BD^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -D^{-1}C & 1\end{pmatrix}\right]=$$

$$=i\begin{pmatrix}A-BD^{-1}C & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}.$$

Если оператор T имеет вид $\begin{pmatrix}T_1 & 0\\ 0 & T_2\end{pmatrix}$ (его естественно записать как $T_1\oplus T_2$), то $\ker T=\ker T_1\oplus\ker T_2$, $\operatorname{coker} T=\operatorname{coker} T_1\oplus\operatorname{coker} T_2$. Отсюда $i(T)=i(T_1)+i(T_2)$. В нашем случае $i(T)=i(A-BD^{-1}C)+i(D)=i(A-BD^{-1}C)$. Лемма доказана.

Пусть теперь $T_0\in\mathscr{F}(L_1,\ L_2)$. Положим $N_1=\ker T_0$, $M_2=\operatorname{im} T_0$ и построим замкнутое подпространство $M_1\subset L_1$ и конечномерное подпространство $N_2\subset L_2$, как в доказательстве теоремы 20. Тогда оператор T_0 имеет вид $\begin{pmatrix}A_0 & B_0\\ C_0 & D_0\end{pmatrix}$, где D_0 — обратимый оператор. Любой оператор T, достаточно близкий по норме к T_0, имеет вид $\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$, где D — обратимый оператор. В силу доказанной леммы T зависит только от размерности N_1 и N_2: $i(T)=i(A-BD^{-1}C)=\dim N_1-\dim N_2$ (см. (18)).

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть $T\in\in\mathscr{F}(L_1,\ L_2)$, $K\in\mathscr{K}(L_1,\ L_2)$. Рассмотрим функцию $\varphi(t)=i(T+tK)$, определенную на всей вещественной прямой (так как множество $\mathscr{F}(L_1,\ L_2)$ инвариантно относительно сдвигов на элементы $\mathscr{K}(L_1,\ L_2)$). В силу уже доказанного утверждения эта функция локально постоянна и, следовательно, постоянна на любом связном множестве, в частности на прямой. Значит, $i(T)=\varphi(0)=\varphi(1)=i(T+K)$.

Докажем третье утверждение. Для этого рассмотрим вспомогательный оператор $A\oplus B$, действующий из $L_0\oplus L_1$ в $L_2\oplus L_0$. Как уже отмечалось выше, $i(A\oplus B)=i(A)+$

$+i(B)$. Далее, при достаточно малом ε справедливо равенство

$$i\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} A & 0 \\ \varepsilon 1_{L_0} & B \end{pmatrix} =$$

$$= i\left[\begin{pmatrix} 1_{L_2} & -\varepsilon^{-1}A \\ 0 & 1_{L_0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ \varepsilon 1_{L_0} & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon^{-1}1_{L_0} & B \\ 0 & -\varepsilon 1_{L_1} \end{pmatrix}\right] = i\begin{pmatrix} 0 & AB \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i(AB).$$

Теорема доказана.

Альтернатива Фредгольма. *Пусть L — банахово пространство, K — компактный оператор в L, λ — число, отличное от нуля. Рассмотрим четыре уравнения:*

1) $Kx - \lambda x = y$,
2) $Kx - \lambda x = 0$,
3) $K'f - \lambda f = g$,
4) $K'f - \lambda f = 0$,

где $x, y \in L$, $f, g \in L'$. Тогда либо а) *уравнения* 2) *и* 4) *имеют лишь тривиальное решение, а уравнения* 1) *и* 3) *однозначно и корректно разрешимы при любой правой части, либо* б) *уравнение* 2) *имеет конечномерное пространство решений $L_1 \subset L$, а уравнение* 4) — *конечномерное пространство решений $L_2 \subset L'$, причем $\dim L_1 = \dim L_2$. Уравнение* 1) *разрешимо в точности для тех $y \in L$, для которых $f(y) = 0$ для всех $f \in L_2$. Уравнение* 3) *разрешимо в точности для тех $g \in L'$, для которых $g(x) = 0$ для всех $x \in L_1$.*

Доказательство. Оператор $\lambda 1$ обратим и, следовательно, является фредгольмовым оператором с нулевым индексом. Этими же свойствами по теореме 23 обладает оператор $T = K - \lambda 1$. Первый случай альтернативы соответствует равенству $\alpha(T) = 0$. Тогда $\beta(T) = \alpha(T) + i(T) = 0$, откуда $\alpha(T') = \beta(T') = 0$. Поэтому $\ker T = \ker T' = \{0\}$, $\operatorname{im} T = L$, $\operatorname{im} T' = L'$. Корректная разрешимость уравнений 1) и 3) (т. е. непрерывность T^{-1} и $(T')^{-1}$) следует из теоремы Банаха.

Второй случай альтернативы характеризуется неравенством $\alpha(T) \neq 0$. Тогда, поскольку T фредгольмов, $\alpha(T) < \infty$. Поскольку в силу формул (19) $-i(T) = i(T') = 0$, мы имеем $\beta(T) = \alpha(T)$, $\alpha(T') = \beta(T') = \alpha(T)$. Кроме того, $\ker T' = (\operatorname{im} T)^{\perp}$ *), $\operatorname{im} T' = (\ker T)^{\perp}$. Теорема доказана.

---

*) Если L — ЛТП, L' — сопряженное пространство и X — подмножество в L, то через $X^{\perp}$ обозначается совокупность всех $f \in L'$ таких, что $f(x) = 0$ для всех $x \in X$.

Отметим, что из альтернативы Фредгольма вытекает следующее спектральное свойство компактных операторов: если $\lambda \neq 0$ — точка спектра (т. е. оператор $K - \lambda 1$ необратим), то λ — собственное значение конечной кратности.

§ 4. Функциональные пространства и обобщенные функции

1. Пространства интегрируемых функций. Пусть X — множество с мерой μ. Через $L_p(X, \mu)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ мы обозначим совокупность классов эквивалентности μ-измеримых функций с суммируемой p-й степенью. Положим для $f \in L_p(X, \mu)$

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

(Здесь мы не делаем различия между классом эквивалентности $f \in L_p(X, \mu)$ и конкретной функцией $f(x) \in f$.) Априори не ясно, что $L_p(X, \mu)$ — линейное нормированное пространство при $p \neq 1$. Этот факт является следствием неравенства Минковского: $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$, которое в свою очередь вытекает из неравенства Гёльдера: $\left|\int_X fg \, d\mu\right| \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$, если $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (ср. с задачами 370, 371). В случае точечной σ-конечной меры эти неравенства превращаются в соответствующие неравенства для последовательностей.

Введем еще пространство $L_\infty(X, \mu)$ существенно ограниченных μ-измеримых функций (ср. с п. 1 § 3 гл. II).

Теорема 24. *Пространства $L_p(X, \mu)$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ являются банаховыми. Пространство, сопряженное к $L_p(X, \mu)$, при $1 \leqslant p < \infty$ изоморфно пространству $L_q(X, \mu)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Доказательство. Пусть F — линейный непрерывный функционал на $L_p(X, \mu)$. Если $A \subset X$ — множество конечной меры, то его характеристическая функция χ_A принадлежит $L_p(X, \mu)$. Положим $\nu(A) = F(\chi_A)$ и проверим, что ν — заряд на кольце измеримых подмножеств X. Аддитивность ν вытекает из линейности F. Абсолютная непрерывность ν относительно меры μ следует из оценки $|\nu(A)| \leqslant \|F\|_{L_p'} \|\chi_A\|_{L_p} = \|F\|_{L_p'} \mu(A)^{1/p}$. По теореме Радона — Никодима (см. гл. II, § 3, п. 3) существует такая μ-измеримая функция g на X, что $\nu(A)=\int\limits_A g(x)\,d\mu(x)$ для любого множества A конечной меры. Покажем, что $g\in L_q(X,\mu)$. Для этого заметим, что в силу замечания к неравенству Гёльдера (см. задачу 370) для любой μ-измеримой функции g справедливо равенство

$$\|g\|_q=\sup_{\|f\|_p\leqslant 1}\left|\int\limits_X fg\,d\mu\right|. \tag{29}$$

Ясно также, что верхнюю грань в правой части (29) достаточно брать по простым функциям f из $L_p(X,\mu)$. Но для функции вида $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{N}c_k\chi_{E_k}(x)$ имеем

$$\int\limits_X f(x)\,g(x)\,d\mu=\sum_{k=1}^{N}c_k\int\limits_{E_k}g(x)\,d\mu=\sum_{k=1}^{N}c_k\nu(E_k)=F(f).$$

Поэтому правая часть в (29) ограничена числом $\|F\|_{L_p'}$. Значит, $g\in L_q(X,\mu)$. По неравенству Гёльдера выражение $F_g(f)=\int\limits_X f(x)\,g(x)\,d\mu(x)$ является линейным непрерывным функционалом на $L_p(X,\mu)$. Так как F и F_g совпадают на простых функциях, они совпадают всюду на $L_p(X,\mu)$. Применяя еще раз соотношение (29), мы видим, что $\|g\|_q=\|F\|_{L_p'}$. Тем самым доказан изоморфизм $L_p'(X,\mu)=L_q(X,\mu)$. Полнота $L_p(X,\mu)$ в случае $1<p\leqslant\infty$ следует теперь из общей теоремы о полноте сопряженного пространства (см. гл. III). Полнота $L_1(X,\mu)$ была доказана в гл. II, § 3.

Утверждение теоремы 24 об изоморфизме $L_p'(X,\mu)$ и $L_q(X,\mu)$ при $p=\infty$ перестает быть верным. Пространство $L_\infty'(X,\mu)$ не изоморфно $L_1(X,\mu)$, за исключением тривиального случая, когда оно конечномерно. Можно показать, что бесконечномерное пространство $L_1(X,\mu)$ для неточечной меры μ вообще не является сопряженным к какому-либо банахову пространству. (Ср. с задачей 390.)

2. Пространства непрерывных функций. Пусть X — компакт. Пространство $C(X)$ состоит из всех непрерывных функций на X. Норма в $C(X)$ определяется формулой

$$\|f\|=\max_{x\in X}|f(x)|.$$

Легко проверяется (см. задачу 392), что $C(X)$ — банахово пространство.

Теорема 25. *Всякое банахово пространство L изоморфно замкнутому подпространству в одном из пространств типа $C(X)$. Если L сепарабельно, то в качестве X можно взять отрезок* $[0, 1]$.

Доказательство. Пусть X — единичный шар в пространстве L', сопряженном к L. Тогда X — компакт в $*$-слабой топологии (см. теорему 13 и [14]). Каждый элемент пространства L можно рассматривать как линейную функцию на X. В силу сказанного в п. 2 § 1 получаемое таким образом отображение L в $C(X)$ является изоморфизмом на замкнутое подпространство всех линейных функций на X. Пусть известно, что L сепарабельно. Тогда $X \subset L'$ — метризуемое топологическое пространство (см. § 2). Если X — выпуклый метрический компакт в линейном пространстве, то существует непрерывное отображение f отрезка $[0, 1]$ на X (см. задачу 403). Определим теперь отображение L в $C[0, 1]$: $\varphi \mapsto \Phi(t) = [f(t)](\varphi)$. В силу сказанного выше это отображение является изоморфизмом L на некоторое замкнутое подпространство в $C[0, 1]$.

Теорема 26. *Пространство, сопряженное к $C[0, 1]$, изоморфно пространству $V[0, 1]$ функций с ограниченной вариацией на отрезке $[0, 1]$, непрерывных слева всюду, кроме, быть может, правого конца отрезка, и удовлетворяющих условию $g(0) = 0$, с нормой $\|g\| = \mathrm{Var}_0^1 g$.*

Доказательство. Пусть $g \in V[0, 1]$, $f \in C[0, 1]$. Положим $F_g(f) = \int\limits_0^1 f(x)\,dg(x)$. Для любого разбиения $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n = 1$ и любых $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,[g(t_i) - g(t_{i-1})] \leqslant \|f\|_{C[0,1]}\,\|g\|_{V[0,1]}.$$

С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение T отрезка $[0, 1]$, что $\sum\limits_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| > \mathrm{Var}_0^1 g - \varepsilon$. Мы можем и будем считать, что во внутренних точках разбиения T функция g непрерывна. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность непрерывных функций таких, что $|f_n(x)| \leqslant 1$ и $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \operatorname{sgn}[g(t_k) - g(t_{k-1})]$, $x \in [t_{k-1}, t_k)$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)\,dg(x)=\sum\limits_{x=1}^{n}|g(t_k)-g(t_{k-1})|$. Поэтому при достаточно большом $n\int\limits_0^1 f_n\,dg(x)>\mathrm{Var}_0^1 g-\varepsilon$. Отсюда $\|F_g\|_{C'[0,1]}=\|g\|_{V[0,1]}$.

Остается доказать, что любой линейный непрерывный функционал F на $C[0, 1]$ имеет вид F_g с некоторой $g\in\in V[0, 1]$. Продолжим F по теореме Банаха до функционала $\widetilde{F}$ на пространстве $B[0, 1]$ ограниченных функций с нормой $\|f\|=\sup|f(x)|$. Пусть χ_a — характеристическая функция полуинтервала $[0, a)$. Положим $g(a)=\langle\widetilde{F}, \chi_a\rangle$. Ясно, что $g(0)=0$. Покажем, что $\mathrm{Var}_0^1 g(x)<\infty$. Для любого разбиения T положим $\varepsilon_T(x)=\mathrm{sgn}\,[g(t_k)-g(t_{k-1})]$, $x\in[t_{k-1}, t_k)$. Тогда $\langle\widetilde{F}, \varepsilon_T\rangle=\sum\limits_{k=1}^{n}|g(t_k)-g(t_{k-1})|$, откуда $\mathrm{Var}_0^1 g\leqslant\|\widetilde{F}\|=\|F\|$.

Для любой кусочно постоянной непрерывной справа функции φ на $[0, 1]$ имеем: $\langle\widetilde{F}, \varphi\rangle=\int\limits_0^1\varphi(x)\,dg(x)$. Непрерывная функция f может быть равномерно приближена такими φ_n, как, например, $\varphi_n(x)=f([nx]/n)$. Поэтому равенство $\langle\widetilde{F}, f\rangle=\int\limits_0^1 f(x)\,dg(x)$ верно для всех непрерывных функций f. Остается заметить, что для непрерывных f замена $g(x)$ на $g(x-0)=\lim\limits_{\varepsilon\to+0} g(x-\varepsilon)$ не меняет интеграла Стилтьеса $\int\limits_0^1 f(x)\,dg(x)$. Поэтому можно считать g непрерывной слева.

Замечание. Теорема 26 допускает следующую эквивалентную формулировку:

Всякий линейный непрерывный функционал на $C[0, 1]$ *имеет вид*

$$F_\nu(f)=\int\limits_0^1 f(x)\,d\nu(x),$$

где ν — *некоторый борелевский заряд на* $[0, 1]$, *причем*

$$\|F_\nu\|_{C'[0,1]}=\mathrm{Var}_0^1\nu,$$

В этой форме теорема 26 переносится на пространство комплексных непрерывных функций (с заменой ν на комплексный заряд) и на пространство типа $C(X)$, где X — любой метрический компакт. Для произвольного компакта X первое утверждение теоремы остается верным, но соответствие между зарядами и линейными непрерывными функционалами перестает быть взаимно однозначным.

3. Пространства гладких функций. Пусть Ω — область (т. е. открытое подмножество) в $\mathbf{R}^n$, $\overline{\Omega}$ — замыкание Ω в $\mathbf{R}^n$. Мы будем использовать следующие стандартные обозначения: $x=(x_1, \ldots, x_n)$ — координаты в $\mathbf{R}^n$, $x^k = x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$ — оператор частной производной, $\partial^l = \partial_1^{l_1} \ldots \partial_n^{l_n}$, $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$. Через $C^r(\overline{\Omega})$ обозначается совокупность функций на $\overline{\Omega}$, обладающих частными производными до r-го порядка в точках Ω, причем $\partial^l f$ $(|l| \leqslant r)$ продолжаются до ограниченных непрерывных функций на $\overline{\Omega}$. Определим норму в $C^r(\overline{\Omega})$ формулой

$$\| f \|_{C^r(\overline{\Omega})} = \sup_{\substack{x \in \Omega \\ |l| \leqslant r}} \left| \partial^l f(x) \right|.$$

Таким образом, сходимость в $C^r(\overline{\Omega})$ означает равномерную сходимость самих функций и их частных производных до r-го порядка включительно. Несложно проверить, что $C^r(\overline{\Omega})$ — банахово пространство.

Пространства $C^r(\overline{\Omega})$ удобны в тех вопросах, в которых от рассматриваемых функций требуется вполне определенная конечная гладкость (т. е. наличие определенного количества непрерывных производных). Есть, однако, такие задачи, в которых требуется заранее неизвестная или бесконечная гладкость. В этих задачах естественно использовать пространства бесконечно дифференцируемых функций. Эти пространства локально выпуклы, но, как правило, ненормируемы, а иногда и неметризуемы.

Наибольшее применение находят три типа пространств.

1. Пространство $\mathscr{E}(\Omega)$ состоит из *всех бесконечно дифференцируемых* функций в Ω. Топология в $\mathscr{E}(\Omega)$ определяется семейством полунорм p_{Kl}, где K — компакт в Ω, а $l=(l_1, \ldots, l_n)$ — произвольный мультииндекс:

$$p_{Kl}(f) = \max_{x \in K} \left| \partial^l f(x) \right|. \tag{30}$$

Теорема 27. *Пространство $\mathscr{E}(\Omega)$ счетно-нормируемо (и, следовательно, метризуемо) и полно.*

Доказательство. Обозначим через K_m совокупность точек $x \in \Omega$, обладающих свойствами: 1) расстояние от x до границы области Ω *) (т. е. множества $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$) не меньше $1/m$; 2) расстояние от x до 0 не больше m.

Ясно, что K_m — компакт, что все точки K_m являются внутренними для K_{m+1} и что объединение K_m по всем m исчерпывает область Ω. Определим полунорму p_m в $\mathscr{E}(\Omega)$ формулой $p_m(f) = \sup\limits_{\substack{x \in K_m \\ |l| \leqslant m}} \left|\partial^l f(x)\right|$.

Пусть K — произвольный компакт в Ω. Функция $\delta(x) = d(x, \bar{\Omega} \setminus \Omega)$ непрерывна и положительна на K. Следовательно, она достигает минимума $\delta_0 > 0$. Функция $\Delta(x) = d(x, 0)$ непрерывна на K и, значит, достигает максимума Δ_0. Если число m выбрать так, что выполняются неравенства $1/m < \delta_0$, $m > \Delta_0$, то K_m будет содержать компакт K. Если, кроме того, выполняется неравенство $m \geqslant |l|$, то полунорма p_m мажорирует полунорму p_{Kl}. Мы доказали, что семейство полунорм $\{p_m\}$ мажорирует семейство $\{p_{Kl}\}$. Обратное очевидно: $p_m(f) \leqslant \sum\limits_{l=0}^{m} p_{K_m l}(f)$.

Осталось доказать полноту $\mathscr{E}(\Omega)$. Пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность. Тогда $\{f_n\}$ фундаментальна по любой полунорме p_m. Отсюда вытекает, что ограничение $\{f_n\}$ на K_m — фундаментальная последовательность в $C^m(K_m)$. Значит, существует такая функция $F_m \in C^m(K_m)$, что $f_n|_{K_m} \to F_m$ в метрике $C^m(K_m)$. Ясно, что функции F_m согласованы в том смысле, что $F_{m+1}|_{K_m} = F_m$. Поэтому существует единая функция f, совпадающая с F_m на K_m. По построению, $p_m(f_n - f) \to 0$ при $n \to \infty$. Это значит, что $f \in \mathscr{E}(\Omega)$ и $f_n \to f$ в топологии пространства $\mathscr{E}(\Omega)$.

Замечание. Пространство $\mathscr{E}(\Omega)$ часто обозначают $C^\infty(\Omega)$. Если граница Ω непуста, то $\mathscr{E}(\Omega)$ не совпадает с пересечением $C^k(\bar{\Omega})$ (функции из $\mathscr{E}(\Omega)$, вообще говоря, не продолжаются до непрерывных функций на $\bar{\Omega}$).

2. Пространство $\mathscr{D}(\Omega)$ состоит из *бесконечно дифференцируемых финитных* (т. е. равных нулю вне некоторого компакта) функций на Ω. *Носителем* функции φ на-

*) Под расстоянием до границы мы, как обычно, понимаем минимальное из расстояний до ее точек.

зывается замыкание множества тех точек, где φ отлична от нуля. Носитель φ обозначается символом $\operatorname{supp}\varphi$. Таким образом, $\mathcal{D}(\Omega)$ состоит из тех $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$, для которых $\operatorname{supp}\varphi$ — компакт. Легко проверить, что $\mathcal{D}(\Omega)$ не замкнуто в $\mathcal{E}(\Omega)$ и, значит, неполно в топологии $\mathcal{E}(\Omega)$.

Пусть K — компакт в Ω. Обозначим через $\mathcal{D}_K(\Omega)$ подпространство в $\mathcal{E}(\Omega)$, состоящее из тех φ, для которых $\operatorname{supp}\varphi \subset K$. Тогда $\mathcal{D}_K(\Omega)$ с топологией, заимствованной из $\mathcal{E}(\Omega)$, будет полным счетно-нормированным пространством (ср. с задачей 414). Определим теперь в $\mathcal{D}(\Omega)$ топологию, более сильную, чем наследуемая из $\mathcal{E}(\Omega)$. А именно, будем считать выпуклое множество $V \subset \mathcal{D}(\Omega)$ открытым (соотв. замкнутым), если его пересечение с $\mathcal{D}_K(\Omega)$ открыто (соотв. замкнуто) для любого компакта $K \subset \Omega$.

Получаемую таким образом топологию можно также задать с помощью семейства полунорм. Пусть $\{K_m\}$ — система компактов, построенная в доказательстве теоремы 27. Обозначим символом α последовательность $\{N_m\}$ целых неотрицательных чисел и положим

$$p_\alpha(\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} N_m \sup_{\substack{x \in K_m \setminus K_{m-1} \\ |l| \leqslant N_m}} \left| \partial^l \varphi(x) \right| \tag{31}$$

(здесь K_0 — пустое множество), Отметим, что для каждой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ряд в правой части (31) содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых. Мы предоставляем читателю проверить, что введенная таким образом (несчетная) система полунорм определяет описанную выше топологию.

Теорема 28. *Последовательность* $\{\varphi_n\}$ *сходится к* φ *в* $\mathcal{D}(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда*

1) $\varphi_n \to \varphi$ *в смысле* $\mathcal{E}(\Omega)$.

2) *все функции* φ_n (*а значит, и* φ) *принадлежат одному подпространству* $\mathcal{D}_K(\Omega)$.

Доказательство. Достаточность условий 1) и 2) очевидна так же, как и необходимость условия 1). Докажем необходимость условия 2). Пусть последовательность $\{\varphi_n\}$ такова, что носители φ_n не содержатся ни в каком фиксированном компакте. Производя, если нужно, перенумерацию, мы можем считать, что $\operatorname{supp}\varphi_m \not\subset K_m$. Пусть x_m — такая точка вне K_m, в которой φ_m отлична от нуля. Рассмотрим множество V, состоящее из всех функций $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, удовлетворяющих условиям $|\varphi(x_m)| <$

$< |\varphi_m(x_m)|/m$ для $m = 1, 2, 3, \ldots$ Поскольку любой компакт $K \subset \Omega$ содержит лишь конечное число точек x_m, пересечение V с $\mathcal{D}_K(\Omega)$ задается конечным числом условий и, следовательно, открыто в $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Значит, V открыто в $\mathcal{D}(\Omega)$. Пусть p_V — функционал Минковского для V. Легко видеть, что V — выпуклое уравновешенное множество, а тогда p_V — непрерывная полунорма в $\mathcal{D}(\Omega)$. Явный вид p_V дается формулой $p_V(\varphi) = \sup\limits_m \left|\dfrac{m\varphi(x_m)}{\varphi_m(x_m)}\right|$, откуда вытекает, что $p_V(\varphi_m) \geqslant m$. Поэтому последовательность $\{\varphi_m\}$ не может быть сходящейся. Теорема доказана.

Теорема 29. *Пространство $\mathcal{D}(\Omega)$ полно, неметризуемо и обладает свойством Гейне — Бореля: всякое ограниченное**) *подмножество в $\mathcal{D}(\Omega)$ предкомпактно.*

Доказательство. Если последовательность $\{\varphi_n\}$ фундаментальна, то рассуждение, приведенное в доказательстве теоремы 28, показывает, что вся эта последовательность лежит в одном подпространстве $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Поскольку $\mathcal{D}_K(\Omega)$ полно, эта последовательность имеет предел. Предположим теперь, что $\mathcal{D}(\Omega)$ метризуемо и пусть $\{\varphi_m\}$ — последовательность, для которой $\operatorname{supp}\varphi_m \not\subset K_m$. Из непрерывности умножения на число следует, что для каждого m можно указать настолько малое число $\delta_m > 0$, что $d(0, \delta_m\varphi_m) < 1/m$. Это значит, что последовательность $\{\delta_m\varphi_m\}$ стремится к нулю, что противоречит теореме 28. Таким образом, $\mathcal{D}(\Omega)$ неметризуемо. Пусть, наконец, A — ограниченное подмножество в $\mathcal{D}(\Omega)$. Рассуждение, уже использовавшееся выше, показывает, что $A \subset \mathcal{D}_K(\Omega)$ для некоторого компакта $K \subset \Omega$. Поскольку A ограничено по каждой полунорме p_{Kl}, все функции из A и все их частные производные удовлетворяют условиям теоремы Асколи — Арцела. Отсюда вытекает предкомпактность A в $\mathcal{D}_K(\Omega)$, значит, и в $\mathcal{D}(\Omega)$. Теорема доказана.

Замечание. Вместо обозначения $\mathcal{D}(\Omega)$ используется также $C_0^\infty(\Omega)$.

3. Пространство $S(\mathbf{R}^n)$ состоит из *бесконечно дифференцируемых и быстро убывающих на бесконечности* функций в $\mathbf{R}^n$. Топология в $S(\mathbf{R}^n)$ задается счетным семейством полунорм

$$p_{\alpha\beta}(f) = \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta f(x) \right|, \tag{32}$$

---

*) *Ограниченным множеством* в полинормированном пространстве называется множество, ограниченное по каждой из полунорм. (Ср. п. 1 § 2.)

где приняты стандартные сокращенные обозначения

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n), \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

$$\partial^\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \ldots \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_x^{\beta_n}}.$$

(Пространство $S(\mathbf{R}^n)$ состоит из всех $f \in \mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$, для которых $p_{\alpha\beta}(f) < \infty$ для всех α и β.)

Иногда бывает удобно вместо набора полунорм (32) рассматривать набор

$$p'_{\alpha\beta}(f) = \int_{\mathbf{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| \, dx \tag{32'}$$

или набор

$$p''_{\alpha\beta}(f) = \left(\int_{\mathbf{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \tag{32''}$$

Теорема 30. *Системы полунорм* (32), (32′) *и* (32″) *эквивалентны.*

Доказательство. Рассмотрим сначала более наглядный случай $n = 1$. Справедливо равенство

$$|x^k \partial^l f(x)| \leqslant \frac{1}{1+x^2} \sup_x |(x^2+1) x^k \partial^l f(x)|.$$

Отсюда

$$p'_{kl}(f) = \int_{\mathbf{R}} |x^k \partial^l f(x)| \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \sup_x |(x^2+1) x^k \partial^l f(x)| \int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{1+x^2} \leqslant \pi \left(p_{k+2,\,l}(f) + p_{kl}(f) \right).$$

Аналогично,

$$p''_{kl}(f) = \left(\int_{\mathbf{R}} |x^k \partial^l f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sup_x (1+x^2) |x^k \partial^l f(x)|^2 \int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{1+x^2} \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\pi \left(p^2_{k+1,\,l}(f) + p^2_{kl}(f) \right)}.$$

Таким образом, полунормы системы (32) мажорируют полунормы систем (32′) и (32″). Далее, применяя неравенство Коши — Буняковского к функциям

$$|x^k \partial^l f(x)| \sqrt{1+x^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

получаем

$$p'_{kl}(f)^2 = \\ = \left(\int\limits_{\mathbf{R}} |x^k \partial^l f(x)|\, dx\right)^2 \leqslant \int\limits_{\mathbf{R}} |x^k \partial^l f(x)|^2 (1+x^2)\, dx \int \frac{dx}{1+x^2} = \\ = \pi \left(p''_{k+1,\,l}(f)^2 + p''_{kl}(f)^2\right).$$

Значит, полунормы системы (32″) мажорируют полунормы системы (32′). Остается оценить полунормы системы (32′) через полунормы системы (32″). Воспользуемся тем, что для $f \in S(\mathbf{R})$ функции $x^k \partial^l f(x)$ при любых k и l стремятся к нулю на бесконечности и поэтому справедливо равенство

$$x^k \partial^l f(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} [t^k \partial^l f(t)]'\, dt. \tag{33}$$

Отсюда

$$p_{kl}(f) = \sup_x |x^k \partial^l f(x)| \leqslant \int\limits_{\mathbf{R}} |[t^k \partial^l f(t)]'|\, dt \leqslant \\ \leqslant k p'_{k-1,\,l}(f) + p'_{k,\,l+1}(f).$$

Случай $n > 1$ отличается лишь техническими усложнениями: вместо равенства $\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$ нужно использовать неравенство $\int\limits_{\mathbf{R}^n} \frac{dx}{1+\|x\|^{2n}} < \infty$, а вместо тождества (33) — тождество

$$\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \cdots \int\limits_{-\infty}^{x_n} \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}\, dx_1 \ldots dx_n,$$

справедливое для любой бесконечно дифференцируемой функции, которая вместе со своими производными стремится к нулю на бесконечности. Теорема доказана.

По запасу функций и по топологии пространство $S(\mathbf{R}^n)$ занимает промежуточное положение между $\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$ и $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$. Именно, имеют место непрерывные вложения

$$\mathscr{D}(\mathbf{R}^n) \subset S(\mathbf{R}^n) \subset \mathscr{E}(\mathbf{R}^n).$$

До сих пор мы не привели еще ни одного примера функции, принадлежащей $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ или $S(\mathbf{R}^n)$. Построение таких примеров не вполне тривиально. Однако справедлива

Теорема 31. *Пространство* $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ *плотно в* $L_p(\mathbf{R}^n, dx)$ *) *при* $1 \leqslant p < \infty$, *в* $S(\mathbf{R}^n)$ *и в* $\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$. *Пространство* $S(\mathbf{R}^n)$ *плотно в* $L_p(\mathbf{R}^n, dx)$ *при* $1 \leqslant p < \infty$ *и в* $\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$.

Чтобы избежать технических сложностей, мы проведем доказательство подробно лишь для случая $n = 1$. Начнем с конструкции нетривиальной функции в $\mathscr{D}(\mathbf{R})$.

Лемма 1. *Функция*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ e^{1/x} & \text{при} \quad x < 0 \end{cases}$$

бесконечно дифференцируема на всей прямой.

Доказательство. Всюду вне точки $x = 0$ утверждение очевидно. Проверим, что $\varphi^{(k)}(0) = 0$ для $k = 1, 2, \ldots$ Для этого заметим, что функция $\frac{d^k}{dx^k}(e^{1/x})$ имеет вид $P_k(x) x^{-2k} e^{1/x}$, где P_k — некоторый многочлен степени $\leqslant k$. (Это легко устанавливается по индукции.) Далее, $\lim\limits_{x \to -0} \frac{P(x)}{x^m} e^{1/x} = \lim\limits_{t \to +\infty} P\left(-\frac{1}{t}\right) t^m e^{-t} = 0$ для любого m и любого многочлена P, что легко установить с помощью правила Лопиталя. Таким образом, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varphi^{(k)}(\varepsilon) = 0$ для всех k. Применяя еще раз правило Лопиталя, получаем утверждение леммы.

Лемма 2. *Функция*

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp\{2/(x^2 - 1)\} & \text{при} \ |x| < 1, \\ 0 & \text{при} \ |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

принадлежит $\mathscr{D}(\mathbf{R})$.

В самом деле, эта функция обращается в нуль вне отрезка $[-1, 1]$ и бесконечно дифференцируема, так как записывается в виде $\psi(x) = \varphi(x-1)\varphi(-x-1)$, где φ — функция из леммы 1.

Лемма 3. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *положим* $\psi_\varepsilon(x) = \frac{c}{\varepsilon}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, *где* $c^{-1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\,dx$. *Тогда функция* $\psi_\varepsilon(x)$ *обладает свойствами:*

1) $\psi_\varepsilon(x) \geqslant 0$;
2) $\operatorname{supp} \psi_\varepsilon = [-\varepsilon, \varepsilon]$;
3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(x)\,dx = 1$.

*) Как обычно, через dx мы обозначаем меру Лебега в $\mathbf{R}^n$.

Доказательство очевидно.

Теперь мы в состоянии доказать первое утверждение теоремы 31 (о плотности $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ в $L_p(\mathbf{R}, dx)$ при $1 \leqslant p < \infty$). Пусть $f \in L_p(\mathbf{R}, dx)$. Поскольку интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f|^p dx$ сходится, существует такое число N, что $\int\limits_{-\infty}^{-N} |f|^p dx + \int\limits_{N}^{\infty} |f|^p dx < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$. Тогда функция

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad |x| \leqslant N, \\ 0 & \text{при} \quad |x| > N \end{cases}$$

имеет компактный носитель и $\|f - f_N\|_p < \varepsilon/2$. Далее, поскольку $f_N(x)$ непрерывна в среднем (см. задачу 386), существует такое $\delta > 0$, что $\int |f_N(x) - f_N(x+t)|^p dx < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$ при $|t| < \delta$. Рассмотрим теперь функцию

$$g(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_N(x-t)\, \psi_\delta(t)\, dt.$$

(Этот интеграл существует, поскольку ψ_δ ограничена, финитна и, следовательно, принадлежит $L_q(\mathbf{R}, dx)$.) Оценим расстояние между f_N и g в $L_p(\mathbf{R}, dx)$. Для этого воспользуемся формулой $\|f\|_p = \sup\limits_{\|h\|_q \leqslant 1} \left| \int\limits_{\mathbf{R}} fh\, dx \right|$. Имеем

$$\|f_N - g\|_p = \sup_{\|h\|_q \leqslant 1} \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} (f_N - g)\, h\, dx \right| =$$

$$= \sup_{\|h\|_q \leqslant 1} \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_\delta(t)\, f_N(x-t)\, dt - f_N(x) \right) h(x)\, dx \right| =$$

$$= \sup_{\|h\|_q \leqslant 1} \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_\delta(t)\, (f_N(x-t) - f_N(x))\, h(x)\, dx\, dt \right|.$$

$\left(\text{Мы воспользовались равенством } \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_\delta(t)\, dt = 1.\right)$ Последний интеграл допускает оценку

$$\left| \int\limits_{-\delta}^{\delta} \psi_\delta(t) \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} (f_N(x-t) - f_N(x))\, h(x)\, dx \right) dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_\delta(t) \cdot \frac{\varepsilon}{2}\, dt = \frac{\varepsilon}{2}$$

в силу выбора δ. Итак, $\|f_N - g\|_p < \varepsilon/2$ и, следовательно, $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Проверим, что $g \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$. Финитность функции g вытекает из финитности f_N и ψ_δ: ясно, что $\operatorname{supp} g \subseteq \operatorname{supp} f_N + \operatorname{supp} \psi_\delta = [-N-\delta,\ N+\delta]$. Бесконечная дифференцируемость g вытекает из тождества

$$\frac{d^k}{dx^k} g(x) = \frac{d^k}{dx^k} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_N(x-t)\, \psi_\delta(t)\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_N(x-t)\, \psi_\delta^{(k)}(t)\, dt,$$

которое легко доказывается по индукции (ср. с § 1 гл. IV).

Докажем теперь, что $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ плотно в $\mathscr{E}(\mathbf{R})$. Для этого построим функцию $\chi_1 \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$, обладающую свойством: $\chi_1(x) \equiv 1$ на $[-1,\ 1]$. В качестве такой функции можно взять, например, первообразную от функции $\psi_{1/2}(x+3/2) - \psi_{1/2}(x-3/2)$ (рис. 1).

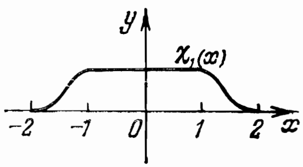


Рис. 1.

Положим $\chi_N(x) = \chi_1\left(\dfrac{x}{N}\right)$.

Тогда $\chi_N(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$ и $\chi_N(x) \equiv 1$ при $x \in [-N,\ N]$. Пусть $f \in \mathscr{E}(\mathbf{R})$. Тогда $\chi_N f \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$. Проверим, что $\chi_N f \to f$ в $\mathscr{E}(\mathbf{R})$ при $N \to \infty$. Пусть K — компакт на прямой. Тогда он содержится в $[-N,\ N]$ при достаточно большом N. Поэтому $p_{kl}(\chi_N f - f) = \sup |(\chi_N f - f)^{(l)}(x)| = 0$ при достаточно большом N. Значит, $\chi_N f \to f$ в $\mathscr{E}(\mathbf{R})$ при $N \to \infty$.

Оказывается, та же последовательность $\chi_N f$ сходится к f и в смысле пространства $S(\mathbf{R})$. Доказательство этого опирается на оценку

$$|x^k f^{(l)}(x)| \leqslant \frac{p_{k+m,l}(f)}{N^m} \quad \text{при} \quad |x| \geqslant N, \quad f \in S(\mathbf{R}),$$

которая непосредственно вытекает из определения нормы

$p_{k+m,\,l}$. Имеем

$$p_{kl}(\chi_N f - f) = \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| x^k (\chi_N f - f)^{(l)}(x) \right| =$$

$$= \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| \sum_{j=0}^{l} C_l^j x^k f^{(j)}(x) (\chi_N - 1)^{(l-j)}(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{l} C_l^j p_{k+1,\,j}(f) \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| (\chi_N - 1)^{(l-j)}(x) \right|.$$

Воспользуемся теперь соотношением

$$\left| (\chi_N - 1)^{(l)}(x) \right| = \left| \frac{1}{N^l} (\chi_1 - 1)^{(l)} \left(\frac{x}{N} \right) \right| \leqslant C_l$$

$$\text{при} \quad x \in \mathbf{R} \text{ и } N \geqslant 1.$$

Тогда мы получим

$$p_{kl}(\chi_N f - f) \leqslant \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{l} C_l^j p_{k+1,\,j}(f)\, C_{l-j}.$$

Последнее выражение стремится к нулю при $N \to \infty$. Остальные утверждения теоремы следуют из уже доказанных.

Теорема Вейерштрасса. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$. Тогда для любого натурального k пространство P_n полиномиальных функций от n переменных плотно в $C^k(\overline{\Omega})$.*

Доказательство теоремы мы отложим до § 1 гл. IV, так как оно опирается на технику сверток.

Следствие 1. *Для любой области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ пространство P_n полиномиальных функций от n переменных плотно в $\mathscr{E}(\Omega)$.*

Доказательство следствия. Пусть заданы функция $f \in \mathscr{E}(\Omega)$ и полунорма p_{Kk} в $\mathscr{E}(\Omega)$. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $q \in P_n$, что $p_{Kk}(q - f) < \varepsilon$. Пусть V — ограниченная открытая окрестность компакта k. Ограничение f на $\overline{V}$ принадлежит, очевидно, $C^k(\overline{V})$. Применяя к этому ограничению теорему Вейерштрасса, найдем такой многочлен $q \in P_n$, что $\| q - f \|_{C^k(\overline{V})} < \varepsilon$. Поскольку норма пространства $C^k(\overline{V})$ мажорирует полунорму p_{Kk}, q — искомый многочлен.

Следствие 2. *Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$, K — компакт в Ω, $\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$, $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ и $f(x) \neq 0$ для $x \in K$. Тогда найдется последовательность многочленов $\{p_k\} \subset P_n$ такая, что $p_k f \to \varphi$ в $\mathscr{D}(\Omega)$.*

Для доказательства достаточно выбрать $\{p_k\}$ так, чтобы $p_k \to \varphi/f$ в $\mathscr{E}(\Omega)$.

4. Обобщенные функции. Понятие обобщенной функции *) естественно возникает в различных вопросах математики и математической физики при желании распространить некоторые естественные операции (дифференцирование, интегрирование, решение дифференциальных уравнений, преобразование Фурье и т. д.) на более широкую область по сравнению с той, где эти операции первоначально определены. На первых порах это приводило к парадоксальным и противоречивым определениям обобщенных функций. Например, знаменитая δ-функция Дирака определялась следующими свойствами:

$$\delta(x) = 0 \text{ при } x \neq 0, \ \delta(0) = \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1.$$

Другое определение той же функции: $\delta(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx}(\operatorname{sign} x)$. Ясно, что обычной функции с такими свойствами не существует.

Оказалось, что эти и многие другие свойства перестают быть противоречивыми, если понимать обобщенную функцию как элемент сопряженного пространства L', где L — некоторое пространство «пробных» или «основных» функций. В качестве пространства L чаще всего используют $\mathscr{D}(\Omega)$, $\mathscr{E}(\Omega)$ или $S(\mathbf{R}^n)$. Элементы пространств $\mathscr{D}'(\Omega)$, $\mathscr{E}'(\Omega)$ и $S'(\mathbf{R}^n)$ получили название *обобщенных функций в области* Ω, *обобщенных функций с компактным носителем в области* Ω *и обобщенных функций умеренного роста в* $\mathbf{R}^n$ соответственно. Происхождение этих названий выяснится ниже.

Покажем сначала, каким образом любую (не слишком плохую) обычную функцию в Ω можно рассматривать как обобщенную функцию.

Теорема 32. *Пусть f — локально суммируемая (т. е. суммируемая на каждом компакте) по мере Лебега dx функция в области Ω. Соответствие $\varphi \mapsto \int_{\Omega} \varphi(x) f(x)\, dx$ является линейным непрерывным функционалом на $\mathscr{D}(\Omega)$. Если, кроме того, f обращается в нуль вне некоторого*

*) Вместо термина «обобщенная функция» иногда употребляется термин «распределение» (distribution).

компакта $K \subset \Omega$, то это соответствие является линейным непрерывным функционалом на $\mathscr{E}(\Omega)$.

Доказательство. В силу результата задачи 413 мы должны проверить, что из $\varphi_n \to 0$ в $\mathscr{D}(\Omega)$ следует $\int\limits_{\Omega} \varphi_n(x) f(x)\, dx \to 0$. Но это вытекает из определения сходимости в $\mathscr{D}(\Omega)$ и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Для доказательства второго утверждения достаточно сослаться на теорему 15 гл. II.

Обобщенные функции типа, описанного в теореме 3, назовем *регулярными* обобщенными функциями; они соответствуют обычным локально суммируемым функциям $f(x)$. Бывают, однако, и нерегулярные обобщенные функции. По аналогии с регулярным случаем значение обобщенной функции F на основной функции φ часто записывают в виде $\int\limits_{\Omega} F(x)\varphi(x)\, dx = \langle F, \varphi\rangle$. Разумеется, эту запись нельзя понимать буквально — соответствующий интеграл расходится или вообще не имеет смысла.

Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$, содержащая начало координат. Определим *функцию Дирака* $\delta(x)$ как элемент пространства $\mathscr{E}'(\Omega)$, задаваемый формулой

$$\int\limits_{\Omega} \delta(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(0).$$

Поскольку $\mathscr{D}(\Omega)$ непрерывно вложено в $\mathscr{E}(\Omega)$, всякий линейный функционал на $\mathscr{E}(\Omega)$ порождает при ограничении линейный функционал на $\mathscr{D}(\Omega)$. Из того, что $\mathscr{D}(\Omega)$ плотно в $\mathscr{E}(\Omega)$, вытекает, что естественное отображение $\mathscr{E}'(\Omega)$ в $\mathscr{D}'(\Omega)$ является вложением. Аналогичные соображения показывают наличие непрерывных вложений

$$\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n) \subset S'(\mathbf{R}^n) \subset \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n).$$

Другими словами, всякая обобщенная функция с компактным носителем является обобщенной функцией умеренного роста, а всякая обобщенная функция умеренного роста является обобщенной функцией.

В отличие от обычных функций, обобщенные функции не имеют определенных значений в точке (впрочем, этим свойством обладают уже известные нам элементы пространств $L_p(X, \mu)$). Тем не менее для обобщенной функции $F \in \mathscr{D}'(\Omega)$ имеет смысл выражение «$F(x)$ равна нулю в области $U \subset \Omega$». По определению, это выражение означает, что $\langle F, \varphi\rangle=0$ для всех пробных функций φ, обладающих свойством $\operatorname{supp}\varphi\subset U$.

Пусть $F\in\mathscr{D}'(\Omega)$. Скажем, что x *не принадлежит носителю* F, если F обращается в нуль в некоторой открытой окрестности точки x. Ясно, что *носитель* F является замкнутым множеством (так как его дополнение открыто — это непосредственно вытекает из определения носителя). Обозначим его $\operatorname{supp} F$ и положим $U=\Omega\setminus\operatorname{supp} F$. Докажем, что F обращается в нуль в области U. Пусть $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$ и $\operatorname{supp}\varphi=K\subset U$. Каждая точка $x\in K$ обладает окрестностью V_x, в которой F обращается в нуль. Из покрытия $\{V_x\}_{x\in K}$ выделим конечное подпокрытие $V_{x_1}, \ldots$ $\ldots, V_{x_n}$, и пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — соответствующее разбиение единицы (см. задачу 415). Тогда $\varphi=\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi\varphi_i$ и $\langle F, \varphi\rangle=$ $=\sum\limits_{i=1}^{n}\langle F, \varphi\varphi_i\rangle=0$. Если V — любая область, в которой F равна нулю, то все точки V не принадлежат $\operatorname{supp} F$ и, значит, $V\subset U$.

Теперь выражение «обобщенная функция на Ω с компактным носителем» мы можем понимать в двух смыслах:

1) как элемент пространства $\mathscr{E}'(\Omega)$;

2) как элемент $F\in\mathscr{D}'(\Omega)$, для которого $\operatorname{supp} F$ — компакт.

Эти два понятия на самом деле совпадают. А именно, всякий элемент $F\in\mathscr{E}'(\Omega)$ определяет, как уже отмечалось выше, элемент $\mathscr{D}'(\Omega)$, который мы будем обозначать той же буквой. Оказывается, таким образом получаются в точности те элементы $\mathscr{D}'(\Omega)$, которые имеют компактный носитель. Докажем это.

Пусть $F\in\mathscr{E}'(\Omega)$. Тогда F непрерывен относительно одной из полунорм p_{Kk}, задающих топологию в $\mathscr{E}(\Omega)$:

$$\langle F, \varphi\rangle\leqslant c p_{Kk}(\varphi) \text{ для } \varphi\in\mathscr{E}(\Omega).$$

Ясно, что ограничение F на $\mathscr{D}(\Omega)$ обращается в нуль на $\Omega\setminus K$. В самом деле, если $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$ и $\operatorname{supp}\varphi\subset\Omega\setminus K$, то $p_{Kk}(\varphi)=0$. Таким образом, $\operatorname{supp} F\subset K$, т. е. F как элемент $\mathscr{D}'(\Omega)$ имеет компактный носитель. Пусть теперь $F\in\mathscr{D}'(\Omega)$ и $\operatorname{supp} F=K$ — компакт в Ω. Построим такой функционал $\tilde{F}$ на $\mathscr{E}(\Omega)$, ограничение которого на $\mathscr{D}(\Omega)$ совпадает с F. Для этого рассмотрим некоторую компактную окрестность V множества K и построим функцию $\chi_V\in\mathscr{D}(\Omega)$, обладающую свойством $\chi_V(x)\equiv 1$ для $x\in V$ (см. задачу 415). Определим $\tilde{F}$ формулой $\langle\tilde{F}, f\rangle=\langle F, \chi_V f\rangle$.

Это определение имеет смысл, так как $\chi_V f \in \mathscr{D}(\Omega)$ для любой $f \in \mathscr{E}(\Omega)$. Несложно также показать, что $\widetilde{F} \in \mathscr{E}'(\Omega)$. Остается проверить, что $\widetilde{F}|_{\mathscr{D}(\Omega)} = F$. Пусть $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Тогда $\langle \widetilde{F}, \varphi\rangle - \langle F, \varphi\rangle = \langle F, \chi_V\varphi - \varphi\rangle = 0$, так как

$$\operatorname{supp}(\chi_V\varphi - \varphi) \subset \overline{\Omega\backslash V} \subset \Omega\backslash K.$$

Теорема 33. *Пространства $\mathscr{D}'(\Omega)$, $\mathscr{E}'(\Omega)$ и $S'(\mathbf{R}^n)$ *-слабо полны. (Другими словами, если последовательность $\{F_n\}$ обобщенных функций такова, что числовая последовательность $\{\langle F_n, \varphi\rangle\}$ фундаментальна для любой пробной функции φ, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} F_n = F$, который является обобщенной функцией того же типа, что и F_n.)*

Доказательство. Определим F формулой $\langle F, \varphi\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \langle F_n, \varphi\rangle$. Линейность F очевидна. Докажем непрерывность. В случае $\mathscr{E}(\Omega)$ и $S(\mathbf{R}^n)$ непрерывность вытекает из теоремы Банаха — Штейнгауза (ср. с § 3, п. 1), так как $\mathscr{E}(\Omega)$ и $S(\mathbf{R}^n)$ — полные метрические линейные пространства (см. задачи 427—430). Разберем случай $\mathscr{D}(\Omega)$. Ограничения F_n на $\mathscr{D}_K(\Omega)$ стремятся к некоторому элементу $F_K \in \mathscr{D}'_K(\Omega)$, так как $\mathscr{D}_K(\Omega)$ — полное метрическое линейное пространство. Определим теперь функционал $F \in \mathscr{D}'(\Omega)$, полагая его равным F_K на $\mathscr{D}'_K(\Omega)$. Корректность этого определения легко проверяется. (Если $\operatorname{supp}\varphi \in K_1 \cap K_2$, то $\langle F_{K_1}, \varphi\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \langle F_n, \varphi\rangle = \langle F_{K_2}, \varphi\rangle$.) Непрерывность F следует из задачи 413. Теорема доказана.

Пример. Обобщенные функции $(x \pm i0)^{-1}$. Пусть $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$. Тогда интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon}\,dx$ сходится при $\varepsilon > 0$ и имеет конечный предел при $\varepsilon \searrow 0$ (см. задачу 439). В силу теоремы 33 этот предел является обобщенной функцией на прямой, которая обозначается $(x \pm i0)^{-1}$.

Всякая обобщенная функция с компактным носителем в Ω непрерывна по одной из полунорм p_{Kl}. Наименьшее l, для которого это имеет место, называется *порядком* обобщенной функции. Если обобщенная функция $F \in \mathscr{E}'(\Omega)$ имеет порядок l и носитель K, то она продолжается до линейного непрерывного функционала на $C^l(V)$, где V — любая окрестность компакта K.

Говорят, что обобщенная функция $F \in \mathscr{D}'(\Omega)$ имеет *порядок* $\leqslant l$, если она продолжается до линейного непрерывного функционала на $C^l(\Omega)$. Не всякий элемент $F \in \mathscr{D}'(\Omega)$ имеет конечный порядок. Однако для любой области $V \subset \Omega$ с компактным замыканием ограничение F на $\mathscr{D}(V)$ имеет конечный порядок.

Всякая обобщенная функция умеренного роста $F \in S'(\mathbf{R}^n)$ непрерывна относительно одной из полунорм $p_{kl} = \sup\limits_{\substack{|\alpha| \leqslant k \\ |\beta| \leqslant l}} p_{\alpha\beta}$ (см. п. 3). *Порядком* F называется наименьшее l, при котором это имеет место. Таким образом, всякая обобщенная функция умеренного роста имеет конечный порядок. (Нетрудно проверить, что это определение порядка эквивалентно данному выше в случае, когда $\Omega = \mathbf{R}^n$ и обобщенная функция f лежит в $S'(\mathbf{R}^n) \subset \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$.)

5. Действия над обобщенными функциями. Мы покажем здесь, каким образом основные действия над обычными функциями — умножение на функцию, дифференцирование, замена переменных — переносятся на обобщенные функции.

Пусть L означает какое-либо из пространств $\mathscr{D}(\Omega)$, $\mathscr{E}(\Omega)$, $S(\mathbf{R}^n)$, L' — сопряженное пространство, L_0' — некоторое плотное подпространство в L', состоящее из регулярных обобщенных функций. В случае $L = \mathscr{D}(\Omega)$ или $\mathscr{E}(\Omega)$ в качестве L_0' удобно взять $\mathscr{D}(\Omega)$; в случае $L = S(\mathbf{R}^n)$ можно в качестве L_0' взять $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ или $S(\mathbf{R}^n)$. Предположим, что в L_0' задан некоторый линейный оператор A_0 и что этот оператор непрерывен в топологии L'. Тогда A_0 продолжается до непрерывного оператора A в L'. Это продолжение единственно, поскольку L_0' плотно в L'.

В нужных нам случаях непрерывность оператора A_0 может быть установлена следующим полезным приемом. Пусть B — непрерывный оператор в L, B' — сопряженный оператор в L'. Если ограничение B' на L_0' совпадает с A_0, то A_0 непрерывен. В этом случае, очевидно, искомое продолжение A совпадает с B'.

Перейдем к конкретным приложениям описанной общей схемы.

1) Умножение на функцию. Пусть $f \in \mathscr{E}(\Omega)$; покажем, что оператор $M(f)$ умножения на f допускает непрерывное продолжение с $\mathscr{D}(\Omega)$ на $\mathscr{D}'(\Omega)$. Положим $L = \mathscr{D}(\Omega) = L_0'$, $B = M(f)$. Ограничение оператора B' на L_0' легко вычисляется. В самом деле, пусть $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$,

$g \in L'_0$. Тогда

$$\langle B'g, \varphi \rangle = \langle g, B\varphi \rangle = \langle g, f\varphi \rangle = \int_\Omega g(x) f(x) \varphi(x)\, dx.$$

Таким образом, оператор B' на пространстве L'_0 действует как умножение на функцию f. Мы видим, что этот оператор допускает непрерывное продолжение (а именно, B') на все пространство $\mathscr{D}'(\Omega)$. Обозначая это продолжение по-прежнему через $M(f)$, мы получаем равенство

$$\langle M(f)F, \varphi \rangle = \langle F, M(f)\varphi \rangle.$$

Пример. Вычислим произведение δ-функции на прямой на бесконечно дифференцируемую функцию f. Имеем $\langle f\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, f\varphi \rangle = f(0)\varphi(0)$. Отсюда $f\delta = f(0)\delta$, что согласуется с нашим интуитивным представлением о поведении δ-функции при умножении.

2) Дифференцирование. Напомним, что через ∂_j мы обозначаем частную производную $\partial/\partial x_j$, а через ∂^k — оператор $\dfrac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$. Покажем, что оператор ∂^k допускает непрерывное продолжение с $\mathscr{D}(\Omega)$ на $\mathscr{D}'(\Omega)$. Достаточно рассмотреть случай оператора ∂_j. Положим $B = -\partial_j$ и вычислим ограничение B' на $\mathscr{D}(\Omega)$. Имеем

$$\langle B'f, \varphi \rangle = \langle f, B\varphi \rangle = -\int_\Omega f(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\, dx = \int_\Omega \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \varphi(x)\, dx.$$

Итак, B' совпадает с ∂_j на $\mathscr{D}(\Omega)$. Поэтому оператор ∂/∂_j допускает непрерывное продолжение (а именно, B') на $\mathscr{D}'(\Omega)$. Явный вид этого продолжения (которое мы обозначаем по-прежнему через ∂_j) дается формулой

$$\langle \partial_j F, \varphi \rangle = -\langle F, \partial_j \varphi \rangle$$

и вообще для любого k

$$\langle \partial^k F, \varphi \rangle = (-1)^{|k|} \langle F, \partial^k \varphi \rangle.$$

Пример. Обобщенная функция $\partial^k \delta$ действует по формуле

$$\langle \partial^k \delta, \varphi \rangle = (-1)^{|k|} \partial^k \varphi(0).$$

Замена переменных. Пусть $y = y(x)$ — взаимно однозначное бесконечно дифференцируемое отображение области Ω на себя, $x = x(y)$ — обратное отображение. В пространстве $\mathscr{D}(\Omega)$ определен оператор замены переменных T: $(T\varphi)(y)=\varphi(x(y))$. Вычислим сопряженный оператор T' на пространстве $\mathscr{D}(\Omega)$. Имеем

$$\langle T'f, \varphi\rangle = \langle f, T\varphi\rangle = \\ = \int\limits_{\Omega} f(y)\,\varphi(x(y))\,dy = \int\limits_{\Omega} f(y(x))\,\varphi(x)\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| dx.$$

Таким образом, оператор, сопряженный с T, является композицией оператора T^{-1} обратной замены переменных и оператора $M\left(\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|\right)$ умножения на модуль якобиана этой замены. Отсюда вытекает, что оператор T допускает непрерывное продолжение на $\mathscr{D}'(\Omega)$. Несложное вычисление показывает, что оно задается формулой

$$\langle TF, \varphi\rangle = \langle F, M(|J|)\,T^{-1}\varphi\rangle,$$

где J — якобиан отображения T^{-1}.

Пример. Пусть $a(x)$ — бесконечно дифференцируемое взаимно однозначное отображение прямой на себя. Вычислим обобщенную функцию $\delta(a(x))$. Имеем

$$\langle \delta(a(x)), \varphi\rangle = \langle \delta, \varphi(b(x))\,|b'(x)|\rangle = \varphi(b(0))\,|b'(0)|,$$

где $b(x)$ — функция, обратная к $a(x)$. В частности, справедливо равенство $\delta(ax+b) = |a|^{-1}\delta_{-b/a}(x)$. (Через $\delta_b(x)$ обозначается обобщенная функция, действующая по формуле $\langle \delta_b, \varphi\rangle = \varphi(b)$.)

Замечание. Определенные выше операции над обобщенными функциями по построению являются непрерывными операторами. Следовательно, они перестановочны с предельными переходами. В частности, сходящийся ряд из обобщенных функций можно дифференцировать почленно любое число раз.

Покажем теперь, что совокупность всех обобщенных функций с компактным носителем естественно возникает из регулярных обобщенных функций применением операции дифференцирования. А именно, справедлива

Теорема 34. *Всякая обобщенная функция $F \in \mathscr{E}'(\Omega)$ может быть записана в виде*

$$F = \partial^k f, \tag{34}$$

где k — некоторый мультииндекс, а f — регулярная обобщенная функция.

Доказательство. Удобно в качестве системы полунорм в $\mathscr{E}(\Omega)$, определяющей топологию в этом пространстве, взять систему

$$p_{nk}(\varphi)=\int\limits_{K_n}|\partial^k\varphi(x)|\,dx,$$

где $\{K_n\}$ — семейство компактов, исчерпывающее область (см. п. 3). Если обобщенная функция F непрерывна относительно полунормы p_{nk}, то в силу теоремы Хана — Банаха и теоремы об общем виде линейного функционала на $L_1(K_n, dx)$ существует такая функция $f\in L_\infty(K_n, dx)$, что

$$\langle F, \varphi\rangle=\int\limits_{K_n}\partial^k\varphi(x)\,f(x)\,dx.$$

Это равенство после замены f на $(-1)^{|k|}f$ превращается в искомое соотношение (34).

Замечания. 1. Приведенное доказательство обеспечивает лишь измеримость функции f. Увеличивая, если нужно, мультииндекс k, можно добиться, чтобы функция f была непрерывна на Ω.

2. Можно показать, что функцию f можно выбрать совпадающей вне $\operatorname{supp} F$ с некоторым многочленом, аннулируемым оператором ∂^k.

3. Аналогичным рассуждением доказывается

Теорема 35. *Каждая обобщенная функция умеренного роста $F\in S'(\mathbf{R}^n)$ допускает представление* (34), *где f — непрерывная функция умеренного роста на $\mathbf{R}^n$.*

Для построения и изучения обобщенных функций в многомерных областях большую роль играет конструкция *прямого произведения* обобщенных функций.

Пусть Ω_1 — область в $\mathbf{R}^m$, Ω_2 — область в $\mathbf{R}^n$. Положим $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2\subset\mathbf{R}^{m+n}$. Если f_i — регулярные обобщенные функции в Ω_i, $i=1, 2$, то можно определить регулярную обобщенную функцию f в Ω по формуле $\langle f, \varphi\rangle=$ $=\int\limits_{\Omega}f_1(x)\,f_2(y)\,\varphi(x,y)\,dx\,dy$. Функция f называется *прямым произведением* f_1 и f_2 и обозначается $f_1\times f_2$. По теореме Фубини этот интеграл можно вычислять последовательно:

$$\langle f, \varphi\rangle=\int\limits_{\Omega_2}f_1(x)\left(\int\limits_{\Omega_2}f_2(y)\,\varphi(x, y)\,dy\right)dx=$$

$$=\int\limits_{\Omega_2}f_2(y)\left(\int\limits_{\Omega_1}f_1(x)\,\varphi(x, y)\,dx\right)dy. \quad (35)$$

Оказывается, эта конструкция сохраняет силу для любых обобщенных функций.

Теорема 36. *Пусть* $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $f_i \in \mathscr{D}'(\Omega_i)$ $(i=1, 2)$. *Тогда*

1) *функция* $\varphi_1(x) = \langle f_2, \varphi(x, \cdot)\rangle$ *принадлежит* $\mathscr{D}(\Omega_1)$;

2) *функция* $\varphi_2(y) = \langle f_1, \varphi(\cdot, y)\rangle$ *принадлежит* $\mathscr{D}(\Omega_2)$;

3) *справедливо равенство* $\langle f_1, \varphi_1\rangle = \langle f_2, \varphi_2\rangle$;

4) *соответствие* $\varphi \to \langle f_1, \varphi_1\rangle = \langle f_2, \varphi_2\rangle$ *является линейным непрерывным функционалом на* $\mathscr{D}(\Omega)$.

Доказательство. Докажем финитность функции φ_1. Пусть $K \subset \Omega$ — носитель функции φ, K_1 — проекция K в Ω_1. Тогда функция $\varphi_x(y) = \varphi(x, y)$ тождественно равна нулю при x вне K_1. Поэтому $\varphi_1(x) = \langle f_2, \varphi_x\rangle = 0$ для $x \notin K_1$, откуда $\operatorname{supp} \varphi_1 \subset K_1$. Далее, отображение Ω_1 в $\mathscr{D}(\Omega_2)$ по формуле $x \mapsto \varphi_x$ бесконечно дифференцируемо. Это влечет бесконечную дифференцируемость φ_1. Итак, $\varphi_1 \in \mathscr{D}(\Omega_1)$, и мы доказали 1). Утверждение 2) доказывается точно так же.

Для доказательства 3) рассмотрим сначала частный случай, когда функция $\varphi(x, y)$ имеет вид $\varphi_1(x)\varphi_2(y)$. В этом случае, очевидно, $\varphi_1(x) = \varphi_1(x)\langle f_2, \varphi_2\rangle$, $\varphi_2(y) = \varphi_2(y)\langle f_1, \varphi_1\rangle$ и равенство 3) выполняется. Поскольку линейные комбинации функций вида $\varphi_1(x)\varphi_2(y)$ плотны в $\mathscr{D}(\Omega)$, остается проверить, что отображения $\varphi \to \langle f_1, \varphi_1\rangle$ и $\varphi \to \langle f_2, \varphi_2\rangle$ непрерывны в топологии $\mathscr{D}(\Omega)$. Это следует из непрерывности отображения $\varphi \to \varphi_1$ пространства $\mathscr{D}(\Omega)$ в пространство $\mathscr{D}(\Omega_1)$, проверяемой непосредственно.

§ 5. Гильбертовы пространства

1. Геометрия гильбертова пространства. Линейное пространство H над полем $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ называется *предгильбертовым*, если в нем задано *скалярное произведение* *), т. е. отображение $H \times H$ в K, обозначаемое $(\ ,\ )$ и обладающее свойствами:

1) $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1(x_1, y) + \lambda_2(x_2, y)$ (линейность по первому аргументу);

---

*) Название «скалярное произведение» возникло из работы Гамильтона о теле кватернионов. Каждый кватернион q представляется в виде суммы «скалярной части» q_0 и «векторной части» $\boldsymbol{q} = q_1 i + q_2 j + q_3 k$. В соответствии с этим произведение двух векторных кватернионов $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$ является суммой скалярного произведения $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$ и векторного произведения $[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}]$. В зарубежной литературе вместо термина «скалярное произведение» часто используется термин «внутреннее произведение».

2) $(x, y)=\overline{(y, x)}$ (*эрмитова симметричность*; черта означает комплексное сопряжение);

3) $(x, x)\geqslant 0$ (положительная полуопределенность).

Предгильбертово пространство H называется *гильбертовым*, если дополнительно выполняются условия:

3′) $(x, x)>0$ при $x\neq 0$;

4) H полно в топологии, определяемой нормой $\|x\|=\sqrt{(x, x)}$.

(Тот факт, что это действительно норма, будет установлен ниже.)

Одним из важнейших следствий свойств скалярного произведения является

Неравенство Коши — Буняковского:

$$|(x, y)|^2\leqslant(x, x)(y, y).$$

Доказательство. Пусть сначала (x, y) — вещественное число. Для любого $t\in\mathbf{R}$ имеем

$$0\leqslant(x+ty, x+ty)=(x, x)+2t(x, y)+t^2(y, y).$$

Значит, этот квадратный трехчлен (от переменной t) имеет неположительный дискриминант: $(x, y)^2-(x, x)\cdot(y, y)\leqslant 0$, что и требовалось. Общий случай получается из разобранного умножением вектора x (или y) на подходящее комплексное число, по модулю равное 1. При этом (x, y) становится вещественным, не меняя своей абсолютной величины, а (x, x) и (y, y) не изменяются.

Следствие. *Величина* $\|x\|=\sqrt{(x, x)}$ *обладает свойствами полунормы* (*и даже нормы, если выполнено условие* 3′)).

В самом деле,

$$\|x+y\|^2=(x, x)+(x, y)+(y, x)+(y, y)\leqslant(x, x)+$$
$$+2|(x, y)|+(y, y)\leqslant(x, x)+2\sqrt{(x, x)\cdot(y, y)}+(y, y)=$$
$$=(\|x\|+\|y\|)^2.$$

Из всякого предгильбертова пространства L можно «изготовить» гильбертово пространство $\bar{L}$ следующей конструкцией. Пусть $L_0\subset L$ — подмножество тех векторов x, для которых $(x, x)=0$. Неравенство Коши — Буняковского показывает, что L_0 — подпространство в L. В фактор-пространстве L/L_0 естественным образом определяется скалярное произведение: если $\bar{x}, \bar{y}\in L/L_0$, а $x\in\bar{x}$, $y\in\bar{y}$ — представители классов $\bar{x}$ и $\bar{y}$, то полагаем $(\bar{x}, \bar{y})=(x, y)$. Предоставляем читателю убедиться в корректности этого определения и в том, что полученное скалярное произведение обладает свойством 3′). Далее, если L/L_0 неполно, обозначим через $\tilde{L}$ его пополнение по норме $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Неравенство Коши — Буняковского показывает, что скалярное произведение непрерывно в этой норме и, следовательно, продолжается на $\tilde{L}$. Проверку свойств 1)—3) для продолженного скалярного произведения мы опускаем.

Примеры. 1) Пусть L — пространство финитных последовательностей $\{x_n\}$ чисел из K со скалярным произведением $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n$. В этом случае $L_0 = \{0\}$, $\tilde{L} = l_2(K)$.

2) $L = C[a, b]$ — скалярное произведение — задается формулой $(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$. В этом случае $L_0 = \{0\}$, $\tilde{L} = L_2[a, b]$.

3) L — пространство измеримых ступенчатых функций на множестве X с мерой μ, скалярное произведение имеет вид $(f, g) = \int_X f(x)\overline{g(x)}\,d\mu$. Здесь L_0 состоит из функций, почти всюду равных нулю по мере μ, $\tilde{L} = L_2(X, \mu)$.

4) L — пространство многочленов от комплексного переменного z, скалярное произведение задается формулой

$$(P, Q) = \iint_{|z|\leqslant 1} P(z)\overline{Q(z)}\,dx\,dy, \quad z = x + iy.$$

Здесь $L_0 = \{0\}$, а $\tilde{L}$ совпадает с совокупностью $A^2(D)$ всех аналитических функций в единичном круге D, принадлежащих $L_2(D, dx\,dy)$ (см. задачу 465).

В вещественном гильбертовом пространстве можно определить *угол* $\varphi \in [0, \pi]$ между векторами x и y по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\|\|y\|}.$$

В частности, если $(x, y) = 0$, то $\varphi = \pi/2$. В этом случае говорят, что x и y *ортогональны*, и пишут $x \perp y$.

В комплексном гильбертовом пространстве угол не определяется, но понятие ортогональности сохраняет смысл. Если S — любое подмножество в гильбертовом пространстве H, то через $S^{\perp}$ обозначают *ортогональное дополнение* к S, т. е. совокупность всех векторов $x \in H$, ортогональных ко всем векторам $y \in S$. Очевидно, что

$S^{\perp}$ всегда является замкнутым линейным подпространством в H.

Одно из основных геометрических свойств гильбертова пространства описывает

Теорема 37. *Если K — непустое выпуклое замкнутое подмножество в гильбертовом пространстве H, то для любой точки $x \in H$ существует единственная точка $y \in K$, ближайшая к x.*

Доказательство. Пусть $d = \inf\limits_{y \in K} d(x, y)$, где $d(x, y)$ — расстояние, порожденное нормой $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, и пусть y_n — последовательность точек из K, для которой $\lim\limits_{n \to \infty} d(x, y_n) = d$. Покажем, что $\{y_n\}$ — фундаментальная последовательность. Для этого нам будет полезно *тождество параллелограмма*:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \tag{36}$$

справедливое в любом предгильбертовом пространстве (см. задачу 475). Применив это тождество к параллелограмму со сторонами $x - y_n$ и $x - y_m$, получаем

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - \|2x - y_n - y_m\|^2.$$

Заметим теперь, что $\|2x - y_n - y_m\|^2 = 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 \geqslant 4d^2$, так как $\frac{y_n + y_m}{2} \in K$. Если n и m достаточно велики, то $\|x - y_n\|^2 \leqslant d^2 + \varepsilon$, $\|x - y_m\|^2 \leqslant d^2 + \varepsilon$, откуда $\|y_n - y_m\|^2 < 4(d^2 + \varepsilon) - 4d^2 = 4\varepsilon$.

Мы доказали фундаментальность $\{y_n\}$. Пусть $y = \lim y_n$. Тогда $d(x, y) = \lim d(x, y_n) = d$. Существование ближайшей точки доказано. Единственность вытекает из тождества параллелограмма: если $d(x, y) = d(x, y') = d$, то $\|y - y'\|^2 = 2\|x - y\|^2 + 2\|x - y'\|^2 - \|2x - y - y'\|^2 \leqslant 4d^2 - 4d^2 = 0$. Теорема доказана.

Теорема 38. *Пусть H — гильбертово пространство, H_1 — его замкнутое подпространство, $H_2 = H_1^{\perp}$. Тогда H есть прямая сумма H_1 и H_2.*

Доказательство. Пусть $x \in H$, x_1 — ближайшая к x точка из H_1. Положим $x_2 = x - x_1$ и покажем, что $x_2 \in H_2$. В самом деле, пусть $y \in H_1$; мы знаем, что функция вещественного переменного t $f(t) = \|x - x_1 + ty\|^2$ имеет минимум при $t = 0$. Значит, $f'(0) = 0$. Но

$$f'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\|x_2 + ty\|^2 - \|x_2\|^2}{t} = (x_2, y) + (y, x_2) = 2\mathrm{Re}\,(x_2, y).$$

Поэтому $\operatorname{Re}(x_2, y) = 0$. Заменяя y на iy, получаем $\operatorname{Im}(x_2, y) = 0$. Итак, $(x_2, y) = 0$, т. е. $x_2 \in H_2$. Мы доказали, что H является суммой H_1 и H_2. То, что эта сумма прямая, вытекает из ортогональности H_1 и H_2: если $x \in H_1 \cap H_2$, то $(x, x) = 0$, т. е. $x = 0$. Тот факт, что H является прямой суммой двух ортогональных подпространств H_1 и H_2, записывают формулой $H = H_1 \oplus H_2$.

Теорема 39. *Всякий линейный непрерывный функционал f на гильбертовом пространстве имеет вид $f(x) = (x, y)$ для некоторого $y \in H$.*

Доказательство. Пусть $H_1 = \operatorname{Ker} f$ — совокупность всех векторов, аннулирующих f. Если $H_1 = H$, то $f \equiv 0$ и можно положить $y = 0$. Если $H_1 \neq H$, то положим $H_2 = H_1^{\perp}$. По теореме 38 $H = H_1 \oplus H_2$. Покажем, что H_2 одномерно. Пусть y_0 — ненулевой вектор из H_2. Тогда $f(y_0) \neq 0$, так как в противном случае y_0 принадлежал бы H_1. Для любого $y_1 \in H_2$ вектор $y_1 - \dfrac{f(y_1)}{f(y_0)} y_0$ принадлежит $H_1 \cap H_2$ и, следовательно, равен нулю. Это доказывает, что $\{y_0\}$ — базис в H_2. Положим теперь $y = \dfrac{f(y_0)}{(y_0, y_0)} y_0$ и сравним функционал f с функционалом $x \mapsto (x, y)$*). Оба функционала обращаются в нуль на H_1 и оба принимают значение $f(y_0)$ на y_0. Поэтому они совпадают всюду.

Замечание. Теоремы 37—39 перестают быть верными в предгильбертовом пространстве (см. задачу 473).

Система векторов $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ в предгильбертовом пространстве называется *ортонормированной*, если

$$(x_\alpha, x_\beta) = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{при } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Неравенство Бесселя. *Для любой ортонормированной системы $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и любого вектора x справедливо неравенство*

$$\sum_{\alpha \in A} |(x, x_\alpha)|^2 \leqslant (x, x). \tag{37}$$

Сумма слева понимается как $\sup\limits_{A_0} \sum\limits_{A_0} |(x, x_\alpha)|^2$, где верхняя грань берется по всем конечным подмножествам $A_0 \subset$

---

*) В комплексном случае $y = \dfrac{\bar{f}(y_0)}{(y_0, y_0)} y_0$.

$\subset A$. Нетрудно показать, что эта сумма может быть конечна лишь в том случае, когда не более счетного множества слагаемых отлично от нуля.

Доказательство. По определению суммы в левой части (37) достаточно проверить это неравенство для конечного множества A. Пусть H_1 — подпространство в H, порожденное системой $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in A$, $H_2 = H_1^\perp$. Тогда $x = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha x_\alpha + y$, где $y \in H_2$. Из ортонормированности $\{x_\alpha\}$ и ортогональности H_1 и H_2 вытекают равенства

$$(x, x_\alpha) = c_\alpha, \quad (x, x) = \sum_{\alpha \in A} |c_\alpha|^2 + (y, y),$$

откуда немедленно следует (37).

Ортонормированная система $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ в гильбертовом пространстве H называется *полной*, если ее ортогональное дополнение состоит из нуля.

Равенство Парсеваля (обобщение теоремы Пифагора). *Для любой полной ортонормированной системы $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и любого вектора x справедливо равенство*

$$(x, x) = \sum_{\alpha \in A} |(x, x_\alpha)|^2. \qquad (33)$$

Доказательство. Пусть A_0 — набор тех индексов, для которых $(x, x_\alpha) \neq 0$. Как уже отмечалось выше, множество A_0 счетно. Занумеруем его и будем писать x_1, $x_2, \ldots$ вместо $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots$ и $c_1, c_2, \ldots$ вместо $c_{\alpha_1}, c_{\alpha_2}, \ldots$

Рассмотрим последовательность сумм $S_n = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$. Так как $\|S_{n+k} - S_n\|^2 = \sum_{i=n+1}^{n+k} |c_i|^2$ и ряд $\sum_i |c_i|^2$ сходится, последовательность $\{S_n\}$ фундаментальна. Пусть $S = \lim S_n$ и $y = x - S$. Покажем, что на самом деле $y = 0$. Для этого достаточно проверить, что y ортогонален системе $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Для $\alpha \notin A_0$ это очевидно по построению, а для $\alpha \in A_0$ вытекает из равенства

$$(y, x_i) = (x - S, x_i) = \lim_{n \to \infty} (x - S_n, x_i) = 0.$$

Итак, $y = 0$ и, значит, $x = S$. Отсюда

$$(x, x) = \lim_{n \to \infty} (S_n, S_n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 = \sum_{\alpha \in A} |c_\alpha|^2.$$

Попутно нами доказана

Теорема 39. *Всякая полная ортонормированная система $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ в гильбертовом пространстве H является гильбертовым базисом в том смысле, что любой вектор $x\in H$ однозначно записывается в виде*

$$x=\sum_{\alpha\in A} c_\alpha x_\alpha,\quad c_\alpha=(x, x_\alpha).$$

Замечание. Понятие гильбертова базиса отличается от понятия базиса в линейном пространстве и совпадает с ним только в конечномерном случае. Отличие состоит в том, что допускаются бесконечные линейные комбинации, не имеющие смысла в чисто алгебраической ситуации.

Теорема 41. *Всякое гильбертово пространство обладает гильбертовым базисом. Все базисы данного пространства H равномощны. (Эта мощность называется гильбертовой размерностью H.)*

Доказательство. Пользуясь леммой Цорна, легко доказать существование максимальной ортонормированной системы в H. Если бы она была неполна, то, присоединяя к этой системе единичный вектор из ее ортогонального дополнения, мы получили бы противоречие с максимальностью системы. Значит, максимальная система полна и по теореме 40 является гильбертовым базисом в H.

Равномощность двух базисов в конечномерном пространстве следует из аналогичного алгебраического факта: в этом случае понятия базиса и гильбертова базиса совпадают.

Пусть теперь H обладает счетным базисом $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. Тогда H бесконечномерно (так как x_n независимы) и сепарабельно (т. е. обладает счетным всюду плотным подмножеством; таковым является, например, совокупность всех конечных линейных комбинаций базисных векторов с рациональными коэффициентами). Всякий другой базис $\{y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ содержит бесконечное число элементов. Если бы A было несчетно, то в H было бы несчетное множество непересекающихся шаров радиуса 1 (достаточно взять шары с центрами в точках $2y_\alpha$ $(\alpha\in A)$), что противоречит сепарабельности H.

Случай несчетной размерности требует дополнительных сведений из теории множеств, и мы его опустим.

Для сепарабельных гильбертовых пространств существование базиса можно доказать без использования леммы Цорна с помощью процесса *ортогонализации*.

Пусть $\{x_n\}_{n\in \mathbf{N}}$ — счетная система векторов в H, ортогональное дополнение к которой состоит из одного нуля (например, плотное в H семейство векторов, существующее в силу сепарабельности H). Удаляя «лишние» векторы, мы можем считать, что x_n линейно независимы. Определим теперь новые последовательности векторов $\{y_n\}_{n\in \mathbf{N}}$, $\{z_n\}_{n\in \mathbf{N}}$ следующим образом:

$$y_1 = x_1, \qquad z_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|},$$

$$y_2 = x_2 - (x_2, z_1)\, z_1, \qquad z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} (x_n, z_i)\, z_i, \qquad z_n = \frac{y_n}{\|y_n\|},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Легко видеть, что система $\{z_n\}$ ортонормирована и линейная оболочка векторов $z_1, \ldots, z_n$ совпадает с линейной оболочкой векторов $x_1, \ldots, x_n$. Поэтому $\{z_n\}_{\alpha\in \mathbf{N}}$ — базис в H. Заметим, что если первоначальная система $\{x_n\}$ лежала в некотором (незамкнутом) подпространстве $H_0 \subset H$, то система $\{z_n\}$ также лежит в H_0. Отсюда, в частности, вытекает, что во всяком сепарабельном предгильбертовом пространстве есть базис.

Теорема 42. *Два гильбертовых пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую гильбертову размерность.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Докажем достаточность. Пусть H_1 и H_2 имеют одинаковую размерность. Это значит, что в H_1 и в H_2 есть равномощные базисы $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ и $\{y_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Определим оператор $U\colon H_1 \to H_2$ формулой $U\left(\sum\limits_{\alpha\in A} c_\alpha x_\alpha\right) = \sum\limits_{\alpha\in A} c_\alpha y_\alpha$. Равенство Парсеваля показывает, что этот оператор изометричен (т. е. сохраняет скалярное произведение) и, следовательно, отображает H_1 в некоторое полное подпространство $L \subset H_2$. Поскольку L содержит базис $\{y_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $L^\perp = \{0\}$. Поэтому $L = H_2$. Теорема доказана.

Следствие. *Все сепарабельные бесконечномерные гильбертовы пространства изоморфны.*

2. Операторы в гильбертовом пространстве. Как мы видели в п. 1, каждый линейный непрерывный функционал в гильбертовом пространстве H может быть записан в виде скалярного произведения. Отсюда вытекает, что вещественное гильбертово пространство H естественно отождествляется со своим сопряженным H': вектору y соответствует функционал $f_y(x)=(x, y)$. Для комплексного гильбертова пространства это соответствие является *антиизоморфизмом*, так как f_y зависит от y *антилинейно*: $f_{\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2} = \bar{\lambda}_1 f_{y_1} + \bar{\lambda}_2 f_{y_2}$. Введем пространство H^*, *эрмитово сопряженное к* H. Элементами H^* являются антилинейные непрерывные функционалы на H. Пространства H и H^* естественно отождествляются: вектору $x \in H$ соответствует антилинейный функционал $f_x^*(y) = (x, y)$.

Если H_1 и H_2 — гильбертовы пространства, A — линейный оператор из H_1 в H_2, то можно определить *эрмитово сопряженный* оператор A^*, действующий из $H_2^*=H_2$ в $H_1^* = H_1$ по формуле

$$(A^*x_2, x_1)=(x_2, Ax_1), \quad x_i \in H_i.$$

Соответствие $A \mapsto A^*$ обладает свойствами:

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)^* = \bar{\lambda}_1 A_1^* + \bar{\lambda}_2 A_2^*; \ (AB)^* = B^*A^*; \ (A^*)^* = A.$$

Часто эрмитово сопряженные операторы называют просто сопряженными. Мы тоже будем так делать, сохраняя, однако, разницу в обозначении: сопряженный оператор обозначается A', а эрмитово сопряженный — A^*.

Выделяются следующие классы операторов.

Самосопряженные (или *эрмитовы*) операторы A характеризуются свойством $A^* = A$.

Унитарные операторы характеризуются свойством $U^* = U^{-1}$. (Это равносильно условиям $U^*U = 1 = UU^*$. В конечномерном случае достаточно одного из этих равенств.)

Нормальные операторы N характеризуются свойством $NN^* = N^*N$.

Ортопроекторы P характеризуются свойствами $P^* = P = P^2$ (см. задачу 482).

Положительные операторы A характеризуются свойством $(Ax, x) \geqslant 0$ для всех $x \in H$. Это свойство записывается так: $A \gg 0$. В множестве $\operatorname{End} H$ вводится частичный порядок: $A \gg B$, если $A - B \gg 0$.

Примеры. 1) Оператор A умножения на функцию $a \in L_\infty(X, \mu)$ в пространстве $L_2(X, \mu)$ является самосопряженным, если $a(x)$ вещественна почти всюду, и унитарным, если $|a(x)| = 1$ почти всюду. Этот оператор нормален для любой функции a, является ортопроектором, если a принимает почти всюду значения 0 или 1, положителен, если $a \geqslant 0$ почти всюду.

2) Оператор T одностороннего сдвига в $l_2(\mathbf{R})$, действующий по формуле $T\{x_n\} = \{x_{n+1}\}$, обладает свойством $TT^* = 1$, но не является унитарным, так как $T^*T = 1 - P_1$, где P_1 — проектор на подпространство, порожденное первым базисным вектором.

3) Пусть A — интегральный оператор в $L_2(X, \mu)$ с ядром $K(x_1, x_2)$, т. е. $Af(x_1) = \int\limits_X K(x_1, x_2) f(x_2)\, d\mu(x_2)$. Вычислим сопряженный оператор A^*. Основное равенство $(Af, g) = (f, A^*g)$ в этом случае имеет вид

$$\int\limits_X \int\limits_X K(x_1, x_2) f(x_2) \overline{g(x_1)}\, d\mu(x_1)\, d\mu(x_2) = \int\limits_X f(x) \overline{(A^*g)(x)}\, d\mu(x),$$

откуда $(A^*g)(x) = \int\limits_X \overline{K(x_1, x)}\, g(x_1)\, d\mu(x_1)$. Итак, A^* — также интегральный оператор с ядром $K^*(x_1, x_2) = \overline{K(x_2, x_1)}$.

Отметим, что в частном случае, когда X состоит из конечного числа точек единичной меры, мы получаем известное из линейной алгебры соотношение между элементами матрицы A и эрмитово сопряженной матрицы A^*: $a^*_{ik} = \overline{a_{ki}}$.

Теорема 43. *Линейный оператор A из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2 компактен тогда и только тогда, когда он может быть равномерно аппроксимирован операторами конечного ранга.*

Доказательство. Достаточность условия справедлива в любом банаховом пространстве и была установлена выше (см. теорему 16). Необходимость доказывается так. Пусть $A \in \mathscr{K}(H_1, H_2)$, B_1 — единичный шар в H_1. Тогда AB_1 — предкомпактное множество в H_2. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, пусть $y_1, \ldots, y_N$ — конечная ε-сеть для AB_1, H_0 — линейная оболочка $y_1, \ldots, y_N$ и P_0 — ортопроектор на H_0 в H_2. Ясно, что P_0A — оператор конечного ранга, поскольку $\operatorname{im} P_0A \subset \operatorname{im} P_0 = H_0$. С другой стороны,

$$\|A - P_0A\| = \sup_{x \in B_1} \|Ax - P_0Ax\| = \sup_{y \in AB_1} \|y - P_0y\| \leqslant \varepsilon,$$

так как

$$\|y - P_0y\| = \|y - y_i - P_0(y - y_i)\| = \\ = \|(1 - P_0)(y - y_i)\| \leqslant \|y - y_i\|.$$

(Последнее вытекает из того, что $1-P_0$ является, как и P_0, ортопроектором и, следовательно, имеет норму 1.) Теорема доказана.

Каждому эрмитову оператору A в гильбертовом пространстве соответствует *эрмитова* (в вещественном пространстве — *квадратичная*) *форма* $Q_A(x)=(Ax, x)$.

Теорема 44. *Для любого эрмитова оператора A справедливо равенство $\sup\limits_{\|x\|=1}|Q_A(x)|=\|A\|$; если верхняя грань достигается в точке x_0, то x_0 — собственный вектор оператора A с собственным значением $\pm\|A\|$.*

Доказательство. Ясно, что $|Q_A(x)|=|(Ax,x)|\leqslant \leqslant\|Ax\|\|x\|\leqslant\|A\|$ при $\|x\|=1$. Для получения обратной оценки воспользуемся тождеством

$$Q_A(x+y)-Q_A(x-y)=4\operatorname{Re}(Ax, y),$$

которое легко выводится из определения Q_A. Пусть $\sup\limits_{\|x\|=1}|Q_A(x)|=c$. Тогда из нашего тождества вытекает неравенство

$$4\operatorname{Re}(Ax, y)\leqslant c\|x+y\|^2+c\|x-y\|^2$$

или, в силу тождества параллелограмма,

$$2\operatorname{Re}(Ax, y)\leqslant c\|x\|^2+c\|y\|^2.$$

Положим здесь $y=\frac{\|x\|}{\|Ax\|}Ax$. Тогда мы получим $2\|x\|\|Ax\|\leqslant \leqslant 2c\|x\|^2$ или $\|Ax\|\leqslant c\|x\|$, что и требовалось. Другой вывод можно получить из задачи 484.

Пусть теперь $\sup|Q_A(x)|$ достигается в точке x_0. Обозначим через z любой единичный вектор, ортогональный к x_0. Вектор $x_t=x_0\cos t+z\sin t$ при $t=0$ совпадает с x_0 и при любом t имеет единичную длину. Поэтому $Q_A(x_t)$ имеет экстремум при $t=0$. Значит, $\frac{d}{dt}Q_A(x_t)\Big|_{t=0}=0$. Вычисляя эту производную, получаем $2\operatorname{Re}(Ax_0, z)=0$. Заменяя здесь z на iz, мы видим, что $(Ax_0, z)=0$. Поэтому $Ax_0\in(\{x_0\}^{\perp})^{\perp}$, т. е. $Ax_0=\lambda x_0$. Наконец,

$$\lambda=(\lambda x_0, x_0)=(Ax_0, x_0)=\pm\|A\|.$$

Теорема доказана.

Теорема 45. *Если подпространство $H_1\subset H$ инвариантно относительно эрмитова оператора A, то ортогональное дополнение $H_2=H_1^{\perp}$ также инвариантно относительно A.*

Доказательство. Пусть $x_1 \in H_1$, $x_2 \in H_2$. Покажем, что $Ax_2 \perp x_1$. Это следует из равенства $(Ax_2, x_1) = (x_2, Ax_1)$. Таким образом, $AH_2 \subset H_2$.

Теорема 46 (Гильберт). *Пусть A — компактный эрмитов оператор в гильбертовом пространстве H. Существует ортонормированный базис $\{x_\beta\}_{\beta \in B}$, состоящий из собственных векторов оператора A. Соответствующие собственные значения $\{\lambda_\beta\}$ вещественны, и для любого $\varepsilon > 0$ лишь конечное число их лежит в области $|\lambda| > \varepsilon$.*

Доказательство. С помощью леммы Цорна легко устанавливается, что существует максимальная ортонормированная система, состоящая из собственных векторов оператора A. Покажем, что эта система является базисом в H. Если это не так, то пусть H_0 — ортогональное дополнение к этой системе. По теореме 45 H_0 инвариантно относительно A. Ограничение A_0 оператора A на H_0 — компактный эрмитов оператор, не имеющий ни одного собственного вектора (в силу максимальности исходной системы). Покажем, что это противоречит теореме 44. В самом деле, из компактности A_0 вытекает, что Q_{A_0} непрерывна в слабой топологии на единичном шаре B_1. А именно, если $x_n \rightharpoonup x$, то

$$Q_{A_0}(x_n) - Q_{A_0}(x) = (A_0 x_n, x_n) - (A_0 x, x) = \\ = (A_0(x_n - x), x_n) + (Ax, x_n - x).$$

В первом слагаемом первый сомножитель сильно стремится к нулю ввиду компактности A_0, а второй ограничен, так как $x_n \in B_1$. Поэтому первое слагаемое стремится к нулю. Во втором слагаемом первый сомножитель фиксирован, а второй слабо стремится к нулю. Поэтому и второе слагаемое стремится к нулю. Итак, Q_A — слабо непрерывная функция на B_1. Так как шар B_1 — компакт в слабой топологии, функция $|Q_A|$ достигает на B_1 своей верхней грани в некоторой точке $x_0 \in B_1$. По теореме 4 x_0 — собственный вектор для A, что и дает искомое противоречие. Вещественность собственных значений вытекает из соотношений

$$\lambda_\beta = (Ax_\beta, x_\beta) = (x_\beta, Ax_\beta) = \bar{\lambda}_\beta.$$

Докажем последнее утверждение теоремы. Пусть $B_\varepsilon \subset B$ — совокупность тех индексов β, для которых $|\lambda_\beta| > \varepsilon$, H_ε — подпространство, порожденное $\{x_\beta\}_{\beta \in B_\varepsilon}$. Пространство H_ε инвариантно относительно A. Обозначим через A_ε

ограничение A на H_ε. Тогда A_ε — обратимый компактный оператор, что возможно, лишь если H_ε конечномерно и, следовательно, B_ε конечно. Теорема доказана.

Замечание. Доказательству теоремы Гильберта можно придать конструктивный характер: мы последовательно находим собственные числа оператора A в порядке убывания их абсолютных величин, пользуясь теоремами 44 и 45.

Оказывается, не только максимальное (по абсолютной величине) собственное значение эрмитова оператора A имеет вариационный смысл. Справедлива

Теорема Куранта. *Пусть A — компактный эрмитов оператор в гильбертовом пространстве H. Предположим, что его ненулевые собственные значения занумерованы с учетом кратностей так, что выполняются неравенства*

$$\lambda_{-1} \leqslant \lambda_{-2} \leqslant \ldots < 0 < \ldots \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_1.$$

Тогда

$$\lambda_n = \inf_{H_{n-1}} \sup_{x \perp H_{n-1}} \frac{Q_A(x)}{\|x\|^2},$$

$$\lambda_{-n} = \sup_{H_{n-1}} \inf_{x \perp H_{n-1}} \frac{Q_A(x)}{\|x\|^2},$$

где H_{n-1} пробегает все $(n-1)$-мерные подпространства в H.

Доказательство. Второе равенство вытекает из первого после замены A на $-A$. Докажем первое. Пусть $\mathring{H}_{n-1}$ — линейная оболочка векторов $x_1, \ldots, x_{n-1}$, соответствующих собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$. Тогда в $\mathring{H}_{n-1}^{\perp}$ максимальное собственное значение равно λ_n. Поэтому

$$\sup_{x \perp \mathring{H}_{n-1}} \frac{Q_A(x)}{\|x\|} = \lambda_n.$$

С другой стороны, для каждого $(n-1)$-мерного подпространства H_{n-1} пространство $H_{n-1}^{\perp}$ имеет ненулевое пересечение с пространством, натянутым на $x_1, \ldots, x_n$. Пусть

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \in H_{n-1}^{\perp},$$

Тогда

$$\frac{Q_A(x)}{\|x\|^2}=\frac{\sum |c_k|^2\lambda_k}{\sum |c_k|^2}\geqslant \lambda_n, \text{ т. е. } \sup_{x\perp H_{n-1}}\frac{Q_A(x)}{\|x\|^2}\geqslant\lambda_n.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает полезный в приложениях *принцип промежуточности* (см. задачу 494).

ГЛАВА IV

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ЭЛЕМЕНТЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

§ 1. Свертки на коммутативной группе

1. Свертки основных функций. Пусть G — конечная группа, K — некоторое поле. Обозначим через $K[G]$ совокупность формальных линейных комбинаций элементов группы G с коэффициентами из K. Элементы $K[G]$ имеют вид

$$x=\sum_{g\in G}a(g)\,g,\quad \text{где}\quad a(g)\in K. \tag{1}$$

На множестве $K[G]$ естественно вводится структура алгебры над полем K:

$$\begin{gathered}\lambda\Big(\sum_{g\in G}a(g)\,g\Big)=\sum_{g\in G}\lambda a(g)\,g,\\ \sum_{g\in G}a(g)\,g+\sum_{g\in G}b(g)\,g=\sum_{g\in G}(a(g)+b(g))\,g,\\ \Big(\sum_{g\in G}a(g)\,g\Big)\Big(\sum_{g\in G}b(g)\,g\Big)=\sum_{\substack{g_1\in G\\ g_2\in G}}a(g_1)\,b(g_2)\,g_1g_2.\end{gathered} \tag{2}$$

Удобно отождествлять элемент $x\in K[G]$, заданный формулой (1), с функцией $a(g)$ на группе G со значениями в K. При такой интерпретации умножение на число и сложение в $K[G]$ становятся обычными операциями над функциями. Операция умножения, однако, отличается от обычного (поточечного) умножения. Она называется *сверткой* и обозначается $*$. Явный вид ее дается формулами

$$(a*b)(g)=$$
$$=\sum_{h\in G}a\left(gh^{-1}\right)b(h)=\sum_{h\in G}a(h)\,b\left(h^{-1}g\right)=\sum_{g_1g_2=g}a(g_1)\,b(g_2). \tag{3}$$

Множество $K[G]$ с введенными в нем выше операциями называется *групповой алгеброй* группы G. Эта алгебра естественно возникает как универсальный объект в подходящей категории (см. задачу 506) и играет большую роль в теории линейных представлений групп.

В дальнейшем нас будут, как правило, интересовать бесконечные группы G, снабженные некоторой мерой μ. В этом случае сумму в формуле (3) естественно заменить на интеграл. Более точно, мы предположим, что G — коммутативная топологическая группа (последнее означает, что в G определена хаусдорфова топология, относительно которой групповые операции $(g_1, g_2) \to g_1 g_2$ и $g \to g^{-1}$ непрерывны) и что на G задана борелевская мера μ, инвариантная относительно сдвигов и перехода к обратному элементу. Групповую операцию в G мы будем обозначать знаком $+$. Тогда свойство инвариантности меры μ можно записать в виде

$$\mu(X+\alpha)=\mu(X), \quad \mu(-X)=\mu(X) \tag{4}$$

для любого борелевского множества $X \subset G$ и любого $\alpha \in G$. Известно, что такая мера μ существует тогда и только тогда, когда группа G локально компактна *) и в этом случае инвариантная мера определена однозначно с точностью до числового множителя.

Основные примеры. 1) $G = \mathbf{R}^n$, групповая операция — обычное сложение векторов, мера μ — обычная мера Лебега в $\mathbf{R}^n$,

$$d\mu(x) = dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

2) $\mathbf{Z}^n$ — n-мерная целочисленная решетка в $\mathbf{R}^n$, состоящая из векторов с целыми координатами. Групповая операция — сложение, инвариантная мера μ имеет вид $\mu(X) = \operatorname{card} X$ (число точек в множестве X).

3) $\mathbf{T}^n$ — n-мерный тор. Мы будем рассматривать две реализации $\mathbf{T}^n$: либо как подмножество в $\mathbf{C}^n$, состоящее из векторов $z = (z_1, \ldots, z_n)$ с условием $|z_k| = 1$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, и с операцией покоординатного умножения, либо как факторгруппу $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$, элементы которой можно задавать векторами $t \in \mathbf{R}^n$ с условием $t_k \in [0, 1)$ и с операцией сложения по модулю 1. Соответствие между реализациями устанавливается формулой $z_k = e^{2\pi i t_k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

---

*) Топологическое пространство называется локально компактным, если любая его точка имеет относительно компактную окрестность.

Инвариантная мера μ — обычная мера Лебега в координатах $t_1, \ldots, t_n$. Отметим, что эта группа компактна и что $\mu(\mathbf{T}^n) = 1$.

Свертка функций f_1 и f_2 на коммутативной группе G с инвариантной мерой μ определяется формулами

$$(f_1 * f_2)(x) = \int\limits_G f_1(x-y) f_2(y)\, d\mu(y) = \\ = \int\limits_G f_1(y) f_2(x-y)\, d\mu(y), \quad (5)$$

которые являются точным аналогом (3) (и превращаются в (3), если G конечна, а $\mu(X) = \operatorname{card} X$).

Т е о р е м а 1. *Если $f_1, f_2 \in L_1(G, \mu)$, то интеграл* (5) *существует для почти всех $x \in G$, функция $f_1 * f_2$ принадлежит $L_1(G, \mu)$ и $\|f_1 * f_2\| \leqslant \|f_1\|\|f_2\|$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $f_1, f_2 \in L_1(G, \mu)$, то по теореме Фубини функция $\varphi(x, y) = f_1(x) f_2(y)$ принадлежит $L_1(G \times G, \mu \times \mu)$, причем $\|\varphi\| = \|f_1\|\|f_2\|$.

Рассмотрим теперь преобразование τ пространства $G \times G$, переводящее точку (x, y) в $(x+y, y)$. Это преобразование измеримо (переводит борелевские множества в борелевские) и сохраняет меру $\mu \times \mu$. В самом деле, если $X = A \times B \subset G \times G$ — элементарное измеримое множество, то

$$\mu \times \mu(\tau(X)) = \int\limits_{G \times G} \chi_{\tau(X)}(x, y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) = \\ = \int\limits_{G \times G} \chi_X(x-y, y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) = \int\limits_G \left(\int\limits_G \chi_X(x-y, y)\, d\mu(x)\right) \times \\ \times d\mu(y) = \int\limits_B \mu(A+y)\, d\mu(y) = \mu(A)\mu(B) = \mu \times \mu(X).$$

Отсюда следует, что τ порождает изометрическое преобразование T пространства $L_1(G \times G, \mu \times \mu)$ по формуле

$$T\varphi(x, y) = \varphi(\tau^{-1}(x, y)) = \varphi(x-y, y).$$

Применяя этот результат к функции $\varphi(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, получаем утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е. Доказанное неравенство влечет непрерывность операции свертки в пространстве $L_1(G, \mu)$.

Т е о р е м а 2. *Операция свертки коммутативна, ассоциативна и дистрибутивна относительно сложения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Последнее утверждение сразу следует из линейности интеграла. Первые два доказываются подходящей заменой переменных, сохраняющей меру μ или $\mu\times\mu$. А именно,

$$f_1*f_2(x)=\int_G f_1(x-y)\,f_2(y)\,d\mu(y)=$$
$$=\int_G f_1(-y)\,f_2(x+y)\,d\mu(y)=\int_G f_2(x-y)\,f_1(y)\,d\mu(y)=$$
$$=(f_2*f_1)(x),$$
$$((f_1*f_2)*f_3)(x)=\int_G (f_1*f_2)(x-y)\,f_3(y)\,d\mu(y)=$$
$$=\int_G\int_G f_1(x-y-z)\,f_2(z)\,f_3(y)\,d\mu(z)\,d\mu(y)=$$
$$=\int_G\int_G f_1(x-z)\,f_2(z-y)\,f_3(y)\,d\mu(z)\,d\mu(y)=(f_1*(f_2*f_3))(x).$$

Пусть теперь $T(a)$ означает оператор сдвига на группе G: $(T(a)f)(x)=f(x+a)$. Ясно, что $T(a)$ — изометрический линейный оператор в $L_1(G,\mu)$. Одно из важнейших свойств свертки описывает

Теорема 3. *Операция свертки перестановочна со сдвигами на группе*:

$$T(a)(f_1*f_2)=T(a)f_1*f_2=f_1*T(a)f_2. \qquad (6)$$

Доказательство. Имеем:

$$T(a)(f_1*f_2)(x)=(f_1*f_2)(x+a)=$$
$$=\int_G f_1(x+a-y)\,f_2(y)\,d\mu(y)=\int_G T(a)\,f_1(x-y)\,f_2(y)\,d\mu(y)=$$
$$=(T(a)\,f_1*f_2)(x).$$

Второе равенство следует из первого и коммутативности свертки. В дальнейшем мы будем использовать обозначение $S(f)$ для оператора свертки с функцией f: $S(f_1)f_2=f_1*f_2$. Утверждения теоремы 2 можно сформулировать в виде тождеств

$$S(f_1)S(f_2)=S(f_2)S(f_1)=S(f_1*f_2), \qquad (7)$$

а утверждение теоремы 3 — в виде тождества

$$T(a)S(f)=S(f)T(a)=S(T(a)f). \qquad (8)$$

Теорема 4. *Если* $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, *то* $S(\varphi)$ — *непрерывный оператор из* $L_1(\mathbf{R}^n, dx)$ *в* $\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$ *и из* $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ *в* $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$.

Доказательство. Пусть $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, $f\in L_1(\mathbf{R}^n, dx)$. Покажем, что функция $S(\varphi)f$ бесконечно дифференцируема и справедливо равенство

$$\partial^k S(\varphi)f=S(\partial^k\varphi)f. \tag{9}$$

Очевидно, достаточно проверить это утверждение в случае частной производной $\partial_j=\partial/\partial x_j$. Пусть e_j — базисный вектор в $\mathbf{R}^n$. Оператор ∂_j может быть записан в виде $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{T(te_j)-1}{t}$. По теореме 3 последний оператор перестановочен с $S(f)$. Поэтому

$$\partial_j S(\varphi)f(x)=\partial_j S(f)\varphi(x)=\lim_{t\to 0}\frac{T(te_j)-1}{t}S(f)\varphi(x)=$$
$$=\lim_{t\to 0}S(f)\frac{T(te_j)-1}{t}\varphi(x)=S(f)\partial_j\varphi.$$

Последнее равенство вытекает из того, что для $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ функция $\dfrac{T(te_j)-1}{t}\varphi$ равномерно стремится к $\partial_j\varphi$, а оператор $S(f)$ сохраняет равномерную сходимость. Итак, равенство (9) и бесконечная дифференцируемость $S(\varphi)f$ доказаны. Проверим, что $S(\varphi)$: $L_1(\mathbf{R}^n, dx)\to\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ — непрерывный оператор. Для любой полунормы p_{Kk} в $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ имеем

$$p_{Kk}(S(\varphi)f)=\sup\left(\partial^k S(\varphi)f(x)\right)=\sup\left|S\left(\partial^k\varphi\right)f(x)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{\mathbf{R}^n}\left|\partial^k\varphi(x)\right|\|f\|_1,$$

что и требовалось.

Для доказательства последнего утверждения проверим, что для φ_1, $\varphi_2\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ справедливо включение

$$\operatorname{supp}(\varphi_1*\varphi_2)\subset\operatorname{supp}\varphi_1+\operatorname{supp}\varphi_2, \tag{10}$$

где supp означает носитель, а $+$ в правой части — *арифметическую сумму* множеств: $X+Y=\{x+y\mid x\in X,\ y\in Y\}$. В самом деле, если $x\notin\operatorname{supp}\varphi_1+\operatorname{supp}\varphi_2$, то для любого $y\in\operatorname{supp}\varphi_1$ вектор $x-y\notin\operatorname{supp}\varphi_2$. Поэтому в интеграле (5), определяющем $\varphi_1*\varphi_2(x)$, подынтегральное выражение тождественно равно нулю. Значит, $\varphi_1*\varphi_2$ обращается в нуль вне $\operatorname{supp}\varphi_1+\operatorname{supp}\varphi_2$. Последнее множество является компактом и, следовательно, содержит $\operatorname{supp}(\varphi_1*\varphi_2)$. Мы доказали, что $S(\varphi)$ переводит $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ в $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Непрерывность $S(f)$ достаточно проверить на подпространствах $\mathscr{D}_K(\mathbf{R}^n)$, где она устанавливается той же выкладкой, что и выше, учитывая, что $S(\varphi)$ переводит $\mathscr{D}_K(\mathbf{R}^n)$ в $\mathscr{D}_{K_1}(\mathbf{R}^n)$, где $K_1=K+\operatorname{supp}\varphi$. Теорема доказана.

2. Свертки обобщенных функций. Определение свертки можно обобщить на тот случай, когда один или оба сомножителя являются не обычными, а обобщенными функциями.

Пусть $F\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$. Свертку $F*\varphi$ можно определить двумя способами.

Первый способ. Оператор $S(\varphi)$, как мы знаем (см. теорему 4), является непрерывным оператором в пространстве $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$. Вычислим действие сопряженного оператора $S(\varphi)'$ на регулярную обобщенную функцию $f(x)$. Имеем

$$\langle S(\varphi)' f, \psi\rangle=\langle f, S(\varphi)\psi\rangle=$$
$$=\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\varphi*\psi(x)\,dx=\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\varphi(x-y)\,\psi(y)\,dy. \qquad (11)$$

Введем обозначение $\breve{\varphi}(x)=\varphi(-x)$. Тогда последнее выражение можно преобразовать так:

$$\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\breve{\varphi}(y-x)\,\psi(y)\,dy=\int_{\mathbf{R}^n} f*\breve{\varphi}(y)\,\psi(y)\,dy=\langle S(\breve{\varphi})f, \psi\rangle.$$

Итак, мы установили равенство операторов $S(\varphi)'=$ $=S(\breve{\varphi})$ на регулярных обобщенных функциях. Отсюда вытекает, что оператор $S(\varphi)$ допускает непрерывное продолжение на $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, а именно, оператор $S(\breve{\varphi})'$. Это и есть первое определение свертки. Запишем его в виде формулы

$$\langle F*\varphi,\ \psi\rangle=\langle F,\ \breve{\varphi}*\psi\rangle. \qquad (12)$$

Второй способ. Интеграл $\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x-y)\,F(y)\,dy$, задающий свертку в случае обычных функций, можно определить в случае, когда $F\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ как значение функционала F на основной функции $\psi(y)=\varphi(x-y)$. Используя ранее введенные обозначения, это определение можно выразить формулой

$$F*\varphi(x)=\langle F,\ T(-x)\breve{\varphi}\rangle. \qquad (13)$$

Таким образом, согласно второму определению свертки $F * \varphi$ является обычной функцией на $\mathbf{R}^n$. Оказывается, на самом деле оба определения совпадают. А именно, справедлива

Теорема 5. *Если* $F \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, *то обобщенная функция* $F * \varphi$, *определенная формулой* (12), *регулярна, бесконечно дифференцируема и может быть вычислена в точке* $x \in \mathbf{R}^n$ *по формуле* (13).

Доказательство. Заметим прежде всего, что элемент $T(-x)\breve{\varphi} \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ непрерывно зависит от $x \in \mathbf{R}^n$. (Если $x_n \to x$ в $\mathbf{R}^n$, то $T(-x_n)\breve{\varphi} \to T(-x)\varphi$ в топологии пространства $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$.) Поэтому правая часть равенства (13) — непрерывная функция. Рассмотрим ее как регулярную обобщенную функцию на $\mathbf{R}^n$ и покажем, что она совпадает с обобщенной функцией (12). Для этого мы должны для любой $\psi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ проверить равенство

$$\langle F, \breve{\varphi} * \psi\rangle = \int_{\mathbf{R}^n} \langle F, T(-x)\breve{\varphi}\rangle \psi(x)\,dx$$

или

$$\int_{\mathbf{R}^n} F(y)\left(\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x-y)\psi(x)\,dx\right)dy = \int_{\mathbf{R}^n}\left(\int_{\mathbf{R}^n} F(y)\varphi(x-y)\,dy\right)\psi(x)\,dx.$$

Покажем, что справедливо более общее равенство

$$\int_{\mathbf{R}^n} F(y)\left(\int_{\mathbf{R}^m} \alpha(x, y)\,dx\right)dy = \int_{\mathbf{R}^m}\left(\int_{\mathbf{R}^n} F(y)\alpha(x, y)\,dy\right)dx, \quad (14)$$

где $F \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, $\alpha \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^{n+m})$. Для этого заметим, что множество тех $\alpha \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^{m+n})$, для которых равенство (14) верно, образует замкнутое линейное подпространство. Это подпространство содержит все функции α вида $\alpha(x, y) = \beta(x)\gamma(y)$, $\beta \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, $\gamma \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^m)$ и, следовательно, совпадает с $\mathscr{D}(\mathbf{R}^{m+n})$.

Для доказательства теоремы осталось проверить бесконечную дифференцируемость функции $F * \varphi$. Она следует из бесконечной дифференцируемости отображения $x \mapsto T(-x)\breve{\varphi}$, которая проверяется непосредственно.

Аналогично определяется свертка $F * \varphi$ в случае, когда φ и F принадлежат другим пространствам основных и обобщенных функций (см. задачи 526, 527).

Пусть теперь $F \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, $f \in \mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$. Покажем, что можно определить свертку $F * f$, которая будет элементом пространства $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$. Мы уже знаем, что оператор $S(F)$ свертки с $F \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ переводит $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ в $\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$. Можно проверить (см. задачу 526), что этот оператор непрерывен. Далее, операцию V и соотношение (12) можно перенести на обобщенные функции. Отсюда вытекает, что оператор $S(F)$ имеет непрерывное продолжение (а именно, $S(\breve{F})'$) на пространство $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$ и отображает его в $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$. Это и есть искомое определение свертки. Запишем его в виде формулы

$$\langle F * f,\ \varphi\rangle = \langle f,\ \breve{F} * \varphi\rangle. \tag{15}$$

З а м е ч а н и е. В этом определении сомножители F и f играют несимметричную роль. Можно было бы строить продолжение оператора $S(f)\colon \mathscr{D}(\mathbf{R}^n) \to \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ до непрерывного оператора в $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ (а именно, $S(\breve{f})'$) и определять $F * f$ как результат применения к F этого продолженного оператора. Мы получили бы формулу

$$\langle F * f,\ \varphi\rangle = \langle F,\ \breve{f} * \varphi\rangle. \tag{15$'$}$$

Можно убедиться (ср. с доказательством теоремы 5), что формулы (15) и (15$'$) определяют одну и ту же обобщенную функцию.

Приведем еще одну полезную формулу для свертки обобщенных функций F и f:

$$\langle F * f,\ \varphi\rangle = \langle F \times f,\ \mathring{\varphi}\rangle, \tag{16}$$

где $F \times f$ — прямое произведение обобщенных функций F и f (см. § 4 гл. III), т. е. обобщенная функция в $\mathbf{R}^{2n}$, заданная одним из эквивалентных равенств:

$$\langle F \times f, \alpha\rangle = \int\limits_{\mathbf{R}^n} F(x)\left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(y)\,\alpha(x, y)\,dy\right)dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(y)\,dy\left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} F(x)\,\alpha(x, y)\,dx\right), \tag{17}$$

а через $\mathring{\varphi}$ обозначена функция $\varphi(x+y)$. Доказательство этой формулы предоставляется читателю (оно сводится к замене переменных в интегралах, содержащих обобщенные функции).

Приведем теперь «таблицу умножения» для операции свертки в основных функциональных пространствах:

$f_1 \backslash f_2$	$\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$	$S(\mathbf{R}^n)$	$\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$	$\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$	$S'(\mathbf{R}^n)$	$\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$
$\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$	$\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$	$S(\mathbf{R}^n)$	$\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$	$\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$	$P\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$	$\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$
$S(\mathbf{R}^n)$	$S(\mathbf{R}^n)$	$S(\mathbf{R}^n)$	—	$S(\mathbf{R}^n)$	$P\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$	—
$\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$	$\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$	—	—	$\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$	—	—
$\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$	$\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$	$S(\mathbf{R}^n)$	$\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$	$\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$	$S'(\mathbf{R}^n)$	$\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$
$S'(\mathbf{R}^n)$	$P\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$	$P\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$	—	$S'(\mathbf{R}^n)$	—	—
$\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$	$\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$	—	—	$\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$	—	—

Прочерк означает, что соответствующая операция свертки не определена. Через $P\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ обозначено подпространство в $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$, состоящее из функций, растущих не быстрее многочлена. Для запоминания этой таблицы полезно иметь в виду следующее правило: свертка определена, если хотя бы один сомножитель финитный, гладка, если хотя бы один сомножитель гладкий, и финитна, если оба сомножителя финитны.

Теорема 6. *Операторы свертки перестановочны друг с другом (в тех случаях, когда их композиция имеет смысл), с операторами сдвига и с операторами дифференцирования.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что первое утверждение теоремы влечет два остальных. Дело в том, что операторы сдвига и дифференцирования являются частными случаями оператора свертки. А именно, справедливы равенства

$$T(a)\varphi = \delta_a * \varphi, \tag{18}$$

$$\partial^k\varphi = \partial^k\delta * \varphi. \tag{19}$$

Равенство (18) для основных функций φ вытекает из (13):

$$\delta_a * \varphi(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \delta_a(x-y)\,\varphi(y)\,dy = \varphi(x+a) = T(a)\,\varphi(x).$$

Для обобщенных функций φ с компактным носителем (18) вытекает из (15) и равенств $\breve{\delta}_a = \delta_{-a}$, $T(a)' = T(-a)$, проверяемых непосредственно.

Равенство (19) доказывается индукцией по числу $|k|$. Основная лемма в этом доказательстве — соотношение $\partial_j\varphi = \partial_j\delta * \varphi$ доказывается так же, как и (18).

Итак, осталось проверить равенство $S(f_1)S(f_2)=$ $=S(f_2)S(f_1)$ в тех случаях, когда хотя бы одна из функций f_1 и f_2 имеет компактный носитель. Пусть для определенности $f_1=f\in\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$, $f_2=F\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, и мы должны проверить коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n) & \xrightarrow{S(F)} & \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)\\ {\scriptstyle S(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S(f)}.\\ \mathscr{E}'(\mathbf{R}^n) & \xrightarrow{S(F)} & \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)\end{array}$$

По определению действия оператора свертки на обобщенные функции это равносильно коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{D}(\mathbf{R}^n) & \xrightarrow{S(F)} & \mathscr{E}(\mathbf{R}^n)\\ {\scriptstyle S(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S(f)},\\ \mathscr{D}(\mathbf{R}^n) & \xrightarrow{S(F)} & \mathscr{E}(\mathbf{R}^n)\end{array}$$

которая вытекает из равенства (16). Теорема доказана.

Доказанная теорема о перестановочности операторов свертки допускает следующее интересное и полезное обращение.

Теорема 7. *Пусть A — непрерывный оператор из $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ в $\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$. Следующие свойства A эквивалентны:*

1) *A перестановочен со сдвигами;*

2) *A перестановочен с операторами дифференцирования;*

3) *A является оператором свертки с некоторой обобщенной функцией $f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$.*

Доказательство. Согласно теореме 6 из свойства 3) следуют 1) и 2). Покажем, что из 2) вытекает 1). Пусть $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, $a\in\mathbf{R}^n$, $t\in\mathbf{R}$. Рассмотрим функцию вещественного переменного $t\mapsto T(-ta)AT(ta)\varphi$ со значениями в $\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$. Производная этой функции по t легко вычисляется, если учесть равенство

$$\frac{d}{dt}T(ta)=D_aT(ta)=T(ta)D_a, \tag{20}$$

справедливое для операторов сдвига в $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ и $\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$ (через D_a обозначена производная вдоль вектора a). Эта производная имеет вид

$$[-T(-ta)D_aAT(ta)+T(-ta)AD_aT(ta)]\varphi,$$

что равно нулю в силу перестановочности A и D_a. Поэтому наша функция постоянна. Приравнивая ее значения при $t=1$ и $t=0$, получаем $T(-a)AT(a)\varphi=A\varphi$, откуда следует 1). Выведем теперь свойство 3) из 1). Для этого заметим, что соответствие $\varphi\mapsto A\varphi(0)$ является линейным непрерывным функционалом на $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Обозначим этот функционал через f. Теперь из 1) можно заключить, что $A\varphi(x)=T(x)A\varphi(0)=AT(x)\varphi(0)=\langle f, T(x)\varphi\rangle=\check{f}*$ $*\varphi(x)$. Итак, $A=S(f)$.

Замечание. Утверждение теоремы и ее доказательство переносятся без изменения на случай, когда оператор A действует из $S'(\mathbf{R}^n)$ или $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ в $S'(\mathbf{R}^n)$.

Свойство 3) при этом формулируется так: $A=S(f)$, где $f\in S'(\mathbf{R}^n)$ или $\in\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ соответственно. Несколько более сложно доказывается, что всякий оператор из $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ в себя, перестановочный со сдвигами, имеет вид $S(f)$, где $f\in\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$. Таким образом, операторы свертки во всех этих случаях образуют максимальное коммутативное семейство. Это свойство показывает, что семейство операторов свертки похоже на семейство операторов умножения на функции. Ниже мы увидим, что это сходство не случайно: оба семейства переходят друг в друга при некотором преобразовании пространства.

§ 2. Преобразование Фурье

1. Характеры коммутативной группы. Пусть G — коммутативная группа. *Характером* этой группы называется гомоморфизм G в группу $\mathbf{T}$, т. е. такая функция χ на G с комплексными значениями, равными 1 по абсолютной величине, что

$$\chi(x+y)=\chi(x)\chi(y). \tag{21}$$

Если G — топологическая группа, то, как правило, термин «характер» означает «непрерывный характер». Мы будем считать все рассматриваемые характеры непрерывными, не оговаривая этого особо. Если χ_1 и χ_2 — характеры группы G, то их произведение $\chi_1\chi_2$ — также характер; если χ — характер, то $\chi^{-1}=\overline{\chi}$ *) — также характер. Таким образом, совокупность всех характеров данной группы G образует группу относительно операции обычного умножения функций. Эта группа обозначается $\widehat{G}$ и называется группой, *двойственной* к G. Группа $\widehat{G}$ стано-

*) Черта, как обычно, означает комплексное сопряжение.

вится топологической группой, если определить сходимость $\chi_n \to \chi$ как равномерную сходимость на каждом компакте $K \subset G$.

Пример. Пусть $G = \mathbf{Z}$ — группа целых чисел. Ясно, что каждый характер $\chi \in \widehat{G}$ определяется своим значением на образующем элементе $1 \in G$ (не путать 1 с единицей группы, роль которой играет 0). В самом деле, из (21) следует, что

$$\chi(n) = [\chi(1)]^n \text{ для всех } n \in \mathbf{Z}. \tag{22}$$

Значение $t = \chi(1)$ может быть любым числом $z \in \mathbf{T}$. Тем самым множество $\widehat{G}$ отождествляется в этом случае с окружностью $\mathbf{T}$.

Теорема 8. *Имеет место изоморфизм топологических групп* $\widehat{\mathbf{Z}} = \mathbf{T}$.

Доказательство. Мы уже видели, что множество $\widehat{\mathbf{Z}}$ естественно отождествляется с $\mathbf{T}$. Покажем, что это соответствие является изоморфизмом топологических групп. Будем обозначать через χ_z характер, определяемый условием $\chi_z(1) = z$, $z \in \mathbf{T}$. Равенство $\chi_{z_1}\chi_{z_2} = \chi_{z_1 z_2}$ показывает, что соответствие $z \to \chi_z$ является изоморфизмом групп $\mathbf{T}$ и $\widehat{\mathbf{Z}}$. Осталось проверить, что это соответствие является гомеоморфизмом. Поскольку группа $\mathbf{Z}$ дискретна, каждый компакт в $\mathbf{Z}$ состоит из конечного числа точек. Значит, сходимость в $\widehat{\mathbf{Z}}$ является поточечной сходимостью. Равенство (22) показывает, что $\chi_{z_n} \to \chi_z$ тогда и только тогда, когда $\chi_{z_n}(1) \to \chi_z(1)$, т. е. когда $z_n \to z$. Теорема доказана.

Теорема 9. *Группа* $\widehat{\mathbf{T}}$ *изоморфна* $\mathbf{Z}$.

Доказательство. Каждому $n \in \mathbf{Z}$ соответствует характер χ_n группы $\mathbf{T}$, задаваемый равенством

$$\chi_n(z) = z^n, \quad z \in \mathbf{T}. \tag{23}$$

Мы покажем ниже (см. также задачу 546), что $\mathbf{T}$ не имеет других характеров, кроме тех, которые задаются формулой (23). Поэтому соответствие $n \to \chi_n$ устанавливает эквивалентность множеств $\mathbf{Z}$ и $\widehat{\mathbf{T}}$. Равенство $\chi_n\chi_m = \chi_{n+m}$ показывает, что эта эквивалентность является изоморфизмом групп. Осталось проверить, что она является гомеоморфизмом топологических пространств. Для этого проверим, что множество $\widehat{\mathbf{T}}$ дискретно. Это следует из равенства

$$\max_{z\in T}|\chi_n(z)-\chi_m(z)|^2=\max_{z\in T}|2-2\operatorname{Re}z^{m-n}|=4$$

$$\text{при}\quad m\neq n.$$

Теорема доказана.

Мы видим, таким образом, что группы $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{T}$ двойственны друг к другу. Этот факт является частным случаем следующего результата.

Принцип двойственности Л. С. Понтрягина. *Для любой локально компактной коммутативной топологической группы G естественное отображение G в $\hat{\hat{G}}$, которое элементу $g\in G$ ставит в соответствие характер f_g на $\hat{G}$ по формуле*

$$f_g(\chi)=\chi(g),\quad \chi\in\hat{G}, \tag{24}$$

является изоморфизмом топологических групп.

Заметим, что для общих коммутативных топологических групп этот принцип не всегда выполняется (см. задачу 548).

Теорема 10. *Группа $\hat{\mathbf{R}}$ изоморфна* $\mathbf{R}$.

Доказательство. Каждому $\lambda\in\mathbf{R}$ поставим в соответствие характер $\chi_\lambda\in\hat{\mathbf{R}}$, задаваемый формулой

$$\chi_\lambda(x)=e^{2\pi i\lambda x}. \tag{25}$$

Покажем, что формула (25) дает все характеры группы $\mathbf{R}$. Пусть $\chi\in\hat{\mathbf{R}}$. Предположим сначала, что χ — дифференцируемая функция. Тогда из (21), дифференцируя по y и полагая $y=0$, получаем $\chi'(x)=c\chi(x)$, где $c=\chi'(0)$. Это дифференциальное уравнение имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию $\chi(0)=1$, а именно: $\chi(x)=e^{cx}$. Из условия $|\chi(x)|\equiv 1$ вытекает, что c чисто мнимо. Значит, χ совпадает с одним из характеров (25).

Теперь избавимся от предположения о дифференцируемости χ. Один из способов — рассмотреть χ как элемент $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ (см. задачу 543). Другой способ — применить технику сглаживания. Пусть $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$. Тогда функция $\chi*\varphi$ бесконечно дифференцируема. С другой стороны, эта функция пропорциональна χ (см. задачу 544) с коэффициентом, отличным от нуля, для подходящей функции φ (например, для достаточно далекого члена δ-образной последовательности). Отсюда вытекает, что всякий характер группы $\mathbf{R}$ — бесконечно дифференцируемая функция.

Итак, мы установили взаимно однозначное соответствие $\mathbf{R}$ и $\widehat{\mathbf{R}}$: $\lambda \to \chi_\lambda$. Равенство $\chi_\lambda \chi_\mu = \chi_{\lambda+\mu}$ показывает, что это соответствие — изоморфизм групп. Докажем, что оно является гомеоморфизмом. Если $\lambda_n \to \lambda$, то $\chi_{\lambda_n} \to \chi_\lambda$ равномерно на любом компакте в $\mathbf{R}$, как следует из явного вида χ_λ. Обратно, пусть $\chi_{\lambda_n} \to \chi_\lambda$ равномерно на любом отрезке. Тогда $\chi_{\lambda_n - \lambda}(x) \to 1$ равномерно на отрезке $[0, 1]$. Но

$$\sup_{[0,1]} \left| \chi_{\lambda_n - \lambda}(x) - 1 \right| = \sup_{[0,1]} |\sin \pi (\lambda_n - \lambda) x| = \\ = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad |\lambda_n - \lambda| \geqslant 1/2, \\ \sin \pi |\lambda_n - \lambda| & \text{при} \quad |\lambda_n - \lambda| \leqslant 1/2. \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что $\lambda_n \to \lambda$. Теорема доказана.

Замечание 1. Группа $\mathbf{R}$ оказывается двойственной самой себе в смысле Понтрягина. Однако канонического изоморфизма $\mathbf{R} \to \widehat{\mathbf{R}}$ (в отличие от изоморфизма $\mathbf{R} \to \widehat{\widehat{\mathbf{R}}}$) не существует. Наш выбор соответствия $\lambda \to e^{2\pi i \lambda x}$ диктуется удобством определения преобразования Фурье в $L_2(\mathbf{R})$ и формулы Пуассона (см. ниже). Часто используются другие соответствия: $\lambda \mapsto e^{i\lambda x}$ или $\lambda \mapsto e^{-i\lambda x}$.

Замечание 2. Теперь мы можем доказать пропущенное при доказательстве теоремы 9 утверждение о характерах группы $\mathbf{T}$. Пусть $\chi \in \widehat{\mathbf{T}}$. Рассмотрим функции $\chi_1(t) = \chi(e^{2\pi i t})$. Ясно, что χ_1 — характер группы $\mathbf{R}$. Значит, $\chi_1(t) = e^{2\pi i \lambda t}$ для некоторого $\lambda \in \mathbf{R}$. Поскольку $\chi_1(1) = \chi(1) = 1$, число λ должно быть целым. Отсюда $\chi_1(t) = e^{2\pi i n t}$, т. е. $\chi(z) = z^n$.

Мы предоставляем читателю доказать следующее общее утверждение, содержащее теоремы 8—10 в качестве частного случая.

Теорема 11. *Пусть $G = \mathbf{R}^n \times \mathbf{Z}^k \times \mathbf{T}^l$ — прямое произведение групп. Тогда двойственная группа $\widehat{G}$ изоморфна $\mathbf{R}^n \times \mathbf{Z}^l \times \mathbf{T}^k$.*

Пусть G — локально компактная коммутативная группа с инвариантной мерой μ. Для любой функции $f \in L_1(G, \mu)$ определим *преобразование Фурье* $\tilde{f}$ формулой

$$\tilde{f}(\chi) = \int_G f(x) \overline{\chi(x)} \, d\mu(x), \quad \chi \in \widehat{G}. \tag{26}$$

Таким образом, преобразование Фурье переводит функции на G в функции на двойственной группе $\widehat{G}$.

П р и м е р ы. 1) Если $G=\mathbf{Z}$, то функция $f\in L_1(\mathbf{Z})$ — это суммируемая двусторонняя последовательность $\{c_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$. Преобразование Фурье ставит в соответствие этой последовательности функцию $f(Z)=\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} c_n z^n$ на $\mathbf{T}$, называемую иногда *производящей функцией* последовательности $\{c_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$.

2) Если $G=\mathbf{T}$, $f\in L_1(\mathbf{T}, dt)$, то преобразование Фурье функции f — не что иное, как последовательность *коэффициентов Фурье* функции f: $c_n=\widetilde{f}(\chi_n)=\int\limits_0^1 f(t)\,e^{-2\pi i n t}dt$.

3) Если $G=\mathbf{R}$, $f\in L_1(\mathbf{R}, dx)$, то преобразование Фурье $\tilde{f}$ также является функцией на $\mathbf{R}$, задаваемой *интегралом Фурье*: $\widetilde{f}(\lambda)=\int\limits_{\mathbf{R}} f(x)\,e^{-2\pi i\lambda x}dx$. Основные свойства преобразования Фурье на любой коммутативной группе описывает

Т е о р е м а 12. *Пусть G — локально компактная коммутативная группа с инвариантной мерой μ. Преобразование Фурье переводит пространство $L_1(G, \mu)$ в пространство непрерывных ограниченных функций на $\widehat{G}$. При этом преобразовании свертка функций переходит в обычное умножение*:

$$(f_1 * f_2)^{\sim}(\chi)=\tilde{f}_1(\chi)\cdot\tilde{f}_2(\chi), \tag{27}$$

оператор сдвига $T(x)$ $(x\in G)$ переходит в оператор умножения на характер $f_x\in\widehat{\widehat{G}}$ (см. (24)):

$$(T(x)f)^{\sim}(\chi)=f_x\tilde{f}(\chi) \tag{28}$$

оператор умножения на характер $\chi\in\widehat{G}$ переходит в оператор сдвига $T(\chi^{-1})$ (в мультипликативной записи групповой операции на $\widehat{G}$):

$$(M(\chi)f)^{\sim}(\chi_1)=T(\chi^{-1})\,\widetilde{f}(\chi_1)=\widetilde{f}\left(\chi^{-1}\chi_1\right). \tag{29}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\chi_n\to\chi$ в $\widehat{G}$ и $f\in L_1(G, \mu)$. Для любого $\varepsilon>0$ найдется такой компакт $K\subset G$, что $\int\limits_{G\setminus K}|f|\,d\mu<\varepsilon$. По определению топологии в $\widehat{G}$ функции $\chi_n(x)$ равномерно на K стремятся к $\chi(x)$. Поэтому, начиная с некоторого номера $n(\varepsilon)$, выполняется неравенство

$|\chi_n(x)-\chi(x)|<\varepsilon$ для $x\in K$. Отсюда

$$|\tilde{f}(x_n)-\tilde{f}(x)|\leqslant\int\limits_K|f(x)||\chi_n(x)-\chi(x)|\,d\mu(x)+$$
$$+\int\limits_{G\setminus K}|f(x)(\chi_n(x)-\chi(x)|\,d\mu(x)\leqslant\varepsilon\|f\|+2\varepsilon.$$

Мы доказали непрерывность $\tilde{f}$. Ограниченность $\tilde{f}$ непосредственно вытекает из оценки интеграла (26). Равенства (27), (28) и (29) проверяются прямым вычислением с использованием замены переменных. Теорема доказана.

2. Ряды Фурье. Разложение функции в ряд Фурье — наиболее изученный случай преобразования Фурье на коммутативной группе (в данном случае — группе $\mathbf{T}$). Исследование рядов Фурье составляет отдельную обширную область в теории функций. Мы здесь ограничимся только основными фактами, наиболее важными для приложений.

В дальнейшем для преобразования Фурье функции f на $\mathbf{T}$ мы будем вместо общего обозначения $\tilde{f}(x)$ использовать более традиционное обозначение

$$c_n=\tilde{f}(\chi_n)=\int\limits_0^1 f(t)\,e^{-2\pi int}dt.$$

Теорема 13. *Преобразование Фурье является унитарным оператором из $L_2(\mathbf{T}, dt)$ в $l_2(\mathbf{Z})$.*

Доказательство вытекает из утверждения задачи 463 о том, что функции $\chi_n(t)=e^{2\pi int}$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\mathbf{T}, dt)$, и из подсчета соответствующих преобразований Фурье. Если через e_n обозначить двустороннюю последовательность, в которой на n-м месте стоит единица, а на остальных местах — нули, то она будет в точности преобразованием Фурье функции χ_n. Так как $\{e_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ — ортонормированный базис в $l_2(\mathbf{Z})$, преобразование Фурье унитарно (см. задачу 489).

Эта теорема является частным случаем следующего общего факта:

Пусть G — компактная коммутативная группа, $\widehat{G}$ — двойственная к ней дискретная группа (см. задачу 541). *Будем считать, что инвариантные меры μ и $\widehat{\mu}$ на этих* *группах нормированы условиями:*

$$\mu(G)=1, \quad \widehat{\mu}(X)=\operatorname{card} X \text{ для } X\subset \widehat{G}.$$

Тогда преобразование Фурье является унитарным оператором из $L_2(G, \mu)$ в $L_2(\widehat{G}, \widehat{\mu})$.

Существует много результатов о связи гладкости функции f на $\mathbf{T}$ с быстротой убывания ее коэффициентов Фурье (см., например, задачи 561—564). Основой их вывода является

Теорема 14. *Оператор дифференцирования переходит при преобразовании Фурье в оператор умножения на последовательность $\{2\pi in\}_{n\in\mathbf{Z}}$.*

Доказательство. Пусть $f\in C^1(\mathbf{T})$; тогда коэффициенты Фурье c_n^1 производной функции f' можно вычислить, интегрируя по частям:

$$c_n^1=\int_0^1 f'(t)\,e^{-2\pi int}dt=e^{-2\pi int}f(t)\Big|_0^1-\int_0^1 f(t)\,de^{-2\pi int}=2\pi inc_n,$$

где $c_n=\int_0^1 f(t)\,e^{-2\pi int}dt$ — коэффициенты Фурье функции f. Теорема доказана.

Распространим теперь преобразование Фурье на обобщенные функции на $\mathbf{T}$. Пусть $f\in\mathscr{E}(\mathbf{T})$. Естественно назвать *преобразованием Фурье обобщенной функции* f набор коэффициентов $c_n=\langle f, e^{-2\pi int}\rangle$.

Будем называть двустороннюю последовательность $\{c_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ *медленно растущей* (или *последовательностью умеренного роста*), если $c_n=O(n^k)$ для некоторого k. Пространство всех медленно растущих последовательностей обозначим $P(\mathbf{Z})$.

Теорема 15. *Преобразование Фурье задает изоморфизм пространств $\mathscr{E}'(\mathbf{T})$ и $P(\mathbf{Z})$, при котором свертка переходит в обычное произведение, оператор сдвига $T(t)$ — в оператор умножения на последовательность $\{e^{2\pi int}\}$, дифференцирование по t — в оператор умножения на последовательность $\{2\pi in\}$, умножение на характер $e^{2\pi ikt}$ — в сдвиг на k.*

Доказательство. Для гладких регулярных обобщенных функций перечисленные свойства уже доказаны. Остается сослаться на тот факт, что всякая обобщенная функция на $\mathbf{T}$ является конечной суммой производных некоторого порядка от регулярных функций.

Рассмотрим теперь вопрос о восстановлении функции f по ее преобразованию Фурье $\{c_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$. Если $f\in L_2(\mathbf{T}, dt)$, то, как мы знаем,

$$f(t)=\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{2\pi i n t}, \tag{30}$$

причем ряд в правой части сходится в смысле пространства $L_2(\mathbf{T}, dt)$. Если коэффициенты c_k убывают достаточно быстро, то этот ряд сходится в более сильном смысле. Например, если $c_n=O(n^{-k})$ для всех $k>0$, то ряд сходится в топологии пространства $\mathscr{E}(\mathbf{T})$. Вопрос о сходимости ряда Фурье занимает большое место в теории функций. Мы не будем останавливаться на возникающих здесь (иногда трудных) вопросах. (См. [23*].)

Сравним формулу (30) с определением преобразования Фурье на группе $\mathbf{Z}$:

$$\{c_n\}\to\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{-2\pi i n t}.$$

Мы видим, что эти преобразования получаются одно из другого композицией с преобразованием $\breve{}$ на $\mathbf{T}$ или на $\mathbf{Z}$:

$$\{c_n\}\breve{}=\{c_{-n}\} \quad \text{или} \quad \breve{f}(t)=f(-t).$$

Введем термин *обратного преобразования Фурье* для композиции обычного (или *прямого*) преобразования Фурье и преобразования $\breve{}$ («птички»). Оказывается, справедлив общий принцип: прямое и обратное преобразования Фурье являются взаимно обратными операторами. Точная формулировка этого принципа с указанием соответствующих друг другу классов функций на G и $\widehat{G}$ зависит от специфики группы G.

3. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье для функций на вещественной прямой задается *интегралом Фурье*:

$$\tilde{f}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i\lambda x}dx. \tag{31}$$

Напомним, что в п. 2 мы ввели понятие обратного преобразования Фурье:

$$\breve{\tilde{f}}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{2\pi i\lambda x}\, dx. \tag{32}$$

Теорема 16. *Прямое и обратное преобразования Фурье являются взаимно обратными преобразованиями пространства $S(\mathbf{R})$.*

Доказательство. Покажем, что под действием преобразования Фурье (и прямого, и обратного) пространство $S(\mathbf{R})$ переходит в себя. В самом деле, поскольку функция $f \in S(\mathbf{R})$ и все ее производные суммируемы и стремятся к нулю на бесконечности, интегрирование по частям дает равенство

$$(\widetilde{f^{(k)}})(\lambda) = (2\pi i\lambda)^k \tilde{f}(\lambda). \tag{33}$$

Далее, поскольку функции $x^k f(x)$ суммируемы при любом k, дифференцирование формулы (31) по λ дает равенство

$$\tilde{f}^{(k)} = [f\cdot(-2\pi i x)^k]^{\sim}. \tag{34}$$

Обозначая оператор преобразования Фурье через F, мы можем переписать (33) и (34) в виде коммутационных соотношений

$$FD^k = M^k F, \quad F(-M)^k = D^k F, \tag{35}$$

$$FDF^{-1} = M, \qquad FMF^{-1} = -D, \tag{36}$$

где через D обозначен оператор дифференцирования d/dx, а через M — оператор умножения на $2\pi i x$. Система полунорм, определяющая топологию в $S(\mathbf{R})$, имеет вид

$$p_{kl}(f) = \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| x^k f^{(l)}(x) \right|.$$

По теореме 30 гл. III эта система эквивалентна системе

$$p'_{kl}(f) = \int_{\mathbf{R}} \left| x^k f^{(l)}(x) \right| dx.$$

Оценим полунорму $p_{kl}(\tilde{f})$ через полунормы $p'_{mn}(f)$. Для этого заметим, что $p_{kl}(f) = (2\pi)^{-k} p_{00}(M^k D^l f)$, $p'_{kl}(f) = (2\pi)^{-k} \times p'_{00}(M^k D^l f)$. Далее, оценка интеграла (31) дает $p_{00}(\tilde{f}) \leqslant p'_{00}(f)$. Отсюда

$$p_{kl}(\tilde{f}) = (2\pi)^{-k} p_{00}(M^k D^l \tilde{f}) = (2\pi)^{-k} p_{00}((D^k M^l f)^{\sim}).$$

Остается переставить местами операторы D^k и M^l, чтобы получить требуемую оценку. По формуле Лейбница имеет место тождество

$$D^k M^l = \sum_{j=0}^{\min(k,l)} \frac{k!\, l!}{j!\,(k-j)!\,(l-j)!} (2\pi)^j M^{l-j} D^{k-j}. \tag{37}$$

Мы доказали непрерывность отображения F. Непрерывность обратного преобразования Фурье $\widehat{F}$ доказывается точно так же с использованием коммутационных соотношений

$$\breve{F}D^k = (-M)^k\breve{F}, \quad \breve{F}M^k = D^k\breve{F} \tag{35'}$$

или

$$\breve{F}D(\breve{F})^{-1} = -M, \quad \breve{F}M(\breve{F})^{-1} = D. \tag{36'}$$

Рассмотрим теперь композицию преобразований F и $\breve{F}$. Из соотношений (36) и (36′) немедленно вытекает, что эта композиция перестановочна с операторами D и M.

Лемма. *Всякий непрерывный оператор в пространстве $S(\mathbf{R})$, перестановочный с оператором M, является оператором умножения на некоторую функцию.*

Доказательство. Пусть оператор A в $S(\mathbf{R})$ перестановочен с M. Тогда он перестановочен с оператором умножения на любой многочлен. Покажем, что для любой функции $\varphi \in S(\mathbf{R})$ и любой точки $a \in \mathbf{R}$ значение $A\varphi(a)$ зависит только от $\varphi(a)$. В самом деле, если $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$, то разность $\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ обращается в нуль в точке a и, значит, имеет вид $(x-a)\psi(x)$, где $\psi \in S(\mathbf{R})$. Поэтому $A\varphi_1(x) = A[\varphi_2 + (x-a)\psi] = A\varphi_2(x) + (x-a)A\psi(x)$, поскольку A перестановочен с умножением на $x-a$. Отсюда $A\varphi_1(a) = A\varphi_2(a)$, что и требовалось. Итак, для любой точки $a \in \mathbf{R}$ существует такое число $f(a)$, что $A\varphi(a) = f(a)\varphi(a)$ для всех $\varphi \in S(\mathbf{R})$. Значит, $A = M(f)$. Лемма доказана.

Замечание. Из приведенного доказательства нельзя сделать никаких выводов о структуре функции f. Но мы знаем, что для любой функции $\varphi \in S(\mathbf{R})$ функция $f\varphi$ также принадлежит $S(\mathbf{R})$. Отсюда следует, что f бесконечно дифференцируема.

Вернемся к доказательству теоремы. Интересующие нас операторы $F\breve{F}$ и $\breve{F}F$, в силу доказанной леммы, являются операторами умножения. Кроме того, справедливо соотношение

$$DM(f) - M(f)D = M(f'),$$

вытекающее из правил Лейбница. Поэтому оператор вида $M(f)$ перестановочен с оператором D только тогда, когда $f' = 0$, т. е. $f = \mathrm{const}$. Это показывает, что операторы $F\breve{F}$ и $\breve{F}F$ скалярны: $F\breve{F} = C_1$, $\breve{F}F = C_2$. Для завершения доказательства теоремы остается проверить, что $C_1 = C_2 = 1$. Это вытекает, например, из явного подсчета преобразования Фурье какой-либо функции из $S(\mathbf{R})$.

Теорема 17. *Существует унитарный оператор в* $L_2(\mathbf{R}, dx)$, *ограничение которого на пространство* $L_2(\mathbf{R}, dx) \cap L_1(\mathbf{R}, dx)$ *совпадает с преобразованием Фурье. (В дальнейшем этот оператор мы будем обозначать, как и прямое преобразование Фурье, буквой* F.)

В частности, для любой функции $f \in S(\mathbf{R})$ справедлива формула Планшереля:

$$\|f\|_{L_2(\mathbf{R},dx)} = \|\tilde{f}\|_{L_2(\mathbf{R},d\lambda)}. \tag{38}$$

Доказательство. Из теоремы 16 и общих свойств преобразования Фурье (см. п. 1) вытекает, что преобразование Фурье переводит умножение в свертку:

$$(f_1 f_2)^{\sim} = \tilde{f}_1 * \tilde{f}_2. \tag{39}$$

Применим это равенство к частному случаю, когда $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = \overline{f(x)}$. Имеем $\tilde{\bar{f}}(\lambda) = \int\limits_{\mathbf{R}} \bar{f}(x)\, e^{-2\pi i\lambda x} dx = \overline{\tilde{f}(-\lambda)}$.

Поэтому (39) дает

$$\int\limits_{\mathbf{R}} |f(x)|^2 e^{-2\pi i\lambda x} dx = \int\limits_{\mathbf{R}} \tilde{f}(\lambda-\mu)\, \overline{\tilde{f}(-\mu)}\, d\mu.$$

Полагая здесь $\lambda = 0$ и заменяя $-\mu$ на λ, получаем (38). Поскольку $S(\mathbf{R})$ плотно в $L_2(\mathbf{R}, dx)$, из (38) вытекает, что оператор F имеет единственное унитарное продолжение с $S(\mathbf{R})$ на $L_2(\mathbf{R}, dx)$. Остается проверить, что на подпространстве $L = L_2(\mathbf{R}, dx) \cap L_1(\mathbf{R}, dx)$ это продолжение задается интегралом (31). Пусть $\varphi \in L$, $\varphi_n \in S(\mathbf{R})$ и $\varphi_n \to \varphi$ в смысле каждой из норм $L_2(\mathbf{R}, dx)$ и $L_1(\mathbf{R}, dx)$. Тогда $\tilde{\varphi}_n \to \tilde{\varphi}$ равномерно и $\tilde{\varphi}_n \to F\varphi$ в смысле $L_2(\mathbf{R}, d\lambda)$. Последнее влечет, что некоторая подпоследовательность $\tilde{\varphi}_{n_k}$ сходится к $F\varphi$ почти всюду. Отсюда $F\varphi = \tilde{\varphi}$, и теорема доказана.

Замечание. Теорема 17 является частным случаем общего утверждения: если G — локально компактная коммутативная группа с инвариантной мерой μ, то существуют такая инвариантная мера $\hat{\mu}$ на двойственной группе $\hat{G}$ и такой унитарный оператор $F: L_2(G, \mu) \to L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$, сужение которого на $L_2(G, \mu) \cap L_1(G, \mu)$ совпадает с преобразованием Фурье.

Так же как и в случае окружности, гладкость функции f на прямой связана с убыванием на бесконечности ее преобразования Фурье $\tilde{f}$. Так как группа $\mathbf{R}$ самодвойственна, имеет место двойственное утверждение: убывание на бесконечности функции f связано с гладкостью $\tilde{f}$. Вот один из вариантов точной формулировки.

Теорема 18. *Если функция f и все ее производные до порядка k суммируемы на $\mathbf{R}$, то $\tilde{f}$ удовлетворяет оценке*

$$|\tilde{f}(\lambda)| = O(1+|\lambda|)^{-k}.$$

Если функция $(1+|x|)^k f(x)$ суммируема на $\mathbf{R}$, то $\tilde{f}$ имеет непрерывные ограниченные производные до порядка k.

Доказательство вытекает из коммутационных соотношений (35). (Мы предоставляем читателю убедиться, что в предположениях теоремы 18 вывод этих соотношений сохраняет силу.)

Требование быстрого убывания на бесконечности в случае $G=\mathbf{R}$ можно сформулировать разными способами. Самое сильное условие такого сорта — финитность функции f. Оказывается, это условие влечет аналитичность функции $\tilde{f}$ на комплексной плоскости $\mathbf{C}$, содержащей прямую $\mathbf{R}$.

Теорема Пэли — Винера. *Преобразование Фурье пространства $L_2(-a, a)$ (рассматриваемого как подпространство в $L_2(\mathbf{R}, dx)$) состоит из всех целых аналитических функций $g(\lambda)$, обладающих свойствами:*

1) $|g(\lambda)| < Ce^{2\pi a|\operatorname{Im}\lambda|}$, *где константа C может быть своя для каждой функции g;*

2) *ограничение $g(\lambda)$ на $\mathbf{R}$ принадлежит $L_2(\mathbf{R}, d\lambda)$.*

Доказательство. Интеграл (31), определяющий функцию $\tilde{f}$ для $f \in L_2(-a, a)$, сходится при всех $\lambda \in \mathbf{C}$. Непосредственное вычисление показывает, что $\tilde{f}(\lambda)$ дифференцируема по комплексному переменному λ и, следовательно, является целой функцией.

Необходимость условия 1) вытекает из оценки

$$|\tilde{f}(\lambda)| = \left| \int_{-a}^{a} f(x) e^{-2\pi i\lambda x}\, dx \right| \leqslant \int_{-a}^{a} |f(x)| e^{2\pi \operatorname{Re}(i\lambda x)}\, dx.$$

Необходимость условия 2) следует из теоремы 17.

Покажем достаточность этих условий. Поскольку ограничение g на $\mathbf{R}$ принадлежит $L_2(\mathbf{R}, d\lambda)$, существует такая функция $f \in L_2(\mathbf{R}, dx)$, что $g=\tilde{f}$. Предположим сначала, что $g(\lambda)$ достаточно быстро убывает на бесконечности: $|g(\lambda)| \leqslant \frac{Ce^{2\pi a|\operatorname{Im}\lambda|}}{1+|\lambda|^2}$. Тогда $g(\lambda)$ суммируема на $\mathbf{R}$ и f может быть выражена через g обратным преобразованием Фурье:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{2\pi i\lambda x} d\lambda.$$

По лемме Коши контур интегрирования можно сдвинуть в комплексную область: $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda + ib) e^{2\pi i(\lambda+ib)x} dx$. Пусть $x > a$. Тогда подынтегральное выражение при $b > 0$ допускает оценку $\frac{Ce^{2\pi b(a-x)}}{1+|\lambda|^2}$ и, следовательно, интересующий нас интеграл стремится к нулю. Поскольку значение интеграла на самом деле не зависит от b, мы получаем, что $f(x)=0$ при $x>a$. Аналогично, устремляя b к $-\infty$, получаем, что $f(x)=0$ при $x<-a$. Остается избавиться от условия убывания $g(\lambda)$ на бесконечности. Пусть $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$ и $\operatorname{supp}\varphi\subset[-\varepsilon, \varepsilon]$. Тогда функция $\widetilde{\varphi}(\lambda)$ быстро убывает на бесконечности и удовлетворяет оценке $|\widetilde{\varphi}(\lambda| \leqslant Ce^{2\pi\varepsilon|\mathrm{Im}\,\lambda|}$ в силу уже доказанной части теоремы. К функции $g_1(\lambda)=g(\lambda)\widetilde{\varphi}(\lambda)$ применимы изложенные выше соображения с заменой a на $a+\varepsilon$. Значит, функция $f_1(\varepsilon)=f*\varphi$ принадлежит $L_2(-a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Отсюда без труда выводится, что $f\in L_2(-a, a)$. Теорема доказана.

4. Преобразование Фурье обобщенных функций. Пусть $f\in\mathscr{E}'(\mathbf{R})$. Интеграл, определяющий преобразование Фурье функции f, можно рассматривать как значение обобщенной функции f на характере $\overline{\chi}_\lambda\in\mathscr{E}(\mathbf{R})$:

$$\widetilde{f}(\lambda) = \langle f, \overline{\chi}_\lambda\rangle. \tag{40}$$

Более широкое определение преобразования Фурье можно получить по схеме, описанной в п. 5 § 4 гл. III. Если $f\in L_1(\mathbf{R}, dx)$, $\varphi\in S(\mathbf{R})$, то

$$\langle\widetilde{f}, \varphi\rangle = \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} e^{-2\pi i\lambda x} f(x)\varphi(\lambda)\,dx\,d\lambda = \langle f, \widetilde{\varphi}\rangle.$$

Правая часть этого равенства имеет смысл для $f\in S'(\mathbf{R})$. Поэтому мы определим *преобразование Фурье в пространстве* $S'(\mathbf{R})$ формулой

$$\langle\widetilde{f}, \varphi\rangle = \langle f, \widetilde{\varphi}\rangle, \quad \varphi\in S(\mathbf{R}). \tag{41}$$

В случае, когда $f\in\mathscr{E}'(\mathbf{R})$, это определение эквивалентно данному выше по формуле (40).

Теорема 19. *Прямое и обратное преобразования Фурье являются непрерывными взаимно обратными операторами в* $S'(\mathbf{R})$.

Доказательство сразу вытекает из формулы (41), которая показывает, что преобразование Фурье в $S'(\mathbf{R})$ является оператором, сопряженным к преобразованию Фурье в $S(\mathbf{R})$.

Преобразование Фурье обобщенных функций сохраняет основные свойства преобразования Фурье обычных функций: оно переводит свертку в обычное умножение, сдвиг — в умножение на характер, умножение на характер — в сдвиг, дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами — в оператор умножения на многочлен. Более точные формулировки см. в задачах соответствующего пункта.

Замечание. Преобразование Фурье обобщенных функций из $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ также можно определить по формуле (41). Однако образом этого отображения уже не будут обобщенные функции известных нам классов. Можно показать, что образом $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ при преобразовании Фурье является пространство аналитических функций $g(\lambda)$, которые для любого N и подходящих C и R удовлетворяют оценке

$$|g(\lambda)| < C(1+|\lambda|)^{-N}e^{R|\operatorname{Im}\lambda|}.$$

Преобразования Фурье обобщенных функций из $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ являются линейными функционалами на этом пространстве.

Пример. Регулярная обобщенная функция $f(x) = e^{x^2}$ имеет своим преобразованием Фурье линейный функционал

$$\langle \tilde{f}, g\rangle = \frac{i}{\pi}\int\limits_C e^{\pi^2\lambda^2} g(\lambda)\,d\lambda,$$

где интеграл берется по некоторому контуру C в комплексной плоскости λ.

Некоторые полезные свойства обобщенных функций можно доказать чисто алгебраическим способом, используя коммутационные соотношения преобразования Фурье с операторами сдвига и умножения на характер. Примером является следующая *формула* суммирования *Пуассона*.

Т е о р е м а 20. *Для любой функции* $\varphi \in S(\mathbf{R})$ *справедливо равенство*

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} \varphi(k) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \tilde{\varphi}(k). \tag{42}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство (42) равносильно утверждению $\tilde{f} = f$, где $f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta(x-k)$. Обобщенная функция f обладает свойствами: 1) $T(1)f = f$, 2) $M(1)f = f$, где $T(1)$ — сдвиг на 1, а $M(1)$ — оператор умножения на $\chi_1 = e^{2\pi i x}$. Свойства 1) и 2) переходят друг в друга при преобразовании Фурье (задача 608). Покажем, что f определяется этими свойствами с точностью до постоянного множителя. В самом деле, из свойства 2) легко выводится, что носитель f содержится в $\mathbf{Z}$ и что в каждой точке носителя f имеет нулевой порядок. Отсюда $f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \delta(x-k)$. Теперь из свойства 1) следует, что все коэффициенты c_k равны между собой и $f = c \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta(x-k)$. Остается вычислить константу c. Равенство $\tilde{\tilde{f}} = f$ показывает, что $c^2 = 1$. Поскольку в $S(\mathbf{R})$ есть положительные функции, преобразование Фурье которых положительно, случай $c = -1$ невозможен. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Условие $\varphi \in S(\mathbf{R})$ можно существенно ослабить. Достаточно, например, чтобы φ и $\tilde{\varphi}$ допускали оценку вида $O(|x|^{-1-\varepsilon})$.

З а м е ч а н и е 2. Формула Пуассона является частным случаем более общего утверждения. Пусть

$$0 \to G_0 \to G \to G_1 \to 0$$

— точная последовательность локально компактных коммутативных групп и

$$0 \leftarrow \widehat{G}_0 \leftarrow \widehat{G} \leftarrow \widehat{G}_1 \leftarrow 0$$

— двойственная последовательность. Тогда при подходящем выборе инвариантных мер μ_0 на G_0 и $\widehat{\mu}_1$ на $\widehat{G}_1$ справедливо равенство

$$\int_{G_0} f(x)\, d\mu_0(x) = \int_{\widehat{G}_1} \tilde{f}(\chi)\, d\widehat{\mu}_1(\chi).$$

ГЛАВА V

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. Функциональное исчисление

1. Функции операторов в конечномерном пространстве. Линейные операторы можно рассматривать как обобщение понятия числа. В одномерном случае эти два понятия совпадают. Уже в двумерном пространстве начинаются отличия, главное из которых — некоммутативность операции умножения для операторов. Тем не менее многие свойства чисел сохраняются и при переходе к операторам в многомерных пространствах. Одно из этих свойств — возможность подставлять операторы в качестве аргументов в различные функции. Изучение функций от операторных аргументов составляет предмет *функционального операторного исчисления.* Мы ограничимся функциями одного переменного. В этом случае не возникает затруднений, связанных с некоммутативностью*). В этом пункте мы рассмотрим функции от оператора в конечномерном пространстве.

Пусть A — линейный оператор в конечномерном линейном пространстве L над полем $K=\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. Простейшие функции, в которые можно подставлять оператор A в качестве аргумента, — это многочлены. Если $p(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$, то естественно определить $p(A)$ равенством

$$p(A)=\sum_{k=0}^{n} c_k A^k, \tag{1}$$

условившись, что $A^0=1$ (единичный оператор). Последнее условие необходимо для того, чтобы выполнялись естественные равенства

$$\begin{gathered}(\lambda_1 p_1+\lambda_2 p_2)(A)=\lambda_1 p_1(A)+\lambda_2 p_2(A),\\ (p_1 p_2)(A)=p_1(A)\,p_2(A),\end{gathered} \tag{2}$$

выражающие тот факт, что отображение $p\mapsto p(A)$ является гомоморфизмом алгебры многочленов в алгебру операторов.

) С одним из вариантов некоммутативного функционального исчисления можно познакомиться по книге В. П. Маслова [14]. Другой вариант — теория представлений матричных групп, см. [17].

Следующий, более широкий класс функций — рациональные функции. Если $r(x) = p(x)/q(x)$, где p и q — многочлены, то мы определим $r(A)$ формулой

$$r(A) = p(A)\,q(A)^{-1} = q(A)^{-1}p(A). \tag{3}$$

Это определение имеет смысл, только если $q(A)$ — обратимый оператор. В конечномерном случае обратимость $q(A)$ равносильна условию $\det q(A) \neq 0$.

Наиболее важный пример — *резольвента* оператора A — определяется формулой

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda \cdot 1)^{-1} = r_\lambda(A), \tag{4}$$

где $r_\lambda(x) = 1/(x - \lambda)$.

Соответствие $r \mapsto r(A)$ является гомоморфизмом некоторой подалгебры поля рациональных функций $K(x)$ в алгебру операторов. Можно проверить, что эта подалгебра состоит из всех рациональных функций, полюса которых лежат вне спектра (т. е. множества собственных значений) оператора A.

До сих пор мы не привлекали к нашим рассмотрениям топологию. Теперь предположим, что L — нормированное пространство и тем самым множество операторов в L также снабжено нормой. Тогда мы можем определить целую аналитическую функцию от оператора A формулой

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k, \tag{5}$$

если $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x_k$. В самом деле, если f — целая функция, то числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \|A\|^k$ сходится. Отсюда вытекает, что последовательность частичных сумм ряда (5) фундаментальна и, следовательно, имеет предел в пространстве операторов в L.

Пример. Вычислим e^{tA}, где A — оператор поворота на 90° в $\mathbf{R}^2$, а t — вещественный параметр. Поскольку $A^2 = -1$, ряд для e^{tA} принимает вид

$$e^{tA} = 1 + tA - \frac{t^2}{2!}\cdot 1 - \frac{t^3 A}{3!} + \frac{t^4}{4!}\cdot 1 + \frac{t^5}{5!}A - \ldots,$$

откуда $e^{tA} = \cos t \cdot 1 + \sin t \cdot A$. В матричной форме это равенство принимает вид $\exp\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$.

Предположим теперь, что в пространстве многочленов или целых аналитических функций введена некоторая норма, относительно которой отображение $f \mapsto f(A)$ непрерывно. Тогда это отображение продолжается по непрерывности на пополнение пространства многочленов или целых функций по этой норме.

Пример. Пусть оператор A задается диагональной матрицей с вещественными числами на диагонали, принадлежащими отрезку $[a, b]$. Тогда соответствие $f \mapsto f(A)$ непрерывно по норме $C[a, b]$ и, следовательно, можно определить $f(A)$ для любой непрерывной функции на $[a, b]$.

В конечномерной ситуации вопрос о том, какие функции от оператора A имеют смысл, решается до конца следующим образом. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — набор комплексных чисел, $n_1, \ldots, n_k$ — набор натуральных чисел. Определим в пространстве многочленов полунорму

$$p_{\lambda_1, \ldots, \lambda_k; n_1, \ldots, n_k}(f) = \max_{1 \leqslant j \leqslant k} \max_{0 \leqslant m \leqslant n_j} \left| f^{(m)}(\lambda_j) \right|. \tag{6}$$

Если A — оператор в конечномерном комплексном линейном пространстве L, то через p_A обозначим полунорму в пространстве многочленов:

$$p_A(f) = \| f(A) \|.$$

Теорема 1. *Пусть A — оператор в конечномерном линейном комплексном пространстве, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — корни многочлена минимальной степени, аннулирующего оператор A, $n_1, \ldots, n_k$ — кратность этих корней. Тогда полунормы $p_{\lambda_1, \ldots, \lambda_k; n_1, \ldots, n_k}$ и p_A эквивалентны.*

Доказательство. Пусть L — пространство многочленов, L_0 — подпространство многочленов, имеющих в точке λ_j корень кратности $\geqslant n_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Обе полунормы, о которых говорится в теореме, аннулируют пространство L_0 и порождают нормы в факторпространстве L/L_0. Поскольку последнее конечномерно, любые две нормы в нем эквивалентны.

Следствие 1. *Если A — оператор с простыми собственными значениями, то выражение $f(A)$ имеет смысл для любой непрерывной функции f.*

Следствие 2. *Если A — оператор в n-мерном пространстве, то выражение $f(A)$ имеет смысл для любой $(n-1)$-кратно дифференцируемой функции.*

2. Функции ограниченных самосопряженных операторов. Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H над полем $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. Задача этого пункта — определить $f(A)$ для любой борелевской функции f на отрезке $[-a, a]$, где $a = \|A\|$.

Напомним, что *спектром* оператора A называется множество $\sigma(A) \subset \mathbf{C}$, состоящее из тех $\lambda \in \mathbf{C}$, для которых оператор $A - \lambda \cdot 1$ необратим. Дополнение к $\sigma(A)$ в $\mathbf{C}$ называется *резольвентным множеством* и обозначается $\rho(A)$. Таким образом, резольвента оператора A, $r_\lambda(A) = (A - \lambda 1)^{-1}$, определена при $\lambda \in \rho(A)$.

Теорема 2. *Спектр ограниченного оператора является непустым компактным подмножеством в* $\mathbf{C}$.

Доказательство. Если $|\lambda| > \|A\|$, то оператор $A - \lambda \cdot 1$ имеет обратный оператор $r_\lambda(A)$, задаваемый рядом:

$$r_\lambda(A) = -\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^k. \tag{7}$$

Поэтому $\sigma(A)$ содержится в круге $|\lambda| \leqslant \|A\|$. Далее, если в некоторой точке $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ существует резольвента $r_{\lambda_0}(A) = B$, то в круге радиуса $\|B\|^{-1}$ сходится ряд

$$r_\lambda(A) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k B^{k+1}. \tag{8}$$

Это показывает, что резольвентное множество $\rho(A)$ открыто и, следовательно, $\sigma(A)$ — компакт. Попутно мы установили, что норма резольвенты допускает следующую оценку снизу:

$$\|r_\lambda(A)\| \geqslant d(\lambda, \sigma(A))^{-1} = \left(\min_{\mu \in \sigma(A)} (\lambda - \mu)\right)^{-1}. \tag{9}$$

Остается доказать непустоту спектра. Предположим противное, т. е. $\sigma(A) = \varnothing$. Тогда резольвента $r_\lambda(A)$ является целой аналитической функцией от $\lambda \in \mathbf{C}$. Формула (7) показывает, что $\|r_\lambda(A)\| \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Значит, $\|r_\lambda(A)\|$ ограничена на всей комплексной плоскости. Для любых векторов x и y из H величина $(r_\lambda(A)x, y)$ является целой аналитической функцией от λ, стремящейся к нулю на бесконечности. Такая функция по теореме Лиувилля тождественно равна нулю. Значит, $r_\lambda(A) = 0$, что невозможно. Теорема доказана.

Изучим теперь, как меняется спектр A, когда над оператором A совершают те или иные преобразования.

Теорема 3. 1) *Пусть $r(x)$ — рациональная функция, не имеющая полюсов на спектре оператора A. Тогда опе-*

ратор $r(A)$ определен и его спектр описывается формулой

$$\sigma(r(A)) = r(\sigma(A)) = \{r(\lambda):\ \lambda \in \sigma(A)\}. \tag{10}$$

2) *Спектр сопряженного оператора A^* связан со спектром A соотношением*

$$\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)} = \{\bar{\lambda}:\ \lambda \in \sigma(A)\}. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $r(x) = p(x)q(x)^{-1}$, где p и q — взаимно простые многочлены. Если $\mu_1, \ldots, \mu_m$ — корни $p(x)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — корни $q(x)$ (учитывая кратности), то $r(x) = c\prod_{i=1}^{m}(x - \alpha_i)\prod_{j=1}^{n}(x - \beta_j)^{-1}$. Отсюда $r(A) = c\prod_{i=1}^{m}(A - \alpha_i 1)\prod_{j=1}^{n} r_{\beta_j}(A)$. Пусть $\lambda \in \sigma(A)$ и $\mu = r(\lambda)$. Поскольку рациональная функция $r(x) - \mu$ обращается в нуль при $x = \lambda$, ее числитель имеет λ корнем и, следовательно, содержит множитель $x - \lambda$. Поэтому оператор $r(A) - \mu \cdot 1$ содержит множителем необратимый оператор $A - \lambda \cdot 1$ и, следовательно, сам необратим. Значит, $\mu \in \sigma(r(A))$. Мы доказали включение $r(\sigma(A)) \subset \sigma(r(A))$.

Обратно, пусть $\mu \in \sigma(r(A))$. Представим рациональную функцию $r(x) - \mu$ в виде произведения $c\prod_{i=1}^{m}(x - \alpha_i) \times \prod_{j=1}^{n}(x - \beta_j)^{-1}$. Если бы все α_i принадлежали $\rho(A)$, то оператор $r(A) - \mu \cdot 1$ имел бы обратный оператор $c^{-1}\prod_{i=1}^{m} r_{\alpha_i}(A)\prod_{j=1}^{n}(A - \beta_j \cdot 1)$, что неверно. Значит, одно из чисел α_i принадлежит спектру A. Но тогда $r(\alpha_i) - \mu = 0$, т. е. $\mu \in r(\sigma(A))$. Утверждение 1) доказано. Утверждение 2) вытекает из равенства $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, которое влечет соотношение

$$r_\lambda(A^*) = r_{\bar{\lambda}}(A)^*.$$

Теорема 4. *Пусть A — самосопряженный оператор. Тогда*

1) *A имеет спектр на отрезке $[-\|A\|, \|A\|]$;*

2) *для любой рациональной функции r с полюсами вне $\sigma(A)$ справедливо равенство*

$$\|r(A)\| = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |r(\lambda)|. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть λ — невещественное число. Покажем, что существует $r_\lambda(A)$. Оператор $A - \lambda 1$ не имеет ядра, так как если x — единичный вектор из $\ker(A - \lambda 1)$, то $\lambda = (Ax, x) = (x, Ax) = \bar{\lambda}$, что неверно. Далее, образ оператора $A - \lambda 1$ плотен в H, так как $\operatorname{im}(A - \lambda 1)^{\perp} = \ker(A - \lambda 1)^* = \ker(A - \bar{\lambda} 1) = 0$. Покажем, что оператор $(A - \lambda 1)^{-1}$, определенный на $\operatorname{im}(A - \lambda 1)$, ограничен. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, α, $\beta \in \mathbf{R}$. Тогда

$$\|(A - \lambda 1)x\|^2 = ((A - \alpha 1)x - i\beta x,\ (A - \alpha 1)x - i\beta x) =$$
$$= \|(A - \alpha 1)x\|^2 + \beta^2\|x\|^2 \geqslant \beta^2\|x\|^2.$$

Отсюда $\|A - \lambda 1\|^{-1} \leqslant \beta^{-1}$ и $r(A)$ получается продолжением по непрерывности. (На самом деле, как можно проверить, из полученной оценки следует, что $\operatorname{im}(A - \lambda 1) = H$.)

Итак, $\sigma(A)$ лежит на вещественной оси. Утверждение 1) следует теперь из того, что $\sigma(A)$ лежит в круге радиуса $\|A\|$ (см. доказательство теоремы 2).

Доказательство утверждения 2) начнем со случая $r(x) \equiv x$. Тогда 2) сводится к равенству

$$\|A\| = \sup\{|\lambda| :\ \lambda \in \sigma(A)\}. \tag{13}$$

Величину, стоящую в правой части, называют *спектральным радиусом* оператора A и обозначают $r(A)$. Имеет место

Лемма. *Для любого ограниченного оператора A справедливо соотношение*

$$r(A) = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{1/n}; \tag{14}$$

если A — самосопряженный оператор, то $r(A) = \|A\|$.

Доказательство. Существование предела в правой части равенства (14) вытекает из общих свойств полуаддитивных последовательностей (см. задачу 621). Далее, разложение резольвенты в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки дается формулой (7). По формуле Адамара радиус сходимости этого ряда (равный, очевидно, $r(A)$) связан с коэффициентами искомым соотношением (14). (Мы применяем здесь формулу Адамара к операторной аналитической функции. Легко проверить, что обычный вывод этой формулы полностью переносится на этот случай.) Для любого оператора A справедливо равенство

$$\|A^*A\| = \sup(A^*Ax, y) = \sup\frac{(Ax, Ay)}{\|x\|\|y\|} = \|A\|^2.$$

В частности, для самосопряженного A $\|A^2\| = \|A\|^2$. Поэтому $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = \|A\|$. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству утверждения 2) в общем случае. Пусть $B = r(A)$. Тогда $B^* = \bar{r}(A)$, где через $\bar{r}$ мы обозначаем функцию $\bar{r}(z) = \overline{r(\bar{z})}$. Легко проверить, что $\bar{r}$ — рациональная функция, коэффициенты которой комплексно сопряжены коэффициентам r. Применяя уже доказанное утверждение к самосопряженному оператору $B^*B = |r|^2(A)$, получаем

$$\|B\|^2 = \|B^*B\| = r(B^*B) = \sup_{\mu\in\sigma(B^*B)} (\mu) = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |r(\lambda)|^2$$

(последнее — в силу утверждения 1) теоремы 3). Теорема доказана.

Следствие. *Для любого самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве H существует единственный непрерывный гомоморфизм φ алгебры $C[-a, a]$, где $a = \|A\|$, в алгебру ограниченных операторов в H, обладающий свойствами*:

1) $\varphi(1) = 1$ (*здесь слева 1 означает функцию, тождественно равную 1, а справа — единичный оператор в H*);
2) $\varphi(\bar{f}) = \varphi(f)^*$;
3) $\varphi(x) = A$;
4) $\|\varphi(f)\| \leqslant \|f\|_{C[-a, a]}$.

Этот гомоморфизм обладает также свойством:

5) *если $AB = BA$, то $\varphi(f)B = B\varphi(f)$*. (Другой вывод этого утверждения см. в задачах 644, 645.)

Теперь мы распространим гомоморфизм φ на алгебру $B[-a, a]$ ограниченных борелевских функций на отрезке $[-a, a]$.

Теорема 5. *Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Существует единственный гомоморфизм φ алгебры $B[-a, a]$ ограниченных борелевских функций на отрезке $[-a, a]$, где $a = \|A\|$, обладающий свойствами*:

1) $\varphi(1) = 1$;
2) $\varphi(x) = A$;
3) *если $|f_n(x)| \leqslant C$ и $f_n(t) \to f(t)$ в каждой точке $t \in [-a, a]$, то $\varphi(f_n) \to \varphi(f)$*.

Гомоморфизм φ обладает также свойствами:

4) $\varphi(\bar{f}) = \varphi(f)^*$;
5) $\|\varphi(f)\| \leqslant \sup|f(t)|$, $t \in [-a, a]$;

6) $\varphi(f)B = B\varphi(f)$ *для любого оператора* B, *перестановочного с* A.

Доказательство. На множестве $C[-a, a]$ гомоморфизм φ уже определен. Совокупность борелевских функций получается из совокупности непрерывных функций поточечными предельными переходами; это влечет единственность искомого гомоморфизма φ. Докажем его существование. Пусть $x, y \in H$. Определим линейный функционал F_{xy} на $C[-a, a]$ по формуле

$$F_{xy}(f) = (\varphi(f)x, y). \tag{15}$$

Поскольку $|F_{xy}(f)| \leqslant \|\varphi(f)\|\|x\|\|y\| \leqslant \|f\|_{C[-a, a]}\|x\|\|y\|$, F_{xy} — непрерывный функционал, норма которого не превосходит величины $\|x\|\|y\|$. Значит, существует такой борелевский заряд ν_{xy} на $[-a, a]$, что

$$F_{xy}(f) = \int_{-a}^{a} f(t)\, d\nu_{xy}(t), \tag{16}$$

причем $\mathrm{Var}_{-a}^{a}\nu \leqslant \|x\|\|y\|$. Пусть теперь f — ограниченная борелевская функция на отрезке $[-a, a]$. Величина $Bf(x, y) = \int_{-a}^{a} f(t)\, d\nu_{xy}(t)$ линейно зависит от x, антилинейно — от y и удовлетворяет оценке $|Bf(x, y)| \leqslant \sup\limits_{t\in[-a,a]} |f(t)|\|x\|\|y\|$. Отсюда следует, что существует такой ограниченный оператор $\varphi(f)$, что $Bf(x, y) = (\varphi(f)x, y)$, причем $\|\varphi(f)\| \leqslant \sup|f(t)|$, $t \in [-a, a]$. Пусть $f_n(t) \to f(t)$ для $t \in [-a, a]$. Тогда для любых x и y из H мы имеем

$$(\varphi(f_n)x, y) = \int_{-a}^{a} f_n(t)\, d\nu_{xy}(t) \to \int_{-a}^{a} f(t)\, d\nu_{xy}(t) = (\varphi(f)x, y).$$

Таким образом, $\varphi(f_n)$ слабо сходится к $\varphi(f)$. Отсюда вытекает, что отображение φ — гомоморфизм. В самом деле, равенства

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g),$$
$$\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$$

справедливы, когда f и g принадлежат $C[-a, a]$ и сохраняются при поточечных предельных переходах. Это же рассуждение показывает, что φ обладает свойством 4). Теперь мы в состоянии доказать свойство 3). Пусть $f_n(t) \to f(t)$ для всех $t \in [-a, a]$ и $|f_n(t)| \leqslant C$. Тогда

$|f_n - f|^2(t) \to 0$ для всех $t \in [-a, a]$. Поэтому $\varphi(|f_n - f|^2) \to 0$. Отсюда $\|\varphi(f_n - f)x\|^2 = (\varphi(f_n - f)^* \varphi(f_n - f)x, x) = (\varphi(|f_n - f|^2)x, x) \to 0$. Теорема доказана.

Основной пример. Пусть $H = L_2(X, \mu)$, A — оператор умножения на функцию $a \in L_\infty(X, \mu)$. В этом случае $\varphi(f)$ — оператор умножения на функцию $\varphi(a(x))$ (проверьте это, проследив построение $\varphi(f)$ на этом примере). Универсальность этого примера выяснится ниже.

Построенное в теореме 5 функциональное исчисление допускает следующее полезное обобщение.

Теорема 6. *Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — попарно перестановочные ограниченные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H, T — параллелепипед в $\mathbf{R}^n$, определенный условиями $|t_i| \leqslant \|A_i\|$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Существует единственный гомоморфизм φ алгебры $B(T)$ ограниченных борелевских функций на T в алгебру ограниченных операторов в H, обладающий свойствами:*

1) $\varphi(1) = 1$;

2) $\varphi(t_i) = A_i$;

3) *если* $|f_k(t)| \leqslant C$ *и* $f_k(t) \to f(t)$ *для всех* $t \in T$, *то* $\varphi(f_k) \to \varphi(f)$ *в сильной операторной топологии.*

Кроме того, гомоморфизм φ обладает свойствами:

4) $\varphi(\bar{f}) = \varphi(f)^*$;

5) $\|\varphi(f)\| \leqslant \sup\limits_{t \in T} |f(t)|$;

6) $\varphi(f)B = B\varphi(f)$ *для любого оператора B, перестановочного с $A_1, \ldots, A_n$.*

Доказательство. Пусть $B_k(T)$ — подалгебра в $B(T)$, состоящая из функций, зависящих от координаты t_k. Тогда ограничение φ на $B_k(T)$ совпадает с гомоморфизмом φ_k, соответствующим по теореме 5 оператору A_k. Обозначим через $B_0(T)$ подалгебру ступенчатых функций на T, т. е. функций вида $f(t) = \sum c_{k_1} \ldots c_{k_n} \chi_{E_1}(t_1) \ldots \chi_{E_n}(t_n)$. Если искомый гомоморфизм φ существует, то согласно сказанному выше на ступенчатой функции f он должен задаваться формулой

$$\varphi(f) = \sum c_{k_1 \ldots k_n} \varphi_1(\chi_{E_1}) \ldots \varphi_k(\chi_{E_n}). \tag{17}$$

Отсюда вытекает единственность φ на $B_0(T)$, а следовательно, и на $B(T)$ в силу свойства 3).

Докажем его существование. На подалгебре $B_0(T)$ мы определим отображение φ формулой (17). Поскольку $A_1, \ldots, A_n$ попарно коммутируют, операторы $\varphi_1(f_1)$, $\varphi_2(f_2), \ldots, \varphi_n(f_n)$ также попарно коммутируют (утверждение 6) в теореме 5). Поэтому отображение φ является гомоморфизмом. Далее, гомоморфизм φ переводит положительные функции в положительные операторы, так как если $f \geqslant 0$, то $f = g^2$ для некоторой вещественной функции $g \in B_0(T)$ и, значит, $\varphi(f) = \varphi(g)^2 \geqslant 0$. Это влечет справедливость свойства 5) (см. задачу 645). Поэтому гомоморфизм φ продолжается на алгебру $C(T)$ непрерывных функций на T и обладает там свойством 5). Вывод отсюда теоремы проводится так же, как вывод теоремы 5 из следствия к теореме 4.

Отметим полезное

Следствие. *Пусть A — нормальный оператор в гильбертовом пространстве H, T — квадрат на комплексной плоскости с центром в нуле и стороной $2\|A\|$. Существует единственный гомоморфизм алгебры $B(T)$ ограниченных борелевских функций на T в алгебру операторов в H, обладающий свойствами:*

1) $\varphi(1) = 1$;
2) $\varphi(x + iy) = A$;
3) $\varphi(\bar{f}) = \varphi(f)^*$;
4) *если* $|f_n| \leqslant C$ *и* $f_n(t) \to f$ *для* $t \in T$, *то* $\varphi(f_n) \to \varphi(f)$.

Этот гомоморфизм обладает также свойствами:

5) $\|\varphi(f)\| \leqslant \sup |f(t)|$;
6) $\varphi(f)B = B\varphi(f)$ *для любого оператора B, перестановочного с A и A^*.*

В самом деле, если A — нормальный оператор, то $A = B + iC$, где B и C — ограниченные самосопряженные операторы, норма которых не превосходит нормы A. Условия 2) и 3) влекут условие 2) $\varphi(x) = B$, $\varphi(y) = C$. Теперь утверждение следствия вытекает из теоремы 6, примененной к операторам B и C.

3. Неограниченные самосопряженные операторы. В приложениях часто встречаются операторы A, определенные не во всем гильбертовом пространстве H, а только на некотором незамкнутом плотном подпространстве $\mathscr{D}_A \subset H$, и неограниченные на этом подпространстве. Для такого оператора можно определить сопряженный оператор A^*, который также может быть не всюду определен и неограничен. А именно, областью определения A^* называется (вообще говоря, незамкнутое) подпространство $\mathscr{D}_{A^*}$, состоящее из таких векторов $y \in H$, для которых линейный функционал $x \mapsto (Ax, y)$ ограничен на $\mathscr{D}_A$. В этом случае он однозначно продолжается до линейного функционала на H и может быть записан в виде $x \mapsto (x, z)$, $z \in H$. Мы полагаем $A^*y = z$. Таким образом, равенство

$$(Ax,\ y) = (x,\ A^*y), \tag{18}$$

которое является определением A^* для ограниченных A, теперь остается справедливым лишь для $x \in \mathscr{D}_A$, $\in \mathscr{D}_{A^*}$.

Можно дать другое, более «геометрическое» определение A^*. Для этого заметим, что всякий (в том числе и не всюду определенный и неограниченный) оператор A задается своим *графиком*, т. е. подмножеством $\Gamma_A \subset H \oplus H$, состоящим из векторов вида $x \oplus Ax$, $x \in \mathscr{D}_A$. Ясно, что Γ_A является линейным подпространством в $H \oplus H$, не содержащим векторов вида $0 \oplus x$, $x \neq 0$. Обратно, всякое подпространство в $H \oplus H$, не содержащее векторов вида $0 \oplus x$, $x \neq 0$, является графиком некоторого оператора.

Обозначим через τ преобразование $H \oplus H$, переводящее вектор $x \oplus y$ в $-y \oplus x$ (поворот на 90°).

Теорема 7. *Графики операторов A и A^* связаны соотношением*

$$\Gamma_{A^*} = \tau(\Gamma_A)^{\perp}. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть $y \oplus z \in \Gamma_{A^*}$. Это значит, что для всех $x \in \mathscr{D}_A$ выполняется соотношение $(Ax, y) = (x,\ z)$ (см. (18)). Это соотношение — не что иное, как условие ортогональности векторов $y \oplus z$ и $-Ax \oplus x$ в $H \oplus H$. Теорема доказана.

Назовем оператор A *замкнутым*, если Γ_A — замкнутое подпространство в $H \oplus H$. Оператор B называется *замыканием* оператора A, если Γ_B — замыкание подпространства Γ_A. Говорят, что B является *расширением* A, и пишут $B \supset A$, если $\Gamma_B \supset \Gamma_A$. Из теоремы 7 вытекает

Следствие. *Для любого оператора A оператор A^* замкнут, а оператор $(A^*)^*$, если он определен, совпадает с замыканием A.*

Замечание. Не всякий оператор допускает замыкание. Например, оператор A, определенный на множестве финитных последовательностей в $l_2(\mathbf{R})$ и переводящий e_n в ne_1 $(n = 1, 2, \ldots)$ не имеет замыкания, так как среди предельных точек его графика есть точка $0 \oplus e_1$. Проверьте, что оператор A^* определен на подпространстве $\{e_1\}^{\perp}$, которое неплотно в $l_2(\mathbf{R})$.

Оператор A называется *самосопряженным*, если

$$\mathscr{D}_{A^*} = \mathscr{D}_A \tag{20}$$

и $A = A^*$ на $\mathscr{D}_A$.

Предостережение. Это свойство оператора не эквивалентно более слабому условию

$$(Ax,\ y) = (x,\ Ay) \quad \text{для} \quad x,\ y \in \mathscr{D}_A. \tag{21}$$

Операторы, обладающие свойством (21), называют *симметрическими*. Очевидно, (21) эквивалентно включению $A \subset A^*$.

Оператор A называется *существенно самосопряженным*, если его замыкание — самосопряженный оператор.

Примеры. 1) Пусть A — оператор умножения на x в $L_2(\mathbf{R},\ dx)$ с областью определения $\mathscr{D}_A = \mathscr{D}(\mathbf{R})$. Найдем $\mathscr{D}_{A^*}$. По определению, для $f \in \mathscr{D}_{A^*}$ должно выполняться равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x) f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \overline{g(x)}\, dx,$$

где

$$g = A^*f, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}).$$

Поскольку $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ плотно в $L_2(\mathbf{R},\ dx)$, отсюда следует, что $g(x) = xf(x)$. Итак, $\mathscr{D}_{A^*}$ состоит из всех $f \in L_2(\mathbf{R}, dx)$, для которых $xf(x) \in L_2(\mathbf{R},\ dx)$. Оператор A^* состоит в умножении на x. Вывод: оператор A симметричен, но не самосопряжен. Можно проверить, что A^* самосопряжен и, следовательно, A существенно самосопряжен.

2) Пусть A — оператор дифференцирования d/dx в $L_2(\mathbf{R},\ dx)$ с областью определения $\mathscr{D}(\mathbf{R})$. Найдем $\mathscr{D}_{A^*}$. Если $f \in \mathscr{D}_{A^*}$, то для всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) \overline{f(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \overline{g(x)}\, dx, \text{ где } g = A^*f.$$

Это равенство показывает, что $g(x)$ является обобщенной производной от функции $-f(x)$. Итак, $\mathscr{D}_{A^*}$ состоит из таких функций $f \in L_2(\mathbf{R},\ dx)$, у которых обобщенная производная принадлежит $L_2(\mathbf{R},\ dx)$. Оператор A^* совпадает с $-d/dx$.

В приложениях оператор A часто задается в виде дифференциального выражения. В этом случае у него существует так называемая *естественная область определения* $\mathscr{D}_A \subset L_2(\Omega,\ d\mu)$, а именно, совокупность всех обобщенных функций $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$, для которых f и Af принадлежат $L_2(\Omega,\ d\mu)$. В приведенных выше примерах операторы A^* имели как раз естественную область определения.

Теория самосопряженных операторов хорошо разработана. Для ее применения в приложениях нужно знать, что тот или иной оператор самосопряжен или хотя бы существенно самосопряжен. Необходимым условием для этого является симметричность оператора, которая, как правило, проверяется без труда. Для исследования симметрических операторов полезен следующий критерий.

Теорема 8. *Пусть A — симметрический оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда самосопряженность A эквивалентна каждому из условий*:

1) A *замкнут и* $\ker(A^* \pm i1) = \{0\}$;

2) $\mathrm{im}(A \pm i1) = H$.

Существенная самосопряженность A равносильна каждому из условий:

3) $\ker(A^* \pm i1) = \{0\}$;

4) $\mathrm{im}(A \pm i1)$ *плотно в* H.

Доказательство. Если A — самосопряженный оператор, то он замкнут (так как $A = A^*$, а A^* замкнут). Если $x \in \ker(A^* \pm i1)$, то $Ax = ix$. Отсюда $(Ax, x) = i\|x\|^2 = (x, Ax) = -i\|x\|^2$, т. е. $x = 0$. Мы показали, что для самосопряженного оператора A выполнены условия 1). Покажем, что 1) влечет 2). Сначала заметим, что $\mathrm{im}(A \pm i1)^\perp = \ker(A^* \mp i1)$. Поэтому из 1) вытекает, что $\mathrm{im}(A \pm i1)$ плотно в H. Воспользуемся теперь замкнутостью A. Пусть y — любой вектор из H и $\{x_n\}$ — последовательность из $\mathscr{D}_A$, для которой $(A \pm i1)x_n \to y$. Последовательность $\{(A \pm i1)x_n\}$ фундаментальна. Соотношение $\|(A \pm i1)x\|^2 = (Ax \pm ix, Ax \pm ix) = \|Ax\|^2 + \|x\|^2 \geqslant \|x\|^2$ показывает, что $\{x_n\}$ — также фундаментальная последовательность. Пусть $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тогда $x \oplus y \in \Gamma_{A\pm i1}$ и, значит, $y \in \mathrm{im}(A \pm i1)$.

Теперь покажем, что из 2) следует самосопряженность A. Так как $A \subset A^*$, нужно лишь проверить включение $\mathscr{D}_{A^*} \subset \mathscr{D}_A$. Пусть $y \in \mathscr{D}_{A^*}$. Поскольку $\mathrm{im}(A \pm i1) = H$, существуют такие векторы $x_\pm \in \mathscr{D}_A$, что $(A \pm i1)x_\pm = (A^* \pm i1)y$. На подпространстве $\mathscr{D}_A$ оператор A^* определен и совпадает с A. Поэтому $(A^* \pm i1)(y - x_\pm) = 0$. Но $\ker(A^* \pm i1) = \mathrm{im}(A \mp i1)^\perp = 0$. Значит, $y = x_\pm$ и $y \in \mathscr{D}_A$.

Предположим теперь, что A существенно самосопряжен. Тогда A^* совпадает с замыканием A (задача 658) и, следовательно, самосопряжен. Отсюда следует 3) в силу уже доказанной части теоремы. Далее, из 4) следует 3) (задача 671). Выведем теперь из условия 3) существенную самосопряженность A. Так как A симметричен, справедливо включение $A \subset A^*$. Это показывает, что A допускает замыкание $\bar{A}$ и что $\bar{A} \subset A^*$ (так как A^* — замкнутый оператор). Далее, из теоремы 7 следует, что $\bar{A}^* = A^*$. Значит, для оператора $\bar{A}$ выполнены условия 1). Поэтому $\bar{A}$ самосопряжен, а A существенно самосопряжен.

Пример. Пусть $A = i\dfrac{d}{dx}$, $H = L_2(\mathbf{R}, dx)$, $\mathscr{D}_A = \mathscr{D}(\mathbf{R})$. В этом случае симметричность A вытекает из равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)\overline{\psi(x)}\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\overline{\psi'(x)}\,dx \quad \text{для } \varphi, \psi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}).$$

Сопряженный оператор A^*, как мы видели выше, определен на множестве $\mathscr{D}_{A^*} \subset L_2(\mathbf{R}, dx)$, состоящем из функций, имеющих обобщенную производную в $L_2(\mathbf{R}, dx)$, и равен id/dx. Найдем $\ker(A^* \pm i1)$. Если $(A^* \pm i1)f = 0$, т. е. $i(f' \pm f) = 0$, то $f = ce^{\pm x}$ (задача 458). Поскольку эти функции не лежат в $L_2(\mathbf{R}, dx)$, мы получаем $\ker(A^* \pm i1) = \{0\}$. Значит, A существенно самосопряжен.

Пусть A — неограниченный, а B — ограниченный операторы. Говорят, что A и B перестановочны, если B переводит $\mathscr{D}_A$ в себя и $BAx = ABx$ для $x \in \mathscr{D}_A$. Можно показать, что для самосопряженного оператора A это условие равносильно перестановочности B и любого из ограниченных операторов $(A \pm i1)^{-1}$.

4. Расширения операторов. Довольно часто встречаются неограниченные симметрические операторы A, для которых условия 3) и 4) теоремы 8 не выполняются (и, следовательно, оператор A не является существенно самосопряженным), однако A можно расширить до самосопряженного оператора.

Существует простой способ выяснить, имеет ли данный симметрический оператор самосопряженное расширение, и если да, то описать все такие расширения. Введем понятие *преобразования Кэли* симметрического оператора A. По определению, это оператор V с областью определения $\operatorname{im}(A + i1)$, действующий по формуле

$$V(A + i1)x = (A - i1)x. \tag{22}$$

Из симметричности A следует, что $\ker(A + i1) = 0$, и поэтому определение V по формуле (22) корректно. Кроме того, как уже отмечалось в доказательстве теоремы 8, $\|(A + i1)x\| = \|(A - i1)x\|$ для всех $x \in D(A)$. Поэтому оператор V изометричен: $\|Vy\| = \|y\|$ для всех $y \in D(V)$.

Лемма. *Преобразование Кэли устанавливает биекцию между множеством симметрических операторов A с плотной областью определения и множеством изометрических операторов V без неподвижных векторов. Справедливы равенства*

$$D(A) = \operatorname{im}(1 - V), \quad A = i(1 + V)(1 - V)^{-1}. \qquad (23)$$

Доказательство. Из (22) непосредственно следует, что уравнение $Vy = y$ не имеет ненулевых решений. Поэтому оператор V не имеет неподвижных векторов. Обратно, пусть изометрический оператор V не имеет неподвижных векторов. Тогда $\ker(1 - V) = 0$ и мы можем определить оператор A так, чтобы выполнялись соотношения (23). Пусть x_1, $x_2 \in D(A)$ и $x_k = (1 - V)y_k$ $(k = 1, 2)$. Тогда $(Ax_1, x_2) = (i(1 + V)y_1, (1 - V)y_2) = i(y_1, y_2) + i(Vy_1, y_2) - i(y_1, Vy_2) - i(Vy_1, Vy_2)$. В силу изометричности V последнее выражение можно переписать в виде $(iVy_1, y_2) + (y_1, iVy_2)$. Если x_1 и x_2 поменять местами, последнее выражение заменится на комплексно сопряженное. Это значит, что $(Ax_2, x_1) = \overline{(Ax_1, x_2)}$ и оператор A симметрический. Остается проверить, что преобразование Кэли для построенного оператора A совпадает с исходным оператором V. Это вытекает из равенств

$$(A + i1)(1 - V)y = 2iy, \quad (A - i1)(1 - V)y = 2iVy,$$

которые в свою очередь непосредственно следуют из (22) и (23). Лемма доказана.

Значение этой леммы состоит в том, что она сводит задачу о расширении симметрических операторов к задаче о расширении изометрических операторов. В самом деле, из определения преобразования Кэли следует, что оно сохраняет отношение включения для операторов: $A_1 \subset A_2$ равносильно $V_1 \subset V_2$, а также операцию замыкания. (Более наглядно эти свойства выводятся из другого определения преобразования Кэли — см. задачу 676.)

Для замкнутых изометрических операторов V теория расширений очень проста и описывается следующим образом. Пусть $L_+ = D(V)^\perp$, $L_- = \operatorname{Im}(V)^\perp$. Тогда имеет место разложения $H = D(V) \oplus L_+ = \operatorname{im}(V) \oplus L_-$ и каждое изометрическое расширение U оператора V имеет вид $U = V \oplus W$, где W — изометрический оператор из L_+ в L_- с областью определения $D(W) \subset L_+$. В самом деле, всякий изометрический оператор в H, расширяющий V, обязан переводить векторы из L_+ в пространство L_-, так как сохранение нормы влечет сохранение скалярного произведения.

Вспоминая определение V, можно выразить пространства $L_{\pm}$ в терминах исходного симметрического оператора A. А именно, $L_{\pm}$ являются собственными подпространствами оператора A^*, отвечающими собственным значениям $\pm i$. В самом деле,

$$L_+ = D(V)^{\perp} = \operatorname{im}(A + i1)^{\perp} = \ker(A^* - i1);$$

$$L_- = \operatorname{im}(V)^{\perp} = \operatorname{im}(A - i1)^{\perp} = \ker(A^* + i1).$$

Поскольку пространства $L_{\pm}$ играют важную роль при изучении расширений оператора A, они получили специальное название.

Определение. Пространства $L_{\pm} = \ker(A^* \mp i1)$ называются *дефектными подпространствами* симметрического оператора A, а их размерности $l_{\pm} = \dim L_{\pm}$ — *числами дефекта.*

Теперь мы можем сформулировать основную теорему этого раздела.

Теорема фон Неймана. *Пусть A — замкнутый симметрический оператор, $L_{\pm}$ — его дефектные подпространства, $l_{\pm}$ — числа дефекта. Все замкнутые симметрические (соответственно самосопряженные) расширения A описываются изометрическими (соответственно унитарными) отображениями L_+ в L_-.*

Следствие. *Самосопряженные расширения A существуют тогда и только тогда, когда $l_+ = l_-$; в этом случае они зависят от l^2 вещественных параметров.*

Доказательство. Искомое соответствие устанавливается с помощью преобразования Кэли и сказанного выше о расширениях изометрических операторов. Остается заметить, что множество унитарных операторов в l-мерном пространстве описывается l^2 вещественными параметрами *).

Часто встречается простейший случай оператора A с индексами дефекта (1, 1). В этом случае множество самосопряженных расширений A нумеруется точками окружности (унитарный оператор в одномерном пространстве — это комплексное число, равное по модулю единице).

В предыдущих рассуждениях выделенную роль играли точки $\pm i$ на комплексной плоскости. На самом деле мож-

---

*) Более точная формулировка: это множество является гладким вещественным многообразием размерности l^2 — см., например, [17].

но было бы заменить их любой парой чисел λ, μ соответственно из верхней и нижней полуплоскости. Можно показать (см. задачу 678), что число $l_\lambda = \dim\ker(A^* - \lambda 1)$ локально постоянно на $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$ и, следовательно, постоянно при $\operatorname{im}\lambda > 0$ и $\operatorname{im}\lambda < 0$.

Для многих приложений важно знать, когда симметрический оператор A имеет равные числа дефекта $l_+ = l_-$. Два достаточных условия приведены в задачах 679 и 681.

Одно из них состоит в том, что оператор A полуограничен сверху или снизу (т. е. $(Ax, x) \leqslant a\|x\|^2$ или $(Ax, x) \geqslant a\|x\|^2$ для всех $x \in D(A)$).

Второе требует вещественности оператора A относительно подходящей вещественной структуры на H. Более точно, пусть H_0 — вещественное подпространство в комплексном пространстве H такое, что $H = H_0 + iH_0$. Оператор A в пространстве H называется вещественным (относительно вещественной структуры, задаваемой подпространством H_0), если он переводит H_0 в себя (ср. задачу 680).

Оба сформулированных условия удобны для применения к неограниченным операторам, заданным с помощью дифференциальных выражений.

Пример 1. Рассмотрим так называемый оператор Штурма — Лиувилля, т. е. дифференциальное выражение

$$-\frac{d^2x}{dt^2} + q(t)\,x(t) \tag{24}$$

на интервале (a, b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$. В качестве начальной области определения D_0 рассмотрим пространство $C_0^\infty(a, b)$ финитных гладких функций на (a, b). Пусть A_0 — оператор, задаваемый выражением (24) в D_0. Если $q(t)$ — вещественная локально суммируемая функция, то A_0 будет симметрическим оператором. Обозначим через A его замыкание. Можно проверить, что $D(A)$ содержится в естественной области определения выражения (24), а $D(A^*)$ совпадает с ней. Пространство L_λ в данном случае состоит из квадратично интегрируемых на (a, b) решений дифференциального уравнения

$$x'' + (\bar{\lambda} - q)x = 0. \tag{25}$$

Его размерность, очевидно, не превосходит 2.

Случай 1. Пусть $a = -\infty$, $b = \infty$, $q(t) \equiv 0$. В этом случае решения уравнения (25) — экспоненты, не принадлежащие $L^2(\mathbf{R})$. Индексы дефекта равны нулю и оператор A самосопряженный.

Случай 2. Пусть $a=0$, $b=\infty$, $q(t)\equiv 0$. Здесь, как легко проверить, при любом вещественном λ уравнение (25) имеет только одно (с точностью до множителя) решение, принадлежащее $L^2(0, \infty)$. Индексы дефекта равны (1, 1).

Случай 3. Пусть a и b конечны, а $q(t)$ — ограниченная на $[a, b]$ функция. Здесь все решения (25) лежат в $L^2(a, b)$. Индексы дефекта равны (2, 2).

Теория расширений оператора Штурма — Лиувилля была построена Г. Вейлем еще до возникновения общей спектральной теории операторов. Некоторые факты теории Вейля см. в задачах 683—685.

Пример 2. Пусть $A = i\dfrac{d}{dt}$ — оператор в $L^2(0, \infty)$ с областью определения $C_0^\infty(0, \infty)$, $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ — многочлен с вещественными коэффициентами. Тогда $P(A) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k A^k$ — симметрический оператор. Дефектное пространство L_λ для $P(A)$ определяется дифференциальным уравнением

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{(k)}(t) = \bar{\lambda} x(t).$$

Общий вид решения

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\mu_k t},$$

где $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — корни алгебраического уравнения

$$P(\mu) = \bar{\lambda}. \tag{26}$$

Поскольку коэффициенты P вещественны, эти корни не могут быть вещественными при $\lambda \notin \mathbf{R}$. Размерность L_λ равна числу корней уравнения (26), лежащих в нижней полуплоскости. Из (26) следует, что $P(\bar{\mu}) = \lambda$. Поэтому размерность $L_{\bar{\lambda}}$ равна числу корней уравнения (26) в верхней полуплоскости. При нечетном n отсюда следует, что оператор $P(A)$ имеет разные числа дефекта и, следовательно, не имеет самосопряженных расширений.

§ 2. Спектральное разложение операторов

1. Приведение оператора к виду умножения на функцию. В этом пункте мы покажем, что всякий самосопряженный оператор унитарно эквивалентен оператору умножения. Более точно, имеет место

Теорема 9. *Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Существуют такое пространство X с мерой μ, такая измеримая функция a на X и такой унитарный оператор U из H в $L_2(X, \mu)$, что следующая диаграмма коммутативна*:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{D}_A & \xrightarrow{U} & \mathscr{D}_{M(a)} \\ {\scriptstyle A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle M(a)} \\ H & \xrightarrow{U} & L_2(X, \mu) \end{array} \tag{27}$$

(Здесь $M(a)$ — оператор умножения на функцию a в $L_2(X, \mu)$ с областью определения $\mathscr{D}_{M(a)}$, состоящей из тех функций $f \in L_2(X, \mu)$, для которых $af \in L_2(X, \mu)$.)

Доказательство этой теоремы мы проведем в несколько этапов. Предположим сначала, что оператор A ограничен и что в пространстве H есть *циклический вектор* для A, т. е. такой вектор ξ, что всякое замкнутое подпространство в H, содержащее ξ и инвариантное относительно A, совпадает с H (см. задачу 611). В этом случае мы будем называть A *оператором с простым спектром* (ср. с задачей 612).

Теорема 10. *Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор с простым спектром. Тогда для A справедливо утверждение теоремы* 9, *причем можно положить* $X = [-\|A\|, \|A\|]$, $a(x) = x$, $U\xi(x) \equiv 1$.

Доказательство. Предположим, что теорема доказана и μ — искомая мера на X. Пусть f — ограниченная борелевская функция на X. Тогда из теоремы 5 вытекает, что оператору $f(A)$ в H соответствует оператор умножения на $f(x)$ в $L_2(X, \mu)$, т. е.

$$Uf(A) = M(f)\,U. \tag{28}$$

В самом деле, для $f(x) = x$ (28) сводится к (27), а общий случай получается, если проследить построение оператора $f(A)$.

Отсюда следует равенство

$$(f(A)\,\xi, \xi)_H = (Uf(A)\,\xi, U\xi)_{L_2(X,\mu)} = (f, 1)_{L_2(X,\mu)}. \tag{29}$$

Левую часть равенства (29) можно вычислить, зная только оператор A и вектор ξ. Тем самым мы восстанавливаем меру μ. А именно, если E — измеримое подмножество в X и χ_E — характеристическая функция E, то

$$\mu(E) = (\chi_E, 1)_{L_2(X,\mu)} = (\chi_E(A)\xi, \xi)_H. \tag{30}$$

Пусть теперь задан самосопряженный оператор A с простым спектром в пространстве H, и пусть ξ — циклический вектор для A. Определим функцию μ на борелевских подмножествах отрезка $X = [-\|A\|, \|A\|]$ формулой (30). Проверим, что μ — счетно-аддитивная мера. Прежде всего, из равенств $\chi_E = \chi_E^2 = \overline{\chi}_E$ вытекает, что оператор $\chi_E(A)$ — ортопроектор. Поэтому $(\chi_E(A)\xi, \xi) = \|\chi_E(A)\xi\|^2 \geqslant \geqslant 0$. Далее, если $E = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, то $\chi_E = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k}$ (ряд сходится в каждой точке). Поэтому $\chi_E(A) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k}(A)$ (в смысле сильной сходимости) и, значит, $\mu(A) = (\chi_E(A)\xi, \xi) = = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k}(A)\xi, \xi\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$. Определим теперь оператор U из H в $L_2(X, \mu)$ на векторах вида $f(A)\xi$ следующим образом:

$$Uf(A)\xi = f. \tag{31}$$

Проверим, что этот оператор изометричен, т. е.

$$(Uf_1(A)\xi, Uf_2(A)\xi)_{L_2(X,\mu)} = (f_1(A)\xi, f_2(A)\xi)_H. \tag{32}$$

Если $f_1 = \chi_{E_1}$, $f_2 = \chi_{E_2}$, то (32) сводится к равенству $(\chi_{E_1}, \chi_{E_2})_{L_2(X,\mu)} = \left(\chi_{E_1}(A)\xi, \chi_{E_2}(A)\xi\right)_H = \left(\chi_{E_1}(A)\chi_{E_2}(A)\xi, \xi\right)_H$, справедливому по определению меры μ. По линейности равенство (32) верно для ступенчатых функций f_1 и f_2. Наконец, это равенство сохраняется при поточечных ограниченных предельных переходах. Тем самым изометричность U доказана. Поскольку векторы вида $f(A)\xi$ плотны в H (они образуют линейное пространство, содержащее ξ и инвариантное относительно A), а функции f плотны в $L_2(X, \mu)$, оператор U продолжается до унитарного оператора из H на $L_2(X, \mu)$. Наконец, обозначая $xf(x)$ через $g(x)$, по определению имеем

$$UAf(A)\xi = Ug(A)\xi = g = M(x)f = M(x)Uf(A)\xi.$$

Отсюда $UA = M(x)U$ на векторах вида $f(A)\xi$, а значит, и всюду. Теорема доказана.

Теперь освободимся от условия цикличности.

Теорема 11. *Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Существует семейство подпространств $\{H_\beta\}_{\beta\in B}$ в H, обладающее свойствами:*

1) $H_\beta \perp H_{\beta'}$ *при* $\beta \neq \beta'$;

2) $\sum\limits_{\beta\in B} H_\beta = H$;

3) $AH_\beta \subset H_\beta$ *при всех* $\beta \in B$;

4) *ограничение A на H_β имеет циклический вектор для каждого* $\beta \in B$.

Доказательство сразу следует из леммы Цорна, примененной к совокупности всех систем $\{H_\beta\}$, обладающих свойствами 1), 3), 4). Отметим также, что если H сепарабельно, то множество B не более чем счетно. Из теорем 10 и 11 вытекает справедливость для любого ограниченного самосопряженного оператора A теоремы 9 со следующим уточнением: в качестве множества X можно взять объединение нескольких экземпляров отрезка $[-\|A\|, \|A\|]$, а в качестве функции $a(x)$ — координатную функцию x.

Мы предоставляем читателю вывести, следуя изложенной выше схеме, более общий результат.

Теорема 12. *Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — ограниченные попарно перестановочные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H. Существует такая реализация H в виде пространства $L_2(X, \mu)$, что все операторы $A_1, \ldots, A_n$ одновременно становятся операторами умножения на вещественные функции $a_1(x), \ldots, a_n(x) \in$ $\in L_\infty(X, \mu)$.*

Следствие. *Пусть A — ограниченный нормальный (в частности, унитарный) оператор в комплексном гильбертовом пространстве H. Существует такая реализация H в виде пространства $L_2(X, \mu)$, при которой оператор A переходит в оператор умножения на комплекснозначную функцию $a \in L_\infty(X, \mu)$ (в случае унитарного оператора $|a(x)| = 1$ почти всюду на X).*

В самом деле, оператор A имеет вид $B + iC$, где B и C — перестановочные самосопряженные ограниченные операторы. Применяя к ним теорему 12, получаем нужное утверждение. Если оператор A унитарен, то $AA^* = 1$, откуда $|a(x)|^2 = 1$ почти всюду.

Разберем теперь случай неограниченного самосопряженного оператора A в пространстве H. Рассмотрим его преобразование Кэли $V = (A + i1)(A - i1)^{-1}$. Оператор V унитарен. По следствию из теоремы 12 существует такая реализация пространства H в виде $L_2(X, \mu)$, при которой V переходит в оператор умножения на измеримую функцию $v(x)$, обладающую свойством: $|v(x)|=1$ почти всюду на X.

Покажем теперь, что значения $v(x)$ отличны от 1 почти всюду. В противном случае оператор V имел бы собственный вектор x_0 с собственным значением 1 (таковой в нашей реализации является любая функция, отличная от 0 лишь на множестве, где $v(x)=1$). Равенство $Vx_0=x_0$ равносильно равенству $Ay_0-iy_0=Ay_0+iy_0$, откуда $y_0=0$ и, значит, $x_0=0$. Итак, $v(x)$ отлично от 1 почти всюду. Значит, существует такая измеримая вещественная функция $a(x)$, что $v(x)=\frac{a(x)+i}{a(x)-i}$ почти всюду; достаточно положить $a(x)=i\frac{v(x)+1}{v(x)-1}$. Наконец докажем, что $\mathscr{D}_A=\mathscr{D}_{(V-1)^{-1}}$ и $A=i(V+1)(V-1)^{-1}$. Отсюда будет следовать, что в нашей реализации A является оператором умножения на $a(x)$.

По определению V имеем $(V+1)x=Vx+x=Ay+iy+Ay-iy=2Ay$, $(V-1)x=Vx-x=Ay+iy-Ay+iy=2iy$. Отсюда $\mathscr{D}_{(V-1)^{-1}}=\operatorname{im}(V-1)=\mathscr{D}_A$ и $Ay=\frac{1}{2}(V+1)x=i(V+1)(V-1)y$. Теорема доказана.

Следствием этой теоремы является следующее обобщение результатов п. 2 § 1.

Теорема 13. *Пусть A — самосопряженный (быть может, неограниченный) оператор в гильбертовом пространстве H. Существует единственный гомоморфизм алгебры $B(\mathbf{R})$ ограниченных борелевских функций на $\mathbf{R}$ в алгебру* $\operatorname{End} H$ *в H, обладающий свойствами:*

1) $\varphi(1)=1$;

2) $\varphi\left(\frac{t+i}{t-i}\right)=(A+i1)(A-i1)^{-1}$;

3) *если $|f_n(t)|\leqslant C$ и $f_n(t)\to f(t)$ для всех $t\in\mathbf{R}$, то $\varphi(f_n)$ сильно сходится к $\varphi(f)$.*

Кроме того, гомоморфизм φ обладает свойствами:

4) $\varphi(\bar{f})=\varphi(f)^*$;

5) $\|\varphi(f)\|\leqslant\sup\limits_{t\in\mathbf{R}}|f(t)|$.

Доказательство. Будем считать, что H реализовано в виде $L_2(X, \mu)$ так, что оператор A состоит в умножении на измеримую вещественную функцию $a(x)$. Тогда оператор $V=(A+i1)(A-i1)^{-1}$ состоит в умножении на $v(x)=\frac{a(x)+i}{a(x)-i}$. Определим искомый гомоморфизм

φ формулой $\varphi(f)=M(f, a)$, где $M(f, a)$ — оператор умножения на функцию $f(a(x))$. Свойства 1)—5) проверяются без труда. Докажем единственность φ. Из 2) следует, что $\varphi\left(\frac{t-i}{t+i}\right)=\varphi\left(\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{-1}\right)=V^{-1}=V^*$. Отсюда $\varphi\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)=$ $=\operatorname{Re} V, \varphi\left(\frac{2t}{t^2+1}\right)=\operatorname{Im} V$, где $\operatorname{Re} V=\frac{V+V^*}{2}, \operatorname{Im} V=\frac{V-V^*}{2i}$. Тем самым φ однозначно определена на рациональных функциях вида $P\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1}\right)$, где P — многочлен от двух переменных. Используя теорему Вейерштрасса, можно доказать, что такими функциями равномерно приближается любая непрерывная функция на прямой, для которой существуют и равны друг другу конечные пределы $f(t)$ при $t\to\pm\infty$ *). Наконец, последовательно применяя к таким $f(t)$ поточечные ограниченные предельные переходы, можно получить любую функцию из $B(\mathbf{R})$. Теорема доказана.

2. Спектральная теорема. Многие результаты теории меры (см. гл. II) переносятся mutatis mutandis на случай, когда вместо обычных мер рассматриваются так называемые проекционные меры.

О п р е д е л е н и е. Пусть задано множество X, некоторая σ-алгебра B подмножеств X, содержащая X, и гильбертово пространство H. Отображение λ: $B\to\operatorname{End} H$ называется *проекционной мерой* на (X, B) со значениями в $\operatorname{End} H$, если выполнены условия:

1) $\lambda(E)=\lambda(E)^*$ для любого $E\in B$;

2) $\lambda(E_1\cap E_2)=\lambda(E_1)\lambda(E_2)$ для любых $E_1, E_2\in B$;

3) $\lambda(E_1\cup E_2)=\lambda(E_1)+\lambda_2(E_2)$ для любых непересекающихся $E_1, E_2\in B$;

4) если $E_n\in B$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} E_n=E$ (см. задачу 82), то $\operatorname{s-lim}\limits_{n\to\infty}\lambda(E_n)$ существует и равен $\lambda(E)$.

П р и м е р. Пусть (X, B, μ) — пространство с обычной σ-аддитивной мерой μ. Положим $H=L_2(X, \mu)$, $\lambda(E)=$ $=M(\chi_E)$ — оператор умножения на характеристическую функцию множества $E\subset B$. Свойства 1)—3) здесь оче-

*) Достаточно воспользоваться заменой переменной

$$\frac{t^2-1}{t^2+1}\to\cos\alpha,\quad \frac{2t}{t^2+1}\to\sin\alpha.$$

видны, 4) следует из теоремы Лебега об ограниченной сходимости.

Обсудим здесь некоторые свойства проекционных мер, вытекающие из данного выше определения. Из условия 2) вытекает, что все операторы $\lambda(E)$, $E \in B$, попарно перестановочны. Далее, условие 1) вместе с равенством $\lambda(E)^2 = \lambda(E)$, вытекающим из 2), показывают, что $\lambda(E)$ — ортопроектор.

Обозначим через H_E подпространство $\lambda(E)H$, на которое $\lambda(E)$ проектирует H. Свойство 2) имеет следующий геометрический смысл: $H_{E_1 \cap E_2} = H_{E_1} \cap H_{E_2}$. Из 3) легко выводится более общее утверждение: $\lambda(E_1 \cup E_2) = \lambda(E_1) + \lambda(E_2) - \lambda(E_1 \cap E_2)$. Геометрически это означает, что $H_{E_1 \cup E_2} = H_{E_1} + H_{E_2}$ и что $H_{E_1} \perp H_{E_2}$, если E_1 и E_2 не пересекаются. Наконец, из 3) следует, что $\lambda(\varnothing) = 0$, $\lambda(X) = 1$, т. е. $H_\varnothing = \{0\}$, $H_X = H$.

Из проекционной меры λ можно изготовить целое семейство обычных мер и зарядов. А именно, пусть ξ и η — два вектора из H. Тогда отображение $\lambda_{\xi\eta}$: $B \to \mathbf{C}$, заданное формулой

$$\lambda_{\xi\eta}(E) = (\lambda(E)\xi, \ \eta), \tag{33}$$

будет комплексным зарядом на B. Если $\xi = \eta$, то вместо $\lambda_{\xi\xi}$ мы будем писать просто λ_ξ. Поскольку операторы $\lambda(E)$ положительны, заряд λ_ξ является мерой. Тождество

$$\lambda_{\xi\eta} = \frac{1}{4}\left(\lambda_{\xi+\eta} - \lambda_{\xi-\eta} + i\lambda_{\xi-i\eta} - i\lambda_{\xi+i\eta}\right) \tag{34}$$

показывает, что заряды $\lambda_{\xi\eta}$, а следовательно, сама проекционная мера λ восстанавливаются по набору обычных мер $\{\lambda_\xi\}_{\xi\in H}$.

Проекционную меру λ можно, как и обычную меру, использовать для определения интеграла. Пусть f — B-измеримая ограниченная числовая функция на X. *Интегральной суммой Лебега* для f назовем выражение

$$S_n(f, \lambda) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{k}{2^n}\, \lambda\left(\left\{x \in X\colon\ \frac{k}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\}\right). \tag{35}$$

Легко проверяется, что если $n_1 < n_2$, то $S_{n_2}(f) \gg S_{n_1}(f)$ (т. е. разность $S_{n_2}(f) - S_{n_1}(f)$ — положительный оператор). Кроме того, последовательность $\{S_n(f)\}$ ограничена сверху оператором $\sup\limits_{x\in X} f(x)\cdot 1$. Существует (см. задачу 485) $\operatorname{s-lim}\limits_{n\to\infty} S_n(f)$, который называется *интегралом* функции f *по проекционной мере* λ и обозначается $\int\limits_X f(x)\,d\lambda(x)$. Из свойств обычного интеграла Лебега вытекает, что для любого вектора $\xi \in H$ справедливо равенство

$$\left(\int\limits_X f(x)\,d\lambda(x)\,\xi,\ \xi\right) = \int\limits_X f(x)\,d\lambda_\xi(x).$$

Отсюда и из тождества (34) вытекает справедливость более общего равенства

$$\left(\int\limits_X f(x)\,d\lambda(x)\,\xi,\ \eta\right) = \int\limits_X f(x)\,d\lambda_{\xi\eta}(x). \tag{36}$$

Наконец, можно определить интеграл $A = \int\limits_X f(x)\,d\lambda(x)$ для неограниченной B-измеримой функции f на X. А именно, обозначим через $\mathscr{D}_A$ совокупность векторов $\xi \in H$, для которых сходится интеграл $\int\limits_X |f(x)|^2 d\lambda_\xi(x)$. (Из (34) можно вывести, что $\mathscr{D}_A$ — линейное подпространство в H.)

Для $\xi \in \mathscr{D}_A$ определим оператор A равенством

$$(A\xi,\ \eta) = \int\limits_X f(x)\,d\lambda_{\xi\eta}(x). \tag{37}$$

Сходимость этого интеграла следует из неравенства

$$|\lambda_{\xi\eta}(E)|^2 \leqslant \lambda_\xi(E)\,\lambda_\eta(E), \tag{38}$$

которое является частным случаем неравенства Коши — Буняковского. А именно, для интегральной суммы интеграла (37) из (38) и неравенства Коши — Буняковского следует оценка

$$|S_n(f,\ \lambda_{\xi\eta})|^2 \leqslant S_n(|f|^2,\ \lambda_\xi)\,S_n(1,\ \lambda_\eta),$$

откуда $\left|\int\limits_X f(x)\,d\lambda_{\xi\eta}(x)\right|^2 \leqslant \int\limits_X |f(x)|^2 \|\eta\|^2 d\lambda_\xi$. Таким образом, $\|A\xi\|_H \leqslant \|f\|_{L_2(X,\lambda_\xi)}$.

Отметим, что если функция f вещественна, то по определению оператора A выражение $(A\xi,\ \xi)$ вещественно для $\xi \in \mathscr{D}_A$. Таким образом, оператор A — симметрический. На самом деле этот оператор с областью определения $\mathscr{D}_A$, введенной выше, является самосопряженным. Это следует из теоремы 8 и из явной конструкции операторов

$(A \pm i1)^{-1}$: эти операторы можно определить интегралами $\int\limits_X \frac{d\lambda(x)}{f(x) \pm i}$.

Теперь мы можем сформулировать основной результат этого пункта.

Теорема 14. *Пусть A — самосопряженный (не обязательно ограниченный) оператор в гильбертовом пространстве H. Существует единственная борелевская проекционная мера λ на $\mathbf{R}$ со значениями в* End H, *обладающая свойством:*

$$f(A) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\lambda(x) \tag{39}$$

для любой ограниченной борелевской функции f на $\mathbf{R}$.

Кроме того, справедливо равенство

$$A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, d\lambda(x). \tag{40}$$

Доказательство. Единственность λ сразу вытекает из (39), если положить $f = \chi_E$, где E — борелевское множество на прямой. Доказательство существования очевидно, если перейти к той реализации H, в которой оператор A является оператором умножения на функцию.

Проекционная мера λ называется *спектральной мерой* оператора A, а равенство (40) — *спектральным разложением* этого оператора.

В качестве следствия теоремы 14 мы получаем определение любых (в том числе неограниченных) борелевских функций от любого самосопряженного оператора A: они определяются интегралом (39) с теми предосторожностями, которые указаны выше. Можно проверить, что $f(A)$ — всегда замкнутый оператор, нормальный в том смысле, что AA^* и A^*A имеют общую область определения и совпадают на ней. Примером применения этой конструкции является описание однопараметрических групп унитарных операторов.

Определение. Совокупность $\{V(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ унитарных операторов в гильбертовом пространстве H называется *однопараметрической группой*, если выполнены условия:

1) $V(t)V(s) = V(t+s)$ для $t, s \in \mathbf{R}$;

2) отображение $t \mapsto V(t)$ непрерывно в слабой операторной топологии.

Теорема Стоуна. *Всякая однопараметрическая группа унитарных операторов в H имеет вид*

$$V(t)=e^{itA}, \tag{41}$$

где A — некоторый самосопряженный оператор в H.

Доказательство. Отметим сначала, что формула (41) действительно определяет однопараметрическую группу, как сразу видно, если перейти к той реализации H, в которой A является оператором умножения на функцию; кроме того, в этой реализации легко проверяется равенство

$$\frac{d}{dt} V(t)\xi = iV(t)A\xi = iAV(t)\xi \text{ для } \xi \in \mathscr{D}_A. \tag{42}$$

Пусть теперь задана однопараметрическая группа $\{V(t)\}_{t\in\mathbf{R}}$. Определим $\mathscr{D}_A$ как совокупность тех векторов $\xi \in H$, для которых функция $t \mapsto V(t)\xi$ дифференцируема, и определим для $\xi \in \mathscr{D}_A$ оператор A равенством $A\xi = -i\frac{d}{dt} V(t)\xi|_{t=0}$. Покажем, что $\mathscr{D}_A$ плотно в H. Сначала заметим, что соответствие $t \mapsto V(t)$ сильно непрерывно. Пусть теперь $\{\varphi_n\} \subset \mathscr{D}(\mathbf{R})$ — δ-образная последовательность. Тогда для любого $\xi \in H$ последовательность $\xi_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\tau) V(\tau)\xi\, d\tau$ сходится к ξ. Проверим, что $\xi_n \in \mathscr{D}_A$. В самом деле,

$$V(t)\xi_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\tau) V(t+\tau)\xi\, d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\tau - t) V(\tau)\xi\, d\tau.$$

Отсюда $\frac{d}{dt} V(t)\xi_n = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_n'(\tau - t) V(\tau)\xi\, d\tau$. (Дифференцируемость интеграла по параметру t доказывается, как в обычном анализе.)

Проверим теперь, что $V(t)$ сохраняет подпространство $\mathscr{D}_A$ и что справедливы равенства (42). Для этого достаточно заметить, что векторы $V(t+\tau)\xi$ и $V(\tau)V(t)\xi$ совпадают. Дифференцируя их по τ и полагая $\tau = 0$, получаем искомое соотношение.

Симметричность оператора A получается дифференцированием равенства $(V(t)\xi, V(t)\xi) \equiv 1$ по t при $t = 0$. Наконец проверим, что A существенно самосопряжен. Пусть $\eta \in \ker(A^* \pm i1)$. Тогда для любого $\xi \in \mathscr{D}_A$ имеем

$((A \mp i1)\xi,\ \eta)=(\xi,\ (A^* \pm i1)\eta)=0$. Поэтому функция $f(t)\equiv(V(t)\xi,\ \eta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $f'(t)\pm f(t)=0$. Отсюда $f(t)=ce^{\mp t}$. Но f ограничена, так как $V(t)$ — унитарный оператор. Значит, $c=0$ и $(V(t)\xi,\ \eta)=0$ для всех $\xi\in\mathscr{D}_A$. Поскольку $\mathscr{D}_A$ плотно в H, то $\eta=0$. Итак, $\ker(A^*\pm i1)=0$ и, следовательно, A существенно самосопряжен. Пусть $\bar{A}$ — его самосопряженное расширение. Сравним теперь операторы $V(t)$ и $\bar{V}(t)=e^{it\bar{A}}$. Пусть $\xi\in\mathscr{D}_A\subset\mathscr{D}_{\bar{A}}$. Рассмотрим функцию $f(t)=(V(-t)\bar{V}(t)\xi,\ \eta)$. Дифференцируя эту функцию по t и используя равенства (42), получаем

$$f'(t)=-(V(-t)iA\bar{V}(t)\xi,\ \eta)+(V(-t)iA\overline{V(t)}\xi,\ \eta)=0.$$

Отсюда $f(t)\equiv(\xi,\ \eta)$, что дает $V(-t)\bar{V}(t)\xi\equiv\xi$, т. е. $\bar{V}(t)\xi=V(t)\xi$. Поскольку $V(t)$ и $\bar{V}(t)$ унитарны, а $\mathscr{D}_A$ плотно в H, мы получаем $\bar{V}(t)=V(t)$. Теорема доказана.

§ 3. Математическая модель квантовой механики

Одно из самых замечательных приложений математики в естественных науках — построение строгой теории квантовой механики. Основную роль при этом играет спектральная теория операторов в гильбертовом пространстве.

Мы не будем останавливаться здесь на физических основах квантовой механики и ее связи с механикой классической. Воспользуемся аксиоматическим методом, который легче усваивается студентами-математиками.

По определению, *фазовым пространством* (или *пространством состояний*) квантовомеханической системы является проективное пространство $\Phi=P(H)$, соответствующее некоторому комплексному гильбертову пространству H. Другими словами, Φ — множество комплексных прямых (одномерных подпространств) в H. Точки пространства Φ называются *состояниями* системы. Удобно задавать состояние $\varphi\in\Phi$ с помощью вектора единичной длины $\Psi\in H$, помня, однако, что коллинеарные векторы Ψ_1 и $\Psi_2=c\Psi_1$ (где $c=e^{i\alpha}$ — комплексное число, равное по модулю единице) задают одну и ту же точку φ пространства Φ.

Обычно пространство H реализуется как пространство функций, вектор Ψ называется тогда *волновой функцией*.

Физической величиной или *наблюдаемой* называется самосопряженный оператор A в пространстве H.

В отличие от классической механики, наблюдаемая A в состоянии φ принимает не фиксированное числовое значение, а является случайной величиной с известным распределением. Точная формулировка такова: вероятность того, что значение наблюдаемой A в состоянии φ принадлежит подмножеству $E \subset \mathbf{R}$, равна

$$\lambda_{\Psi}(E) = (\lambda(E)\Psi,\ \Psi), \tag{43}$$

где λ — спектральная мера оператора A, а Ψ — единичный вектор из H, задающий состояние φ.

Следствием этого определения является формула для среднего значения (т. е. математического ожидания) величины A в состоянии φ:

$$\langle A\rangle_{\Psi} = (A\Psi,\ \Psi). \tag{44}$$

Отметим, что правые части в (43) и (44) не меняются при замене Ψ на $e^{i\alpha}\Psi$. Поэтому они зависят лишь от состояния $\varphi \in \Phi$. В дальнейшем мы иногда не будем различать φ и Ψ, используя обозначение Ψ и для вектора из H, и для определяемого этим вектором состояния.

В некоторых случаях вероятностное распределение (43) сосредоточено в одной точке $a \in \mathbf{R}$. Тогда говорят, что величина A в состоянии Ψ принимает однозначно определенное значение a. Это равносильно (см. задачу 720) тому, что Ψ — собственный вектор для A с собственным значением a.

Оператор A может не иметь вообще ни одного собственного вектора (случай непрерывного спектра), и тогда наблюдаемая A ни в каком состоянии не определена однозначно. Однако, как мы знаем (задача 708), всегда существуют почти собственные векторы. Поэтому для любой наблюдаемой есть состояния, в которых они почти однозначно определены с любой наперед заданной точностью.

Для того чтобы две величины A и B принимали в состоянии Ψ определенные значения, вектор Ψ должен быть собственным одновременно для операторов A и B.

Это условие не выполняется для общих операторов, даже если перейти от собственных векторов к почти собственным. Таким образом, две наблюдаемых величины в квантовой механике, вообще говоря, не допускают одновременного точного измерения.

Количественным выражением этого факта является знаменитый принцип неопределенности Гейзенберга. Для того, чтобы дать его математическую формулировку, введем

Определение. *Неопределенностью* наблюдаемой A в состоянии Ψ называется число

$$\Delta_\Psi(A) = \langle (A - \langle A \rangle_\Psi)^2 \rangle_\Psi^{1/2}. \tag{45}$$

(Квадрат неопределенности в теории вероятностей называется *дисперсией* соответствующей случайной величины.)

Принцип неопределенности Гейзенберга. *Если операторы A и B удовлетворяют коммутационному соотношению*

$$AB - BA = i\hbar \cdot 1, \quad \hbar \geqslant 0, \tag{46}$$

то

$$\Delta_\Psi(A) \cdot \Delta_\Psi(B) \geqslant \hbar/2 \tag{47}$$

для любого состояния Ψ.

Доказательство. Прежде всего заметим, что замена A на $A - \alpha \cdot 1$ и B на $B - \beta \cdot 1$, где $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, не меняет ни условия (46), ни заключения (47) теоремы. В самом деле, коммутатор $AB - BA$ и неопределенности $\Delta_\Psi(A)$, $\Delta_\Psi(B)$ не изменяются при такой замене. Поэтому, полагая $\alpha = \langle A \rangle_\Psi$, $\beta = \langle B \rangle_\Psi$, мы можем ограничиться в доказательстве теоремы случаем $\langle A \rangle_\Psi = \langle B \rangle_\Psi = 0$. Но тогда $\Delta_\Psi(A) \cdot \Delta_\Psi(B) = \|A\Psi\| \cdot \|B\Psi\| \geqslant |\mathrm{Im}\,(A\Psi, B\Psi)| = \left| \left(\frac{AB - BA}{2i} \Psi, \Psi \right) \right| = \frac{\hbar}{2}$. $\square$

Конкретные приложения этого принципа мы укажем ниже.

Среди всех наблюдаемых особую роль играет одна, называемая *энергией* (или гамильтонианом) и обозначаемая обычно буквой H *). Постулируется, что состояние системы меняется со временем так, что волновая функция удовлетворяет *уравнению Шредингера*:

$$i\hbar\dot{\Psi} = H\Psi, \tag{48}$$

где $\hbar$ — так называемая приведенная *постоянная Планка*, а точка обозначает производную по времени.

---

*) Буква H означает также и основное гильбертово пространство. Обычно из контекста бывает ясно, о чем идет речь. К тому же, в приложениях всегда участвует какое-либо конкретное гильбертово пространство, обозначаемое соответствующим образом.

В частности, состояние является *стационарным*, т. е. не меняется со временем, тогда и только тогда, когда вектор Ψ является собственным для оператора H. Соответствующее собственное значение обычно обозначают буквой E; его физический смысл — энергия системы в данном состоянии. Стационарное состояние удовлетворяет *стационарному уравнению Шредингера*:

$$H\Psi = E\Psi. \tag{49}$$

Заметим, что вектор Ψ вовсе не является постоянным во времени. Из уравнения (48) следует, что он меняется по закону

$$\Psi(t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\Psi(0), \tag{50}$$

однако определяемое им состояние (т. е. точка проективного пространства) остается неподвижным.

Кроме обычных собственных векторов в квантовой механике часто используются обобщенные собственные векторы, не принадлежащие исходному гильбертову пространству. Общая схема определения таких векторов была предложена И. М. Гельфандом и А. Г. Костюченко (см. [12]). Она состоит в следующем. Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H и λ — его спектральная мера. Для любого вектора $x \in H$ определена вектор-функция $x(t) = \lambda((-\infty, t])x$. Если бы эта функция была дифференцируемой по t, то были бы верны следующие легко проверяемые равенства:

$$x = x(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} x'(t)\,dt, \tag{51}$$

$$Ax'(t) = \frac{d}{dt}Ax(t) = tx'(t), \tag{52}$$

которые дают разложение вектора x по собственным векторам $x'(t)$ оператора A.

Оказывается, при подходящем ослаблении топологии и соответствующем расширении пространства H можно добиться того, что функция $x(t)$ станет дифференцируемой. В большинстве примеров достаточно в качестве искомого расширения взять пространство $S'(\mathbf{R}^n)$ (см. гл. III, § 4).

Мы не будем останавливаться здесь на физической интерпретации обобщенных состояний. Как правило, она бывает ясна непосредственно из постановки задачи.

Чтобы применить описанную нами абстрактную схему к исследованию реальных физических систем, используют так называемые *правила квантования.* Совокупность имеющихся в настоящее время правил квантования, с одной стороны, неполна (не позволяет «проквантовать» любую мыслимую классическую систему), с другой стороны, противоречива (квантование по разным правилам может привести к различным результатам).

Этот факт объясняется тем, что классическая механика является более грубым описанием действительности, чем квантовая. Она может быть получена предельным переходом при $\hbar \to 0$. Поэтому правила квантования аналогичны попытке восстановить неизвестную последовательность по ее пределу. Понятно, что в общем случае нельзя ожидать для такого рода задачи теоремы существования и единственности.

Мы опишем теперь несколько простейших правил квантования.

1. Пусть классическая механическая система состоит из точечного объекта массы m, расположенного на прямой линии. Тогда классическое состояние этой системы задается двумя числами q и p: q означает координату точки на прямой, а p — ее импульс (который связан со скоростью $v = \dot{q} = \frac{dq}{dt}$ формулой $p = mv$). Все остальные физические величины являются функциями от q и p. Предположим, что энергия системы имеет вид $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ (первое слагаемое — так называемая *кинетическая энергия*, второе — *потенциальная энергия*). Тогда соответствующая квантовая система строится так. В качестве основного гильбертова пространства берется $L^2(\mathbf{R}, dq)$. Роль координаты играет оператор $\widehat{q}$ умножения на q в этом гильбертовом пространстве. В качестве импульса выступает оператор $\widehat{p} = i\hbar\frac{d}{dq}$. Оператор энергии имеет вид $\widehat{H} = \frac{\widehat{p}^2}{2m} + V(\widehat{q})$. Это — дифференциальный оператор второго порядка, действующий на волновую функцию $\Psi(q)$ по формуле

$$\widehat{H}\Psi(q) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dq^2} + V(q)\Psi(q).$$

Уравнение (48), описывающее развитие системы во времени, принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(q, t)}{\partial q^2} + V(q) \Psi(q, t)$$

а стационарное уравнение (49) превращается в

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi(q)}{dq^2} + (V(q) - E) \Psi(q) = 0.$$

2. Обобщением предыдущего правила является следующий общий принцип. Предположим, что исходная классическая система описывалась $2n$-мерным фазовым пространством с каноническими координатами $q_1, \ldots, q_n$, $p_1, \ldots, p_n$, удовлетворяющими соотношениям

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \ \{p_i, q_j\} = \delta_{ij},$$

где $\{ , \}$ — скобка Пуассона. Тогда в соответствующей квантовой системе роль координат и импульсов играют операторы $\widehat{q}_1, \ldots, \widehat{q}_n$; $\widehat{p}_1, \ldots, \widehat{p}_n$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[\widehat{q}_i, \widehat{q}_j] = [\widehat{p}_i, \widehat{p}_j] = 0, \quad [\widehat{p}_i, \widehat{q}_j] = i\hbar\delta_{ij}.$$

Оказывается, что такой набор операторов определен, по существу, однозначно. А именно, если предположить дополнительно, что операторы $\widehat{q}_1, \ldots, \widehat{q}_n, \widehat{p}_1, \ldots, \widehat{p}_n$ порождают всю алгебру операторов в гильбертовом пространстве (это квантовый аналог классического условия: любая физическая величина является функцией от канонических координат $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$), то можно установить такой изоморфизм основного гильбертова пространства с $L_2(\mathbf{R}^n, dq_1, \ldots, dq_n)$, при котором оператор $\widehat{q}_i$ переходит в умножение на координату q_i, а оператор $\widehat{p}_i$ — в дифференциальный оператор $i\hbar \frac{\partial}{\partial q_i}$.

3. Если классическая система получается объединением двух подсистем, то классическое фазовое пространство M будет произведением (как множеств) фазовых пространств M_1, M_2 соответствующих подсистем. В квантовой механике аналогом этой операции является *гильбертово тензорное произведение* $H = H_1 \otimes H_2$ (см. задачу 499).

Однако в квантовой ситуации возникает новое явление, не имеющее точного классического аналога.

Пусть, например, рассматриваемая система состоит из двух попарно неразличимых частиц, каждая из которых описывается вектором из гильбертова пространства H. Тогда состояние всей системы, описываемое вектором $x_1 \otimes x_2 \in H \otimes H$, не должно меняться при перестановке векторов x_1, x_2. Значит, неразличимость частиц приводит к тому, что вместо тензорного квадрата $H \otimes H$ мы должны рассматривать другое гильбертово пространство, в котором векторы $x_1 \otimes x_2$ и $x_2 \otimes x_1$ пропорциональны. Есть два кандидата на такое пространство: симметрический квадрат $S^2(H)$ и внешний квадрат $\Lambda^2(H)$.

Оказывается, обе схемы соответствуют реальным физическим ситуациям. Есть такие объекты (они получили название *бозонов*), которые описываются *симметрическими* степенями пространства H, и такие (называемые *фермионами*), которые описываются *внешними* степенями.

РАЗДЕЛ II

ЗАДАЧИ

ГЛАВА I

СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И ТОПОЛОГИИ

§ 1. Отношения. Аксиома выбора и лемма Цорна

1°. Какие из следующих отношений являются отношениями эквивалентности?

а) Отношение равенства двух чисел;

б) отношение подобия двух треугольников;

в) отношение порядка на вещественной прямой;

г) отношение линейной зависимости в линейном пространстве L размерности $n > 1$;

д) отношение линейной зависимости в множестве $L^* = L \setminus \{0\}$, где L — линейное пространство.

2. Назовем две положительные функции f_1 и f_2 на отрезке $[0, 1]$ эквивалентными, если

$$0 < \varliminf_{x \to 0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}, \quad \varlimsup_{x \to 0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} < \infty.$$

Проверить, что это действительно отношение эквивалентности и что соответствующее фактормножество несчетно.

3. Определим отношение $f_1 > f_2$ для положительных функций на отрезке $[0, 1]$ условием $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty$. Проверить, что это — отношение частичного порядка, и доказать, что любое счетное подмножество ограничено.

4°. Пусть X и Y — частично упорядоченные множества. Определим на произведении $X \times Y$ отношение $(x_1, y_1) \geqslant (x_2, y_2)$ условием $x_1 \geqslant x_2$ и $y_1 \geqslant y_2$. Доказать, что это отношение частичного порядка. Будет ли оно отношением порядка, если X и Y — упорядоченные множества?

5. Пусть X — частично упорядоченное множество. Предположим, что частичный порядок на X обладает следующим свойством: множество $M(x) = \{y \in X\colon\ y \leqslant x\}$ конечно для всех $x \in X$. Для любой функции $f(x)$ на X положим

$$F(x) = \sum_{y \leqslant x} f(y).$$

Доказать, что функция $f(x)$ восстанавливается по $F(x)$ с помощью формулы вида

$$f(x) = \sum_{y \leqslant x} \mu(x, y) F(y).$$

Функция μ определена однозначно и называется *функцией Мёбиуса* для частично упорядоченного множества X.

6. Найти функции Мёбиуса для следующих частично упорядоченных множеств:

а) натурального ряда с обычным отношением порядка;

б)* натурального ряда с отношением делимости;

в)* совокупности конечных подмножеств данного множества X с отношением включения;

г)** совокупности подпространств линейного n-мерного пространства над конечным полем с отношением включения.

7*. Выразить через функцию Мёбиуса задачи 6, б) следующие величины:

а) *функцию Эйлера* $\varphi(n)$, равную количеству натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n;

б)** величину $P(n, q)$ — количество неразложимых многочленов степени n с коэффициентами из конечного поля F_q и со старшим коэффициентом 1;

в) предел $C(N)/N^2$, $N \to \infty$, где $C(N)$ — число несократимых дробей вида p/q, $1 \leqslant p \leqslant N$, $1 \leqslant q \leqslant N$.

8. Пусть A — вполне упорядоченное множество и для каждого $\alpha \in A$ задано непустое упорядоченное множество X_α. Определим в множестве $X = \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ *лексикографический порядок*, полагая $x > y$, если $x_{\alpha_0} > y_{\alpha_0}$, где α_0 — наименьший элемент A, для которого $x_\alpha \neq y_\alpha$. Доказать, что это — действительно отношение порядка.

9. Пусть пространство $\mathbf{R}^n$ упорядочено так, что

а) $x_1 \geqslant y_1$ и $x_2 \geqslant y_2 \Rightarrow x_1 + x_2 \geqslant y_1 + y_2$;

б) $x \geqslant y$ и $\lambda \geqslant 0$ влечет $\lambda x \geqslant \lambda y$ для $\lambda \in \mathbf{R}$;

в) $x \geqslant y$ и $y \geqslant x$ влечет $x = y$.

Доказать, что $\mathbf{R}^n$ изоморфно как упорядоченное пространство произведению n прямых (с обычным порядком), на котором введен лексикографический порядок (см. задачу 8).

10*. Назовем два вполне упорядоченных счетных множества *эквивалентными*, если между ними можно установить монотонное взаимно однозначное соответствие. Пусть $\mathscr{M}$ — множество соответствующих классов эквивалентности. Определим на $\mathscr{M}$ отношение порядка, полагая $\mu > \nu$, если в классах μ и ν есть такие представители M и N, что M эквивалентно начальному отрезку в N (т. е. множеству вида $N(n_0) = \{n \in N\colon n < n_0\}$).

Доказать, что

а) в $\mathscr{M}$ имеется наименьший элемент μ_0;

б) любые два элемента $\mathscr{M}$ сравнимы;

в) множество $\mathscr{M}$ вполне упорядочено;

г) множество $\mathscr{M}$ несчетно;

д)** любое несчетное множество содержит часть, равномощную $\mathscr{M}$.

11*. Пусть $\mathscr{M}$ — вполне упорядоченное множество, описанное в задаче 10. Положим $\mathfrak{A} = \mathscr{M} \times [0, 1)$ и определим на $\mathfrak{A}$ лексикографический порядок: если $a = (\mu, x)$, $b = (\nu, y)$, то $a \geqslant b$ означает либо $\mu \geqslant \nu$ и $\mu \neq \nu$, либо $\mu = \nu$ и $x \geqslant y$.

Доказать, что любой начальный отрезок (см. задачу 10) множества $\mathfrak{A}$ эквивалентен (как упорядоченное множество) полуинтервалу $[0, 1)$, в то время как само множество $\mathfrak{A}$ не эквивалентно этому полуинтервалу.

12*. Пусть $a_0 = (\mu_0, 0)$ — минимальная точка множества $\mathfrak{A}$ задачи 11. Определим топологию на $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A} \setminus \{a_0\}$, принимая в качестве базиса открытых множеств «интервалы» $(a, b) = \{c \in \mathfrak{A}_0 : a \leqslant c \leqslant b,\ c \neq a,\ c \neq b\}$. Доказать, что

а) у каждой точки $a \in \mathfrak{A}_0$ есть окрестность, гомеоморфная обычному интервалу;

б) топологическое пространство $\mathfrak{A}_0$ связно и не гомеоморфно обычному интервалу.

Пространство $\mathfrak{A}_0$ называется *прямой Александрова* и служит примером одномерного многообразия, не обладающего счетной базой открытых множеств.

13°. Доказать, что в множестве кругов, содержащихся в данном квадрате на плоскости, есть максимальный элемент, но нет наибольшего по включению.

14. Используя лемму Цорна, доказать, что в каждом линейном пространстве есть базис.

15. Используя теорему Цермело, доказать, что для любых двух множеств A и B существует либо взаимно однозначное отображение A на часть B, либо взаимно однозначное отображение B на часть A.

16. Вывести теорему Цермело из леммы Цорна.

17. Доказать лемму Цорна, пользуясь теоремой Цермело.

§ 2. Метрические пространства и их приложения

18*. Доказать, что справедливость теоремы о стягивающейся последовательности замкнутых шаров является характеристическим свойством полных метрических пространств.

19°. Доказать, что всякая равномерно непрерывная функция на метрическом пространстве X однозначно продолжается до непрерывной функции на пополнении и это продолжение равномерно непрерывно.

20. Доказать неполноту и построить пополнения следующих метрических пространств:

а) прямой $\mathbf{R}$ с расстоянием $d(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$;

б) прямой $\mathbf{R}$ с расстоянием $d(x, y) = |e^x - e^y|$.

21. В множестве отрезков на прямой определим расстояние формулой $d([a, b], [c, d]) = |a - c| + |b - d|$. Доказать неполноту и найти пополнение этого метрического пространства.

22. В множестве $\{\Delta\}$ отрезков на прямой определим расстояние как длину симметрической разности:

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = |\Delta_1| + |\Delta_2| - 2\,|\Delta_1 \cap \Delta_2|.$$

Доказать неполноту и найти пополнение этого метрического пространства.

23. Доказать полноту пространства $B(X)$ всех ограниченных функций на множестве X с расстоянием

$$d(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|, \quad x \in X.$$

24. Пусть X — ограниченное метрическое пространство. Доказать, что соответствие $x \mapsto d(x, \cdot)$ является изометрическим отображением X в $B(X)$ (см. задачу 23).

25. Пусть X — подмножество в полном метрическом пространстве Y. Доказать, что:

а) X полно тогда и только тогда, когда оно замкнуто.

б) Пополнение X изометрично его замыканию в Y.

в) Вывести из задач 23, 24 и а), б) теорему о пополнении для ограниченных пространств.

26. Пусть X — полное метрическое пространство, Y_i — открытые всюду плотные подмножества в X. Доказать, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} Y_i$ всюду плотно в X.

27. Доказать неполноту пространства многочленов относительно расстояний:

а) $d(P, Q) = \max\limits_{x \in [0,1]} |P(x) - Q(x)|$;

б) $d(P, Q) = \int\limits_0^1 |P(x) - Q(x)|\, dx$;

в) $d(P, Q) = \sum\limits_i |c_i|$, если $P(x) - Q(x) = \sum c_i x^i$.

28. В множестве $C(X, Y)$ непрерывных отображений метрического пространства X в ограниченное полное метрическое пространство Y определим расстояние формулой

$$d(f_1, f_2) = \sup_{x \in X} d_Y(f_1(x), f_2(x)).$$

Доказать полноту метрического пространства $C(X, Y)$.

29*. Пусть X — ограниченное полное метрическое пространство с метрикой d_X, а G — совокупность всех взаимно однозначных и взаимно непрерывных отображений X на себя. Определим в множестве G расстояние по формуле

$$d(f_1, f_2) = \sup \left[d_X(f_1(x), f_2(x)) + d_X\left(f_1^{-1}(x), f_2^{-1}(x)\right) \right].$$

Доказать полноту метрического пространства G.

30. Пусть p — простое число. Определим *p-адическую норму* на множестве рациональных чисел равенством

$$\| r \|_p = p^{-k}, \text{ если } r = p^k \frac{m}{n},$$

где m и n — целые числа, взаимно простые с p. Доказать соотношения:

а) $\|r_1 r_2\|_p = \|r_1\|_p \|r_2\|_p$;

б) $\|r_1 + r_2\|_p \leqslant \max\{\|r_1\|_p, \|r_2\|_p\}$;

в) если $\|r_1\|_p < \|r_2\|_p$, то $\|r_1 + r_2\|_p = \|r_2\|_p$.

31*. Доказать, что множество $\mathbf{Q}$ рациональных чисел с расстоянием $d_p(r_1, r_2) = \|r_1 - r_2\|_p$ (см. задачу 30) является метрическим пространством. Пусть $\mathbf{Q}_p$ — его пополнение. Доказать, что все арифметические операции в $\mathbf{Q}$ продолжаются по непрерывности на $\mathbf{Q}_p$. Получаемое таким образом поле называется *полем p-адических чисел*.

32*. Доказать, что каждый элемент из поля $\mathbf{Q}_p$ (см. задачу 31) однозначно записывается в виде p-ичной дроби вида

$$\ldots a_2 a_1 a_0,\ a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-k},$$

где $0 \leqslant a_i \leqslant p-1$; после запятой — конечное число знаков, а перед запятой — бесконечное. Другими словами, каждый элемент $x \in \mathbf{Q}_p$ является суммой сходящегося ряда $\sum\limits_{i=-k}^{+\infty} a_i p^i$. Доказать, что $\mathbf{Q}_p \neq \mathbf{Q}$.

33*. Обозначим через $\mathbf{Z}_p$ замыкание кольца целых чисел $\mathbf{Z}$ в $\mathbf{Q}_p$ (множество *целых p-адических чисел*). Доказать, что $\mathbf{Z}_p$ — компактное множество. Построить взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение $\mathbf{Z}_p$ на канторово совершенное множество.

34*. Доказать, что для любого $x \in \mathbf{Z}_p$ (см. задачу 33) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x^{p^n}$. Обозначим этот предел $\operatorname{sgn}_p x$. Доказать, что полученная таким образом функция (*p-адический сигнум*) принимает ровно p различных значений: 0 и $(p-1)$ корней степени $p-1$ из 1. Доказать тождество

$$\operatorname{sgn}_p(xy) = \operatorname{sgn}_p x \cdot \operatorname{sgn}_p y.$$

35*. Определим расстояние на множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел, полагая $d(m, n) = 1/k$, если у чисел m и n совпадают последние k знаков в десятичной записи.

а) Доказать, что полученное метрическое пространство неполно и его пополнение изоморфно (как кольцо) прямому произведению колец $\mathbf{Z}_2$ и $\mathbf{Z}_5$.

б) Доказать, что для любого натурального k существует ровно четыре k-значных окончания:

$$\ldots 000\,000$$
$$\ldots 000\,001$$
$$\ldots 890\,625$$
$$\ldots 109\,376,$$

воспроизводящиеся при умножении. (Это значит, что если числа N_1 и N_2 оканчиваются указанными k цифрами, то произведение $N_1 N_2$ оканчивается теми же k цифрами.)

36°. Пусть Ω_n — множество бинарных векторов $\omega = (\omega(1), \ldots, \omega(n))$. Доказать, что вектор $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ определяет в Ω_n метрику $\rho^\sigma(\omega, \omega') = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i \,|\, \omega(i) - \omega'(i) \,|$ тогда и только тогда, когда $\sigma_i > 0$ при $i = 1, \ldots, n$.

37°. Показать, что в метрическом пространстве Хемминга существуют шары, имеющие несколько центров. Привести пример шара в (Ω_n, ρ^σ), совпадающего с множеством своих центров.

38. Пусть $\Psi(w, t)$ — функция, определяющая динамическую задачу распознавания. Доказать, что $\lim\limits_{t\to\infty} \Psi(w, t)$ при $w \in W$ существует, если граф допустимых переходов Γ не имеет циклов.

39°. Доказать, что при $t_0 < t_1 < t'$ из стабильности прогноза $\Pi(t_0, t')$ вытекает стабильность прогноза $\Pi(t_1, t')$. Показать, что обратное утверждение неверно.

40. Назовем *предельной* динамическую задачу распознавания при $T_1 = t' = \infty$. Пусть в предельной задаче граф допустимых переходов имеет вид Γ: $\mathrm{В}\cdot\!\leftarrow\!\cdot\mathrm{Н}$ и $r = 2$. Введем множество $S = \mathrm{В}_0(t_0)\setminus\mathrm{В}_0(t_0)$, где $B_0(t_0)$ определено исходным разбиением. Показать, что любое допустимое разбиение $P(t_1)$ имеет вид $(\mathrm{В}_0(t_0) \cup S') \sqcup (\mathrm{Н}_0(t_0) \setminus S')$ для некоторого $S' \subseteq S$.

41°. Доказать, что ядро $z = (z(1), \ldots, z(n))$ класса В в алгоритме ГЭП-1 может быть определено формулой

$$z(l) = \begin{cases} 0, & \text{если } \det\begin{pmatrix} a_l & b_l \\ c_l & d_l \end{pmatrix} \geqslant 0, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

42*. *Гранью размерности* k, натянутой на ребра длины $\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_k}$, называется подмножество $\Gamma \subseteq \Omega_n$ (см. задачу 36), состоящее из всех векторов $\omega \in \Omega_n$, у которых координаты с номерами $i_1, \ldots, i_k$ произвольны (т. е. равны 0 или 1), а остальные $(n-k)$ координат фиксированы.

Пусть $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ удовлетворяет условию $0 \leqslant \sigma_1 \leqslant \leqslant \sigma_2 \leqslant \ldots \leqslant \sigma_n$. Положим, кроме того, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_{n+1} = \infty$. Рассмотрим все такие $k \in \{0, \ldots, n\}$, что $\sum\limits_{i=0}^{k} \sigma_i < \sigma_{k+1}$. Доказать, что множество центроидов в (Ω_n, ρ^σ) совпадает с множеством граней, натянутых на ребра длины $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$.

§ 3. Категории и функторы

43. Построить контравариантный функтор из категории всех подмножеств данного множества в себя. Морфизмами в этой категории являются вложения.

44. Существует ли универсальный отталкивающий объект в следующих категориях: групп, линейных пространств над данным полем, в категориях, дуальных к категориям групп и линейных пространств?

45. Пусть G_1 — категория абелевых групп с отмеченной образующей (морфизмы — гомоморфизмы групп, переводящие отмеченную образующую в отмеченную). Указать универсальный объект в G_1.

46. Пусть G_2 — категория групп с двумя отмеченными образующими (морфизмы — гомоморфизмы групп, переводящие отмеченные образующие в отмеченные). Доказать, что в G_2 существует универсальный объект. Этот объект называется *свободной группой* с двумя образующими.

47. Обозначим через AG_2 полную подкатегорию в G_2 (см. задачу 46), объектами которой являются абелевы группы с двумя отмеченными образующими. Доказать существование универсального объекта в AG_2. Этот объект называется *свободной абелевой группой* с двумя образующими.

48*. Обозначим через $A_n(K)$ категорию ассоциативных алгебр над полем K с n отмеченными образующими. Доказать существование универсального объекта в $A_n(K)$. Этот универсальный объект есть *тензорная алгебра* над n-мерным линейным пространством над полем K.

49*. Доказать существование универсального объекта для полной подкатегории $CA_n(K)$ в $A_n(K)$, состоящей из коммутативных алгебр.

50.** Доказать существование универсального объекта для категории $LA_n(K)$ алгебр Ли над полем K с n отмеченными образующими. Этот объект называется *свободной алгеброй Ли* с n образующими.

51*. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над полем K характеристики нуль. Рассмотрим категорию $K(\mathfrak{g})$, объектами которой являются линейные отображения φ пространства $\mathfrak{g}$ в ассоциативные алгебры (свою для каждого объекта), обладающие свойством:

$$\varphi([x, y]) = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x).$$

Морфизмом объекта $\varphi\colon \mathfrak{g} \to A$ в объект $\psi\colon \mathfrak{g} \to B$ называется такой гомоморфизм $\chi\colon A \to B$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "\chi"] \\ \mathfrak{g} \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\psi"'] & B \end{tikzcd}$$

Доказать, что $K(\mathfrak{g})$ обладает универсальным объектом
$$\varphi_0 \colon \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g}).$$

Алгебра $U(\mathfrak{g})$ называется ассоциативной оболочкой или универсальной обертывающей алгеброй для $\mathfrak{g}$.

52*. Доказать, что ассоциативная оболочка (см. задачу 51) свободной алгебры Ли с n образующими изоморфна тензорной алгебре над n-мерным пространством.

53*. Пусть $\{X_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ — семейство объектов категории K.

Рассмотрим категорию $\widetilde{K}$, объектами которой являются наборы морфизмов $\varphi_\alpha \in \mathrm{Mor}(X_\alpha, Y)$ $(\alpha \in A)$ (Y — некоторый объект из K, свой для каждого объекта из $\widetilde{K}$). Морфизмами в $\widetilde{K}$ являются наборы коммутативных диаграмм вида

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "\chi"] \\ X_\alpha \arrow[ur, "\varphi_\alpha"] \arrow[r, "\varphi_\alpha"'] & Z \end{tikzcd}$$

Если категория $\widetilde{K}$ имеет универсальный отталкивающий объект, то соответствующий объект из K называется *суммой* объектов и обозначается $\coprod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$. Морфизмы $i_\alpha \colon x_\alpha \to \coprod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ называются каноническими вложениями слагаемых в сумму.

Доказать, что в категории множеств и в категории линейных пространств над данным полем определены суммы любого семейства объектов.

54*. Определение *произведения* семейства объектов $\{X_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ категории K получается из определения суммы (см. задачу 53) с помощью обращения стрелок. А именно, произведением $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ называют сумму объектов X_α в дуальной категории $\widetilde{K}^0$. Морфизмы $p_\alpha \colon \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha \to X_\alpha$ называют каноническими проекциями произведения на сомножители.

Доказать, что в категориях множеств и линейных пространств над данным полем определено произведение любого семейства объектов.

55. Доказать, что в категории линейных пространств над данным полем сумма $\coprod\limits_{k=1}^{n} L_k$ и произведение $\prod\limits_{k=1}^{n} L_k$ конечного числа объектов изоморфны.

56. Пусть L_1 и L_2 — два линейных пространства над полем K. Рассмотрим категорию, объектами которой являются билинейные отображения φ: $L_1 \times L_2 \to L$, где L — некоторое линейное пространство (свое для каждого объекта φ). Морфизмом из объекта φ: $L_1 \times L_2 \to L$ в объект ψ: $L_1 \times L_2 \to M$ назовем такое линейное отображение χ: $L_1 \to M$, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, "\chi"] \\ L_1 \times L_2 \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\psi"'] & M \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказать, что построенная таким образом категория обладает универсальным отталкивающим объектом π: $(L_1 \times L_2 \to L_1 \underset{K}{\otimes} L_2$. Линейное пространство $L_1 \otimes L_2$ называется *тензорным произведением* пространств L_1 и L_2 над полем K.

57*. Пусть G_1 и G_2 — конечные абелевы группы. Рассмотрим категорию всех отображений:

$$\varphi\colon\ G_1 \times G_2 \to G,$$

где G — некоторая конечная абелева группа, своя для каждого объекта), которые являются гомоморфизмами по каждому переменному. Морфизмами служат коммутативные диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[d, "\chi"] \\ G_1 \times G_2 \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\varphi'"'] & G_1' \end{tikzcd},$$

где χ — гомоморфизм. Доказать, что в построенной категории существует универсальный объект

$$G_1 \times G_2 \to \operatorname{Tor}(G_1, G_2)$$

(так называемое *произведение кручения* двух групп). Вычислить $\operatorname{Tor}(Ц_m, Ц_n)$, где $Ц_m$ — циклическая группа порядка m.

58.** Пусть заданы направленное множество A и некоторая категория K. Предположим, что для каждого $\alpha \in A$ указаны объект $X_\alpha \in \operatorname{Ob} K$, а для каждой пары $\alpha < \beta$ — морфизм $\varphi_{\alpha\beta} \in \operatorname{Mor}(X_\alpha, X_\beta)$, причем для любой тройки $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X_\beta \arrow[d, "\varphi_{\beta\gamma}"] \\ X_\alpha \arrow[ur, "\varphi_{\alpha\beta}"] \arrow[r, "\varphi_{\alpha\gamma}"'] & X_\gamma \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Рассмотрим категорию K_A, объектами которой являются семейства морфизмов $\{\varphi_\alpha\colon X_\alpha \to X\}_{\alpha \in A}$, согласованные с $\varphi_{\alpha\beta}$, где X — некоторый объект из K (свой для каждого семейства), а морфизмом из $\{\varphi_\alpha\colon X_\alpha \to X\}_{\alpha \in A}$ в $\{\psi_\alpha\colon X_\alpha \to Y\}_{\alpha \in A}$ назовем такой морфизм $\chi \in \mathrm{Mor}(X, Y)$, что для любого $\alpha \in A$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\chi"] \\ X_\alpha \arrow[ur, "\varphi_\alpha"] \arrow[r, "\psi_\alpha"'] & Y \end{tikzcd}$$

коммутативна. Универсальный объект категории K_A (если он существует) называется *индуктивным пределом* семейства $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Двойственное понятие *проективного предела* определяется как универсальный объект в $(K_A)^\circ$.

Доказать, что

а) аддитивная группа поля рациональных чисел является индуктивным пределом счетного семейства групп целых чисел;

б)* кольцо $\mathbf{Z}_p$ целых p-адических чисел является проективным пределом колец вычетов по модулю p^n.

59. Каждое комплексное линейное пространство можно рассматривать как вещественное, а каждое комплексно-линейное отображение — как вещественно-линейное. Доказать, что описанное соответствие является ковариантным функтором из категории $L(\mathbf{C})$ линейных пространств над $\mathbf{C}$ в категорию $L(\mathbf{R})$ линейных пространств над $\mathbf{R}$.

60. Доказать, что отображение $L \to L \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ (тензорное произведение над $\mathbf{R}$ в смысле задачи 54) порождает ковариантный функтор из $L(\mathbf{R})$ в $L(\mathbf{C})$.

61. Доказать, что категории $L(\mathbf{R})$ и $L(\mathbf{C})$ (см. задачу 59) не эквивалентны.

62. Пусть заданы группа G и поле K. Рассмотрим совокупность $K[G]$ формальных линейных комбинаций элементов G с коэффициентами из K. Относительно естественных операций сложения, умножения на элементы K и произведения $K[G]$ является алгеброй над K (K-алгеброй).

Доказать, что

а) соответствие $G \to K[G]$ является ковариантным функтором из категории групп в категорию K-алгебр;

б) $K[G]$ является универсальным объектом в категории мультипликативных отображений группы G в K-алгебры.

63. Сформулировать определение предела направленности $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ в топологическом пространстве.

64. Доказать, что:

а) для метрических пространств X, Y непрерывность отображения $f\colon X \to Y$ равносильна условию $f(\lim x_n) = \lim f(x_n)$ для любой сходящейся последовательности $\{x_n\}$ в X;

б)* для топологических пространств X, Y непрерывность отображения $f\colon X \to Y$ равносильна условию $f(\lim x_\alpha) = \lim f(x_\alpha)$ для любой сходящейся направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ в X;

в)** верно ли утверждение б), если в нем заменить направленности на обычные последовательности?

65. Проверить, что топологические пространства и непрерывные отображения образуют категорию T.

66. Построить функтор из категории M метрических пространств (морфизмы — непрерывные отображения) в категорию T топологических пространств.

67.** Доказать, что в категории T топологических пространств определены сумма и произведение любого семейства объектов.

68. Доказать эквивалентность двух определений замыкания $\overline{M}$ множества M:

а) $\overline{M}$ — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих M;

б) $\overline{M}$ — совокупность пределов всех сходящихся направленностей с элементами из M.

69°. Доказать, что при непрерывном отображении f:

а) образ компактного множества компактен;

б) образ связного множества связен.

70°. *Критерий Хаусдорфа.* Пусть X — метрическое пространство и $A \subset X$: подмножество $S \subset X$ назовем ε-сетью для A, если для любого $a \in A$ существует такой $x \in S$, что $d(a, x) < \varepsilon$.

Доказать, что подмножество A предкомпактно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть для A.

71. Пусть X — метрическое пространство и $A \subset X$. Доказать эквивалентность следующих утверждений:

а) A предкомпактно;

б) из всякой последовательности точек в A можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

72. Пусть X — метрическое пространство и $A \subset X$. Доказать эквивалентность утверждений:

а) A — компакт;

б) из всякой последовательности точек в A можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке из A.

ГЛАВА II

ТЕОРИЯ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛА

§ 1. Теория меры

1. Алгебра множеств.

73°. Доказать, что операция симметрической разности удовлетворяет следующему условию:

$$A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$$

(аналог неравенства треугольника для «расстояния» $d(A, B) = A \triangle B$, принимающего значения в множествах).

74. Доказать, что

а) $(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$;

б) $(A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$;

в) $(A_1 \setminus A_2) \triangle (B_1 \setminus B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$.

(Эти включения означают непрерывность операций объединения, пересечения и дополнения относительно «расстояния» $d(A, B)$, введенного в п. 2 § 1 гл. II).

75°. Показать, что система множеств, замкнутая относительно операций объединения и пересечения, вообще говоря, не является кольцом.

76. Доказать, что система множеств, замкнутая относительно операций объединения и разности, является кольцом.

77°. Доказать, что множество всех отрезков (открытых, замкнутых и полуоткрытых) на прямой является полукольцом, но не кольцом.

78. Показать, что для любой непустой системы множеств S существует одно и только одно *минимальное кольцо* $R(S)$, т. е. такое кольцо множеств $R(S)$, что $S \subset$

$\subset R(S)$ и $R(S)\subset R$ для любого кольца R, содержащего S.

79. Доказать, что для полукольца S минимальное кольцо совпадает с системой множеств вида $A=\coprod\limits_{k=1}^{n} A_k$ $(A_k \in S)$.

80°. Доказать, что любая σ-алгебра является δ-алгеброй и, наоборот, любая δ-алгебра является σ-алгеброй.

81. а) Доказать, что прямое произведение полуколец является полукольцом.

б) Показать, что прямое произведение колец может не быть кольцом.

82. *Верхним пределом последовательности множеств* E_n называется множество $\overline{\lim\limits_n} E_n = \bigcap\limits_n \left(\bigcup\limits_{k\geqslant n} E_k\right)$, т. е. совокупность точек, принадлежащих бесконечному числу из множеств E_n. *Нижним пределом последовательности множеств* E_n называется множество $\underline{\lim\limits_n} E_n = \bigcup\limits_n \left(\bigcap\limits_{k\geqslant n} E_k\right)$. Доказать, что для любой последовательности множеств E_n $\underline{\lim\limits_n} E_n \subseteq \overline{\lim\limits_n} E_n$. Если верхний и нижний пределы равны, то их общее значение называется *пределом последовательности множеств* E_n.

83. Привести пример последовательности множеств E_n, для которой $\underline{\lim\limits_n} E_n \neq \overline{\lim\limits_n} E_n$.

84. Пусть X — множество и $\{E_n\}$ — последовательность множеств таких, что $E_n \subset X$ для любого n. Доказать формулу

$$X\setminus \overline{\lim_n} E_n = \underline{\lim_n}\,(X\setminus E_n).$$

85. Пусть $\{E_n\}$ — последовательность множеств и $\{\chi_n\}$ — последовательность их характеристических функций. Доказать, что характеристической функцией множества $\overline{\lim\limits_n} E_n$ является функция $\overline{\lim\limits_n} \chi_n$, а характеристической функцией множества $\underline{\lim\limits_n} E_n$ — функция $\underline{\lim\limits_n} \chi_n$.

86. Доказать, что предел последовательности множеств E_n существует тогда и только тогда, когда существует предел характеристических функций множеств E_n.

87. Пусть A — некоторая система множеств и $\widetilde{A}$ — совокупность характеристических функций множеств, принадлежащих A. Доказать, что A является кольцом множеств тогда и только тогда, когда $\tilde{A}$ есть алгебраическое кольцо относительно сложения и умножения по модулю 2.

88*. *Борелевскими множествами* на прямой называются множества, получающиеся из интервалов применением счетного числа операций объединения, пересечения и разности. Доказать, что совокупность борелевских множеств имеет мощность континуума.

89. а) Пусть $f: A \to B$ — отображение множеств, $\mathscr{A}$ — система подмножеств множества A, $\mathscr{B}$ — система подмножеств множества B. Положим

$$f(\mathscr{A}) = \{f(X) \subset \mathscr{B}\colon X \in \mathscr{A}\},$$
$$f^{-1}(\mathscr{B}) = \{f^{-1}(Y) \in \mathscr{A}\colon Y \in \mathscr{B}\}.$$

Доказать, что если $\mathscr{B}$ — кольцо, то $f^{-1}(\mathscr{B})$ — также кольцо.

б) Показать, что $f(\mathscr{A})$, вообще говоря, не обязано являться кольцом, если $\mathscr{A}$ — кольцо.

в) Доказать, что если $\mathscr{B}$ — σ-алгебра, то $f^{-1}(\mathscr{B})$ — также σ-алгебра.

г) В обозначениях задачи 89 доказать равенство $R(f^{-1}(\mathscr{B})) = f^{-1}(R(\mathscr{B}))$.

2. Продолжение меры.

90. Пусть X — пространство с конечной σ-аддитивной мерой μ, определенной на некоторой алгебре $R \subset P(X)$. *Внутренней мерой* множества $A \subset X$ называется число $\mu_*(A) = \mu(X) - \mu^*(X \setminus A)$, где μ^* — внешняя мера множества A. Доказать, что

$$\mu^*(A) \geqslant \mu_*(A).$$

91*. В обозначениях задачи 90 доказать, что множество $A \subset X$ измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда

$$\mu_*(A) = \mu^*(A).$$

92*. Доказать, что мощность множества измеримых по Лебегу подмножеств отрезка $[0, 1]$ больше мощности континуума.

93*. Обозначим через μ меру Лебега на отрезке $[0, 1]$ и введем на пространстве измеримых по Лебегу подмножеств отрезка $[0, 1]$ отношение эквивалентности, положив $A \sim B$, если $\mu(A \triangle B) = 0$. Доказать, что множество классов эквивалентности имеет мощность континуума.

94*. Пусть μ — мера на S. Доказать, что следующие условия эквивалентны, если S — кольцо, и могут быть не эквивалентны, если S — полукольцо:

а) *счетная аддитивность* $\mu\left(\coprod_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$;

б) *полунепрерывность сверху*: если $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ и $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, то $\mu(A) = \lim \mu(A_k)$;

в) *полунепрерывность снизу*: если $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ и $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, то $\mu(A) = \lim \mu(A_k)$;

г) *непрерывность*: $\mu\left(\lim_{n\to\infty} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_k)$.

95. Пусть μ — счетно-аддитивная мера на полукольце $S \subset P(X)$, μ^* — соответствующая внешняя мера на $P(X)$.

а) Доказать, что отношение $\mu^*(A \triangle B) = 0$ является отношением эквивалентности и что функция $d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu^*(A \triangle B)$ задает расстояние на соответствующем фактормножестве $\mathscr{M}$. (Здесь $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — классы эквивалентности, содержащие множества A и B.)

б)* Доказать, что метрическое пространство $\mathscr{M}$ полно.

в) Обозначим через R и L подпространства в $\mathscr{M}$, состоящие из классов элементарных (т. е. принадлежащих $R(S)$) и измеримых множеств соответственно. Докажите, что L совпадает с замыканием R. (См. п. 2 § 1 гл. II.)

96. Пусть S — подкольцо интервалов вида $[a, b)$ на отрезке $[0, 1]$, $\mathscr{M}$ — пространство, построенное в задаче 95. Доказать, что $\mathscr{M}$ связно и некомпактно.

97. Пусть $\{E_n\}$ — последовательность измеримых по Лебегу множеств на прямой. Являются ли измеримыми множествами верхний и нижний пределы последовательности $\{E_n\}$?

98. Пусть A_n — последовательность измеримых множеств и $\sum \mu(A_n) < \infty$. Доказать, что $\mu(\overline{\lim}\, A_n) = 0$.

99. а) Доказать, что борелевские множества измеримы по Лебегу.

б) Доказать, что всякое измеримое по Лебегу множество на прямой есть объединение борелевского множества и множества меры нуль.

100. Пусть X — единичный квадрат на плоскости и S — полукольцо прямоугольников, принадлежащих X, вида

$$T_{ab} = \{a \leqslant x < b,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

Положим $m(T_{ab}) = b - a$. Описать явный вид лебеговского продолжения этой меры.

101. В условиях и обозначениях задачи 100 доказать, что множество $\tilde{T} = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ y = 1/2\}$ неизмеримо, и найти его внешнюю меру.

102*. Пусть мера μ задана на полукольце X с единицей и μ^* — отвечающая ей внешняя мера. Множество $A \subset X$ называется *измеримым по Каратеодори*, если для любого подмножества $Z \subset X$ имеет место равенство

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \backslash A).$$

Доказать, что множество A измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда оно измеримо по Каратеодори.

103.** Пусть m — исходная σ-аддитивная мера, определенная на полукольце. Множество A называется *множеством σ-однозначности* для меры m, если

1) существует σ-аддитивное продолжение λ меры m, определенное на A;

2) для всяких двух таких σ-аддитивных продолжений λ_1 и λ_2 справедливо равенство

$$\lambda_1(A) = \lambda_2(A).$$

а) Доказать, что каждое множество A, измеримое по Лебегу, является множеством σ-однозначности для исходной меры m.

б) Доказать, что система множеств, измеримых по Лебегу, исчерпывает всю систему множеств σ-однозначности для исходной меры m.

104*. Пусть каждое из множеств X_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ состоит из цифр 0, 1, 2, ..., 9. Определим меру μ_n на X_n, полагая $\mu_n(Y) = \frac{1}{10} \operatorname{card} Y$. Пусть μ — мера на $X = \prod X_n$, являющаяся произведением мер μ_n. Рассмотрим отображение X в отрезок $[0, 1]$: $\{x_n\} \mapsto 0,\ x_1 x_2 x_3 \ldots$ (бесконечная десятичная дробь). Доказать, что при этом отображении мера μ переходит в обычную меру Лебега на $[0, 1]$.

3. Конструкции мер.

105*. Построить пример неизмеримого по Лебегу множества на прямой.

106*. Построить пример измеримого по Лебегу множества на плоскости, проекции которого на координатные оси неизмеримы.

107.** Пусть μ — мера Лебега, X — измеримое подмножество отрезка $[0, 1]$. Точка $x \in X$ называется *точкой* *плотности множества* X, если

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mu\{X \cap (x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)\}}{2\varepsilon} = 1.$$

Доказать, что почти все точки множества X есть точки плотности.

108. Описать все подмножества E отрезка $[0,\ 1]$ такие, что их характеристические функции $\chi_E(x)$ интегрируемы по Риману.

109°. а) Пусть X — пространство с σ-аддитивной мерой. Доказать, что подмножества нулевой меры в X образуют σ-кольцо.

б) Доказать, что счетные множества на прямой имеют лебеговскую меру нуль. Привести пример несчетного множества на прямой, имеющего лебеговскую меру нуль.

110. Доказать, что множество всех зарядов на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ является линейным пространством, полным относительно расстояния $d(\nu_1,\ \nu_2) = \sup\limits_{A\in\mathfrak{A}} |\nu_1(A) - \nu_2(A)|$.

111*. Для любого подмножества M пространства $\mathbf{R}^n$ обозначим через $M - M$ множество

$$M - M = \{x - y\colon\ x \in M,\ y \in M\}.$$

Доказать, что если M измеримо и имеет положительную лебеговскую меру, то множество $M - M$ содержит окрестность нуля в $\mathbf{R}^n$.

112°. Пусть $X = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots\}$ — счетное множество и каждому его элементу x_i поставлено в соответствие число $p_i \geqslant 0$ так, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n = 1$. Положим для любого подмножества $A \subset X$ $m(A) = \sum\limits_{n\in N_A} p_n$, где $N_A = \{i\colon\ x_i \in A\}$.

Доказать, что m есть σ-аддитивная мера на алгебре всех подмножеств множества X.

113*. Привести пример конечно-аддитивной, но не σ-аддитивной меры.

114*. Вычислить меру Винера множества функций $f \in C[a,\ b]$, обладающих свойствами: $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.

115. Определим меру μ на $[0,\ 1]$ формулой $\mu([\alpha,\ \beta)) = \log_2 \dfrac{1+\beta}{1+\alpha}$.

Доказать, что эта мера сохраняется при преобразовании $f\colon x \mapsto \left\{\dfrac{1}{x}\right\}$, где $\{\,\cdot\,\}$ означает дробную часть числа.

(То есть $\mu(f^{-1}(A))=\mu(A)$. Не утверждается, $\mu(f(A))=\mu(A)$.)

116. Каждое действительное число $x\in[0,\ 1]$ мо разложить в непрерывную дробь $x=\cfrac{1}{n_1+\cfrac{1}{n_2+\ldots}}$ (ра нальным числам соответствуют конечные дроби, ирра нальным — бесконечные).

а) Доказать, что преобразование задачи 115 в тер нах последовательностей $\{n_k\}$ имеет вид $\{n_k\}\mapsto\{n_{k+1}\}$.

б) Вычислить меру простейших цилиндрических м жеств в пространстве последовательностей, соответст щую мере μ задачи 115.

117. Докажите, что условие абсолютной сходим ряда $\sum\nu(A_n)$ в определении заряда можно заменить ловием простой сходимости (см. с. 30).

118. Вычислить вариацию комплексного заряда $=\mu_1+i\mu_2$ на множестве A, если а) известно, что м μ_1 и μ_2 дизъюнктны на A; б) $\mu_1=\mu_2$ на A.

119. Пусть ν — комплексный заряд на σ-алгебре $\subset P(X)$.

Доказать, что вещественная и мнимая части ν я ются зарядами на $\mathfrak{A}$.

120*. Пусть ν — заряд на σ-алгебре $\mathfrak{A}\subset P(X)$. До зать, что $\sup\limits_{A\in\mathfrak{A}}\nu(A)<+\infty$, $\inf\limits_{A\in\mathfrak{A}}\nu(A)>-\infty$.

121*. Доказать, что верхняя и нижняя грани, о торых идет речь в задаче 120, достигаются на некото множествах A_+ и A_- из $\mathfrak{A}$.

122*. В обозначениях задачи 120, 121 доказать, функция ν (соотв. $-\nu$) является σ-аддитивной мерой $\mathfrak{A}\cap P(A_+)$ (соотв. на $\mathfrak{A}\cap P(A_-)$).

123*. В обозначениях задач 120, 121 доказать, что всякого $A\in\mathfrak{A}$ справедливо равенство $\nu(A)=\nu(A\cap A_+)+\nu(A\cap A_-)$.

124*. Доказать, что вариация $|\nu|$ заряда ν коне и σ-аддитивна.

§ 2. Измеримые функции

1. Свойства измеримых функций.

125. Пусть X — пространство с мерой и f — веще веннозначная функция, определенная на множестве Доказать, что следующие свойства функции f экви лентны:

а)° для любого $a \in \mathbf{R}$ множество $\{x \in X\colon f(x) > a\}$ измеримо;

б)° для любого $a \in \mathbf{R}$ множество $\{x \in X\colon f(x) \geqslant a\}$ измеримо;

в)° для любого $a \in \mathbf{R}$ множество $\{x \in X\colon f(x) < a\}$ измеримо;

г)° для любого $a \in \mathbf{R}$ множество $\{x \in X\colon f(x) \leqslant a\}$ измеримо;

д) для любого борелевского множества $B \subset \mathbf{R}$ множество $f^{-1}(B)$ измеримо.

126. Пусть функция f измерима и не обращается в нуль. Доказать, что функция $1/f$ измерима.

127. Доказать, что $|f|$ — измеримая функция, если f измерима.

128. Пусть $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — непрерывная вещественнозначная функция, определенная на n-мерном вещественном пространстве, а $g_1(x) \ldots . g_n(x)$ — измеримые функции. Доказать, что функция $h(x) = f(g_1(x) \ldots g_n(x))$ измерима.

129. Пусть $g(x)$ — измеримая функция, определенная на вещественной прямой, а f — непрерывная вещественная функция. Показать, что функция $h(x) = g(f(x))$, вообще говоря, неизмерима.

130. Пусть $f(x)$ — функция, всюду дифференцируемая на отрезке $[0, 1]$. Доказать, что $f'(x)$ измерима по Лебегу.

131*. Пусть $f(x)$ — канторово взаимно-однозначное отображение отрезка $[0, 1]$ на квадрат: для двоично-иррационального $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) f(x) = (y_1, y_2)$, $y_1 = (x_1, x_3, \ldots)$; $y_2 = (x_2, x_4, \ldots)$. Доказать, что отображение $f(x)$ переводит любое измеримое подмножество отрезка в измеримое подмножество квадрата и сохраняет значение меры.

132*. Функция $f(x)$, определенная на вещественной прямой, называется *борелевской*, если для любого $a \in \mathbf{R}$ множество $\{x \in R\colon f(x) < a\}$ — борелевское. Доказать, что любая измеримая функция после «исправления» на множестве меры нуль становится борелевской.

133.** *С-свойство Лузина.* Пусть μ — мера Лебега на отрезке $[0, 1]$, а f — измеримая, почти всюду конечная функция на этом отрезке. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $F \subset [0, 1]$ такое, что ограничение функции f на множество F непрерывно и $\mu(F) > 1 - \varepsilon$.

134*. Пусть f — измеримая функция, определенная на вещественной прямой. Точка $x \in \mathbf{R}$ называется *точкой*

Лебега функции f, если существует измеримое по Лебегу подмножество $X \subset \mathbf{R}$, содержащее x и имеющее x своей точкой плотности. При этом ограничение $f|_X$ непрерывно в точке x. Доказать, что почти все точки прямой есть точки Лебега для функции f.

135*. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, определенная на отрезке $[a, b]$, и $n(c)$ — число решений уравнения $f(x)=c$. Доказать, что функция $n(c)$ измерима по Лебегу.

136°. Пусть $f_n(x)$ — последовательность измеримых функций. Доказать, что функции $\sup\limits_n f_n(x)$ и $\inf\limits_n f_n(x)$ измеримы.

137. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность измеримых функций. Доказать, что множество тех точек x, где существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, измеримо.

138°. Пусть f — измеримая функция. Доказать, что ее положительная часть $f^+ = \max(f, 0)$ и ее отрицательная часть $f^- = -\min(f, 0)$ — измеримые функции.

139. Вещественные функции f и g, измеримые соответственно относительно мер μ и ν, называются *равноизмеримыми*, если для любого $c>0$ $\mu\{x\colon f(x)<c\} = \nu\{y\colon g(y)<c\}$.

а) Доказать, что если f — функция, измеримая относительно меры μ, то существует непрерывная слева на отрезке $[0, \mu(X)]$ неубывающая функция g, равноизмеримая с f.

б) Доказать единственность функции $g(x)$.

140. Комплекснозначная функция $f(x) = u(x) + iv(x)$ называется измеримой, если измеримы ее вещественная часть $u(x)$ и ее мнимая часть $v(x)$. Доказать измеримость модуля и аргумента $f(x)$.

141. Доказать, что для измеримости комплекснозначной функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы были измеримы все множества вида $A_{r,z} = \{x\colon |f(x)-z| \leqslant r\}$, где $z \in \mathbf{C}$, $r \geqslant 0$.

142. Вектор-функция f со значениями в конечномерном пространстве V называется *измеримой*, если измеримы координаты вектора $f(x)$ относительно некоторого базиса в V. Доказать, что это определение не зависит от выбора базиса.

2. Сходимость измеримых функций.

143°. Доказать, что последовательность $f_n(x) = \dfrac{nx}{n^2+x^2}$ всюду на $\mathbf{R}$ сходится к нулю, но не равномерно.

144. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $f_n(x)=x^n$ на отрезке $[0, 1]$.

145°. Доказать, что две непрерывные функции на отрезке эквивалентны относительно меры Лебега только тогда, когда они тождественно равны.

146*. Построить измеримую по Лебегу функцию на отрезке, не эквивалентную никакой непрерывной функции.

147°. Известно, что $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$ и $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} g$. Доказать, что f эквивалентна g.

148*. Занумеруем все рациональные числа отрезка $[0, 1]$ и запишем k-е число r_k в виде несократимой дроби $r_k = p_k/q_k$. Положим $f_k(x) = \exp\{-(p_k - xq_k)^2\}$.

а) Доказать, что $f_k \to 0$ по мере Лебега на $[0, 1]$ и что $\lim\limits_{n\to\infty} f_k(x)$ не существует ни в одной точке отрезка.

б) Указать явно подпоследовательность, сходящуюся к нулю почти всюду.

149. Определим функции $f_i^{(k)}$ на отрезке $[0, 1]$, полагая

$$f_i^{(k)}(x) =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{при } \dfrac{i-1}{k} \leqslant x < \dfrac{i}{k}, \quad i = 1, 2, \ldots, k; \quad k = 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{в остальных точках,} \end{cases}$$

и пусть $g_n(x) = f_i^{(k)}(x)$, где i и k подбираются из условия $n = \dfrac{k(k-1)}{2} + i$. Доказать, что $g_n \to 0$ по мере, но $\lim g_n(x)$ не существует ни в одной точке.

150. Пусть $f_n \xrightarrow{\mu} h$ и $f_n \xrightarrow{\mu} g$. Доказать, что h и g эквивалентны по мере μ.

151.** *Теорема Лузина.* Доказать, что вещественная функция на отрезке $[a, b]$ измерима по мере Лебега тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная функция, отличающаяся от f на множестве меры меньше ε.

152.** Из теоремы Лузина (задача 151) вытекает, что всякая измеримая на отрезке $[a, b]$ функция f является почти всюду пределом последовательности $\{f_n\}$ непрерывных функций. Всегда ли можно эту последовательность выбрать монотонной?

153. а) Показать, что *функция Дирихле*

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \text{ иррационально}, \\ 1, & \text{если} \quad x \text{ рационально}, \end{cases}$$

может быть получена из непрерывных функций двукратным предельным переходом:

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} [\cos(2\pi n!\, x)]^m.$$

б)* Можно ли получить ее из непрерывных функций одним предельным переходом?

154°. Доказать, что простая функция (т. е. функция, принимающая не более счетного множества значений) измерима тогда и только тогда, когда измеримы все ее *множества уровня*

$$L_c(f) = \{x \in X\colon f(x) = c\}.$$

Верно ли это для произвольных функций?

155. Доказать, что каждая измеримая функция может быть представлена в виде равномерного предела измеримых простых функций.

156. Определим функцию $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$ следующим образом. Если $x = 0,\ n_1 n_2 n_3 \ldots$ — десятичная запись числа x, то $f(x) = \max\limits_i n_i$.

а) Доказать, что $f(x)$ измерима и почти всюду постоянна.

б) Доказать, что функция $f(x) = \varlimsup\limits_{i\to\infty} n_i$ определена всюду и почти всюду постоянна.

157. Пусть μ — мера Винера на пространстве $X = C[a, b]$. Определим функцию f на X, полагая $f(x) = \int\limits_a^b x(t)\,dt$.

Доказать, что f μ-измерима.

158*. Доказать измеримость относительно меры Винера следующих функций:

а) $f(x) = \int\limits_a^b \varphi(x(t), t)\,dt$, где $\varphi(x, y)$ — непрерывная функция двух переменных;

б) $f(x) = \max\limits_{t\in[a,b]} x(t)$.

159*. Пусть X — множество целых p-адических чисел, S — алгебра подмножеств X, которые одновременно открыты и замкнуты в X, $\mathfrak{A} = R_\sigma(S)$. Доказать, что всякая непрерывная функция на X $\mathfrak{A}$-измерима.

160*. В условиях задачи 159 доказать, что всякое множество $A \in S$ является объединением конечного числа шаров. Определим меру μ на S, полагая меру шара равной его радиусу (для шаров радиуса p^{-k} $(k = 0, 1, 2, \ldots)$). Доказать, что мера μ счетно-аддитивна.

161. Доказать, что мера μ из задачи 160 обладает свойствами:

а) $\mu(X) = 1$;

б) $\mu(A + x) = \mu(A)$ для всех $x \in X$.

Доказать, что всякая мера на $\mathfrak{A}$, обладающая свойствами а) и б), совпадает с μ.

§ 3. Интеграл

1. Интеграл Лебега.

162°. Доказать, что если f и g — суммируемые простые функции, то

а) $\int\limits_A (f(x) + g(x))\, d\mu = \int\limits_A f(x)\, d\mu + \int\limits_A g(x)\, d\mu$;

б) $\int\limits_A \alpha f(x)\, d\mu = \alpha \int\limits_A f(x)\, d\mu \qquad (\alpha = \mathrm{const})$;

в) если $|f(x)| \leqslant M$ почти всюду на A и $\mu(A) < \infty$, то

$$\left| \int\limits_A f(x)\, d\mu \right| \leqslant M\mu(A).$$

163. Пусть $\mu(X) < \infty$ и f — суммируемая функция на X. Доказать, что интеграл Лебега $\int\limits_X f(x)\, d\mu$ может быть вычислен по формуле

$$\int\limits_X f(x)\, d\mu = \lim_{\lambda(T) \to 0} \sum_k \xi_k \mu(\{x \in X:\ t_k \leqslant f < t_{k+1}\}), \qquad (1)$$

где $T = \{t_k\}$ — разбиение вещественной оси, $\lambda(T) = \sup\limits_k |t_k - t_{k+1}|$ — диаметр разбиения T, а $\{\xi_k\}$ — любой набор точек, удовлетворяющий условию $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$. Выражение (1) называется *интегральной суммой Лебега*.

164*. Доказать, что утверждение задачи 163 остается верным в случае $\mu(X) = \infty$, если дополнительно потребовать, чтобы $\xi_k=0$ для тех k, для которых отрезок $[t_k, t_{k+1}]$ содержит точку 0.

165. Пусть измеримая простая функция f представлена двумя способами в виде линейных комбинаций характеристических функций дизъюнктных множеств:

$$f(x)=\sum_k c_k\chi_{A_k}(x)=\sum_l d_l\chi_{B_l}(x).$$

Доказать, что $\sum\limits_k c_k\mu(A_k)=\sum\limits_l d_l\mu(B_l)$ в случае, если один из этих рядов абсолютно сходится.

166. Пусть f_n — простая функция на $[0, 1]$, определенная формулой $f_n(x)=\frac{1}{n}[nx]$, где $[x]$ означает целую часть числа x. Доказать, что последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна и не имеет предела в пространстве $S[0, 1]$ простых суммируемых функций с расстоянием $d_1(f, g)=\int\limits_0^1|f-g|\,dx$.

167. При каких значениях параметров α и β функция $f(x)=x^\alpha\sin x^\beta$, определенная на полуинтервале $(0, 1]$,

а) интегрируема по Лебегу,

б) несобственно интегрируема по Риману?

168°. Доказать, что интеграл от неотрицательной суммируемой функции f по множеству A

а) неотрицателен,

б) равен нулю только тогда, когда $f(x)=0$ почти всюду на A.

169. Пусть φ — монотонно возрастающая гладкая функция на отрезке $[a, b]$, ψ — обратная к ней функция на отрезке $[\varphi(a), \varphi(b)]$. Рассматривая интеграл как предел суммы Лебега, доказать тождество

$$\int\limits_a^b\varphi(x)\,dx=\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}y\psi'(y)\,dy.$$

170. Доказать, что интеграл Лебега от неотрицательной функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ совпадает с мерой Лебега множества E на плоскости, заданного неравенствами $a\leqslant x\leqslant b$, $0\leqslant y\leqslant f(x)$.

171. Доказать, что неотрицательная измеримая функция f суммируема на A тогда и только тогда, когда для всех простых функций g, не превосходящих по модулю f, интегралы $\int\limits_A g(x)\,d\mu(x)$ ограничены одной и той же константой.

172. Положим для любой вещественной функции f: $f_+(x)=(f(x)+|f(x)|)/2$, $f_-(x)=(|f(x)|-f(x))/2$. Доказать, что функция f суммируема тогда и только тогда, когда суммируемы функции f_+ и f_-.

173. Доказать, что измеримая неотрицательная функция f суммируема тогда и только тогда, когда $\sup\int\limits_A f(x)\,d\mu(x)<\infty$, где верхняя грань берется по всем множествам A конечной меры, на которых функция f ограничена сверху.

174. Пусть $\mu(X)<\infty$. Доказать, что неотрицательная измеримая функция f на X суммируема тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n\mu\{x\in X:\ f(x)\geqslant 2^n\}.$$

175. Доказать, что неотрицательная ограниченная функция на множестве X бесконечной меры суммируема тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mu\left(\left\{x\in X:\ f(x)>\frac{1}{2^n}\right\}\right).$$

176*. Доказать, что функция на отрезке $[a,\ b]$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда она ограничена и почти всюду непрерывна.

177*. Доказать, что интеграл Лебега от функции

$$f(x_1,\ \ldots,\ x_n)=\exp\{-\sum a_{ij}x_ix_j\}$$

конечен тогда и только тогда, когда симметрическая матрица $A=\|a_{ij}\|$ положительно определена. Доказать, что интеграл в этом случае равен $\det(\pi\cdot A^{-1})^{1/2}$.

178*. Вычислить интеграл по мере Винера на $C[0,\ 1]$ от функции

$$F(x)=\exp\left\{-ax^2(0)-b^2\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt\right\}.$$

179.** Обозначим через $C_0[0,\ 1]$ пространство непрерывных функций $x(t)$ на отрезке $[0,1]$ с дополнительным условием $x(0)=0$. Доказать, что пространство $C[0,\ 1]$

можно так отождествить с произведением $\mathbf{R}\times C_0[0, 1]$, что мера Винера μ перейдет в $\mu_1\times\mu_0$, где μ — обычная мера Лебега на $\mathbf{R}$, а μ_0 — некоторая мера на $C_0[0, 1]$.

180.** Пусть μ_0 — мера, построенная в задаче 179. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_{C_0[0,1]} d\mu_0(x)$;

б) $\displaystyle\int\limits_{C_0[0,1]} \left[\int\limits_0^1 x(t)\,dt\right] d\mu_0(x)$;

в) $\displaystyle\int\limits_{C_0[0,1]} \left[\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt\right] d\mu_0(x)$.

2. Функции ограниченной вариации и интеграл Лебега — Стилтьеса.

181°. Установить следующие свойства полной вариации:

а) для любого постоянного α и функции f ограниченной вариации $\mathrm{Var}_a^b(\alpha f) = |\alpha|\,\mathrm{Var}_a^b(f)$;

б) если f и g — функции ограниченной вариации, то $f+g$ — также функция ограниченной вариации, причем

$$\mathrm{Var}_a^b(f+g)\leqslant \mathrm{Var}_a^b(f)+\mathrm{Var}_a^b(g);$$

в) если $a<b<c$ и f — функция ограниченной вариации на отрезке $[a, c]$, то

$$\mathrm{Var}_a^b(f)+\mathrm{Var}_b^c(f)=\mathrm{Var}_a^c(f);$$

г) если f — монотонная функция, то

$$\mathrm{Var}_a^b(f)=|f(a)-f(b)|.$$

182. Доказать, что множество точек разрыва функции ограниченной вариации на отрезке не более чем счетно и состоит лишь из точек разрывов первого рода.

183. Доказать, что функция ограниченной вариации на отрезке измерима по Лебегу.

184°. Доказать, что функция на отрезке, обладающая ограниченной производной, является функцией ограниченной вариации.

185*. Пусть функция f обладает интегрируемой по Риману производной на отрезке $[a, b]$. Доказать формулу

$$\mathrm{Var}_a^b(f)=\int\limits_a^b |f'(x)|\,dx,$$

186. Пусть Φ — непрерывная слева функция ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$. Доказать, что функция Φ однозначно представляется в виде суммы $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$, где Φ_0 — непрерывная функция ограниченной вариации, а Φ_1 — так называемая *функция скачков*: $\Phi_1(x) = \sum\limits_k c_k \theta(x - a_k)$, где $\{a_k\}$ — любое конечное или счетное подмножество на $[a, b]$, $\theta(x)$ — *функция Хевисайда*, задаваемая формулой $\theta(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 0, \\ 1 \text{ при } x > 0, \end{cases}$ а $\{c_k\}$ — любая числовая последовательность, удовлетворяющая условию $\sum\limits_k |c_k| < \infty$.

187. Доказать, что

а) произведение двух функций ограниченной вариации есть функция ограниченной вариации;

б) если $f(x) \geqslant \alpha > 0$ и f — функция ограниченной вариации, то и вариация функции $1/f$ ограничена.

188. Будет ли функция $\varphi(f)$ иметь ограниченную вариацию на отрезке $[0, 1]$, если функция f имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0, 1]$, а функция φ

а) непрерывна на всей числовой оси,

б) имеет ограниченную вариацию на всей числовой оси?

189. Пусть E — подмножество отрезка $[0, 1]$, χ — характеристическая функция множества E. Доказать, что χ имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда граница E — конечное множество.

190*. Пусть f и g — две непрерывные функции с ограниченной вариацией на отрезке $[a, b]$. Доказать, что множество $\{f(x), g(x)\}$, $x \in [a, b]$, не может заполнить квадрат. Верно ли это, если отказаться от требования ограниченности вариации?

191°. Докажите следующие свойства интеграла Римана — Стилтьеса:

а) если Φ — функция ограниченной вариации, а функция f интегрируема по Φ, то

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\, d\Phi(x) \right| \leqslant \sup |f(x)| \operatorname{Var}_a^b(\Phi);$$

б) если Φ_1 и Φ_2 — функции ограниченной вариации, а функция f интегрируема по Φ_1 и Φ_2, то она интегрируема и по Φ, где $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, и

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi(x) = \int_a^b f(x)\, d\Phi_1(x) + \int_a^b f(x)\, d\Phi_2(x).$$

192. Пусть функция Φ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$ и разрывна в точке $c \in (a, b)$, а функция f интегрируема по Φ в смысле Римана — Стилтьеса. Доказать, что функция f непрерывна в точке c.

193. Доказать, что если Φ — функция ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$, отличная от нуля в конечном или счетном числе точек, лежащих внутри (a, b), то для любой функции f, непрерывной на отрезке $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi(x) = 0.$$

194. Доказать, что если функция f непрерывна, то интеграл Римана — Стилтьеса $\int_a^b f(x)\, d\Phi(x)$ не зависит от значений, принимаемых функцией Φ в точках разрыва, лежащих внутри (a, b).

195. Доказать формулу интегрирования по частям для интеграла Стилтьеса:

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = f(x)\, g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\, df(x).$$

196. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $g(x)$ имеет на $[a, b]$ всюду, кроме конечного числа точек $c_1, \ldots, c_k$, суммируемую по Риману производную $g'(x)$. Доказать, что при этих условиях существует интеграл Римана — Стилтьеса $\int_a^b f\, dg$ и что он выражается формулой

$$\int_a^b f\, dg = \int_a^b f g'\, dx + f(a)\,[g(a+0) - g(a)] +$$

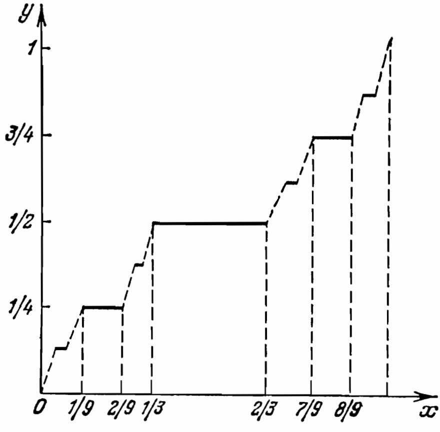
$$+ f(b)\,[g(b) - g(b-0)] + \sum_{m=1}^{k} f(c_m)\,[g(c_m+0) - g(c_m-0)].$$

197°. Пусть μ_φ — мера, порожденная монотонной непрерывной функцией φ. Доказать, что интеграл Лебега

$\int\limits_{[a,b]} x\,d\mu_\varphi$ равен интегралу Стилтьеса $\int\limits_a^b x\,d\varphi(x)$, и вычислить его.

198*. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[0, 1]$. *Индикатрисой Банаха* $N_f(y)$ функции f называется число корней уравнения $f(x) = y$ (если оно бесконечно, то полагаем $N_f(y) = \infty$). Доказать, что $N_f(y)$ — измеримая по Лебегу функция от y и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} N_f(y)\,dy = \mathrm{Var}_0^1(f)$, если хотя бы одна из частей последнего равенства имеет смысл.

199*. Пусть $\varphi(x)$ — *канторова лестница*, т. е. непрерывная монотонная функция на отрезке $[0, 1]$, постоянная на каждом интервале, дополнительном к канторову совершенному множеству, и принимающая на интервалах k-го ранга значения $1/2^k$, $3/2^k$, $5/2^k$, ..., $(2^k - 1)/2^k$.



Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^1 x^k d\varphi(x)$; б) $\int\limits_0^1 e^x\,d\varphi(x)$; в) $\int\limits_0^1 \sin\pi x\,d\varphi(x)$.

3. Свойства интеграла Лебега.

200°. Доказать, что множество $L_1(X, \mu)$ является метрическим пространством относительно расстояния

$$\rho(f, g) = \int\limits_X |f - g|\,d\mu.$$

201°. Пусть последовательность $f_n \in L_1(X, \mu)$ сходится равномерно к функции $f(x)$. Доказать, что если $\mu(X) < \infty$, то $f_n \to f$ в пространстве $L_1(X, \mu)$. Верно ли это в случае $\mu(X) = \infty$?

202. Построить последовательность функций $f_n \in L_1[0, 1]$, обладающую свойствами:

а) $f_n(x) \to 0$ для всех $x \in [0, 1]$;

б) $\int\limits_0^1 |f_n(x)|\,dx \geqslant c > 0$ для всех n;

в) последовательность $\{f_n\}$ не имеет предела в $L_1[0, 1]$.

203. Пусть X — множество конечной меры μ. Для любых измеримых функций f и g положим

$$d(f, g) = \int\limits_X \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|}\,d\mu(x).$$

а) Доказать, что функция d обладает всеми свойствами расстояния, кроме отделимости, и что соответствующее метрическое пространство $M[0, 1]$ состоит из классов эквивалентных функций.

б) Доказать, что сходимость в пространстве $M[0, 1]$ совпадает со сходимостью по мере и что пространство $M[0, 1]$ полно по метрике $d(f, g)$.

в) Доказать, что функция

$$d_1(f, g) = \int\limits_X \operatorname{arctg}|f(x) - g(x)|\,d\mu(x)$$

определяет метрику в пространстве $M[0, 1]$ и что сходимость по этой метрике совпадает со сходимостью по мере.

204. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность неотрицательных суммируемых функций, сходящаяся почти всюду к суммируемой функции f. Доказать, что если при $n \to \infty$ $\int\limits_X f_n\,d\mu \to \int\limits_X f\,d\mu$, то $f_n \to f$ в смысле сходимости в пространстве $L_1(X, \mu)$.

205*. Пусть $f \in L_1(X, \mu)$ и $\mu(X) = 1$. Доказать, что существует такая монотонная функция $g(t) \in L_1[0, 1]$, что для любого $t \in [0, 1]$

$$\inf_{\mu(A)=t} \int\limits_A f(x)\,d\mu(x) = \int\limits_0^t g(\tau)\,d\tau,$$

$$\sup_{\mu(A)=t} \int\limits_A f(x)\,d\mu(x) = \int\limits_{1-t}^1 g(\tau)\,d\tau,$$

206.** Пусть μ — ненулевая борелевская мера на множестве вещественных чисел, обладающая следующим свойством: для любого $t \in \mathbf{R}$ мера μ_t, определенная формулой $\mu_t(A) = \mu(A+t)$, эквивалентна мере μ. (Такие меры называют *квазиинвариантными относительно сдвигов.*) Доказать, что мера μ эквивалентна мере Лебега.

207*. Пусть μ — мера на X и f_1, f_2 — две μ-суммируемые вещественные функции на X. Определим заряды $\nu_i = f_i\mu$ формулой $\nu_i(A) = \int\limits_A f_i\, d\mu$ $(i = 1, 2)$. Доказать, что ν_1 и ν_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда $\mu(N_1 \triangle N_2) = 0$, где $N_i = \{x \in X\colon f_i(x) \neq 0\}$.

208*. Пусть μ — σ-конечная мера на X, ν — мера, определенная на той же σ-алгебре и абсолютно непрерывная относительно μ (т. е. $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$). Доказать, что существует неотрицательная μ-измеримая функция ρ, обладающая свойством $\nu(A) = \int\limits_A \rho(x)\, d\mu(x)$ для любого измеримого множества A (обе части равенства могут одновременно принимать значение $+\infty$).

209*. Доказать, что на вещественной прямой $\mathbf{R}$ не существует измеримого по Лебегу множества A, обладающего свойством: для любого интервала Δ

$$\mu(A \cap \Delta) = \frac{1}{2}\mu(\Delta).$$

210.** Пусть $f \in L_1[a, b]$. Доказать, что функция $F(x) = \int\limits_a^x f(x)\, d\mu(x)$ почти всюду дифференцируема и $F'(x) = f(x)$ для почти всех $x \in [a, b]$.

211.** Вещественная функция F на отрезке $[a, b]$ называется *абсолютно непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого семейства интервалов $\{\Delta_i\}$, $\Delta_i = (a_i, b_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ с суммой длин $< \delta$ справедлива оценка $\sum\limits_{i=1}^{n} |F(a_i) - F(b_i)| < \varepsilon$. Доказать, что

а) абсолютно непрерывная функция F почти всюду дифференцируема;

б) производная $f(x) = F'(x)$ суммируема на отрезке $[a, b]$;

в) справедлива формула Ньютона — Лейбница

$$F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)\, d\mu(x).$$

212°. Доказать, что следующие множества плотны в пространстве $L_1[0, 1]$:

а) множество $S(0, 1)$ кусочно-постоянных функций с конечным числом точек разрыва;

б) множество непрерывных кусочно-линейных функций с конечным числом точек излома;

в) множество многочленов $P(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$;

г) множество тригонометрических многочленов

$$T(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{2\pi i k x}.$$

213. Доказать, что в пространстве $L_1(\mathbf{R})$ плотны следующие множества:

а) кусочно-постоянных финитных функций;

б) непрерывных финитных функций;

в)* множество функций вида $P(x)e^{-x^2}$, где P — многочлен.

214. Пусть $f \in L_1(\mathbf{R})$. Доказать, что $\int\limits_{\mathbf{R}} |f(x+\varepsilon) - f(x)|\,dx \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Другими словами, сдвиг является непрерывной операцией в $L_1(\mathbf{R})$.

215. *Сверткой* функций f_1 и f_2 на прямой называется функция f, задаваемая формулой

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(x-t)\,dt.$$

а) Доказать, что если f_1 и f_2 принадлежат $L_1(\mathbf{R})$, то подынтегральная функция суммируема для почти всех x и свертка f также принадлежит пространству $L_1(\mathbf{R})$.

б) Доказать, что если одна из функций f_1 или f_2 ограничена, то свертка f непрерывна.

ГЛАВА III

ЛИНЕЙНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. Нормированные пространства

1. Основные определения.

216. Два числа p и q из $[1, \infty)$ называются *сопряженными*, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

1) $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$;

2) $(p-1)(q-1)=1$;

3) $p+q=pq$.

а) Доказать *неравенство Гельдера*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \|x\|_p \cdot \|y\|_q,$$

где $x, y \in K^n$, а p и q — сопряженные числа ($K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$).

б) Выяснить, когда это неравенство превращается в равенство.

217. Доказать *неравенство Минковского*

$$\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

для $x, y \in K^n$, $p \in [1, \infty)$.

218. Доказать полноту пространств $l_p(n, K)$ и $l_p(K)$ при $p \in [1, \infty)$.

219. Доказать полноту пространства $C(X, K)$.

220. Доказать, что при $1 \leqslant p < \infty$, $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, $l_p(K)$ является сепарабельным банаховым пространством.

221. Доказать, что пространство $l_\infty(K)$ всех ограниченных последовательностей $\{x_n\}$, $x_n \in K$, $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, с нормой $\|\{x_n\}\| = \sup\limits_n |x_n|$ — несепарабельное банахово пространство.

222. Доказать, что нормированное пространство L является банаховым тогда и только тогда, когда всякий ряд $\sum x_i$, для которого $\sum \|x_i\| < \infty$, сходится в L.

223°. Доказать, что нормированное пространство L несепарабельно тогда и только тогда, когда в нем есть несчетное множество попарно непересекающихся шаров радиуса единица.

224. Доказать, что в нормированном пространстве достигается расстояние от данной точки до произвольного конечномерного подпространства.

225*. Найти расстояние от точки $x^n \in C[-1, 1]$ до подпространства $P_{n-1} \subset C[-1, 1]$, состоящего из всех многочленов степени $<n$.

226. а) Пусть L — банахово пространство и $L_0 \subset L$ — его замкнутое подпространство. Вектор $x \in L$ называется *ε-перпендикуляром* к L_0, если для любого $y \in L_0$ выполняется неравенство $\|x+y\| \geqslant (1-\varepsilon)\|x\|$. Доказать, что при $\varepsilon > 0$ любое собственное подпространство L_0 обладает ε-перпендикуляром.

б) Вывести отсюда некомпактность единичного шара в бесконечномерном банаховом пространстве.

в) Доказать, что существование нуль-перпендикуляра к подпространству L_0, задаваемому уравнением $f(x)=0$, где f — линейный функционал на L, равносильно существованию $\max\limits_{\|x\|\leqslant 1}|f(x)|$.

227. Доказать, что при $p_1<p_2$ пространство $l_{p_1}(n, \mathbf{R})$ изометрично пространству $l_{p_2}(n, \mathbf{R})$, только если $n=2$, $p_1=1$, $p_2=\infty$.

2. Сопряженные пространства.

228. Доказать, что если L — бесконечномерное нормированное пространство, то на нем существует разрывный линейный функционал.

229. Доказать, что норма функционала $f\in L'$ обратна к расстоянию в L от нуля до гиперплоскости $f(x)=1$.

230°. Доказать, что любое конечномерное линейное нормированное пространство рефлексивно.

231*. Доказать, что замкнутое подпространство рефлексивного пространства рефлексивно.

232. Доказать, что пространство c_0 всех последовательностей вещественных чисел, стремящихся к нулю с нормой $p(\{x_n\})=\max|x_n|$, нерефлексивно.

233°. Пусть L — бесконечномерное нормированное пространство. Доказать, что слабая топология в L не совпадает с сильной.

234. Пусть $L=l_1(\mathbf{R})$ — пространство последовательностей вещественных чисел с нормой $p_1(\{x_n\})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|$. Доказать, что слабая сходимость в L совпадает с сильной.

235. Гиперплоскость P называется *опорной* для выпуклого множества K, если имеет с ним общую точку и все K расположено по одну сторону от P. Доказать, что множество опорных плоскостей к единичному шару в L естественно нумеруется точками единичной сферы в L'.

236. Пусть в нормированном пространстве L единичный шар B является выпуклым многогранником. Построить естественное соответствие между k-мерными гранями B и $(n-k)$-мерными гранями единичного шара B' в L'.

237. Пусть c — пространство всех вещественных последовательностей $\{x_n\}$, для которых существует предел $\lim x_n$ с нормой $\|\{x_n\}\|=\sup|x_n|$, и c_0 — подпространство последовательностей, стремящихся к нулю. Доказать, что пространства c' и c_0' изоморфны пространству $l_1(\mathbf{R})$, а пространства c и c_0 неизоморфны друг другу.

238. Доказать изоморфизмы $l_p(K)' = l_q(K)$, где $p \in [1, \infty)$, $q = p/(p-1)$, $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$.

239. Доказать, что $l_\infty(K)'$ неизоморфно $l_1(K)$, $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$.

240. Пусть L_1 и L_2 — нормированные пространства, элементы которых записываются в виде векторов-столбцов длины n_1 и n_2 соответственно. Оператор $A \in \mathscr{L}(L_1, L_2)$ можно тогда записать в виде матрицы из n_1 столбцов и n_2 строк, так что действие A на $x \in L_1$ состоит в умножении слева A на x_1 согласно правилам матричного умножения. Показать, что пространства L_1' и L_2' можно отождествить с пространствами векторов-строк длины n_1 и n_2 соответственно, так что действие сопряженного оператора A' будет состоять в умножении справа на матрицу A.

241. Пусть линейный функционал определен на вещественном линейном нормированном пространстве и не ограничен. Доказать, что в любой окрестности нуля он принимает все вещественные значения.

242. Доказать, что линейный функционал в линейном нормированном пространстве непрерывен тогда и только тогда, когда его ядро замкнуто.

243. Доказать, что два непрерывных линейных функционала, определенные на одном и том же линейном нормированном пространстве и имеющие общее ядро, пропорциональны.

244. Доказать, что всякая гиперплоскость в линейном нормированном пространстве или замкнута, или всюду плотна в нем.

3. Операторы в нормированных пространствах.

245. Пусть банахово пространство L разложено в алгебраическую прямую сумму подпространств L_1 и L_2. Доказать, что оператор проектирования на L_1 параллельно L_2 ограничен тогда и только тогда, когда L_1 и L_2 замкнуты в L.

246. Доказать, что оператор P в банаховом пространстве L является проектором на некоторое замкнутое подпространство L_1 параллельно замкнутому подпространству L_2 тогда и только тогда, когда он ограничен и удовлетворяет соотношению $P^2 = P$.

247*. Для каких функций $a(x)$ оператор умножения на $a(x)$ является непрерывным оператором из $L_p[0, 1]$ в $L_q[0, 1]$?

248. Пусть $A(t)$ — дифференцируемая операторная функция на R, значения которой принадлежит $\operatorname{End} L$ и $\dim L < \infty$. Доказать, что все решения дифференциального уравнения $A'(t) = CA(t)$, где $C \in \operatorname{End} L$, имеют вид $A(t) = e^{tC}A_0$, где $A_0 \in \operatorname{End} L$, а $e^{tC} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k C^k}{k!}$.

249. Пусть $A(t)$ — непрерывная операторная функция на $\mathbf{R}$ со значениями в $\operatorname{End} L$, $\dim L < \infty$. Доказать, что все решения функционального уравнения $A(t)A(s) = A(t+s)$ имеют вид $A(t) = e^{tC}$, где $C \in \operatorname{End} L$.

250. Показать, что утверждение 249 перестает быть верным в случае $\dim L = \infty$. (Ср. теорему Стоуна из гл. V.)

251. Пусть $K(x, y)$ — непрерывная функция на единичном квадрате в $\mathbf{R}^2$. Оператор A действует из $L_p[0, 1]$ в $L_q[0, 1]$, $1 \leqslant p$, $q < \infty$, по формуле $(Af)(x) = \int_0^1 K(x, y) \cdot f(y)\, dy$. Найти сопряженный оператор $A' : L_{q'}[0, 1] \to L_{p'}[0, 1]$, где $p' = p/(p-1)$, $q' = q/(q-1)$.

252. Пусть $P : C[0, 2] \to C[0, 1]$ — оператор ограничения. Найти сопряженный оператор $P' \colon V[0, 1] \to V[0, 2]$.

253. Доказать, что оператор, отображающий линейное нормированное пространство L в факторпространство L/L_1 (ставящий в соответствие элементу $x \in L$ содержащий его класс смежности), является линейным и ограниченным.

254. Пусть A — линейный оператор, отображающий линейное нормированное пространство X в линейное нормированное пространство Y. Пусть, кроме того, множество значений этого оператора образует конечномерное многообразие. Следует ли отсюда, что A — ограниченный оператор?

255. Пусть $A : X \to Y$ — непрерывный линейный оператор, определенный на всем линейном нормированном пространстве X и принимающий значения в линейном нормированном пространстве Y. Всегда ли существует $x \in X$, $x \neq 0$ такой, что $\|Ax\| = \|A\| \, \|x\|$?

4. Конструкции банаховых пространств.

256. а) Пусть L_0 — замкнутое подпространство банахова пространства L. Доказать, что формула $\|x\|_1 = \inf_{y-x \in L_0} \|y\|$ определяет норму на пространстве $L_1 = L/L_0$.

б) Доказать, что пространство L_1 — банахово.

257*. Пусть L — нормированное пространство, L_0 — его замкнутое подпространство, $L_1 = L/L_0$ и норма в L_1 определена, как в предыдущей задаче. Верно ли, что если L_0 и L_1 — банаховы пространства, то пространство L — тоже банахово?

258*. Показать, что всякое сепарабельное банахово пространство над полем K ($K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$) является факторпространством $l_1(K)$.

259. Подпространство L_0 в банаховом пространстве L называется *дополняемым*, если существует такое замкнутое подпространство $L_1 \subset L$, что $L = L_0 \oplus L_1$ (алгебраическая прямая сумма). Доказать, что:

а) всякое конечномерное подпространство дополняемо;

б) всякое замкнутое подпространство конечной коразмерности дополняемо;

в) пространство $l_\infty(K)$, $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, дополняемо в любом содержащем его банаховом пространстве;

г) если L/L_0 изометрично $l_1(K)$, то L_0 дополняемо.

260*. Пусть L_1 и L_2 — линейные пространства над полем K. Рассмотрим категорию K, объектами которой являются билинейные отображения $A\colon L_1 \times L_2 \to L$, где L — некоторое линейное пространство над K (свое для каждого объекта). Морфизмом объекта $A\colon L_1 \times L_2 \to L$ в объект $B\colon L_1 \times L_2 \to M$ назовем линейное отображение $\varphi\colon L \to M$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, "\varphi"] \\ L_1 \times L_2 \arrow[ur, "A"] \arrow[r, "B"'] & M \end{tikzcd} .$$

Доказать, что универсальным объектом в K является $A_0\colon L_1 \times L_2 \to L_1 \otimes L_2\colon (x_1, x_2) \mapsto x_1 \otimes x_2$.

261*. Пусть L_1 и L_2 — банаховы пространства, K — категория билинейных отображений $A\colon L_1 \times L_2 \mapsto L$ с нормой $\leqslant 1$. Морфизмы определяются, как в предыдущей задаче с дополнительным условием $\|\varphi\| \leqslant 1$. Доказать, что в категории K универсальным объектом является отображение $A_0\colon L_1 \times L_2 \to L_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} L_2\colon (x_1, x_2) \mapsto x_1 \otimes x_2$.

262*. Пусть $L_1 = l_2(n, \mathbf{R})$, $L_2 = l_2(m, \mathbf{R})$. Отождествим пространство $L_1 \otimes L_2$ с пространством матриц порядка $n \times m$ следующим образом. Будем записывать элементы L_2 в виде векторов-строк, а элементы L_1 — в виде векторов-столбцов. Тогда элементу $x \otimes y$ мы поставим в соответствие матрицу $x \cdot y$. Пусть элементу $a \in L_1 \otimes L_2$ соответствует матрица A. Доказать, что норма элемента a в пространстве $L_1 \widehat{\otimes} L_2$ может быть вычислена по формуле $\|a\| = s_1^{1/2} + \ldots + s_k^{1/2}$, $k = \min(n, m)$, где s_i — расположенные в порядке убывания собственные числа матрицы AA' $(A'A)$, если $k = n$ (соответственно $k = m$).

263. Доказать, что в условиях предыдущей задачи норма элемента $a \in L_1 \underset{\smile}{\otimes} L_2$ совпадает с нормой матрицы A как оператора из $l_2(m, \mathbf{R})$ в $l_2(n, \mathbf{R})$ и равна числу $s_1^{1/2}$.

264. Пусть L_1 и L_2 — банаховы пространства. Показать, что существует естественное изометрическое вложение $L_1' \underset{\smile}{\otimes} L_2$ в пространство $\mathscr{L}(L_1, L_2)$.

265*. Доказать, что $l_1(n, \mathbf{R}) \widehat{\otimes} l_1(m, \mathbf{R})$ изоморфно $l_1(mn, \mathbf{R})$.

266*. Доказать, что $l_\infty(n, \mathbf{R}) \underset{\smile}{\otimes} l_\infty(m, \mathbf{R})$ изоморфно $l_\infty(mn, \mathbf{R})$.

§ 2. Линейные топологические пространства

1. Топология, выпуклость и полунормы.

267°. Доказать, что топология в ЛТП определяется заданием системы окрестностей нуля.

268. Доказать, что в любом ЛТП замкнутое множество X и точка $x \notin X$ имеют непересекающиеся окрестности.

269. Пусть в конечномерном линейном пространстве заданы две нормы — $p_1(x)$ и $p_2(x)$. Доказать, что существует такая положительная константа C, что

$$p_1(x) \leqslant C p_2(x), \quad p_2(x) \leqslant C p_1(x).$$

270. Доказать, что в конечномерном линейном пространстве L есть только одна топология, относительно которой L является отделимым ЛТП.

271. Доказать, что если две нормы $p(x)$ и $q(x)$ мажорируют друг друга: $C^{-1}p(x) \leqslant q(x) \leqslant Cp(x)$ $(C > 0)$, то системы открытых шаров $\overset{\circ}{B}_p$ и $\overset{\circ}{B}_q$ определяют одну и ту же топологию.

272°. а) Доказать, что если множество A открыто, а B произвольно, что множество $A + B$ открыто.

б) Доказать, что если множество A замкнуто, а B — компакт, то множество $A + B$ замкнуто.

273. Приведите пример замкнутых множеств A и B, для которых $A + B$ не является замкнутым множеством.

274°. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — выпуклые множества и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — фиксированные числа. Доказать, что множество $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$ выпукло.

275°. Доказать, что пересечение любого семейства выпуклых множеств выпукло.

276. Пусть A — любое ограниченное множество на плоскости и B — единичный круг $x^2 + y^2 < 1$. Доказать, что для любых положительных чисел α и β множество $\alpha A + \beta B$ измеримо по Лебегу, а если A выпукло, то

$$\mu(\alpha A + \beta B) = S\alpha^2 + L\alpha\beta + \pi\beta^2.$$

Каков смысл коэффициентов S и L?

277*. Пусть $A_1, \ldots, A_k$ — выпуклые ограниченные множества в пространстве $\mathbf{R}^n$. Доказать, что $\mu(\alpha_1 A_1 + \ldots \ldots + \alpha_k A_k)$ является однородным многочленом степени n от переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

278. Пусть L — линейное пространство над полем K. Доказать, что среди всех отделимых топологий, превращающих L в ЛВП, есть самая сильная, которая называется *ядерно-выпуклой топологией* и обладает следующими свойствами:

а) всякий линейный функционал (т. е. линейное отображение $f\colon L \to K$) непрерывен;

б) базис окрестностей нуля в L состоит из всех выпуклых множеств, содержащих нуль и пересекающихся с каждой прямой, проходящей через нуль, по интервалу положительной длины.

279. Доказать, что множество B является единичным шаром для некоторой полунормы p тогда и только тогда, когда оно выпукло, уравновешено и замкнуто в ядерно-выпуклой топологии (см. задачу 278).

280. а) Доказать, что среди всех выпуклых множеств B, содержащих 0 и имеющих данный функционал Минковского p, есть наибольшее B_1 и наименьшее B_0 (по включению).

б) Доказать, что B_1 является замыканием B_0 в ядерно-выпуклой топологии.

281. Пусть A — любое множество в линейном пространстве L, $c_1(A)$ — пересечение всех выпуклых множеств в L, содержащих A, $c_2(A)$ — совокупность всех векторов вида $x = \sum_{i=1}^{n} \tau_i x_i$, где $x_i \in A$, а коэффициенты τ_i неотрицательны и обладают свойством $\sum_{i=1}^{n} \tau_i = 1$. Доказать, что $c_1(A) = c_2(A)$. Это множество называется *выпуклой оболочкой* и обозначается $\operatorname{co}(A)$.

282. Доказать, что в полинормированном пространстве $(L, \{p_\alpha\}_{\alpha \in A})$ множество M ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено по каждой из полунорм p_α $(\alpha \in A)$.

283. Доказать, что во всяком ЛВП выпуклая оболочка ограниченного множества ограничена. Привести пример, показывающий, что в произвольном ЛТП это свойство может не выполняться.

284. Пусть $\mathbf{R}^\infty$ — пространство всех последовательностей вещественных чисел с топологией покоординатной сходимости. Доказать, что в $\mathbf{R}^\infty$ нет непустых открытых ограниченных множеств.

285. В пространстве $C(\mathbf{R})$ всех непрерывных вещественных функций на прямой введем счетную систему полунорм

$p_N(f) = \max_{|x| \leqslant N} |f(x)|$ и положим $d(f, g) = \sum_{N=1}^{\infty} 2^{-N} \frac{p_N(f-g)}{1 + p_N(f-g)}$.

Для каких $r > 0$ шар радиуса r является выпуклым множеством в $C(\mathbf{R})$?

286. В пространстве $C(\mathbf{R})$ всех непрерывных вещественных функций на прямой определим расстояние формулой

$$d(f, g) = \sup_{x \in \mathbf{R}} \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|}.$$

Будет ли являться пространство $C(\mathbf{R})$ с топологией, определяемой этим расстоянием, ЛТП?

287°. Доказать, что подпространство $BC(\mathbf{R})$ пространства $C(\mathbf{R})$ из предыдущей задачи, состоящее из всех ограниченных непрерывных функций на прямой, является нормируемым ЛТП.

288. Обозначим через $\mathbf{R}^\infty$ пространство всех последовательностей вещественных чисел с расстоянием

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

Доказать, что

а) $\mathbf{R}^\infty$ локально выпукло;

б) $\mathbf{R}^\infty$ счетно-нормируемо;

в)* $\mathbf{R}^\infty$ ненормируемо.

2. Сопряженные пространства.

289°. Доказать, что если линейный функционал непрерывен в какой-либо точке линейного топологического пространства, то он непрерывен в каждой точке этого пространства.

290. Пусть L — линейное топологическое пространство. Доказать, что

а) линейный функционал f на L непрерывен тогда и только тогда, когда существуют такое открытое множество $U \subset L$ и такое число t, что t не принадлежит множеству $f(U)$;

б) линейный функционал f на L непрерывен тогда и только тогда, когда его нулевое подпространство $\operatorname{Ker} f = \{x: f(x) = 0\}$ замкнуто в L.

291*. Пусть в линейном топологическом пространстве L существует определяющая система окрестностей нуля, мощность которой не превосходит размерности L. Доказать, что на L существует разрывный линейный функционал.

292. Выпуклое множество M в ЛТП L, для которого множество $\{x \in M \mid \forall y \in L\ \exists \varepsilon(y) \in \mathbf{R}: x + ty \in M$ при $|t| < \varepsilon(y)\}$ непусто, называется *выпуклым телом*. Назовем выпуклые тела B и B' в $\mathbf{R}^n$ *двойственными*, если их функционалы Минковского определяют в $\mathbf{R}^n$ структуры сопряженных нормированных пространств. (Мы отождествляем вектор $(a_1, \ldots, a_n)$ с функционалом

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.)$$

Доказать, что сечение B k-мерной плоскостью P двойственно ортогональной проекции B' на эту плоскость.

293.** Доказать, что не существует никакого нормированного пространства, для которого пространство $C[a, b]$ было бы сопряженным.

3. Теорема Хана — Банаха.

294. Доказать, что если ЛТП L_1 отделимо и конечномерно, то всякое линейное отображение $L_1 \to L_2$, где L_2 — произвольное ЛТП, непрерывно.

295. Пусть P — пространство всех многочленов от x с вещественными коэффициентами, U_+ (соотв. U_-) — подмножество многочленов с положительным (соотв. отрицательным) старшим коэффициентом. Доказать, что множества U_+ и U_- выпуклы, но не разделяются никакой гиперплоскостью.

296. Доказать, что выпуклые замкнутые непересекающиеся множества A и B в ЛТП, одно из которых — компакт, *строго разделяются гиперплоскостью.* (Это значит, что существуют такой непрерывный линейный функционал f и такие константы $c_1 < c_2$, что $f(x) \leqslant c_1$ на A и $f(x) \geqslant c_2$ на B.)

297°. Пусть L — линейное нормированное пространство с нормой p, L' — сопряженное пространство с нормой p', L'' — пространство, сопряженное к L', с нормой p''. Каждому $x \in L$ поставим в соответствие элемент $F_x \in L''$ по формуле $F_x(f) = f(x)$ для $f \in L'$. Доказать равенство $p''(F_x) = p(x)$.

298. Пусть L — конечномерное нормированное пространство. Доказать, что L и L'' изоморфны (т. е. существует линейное изометрическое отображение L на L'').

299. Доказать, что всякое линейное нормированное пространство изометрично подпространству некоторого пространства вида $C(X)$, где $C(X)$ — пространство непрерывных функций на компакте X с нормой $\|f\| = \max\limits_{x \in X} |f(x)|$.

300*. Доказать, что всякое сепарабельное нормированное пространство L изометрично некоторому подпространству в $C[0, 1]$.

301. Построить изометричное вложение $l_p(2, \mathbf{R})$ в пространство $C[0, 1]$ для $p = 1, 2, \infty$.

302. Доказать, что существует изометрическое вложение $l_p(n, \mathbf{R})$ в $l_\infty(\mathbf{R})$.

303. Пусть $l_\infty(\mathbf{R})$ — пространство ограниченных вещественных последовательностей $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Доказать, что существует линейный функционал $\mathrm{LIM} \in l_\infty(\mathbf{R})'$, обладающий свойствами:

1) $\sup x_n \geqslant \mathrm{LIM}\{x_n\} \geqslant \inf x_n$;
2) если существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\mathrm{LIM}\{x_n\} = a$;
3) $\mathrm{LIM}\{x_{n+1}\} = \mathrm{LIM}\{x_n\}$.

304. Доказать, что утверждения задачи 303 переносятся на случай двусторонних последовательностей $\{x_n\}$, $n \in \mathbf{Z}$.

305*. Пусть L — нормированное пространство, T — линейный обратимый оператор в L, обладающий свойством:

$$p(T^n x) \leqslant cp(x) \quad \forall x \in L, \quad n = 0, \pm 1, \ldots$$

Доказать, что существует норма $\tilde{p}$ в L, эквивалентная p, относительно которой преобразование T изометрично.

306. Пусть L — ЛВП. Доказать, что L допускает непрерывное вложение в произведение прямых $\mathbf{R}^\alpha$, где α — достаточно высокая мощность. (Другими словами, всякое ЛВП допускает координатное описание.)

307*. Пусть $B(\mathbf{R}^n)$ — совокупность ограниченных вещественных функций на $\mathbf{R}^n$ с нормой $\|f\| = \sup\limits_{x\in\mathbf{R}^n} |f(x)|$. Доказать, что существует линейный функционал $\mathrm{LIM} \in B(\mathbf{R}^n)'$, обладающий свойствами:

а) $\inf\limits_{\mathbf{R}^n} f(x) \leqslant \mathrm{LIM}\, f(x) \leqslant \sup\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)$;

б) если существует $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = a$, то $\mathrm{LIM}\, f(x) = a$;

в) для любого $y \in \mathbf{R}^n$ $\mathrm{LIM}\, f(x+y) = \mathrm{LIM}\, f(x)$.

308°. Доказать, что линейное подмногообразие X в ЛВП L плотно тогда и только тогда, когда всякий линейный функционал $f \in L'$, равный нулю на X, обращается в нуль тождественно.

309. Доказать, что всякое замкнутое выпуклое множество в вещественном ЛВП L является пересечением некоторого семейства полупространств вида $f(x) \leqslant c$, где $f \in L'$, $c \in \mathbf{R}$.

310. Представить единичный шар в $L_p(n, \mathbf{R})$ в виде пересечения счетного числа полупространств.

311. Пусть I^N — *N-мерный куб*, задаваемый в $\mathbf{R}^N$ уравнениями $|x_i| \leqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$. Доказать, что любое выпуклое ограниченное множество на плоскости можно с любой точностью аппроксимировать двумерным сечением I^N. (Более точно, для любого $\varepsilon > 0$ и любого выпуклого множества $V \subset \mathbf{R}^2$ существуют такое N и такое вложение $\varphi\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^N$, что функционалы Минковского множеств U и $V = \varphi^{-1}(I^N)$ связаны неравенствами

$$1 - \varepsilon < \frac{p_U}{p_V} < 1 + \varepsilon.)$$

312. Построить изометрическое вложение $l_p(n, \mathbf{R})$ в $C[0, 1]$ для любого $p \in [1, \infty]$.

313. *Теорема Хелли.* Доказать, что если семейство выпуклых множеств в $\mathbf{R}^n$ таково, что любые $n+1$ множеств семейства имеют общую точку, то все множества семейства имеют общую точку.

314. Определим топологию в пространстве $C[0, 1]$, взяв в качестве базиса окрестностей нуля множества $U_\varepsilon = \left\{ f \in C[0, 1]\colon \int\limits_0^1 \sqrt{|f(x)|}\, dx < \varepsilon \right\}$. Доказать, что на полученном топологическом пространстве каждый непрерывный линейный функционал равен нулю.

315*. Пусть L — ЛВП, X — множество с мерой μ, f — функция на X со значениями в L. Говорят, что f *слабо измерима*, если числовая функция $F(f(x))$ μ-измерима для всех $F \in L'$. Элемент $\varphi \in L$ называется *слабым интегралом* от f по мере μ на множестве X, если $F(f) = \int\limits_X F(f(x))\,d\mu(x)$ для всех $F \in L'$. Доказать:

а) единственность слабого интеграла;

б) существование слабого интеграла в случае, когда L — рефлексивное банахово пространство, а функция $\|f\|$ суммируема по мере μ на X.

§ 3. Линейные операторы

1. Пространство линейных операторов.

316. Пусть в пространстве $l_2(\mathbf{R})$ оператор P_k действует по формуле $P_k(\{x_n\}) = \{\varepsilon_{nk}x_n\}$, где $\varepsilon_{nk} = 1$ при $k \leqslant n$ и $\varepsilon_{nk} = 0$ при $k > n$. Какие из следующих сходимостей имеют место при $k \to \infty$: а) $P_k \rightrightarrows 0$, б) $P_k \to 0$, в) $P_k \rightharpoonup 0$?

317. Пусть $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ — естественный базис в пространстве $l_2(\mathbf{R})$. Определим оператор A_n формулой

$$A_n e_k = \begin{cases} e_1, & \text{если } k = n, \\ 0, & \text{если } k \neq n. \end{cases}$$

Доказать, что $\|A_n\| = 1$ и что $A_n \to 0$ при $n \to \infty$.

318. В условиях задачи 317 определим оператор B_n формулой

$$B_n e_k = \begin{cases} e_n, & \text{если } k = 1, \\ 0, & \text{если } k \neq 1. \end{cases}$$

Доказать, что $\|B_n\| = 1$, $B_n \rightharpoonup 0$ при $n \to \infty$, но не существует $\operatorname*{s-lim}\limits_{n\to\infty} B_n$.

319°. Доказать непрерывность операции умножения операторов в равномерной топологии: если $A_n \rightrightarrows A \in \mathscr{L}(L_1, L_2)$, $B_n \rightrightarrows B \in \mathscr{L}(L_0, L_1)$, то $A_nB_n \rightrightarrows AB \in \mathscr{L}(L_1, L_2)$.

320. Пусть L_1 и L_2 — банаховы пространства. Доказать, что если $A_n \rightharpoonup A \in \mathscr{L}(L_1, L_2)$, то нормы операторов A_n ограничены в совокупности.

321. Доказать, что если $A_n \to A \in \mathscr{L}(L_1, L_2)$, $B_n \to B \in \mathscr{L}(L_0, L_1)$, то $A_nB_n \to AB \in \mathscr{L}(L_0, L_2)$.

322*. Доказать, что операция умножения операторов а) не непрерывна в сильной топологии пространства d L, если L бесконечномерно (сравнение с результатом ıачи 321 показывает, что сильная топология в End L определяется сходящимися последовательностями); б) непрерывна в сильной топологии на единичном ıре пространства End L.

323. Привести пример последовательностей операто- в $A_n \rightharpoonup 0$, $B_n \rightharpoonup 0$, для которых $A_n B_n$ не сходится сла- к 0.

324°. Доказать неравенство $\|AB\| \leqslant \|A\| \|B\|$ для $A \in \mathscr{L}(L_1, L_2)$, $B \in \mathscr{L}(L_0, L_1)$.

325. Пусть $T(t)$ — оператор сдвига в $L_p(R)$ $(1 \leqslant p < \infty)$: $T(t)f(x) = f(x+t)$.

Доказать, что $T(t) \to T(t_0)$ при $t \to t_0$. Верно ли, что $(t) \Rightarrow T(t_0)$ при $t \to t_0$?

326. Пусть A — линейный оператор из L_1 в L_2, пере- ›дящий всякую сильно сходящуюся последовательность слабо сходящуюся. Доказать, что A ограничен.

327. Пусть A — оператор из L_1 в L_2, непрерывный в ıысле слабых топологий L_1 и L_2. Будет ли A непреры- ›н в смысле сильных топологий?

2. Компактные множества и компактные операторы.

328. Вычислить аппроксимативную размерность *кан- ›рова совершенного множества* X. (Множество X явля- тся пересечением счетного числа множеств X_n, где X_n олучается из отрезка $[0, 1]$ выбрасыванием 3^{n-1} интер- алов вида $\left(\frac{3k-2}{3^n}, \frac{3k-1}{3^n}\right)$, $k = 1, 2, \ldots, 3^{n-1}$.)

329. Пусть K — выпуклое множество в линейном про- транстве L. Подмножество $A \subset K$ называется *крайним*, сли всякий отрезок, лежащий в K, середина которого ıринадлежит A, целиком лежит в A. Доказать, что пере- ‹ечение любого семейства крайних подмножеств либо ıусто, либо является крайним подмножеством.

330. Пусть K — выпуклый компакт. Доказать, что со- ›окупность его замкнутых крайних подмножеств (см. за- ıачу 329), упорядоченная по включению, имеет мини- ıальный элемент.

331. Пусть K — замкнутое выпуклое ограниченное подмножество в ЛВП L, A — минимальный элемент семейства замкнутых крайних подмножеств в K (см. за- дачу 330). Доказать, что A состоит из одной точки.

332. Доказать, что выпуклый компакт K в ЛВП L имеет хотя бы одну крайнюю точку.

333*. Доказать *теорему Крейна — Мильмана*: всякий выпуклый компакт K в ЛВП L совпадает с замыканием выпуклой оболочки своих крайних точек.

334. Найти крайние точки единичного шара в пространстве $l_p(n, \mathbf{R})$ $(1 < p < \infty)$.

335. Найти крайние точки единичного шара в пространствах c и c_0.

336. Доказать, что пространства c и c_0 не являются сопряженными ни к какому линейному нормированному пространству.

337. Доказать следующий аналог теоремы Асколи — Арцела: пусть $B(T, X)$ — метрическое пространство всех ограниченных функций на множестве T со значениями в компактном метрическом пространстве X; расстояние в $B(T, X)$ определено как $d(f, g) = \sup\limits_{t \in T} d_X(f(t), g(t))$, где d_X — расстояние в X. Для того чтобы множество $M \subset B(T, X)$ было предкомпактным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное разбиение множества T: $T = T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_n$, что на каждой части T_j каждая функция $f \in M$ изменяется не больше чем на ε.

338. Найти крайние точки множества S дважды стохастических матриц порядка n. (Матрица A называется *дважды стохастической*, если ее элементы неотрицательны и сумма элементов каждой строки и каждого столбца равна 1.)

339. Доказать, что в бесконечномерном нормированном пространстве единичный оператор некомпактен.

340. Доказать, что в бесконечномерном нормированном пространстве компактный оператор не имеет ограниченного обратного оператора.

341. Пусть оператор A в $l_p(\mathbf{R})$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ задан формулой $A\{x_n\} = \{a_n x_n\}$, где $\{a_n\}$ — фиксированная ограниченная последовательность вещественных чисел. Доказать, что оператор A компактен тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

342. Доказать некомпактность в пространстве $C[0, 1]$ оператора A, действующего по формуле $Af(x) = x \cdot f(x)$.

343. Пусть L_1 и L_2 — банаховы пространства, $A \in \mathscr{L}(L_1, L_2)$. Доказать, что из компактности сопряженного оператора A' следует компактность A.

344. Пусть $K(x, y)$ — непрерывная функция на единичном квадрате в $\mathbf{R}^2$. Доказать, что оператор A в $C[0, 1]$, определенный формулой $Af(x) = \int\limits_0^1 K(x, y) f(y)\,dy$, компактен.

345. Пусть $K \in L_2(X \times Y, \mu \times \nu)$. Доказать, что оператор A, действующий из $L_2(Y, \nu)$ в $L_2(X, \mu)$ по формуле $Af(x) = \int\limits_Y K(x, y) f(y)\,d\nu(y)$, является компактным.

346*. Пусть оператор T в пространстве $L_p(0, \infty)$ $(p > 1)$ задан формулой $Tf(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)\,dt$.

Доказать, что T ограничен, но некомпактен. Найти норму T.

347*. Пусть пространство L рефлексивно. Доказать компактность оператора $T \in \operatorname{End} L$, переводящего всякую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся.

348. Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$. Доказать, что оператор вложения из $C^{k+1}(\overline{\Omega})$ в $C^k(\overline{\Omega})$ компактен.

349. Может ли компактный оператор A удовлетворять алгебраическому уравнению $\sum\limits_{k=0}^{n} c_k A^k = 0$ (мы полагаем $A^0 = 1$)?

3. Теория фредгольмовых операторов.

350. Пусть A — оператор в $l_p(\mathbf{R})$, действующий по формуле $A\{x_n\} = \{a_n x_n\}$, где $\{a_n\}$ — фиксированная последовательность вещественных чисел. При каком условии на $\{a_n\}$ подпространство $\operatorname{im} A$ замкнуто в $l_p(\mathbf{R})$?

351. Пусть T — оператор в $l_p(\mathbf{R})$, действующий по формуле $T\{x_n\} = \{x_{n+1}\}$. Найти ядро и коядро операторов T^k $(k = 1, 2, \ldots)$.

352*. Пусть P — многогранник в $\mathbf{R}^3$, X_k — множество его ориентированных k-мерных граней (0-мерные грани — вершины, 1-мерные грани — ребра, 2-мерные грани — обычные грани, 3-мерная грань — сам многогранник), L_k — пространство вещественных функций на X_k. Если $\Gamma \in X_{k-1}$, $\Delta \in X_k$, то можно определить число $\varepsilon(\Gamma, \Delta)$, равное 0, если Γ не лежит на границе Δ, и ± 1 в противном случае. Знак $\varepsilon(\Gamma, \Delta)$ зависит от ориентаций Γ и Δ. Пусть $e_1, \ldots, e_{k-1}$ базис, задающий ориентацию Γ; $f_1, \ldots, f_k$ — базис, задающий ориентацию Δ и выбранный так, что векторы $f_1, \ldots, f_{k-1}$ лежат в плоскости Γ, а вектор f_k трансверсален к Γ и направлен вне Δ. Тогда

$\varepsilon(\Gamma, \Delta)$ равно знаку определителя матрицы перехода от $e_1, \ldots, e_{k-1}$ к $f_1, \ldots, f_{k-1}$. Определим оператор d_k: $L_{k-1} \to L_k$ формулой

$$(d_k f)(\Delta) = \sum_{\Gamma \in X_{k-1}} \varepsilon(\Gamma, \Delta) f(\Gamma).$$

Доказать полуточность последовательности

$$0 \to L_0 \xrightarrow{d_1} L_1 \xrightarrow{d_2} L_2 \xrightarrow{d_3} L_3 \to 0$$

и вычислить ее когомологии для простейших многогранников (симплекса, куба, куба с дыркой, куба с внутренней полостью).

353. Пусть $C^k(T)$ — пространство функций на окружности T, имеющих k непрерывных производных, с нормой

$$\|f\| = \max_{t \in T} \{|f(t)|, |f'(t)|, \ldots, |f^{(k)}(t)|\}.$$

Доказать полуточность последовательности

$$0 \to C^k(T) \xrightarrow{d} C^{k-1}(T) \to 0,$$

где d — оператор дифференцирования, и вычислить ее когомологии.

354. Пусть дана полуточная последовательность конечномерных пространств

$$0 \to L_0 \xrightarrow{T_1} L_1 \xrightarrow{T_2} \ldots \to L_{n-1} \xrightarrow{T_n} L_n \to 0$$

и H_k — пространства ее когомологий для $k = 0, 1, \ldots, n$.

Доказать *тождество Эйлера*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim L_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim H_k.$$

355.** Пусть задана последовательность

$$\ldots \to L_{k-1} \xrightarrow{T_n} L_k \xrightarrow{T_{n+1}} L_{k+1} \to \ldots$$

банаховых пространств и непрерывных операторов. Доказать, что если сопряженная последовательность

$$\ldots \leftarrow L'_{k-1} \xleftarrow{T'_k} L'_k \xleftarrow{T'_{k+1}} L'_{k+1} \leftarrow \ldots$$

точна, то точна и исходная последовательность.

356*. Пусть дана полуточная последовательность

$$\ldots \to L_{k-1} \xrightarrow{T_k} L_k \xrightarrow{T_{k+1}} L_{k+1} \to \ldots$$

банаховых пространств и непрерывных отображений. Доказать, что сопряженная последовательность полуточна и пространства когомологий сопряженной последовательности сопряжены к пространствам когомологий исходной последовательности.

357. Построить почти обратный оператор для оператора T из задачи 351.

358. Пусть T — дифференциальный оператор вида

$$T = \left(\frac{d}{dx}\right)^n + a_1(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} + \ldots + a_n(x),$$

действующий из $C^{k+n}[0, 1]$ в $C^k[0, 1]$. Доказать, что оператор T — фредгольмов и найти его индекс.

359. Является ли фредгольмовым оператор умножения на непрерывную функцию $a(x)$ в пространстве $C[0, 1]$?

360*. Пусть L — пространство гармонических непрерывных вплоть до границы функций в области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, ограниченной гладкой кривой Γ. Доказать, что оператор ограничения $P : L \to C(\Gamma)$ является фредгольмовым, и найти его индекс.

361. Пусть Ω — ограниченная область на комплексной плоскости, $H(\Omega)$ — пространство голоморфных в Ω и непрерывных в $\bar{\Omega}$ функций, $a(z) \not\equiv 0$ — функция, голоморфная в некоторой окрестности $\bar{\Omega}$. Доказать, что оператор умножения на $a(z)$ фредгольмов в $H(\Omega)$, и найти его индекс.

362. Пусть $H_0 = L_2(\mathbf{R}, dx)$, H_1 — пополнение пространства $S(\mathbf{R})$ по норме $\|f\|_1^2 = \|xf\|^2 + \|f'\|_0^2$ (здесь $\|\ \|_0$ означает норму в H_0). *Операторы рождения и уничтожения* в квантовой теории поля могут быть определены как дифференциальные операторы из H_1 в H_0, действующие по формулам $A_\pm f = \left(\frac{d}{dx} \pm x\right)f$. Доказать, что $A_\pm$ — фредгольмовы и что $\operatorname{ind} A_\pm = \pm 1$.

363. а) *Оператором Гильберта — Шмидта* называется интегральный оператор

$$(A\varphi)(s) = \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt,$$

действующий в пространстве $L_2[a, b]$, ядро которого удовлетворяет условию $\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2\,ds\,dt < \infty$. Доказать, что для оператора Гильберта — Шмидта выполнено неравенство

$$\|A\| \leqslant \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 \, ds \, dt}.$$

б) Доказать, что соответствие $A \mapsto K(s, t)$ между операторами Гильберта — Шмидта и их ядрами является взаимно-однозначным с точностью до эквивалентности измеримых функций.

364. Пусть дан оператор Гильберта — Шмидта, определенный ядром $K(s, t)$ (см. задачу 363). Доказать, что сопряженный к нему оператор определяется «сопряженным» ядром $\overline{K(t, s)}$.

365. *Интегральным уравнением Фредгольма* (*второго рода*) *с вырожденным ядром* называется уравнение вида

$$\varphi(s) = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n P_i(s) Q_i(t) \right) \varphi(t) \, dt + f(s),$$

где P_i, Q_i — функции из $L_2[a, b]$. Доказать, что общее решение этого уравнения имеет вид $\varphi(s) = \sum_{i=1}^n q_i P_i(s) + f(s)$ и что неопределенные коэффициенты q_i можно найти из некоторой системы алгебраических уравнений вида

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j + b_i = q_i.$$

366. *Уравнением Вольтерра* (второго рода) называется интегральное уравнение

$$\varphi(s) = \int_a^s K(s, t) \varphi(t) \, dt + f(s),$$

где $K(s, t)$ — ограниченная измеримая функция на квадрате $[a, b] \times [a, b]$. Доказать, что для любой функции $f \in L_2(a, b)$ уравнение Вольтерра имеет одно и только одно решение.

367. Доказать, что произведение двух операторов Гильберта — Шмидта с ядрами $K(s, t)$, $Q(s, t)$ (см. задачу 363) есть оператор того же типа с ядром

$$R(s, t) = \int_a^b K(s, u) Q(u, t) \, du.$$

368. Пусть A — оператор Гильберта — Шмидта (см. задачу 363), причем его ядро удовлетворяет соотношению

$$\int_a^b\int_a^b |K(s, t)|^2\,ds\,dt = K^2 < \infty.$$

Доказать, что ядро $K_n(s, t)$ оператора A^n удовлетворяет оценке

$$\int_a^b\int_a^b |K_n(s, t)|^2\,ds\,dt \leqslant K^{2n}.$$

§ 4. Функциональные пространства и обобщенные функции

1. Пространства интегрируемых функций.

369. Доказать, что для любых измеримых функций на множестве X с мерой μ справедливо неравенство Гёльдера:

$$\int_X |f(x)\,g(x)|\,d\mu(x) \leqslant \left(\int_X |f(x)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p}\left(\int_X |g(x)|^q\,d\mu(x)\right)^{1/q},$$

где числа p и q связаны соотношением $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

370. Доказать, что для любой измеримой функции f на множестве X с мерой μ справедливо равенство

$$\left(\int_X |f(x)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p} = \sup\int_X |f(x)\,g(x)|\,d\mu(x),$$

где верхняя грань берется по всем функциям $g(x)$, удовлетворяющим неравенству $\int_X |g(x)|^q\,d\mu(x) \leqslant 1$, а числа p и q связаны соотношением $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

371. Доказать *интегральное неравенство Минковского*

$$\left(\int_X |f(x)+g(x)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_X |f(x)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p} + \left(\int_X |g(x)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p}$$

для $1 < p < \infty$.

372. Говорят, что мера μ на множестве X имеет *счетную базу*, если существует такое счетное семейство $\{A_n\}$

измеримых подмножеств в X, что для любого измеримого подмножества B и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество A_n, что $\mu(A_n \triangle B) < \varepsilon$.

Доказать, что пространство $L_1(X, \mu)$ сепарабельно тогда и только тогда, когда μ имеет счетную базу.

373. Доказать, что пространство $L_p(X, \mu)$ $(1 < p < \infty)$ сепарабельно тогда и только тогда, когда сепарабельно $L_1(X, \mu)$.

374. Доказать, что пространство $L_\infty(X, \mu)$ либо конечномерно, либо несепарабельно.

375. Пусть $\mu(X) < \infty$. Доказать, что при $p \geqslant q \geqslant 1$ пространство $L_p(X, \mu)$ содержится в пространстве $L_q(X, \mu)$.

376. Доказать, что при $p \neq q$ ни одно из пространств $L_p(\mathbf{R}, dx)$, $L_q(\mathbf{R}, dx)$ не содержится в другом.

377. Пусть $0 < \alpha \leqslant \beta < \infty$. При каких p функция $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha + x^\beta}$ принадлежит пространству $L_p(\mathbf{R}_+, dx)$ (через $\mathbf{R}_+$ обозначена положительная полупрямая)?

378. Пусть числа p, q, r связаны соотношением $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = 1$, $f \in L_p(X, \mu)$, $g \in L_q(X, \mu)$, $h \in L_r(X, \mu)$. Доказать, что функция fgh суммируема и что $\|fgh\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r$.

379. Пусть $1 \leqslant p \leqslant r \leqslant q \leqslant \infty$. Доказать, что $L_p(X, \mu) \cap L_q(X, \mu)$ содержится в $L_r(X, \mu)$ и для всякой функции $f \in L_p(X, \mu) \cap L_q(X, \mu)$ справедливо неравенство $\|f\|_r \leqslant \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^\beta$, где $\alpha = \dfrac{r^{-1} - q^{-1}}{p^{-1} - q^{-1}}$, $\beta = \dfrac{p^{-1} - r^{-1}}{p^{-1} - q^{-1}}$.

380. Пусть $\mu(X) < \infty$. Доказать, что $L_\infty(X, \mu) \subset L_p(X, \mu)$ при всех $p \geqslant 1$ и что $\|f\|_\infty = \lim\limits_{p \to \infty} \|f\|_p$.

381. Доказать, что в пространстве $L_p[a, b]$ плотны следующие множества функций:

а) множество $S[a, b]$ всех кусочно-постоянных функций;

б) множество $C[a, b]$ всех непрерывных функций;

в) множество $\mathscr{P}$ всех многочленов;

г) множество $\mathscr{P}_0$ многочленов, равных нулю на концах отрезка.

382. Найти норму функции $f(x) = x^\alpha$ в тех пространствах $L_p[0, 1]$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, которым эта функция принадлежит.

383. Построить в $L_1(\mathbf{R}, dx)$:

а) бесконечномерное замкнутое подпространство, состоящее из непрерывных функций;

б) бесконечномерное замкнутое подпространство, не содержащее ни одной ненулевой непрерывной функции.

384*. Пусть $\mu(X) < \infty$, $V \subset L_1(X, \mu)$ — замкнутое бесконечномерное подпространство. Доказать, что V не может содержаться в $L_\infty(X, \mu)$.

385. Доказать, что множество $C_0(\mathbf{R})$ непрерывных финитных функций плотно в $L_p(\mathbf{R}, dx)$ при $1 \leqslant p < \infty$.

386. Доказать, что функция $f \in L_p(\mathbf{R}, dx)$ *непрерывна в среднем*, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $|t| < \delta$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|^p \, dx < \varepsilon.$$

387. Доказать утверждение задачи 386 для пространства $L_p(\mathbf{R}^n, dx)$.

388*. Пусть $M \subset L_p(\mathbf{R}^n, dx)$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Доказать, что для предкомпактности M необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

а) существует такая константа c, что $\|f\|_p \leqslant c$ для всех $f \in M$;

б) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $R(\varepsilon)$, что

$$\int\limits_{|x| > R(\varepsilon)} |f(x)|^p \, dx < \varepsilon, \quad f \in M;$$

в) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что при $|t| < \delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} |f(x+t) - f(x)|^p \, dx < \varepsilon.$$

389*. Доказать изоморфизм пространств

$$L_1(X, \mu) \mathbin{\widehat{\otimes}} L_1(Y, \nu) \approx L_1(X \times Y, \mu \times \nu).$$

390. Найти крайние точки единичного шара в $L_p(X, \mu)$:

а) при $p = 1$;

б) при $1 < p < \infty$;

в) при $p = \infty$.

391*. Доказать, что пространства $L_1[0, 1]$ и l_1 не изоморфны.

2. Пространства непрерывных функций.

392°. Доказать, что для любого компакта X пространство $C(X)$ — банахово.

393. Доказать сепарабельность пространства $C(X)$, где X — компакт, лежащий в $\mathbf{R}^n$.

394. Назовем линейный функционал F на $C(X)$ *положительным*, если $F(f) \geqslant 0$ для всех неотрицательных функций $f \in C(X)$. Доказать, что всякий положительный линейный функционал F непрерывен и его норма равна $F(1)$, где 1 — функция, тождественно равная 1 на X.

395. Доказать, что любой функционал $F \in C'(X)$ можно записать в виде $F = F_1 - F_2$, где F_1 и F_2 — положительные функционалы (см. задачу 394).

396. Пусть X — метрический компакт, $F \in C'(X)$ — положительный функционал (см. задачу 394). Положим для любого компакта $K \subset X$ $\mu(K) = \inf\limits_{\chi_K \leqslant \varphi \leqslant 1} F(\varphi)$ и для борелевского множества $E \subset X$ $\mu(E) = \sup\limits_{K \subset E} \mu(K)$, где K — компакт. Доказать, что μ — счетно-аддитивная мера.

397. *Первая теорема Хелли.* Доказать, что последовательность функционалов $F_n(f) = \int\limits_0^1 f(x)\,dg_n(x)$, где $g_n \in V[0, 1]$ имеет $*$-слабым пределом функционал $F(f) = \int\limits_0^1 f(x)\,dg(x)$, где $g \in V[0, 1]$, тогда и только тогда, когда $g_n(x) \to g(x)$ в каждой точке отрезка $[0, 1]$ и вариации всех функций g_n ограничены в совокупности.

398*. *Вторая теорема Хелли.* Пусть $M \subset V[0, 1]$.

Доказать, что если все функции из M имеют ограниченную в совокупности вариацию, то M содержит подпоследовательность $\{g_n(x)\}$, сходящуюся в каждой точке отрезка $[0, 1]$.

399. Пусть $\mathscr{P}$ — подпространство многочленов в $C[0, 1]$. Какие из следующих линейных функционалов на $\mathscr{P}$ допускают непрерывное продолжение на $C[0, 1]$ (через p обозначается многочлен $\sum\limits_{k=0}^{\deg p} a_k x^k$):

а) $F_1(p) = a_0$,

б) $F_2(p) = \sum\limits_{k=0}^{\deg p} a_k$,

в) $F_3(p) = \sum\limits_{k=0}^{\deg p} (-1)^k a_k$, г) $F_4(p)=\sum_{k=0}^{N} c_k a_k$, где $\{c_k\}$ — фиксированный вектор из $\mathbf{R}^N$?

400. Пусть X — связный компакт. Доказать, что единичный шар в пространстве $C(X)$ имеет всего две крайние точки.

401*. Доказать, что крайними точками в единичном шаре пространства $C'(X)$ являются точечные заряды $\pm\mu_x$, $x\in X$, определенные формулой $\langle\mu_x, f\rangle=f(x)$.

402.** *Теорема Стоуна — Вейерштрасса.* Пусть X — метрический компакт, $A\subset C(X)$ — замкнутая подалгебра в $C(X)$, разделяющая точки (т. е. для любых двух различных точек x_1 и x_2 из X существует такая функция $\varphi\in A$, что $\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2)$) и содержащая функцию, тождественно равную 1.

а) Доказать, что $A=C(X)$.

б) Верно ли утверждение для алгебр, не содержащих единицу?

403*. Пусть X — линейно связный метрический компакт. Построить непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ на X.

404. Построить непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ на единичный квадрат.

405. Построить изометрическое вложение $l_p(2, \mathbf{R})$ в $C[0, 1]$ с помощью непрерывного отображения отрезка $[0, 1]$ на единичную сферу пространства $l_p(2, \mathbf{R})$.

406. Доказать изоморфизм пространств $C[0, 1]\underset{\smile}{\otimes} C[0, 1]$ и $C(\square)$, где $\square$ — единичный квадрат в $\mathbf{R}^2$.

407*. Доказать, что для любых компактов X и Y в $\mathbf{R}^n$ имеет место изоморфизм $C(X)\underset{\smile}{\otimes} C(Y)\approx C(X\times Y)$.

408. Пусть $A\colon C(X)\to C(Y)$ — изоморфизм банаховых пространств. Доказать, что A имеет вид $(Af)(y)=a(y)\times f(\varphi(y))$, где a — непрерывная функция на Y, принимающая значения ±1, а φ — гомеоморфизм Y на X.

409. Доказать, что пространство всех функций вида $f(x)+g(y)$, где $f, g\in C[0, 1]$, замкнуто в $C(\square)$, где $\square$ — единичный квадрат в $\mathbf{R}^2$.

410.** Доказать, что пространство $C[0, 1]$ обладает *счетным топологическим базисом* $\{f_n(x)\}$, т. е. такой системой функций $\{f_n(x)\}$, что любая функция $f\in C[0, 1]$ однозначно представима в виде равномерно сходящегося ряда $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$.

411*. Доказать, что система функций $\{e^{2\pi inx}\}$, $n \in \mathbf{Z}$, не является топологическим базисом (см. задачу 410) в пространстве $CP[0, 1]$ всех непрерывных функций на $[0, 1]$ с условием $f(0) = f(1)$.

3. Пространства гладких функций.

412*. Пусть $\mathscr{D}(\mathbf{N})$ — пространство финитных последовательностей (т. е. последовательностей, у которых лишь конечное число членов отлично от нуля). Для любой последовательности $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ положительных чисел определим полунорму p_α в $\mathscr{D}(\mathbf{N})$ равенством

$$p_\alpha(\{x_n\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k |x_k|.$$

а) Доказать, что набор полунорм p_α превращает $\mathscr{D}(\mathbf{N})$ в полное неметризуемое ЛВП. б) Описать сходимость в этом пространстве. в) Доказать, что для любой непустой области Ω в $\mathscr{D}(\Omega)$ есть замкнутое подпространство, гомеоморфное $\mathscr{D}(\mathbf{N})$.

413. Пусть A — линейное отображение пространства $\mathscr{D}(\Omega)$ в локально выпуклое пространство L. Доказать эквивалентность следующих утверждений:

а) A — непрерывное отображение;

б) A — *ограниченное отображение* (т. е. переводит ограниченные множества в ограниченные);

в) A *секвенциально непрерывно* (т. е. из $\varphi_n \to 0$ при $n \to \infty$ следует $\lim\limits_{n\to\infty} A\varphi_n = 0$);

г) ограничение A на любое подпространство $\mathscr{D}_K(\Omega) \subset \mathscr{D}(\Omega)$ непрерывно.

414. Доказать, что $\mathscr{D}_K(\Omega)$ замкнуто в $\mathscr{D}(\Omega)$.

415. Пусть K — компакт в области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ и $\{U_i\}$ — открытое покрытие K. Доказать, что существуют такие неотрицательные функции $\varphi_i \in \mathscr{D}(\Omega)$ $(i = 1, \ldots, N)$, что выполняются условия:

1) $\operatorname{supp} \varphi_i \subset U_i$ для всех i;

2) $\sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_i(x) = 1$ для $x \in K$.

Набор $\{\varphi_i\}$ называется *разбиением единицы* на K.

416. Доказать, что $\mathscr{D}(\Omega)$ плотно в $\mathscr{E}(\Omega)$ для любой области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$.

417*. Доказать, что любое замкнутое подмножество в $\mathbf{R}^n$ является множеством нулей некоторой функции $f \in \mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$.

418*. Пусть $\{c_n\}$ — любая числовая последовательность. Существует ли функция $f \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$, для которой $f^{(n)}(0) = c_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

419. Доказать, что операции дифференцирования $\partial/\partial x_i$ и умножения на независимую переменную x_i являются непрерывными операторами в пространствах $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, $S(\mathbf{R}^n)$, $\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$.

420. Доказать, что если $f \in \mathscr{D}(\Omega)$, $g \in \mathscr{E}(\Omega)$, то $fg \in \mathscr{D}(\Omega)$. Является ли билинейное отображение $(f; g) \mapsto fg$ из $\mathscr{D}(\Omega) \times \mathscr{E}(\Omega)$ в $\mathscr{D}(\Omega)$:

а) непрерывным по каждому переменному;

б) непрерывным по совокупности переменных;

в) секвенциально непрерывным по совокупности переменных (т. е. из $f_n \to f$ в $\mathscr{D}(\Omega)$, $g_n \to g$ в $\mathscr{E}(\Omega)$ следует $f_n g_n \to fg$ в $\mathscr{D}(\Omega)$)?

421. Пусть f — ограниченная бесконечно дифференцируемая функция на прямой. Будет ли умножение на f непрерывным оператором:

а) в $\mathscr{D}(R)$, г) из $\mathscr{D}(R)$ в $S(R)$,

б) в $S(R)$, д) из $\mathscr{D}(R)$ в $\mathscr{E}(R)$,

в) в $\mathscr{E}(R)$, е) из $S(R)$ в $\mathscr{E}(R)$?

422. Обозначим через $G(\mathbf{R}^2)$ подпространство в $\mathscr{E}(\mathbf{R}^2)$, состоящее из функций g, обладающих свойством:

$$g(x+m,\ y+n) = e^{2\pi i m y} g(x,\ y), \quad m,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Доказать, что оператор A, действующий по формуле

$$Af(x,\ y) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(x+k)\, e^{-2\pi i k y},$$

переводит $S(\mathbf{R})$ в $G(\mathbf{R}^2)$.

423.** Пространство $\mathscr{D}(\mathbf{T}^n)$ бесконечно дифференцируемых функций на n-мерном *торе* $\mathbf{T}^n \approx \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ определяется как совокупность тех функций φ на $\mathbf{T}^n$, для которых соответствующие функции на $\mathbf{R}^n$ $\Phi(t_1, \ldots, t_n) = \varphi\left(e^{2\pi i t_1}, \ldots, e^{2\pi i t_n}\right)$ принадлежат $\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$. Доказать изоморфизмы:

$$\mathscr{D}(\mathbf{T}^m) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{D}(\mathbf{T}^n) \approx \mathscr{D}(\mathbf{T}^m) \mathbin{\underset{\smile}{\otimes}} \mathscr{D}(\mathbf{T}^n) \approx \mathscr{D}(\mathbf{T}^{m+n}).$$

424. а) Пусть $f \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$. Доказать, что для любого $y \in \mathbf{R}^n$ направленность $f_t(x) = \dfrac{f(x+ty) - f(x)}{t}$ имеет предел в $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ при $t \to 0$.

б) Пусть $f \in \mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$. Доказать, что для любого $y \in \mathbf{R}^n$ направленность $f_t(x) = \dfrac{f(x+ty) - f(x)}{t}$ имеет предел в $\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$ при $t \to 0$.

425*. Пусть $\{\delta_k\}$ — последовательность положительных чисел, для которой сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k$. Определим последовательность функций $\{f_n\}$ на прямой, полагая $f_0(x) = \operatorname{sgn} x$, $f_n(x) = \dfrac{1}{\delta_n} \int\limits_{x-\delta_n}^{x} f_{n-1}(x)\,dx$ при $n \geqslant 1$. Доказать, что последовательность f_n равномерно сходится к функции $f \in \mathscr{E}(\mathbf{R})$, обладающей свойствами:

а) $f(x) = -1$ при $x < 0$, $f(x) = +1$ при $x > \sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k$;

б) $|f^{(n)}(x)| \leqslant 2^n (\delta_1 \ldots \delta_n)^{-1}$ для всех $x \in \mathbf{R}$.

426*. Пусть счетно-нормированное пространство L с системой полунорм $\{p_k\}$ обладает тем свойством, что всякое ограниченное по полунорме p_{k+1} множество предкомпактно по полунорме p_k.

а) Доказать, что L обладает свойством Гейне — Бореля.

в) Вывести отсюда, что пространства $\mathscr{D}_K(\Omega)$, $\mathscr{E}(\Omega)$, $S(\mathbf{R}^n)$ обладают свойством Гейне — Бореля.

427*. Пусть L — полное ЛВП, Ω — область в $\mathbf{R}^n$. Через $\mathscr{E}(\Omega, L)$ обозначим пространство бесконечно дифференцируемых вектор-функций в области Ω со значениями в L. Если $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — набор полунорм, определяющий топологию в L, то в $\mathscr{E}(\Omega, L)$ топология определяется семейством полунорм $p_{Kl\alpha}$, где K — компакт в Ω, $l = (l_1, \ldots, l_n)$ — мультииндекс, $\alpha \in A$:

$$p_{Kl\alpha}(\varphi) = \sup_{x \in K} p_\alpha\left(\partial^l \varphi(x)\right).$$

Доказать, что $\mathscr{E}(\Omega, L)$ — полное ЛВП, метризуемое, если метризуемо L.

428*. Пусть Ω_1 — область в $\mathbf{R}^n$, Ω_2 — область в $\mathbf{R}^n$, $\Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbf{R}^{m+n}$ — их прямое произведение. В обозначениях задачи 427 доказать изоморфизмы:

$$\mathscr{E}(\Omega_1, \mathscr{E}(\Omega_2)) \approx \mathscr{E}(\Omega_1 \times \Omega_2) \approx \mathscr{E}(\Omega_2, \mathscr{E}(\Omega_1)).$$

429*. Доказать изоморфизмы:

$$\mathscr{E}(\Omega_1) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{E}(\Omega_2) \approx \mathscr{E}(\Omega_1 \times \Omega_2) \approx \mathscr{E}(\Omega_1) \mathbin{\underset{\smile}{\otimes}} \mathscr{E}(\Omega_2).$$

430.** Сформулировать и доказать аналоги утверждений задач 427—429 для пространств $\mathscr{D}(\Omega)$ и $S(\mathbf{R}^n)$.

4. Обобщенные функции.

431. Доказать, что пространство основных функций $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ вкладывается в пространство обобщенных функций $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$.

432. Существует ли $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0} \sin(x/\varepsilon)$ в пространстве $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$?

433. Пусть две локально суммируемые функции f и g в области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ определяют одну и ту же регулярную обобщенную функцию (т. е. $\int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_\Omega g(x)\varphi(x)\,dx$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$).

Доказать, что f и g совпадают почти всюду в Ω.

434. Доказать, что δ-функция Дирака, определенная формулой $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$, не является регулярной.

435. Обобщенные функции на n-мерном торе T^n определяются как линейные непрерывные функционалы на пространстве $\mathscr{D}(T^n)$ (см. задачу 423). Доказать, что ряд из регулярных обобщенных функций $\sum \exp\{2\pi ikt\}$ (здесь $t \in \mathbf{R}^n$, $kt = k_1t_1 + \ldots + k_nt_n$; суммирование ведется по всем $k \in Z^n$) сходится в смысле $\mathscr{D}'(\mathbf{T}^n)$ к обобщенной функции $\delta(t)$, определенной равенством $\int\limits_{\mathbf{T}^n} \delta(t)\varphi(t)\,dt = \varphi(0)$.

436. Доказать, что каждая обобщенная функция на торе $\mathbf{T}^n$ (см. задачу 435) имеет конечный порядок (т. е. продолжается до непрерывного линейного функционала на пространстве $C^k(\mathbf{T}^n)$ k-гладких функций на $\mathbf{T}^n$ при некотором k).

437. Доказать, что обобщенная функция F на прямой, заданная формулой $\langle F, \varphi\rangle = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(k)$, не имеет конечного порядка.

438. Доказать *тождество Сохоцкого* $\dfrac{1}{x \pm i0} = \mathscr{P}\dfrac{1}{x} \mp \pi i\delta(x)$.

439. Доказать, что функции $\dfrac{1}{x \pm i0}$ имеют порядок 1 в любой ограниченной области на прямой, содержащей 0.

440. а) Пусть L — ЛВП, L' — сопряженное к L пространство, снабженное $*$-слабой топологией. Доказать, что всякий линейный непрерывный функционал $F \in (L')'$ имеет вид $F(f) = f(\varphi)$, где $\varphi \in L$.

б) Доказать, что регулярные обобщенные функции $*$-слабо плотны в пространствах $\mathscr{E}'(\Omega)$, $\mathscr{D}'(\Omega)$, $S'(\mathbf{R}^n)$.

441*. Пусть $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$.

а) Доказать, что функция

$$f_\varphi(\lambda) = \Gamma(\lambda)^{-1} \int_0^\infty x^{\lambda-1} \varphi(x)\, dx,$$

определенная при $\operatorname{Re}\lambda > 0$, допускает аналитическое продолжение на левую полуплоскость.

б) Доказать, что при фиксированном $\lambda \in \mathbf{C}$ соответствие $\varphi \mapsto f_\varphi(\lambda)$ является обобщенной функцией (которую обычно обозначают $x_+^{\lambda-1}/\Gamma(\lambda)$).

в) Вычислить определенную выше обобщенную функцию для значений параметра $\lambda = -n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

442. Теорема о ядре. Доказать, что всякое непрерывное линейное отображение $A\colon \mathscr{D}(\Omega_1) \to \mathscr{D}'(\Omega_2)$ имеет вид

$$\langle A\varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} K(x, y)\, \varphi_1(x)\, \varphi_2(y)\, dx\, dy,$$

где $K \in \mathscr{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

443. В условиях задачи 442 пусть $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbf{R}$. Найти явно обобщенную функцию $K \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^2)$, если отображение A:

а) является естественным вложением $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ в $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$;

б) имеет вид $\varphi \mapsto \varphi(a)\,\delta_b$.

5. Действия над обобщенными функциями.

444. Доказать равенства:

а) $\delta(x) \times \delta(y) = \delta(x, y)$;

б) $\delta^{(k)}(x) \times \delta^{(i)}(y) = \dfrac{\partial^{k+i}}{\partial x^k \partial y^i}\, \delta(x, y)$;

в) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial y} f\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} f\right)$ для $f \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^2)$;

г) $\dfrac{\partial}{\partial x} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)\, dy, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^2)$.

445°. Доказать, что обобщенная функция $F \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$, обладающая свойством $F' = 0$, есть константа.

446. Доказать, что все решения уравнения $xF=0$ в обобщенных функциях $F\in\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ пропорциональны δ-функции.

447*. Доказать, что всякая обобщенная функция на прямой с носителем в точке $a\in\mathbf{R}$ имеет вид $P\left(\frac{d}{dx}\right)\delta_a(x)$, где P — многочлен.

448. Пусть $g\in\mathscr{E}(\mathbf{R})$ задает взаимно-однозначное отображение прямой на себя и $h\in\mathscr{E}(\mathbf{R})$ — обратное отображение. Выразить явно через $\delta(x)$ и ее производные функцию $\delta'(g(x))$.

449. Обобщенная функция F на прямой называется *однородной* степени (λ, ε), где $\lambda\in\mathbf{C}$, $\varepsilon=0$ или 1, если для любого $t\neq 0$ справедливо равенство $F(tx)=$ $=|t|^{\lambda}(\operatorname{sgn} t)^{\varepsilon}F(x)$. Доказать, что однородная функция степени (λ, ε) на прямой удовлетворяет дифференциальному уравнению $xF'=\lambda F$.

450. Доказать, что для всех $\lambda\in\mathbf{C}$, $\varepsilon=0, 1$ существует ровно одна с точностью до числового множителя однородная обобщенная функция на прямой степени (λ, ε).

451*. Доказать, что единственными обобщенными функциями на прямой, инвариантными относительно сдвигов, являются константы.

452*. Пусть F — обобщенная функция на плоскости, инвариантная относительно сдвигов вдоль оси Ox.

а) Доказать, что существует такая обобщенная функция f на прямой, что $\langle F, \varphi\rangle=\left\langle f, \int\limits_{\mathbf{R}}\varphi(x, y)\,dx\right\rangle$.

б) Выразить F в виде прямого произведения.

453*. Пусть F — обобщенная функция на плоскости с носителем — отрезком $[0, 1]$ на оси Ox.

а) Доказать, что существуют такое число N и такие обобщенные функции на прямой $f_0, f_1, \ldots, f_N$, что

$$\langle F, \varphi\rangle=\sum_{i=0}^{N}\left\langle f_i, \left.\frac{\partial^i\varphi}{\partial y^i}\right|_{y=0}\right\rangle.$$

б) Сформулировать это утверждение в терминах прямого произведения обобщенных функций.

454*. Доказать, что регулярная обобщенная функция $f(x)=\exp\{ie^x\}$ принадлежит $S'(\mathbf{R})$, но ее производная в смысле обобщенных функций не совпадает с $f'(x)=$ $=ie^xe^{ie^x}$.

455. Решить уравнение $\sin x \cdot f(x) = 0$ в обобщенных функциях на прямой.

456*. Пусть обобщенная функция F в $\mathbf{R}^n$ удовлетворяет соотношению $\left(\sum_i x_i^2 - R^2\right) F(x) = 0$ и инвариантна относительно вращений $\mathbf{R}^n$. Доказать, что $\langle F, \varphi \rangle = c \int_{S_R} \varphi(x)\, d\sigma(x)$, где c — константа, а σ — стандартный элемент объема на сфере S_R радиуса R в $\mathbf{R}^n$.

457. Пусть обобщенная функция F на прямой обладает свойствами:

а) $F(x+1) = F(x)$;

б) $e^{2\pi i x} F(x) = F(x)$.

Доказать, что $F(x) = c \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta(x - k)$.

458. Доказать, что всякая обобщенная функция F на прямой, удовлетворяющая уравнению $F'(x) = a(x) F(x) + b(x)$, $a, b \in \mathscr{E}(\mathbf{R})$, является регулярной (и, значит, совпадает с обычным решением этого уравнения).

459.** Пусть F — обобщенная функция в $\mathbf{R}^n$, у которой все частные производные вида $\frac{\partial^k F}{\partial x_i^k}$, $1 \leqslant i \leqslant n$; $0 \leqslant k \leqslant r$, принадлежат $L_2(\mathbf{R}^n, dx)$. Доказать, что при $r > \frac{n}{2} + l$ функция F совпадает почти всюду с функцией класса $C^l(\mathbf{R}^n)$.

460*. При каком условии на коэффициенты $\{c_n\}$ ряд $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{2\pi i n x}$ сходится в $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$?

461. Можно ли определить операцию умножения в $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ так, чтобы она была непрерывна по каждому переменному и совпадала с обычным умножением на регулярных функциях?

§ 5. Гильбертовы пространства

1. Геометрия гильбертова пространства.

462. а) Доказать, что соответствие $L \to \widetilde{L}$, построенное в п. 1 § 5 гл. III раздела «Теория», определяет ковариантный функтор из категории предгильбертовых пространств в категорию гильбертовых пространств.

б) Покажите, что $\widetilde{L}$ можно определить как универсальный объект в подходящей категории.

463. Доказать, что система функций $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$, $n \in \mathbf{Z}$, является гильбертовым базисом в $L_2(0, 1)$.

464*. Применить процесс ортогонализации к последовательности одночленов $1, x, x^2, \ldots$ в следующих гильбертовых пространствах:

а) $L_2([-1, 1], dx)$; в) $L_2\left([0, \infty), e^{-x}\,dx\right)$;

б) $L_2\left([-1, 1], \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)$; г) $L_2\left((-\infty, \infty), e^{-x^2}\,dx\right)$.

465. Применить процесс ортогонализации к последовательности одночленов $1, z, z^2, \ldots$ в предгильбертовых пространствах многочленов со следующими скалярными произведениями:

а) $(P, Q) = \iint\limits_{|z| \leqslant R} P(z)\,\overline{Q(z)}\,dx\,dy$;

б) $(P, Q) = \iint\limits_{\mathbf{C}} P(z)\,\overline{Q(z)}\,e^{-|z|^2}\,dx\,dy$.

466. Выразить линейный функционал $F_x(f) = f(x)$ в пространствах задачи 465 в виде скалярного произведения.

467*. Доказать, что пополнения предгильбертовых пространств, рассмотренных в задаче 465, состоят из всех аналитических функций с суммируемым квадратом по мере $dx\,dy$ в круге радиуса R в случае а) и суммируемых по мере $e^{-|z|^2}\,dx\,dy$ на плоскости в случае б).

468*. Доказать, что ортогональное дополнение к системе функций $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$, $n \in \mathbf{Z}$, в пространстве $L_2([a, b], dx)$

а) равно нулю при $|b - a| \leqslant 1$;

б) отлично от нуля при $|b - a| > 1$.

469*. Пусть B_0 — пространство всех тригонометрических полиномов (т. е. конечных линейных комбинаций функций $e^{i\lambda x}$, $\lambda \in \mathbf{R}$). Введем в B_0 скалярное произведение

$$(f, g) = \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{2A} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx.$$

а) Доказать, что соответствующее гильбертово пространство B несепарабельно и имеет континуальный гильбертов базис $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda \in \mathbf{R}}$.

б)** Доказать, что B содержит пространство *почти периодических непрерывных функций*, т. е. замыкание B_0 по равномерной норме $\|f\| = \sup\limits_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|$, но не совпадает с ним.

470*. Пусть μ — мера на прямой, определенная формулой $\mu(A) = \operatorname{card} A$ (число точек в A). Доказать, что $L_2(\mathbf{R}, \mu)$ несепарабельно и изоморфно пространству задачи 469.

471. Доказать, что в $L_2[a, b]$ есть ортонормированные полные системы, состоящие из

а) многочленов;

б) ступенчатых функций;

в) тригонометрических многочленов;

г) функций, лежащих в наперед заданном плотном подпространстве.

472. Найти в гильбертовом пространстве $L_2(0, 1)$ ортогональное дополнение к следующим множествам:

а) многочленов от x;

б) многочленов от x^2;

в) многочленов с нулевым свободным членом;

г) многочленов с нулевой суммой коэффициентов.

473°. Найти в предгильбертовом пространстве $C[-1, 1]$ всех непрерывных функций на $[-1, 1]$ со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx$ ортогональное дополнение к пространствам:

а) функций, равных нулю при $x \leqslant 0$;

б) функций, равных нулю в точке $x = 0$.

Верна ли в этих случаях теорема об ортогональном дополнении?

474. Пусть e_t — характеристическая функция отрезка $[0, t]$, $t \geqslant 0$. Найти углы между двумя хордами кривой e_t в $L_2(0, \infty)$:

а) если хорды имеют общий конец и направлены в разные стороны;

б) если хорды имеют общий конец и направлены в одну сторону.

475. а) Доказать, что во всяком предгильбертовом пространстве выполняется *тождество параллелограмма:*

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

б)* Показать, что во всяком нормированном линейном пространстве над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, в котором выполняется это тождество, можно ввести такое скалярное произведение, что будет справедливо равенство $\|x\|^2 = (x, x)$.

476. Доказать, что в комплексном гильбертовом пространстве справедливы равенства:

а) $(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \| x + e^{2\pi ik/N} y \|^2 e^{2\pi ik/N}$ при $N \geqslant 3$;

б) $(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \| x + e^{i\theta} y \|^2 e^{i\theta}\, d\theta$.

477. Пусть в гильбертовом пространстве H семейство векторов $\{x_n\}$ обладает свойствами: $\|x_n\| = 1$, $(x_n, x_m) = c$ при $m \neq n$. Доказать, что существует слабый предел последовательности $\{x_n\}$.

478. Доказать, что для ортогональной системы векторов $\{x_n\}$ следующие условия равносильны:

а) $\sum_n x_n$ сильно сходится;

б) $\sum_n x_n$ слабо сходится;

в) $\sum_n \| x_n \|^2$ сходится.

479°. Пусть S — любое подмножество в гильбертовом пространстве H. Доказать, что $(S^{\perp})^{\perp}$ совпадает с замыканием линейной оболочки S.

480. Пусть L — подпространство в гильбертовом пространстве H, f_0 — линейный непрерывный функционал на L. Доказать, что f_0 имеет единственное продолжение на H с сохранением нормы.

2. Операторы в гильбертовом пространстве.

481. а) Доказать, что всякий оператор A в комплексном гильбертовом пространстве H однозначно представим в виде $A = B + iC$, где B и C — эрмитовы операторы. (Иногда пишут $B = \operatorname{Re} A$, $C = \operatorname{Im} A$.)

б) Проверьте, что A нормален тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} A$ и $\operatorname{Im} A$ перестановочны.

в) Доказать, что оператор A унитарен тогда и только тогда, когда он нормален и $(\operatorname{Re} A)^2 + (\operatorname{Im} A)^2 = 1$.

482°. Доказать, что

а) всякий оператор P в гильбертовом пространстве, обладающий свойством $P^2 = P^* = P$, является ортопроектором, т. е. оператором проектирования на замкнутое подпространство H_1 параллельно его ортогональному дополнению H_2;

б) всякий оператор S, обладающий свойством $S^{-1} = S^* = S$, является ортогональным отражением в некотором подпространстве.

483. Доказать равенства $\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2 = \|A^*\|^2$ для любого ограниченного оператора A в гильбертовом пространстве H.

484. Пусть A — положительный оператор в предгильбертовом пространстве H, x — любой вектор из H.

а) Доказать, что числовая последовательность $a(k) = \ln(A^k x, x)$ выпукла, т. е. $a\left(\frac{k+l}{2}\right) \leqslant \frac{a(k)+a(l)}{2}$.

б) Доказать неравенство $\|Ax\|^2 \leqslant Q_A(x) \cdot \|A\|$, где $Q_A(x) = (Ax, x)$.

485. Пусть $\{A_n\}$ — монотонная ограниченная последовательность операторов в гильбертовом пространстве H. Доказать, что существует $\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} A_n$.

486. Пусть H_1 — замкнутое подпространство в гильбертовом пространстве H, $H_2 = H_1^\perp$, P — ортопроектор на H_1, A — оператор в H. Выразить в виде алгебраического соотношения между A и P следующие утверждения:

а) H_1 инвариантно относительно A;

б) H_1 и H_2 инвариантны относительно A.

487. Пара конечномерных подпространств (L_1, L_2) в гильбертовом пространстве H (над **R** или **C**) называется *конгруэнтной* паре (M_1, M_2), если существует такой унитарный оператор U в H, который переводит L_1 в M_1 и L_2 в M_2. Необходимыми условиями конгруэнтности являются равенства $\dim L_1 = \dim M_1$, $\dim L_2 = \dim M_2$. В дальнейшем они считаются выполненными. Пусть P_i — ортопроектор на L_i, Q_i — ортопроектор на M_i $(i = 1, 2)$.

а) Пусть $\dim L_i = \dim M_i = 1$. Доказать, что для конгруэнтности пар (L_1, L_2) и (M_1, M_2) в вещественном пространстве необходимо и достаточно, чтобы были равны углы между векторами, порождающими эти пространства.

б) Выразить угол между векторами, порождающими пространства L_1 и L_2, через проекторы P_1 и P_2.

в) Найти критерий конгруэнтности двух пар одномерных подпространств в комплексном пространстве.

488. В обозначениях задачи 487 пусть $\lambda_1, \ldots \lambda_n, \ldots$ — собственные значения оператора $P_1P_2P_1$.

а) Доказать, что λ_i — вещественные числа, заключенные между 0 и 1.

б) Доказать, что отличных от нуля чисел λ_i не больше чем $k = \min(\dim L_1, \dim L_2)$. Расположим их в порядке убывания и положим $\varphi_i = \arccos\sqrt{\lambda_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Числа φ_i называются *углами между подпространствами* L_1 и L_2.

в) Если $\dim L_1 = 1$, $\dim M_1 = 1$, то имеется единственный угол φ_1 между L_1 и L_2 и единственный угол ψ_1 между M_1 и M_2. Доказать, что пары (L_1, L_2) и (M_1, M_2) конгруэнтны тогда и только тогда, когда $\varphi_1 = \psi_1$.

г)* Доказать общий критерий конгруэнтности: пара (L_1, L_2) конгруэнтна паре (M_1, M_2) тогда и только тогда, когда углы между L_1 и L_2 равны соответствующим углам между M_1 и M_2.

д) *Раствором подпространств* L_1 и L_2 называется число $\|P_1 - P_2\|$. Выразить это число через углы между L_1 и L_2.

489. Доказать, что для унитарности оператора $U \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$ необходимо, чтобы U переводил любой гильбертов базис в H_1 в базис в H_2, и достаточно, чтобы U переводил некоторый базис в H_1 в базис в H_2.

490. Для любого оператора A в гильбертовом пространстве доказать соотношения:

а) $(\operatorname{im} A)^{\perp} = \ker A^*$;

б) $(\ker A)^{\perp} = \overline{(\operatorname{im} A^*)}$

(черта означает замыкание).

491. Пусть последовательность операторов $\{A_n\}$ в гильбертовом пространстве H слабо сходится к A и, кроме того, для любого $x \in H$ $\|A_n x\| \to \|Ax\|$. Доказать, что $\{A_n\}$ сильно сходится к A. В частности, это означает, что для последовательностей унитарных операторов сильная и слабая сходимости к унитарному пределу совпадают.

492. Пусть $\mathscr{L}(H)$ — алгебра ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H. Доказать, что всякий автоморфизм $\mathscr{L}(H)$, перестановочный с операцией сопряжения, имеет вид $A \mapsto UAU^{-1}$, где U — унитарный оператор в H.

493. Найти все замкнутые по норме идеалы в алгебре $\mathscr{L}(H)$ (см. задачу 492) для сепарабельного гильбертова пространства H.

494. Вывести из теоремы Куранта следующий *принцип промежуточности*. Пусть A — компактный эрмитов оператор в гильбертовом пространстве H, H_1 — замкнутое подпространство коразмерности 1 в H (т. е. $\dim H_1^{\perp} = 1$), P — ортопроектор на H_1. Тогда для собственных чисел $\{\lambda_i\}$ оператора A и собственных чисел $\{\mu_i\}$ оператора PAP, занумерованных так же, как в теореме Куранта, имеем

$$\lambda_{-1} \leqslant \mu_{-1} \leqslant \lambda_{-2} \leqslant \ldots \leqslant 0 \leqslant \ldots \leqslant \mu_2 \leqslant \lambda_2 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_1.$$

495*. а) Доказать, что всякий положительный оператор A в гильбертовом пространстве имеет положительный квадратный корень B, который может быть получен как сильный предел последовательности B_n, определенной начальным условием $B_0 = 0$ и рекуррентной формулой $B_{n+1} = B_n + \frac{A - B_n^2}{2\sqrt{\|A\|}}$.

б) Доказать единственность положительного квадратного корня B из положительного оператора A.

496. а) Доказать, что в конечномерном гильбертовом пространстве H всякий оператор A допускает запись в виде $A = RU$ и в виде $A = VS$, где R и V — положительные операторы, а U и V — унитарные. Эта запись называется *полярным разложением* A. (В случае $\dim H = 1$ она сводится к записи комплексного числа a в виде $re^{i\varphi}$.)

б) Доказать, что R и S определяются по оператору A однозначно. Верно ли это относительно U и V?

в) Проверить, что оператор T одностороннего сдвига в l_2 не допускает полярного разложения в смысле п. а).

497. Пусть U — оператор в гильбертовом пространстве H, H_1 — ортогональное дополнение к $\ker U$, H_2 — замыкание $\operatorname{im} U$. Оператор U называется *частично изометрическим*, если он изометрично отображает H_1 на H_2. Выразить это свойство в терминах ортопроекторов P_1, P_2 на H_1 и H_2.

498. Пусть A — оператор в гильбертовом пространстве H; доказать, что существует единственное представление A в виде $A = RU$, где R — положительный оператор, а U — частично изометрический оператор (см. задачу 498), обладающий свойством $\ker U = \ker A$. Это представление также называется *полярным разложением* A.

499. Оператор A называется *оператором Гильберта — Шмидта*, если для некоторого гильбертова базиса $\{x_\beta\}_{\beta\in B}$ сходится ряд $\sum_{\beta\in B} \| Ax_\beta \|^2$.

а) Доказать, что если A — оператор Гильберта — Шмидта, то величина $\|A\|_2 = \left(\sum_{\beta\in B} \| Ax_\beta \|\right)^{1/2}$ не зависит от выбора базиса и определяет норму в пространстве $\mathscr{L}_2(H)$ операторов Гильберта — Шмидта, мажорирующую обычную норму оператора.

б) Доказать, что норма $\|\cdot\|_2$ порождается скалярным произведением $\langle A, B\rangle_{\mathscr{L}_2(H)} = \sum\limits_{\gamma\in\Gamma} (Ay_\gamma, By_\gamma)_H$, где $\{y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ — любой гильбертов базис в H.

в) Доказать, что всякий оператор Гильберта — Шмидта компактен.

г) Построить изоморфизм пространства $\mathscr{L}_2(H)$ и гильбертова тензорного произведения H на H'.

д) Доказать, что всякий оператор Гильберта — Шмидта в $L_2(X, \mu)$ является интегральным оператором с ядром $K\in L_2(X\times X, \mu\times\mu)$.

500. Оператор A в гильбертовом пространстве H называется *ядерным*, если он представим в виде $A=BC$, где B и C — операторы Гильберта — Шмидта.

Доказать, что

а) если A — ядерный оператор, то для любого базиса $\{y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ в H ряд $\sum (Ay_\gamma, y_\gamma)$ сходится и его сумма не зависит от выбора базиса; она обозначается $\operatorname{tr} A$ и называется *следом оператора* A;

б) если A — ядерный и B — ограниченный операторы, то AB и BA — ядерные операторы и $\operatorname{tr} AB=\operatorname{tr} BA$.

в) Совокупность всех ядерных операторов образует банахово пространство $\mathscr{L}_1(H)$ относительно нормы $\|\cdot\|_1$, определяемой формулой $\|A\|=\operatorname{tr} R$, где $A=RU$ — полярное разложение A.

г) Пусть $\mathscr{K}(H)$ — пространство компактных операторов в H с обычной нормой. Доказать изоморфизмы: $\mathscr{K}(H)'\approx\mathscr{L}_1(H)$, $\mathscr{L}_1(H)'\approx\mathscr{L}(H)$.

501*. Пусть H — гильбертово пространство, X — множество с мерой μ. Набор единичных векторов $\{\xi_x\}_{x\in X}$ из H называется *непрерывным базисом* (в другой терминологии — когерентной или переполненной системой), если для любого $\xi\in H$ функция $x\mapsto(\xi, \xi_x)$ μ-измерима и справедливо равенство

$$\|\xi\|^2 = \int\limits_X |(\xi, \xi_x)|^2\,d\mu(x).$$

а) Построить непрерывные базисы в пространствах задачи 465.

б) Доказать, что отображение $\xi\mapsto(\xi, \xi_x)$ является изометрическим отображением H в $L_2(X, \mu)$.

в) Доказать равенство $\dim H=\mu(X)$.

г)** Доказать равенство $\operatorname{tr} A = \int\limits_X (A\xi_x, \xi_x)\,d\mu(x)$ для ядерного оператора A.

502.** Пусть A — ядерный интегральный оператор в пространстве $L_2[0, 1]$ с непрерывным ядром $K(x, y)$. Доказать тождество

$$\operatorname{tr} A = \int\limits_0^1 K(x, x)\, dx.$$

ГЛАВА IV

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ЭЛЕМЕНТЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

§ 1. Свертки на коммутативной группе

1. Свертки основных функций.

503. Пусть G — конечная группа, K — некоторое поле.

а) Доказать, что центр $K[G]$ состоит из функций $a \in K[G]$, обладающих свойством $a(gh) = a(hg)$ для любых $h, g \in G$.

б) Классом сопряженных элементов в G называется множество вида $C_h = \{ghg^{-1}, g \in G\}$. Доказать, что число различных классов сопряженных элементов в G равно размерности центра $K(G)$.

в) Известно, что алгебра $K(G)$ коммутативна. Верно ли, что коммутативна группа G?

504. Пусть $Ц_n$ означает циклическую группу порядка n.

а) Доказать, что $\mathbf{C}(Ц_n)$ изоморфна прямой сумме n экземпляров поля $\mathbf{C}$.

б) Верно ли аналогичное утверждение для поля $\mathbf{R}$?

505. Доказать изоморфизм $\mathbf{R}(S_3)$ и $\mathbf{R} + \mathbf{R} + \mathrm{Mat}_2 \mathbf{R}$.

506. Доказать, что естественное вложение G в $K(G)$ является универсальным объектом для категории отображений φ группы G в ассоциативные K-алгебры с единицей, обладающих свойствами $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$, $\varphi(1) = 1$ (морфизм объекта φ: $G \to A$ в объект ψ: $G \to B$ определен как гомоморфизм χ: $A \to B$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "\chi"] \\ G \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\psi"'] & B \end{tikzcd}$$

коммутативна). Останется ли утверждение в силе, если отказаться от условия $\varphi(1) = 1$?

507. Пусть $G = \mathbf{R}^n$ или $\mathbf{T}^n$. Доказать, что свертка двух ограниченных функций из $L_1(G, \mu)$ является непрерывной функцией.

508. Пусть функция φ в $\mathbf{R}^n$ финитна и k раз непрерывно дифференцируема, а функция f принадлежит $L_1(\mathbf{R}^n, dx)$. Доказать, что свертка $\varphi * f$ имеет непрерывные производные до k-го порядка.

509. Пусть L — некоторое банахово пространство функций на группе G с нормой $\|\cdot\|_L$, обладающей свойствами:

1) $\|T(a)f\|_L = \|f\|_L$, где $T(a)$ — оператор сдвига: $T(a)f(x) = f(x+a)$;

2) $\|T(a)f - f\|_L \to 0$ при $a \to 0$ в G.

Доказать, что оператор $S(\varphi)$, $\varphi \in L_1(G, \mu)$, переводит пространство L в себя и имеет в этом пространстве норму, не превосходящую $\|\varphi\|_{L_1}$.

510. Говорят, что последовательность функций $\{f_k\}$ на топологическом пространстве X с борелевской мерой μ является *дельтообразной* для точки $a \in X$, если выполняются условия:

1) $f_k(x) \geqslant 0$ на X;

2) $\int\limits_X f_k(x)\, d\mu(x) = 1$;

3) для любой окрестности U точки a при $k \to \infty$ $\int\limits_{X \setminus U} f_k(x)\, d\mu(x) \to 0$.

Доказать, что следующие последовательности дельтообразны для точки $O \in \mathbf{R}^n$:

а)* $f_n(x) = k^n \varphi(kx)$, где φ — любая борелевская функция на $\mathbf{R}^n$, обладающая свойствами 1), 2);

б) $$f_n(x) = \begin{cases} c_k(1 - \|x\|^2)^k, & \|x\| \leqslant 1, \\ 0, & \|x\| > 1, \end{cases}$$

где $\{c_k\}$ — подходящая последовательность констант.

511. Пусть G — коммутативная топологическая группа с инвариантной мерой μ, $\{f_k\}$ — дельтообразная последовательность для точки $a \in G$ (см. задачу 510), L — банахово пространство функций на G, удовлетворяющее условиям задачи 509.

Доказать, что $S(f_k) \to T(a)$ при $k \to \infty$.

512. Пусть функция φ на $\mathbf{R}^n$ внутри шара радиуса R совпадает с некоторым многочленом, а вне этого шара равна нулю; функция $\psi \in L_1(\mathbf{R}^n, dx)$ имеет носитель в шаре радиуса $r < R$.

Доказать, что свертка $\varphi * \psi$ имеет носитель в шаре радиуса $R+r$ и совпадает с некоторым многочленом в шаре радиуса $R-r$. (Все шары имеют центром точку 0.)

513. *Теорема Вейерштрасса.* Доказать, что всякая непрерывная функция в $\mathbf{R}^n$ может быть на любом компакте равномерно аппроксимирована многочленом.

514. Пусть $f \in L_1(G, \mu)$. Доказать, что $S(f)$ — ограниченный оператор в гильбертовом пространстве $L_2(G, \mu)$. Вычислить сопряженный оператор $S(f)^*$.

515. Пусть f_1 и f_2 принадлежат $L_2(G, \mu)$. Доказать, что свертка $f_1 * f_2$ определена и принадлежит $L_\infty(G, \mu)$.

516. Определим операцию $*$ в пространстве функций на группе G равенством $f^*(x) = \overline{f(-x)}$.

Доказать, что

а) $f_1^* * f_2^* = (f_1 * f_2)^*$ для $f_1, f_2 \in L_1(G, \mu)$;

б) $(f_1 * f_2^*)(0) = (f_1, f_2)$ для $f_1, f_2 \in L_2(G, \mu)$.

517. Определим функцию e_k на $\mathbf{T}^n$ формулой $e_k(t) = e^{2\pi ikt}$ (здесь $k \in \mathbf{Z}^n$ — мультииндекс, $kt = k_1t_1 + \ldots + k_nt_n$).

Доказать тождества

$$e_k * e_k = e_k, \quad e_k * e_j = 0 \text{ при } k \neq j.$$

518. *Тригонометрическим многочленом* на $\mathbf{T}^n$ называется линейная комбинация функций e_k, определенных в задаче 517. Доказать, что совокупность тригонометрических многочленов образует идеал в алгебре $L_1(\mathbf{T}^n, dt)$.

519*. Построить на торе $\mathbf{T}^n$ дельтообразную последовательность, состоящую из тригонометрических многочленов.

520. Доказать, что тригонометрические многочлены образуют плотное множество в $C^k(\mathbf{T}^n)$ при любом k.

521*. Пусть f_1 и f_2 — локально суммируемые функции, носители которых ограничены слева. Тогда можно определить свертку $f_1 * f_2$, которая обладает тем же свойством. Вычислить явно свертки:

а) $[\theta(x)x^\alpha] * [\theta(x)x^\beta]$;

б) $[e^{ax}\theta(x)] * [e^{bx}\theta(x)]$.

522.** Пусть числа $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, $r \geqslant 1$ связаны равенством $1/p + 1/q - 1/r = 1$. Доказать, что

$$L_p(G, \mu) * L_q(G, \mu) \subset L_r(G, \mu).$$

2. Свертки обобщенных функций.

523. Записать в виде свертки дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами $L\colon f \to \sum\limits_{k=0}^{n} c_k f^{(k)}$.

524°. Доказать тождество $f * 1 = \langle f, 1\rangle \cdot 1$ для любой обобщенной функции $f = \mathscr{E}'(\mathbf{R})$.

525. Положим $\check{f}(x) = f(-x)$. Доказать тождество $(f_1 * f_2)^{\vee} = \check{f}_1 * \check{f}_2$, где f_1 и f_2 — обобщенные функции, одна из которых имеет компактный носитель.

526*. Пусть $f \in S'(\mathbf{R}^n)$, $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$. Свертка $f * \varphi$ определяется формулой $f * \varphi = S(\check{\varphi})' f$, т. е. $\langle f * \varphi, \psi\rangle = \langle f, \varphi * \psi\rangle$. Доказать, что

а) $f * \varphi$ — регулярная обобщенная функция;

б) $(f * \varphi)(x) = \langle f, T(-x)\check{\varphi}\rangle$;

в) $(f * \varphi)(x)$ растет на бесконечности не быстрее многочлена от $|x|$.

527*. Пусть $f \in \mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$, $\varphi \in \mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$. Свертка $f * \varphi$ определяется формулой $f * \varphi = S(\check{\varphi}) f$ (ср. с задачей 526). Доказать, что:

а) $f * \varphi$ — регулярная обобщенная функция;

б) $f * \varphi(x) = \langle f, T(-x)\check{\varphi}\rangle$;

в) $f * \varphi \in \mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$;

г) оператор $S(f)\colon \mathscr{E}(\mathbf{R}^n) \to \mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$ непрерывен.

528. Пусть $f \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$. Доказать непрерывность оператора $S(f)\colon \mathscr{D}(\mathbf{R}^n) \to \mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$.

529. Пусть $\mathscr{E}(\mathbf{T}^n)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций на торе $\mathbf{T}^n$ (с топологией равномерной сходимости всех производных), $\mathscr{E}'(\mathbf{T}^n)$ — сопряженное пространство обобщенных функций. Определить операцию свертки в $\mathscr{E}'(\mathbf{T}^n)$ и доказать, что $\mathscr{E}'(\mathbf{T}^n) * \mathscr{E}(\mathbf{T}^n) \subset \mathscr{E}(\mathbf{T}^n)$.

530. Доказать, что пространство тригонометрических многочленов плотно в $\mathscr{E}(\mathbf{T})$.

531. Доказать утверждение задачи 530 для $\mathscr{E}'(\mathbf{T}^n)$.

532*. Пусть f_1 и f_2 — финитные непрерывные функции на полупрямой $[0, \infty)$. Положим $F_i = f_i(\sqrt{x^2 + y^2})$.

Доказать, что свертка $F = F_1 * F_2$ также имеет вид $F(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$, где f — некоторая финитная непрерывная функция на $[0, \infty)$, и дать явное выражение f через f_1 и f_2.

533*. Пусть $\mathscr{E}_{\pm}[\mathbf{R}]$ — подпространства в $\mathscr{E}(\mathbf{R})$, состоящие из функций с носителем, ограниченным слева или справа, $\mathscr{D}'_{\pm}(\mathbf{R})$ — аналогичные подпространства в $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$.

а) Доказать изоморфизм $(\mathscr{E}_{\pm}(\mathbf{R}))' = \mathscr{D}'_{\mp}(\mathbf{R})$ (сходимость $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathscr{E}_{\pm}(\mathbf{R})$ определяется условиями: $\operatorname{supp} \varphi_n$ ограничены с одной стороны общей константой; $\varphi_n \to \varphi$ в смысле $\mathscr{E}(\mathbf{R})$).

б) Определить операцию свертки в $\mathscr{D}'_{\pm}(\mathbf{R})$.

в) Доказать, что $\mathscr{E}_{\pm}(\mathbf{R}) * \mathscr{D}'_{\pm}(\mathbf{R}) \subset \mathscr{E}_{\pm}(\mathbf{R})$.

534*. Положим при $\alpha > 0$ $f_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \theta(x)$.

а) Проверить, что $f_\alpha \in \mathscr{D}'_{+}(\mathbf{R})$ при $\alpha > -1$.

б) Доказать тождество $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$.

в) Доказать тождество $\frac{d}{dx} f_\alpha = f_{\alpha-1}$ при $\alpha > 1$.

г) Найти предел f_α при $\alpha \to 0$ в $\mathscr{D}'_{+}(\mathbf{R})$.

535*. Построить в $\mathscr{D}'_{+}(\mathbf{R})$ семейство операторов $I(\alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, обладающее свойствами:

а) $I(\alpha) I(\beta) = I(\alpha + \beta)$, $I(0) = 1$;

б) $I(1)\varphi(x) = \int\limits_0^x \varphi(t)\, dt$ для $\varphi \in \mathscr{E}'_{+}(\mathbf{R})$;

в) $I(-1)\varphi(x) = \varphi'(x)$ для $\varphi \in \mathscr{E}'_{+}(\mathbf{R})$;

г) $I(\alpha) f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ при $\beta > -1$, $\alpha + \beta > -1$ (f_α определены в задаче 534).

Оператор $I(\alpha)$ называется *оператором дробного интегрирования* порядка α (или *дробного дифференцирования* порядка $-\alpha$) и обозначается иногда через $(d/dx)^{-\alpha}$.

536*. Пусть обобщенная функция f на $\mathbf{R}^2$ имеет вид

$$\langle f, \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi(\cos t, \sin t)\, dt.$$

Доказать, что $f * f$ — регулярная обобщенная функция, и вычислить ее.

537*. Вычислить свертку $f * f$, где f — обобщенная функция на $\mathbf{R}^3$, задаваемая формулой $\langle f, \varphi \rangle = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \varphi(x_1, x_2, x_3)\, d\sigma$, где S — сфера $\|x\| = 1$, $d\sigma$ — элемент площади сферы.

§ 2. Преобразование Фурье

1. Характеры коммутативной группы.

538. Найти явный вид характеров циклической группы $Ц_n$ порядка n.

539. Доказать, что всякая конечная коммутативная группа G изоморфна (не канонически) своей двойственной группе $\widehat{G}$.

540. *Обобщенным* или *неунитарным характером* группы G называют ее гомоморфизм в мультипликативную группу поля комплексных чисел.

Доказать, что для компактной группы G все обобщенные характеры являются обычными. Найти обобщенные характеры групп: а) $\mathbf{Z}$, б) $\mathbf{R}$, в) $\mathbf{C}$, г) $\mathbf{R}^*$, д) $\mathbf{C}^*$ ($*$ означает мультипликативную группу).

541*. Доказать, что если группа G компактна, то двойственная группа $\widehat{G}$ дискретна.

542*. Доказать, что если группа G дискретна, то двойственная группа $\widehat{G}$ компактна.

543. Пусть χ — характер группы $\mathbf{R}$, рассматриваемый как элемент пространства $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$. Доказать, что χ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\chi' = c\chi$, где c — некоторая константа.

544. Пусть χ — характер группы G, $f \in L_1(G, \mu)$. Доказать, что $\chi * f = cf$, где

$$c = (\chi * f)(0) = \int_G f(x)\,\overline{\chi(x)}\,d\mu(x).$$

545. Пусть G — компактная группа с инвариантной мерой μ, нормированной условием $\mu(G) = 1$. Доказать, что для любых двух характеров $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{G}$ справедливо соотношение

$$\chi_1 * \chi_2 = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \chi_1 \neq \chi_2, \\ \chi_1, & \text{если} \quad \chi_1 = \chi_2. \end{cases}$$

546. Доказать, что все характеры группы $\mathbf{T}^n$ исчерпываются функциями $e_k(t) = e^{2\pi ikt}$ (ср. с задачей 517).

547*. Доказать, что соответствие $G \to \widehat{G}$ определяет контравариантный функтор в категории топологических абелевых групп.

548. Пусть L — ЛТП над полем $\mathbf{R}$, рассматриваемое как топологическая абелева группа. Найти двойственную к L группу $\widehat{L}$.

549.** Пусть $\mathbf{Q}_p$ — поле p-адических чисел (см. задачу 38), $\mathbf{Z}_p$ — подкольцо целых p-адических чисел. Найти двойственные группы к следующим группам: а) $\mathbf{Q}_p$, б) $\mathbf{Z}_p$, в) $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$.

550.** Пусть G_0 — замкнутая подгруппа в G, $G_1 = G/G_0$ — соответствующая фактор-группа. Это кратко записывается в виде точной последовательности

$$0 \to G_0 \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} G_1 \to 0,$$

где 0 — тривиальная группа из одного элемента. Доказать, что двойственная последовательность

$$0 \leftarrow \widehat{G}_0 \xleftarrow{\widehat{i}} \widehat{G} \xleftarrow{\widehat{p}} \widehat{G}_1 \leftarrow 0$$

также точна.

551*. Найти двойственную группу $\widehat{G}$, если $G = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. (Группа G естественно отождествляется с группой всех корней из единицы с помощью отображения $x \bmod \mathbf{Z} \to e^{2\pi i x}$.)

552. Пусть $G = \prod\limits_{n=1}^{\infty} Ц_2$ — группа всех последовательностей нулей и единиц (групповая операция — сложение по модулю 2; топология определяется покоординатной сходимостью).

а) Доказать, что G компактна.

б) Доказать, что двойственная группа изоморфна счетной группе $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Ц_2$ всех финитных последовательностей нулей и единиц (групповая операция — сложение по модулю 2; топология дискретна).

553. Пусть α — иррациональное число, $f \in L_1(\mathbf{T}, dt)$ — функция, обладающая свойством $f(t+\alpha) = f(t)$ почти всюду. Доказать, что f почти всюду постоянна.

554. а)° Пусть $f \in L_1(\mathbf{R}, dx)$. Доказать, что $\tilde{f}(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$.

б) Пусть группа G имеет вид $\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^m \times \mathbf{Z}^k$ и $f \in L_1(G, \mu)$. Доказать, что $\tilde{f}(x) \to 0$ при $x \to \infty$ в $\widehat{G} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{Z}^m \times \mathbf{T}^k$.

555.** Пусть $G = \mathbf{Q}_p^+$ — аддитивная группа поля p-адических чисел. Обозначим через $\mathscr{D}(G)$ пространство финитных локально постоянных функций на G. Доказать, что преобразование Фурье переводит пространство $\mathscr{D}(G)$ в себя.

556*. Пусть $S(\mathbf{Z})$ — пространство двусторонних последовательностей $\{c_n\}$, обладающих свойством $c_n = O(n^{-k})$ для всех k. Топологию в $S(\mathbf{Z})$ зададим семейством норм

$$p_k(\{c_n\}) = \sup_n |n^k c_n|, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Доказать, что преобразование Фурье устанавливает изоморфизм линейных топологических пространств $\mathscr{E}(\mathbf{T})$ и $S(\mathbf{Z})$.

557. Непрерывная функция f на группе G называется *положительно определенной*, если для любого конечного набора $x_1, \ldots, x_n$ элементов G матрица A с элементами $a_{kj} = f(x_k - x_j)$ положительно определена. Доказать следующие соотношения для положительно определенной функции f:

а) $|f(x)| \leqslant f(0)$, $f(x) = \overline{f(-x)}$;

б) $|f(0)f(x-y) - f(x)\overline{f(y)}|^2 \leqslant (f^2(0) - |f(x)|^2)(f^2(0) - |f(y)|^2)$.

558. а) Доказать, что линейная комбинация характеров группы G с положительными коэффициентами является положительно определенной функцией на G.

б)* Доказать, что произведение двух положительно определенных функций является положительно определенной функцией.

в) Доказать, что если $\varphi \in L_1(G, \mu)$, то функция $\varphi * \varphi^*$ (где $\varphi^*(x) = \overline{\varphi(-x)}$) положительно определена.

559. Пусть G — конечная группа. Доказать, что f положительно определена на G тогда и только тогда, когда функция $\tilde{f}$ неотрицательна на $\widehat{G}$.

560. Пусть $\varphi \in L_1(G, \mu)$ и $\varphi \geqslant 0$. Доказать, что $\tilde{\varphi}$ положительно определена на $\widehat{G}$.

2. Ряды Фурье.

561°. Что можно сказать о коэффициентах Фурье функции f на $\mathbf{T}$, если известно, что f

а) четна: $f(t) = f(1-t)$,

б) нечетна: $f(t) = -f(1-t)$,

в) вещественна почти всюду на $\mathbf{T}$?

562. Пусть функция f на $\mathbf{T}$ имеет кусочно-дифференцируемую k-ю производную. Каково максимальное число l, для которого можно гарантировать оценку $|c_n| = o(|n|^{-l})$ для коэффициентов Фурье функции f?

563. Доказать, что образ пространства $C^k(\mathbf{T})$ при преобразовании Фурье содержится в множестве последовательностей, обладающих свойством $|c_n| = o(|n|^{-k})$, и содержит множество последовательностей, обладающих свойством $|c_n| = o(n^{-k-1-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$.

564. Пусть $W^k(\mathbf{T})$ — совокупность функций на $\mathbf{T}$, у которых k-я обобщенная производная принадлежит $L_2(\mathbf{T}, dt)$. Дайте описание этого пространства в терминах коэффициентов Фурье.

565. Выразить в терминах коэффициентов Фурье следующие свойства функции f:

а) $f(t+1/2)=f(t)$;

б) $f(t+1/k)=\lambda f(t)$; при каких $k\in\mathbf{Z}$ существуют ненулевые функции, обладающие этим свойством?

566*. Точная последовательность $0\to Ц_n\xrightarrow{i}\mathbf{T}\xrightarrow{p}\mathbf{T}\to 0$ задается вложением i: $Ц_n\to\mathbf{T}$ по формуле $i(k \bmod n)=$ $=e^{2\pi ik/n}$ и проекцией p: $\mathbf{T}\to\mathbf{T}$ по формуле $p(z)=z^n$. Описать двойственную точную последовательность.

567. Пусть функция f суммируема на отрезке $[0, 1/4]$. Как нужно продолжить f на отрезок $[0, 1]$, чтобы ее коэффициенты Фурье удовлетворяли соотношениям $c_{2k}=0$, $c_{2k-1}=-c_{1-2k}$.

568°. Пусть $\{c_n\}$ — коэффициенты Фурье функции $f\in$ $\in L_1(\mathbf{T},\ dt)$. Найти коэффициенты Фурье $\{c_n(h)\}$ для сглаженной функции (или *функции Стеклова*) $f_h(x)=$

$$=\frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h} f(\xi)\,d\xi.$$

569. Какими свойствами характеризуются последовательности $\{c_n\}$ коэффициентов Фурье:

а) тригонометрических многочленов,

б) многочленов от $\{t\}$,

в) многочленов от $\{t-1/2\}$?

570*. Доказать, что непрерывная функция f на $\mathbf{T}$ положительно определена (см. задачу 557) тогда и только тогда, когда ее коэффициенты Фурье неотрицательны.

571. Последовательность $\{c_n\}$ $(n\in\mathbf{Z})$ называется *положительно определенной*, если для любой финитной последовательности $\{z_n\}$ $(n\in\mathbf{Z})$ справедливо неравенство $\sum\limits_{n,m} c_{n-m}z_n\bar{z}_m\geqslant 0$.

Доказать, что положительно определенная последовательность ограничена и обладает свойствами: $c_n=\bar{c}_{-n}$, $c_0\geqslant|c_n|$, $|c_0c_{m+n}-c_mc_n|^2\leqslant\left(c_0^2-|c_m|^2\right)\left(c_0^2-|c_n|^2\right)$.

572. Доказать, что всякая положительно определенная последовательность (см. задачу 571) является преобразованием Фурье конечной борелевской меры μ на $\mathbf{T}$:

$$c_n=\int\limits_0^1 e^{-2\pi int}\,d\mu(t).$$

573. Пусть U — унитарный оператор в гильбертовом пространстве H, $\xi\in H$. Доказать, что последовательность $c_n=(U^n\xi,\ \xi)$ положительно определена.

574. В условиях задачи 573 предположим, что ξ — *циклический вектор* для U (т. е. линейная оболочка векторов $U^n\xi$ $(n \in \mathbf{Z})$ плотна в H). Построить изоморфизм H и $L_2(\mathbf{T}, \mu)$, где μ — преобразование Фурье последовательности $\{c_n\}$, при котором оператор U переходит в умножение на $e^{2\pi i t}$.

575*. Пусть f — кусочно-дифференцируемая вещественная функция на $\mathbf{T}$, $S_n = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{2\pi i k t}$ — частичная сумма ее ряда Фурье, $\Gamma_n \subset \mathbf{T} \times \mathbf{R}$ — график функции S_n. Найти предельное множество для $\{\Gamma_n\}$, т. е. совокупность всех предельных точек последовательностей $\{\gamma_n\}$ $(\gamma_n \in \Gamma_n)$.

576. Доказать, что обобщенная функция $\mathbf{T}$ определяется однозначно своими коэффициентами Фурье.

577. Обобщенная функция f на $\mathbf{T}$ называется положительно определенной, если для любой функции $\varphi \in \mathscr{E}(\mathbf{T})$ справедливо неравенство $\langle f, \varphi * \varphi^* \rangle \geqslant 0$. Охарактеризовать положительно определенные обобщенные функции в терминах их коэффициентов Фурье.

578. Пусть α — иррациональное число, а X — измеримое подмножество $\mathbf{T}$, инвариантное относительно сдвига на α. Докажите, что если μ — мера Хаара, то либо $\mu(X) = 0$, либо $\mu(X) = 1$. (Это свойство для преобразований в пространстве с мерой называется *эргодичностью*; преобразование называется эргодическим, если для любого измеримого подмножества либо оно само, либо его дополнение имеют меру нуль.)

579*. Решить уравнение теплопроводности $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на $\mathbf{T}$ с начальными условиями $u(0, x) = v(x)$ с помощью метода Фурье.

3. Интеграл Фурье.

580. Пусть $D_k = \partial/\partial x_k$, M_k — оператор умножения на x_k. Введем в пространстве $S(\mathbf{R}^n)$ операторы $A_k = iD_k + M_k$, $A_k^* = iD_k - M_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ (так называемые *операторы рождения и уничтожения* в квантовой теории поля).

а) Доказать, что система уравнений $A_k f = 0$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ имеет в $S(\mathbf{R}^n)$ одномерное пространство решений.

б)* Пусть $f_0 \in S(\mathbf{R}^n)$ — базисный вектор в пространстве решений системы $A_k f = 0$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ (так называемый *вакуумный вектор*). Доказать, что система функций $f_m = (A_1^*)^{m_1} \ldots (A_n^*)^{m_n} f_0$ $(m \in \mathbf{N}^n)$ плотна в $S(\mathbf{R}^n)$.

в) Положим $N_k = \frac{1}{4\pi} A_k^* A_k$, $N = \sum_{k=1}^{n} N_k$ (так называемые *операторы чисел заполнения* и *числа частиц*). Доказать, что функции f_m $(m \in \mathbf{Z}^n)$ являются собственными для операторов N_k и N, и вычислить соответствующие собственные значения.

г)* Построить изоморфизм пространства $S(\mathbf{R}^n)$ и пространства n-кратных последовательностей $\{c_m\}$ $(m \in \mathbf{N}^n)$, обладающих свойством $|c_m| = o(|m|^{-k})$ для всех $k \in \mathbf{N}$.

д) Вычислить преобразование Фурье функций f_m, $m \in \mathbf{N}^n$.

581. Доказать, что всякий непрерывный оператор в пространстве $S(\mathbf{R}^n)$, перестановочный с операторами M_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ (см. задачу 580), является оператором умножения на функцию.

582. Доказать, что всякий непрерывный оператор в $S(\mathbf{R}^n)$, перестановочный с операторами M_k и D_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ (см. задачу 580), является скалярным.

583. Доказать, что прямое и обратное преобразования Фурье сохраняют пространство $S(\mathbf{R}^n)$ и являются в нем взаимно обратными непрерывными преобразованиями.

584°. Что можно сказать о преобразовании Фурье функции f, если известно, что функция f

а) четна,

б) нечетна,

в) вещественна,

г) удовлетворяет условию $f(x) = \overline{f(-x)}$?

585. Функции f и g на $\mathbf{R}^n$ связаны равенством $f(x) = g(Ax + b)$, где A — линейный обратимый оператор в $\mathbf{R}^n$, $b \in \mathbf{R}^n$. Как связаны преобразования Фурье $\tilde{f}(\lambda)$ и $\tilde{g}(\lambda)$?

586. Доказать, что если $f \in L_1(\mathbf{R}^n, dx)$ и $\tilde{f}(\lambda) \equiv 0$, то $f(x) = 0$ почти всюду.

587. Пространство $H_s(\mathbf{R}^n)$ определяется при $s \geqslant 0$ как пространство преобразований Фурье всех функций из $L_2(\mathbf{R}^n, (1 + \|\lambda\|^{s/2})\,d\lambda)$. Доказать, что при $s > n/2$ каждая функция $f \in H_s(\mathbf{R}^n)$ совпадает почти всюду с некоторой непрерывной ограниченной функцией.

588. Доказать непрерывность операторов D_k: $H_s(\mathbf{R}^n) \to H_{s-1}(\mathbf{R}^n)$ $(1 \leqslant k \leqslant n,\ s \geqslant 1)$ (см. задачи 580 и 587).

589. Доказать, что свертка двух функций из $S(\mathbf{R}^n)$ также принадлежит $S(\mathbf{R}^n)$.

590. Доказать, что свертка функций $f_1 \in H_{s_1}(\mathbf{R}^n)$ и $f_2 \in H_{s_2}(\mathbf{R}^n)$ (см. задачу 587) принадлежит $BC^k(\mathbf{R}^n)$, если

$s_1+s_2\geqslant k$. (Через $BC^k(\mathbf{R}^n)$ обозначается пространство функций на $\mathbf{R}^n$ с непрерывными ограниченными производными до порядка k. Норма в нем имеет вид

$$\|f\|=\sup_{x\in\mathbf{R}^n,|l|\leqslant k}|f^{(l)}(x)|.)$$

591. Пусть P — многочлен на $\mathbf{R}$ степени $2m$, не имеющий вещественных корней.

а) Доказать, что преобразование Фурье функции $f(x)=1/P(x)$ бесконечно дифференцируемо всюду, кроме точки $\lambda=0$.

б) Доказать, что $\tilde{f}(\lambda)$ имеет в точке $\lambda=0$ односторонние производные всех порядков.

в) Каков порядок гладкости $\tilde{f}(\lambda)$ (число непрерывных производных)?

592. Пусть $f\in L_1(\mathbf{R},\ dx)$ — рациональная функция. Доказать, что для некоторых констант $c>0$ и $\varepsilon>0$ справедлива оценка $|\tilde{f}(\lambda)|\leqslant ce^{-\varepsilon|\lambda|}$ $(\lambda\in\mathbf{R})$.

593. а) Известно, что $f\in S(\mathbf{R})$ и $\int\limits_{\mathbf{R}}x^nf(x)\,dx=0$ для всех $n\in\mathbf{N}$. Следует ли отсюда, что $f\equiv 0$?

б) Известно, что $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$ и $\int\limits_{\mathbf{R}}x^n\varphi(x)\,dx=0$ для всех $n\geqslant n_0$. Следует ли отсюда, что $\varphi\equiv 0$?

594*. Доказать, что всякая непрерывная положительно определенная функция f на прямой имеет вид $f(x)=$ $=\int\limits_{\mathbf{R}}e^{-2\pi i\lambda x}\,d\mu(\lambda)$, где μ — некоторая конечная борелевская мера на $\mathbf{R}$.

595. Пусть $\{U(t)\}$ $(t\in\mathbf{R})$ — однопараметрическая группа унитарных операторов в гильбертовом пространстве H (т. е. $U(t)\ U(s)=U(t+s)$), непрерывная по t в сильной операторной топологии. Доказать, что для любого вектора $\xi\in H$ функция $f(t)=(U(t)\xi,\ \xi)$ положительно определена.

596. В условиях задачи 595 предположим, что вектор ξ — циклический для $U(t)$ (т. е. линейная оболочка векторов $U(t)\xi$ $(t\in\mathbf{R})$ плотна в H). Построить изоморфизм пространств H и $L_2(\mathbf{R},\ \mu)$, при котором оператор $U(t)$ переходит в оператор умножения на $e^{2\pi i\lambda t}$.

597*. *Теорема Пэли — Винера.* Доказать, что преобразования Фурье функций из $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ образуют пространство целых аналитических функций от $\lambda\in\mathbf{C}$, обладающих свойством: существуют такое число $a>0$ и такие константы c_k, что $|g(\lambda)|\ (1+|\lambda|)^k\leqslant c_ke^{a|\mathrm{Im}\,\lambda|}$.

598*. Пусть f — непрерывная функция на $\mathbf{R}^n$, убывающая на бесконечности как $O(\|x\|^{-n})$. Тогда для любого аффинного подмногообразия $L \subset \mathbf{R}^n$ размерности $n-1$ ограничение f на L суммируемо на L относительно естественной меры Лебега μ_L на L.

а) Доказать, что если $\int\limits_L f(x)\, d\mu_L(x) = 0$ для всех $L \subset \mathbf{R}^n$, то $f(x) \equiv 0$.

б)** Выразить явно $f(x)$ через $\varphi(L) = \int\limits_L f(x)\, d\mu_L(x)$ в случае $n = 3$.

599.** Найти функцию $f \in S(\mathbf{R}^3)$, если известны интегралы этой функции по всем прямым, пересекающим данную прямую $l \subset \mathbf{R}^3$.

4. Преобразование Фурье обобщенных функций.

600. Пусть f — однородная обобщенная функция степени (λ, ε). Доказать, что $\tilde{f}$ также однородна, и найти ее степень.

601. Пусть f — регулярная обобщенная функция на окружности $\mathbf{T}$, F — обобщенная периодическая функция на прямой, связанная с f соотношением $\langle F, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbf{R}} f(e^{2\pi i t})\, \varphi(t)\, dt$.

Как связаны преобразования Фурье функций F и f?

602*. Назовем непрерывную функцию f на $\mathbf{R}^n$ *квазипериодической* с периодом R, если ее интеграл по любому шару радиуса R не зависит от положения центра шара.

а) Доказать, что для $n = 1$ квазипериодичность равносильна обычной периодичности.

б) Построить непостоянную квазипериодическую функцию на плоскости.

в) Может ли непостоянная квазипериодическая функция иметь два разных периода R_1 и R_2?

603*. Найти преобразование Фурье обобщенной функции $f(x) = e^{-\pi(Ax, x)}$ в $\mathbf{R}^n$, где A — симметрическая матрица с положительно определенной вещественной частью.

604. Найти преобразование Фурье обобщенной функции $f(x) = e^{i\pi(Ax, x)}$ в $\mathbf{R}^n$, где A — вещественная симметрическая невырожденная матрица.

605. Доказать, что образом пространства $\mathscr{E}'(\mathbf{R})$ при преобразовании Фурье является совокупность целых аналитических функций $g(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbf{C})$, удовлетворяющих оценке

$$|g(\lambda)| < C|1 + |\lambda||^N e^{R \cdot |\operatorname{Im} \lambda|},$$

где C, N, R — некоторые константы (свои для каждой функции g). От каких свойств преобразуемой функции зависят константы R и N?

606. Доказать, что уравнение $\Delta f = f$ не имеет ненулевых решений в пространстве $S'(\mathbf{R}^n)$. (Здесь $\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ — *оператор Лапласа.*)

607*. Пусть $u(t, x)$ — решение *уравнения теплопроводности* $\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x^2$ с начальными данными $u(0, x) = v(x)$, $v \in L_1(\mathbf{R}, dx)$. Показать, что $u(t, x)$ имеет вид $v * f_t(x)$, и найти функцию f_t.

608. Пусть $T(a)$ — оператор сдвига на вектор $a \in \mathbf{R}^n$, $M(a)$ — оператор умножения на $2\pi i a x$ в пространстве $S'(\mathbf{R}^n)$. Вывести коммутационные соотношения

$$\mathcal{F} T(a) \mathcal{F}^{-1} = M(a), \quad \mathcal{F} M(a) \mathcal{F}^{-1} = T(-a),$$

где $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье.

609*. Обобщенная функция $f \in S'(\mathbf{R}^3)$ регулярна и зависит только от радиуса $r = \|x\|$, $f(x) = \varphi(\|x\|)$. Показать, что ее преобразование Фурье задается формулой $\tilde{f}(\lambda) = \int_0^\infty k(r\|\lambda\|)\, \varphi(r)\, dr$, и найти функцию k.

ГЛАВА V

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. Функциональное исчисление

1. Функции операторов в конечномерном пространстве.

610°. Пусть A — оператор в n-мерном пространстве L над полем K. Доказать, что операторы $1, A, A^2, \ldots, A^n$ линейно зависимы.

611. Доказать, что следующие свойства оператора A в n-мерном пространстве L над полем $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ эквивалентны друг другу:

а) операторы $1, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ линейно независимы;

б) существует такой вектор $\xi \in L$, что $\xi, A\xi, \ldots, A^{n-1}\xi$ — базис в L;

в) существует вектор $\xi \in L$, *циклический* для A (т. е. такой, что всякое подпространство в L, содержащее ξ и инвариантное относительно A, совпадает с L).

Операторы A, обладающие перечисленными свойствами, называются *регулярными*.

612. Доказать, что диагональная матрица задает регулярный оператор тогда и только тогда, когда все элементы, стоящие на главной диагонали, попарно различны.

613. Доказать, что следующие свойства матрицы A эквивалентны:

а) A задает регулярный оператор;

б) минимальный многочлен для A совпадает с характеристическим многочленом;

в) каждому собственному значению A отвечает только одна жорданова клетка.

614. Доказать, что множество регулярных операторов открыто и всюду плотно в множестве всех операторов.

615. Пусть R_n — совокупность матриц порядка n вида

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n\end{bmatrix}.$$

Доказать, что

а) всякий регулярный оператор в n-мерном пространстве в подходящем базисе задается матрицей $A\in R_n$;

б) каждая матрица $A\in R_n$ задает регулярный оператор;

в) две матрицы A и B из R_n *подобны* (т. е. $A=CBC^{-1}$), только если $A=B$.

616. Доказать, что два регулярных оператора A и B в n-мерном пространстве L над полем $K=\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ подобны тогда и только тогда, когда справедливы равенства

$$\operatorname{tr}A^k=\operatorname{tr}B^k,\quad k=1,\,2,\,\dots,\,n.$$

617°. Пусть

$$A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & & \lambda\end{bmatrix}$$

— *жорданова клетка* порядка n с собственным значением λ. Вычислить матрицы:

а) A^n, $n=2,\,3$;

б) $p(A)$, где p — многочлен;

в) $f(A)$, где f — целая аналитическая функция;

г) $r(A)$, где r — рациональная функция, не имеющая полюса в точке λ.

618. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра над полем $K=\mathbf{C}$ или $\mathbf{R}$. *Идемпотентом* называется элемент $x\in\mathfrak{A}$, обладающий свойством $x^2=x$. *Прямой суммой* алгебр $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ называется линейное пространство $\mathfrak{A}_1\oplus\mathfrak{A}_2$ с покомпонентной операцией умножения. Доказать, что следующие свойства алгебры $\mathfrak{A}$ эквивалентны:

а) $\mathfrak{A}$ изоморфна прямой сумме некоторых (ненулевых) алгебр $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$;

б) в алгебре $\mathfrak{A}$ есть нетривиальный (отличный от нуля и единицы) идемпотент.

Алгебры, не обладающие этими свойствами, называются *примарными*.

619. а) Доказать, что поле $\mathbf{C}$ является примарной алгеброй над $\mathbf{R}$.

б) Доказать, что всякая примарная алгебра с единицей и с одной образующей над $\mathbf{C}$ изоморфна одной из алгебр $\mathfrak{A}_n=\mathbf{C}[x]/(x^n)$ (факторалгебре многочленов от x по идеалу, порожденному x^n).

620. Доказать, что всякая конечномерная алгебра является прямой суммой примарных алгебр.

621°. Числовая последовательность $\{a_n\}$ обладает свойством $0\leqslant a_{m+n}\leqslant a_m+a_n$ для всех m и n. Доказать, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n/n)$ и что он равен $\inf\limits_n(a_n/n)$.

622. Пусть A — оператор в n-мерном линейном пространстве L над полем K. Обозначим через $\mathfrak{A}(A)$ алгебру над K, порожденную 1 (единичный оператор) и A. Докажите, что $\dim\mathfrak{A}(A)\leqslant n$.

623. Пусть $K=\mathbf{C}$. Докажите, что алгебра $\mathfrak{A}(A)$ примарна тогда и только тогда, когда оператор A имеет единственное собственное значение.

624. Пусть S — некоторое множество операторов в линейном пространстве L. Через S' обозначается совокупность операторов в L, перестановочных со всеми операторами из S. Для каких операторов A справедливо равенство $\mathfrak{A}(A)'=\mathfrak{A}(A)$?

625°. Доказать, что всякий многочлен от коэффициентов матрицы A, не меняющийся при преобразованиях подобия $A\mapsto CAC^{-1}$, является многочленом от $\operatorname{tr}A$, $\operatorname{tr}A^2,\ \ldots,\ \operatorname{tr}A^n$.

626*. Пусть A и B — матрицы второго порядка. Доказать, что всякий многочлен от коэффициентов A и B, не меняющийся при преобразованиях $A\to CAC^{-1}$, $B\to CBC^{-1}$, имеет вид $P(\operatorname{tr} A, \operatorname{tr} B, \operatorname{tr} A^2, \operatorname{tr} B^2, \operatorname{tr} AB)$, где P — некоторый однозначно определенный многочлен от пяти переменных.

627.** Пусть A и B — матрицы порядка n. Доказать, что алгебра многочленов от коэффициентов A и B, инвариантных относительно преобразований $A \to CAC^{-1}$, $B \to CBC^{-1}$, содержит не менее n^2+1 образующих.

628. Указать в пространстве матриц порядка $2n \times 2n$ подпространство размерности $1+n^2$, состоящее из попарно перестановочных матриц.

629. Пусть A — оператор в n-мерном пространстве с единственным собственным значением λ. Доказать, что для любой функции f, $(n-1)$-кратно дифференцируемой в точке λ, справедливо равенство $f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!} \times (A - \lambda \cdot 1)^k$.

630*. Пусть A — оператор в n-мерном пространстве с различными собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Доказать формулу

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) \prod_{j \neq k} \frac{A - \lambda_j \cdot 1}{\lambda_k - \lambda_j}.$$

631*. Пусть оператор A имеет собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ с кратностями $m_1, \ldots, m_n$. Доказать формулу

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_k - 1} f^{(j)}(\lambda_k) B_{jk}$$

и найти явный вид операторов B_{jk}.

632*. Пусть K — совокупность всех положительных (см. задачу 643) операторов со следом 1 в конечномерном гильбертовом пространстве H. Доказать, что K — выпуклый компакт, и найти крайние точки K.

2. Функции ограниченных самосопряженных операторов.

633°. Пусть A — оператор умножения на непрерывную вещественную функцию $a(x)$ в пространстве $L_2(0, 1)$. Доказать, что A — самосопряженный оператор, и найти $\sigma(A)$.

634°. Найти спектр оператора A, действующего в $L_2(0, 1)$ по формуле $Af(x) = a(x) f(x)$, где $a \in L_\infty(0, 1)$.

635°. Пусть $f \in L_1(\mathrm{R}, dx)$. Найти спектр оператора свертки $S(f)$ в пространстве $L_2(\mathrm{R}, dx)$.

636°. Пусть $f \in L_1(\mathbf{T}, dt)$. Найти спектр оператора $S(f)$ свертки с f в пространстве $L_2(\mathbf{T}, dt)$.

637°. Доказать, что спектр унитарного оператора U лежит на единичной окружности.

638. Пусть A — самосопряженный оператор. Доказать унитарность оператора $(A + \lambda 1)(A + \bar{\lambda} 1)^{-1}$ для невещественных λ.

639. Известно, что оператор $(A - i1)$ обратим, а оператор $(A + i1)(A - i1)^{-1}$ унитарен. Доказать, что A самосопряжен.

640. Известно, что оператор U унитарен, а $U - 1$ обратим. Доказать, что оператор $A = i(U + 1)(U - 1)^{-1}$ самосопряжен.

641. Вычислить спектральный радиус *оператора Вольтерра* A в $L_2(0, 1)$, задаваемого формулой

$$Af(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

642. Вычислить явно резольвенту оператора Вольтерра (из задачи 641).

643. Оператор A в гильбертовом пространстве H называется *положительным*, если $(Ax, x) \geqslant 0$ для всех $x \in H$, $x \neq 0$. Мы будем писать в этом случае $A \gg 0$. Доказать, что для положительного оператора A справедлива формула

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}.$$

644*. Пусть A — самосопряженный оператор, удовлетворяющий условию $a \cdot 1 \ll A \ll b \cdot 1$, а многочлен $p(x)$ неотрицателен на отрезке $[a, b]$. Доказать, что $p(A) \gg 0$.

645. Доказать, что отображение $p \mapsto p(A)$ непрерывно относительно нормы $C[a, b]$, если $a \cdot 1 \ll A \ll b \cdot 1$.

646. Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор. Доказать, что оператор $U(t) = e^{itA}$ при всех $t \in \mathbf{R}$ является унитарным оператором и что справедливы равенства $U(t)U(s) = U(t + s)$, $U(t)^* = U(-t)$.

647. Доказать, что в условиях задачи 646 операторная функция $U(t)$ дифференцируема и $U'(t) = iAU(t) = iU(t)A$.

648*. Доказать, что всякая непрерывная в топологии нормы операторная функция $U(t)$, удовлетворяющая функциональным уравнениям $U(t)U(s) = U(t + s)$, $U(t)^* = U(-t)$, имеет вид, указанный в задаче 646.

649. Найти полярное разложение оператора A умножения на функцию $a \in L_\infty(X, \mu)$ в пространстве $L_2(X, \mu)$.

650. Найти полярное разложение оператора одностороннего сдвига в $l_2(\mathbf{C})$: $T(x_n) = x_{n-1}$.

651. Пусть A и B — перестановочные операторы, $A = RU$ — полярное разложение A.

а) Доказать, что R и U перестановочны с B, если B — унитарный оператор.

б) Верно ли это в общем случае?

652. Пусть $A \gg B \gg 0$ и B обратим. Доказать, что A обратим и $A^{-1} \ll B^{-1}$.

653*. Пусть T — оператор сдвига в $l_2(\mathbf{Z})$ $(T\{x_n\} = \{x_{n+1}\})$. Доказать, что существует единственный самосопряженный оператор A, обладающий свойствами:

1) $T = e^{iA}$;

2) $\|A\| \leqslant \pi$.

654. Пусть H_1 и H_2 — подпространства в H, P_1 и P_2 — соответствующие им ортопроекторы. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} (P_1P_2)^n$ существует и равен ортопроектору на $H_1 \cap H_2$.

655. Пусть A — оператор в $L_2([0, \infty), dx)$, заданный формулой $Af(x) = \int\limits_0^\infty \frac{f(y)}{x+y}\,dy$. Доказать, что A перестановочен с операторами растяжения $L(a)$: $f(x) \mapsto f(ax)$.

3. Неограниченные самосопряженные операторы.

656°. В обозначениях теоремы 7 гл. V доказать, что $\tau(\Gamma_A)^\perp$ является графиком некоторого оператора тогда и только тогда, когда D_A плотно в H.

657°. Пусть операторы A и A^* плотно определены (т. е. D_A и D_{A^*} плотны в H). Доказать, что $(A^*)^*$ совпадает с замыканием A.

658°. Доказать, что существенная самосопряженность оператора A равносильна каждому из условий:

а) A^* самосопряжен;

б) $\bar{A} = A^*$.

659°. В каких случаях оператор $A = id/dx$ в пространстве $H = L_2(0, 1)$ симметричен, существенно самосопряжен, самосопряжен:

а) $D_A = C^1[0, 1]$,

б) $D_A = \{\varphi \in C^1[0, 1], \varphi(0) = \varphi(1)\}$,

в) $D_A = \{\varphi \in C^1[0, 1], \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$?

660. Будет ли симметричным оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ в $L^2(\mathbf{R}^2, dx)$, если а) $D_\Delta = S(\mathbf{R}^2)$; б) $D_\Delta = D(\mathbf{R}^2)$;

в) D_Δ — естественная область определения.

661*. Докажите, что всякий симметрический оператор A, для которого $D_A = H$, ограничен.

662. Пусть A — самосопряженный оператор.

а) Доказать, что оператор $(A + i1)(A - i1)^{-1} = U$ унитарен.

б) Доказать, что $\ker(U - 1) = \{0\}$.

663. Пусть U унитарный оператор, для которого $\ker(U-1) = \{0\}$. Докажите, что оператор $A = i(U+1)\times\times(U-1)^{-1}$ с областью определения $D_A = \operatorname{im}(U-1)$ самосопряжен.

664*. Вычислить оператор A в условиях задачи 663, если U — оператор сдвига на 1 в $l_2(\mathbf{Z})$.

665. Пусть $H = l_2(\mathbf{C})$, D_A состоит из всех финитных последовательностей с нулевой суммой, оператор A задается матрицей $A = \|a_{jk}\|$, где $a_{jk} = i\operatorname{sgn}(j-k)$.

а) Будет ли A симметрическим?

б) Будет ли A существенно самосопряженным?

666. Пусть A_i $(i = 1, 2)$ — операторы умножения на x в $L_2(\mathbf{R}, dx)$ с областями определения D_{A_i}. Известно, что A_1 и A_2 существенно самосопряжены. Могут ли подпространства D_{A_1} и D_{A_2} иметь нулевое пересечение?

667. Пусть оператор A плотно определен и положителен (см. задачу 643). Доказать, что существенная самосопряженность A равносильна условию $\ker(A^* + 1) = 0$.

668*. Доказать, что для любого замкнутого плотно определенного оператора A оператор $T = A^*A + 1$ с областью определения $D_T = \{x \in D_A;\ Ax \in D_{A^*}\}$ самосопряжен.

669*. Пусть H_1 и H_2 — гильбертовы пространства, $H_1 \otimes H_2$ — их гильбертово тензорное произведение. Доказать, что если операторы A_1 и A_2 самосопряжены в H_1 и H_2 соответственно, то оператор $A_1 \otimes 1 + 1 \otimes A_2$ с областью определения $D_{A_1} \otimes D_{A_2}$ существенно самосопряжен в H.

670°. Доказать, что спектр самосопряженного оператора лежит на вещественной оси.

671. а) Доказать соотношение $(\operatorname{im} A)^\perp = \ker A^*$ для плотно определенного оператора A в гильбертовом пространстве.

б) Верно ли в этом случае соотношение $(\ker A)^\perp = \overline{\operatorname{im} A^*}$?

672. Доказать, что самосопряженный оператор A не имеет симметрических расширений, отличных от A.

673. Пусть A — симметрический оператор. Доказать, что оператор $(A+i)(A-i)^{-1}$ продолжается до изометрического оператора U из $\overline{\operatorname{im}(A-i)}$ в $\overline{\operatorname{im}(A+i)}$.

674. Пусть A — замкнутый симметрический оператор. Доказать, что пространство $\operatorname{im}(A+i1)$ замкнуто в H.

675. Доказать, что замкнутый симметрический оператор A допускает самосопряженное расширение тогда и только тогда, когда $\dim\ker(A^*-i1)=\dim\ker(A^*+i1)$.

4. Расширения операторов.

676. Пусть A — симметрический оператор, V — его преобразование Кэли. Докажите, что графики этих операторов Γ_A и Γ_V связаны соотношением $\Gamma_V=\Gamma_A\begin{bmatrix}-i & i\\ 1 & 1\end{bmatrix}$. $\Bigl($Здесь $\begin{bmatrix}-i & i\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ означает оператор в $H\oplus H$, переводящий $x\oplus y$ в $(-ix+y)\oplus(ix+y)$.$\Bigr)$

677. Доказать, что для замкнутого симметрического оператора A и невещественного числа λ пространство $\operatorname{im}(A-\lambda\cdot 1)$ замкнуто.

678. Пусть A — симметрический оператор, $L_\lambda=\ker(A^*-\overline{\lambda}\cdot 1)$. Доказать, что функция $\lambda\mapsto l_\lambda=\dim L_\lambda$ постоянна в некоторой окрестности точки λ, не лежащей на вещественной оси.

679. Пусть A — симметрический оператор, полуограниченный снизу: $(Ax,x)\geqslant a\|x\|^2$. Доказать, что функция $\lambda\mapsto l_\lambda$ (см. предыдущую задачу) постоянна в области $\mathbf{C}\setminus[a,\infty)$.

680. Пусть H — комплексное пространство и C — антилинейный оператор в H, обладающий свойством $C^2=1$.

а) Докажите, что $H=H_0+iH_0$, где H_0 — вещественное пространство, состоящее из C-неподвижных векторов.

б) Докажите, что условие $AC=CA$ для линейного оператора в H равносильно условию $AH_0\subset H_0$.

681. Пусть A — симметрический оператор в H. Предположим, что существует антилинейный оператор C со свойствами $C^2=1$, $AC=CA$. Доказать, что индексы дефекта у A равны.

682. Пусть A — замкнутый симметрический оператор в пространстве H, $L_\lambda=\ker(A^*-\overline{\lambda}\cdot 1)$. Доказать, что для $\lambda\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$ пространства $D(A)$, L_λ и $L_{\overline{\lambda}}$ линейно независимы и их сумма совпадает с $D(A^*)$.

В следующих трех задачах приняты следующие обозначения (ср. [22]): $p(t)$ — положительная, $q(t)$ — вещественная функции из $C(0,\infty)$; A — дифференциальный оператор, заданный равенством $Ax=-(px)'+qx$; для каждой дифференцируемой комплексной функции $x(t)$ построим комплексную вектор-функцию $\xi(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t)\,x'(t) \end{bmatrix}$ и вещественную скалярную функцию $f(t)=\xi^*(t)I\xi(t)$, где $I=\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$; положим $B=B(t,\lambda)=\begin{bmatrix} 0 & p^{-1}(t) \\ q(t)-\lambda & 0 \end{bmatrix}$.

683. а) Доказать, что $x(t)$ является решением уравнения $Ax=\lambda x$ тогда и только тогда, когда $\xi(t)$ удовлетворяет уравнению $\xi'=B\xi$.

б) Проверить, что для любого $t\in(0,\infty)$ условие $f(t)=0$ равносильно вещественности величины $\dfrac{x'(t)}{x(t)}$.

в) Доказать тождество

$$f(b)-f(a)=2\,\mathrm{Im}\,\lambda\int_a^b|x(t)|^2\,dt$$

для любого решения $x(t)$ уравнения $Ax=\lambda x$.

684. Пусть $w(t)$ — решение матричного уравнения $w'=Bw$ с начальным условием $w(0)=1$.

а) Доказать, что общее решение уравнения $Ax=\lambda x$ имеет вид $x_z(t)=(1,\ 0)\,w(t)\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$, $z\in\mathbf{C}$.

б) Проверить, что $\det w(t)\equiv 1$.

в) Пусть S_t — совокупность тех $z\in\mathbf{C}$, для которых $\dfrac{x_z'(t)}{x_z(t)}\in\mathbf{R}$. Проверить, что S_t — окружность, найти ее радиус и доказать, что при $t_2>t_1$ S_{t_2} лежит внутри S_{t_1}.

685. Доказать, что при $t\to\infty$ окружность S_t стремится либо к предельной точке, либо к предельной окружности, в зависимости от того, будет ли самосопряжен оператор A с областью определения $D(A)$, заданной каким-нибудь самосопряженным граничным условием в нуле: $\alpha x(0)+\beta x'(0)=0$, где $\alpha/\beta\in\mathbf{R}$.

§ 2. Спектральное разложение операторов

1. Приведение оператора к виду умножения на функцию.

686. Пусть A — самосопряженный оператор в конечномерном пространстве. Привести его к виду умножения на функцию.

687. Оператор A в пространстве $H = L_2[-1, 1]$ состоит в умножении на функцию $a(x) = x^2$. Доказать, что

а) в H нет циклических векторов для A;

б) представить H в виде суммы двух подпространств, обладающих циклическими векторами для A.

688. Доказать, что если A — оператор с простым спектром в бесконечномерном гильбертовом пространстве H, то операторы $1, A, \ldots, A^n, \ldots$ линейно независимы.

689. Пусть B и C — ограниченные самосопряженные операторы, перестановочные друг с другом. Доказать, что существует такой ограниченный самосопряженный оператор A, что B и C являются функциями от A.

690. Пусть A — самосопряженный оператор с простым спектром. Доказать, что всякий ограниченный оператор B, перестановочный с A, является функцией от A.

691. Доказать, что $\|f(A)\| = \sup\limits_{t \in \sigma(A)} |f(t)|$ для любой ограниченной борелевской функции от самосопряженного оператора A.

692. Привести к виду умножения на функцию операторов свертки $S(f)$, $f \in L_1(\mathbf{R}, dx)$. Для каких функций этот оператор самосопряжен?

693. Может ли оператор свертки $S(f)$, $f \in L_1(\mathbf{R}, dx)$, быть унитарным?

694*. Пусть G — коммутативная локально компактная группа с инвариантной мерой μ. При каких условиях на функцию $f \in L_1(G, \mu)$ оператор свертки $S(f)$ является:

а) самосопряженным;

б) унитарным;

в) компактным?

695. Пусть A — интегральный оператор в $L_2(0, 1)$, заданный формулой $Af(x) = \int\limits_0^1 \min(x, y) f(y)\, dy$. Привести этот оператор к виду умножения на функцию.

696. Пусть A — неограниченный самосопряженный оператор в H, Γ_A — график A в $H \oplus H$. Доказать, что ортогональным дополнением к Γ_A в $H \oplus H$ является $\tau(\Gamma_A)$.

697. В условиях задачи 696 обозначим проекцию вектора $x \oplus 0$ на Γ_A через $(y \oplus Ay)$, а проекцию этого вектора на $\Gamma_A^\perp$ — через $-Az \oplus z$. Доказать, что

а) соответствия $x \mapsto y$ и $x \mapsto z$ являются ограниченными операторами в H; обозначим их B и C соответственно;

б) справедливы соотношения $C = -AB$, $(1 + A^2)B = 1$.

698. Доказать, что *оператор конечной разности* $\Delta_h\varphi(x) \equiv \frac{1}{h}[\varphi(x+h) - \varphi(x)]$ является функцией от оператора дифференцирования.

699*. Пусть f — непрерывная функция на окружности. Написать явное выражение для оператора $f(F)$, где F — оператор Фурье: $F\varphi(y) = \int\limits_R e^{-2\pi ixy}\varphi(y)\,dy$.

2. Спектральная теорема.

700. Пусть λ — проекционная мера на отрезке $[a, b]$ со значениями в $\operatorname{End} H$, f — непрерывная функция на $[a, b]$. Для каждого разбиения $T = \{a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n = b\}$ и каждого набора точек $\xi = \{\xi_k\}$, $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$, определим *интегральную сумму Римана*

$$S(f, T, \xi) = \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)\,\lambda([t_k, t_{k+1}]).$$

а) Доказать, что, когда диаметр разбиения $\delta(T) = \max\limits_k(t_{k+1} - t_k)$ стремится к нулю, интегральные суммы $S(f, T, \xi)$ стремятся по норме к некоторому оператору. Этот оператор называется *интегралом Римана* от f по мере λ и обозначается

$$R\int\limits_a^b f(x)\,d\lambda(x).$$

б) Доказать, что интеграл Римана $R\int\limits_a^b f(x)\,d\lambda(x)$ совпадает с интегралом Лебега $\int\limits_a^b f(x)\,d\lambda(x)$, определенным в § 2 гл. V.

701°. Доказать следующие свойства интеграла от ограниченных функций по проекционной мере:

а) $\int\limits_X [\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)]\,d\lambda(x) =$

$$= \alpha_1 \int\limits_X f_1(x)\,d\lambda(x) + \alpha_2 \int\limits_X f_2(x)\,d\lambda(x);$$

б) $\int\limits_X (f_1 f_2)(x)\,d\lambda(x) = \int\limits_X f_1(x)\,d\lambda(x) \int\limits_X f_2(x)\,d\lambda(x);$

в) $\left\| \int\limits_X f(x)\,d\lambda(x) \right\| \leqslant \sup\limits_{x \in X} |f(x)|;$

г) $\left(\int\limits_X f(x)\,d\lambda(x)\right)^* = \int\limits_X \overline{f(x)}\,d\lambda(x)$;

д) если $f_n(x)\to f(x)$, $|f_n(x)|\leqslant C$ для всех $x\in X$, то $\int\limits_X f_n(x)\,d\lambda(x)\to\int\limits_X f(x)\,d\lambda(x)$ сильно.

702. а) Доказать, что свойство 3) в определении проекционной меры можно заменить более слабым условием 3′) $\lambda(X\setminus E)=1-\lambda(E)$ и нормировочным условием $\lambda(\varnothing)=0$.

б) Доказать, что условие 2) в определении проекционной меры следует из условия 3), нормировочных условий $\lambda(\varnothing)=0$, $\lambda(X)=1$ и того, что значения меры λ — ортопроекторы.

703. Пусть $H_1=L_2[0, 1]$, $H_2=L_2([0, 1]\times[0, 1])$. Определим проекционные меры λ_1 и λ_2 со значениями в $\operatorname{End} H_1$ и $\operatorname{End} H_2$ соответственно, полагая $\lambda_i(E)=M(\chi_E(x))$. Существует ли такой изоморфизм $U\colon H_1\to H_2$, при котором λ_1 переходит в λ_2?

704. Пусть заданы множество X с σ-алгеброй B, гильбертово пространство H и для каждого $\xi=H$ конечная мера μ_ξ на (X, B) так, что выполнены условия:

1) $\mu_\xi(X)=\|\xi\|^2$;

2) $\mu_{\xi-\eta}+\mu_{\xi+\eta}=2\mu_\xi+2\mu_\eta$.

Верно ли, что существует такая проекционная мера λ на X со значениями в $\operatorname{End} H$, что $\mu_\xi=\lambda_\xi$ для всех $\xi\in H$?

705*. Пусть X — метрический компакт, H — гильбертово пространство. *Представлением алгебры* $C(X)$ в H называется отображение $\varphi\colon C(X)\to\operatorname{End} H$, обладающее свойствами:

1) φ является гомоморфизмом алгебр;

2) $\varphi(\bar f)=\varphi(f)^*$;

3) $\varphi(1)=1$ (единица слева — функция на X, справа — единичный оператор в H).

Доказать, что существует единственная проекционная мера λ на X со значениями в $\operatorname{End} H$ такая, что $\varphi(f)=\int\limits_X f(x)\,d\lambda(x)$.

706. Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H, λ — его спектральная мера, E — борелевское множество на прямой. Через H_E обозначим подпространство $\lambda(E)H$. Доказать, что

а) H_E инвариантно относительно A;

б) если E ограничено, то $A|_{H_E}$ — ограниченный оператор;

в) если E замкнуто, то $\sigma\left(A|_{H_E}\right) \subset E$.

707. Доказать, что спектр самосопряженного оператора A состоит в точности из тех точек $a \in \mathbf{R}$, для которых $\lambda((a-\varepsilon, a+\varepsilon)) \neq 0$ при любом $\varepsilon > 0$. (Здесь λ — спектральная мера оператора A.)

708. *Критерий Вейля.* Доказать, что точка a принадлежит спектру самосопряженного ограниченного оператора A в гильбертовом пространстве H тогда и только тогда, когда существует последовательность единичных векторов $\xi_n \in H$, для которой $\|A\xi_n - a\xi_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

709. Определение *существенного спектра* ограниченного самосопряженного оператора A получается из критерия Вейля (см. задачу 708) наложением дополнительного условия: последовательность $\{\xi_n\}$ ортонормирована. Доказать, что если оператор B самосопряжен и компактен, то существенные спектры A и $A+B$ совпадают.

710. *Формула Стоуна.* Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор. Доказать равенство

$$\operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_a^b \left[(a-\lambda)^2 + \varepsilon^2 1\right]^{-1} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2}\lambda(\{a\}) + \lambda((a, b)) + \frac{1}{2}\lambda(\{b\}) = \frac{1}{2}\lambda([a, b]) + \frac{1}{2}\lambda((a, b)).$$

711. Пусть U — унитарный оператор в гильбертовом пространстве H. Доказать, что существует единственная борелевская проекционная мера λ на окружности $\mathbf{T}$ со значениями в $\operatorname{End} H$, для которой справедливо равенство

$$f(U) = \int_0^1 f(e^{2\pi i t})\, d\lambda(t)$$

для любой борелевской ограниченной функции f на $\mathbf{T}$.

712. *Эргодическая теорема фон Неймана.* Пусть U — унитарный оператор в гильбертовом пространстве H. Доказать, что $\operatorname*{s-lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} U^k$ существует и равен проектору на $\ker(U-1)$.

713. Пусть A — любой ограниченный оператор и f — аналитическая функция в области Ω, содержащей $\sigma(A)$.

Определим оператор $f(A)$ равенством

$$f(A)=\frac{i}{2\pi}\int\limits_C f(\lambda)(A-\lambda 1)^{-1}\,d\lambda,$$

где C — любой контур в Ω, охватывающий $\sigma(A)$.

а) Доказать, что соответствие $f\mapsto f(A)$ является гомоморфизмом алгебр.

б) Доказать, что для нормального оператора A это определение $f(A)$ совпадает с данным в п. 2 § 1 гл. V.

714*. Доказать, что любое семейство попарно коммутирующих ограниченных самосопряженных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве можно одновременно привести к виду умножения на функцию.

715*. Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H, λ — его спектральная мера и f — борелевская функция на R. Определим $f(A)$ формулой

$$(f(A)\xi,\eta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,d\lambda_{\xi\eta}(x)$$

на подпространстве $D_A\subset H$, состоящем из тех векторов $\xi\in H$, для которых $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,d\lambda_\xi(x)<\infty$. Доказать, что

а) оператор $B=f(A)$ замкнут и плотно определен;

б) операторы BB^* и B^*B имеют общую плотную область определения и совпадают на этой области.

716. Найти оператор A в представлении $V(t)=e^{itA}$ для однопараметрической группы в пространстве $L_2(\mathbf{R},dx)$, заданной равенством $V(t)f(\tau)=V(t+\tau)$.

717. Пусть однопараметрическая группа $U(t)$ унитарных операторов в гильбертовом пространстве H обладает свойством $U(1)=1$. Доказать, что $U(t)=e^{itA}$, где $\sigma(A)\subset\subset\mathbf{Z}$.

718. Для всякого ли унитарного оператора U существует такая однопараметрическая группа $V(t)$, что $V(1)=U$?

719*. Найти спектральное разложение самосопряженного расширения оператора $A=-\frac{d^2}{dx^2}+x^2$ с первоначальной областью определения $D(A)=S(\mathbf{R})$.

§ 3. Математическая модель квантовой механики

720. Доказать, что среднее значение $\langle A\rangle_\Psi$ величины A в состоянии Ψ меняется со временем по закону

$$i\hbar \frac{d}{dt}\langle A\rangle_\Psi = \langle [H, A]\rangle_\Psi,$$

где $[H, A] = HA - AH$ — коммутатор операторов H и A.

721. а) Доказать, что всякий линейный функционал на пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$ комплексных матриц n-го порядка имеет вид

$$f_A(X) = \mathrm{tr}(AX).$$

б) При каком условии на A этот функционал положителен (т. е. $f_A(X) \geqslant 0$ для положительно определенных матриц X)?

722*. Пусть $B(H)$ означает банахово пространство всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H. Доказать, что всякий положительный линейный функционал f на $B(H)$ (т. е. $f(X) \geqslant 0$ для положительных операторов X) имеет вид

$$f_A(X) = \mathrm{tr}(AX),$$

где A — положительный ядерный оператор (см. задачу 500).

723*. Пусть K — совокупность всех положительных функционалов f на $B(H)$ (см. предыдущую задачу), обладающих свойством $f(1) = 1$. Найти крайние точки множества K.

В задачах 724—728 речь идет об *одномерных квантовых системах*, характеризуемых массой m и потенциалом $V(x)$.

724. Пусть $V(x) \equiv 0$ (*свободная частица*). Найти спектр операторов координаты, импульса и энергии. Указать реализации, в которых эти операторы диагонализируются (т. е. приводятся к виду умножения на функцию). Найти обобщенные собственные функции этих операторов.

725. В условиях предыдущей задачи найти закон изменения со временем состояния

$$\Psi_{a,b} = (\pi_a)^{-1/4} \exp\left\{-\frac{(x-b)^2}{2a}\right\}.$$

726. Пусть $V(x)=\begin{cases}0 & \text{при } |x|<a, \\ +\infty & \text{при } |x|\geqslant a\end{cases}$ (частица между двумя непроницаемыми отталкивающими стенками). Найти стационарные состояния и соответствующие уровни энергии.

727. Пусть $V(x)=\begin{cases}0 & \text{при } |x|<a, \\ V_0>0 & \text{при } |x|\geqslant a\end{cases}$ (частица в потенциальной яме конечной глубины). Найти стационарные состояния и уровни энергии.

728. Пусть $V(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ (*гармонический осциллятор*). Найти стационарные состояния и уровни энергии.

В задачах 729—732 речь идет об элементах квантовой теории рассеяния для одномерных частиц массы m на прямой. Если потенциал V отличен от нуля лишь на конечном интервале $|x|<a$, то вне этого интервала обобщенная собственная функция с энергией $E=\frac{k^2\hbar^2}{2m}$ имеет вид

$$\Psi(x)=\begin{cases}Ae^{ikx}+Be^{-ikx} & \text{при } x<a, \\ Ce^{ikx}+De^{-ikx} & \text{при } x>a.\end{cases}$$

Коэффициенты A, B, C, D связаны соотношением

$$\begin{bmatrix}C\\D\end{bmatrix}=T(k)\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix};\quad T(k)=\begin{bmatrix}a(k) & b(k)\\ c(k) & d(k)\end{bmatrix}.$$

Матрица $T(k)$ называется *матрицей перехода*.

729. а) Доказать, что $\det T(k)=1$.

б) Доказать, что для вещественного потенциала $V(x)$ матрица перехода обладает свойствами:

$$c(k)=\overline{b(k)},\quad d(k)=\overline{a(k)}.$$

730. Величины $t(k)=a(k)^{-1}$ и $r(k)=b(k)a(k)^{-1}$ называются *амплитудами рассеяния* вперед и назад соответственно. Доказать, что $|t(k)|^2+|r(k)|^2=1$. (Величина $|t(k)|^2$ интерпретируется как вероятность того, что частица пройдет потенциальный барьер, а величина $|r(k)|^2$ — как вероятность того, что она отразится от этого барьера.)

731. Найти $t(k)$ и $r(k)$ в случае, когда $V(x)\equiv V_0>0$ на отрезке $|x|\leqslant a$ и $V(x)=0$ при $|x|>a$.

732. Пусть в условиях предыдущей задачи $a \to 0$, $V_0 \to \infty$ и $2aV_0 \to c$. Найти пределы $t(k)$ и $r(k)$ (результат можно интерпретировать как рассеяние на полупроницаемой перегородке, описываемой потенциалом $V(x) = c\delta(x)$).

733. Найти обобщенные собственные функции операторов координат, импульсов и энергии для свободной частицы массы m в пространстве $\mathbf{R}^n$.

734. Найти стационарные состояния и уровни энергии свободной частицы массы m:

а) на окружности $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$;

б) на m-мерном торе $T^m = \mathbf{R}^m/\mathbf{Z}^m$.

735. Найти стационарные состояния и уровни энергии гармонического осциллятора в трехмерном пространстве, для которого

$$V(x, y, z) = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

736. Найти уровни энергии и стационарные состояния системы n неразличимых одномерных гармонических осцилляторов, являющихся:

а) бозонами;

б) фермионами.

737. Пусть X, Y и Z — три оператора в конечномерном пространстве V, подчиненные коммутационным соотношениям

$$[X, Y] = Z, \quad [Y, Z] = X, \quad [Z, X] = Y.$$

а) Доказать, что оператор $\Delta = X^2 + Y^2 + Z^2$ перестановочен с X, Y и Z.

б) Доказать соотношения $(X \pm iY)Z = (Z \pm i1) \times (X \pm iY)$, $[X + iY, X - iY] = -2iZ$.

738. В условиях задачи 737 предположим дополнительно, что пространство V неприводимо относительно X, Y, Z (т. е. не содержит собственных подпространств, инвариантных относительно всех этих операторов).

Доказать, что:

а) каждый из операторов X, Y, Z имеет простой спектр, состоящий из чисел $\{si, (s-1)i, \ldots, (1-s)i, -si\}$, где $s = \frac{\dim V - 1}{2}$ — целое или полуцелое число;

б) оператор Δ сводится к умножению на число $s(1-s)$;

в) в подходящем базисе $\{\eta_k\}$ $(k=0, 1, \ldots, 2s)$ операторы X, Y и Z приводятся к каноническому виду

$$X\eta_k = \frac{1}{2}\left[c_+(k)\,\eta_{k+1} + c_-(k)\,\eta_{k-1}\right],$$

$$Y\eta_k = \frac{i}{2}\left[c_-(k)\,\eta_{k-1} - c_+(k)\,\eta_{k+1}\right],$$

$$Z\eta_k = i(s-k)\,\eta_k,$$

где $c_-(k)=k$, $c_+(k)=k-2s$.

739*. Пусть классическая система имеет в качестве фазового пространства двумерную сферу S радиуса R со скобкой Пауссона, задаваемой элементами площади.

Найти квантовые аналоги координат x, y, z на S. При каких значениях радиуса эта задача разрешима?

740. Операторы момента импульса для частицы в $\mathbf{R}^3$ определяются формулами

$$L_1 = q_2p_3 - q_3p_2, \quad L_2 = q_3p_1 - q_1p_3, \quad L_3 = q_1p_2 - q_2p_1,$$

где q_i, p_i — координаты и импульсы частицы.

Доказать, что эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[L_1, L_2] = i\hbar L_3, \quad [L_2, L_3] = i\hbar L_1, \quad [L_3, L_1] = i\hbar L_2.$$

741. В условиях предыдущей задачи оператор $L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ называется квадратом полного момента. Если состояние Ψ удовлетворяет условию $L^2\Psi = \hbar^2 l(l-1)\Psi$, то говорят, что частица в этом состоянии имеет полный момент $\hbar l$.

Пусть даны две частицы с полными моментами $\hbar l_1$ и $\hbar l_2$. Какой полный момент может иметь система, полученная объединением этих частиц?

742. Как изменится ответ в предыдущей задаче, если считать частицы неразличимыми?

РАЗДЕЛ III

УКАЗАНИЯ

ГЛАВА I

СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И ТОПОЛОГИИ

§ 1. Отношения. Аксиома выбора и лемма Цорна

1. Ответ: а), б), д) — отношения эквивалентности, в) и г) — нет.

2. Определение переформулируется так: f_1 и f_2 эквивалентны, если существуют положительные числа a, b и ε такие, что $a < f_1(x)/f_2(x) < b$ при $0 < x < \varepsilon$. Отсюда следует, что это — отношение эквивалентности. Несчетность фактормножества следует из того, что все функции x^α при $\alpha \geqslant 0$ попарно не эквивалентны.

3. Пусть $f_1, f_2, f_3, \ldots$ — последовательность положительных функций. Определим функции $\underline{f}$ и $\bar{f}$, полагая $\underline{f}(x) = \frac{1}{k}\min\limits_{1\leqslant i\leqslant k} f_i(x)$, $\bar{f}(x) = k\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} f_i(x)$ при $1/(k+1) < x \leqslant 1/k$. Тогда $\underline{f} < f_i < \bar{f}$ для всех $i = 1, 2, \ldots$

4. Пример: X и Y — множества натуральных чисел с обычным отношением порядка. Тогда точки $(1, 2)$ и $(2, 1)$ в $X \times Y$ несравнимы.

5. Функция $\mu(x, t)$ находится из системы уравнений

$$\sum_{y\leqslant z\leqslant x} \mu(z, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \neq x, \\ 1, & \text{если } y = x. \end{cases}$$

При вычислении $\mu(x, y)$ достаточно рассматривать элементы множества X, предшествующие x. Поэтому можно считать, что X — конечное множество, а x — его наибольший элемент. При подходящей нумерации элементов X числа $\mu_{ij} = \mu(x_i, x_j)$ образуют треугольную матрицу M с единицами на главной диагонали. Обозначим через N матрицу, определяемую условием

$$\nu_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \leqslant x_j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда наша система записывается в виде $N \cdot M = 1$, откуда $M = N^{-1}$.

6. а) $\mu(x, x) = 1$, $\mu(x, x-1) = -1$; во всех остальных случаях $\mu(x, y) = 0$.

б) Ответ: $\mu(x, y) = \mu_0(x/y)$, где μ_0 — *классическая функция Мёбиуса* ($\mu_0(1) = 1$, $\mu_0(p_1 \cdot \ldots \cdot p_k) = (-1)^k$, где $p_1, \ldots, p_k$ — различные простые числа; в остальных случаях $\mu_0(n) = 0$.

в) Ответ: $\mu(A, B) = (-1)^{|A|-|B|}$, где $B < A < X$, $|A|$ и $|B|$ — число элементов в A и B соответственно.

г) Пусть основное поле состоит из q элементов. Тогда $\mu(A, B) = (-1)^d \cdot q^{d(d-1)/2}$, где $d = \dim A - \dim B$. План доказательства: пусть $\binom{n}{k}_q$ — число k-мерных подпространств в n-мерном пространстве над полем из q элементов. Свойства коэффициентов $\binom{n}{k}_q$ аналогичны свойствам обычных биномиальных коэффициентов (в которые они превращаются при $q = 1$). В частности,

$$\binom{n+1}{k+1}_q = q^{n-k}\cdot\binom{n}{k}_q + \binom{n}{k+1}_q \tag{1}$$

(разделить все $(k+1)$-мерные подпространства $(n+1)$-мерного пространства на два подмножества — содержащиеся и не содержащиеся в данной гиперплоскости),

$$\sum_{k=0}^{n} q^{\frac{k(k+1)}{2}}\binom{n}{k}_q\cdot t^k = (1+t)(1+qt)\ldots\left(1+q^{n-1}t\right). \tag{2}$$

(Эта формула выводится из (1), так же как обычный бином Ньютона — из основного свойства биномиальных коэффициентов.) Требуемое равенство $\sum\limits_{B\subset C\subset A} \mu(C, B) = 0$ (см. указание к задаче 5) следует из равенства (2) при $t = -1$.

7. а) Проверить, что $\sum\limits_{d|n} \varphi(d) = n$ ($\varphi(d)$ равно количеству натуральных чисел $m \leqslant n$ с НОД$(m, n) = n/d$). Отсюда следует, что $\varphi(n) = \sum\limits_{d|n} \mu(n, d)\, d = \sum\limits_{d|n} \mu_0(n/d)\, d$ (см. указание к задаче 6 б).

б) Сопоставим каждому неразложимому многочлену P степени d со старшим коэффициентом 1 ряд $f_P(X) = 1 + X^d + X^{2d} + \ldots$ Доказать, что коэффициент при X^n в $\prod\limits_P f_P(X)$ (произведение по всем неразложимым многочленам) равен числу всех многочленов степени n со старшим коэффициентом 1, т. е. q^n. Отсюда следует, что $\prod\limits_P f_P(x) = 1 + qX + q^2X^2 + \ldots = \dfrac{1}{1-qX}$. Но $\prod\limits_P f_P(X) = \prod\limits_{n\geqslant 1}\left(\dfrac{1}{1-X^n}\right)^{P(n,q)}$, так что $\prod\limits_{n\geqslant 1}\left(1-X^n\right)^{-P(n,q)} = (1-qX)^{-1}$. Взяв логарифмическую производную от обеих частей этого равенства и разложив ее по степеням X, получить равенство $\sum\limits_{d|n} dP(q, d) = q^n$. Отсюда следует, что

$$P(n, q) = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \mu(n, d)\, q^d = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \mu_0\left(\frac{n}{d}\right) q^d.$$

в) Проверить, что $C(N) = 2 \sum_{1 \leqslant k \leqslant N} \varphi(k) - 1$. Используя равенство задачи (7), вывести равенство

$$C(N) = \sum_{1 \leqslant d \leqslant N} \mu_0(d) \left[\frac{N}{d}\right] \left(\left[\frac{N}{d}\right] + 1\right) - 1,$$

где $\left[\frac{N}{d}\right]$ — целая часть числа $\frac{N}{d}$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{N \to \infty} \frac{C(N)}{N^2} = \sum_{d \geqslant 1} \frac{\mu_0(d)}{d^2}$. Это и есть искомое выражение.

Заметим, что вычисления можно продолжить: из основного свойства функции Мёбиуса (см. указание к задаче 5) легко вытекает, что $\sum_{d \geqslant 1} \frac{\mu_0(d)}{d^2} = \left(\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}\right)^{-1}$; известно, что это число равно $6/\pi^2$.

8. Проверяется непосредственно.

9. Случай $n = 1$ легко исследуется. В случае $n > 1$ воспользуемся тем, что нам известно, как устроено отношение порядка на прямой, проходящей через начальную точку.

Разобьем $\mathbf{R}^n$ в дизъюнктную сумму трех подмножеств:

$$O^+ = \mathrm{Int}\{x > 0\}, \quad O^- = \mathrm{Int}\{x < 0\}, \quad \Gamma = \overline{O}^+ \cap \overline{O}^-$$

(Int — внутренность множества, а $\bar{A}$ — замыкание A). Доказать, что Γ — линейное подпространство, множества O^+ и O^- непусты и любой путь из O^+ в O^- пересекает Γ. Вывести отсюда, что Γ — гиперплоскость в $\mathbf{R}^n$, а O^+ и O^- — ограничиваемые ею полупространства. Далее использовать индукцию.

10. а) Пусть μ_0 — класс эквивалентности, содержащий натуральный ряд $\mathbf{N}$ с естественным порядком. Если M — вполне упорядоченное счетное множество, то в нем есть наименьший элемент m_1, в множестве $M \setminus \{m_1\}$ — наименьший элемент m_2 и т. д. Пусть m_∞ — наименьший элемент множества $M \setminus \{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ (если это множество пусто, то M эквивалентно натуральному ряду). Ясно, что отрезок $M(m_\infty)$ множества M эквивалентен N. Значит, класс M больше μ_0 и μ_0 — минимальный элемент.

б) Пусть M и L — два вполне упорядоченных счетных множества. Назовем элемент $m \in M$ допустимым, если отрезок $M(m)$ эквивалентен некоторому отрезку в L. Если все элементы M допустимы, то можно построить монотонное отображение φ множества M на некоторый отрезок в L по следующему правилу: если для всех $m < m_1$ отображение φ определено, то $\varphi(m_1)$ определяется как наименьший элемент L, не входящий в множество $\varphi(M(m_1))$. Если все L исчерпывается одним из множеств $\varphi(M(m))$, то L и M сравнимы и $L < M$. Пусть теперь существуют недопустимые элементы, и пусть m_0 — наименьший из них. Разберите отдельно случай, когда у m_0 есть предшествующий элемент и когда такого элемента нет.

в) Пусть $\mathscr{M}_0 \subset \mathscr{M}$. Выберем $\mu \in \mathscr{M}_0$ и представителя M класса μ. Если M_1 — представитель класса $\mu_1 \in \mathscr{M}_0$, то либо $\mu_1 \leqslant \mu$, либо M_1 эквивалентен отрезку $M(m_1)$. Мы получили монотонное отображение $\mu_1 \mapsto m_1$ той части $\mathscr{M}_0$, которая лежит «левее» μ, на подмножество в M. Так как M вполне упорядочено, это подмножество имеет минимальный элемент. Значит, минимальный элемент есть и в $\mathscr{M}_0$.

г) Предположим, что $\mathscr{M}$ счетно. Выберем в каждом классе $\mu_i \in \mathscr{M}$ по представителю M_i, и пусть $M = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i$. Введем в M отношение эквивалентности. Если $\mu_i < \mu_j$, то M_i отображается на отрезок в M_j и мы говорим, что точка $m \in M_i$ эквивалентна своему образу в M_j. Проверьте, что построенное таким образом отношение будет действительно отношением эквивалентности, что соответствующее фактормножество $\widetilde{M}$ счетно, вполне упорядочено и что его класс $\tilde{\mu}$ больше, чем все классы $\mu \in \mathscr{M}$, что невозможно.

д) Воспользуйтесь теоремой Цермело.

11. Назовем $\mu \in \mathscr{M}$ допустимым, если отрезок множества $\mathfrak{A}$, определяемый элементом $(\mu, 0)$, эквивалентен полуинтервалу $[0, 1)$. Докажите, что все элементы $\mathscr{M}$ допустимы, используя тот факт, что каждый элемент $a \in \mathfrak{A}$ является мажорантой счетного семейства $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$

Второе утверждение задачи вытекает из несчетности $\mathscr{M}$ (см. задачу 10 г) и счетности базы топологии на $[0, 1)$).

12. См. указание к задаче 11.

13. Максимальные элементы — круги, касающиеся хотя бы двух сторон квадрата. Среди них наибольшего в смысле включения не существует.

14. Применить лемму Цорна к множеству всех линейно независимых систем векторов данного пространства, упорядоченному по включению.

15. С помощью леммы Цорна показать, что любые два вполне упорядоченных множества сравнимы (т. е. одно эквивалентно отрезку другого).

16. Рассмотрите частично упорядоченное множество, элементами которого являются подмножества данного множества X с отношением полного порядка на них. Покажите, что условия леммы Цорна выполнены и что максимальный элемент — это все множество X с отношением полного порядка.

17. Пусть X — частично упорядоченное множество, удовлетворяющее условиям леммы Цорна, Y — множество мощности, большей, чем X (например, $P(X)$). По теореме Цермело Y можно вполне упорядочить.

Предположим, что в X нет максимального элемента, и построим монотонное отображение φ множества Y в X (что, очевидно, невозможно). А именно, если φ уже определено на отрезке $Y(y_0)$, то полагаем $\varphi(y_0)$ равным тому элементу $x_0 \in X$, который мажорирует $\varphi(Y(y_0))$ (это множество упорядочено и по условиям леммы Цорна допускает мажоранту).

§ 2. Метрические пространства и их приложения

18. Пусть x_1, x_2, x_3 — фундаментальная последовательность. По определению существует последовательность индексов $n_1 < n_2 < < n_3 < \ldots$ такая, что все точки x_n при $n > n_k$ лежат в замкнутом шаре B_k радиуса $1/2^k$ с центром в одной из этих точек. Рассмотрим шар $\overline{B}_k$, концентрический B_k с вдвое большим радиусом. Прове-

рить, что последовательность $\overline{B}_k$ стягивающаяся и ее пересечение есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

19. Пусть f — равномерно непрерывная функция на X, x_1, x_2, ... — фундаментальная последовательность и x — отвечающая ей точка пополнения. Тогда $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ (предел существует в силу равномерной непрерывности f и полноты числовой прямой $\mathbf{R}$).

20. а) Отображение $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ изометрично отображает прямую с введенным расстоянием на интервал $(-\pi/2, \pi/2)$ с обычным расстоянием. Поэтому пополнение $\mathbf{R}$ изометрично отрезку $[-\pi/2, \pi/2]$.

б) Аналогично а) отображение $x \mapsto e^x$ является изометрией нашего пространства на луч $(0, \infty)$. Пополнение изометрично полупрямой $[0, \infty)$.

21. Пополнение получается добавлением «одноточечных отрезков» $[a, a]$ $(a \in \mathbf{R})$.

22. Прежде всего последовательность отрезков с длинами, стремящимися к 0, является последовательностью Коши — всем им соответствует одна дополнительная точка в пополнении, расстояние от которой до любого отрезка Δ равно $|\Delta|$. Доказать, что пополнение получается присоединением этой единственной точки. Для этого доказать, что из любой фундаментальной последовательности отрезков с длинами, не стремящимися к 0, можно выбрать подпоследовательность, у которой все пересечения $\Delta_i \cap \Delta_j$ непусты. Воспользоваться тем, что для пересекающихся отрезков расстояние совпадает с расстоянием, определенным в задаче 21.

23. Доказать, что для любой фундаментальной последовательности $\{f_n\}$ предел $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ существует при всех $x \in X$ и что последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится к f. Для доказательства ограниченности f воспользоваться оценкой $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$.

24. Воспользоваться неравенством треугольника.

25. а), б) Любая фундаментальная последовательность в X сходится к точке в замыкании X. Обратно, любая точка замыкания X есть предел некоторой фундаментальной последовательности в X.

в) В качестве пополнения X можно взять замыкание в $B(X)$ его образа при изометрическом вложении задачи 24.

26. Доказать сперва непустоту пересечения всюду плотных открытых множеств, построить подходящую стягивающуюся последовательность замкнутых шаров, а затем вывести утверждение задачи из непустоты пересечения.

27. Последовательность $\{P_k\}$, где $P_k = \sum\limits_{k=0}^{k} \left(\frac{x}{2}\right)^i$, является фундаментальной последовательностью для всех трех расстояний. Показать, что никакой многочлен P не может служить пределом этой последовательности в смысле расстояний а), б) и в).

28. См. указание к задаче 23.

29. Пусть (f_n) — последовательность Коши в G. Тогда $\left(f_n^{-1}\right)$ — также последовательность Коши. В силу задачи 28 (f_n) и $\left(f_n^{-1}\right)$ равномерно сходятся к непрерывным отображениям f и g. Для до-

казательства того, что f и g взаимно обратны, воспользоваться оценкой

$$d_X(fg(x),\, x) \leqslant d_X\left(fg(x) - ff_n^{-1}(x)\right) + d_X\left(ff_n^{-1}(x) - f_n f_n^{-1}(x)\right).$$

30. Непосредственно следует из определения.

31. Пусть (x_n) и (y_n) — последовательности Коши в $\mathbf{Q}$ относительно расстояния d_p. Доказать, что $(x_n + y_n)$ и $(x_n y_n)$ — также последовательности Коши; если $x_n \not\to 0$, т. е. $\|x_n\|_p > a > 0$ для достаточно больших n, то $(1/x_n)$ — последовательность Коши (воспользоваться оценкой

$$\|xy - x'y'\|_p \leqslant \|x\|_p\|y - y'\|_p + \|y'\|_p\|x - x'\|_p$$

и равенством $\left\|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x'}\right\|_p = \dfrac{\|x - x'\|_p}{\|x\|_p\|x'\|_p}$). Относительно неполноты $\mathbf{Q}$ см. указание к задаче 32.

32. Доказать, что ряд $\sum\limits_{i=-k}^{+\infty} a_i p^i$, где $0 \leqslant a_i \leqslant p - 1$, сходится в $\mathbf{Q}_p$ (это следует из того, что его частичные суммы образуют последовательность Коши). Пусть $x = \sum\limits_{i=-k}^{+\infty} a_i p^i$, $y = \sum\limits_{i=-l}^{\infty} b_i p^i$ и i — наименьший индекс, для которого $a_i \neq b_i$. Доказать, что $d_p(x, y) = p^{-i}$ (в частности, разложение в ряд по степеням p однозначно). Вывести отсюда, что последовательность $\left(x_n = \sum\limits_{i=-k_n}^{+\infty} a_i^{(n)} p^i\right)$ является последовательностью Коши тогда и только тогда, когда для любого индекса i последовательность $a_i^{(n)}$ стабилизируется при больших n. Отсюда следует, что множество элементов, представляющихся в виде суммы такого рода, замкнуто. Далее доказать, что любое рациональное число r представляется в таком виде (достаточно рассмотреть случай $r = m/n$, где m, n — целые, n взаимно просто с p; построить по индукции целые числа $m_0, m_1, m_2, \ldots$ и $a_0, a_1, a_2, \ldots$ $(0 \leqslant a_i \leqslant p - 1)$ такие, что $m_0 = m$, $m_i - a_i n = m_{i+1}p$ при $i \geqslant 0$; тогда $r = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i p^i$ — искомое разложение). Осталось сослаться на задачу 25.

Доказать, что число $x \in \mathbf{Q}_p$ рационально тогда и только тогда, когда соответствующая дробь периодична (вспомнить, как доказывается аналогичное утверждение для вещественных чисел). Отсюда следует, что $\mathbf{Q}_p \neq \mathbf{Q}$, т. е. что $\mathbf{Q}$ относительно p-адической метрики неполно.

33. Числа $0, 1, 2, \ldots, p^k - 1$ образуют p^{-k}-сеть в $\mathbf{Z}$. Поэтому компактность $\mathbf{Z}_p$ вытекает из критерия Хаусдорфа. Далее использовать, что каждый элемент $\mathbf{Z}_p$ имеет вид $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i p^i$, где $0 \leqslant a_i \leqslant p - 1$, причем сходимость последовательностей элементов $\mathbf{Z}_p$ означает стабилизацию каждого коэффициента a_i.

34. Доказать с помощью индукции по n, что $x^{p^n} = x^{p^{n-1}} + p^n \cdot u_n$, где $u_n \in \mathbf{Z}_p$ (при $n = 1$ воспользоваться *малой теоремой Ферма*).

Отсюда следует, что $\operatorname{sgn}_p(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^{p^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(x + pu_1 + p^2u_2 + \ldots + p^nu_n\right)$ существует и $\|\operatorname{sgn}_p x - x\|_p \leqslant p^{-1}$. Вывести из последнего неравенства, что числа $\operatorname{sgn}_p a$ при $a = 0, 1, \ldots, p-1$ различные, т. е. sgn_p принимает $\geqslant p$ значений. С другой стороны, вывести из определения sgn_p, что $(\operatorname{sgn}_p x)^p = \operatorname{sgn}_p x$ для всех $x \in \mathbf{Z}_{p^n}$, и воспользоваться тем, что уравнение $y^p = y$ в поле $\mathbf{Q}_p$ не может иметь больше чем p корней.

35. а) Доказать, что последовательность натуральных чисел является последовательностью Коши относительно расстояния d тогда и только тогда, когда она является последовательностью Коши относительно 2-адического и 5-адического расстояний. Получаемое отображение пополнения $\mathbf{N}$ по d в $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_5$ и есть искомый изоморфизм.

б) В силу изоморфизма задачи а) бесконечные «окончания», воспроизводящиеся при умножении, соответствуют решениям уравнения $x^2 = x$ в кольце $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_5$. Это уравнение имеет четыре решения: (0, 0), (0, 1), (1, 0) и (1, 1).

36. Проверяется непосредственно.

37. Все пространство Ω_n является шаром, имеющим любую точку в качестве центра.

38. Так как граф Г конечен и не имеет циклов, функция $\Psi(w, t)$ при любом фиксированном w и $t \to \infty$ может менять свои значения лишь конечное число раз. Таким образом, при достаточно больших t функция $\Psi(w, t)$ не зависит от t.

39. При $t_0 < t_1 < t'$ стабильность прогноза $\Pi(t_1, t')$ вытекает из стабильности прогноза $\Pi(t_0, t')$ по определению. С другой стороны, нестабильный прогноз $(\Pi(t_0, t'))$ может стабилизироваться с течением времени $(\Pi(t_1, t'))$.

40. Следует из того, что для любого t $B(t) = W \setminus H(t)$.

41. Воспользоваться формулой

$$\frac{a_l}{a_l + c_l} - \frac{b_l}{b_l + d_l} = \frac{1}{|B_0|\,|H_0|} \det\begin{pmatrix} a_l & b_l \\ c_l & d_l \end{pmatrix}.$$

42. Подмножество $\alpha = (i_1, \ldots, i_k)$ будем называть R-выборкой, если $\sigma_{i_1} + \ldots + \sigma_{i_k} \leqslant R$; R-выборку α будем называть полной, если при добавлении к α любого индекса $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \alpha$ имеем $\sigma_{i_1} + \ldots + \sigma_{i_k} + \sigma_j > R$. Пусть для данного R $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ — совокупность всех полных R-выборок. Пересечение $\alpha_0 = \bigcap\limits_{i=1}^{l} \alpha_i$ будем называть R-ядром. Утверждение задачи вытекает из лемм.

Лемма 1. *Шар $\mathscr{B}(\omega_0, R)$ есть объединение граней $\Gamma_{\alpha_1}, \ldots, \Gamma_{\alpha_l}$ по всем полным R-выборкам $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$. Центроид шара $\mathscr{B}(\omega_0, R)$ есть пересечение $\Gamma_{\alpha_1}, \ldots, \Gamma_{\alpha_l}$, т. е. грань Γ_{α_0}, где α_0 — R-ядро.*

Лемма 2. *Множество $\alpha \subseteq \{1, \ldots, n\}$ является R-ядром при некотором R тогда и только тогда, когда $\alpha = \{1, \ldots, k\}$ и $\sigma_1 + \ldots + \sigma_k < \sigma_{k+1}$.*

Подробное доказательство утверждения задачи приведено в [8*].

§ 3. Категории и функторы

43. Каждому множеству сопоставить его дополнение.

44. Ответ на все вопросы — «да».

45. Универсальный отталкивающий объект в G_1 — группа целых чисел $\mathbf{Z}$, а в G_1^0 — единичная группа.

46. Универсальное свойство легко следует из любой известной конструкции свободной группы. Приведем одну конструкцию свободной группы F_2 с образующими a и b.

Пусть $Ц_a$ и $Ц_b$ — бесконечные циклические группы с образующими a и b. Элементы F_2 — это *слова* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где x_k при $k = 1, 2, \ldots, n$ принадлежит одной из групп $Ц_a$ или $Ц_b$, любые два последовательных члена принадлежат разным группам и ни один член не является единичным элементом своей группы; число n назовем *длиной слова*. Длина слова может быть равна 0, т. е. F_2 содержит пустое слово $\varnothing$. Умножение слов определим с помощью индукции по длине. Положим $\varnothing \cdot \varnothing = \varnothing$, $\varnothing \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots \ldots, x_n) \cdot \varnothing = (x_1, \ldots, x_n)$ (т. е. $\varnothing$ будет единичным элементом F_2). Произведение $(x_1, \ldots, x_n)(y_1, \ldots, y_m)$ определим отдельно в трех случаях:

1) если x_n и y_1 лежат в разных группах, то

$$(x_1, \ldots, x_n)(y_1, \ldots, y_m) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m);$$

2) если x_n и y_1 лежат в одной группе и $x_n \neq y_1^{-1}$, то

$$(x_1, \ldots, x_n)(y_1, \ldots, y_m) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n y_1, y_2, \ldots, y_n);$$

3) если $x_n = y_1^{-1}$, то

$$(x_1, \ldots, x_n)(y_1, \ldots, y_m) = (x_1, \ldots, x_{n-1})(y_2, \ldots, y_m)$$

(произведение в правой части определено в силу индуктивного предположения).

Проверьте, что F_2 с этим умножением является группой с двумя образующими a и b и что она и есть искомый универсальный объект.

47. Свободная абелева группа с образующими a и b может быть определена как прямое произведение бесконечных циклических групп $Ц_a$ и $Ц_b$. Другой способ ее построения — взять фактор-группу свободной группы с двумя образующими (см. задачу 46) по ее коммутанту.

48. Приведем одну конструкцию универсального объекта. Рассмотрим векторное пространство A_n над K с базисом e_I, где I пробегает конечные последовательности $(k_1, \ldots, k_N)$ $(k_i = \{1, 2, \ldots \ldots, n\})$; если рассматриваются алгебры с единицей, то допускается пустая последовательность $I = \varnothing$. Умножение в A_n, превращающее ее в K-алгебру, определяется правилом $e_I \cdot e_{I'} = e_{II'}$, где II' получается приписыванием I' вслед за I. Проверить, что A_n является ассоциативной K-алгеброй с n отмеченными образующими $e_{(1)}, e_{(2)}, \ldots, e_{(n)}$ и что это и есть универсальный объект.

49. Универсальный объект в $CA_n(K)$ может быть определен как факторалгебра универсального объекта в $A_n(K)$ (см. задачу 48) по двустороннему идеалу, натянутому на элементы вида $xy - yx$.

50. Приведем конструкцию свободной алгебры Ли с n образующими $e_1, \ldots, e_n$. Определим по индукции семейство множества E_n $(n \geqslant 1)$, полагая $E_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$, а при $n \geqslant 2$ $E_n = \coprod_{k+l=n} E_k \times E_l$. Положим $M = \coprod_n E_n$ и определим умножение $M \times M \mapsto M$ посредством отображений $E_k \times E_l \mapsto E_{k+l} \subset M$ (стрелка — каноническое включение, вытекающее из определения E_{k+l}). Пусть $K[M]$ — векторное пространство над K с базисом M; введенное умножение на M превращает $K[M]$ в K-алгебру. Свободная алгебра Ли с n образующими может быть определена как факторалгебра $K[M]$ по двустороннему идеалу, натянутому на элементы вида $a \cdot a$ и $(ab)c + (bc)a + (ca)b$. Проверьте универсальное свойство.

Заметим, что универсальные объекты задач 48 и 49 могут быть получены аналогичной конструкцией, т. е. факторизацией $K[M]$ по подходящему двустороннему идеалу.

51. Определим $V(\mathfrak{g})$ как тензорную алгебру пространства $\mathfrak{g}$, профакторизованную по двустороннему идеалу, натянутому на элементы вида $x \circ y - y \circ x - [x, y]$, $x, y \in \mathfrak{g}$.

Доказать универсальность $V(\mathfrak{g})$, исходя из универсальности тензорной алгебры (см. задачу 48).

52. Пусть $\mathfrak{g}$ — свободная алгебра Ли с n образующими. Используя универсальное свойство $\mathfrak{g}$ (задача 50) и универсальное свойство $V(\mathfrak{g})$ (задача 56), доказать, что $V(\mathfrak{g})$ есть универсальный объект в категории $A_n(K)$ (см. задачу 48).

53. Сумма в категории множеств — дизъюнктивное объединение; в категории линейных пространств — прямая сумма $\left(\coprod_{\alpha \in A} V_\alpha\right.$ — подпространство в декартовом произведении $\prod_{\alpha \in A} V_\alpha$, состоящее из векторов, у которых лишь конечное число ненулевых компонент$\left.\right)$.

54. Произведение в категориях множеств и линейных пространств — обычное декартово произведение.

55. См. указания к задачам 53 и 54.

56. $L_1 \otimes L_2$ может быть определено как факторпространство L'/L'', где L' — векторное пространство над K с базисом $(e_{(a,b)})$ $(a \in L_1,\ b \in L_2)$ (т. е. множество индексов равно $L_1 \times L_2$, а L'' — подпространство в L', натянутое на векторы вида $e_{(\lambda a + \mu b, c)} - \lambda e_{(a,c)} - \mu e_{(b,c)}$, $e_{(a, \lambda b + \mu c)} - \lambda e_{(a,b)} - \mu e_{(a,c)}$; $\lambda, \mu \in K$.

57. Пусть d — наибольший делитель чисел m и n. Проверьте, что $Ц_d$ с каноническим морфизмом $Ц_m \times Ц_n \to Ц_d$, переводящим $(a \bmod m,\ b \bmod n)$ в $ab \bmod d$, является универсальным объектом (и, следовательно, $\mathrm{Tor}(Ц_m, Ц_n) = Ц_d$). В общем случае воспользуйтесь тем, что любая конечная абелева группа является прямой суммой циклических, и тем, что функтор Tor аддитивен по каждому аргументу.

58. а) Положим A равным множеству натуральных чисел и превратим A в направленное множество с помощью делимости ($\alpha \leqslant \beta$, если $\alpha | \beta$). Пусть $X_\alpha = \mathbf{Z}$ для всех $\alpha \in A$ и $\varphi_{\alpha\beta}$ при $\alpha < \beta$ есть умножение на $\beta | \alpha$. Проверить, что индуктивный предел этого семейства изоморфен аддитивной группе $\mathbf{Q}$ (морфизмы φ_α: $X_\alpha \to \mathbf{Q}$ задаются формулами $\varphi_\alpha(k) = k/\alpha$).

б) Доказать, что вложение $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_p$ индуцирует изоморфизм $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \rightleftarrows \mathbf{Z}_p/p^n\mathbf{Z}_p$.

59. Непосредственно следует из определения.

60. Если $\{\xi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — базис в L (см. задачу 14), то он же является базисом в $L\otimes_R \mathbf{C}$.

61. Воспользоваться тем, что функтор F, осуществляющий эквивалентность категорий, задает изоморфизм полугруппы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(A)$ и $\mathrm{Aut}(F(A))$, и тем, что полугруппа вещественных чисел не изоморфна ни одной из полугрупп матриц с комплексными коэффициентами.

62. Следует из определений.

63. Точка $x\in X$ является пределом направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$, если для любой окрестности U точки x существует такой элемент $\beta\in A$, что $x_\alpha\in U$ для всех $\beta>\alpha$.

64. а) Пусть f непрерывна в точке x. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$, как только $d(x, y)<\delta$. Если $x=\lim x_n$, то существует такой номер N, что $d(x, x_n)<\delta$ при $n>N$. Отсюда видно, что $f(x_n)$ имеет своим пределом $f(x)$.

Если же f разрывна в точке x, то существует такое $\varepsilon>0$, что как угодно близко от x найдется точка y, для которой $|f(x)-f(y)|\geqslant\varepsilon$. Из таких точек y можно составить последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к x. Соотношение $f(\lim x_n)=\lim f(x_n)$ для этой последовательности не выполняется.

б) Переделайте рассуждения, приведенные в указании к п. а), заменяя последовательности $\{x_n\}$ на направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$, где A — множество окрестностей точки x, упорядоченное обратно включению (т. е. $U_1\geqslant U_2$, если $U_1\subset U_2$).

в) Неверно. Противоречащие примеры (показывающие, что топология пространства не определяется, вообще говоря, классом сходящихся последовательностей) можно найти в теории интеграла (теорема Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла) и в теории банаховых пространств (см. задачи 233, 234).

65. Непосредственная проверка определений. Единственное нетривиальное утверждение: композиция двух непрерывных отображений является непрерывным отображением. Это легко следует из задачи 64б).

66. В качестве базы топологии можно взять совокупность открытых шаров.

67. В качестве суммы семейства объектов $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ можно взять их дизъюнктное объединение $\coprod_{\alpha\in A} X_\alpha$. Открытым множеством в этом объединении назовем множества вида $\coprod_{\alpha\in A} U_\alpha$, где U_α — открытое подмножество в X_α.

В качестве произведения семейства $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ можно взять теоретико-множественное произведение $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. В качестве базы топологии нужно взять произведения вида $\prod_{\alpha\in A} U_\alpha$, где U_α — открытое подмножество в X_α, причем $U_\alpha\neq X_\alpha$ лишь для конечного множества индексов α.

68. Пусть M замкнуто и $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — последовательность точек M, сходящихся к x. Если $x\notin M$, то из открытости $X\setminus M$ вытекает, что $x_\alpha\notin M$ для достаточно больших индексов α. Противоречие.

Обратно, пусть M незамкнуто. Тогда $X\setminus M$ не открыто. Значит, одна из точек $x\in X\setminus M$ обладает свойством: в любой ее окрестности U есть точки из M. Пусть x_U — одна из таких точек. Постройте направленность $\{x_U\}$, сходящуюся к x (см. задачу 64 б)).

69. а) Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

б) Воспользуйтесь основным свойством непрерывных отображений: прообраз открытого множества открыт.

70. Пусть A предкомпактно. Тогда $\bar{A}$ — компакт. Рассмотрим покрытие $\bar{A}$ всевозможными открытыми шарами радиуса ε. В силу компактности $\bar{A}$ у этого покрытия есть конечное подпокрытие. Центры шаров, входящих в это подпокрытие, образуют искомую ε-сеть для A.

Обратно, пусть $\bar{A}$ — не компакт. Это значит, что существует бесконечное открытое покрытие множества $\bar{A}$, из которого нельзя выбрать конечного подпокрытия. Рассмотрим теперь всевозможные замкнутые шары в $\bar{A}$ и назовем шар плохим, если он не покрывается никаким конечным числом элементов нашего покрытия. По условию для любого $\varepsilon > 0$ $\bar{A}$ можно представить в виде объединения конечного числа шаров радиуса ε. Хотя бы один из этих шаров должен быть плохим.

Получите противоречие, построив стягивающуюся последовательность плохих шаров.

71. а) $\Rightarrow$ б) Пусть A предкомпактно и $\{x_n\}$ — последовательность точек из A. Назовем шар в A богатым, если он содержит бесконечное число членов последовательности. Постройте стягивающуюся последовательность богатых шаров, следуя методу, предложенному в указании к задаче 70.

б) $\Rightarrow$ а) Если A не предкомпактно, то для некоторого $\varepsilon > 0$ оно содержит бесконечное число попарно непересекающихся шаров радиуса ε. Центры этих шаров дают пример последовательности, из которой нельзя выбрать фундаментальную подпоследовательность.

72. Следует из предыдущей задачи.

ГЛАВА II

ТЕОРИЯ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛА

§ 1. Теория меры

1. Алгебра множеств.

73. Следует из того, что $(A \triangle B) = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$, $(A\backslash B) \subset (A\backslash C) \cup (C\backslash B)$, $(B\backslash A) \subset (C\backslash A) \cup (B\backslash C)$.

74. а) Следует из включения $(A_1 \cup A_2)\backslash(B_1 \cup B_2) \subset (A_1\backslash B_1) \cup (A_2\backslash B_2)$.

б) Введем обозначение для дополнения: $E^c = (A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2)\backslash E$, тогда $(A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2) = \left(A_1^c \cup A_2^c\right) \triangle \left(B_1^c \cup B_2^c\right) \subset \left(\left(A_1^c \triangle B_1^c\right) \cap \left(A_2^c \triangle B_2^c\right)\right)^c = (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$.

в) Следует из б), если учесть, что $A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap A_2^c$.

75. Рассмотреть систему, состоящую из одного непустого множества.

76. $A \cap B = (A \cup B)\backslash((B\backslash A) \cup (A\backslash B))$, $A \triangle B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.

77. Объединение двух непересекающихся отрезков не является отрезком.

78. Рассмотреть множество, состоящее из всех множеств, получающихся из конечного числа элементов системы S путем применения операций пересечения и дополнения.

79. Пусть $A = \coprod_{i=1}^{n} A_i$, $B = \coprod_{j=1}^{m} B_j$, A_i, $B_j \in S$. Тогда $A \setminus B = \coprod_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} (A_i \setminus B_j)$. Так как S — полукольцо, то существуют такие $C_1, \ldots, C_{n_{ij}} \in S$, что $A_i \setminus B_j = \bigcup_{k=1}^{n_{ij}} C_k$.

80. Если E — единица алгебры, то

$$\bigcup_n A_n = E \setminus \bigcap_n (E \setminus A_n), \quad \bigcap_n A_n = E \setminus \bigcup_n (E \setminus A_n).$$

81. а) Рассмотрим произведение двух полуколец S_1 и S_2 (для большего числа сомножителей доказательство аналогично). Если $A = A_1 \times A_2$, $B = B_1 \times B_2$, где A_i, $B_i \in S_i$ для $i = 1, 2$, то $A \cap B = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \in S_1 \times S_2$. Пусть $B_1 \subset A_1$, $B_2 \subset A_2$; тогда существуют $B_1^{(i)} \in S$ и $B_2^{(i)} \in S_2$ такие, что $A_1 = B_1 \sqcup B_1^{(i)} \ldots B_1^{(k)}$, $A_2 = B_2 \sqcup B_2^{(1)} \ldots B_2^{(l)}$ и $A_1 \times A_2 = (B_1 \times B_2) \sqcup \left(\coprod_{i=1}^{k} \coprod_{j=1}^{l} B_1^{(i)} \times B_2^{(j)} \right)$.

б) Пусть $P(X)$ — алгебра подмножеств множества из двух элементов $\{a, a\} \cup \{b, b\} \notin P(X) \times P(X)$.

82. $\overline{\lim} E_n$ есть совокупность точек, принадлежащих бесконечному числу из множеств E_n; $\underline{\lim} E_n$ — совокупность точек, принадлежащих всем множествам E_n, кроме, может быть, конечного числа из них.

83. Пусть $A \neq B$; верхний предел последовательности A, B, A, B, ... равен $A \cup B$, нижний — $A \cap B$.

84. $X \setminus \bigcap_n \left(\bigcup_{k \geqslant n} E_k \right) = \bigcup_n \left(X \setminus \bigcup_{k \geqslant n} E_k \right) = \bigcup_n \left(\bigcap_{k \geqslant n} (X \setminus E_k) \right)$.

85. Рассмотрим $\chi \left(\overline{\lim_n} E_n \right)$ $\left(\chi \left(\underline{\lim_n} E_n \right) \right.$ рассматривается аналогично). Легко видеть, что условие $\chi(x_0) = 1$ (т. е. x_0 принадлежит бесконечному числу множеств из E_n) равносильно условию $\overline{\lim_n} \chi_n(x_0) = 1$.

86. Из задачи 85 следует, что условия $\underline{\lim_n} E_n = \overline{\lim_n} E_n$ и $\underline{\lim_n} \chi_n = \overline{\lim_n} \chi_n$ равносильны.

87. Пересечению множеств соответствует умножение характеристических функций, а симметрической разности — сложение по модулю 2.

88. Каждому $\mu \in \mathcal{M}$ (см. задачу 10) поставим в соответствие совокупность B_μ борелевских множеств класса μ: B_{μ_0} — совокупность интервалов; B_μ — совокупность множеств, которые получаются из множеств класса $< \mu$ одной операцией счетного объединения, счетного пересечения или дополнения. Докажите, что $B = \bigcup_{\mu \in \mathcal{M}} B_\mu$ и что все B_μ имеют мощность континуума.

89. а) $f^{-1}(Y_1)\cap f^{-1}(Y_2)=f^{-1}(Y_1\cap Y_2)$, $f^{-1}(Y_1)\triangle f^{-1}(Y_2)=$ $=f^{-1}(Y_1\triangle Y_2)$.

б) Положим $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{a', b', d'\}$, $\mathscr{A}=\{\varnothing, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$, $f(a)=a'$, $f(b)=f(c)=b'$, $f(d)=d'$.

Тогда $f(\{a, b\})\cap f(\{c, d\})\notin f(\mathscr{A})$.

в) Если E — единица в $\mathscr{B}$, то $f^{-1}(E)$ — единица в $f^{-1}(\mathscr{B})$ $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}$ $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f^{-1}(Y_n)=f^{-1}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Y_n\right)$.

г) Для любых Y_1, $Y_2\subset B$ выполняется $f^{-1}(Y_1)\cap f^{-1}(Y_2)=$ $=f^{-1}(Y_1\cap Y_2)$, $f^{-1}(Y_1)\triangle f^{-1}(Y_2)=f^{-1}(Y_1\triangle Y_2)$.

2. Продолжение меры.

90. В силу полуаддитивности внешней меры

$$\mu^*(A)+\mu^*(X\setminus A)\geqslant\mu^*(X)=1.$$

91. Обозначим через S полукольцо интервалов, принадлежащих отрезку $[0, 1]$. Пусть существует $B\in R(S)$ такое, что $\mu^*(A\triangle B)<\varepsilon$; тогда $\mu(B)-\varepsilon\leqslant\mu_*(A)\leqslant\mu^*(A)\leqslant\mu(B)+\varepsilon$, откуда вытекает равенство $\mu_*(A)=\mu^*(A)$. С другой стороны, предположим, что $\mu_*(A)=\mu^*(A)$. Тогда $\forall\varepsilon>0$ существуют B_n, $C_k\in$ $\in R(S)$ такие, что $\coprod\limits_{n=1}^{\infty} B_n\subset A\subset\coprod\limits_{k=1}^{\infty} C_k$ и $\mu^*\left(\coprod\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right)-$ $-\mu^*\left(\coprod\limits_{k=1}^{\infty} C_k\right)<\varepsilon$. Легко доказать, что существует $B\in R(S)$ такое, что $\mu^*\left(\coprod\limits_{n} B_n\triangle B\right)<\varepsilon$; тогда

$$\mu^*(A\triangle B)\leqslant\mu^*\left(\left(A\triangle\coprod_n B_n\right)\cup\left(\coprod_n B_n\triangle B\right)\right)\leqslant\varepsilon.$$

92. Любое подмножество канторова множества, имеющего мощность континуум, измеримо (его мера равна нулю).

93. В каждом классе эквивалентности существует борелевское множество.

94. Очевидно, что а) $\Leftrightarrow$ б), а) $\Leftrightarrow$ в), г) $\Rightarrow$ а). Если выполнены б) и в), то имеют место следующие неравенства:

$$\mu\left(\overline{\lim_n} A_n\right)=\mu\left(\bigcap_k\bigcap_{n\geqslant k} A_n\right)=\lim_k\mu\left(\bigcup_{n\geqslant k} A_n\right)\geqslant\overline{\lim_k}\,\mu(A_k),$$

$$\mu\left(\underline{\lim_n} A_n\right)=\mu\left(\bigcup_k\bigcap_{n\geqslant k} A_n\right)=\lim_k\mu\left(\bigcap_{n\geqslant k} A_n\right)\leqslant\underline{\lim_k}\,\mu(A_k),$$

откуда следует импликация а) $\Rightarrow$ г).

Рассмотреть следующий пример полунепрерывной сверху и снизу, но не счетно-аддитивной меры на полукольце S подмножеств $[0, 1]\cap\mathbf{Q}$:

$$S=\{s_{ab}=[a, b)\cap[0, 1)\cap\mathbf{Q}\},\quad\mu(s_{ab})=b-a.$$

95. Использовать неравенство $\mu^*(A\triangle C)\leqslant\mu^*((A\triangle B)\cup$ $\cup(B\triangle C))\leqslant\mu^*(A\triangle B)+\mu^*(B\triangle C)$, которое следует из задачи 73 и полуаддитивности μ^*.

б) Пусть $\{\tilde{A}_n\}$ — фундаментальная последовательность элементов из $\mathscr{M}$, $A_n \in \tilde{A}_n$. Тогда для любого $n \in \mathbf{N}$ существует $l(n) \in \mathbf{N}$ такое, что $\rho\left(\tilde{A}_{n'}, \tilde{A}_{n''}\right) < 1/2^n$ для любых $n' > l(n)$, $n'' > l(n)$. Положим $m(1) = l(1)$, $m(2) = \max\{m(1)+1, \ l(2)\}$, $m(3) = \max\{m(2)+1, \ l(3)\}$ и т. д. Несложно доказать, что $\mu\left(\overline{\lim\limits_j} A_{m(j)} \setminus \underline{\lim\limits_j} A_{m(j)}\right) = 0$ и, следовательно, $\{\tilde{A}_n\}$ имеет предел. Другое доказательство см. в задаче 236.

б) Если множество B измеримо, то по определению $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A \in R(S)$ такое, что $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$.

96. Множества $A_n = \bigcup\limits_{k=1}\left[\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}\right]$ задают такую совокупность $\{\tilde{A}_n\}_{n=1,2,\ldots}$ элементов из $\mathscr{M}$, что $\rho(A_l, A_m) = 1/2$ для любых $l \neq m$, откуда следует некомпактность $\mathscr{M}$. Для доказательства связности $\mathscr{M}$ используйте непрерывные отображения $f_{\tilde{E}}\colon [0, 1] \to \mathscr{M}$, задаваемые формулой $f_{\tilde{E}}(t) = \tilde{A}_t$, где $A_t \ni [0, t] \cap E$, $E \in \tilde{E}$.

97. Да, так как измеримые множества образуют σ-алгебру.

98. $\mu\left(\bigcap\limits_k \bigcup\limits_{n \geqslant k} A_n\right) \leqslant \sum\limits_{n \geqslant k}^{\infty} \mu(A_n)$.

99. Измеримые множества образуют σ-алгебру.

б) Пусть $A \subset R$ измеримо. Из задачи 91 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $B_\varepsilon \subset A$ такое, что $\mu^*(A \setminus B) < \varepsilon$. Тогда $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_{1/n}$ — искомое борелевское множество.

100. Подмножество квадрата измеримо тогда и только тогда, когда оно имеет вид $A \times [0, 1]$, где $A \subset [0, 1]$ и измеримо по Лебегу.

101. $\mu_*(\tilde{T}) = 0$, $\mu^*(\tilde{T}) = 1$, следовательно, $\tilde{T}$ измеримо.

102. Из измеримости множества A по Каратеодори следует, что

$$\mu(X) = \mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = \mu^*(A) + \mu_*(A),$$

откуда следует измеримость A по Лебегу. С другой стороны, пусть A измерима по Лебегу. Для любого подмножества $Z \subset X$ существует измеримое по Лебегу множество Z_1 такое, что $X \supset Z_1 \supset Z$, $\mu(Z_1) = \mu^*(Z)$ (Z_1 — это пересечение последовательности счетных покрытий множества Z элементами полукольца, для которой мера μ (n-го покрытия) меньше $\mu^*(Z) + 1/n$). Имеем

$$\mu^*(Z) \leqslant \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A),$$
$$\mu^*(Z) = \mu(Z_1) = \mu(Z_1 \cap A) + \mu(Z \setminus A) \geqslant \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A),$$

откуда следует измеримость множества A по Каратеодори.

103. а) Если A измеримо по Лебегу, то $\forall \varepsilon > 0$ осуществляет такое B из минимального кольца, что $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$. Отсюда следует, что $\lambda_i(A \triangle B) \leqslant \mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$, следовательно, $|\lambda_i(A) - \lambda_i(B)| < \varepsilon$, где $i = 1, 2$. Так как $\lambda_1(B) = \lambda_2(B)$, то $|\lambda_1(A) - \lambda_2(A)| < 2\varepsilon$, что и заканчивает доказательство.

б) Пусть $a = \mu_*(Y) \leqslant y \leqslant \mu^*(Y) = b$. Построим лебеговское расширение ν лебеговской меры μ, порожденной m, такое, что Y будет ν-измеримо и $\nu(Y) = y$. Имеются такие μ-измеримые множества E_1 и E_2, что

$$E_1 \subset Y \subset E_2, \quad \mu(E_1) = a, \quad \mu(E_2) = b.$$

К системе μ-измеримых множеств добавим все подмножества множества $E = E_2 \backslash E_1$, имеющие вид $C = A(Y \backslash E_1) \cup B(E_2 \backslash Y)$, $A \subset E$, $B \subset E$, где A, B измеримы и однозначно с точностью до множества меры 0 определяются по множеству C. Положим

$$\nu(C) = \frac{y-a}{b-a}\mu(A) + \left(1 - \frac{y-a}{b-a}\right)\mu(B).$$

104. Пусть ν — мера Лебега на $[0, 1]$. Будем отождествлять образы и прообразы при отображении $f\colon X \to [0, 1]$ (так как f — почти всюду биекция). Если $Y = \prod\limits_n Y_n$ и для бесконечного множества индексов $\{k\}$ $Y_k \neq X_k$, то $\mu(Y) = \nu(Y) = 0$. Если $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_k \times X_{k+1} \times X_{k+2} \times \ldots$, то $\mu(Y) = 10^{-n} \prod\limits_{i=1}^{k} \operatorname{card} Y_i = \nu(Y)$, так как Y состоит из $\prod\limits_{i=1}^{k} \operatorname{card} Y_i$ отрезков длиной 10^{-k}. Рассмотрим теперь полукольцо множеств L вида $(a_k 10^{-k}, b_k 10^{-k})$. Легко видеть, что μ и ν совпадают на L, а лебеговское продолжение с полукольца L совпадает с обычной мерой Лебега.

3. Конструкции мер.

105. Определим на интервале $[0, 1]$ отношение эквивалентности: $x \sim y$, если $x - y \in \mathbf{Q}$. Пусть A является подмножеством $(0, 1]$, содержащим по одному элементу из каждого класса эквивалентности. Для $r \in (0, 1]$ определим множество $A_r \subset (0, 1]$, получающееся из A сдвигом на r по модулю 1:

$$A_r \equiv ([r + A] \cup [(r-1) + A]) \cap (0, 1].$$

Легко видеть, что интервал $(0, 1]$ является объединением совокупности попарно непересекающихся множеств $\{A_r\}$, где $r \in \mathbf{Q} \cap (0, 1]$. Привести к противоречию предположение об измеримости A.

106. Пусть $A \subset [0, 1)$ неизмеримо. Рассмотреть множество

$$\{A \times \{0\}\} \cup \{\{0\} \times A\} \subset [0, 1] \times [0, 1].$$

107. По поводу указаний к решению этой задачи без использования понятия интеграла читатель отсылается к книге [3], гл. V, § 6, упражнение 15. Отметим также, что если использовать понятие интеграла, то задача не представляет трудности, ибо если φ — характеристическая функция множества A, $\Phi(x) = \int\limits_0^x \varphi(t)\,dt$, то утверждение задачи легко следует из того, что $\Phi'(x) = \varphi(x)$ почти всюду.

108. Из теоремы Лебега об интегрируемости по Риману следует необходимое и достаточное условие: граница множества имеет меру 0.

109. а) Тривиальная проверка.

б) Первая часть является следствием из задачи 109 а).

110. Для фундаментальной последовательности $\{\nu_n\}$ положим $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \nu_n\right)(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \nu_n(A)$ для любого $A \in \mathfrak{A}$. Счетная аддитивность функции множеств $\lim\limits_{n\to\infty} \nu_n$ следует из равенства

$$\lim_{n\to\infty} \sum_i \nu_n(A_i) = \sum_i \lim_{n\to\infty} \nu_n(A_i), \text{ где } A = \bigcup_i A_i, \quad A_k \cap A_l = \varnothing$$

при $k \neq l$, которое следует из равномерной сходимости рядов $\sum\limits_i \nu_n(A_i)$ по n.

111. Непосредственно из определения измеримого множества несложно доказать, что существует такой параллелепипед B, что

$$0{,}75\mu(B) \leqslant \mu(M \cap B).$$

Доказать, что открытый параллелепипед B' с центром в точке $0 \in \mathbf{R}^n$, гомотетичный параллелепипеду B с коэффициентом 1/2, принадлежит $M - M$. Идея доказательства: если $b \in B'$, то $(b + M \cap B') \cap (M \cap B')$ непусто, так как имеет положительную меру.

112. Непосредственная проверка с использованием свойств двойного абсолютно сходящегося ряда.

113. Пусть $X = \mathbf{Q} \cap [0, 1]$. Рассмотреть кольцо подмножеств X, порожденное отрезками, с обычной мерой; X состоит из счетного числа точек, каждая из которых имеет меру 0.

114. Множество, о котором идет речь в задаче, является частным случаем множества вида $\chi(t_1, t_2; \Delta_1, \Delta_2)$, при $t_1 = a$, $t_2 = b$, $\Delta_1 = (-\infty, 0)$, $\Delta_2 = (0, \infty)$. Поэтому искомая мера равна

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(\sigma-\tau)^2}{2(b-a)}\right\} d\sigma\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_0^\infty s\cdot\exp\left\{-\frac{s^2}{2(b-a)}\right\} ds = \sqrt{\frac{b-a}{\pi}}.$$

115. Обозначим $f\colon x \to \{1/x\}$. Имеем

$$\mu f^{-1}([a, b]) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [\log_2(\alpha + n + 1) + \log_2(\beta + n) - \log_2(\beta + n + 1) -$$

$$- \log_2(\alpha + n)] = \log_2(1 + \beta) - \log_2(1 + \alpha) = \mu([\alpha, \beta]).$$

116. а) $$f\left(\cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \ldots}}\right) = \left\{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \ldots}}\right\} = \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \ldots}}.$$

Мера цилиндрического множества, состоящего из всех последовательностей, одна координата которых фиксирована: $n_k = n$, задается формулой $p(n) = \log_2(n+1)/(n(n+2))$.

117. Если сумма ряда не зависит от порядка суммирования, то ряд сходится абсолютно.

118. а) $|\nu|(X) = \mu_1(X) + \mu_2(X)$;

б) $|\nu|(X) = \sqrt{2}\mu_1(X)$.

119. Определим комплексно сопряженный заряд, положив $\bar{\nu}(A) = \overline{\nu(A)}$ для любого $A \in \mathfrak{A}$. Тогда $\operatorname{Re}\nu = (\nu + \bar{\nu})/2$, $\operatorname{Im}\nu = (\nu - \bar{\nu})/2$.

120. Для любого $A \in \mathfrak{A}$ положим $f(A) = \sup\{|\nu(A')|: A' \subset A, A' \in \mathfrak{A}\}$. Предположим, что $\sup\limits_{A \in \mathfrak{A}} |\nu(A)| = \infty$, тогда существует $A_0 \in \mathfrak{A}$, $f(A_0) = \infty$. По индукции выберем последовательность $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ такую, что $f(A_n) = \infty$, $|\nu(A_n)| \geqslant n$. (Пусть $B \subset A_{n-1}$ и $|\nu(B)| \geqslant |\nu(A_{n-1})| + n$; если $f(B) = \infty$, то положим $A_n = B$, в противном случае $A_n = A_{n-1} \setminus B$.)

По свойству непрерывности счетно-аддитивной функции получаем противоречие: $\nu\left(\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \nu(A_n) = \infty$, в то время как $C = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$ и, значит, $\nu(C) \neq \infty$.

121. Множество $E \in \mathfrak{A}$ назовем *отрицательным относительно* ν, если $\nu(E \cap F) \leqslant 0$ для любого $F \in \mathfrak{A}$; аналогично определяется *положительное* множество. Докажем существование отрицательного множества A_- такого, что $A_+ = X \setminus A_-$ положительно, откуда следует утверждение задачи.

Пусть $\{A_n\}$ — последовательность отрицательных множеств и $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(A_n) = a = \inf\{\nu(A): A$ отрицательно$\}$. Тогда $A = \bigcup\limits_n A_n$ отрицательно и $\nu(A) = a$. Если $A_+ = X \setminus A_-$ неположительно, то существует $C_0 \subset A_+$, $\nu(C_0) < 0$. Тогда существует наименьшее натуральное k_1, для которого существует $C_1 \subset C_0$, $\nu(C_1) \geqslant 1/k_1$. Повторим операцию $C_0 \setminus C_1$, получив C_2 и $k_2 \geqslant k_1$, и т. д. Докажите, что множество $F_0 = C_0 \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i$ непусто и отрицательно, что противоречит определению a. Значит, A_+ положительно.

122. Любое подмножество A_+ (соответственно A_-) является положительным (соответственно отрицательным).

123. Если подмножество $E \in \mathfrak{A}$ лежит в $X \setminus (A_+ \cup A_-)$, то $\nu(E) = 0$.

124. $\nu_+(E) = \nu(E \cap A_+)$, $\nu_-(E) = -\nu(E \cap A_-)$. Применить задачи 120—123.

§ 2. Измеримые функции

1. Свойства измеримых функций.

125. Цепочка следствий доказывается равенствами

$$\{x \in X: f(x) \geqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X: f(x) > a - \frac{1}{n}\right\},$$

$$\{x \in X: f(x) < a\} = X \setminus \{x \in X: f(x) \geqslant a\},$$

$$\{x \in X: f(x) \leqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X: f(x) < a + \frac{1}{n}\right\},$$

$$\{x \in X: f(x) > a\} = X \setminus \{x: f(x) \leqslant a\}.$$

д) Всякий луч является борелевским множеством; наименьшим σ-кольцом, содержащим все лучи, является кольцо борелевских множеств.

126. $\left\{x \in X: \dfrac{1}{f(x)} > a\right\} =$

$$= \begin{cases} \{x \in X: 0 < f(x) < a^{-1}\}, \text{ если } a > 0, \\ \{x \in X: 0 < f(x) < \infty\}, \text{ если } a = 0, \\ \{x \in X: -\infty < f(x) < a^{-1}\} \cup \{x \in X: 0 < f(x) < \infty\}, \\ \hfill \text{если } a < 0. \end{cases}$$

127. $\{x \in X: |f(x)| < a\} = \{x \in X: f(x) < a\} \cap \{x \in X: f(x) > -a\}$.

128. Очевидно, что множество $\{(t_1, \ldots, t_n): f(t_1, \ldots, t_n) > a\}$ открыто и представимо в виде счетного объединения открытых параллелепипедов из $\mathbf{R}^n$ вида $\left(a_k^{(1)}, b_k^{(1)}\right) \times \ldots \times \left(a_k^{(n)}, b_k^{(n)}\right)$.

Тогда

$$\{x \in \mathbf{R}: h(x) > a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{n} \left\{x \in \mathbf{R}: a_k^{(i)} < g_i(x) < b_k^{(i)}\right\}.$$

129. Построить непрерывную монотонно возрастающую функцию $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такую, что прообраз некоторого множества меры 0 является множеством X' положительной меры (используйте для этого ряды из *канторовых лестниц*). Пусть $X \subset X'$ — неизмеримое множество, $\varphi(y)$ — характеристическая функция множества $f^{-1}(x)$. Тогда $\varphi[f(x)]$ неизмерима.

130. Считая, что $f(x)$ продолжена вправо от точки $x = 1$ дифференцируемым образом (например, $f(1 + \alpha) = f(1) + \alpha f'(1)$), положим $\varphi_n(x) = n\left|f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - f(x)\right|$. Тогда $f'(x)$ является пределом сходящейся последовательности непрерывных и, следовательно, измеримых функций: $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$.

131. Прообразом квадрата $D_{nml} = \left[\dfrac{m}{2^n}, \dfrac{m+1}{2^n}\right] \times \left[\dfrac{l}{2^n}, \dfrac{l+1}{2^n}\right]$ является интервал длиной 2^{-2n}. Рассмотреть σ-кольца, порожденные D_{nml} и $f^{-1}(D_{nml})$.

132. Положим $U(a) = \{x \in \mathbf{R}: f(x) < a\}$. Каждое из счетной совокупности множеств $U\left(\dfrac{k+1}{2^n}\right)$ становится борелевским после выбрасывания некоторого множества меры 0. Объединение всех выброшенных множеств — борелевское множество; можно на нем положить, например, $f(x) \equiv 0$.

133. Доказать утверждение задачи для простых функций, принимающих конечное число значений, доказав сначала, что для любого измеримого множества $A \subset [0, 1]$ выполняется: $\forall \delta > 0$ существует замкнутое $B \subset A$ такое, что $\mu(A \setminus B) < \delta$. Для любой функции $f(x)$ существует последовательность простых функций $f_n(x)$, сходящихся к $f(x)$. Тогда существует последовательность замкнутых множеств $\{K_n\}$, $\mu(K_n) > 1 - \dfrac{\varepsilon}{2^n}$, $f_n(x)$ непрерывна на

K_n. На компактном множестве $K = \bigcap\limits_n K_n$ последовательность непрерывных функций $f_n(x)$ равномерно сходится к $f(x)$, откуда следует утверждение задачи.

134. Сведя задачу к случаю, когда $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$, в силу задачи 133 имеем: $\forall\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $X_\varepsilon \subset [a, b]$, $\mu(X_\varepsilon) > b - a - \varepsilon$ такое, что $f(x)$ непрерывна на X_ε. Обозначим через $X'_\varepsilon \subset X_\varepsilon$ множество точек плотности; можно показать, что $\mu\left(X'_\varepsilon\right) = \mu\left(X_\varepsilon\right)$. Очевидно, что все точки X'_ε являются точками Лебега функции f, откуда в силу произвольности ε следует утверждение задачи.

135. См. указания к задаче 198.

136. $$\left\{x\colon \sup_n f_n(x) > c\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x\colon f_n(x) > c\right\},$$

$$\left\{x\colon \inf f_n(x) < c\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x\colon f_n(x) < c\right\}.$$

137. Искомое множество:

$$\bigcap_k \bigcup_n \bigcap_m \left\{x\colon \left|f_n(x) - f_{n+m}(x)\right| < 1/k\right\}.$$

138. Следствие из задачи 136.

139. Положим $F(c) = \mu\{x\colon f(x) \leqslant c\}$, тогда $g(y) = \inf\limits_{F(c) \leqslant y} c$.

140. Следствие из задачи 128.

141. На множестве комплексных чисел круги и прямоугольники

$$\{z \in \mathbf{C}\colon a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant b,\ c \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant d\}$$

порождают одну и ту же σ-алгебру.

142. Координаты векторов в одном базисе непрерывно зависят от координат в другом базисе. Использовать задачу 128.

2. Сходимость измеримых функций.

143. Сходимость очевидна. Неравномерность сходимости следует из того, что $f_n(n) = 1/2$.

144. Последовательность сходится к разрывной функции

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant x < 1, \\ 0 & \text{при } \qquad x = 1, \end{cases}$$

следовательно, сходимость неравномерная.

145. Несовпадение непрерывных функций в одной точке влечет несовпадение в некоторой окрестности.

146. $f(x) = \begin{cases} x^{-1} & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } \qquad x = 0. \end{cases}$

147. Пусть последовательность $\{f_n\}$ не сходится к f на множестве F, а к функции g — на множестве G. Тогда f и g могут отличаться только на множестве $F \cup G$.

148. Множество тех точек $x \in \mathbf{R}$, где $f_n(x) \geqslant \varepsilon$, при $0 < \varepsilon < 1$ является отрезком длины $2\sqrt{\ln(\varepsilon^{-1})}/q_k$. Эта величина стремится к нулю при $k \to \infty$. Значит, $f_k \to 0$ по мере.

Для любой точки $x \in [0, 1]$ рассмотрим подпоследовательность рациональных чисел $\{r_{k_n}\}$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} r_{k_n}$ существует и не равен x. Тогда $\left(p_{k_n} - xq_{k_n}\right)^2 \to \infty$ при $n \to \infty$ и, значит, $f_{k_n}(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Далее, существует подпоследовательность $\left\{r_{k'_n}\right\}$, для которой $\left|p_{k'_n}/q_{k'_n} - x\right| \leqslant 1/q_{k'_n}$. Для этой подпоследовательности $f_{k'_n}(\bar{x}) \geqslant e^{-1}$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ не существует.

б) Выбрать $\{k_l\}$ $(l = 1, 2, \ldots)$ так, чтобы отрезки, на которых $f_{k_l} > 1/l$, не пересекались.

149. Достаточно заметить, что самый естественный способ нумерации множества $\left\{f_i^{(k)}(x)\right\}$ задается условием $n = k(k-1)/2 + i$. Очевидно, что $\mu\left(f_i^k(x) \neq 0\right) = 1/k$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, g_n(x) = 1, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, g_n = 0.$$

150. Применить соотношения

$$E(|h-g| \geqslant \delta) \subset E(|f_n - h| \geqslant \delta/2) \cup E(|f_n - g| \geqslant \delta/2),$$

$$E(h \neq g) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(|h-q| \geqslant 1/n).$$

151. Применить теорему Егорова.

152. Рассмотреть $\operatorname{tg} x$ на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$. Если $|f_1(x)| = M$, то хотя бы на одном из двух отрезков $[-\pi/2, \operatorname{arctg} M]$ или $[\operatorname{arctg} M, \pi/2]$ последовательность $\{f_n(x)\}$ не сходится к $f(x)$.

Замечание. Используя теорему Леви, легко доказать, что любую измеримую функцию $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ такую, что $\int\limits_{[a,b]} f_+(x)\,dx = \int\limits_{[a,b]} f_-(x)\,dx = +\infty$, нельзя представить в виде монотонного предела последовательности суммируемых функций.

153. Приведем к противоречию предположение о том, что $(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$, где $\varphi_n(x)$ непрерывны. Положим, $F_n = E(\varphi_n \leqslant 0{,}5)$ — это множество таких точек x, что $\varphi_n(x) \leqslant 0{,}5$. Имеем $E(\varphi < 0{,}5) = \underline{\lim\limits_{n}}\, F_n$, что противоречит тому, что множество иррациональных чисел не является объединением счетного числа замкнутых множеств.

Замечание. Не непрерывные функции, представимые в виде предела последовательности непрерывных функций, называются функциями 1-*го класса Бэра*. Функция Дирихле принадлежит ко 2-му классу Бэра (двукратный предельный переход).

154. Необходимость (для любой измеримой функции) очевидна. Достаточность следует из того, что прообраз любого борелевского множества есть объединение не более чем счетного множества уровней. Рассмотреть следующий пример неизмеримой функции: $f_E\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, где $E \subset \mathbf{R}$ — неизмеримое множество:

$$f_E(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in E, \\ -x, & \text{если } x \notin E. \end{cases}$$

155. Для функции $f(x)$ рассмотреть последовательность $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = m/n$, если $m/n \leqslant f(x) < (m+1)/n$ $(n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{Z})$.

156. Мера множества чисел из $[0, 1]$, в десятичной записи которых есть цифра 9, равна $10^{-1} + 9(10^{-2} + 9(10^{-3} + \ldots)) = 1$.

б) $f(x)$ измерима как предел измеримых функций и почти всюду равна 9.

157, 158. Функции $f(x)$ непрерывны в топологии равномерной сходимости, μ определена на борелевских множествах относительно этой топологии.

159. Достаточно доказать, что любое открытое множество принадлежит $\mathfrak{A}$. Это следует из того, что каждый шар принадлежит S, шары составляют базис окрестностей и что различных шаров в X счетное число (различных радиусов счетное число, в каждом шаре содержится натуральное число).

160. Из открытости множества A следует, что его можно представить в виде объединения некоторой совокупности шаров, из которой можно выбрать конечное подпокрытие, так как A — замкнутое подмножество X и, следовательно, компактно. Счетную аддитивность μ достаточно проверить для полукольца всех шаров.

161. Свойства а) и б) достаточно проверить для полукольца шаров. Единственность меры следует из того, что каждый шар радиуса p^{-k} $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ состоит из p шаров радиуса $p^{-(k+1)}$, меры которых совпадают по свойству б).

§ 3. Интеграл

1. Интеграл Лебега.

162. Используйте свойства абсолютно сходящихся рядов.

163. Для каждого разбиения $T = \{t_k\}$ определим верхнюю и нижнюю интегральные суммы Лебега: $\overline{S}(T) = \sum\limits_k t_{k+1}\mu(e_k)$, $\underline{S}(T) = \sum\limits_k t_k\mu(e_k)$, где $e_k = \{x \in X\colon t_k \leqslant f(x) < t_{k+1}\}$. Доказать, что если $f(x)$ суммируема, то $\overline{S}(T)$ и $\underline{S}(T)$ сходятся, $\underline{S}(T) \leqslant \int\limits_X f(x)\,d\mu \leqslant \overline{S}(T)$, $\int\limits_X f(x)\,d\mu = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \underline{S}(T) = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \overline{S}(T)$ (использовать оценку $\overline{S}(T) - \underline{S}(T) \leqslant \lambda(T)\mu(X)$).

164. Используя функции

$$f_T(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \exists k \text{ такое, что } f(x) \text{ и } 0 \text{ принадлежат} \\ & \qquad\qquad \text{отрезку } [t_k, t_{k+1}], \\ f(x), & \text{если нет,} \end{cases}$$

свести к задаче 163.

165. Использовать свойства абсолютно сходящихся рядов.

166. $S[0, 1]$ изометрически вкладывается в $L_1[0, 1]$, где последовательность $f_n(x)$ имеет пределом функцию $f(x) \equiv x \notin S[0, 1]$.

167. а) При $\alpha > -1 - \beta$ $(\beta > 0)$ и $\alpha > -1$ $(\beta < 0)$;
б) при $\alpha > -1 - |\beta|$.

168. а) Очевидно;

б) $\mu(\{x: f(x)>0\}) \leqslant \sum\limits_n \mu\left(\left\{x:\ f(x)>\frac{1}{n}\right\}\right)=0.$

169. Имеем $\mu(\{x\in[a,b]: t_k\leqslant\varphi(x)<t_{k+1}\})=\psi(t_{k+1})-\psi(t_k)$. По теореме Лагранжа $\psi(t_{k+1})-\psi(t_k)=\psi'(\xi_k)(t_{k+1}-t_k)$.

170. В обозначениях указаний к задаче 163 определим измеримое множество на плоскости $E(T)=\bigcup\limits_k \{(x,y):\ f(x)\in[t_k, t_{k+1}),$ $0\leqslant y\leqslant t_k\}$.

Утверждение задачи следует из того, что $\mu E(T)=\underline{S}(T)$, $\mu(E\triangle E(T))<\lambda(T)(b-a)$.

172. Доказать, что из суммируемости $f(x)$ следует суммируемость $|f(x)|$. Использовать равенство $\int\limits_A [g(x)+h(x)]\,d\mu(x)=$ $=\int\limits_A g(x)\,d\mu(x)+\int\limits_A h(x)\,d\mu(x)$.

173. Если $f(x)$ не суммируема, то для любого $c>0$ существует простая функция $g(x)$ такая, что $f(x)-1\leqslant g(x)\leqslant f(x)$,

$$\int\limits_X g(x)\,d\mu(x)>c.$$

Очевидно, что существует множество A, на котором $g(x)$ принимает конечное число значений, такое, что

$$\int\limits_A f(x)\,d\mu(x)\geqslant\int\limits_A g(x)\,d\mu(x)>c-1.$$

174. Положим $a_n=\mu(\{x\notin X,\ 2^n\leqslant f(x)<2^{n+1}\})$. Суммируемость f равносильна сходимости каждого из рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n 2^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n 2^{n-1}$. Показать, что частичные суммы ряда, фигурирующего в условии задачи, заключены между соответствующими частичными суммами этих рядов.

175. Использовать метод решения задачи 174.

176. Интеграл Римана определяется только для ограниченных функций. Введем последовательность разбиений отрезка $[a,b]$ $\{P_n\}$ так, что P_{k+1} измельчает P_k и диаметры разбиений стремятся к 0. Пусть $m_n(x)$ и $M_n(x)$ — функции, соответствующие нижней и верхней суммам Дарбу для P_n, $m_n(x)\leqslant f(x)\leqslant M_n(x)$. Положим $m(x)=$ $=\lim\limits_{n\to\infty} m_n(x)$, $M(x)=\lim\limits_{n\to\infty} M_n(x)$. Доказать, что $f(x)$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_a^b m(x)\,dx=\int\limits_a^b M(x)\,dx.$$

Последнее условие эквивалентно условию $m(x)=M(x)$ почти всюду, что эквивалентно условию непрерывности $f(x)$ почти всюду.

177. Линейной ортогональной заменой переменных задач сводится к условию, когда матрица A диагональна.

178. Заменим интеграл $\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt$ интегральной суммой $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x^2\left(\frac{k}{n}\right)$. Тогда подынтегральная функция $\varphi_{abn}(x)$ будет ступенчатой и ее интеграл вычисляется по формуле

$$I_n = \pi^{-n/2} n^{n/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-n \sum_{k=0}^{n-1} (\tau_{k+1}-\tau_k)^2 - \right.$$

$$\left. - a\tau^2 - b^2 \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \tau_k^2 \right\} d\tau_0 d\tau_1 \dots d\tau_n.$$

В силу задачи 177 справедливо равенство $I_n = \sqrt{\frac{\pi}{n}} (\det A)^{-1/2}$, где A — матрица размера $(n+1)\times(n+1)$, имеющая вид

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{a}{n}, & -1, & 0, & 0, \dots, 0, & 0, & 0 \\ -1, & 2+\frac{b^2}{n^2}, & -1, & 0, \dots, 0, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 2+\frac{b^2}{n^2}, & -1, \dots, 0, & 0, & 0 \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ 0, & 0, & 0, & 0, \dots, -1, & 2+\frac{b^2}{n^2}, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & 0, \dots, 0, & -1, & 1+\frac{b^2}{n^2} \end{bmatrix}.$$

Для вычисления $\det A$ можно поступить так. Обозначим через $D_N(\lambda, \mu)$ определитель матрицы размера $N\times N$, в которой на главной диагонали стоят числа λ, а на двух соседних диагоналях — числа μ (остальные компоненты равны нулю). Разлагая этот определитель по первой строке, получаем тождество: $D_N(\lambda, \mu) = \lambda D_{N-1}(\lambda, \mu) - \mu^2 D_{N-2}(\lambda, \mu)$. Отсюда выводится по индукции, что $D_N(\lambda, \mu) = \frac{x_+^{N+1} - x_-^{N+1}}{x_+ - x_-}$, где x_+ — корни квадратного уравнения $x^2 - \lambda x + \mu^2 = 0$. Если $\lambda = 2 + \frac{b^2}{n^2}$, $\mu = -1$, то $x_+ = 1 + \frac{b^2}{2n^2} \pm \frac{b}{n}\sqrt{1+\frac{b^2}{4n^2}}$.

Обозначим $D_N(\lambda, \mu)$ при этих λ, μ просто через D_N. Тогда

$$\det A = D_{n+1} + \left(\frac{a}{n} - \frac{b^2}{n^2} - 1\right) D_n + (-1) D_n + \\ + \left(\frac{a}{n} - \frac{b^2}{n^2} - 1\right)(-1) D_{n-1}$$

(разложение по первой и последней строкам). Пользуясь основным тождеством, это выражение можно привести к виду

$$\frac{a}{n}(D_n - D_{n-1}) + \frac{b^2}{n^2} D_{n-1}.$$

Вычислим D_n:

$$D_n = \frac{x_+^{n+1} - x_-^{n+1}}{x_+ - x_-} =$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{b}{n} + \frac{b^2}{2n^2} + o(n^{-2})\right)^{n+1} - \left(1 - \frac{b}{n} + \frac{b^2}{2n^2} + o(n^{-2})\right)^{n+1}}{\frac{2b}{n} + o(n^{-2})} =$$

$$= \frac{\exp\left\{\left[\frac{b}{n} + o(n^{-2})\right](n+1)\right\} - \exp\left\{-\left[\frac{b}{n} + o(n^{-2})\right](n+1)\right\}}{\frac{2b}{n} + o(n^{-2})} =$$

$$= \frac{\exp\left\{b + \frac{b}{n} + o(n^{-1})\right\} - \exp\left\{-b - \frac{b}{n} + o(n^{-1})\right\}}{\frac{2b}{n} + o(n^{-2})} =$$

$$= n\frac{\operatorname{sh} b}{b} + \operatorname{ch} b + o(1).$$

Аналогично вычисляется $D_{n-1} = n\frac{\operatorname{sh} b}{b} + o(1)$. Отсюда

$$\det A = \frac{a}{n}(\operatorname{ch} b + o(1)) + \frac{b^2}{n^2}\left(n\frac{\operatorname{sh} b}{b} + o(1)\right) = \frac{a \operatorname{ch} b + b \operatorname{sh} b}{n} + o(n^{-1}).$$

Значит,

$$I_n = \sqrt{\frac{\pi}{a \operatorname{ch} b + b \operatorname{sh} b}} + o(1).$$

Итак,

$$\int\limits_{C[0,1]} \varphi_{abn}(x)\, d\mu(x) = I_n \to \sqrt{\frac{\pi}{a \operatorname{ch} b + b \operatorname{sh} b}} \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда по лемме Фату следует, что функции $\varphi_{ab}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{abn}(x)$ будут μ-суммируемы при $a > 0$, $b \geqslant 0$ или $a \geqslant 0$, $b > 0$. Поскольку $\varphi_{abn}(x) \leqslant \lim \varphi_{abn}(x) = \varphi_{ab}(x)$, отсюда вытекает, что применима теорема Лебега и

$$\int \varphi_{ab}\, d\mu = \lim \int \varphi_{abn}\, d\mu = \sqrt{\frac{\pi}{a \operatorname{ch} b + b \operatorname{sh} b}}.$$

179. Каждая функция $x \in C[0, 1]$ однозначно представляется в виде $x(t) = c + y(t)$, где $c = x(0)$ — контанта, а $y \in C_0[0, 1]$. Мера μ_0 на $C_0[0, 1]$ определяется формулой

$$\mu_0(X(t_1, \ldots, t_n; \Delta_1, \ldots, \Delta_n)) =$$

$$= \pi^{-n/2} \prod_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})^{-1/2} \int\limits_{\Delta_1} \ldots \int\limits_{\Delta_n} \exp\left\{-\sum_{k=1}^{n} \frac{(\tau_k - \tau_{k-1})^2}{t_k - t_{k-1}}\right\} d\tau_1, \ldots$$

$$\ldots, d\tau_n,$$

где $t_0 = \tau_0 = 0$, а множество $X(t_1, \ldots, t_n; \Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ определяется так же, как и раньше.

180. а) $\mu_0(C_0[0, 1]) = \mu_0(x(t_1, \ldots, t_n; R, \ldots, R)) =$

$$= \pi^{-n/2} \prod_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\sum_{k=1}^{n} \frac{(\tau_k - \tau_{k-1})^2}{t_k - t_{k-1}}\right\} d\tau_1, \ldots$$

$$\ldots, d\tau_k.$$

Обозначив $\tau_k - \tau_{k-1}$ через σ_k, а $t_k - t_{k-1}$ через s_k, мы получим величину $\pi^{-n/2} \prod\limits_{k=1}^{n} s_n^{-1/2} \prod\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\sigma_k^2/s_k\right\} d\sigma_k = 1$.

б) Поскольку при отображении $x \to -x$ мера μ_0 не меняется, а подынтегральная функция меняет знак, то интеграл равен 0, если он существует. Суммируемость подынтегральной функции следует из задачи 178 и неравенства Коши — Буняковского.

в) Пусть $x(t) = c + y(t)$, $y \in C_0[0, 1]$. Результат задачи 178 можно сформулировать так. Если

$$\varphi_1(y) = \int\limits_0^1 y(t)\, dt, \quad \varphi_2(y) = \int\limits_0^1 y^2(t)\, dt,$$

то

$$\int\limits_{R} \int\limits_{C_0[0,1]} \exp\left\{-ac^2 - b^2\left[c^2 + 2c\varphi_1(y) + \varphi_2(y)\right]\right\} dc\, d\mu_0(y) =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a \operatorname{ch} b + b \operatorname{sh} b}}.$$

Положим здесь $c = t\sqrt{a}$ и устроим a к $+\infty$. Тогда мы придем к равенству

$$\int\limits_R \int\limits_{C_0[0,1]} \exp\{-t^2 - b^2\varphi_2(y)\}\, dt\, d\mu_0(y) = \sqrt{\frac{\pi}{\operatorname{ch} b}}$$

или

$$\int\limits_{C_0[0,1]} \exp\{-b^2\varphi_2(y)\}\, d\mu_0(y) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} b}}.$$

Отсюда вытекает, что интегралы $\int\limits_{C_0[0,1]} \varphi_2^k(y)\, d\mu_0(y)$ можно найти из разложения в ряд Тейлора функции $1/\sqrt{\operatorname{ch} b}$. В частности,

$$\int\limits_{C_0[0,1]} \varphi_2(y)\, d\mu_0(y) = \frac{1}{4}, \qquad \int\limits_{C_0[0,1]} \varphi_2^2(y)\, d\mu_0(y) = \frac{7}{48}.$$

2. Функции ограниченной вариации и интеграл Лебега — Стилтьеса.

181. Тривиальная проверка.

182, 183. Следует из справедливости утверждения задач для монотонных функций.

184. Использовать теорему Лагранжа.

185. Использовать интегральные суммы Дарбу и теорему Лагранжа.

186. $\{a_k\}$ — это точки разрыва,

$$c_k = \Phi(a_k + 0) - \Phi(a_k).$$

187. 2. Используйте оценки:

а) $|f\cdot g(x_{n+1}) - f\cdot g(x_n)| \leqslant |f(x_{n+1})g(x_{n+1}) - f(x_n)g(x_{n+1})| + |f(x_n)g(x_{n+1}) - f(x_n)g(x_n)| \leqslant |f(x_{n+1}) - f(x_n)|\sup\{|g(x)|\} + |g(x_{n+1}) - g(x_n)|\sup\{|f(x)|\}$;

б) $\left|\frac{1}{f(x_{n+1})} - \frac{1}{f(x_n)}\right| = \frac{|f(x_n) - f(x_{n+1})|}{|f(x_{n+1})|\,|f(x_n)|} \leqslant \alpha^{-2}|f(x_{n+1}) - f(x_n)|$.

188. а) Нет. Рассмотреть функции

$$f(x) = x, \quad \varphi(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

б) Нет. Постройте монотонную функцию $\varphi(x)$, чтобы $\varphi\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{n}$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\varphi(0) = 0$, и $f(x)$ с ограниченным изменением на отрезке $[0, 1]$, чтобы для некоторой последовательности $1 > x_1 > y_1 > x_2 > y_2 > \ldots > 0$ выполнялось $f(x_n) = 2^{-n}$, $f(y_n) = 0$. Тогда неограниченность вариации $\varphi(f)$ следует из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

189. Рассуждайте от противного.

190. Пусть $\varphi\colon I=[a, b]\mapsto S=[0, 1]\times[0, 1]$ является отображением на S, задаваемым формулой $\varphi(x)=(f(x), g(x))$. Рассмотрим n^2 точек из S вида $\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}\right)$, где $k, l=1, \ldots, n$, и их прообразы $a\leqslant x_1<\ldots<x_{n^2}\leqslant b$, $\varphi(x_i)\neq\varphi(x_j)$ при $i\neq j$.

Имеем $\operatorname{Var}_a^b[f(x)]+\operatorname{Var}_a^b[g(x)]\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n^2-1}[|f(x_{i+1})-f(x_i)|+$ $+|g(x_{i+1})-g(x_i)||]\geqslant\frac{(n^2-1)}{n}$, что противоречит ограниченности вариаций $f(x)$ и $g(x)$.

Без требования ограниченности вариаций f и g утверждение задачи неверно. Для $n=1, 2, 3, \ldots$ разбейте S и I на 4 равных

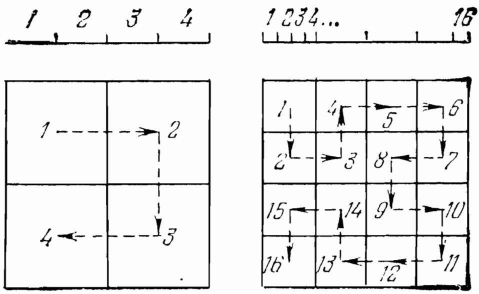


Рис. 2

замкнутых квадрата и интервала соответственно и установите соответствие между этими квадратами и интервалами так, что если некоторый квадрат соответствует некоторому интервалу, то его подквадраты соответствуют подынтервалам указанного интервала (рис. 2). Если $x\in I$, то x является точкой пересечения некоторой последовательности замкнутых интервалов, которой соответствует последовательность вложенных замкнутых квадратов, точку пересечения которых возьмите в качестве $\varphi(x)$.

191. Проверить для интегральных сумм и перейти к пределу.

192. Из разрывности $\Phi(x)$ в точке c следует, что существуют последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ такие, что $a<a_1<a_2<\ldots<$ $<c<\ldots<b_2<b_1<b$, $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$, $|\Phi(b_n)-\Phi(a_n)|>$ $>K>0\ \forall n$. Из интегрируемости f по Φ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}|\Phi(b_n)-\Phi(a_n)|f(x)|_{a_n}^{b_n}=0$. Таким образом $f(x)|_{a_n}^{b_n}\to 0$, что и означает непрерывность $f(x)$ в точке c.

193. По задаче 191 б) $\int\limits_a^b f(x)\,d\Phi(x)=\int\limits_a^b f(x)\,d\Phi_N(x)+$ $+\int\limits_a^b f(x)\,d\widetilde{\Phi}_N(x)$, где $\widetilde{\Phi}_N(x)$ отлична от нуля в первых N точках,

$\widetilde{\Phi}_N(x)$ — в остальных точках. Очевидно, что первый интеграл равен нулю, ко второму интегралу применить оценку задачи 191 а).

194. Пусть Ψ имеет ограниченную вариацию и отличается от Φ лишь в точках разрыва. $\Phi - \Psi$ отлична от нуля не более чем в счетном числе точек. Примените задачи 191 б) и 193.

195. Рассмотрите два разбиения: $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и $\xi_0 = a, \xi_1, \ldots \ldots, \xi_{n+1} = b$, где $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$ при $i = 1, \ldots, n$.

Имеем

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] =$$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sum_{i=1}^{n+1} g(x_{i-1})[f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})].$$

196. Составьте интегральную сумму и рассмотрите отрезки разбиения, содержащие внутри себя точки $\{c_k\}$.

197. См. задачи 194—195. Ответ: $b\varphi(b) - a\varphi(a) - \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$.

198. Разобьем отрезок $[0, 1]$ на 2^n равных частей и для $y \in [\min f(x), \max f(x)]$ определим $N_n(y)$ как число тех частей, в которых есть хотя бы один корень уравнения $f(x) = y$. Функции $N_n(y)$ измеримы, так как имеют не более чем конечное число разрывов. Докажите, что $N_f(y) = \sup N_n(y)$. Равенство интеграла и вариации проверяется непосредственно.

199. а) Обозначим $\int\limits_0^1 x^k d\Phi(x)$ через a_k. Воспользуемся тем, что функция $\Phi(x)$ обладает свойствами $\Phi\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}\Phi(x)$, $\Phi\left(\frac{2}{3} + \frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(x)$, легко вытекающими из ее определения. Поэтому

$$a_k = \int\limits_0^{1/3} x^k d\Phi(x) + \int\limits_{2/3}^{1} x^k d\Phi(x) =$$

$$= \frac{1}{3^k}\cdot\frac{1}{2}\left[\int\limits_0^1 y^k d\Phi(y) + \int\limits_0^1 (2+y)^k\, d\Phi(y)\right] = \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{2\cdot 3^k}\sum_{s=1}^{k} C_k^s \cdot 2^s a_{k-s}.$$

Отсюда $a_k = \dfrac{1}{2(3^k - 1)} \displaystyle\sum_{s=1}^{k} C_k^s \cdot 2^s a_{k-s}$.

Зная, что $a_0 = 1$, получаем последовательно $a_1 = 1/2$, $a_2 = 3/8$, $a_3 = 5/16$, $a_4 = 87/320, \ldots$

б) Обозначим $\int\limits_0^1 e^{ax} d\Phi(x)$ через $\Psi(a)$ и воспользуемся методом решения задачи а). Имеем

$$\Psi(a) = \int_0^{1/3} e^{ax} d\Phi(x) + \int_{2/3}^{1} e^{ax} d\Phi(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{ay/3} d\Phi(y) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2a/3+ay/3} d\Phi(y) + \frac{1}{2}\left(1+e^{2a/3}\right)\Psi\left(\frac{a}{3}\right) = e^{2a/3}\operatorname{ch}\frac{a}{3}\,\Psi\left(\frac{a}{3}\right).$$

Итерируя полученную формулу, получаем

$$\Psi(a) = e^{a/3}e^{a/9}\ldots e^{a\cdot 3^{-k}}\operatorname{ch}\frac{a}{3}\operatorname{ch}\frac{a}{9}\ldots\operatorname{ch}\frac{a}{3^k}\,\Psi\left(\frac{a}{3^k}\right).$$

При $a \to 0$, очевидно, $\Psi(a) \to 1$. Поэтому

$$\Psi(a) = e^{a/2}\prod_{k=1}^{\infty}\operatorname{ch}\left(\frac{a}{3^k}\right).$$

в) Из результата задачи б) следует, что

$$\int_0^1 \sin\pi x\, d\Phi(x) = \frac{1}{2i}\left[\Psi(\pi i) - \Psi(-\pi i)\right] = \prod_{k=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right).$$

3. Свойства интеграла Лебега.

200. Проверяется непосредственно.

201. Нет. Рассмотрите пример: $X = \mathbf{R}$, μ — мера Лебега,

$$f_n(x) = \frac{1}{n\chi_{[-n^2, n^2]}}.$$

202. $f_n(x) = n\chi_{(0,\,1/n]}$.

203. а) Для вывода неравенства треугольника используйте неравенство $\lambda \leqslant (\lambda a + \mu b)/(a+b) \leqslant \mu$ при $\lambda \leqslant \mu$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

б) Фундаментальность по мере последовательности Коши из $M[0, 1]$ следует из неравенства

$$\rho(f, g) \geqslant \frac{\sigma}{1+\sigma}\mu\{x \in X\colon |f(x) - g(x)| \geqslant \sigma\}, \quad \sigma > 0.$$

Обратное очевидно. Полнота пространства $M[0, 1]$ следует из того, что из последовательности фундаментальной по мере, с помощью теоремы 11 можно выбрать последовательность, сходящуюся почти всюду.

в) Решение аналогично задаче 203 а).

204. Пусть $\int_X f(x)\,d\mu = A$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует подмножество E_1 конечной меры в X, для которого $\int_{E_1} f(x)\,d\mu > A - \varepsilon$.

По теореме об абсолютной непрерывности интеграла существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что $\int_E f(x)\,d\mu < \varepsilon$ для всех множеств E меры

$< \delta(\varepsilon)$. По теореме Егорова сходимость f_n к f равномерна на некотором подмножестве $E_2 \subset E_1$, обладающем свойством $\mu(E_1 \setminus E_2) < \delta(\varepsilon)$. Далее, существуют такие номера $n_1(\varepsilon)$ и $n_2(\varepsilon)$, что $\int\limits_{E_2} | f_N(x) - f(x) | \, dx < \varepsilon$ при $N > n_1(\varepsilon)$ и $\left| \int\limits_X f_N(x) \, d\mu - A \right| < \varepsilon$ при $N > n_2(\varepsilon)$. Пусть $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$. Из всего предыдущего следует, что

$$\int\limits_X |f_N - f| \, d\mu \leqslant \int\limits_{E_2} |f_N - f| \, d\mu + \int\limits_{X \setminus E_2} f_N \, d\mu + \int\limits_{X \setminus E_2} f \, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \int\limits_X f_N d\mu - \int\limits_{E_2} f_N d\mu + \int\limits_X f \, d\mu - \int\limits_{E_2} f \, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + A + \varepsilon - (A - 3\varepsilon) + A - (A - 2\varepsilon) = 7\varepsilon \text{ при } N > n(\varepsilon).$$

205. Пусть $a \in \mathbf{R}$, $X_a = \{x \in X\colon f(x) \leqslant a\}$ и $p(a) = \mu(X_a)$. Тогда $p(a)$ — неубывающая функция на $\mathbf{R}$, причем $p(a) \to 0$ при $a \to -\infty$ и $p(a) \to 1$ при $a \to +\infty$.

Предположим сначала для простоты, что $p(a)$ непрерывна. Тогда существует обратная функция $g(t)$, определенная на $(0, 1)$ и обладающая свойством $p(g(t)) = t$. Покажем, что $\inf\limits_{M(A)=t} \int\limits_A f(x) \, d\mu$ достигается при $A = X_{g(t)}$. В самом деле, любое множество A меры t получается выбрасыванием из $X_{g(t)}$ некоторого подмножества Y и добавлением к нему некоторого подмножества $Z \subset X \setminus X_{g(t)}$, причем $\mu(Y) = \mu(Z)$.

Но в точках множества Y функция f не превосходит $g(t)$, а в точках множества Z она больше $g(t)$. Таким образом, в этом случае множество A, доставляющее нижнюю грань, определено однозначно с точностью до μ-нулевого множества.

Покажем теперь, что функция f на X и функция g на $(0, 1)$ равноизмеримы, т. е. $\mu_0(\{t \in (0, 1)\colon g(t) \leqslant a\}) = \mu(\{x \in X\colon f(x) \leqslant a\})$ для всех $a \in \mathbf{R}$, где μ_0 означает обычную меру Лебега на интервале $(0, 1)$. Левая часть этого равенства равна $p(a)$, так как неравенство $g(t) \leqslant a$ равносильно $t \leqslant p(a)$. Правая часть равна $p(a)$ по определению.

Из равноизмеримости f и g вытекает, что для любой борелевской функции χ $\int\limits_0^1 \chi(g(t)) \, dt = \int\limits_X \chi(f(x)) \, d\mu(x)$. В частности, полагая

$$\chi(h) = \begin{cases} 0 & \text{при } h > a, \\ h & \text{при } h \leqslant a, \end{cases}$$

получаем искомое равенство. Случай разрывной функции p разберите самостоятельно. (Соответствующая функция $g(t)$ будет иметь интервалы постоянства.)

206. Пусть μ_0 — мера Лебега, μ — квазиинвариантная мера и X — любое борелевское подмножество на прямой. Рассмотрим множество Y на плоскости $\mathbf{R}^2$, состоящее из пар (x_1, x_2), для которых $x_1 - x_2 \in X$. Применяя к этому множеству теорему Фубини для произведения мер $\mu \times \mu_0$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu_0(x_1 - X)\, d\mu(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_1(x_2 + X)\, d\mu_0(x_2).$$

Отсюда, если $\mu_0(x_1 - X) = \mu_0(X) = 0$, то $\mu_1(x_2 + X) = 0$ для почти всех x_2 и, значит, $\mu_1(X) = 0$. Если же $\mu_0(X) \neq 0$, то слева стоит $\mu_0(X)\mu_1(\mathbf{R})$ и, значит, $\mu_1(x_2 + X) \not\equiv 0$, т. е. $\mu_1(X) \neq 0$. Таким образом, меры μ и μ_0 эквивалентны.

207. Вариация заряда ν_i равна $|\nu_i| = |f_i|\mu$. Поэтому условия $|\nu_1|(A) = 0$ и $|\nu_2|(A) = 0$ равносильны тогда и только тогда, когда равносильны условия $\mu(A \cap N_1) = 0$ и $\mu(A \cap N_2) = 0$. Последнее верно при всех A тогда и только тогда, когда $\mu(N_1 \triangle N_2) = 0$.

208. Для каждого подмножества A конечной меры μ по теореме Радона — Никодима существует измеримая функция $\rho_A(x)$, обладающая свойством $\nu(B) = \int\limits_B \rho_A(x)\, d\mu(x)$ для любого измеримого $B \subset A$. Пусть теперь $X = \bigcup X_i$, $\mu(X_i) < \infty$ и $\rho_i = \rho_{X_i}$. Легко видеть, что функции ρ_i и ρ_j совпадают почти всюду на $X_i \cap X_j$. Поэтому существует измеримая функция ρ на X, совпадающая с ρ_i почти всюду на X_i. Она обладает нужным свойством.

209. Предположим противное. Тогда $\mu(A \cap [0, 1]) = 1/2$ и существует покрытие множества $A \cap [0, 1]$ непересекающимися интервалами $\{\Delta_n\}_{n=1,2,\ldots}$ такое, что $\sum\limits_n \mu(\Delta_n) < 1$. Получаем противоречие:

$$\frac{1}{2} = \mu(A \cap [0, 1]) \leqslant \sum_n \mu(A \cap \Delta_n) < \frac{1}{2}.$$

210. Воспользоваться тем, что $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\, dt$ — абсолютно непрерывная функция (это следует из абсолютной непрерывности интеграла).

211. Воспользоваться теоремой Радона — Никодима.

212. а) Непосредственное следствие из определений. б) Этими функциями можно приблизить любую функцию φ из S. в), г) Многочлены и тригонометрические многочлены плотны (даже в смысле равномерной сходимости) в пространстве непрерывных функций, которые плотны в $L_1[0, 1]$ по п. б).

213. а) Следует из определения метрики в $L_1(\mathbf{R})$.

б) Заметить, что всякая кусочно-постоянная финитная функция приближается по метрике $L_1(\mathbf{R})$ кусочно-линейной финитной функцией, и воспользоваться п. а).

в) Рассмотрим совокупность L_0 всех функций $f \in L_2(\mathbf{R})$, обладающих свойством $\int\limits_{\mathbf{R}} e^{-x^2} x^k f(x)\, dx = 0$ для всех целых неотрицательных k. Покажем, что функции f характеризуются условием

$$\varphi_f(\lambda) = \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2 + \lambda x} f(x)\, dx = 0$$

для всех $\lambda \in C$. В самом деле, из суммируемости функций $e^{-x^2+\lambda x} f(x)$ и $x e^{-x^2+\lambda x} f(x)$ вытекает, что $\varphi_f(\lambda)$ дифференцируема при всех $\lambda \in \mathbf{C}$. Значит, она аналитична. Так как $\varphi_f^{(k)}(0) = \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-x^2} x^k f(x)\,dx$, условия $f \in L_0$ и $\varphi_f \equiv 0$ равносильны. Пусть $a(\lambda)$ — любая суммируемая функция на R. Тогда $0 = \int\limits_{\mathbf{R}} a(\lambda)\varphi_f(i\lambda)\,d\lambda = \int\limits_{\mathbf{R}}\int\limits_{\mathbf{R}} a(\lambda)\, e^{-x^2+i\lambda x} f(x)\,dx\,d\lambda = \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-x^2} b(x) f(x)\,dx$, где $b(x) = \int\limits_{\mathbf{R}} a(\lambda)\, e^{i\lambda x}\,d\lambda$. Покажем, что, подбирая подходящим образом $a(\lambda)$, можно в качестве $b(x)$ получить любую непрерывную кусочно-линейную финитную функцию. Отсюда будет следовать, что $e^{-x^2} f(x) = 0$ почти всюду и, следовательно, $f(x) = 0$ почти всюду.

Заметим, что умножение $a(\lambda)$ на $e^{i\lambda t}$ приводит к сдвигу $b(x)$ на t. Кроме того, соответствие между $a(\lambda)$ и $b(x)$ линейно. Поэтому достаточно в качестве $b(x)$ получить элементарную функцию, равную 0 вне $[-1, 1]$ и равную $1 - |x|$ на этом отрезке. Оказывается, для этого достаточно взять $a(\lambda) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin^2 \lambda/2}{\lambda^2}$. (Ср. теорему 19 гл. IV и задачу 586.)

214. Докажите, что множество функций, для которых выполнено условие непрерывности сдвига, замкнуто в $L_1(\mathbf{R})$. Проверьте это условие для непрерывных финитных функций.

215. а) Покажите, что $f_1(t) f_2(x - t)$ — функция, измеримая относительно меры Лебега на плоскости (x, t), и примените теорему Фубини для σ-конечных мер. Использования теоремы Фубини можно избежать, рассмотрев сначала свертку на плотном в L_1 пространстве непрерывных финитных функций, затем случай ограниченной функции $f_1(t) \in L_1$, наконец, приближая $f_1(t)$ ограниченными функциями.

б) Рассмотрите неравенство

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant \sup |f_1(t)| \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f_2(t+h) - f_2(t)|\,dt.$$

ГЛАВА III

ЛИНЕЙНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. Нормированные пространства

1. Основные определения.

216. Если одно из чисел p или q равно ∞, то искомое неравенство очевидно. Рассмотрим случай, когда p и q конечны. Воспользуемся следующим вспомогательным результатом: если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, а p и q — сопряженные числа, то $ab \leqslant a^p/p + b^q/q$. Аналитическое доказательство этого неравенства легко получается, если вычислить частные производные функции $\varphi(x, y) = xy - x^p/p - y^q/q$. Геометрический смысл неравенства виден на рис. 3. Из этого же рисунка видно, что при $a = b^{q-1}$ (или $b = a^{p-1}$) неравенство превращается в равенство (см. также указание к задаче 369).

Докажем теперь неравенство Гельдера. Поскольку обе части неравенства однородны по x и по y, достаточно рассмотреть случай $\|x\|_p = 1 = \|y\|_q$. (Если один из векторов x или y равен 0, то неравенство становится очевидным). Положим $a = |x_i|$, $b = |y_i|$ во вспомогательном неравенстве. Мы получим $|x_i y_i| \leqslant |x_i|^p/p + |y_i|^q/q$. Суммируя по i от 1 до n, получаем

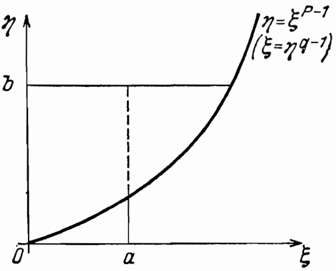


Рис. 3

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \frac{\|x\|_p^p}{p} + \frac{\|y\|_q^q}{q} = 1.$$

217—219. Подробное решение этих задач изложено в книге [19]. См. также указание к задаче 371.

220. Рассмотреть множество финитных последовательностей с рациональными коэффициентами.

221. Рассмотреть множество последовательностей с элементами из нулей и единиц. (Ср. задачу 223.)

222. Чтобы доказать, что последовательность Коши сходится, достаточно показать, что сходится какая-либо ее подпоследовательность. Воспользуйтесь «быстро сходящейся» подпоследовательностью $\{x_{n_k}\}$, для которой $\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| \leqslant 1/2^k$.

223. Достаточность условия несепарабельности очевидна. Для доказательства необходимости используйте лемму Цорна; достаточно доказать существование несчетного множества непересекающихся шаров радиуса ε, для некоторого $\varepsilon > 0$.

224. Воспользоваться компактностью шара в конечномерном пространстве.

225. Доказать от противного, что если $P_n(x)$ — многочлен степени n со старшим коэффициентом 1, то $\max\limits_{[-1,1]} |P_n(x)| \geqslant \max\limits_{[-1,1]} |T_n(x)| = 2^{1-n}$, где $T_n(x) = 2^{1-n}\cos(n \arccos x)$ (на рис. 4 изображен случай $n = 4$).

Если многочлен $P(x)$ имеет старший коэффициент 1 и $\max|P(x)| \leqslant 2^{1-n}$, то из рисунка видно, что графики $T_n(x)$ и $P(x)$ имеют по крайней мере n общих точек. Но разность $T_n(x) - P(x)$ есть многочлен степени $n-1$ и потому тождественно равна нулю.

226. а) При факторотображении $\varphi: L \to L/L_0$ открытый единичный шар в L переходит в открытый единичный шар в L/L_0.

б) Выбрать последовательность 1/2 — перпендикуляров y_n к $L(y_1, \ldots, y_{n-1})$.

в) Пусть к подпространству $L_0 = \{x_0 \in L: f(x_0) = 0\}$ существует нуль-перпендикуляр x_1. Это равносильно утверждению

$\|x_1 + x_0\| \geqslant \|x_1\|$ для всех $x_0 \in L_0$. Другими словами, расстояние $d(x_1, L_0)$ достигается и равно $\|x_1\|$. Любой вектор $x \notin L_0$ записывается в виде $x = \alpha(x_1 + x_0)$, где $\alpha \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, $x_0 \in L_0$.

Имеем $\dfrac{|f(x)|}{\|x\|} = \dfrac{|\alpha|\cdot|f(x_1)|}{|\alpha|\cdot\|x_1 + x_0\|} \leqslant \dfrac{|f(x_1)|}{\|x_1\|}$.

Норма f достигается на векторе x_1. Обратное утверждение выводится так же.

227. Линейное преобразование $y \mapsto y - [2f(y)/f(x)]x$ называется *отображением в гиперплоскости* $f = 0$ *параллельно вектору* x, не принадлежащему гиперплоскости.

Пусть выполнены условия $n \neq 2$, $p_1 \neq 1$, $p_2 \neq \infty$. Проверьте, что это преобразование является изометрией $l_p(n, \mathbf{R})$ (при $p \neq$

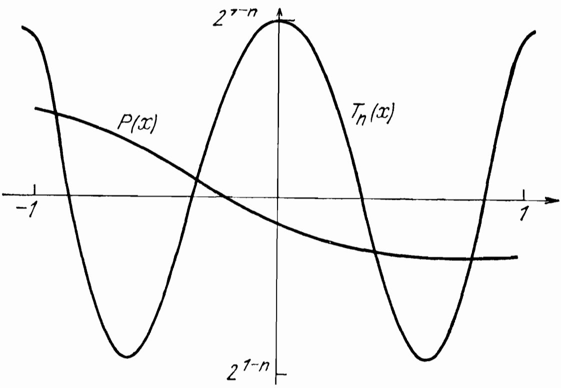


Рис. 4

$\neq 2$) тогда и только тогда, когда x есть один из векторов стандартного базиса (с точностью до знака), а f — дуальный к нему базисный функционал. Таким образом, совокупность векторов $\{\pm e_k\}$ переходит в себя в соответствии с изометрией $l_{p_1}(n, \mathbf{R})$ в $l_{p_2}(n, \mathbf{R})$. Но расстояние $d_p(\pm e_k, \pm e_j) = 2^{1/p}$ и, следовательно, искомая изометрия существует, только если $p_1 = p_2$.

2. Сопряженные пространства.

228. Использовать базис Гамеля. *Базисом Гамеля* называется линейно независимая система $\{x_\alpha\}$ элементов линейного пространства L такая, что ее линейная оболочка совпадает с L. (Ср. задачу 16.)

229. Расстояние от нуля до гиперплоскости $f(x) = 1$ есть $\inf\|x\|$ по множеству $\{x: f(x) = 1\} = \{x_0 + \ker f\}$, где x_0 — фиксированный элемент из L такой, что $f(x_0) = 1$. При этом L есть линейная оболочка x_0 и $\ker f$.

230. Проверяется непосредственно, так как конечномерное пространство изоморфно сопряженному.

231. Банахово пространство рефлексивно тогда и только тогда, когда шар $\|x\| \leqslant 1$ компактен в слабой топологии.

232. $(c_0)' \supset l_1$ (более того, $(c_0)' = l_1$), поэтому слабая сходимость влечет покомпонентную сходимость. Рассмотрев последовательность $x_{ni}=1$, $i\leqslant n$, $x_{ni}=0$, $i>n$, доказать некомпактность единичного шара в c_0 в слабой топологии.

233. Базис слабой топологии состоит из множеств, не ограниченных в сильной топологии.

234. Легко видеть, что $(l_1)'\supseteq l_\infty$ (более того, $(l_1)'=l_\infty$). Пусть $\{x^{(n)}\}$ — последовательность элементов в l_1, которая сходится слабо и не сходится сильно к нулю. Переходя к подпоследовательности и умножая на константу, мы можем добиться того, что $\|x^{(n)}\|\geqslant 1$ для всех n.

Будем говорить, что последовательность $x\in l_1$ сконцентрирована на интервале $[k, l]$ в пределах ε, если $\sum\limits_{i=k}^{l}|x_i|\geqslant(1-\varepsilon)\|x\|$. Переходя к подпоследовательности, мы можем предполагать, что $x^{(n)}$ сконцентрирована на $[k_n, l_n]$, в пределах 1/4 и, более того, эти интервалы не пересекаются для различных n. Пусть теперь $a_i=\operatorname{sgn}x_i^{(n)}$, если $i\in[k_n, l_n]$ и $a_i=0$ в противном случае. Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i^{(n)}\geqslant\sum_{i=k_n}^{l_n}|x_i^{(n)}|-\sum_{i\notin[k_n,l_n]}|x_i^{(n)}|\geqslant$$
$$\geqslant\frac{3}{4}\|x^{(n)}\|-\frac{1}{4}\|x^{(n)}\|\geqslant\frac{1}{2},$$

что противоречит предположению о том, что $x^{(n)}\rightharpoonup 0$.

235. Докажите, что опорная плоскость единичного шара в L задается уравнением $f(x)=1$, где $f\in L'$ и $\|f\|=1$.

236. Возьмем k-мерную грань и $(k+1)$ вершину x_i $(i=1, 2, \ldots, k+1)$ на этой грани (такие найдутся, так как выпуклый многогранник есть линейная оболочка своих вершин). Поставим в соответствии этой k-мерной грани множество $\{f\in B'$: $f(x_i)=1$, $i=1, \ldots, k+1\}$. Доказать, что полученное множество есть $(n-k-1)$-мерная грань B'.

237. Проверьте, что единичный шар в c_0 не имеет крайних точек, а единичный шар в c имеет две крайние точки: $x_n\equiv 1$ и $x_n\equiv -1$. Изоморфизм между l_1 и c_0' устанавливается формулой $\langle\{a_n\}, \{x_n\}\rangle=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx_n$, а изоморфизм между l_1 и c' — формулой $\langle\{a_n\}, \{x_n\}\rangle=a_1\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n+1}x_n$. Для вычисления нормы $\{a_n\}$ в c' рассмотрите последовательности вида

$$x_i=\begin{cases}\operatorname{sgn}a_{i+1} & \text{при } i<N,\\ \operatorname{sgn}a_1 & \text{при } i\geqslant N.\end{cases}$$

238. Использовать неравенство Гельдера.

239. Рассмотреть на $c\subset l_\infty$ непрерывный функционал $f(\{x_n\})=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ и применить теорему Хана — Банаха.

240. Выбрать базисы $\tilde{e}_i$ $(i=1, \ldots, n_1)$ и $\tilde{f}_j$ $(j=1, \ldots, n_2)$ в L_1' и L_2', биортогональные соответственно к базисам e_i $(i=1, \ldots, n_1)$ и f_j $(j=1, \ldots, n_2)$ в L_1 и L_2.

241. Проверяется непосредственно. (См. также задачу 290.)

242. При доказательстве достаточности применить задачу 241.

243. Проверяется непосредственно.

244. Воспользоваться задачами 241 и 242.

3. Операторы в нормированных пространствах.

245. Пусть P — проектор на L_1 параллельно L_2. Тогда $1-P$ есть проекция на L_2 параллельно L_1. Если P непрерывно, то L_1 и L_2 замкнуты. При этом $L_1 = \ker(1-P)$, $L_2 = \ker P$. Обратно, если L_1 и L_2 замкнуты, то непрерывность P следует из теоремы Банаха об обратном операторе. (Рассмотрите естественное отображение Q: $L_1 \to L/L_2$ и представьте P в виде $Q^{-1} \circ \pi$, где π — естественная проекция L на L/L_2.)

246. Доказать, что $\ker P = \operatorname{im}(1-P)$, $\ker P \cap \operatorname{im} P = \varnothing$ и $L = \ker P + \operatorname{im} P$.

247. Если $p \geqslant q$, то подходит любая функция $a(x) \in L_\infty(0,1)$; при $p < q$ подходит только $a(x) \equiv 0$.

248. Воспользоваться теоремой единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений.

249. Воспользоваться методом доказательства теоремы 10 гл. IV.

250. Контрпример: рассмотрим оператор $A(s)$: $L_2(\mathbf{R} \to L_2(\mathbf{R})$, который задается формулой: $(A(s)x)(t) = x(t+s)$, $x(t) \in L_2(\mathbf{R})$.

251. A': $L_{q'}[0,1] \to L_{p'}[0,1]$; $(A'f)(x) = \int\limits_0^1 K(y,x)\, f(y)\, dy$.

252. $(P'F)(t) = \begin{cases} F(t), & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ F(1), & 1 \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$

253. Проверяется непосредственно по определению (задача 221).

254. Нет. Рассмотреть неограниченный функционал.

255. Ответ отрицательный. Рассмотрите оператор умножения на функцию в пространстве $L_2[0, 1]$.

4. Конструкции банаховых пространств.

256. а) Для доказательства $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ использовать замкнутость L_0 в L.

б) Выбрать из фундаментальной в L_1 последовательности y_n подпоследовательность y_{n_k} так, чтобы $\sum \left\|y_{n_k} - y_{n_{k+1}}\right\|_{L_1} < \infty$. Положить $\alpha_k = y_{n_k} - y_{n_{k+1}}$ и выбрать $a_k \in \varphi^{-1}(\alpha_k)$ (φ — факторотображение $L \to L_1$), так, чтобы $\|a_k\|_L \leqslant \|\alpha_k\|_{L_1} + 2^{-k}$. Рассмотреть $S_k = a_1 + \ldots + a_k$. Доказать, что $\lim y_k = \varphi(\lim S_k) + y_1$.

257. Пусть φ — факторотображение L на L_1, z_n — фундаментальная последовательность в L. Тогда $y_n = \varphi(z_n)$ фундаментальна в L_1, следовательно, существует $y = \lim y_n$, откуда $\|y - y_n\|_{L_1} \to \to 0$. Таким образом, существуют $r_n \in \varphi^{-1}(y - y_n) = \varphi^{-1}(y) - - \varphi^{-1}(y_n)$ такие, что $\|r_n\|_L \to 0$. Выберем в $\varphi^{-1}(y)$ фиксированный элемент f, тогда $r_n = f - f_n$, $f_n \in \varphi^{-1}(y_n)$.

Следовательно, $f_n \to f$, но $z_n \in \varphi^{-1}(y_n)$, поэтому $f_n - z_n = x_n$ — фундаментальная последовательность в L_0.

258. Пусть X — сепарабельное банахово пространство, $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ — счетное всюду плотное множество в единичном шаре в X. Определим отображение $l_1(K) \to X$, полагая

$$A\colon \{\alpha_n\} \to \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n,\ \{\alpha_n\} \in l_1(K).$$

а) Докажите, что A непрерывно.

б) При данном x, $\|x\|=1$, выберем $x_{n(i)}$, требуя, чтобы $\left\|x-\sum_{i=1}^{k}2^{-i+1}x_{n(i)}\right\|\leqslant 2^{-k}$. Отсюда $\operatorname{im} A = X$.

в) Меняя в этой оценке число 2 на 3, 4, ..., покажите, что $\widehat{A}\colon l_1(K)/\ker A\to X$ — изометрия.

259. Пусть L — банахово пространство, L_0 — подпространство. Тогда: 1) $(L_0)'=L'/L_0^{\perp}$, $(L/L_0)'=L_0^{\perp}$, 2) L_0 дополняемо $\Leftrightarrow L_0 = PL$, где P — непрерывный проектор.

а) L_0 конечномерное. Выбрав базис $l_1, \ldots, l_n$ в L_0, показать, что существуют такие $f_1, \ldots, f_n \in L^1$, что $(f_i, e_j)=\delta_{ij}$. Рассмотреть $P: L\to L_0$, $Px=\sum(f_i, x)\,e_i$.

в) Пусть φ — изоморфизм $l_\infty(k)$ и $L_0\subset L$, $\varphi_i = e_i\cdot\varphi^{-1}$, где e_i — стандартный базис в $l_1\subset(l_\infty)'$. Обозначим через $\widetilde{\varphi}_i$ продолжение φ_i на L без увеличения нормы. Тогда $\|\widetilde{\varphi}_i\|\leqslant\|\varphi^{-1}\|$ $(i=1, 2, \ldots)$. Определим отображение $P\colon L\to L_0$ по формуле $Px = \varphi(\{\widetilde{\varphi}_i, x\})$. Доказать, что P — непрерывный проектор.

б) и г) следуют из а), в) и 1), 2).

260. См. задачу 56.

261. Если S — произвольная (p, q)-кросс-норма, то $S\leqslant p\otimes q$.

262. Пусть $n\leqslant m$, $z=\sum_{i=1}^{k}x_i\otimes y_i$, $z\to A_z=\sum_{i=1}^{k}x_iy_i$. Выберем собственный базис $e_1, \ldots, e_n$ для оператора A_zA_z', $\widetilde{e}_j$ — базис в L_2.

$$A_zA_z'=\left(\sum_{i,j}\lambda_{ij}e_i\widetilde{e}_j\right)\left(\sum_{k,m}\lambda_{km}\widetilde{e}_m^Te_k^T\right)=$$
$$=\sum\lambda_{ij}\lambda_{km}e_i\widetilde{e}_j\widetilde{e}_m'e_k'=\sum\lambda_{ij}\lambda_{km}\delta_{mj}e_ie_k'=\sum_j\lambda_{ij}\lambda_{kj}E_{ik}.$$

Положим $a_{ik}=\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}\lambda_{kj}$; в силу того, что $e_1, \ldots, e_n$ — собственный базис для A_zA_z', $a_{ik}=0$ при $i\neq k$; $a_{ii}=\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}\lambda_{ij}=\sum_j\lambda_{ij}^2$.

Из представления $z=\sum_{i=1}^{n}e_i\otimes y_i$, где $y_i=\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}\widetilde{e}_i$, следует, что $\|z\|=\sum_{i=1}^{n}|y_i|$ не меньше кросс-нормы на $L_1\otimes L_2$. Осталось доказать, что $\|z\|$ — кросс-норма; тогда $\|\cdot\|$ — норма на $L_1\otimes L_2$ в силу предыдущей задачи.

263. Воспользоваться явным видом нормы на $L_1\otimes L_2$.

264. Пространство $L_1'\otimes L_2$ при помощи соответствия $x\otimes y\to A_{x,y}\in\mathscr{L}(L_1, L_2)$; $A_{x,y}(z)=(x, z)\,y$, $x\in L_1'$, $y\in L_2$, $z\in L_1$ отождествляется с пространством операторов конечного ранга. Доказать, что норма на $L_1\otimes L_2$ совпадает с обычной нормой оператора (см. предыдущую задачу).

265. Доказать, что норма на $l_1(m\cdot n, \mathbf{R})$ является кросс-нормой для норм $l_1(n, \mathbf{R})$ и $l_1(m, \mathbf{R})$ (см. также задачу 260).

266. Доказать, что норма на $l_\infty(m\cdot n, \mathbf{R})$ является кросс-нормой на $l_\infty(n, \mathbf{R})$ и $l_\infty(m, \mathbf{R})$.

§ 2. Линейные топологические пространства

1. Топология, выпуклость и полунормы.

267, 268. Проверяется непосредственно, исходя из определений.

269. Воспользоваться теоремой 11 гл. III. (См. также [19].)

270. Доказать индукцией по $\dim L$, что всякий линейный изоморфизм L и $K^{\dim L}$ (где K — поле скаляров) является гомеоморфизмом.

271. Рассмотреть вложения окрестностей нуля.

272. а) $A+B=\bigcup\limits_{x\in B}(A+x)$.

б) Пусть $a\notin \overline{A+B}$. Тогда для каждого $x\in B$ множество $x+A$ замкнуто, следовательно, существует уравновешенная окрестность нуля $U(x)$, для которой $(a+U(x))\cap(x+A)=\varnothing$. Множества $x+\frac{1}{2}U(x)$ — открытое покрытие B. Пусть $\left\{x_i+\frac{1}{2}U(x_i),\ 1\leqslant i\leqslant n\right\}$ — конечное подпокрытие и $V=\bigcap\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{2}U(x_i)$. Доказать, что $(a+V)\cap(A+B)=\varnothing$.

273. Для каждого $t\in\mathbf{R}$ и каждого целого n положим $e_n(t)=e^{int}$, $f_n=e_{-n}+ne_n$ $(n=1, 2, \ldots)$. Будем рассматривать эти функции как элементы пространства $L_2(-\pi, \pi)$.

Пусть X_1 — наименьшее замкнутое подпространство в L_2, содержащее $e_0, e_1, \ldots$, а X_2 — наименьшее замкнутое подпространство в L_2, содержащее $f_1, f_2, \ldots$ Показать, что X_1+X_2 всюду плотно в L_2, но не замкнуто.

Например, вектор $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-1}e_{-n}$ принадлежит L_2, но не принадлежит X_1+X_2.

274, 275. Следует из определения выпуклого множества.

276. Ответ: $S=\mu(A)$, L — периметр A.

277. Для простоты и наглядности приведем доказательство для случая двух выпуклых множеств на плоскости. Предположим дополнительно, что эти выпуклые множества A_1 и A_2 ограничены гладкими кривыми Γ_1 и Γ_2, не имеющими прямолинейных участков. Пусть множество $A=\alpha_1A_1+\alpha_2A_2$ ограничено кривой Γ.

Выберем на кривых Γ_1, Γ_2 и Γ специальную параметризацию. А именно, каждой точке $\tau\in[0, 2\pi]$ поставим в соответствие ту точку $(x_1(\tau), y_1(\tau))\in\Gamma_1$, в которой достигает максимума величина $x\cos\tau+y\sin\tau$, когда (x, y) пробегает A_1. (Другими словами, $(x(\tau), y(\tau))$ — точка касания Γ_1 с опорной прямой, составляющей угол τ с осью y). Аналогично определяются параметризация $(x_2(\tau), y_2(\tau))$ кривой Γ_2 и параметризация $(x(\tau), y(\tau))$ кривой Γ. Покажем теперь, что эти параметризации связаны равенствами

$$x(\tau)=\alpha_1x_1(\tau)+\alpha_2x_2(\tau),$$
$$y(\tau)=\alpha_1y_1(\tau)+\alpha_2y_2(\tau).$$

В самом деле,

$$\max_{(x,y)\in A}(x\cos\tau+y\sin\tau)=$$

$$=\max_{(x_i,y_i)\in A_i}[(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\cos\tau+(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)\sin\tau]=$$

$$=\max_{(x_i,y_i)\in A_i}[\alpha_1(x_1\cos\tau+y_1\sin\tau)+\alpha_2(x_2\cos\tau+y_2\sin\tau)]=$$

$$=\alpha_1\max_{(x_1,y_1)\in A_1}(x_1\cos\tau+y_1\sin\tau)+\alpha_2\max_{(x_2,y_2)\in A_2}(x_2\cos\tau+y_2\sin\tau),$$

откуда следует желаемое равенство.

Теперь остается воспользоваться известной формулой для площади множества A, ограниченной кривой Γ, заданной в параметрической форме: $\mu(A)=\int\limits_0^{2\pi}x(\tau)\,dy(\tau)$. Мы получим, что $\mu(A)=$ $=\alpha_1^2\mu(A_1)+\alpha_2^2(A_2)+2\alpha_1\alpha_2\cdot M(A_1,A_2)$, где $M(A_1,A_2)=$ $=\int\limits_0^{2\pi}\frac{x_1y_2'+x_2y_1'}{2}\,d\tau$. Последняя величина называется *смешанной площадью пары множеств* A_1 и A_2 в смысле Минковского.

Точно так же доказывается, что для k выпуклых множеств $A_1,\ldots,A_n$ на плоскости справедливо равенство

$$\mu(\alpha_1A_1+\ldots+\alpha_kA_k)=\sum_{i,j}M(A_i,A_j)\alpha_i\alpha_j.$$

Для множеств в n-мерном пространстве доказательство проводится по тому же плану. Граница ∂A выпуклого множества A параметризуется точками единичной сферы S и $\mathbf{R}^n$, после чего используется формула для объема:

$$\mu(A)=\int\limits_S x_1(\tau)\,dx_2(\tau)\wedge\ldots\wedge dx_n(\tau).$$

При этом возникает понятие *смешанного объема* $M(A_1,\ldots,A_n)$ *набора из* n *выпуклых множеств в* $\mathbf{R}^n$, в терминах которого выражаются многие геометрические характеристики выпуклых тел.

278. Доказать, что ядерно-выпуклая топология задается системой всех вообще конечных полунорм на L.

а) $p_f=|f(x)|$ — полунорма для любого линейного функционала f на L (не обязательно непрерывного).

б) Функционал Минковского выпуклого, уравновешенного и поглощающего множества есть полунорма.

279. B пересекается с каждой прямой, проходящей через нуль, по замкнутому в евклидовой топологии прямой интервалу, когда $B=\{x\colon p_B(x)\leqslant 1\}$, где p_B — функционал Минковского множества B.

280. а) Рассмотреть множества $B_0=\{x\colon p_B(x)<1\}$ и $B_1=$ $=\{x\colon p_B(x)\leqslant 1\}$, где p_B — функционал Минковского множества B.

б) Использовать предыдущую задачу.

281. $c_2(A)$ — выпуклое множество. Далее воспользоваться задачей 275.

282. Базис окрестностей нуля в полинормированном пространстве L состоит из конечных пересечений множеств $\{p_\alpha(x) < \varepsilon\}$ $(\alpha \in A,\ \varepsilon > 0)$.

283. Во всяком ЛВП есть базис окрестностей нуля, состоящий из выпуклых множеств. Контрпример — пространство $L_p(X, \mu)$ при $0 \leqslant p \leqslant 1$.

284. Доказать, что в топологии покоординатной сходимости $\mathbf{R}^\infty$ — ЛВП с системой полунорм p_n $(n = 0, 1, \ldots)$; $pn\left(\{x_i\}_1^\infty\right) = |x_n|$; далее использовать задачу 282.

285. Для $r \geqslant 1$ шар радиуса, r — выпуклое множество, так как совпадает с $C(\mathbf{R})$. При $0 < r < 1$ шар радиуса r не является выпуклым множеством. Положим

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Рассмотрите функции вида $\lambda f(x) + \mu f(x - n)$, $n > -\log_2 r$.

286. Шары $S_R = \{f \in C(\mathbf{R}),\ d(f, 0) \leqslant R\}$ при $R < 1$ не являются поглощающими множествами, следовательно, в этой топологии $C(\mathbf{R})$ не есть ЛТП.

287. Нормой на $BC(\mathbf{R})$ является функцией $p(f) = \sup |f(x)|$.

288. Доказать, что топология в $\mathbf{R}^\infty$, заданная метрикой $d(\{x_n\}, \{y_n\})$, есть топология покоординатной сходимости (см. задачу 284).

2. Сопряженные пространства.

289. Следует из линейности функционала и инвариантности топологии ЛТП относительно сдвигов.

290. а) Свести задачу к случаю, когда U — уравновешенная окрестность нуля.

б) $\ker f$ замкнуто, следовательно, нигде не плотно, поэтому существуют такие $x \in L$ и уравновешенная окрестность нуля V, что $x + V \cap \ker f = \varnothing$. Доказать, что $f(V) \not\ni -f(x)$ и использовать а).

291. Из теоремы Хана — Банаха следует, что топология на L, в которой непрерывны все функционалы, совпадает с ядерно-выпуклой (см. задачу 278). Доказать, что мощность базиса окрестностей нуля ядерно-выпуклой топологии есть 2^β, где β — мощность базиса Гамеля пространства L.

292. Выбрать базис в P и дополнить его до базиса в $\mathbf{R}^n$.

293. Единичный шар в пространстве $C[a, b]$ имеет две крайние точки: $f(x) \equiv 1$ и $f(x) \equiv -1$. По теореме Крейна — Мильмана следует, что он не является компактом ни в какой топологии.

3. Теорема Хана — Банаха.

294. Воспользоваться задачей 270.

295. Разделяющая гиперплоскость должна иметь вид $f(x) = 0$, $f \in P'$. Доказать, что $f \equiv 0$.

296. Пусть A компактно; тогда существует выпуклая окрестность нуля V такая, что $(A + V) \cap B = \varnothing$. Применить геометрическую форму теоремы Хана — Банаха к $A + V$ и B и еще раз воспользоваться компактностью A.

297. Фиксируем $x \in L$; из теоремы Хана — Банаха следует, что существует $x^* \in L'$, $\|x^*\| = 1$, $(x^*, x) = \|x\|$.

298. Изометрическое отображение $L \to L''$, построенное в предыдущей задаче, является изоморфизмом в силу равенства размерностей пространств L и L''.

299. В качестве X взять единичный шар в сопряженном пространстве со слабой топологией.

300.. Воспользуйтесь результатами п. 2 § 4, гл. III.

301. Воспользоваться полярными координатами.

302. Использовать сепарабельность $l_q(n, R)$.

303. Пусть L — подпространство в $l_\infty(\mathbf{R})$, порожденное последовательностями вида

$$y = x_{n+1} - x_n, \quad \{x_n\} \in l_\infty.$$

Докажите, что последовательность $y_n \equiv 1$ не лежит в L. Затем примените теорему Хана — Банаха.

304. См. указания к предыдущей задаче.

305. $\widetilde{p}(x) = \sup\limits_n p(T^n x)$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$.

306. Рассмотреть пространство $\prod \mathbf{R}^f$ $(f \in L')$ и вложение $x \to \{(f, x)\}$.

307. См. указания к задаче 303.

308. Применить теорему Хана — Банаха.

309. См. указания к задаче 308.

310. Рассмотреть гиперплоскости $(x, f_i) = 1$, где f_i — счетное всюду плотное подмножество единичного шара в $L_q(n, \mathbf{R})$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

311. Можно считать, что данное выпуклое множество V содержит нуль и пересечение V с каждой прямой, проходящей через начало, есть замкнутое множество. Граница V задается в полярных координатах (r, φ) уравнением выпуклой функции $r(\varphi)$, следовательно, $r(\varphi)$ — непрерывная на $[0, 2\pi]$ функция, удовлетворяющая условию $r(0) = r(2\pi)$. Доказать, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ многоугольник $V_n(\varepsilon)$ такой, что $|r(\varphi) - \tilde{r}(\varphi)| < \varepsilon$, где $\tilde{r}(\varphi)$ — функция границы для $V_n(\varepsilon)$. $V_n(\varepsilon)$ задается пересечением полуплоскостей вида $a_i x + b_i y \leqslant 1$. Рассмотреть вложение φ: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^n$: $(x, y) \to x\bar{a} + y\bar{b}$, где $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_n)$.

312. Построить изометрическое вложение сначала $l_p(n, \mathbf{R})$ в $l_\infty(\mathbf{R})$ (пользуясь сепарабельностью $l_p(n, \mathbf{R})$), а затем построить вложение $l_\infty(\mathbf{R}) \to C[0, 1]$.

313. Проведем сначала индукцию по числу множеств. Пусть $N > n + 2$ и для $N - 1$ множеств утверждение доказано. Если $X_1, \ldots, X_N$ удовлетворяют условиям теоремы, то любые $N - 1$ из них имеют общую точку по предположению индукции. Положим $Y_i = X_i \cap X_N$ $(1 \leqslant i \leqslant N - 1)$. Тогда любые $N - 2$ из множеств Y_i имеют общую точку. Поскольку $N - 2 \geqslant n + 1$, семейство Y_i снова удовлетворяет условиям теоремы. Значит, все Y_i имеют общую точку, которая будет общей для всех X_i. Осталось разобрать случай $N = n + 2$. Проведем теперь индукцию по размерности. Предположим, что для размерностей $< n$ теорема доказана, и рассмотрим множества X_i $(1 \leqslant i \leqslant n + 2)$ в $\mathbf{R}^n$, каждые $n + 1$ из которых имеют общую точку. Если X_{n+2} не имеет общих точек с пересечением $Z = \bigcap\limits_{i=1}^{n+1} X_i$, то существует гиперплоскость L, разделяющая эти два выпуклых множества. Любые n множеств из X_i $(1 \leqslant i \leqslant n + 1)$ имеют общую точку с X_{n+2} и с Z. Поэтому они имеют общую точку с L. Положим $Y_i = X_i \cap L$ $(1 \leqslant i \leqslant n + 1)$. Тогда, отождествляя L с $\mathbf{R}^{n-1}$, мы видим, по предположению ин-

дукции, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n+1} Y_i$ непусто. Это противоречит определению L как $\bigcap\limits_{i=1}^{n+1} Y_i = Z \cap L$. Остается проверить теорему при $n = 0$, когда она тривиальна.

Замечание. Топологическими рассуждениями можно показать, что условие выпуклости в теореме Хелли можно заменить условием: все множества вида $X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_k}$ при $k \leqslant n+1$ *гомотопически эквивалентны* точке (т. е. стягиваются в точку).

314. Пусть $x_i = i/n$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ — разбиение отрезка $[0, 1]$. Для любого $\varepsilon > 0$ и любой $f \in C[0, 1]$ существует такое n, что $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{n\,|f(x)|}\,dx < \varepsilon$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Далее использовать представление функции $f(x)$ в виде $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{f_i}{n}$, где

$$f_i = \chi_{[i/n,\,(i+1)/n]}\, n f(x).$$

315. а) L' разделяет точки L.

б) Используя то, что

$$\left|\int\limits_X F(f(x))\,d\mu(x)\right| \leqslant \int\limits_X |F(f(x))|\,d\mu(x) \leqslant \|F\| \int\limits_X \|f\|\,d\mu(x),$$

доказать непрерывность $F(f)$ по F.

§ 3. Линейные операторы

1. Пространство линейных операторов.

316. Имеют место б) и в).

317. Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2(\mathbf{R})$, тогда $A_n x = x_n l_1 \to 0$.

318. $(y, B_n x) = x_1 y_n$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2(\mathbf{R})$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) \in l_2(\mathbf{R})$.

319. $A_n B_n - AB = A_n B_n - A_n B + A_n B - AB = (A_n - A)B + A_n(B_n - B)$.

320. Воспользоваться теоремой Банаха — Штейнгауза.

321. См. указания к двум предыдущим задачам.

322. База сильной топологии на $\operatorname{End} L$ задается множеством полунорм

$$Px(A) = \|Ax\|, \quad A \in \operatorname{End} L, \quad x \in L.$$

Достаточно проверить непрерывность умножения в точке $(0, 0)$, где 0 — нулевой оператор в $\operatorname{End} L$.

323. См. задачи 317 и 318.

324. $\|AB\| \leqslant \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|A\|\,\|Bx\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.

325. а) Проверить, что $\|f(x+t) - f(x)\|_{L_p} \to 0$ при $t \to 0$ для непрерывных функций с компактным носителем.

б) $\|T(t') - T(t'')\| = 2$ при $t' \neq t''$. (Применить оператор к функциям с достаточно малым носителем.)

326. Пусть $\|x_n\| \to 0$ и $\|Ax_n\| \not\to 0$. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такие, что $\|Ax_{n_k}\| \geqslant \varepsilon$. Из того, что $\|x_{n_k}\| \to 0$, следует существование $\alpha_{n_k} \to \infty$ таких, что $\alpha_{n_k} x_{n_k} \to 0$. Тогда из того, что $\|A\alpha_{n_k} x_{n_k}\| \to \infty$, следует, что $\{A\alpha_{n_k} x_{n_k}\}$ слабо не сходится.

327. В банаховых пространствах слабая и сильная ограниченности совпадают; непрерывность оператора равносильна его ограниченности. Ответ: будет.

2. Компактные множества и компактные операторы.

328. Канторово множество покрывается 2^n отрезками длины 3^{-n} и не может быть покрыто меньшим числом отрезков такой длины. Поэтому при $\varepsilon = 3^{-n}/2$ $N(\varepsilon) = 2^n$. Значит, $N(\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{-\log_3 2}\right)$ и аппроксимативная размерность равна $\log_3 2 \approx 0{,}63$.

329. Условие того, что A — крайнее подмножество K, выглядит следующим образом: если $x \in K$, $y \in K$, $x \neq y$ и $(x+y)/2 \in A$, то $x \in A$ и $y \in A$.

330. Пусть P — семейство всех компактных крайних подмножеств множества K. Так как $K \in P$, то $P \neq \varnothing$. Из леммы Цорна следует существование максимальной цепи Ω, являющейся центрированной системой замкнутых подмножеств K. (Система множеств называется *центрированной*, если любая конечная подсистема в ней имеет непустое пересечение.) Далее использовать тот факт, что следующие свойства подмножества A в топологическом пространстве эквивалентны:

а) A — компакт;

б) всякое бесконечное подмножество A содержит направленность, сходящуюся к некоторому элементу из A;

в) всякая центрированная система замкнутых подмножеств в A имеет непустое пересечение.

331. Если A — крайнее подмножество K, $\Lambda \in L'$, μ — максимум $\operatorname{Re}\Lambda$ на A и $A_\Lambda = \{x \in A\colon \operatorname{Re}\Lambda(x) = \mu\}$, то A_Λ — крайнее подмножество K. Далее воспользоваться тем, что L' разделяет точки в L.

332. См. задачи 330 и 331.

333. Пусть H — выпуклая оболочка крайних точек K. Так как K компактно и выпукло, то замыкание $\overline{H} \subset K$. Поэтому $\overline{H}$ компактно. Предположим, что некоторая точка $x_0 \in K$ и $x_0 \notin \overline{H}$. Применяя теорему Хана — Банаха к x_0 и $\overline{H}$, показать, что $K_\Lambda \notin \overline{H}$ ($\Lambda \in L'$ — теорема Хана — Банаха. По поводу обозначения K_Λ см. задачу 331). Таким образом мы получаем противоречие построению $\overline{H}$.

334. Все точки единичной сферы пространства $l_p(n, \mathbf{R})$.

335. Единичный шар пространства c_0 не имеет крайних точек. В пространстве c единичный шар имеет две крайние точки

$$(1, 1, \ldots, 1, \ldots) \quad \text{и} \quad (-1, -1, \ldots, -1, \ldots).$$

336. Применить теорему Крейна — Мильмана (задача 333).

337. Пусть M — предкомпактное множество. Тогда оно обладает $\varepsilon/3$-сетью $\{f_i\}$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$. Компакт X можно представить в виде объединения конечного числа частей диаметра $< \varepsilon/3$. Поэтому для каждого i существует разбиение T на конечное число частей, на которых колебание f_i не превосходит $\varepsilon/3$. Взяв произведение этих разбиений, мы получим разбиение T на такие части $\{T_j\}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, что колебание f_i на T_i не превосходит $\varepsilon/3$ для всех i и j. Если теперь f — любая функция из M, f_i — ближайшая к f точке $\varepsilon/3$-сети, а t и s — любые точки из T_j, то $d_X(f(t), f(s)) \leqslant d_X(f(t), f_i(t)) + d_X(f_i(t), f_i(s)) + d_X(f_i(s), f(s)) < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$. Необходимость условия доказана.

Пусть теперь задано $\varepsilon > 0$ и существует такое разбиение $T = \prod_{i=1}^{n} T_j$, что $\omega_f(T_j) < \varepsilon/4$ для всех $f \in M$. (Здесь $\omega_f(T_j)$ означает колебание функции f на множестве T_j.) Выберем в каждом множестве T_j по точке t_j и рассмотрим отображение φ: $M \to X^n$: $f \to (f(t_1), \ldots, f(t_n))$. Так как X — компакт, X^n — также компакт (расстояние в X^n определяется формулой $d(x, y) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} d_X(x_i, y_i)$). Значит, образ M — предкомпактное множество. Выберем в $\varphi(M)$ конечную $\varepsilon/2$-сеть $\varphi(f_1), \ldots, \varphi(f_n)$. Тогда $f_1, \ldots, f_n$ — ε-сеть для M. В самом деле, если f — любая функция из M, а $\varphi(f_i)$ — ближайшая к $\varphi(f)$ точка $\varepsilon/2$-сети, то для $t \in T_j$ имеем

$$d_X(f(t), f_i(t)) \leqslant d_X(f(t), f(t_j)) + d_X(f(t_j), f_i(t_j)) + \\ + d_X(f_i(t_j), f_i(t) < \varepsilon/4 + \varepsilon/2 + \varepsilon/4 = \varepsilon.$$

338. Крайние точки — матрицы (a_{ij}), где $a_{i\sigma(i)} = 1$; $a_{ij} = 0$ для $j \neq \sigma(i)$, где $\sigma \in S$ — симметрической группе n-го порядка. Для $n = 2$ это очевидно. Пусть это доказано для $k < n$. Крайние точки множества стохастических матриц порядка n — это сечение куба $0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1$ $(i, j = n)$ плоскостью $\sum\limits_i x_{ij} = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$. Отсюда следует, что каждая крайняя к $\sum x_{ij} = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ точка должна содержать не менее $n^2 - 2n$ нулей. Проверить, что у крайней точки найдется $a_{ij} = 1$, и применить индукцию к матрице, у которой вычеркнуты i-я строка и j-й столбец.

339. Единичная сфера в этом случае ограничена, но не компактна.

340. Компактные операторы образуют идеал в End (L).

341. Если $a_i \to 0$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$: $\forall n > N\ |a_n| < \varepsilon$. Рассмотреть $K = \left\{ \{x_i\} \in l_p(\mathrm{R}) : \left\| \left\{ \dfrac{x_i}{a_i} \right\} \right\|_p \leqslant 1 \right\}$ (можно считать, что $a_i \neq 0$) и $K_N = K \cap L(e_1, \ldots, e_N)$, выбрать ε-сеть $x_1, \ldots, x_m$ в K_N и доказать, что она есть 2ε-сеть для K. Оператор A компактен тогда и только тогда, когда K компактно.

342. На подпространстве $L = \{f \in C[0, 1], f|_{[0, 1/2]} = 0\}$ оператор $Af = xf$ обратим.

343. Пусть A' — компактный оператор. Тогда оператор A'' компактен. Поэтому множество $A''S''$, где S'' — замкнутый единичный шар в пространстве L_1'', предкомпактно. Пространство L_2 может быть изометрически вложено в L_2''. Отождествляя L_2 с образом в L_2'' при этом вложении, получаем $AS \subseteq A''S''$, следовательно, множество AS предкомпактно в сильной топологии L_2'', а поэтому и в сильной топологии пространства L_2.

344. Применить теорему Арцела — Асколи.

345. Если $\{\varphi_i\}$ и $\{\psi_j\}$ — полные ортонормированные системы в $L_2(X, \mu)$ и $L_2(Y, \nu)$, то $\{f_i\psi_j\}$ — полная ортосистема в $L_2(X \times Y, \mu \times \nu)$.

346. Пусть $\quad F(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)\,dt, \quad f(t) \geqslant 0.$

Если $0 < \xi < X$, то имеем

$$\int\limits_\xi^X F^p\,dx = -\frac{1}{p-1}\int\limits_\xi^X (xF)^p \frac{d}{dx}\left(x^{1-p}\right)dx =$$

$$= \frac{\xi F^p(\xi)}{p-1} - \frac{XF^p(X)}{p-1} + \frac{p}{p-1}\int\limits_\xi^X F^{p-1}f\,dx.$$

Отсюда $\|F\|_p^p \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_p\left\|F^{p-1}\right\|_q = \frac{p}{p-1}\|f\|_{\bar p}\|F\|_p^{p/2}$. Ответ: $\|T\| = \frac{p}{p-1}$.

347. L рефлексивно тогда и только тогда, когда единичный шар S' слабо компактен.

348. Воспользоваться теоремой Асколи — Арцела.

349. Если $c_0 \neq 0$, то нет. Если $c_0 = 0$, то может. Примером служит конечномерный проектор.

3. Теория фредгольмовых операторов.

350. Необходимое и достаточное условие: существует $c > 0$ такое, что все отличные от нуля a_n удовлетворяют условию $|a_n| > c$. Далее применить теорему Банаха об обратном операторе.

351. $\operatorname{im} T^k = l_p(\mathbf{R})$. Следовательно, $\operatorname{coker} T^k = 0$, а $\ker T^k$ порождается первыми k базисными векторами.

352. а) Полуточность в членах L_0 и L_3 очевидна.

б) Полуточность в члене L_1. Пусть x — произвольная вершина P, e_x равна 1 на x и пулю на остальных вершинах. Тогда d_1e_x равна 1 на выходящих из x ребрах, -1 на входящих в x ребрах и 0 на остальных. Рассмотрим любую грань Δ, которой принадлежит x; тогда x принадлежит последовательно двум ребрам Γ_1 и Γ_2 грани Δ. Если Γ_1 и Γ_2 оба входящие в x или выходящие из x ребра, то $\varepsilon(\Gamma_1, \Delta) = -\varepsilon(\Gamma_2, \Delta)$. Если одно ребро выходит, а другое входит в x, то $\varepsilon(\Gamma_1, \Delta) = \varepsilon(\Gamma_2, \Delta)$. Отсюда следует, что $d_2d_1 = 0$.

в) Полуточность в члене L_2. Рассмотрим любое ребро Γ и функцию f_Γ, равную 1 на Γ и нулю на остальных ребрах. Пусть Δ_1 и Δ_2 — любая пара граней, которым принадлежит Γ. Если $\varepsilon(\Gamma, \Delta_1) = \varepsilon(\Gamma, \Delta_2)$, то $\varepsilon(\Delta_1, P) = -\varepsilon(\Delta_2, P)$. Если $\varepsilon(\Gamma, \Delta_1) = -\varepsilon(\Gamma, \Delta_2)$, то $\varepsilon(\Delta_1, P) = \varepsilon(\Delta_2, P)$. Отсюда $d_3d_2 = 0$.

Для куба и симплекса $H_0 = \mathbf{R}$; $H_1 = H_2 = H_3 = 0$. Для куба с дыркой $H_0 = H_1 = \mathbf{R}$; $H_2 = H_3 = 0$. Для куба с внутренней полостью $H_1 = H_2 = \mathbf{R}$, $H_1 = H_3 = 0$.

353. $\operatorname{im} d$ — подмножество в $C^{k-1}(T)$, состоящее из функций f, для которых $\int\limits_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$. Оба пространства когомологий одномерны.

354. Считая, что $T_0 = T_{n+1} = 0$, имеем

$$H_i \equiv \ker T_{i+1}/\operatorname{im} T_i; \quad L_i/\ker T_{i+1} \equiv \operatorname{im} T_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

откуда

$$\dim H_i + \dim \operatorname{im} T_i = \dim \ker T_{i+1},$$
$$\dim \operatorname{im} T_{i+1} + \dim \ker T_{i+1} = \dim L_i.$$

355. Сопряженная последовательность точна, следовательно, $\operatorname{im} T'_k$ замкнут в L'_{k-1}; тогда $\operatorname{im} T_k$ замкнут в L_k. Если $\operatorname{im} T_k \subset \subset \ker T_{k+1}$, то по теореме Хана — Банаха существует такой $f \in L'_k$, что $f \in \ker T'_k$ и $f \notin \operatorname{im} T'_{k+1}$.

356. Будем через $X^0 \subset L'$ обозначать *аннулятор* множества $X \subset L$, т. е. совокупность тех $f \in L'$, которые обращаются в нуль на X. Пусть φ — факторотображение $L'_k \to L'_k \diagdown (\ker T_{k+1})^0$, тогда $(H_k)' = (\ker T_{k+1}/\operatorname{im} T_k)' = \varphi\left((\operatorname{im} T_k)^0\right)$. Но $(\ker T_{k+1})^0 = \operatorname{im} T'_{k+1}$, так как $\operatorname{im} T'_{k+1}$ замкнут в $*$-слабой топологии $\Rightarrow L'/(\ker T_{k+1})^0 = = L'_k/\operatorname{im} T'_{k+1}$, но $(\operatorname{im} T_k)^0 = \ker T'_k \supset \operatorname{im} T'_{k+1} \Rightarrow \varphi\,(\operatorname{im} T_k)^0 = = \ker T'_k/\operatorname{im} T'_{k+1}$.

357. Оператор сдвига вправо.

358. $\dim \ker A = n$, $\dim \operatorname{coker} A = 0$; $\operatorname{ind} A = n$.

359. Ответ: если $a(x) \neq 0$ ни в одной точке отрезка $[0, 1]$. Пусть $x_0 \in [0, 1]$, $a(x_0) = 0$ и $x_n \to x_0$; можно считать, что $a(x_n) \neq \neq 0$. Рассмотрим $f_\lambda \in C[0, 1]$ такую, что $f_\lambda(x_n) = |a(x_n)|^\lambda$ $(0 < \lambda < 1)$. Тогда f_λ независимы $\operatorname{mod} \operatorname{im} A$.

360. $\ker P = 0$, $\operatorname{im} P = C(\Gamma)$, так как любую непрерывную на Γ функцию u можно единственным образом гармонически продолжить в Ω.

361. В силу теоремы единственности для голоморфных функций ядро оператора A умножения на $a(z)$ — нулевое.

Пусть $z_1, \ldots, z_n$ — нули $a(z)$ на Ω кратности $k_1, \ldots, k_n$. Тогда $\operatorname{im} A = \{f \in H(\Omega), \quad f^{(j)}(z_i) = 0, \quad j = 1, \ldots, k_i; \quad i = 1, \ldots, n\}$,

$$\operatorname{ind} A = -\sum_{i=1}^{n} k_i.$$

362. Пусть $\varphi_k(x) = H_k(x)\, e^{-x^2/2}$, где H_k — полиномы Эрмита. Проверьте, что $\{\varphi_k\}$ является ортогональным базисом в H_0 и что $A_+\varphi_k = -2k\varphi_{k-1}$ и $A_-\varphi_k = \varphi_{k+1}$.

363. а) Использовав теорему Фубини, доказать, что функция $\psi(s) = (A\varphi)(s)$ определена почти всюду. Применяя неравенство Коши — Буняковского, получить оценку

$$|\psi(s)|^2 \leqslant \|\varphi\|_{L_2} \int_a^b |K(s, t)|^2\, dt.$$

Интегрируя это неравенство по s, приходим к искомой оценке.

б) Проверяется непосредственно, исходя из определений.

364. Применить теорему Фубини.

365. Положить $a_{ij} = \int\limits_a^b Q_i(t)\, P_j(t)\, dt$, $b_j = \int\limits_a^b Q_i(t)\, f(t)\, dt$.

366. Показать, что некоторая степень оператора, стоящего в правой части уравнения, является сжимающим оператором и, следовательно, однородное уравнение имеет единственное (тривиальное) решение. Далее применить альтернативу Фредгольма.

367. Применить теорему Фубини и неравенство Коши — Буняковского.

368. Воспользоваться результатом задачи 367 и применить индукцию.

§ 4. Функциональные пространства и обобщенные функции

1. Пространства интегрируемых функций.

369. Докажите сначала для $a,\ b \geqslant 0$ числовое неравенство $a^{1/p}b^{1/q} \leqslant a/p + b/q$; рассмотрев функцию $\varphi(t) = t^{1/p} - t/p$, докажите неравенство $\varphi(t) \leqslant \varphi(1)$ для $t > 0$ и подставьте $t = a/b$.

370. Из неравенства Гельдера следует, что

$$\left|\int\limits_X fg\,d\mu\right| \leqslant \left(\int\limits_X |fg|\,d\mu\right) \leqslant \left(\int\limits_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}\left(\int\limits_X |g|^q\,d\mu\right)^{1/q} \leqslant \leqslant \left(\int\limits_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}.$$

Следовательно, $\sup\left|\int\limits_X fg\,d\mu\right| \leqslant \left(\int\limits_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}$. Подберите функцию $g(x)$, для которой достигается неравенство.

371. Пусть q связано с $p > 1$ соотношением $1/p + 1/q = 1$. Применяя неравенство Гельдера, имеем

$$\int\limits_X |f+g|^p\,d\mu \leqslant \int\limits_X |f|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu + \int\limits_X |g|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}\left(\int\limits_X |f+g|^p\,d\mu\right)^{1/q} + \left(\int\limits_X |g|^p\,d\mu\right)^{1/p}\left(\int\limits_X |f+g|^p\,d\mu\right)^{1/q},$$

откуда непосредственно следует доказываемое неравенство.

372. Пусть $n,\ k \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{N}$, χ — характеристическая функция. Если $\{A_n\}$ — база, то конечные суммы функций $f_{kmn}(x) = \dfrac{k}{m}\chi(A_n)$ — всюду плотное множество в $L_1(X,\ \mu)$. Если $g_n(x)$ плотно в $L_1(X,\ \mu)$, то $B_{kmn} = \left\{x \in X \;\middle|\; \dfrac{k}{m} \leqslant g_n(x) < \dfrac{k+1}{m}\right\}$ — база.

373. Решение аналогично задаче 372.

374. Рассмотрите несчетное множество функций, принимающих значения 0 и 1.

375. Пусть p', q' удовлетворяют условиям $p' = p/q$; $1/p' + 1/q' = 1$, $f \in L_p$. Суммируемость $|f|^q$ следует из неравенства Гельдера

$$\int_X |f|^q \, d\mu \leqslant \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p'} \left(\int_X |f|^{q'} \, d\mu\right)^{1/q'}.$$

376. Пусть $q > p$, $1/p > k > 1/q$. Рассмотрите функции

$$f_q(x) = x^{-k}\theta(x-1),$$

$$f_p(x) = x^{-k}\chi_{[0,1]}(x).$$

377. $1/\beta < p < 1/\alpha$.

378. Пусть $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{s}$, тогда $\dfrac{1}{q/s} + \dfrac{1}{r/s} = 1$. Применяя два раза неравенство Гельдера, имеем

$$\|fgh\|_1 \leqslant \|f\|_p \|gh\|_s \leqslant \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r.$$

379. Легко проверить, что $1/r = \alpha/p + \beta/q$, $\alpha + \beta = 1$. Ограничимся случаем $q < \infty$, $f(x) \geqslant 0$. Тогда $1 = \dfrac{1}{p/(r\alpha)} + \dfrac{1}{q/(r\beta)}$; примените неравенство Гельдера к произведению $f^{\alpha r} \cdot f^{\beta r}$.

380. Используйте очевидное неравенство

$$(\|f\|_\infty - \varepsilon)(\mu(X'))^{1/p} \leqslant \|f\|_p \leqslant (\mu(X))^{1/p} \|f\|_\infty,$$

где множество $X' \subset X$ подбирается по $\varepsilon > 0$ так, чтобы $|f| \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon$ при $x \in X'$, $\mu(X') \neq 0$.

381. а) Используйте тот факт, что выпуклое подмножество X в ЛВП L плотно тогда и только тогда, когда всякий линейный функционал $f \in L'$, равный нулю на X, обращается в нуль тождественно.

б), в), г) — см. указания к задаче 213.

382. При $\alpha \neq 0$ $-1/p < \alpha$ $\|x^\alpha\|_p = (p\alpha + 1)^{-1/p}$; при $1 \leqslant p < \infty$ $\|x^0\|_p = 1$; при $\alpha \geqslant 0$ $\|x^\alpha\|_\infty = 1$.

383. а) Подпространство ломаных с вершинами в точках $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

б) Функции из L_1, удовлетворяющие условию $f(x) = f([x])$.

384. Пусть $L \subset L_\infty(X, \mu)$. Тождественное отображение из $L_\infty(X, \mu)$ в $L_1(X, \mu)$ непрерывно. По теореме Банаха об обратном операторе, обратное отображение непрерывно на V. Следовательно, существует постоянная M_1 такая, что $\|f\|_\infty \leqslant M_1 \cdot \|f\|_1$ при $f \in V$. Из этого неравенства и неравенства Коши — Буняковского следует оценка $\|f\|_\infty \leqslant M_2 \|f_2\|$ при $f \in V$. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — ортонормированная система в V, соответствующая скалярному произведению в $L_2(X, \mu)$. Тогда, если $(c_1, \ldots, c_n)$ — единичный вектор в $l_2(n, \mathbf{R})$, имеем:

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right\|_\infty \leqslant M_2 \left\| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right\|_2 = M_2.$$

Из этого следует, что для почти всех $x \in X$ вектор $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ имеет норму $\leqslant M_2$ в $l_2(n, R)$. Таким образом,

$$n = \int_X \sum_{k=1}^n |\varphi_k(x)|^2 \, d\mu \leqslant M_2 \mu(X) \quad \text{и} \quad \dim V < \infty.$$

385. Для любого $\varepsilon > 0$ и любой $f \in L_p(\mathbf{R}, dx)$ существует отрезок $[a, b]$ такой, что $\left(\int\limits_{\mathbf{R}\setminus[a,b]} |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} < \varepsilon$. Примените задачу 381.

386. Проверьте непрерывность в среднем на пространстве $C_0(\mathbf{R})$ из задачи 385.

387. Проверьте непрерывность в среднем на пространстве $C_0(\mathbf{R}^n)$.

388. Пусть сначала M состоит из одной функции f. Тогда условие а) выполнено автоматически, условие б) вытекает из определения суммируемой функции, а условие в) — из задачи 386. Далее, если M состоит из конечного числа функций $f_1, \ldots, f_n$, то для каждой функции f_i условия а), б), в) выполняются с константами c_i, $R_i(\varepsilon)$, $\delta_i(\varepsilon)$ соответственно. Положим $c = \max\limits_i c_i$, $R(\varepsilon) = \max\limits_i R_i(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon) = \min\limits_i \delta_i(\varepsilon)$. Тогда для M выполнены условия а), б), в). Наконец, если M — любое предкомпактное множество, для которого $\{f_1, \ldots, f_n\}$ — $\varepsilon/3$-сеть, то для M выполняются условия а), б), в) с константами $c + \varepsilon/3$, $R(2\varepsilon/3)$, $\delta(\varepsilon/3)$. Это доказывает необходимость условий а), б), в).

Пусть теперь условия а), б), в) выполнены. Рассмотрим отображение φ_ε множества M в подпространство $C[-R(\varepsilon), R(\varepsilon)] \subset L_p(\mathbf{R}, dx)$ по формуле $\varphi_\varepsilon(f)(x) = \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \int\limits_x^{x+\delta(\varepsilon)} f(t)\, dt$. Из условия а) вытекает, что $\varphi(M)$ ограничено в $C[-R(\varepsilon), R(\varepsilon)]$; из условий б) и в) — что расстояние в $L_p(\mathbf{R}, dx)$ между f и $\varphi_\varepsilon(f)$ не превосходит 2ε. Наконец, из в) следует, что функции $\varphi(f)$, $f \in M$ равностепенно непрерывны. Поэтому $\varphi(M)$ — предкомпакт в $C[-R(\varepsilon), R(\varepsilon)]$ и, тем более, предкомпакт в $L_p(\mathbf{R}, dx)$.

Если $\{\varphi(f_1), \ldots, \varphi(f_n)\}$ — ε-сеть в $\varphi(M)$, то $f_1, \ldots, f_n$ — 3ε-сеть в M. Поскольку ε произвольно, M — предкомпакт.

389. Отображение $f(x) \otimes g(y) \mapsto f(x) \cdot g(y)$ продолжается по непрерывности до отображения $L_1(X, \mu) \otimes L_1(Y, \nu)$ в $L_1(X \times Y, \mu \times \nu)$, не повышающего норму. Проверим, что это отображение на самом деле изометрично. Пусть $\varphi \in L_1(X \times Y, \mu \times \nu)$. Тогда φ аппроксимируется по норме функциями вида $\tilde{\varphi}(x, y) = \sum\limits_{i=1}^n c_i \chi_{E_i} \times (x) \chi_{F_i}(y)$, где E_i, (F_i) — попарно дизъюнктные измеримые подмножества в $X(Y)$. Без ограничения общности можно считать, что $\mu(E_i)$ и $\nu(E_i)$ — рациональные числа, а тогда, умножая $\tilde{\varphi}$ на подходящее целое число, можно считать эти числа целыми. Таким образом, наше утверждение сводится к частному случаю, когда X и Y состоят из конечного числа точек единичной меры. Это значит, что мы должны установить изоморфизм пространства $L_1(n, \mathbf{R}) \hat{\otimes} l_1(m, \mathbf{R})$ и $l_1(mn, \mathbf{R})$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в первом пространстве, $f_1, \ldots, f_m$ — во втором; тогда в тензорном произведении в качестве базиса можно взять $e_i \otimes f_j$. Пусть g_{ij} — соответствующий базис в третьем пространстве. Надо доказать $\left\|\sum\limits_{ij} c_{ij} e_i \otimes f_j\right\| = \left\|\sum\limits_{ij} c_{ij} g_{ij}\right\|$, т. е. $\inf \sum\limits_\alpha \sum\limits_i |a_i^{(\alpha)}| \sum\limits_j |b_j^{(\alpha)}| = \sum\limits_{ij} |c_{ij}|$, где нижняя грань берется по всем представлениям вектора $\sum_{ij} c_{ij} e_i \otimes f_j$ в виде суммы $\sum_{\alpha} \varphi_\alpha \otimes \psi_\alpha$, где $\varphi_\alpha = \sum_i a_i^{(\alpha)} e_i$, $\psi_\alpha = \sum_j b_j^{(\alpha)} f_j$. Оценка в одну сторону вытекает из равенства $e_{ij} = \sum_\alpha a_i^{(\alpha)} b_j^{(\alpha)}$. Оценка в другую сторону получается из рассмотрения конкретного представления, в котором α пробегает все пары i, j, $\varphi_{ij} = c_{ij} e_i$, $\psi_{ij} = f_j$.

390. а) Назовем подмножество E в пространстве X с мерой μ *атомом*, если $\mu(E) > 0$ и любое измеримое подмножество $F \subset E$ либо имеет меру нуль, либо $\mu(F) = \mu(E)$. (Легко проверить, что для борелевских мер μ атомы — это точки положительной меры.) Докажите, что крайними точками в $L_1(X, \mu)$ являются характеристические функции атомов и только они. (В частности, пространство l_1 имеет крайние точки, а $L_1[0, 1]$ — нет.)

б) Все граничные точки шара (для доказательства выясните, когда неравенство Минковского превращается в равенство).

в) Множество таких f, что $|f(x)| = 1$ почти для всех x.

391. l_1 является пространством, сопряженным к пространству сходящихся к нулю последовательностей, а $L_1[0, 1]$ не является сопряженным ни к какому банахову пространству, так как в противном случае единичный шар имел бы крайние точки вопреки задаче 390. а) примените теорему Крейна — Мильмана.

2. Пространства непрерывных функций.

392. Для доказательства полноты рассмотрите поточечный предел фундаментальной в $C(X)$ последовательности.

393. Многочлены от n переменных с рациональными коэффициентами образуют всюду плотное множество в $C(X)$.

394. Если функция g принадлежит единичному шару в $C(X)$, то положим

$$|F(g)| = \left| F\left(\frac{g + |g|}{2}\right) - F\left(\frac{|g| - g}{2}\right)\right| \leqslant F(1).$$

395. Если $f(x)$ — неотрицательная функция, то положим $Gf = \{g\colon 0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)\}$. Обозначим $F_1(f) = \sup\limits_{g \in Gf} F(g)$. Неравенства $F_1(f) \geqslant F(f)$ и $F_1(f) \geqslant 0$ для $f \geqslant 0$ очевидны. Аддитивность F_1 следует из тождества $Gf_1 + f_2 = Gf_1 + Gf_2$ (включение $Gf_1 + Gf_2 \subset Gf_1 + f_2$ очевидно, а обратное включение следует из тождества $g = gf_1/(f_1 + f_2) + gf_2/(f_1 + f_2)$).

396. Будем обозначать через E_ε ε-окрестность множества E и через $\bar{E}$ — замыкание E. Покажем, что для любого компакта $K \subset X$ справедливо соотношение $\mu(\bar{K}_\varepsilon) \to \mu(K)$ при $\varepsilon \to 0$. Для этого фиксируем $\delta > 0$ и выберем функцию $\varphi \in C(X)$, обладающую свойствами: $\chi_K(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$, $F(\varphi) \leqslant \mu(K) - \delta$.

Пусть L — множество тех точек $x \in X$, для которых $\varphi(x) \leqslant 1 - \delta$. Ясно, что L — компакт, не пересекающийся с K. Обозначим через d расстояние между K и L. Если $\varepsilon < d$, то функция $\psi(x) = \dfrac{\varphi(x)}{1 - \delta}$ обладает свойствами $\chi_{\bar{K}_\varepsilon}(x) \leqslant \psi(x) \leqslant 1$. Поэтому $\mu(K_\varepsilon) \leqslant F(\psi) = \dfrac{F(\varphi)}{1 - \delta} = \dfrac{\mu(K) - \delta}{1 - \delta}$. При $\delta \to 0$ последнее выражение стремится к $\mu(K)$.

Отсюда легко вытекает равенство $\mu(K)+\mu(X\setminus K)=1$, конечная аддитивность, а также регулярность функции μ

$$\mu(A)=\sup_{K\subset A}\mu(K)=\inf_{G\supset A}\mu(G),$$

где K означает компакт, а G — открытое множество.

Неравенство $\mu\left(\coprod_{n=1}^{\infty}E_n\right)\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$ выводится непосредственно из определения $\mu(E_n)$ и неравенства $\mu\left(\coprod_{i=1}^{n}K_i\right)\geqslant\sum_{i=1}^{n}\mu(K_i)$, которое следует из определения $\mu(K)$.

Для вывода обратного неравенства воспользуемся регулярностью μ, введем компакт $K\subset E=\coprod_{n=1}^{\infty}E_n$ и открытые множества $G_i\supset E_i$ так, чтобы

$$\mu(E\setminus K)<\frac{\varepsilon}{2},\quad \mu(G_n\setminus E_n)<\frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Из включения $K\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$ вытекает включение $K\subset\bigcup_{n=1}^{N}G_n$ при некотором N. Теперь из конечной аддитивности μ следует оценка $\mu(K)\leqslant\sum_{n=1}^{N}\mu(G_n)$ и, следовательно, неравенство $\mu(E)\leqslant$ $\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(G_n)+\varepsilon$.

397. Для доказательства достаточности условия докажите, что для любой ступенчатой функции $S(x)$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S(x)\,dg_n(x)=\int_0^1 S(x)\,dg(x).$$

Произвольную функцию $f(x)\in C[0,1]$ приблизьте ступенчатыми.

398. Сведите задачу к случаю, когда M состоит из монотонно неубывающих функций. Выбирая последовательность из M, сходящуюся в другой точке, и т. д., диагональным способом (из n-й подпоследовательности возьмите n-й член) получите подпоследовательность $\{\varphi_n\}$, сходящуюся во всех рациональных точках отрезка $[0,1]$. Докажите, что $\{\varphi_n\}$ сходится к некоторой неубывающей функции $\varphi(x)$ всюду, кроме точек разрыва $\varphi(x)$ множество которых не более чем счетно, что позволяет диагональным способом выбрать из $\{\varphi_n\}$ подпоследовательность, сходящуюся и в этих точках.

399. а), б) Продолжением являются $f(0)$ и $f(1)$ соответственно; в), г) — продолжения нет, так как любую функцию $f\in$ $\in C[0,1]$ можно приблизить полиномами вида $(x+1)p_1(x)$, для которых $F_3\equiv 0$, и полиномами вида $p(x^{N+1})$, для которых $F_4(f)=$ $=c_0=f(0)$. Проверьте, что эти продолжения не годятся.

400. $f_1(x)\equiv 1$, $f_2(x)\equiv -1$ (см. задачу 2О3).

401. Пусть $\mu_x = \tau\mu_1 + (1-\tau)\mu_2$, где $\tau \in (0, 1)$, а μ_1 и μ_2 принадлежат единичному шару в $C'(X)$. Обозначим через f_x какую-нибудь функцию из $C(X)$, которая равна 1 в точке x и принимает значение из $[0, 1)$ в остальных точках (например, $f_x(y) = \max\{1 - d(x, y), 0\}$). Тогда $\mu_x(f_x) = \|f_x\| = 1$, $|\mu_1(f_x)| \leqslant 1$, $|\mu_2(f_x)| \leqslant 1$. Поэтому $\mu_1(f_x) = \mu_2(f_x) = 1$. Это возможно лишь в случае $\mu_1(\{x\}) = \mu_2(\{x\}) = 1$, т. е. $\mu_1 = \mu_2 = \mu_x$. Значит, μ_x — крайняя точка.

Пусть теперь μ — любая крайная точка в единичном шаре $C'(X)$, $f(x)$ — любая непрерывная функция на X, принимающая значения из $(0, 1)$. Легко убедиться, что либо μ, либо $(-\mu)$ — положительный заряд. Пусть для определенности $\mu > 0$. Положим $\mu_1 = \dfrac{f\mu}{\mu(f)}$, $\mu_2 = \dfrac{(1-f)\mu}{1-\mu(f)}$. Тогда μ_1 и μ_2 лежат в единичном шаре $C'(X)$ и

$$\mu = \mu(f)\cdot\mu_1 + [1 - \mu(f)]\mu_2.$$

Так как μ — крайняя точка, то μ_1 и μ_2 совпадают с μ. Отсюда легко выводится, что $\mu(fg) = \mu(f)\mu(g)$ для любых f, $g \in C(X)$, принимающих значения из $(0, 1)$. Ввиду билинейности этого соотношения, оно справедливо для всех f, $g \in C(X)$. Обозначим через L ядро функционала μ. Это — замкнутый идеал коразмерности 1 в $C(X)$. Легко показать, что существует точка $x \in X$, в которой обращаются в нуль все функции из L. (В противном случае X покрывается конечным числом окрестностей U_i, для которых найдутся $f_i \in L$ такие, что $f_i(x) \neq 0$ на U_i. Тогда $f = \sum\limits_i |f_i|^2 \in L$ и $f \neq 0$ на X, откуда $L = C(X)$.) Условие $\operatorname{codim} L = 1$ влечет единственность такой точки. Теперь ясно, что $\mu = \mu_x$.

402. а) Вместе с любой функцией φ алгебра A содержит также функцию $P(\varphi)$, где P — полином. Из замкнутости A и теоремы Вейерштрасса следует, что A содержит $f \circ \varphi$ для любой непрерывной функции f на прямой. Используя это, последовательно докажите, что A содержит следующие типы функций:

1) для любых $x \neq y$; x, $y \in X$ — функцию φ такую, что $\varphi(x) = 0$, $\varphi(y) = 1$ и $0 \leqslant \varphi(z) \leqslant 1$ для всех других $z \in X$;

2) для каждой точки $x \in X$ и любой ее окрестности U — функцию φ такую, что $\varphi(x) = 0$ и $\varphi(z) = 1$ для всех $z \in X \setminus U$;

3) для любых непересекающихся компактных множеств K_1 и K_2 — функцию φ, которая равна нулю на K_1, равна единице на K_2 и принимает значения между нулем и единицей в остальных точках $x \in X$.

Используя функции последнего типа, покажите, что каждая функция $f \in C(X)$ с нормой 1 может быть аппроксимирована с точностью 2/3 функцией $\varphi \in A$ с нормой 1/3.

б) Нет; рассмотрите

$$A_{x_0} = \{f(x) \mid f(x) \in C(X),\ f(x_0) = 0\}.$$

403. Пусть диаметр множества X равен 1 (что, очевидно, не ограничивает общности). Так как X — компакт, его можно представить в виде объединения конечного числа компактов $X_1, \ldots, X_{n_1}$ диаметра 1/2. Каждый из X_i $(i = 1, \ldots, n_1)$ можно представить в виде объединения конечного числа компактов $X_{i1}, \ldots, X_{in_2}$ диаметра 1/4 и т. д. Отображение φ мы будем строить постепенно. Сначала разобьем отрезок $[0, 1]$ на $2n-1$ равных отрезков $\Delta_1, \ldots, \Delta_{2n_1-1}$ и будем считать, что $\varphi(\Delta_{2k-1}) \subset \subset X_i$, а $\varphi(\Delta_{2k})$ — путь, соединяющий некоторую точку $x_k \in X_k$ с точкой $x_{k+1} \in X_{k+1}$. (Такой путь существует ввиду линейной связности X.) Отрезок Δ_{2k-1} мы разбиваем на $2n_2-1$ равных отрезков Δ_{2k-1} $(1 \leqslant i \leqslant 2n_2-1)$ и полагаем, что $\varphi(\Delta_{2k-1,\,2l-1}) \subset \subset X_{kl}$, а $\varphi(\Delta_{2k-1,\,2l})$ — путь, соединяющий точку $x_{kl} \in \in X_{kl}$ с точкой $x_{k,\,l+1} \in \in X_{k,\,l+1}$. Продолжая этот процесс, мы определим отображение φ на некотором плотном подмножестве отрезка $[0, 1]$, причем это отображение будет равномерно непрерывно там, где оно определено. Поэтому его можно продолжить до непрерывного отображения всего отрезка.

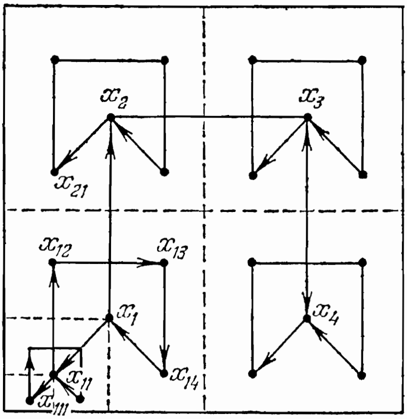


Рис. 5

404. Утверждение этой задачи — частный случай задачи 403. В этом случае построение можно иллюстрировать чертежом (рис. 5). Здесь числа $n_1, n_2, \ldots$ все равны 4, в качестве представителя $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ квадрата $X_{i_1, \ldots, i_k}$ берется его центр; четыре квадрата k-го ранга, лежащие в одном квадрате $(k-1)$-го ранга, проходятся по часовой стрелке, начиная с левого нижнего.

405. Отображение $t \mapsto \left(|\cos 2\pi t|^{2/q} \operatorname{sgn} \cos 2\pi t,\ |\sin 2\pi t|^{2/q} \times \times \operatorname{sgn} \sin 2\pi t\right)$ переводит $[0, 1]$ в единичную окружность в $l_p(2, \mathbf{R})$. Соответствующее вложение $l_p(2, \mathbf{R})$ в $C(0, 1)$ имеет вид

$$(\alpha, \beta) \mapsto \varphi_{\alpha\beta}(t) = \alpha\,|\cos 2\pi t|^{2/q} \operatorname{sgn} \cos 2\pi t + \beta\,|\sin 2\pi t|^{2/q} \operatorname{sgn} \sin 2\pi t.$$

Проверьте, пользуясь неравенством Гёльдера, что

$$\max_{t \in [0,1]} |\varphi_{\alpha\beta}(t)| = \sqrt[p]{|\alpha|^p + |\beta|^p}.$$

406. Рассмотрим естественное линейное отображение φ

$$C[0, 1] \otimes C[0, 1] \to C(\square),$$

задаваемое формулой

$$\varphi(f \otimes g)(x, y) = f(x) g(y).$$

Ясно, что это отображение инъективно, а из теоремы Вейерштрасса вытекает, что образ φ плотен в $C(\square)$. Остается проверить изометричность φ. По определению нормы в тензорном произведении

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i \right\| = \sup_{\|\mu\| = \|\nu\| = 1} \left| \sum \mu(f_i)\, \nu(g_i) \right|.$$

Достаточно брать верхнюю грань только по крайним точкам единичных шаров в $C[0, 1]'$. Поэтому (см. задачу 401)

$$\left\| \sum_i f_i \otimes g_i \right\| = \sup_{x,y} \left| \sum_i f_i(x)\, g_i(y) \right| =$$

$$= \sup_{x,y} \left| \varphi\left(\sum_i f_i \otimes g_i \right)(x, y) \right| = \left\| \varphi\left(\sum_i f_i \otimes g_i \right) \right\|.$$

407. Воспользовавшись теоремой Стоуна — Вейерштрасса, докажите, что $C(X) \otimes C(Y)$ плотно в $C(X \times Y)$. Завершает доказательство проверка того, что норма $p_X \mathbin{\breve{\otimes}} p_Y$, где p_X и p_Y — нормы в $C(X)$ и $C(Y)$, совпадает с нормой в $C(X \times Y)$.

408. Воспользуемся тем, что сопряженный оператор A' задает изометрию единичного шара в $C(Y)'$ на единичный шар в $C(X)'$. Поэтому для каждой точки $y \in Y$ существует такая точка $x = \varphi(y)$ и такое число $a(y) = \pm 1$, что $A'\mu_y = a(y)\mu_x$. Отсюда $(Af)(y) = a(y) f(\varphi(y))$. Полагая $f = \mathrm{const}$, мы видим, что $a \in C(Y)$. Поэтому $f \circ \varphi \in C(Y)$ для любой $f \in C(X)$. Отсюда следует, что φ — непрерывное отображение. Применяя это к оператору A^{-1}, убеждаемся, что обратная функция также непрерывна.

409. Пусть $F_n(x, y) = f_n(x) + g_n(y)$ — фундаментальная последовательность в $C(\square)$. Тогда $F_n(0, y) = f_n(0) + g_n(y)$ фундаментальна в $C[0, 1]$ и, следовательно, $f_n(x) - f_n(0)$ фундаментальна и

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x, y) = \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(0)) + \lim_{n\to\infty} (g_n(y) + f_n(0)).$$

410. Пусть $\{r_n\}$ — всюду плотная в $[0, 1]$ последовательность, причем $r_0 = 0$, $r_1 = 1$. Рассмотрите систему $\{f_n\}$, где $f_0(x) \equiv 1$, $f_1(x) = x$, а при $n > 1$ $f_n(x)$ определяется следующим образом: пусть r_n принадлежит (r_{s1}, r_{s2}) — одному из $(n-1)$ интервалов, на которые точки $r_2, \ldots, r_{n-1}$ разбивают отрезок $[0, 1]$; тогда

$$f_n(0) = 0, \quad f_n(r_{s1}) = 0, \quad f_n(r_n) = 1, \quad f_n(r_{s2}) = 0, \quad f_n(1) = 0,$$

а график $f_n(x)$ — четырехзвенная ломаная.

Замечание. Топологические базисы имеются также в пространствах $L_p(0, 1)$ и l_p при $1 \leqslant p < \infty$, в сепарабельном гильбертовом пространстве, но не во всяком сепарабельном банаховом пространстве.

411. Предположим, что для любой $f \in CP[0, 1]$ существует тригонометрический ряд $\sum\limits_{k \in \mathbf{Z}} C_k(f)\, e^{2\pi i k x}$, который равномерно сходится к f. Тогда этот ряд сходится и в смысле $L_2(0, 1)$. Таким образом, числа $C_k(f)$ есть коэффициенты Фурье функции f. Пусть $S_n(f)' = \sum\limits_{k=-n}^{n} C_k(f)\, e^{2\pi i k x}$. Из нашего предположения следует, что $S_n \to 1$. Это противоречит тому, что $\|S_n\| \to \infty$. (Проверьте, что $\| S_n \| = \int\limits_0^1 |(\sin(2n+1)\pi x / \sin \pi x|\, dx$.)

3. Пространства гладких функций.

412. а) Неметризуемость следует из того, что для любой числовой нефинитной последовательности $\{\lambda_n\}$ последовательность $\{\lambda_n e_n\}$ не стремится к нулю в $\mathscr{D}(\mathbf{N})$.

б) Последовательность $\{x_k^{(n)}\}$ сходится к $\{x_k\}$ при $n\to\infty$, если и только если: 1) существует такое N, что $x_k^{(n)}=0$ при $k>N$ и всех n; 2) $x_k^{(n)}\to x_k$ при $k=1, 2, \ldots, N$.

в) Пусть x_k — последовательность точек в Ω, не имеющая предельной точки внутри Ω; $\{U_k\}$ — набор попарно непересекающихся окрестностей точек x_k, φ_k — ненулевая функция с носителем в U_k. Искомое отображение $\mathscr{D}(\mathbf{N})$ в $\mathscr{D}(\Omega)$ можно задать формулой

$$\{c_k\}\to\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k.$$

413. Импликация а) $\Rightarrow$ б) очевидна; б) $\Rightarrow$ в), так как сходящаяся к нулю последовательность φ_n стремится к нулю по всем полунормам; в) $\Rightarrow$ г), так как $\mathscr{D}_K(\Omega)$ метризуемо; г) $\Rightarrow$ а) по определению топологии в $\mathscr{D}(\Omega)$.

414. $\mathscr{D}_K(\Omega)$ является пересечением семейства замкнутых множеств $I_x=\{\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)\colon \varphi(x)=0\}$, где x пробегает $\Omega\backslash K$.

415. Сначала постройте конечный набор функций $\{\psi_i\}$ $(1\leqslant i\leqslant N)$, для которого $\operatorname{sup}\psi_i\subset U_i$ и $\psi=\sum_{i=1}^{N}\psi_i\geqslant\delta>0$ на K. Пусть теперь $f\in\mathscr{E}(\mathbf{R})$ такова, что $f(x)=0$ при $x<\delta/2$ и $f(x)=1/x$ при $x\geqslant\delta$. Тогда $\varphi_i=\psi_i\cdot f(\psi(x))$ — искомый набор.

416. Воспользуйтесь результатами задачи 415.

417. Представьте $\Omega=\mathbf{R}^n\backslash K$ в виде объединения счетного числа шаров. Воспользуйтесь тем, что любая функция из $\mathscr{E}(\Omega)$, удовлетворяющая оценке $|\varphi(x)|<\exp\left\{-\frac{1}{d(x, K)}\right\}$, продолжается (нулевыми значениями на K) до функции из $\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$.

418. Существует.

419. В случае $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ проверьте, что $\varphi_k\to 0$ влечет $x_i\cdot\varphi_k\to 0$ и $\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\to 0$; в случае $S(\mathbf{R}^n)$, $\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$ дайте оценку соответствующих полунорм.

420. а) да, б) нет, в) да.

421. а) да, б) нет, в) да, г) да, д) да, е) да.

422. Воспользуйтесь тем, что ряд $\sum_{k\in\mathbf{Z}}k^m f^{(n)}(x+k)$ сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[0, 1]$, если $f\in S(\mathbf{R})$, $m, n\in\mathbf{N}$.

423. Пусть p_k — норма пространства $C^k(\mathbf{T}^m)$, q_k — норма пространства $C^k(\mathbf{T}^n)$ и r_k — норма пространства $C^k(\mathbf{T}^{m+n})$. Проверьте, что норма $p_k\underset{\smile}{\otimes}q_k$ эквивалентна r_k (пользуясь тем, что всякий линейный непрерывный функционал на $C^k(\mathbf{T}^m)$ имеет вид $\langle f, \varphi\rangle=\sum_{|i|\leqslant k}\int_{\mathbf{T}^m}\partial^i\varphi(t)\,d\nu_i(t)$, где ν_i — борелевские заряды с конечной вариацией на $\mathbf{T}^m$). Далее, из неравенства Коши — Буняковского для $l_2(\mathbf{T}^{m+n})$ выведите, что норма $p_k\widehat{\otimes}q_k$ мажорируется нормой r_s при $s>(m+n)/2+2k$. (Более точно, для $f\in C^s(\mathbf{T}^{m+n})$ ряд Фурье сходится к f по норме $p_k\widehat{\otimes}q_k$.)

Таким образом, системы норм $\{p_k \underset{\smile}{\otimes} q_k\}$, $\{r_k\}$ и $\{p_k \widehat{\otimes} q_n\}$ эквивалентны, что и доказывает нужное утверждение, если воспользоваться теоремой Вейерштрасса о плотности тригонометрических многочленов в $\mathscr{D}(\mathbf{T}^n)$.

424. а) Нужно проверить, что при $t \in [-1, 1]$ все функции обращаются в нуль вне некоторого компакта K, не зависящего от t, и что $f^{(l)}$ стремится равномерно на K к $(\partial_y f)^{(l)}$, где l — любой мультииндекс, а ∂_y означает частную производную по направлению y. Воспользуйтесь теоремой о конечном приращении.

б) Нужно проверить, что на любом компакте $K \subset \mathbf{R}^n$ функции $f_t^{(l)}$ стремятся равномерно из K к $\partial_y f^{(l)}$.

425. Свойство а) очевидно; свойство б) доказывается по индукции, используя тождество $f_n^{(r)}(x) = \dfrac{1}{\delta_n} \displaystyle\int_0^{\delta_n} f_{n-1}^{(r)}(x-t)\,dt$, верное при $r < n$. Сходимость последовательности $f_n^{(r)}$ при $n \to \infty$ и фиксированном r следует из оценки

$$\left| f_n^{(r)} - f_{n-1}^{(r)} \right| \leqslant \frac{2^{r+1}}{\delta_1 \ldots \delta_{r+1}} \delta_n,$$

верной при $n \geqslant r+2$.

426. а) Пусть M — ограниченное множество в L. Тогда оно предкомпактно по любой полунорме p_k, так как ограничено по полунорме p_{k+1}. Введем, как обычно, расстояние на L по формуле $d(f, g) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k} p_k(f-g)$. Если $\{f_i\}$ — конечная 2^{-l}-сеть для M по полунорме $\sum\limits_{k=1}^{l} p_k$, то она будет 2^{1-l}-сетью в смысле расстояния d.

б) Разберем случай $L = \mathscr{D}_K(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. По теореме Асколи — Арцела, множество M, ограниченное по норме $p_{k+1}(f) = \max\limits_{\substack{x \in K \\ |l| \leqslant k+1}} |\partial^l f(x)|$, будет предкомпактным по норме p_k, так как все функции вида $\partial^l f$, $|l| \leqslant k$ будут равномерно ограничены и равностепенно непрерывны в Ω.

427. Если φ_n — фундаментальная последовательность в $\mathscr{E}(\Omega, L)$, то для любого мультииндекса l и любой точки $x \in \Omega$ последовательность $\partial^l \varphi_n(x)$ фундаментальна в L. Пусть $\psi_l(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \partial^l \varphi_n(x)$. Докажите, что $\psi_l(x) = \partial^l \psi_0(x)$ и что $\varphi_n \to \psi_0$ в топологии $\mathscr{E}(\Omega, L)$. Метризуемость $\mathscr{E}(\Omega, L)$ вытекает из наличия счетного набора норм. (Если $\{p_j\}$ — счетный набор норм, задающий топологию в L, а $\{K_i\}$ — счетный набор компактов, исчерпывающий область Ω, то полунормы $p_{K_i j}$ определяют топологию в $\mathscr{E}(\Omega, L)$.)

428. Рассмотрите отображение $\mathscr{E}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ в $(\mathscr{E}(\Omega_1), \mathscr{E}(\Omega_2))$ по формуле $\varphi \to f$, где $(f(x))(y) = \varphi(x, y)$. Воспользуйтесь результатами задачи 424.

429. Используйте результат задачи 423 и тот факт, что периодические функции плотны в $\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$.

430. Для случая $S(\mathbf{R}^n)$ полезен результат задачи 426.

4. Обобщенные функции.

431. Нужно проверить, что если интеграл $\int\limits_{\mathbf{R}} \varphi(x)\psi(x)\,dx$ равен нулю для всех $\psi \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$, то $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$ тождественно равна нулю.

432. Существует и равен 0.

433. Воспользуйтесь тем, что $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ плотно в $L_p(\mathbf{R}, dx)$.

434. Пусть $p(x)$ — локально суммируемая функция. Для любого отрезка $[a, b]$, не содержащего начала координат, существует последовательность $\varphi_n \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$, сходящаяся к $\chi_{[a,b]}(x)$ и имеющая носитель в отрезке $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$, также не содержащем начала. Из равенства $0 = \varphi_n(0) = \int\limits_{\mathbf{R}} \varphi(x)\,p(x)\,dx$ вытекает, что $\int\limits_a^b p(x)\,dx = 0$ для любых a и b одного знака. Но функция $q(x) = \int\limits_0^x p(t)\,dt$ непрерывна по x. Отсюда $q(x) = \text{const}$ и $p(x) = 0$ почти всюду.

435. Заметим, что всякая функция $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{T}^n)$ представляется равномерно сходящимся рядом: $\varphi(t) = \sum\limits_{k \in \mathbf{Z}^n} c_k e^{2\pi ikt}$. Поэтому

$\langle e^{2\pi ikt}, \varphi\rangle = c_{-k}$ и $\left\langle \sum\limits_{k \in \mathbf{Z}^n} e^{2\pi ikt}, \varphi \right\rangle = \sum\limits_{k \in \mathbf{Z}^n} c_{-k} = \varphi(0)$.

436. В качестве определяющей системы полунорм в $\mathscr{D}(\mathbf{T}^n)$ можно взять нормы пространств $C^k(\mathbf{T}^n)$.

437. Пусть $\varphi(x) = e^{2x}\cdot\omega(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$, где $\omega \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$ — функция с носителем $[-1/3, 1/3]$, тождественно равная 1 на $[-1/6, 1/6]$. Рассмотрите действие F на сдвиги $\varphi(x \pm k)$.

438. Один из способов: разложите $1/(x \pm i0)$ в сумму четной и нечетной компонент и воспользуйтесь тем, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon} = \sqrt{\pi}\,\delta(x), \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \pi\delta(x).$$

439. См. задачу 438.

440. Воспользуйтесь следующей леммой из линейной алгебры. Пусть даны линейные функционалы $f_1, \ldots, f_n$ и f на линейном пространстве L. Если условия $f_1(x) = 0, \ldots, f_n(x) = 0$ влекут $f = 0$, то f является линейной комбинацией $f_1, \ldots, f_n$.

б) Воспользуйтесь п. а) и теоремой Хана — Банаха для ЛВП.

441. а) Примените интегрирование по частям.

б) Воспользуйтесь теоремой о слабой $*$-полноте $\mathscr{D}'(R)$.

в) Воспользуйтесь соотношениями $\frac{d}{dx}\left(\frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\right) = \frac{x_+^{\lambda-2}}{\Gamma(\lambda-1)}$ и «начальным условием» $x_+^0/\Gamma(1) = \theta(x)$.

Ответ: $x_+^{(-n-1)}/\Gamma(-n) = \delta^{(n)}(x)$.

442. Используйте изоморфизм $\mathscr{L}(L_1, L_2') \approx (L_1 \widehat{\otimes} L_2)'$ и результаты задачи 430.

443. а) $K(x, y) = \delta(x-y)$;

б) $K(x, y) = \delta(x-a) \times \delta(y-b)$.

5. Действия над обобщенными функциями.

444. Проверяется непосредственно из определения прямого произведения и производной обобщенных функций.

445. Докажите, что всякая функция $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$, обладающая свойством $\int\limits_{\mathbf{R}} \varphi(x)\,dx = 0$, имеет вид $\varphi = \psi'$, где $\psi \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$.

446. Докажите, что всякая функция $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$, обладающая свойством $\varphi(0) = 0$, имеет вид $\varphi(x) = x\psi(x)$, $\psi \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$.

447. Пусть искомая функция F на отрезке $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ является производной порядка k от непрерывной функции f. Докажите, что $f(x)$ совпадает с некоторым многочленом $P_-(x)$ на $[a-\varepsilon, a]$ и с некоторым многочленом $P_+(x)$ на $(a, a+\varepsilon]$, причем $\deg P_\pm < k$.

Пусть $P(x) = P_+(x) - P_-(x)$. Тогда

$$F(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n [P(x)\,\theta(x-a)] = \sum_{l=1}^{k} C_k^l p^{(k-l)}(a)\,\delta^{(l)}(x-a).$$

448. $\delta'(g(x)) = \operatorname{sgn} h'(0)\,[-h''(0)\delta(x-h(0)) + h'(0)^2\delta' \times$
$\times (x-h(0))]$.

449. Воспользуйтесь соотношением $\lim\limits_{t\to1} \dfrac{F(tx)-F(x)}{t-1} = xF'(x)$, которое доказывается исходя из определения $F(tx)$.

450. Воспользуйтесь задачей 441.

451. Пусть $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$ и $\int\limits_{\mathbf{R}} \varphi(x)\,dx = 0$. Докажите, что существуют такие $\psi_n \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$ и $a_n \in \mathbf{R}$, что

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} [\psi_n(x+a_n) - \psi_n(x)].$$

(Например, можно положить $a_n = \dfrac{1}{n}$, $\psi_n(x) = n\int\limits_0^x \varphi(t)\,dt$.)

452. а) Докажите, что если $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^2)$ обладает свойством $\int\limits_{\mathbf{R}} \varphi(x, y)\,dx = 0$ при всех $y \in \mathbf{R}$, то $\varphi = \partial\psi/\partial x$ для некоторой $\psi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^2)$;

б) $F = 1 \times f$.

453. а) Обобщите метод, описанный в указании к задаче 452.

б) $F = \sum\limits_{i=0}^{N} f_i \times \delta^{(i)}$.

454. Функция $f'(x)$ не является регулярной обобщенной функцией умеренного роста, так как $|f'(x)| = e^x$ растет быстрее любого многочлена. К интегралу $\int\limits_{\mathbf{R}} f(x)\,\varphi'(x)\,dx$ неприменима процедура интегрирования по частям.

455. Ответ: $\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} c_k\delta(x-k\pi)$, где $\{c_k\}$ — любая числовая двусторонняя последовательность.

456. Пусть L — подпространство в $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, порожденное функциями вида $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - R^2\right)\varphi(x)$, $x_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ $(1 \leqslant i < j \leqslant n$, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n))$. Докажите, что F аннулирует L и что L имеет коразмерность 1 в $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$. (Для простоты разберите случай $n = 2$.)

457. Воспользуйтесь результатом задачи 455.

458. Докажите, что функция $\varphi = e^{-A(x)}(F(x) - B(x))$, где A и B — первообразные для a и b соответственно, удовлетворяет уравнению $\varphi' = 0$.

459. Воспользуйтесь преобразованием Фурье и формулой Планшереля.

460. Существуют такие константы C и N, что $|c_n| \leqslant Cn^N$ при $n \neq 0$. (Или $\ln(c_n)/\ln n$ — ограниченная сверху последовательность.)

461. Нет. (Например, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)\,\delta(x)$, где $\{\varphi_n\}$ — δ-образная последовательность, не существует.)

§ 5. Гильбертовы пространства

1. Геометрия гильбертова пространства.

462. б) Рассмотрите категорию изометрических отображений данного предгильбертова пространства во всевозможные гильбертовы пространства.

463. Для доказательства полноты воспользуйтесь теоремой Вейерштрасса.

464. Результатом ортогонализации являются с точностью до постоянного множителя следующие специальные функции:

а) *многочлены Лежандра* $P_n(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n [(1 - x^2)^n]$;

б) *многочлены Чебышева* $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$;

в) *многочлены Лагерра* $L_n(x) = e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x}x^n)$;

г) *многочлены Эрмита* $H_n(x) = e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$.

465. а) $f_k(z) = \sqrt{\frac{k+1}{S}}\left(\frac{z}{R}\right)^k$, где $S = \pi R^2$ — площадь круга;

б) $f_k(z) = \frac{z^k}{\sqrt{\pi\cdot k!}}$.

466. Найдите разложение искомой функции $g_x(z)$ по базису задачи 465.

Ответы:

а) $g_x(z) = \frac{1}{\pi\left(R - \frac{\bar{x}z}{R}\right)^2}$;

б) $g_x(z) = \frac{1}{\pi} e^{\bar{x}z}$.

467. С помощью результата задачи 465 докажите, что каждая сходящаяся в смысле L_2 последовательность аналитических функций сходится равномерно на любом компакте, лежащем внутри данной области.

468. а) Вложите $L_2(a, b)$ в $L_2(0, 1)$.

б) Докажите, что произвольная функция из $L_2(a, b-1)$ однозначно продолжается до функции из искомого ортогонального дополнения в $L_2(a, b)$.

469. б) Докажите, что гильбертова норма оценивается через равномерную норму и что обратное неверно, как следует из рассмотрения последовательности $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} e^{i\lambda_k x}$, где $\{\lambda_k\}$ — произвольная последовательность вещественных чисел.

470. Пусть $f_\lambda(x)$ — функция на $\mathbf{R}$, равная 1 в точке λ и 0 в остальных точках. Тогда $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \mathbf{R}}$ — ортонормированный базис в $L_2(\mathbf{R}, \mu)$. Соответствие $f_\lambda \leftrightarrow e^{i\lambda x}$ устанавливает изоморфизм базисов, а следовательно, и гильбертовых пространств.

471. Примените процесс ортогонализации.

472. Во всех случаях ортогональное дополнение равно нулю.

473. а) Пространство функций, равных нулю при $x \geqslant 0$;

б) $\{0\}$.

474. а) $90°$,

б) $\arccos \sqrt{a/b}$, где a — длина меньшей хорды, b — длина большей хорды.

475. а) Непосредственная проверка.

б) Пусть $K = \mathbf{R}$. Определим скалярное произведение формулой

$$(x, y) = \frac{1}{2} (\| x+y \|^2 - \| x \|^2 - \| y \|^2).$$

Равенство $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$ равносильно соотношению $\|x+y+z\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x+y\|^2 + \|y+z\|^2 + \|x+z\|^2$. Это соотношение получается из тождества параллелограмма, примененного ко всем параллелограммам, которые можно составить из вершин трехмерного параллелепипеда. Далее, индукцией по n доказывается равенство $(nx, z) = n(x, z)$, а из него выводится, что $(\lambda x, z) = \lambda(x, z)$ для рациональных λ. Поскольку (x, y) по построению непрерывно зависит от x, равенство $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ справедливо для всех вещественных λ. В случае комплексного поля мы можем сначала рассмотреть овеществление $H_{\mathbf{R}}$ гильбертова пространства H (т. е. то же пространство H, в котором допускаются только операции сложения и умножения на вещественное число). Тогда в силу уже доказанного в $H_{\mathbf{R}}$ существует такое (вещественное) скалярное произведение $(x, y)_{\mathbf{R}}$, что $\| x \|^2 = (x, x)_{\mathbf{R}}$. Определим скалярное произведение в H формулой $(x, y) = (x, y)_{\mathbf{R}} + i\,(x, iy)_{\mathbf{R}}$. Проверьте, что это выражение действительно обладает нужными свойствами. (Воспользуйтесь соотношением $(x, ix)_{\mathbf{R}} = \frac{1}{2} (\| x + ix \|^2 - \| x \|^2 - \| ix \|^2) = 0$, так как $\|\lambda x\|^2 = |\lambda|^2 \|x\|^2$.)

476. Воспользуйтесь тождеством $\|x+e^{i\theta}y\|^2e^{i\theta}=\|x\|^2e^{i\theta}+$ $+(x, y)+(y, x)e^{2i\theta}+\|y\|^2e^{i\theta}$ и соотношением $\sum_{k=1}^{N}\exp\left\{\frac{2\pi ik}{N}\right\}=$ $=\sum_{k=1}^{N}\exp\left\{\frac{4\pi ik}{N}\right\}=0$ при $N\geqslant 3$.

477. Проверьте, что существует сильный предел y последовательности $y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ и что векторы $z_i=x_i-y$ ортогональны друг другу и вектору y.

478. б) $\Rightarrow$ в) по следствию из теоремы Банаха — Штейнгауза (об ограниченности слабо сходящейся последовательности).

479. Пусть $L(S)$ — замыкание линейной оболочки S. Тогда $L(S)^{\perp}=S^{\perp}$. Поэтому $(S^{\perp})^{\perp}=L(S)$ по теореме об ортогональном дополнении.

480. Представьте H в виде $\bar{L}\oplus L^{\perp}$.

2. Операторы в гильбертовом пространстве.

481. а) $\operatorname{Re}A=\frac{1}{2}(A+A^*)$, $\operatorname{Im}A=\frac{1}{2i}(A-A^*)$.

б) $AA^*-A^*A=2i(\operatorname{Im}A\cdot\operatorname{Re}A-\operatorname{Re}A\cdot\operatorname{Im}A)$.

в) $VV^*=(\operatorname{Re}V)^2+i(\operatorname{Im}V\cdot\operatorname{Re}V-\operatorname{Re}V\cdot\operatorname{Im}V)+(\operatorname{Im}V)^2$.

482. а) Положим $H_1=PH$, $H_2=(1-P)H$. Проверьте, что H_1 и H_2 ортогональны, в сумме дают H и что P — оператор проектирования на H_1 параллельно H_2.

б) Положим $P=\frac{S+1}{2}$. Проверьте, что P — ортопроектор.

483. Воспользуйтесь равенством $\|A\|=\sup\limits_{x,y}\frac{|(Ax, y)|}{\|x\|\cdot\|y\|}$.

484. а) Если k и l четны, то искомое неравенство можно переписать в виде $(A^{k/2}x, A^{l/2}x)\leqslant\|A^{k/2}x\|\cdot\|A^{l/2}x\|$. Если же k и l нечетны, то введем новое скалярное произведение $(x, y)_A=(Ax, y)$. Тогда нужное нам неравенство примет вид:

$$(A^{(k-1)/2}x, A^{(l-1)/2}x)_A\leqslant\|A^{(k-1)/2}x\|_A\cdot\|A^{(l-1)/2}x\|_A.$$

б) Выведите из а) неравенство $\|Ax\|^{2(n+1)}\leqslant(Ax, x^n)\times$ $\times(A^{n+2}x, x)$, а из него — искомое неравенство.

485. Докажите, что последовательность квадратичных форм $Q_{A_n}(x)=(A_nx, x)$ стремится поточечно к некоторой квадратичной форме $Q_A(x)$. Затем воспользуйтесь неравенством задачи 484 б).

486. а) $AP=PAP$, б) $AP=PA$.

487. а) Достаточно рассмотреть случай $\dim H=2$.

б) $\cos^2\varphi=\operatorname{tr}P_1P_2P_1=\|P_1P_2P_1\|$.

в) Пусть единичные векторы ξ_i порождают L_i, единичные векторы η_i — M_i $(i=1, 2)$. Условием конгруэнтности пар (L_1, L_2) и (M_1, M_2) является равенство $|(\xi_1, \xi_2)|=|(\eta_1, \eta_2)|$, равносильное равенству $\operatorname{tr}P_1P_2P_1=\operatorname{tr}Q_1Q_2Q_1$.

488. а) Операторы $P_1P_2P_1$ и $1-P_1P_2P_1=P_1(1-P_2)P_1+$ $+(1-P_1)$ положительны.

б) Ранг оператора $P_1P_2P_1$ не превосходит рангов P_1 и P_2.

в) При решении задачи можно считать, что $L_2 = M_2$, заменяя, если нужно, пару (M_1, M_2) конгруентной парой. Рассмотрите проекции образующих векторов в L_1 и M_1 на $L_2 = M_2$ и на ортогональное дополнение к этому пространству.

г) Первый способ: развить соображения предыдушего пункта. Второй способ. Назовем пару (L_1, L_2) разложимой, если пространство H представимо в виде $H = H' \oplus H''$ так, что $L_i = L'_i \oplus L''_i$, где $L'_i = L_i \cap H'$, $L''_i = L_i \cap H''$. В этом случае мы будем говорить, что пара (L_1, L_2) является суммой пар $\left(L'_1, L'_2\right)$ и $\left(L''_1, L''_2\right)$. Покажите, что всякая пара является суммой неразложимых и что неразложимые пары бывают только при $\dim H = 1$ или 2. Последнее видно из того, что если ξ — собственный вектор оператора $P_1P_2P_1$, то пространство H', натянутое на ξ и $P_2\xi$, инвариантно относительно P_1 и P_2. Значит, этим свойством обладает и $H'' = (H')^\perp$. Отсюда вытекает, что исходная пара разложима, если только $\dim H > 2$.

д) Раствор равен $\sin\varphi$, где φ — наибольший из углов между L_1 и L_2.

489. а) Если U унитарен и $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — базис в H_1, то $\{Ue_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — ортонормированная система в H_2. Полнота ее следует из того, что $x \perp Ue_\alpha$ влечет $U^{-1}x \perp e_\alpha$.

б) Если $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — ортонормированный базис в H_1, а $\{Ue_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — ортонормированный базис в H_2, то для любых $x, y \in H_1$, имеем

$$x = \sum_\alpha (x, e_\alpha)\, e_\alpha, \quad y = \sum_\beta (y, e_\beta)\, e_\beta.$$

Поэтому $Ux = \sum\limits_\alpha (x, e_\alpha)\, Ue_\alpha, \quad Uy = \sum\limits_\beta (y, e_\beta)\, Ue_\beta$ и

$$(Ux, Uy) = \sum_{\alpha,\beta} (x, e_\alpha)\left(\overline{y, e_\beta}\right)(Ue_\alpha, Ue_\beta) = \sum_\alpha (x, e_\alpha)\,(y, e_\alpha) = (x, y).$$

490. а) Условие $y \perp \operatorname{im} A$ равносильно отношению $(y, Ax) = 0$ для всех $x \in H$, а условие $y \in \ker A^*$ — соотношению $(A^*y, x) = 0$ для всех $x \in H$. Но $(y, Ax) = (A^*y, x)$.

б) По теореме об ортогональном дополнении равенство $(\ker A)^\perp = (\operatorname{im} A^*)$ равносильно равенству $\ker A = (\operatorname{im} A^*)^\perp$, доказанному в п. а) (с заменой A на A^*).

491. Воспользуйтесь соотношением

$$\|(A_n - A)x\|^2 = \|A_nx\|^2 + \|Ax\|^2 - 2\operatorname{Re}(A_nx, Ax).$$

492. Пусть $\{x_\alpha\}$ — базис в H, $E_{\alpha\beta}$ — оператор, переводящий x_β в x_α, а остальные базисные векторы — в нуль. Проверьте, что справедливы соотношения:

1) $E^*_{\alpha\beta} = E_{\beta\alpha}$;

2) $E_{\alpha\beta}E_{\gamma\delta} = E_{\alpha\delta}$, если $\beta = \gamma$, а иначе $E_{\alpha\beta}E_{\gamma\delta} = 0$;

3) если P — ортопроектор, для которого $E_\alpha P = P$, то $P = 0$ или E_α.

Докажите, что всякий набор операторов, обладающий этими свойствами, устроен так; существует такой гильбертов базис $\{y_\alpha\}$, что $E_{\alpha\beta}$ переводит y_β в y_α, а остальные базисные векторы —

в нуль. Примените это утверждение к набору $\sigma(E_{\alpha\beta})$, где σ — данный автоморфизм.

493. Если идеал I содержит хотя бы один ненулевой оператор, то он содержит все операторы конечного ранга и, значит, все компактные операторы. Если I содержит некомпактный оператор, то он содержит ортопроектор на бесконечное пространство и, следовательно, все операторы. Ответ: $\{0\}$, $\mathscr{K}(H)$, $\mathscr{L}(H)$.

494. Воспользуйтесь соотношениями

$$\sup_{x\in L}\frac{(PAPx,\ x)}{(x,\ x)}=\sup_{x\in L}\frac{(APx,\ Px)}{(Px,\ Px)}\cdot\frac{(Px,\ Px)}{(x,\ x)}\leqslant\sup_{y\in PL}\frac{(Ay,\ y)}{(y,\ y)},$$

$$\sup_{x\in L}\frac{(PAPx,x)}{(x,\ x)}\geqslant\sup_{x\in L\cap PH}\frac{(PAPx,\ x)}{(x,\ x)}=\sup_{x\in L\cap PH}\frac{(Ax,\ x)}{(x,\ x)}.$$

495. а) Докажите по индукции соотношения $\|A\|^{1/2}\cdot 1\gg B_n\gg\gg 0$, $B_n^2\ll A$ и воспользуйтесь результатом задачи 485.

б) Единственность сначала докажите для случая $\ker A=0$, пользуясь тем, что построенный квадратный корень B является пределом многочлена от A и, следовательно, перестановочен с любым другим квадратным корнем C; это влечет равенство $(B+C)(B-C)x=0$, откуда $(B-C)x=0$. Общий случай следует из соотношения $\ker C=\ker C^2$, верного для любых $C\gg 0$.

496. б) Операторы R и S удовлетворяют соотношениям $R^2==AA^*$, $S^2=A^*A$. Оператор V однозначно определен лишь на $\operatorname{im}S$, оператор U определен по модулю $\ker R$.

в) Операторы A, допускающие искомую запись, обладают свойством $\dim\ker A=\dim\ker A^*$. Однако $\dim\ker T\neq\dim\ker T^*$.

497. $U^*U=P_1$; $UU^*=P_2$.

498. Положим $R=(AA^*)^{1/2}$ и определим U на $\operatorname{im}A^*$ равенством $UA^*x=Rx$.

499. а) Воспользуйтесь тем, что для любых двух базисов $\{x_\beta\}_{\beta\in B}$ и $\{y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ справедливо равенство:

$$\sum_{\beta\in B}\|Ax_\beta\|^2=\sum_{\beta\in B}\sum_{\gamma\in\Gamma}|(Ax_\beta,\ x_\gamma)|^2=$$

$$=\sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{\beta\in B}|x_\beta,\ A^*y_\gamma|=\sum_{\gamma\in\Gamma}\|A^*x_\gamma\|^2.$$

б) Сходимость ряда $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}(Ay_\gamma,\ By_\gamma)_H$ вытекает из неравенства Коши — Буняковского, примененного дважды: один раз для скалярного произведения в H, другой раз — для скалярного произведения в $l_2(\Gamma)$.

в) Пусть Γ_0 — конечное подмножество в Γ, P_{Γ_0} — проектор на соответствующее подпространство в H. Оцените норму разности A и PAP в $L_2(H)$.

г) Отображение $H\otimes H'$ в $L_2(H)$ переводит вектор $x\otimes f$ в оператор A: $y\to f(y)x$.

д) Пусть $\{f_\beta\}_{\beta\in B}$ — базис в $L_2(X,\ \mu)$. Покажите, что A задается ядром $K(x_1,\ x_2)=\sum\limits_{\beta_1\beta_2}(Af_{\beta_1},\ f_{\beta_2})f_{\beta_1}(x_1)\overline{f_{\beta_2}(x_2)}$.

500. а) Следует из определения.

б) Докажите, что умножение справа на ограниченный оператор $B \in L_2(H)$ является ограниченным оператором в $L_2(H)$. Обозначим его $M(B)$. Докажите, что $M(B)^* = M(B^*)$.

в) Проверьте равенство $\|A\|_1 = \sup\limits_{U,V} |\operatorname{tr} UAV|$, где U и V пробегают совокупность всех частично изометрических операторов.

г) Каждый оператор $A \in \mathscr{L}_1(H)$ определяет линейный функционал f_A на $\mathscr{K}(H)$: $f_A(K) = \operatorname{tr} AK$. Каждый ограниченный оператор B определяет линейный функционал F_B на $\mathscr{L}_1(H)$: $F_B(A) = \operatorname{tr} AB$. Для доказательства того, что это полный набор функционалов, воспользуйтесь тем, что в $\mathscr{K}(H)$ и в $\mathscr{L}_1(H)$ операторы конечного ранга образуют плотное множество.

501. а) Воспользуйтесь функциями $g_x(z)$, построенными в задаче 466.

в) Представьте $\dim H$ в виде $\sum\limits_k |\xi_k|^2$, где $\{\xi_k\}$ — базис в H.

г) Начните с операторов ранга 1.

502. Пусть $l_n(x) = e^{2\pi i n x}$ — базис в $L_2\,[0, 1]$,

$$\operatorname{tr}_N(A) = \sum_{n=-N}^{+N} (Al_n, l_n), \quad s_k(A) = \frac{1}{k} \sum_{N=1}^{k} \operatorname{tr}_N(A).$$

Докажите, что для $A \in \mathscr{L}_2(H)$ $\lim\limits_{k\to\infty} s_k(A) = \operatorname{tr} A$. Проверьте, что для интегрального оператора с ядром $K(x, y)$ справедливо соотношение $s_k(A) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 K(x, y)\left[\dfrac{\sin(2k+1)\pi(x-y)}{\sin\pi(x-y)}\right]^2 dx\,dy$. Для непрерывного ядра отсюда вытекает, что $\lim\limits_{k\to\infty} s_k(A) = \int\limits_0^1 K(x, x)\,dx$.

ГЛАВА IV
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ЭЛЕМЕНТЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

§ 1. Свертки на коммутативной группе

1. Свертки основных функций.

503. а) Обозначим через δ_g элемент $K[G]$, соответствующий функции, равной 1 в точке g и 0 в остальных точках.

Выпишите явно условие перестановочности $a \in K[G]$ и δ_g.

б) Условие $a(gh) = a(hg)$ можно переписать в виде $a(h) = a(ghg^{-1})$.

в) Верно.

504. а) Пусть $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$, a — образующий элемент группы $Ц_n$ (в аддитивной записи). Положим $e_k = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1} \varepsilon^k \delta_{ka}$. Проверьте равенства $e_k * e_j = 0$ при $k \neq j$, $e_k * e_k = e_k$.

б) При $n \leqslant 2$ верно. При бо́льших n неверно. Можно проверить, что $\mathbf{R}[Ц_{2k}] \approx \mathbf{R} + \mathbf{R} + \underbrace{\mathbf{C} + \ldots + \mathbf{C}}_{k-1}$, $\mathbf{R}[Ц_{2k+1}] = \mathbf{R} + \underbrace{+ \mathbf{C} + \ldots + \mathbf{C}}_{k}$.

505. Каждой функции $a^k(g)$ поставим в соответствие числа $a_0 = \sum\limits_{g \in S_3} a(g)$ и $a_1 = \sum\limits_{g \in S_3} a(g) \operatorname{sgn} g$, где $\operatorname{sgn} g$ — четность перестановки g: $\operatorname{sgn} g = \prod\limits_{i<j} \frac{g(i) - g(j)}{i - j}$. Докажите, что отображения $a \to a_0$ и $a \to a_1$ являются гомоморфизмами $\mathbf{R}(S_3)$ на $\mathbf{R}$. Далее, пусть e_1, e_2, e_3 — три вектора на плоскости, в сумме равные нулю. Каждому элементу $g \in S_3$ соответствует линейное преобразование плоскости $T(g)$, действующее по формуле $T(g) e_i = e_{g^{-1}(i)}$. Докажите, что отображение $a \mapsto \sum a(g) T(g)$ является гомоморфизм $\mathbf{R}[S_3]$ на $\mathrm{Mat}_2 \mathbf{R}$. Используйте эти гомоморфизмы для построения искомого изоморфизма.

506. Пусть φ — отображение G в K-алгебру A с единицей, обладающее свойствами $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$ и $\varphi(1) = 1$. Тогда оно однозначно продолжается до гомоморфизма j: $K[G] \to A$ по формуле $a \to \sum a(g) \varphi(g)$.

Если отказаться от условия $\varphi(1) = 1$, то тривиальное отображение G в нулевую алгебру становится универсальным объектом.

507. Свертка $\chi_{[a,b]} * \chi_{[c,d]}$ (χ — характеристическая функция) есть кусочно-линейная непрерывная финитная функция на прямой. График этой функции — ломаная с вершинами $(a + c, 0)$, $(b + c, b - a)$, $(a + d, b - a)$, $(b + d, 0)$. (Здесь $a \leqslant b$, $c \leqslant d$, $b - a \leqslant d - c$.) Для ступенчатых функций отсюда вытекает искомое утверждение. Общий случай получается из оценки $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \cdot \|g\|_1$.

508. См. доказательство теоремы 4 гл. IV.

509. Установите равенство $S(\varphi) = \int\limits_G \varphi(g) T(g) \, d\mu(g)$.

510. а) Свойство 3 следует из абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

б) Свойство 3 достаточно проверить для шаровых окрестностей.

511. Представьте $S(f_k) - T(a)$ в виде $\int\limits_G f_k(g) \, [T(g) - T(a)] \, d\mu(g)$.

512. Воспользуйтесь формулой $\partial^k(\varphi * \psi) = (\partial^k \varphi) * \psi$.

513. Используйте результаты задач 510—512.

514. Используйте задачу 509. Ответ: $S(f)^* = S\overline{(f(-x))}$ (ср. задачу 516).

515. Существование $f_1 * f_2$ вытекает из того, что при каждом $x f(x - y)$ принадлежит $L_2(G, \mu)$ как функция y. Измеримость следует из определения интеграла как предела интегральных сумм, ограниченность — из неравенства Коши — Буняковского.

516. Проделайте подходящие замены переменных.

517. Доказывается непосредственным вычислением.

518. Воспользуйтесь результатом задачи 517 и докажите равенство $f * e_k = (f, e_k) e_k$ для любой функции $f \in L_1(G, \mu)$.

519. Можно, например, положить $f_k(t) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_k(t_j)$, где

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{2k+1} \sum_{s=-2k}^{2k} (2(k+1-|s|)), e_s(t) = \frac{1}{2k+1}\left[\frac{\sin(2k+1)\pi t}{\sin \pi t}\right]^2.$$

520. Используйте задачи 511, 519.

521. а) $B(\alpha+1, \beta+1)\theta(x)x^{\alpha+\beta+1}$.

б) $\begin{cases} \dfrac{e^{bx}-e^{ax}}{b-a}\theta(x) & \text{при } a \neq b, \\ xe^{ax}\theta(x) & \text{при } a = b. \end{cases}$

522. Покажите, что если $f \in L_p(G, \mu)$, $g \in L_q(G, \mu)$, $h \in L_s(G, \mu)$, то функция $\varphi(x, y) = f(x-y)g(y)h(x)$ принадлежит $L_t(G \times G, \mu \times \mu)$, где $2/t = 1/p + 1/q + 1/s$. (Ср. задачу 378.)

Выведите отсюда нужное утверждение, полагая $\frac{1}{s} = 1 - \frac{1}{r}$, $t = 1$.

2. Свертки обобщенных функций.

523. $Lf = \left(\sum_{k=0}^{n} c_k \delta^{(k)}\right) * f$.

524. Воспользуйтесь тождествами $\langle f, 1 * \varphi\rangle = \langle f * 1, \varphi\rangle$ и $1 * \varphi = \langle 1, \varphi\rangle \cdot 1$ для $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$.

525. Можно воспользоваться формулой $\langle f_1 * f_2, \varphi\rangle = \langle f_1 \times f_2, \varphi\rangle$ и соотношениями $f_1^\vee \times f_2^\vee = (f_1 \times f_2)^\vee$, $\langle f^\vee, \varphi^\vee\rangle = \langle f, \varphi\rangle$.

526, 527. Докажите, что $f * \varphi$ задает непрерывный функционал на $L_1(\mathbf{R}, dx)$.

528. Воспользуйтесь определением топологии в $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ и $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ и теоремой о представлении f в виде производной от регулярной функции.

529. Положите $\langle f_1 * f_2, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbf{T}^n}\int\limits_{\mathbf{T}^n} f_1(t) f_2(s) \varphi(t+s)\, dt\, ds$.

530. Используйте результаты задачи 518.

531. Используйте указание к задаче 530.

532. Докажите, что f выражается через f_1 и f_2 с помощью формулы $f(r) = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty K(r_1, r_2; r) f_1(r_1) f_2(r_2)\, dr_1 dr_2$, где $K(r_1, r_2; r)$ — некоторая локально суммируемая функция. Ответ: $K(r_1, r_2; r) = 0$, если отрезки r_1, r_2, r не образуют треугольника; $K(r_1, r_2; r) = \frac{1}{4S}$, если отрезки r_1, r_2, r образуют треугольник площади S.

533. а) Поскольку $\mathcal{E}_+(\mathbf{R})$ содержит $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ в качестве плотного подпространства, всякий линейный непрерывный функционал на $\mathcal{E}_+(\mathbf{R})$ определяет некоторую обобщенную функцию $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ и сам однозначно определяется этой функцией. Пусть $\alpha \in \mathcal{E}_-(\mathbf{R})$. Тогда умножение на α является непрерывным оператором из $\mathcal{E}_+(\mathbf{R})$ в $\mathcal{D}(\mathbf{R})$. Значит, сопряженный оператор переводит $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ в $\mathcal{E}'_+(\mathbf{R})$. Отсюда следует, что $\mathcal{E}'_+(\mathbf{R})$ содержит $\mathcal{D}'_-(\mathbf{R})$. Обратно,

если $f \in \mathcal{D}'_-(\mathbf{R})$ и $\alpha \in \mathcal{E}_-(\mathbf{R})$ — функция, тождественно равная 1 в окрестности $\operatorname{supp} f$, то $f = \alpha f \in \mathcal{E}'_+(\mathbf{R})$.

б) Первый способ: $\langle f_1 * f_2, \varphi\rangle = \langle f_1 \times f_2, \overset{\circ}{\varphi}\rangle$, где $\overset{\circ}{\varphi}(x, y) = \varphi(x+y)$. Здесь используется тот факт, что $\operatorname{supp}(f_1 \times f_2)$ имеет компактное пересечение с $\operatorname{supp}\overset{\circ}{\varphi}$, если $f_1, f_2 \in \mathcal{D}'_\pm(\mathbf{R})$, а $\varphi \in \mathcal{E}_\pm(\mathbf{R})$.

Второй способ: определить сначала свертку $\mathcal{D}'_\pm(\mathbf{R})$ с $\mathcal{E}_\pm(\mathbf{R})$ формулой $(f * \varphi)(x) = \langle f, T(-x)\varphi^\vee\rangle$, а затем положить $\langle f_1 * f_2, \varphi\rangle = \langle f_1, f_2^\vee * \varphi\rangle$.

534. а), б) в) проверяются непосредственно.

г) Используйте результат п. в), непрерывную зависимость f_α от α при $\alpha > 0$ и непрерывность операции дифференцирования в $\mathcal{D}'_+(\mathbf{R})$. Ответ: $\lim\limits_{\alpha\to 0} f_\alpha = \delta$.

535. Положите при $\alpha > -n$ $I(\alpha) = \left(\dfrac{d}{dx}\right)^n S(f_{\alpha+n})dx$, где f_α — функции задачи 534. Проверьте независимость от выбора n (задача 534 в)).

536. Используйте равенство $f = \dfrac{1}{\pi}\delta(x^2+y^2-1)$. Ответ:

$$(f * f)(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi^2\sqrt{(x^2+y^2)(4-x^2-y^2)}} & \text{при} \quad x^2+y^2 < 4, \\ 0 & \text{при} \quad x^2+y^2 \geqslant 4. \end{cases}$$

537. Используйте равенство $f = \dfrac{1}{2\pi}\delta(x^2+y^2+z^2-1)$. Ответ:

$$(f * f)(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{1}{8\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \text{при} \quad x^2+y^2+z^2 \leqslant 4, \\ 0 & \text{при} \quad x^2+y^2+z^2 \geqslant 4. \end{cases}$$

§ 2. Преобразование Фурье

1. Характеры коммутативной группы.

538. $\chi_k(l \bmod n) = e^{2\pi i k l/n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

539. Используйте результат задачи 538 и тот факт, что всякая конечная коммутативная группа является прямой суммой циклических групп.

540. а) $\chi_z(n) = z^n$, $z \in \mathbf{C}^*$;

б) $\chi_\lambda(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbf{C}$;

в) $\chi_{vw}(z) = e^{vz + w\bar{z}}$, $v, w \in \mathbf{C}$;

г) $\chi_{\lambda\varepsilon}(x) = |x|^\lambda(\operatorname{sgn} x)^\varepsilon$, $\lambda \in \mathbf{C}$, $\varepsilon = 0, 1$;

д) $\chi_{\lambda n}(z) = |z|^\lambda(\operatorname{sgn} z)^n$, $\lambda \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{Z}$, $\operatorname{sgn} z = z/|z|$.

541. Пусть U_ε — окрестность характера χ_0, задаваемая неравенством $|\chi(x) - \chi_0(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in G$. Докажите, что при $\varepsilon \leqslant \sqrt{3}$ эта окрестность не содержит точек $\widehat{G}$, отличных от χ_0. (Воспользуйтесь для этого тем, что множество комплексных чисел вида $\chi(x)\overline{\chi_0(x)}$ образуют подгруппу в $\mathbf{T}$.)

542. Докажите, что $\widehat{G}$ отождествляется с замкнутым подмножеством в произведении $\prod\limits_{g \in G} \mathbf{T}$, которое является компактом относительно покоординатной сходимости (*теорема Тихонова*).

543. Докажите, что обобщенная функция $\chi'(x)$ принадлежит одномерному пространству, порожденному $\chi(x)$.

544. Сделайте замену переменных в интеграле, определяющем свертку.

545. Воспользуйтесь результатом задачи 544.

546. Воспользуйтесь результатами задач 545 и 520.

547. Каждому гомоморфизму $\varphi: G \to H$ соответствует гомоморфизм $\widehat{\varphi}: \widehat{H} \to \widehat{G}$, действующий по формуле

$$\widehat{\varphi}(\chi)(x) = \chi(\varphi(x)), \quad \chi \in \widehat{H}, \quad x \in G.$$

548. Ответ: $\widehat{L}$ совпадает с сопряженным пространством L'. Для доказательства рассмотрите ограничения характера на одномерные подпространства в L и докажите, что χ имеет вид $\chi(x) = e^{if(x)}$, где $f \in L'$.

549. а) Всякий характер $\chi \in \widehat{\mathbf{Q}}_p$ имеет вид $\chi_\lambda = e^{2\pi i\{\lambda x\}}$, где $\lambda \in \mathbf{Q}_p$, а $\{\cdot\}$ — отображение $\mathbf{Q}_p$ в $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p \subset \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ («дробная часть»). Ответ: $\widehat{\mathbf{Q}_p} = \mathbf{Q}_p$.

б) Всякий характер $\chi \in \widehat{Z_p}$ имеет вид $\chi_r(x) = e^{2\pi i\{rx\}}$, где r — рациональное число вида m/p^n, определенное по $\operatorname{mod} 1$. Ответ: $\widehat{\mathbf{Z}}_p \simeq \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$.

в) Характеры группы $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ отождествляются с характерами группы $\mathbf{Q}_p$, тривиальными на $\mathbf{Z}_p$. Ответ: $(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)^\wedge \approx \mathbf{Z}_p$.

550. Точность в члене $\widehat{G}_1$ означает, что $\widehat{p}$ — мономорфизм, т. е. каждый нетривиальный характер $G_1 = G/G_0$ определяет нетривиальный характер G. Точность в члене $\widehat{G}$ означает, что в виде $\widehat{p}(\chi_1)$ представимы те и только те характеры G, которые тривиальны на G_0. Наконец, точность в члене $\widehat{G}_0$ означает, что любой характер группы G_0 получается ограничением из некоторого характера группы G. Это утверждение доказывается подобно теореме Хана — Банаха с помощью трансфинитной индукции (группа G_0 расширяется до G с помощью операций присоединения элемента и замыкания).

551. Воспользуйтесь тем, что группа $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ изоморфна прямой сумме групп $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ по всем простым числам p (каждая дробь m/n однозначно представима в виде суммы дробей, знаменатели которых — степени простых чисел). Ответ: $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^\wedge \approx \prod\limits_p \mathbf{Z}_p$.

552. б) Воспользуйтесь разложением чисел отрезка $[0, 1]$ в бесконечную двоичную дробь.

553. Преобразование Фурье функции f инвариантно относительно умножения на последовательность $\{e^{2\pi i n\alpha}\}$.

554. Докажите требуемое утверждение для ступенчатых функций.

555. Пусть χ — характеристическая функция множества $\mathbf{Z}_p \subset \mathbf{Q}_p$.

Всякий элемент $\mathscr{D}(G)$ является линейной комбинацией вида $\sum c_k\chi(a_kx + b_k)$, где $c_k \in \mathbf{C}$, a_k, $b_k \in \mathbf{Q}_p$. Докажите, что при отождействлении $\widehat{Q}_p$ с Q_p, указанном в задаче 549 а), функция χ переходит в себя при преобразовании Фурье.

556. Воспользуйтесь эквивалентностью систем полунорм

$$p_k(f) = \sup_{t \in \mathbf{T}} |f^{(k)}(t)| \quad \text{и} \quad p'_k(f) = \int_{\mathbf{T}} |f^{(k)}(t)|\, dt.$$

557. а) Матрица $\begin{bmatrix} f(0) & f(x) \\ f(-x) & f(0) \end{bmatrix}$ положительно определена тогда и только тогда, когда $f(0) \geqslant 0$, $f(x) = \overline{f(-x)}$ и $f(0)^2 - |f(x)|^2 \geqslant 0$.

б) Воспользуйтесь условием положительности матрицы

$$\begin{bmatrix} f(0) & f(x) & f(x-y) \\ f(-x) & f(0) & f(-y) \\ f(y-x) & f(y) & f(0) \end{bmatrix}.$$

558. а) Положительная определенность матрицы A означает, что $\sum\limits_{k,j} a_{kj} z_k \bar{z}_j \geqslant 0$ для всех наборов $\{z_k\} \in \mathbf{C}^n$.

б) Покомпонентное произведение положительно определенных матриц положительно определено. (Для доказательства воспользуйтесь тем, что положительно определенная матрица является суммой матриц ранга 1, обладающих тем же свойством.)

в) Преобразуйте выражение $\sum (\varphi * \varphi^*)(x_k - x_j) z_k \bar{z}_j$ к виду $\int\limits_G |f(x)|^2\, dx$, где $f(y) = \sum\limits_k z_k \varphi(y - x_k)$.

559. Матрица A, соответствующая набору всех элементов G, является матрицей оператора $S(f)$. При преобразовании Фурье этот оператор переходит в оператор умножения на $\tilde{f}$.

560. $\sum\limits_{k,j} \tilde{\varphi}(\chi_k \chi_j^{-1}) z_k \bar{z}_j = \int\limits_G \varphi(x) \Big| \sum\limits_k z_k \chi_k(x) \Big|^2 d\mu(x).$

2. Ряды Фурье.

561. а) $c_n = c_{-n}$; б) $c_n = -c_{-n}$; в) $c_n = \overline{c_{-n}}$.

562. Ответ: $l = k + 1$. Представьте f в виде суммы $(k+1)$ — гладкой функции и линейной комбинации модельных функций (для $k = 0$ — функций вида $|t - a|$).

563. Достаточно разобрать случай $k = 0$. Первое утверждение выводится из включения $C[\mathbf{T}] \subset L_2(\mathbf{T}, dt)$; второе — из равномерной сходимости ряда Фурье.

564. Ответ: $\sum\limits_{n \in \mathbf{Z}} n^{2k} |c_n|^2 < \infty$.

565. а) $c_{2k+1} = 0$, $k \in \mathbf{Z}$;

б) при $\lambda = e^{2\pi i m/k}$, $m \in \mathbf{Z}$, $c_n = 0$, если $n \not\equiv m \pmod k$.

566. $0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{i} \mathbf{Z} \xrightarrow{p} \text{Ц}_n \to 0$, где i — умножение на n, p — переход к вычетам.

567. Так, чтобы продолженная функция обладала свойствами $f(t + 1/2) = f(-t) = -f(t)$ (см. задачу 561 а) и 565 а)). Для этого нужно положить

$$f(t) = \begin{cases} f(1/2 - t) & \text{на} \quad [1/4,\ 1/2], \\ -f(t - 1/2) & \text{на} \quad [1/2,\ 3/4], \\ -f(1 - t) & \text{на} \quad [3/4,\ 1]. \end{cases}$$

568. $c_n(h) = c_n \cdot \dfrac{\sin 2\pi hn}{2\pi hn}$ при $n \neq 0$; $c_0(h) = c_0$.

569. а) $\{c_n\}$ — финитная последовательность;

б) $c_n = P(1/n)$ при $n \neq 0$, где P — некоторый многочлен;

в) $c_n = (-1)^n P(1/n)$ при $n \neq 0$, где P — многочлен.

570. Для доказательства необходимости выведите из положительной определенности $f \in C(\mathbf{T})$ неравенство $\int\limits_T \int\limits_T f(s-t)\,\varphi(s) \times \overline{\varphi(t)}\,ds\,dt \geqslant 0$ для любой функции $\varphi \in C(\mathbf{T})$. Примените это неравенство к $\varphi(t) = e^{2\pi int}$. Для доказательства достаточности воспользуйтесь тем, что f является пределом в $C(\mathbf{T})$ *чезаровских средних* $C_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} S_k$, где $S_k = \sum\limits_{j=-k}^{k} c_j e^{2\pi ijt}$.

571. См. указание к задаче 557.

572. Рассмотрите линейный функционал F на пространстве тригонометрических полиномов, принимающий на $e^{2\pi int}$ значение c_n. Докажите, что этот функционал положителен на полиномах вида $P(t) = |Q(t)|^2$, где Q — также полином, и что всякий положительный тригонометрический полином представляется в таком виде. (Воспользуйтесь принципом симметрии, согласно которому корни полинома $P(z)$, принимающего вещественные значения на окружности $|z| = 1$, симметричны относительно этой окружности: вместе с корнем λ есть и корень $\overline{\lambda}^{-1}$.) Вывести отсюда, что F имеет непрерывное продолжение на пространство $C(\mathbf{T})$ и, следовательно, представляется некоторой мерой μ.

573. $\sum\limits_{n,m} c_{n-m} z^n \overline{z}^{-m} = \left\| \sum\limits_{n} z_n U^n \xi \right\|^2$.

574. Искомый изоморфизм V переводит вектор $U^n\xi \in H$ в функцию $e^{2\pi int}$ в $L_2(\mathbf{T}, \mu)$.

575. Если f — гладкая функция, то $S_n \rightrightarrows f$ и предельное множество совпадает с графиком f. Всякая кусочно-дифференцируемая функция f представляется в виде суммы гладкой функции и конечной линейной комбинации модельных функций вида $f(t) = \{t - \alpha\}$ $(\alpha \in [0, 1))$. Исследование в модельном случае сводится к изучению суммы $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin 2\pi kt}{\pi k}$, сходящейся к $\dfrac{1}{2} - \{t\}$ при $t \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Имеем

$$S_n(\varepsilon_n) = 2 \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\varepsilon_n} \cos 2\pi kt\,dt = \int_0^{\varepsilon_n} \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}\,dt - \varepsilon_n =$$

$$= \int_0^{\varepsilon_n} \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\pi t}\,dt + O(\varepsilon_n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{(2n+1)\pi\varepsilon_n} \frac{\sin \tau}{\tau}\,d\tau + O(\varepsilon_n).$$

Таким образом, предельное множество содержит, кроме графика функции $f(t) = \dfrac{1}{2} - \{t\}$, вертикальный отрезок $t = 0$ длины $2A$, где

$$A = \sup_a \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \approx 0{,}588$$

(см. рис. 6).

Ответ: предельное множество содержит график функции f и вертикальные отрезки в точках t_k разрыва f. Длина отрезка в

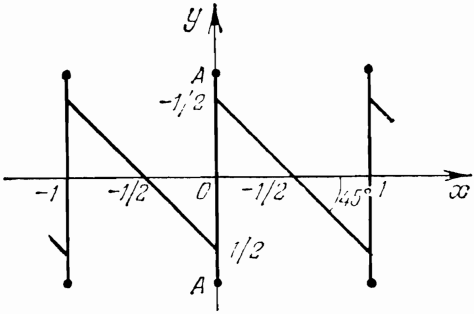


Рис. 6

$2A = 1{,}177$ раз больше величины скачка f в t_k, а центр отрезка совпадает с точкой $\left(t_k, \dfrac{f(t_k - 0) + f(t_k + 0)}{2}\right)$. Этот факт получил название *явления Гиббса.*

576. Воспользуйтесь тем, что тригонометрические полиномы образуют множество, плотное в $\mathscr{E}(\mathbf{T})$ (задача 530).

577. $c_n \geqslant 0$ для всех $n \in \mathbf{Z}$.

578. Пусть $\{c_k\}$ — коэффициенты Фурье характеристической функции множества $X \subset \mathbf{T}$: $c_k = \int\limits_X e^{-2\pi i k t} dt$.

Если $X = X + \alpha$, то

$$c_k = \int\limits_{X+\alpha} e^{-2\pi i k t} dt = \int\limits_X e^{-2\pi i k (t+\alpha)} dt = c_k e^{-2\pi i k \alpha}.$$

Для иррациональных α равенство $e^{-2\pi i k \alpha} = 1$ возможно, если только $k = 0$. Таким образом, характеристическая функция X почти всюду постоянна.

579. Обозначим $\alpha(t, x)$ обобщенное решение уравнения с начальными условиями $\alpha(0, x) = \delta(x)$. Докажите, что искомое решение с начальными условиями $u(0, x) = v(x)$ имеет вид

$$u(t, x) = \int\limits_{\mathbf{T}} v(x - y)\, \alpha(t, y)\, dy.$$

Для вычисления $\alpha(t,x)$ представьте эту функцию рядом Фурье по x:

$$\alpha(t, x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k(t)\, e^{2\pi ikx}.$$

Тогда уравнение принимает вид $c_k'(t)=-k^2c_k(t)$ с условием $c_k(0)=1$. Соответственно $c_k(t)=e^{-k^2t}$. Для фиксированного t функция

$$\alpha(t, x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}} e^{-k^2t+2\pi ikx}$$

не может быть выражена в терминах элементарных функций от x. В то же время она просто выражается через *тэта-функцию Вейерштрасса*

$$\theta(z, q)=\sum_{n\in\mathbf{Z}} q^{n^2}(-1)^n e^{2\pi inz}.$$

Именно, $\alpha(t, x)=\theta(x+1/2, e^{-t})$.

3. Интеграл Фурье.

580. а) После замены неизвестной функции $f(x)\mapsto\varphi(x)\,e^{-\pi\|x\|}$ данные уравнения превращаются в систему $\dfrac{d\varphi}{dx_k}=0$ $(1\leqslant k\leqslant n)$. Отсюда $\varphi(x)=\mathrm{const}$.

б) Докажите тождество $e^{-\pi\|x-a\|^2}=\exp\left\{-\dfrac{\pi\|a\|^2}{2}\right\}\times$ $\times\displaystyle\sum_{m\in\mathbf{N}^n}\left(\frac{ia}{2}\right)^m\frac{f_m}{m!}$, где $a\in\mathbf{R}^n$, $a^m=a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}$, $m!=m_1!\ldots m_n!$ $\left(\text{Воспользуйтесь соотношениями } f_m=e^{\pi\|x\|^2}\partial^m e^{-2\pi\|x\|^2}.\right)$ Проверьте, что ряд в правой части тождества сходится в топологии $S(\mathbf{R}^{2n})$. Поэтому наименьшее замкнутое подпространство $L\subset S(\mathbf{R}^n)$, содержащее все функции $f_m (m\in\mathbf{N}^n)$, содержит все функции вида $\varphi_a(x)=e^{-\pi\|x-a\|^2}=f_0(x-a)$. Выведите отсюда, что для любой функции $\varphi\in S(\mathbf{R}^n)$ функция $\varphi*\varphi_a$ принадлежит L. Отсюда вытекает, что преобразование Фурье пространства L содержит все функции вида $\varphi_1 f_0$, где $\varphi\in S(\mathbf{R}^n)$. В частности, оно содержит пространство $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, плотное в $S(\mathbf{R}^n)$.

в) $N_kf_m=m_kf_m$. (Воспользуйтесь соотношениями $A_k^*f_m=f_{m+\varepsilon_k}$, $A_kf_m=c_{k,m}f_{m-\varepsilon_k}$, где ε_k — базисные векторы в N^n. Для подсчета констант C_{km} используйте соотношение $A_kA_k^*-A_k^*A_k=4\pi$.)

г) Каждой функции $f\in S(\mathbf{R}^n)$ соответствует последовательность $c_m=\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\overline{f_m(x)}\,dx=(f, f_m)_{L_2(\mathbf{R}^n)}$. Оцените значения полунорм, определяющих топологию $S(\mathbf{R}^n)$ на векторах f_m, используя соотношения $\dfrac{\partial}{\partial x_k}=\dfrac{A_k+A_k^*}{2i}$, $x_k=\dfrac{A_k-A_k^*}{4\pi i}$.

д) $\tilde{f}_m = i^{|m|} f_m$. (Воспользуйтесь соотношением $FA_k^* F^{-1} = F(iD_k + M_k) F^{-1} = iA_k^* = iM_k - D_k$.)

581. Покажите, что если $f \in S(\mathbf{R}^n)$ и $f(a) = 0$, $a \in \mathbf{R}^n$, то существуют такие функции $\varphi_k \in S(\mathbf{R}^n)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, что $f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k)\, \varphi_k(x)$. $\left(\text{Например, } \varphi_k(x) = \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_k}(a + \tau(x-a))\, d\tau.\right)$

582. См. задачу 581 и доказательство теоремы для случая $n = 1$ в основном тексте.

583. Первый способ: обобщить рассуждения, приведенные в соответствующем пункте раздела «Теория». Второй способ: воспользоваться результатами задачи 580 г) и д).

584. а) $\tilde{f}$ четна, б) $\tilde{f}$ нечетна.

в) $\tilde{f}(-\lambda) = \overline{\tilde{f}(\lambda)}$,

г) $\tilde{f}$ вещественна.

585. $\tilde{\tilde{f}}(\lambda) = |\det A|^{-1} \tilde{f}(A'^{-1}\lambda)\, e^{2\pi i \lambda A^{-1} b}$.

586. Воспользуйтесь соотношением $f = \lim\limits_{n\to\infty} f * \varphi_n$, где $\{\varphi_n\}$ — дельтаобразная последовательность в $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ (предел в норме пространства $L_1(\mathbf{R}^n, dx)$). Проверьте, что в условиях задачи $\tilde{f}(\lambda)$ суммируема (воспользуйтесь неравенством Коши — Буняковского и тем фактом, что $(1 + |\lambda|^2)^{s/2} \in L_2(\mathbf{R}^n, d\lambda)$ при $s > n/2$).

587. Докажите, что при $s > n/2$ пространство $L_2(\mathbf{R}^n, (1 + \|\lambda\|^2)^s d\lambda)$ содержится в $L_1(\mathbf{R}^n, d\lambda)$. (Воспользуйтесь неравенством Коши — Буняковского для функций $f(\lambda)(1 + \|\lambda\|^2)^{1/2}$ и $(1 + \|\lambda\|^2)^{-s/2}$ и тем фактом, что $(1 + \|\lambda\|^2)^{-s/2} \in L_2(\mathbf{R}^n, d\lambda)$ при $s > n/2$.)

588. Перейдите к преобразованию Фурье.

589. Перейдите к преобразованию Фурье.

590. Воспользуйтесь результатами задач 587 и 588, а также правилом дифференцирования свертки.

591. Воспользуйтесь разложением $1/P(x)$ на простейшие дроби вида $\dfrac{1}{(x-a)^2 + b^2}$. Ответ в п. в): порядок гладкости равен $2m - 2$.

592. Представьте f в виде суммы простейших дробей.

593. а) Не следует.

б) Следует (перейдите к преобразованию Фурье).

594. Рассмотрите функционал F на $S(\mathbf{R})$, действующий по формуле $\langle F, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbf{R}} f(\lambda)\, \tilde{\varphi}(\lambda)\, d\lambda$.

Докажите, что F неотрицателен на неотрицательных φ. (Воспользуйтесь тем, что если $\varphi \in S(\mathbf{R})$ и $\varphi \geqslant 0$, то $\varphi = \psi^2$, где $\psi \in S(\mathbf{R})$.) Выведите отсюда, что $\langle F, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbf{R}} \varphi\, d\mu$, где μ — векторная мера на $\mathbf{R}$.

595. См. указание к задаче 557.

596. См. указание к задаче 557.

597. Пусть $f \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$, $\operatorname{supp} f \subset [-b, b]$ и $g = Ff$. Тогда $(2\pi i\lambda)^k g(\lambda) = F(f^{(k)})$, откуда

$$g(\lambda)\,|\,\lambda\,|^k = \left|(2\pi)^{-k}\int_{-b}^{b} e^{-2\pi i\lambda x} f^{(k)}(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^{-k}\sup_x f^{(k)}(x)\,e^{2\pi b\operatorname{Im}\lambda}.$$

Таким образом, g обладает требуемыми свойствами с константами $a = 2\pi b$ и $c_k = (2\pi)^{-k}\sup\limits_x |f^{(k)}(x)|$. Обратно, если g удовлетворяет оценкам $|g(\lambda)|\cdot|\lambda|^k \leqslant c^k e^{a|\operatorname{Im}\lambda|}$, то $g \in L_1(\mathbf{R}, d\lambda)$ и можно определить непрерывную функцию $f = \check{F}g$. Из тех же оценок следует, что f бесконечно дифференцируема. Наконец, если $|x| > a/(2\pi)$, то

$$|f(x)| = \left|\int\limits_{\mathbf{R}+it\operatorname{sgn}x} e^{2\pi i\lambda x} g(\lambda)\,d\lambda\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{\mathbf{R}} e^{2\pi i\mu x - 2\pi t|x|} g(\mu + it\operatorname{sgn}x)\,d\mu\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-2\pi t|x| + ta}\cdot\frac{c_0 + c_2}{1+\mu^2}\,d\mu = \pi(c_0 + c_2)\,e^{-t(2\pi x - a)}.$$

При $t \to \infty$ эта величина стремится к нулю. Значит, $\operatorname{supp} f \subset$ $\subset [-a/2\pi, a/2\pi]$.

598. а) Пусть $a \in \mathbf{R}^n$, $b \in \mathbf{R}$; положим $\varphi(a, b) = \int\limits_{\mathbf{R}^n}\delta(ax - b)\times$ $\times f(x)\,dx$. Докажите тождества:

$$\int\limits_{\mathbf{R}}\varphi(a, b)\,e^{-2\pi ib}\,db = \tilde{f}(a), \quad \varphi(a, b) = |\,a\,|^{-1}\int\limits_{L} f(x)\,d\mu_L(x),$$

где L — гиперплоскость $ax = b$, $|\,a\,| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$. Если последний интеграл равен нулю для всех L, то $\varphi(a, b) = 0$ при $a \neq 0$ и, значит, $\tilde{f} \equiv 0$.

б) Найдем $f(0)$. По формуле обращения

$$f(0) = \int\limits_{\mathbf{R}^3}\tilde{f}(a)\,da = \int\limits_{\mathbf{R}^3}\left(\int\limits_{\mathbf{R}}\varphi(a, b)\,e^{-2\pi ib}\,db\right)da.$$

Воспользуемся соотношением $\varphi(\tau a, \tau b) = |\tau|^{-1}\varphi(a, b)$, вытекающим из определения $\varphi(a, b)$ и тождества $\delta(\tau x) = |\tau|^{-1}\delta(x)$. Мы получим:

$$f(0) = \int\limits_{S^2}\left(\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_{\mathbf{R}}\varphi(r\alpha, b)\,e^{-2\pi ib}\,db\right)r^2\,dr\right)d\sigma(\alpha) =$$

$$= \int\limits_{S^2}\left(\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_{\mathbf{R}}\varphi(\alpha, \beta)\,e^{-2\pi i\beta r}\right)r^2\,dr\right)d\sigma(\alpha),$$

где $r=|a|$, $\alpha=\frac{a}{|a|}\in S^2$, $d\sigma(\alpha)$ — элемент площади сферы, $\beta=r^{-1}b$. Если обозначить $(4\pi)^{-1}\int\limits_{S^2}\varphi(\alpha,\beta)\,d\sigma(\alpha)$ через $\psi(\beta)$, то последнее выражение будет равно $4\pi\int\limits_0^\infty\widetilde{\psi}(r)\,r^2dr=\frac{1}{\pi}\psi''(0)$. Отметим, что геометрический смысл величины $\psi(\beta)$ — среднее значение интегралов от f по плоскостям, проходящим на расстоянии β от начала координат. Таким образом, для восстановления функции f в точке x нужно знать ее интегралы только по тем плоскостям, которые пересекаются со сколь угодно малой окрестностью точки x. Оказывается, что это свойство имеет место во всех нечетномерных пространствах.

599. Пусть заданная прямая l является осью x в $\mathbf{R}^3$. Прямая, пересекающая l в точке $(t, 0, 0)$, имеет параметрическое представление $x=f+\alpha s$, $y=\beta s$, $z=\gamma s$. Положим $\varphi(\alpha,\beta,\gamma,t)=$ $=\int\limits_{\mathbf{R}}f(t+\alpha s,\beta s,\gamma s)\,ds$. Функция φ однородная степени -1 по первым трем переменным:

$$\varphi(\alpha\tau,\beta\tau,\gamma\tau,t)=|\tau|^{-1}\varphi(\alpha,\beta,\gamma,t).$$

Будем рассматривать φ как регулярную обобщенную функцию и пусть $\widetilde{\varphi}(\lambda,\mu,\nu,\tau)$ — ее преобразование Фурье. Можно проверить, что φ регулярна вне прямой $\lambda=\mu=\nu=0$ в $\mathbf{R}^4$ и однородна степени -2 по первым трем переменным. Справедливо тождество

$$\varphi(\lambda,\mu,\nu,\tau)=\tilde{f}(\tau,\mu\tau\lambda^{-1},\nu\tau\lambda^{-1})\,|\tau\lambda^{-2}|.$$

(Для проверки примените обе части тождества к основной функции $\psi\in S(\mathbf{R}^4)$ и воспользуйтесь определением φ и тождеством $\langle\widetilde{\varphi},\psi\rangle=\langle\varphi,\psi\rangle$.) Поэтому $\tilde{f}$ можно выразить через $\widetilde{\varphi}$: $f(a,b,c)=$ $=\widetilde{\varphi}(a,b,c,a)\,|a|$. Отсюда

$$f(x,y,z)=-\frac{1}{2\pi^2}\iint\varphi(x-s,y,z,t)\frac{ds\,dt}{(s-t)^2},$$

где интеграл следует понимать как значение обобщенной функции $|a|$ на основной функции $\psi(a)=\int\int\varphi(x-s,y,z,t)\,e^{2\pi ia(s-t)}\,ds\,dt$.

4. Преобразование Фурье обобщенных функций.

600. Воспользуйтесь задачей 585. Ответ: $(-1-\lambda,\varepsilon)$.

601. Ответ: $F(\lambda)=\sum\limits_{l\in Z}\tilde{f}(l)\,\delta(\lambda-l)$.

602. а) Воспользуйтесь тождеством

$$\frac{d}{dx}\int\limits_x^{x+R}f(t)\,dt=f(x+R)-f(x).$$

б) Функция $e^{i\lambda x}$ будет квазипериодической с периодом R, если $\lambda \in \mathbf{R}^n$ удовлетворяет условию $\int\limits_{\|x\| \leqslant R} e^{i\lambda x} dx = 0$. Последнее равносильно тому, что число $R\|\lambda\|$ — корень уравнения $I_{n/2}(x) = 0$, где $I_{n/2}$ — *функция Бесселя*, $I_n(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \cos 2n\theta \times \cos(\sin \theta)\, d\theta = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$. Известно, что это уравнение имеет счетное число корней на положительной полуоси, для которых справедлива асимптотическая формула $x_{mn} \approx \approx \left(m + \frac{n-1}{4}\right)\pi$ при $m \to \infty$. Если n нечетно, функция $I_{n/2}$ выражается через элементарные. В частности, при $n = 3$ $I_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$, так что уравнение на λ принимает в этом случае вид

$$R \cdot \|\lambda\| = \operatorname{tg}(R \cdot \|\lambda\|).$$

в) Может; см. указание к б).

603. Ответ: $\widetilde{f}(\lambda) = (\det A)^{-1/2} e^{-\pi((A')^{-1}\lambda, \lambda)}$, где аргумент $\det A$ выбирается по непрерывности па пути, линейно соединяющем A с единичной матрицей.

604. Ответ: $\widetilde{f}(\lambda) = (\det A)^{-1/2} e^{i\pi s/4} e^{-i\pi(A^{-1}\lambda, \lambda)}$, где s — *сигнатура матрицы* A (разность числа положительных и отрицательных собственных значений).

605. Константа R связана с размерами носителя, а константа N — с порядком преобразуемой функции. (Ср. теорему Пэли — Винера в задаче 597.)

606. Перепишите уравнение в терминах преобразований Фурье.

607. Ответ: $f_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{-\pi x^2/(4t)}$.

608. Проверьте эти соотношения в пространстве $S(\mathbf{R}^n)$.

609. $k(r) = (2 \sin 2\pi r)/r$.

ГЛАВА V

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. Функциональное исчисление

1. Функции операторов в конечномерном пространстве.

610. Воспользуйтесь тождеством Кэли $P_A(A) = 0$, где P_A — характеристический многочлен матрицы A.

611. Импликации б) $\Rightarrow$ в) $\Rightarrow$ а) очевидны. Для вывода б) из а) рассмотрим для каждого вектора ξ идеал I_ξ в кольце многочлена от одного переменного, определяемый формулой $I_\xi =$

$= \{P\colon P(A)\xi = 0\}$. Идеал I_ξ является главным (как любой идеал в кольце многочленов от одного переменного), т. е. порождается некоторым многочленом P_ξ. Так как $P_A \subset I_\xi$, P_ξ есть делитель P_A. Пусть $P_1, \ldots, P_k$ — все различные делители P_A степени $<n$ со старшим коэффициентом 1. Пусть $L_i = \ker P_i(A)$. Из а) следует, что $L_i \neq L$. Тогда $\bigcup\limits_{i=1}^{k} L_i \neq L$. Таким образом, существует вектор $\xi \in L$, который не аннулируется ни одним из операторов $P_i(A)$, ни, соответственно, одним из операторов вида $P(A)$, $\deg P < n$. Отсюда следует б).

612. Воспользуйтесь формулой для определителя Вандермонда.

613. Действуйте по схеме а) $\Rightarrow$ б) $\Rightarrow$ в) $\Rightarrow$ а).

614. Условие, что A нерегулярен, может быть записано системой алгебраических уравнений на матричные коэффициенты A (выражающих линейную зависимость $1, A, \ldots, A^{n-1}$).

615. а) Пусть ξ — циклический вектор для A. Запишите A в базисе $\xi, A\xi, \ldots, A^n\xi$.

б) Первый базисный вектор e_1 является циклическим для A.

в) Коэффициенты $\{a_i\}$ однозначно определяются характеристическим многочленом матрицы A.

616. Коэффициенты многочлена $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ выражаются через суммы $s_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ степеней его корней. (А именно, справедливы *формулы Ньютона*: $ka_k = -\sum\limits_{i=0}^{k-1} a_i s_{k-i}$, где $a_0 = 1$.)

617. в) Ответ:

$$f(A) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & \dfrac{f'(\lambda)}{1!} & \dfrac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \dfrac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \dfrac{f'(\lambda)}{1!} & \cdots & \dfrac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) \end{bmatrix}.$$

618. Если $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{A}_2$, e_i — единица в $\mathfrak{A}_i$, то элементы $e_1 \oplus 0$ и $0 \oplus e_2$ — нетривиальные идемпотенты. Обратно, если e — идемпотент в $\mathfrak{A}$, отличный от 0 и 1, то $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$, где $\mathfrak{A}_1 = e\mathfrak{A}e$, $\mathfrak{A}_2 = (1-e)\mathfrak{A}(1-e)$.

619. а) Уравнение $\lambda^2 = \lambda$ имеет в $\mathbf{C}$ лишь тривиальные решения 0 и 1.

б) Докажите, что образующий элемент x удовлетворяет уравнению $(x - \lambda\cdot 1)^n = 0$, где $\lambda \in \mathbf{C}$, а $n = \dim\mathfrak{A}$.

620. Рассуждайте от противного и рассмотрите алгебру минимальной размерности, неразложимую в сумму примарных.

621. Пусть $A = \inf a_n/n$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется n_ε такое, что $a_{n_\varepsilon}/n_\varepsilon < A + \varepsilon$. Представим произвольное N в виде $N = k\cdot n_\varepsilon + l$, где $0 \leqslant l < n_\varepsilon$. Тогда $\dfrac{a_N}{N} \leqslant \dfrac{ka_{n_\varepsilon} + a_l}{kn_\varepsilon + l}$. При $N \to \infty$, $k \to \infty$. Отсюда следует утверждение задачи.

622. Воспользуйтесь задачей 610.

623. Воспользуйтесь задачей 619 б).

624. Для регулярных.

625. Воспользуйтесь задачами 614 и 616.

626. Докажите, что почти каждая пара матриц (A, B) приводится к виду $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \gamma & \varepsilon \\ 1 & \delta \end{bmatrix}$.

627. Коразмерность орбиты действия группы $PGL(n)$ равна в этом случае $2n^2 - (n^2 - 1) = n^2 + 1$.

628. Все матрицы вида $\begin{bmatrix} \lambda \cdot 1_n & A \\ 0 & \lambda \cdot 1_n \end{bmatrix}$, где 1_n — единичная матрица порядка n, попарно перестановочны.

629. Представьте A в виде $\lambda \cdot 1 + N$, где $N^n = 0$, и проверьте равенство для $f(\lambda) = \lambda^k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

630. Проверьте, что $f(A)$ линейно выражается через значения f в точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и найдите соответствующие (матричные) коэффициенты.

631. Проверьте, что $f(A)$ линейно выражается через $f^{(j)}(\lambda_k)$ $(a \leqslant j \leqslant m_k - 1)$. Ответ: $B_{jk} = P_{jk}(A)$, где $P_{jk}(x)$ — многочлен степени $n - 1$, обладающий свойствами:

1) $P_{jk}^{(s)}(\lambda_i) = 0$ для всех пар (s, i) $(0 \leqslant s \leqslant m_i - 1)$, кроме пары (j, k);

2) $P_{jk}^{(s)}(\lambda_k) = 1$.

632. Крайние точки K — положительные операторы ранга 1, т. е. ортопроекторы на одномерные подпространства в H.

2. Функции ограниченных самосопряженных операторов.

633. Множество $\sigma(A)$ совпадает с множеством значений, принимаемых функцией $a(x)$.

634. Спектр A — множество существенных значений функции $a(x)$, т. е. таких значений $\lambda \in \mathbf{C}$, что для любой окрестности U точки λ множество

$$E_U = \{x \in X \colon a(x) \in U\}$$

имеет положительную меру.

635. Перейдите к преобразованию Фурье. Ответ: множество значений преобразования Фурье функции f.

636. Перейдите к преобразованию Фурье. Ответ: совокупность коэффициентов Фурье функции f.

637. Докажите, что спектры U и U^{-1} лежат в единичном круге.

638. Проверьте изометричность отображения $(A + \bar{\lambda} 1)\xi \mapsto (A + \lambda 1)\xi$ и плотность $\operatorname{im}(A + \bar{\lambda} 1)$.

639. Пусть $U = (A + i1)(A - i1)^{-1}$. Тогда

$$(A^* + i1)^{-1}(A^* - i1) = U^* = U^{-1} = (A - i1)(A + i1)^{-1},$$

откуда

$$(A^* - i1)(A + i1) = (A^* + i1)(A - i1) \quad \text{и} \quad A = A^*.$$

640. Воспользуйтесь перестановочностью $U + 1$ и $(U - 1)^{-1}$.

641. Воспользуйтесь формулой $A^n f(x) = \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt$ и докажите неравенство $\|A^n\| \leqslant \frac{1}{(n-1)!}$. Ответ: $r(A) = 0$.

642. Воспользуйтесь формулой $R_\lambda(A) = -\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^{-1-k} A^k$.

Ответ: $R_\lambda(A) f(x) = -\lambda^{-1} f(x) - \lambda^{-2} \int\limits_0^x e^{\lambda^{-1}(x-t)} f(t)\,dt$.

643. Воспользуйтесь задачей 484.

644. Докажите, что всякий многочлен, положительный на отрезке $[a, b]$, представим в виде суммы слагаемых вида $Q_i^2(x)$, $(x-a)Q^2(x)_i$, $(b-x)Q_i^2(x)$, где Q_i — многочлены с вещественными коэффициентами. Указание:

$$(b-x)(x-a) = (b-x)\left(\frac{x-a}{\sqrt{b-a}}\right)^2 + (x-a)\left(\frac{b-x}{\sqrt{b-a}}\right)^2.$$

645. Докажите, что если $\alpha \cdot 1 \leqslant A \leqslant \beta \cdot 1$, то $\|A\|$ не превосходит $\{|\alpha|, |\beta|\}$.

646. Воспользуйтесь формулой $e^{itA} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(itA)^k}{k!}$.

647. См. указание к задаче 646.

648. Докажите, что $U(t)$ — дифференцируемая функция (см. метод сглаживания в доказательстве теоремы Стоуна). Затем выведите дифференциальное уравнение задачи 647 и докажите, что оно имеет единственное решение с начальным условием $U(0) = 1$.

649. $A = RU$, где R — оператор умножения на функцию $|a(x)|$, а U — оператор умножения на функцию $\operatorname{sgn}(a(x))$.

650. Оператор одностороннего сдвига T обладает свойствами: $T^*T = 1$, $TT^* = P$, где P — ортопроектор на ортогональное дополнение к первому базисному вектору. Ответ: $T = PT$.

651. а) $A = BRB^{-1}BUB^{-1}$ — полярное разложение.

б) Неверно. Разберите случай, когда A и B — оператор одностороннего сдвига из задачи 650.

652. Разберите сначала случай $B = 1$, введя в рассмотрение оператор $A^{1/2}$.

653. Приведите T к виду умножения на функцию.

654. Воспользуйтесь монотонностью последовательности $(P_1P_2P_1)^n$.

655. Проверяется непосредственно.

3. Неограниченные самосопряженные операторы.

656. Докажите эквивалентность соотношений $0 \oplus x \in \tau(\Gamma_A)^\perp$ и $x \perp D_A$.

657. Воспользуйтесь перестановочностью операций τ и $\perp$, а также результатом задачи 479.

658. Воспользуйтесь равенствами $(A^*) = A^*$ и $(A^*)^* = A$ (задача 657).

659. а) Не симметричен;

б) существенно самосопряжен;

в) симметричен, но не существенно самосопряжен.

660. Ответ: да, во всех трех случаях.

661. Докажите, что образ единичного шара при отображении A слабо ограничен.

662. а) Проверьте равенство $\|(A - i1)x\| = \|(A + i1)x\|$.

б) Если $x \in \ker(U - 1)$ и $x = (A - i1)y$, то $x = (A + i1)y$, откуда $y = 0$.

663. Проверьте соотношение $(\tau\Gamma_A)^{\perp} = \Gamma_A$.

664. Перейдите к преобразованию Фурье. Ответ:

$$A\colon \{x_n\} \mapsto \left\{\sum_{k=1}^{\infty} (x_{n-k} - x_{n+k})\right\}.$$

665. а) Да. б) Да. Проверьте, что $\mathrm{im}(A \pm i1)$ содержит все финитные последовательности.

666. Могут. Например, пространство $D(\mathbf{R})$ и пространство ступенчатых функций.

667. Для доказательства достаточности воспользуйтесь неравенством задачи 484 б) и покажите, что $(1 + A)^{-1}$ продолжается с $\mathrm{im}(A + 1)$ на все H и имеет норму $\leqslant 1$.

668. Рассмотрите проекции вектора $x \oplus 0 \in H \oplus H$ на Γ_A и $\Gamma_A^{\perp} = \tau(\Gamma_{A^*})$. Докажите, что $(1 + A^*A)^{-1}$ — ограниченный самосопряженный оператор.

669. Воспользуйтесь критерием существенной самосопряженности или теоремой Стоуна.

670. Докажите ограниченность $(A - \lambda 1)^{-1}$ при невещественных λ (замена A на $\alpha A + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ сводит общий случай к случаю $\lambda = i$).

671. б) Неверно. Может быть $\ker A = 0$, но $D_{A^*} = \{0\}$. Для этого достаточно в качестве Γ_A взять любое плотное в $H \oplus H$ подпространство, имеющее нулевое пересечение с $H \oplus 0$ и с $0 \oplus H$.

672. Если $A \subset A_1$, то $A_1^* \subset A^*$, причем оба включения одновременно строгие или нестрогие.

673. Проверьте равенство $\|(A + i1)x\| = \|(A - i1)x\|$.

674. Докажите, что графики оператора A и оператора U из задачи 673 получаются друг из друга линейными обратимыми преобразованиями пространства $H \oplus H$. Сравните графики A и $A + i1$.

675. Каждому симметрическому расширению оператора A соответствует изометрическое расширение оператора U задачи 673. Самосопряженному оператору соответствует унитарное расширение.

4. Расширения операторов.

676. Проверяется непосредственно.

677. Воспользуйтесь рассуждением из доказательства теоремы 8.

678. Предположим, что $l_\lambda > l_\mu$. Тогда в L_λ найдется вектор, ортогональный к L_μ (см. доказательство теоремы 8). Из результата предыдущей задачи вытекает, что $L_\lambda^{\perp} = \mathrm{im}(A - \lambda\cdot 1)$, $L_\mu^{\perp} = \mathrm{im}(A - \mu 1)$. Значит, есть вектор вида $Ay - \mu y$, ортогональный $Ay - \lambda y$. Отсюда, пользуясь неравенством $\|Ay - \mu y\| \geqslant |\mathrm{Im}\,\mu|\cdot\|y\|$, получите соотношение $|\mathrm{Im}\,\mu| \leqslant |\mu - \lambda|$. Последнее невозможно, если расстояние между λ и μ мало по сравнению с их расстоянием до вещественной оси.

679. Повторить решение предыдущей задачи, воспользовавшись неравенством $\|Ay-\lambda y\| \geqslant d\|y\|$, где d — расстояние от точки λ до луча $[a, \infty)$.

680. а) Воспользоваться тождеством $x = \frac{1+C}{2}x + \frac{1-C}{2}x$.

б) Если $x \in H_0$ и $AC = CA$, то $CAx = ACx = Ax$, откуда $Ax \in H_0$. Если $AH_0 \subset H_0$, то $AC - CA$ обращается в нуль на H_0, а в силу антилинейности и на всем H.

681. Проверить, что C переводит L_λ в $L_{\bar\lambda}$.

682. Пусть $x \in D(A)$, $y \in L_\lambda$, $z \in L_{\bar\lambda}$ и $x+y+z=0$. Применяя к этому равенству оператор $A^* - \lambda 1$, получаем $(A-\lambda 1)x + (\bar\lambda - \lambda)y = 0$. Так как $x \in D(A)$, $(A^* - \lambda 1)x = (A - \lambda 1)x \in \operatorname{im}(A - \lambda 1) = L_{\bar\lambda}^{\perp}$. С другой стороны, $(\bar\lambda - \lambda)y \in L_\lambda$. Поэтому $y = 0$. Аналогично доказывается, что $z = 0$. Значит, данные пространства независимы. Далее, ясно, что все три пространства содержатся в $D(A^*)$. Следовательно, их сумма также содержится в $D(A^*)$. Обратно, пусть $u \in D(A^*)$. Запишем $A^*u - \lambda u$ в виде суммы $v' + v''$, где $v' \in L_\lambda$, $v'' \in L_{\bar\lambda}^{\perp} = \operatorname{im}(A - \lambda 1)$, и положим $v' = (\bar\lambda - \lambda)y$, $v'' = (A - \lambda 1)x$. Тогда $A^*u - \lambda u = Ax - \lambda x + (\bar\lambda - \lambda)y$, откуда $A^*(u - x - y) = \lambda(u - x - y)$. Значит, вектор $z = u - x - y$ принадлежит $L_{\bar\lambda}$.

683. а), б) Проверяется непосредственно.

в) Воспользоваться равенством $B^*J + JB = \begin{bmatrix} 2\operatorname{Im}\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

684. а) Если $x(t)$ — решение уравнения $Ax = \lambda x$ и $\xi(t)$ — соответствующая вектор-функция, то $w^{-1}(t)\xi(t)$ — постоянный вектор, ибо $(w^{-1}\xi)' = -w^{-1}w'w^{-1}\xi + w^{-1}\xi' = -w'B\xi + w^{-1}B\xi = 0$.

б) Воспользоваться тождеством $(\det w') = \operatorname{tr}(w'w^{-1})$.

в) Перепишем условие в виде $f_z(t) = \xi_z^*(t)J\xi_z(t) = 0$, где $\xi_z(t) = w(t)\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда в силу задачи 683 в) справедливо равенство $f_z(0) = -2\operatorname{Im}\lambda\int\limits_0^t |x_z(t)|^2\,dt$. Но $f_z(0)$, как легко вычисляется, равно $2\operatorname{Im} z$. Значит, уравнение S_t имеет вид

$$2\operatorname{Im}\lambda\int\limits_0^t |x_z(t)|^2\,dt + 2\operatorname{Im} z = 0. \qquad (*)$$

Записывая $x_z(t)$ в виде $zx_1(t) + x_0(t)$, мы видим, что $(*)$ — уравнение окружности. Соответствующий круг задается неравенством

$$\int\limits_0^t |x_z(t)|^2\,dt \leqslant \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Im}\lambda}.$$

Это показывает, что $K_{t_1} \supset K_{t_2}$ при $t_2 > t_1$. Радиус S_t равен $\left[2|\operatorname{Im}\lambda|\int\limits_0^t |x_1(t)|^2\right]^{-1}$.

685. Пусть имеет место случай предельной окружности. Для всех $z \in S_\infty$ справедливо неравенство из указания к 684 в), показывающее, что $x_z \in L_2(0, \infty)$. Отсюда следует, что оператор A имеет числа дефекта (1, 1). В случае предельной точки результат задачи 684 в) показывает, что $x_1 \notin L_2\ (0, \infty)$. Поэтому есть единственное решение x_z, $z = z_\infty$ уравнения $A_x = \lambda_x$, лежащее в $L_2(0, \infty)$. Оно не может удовлетворять самосопряженному граничному условию в нуле ввиду монотонности функции f_{z_∞}. Значит, в этом случае оператор имеет нулевые числа дефекта.

§ 2. Спектральное разложение операторов

1. Приведение оператора к виду умножения на функцию.

686. Рассмотрите пространство X, состоящее из конечного числа точек.

687. а) Пусть f — любой вектор из H. Положим $g(x) = f(-x)\cdot$ $\cdot\operatorname{sgn} x$. Докажите, что вектор g ортогонален циклическому подпространству, порожденному f.

б) Подпространства четных и нечетных функций — циклические.

688. Предположим противное: $\sum\limits_{k=0}^{N} c_k A^k = 0$ и $c_N \neq 0$. Тогда линейная оболочка операторов $\{A^k\}_{k=0}^{\infty}$ совпадает с линейной оболочкой операторов $\{A^k\}_{k=0}^{N-1}$. Поэтому для любого вектора $\xi \in H$ пространство, порожденное векторами $\{A^k\xi\}_{k=1}^{\infty}$, имеет размерность не выше N. Значит, оператор A не может иметь циклического вектора.

689. Используйте тот факт, что квадрат и отрезок изоморфны как пространства с мерой.

690. Всякий оператор в $L_2([a, b], \mu)$, перестановочный с умножением на x, является оператором умножения на функцию от x.

691. Воспользуйтесь теоремой о приведении оператора A к виду умножения на функцию $a(x)$ в пространстве $L_2(X, \mu)$. Докажите, что множество тех $x \in X$, для которых $a(x) \notin \sigma(A)$, имеет меру нуль. Поэтому для почти всех $x \in X$ выполняется равенство $|f(a(x))| \leqslant \sup\limits_{t\in\sigma(A)} f(t)$.

692. Перейдите к преобразованиям Фурье. Условие самосопряженности: $S(f)$: $\tilde{f}(\lambda)$ — вещественная функция (или: $f(x) = \overline{f(-x)}$).

693. Нет, так как $\tilde{f}(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$.

694. а) $f(g) = \overline{f(-g)}$;

б) $|\tilde{f}(x)| \equiv 1$ (что возможно, лишь если группа $\widehat{G}$ компактна, а G дискретна);

в) когда группа G компактна.

695. Найдите собственные векторы оператора A, дважды продифференцировав по x равенство $\lambda f(x) = \int\limits_0^1 \min(x, y) f(y)\, dy$.

696. Воспользуйтесь соотношением $\tau(\Gamma_A) = \Gamma_{A^*}$, которое справедливо для любого оператора A и равносильно определению A^*.

697. а) По определению проекции справедливо равенство

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|Ay\|^2 + \|Az\|^2 + \|z\|^2,$$

откуда $\|B\| \leqslant 1$, $\|C\| \leqslant 1$.

б) Равенство $x \oplus 0 = (y \oplus Ay) + (-Az \oplus z)$ влечет $x = y - Az$, $z = -Ay$. Вспоминая, что $y = Bx$, $z = Cx$, получаем: $x = Bx - ACx$, $Cx = -ABx$ или $1 = B - AC$, $C = -AB$.

Отсюда имеем: $1 = B + A^2B$, т. е. $(1 + A^2)B = 1$.

698. $\Delta_h = \dfrac{e^{-ihA} - 1}{h}$.

699. $f(F)$: $\varphi(x) \to \dfrac{f(1) + f(i) + f(-1) + f(-i)}{4}\varphi(x) +$

$$+ \frac{f(1) - if(i) - f(-1) - if(-i)}{4}\tilde{\varphi}(x) +$$

$$+ \frac{f(1) - f(i) + f(-1) - f(-i)}{4}\varphi(-x) +$$

$$+ \frac{f(1) + if(i) - f(-1) + if(-i)}{4}\tilde{\varphi}(-x).$$

2. Спектральная теорема.

700. а) Пусть $w(t)$ — *модуль непрерывности* функции f (т. е. $|f(x) - f(y)| \leqslant w(|x - y|)$). Докажите оценку

$$\|S(f, T, \xi) - S(f, T, \eta)\| \leqslant w(\delta(T)).$$

б) Воспользуйтесь тем, что интегральная сумма $S(f, T, \xi)$ совпадает с интегралом Лебега от ступенчатой функции

$$f_{T\xi}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)\, \chi_{[t_k, t_{k+1}]}(x).$$

701. Для доказательства свойств а), в), г) полезно использовать равенство

$$\left(\int\limits_X f(x)\, d\lambda(x)\, \xi, \eta\right) = \int\limits_X f(x)\, d\lambda_{\xi\eta}$$

для любых $\xi, \eta \in H$. Равенство б) проверьте сначала для характеристических функций, а затем используйте а). Для доказательства свойства д) воспользуйтесь б) и задачей 491.

702. а) Воспользуйтесь соотношением

$$X \setminus (E_1 \cup E_2) = (X \setminus E_1) \cap (X \setminus E_2).$$

б) Рассмотрим сначала случай $E_1 \cap E_2 = \varnothing$.

Пусть $\lambda(E_1) = \alpha$ и $\lambda(E_2) = \beta$. Поскольку α, β и $\alpha + \beta$ — ортогональные проекции, $\alpha^2 = \alpha$, $\beta^2 = \beta$ и $(\alpha + \beta)^2 = \alpha + \beta$. Отсюда следует, что $\alpha\beta + \beta\alpha = 0$. Умножая это равенство слева, справа и с обеих сторон на α, получаем $\alpha\beta + \alpha\beta\alpha = 0$, $\alpha\beta\alpha + \beta\alpha = 0$ и $2\alpha\beta\alpha = 0$. Таким образом, $\alpha\beta = \beta\alpha = 0$. Переходя к общему случаю, используем соотношения $E_1 = (E_1 \cap E_2) \sqcup (E_1 \setminus E_2)$, $E_2 = (E_1 \cap E_2) \sqcup (E_2 \setminus E_1)$. Тогда $\lambda(E_1)\lambda(E_2) = [\lambda(E_1 \cap E_2) + \lambda(E_1 \setminus E_2)][\lambda(E_1 \cap E_2) + \lambda(E_2 \setminus E_1)]$. По доказанному выше, последнее выражение равно $\lambda(E_1 \cap E_2)$.

703. Существует. Воспользуйтесь отображением отрезка на квадрат, сохраняющим меру (см. задачу 131).

704. Верно. Используйте тот факт, что соответствие $\xi \to \mu_\xi(E)$ задает в H полунорму, удовлетворяющую тождеству параллелограмма.

705. Примените утверждение предыдущей задачи к мере μ_ξ представляющей функционал $f \to (\varphi(f)\xi, \xi)$.

706. а) Следует из того, что $\lambda(E)$ и A коммутируют, что, в свою очередь, следует из конструкции λ.

б), в) Следует из рассмотрения реализации, в которой A есть оператор умножения на функцию.

707. Аналогично 706 в).

708. Если $(A - a\cdot 1)^{-1}$ существует, то $\|A\xi - a\xi\| \geqslant \|A - a\cdot 1\|^{-1}\cdot\|\xi\|$. Если точка a принадлежит спектру, воспользуйтесь результатом задачи 707.

709. Используйте тот факт, что всякая ортонормированная система слабо сходится к нулю.

710. Пусть $$I_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{\pi}\int_a^b \frac{d\lambda}{(t-\lambda)^2 + \varepsilon^2}.$$

Убедитесь прямым вычислением с помощью замены переменных $\lambda \to (\lambda - t)/\varepsilon$, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \notin [a, b], \\ 1/2, & \text{если } t = a \text{ или } t = b, \\ 1, & \text{если } t \in (a, b). \end{cases}$$

711. Первый способ: представьте U в виде $\operatorname{Re} U + i \operatorname{Im} U$. Второй способ: используйте результаты задач 662, 663.

712. Используйте результат задачи 711 и соотношение

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i k t} \to \begin{cases} 1 & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t \neq 0, \end{cases} \quad t \in \mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$$

при $N \to \infty$.

713. а) Для доказательства мультипликативности воспользуйтесь *тождеством Гильберта* $R_\lambda(A)\cdot R_\mu(A) = \dfrac{R_\lambda(A) - R_\mu(A)}{\lambda - \mu}$ и предположите, что контур C, пробегаемый переменной λ, содержит контур C', пробегаемый переменной μ в интеграле

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_C \int_{C'} f_1(\lambda)\, f_2(\mu)\, R_\lambda(A)\, R_\mu(A)\, d\lambda\, d\mu.$$

б) Воспользуйтесь тем, что интеграл является пределом римановых интегральных сумм и что соответствующие числовые интегральные суммы сходятся к интегралу $\frac{i}{2\pi}\int\limits_C \frac{f(\lambda)}{t-\lambda}\, d\lambda = f(t)$.

714. См. указания к задачам 300 и 689.

715. Рассмотрите сначала случай циклического подпространства.

716. Ответ: $A = -id/dx$.

717. Воспользуйтесь теоремой Стоуна и реализацией $U(t)$ в виде оператора умножения на $e^{2\pi i t}$ в прямой сумме пространств вида $L_2(\mathbf{R}, \mu)$.

718. Да. Используйте задачу 711.

719. Проверьте, что функция $f_0(x) = e^{-x^2/2}$ является собственной для A и что оператор

$$B = -\frac{d}{dx} + x$$

переводит собственную функцию для A с собственным значением λ в собственную функцию с собственным значением $\lambda + 2$. Ответ:

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)\, P_k,$$

где P_k — проектор на подпространство, порожденное функцией $f_k = B^k f_0$. Далее используйте задачи 464 г) и 213 в).

§ 3. Математическая модель квантовой механики

720. Воспользоваться равенством

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle_\psi = \frac{d}{dt}(A\psi, \psi) = \left(A\frac{d\psi}{dt}, \psi\right) + \left(A\psi, \frac{d\psi}{dt}\right)$$

и уравнением Шредингера.

Результат этой задачи можно положить в основу альтернативного описания квантовой системы. А именно, можно считать, что векторы ψ, описывающие состояния, не меняются со временем, а операторы, описывающие физические величины, меняются по закону $i\hbar\frac{dA}{dt} = [H, A]$ (*уравнение Гейзенберга*).

Такой способ описания называется *картиной Гейзенберга* в отличие от *картины Шредингера*, использованной нами в основном тексте.

721. а) Функционалы указанного вида образуют линейное пространство. Проверить, что его размерность равна n^2. Для этого достаточно показать, что $f_A = 0$ влечет $A = 0$. Но $f_A(A^*) = \operatorname{tr} AA^* = \sum\limits_{ik} |a_{ik}|^2$.

б) При условии $A \geqslant 0$. Необходимость: $(A\xi, \xi) = \operatorname{tr}(AP_\xi) = f(P_\xi) \geqslant 0$.

Достаточность: $f(X) = \operatorname{tr}(AX) = \operatorname{tr}(A^{1/2}XA^{1/2}) \geqslant 0$.

722. Воспользуйтесь результатом и методом решения задачи 500.

723. В силу задачи 722 K состоит из ядерных операторов со следом 1. Покажите, что каждый проектор P_ψ на единичный вектор $\psi \in H$ является крайней точкой K. Пусть $P_\psi = \tau A_1 + (1-\tau) A_2$, где $0 < \tau < 1$ и $A_1, A_2 \in K$. Тогда $A_i \leqslant P_\psi$. Отсюда следует (см. гл. III), что $|(A_i\varphi_1, \varphi_2)|^2 \leqslant (P_\psi\varphi_1, \varphi_2)(P_\psi\varphi_2, \varphi_2) = |(\varphi_1, \psi)|^2 \cdot |(\varphi_2, \psi)|^2$ и, значит, $A_i = c_i P_\psi$.

Обратно, пусть A — крайняя точка в K. Оператор A по теореме Гильберта представим в виде $\sum\limits_k c_k P_{\psi_k}$, где ψ_k — некоторая ортонормированная система в H. Поскольку $A \gg 0$ и $\operatorname{tr} A = 1$, имеем $c_k \geqslant 0$ и $\sum\limits_k c_k = 1$. Теперь ясно, что A может быть крайней точкой, лишь если среди коэффициентов c_k один равен единице, а остальные — нулю.

724. Оператор координаты $\widehat{q}$ уже в исходном, координатном представлении является оператором умножения на q. Его спектр заполняет всю вещественную прямую. Обобщенные собственные функции имеют вид $\delta(q - q_0)$.

Преобразование Фурье $\psi \to \widetilde{\psi}(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikq}\psi(q)\,dq$ приводит оператор импульса $\widehat{p}$ к виду умножения на $\hbar k$, а оператор энергии $\widehat{H} = \dfrac{\widehat{p}^2}{2m}$ к виду умножения на $\dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Это представление называется *импульсным*. Спектр $\widehat{p}$ — однократный и заполняет всю прямую, а спектр $\widehat{H}$ — двукратный и заполняет положительную полуось. Обобщенные собственные функции имеют вид $e^{ik_0 x}$ в координатном представлении и $\delta(k - k_0)$ — в импульсном представлении.

725. В импульсном представлении исходное состояние имеет вид $\widetilde{\psi}_{ab}(k) = \sqrt[4]{\dfrac{a}{\pi}} \exp\left\{-\dfrac{ak^2}{2} + ibk\right\}$. Учитывая результат задачи 724, получаем:

$$\widetilde{\psi}_{ab}(k, t) = \sqrt[4]{\frac{a}{\pi}} \exp\left\{-\frac{ak^2}{2} - \frac{i\hbar k^2}{2m}t + ibk\right\}.$$

Переходя обратно к координатному представлению, получаем:

$$\psi_{ab}(k, t) = \sqrt[4]{\frac{a}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a + \frac{i\hbar}{m}t}} \exp\left\{-\frac{(x-b)^2}{2\left(a + \frac{i\hbar}{m}t\right)}\right\}.$$

Таким образом, плотность вероятности распределения частицы имеет вид

$$|\psi_{ab}(k, t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi A}} \exp\left\{-\frac{(x-b)^2}{A}\right\},$$

где $A = a + \dfrac{\hbar^2 t^2}{m^2 a}$.

726. Оператор $\widehat{H}$ имеет вид $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$ и его естественная область определения в $L_2(-a, a)$ состоит из функций, у которых вторая обобщенная производная принадлежит $L_2(-a, a)$. Чтобы получить самосопряженный оператор, эту область нужно сузить, наложив дополнительные условия $\psi(a) = \psi(-a) = 0$. (Математическая интерпретация физического условия непроницаемой отталкивающей стенки.) Стационарное уравнение Шредингера принимает вид

$$\psi'' + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0, \quad \psi(a) = \psi(-a) = 0.$$

Отсюда $\psi(x) = \alpha \exp\left\{\frac{i\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right\} + \beta \exp\left\{-i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right\}$, что согласуемо с граничными условиями, лишь если $\sin\frac{2\sqrt{2mE}}{\hbar}a = 0$, т. е. $E = \frac{\pi^2\hbar^2n^2}{8ma^2}$, где n — натуральное число. Соответствующая собственная функция при нечетном $n = 2k+1$ имеет вид $\psi_{2k+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\cos\left[\frac{\pi x}{a}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]$, а при четном $n = 2k$ $\psi_{2k}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\sin\frac{\pi k x}{a}$.

727. Естественная область определения оператора энергии состоит из функций, имеющих обобщенную вторую производную в $L_2(\mathbf{R})$. Поэтому собственные функции должны иметь непрерывную первую производную. Вне отрезка $[-a, a]$ они удовлетворяют уравнению $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + (V_0 - E)\psi = 0$. Так как $\psi \in L_2(\mathbf{R})$, должно быть $V_0 - E > 0$ и

$$\psi(x) = \begin{cases} c_+ e^{-lx} & \text{при } x > a, \\ c_- e^{lx} & \text{при } x < -a, \end{cases}$$

где $l = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$.

Удобно исследовать отдельно четные и нечетные функции. (Поскольку оператор $\widehat{H}$ перестановочен с отражением $x \mapsto -x$, всякая собственная функция ψ представима в виде суммы четной и нечетной собственных функций: $\psi(x) = \frac{\psi(x)+\psi(-x)}{2} + \frac{\psi(x)-\psi(-x)}{2}$. В нашем случае, когда спектр простой, каждая собственная функция либо четна, либо нечетна.) В четном случае получаем:

$$\psi(x) = \begin{cases} c\cdot e^{-l|x|} & \text{при } |x| > a, \\ c_1 \cos kx & \text{при } |x| < a, \end{cases}$$

где $k=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}$. Условия непрерывности ψ и ψ' в точке a дают:

$$ce^{-la}=c_1\cos ka,$$

$$cle^{-la}=c_1k\sin ka,$$

откуда $k\operatorname{tg} ka=l=\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}-k^2}$.

Это уравнение легко решается графически и имеет конечное число решений, зависящее от характеристического параметра $\varkappa=\frac{a\sqrt{2mV_0}}{\hbar}$. В нечетном случае рассмотрение аналогично.

Отметим, что собственные функции ψ отличны от нуля (хотя и быстро убывают) вне потенциальной ямы. Это значит, что с положительной, хотя и малой, вероятностью частица с энергией E может выскочить из ямы глубиной $V_0>E$.

728. Уравнение Шредингера имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''+\frac{m\omega^2}{2}x^2\psi=E\psi.$$

Заменой аргумента $y=x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ оно приводится к виду

$$\frac{d^2}{dy^2}\psi+y^2\psi=\frac{2E}{\omega\hbar}\psi.$$

Далее см. задачу 719. Ответ: $E=\hbar\omega(n+1/2)$ $(n=0,1,2,\ldots)$.

729. а) Пусть φ_1 и φ_2 — два линейно независимых решения уравнения Шредингера. Докажите, что их вронскиан $W(x)=\det\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x)\\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x)\end{vmatrix}$ не зависит от x.

б) Воспользуйтесь тем, что если $\varphi(x)$ — решение уравнения Шредингера, то $\overline{\varphi(x)}$ — тоже решение.

730. Следует из результатов задачи 729.

731. Нужно найти решение $\psi(x)$, имеющее вид $e^{ikx}+r(k)e^{-ikx}$ при $x<a$ и вид $t(k)e^{ikx}$ при $x>a$.

Пусть на отрезке $[-a, a]$ $\psi(x)=\alpha e^{ilx}+\beta e^{-ilx}$, где $l^2=k^2-\frac{2mV_0}{\hbar^2}$. Из условия непрерывности ψ и ψ' в точках $\pm a$ получаем уравнения

$$e^{-ika}+r(k)e^{+ika}=\alpha e^{-ila}+\beta e^{ila},$$

$$ke^{-ika}-kr(k)e^{+ika}=l\alpha e^{-ila}-l\beta e^{ila},$$

$$t(k)e^{+ika}=\alpha e^{+ila}+\beta^{-ila},$$

$$kt(k)e^{+ika}=l\alpha e^{ila}-l\beta e^{-ila}.$$

Отсюда

$$t(k) = e^{-2ika}\frac{2lk}{-i(l^2+k^2)\sin 2la + 2lk\cos 2la},$$

$$r(k) = -\frac{\operatorname{Im} V_0 \sin 2la}{kl}\,t(k).$$

732. Ответ:

$$t(k) \to \frac{\hbar^2 k}{\hbar^2 k + 2\operatorname{Im}(c)}, \quad r(k) \to \frac{-2\operatorname{Im}(c)}{h^2 k + 2\operatorname{Im}(c)}.$$

733. Для операторов координат обобщенные собственные функции имеют вид $\psi(x) = \delta_n(x - x_0)$; для операторов импульса и энергии — вид $\psi(x) = e^{ikx}$. (Здесь $\delta_n(x - x_0) = \delta\left(x^1 - x_0^1\right)\ldots$ $\ldots\ \delta\left(x^n - x_0^n\right)$ — n-мерная δ-функция, через kx кратко обозначена величина $k_1x^1 + \ldots + k_nx^n$).

734. а) Оператор Шредингера имеет вид $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$ и действует в пространстве периодических функций с периодом 1. Его собственные функции имеют вид $\psi_n(x) = e^{2\pi i n x}$, а соответствующие уровни $E_n = \frac{2\pi^2\hbar^2 n^2}{m}$.

б) $\psi_{n_1\ldots n_m}(x_1, \ldots, x_m) = \Pi\psi_{n_i}(x_i)$;

$$E_{n_1\ldots n_m} = \frac{2\pi^2\hbar^2}{m}\left(n_1^2 + \ldots + n_m^2\right).$$

735. Разделением переменных задача сводится к одномерной. Ответ: $\psi_{klm}(x, y, z) = \psi_k(x)\psi_l(y)\psi_m(z)$, где ψ_i — собственные функции одномерного осциллятора. $E_{klm} = \hbar\omega\left(\frac{k + l + m + 3/2}{2}\right)$; собственное значение $E = \frac{3}{2}\hbar\omega$ — простое, все прочие кратные. Кратность значения $\left(n + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$ равна $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

736. Собственные функции имеют вид

$$\psi_{k_1\ldots k_n} = \sum_{s\in S(n)} \chi(s)\,\psi_{k_{s(1)}}(x_1)\ldots\psi_{k_{s(n)}}(x_n),$$

где ψ_i — собственные функции одномерного осциллятора, $S(n)$ — группа перестановок чисел 1, 2, ..., n, $\chi(s) \equiv 1$ в случае бозонов и $\chi(s) = \operatorname{sgn} s$ в случае фермионов. Мультииндекс $(k_1, \ldots, k_n)$ может быть любым в случае бозонов и состоящим из попарно различных чисел k_i в случае фермионов. Уровни энергии имеют вид $\left(N + \frac{n}{2}\right)\omega\hbar$, $N \in \mathbf{N}$. Кратность такого уровня равна числу представлений числа N в виде суммы n любых натуральных (в случае бозонов) или n различных натуральных (в случае фермионов) слагаемых.

737. Воспользуйтесь правилом коммутации произведения (аналог правила Лейбница для дифференцирования):

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C].$$

738. а) Пусть ξ — собственный вектор оператора Z с собственным значением λ. Из соотношений 737 б) следует, что вектор $(X \pm iY)\xi$ либо нулевой, либо собственный для оператора Z с собственным значением $\lambda \mp i$. Выведите отсюда, что существует такой собственный для Z вектор ξ_0 с собственным значением λ_0, что $(X - iY)\xi_0 = 0$. Положим $\xi_k = (X + iY)^k \xi_0$ и пусть l — наименьший номер, для которого $\xi_{l+1} = 0$. Проверьте, что линейная оболочка векторов $\xi_0, \ldots, \xi_l$ инвариантна относительно всех трех операторов X, Y, Z и, следовательно, совпадает с V. Значит, $l = \dim V - 1 = 2s$. Далее, $\operatorname{tr} Z = \operatorname{tr}(XY - YX) = 0$. Но $Z\xi_k = \lambda\xi_k$ и $\lambda_k = \lambda_0 - ki$. Поэтому $\operatorname{tr} Z = \sum\limits_{k=0}^{2s} \lambda_k = (2s+1)\lambda_0 - \dfrac{2s(2s+1)}{2} i$.

Отсюда $\lambda_0 = si$, $\lambda_k = (s - k)i$.

б) Пусть δ — собственное значение оператора Δ. Тогда собственное подпространство, отвечающее этому собственному значению, инвариантно относительно X, Y и Z (в силу 737 а)) и, следовательно, совпадает с V. Для вычисления δ запишите оператор Δ в виде $\Delta = (X + iY)(X - iY) + Z^2 + iZ$ и примените его к вектору ξ_0 (см. выше указание к п. а)).

в) Соотношения $(*)$ можно переписать в виде $Z\eta_k = \lambda_k\eta_k$, $(X \pm iY)\eta_k = c_\pm(k)\eta_{k\pm1}$. Поэтому для любого базиса $\{\eta_k\}$ вида $\eta_k = \mu_k\xi_k$, $\mu_k \in \mathrm{C}$, соотношения $(*)$ выполняются, причем $c_-(k) = \mu_k\mu_{k-1}^{-1}$.

Последнее из соотношений 737 б) в применении к вектору η_k дает $c_+(k-1)c_-(k) - c_-(k+1)c_+(k) = -2i\lambda_k = 2(s-k)$. Отсюда и из равенства $c_+(2s) = 0$ выводится, что $c_+(k)c_-(k+1) = \sum\limits_{l=k+1}^{2s} 2(s-l) = (k+1)(k-2s)$. Полагая $\mu_n = (k+1)!$, получаем $c_-(k) = k$, $c_+(k) = k - 2s$.

739. Функции x, y, z на S подчиняются соотношениям

$$\{x, y\} = zR^{-1}, \quad \{y, z\} = xR^{-1}, \quad \{z, x\} = yR^{-1}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Поэтому их квантовые аналоги $\widehat{X}$, $\widehat{Y}$, $\widehat{Z}$ должны удовлетворять соотношениям

$$\mathrm{i}\hbar\,[\widehat{X}, \widehat{Y}] = \widehat{Z}R^{-1}, \quad \mathrm{i}\hbar\,[\widehat{Y}, \widehat{Z}] = \widehat{X}R^{-1}, \quad \mathrm{i}\hbar\,[\widehat{Z}, \widehat{X}] = \widehat{Y}R^{-1},$$

$$\widehat{X}^2 + \widehat{Y}^2 + \widehat{Z}^2 = R^2.$$

Положим $X = i\hbar R\widehat{X}$, $Y = i\hbar R\widehat{Y}$, $Z = i\hbar R\widehat{Z}$. Тогда операторы X, Y, Z будут удовлетворять условиям задачи 737 и, кроме того, равенству $X^2 + Y^2 + Z^2 = -\hbar^2R^2$. В силу задачи 738 б) последнее возможно лишь при $R^2 = \dfrac{s^2 + s}{\hbar^2}$, где s — целое или полуцелое число.

Рассматривают также квантование, при котором жертвуют условием $\widehat{X}^2 + \widehat{Y}^2 + \widehat{Z}^2 = R^2$, но требуют, чтобы максимальное собственное значение операторов $\widehat{X}$, $\widehat{Y}$, $\widehat{Z}$ было равно R. В этом случае для R возможны значения вида $s/\hbar$, где s — полуцелое число. Параметр s, однозначно характеризующий систему, называется ее спином.

740. Первый способ: воспользоваться каноническими соотношениями коммутации координат и импульсов.

Второй способ: использовать координатные выражения

$$L_1 = i\hbar\left(x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3}\right),$$

$$L_2 = i\hbar\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_1}\right),$$

$$L_3 = i\hbar\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right).$$

741. Воспользуемся результатами задачи 737, введя операторы

$$X = \frac{1}{i\hbar}L_1,\quad Y = \frac{1}{i\hbar}L_2,\quad Z = \frac{1}{i\hbar}L_3.$$

Обозначим через H_i пространство размерности $2l_i + 1$, в котором задано каноническое действие операторов X_i, Y_i, Z_i. Речь идет о разложении пространства $H_1 \otimes H_2$ на неприводимые подпространства относительно операторов

$$X = X_1 \otimes 1 + 1 \otimes X_2,\ Y = Y_1 \otimes 1 + 1 \otimes Y_2,\ Z = Z_1 \otimes 1 + 1 \otimes Z_2.$$

Пусть $\xi_0, \ldots, \xi_{2l_1}$ и $\eta_0, \ldots, \eta_{2l_2}$ — канонические базисы в H_1 и H_2 соответственно. Тогда $\{\xi_k \otimes \eta_l\}$ — базис в $H_1 \otimes H_2$. Оператор $X - iY$ действует в этом базисе по формуле

$$(X - iY)\xi_k \otimes \eta_l = k\xi_{k-1} \otimes \eta_l + l\xi_k \otimes \eta_{l-1}.$$

Найдем ядро этого оператора. Для этого заметим, что если отождествить H_1 и H_2 с пространствами многочленов от u и v соответственно по формулам $\xi_k \leftrightarrow u^k$, $\eta_l \leftrightarrow v^l$, то оператор $X - iY$ перейдет в $\partial/\partial u + \partial/\partial v$ (проверьте!). Поэтому ядро $X - iY$ состоит из многочленов от $u - v$.

Действие оператора Z в этой реализации сводится к $i\left(l_1 + l_2 - u\dfrac{\partial}{\partial u} - v\dfrac{\partial}{\partial v}\right)$. Поэтому $(u-v)^k$ является собственным вектором для Z с собственным значением $i(s_1 + s_2 - k)$. Число k может меняться от 0 до $\min(2l_1, 2l_2)$. Каждый вектор $(u-v)^k$ порождает неприводимое подпространство размерности $2l_1 + 2l_2 - 2k + 1$. Отсюда вытекает, что возможными значениями полного момента объединенной системы являются числа

$$\hbar(l_1 + l_2),\quad \hbar\,(l_1 + l_2 - 1),\ \ldots,\ \hbar\,|l_1 - l_2|.$$

742. В решении предыдущей задачи нужно предположить, что $l_1 = l_2$, и на многочлены от u и v наложить дополнительно условие симметричности (для бозонов) или антисимметричности (для фермионов). Это сводится к требованию четности или нечетности k. Ответ: для бозонов возможные значения момента $2l\hbar$, $2(l-1)\hbar$, ..., 0; для фермионов $(2l-1)\hbar$, $(2l-3)\hbar$, ..., $\hbar$.

Функциональный анализ — часть современного математического анализа, основной целью которой является изучение функций $y = f(x)$, где по крайней мере одна из переменных x, y меняется по бесконечному пространству.

Математическая энциклопедия, т. 5.

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Дать точное определение функционального анализа так же трудно (если вообще возможно), как и определение всей математики. Таким образом, наиболее надежный способ объяснить, что такое функциональный анализ, состоит в том, чтобы познакомить читателя с краткой историей его возникновения и развития.

Как и многие другие математические теории, функциональный анализ возник из конкретных задач и попыток обобщить их решения. Рождение функционального анализа часто связывают с выходом в свет книги львовского математика Стефана Банаха «Теория линейных операций» (Варшава, 1932), а точнее, ее французского перевода под названием «Курс функционального анализа» (1933). В этой книге содержалось систематическое изложение того, что сейчас называют линейным функциональным анализом, т. е. теории линейных топологических пространств и линейных операторов в этих пространствах.

Этому событию предшествовала почти столетняя история развития методов решения бесконечных систем линейных уравнений. В 1836 г. были опубликованы работы Ш. Штурма и Ж. Лиувилля по теории колебаний струны, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка с определенными граничными условиями (задачи Штурма — Лиувилля). В течение 70 последующих лет многие выдающиеся математики занимались этой задачей. В частности, для ее решения были изобретены методы ортогонализации Грама — Шмидта и теория операторов и детерминантов Фредгольма. В 1906 г. Д. Гильберт завершил значительную часть этой темы, построив общую теорию самосопряженных вполне непрерывных операторов в пространстве, которое с тех пор называется гильбертовым.

Еще более длинную историю имеет теория приближения функций. Приближенные вычисления встречались в математике со времен ее возникновения. Метод Ньютона вычисления корней уравнения и метод наименьших квадратов К. Ф. Гаусса были первыми попытками внести систему в такие вычисления.

Развитие метода Ньютона привело к появлению нелинейного функционального анализа, о котором речь пойдет ниже. Метод Гаусса, по существу, сводится к ортогональному проектированию на подпространство в евклидовом пространстве. Он без труда переносится на бесконечномерное гильбертово пространство и до сих пор играет основную роль в различных приложениях.

Теория наилучшего приближения в пространствах с другой нормой существенно сложнее. Для равномерной нормы такая теория была основана П. Л. Чебышевым в середине прошлого века и развита его учениками Е. И. Золотаревым, А. Н. Коркиным и А. А. Марковым (старшим). В 1885 г. итальянский математик В. Вольтерра ввел понятие функционала как «функции от линии», а в 1906 г. французский математик М. Фреше определил общее понятие метрического пространства в работе, озаглавленной «О некоторых вопросах функционального исчисления».

Таким образом, появление книги Банаха явилось скорее завершением целого этапа «утробного развития» функционального анализа, чем началом этого направления. Основные определения книги Банаха, такие как нормированное пространство, линейный функционал и оператор, фундаментальные последовательности, полнота, оказались очень удобными и вскоре были приняты повсеместно.

Теория банаховых пространств и линейных операторов в них до сих пор привлекает внимание многих исследователей. Например, только недавно были решены некоторые известные задачи, поставленные Банахом. Отметим здесь отрицательное решение проблемы базиса и проблемы аппроксимации, данные П. Энфло, а также опровержение гипотезы о структуре множества сумм условно сходящегося ряда, полученное Е. М. Никишиным.

Большую роль в геометрической теории банаховых пространств играет понятие выпуклого множества. Систематическое исследование этого понятия сейчас составляет самостоятельное направление — выпуклый анализ, имеющий важные приложения к вычислительной математике, линейному программированию, геофизике и другим прикладным областям. В развитии этого направления большой вклад принадлежит Л. В. Канторовичу, А. Н. Колмогорову и М. Г. Крейну.

Большое место в приложениях занимает теория гильбертовых пространств и операторов в этих пространствах. Достаточно отметить, что спектральная теория самосопряженных операторов является языком квантовой механики. Спектральная теория общих (в том числе и неограниченных) самосопряженных операторов была построена Дж. фон Нейманом и М. Стоуном в 1930 г. Их результаты были сразу использованы в квантовой теории.

Потребности математической физики постоянно стимулировали развитие спектральной теории. В частности, под влиянием статистической физики в последние годы были получены замечательные результаты в так называемой спектральной геометрии. Истоки этого направления лежат в известной работе Г. Вейля 1911 г. об асимптотике собственных значений оператора Лапласа, заданного в плоской области. Физический смысл этой задачи через 50 лет образно сформулировал американский математик М. Кац, назвавший свой обзор по спектральной геометрии так: «Можно ли услышать форму барабана?» (дело в том, что уравнение Лапласа описывает колебания мембраны, а собственные числа оператора Лапласа соответствуют частоте звуковых волн, порождаемых этими колебаниями).

Изучение спектра дифференциальных операторов, действующих в пространствах функций (или векторных полей, дифференциальных форм и других геометрических объектов) на гладких многообразиях — одна из проблем современного функционального анализа, решенная с привлечением средств современной топологии. Прекрасным достижением в этой области является полученное М. Атьей и И. Зингером в 1968 г. решение задачи И. М. Гельфанда о вычислении индекса эллиптического оператора, действующего в сечениях векторного расслоения на многообразии. Формула Атьи — Зингера, связывающая анализ с геометрией и топологией, оказала большое влияние на развитие всех трех областей. Применяется она и в современной математической физике: оказалось, что именно на этом языке строится математическая модель квантовой теории поля.

Еще одно направление функционального анализа получило почти повсеместное приложение. Это — теория обобщенных функций. Понятие обобщенной производной было введено в математику С. Л. Соболевым в 1936 г. Примерно в то же время П. Дирак ввел понятие дельта-функции и ее производной, отражающее физическое представление о точечном заряде и диполе. В 1950 г. вышла монография Л. Шварца, в которой давалось систематическое изложение теории обобщенных функций (распределений) как линейных функционалов на тех или иных пространствах «пробных функций». Эта книга сыграла роль, подобную книге Банаха: обобщенные функции стали рабочим аппаратом. С 1958 г. И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Г. Е. Шилов публикуют серию выпусков книг «Обобщенные функции», в которых систематически излагаются теория обобщенных функций и ее приложения к дифференциальным уравнениям, интегральной геометрии, теории представлений и современной теории чисел. Сейчас обобщенные функции входят в обязательную программу университетского курса для математиков и физиков, хотя всего полвека назад они воспринимались с таким же недоверием, как комплексные числа в эпоху Возрождения.

К предмету функционального анализа часто относят такие классические разделы теории функций, как теорию меры и интеграла Лебега. Эта теория была построена Т. Стилтьесом и А. Лебегом, развивавшим идеи Э. Бореля, и затем была дополнена результатами Дж. Фубини, Дж. Радона и О. Никодима. В окончательной форме она была изложена в 1918 г. в монографии К. Каратеодори. Позже к этой теории были сделаны два существенных с точки зрения функционального анализа добавления: теория интегрирования вектор-функций (сильный интеграл Бохнера и слабый интеграл Гельфанда — Петтиса), а также теория интегрирования в бесконечномерных пространствах. Последняя теория, по существу, была начата уже в работах А. Эйнштейна и М. Смолуховского по теории броуновского движения. В 1923 г. Н. Винер показал, что средние в смысле Эйнштейна — Смолуховского совпадают с интегралами по некоторой мере в пространстве непрерывных функций. Эта мера получила название меры Винера, а математическая модель броуновского движения, построенная с помощью этой меры,— винеровского процесса. В 1942 г. американский физик Р. Фейнман ввел понятие интеграла по траекториям, который сейчас называют интегралом Фейнмана. В отличие от винеровского интеграла, он не является интегралом по «мере Фейнмана» (которую можно определить аналогично мере Винера на цилиндрических множествах, умножая показатель в экспоненте на мнимую единицу; однако эта мера не будет счетно-аддитивной). Строгой математической теории интеграла Фейнмана до сих пор не существует несмотря на все усилия математиков и физиков построить такую теорию.

В 1941 г. И. М. Гельфанд опубликовал статью «Нормированные кольца», с которой началось развитие теории банаховых алгебр — одного из ключевых направлений функционального анализа. Коммутативные банаховы алгебры естественно появляются в теории функций, в спектральной теории самосопряженных операторов, в теории рядов и интегралов Фурье. Понятие максимального идеала и связанное с ним «преобразование Гельфанда» лежит в основе всей этой теории. Среди некоммутативных банаховых алгебр выделяется класс так называемых C^*-алгебр (это алгебры с инволюцией * обладающей свойством $||aa^*|| = ||a||^2$). И. М. Гельфанд и М. А. Наймарн доказали, что C^*-алгебры, и только они, допускают реализацию в виде сильно замкнутых алгебр ограниченных операторов в гильбертовом пространстве с обычной нормой и инволюцией (переход к сопряженному оператору).

Примерно в это же время появляется серия работ Дж. фон Неймана и Ф. Меррея по теории слабо замкнутых симметричных алгебр операторов в гильбертовом пространстве. Эти алгебры получили впоследствии название алгебр Неймана. Среди них выделяются так называемые факторы, т. е. алгебры Неймана, центр которых состоит только из скалярных операторов. Примером фактора является алгебра всех ограниченных операторов — бесконечномерный аналог алгебры матриц. Были обнаружены и другие примеры факторов, не изоморфные приведенному. Долгое время теория факторов не находила применений. (Первоначальная идея Неймана состояла в том, чтобы с помощью теории факторов решить пятую проблему Гильберта об эквивалентности различных определений группы Ли; однако эта проблема решена другим способом.) Лишь недавно обнаружилось, что факторы естественно возникают в аксиоматической теории квантового поля. Это резко повысило интерес к ним и привело к значительному прогрессу в их исследовании.

В работах А. Конна получена почти полная классификация факторов и намечена большая программа их применения в геометрии и теории динамических систем.

Яркие результаты в теории факторов недавно получены молодым американским математиком Ф. Джонсом, обнаружившим, в частности, связь этой теории со старой топологической проблемой классификации узлов в трехмерном пространстве.

Большое место в современном функциональном анализе занимает некоммутативный гармонический анализ, основой которого является теория представлений групп. Целью гармонического анализа является исследование различных математических объектов (функциональных пространств, операторов, уравнений), обладающих той или иной симметрией. Как правило, эту симметрию можно выразить в терминах действия на рассматриваемый объект некоторой группы преобразований. Простейшие объекты — линейные пространства, простейшие преобразования — линейные операторы; поэтому на первый план выступает задача исследования линейных представлений групп, т. е. их реализаций линейными операторами.

Теория конечномерных представлений конечных групп является, по существу, ветвью алгебры. В то же время теория бесконечномерных представлений топологических групп естественно относится к функциональному анализу. Фундаментальные результаты в этой теории были получены советскими математиками.

Наконец, обширную область исследований составляет так называемый нелинейный функциональный анализ. Многие результаты в этой области являются бесконечномерными аналогами теорем обычного анализа. Таковы, например, многочисленные теоремы о неявных функциях, о неподвижных точках, об экстремумах нелинейных функционалов и бифуркациях нелинейных операторов. Среди многочисленных направлений исследований отметим здесь теорию особенностей гладких отображений, в которой ряд сильных результатов получен В. И. Арнольдом.

Все вышесказанное, разумеется, не исчерпывает предмета функционального анализа. Чтобы убедиться в этом, читателю достаточно просмотреть оглавления нескольких выпусков журнала «Функциональный анализ и его приложения», выходящего уже свыше 20 лет.

Возможно, это наилучший способ ответа на вопрос о том, что же такое современный функциональный анализ.

Кириллов

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.— М.: Наука, 1966.
2. Березин Ф. А., Гвишиани А. Д., Горин Е. А., Кириллов А. А. Сборник задач по функциональному анализу.— М.: Изд-во МГУ, 1977.
3. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер.— М.: Наука, 1967.
4. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Меры на отделимых пространствах.— М.: Наука, 1977.
5. Бурбаки Н. Спектральная теория.— М.: Мир, 1972.
6. Бурбаки Н. Теория множеств.— М.: Мир, 1965.
7. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства.— М.: ИЛ, 1959.
8. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике.— М.: Наука, 1976.
9. Владимиров В. С., Михайлов В. П., Вашарин А. А., Каримова Х. Х., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И. Сборник задач по уравнениям математической физики.— М.: Наука, 1974.
10. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции. Вып. 1. Обобщенные функции и действия над ними.— М.: Физматгиз, 1959.
11. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций.— М.: Физматгиз, 1958.
12. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.— М.: Физматгиз, 1958.
13. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Обобщенные функции. Вып. 4. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства.— М.: Физматгиз, 1961.
14. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы: Общая теория.— М.: ИЛ, 1962.
15. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы: Спектральная теория.— М.: Мир, 1966.
16. Иосида К. Функциональный анализ.— М.: Мир, 1967.
17. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.— 2-е изд.— М.: Наука, 1977.
18. Кириллов А. А. Элементы теории представлений.— М.: Наука, 1972; второе издание — 1978.
19. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1977.

20. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. Т. 1, 2.— М.: Наука, 1970.
21. Морен К. Методы гильбертова пространства.— М.: Мир, 1965.
22. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы.— 2-е изд.— М.: Наука, 1969.
23. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы.— 3-е изд.— М.: Наука, 1977.
24. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, вып. 1. Функциональный анализ.— М.: Мир, 1977.
25. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, вып. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность.— М.: Мир, 1978.
26. Рисс Ф., Надь Б. С. Лекции по функциональному анализу.— М.: ИЛ, 1954.
27. Рудин У. Основы математического анализа.— 2-е изд.— М.: Мир, 1976.
28. Рудин У. Функциональный анализ.— М.: Мир, 1975.
29. Халмош П. Теория меры.— М.: ИЛ, 1953.
30. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1.— М.: Наука, 1975.
31. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 2.— М.: Мир, 1975.
32. Шилов Г. Е. Математический анализ: Второй специальный курс.— М.: Физматгиз, 1965.
33. Эдвардс Р. Функциональный анализ.— М.: Мир, 1967.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1*. Александров П. С. Введение в теорию множеств и функций.— М.: Гостехиздат, 1948.
2*. Банах С. Курс функціонального аналізу.— Київ: Радяньска школа, 1948.
3*. Бурбаки Н. Общая топология: Основные структуры.— М.: Наука, 1968.
4*. Бурбаки Н. Общая топология: Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов.— М.: Наука, 1975.
5*. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения.— М.: Физматгиз, 1963.
6*. Винер Н. Нелинейные задачи в теории случайных процессов.— М.: ИЛ, 1961.
7*. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области.— М.: Наука, 1964.
8*. Гвишиани А. Д., Гурвич В. А. Динамические задачи распознавания образов. 1. Условия стабильности для прогноза мест сильных землетрясений // Математическое моделирование интерпретации геофизических данных. Вычислительная сейсмология. Вып. 16.— М.: Наука, 1984.— С. 70—88.
9*. Дэй М. Линейные нормированные пространства.— М.: ИЛ, 1961.
10*. Дьедонне Ж. Основы современного анализа.— М.: Мир, 1964.
11*. Келли Дж. П. Общая топология.— М.: Наука, 1968.
12*. Лебег А. Интегрирование и отыскание примитивных функций.— М.; Л.: ГТТИ, 1934.
13*. Люмис Л. Введение в абстрактный гармонический анализ.— М.: ИЛ, 1956.
14*. Маслов В. П. Операторные методы.— М.: Наука, 1973.
15*. Михлин С. Г. Лекции по интегральным уравнениям.— М.: Физматгиз, 1959.
16*. Пич А. Ядерные локально-выпуклые пространства.— М.: Мир, 1967.
17*. Плеснер А. И. Спектральная теория линейных операторов.— М.: Наука, 1965.
18*. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства.— М.: Мир, 1967.
19*. Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С. Задачи и упражнения по функциональному анализу.— М.: Наука, 1984.
20*. Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств.— М.: Мир, 1966.

21*. Халмош П. Конечномерные векторные пространства.— М.: Физматгиз, 1963.
22*. Шилов Г. Е., Фан Дик Тинь. Интеграл, мера и производная на линейных пространствах.— М.: Наука, 1967.
23*. Эдвардс Р. Теория рядов Фурье.— М.: Мир, 1979.

Распределение литературы по главам

Глава I. [2, 6, 16, 18, 19, 23, 1*, 3*, 8*, 11*, 19*, 20*].
Глава II. [2, 3, 4, 19, 27, 29, 12*, 22*].
Глава III. [1, 2, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 32, 33, 2*, 4*, 8*, 13*, 14*, 15*, 16*, 18*].
Глава IV. [2, 8, 9, 16, 19, 23, 25, 28, 30, 31, 5*, 7*, 23*].
Глава V. [5, 12, 15, 16, 17, 28, 17*].

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbf{C}$ — множество комплексных чисел
$\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел
$\mathbf{Q}$ — множество рациональных чисел
$\mathbf{R}$ — множество вещественных чисел
$\mathbf{Z}$ — множество целых чисел
$\mathbf{Q}_p$ — множество p-адических чисел
$\mathbf{Z}_p$ — множество целых p-адических чисел
Далее три цифры, следующие за символом, означают соответственно номер главы, параграфа и пункта части «Теория», в котором объясняется смысл этого символа

Пространства

$A^2(D)$ (3.5.1) — пространство функций, аналитических в круге D

$B(X)$ (3.4.2) — пространство функций, ограниченных на множестве X

$C(X)$ (3.1.1) — пространство непрерывных функций на множестве X

$C^r(\Omega)$ (3.4.3) — пространство r раз непрерывно дифференцируемых функций в Ω

$\mathscr{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ (3.4.3) — пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций на Ω

$\mathscr{D}'(\Omega)$ (3.4.4) — пространство обобщенных функций

$\mathscr{E}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$ (3.4.3) — пространство бесконечно дифференцируемых функций

$\mathscr{E}'(\Omega)$ (3.4.4) — пространство обобщенных функций с компактным носителем

$\operatorname{End} L = \mathscr{L}(L, L)$

$\mathscr{F}(L_1, L_2)$ (3.3.3) — пространство фредгольмовых операторов, отображающих ЛТП L_1 в ЛТП L_2

H^* (3.5.2) — пространство, эрмитово сопряженное к гильбертову пространству H

$H_1 \oplus H_2$ (3.5.1) — прямая сумма линейных пространств

$H_1 \otimes H_2$ (3.1.4) — тензорное произведение линейных пространств

$\mathscr{K}(L_1, L_2)$ (3.3.2) — пространство компактных операторов, отображающих ЛТП L_1 в ЛТП L_2

$\mathscr{L}(L_1, L_2)$ (3.2.2) — пространство линейных непрерывных отображений из ЛТП L_1 в ЛТП L_2

L' (3.1.2) — пространство, сопряженное к ЛТП L

$L_p(X, \mu)$ (3.4.1) — пространство вещественнозначных функций на множестве X с мерой μ, p-я степень которых μ-суммируема

$L_\infty(X, \mu)$ (3.4.1) — пространство существенно ограниченных функций на X

$l_p(n, K)$ (3.1.1) — n-мерное пространство над полем K с нормой $\|x\|_p$

$l_p(K)$ (3.1.1) — пространство последовательностей над полем K с нормой $\|x\|_p$

(Ω_n, ρ^σ) (1.2) — метрическое пространство Хемминга

$\mathscr{P}[a, b]$ (3.1.1) — пространство многочленов от одного переменного с нормой $\max\limits_{t\in[a,b]} |\mathscr{P}(t)|$

$P(H)$ (5.3) — фазовое пространство квантовомеханической системы

$P(\mathbf{Z})$ (4.2.2) — пространство медленно растущих последовательностей

$P\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$ (4.1.2) — подпространство в $\mathscr{E}(\mathbf{R}^{(n)})$, состоящее из функций, растущих не быстрее многочлена

$S(\mathbf{R}^n)$ (3.4.3) — пространство гладких быстро убывающих функций

$S'(\mathbf{R}^n)$ (3.4.4) — пространство медленно растущих обобщенных функций

$V[a, b]$ (2.1.3) — пространство функций ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$

Сходимости

$A_n \Rightarrow A$, $A = \text{u-lim}\, A_n$ (3.3.1) — равномерная сходимость линейных операторов

$A_n \to A$, $A = \text{s-lim}\, A_n$ (3.3.1) — сильная сходимость операторов

$A_n \rightharpoonup A$, $A = \text{w-lim}\, A_n$ (3.3.1) — слабая сходимость операторов

$f_n \rightrightarrows f$ (2.2.2) — равномерная сходимость функций

$f_n \xrightarrow{\text{п.в.}}$ (2.2.2) — сходимость функций почти всюду

$f_n \xrightarrow{\mu} f$ (2.2.2) — сходимость функций по мере μ

Операторы

A' (3.1.2) — оператор, сопряженный к оператору A

A^* (3.5.2) — оператор, эрмитово сопряженный к оператору A

$A \gg 0$ (3.5.2) — положительный оператор A

$\overline{A}$ (5.1.3) — замыкание оператора A

$A_1 \oplus A_2$ (3.3.3) — прямая сумма операторов A_1 и A_2

$B \supset A$ (5.1.4) — оператор B есть расширение оператора A

$\operatorname{coker} A$ (3.3.3) — коядро оператора A

D_A (3.3.3) — область определения оператора A

∂ (3.4.3) — оператор взятия частной производной

$\mathrm{i}(A)$ (3.3.3) — индекс оператора A

$\operatorname{im} A$ (3.3.3) — образ оператора A

$\ker A$ (3.3.3) — ядро оператора A

$M(f)$ (3.4.5) — оператор умножения на функцию f

$r(A)$ (5.1.2) — спектральный радиус оператора A

$r_\lambda(A)$ (5.1.1) — резольвента оператора A
$\operatorname{rang} A$ (3.3.3) — ранг оператора A
$S(f)$ (4.1.1) — оператор свертки с функцией f
$T(a)$ (4.1.1) — оператор сдвига на a
$\rho(A)$ (5.1.2) — резольвентное множество оператора A
$\sigma(A)$ (5.1.2) — спектр оператора A

Другие обозначения

$A \triangle B$ (2.1.1) — симметрическая разность множеств A и B
$A \bigsqcup B$ $\left(\text{или } \coprod A_i\right)$ (2.1.1) — дизъюнктное объединение множеств;
$\mathring{B}(x, r)\,(B(x, r))$ (3.2.1) — открытый (соотв. замкнутый) шар в метрическом пространстве радиуса r с центром в точке x
$\operatorname{Card} Y$ (2.1.3) — число элементов множества Y
$\operatorname{Cont}(K_1, K_2)$, $\operatorname{Cov}(K_1, K_2)$ (1.3) — категория контравариантных (соотв., ковариантных) функторов из категории K_1 в категорию K_2
$\operatorname{diam} X$ (3.3.2) — диаметр множества X
$\operatorname{ess\,sup} f$ (2.3.1) — существенная верхняя грань функции f
$\widetilde{f}$ (4.2.1) — преобразование Фурье функции f
$f_1 \times f_2$ (3.4.5) — прямое произведение обобщенных функций f_1 и f_2
$f_1 * f_2$ (4.1.1) — свертка функций f_1 и f_2
$\widehat{G}$ (4.2.1) — группа, двойственная к группе G
$K[G]$ (4.1.1) — групповая алгебра группы G
K^0 (1.3) — категория, дуальная к категории K
$L(S, \mu)$ (2.1.2) — совокупность множеств, измеримых по мере μ
$\operatorname{Mor}(A, B)$, $\operatorname{Ob}(K)$ (1.3) — морфизмы и объекты категории K
$P(X)$ (2.1.1) — множество подмножеств X
$Q_A(X)$ (3.5.2) — эрмитова (квадратичная) форма, соответствующая оператору A
$R(S)$ (2.1.1) — кольцо, порожденное семейством множеств S
$R_\sigma(S)$ (2.1.1) — σ-кольцо, порожденное семейством множеств S
$\operatorname{supp} \varphi$ (3.4.3) — носитель функции φ
T^n (4.1.1) — n-мерный тор
$\operatorname{Var}_a^b f$ (2.1.3) — вариация функции f на отрезке $[a, b]$
$X^\perp$ (3.3.3) — ортогональное дополнение к X
$x \perp y$ (3.5.1) — вектор x ортогонален вектору y
$\delta(x)$ (3.4.4) — функция Дирака (дельта-функция)
$\delta_b(x)$ (3.4.5) — сдвинутая дельта-функция
δ_{ij} (3.3.3) — символ Кронекера
$\mu(A)$ (2.1.2) — мера множества A
$\mu^*(A)$ (2.1.2) — верхняя мера множества A
$\nu(A)$ (2.1.2) — заряд
$|\nu|(A)$ (2.1.2) — вариация заряда ν
$\breve{\varphi}(x)$ (4.1.2) — $\breve{\varphi}(x) = \varphi(-x)$
χ_A (2.1.1) — характеристическая функция множества A
$\hbar$ (5.3) — постоянная Планка

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Кириллов Александр Александрович
Гвишиани Алексей Джерменович

ТЕОРЕМЫ И ЗАДАЧИ
ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Редактор *С. А. Смагин*
Художественный редактор *Г. М. Коровина*
Технический редактор *Л. В. Лихачева*
Корректоры: *Г. В. Подвольская, О. М. Березина*

ИБ № 32354

Сдано в набор 20.05.87. Подписано к печати 13.01.88. Формат 84×108/32. Бумага книжно-журнальная. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 21. Усл. кр.-отт. 21. Уч.-изд. л. 24,13. Тираж 14 000 экз. Заказ № 835. Цена 1 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077 Новосибирск, 77, Станиславского, 25