

*А.И.Маркушевич*  
**ТЕОРИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ**  
**ТОМ I. НАЧАЛА ТЕОРИИ**  
**ОГЛАВЛЕНИЕ**

|                                                                                                                           |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Предисловие ко второму изданию                                                                                            | 5   |
| Из предисловия к первому изданию                                                                                          | 5   |
| <i>Глава первая</i>                                                                                                       |     |
| Основные понятия                                                                                                          |     |
| § 1. Предмет теории                                                                                                       | 7   |
| § 2. Комплексные числа                                                                                                    | 12  |
| § 3. Множества и функции. Теория пределов. Непрерывные функции                                                            | 19  |
| § 4. Связность множеств. Кривые и области                                                                                 | 46  |
| § 5. Бесконечность. Стереографическая проекция и расширенная плоскость                                                    | 62  |
| <i>Глава вторая</i>                                                                                                       |     |
| Дифференцируемость и ее геометрический смысл. Элементарные функции                                                        |     |
| § 1. Производная. Условия Даламбера — Эйлера                                                                              | 79  |
| § 2. Геометрический смысл производной. Конформное отображение                                                             | 90  |
| § 3. Многочлены. Показательная функция. Синус и косинус                                                                   | 96  |
| § 4. Рациональные функции. Дробно-линейная функция. Геометрия Лобачевского. Тригонометрические функции                    | 121 |
| § 5. Элементарные многозначные функции                                                                                    | 165 |
| <i>Глава третья</i>                                                                                                       |     |
| Интегралы и степенные ряды                                                                                                |     |
| § 1. Спрямолинейные кривые. Интегралы                                                                                     | 196 |
| § 2. Интегральная теорема Коши                                                                                            | 206 |
| § 3. Интеграл Коши. Формулы Ю. В. Сохоцкого                                                                               | 238 |
| § 4. Ряды функций и бесконечные произведения                                                                              | 258 |
| § 5. Степенные ряды. Связь с рядами Фурье. Разложение аналитической функции в степенной ряд                               | 279 |
| § 6. Единственность. А-точки аналитической функции. Принцип максимума модуля. Особые точки элемента аналитической функции | 302 |
| § 7. Приемы разложения функций в степенной ряд. Поведение' степенного ряда на границе круга сходимости                    | 333 |
| <i>Глава четвертая</i>                                                                                                    |     |
| Различные ряды. Вычеты. Обратные и неявные функции                                                                        |     |
| § 1. Принцип компактности                                                                                                 | 364 |
| § 2. Ряд Лорана. Ряд Дирихле. Теорема Рунге                                                                               | 375 |
| § 3. Изолированные особые точки. Вычеты. Принцип аргумента                                                                | 398 |
| § 4. Приложения теории вычетов к разложению функций в ряды. Интерполирование                                              | 431 |
| § 5. Обратные и неявные функции                                                                                           | 456 |
| Литература                                                                                                                | 479 |

## Предметный указатель

- Абеля вторая теорема 350  
 — первая теорема 283  
 — преобразование 33  
 Абсолютно сходящееся бесконечное  
     произведение 275  
 — сходящийся ряд 30  
 Адамара — Коши неравенство 246  
 — — теорема 279  
 — — формула 280  
 Алгебраическая точка разветвления  
     171  
 — — —, порядок 171  
 Алгебры основная теорема 312  
 Аналитическая функция 7, 86, 299  
 — —, полюс 402  
 — —, существенно особая точка 402  
 — —, элемент 319  
 Анггармоническое отношение 136  
 Аргумент, главное значение 14  
 — комплексного числа 14  
 Аргумента принцип 425  
 Арккосинус 189  
 —, конформное отображение 192  
 Арктангенс 192  
 —, конформное отображение 193  
 А-точка 305  
 Аффикс 13  
 Бернулли лемниската 315  
 — софизм 179  
 — числа 343  
 Бесконечное произведение 273  
 Бесконечно-связная область 56  
 Бесконечность 62  
 Биномиальная формула 302  
 Больцано—Вейерштрасса принцип  
     22  
 Бореля — Гейне лемма 61  
 Вейерштрасса теорема 265  
 — — подготовительная 472  
 Вейерштрасса—Больцано принцип  
     22  
 Вейерштрасса — Сохоцкого —
- Казорати теорема 405  
 Витали теорема 371  
 Внешняя точка 54  
 Внутренняя точка 54  
 Вторая теорема Абеля 350  
 Вычет 416  
 — логарифмический 424  
 Гейне—Бореля лемма 61  
 Геометрический смысл производной  
     90  
 Геометрия Лобачевского 146  
 Гиперболические функции 111  
 Главная часть ряда Лорана 408  
 Главное значение аргумента 14  
 — — интеграла 256  
 — — корня 18  
 — — логарифма 178  
 Гладкая кривая 196  
 Голоморфная функция 86  
 Граница множества 54  
 Граничная точка 54  
 Граничное значение 304  
 Гурвица теорема 426  
 Даламбера признак 31  
 Даламбера—Эйлера уравнения 84  
 Движение Лобачевского 147  
 Двойное отношение 136  
 Двойной ряд 36  
 Действительная ось 13  
 — часть 12  
 Деление степенных рядов 339  
 Дирихле ряд 382  
 Дифференциал 80  
 Дифференцируемая функция 79  
 Длина кривой 196  
 Долгота 66  
 Дробно-линейная функция 93, 126  
 — — —, конформное отображение  
     96  
 Дробно-линейное отображение,  
     круговое свойство 129  
 Единичное отображение 127

- Жорданова кривая 47
  - Жуковского функция 155
- —, конформное отображение 158
- Замкнутая кривая 47
  - область 55
- Замкнутое множество 42, 43
- Замыкание множества 55
- Звено ломаной 48
- Зеркальное отражение 92, 140
- Изолированная особая точка 400
- Инверсия 140
- Интеграл 200
  - , главное значение 256
  - Коши 239
  - типа Коши 241
  - — — несобственный 270
  - Френеля 218
- Интегральная теорема Коши 206, 228
  - формула Коши 239
- Интерполяционный многочлен 445
  - — Лагранжа 449
  - — Ньютона 450
  - — Тейлора 448
  - — Якоби 453
  - ряд Ньютона 450
  - — Якоби 454
- Казорати — Сохоцкого — Вейерштрасса теорема 405
- Кассини овал 315
- Кеплера уравнение 467
- Классический ряд Дирихле 382
- Компактное множество 364
- Комплексная плоскость 13
- Комплексного переменного функция 20
- Комплексное число 12
  - —, аргумент 14
  - —, модуль 14
  - — несобственное 64
  - — собственное 63
  - — сопряженное 15
  - —, тригонометрическая форма 14
- Конечная плоскость 69
  - точка кривой 47
- Конечно-связная область 56
- Континуум 48
- Конформное отображение 74, 92
  - — второго рода 92
- Корень 17, 167
  - , главное значение 18
- Косеканс 161, 441
- Косинус 109
  - , конформное отображение 117
- Котангенс 161, 438
- Коши интеграл 239
  - интегральная теорема 206, 228
  - — формула 239
  - критерий 25
  - неравенство 245, 294
  - признак 31
  - теорема о разложимости в степенной ряд 297
- Коши — Адамара неравенство 246
  - — теорема 279
  - — формула 280
- Коши — Римана условия (уравнения) 84
- Кратная Л-точка 305 ' — точка кривой 47
- Кратный полюс 122, 403
- Кривая гладкая 196
  - , длина 196
  - жорданова 47
  - замкнутая 47
  - кусочно-гладкая 197
  - непрерывная 46
  - неспрямляемая 196
  - спрямляемая 196
  - , уравнение 47
- Критерий
- Коши 25
- Круг сходимости 280
- Круговое кольцо 377
  - свойство дробно-линейного отображения 129
  - — стереографической проекции 67
- Кусочно-гладкая кривая 197

- Лагранжа интерполяционный  
многочлен 449
- ряд 459
- Лапласа преобразование 374
- Лежандра многочлены 462
- Лемниската 314
- Бернулли 315
- Линейная функция 93
- Лиувилля теорема 300
- Лобачевского геометрия 146
- движение 147
- плоскость 146
- прямая 146
- точка 146
- Логарифм 178, 188
- , главное значение 178
- Логарифмическая точка разветвления  
182
- Логарифмический вычет 424
- Локально-аналитическая функция  
387
- Ломаная 48
- Лорана ряд 377
- —, главная часть 408
- —, правильная часть 409
- теорема 379
- Лузина пример 361
- Лузина — Привалова теорема 304
- Максимум модуля принцип 309
- Мероморфная функция 121
- — трансцендентная 161
- Мнимая единица 13
- ось 13
- часть 12
- Мнимое число 13
- Многозначная функция 165
- —, однозначная ветвь 166
- Многолистная функция 167
- Многосвязная область 55
- Многочлен 96
- интерполяционный 445
- , конформное отображение 97
- тригонометрический 162
- Многочлены Лежандра 462
- Множество, граница 54
- замкнутое 42, 43
- , замыкание 55
- компактное 364
- ограниченное 38
- открытое 52
- , предельная точка 37
- равномерно ограниченное 368
- , связная компонента 53
- связное 46
- Модуль комплексного числа 14
- Моногенная функция 79
- Монтеля теорема 368, 398
- Морера теорема 244
- Муавра формула 17
- Начальная точка кривой 47
- Неопределенных коэффициентов  
метод 287
- Непрерывная кривая 46
- функция 41, 72
- Несобственное комплексное число 64
- Несобственный интеграл типа Коши  
270
- Неспрямляемая кривая 196
- Неявная функция 468, 476
- Нормальное семейство  
аналитических функций 370
- Нуль рациональной функции 122
- Ньютона интерполяционный  
многочлен 450
- — ряд 450
- Область 52
- бесконечно-связная 56
- замкнутая 55
- конечно-связная 56
- многосвязная 55
- однолиственности 167
- односвязная 55
- Обобщенно-непрерывная функция 73
- Обратная функция 456
- Обратное отображение 127
- Обратные тригонометрические  
функции 189
- Обращение ряда 457

- Общая показательная функция 186
  - степенная функция 183
- Общий ряд Дирихле 382
- Обыкновенный ряд Дирихле 382
- Овал Кассини 315
- Ограниченная последовательность 22
- Ограниченное множество 38
- Однозначная ветвь многозначной функции 166
- Однолистная функция 167
- Однолистности область 167
- Односвязная область 55
- Окрестность 21, 68
- Основная теорема алгебры 312
- Основной период показательной функции 104
- Особая точка 319
  - — изолированная 400
- Остаточный член 447, 448
- Ось действительная 13
  - — мнимая 13
- Открытое множество 52
- Отображение 127
  - единичное 127
  - конформное 74, 92
  - обратное 127
  - тождественное 127
- Параллельности угол 153
- Первая теорема Абеля 283
- Пикара теорема (большая) 407
- Плоскость комплексная 13
  - конечная 69
  - Лобачевского 146
  - проективная 70
  - расширенная 69
- Подготовительная теорема Вейерштрасса 472
- Подпоследовательность 21
- Подстановка ряда в ряд 337
- Показатель ряда Дирихле 382
- Показательная функция 102, 186
  - —, конформное отображение 107
- Показательная функция, основной период 104
- Полином 96
- Полюс 122, 402
  - , кратность 403
- Порядок рациональной функции 123
  - точки разветвления 171, 182
- Последовательность 21
  - ограниченная 22
  - , предел 22
- Правильная точка 319
  - функция 86
  - часть ряда Лорана 409
- Предел последовательности 22
  - функции 39
- Предельная точка 21, 37
- Преобразование Абеля 33
  - Лапласа 374
- Привалова — Лузина теорема 304
- Признак Даламбера 31
  - Коши 31
- Прингсхейма теорема 326
- Принцип аргумента 425
  - Больцано — Вейерштрасса 22
  - максимума модуля 309
- Проективная плоскость 70
- Проекция стереографическая 65
- Произведение бесконечное 273
- Производная 79
  - , геометрический смысл 90
  - формальная 87
- Простая А-точка 305
- Простой полюс 122, 403
- Прямая Лобачевского 146
- Равномерная непрерывность 43
- Равномерно ограниченное множество 368
  - сходящийся ряд 258
  - — —, теорема Вейерштрасса 265
- Радиальное граничное значение 304
- Радикал 167
- Радиус лемнискаты 314
- Разветвления точка 171
  - — алгебраическая 171
  - — логарифмическая 182
- Разделенная разность 451

Разложение на простейшие дроби 436  
Разность разделенная 451  
Расходящееся бесконечное  
    произведение 273  
Расходящийся ряд 30  
Расширенная плоскость 69  
Рациональная функция 121  
— —, конформное отображение 124  
— —, нуль 122  
Рациональная функция, полюс 122  
— —, порядок 123  
Регулярная точка 319  
— функция 86  
Рельеф 113  
Римана — Коши условия (уравнения)  
    84  
Рунге теорема 390  
Руше теорема 425  
Ряд 29  
— двойной 36  
— Дирихле 382  
— Лагранжа 459  
— Лорана 377  
— Ньютона интерполяционный 450  
—, обращение 457  
— равномерно сходящийся 258  
— расходящийся 30  
— степенной 279  
— сумма 29  
— сходящийся 29  
—, — абсолютно 30  
— Тейлора 284  
—, частичная сумма 29  
— Якоби интерполяционный 454  
Связная компонента 53  
Связное множество 46  
Секанс 161, 437  
Симметрия 140  
Синус 109  
—, рельеф 113  
Собственное комплексное число 63  
Сопряженные комплексные числа 15  
Софизм Бернулли 179  
Сохоцкого формулы 256

Сохоцкого — Казорати —  
    Вейерштрасса теорема 405  
Спряжляемая кривая 196  
Степенная функция 89, 183  
Степенной ряд 279  
— — деление 339  
— — круг сходимости 280  
— — неравенства Коши для  
    коэффициентов 294  
— — пример Лузина 361  
— — теорема единственности 285  
— — — — внутренняя 303  
— — — Коши о разложимости 297  
Степень 19  
—, конформное отображение 100  
Стереографическая проекция 65  
— —, круговое свойство 67  
Сумма ряда 29  
Существенно особая точка 402  
Сходимости круг 280  
Сходящаяся последовательность 23  
Сходящееся бесконечное  
    произведение 273, 275  
Сходящийся ряд 29  
— — абсолютно 30  
— — равномерно 258  
Тангенс 161, 164, 442  
—, конформное отображение 165  
Таубера теорема 355  
Тейлора интерполяционный  
    многочлен 448  
— ряд 284  
Тождественное отображение 127  
Точка внешняя 54  
— внутренняя 54  
— граничная 54  
— кривой 46  
— — конечная 47  
— — кратная 47  
— — начальная 47  
— Лобачевского 146  
— особая 319  
— — изолированная 400  
— правильная 319

- разветвления 171
- — алгебраическая 171
- — бесконечного порядка 182
- — конечного порядка 171
- — логарифмическая 182
- регулярная 319
- существенно особая 402
- Трансцендентная целая функция 102
- Трансцендентные мероморфные функции 161
- Тригонометрическая форма комплексного числа 14
- Тригонометрические функции 109, 161
- Тригонометрический многочлен 162
- Угловое граничное значение 304
- Угол параллельности 153
- Фату теорема 357
- Фокусы лемнискаты 314
- Формальная производная 87
- Френеля интеграл 218
- Функции гиперболические 111
- обратные тригонометрические 189
- трансцендентные мероморфные 161
- тригонометрические 109, 161
- Функция аналитическая 7, 86, 299
- голоморфная 86
- дифференцируемая 79
- дробно-линейная 93, 126
- Жуковского 155
- комплексного переменного 20
- — —, бесконечность 62
- логарифмическая 178, 188
- локально-аналитическая 387
- мероморфная 121
- многозначная 165
- многолистная 167
- моногенная 79
- непрерывная 41, 72
- неявная 468, 476
- обобщенно-непрерывная 73
- обратная 456
- однолистная 167
- показательная 102, 186
- правильная 86
- , предел 39
- , равномерная непрерывность 43
- рациональная 121
- регулярная 86
- степенная 89, 183
- целая 96
- — линейная 93
- — трансцендентная 102
- Целая линейная функция 93
- трансцендентная функция 102
- функция 96
- Частичная сумма ряда 29
- Числа Бернулли 343
- Эйлера 348
- Число комплексное 12
- мнимое 18
- чисто мнимое 13
- Шварца лемма 317
- Широта 66
- Эйлера формула 11, 109
- Эйлера — Даламбера уравнения 84
- Эйлеровы числа 348
- Элемент (аналитической функции) 319
- Эрмита формула 447
- Якоби интерполяционный многочлен 453
- — ряд 454

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                  |   |
|----------------------------------|---|
| Предисловие ко второму изданию   | 5 |
| Из предисловия к первому изданию | 5 |

### *Глава первая*

#### **Основные понятия**

|                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------|----|
| § 1. Предмет теории                                                    | 7  |
| § 2. Комплексные числа                                                 | 12 |
| § 3. Множества и функции. Теория пределов. Непрерывные функции         |    |
| § 4. Связность множеств. Кривые и области                              | 46 |
| § 5. Бесконечность. Стереографическая проекция и расширенная плоскость | 62 |

### *Глава вторая*

#### **Дифференцируемость и ее геометрический смысл. Элементарные функции**

|                                                                                                        |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 1. Производная. Условия Даламбера — Эйлера                                                           | 79  |
| § 2. Геометрический смысл производной. Конформное отображение                                          | 90  |
| § 3. Многочлены. Показательная функция. Синус и косинус                                                | 96  |
| § 4. Рациональные функции. Дробно-линейная функция. Геометрия Лобачевского. Тригонометрические функции | 121 |
| § 5. Элементарные многозначные функции                                                                 | 165 |

### *Глава третья*

#### **Интегралы и степенные ряды**

|                                                                                             |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 1. Спрямолинейные кривые. Интегралы                                                       | 196 |
| § 2. Интегральная теорема Коши                                                              | 206 |
| § 3. Интеграл Коши. Формулы Ю. В. Сохоцкого                                                 | 238 |
| § 4. Ряды функций и бесконечные произведения                                                | 258 |
| § 5. Степенные ряды. Связь с рядами Фурье. Разложение аналитической функции в степенной ряд | 279 |



|                                                                                                                           |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 6. Единственность. А-точки аналитической функции. Принцип максимума модуля. Особые точки элемента аналитической функции | 302 |
| § 7. Приемы разложения функций в степенной ряд. Поведение степенного ряда на границе круга сходимости                     | 333 |

#### *Глава четвертая*

##### **Различные ряды. Вычеты. Обратные и неявные функции**

|                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 1. Принцип компактности                                                    | 364 |
| § 2. Ряд Лорана. Ряд Дирихле. Теорема Рунге                                  | 375 |
| § 3. Изолированные особые точки. Вычеты. Принцип аргумента                   | 398 |
| § 4. Приложения теории вычетов к разложению функций в ряды. Интерполирование | 431 |
| § 5. Обратные и неявные функции                                              | 456 |
| Литература                                                                   | 479 |
| Предметный указатель                                                         | 482 |

## ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Второе издание «Теории аналитических функций», впервые опубликованной в 1950 г., выходит в двух томах. Книга сохраняет свой прежний характер — весьма обстоятельного руководства по теории аналитических функций одного комплексного переменного, доступного для читателя, владеющего математикой в объеме первых двух курсов физико-математического факультата университета или педагогического института. В новом издании исправлены опечатки и описки, вкравшиеся в текст первого издания, а также внесены изменения, улучшающие изложение отдельных вопросов.

*Автор*

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Эта книга составилась из лекций, которые автор в течение ряда лет читал студентам механико-математического факультата Московского университета. Она включает материал основного курса теории аналитических функций, краткое изложение теории эллиптических функций и дополнительные главы теории аналитических функций, содержащие принцип компактности, вопросы конформного отображения, приближения и интерполирования, элементы теории целых функций, понятие римановой поверхности и теорию аналитического продолжения.

Весь этот материал объединен и расположен в книге в систематическом порядке, причем параграфы и пункты, содержание которых не входит в программу основного курса, набраны петитом. При первом чтении их можно опускать. В целом книга ведет читателя несколько дальше, чем это делается в основном университетском курсе. Автор, как правило, доводит свое изложение до того места, где за него будут говорить специальные сочинения, имеющиеся на русском языке. Совсем не затронуты в книге вопросы, требующие для своего изложения теории меры и интеграла (Лебега). Относительно этих вопросов автор отсылает читателя к монографии

И. И. Привалова «Граничные свойства однозначных аналитических функций» и к специальным работам. Не вошли в книгу теория гармонической меры и общая теория мероморфных функций, которым посвящена монография Р. Неванлинны «Однозначные аналитические функции». Не нашлось места и для систематического изучения аналитических функций на римановых поверхностях, что должно стать предметом особой монографии. Читатель найдет изложение этих вопросов в книгах: Р. Курант, «Геометрическая теория функций» и Н. Г. Чеботарев, «Теория алгебраических функций».

Не останавливаясь на особенностях построения книги, которые отчасти видны из прилагаемого оглавления, отметим только, что автор полностью отказался от обычного в учебниках ознакомления с понятием римановой поверхности на отдельных примерах и излагает его, опираясь на несколько абстрактную, но, по-видимому, неизбежную в этих вопросах концепцию Г. Вейля. Для характеристики этой концепции вводится термин «абстрактная риманова поверхность». Наряду с ней рассматривается более специальное, но вместе с тем и более важное для теории функций понятие «римановой поверхности в собственном смысле слова», задаваемой как накрывающая поверхность сферы. Принятая автором точка зрения приводит к тому, что знакомство с римановой поверхностью отодвигается на конец курса. Это не должно мешать элементарным многозначным функциям и их точкам разветвления занимать подобающее им место в предшествующих главах курса. Здесь используется тот факт, что риманова поверхность функции, обратной по отношению к мероморфной, может быть представлена в виде однолистной области, разбитой тем или иным способом на подобласти, допускающие выделение в них однозначных ветвей.

# Глава первая

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

### § 1. Предмет теории

**1.1.** Математическая дисциплина, излагаемая в этой книге, имеет два наименования: теория аналитических функций и теория функций комплексного переменного. Каждое из них оправдано существом дела.

Функция действительного переменного, определенная в некотором интервале  $(a, b)$ , называется аналитической в точке  $x_0$  этого интервала, если в некоторой окрестности точки  $x_0$  ее можно представить в виде суммы сходящегося степенного ряда, расположенного по степеням  $x - x_0$ :

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

Функция, аналитическая в каждой точке интервала, называется аналитической в этом интервале. Все элементарные функции, изучаемые в анализе, являются аналитическими в области их определения всюду, за исключением, быть может, отдельных точек. Так, например, многочлен  $P_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$ , показательная функция  $e^x$ , тригонометрические функции ( $\sin x$  и  $\cos x$ ) являются всюду аналитическими, так как для любого  $x_0$  имеют место разложения:

$$P_m(x) = P_m(x_0) + \frac{P'_m(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{P_m^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m,$$

$$e^x = e^{x_0} + \frac{e^{x_0}}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{e^{x_0}}{n!}(x - x_0)^n + \dots,$$

$$\sin x = \sin x_0 + \frac{\cos x_0}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{\sin\left(x_0 + n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}(x - x_0)^n +$$

$$\cos x = \cos x_0 - \frac{\sin x_0}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{\cos\left(x_0 + n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}(x - x_0)^n + \dots;$$

функция  $\frac{1}{a-x}$  — аналитическая при  $x \neq a$ , так как

$$\begin{aligned}\frac{1}{a-x} &= \frac{1}{a-x_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{x-x_0}{a-x_0}} = \\ &= \frac{1}{a-x_0} - \frac{1}{(a-x_0)^2} (x-x_0) + \dots + \frac{1}{(a-x_0)^{n+1}} (x-x_0)^n + \dots,\end{aligned}$$

если  $x_0 \neq a$  и  $\left| \frac{x-x_0}{a-x_0} \right| < 1$ ; функция  $\sqrt[3]{x}$  является аналитической при  $x \neq 0$ , так как

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x} &= x_0^{\frac{1}{3}} \left( 1 + \frac{x-x_0}{x_0} \right)^{\frac{1}{3}} = \\ &= x_0^{\frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{3}}{x_0^{\frac{2}{3}}} (x-x_0) + \dots + \frac{\frac{1}{3} \left( \frac{1}{3}-1 \right) \dots \left( \frac{1}{3}-n+1 \right)}{n! \cdot x_0^{n-\frac{1}{3}}} (x-x_0)^n + \dots,\end{aligned}$$

если  $x_0 \neq 0$  и  $\left| \frac{x-x_0}{x_0} \right| < 1$ ; функция  $\ln x$  — аналитическая во всей области своего определения, так как

$$\begin{aligned}\ln x &= \ln x_0 + \ln \left( 1 + \frac{x-x_0}{x_0} \right) = \ln x_0 + \frac{1}{x_0} (x-x_0) - \\ &\quad - \frac{1}{2x_0^2} (x-x_0)^2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{nx_0^n} (x-x_0)^n + \dots,\end{aligned}$$

если  $x_0 > 0$  и  $\left| \frac{x-x_0}{x_0} \right| < 1$ , и т. д.

Опираясь на то, что результат основных алгебраических или аналитических операций (сложения, вычитания, умножения, деления, дифференцирования и интегрирования), произведенных над степенными рядами, вообще \*) выражается также сходящимся степенным рядом, можно уже составить себе представление об обширности и важности класса аналитических функций. На самом деле значение его еще больше, так как, например, аналитические функции от аналитических, функции, обратные аналитическим, функции, удовлетворяющие уравнению вида

$$P_0(x) + P_1(x)f(x) + \dots + P_n(x)[f(x)]^n = 0$$

---

\*) Исключением в случае деления служат лишь отдельные точки, в которых делитель обращается в нуль.

(алгебраическое уравнение степени  $n$  относительно  $f(x)$ ) или уравнению вида

$$p_0(x)f(x) + p_1(x)\frac{df(x)}{dx} + \dots + p_n(x)\frac{d^n f(x)}{dx^n} = q(x)$$

(линейное дифференциальное уравнение порядка  $n$  относительно  $f(x)$ ), где  $p_0(x), \dots, p_n(x), q(x)$  — аналитические функции, являются аналитическими в соответствующих интервалах.

Неудивительно, таким образом, что все важнейшие классы функций, встречающиеся в классическом анализе и его приложениях к задачам механики и физики, являются аналитическими всюду, за исключением отдельных особых точек этих функций.

Отсюда вытекает чрезвычайная важность специального изучения общих свойств аналитических функций.

1.2. При всей обширности класса аналитических функций он составляет лишь правильную часть класса бесконечно дифференцируемых функций (т. е. функций, обладающих производными любого порядка). Мы докажем здесь следующее предложение: *функция  $f(x)$ , определенная в окрестности точки  $x_0$ , является аналитической в этой точке тогда и только тогда, когда: 1) она бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности этой точки и 2) существуют положительные числа  $\delta$  и  $M$ , такие, что для любого  $x$  из интервала  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  и для любого натурального  $k$  справедливы неравенства*

$$|f^{(k)}(x)| < M \frac{k!}{\delta^k} \quad (1.2:1)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Условия необходимы. Действительно, если  $f(x)$  — аналитическая в точке  $x_0$ , то тогда в некотором интервале  $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$  она представляется степенным рядом

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots \quad (1.2:2)$$

который, как известно из анализа, допускает почленное дифференцирование любое число раз, так что существуют производные любого порядка  $k$ , выражаемые также степенными рядами, а именно:

$$f^{(k)}(x) = k! a_k + \frac{(k+1)! a_{k+1}}{1!} (x - x_0) + \frac{(k+2)! a_{k+2}}{2!} (x - x_0)^2 + \dots \quad (1.2:3)$$

( $|x - x_0| < \rho$ ). Фиксируем  $\delta$  так, чтобы было:  $0 < 2\delta < \rho$ . Тогда ряд (1.2:2) будет сходиться при  $x = x_0 + 2\delta$ ; следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n (2\delta)^n = 0$ , откуда вытекает, что последовательность  $\{a_n (2\delta)^n\}$  ограничена, т. е.

$$|a_n (2\delta)^n| < M' \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.2:4)$$

Оценим теперь  $|f^{(k)}(x)|$  в интервале  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ; используя (1.2:3) и неравенства (1.2:4), получим:

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(x)| &\leq k! |a_k| + \frac{(k+1)! |a_{k+1}|}{1!} \delta + \frac{(k+2)! |a_{k+2}|}{2!} \delta^2 + \dots < \\ &< k! \frac{M'}{(2\delta)^k} + \frac{(k+1)!}{1!} \cdot \frac{M'}{(2\delta)^{k+1}} \delta + \frac{(k+2)!}{2!} \cdot \frac{M'}{(2\delta)^{k+2}} \delta^2 + \dots = \\ &= \frac{k! M'}{2^k \delta^k} \left[ 1 + \frac{k+1}{1!} \cdot \frac{1}{2} + \frac{(k+1)(k+2)}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} + \dots \right] = \\ &= \frac{k! M'}{2^k \delta^k} \left( 1 - \frac{1}{2} \right)^{-(k+1)} = 2M' \cdot \frac{k!}{\delta^k}. \end{aligned}$$

Здесь остается лишь положить  $2M' = M$ , чтобы получить неравенства (1.2:1).

Докажем достаточность условий теоремы. Пусть  $f(x)$  — функция, бесконечно дифференцируемая в интервале  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , причем в нем выполняются неравенства (1.2:1). Запишем  $f(x)$  по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} + \\ + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (1.2:5) \end{aligned}$$

Имеем:

$$\left| \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \right| |x - x_0|^n < \frac{Mn!}{\delta^n \cdot n!} |x - x_0|^n = M \left( \frac{|x - x_0|}{\delta} \right)^n$$

и, следовательно, остаточный член стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , если  $|x - x_0| < \delta$ . Отсюда и вытекает, что в интервале  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  функция  $f(x)$  представляется в виде суммы степенного ряда:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \dots,$$

т. е. является аналитической в точке  $x_0$ .

Установленный этой теоремой критерий аналитичности не оставляет желать лучшего в смысле его полной определенности и законченности. Однако он мало удобен как в приложениях, так и в теоретических вопросах, ибо основывается на знании поведения производных любого порядка в некоторой окрестности данной точки (неравенства (1.2:1)).

1.3. Коши принадлежит заслуга развития основ общей теории аналитических функций путем выхода в область комплексного переменного. Для аналитических функций такой выход совершается

естественно и просто. Нужно только распространить основные положения теории пределов на область комплексных чисел и заметить, что ряд

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n +$$

сходящийся при всех значениях действительного переменного  $x$ , удовлетворяющих условию  $|x - x_0| < \rho$ , продолжает сходиться и при всех значениях комплексного переменного  $z = x + iy$ , удовлетворяющих условию  $|z - x_0| < \rho$ , и определяет, таким образом, некоторую функцию комплексного переменного  $z$ , которую можно рассматривать как *продолжение* (или распространение) аналитической функции действительного переменного в область комплексных чисел. Подобного рода продолжения применялись издавна. Они хорошо известны из алгебры для случая многочленов, где, впрочем, не требуется рассматривать вопросы сходимости, а достаточно установить правила алгебраических операций над комплексными числами, и из курса анализа, например, для случая показательной функции  $e^x$ , где подобным путем выводится классическая формула Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Упомянутая выше историческая заслуга Коши состоит не в том, что он начал подставлять комплексное переменное  $z$  вместо действительного переменного  $x$  в степенные ряды. Это делали и до него в восемнадцатом веке. Его заслуга заключалась в том, что он заложил основы систематической теории функций комплексного переменного, построенной по образцу основ теории функций действительного переменного (мы имеем в виду здесь классический анализ) и включающей в себя теорию пределов, понятия непрерывности, производной, интеграла и теорию рядов. При этом построении выяснился тот основной факт, что понятие функции комплексного переменного, аналитической в области  $G$ , т. е. функции, допускающей представление вида

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots \quad (1.3:1)$$

в некоторой окрестности каждой точки  $z_0$  области (все фигурирующие здесь числа комплексные и в частном случае действительные), полностью совпадает с понятием функции, дифференцируемой в той же области. Одно влечет за собой другое, и наличие первой производной у функции  $f(z)$  влечет за собой ее разложимость в степенной ряд. Мы видели в п. 1.2, насколько сложнее зависимость между дифференцируемостью функции и ее аналитичностью, если ограничиваться одними лишь действительными значениями независимого переменного. Выход в комплексную плоскость имеет и многие другие преимущества перед изучением функций в одной лишь



действительной области. Здесь обнаруживается, в частности, что свойства аналитичности можно очень просто характеризовать и путем рассмотрения интеграла от комплексной функции  $f(z)$  и путем изучения ее разложения в ряды по произвольным многочленам и т. п.

Это многообразие свойств и простые соотношения между ними и служат истинным фундаментом общей теории аналитических функций комплексного переменного, которую часто называют также просто теорией функций комплексного переменного. Разумеется, выводы, полученные относительно аналитических функций комплексного переменного, освещают, в частности, и вопросы, касающиеся аналитических функций действительного переменного, в которые первые функции превращаются, когда числа  $a_0, \dots, a_n, \dots, z_0$  в выражении (1.3 : 1) являются действительными и переменному  $z$  придаются действительные значения.

Настоящий курс посвящен теории аналитических функций комплексного переменного.

## § 2. Комплексные числа

2.1. Комплексные числа, их геометрическое представление и операции над ними предполагаются известными из курса алгебры \*). Для удобства читателя мы дадим здесь сводку основных определений и фактов, относящихся к комплексным числам.

Каждое комплексное число имеет вид  $a + bi$ , где  $a$  и  $b$  — действительные числа. Первое из них называется действительной, а второе — мнимой частью комплексного числа. Обозначая  $a + bi$  через  $c$ , мы будем писать:

$$a = \operatorname{Re} c \quad \text{и} \quad b = \operatorname{Im} c,$$

где  $\operatorname{Re}$  — начальные буквы латинского слова *realis* (действительный), а  $\operatorname{Im}$  — начальные буквы слова *imaginiarius* (мнимый). Два комплексных числа считаются равными тогда и только тогда, когда порознь равны их действительные и мнимые части. Комплексное число с мнимой частью, равной нулю:  $c = a + 0 \cdot i$ , записывается так:  $c = a$  и отождествляется с действительным числом  $a$ . В частности, число  $0 + 0 \cdot i$  отождествляется с нулем. Таким образом, действительные числа представляют частный случай комплексных. Комплексное число с действительной частью, равной нулю:  $c = 0 + b \cdot i$ , записывается в виде  $c = bi$ . Если и  $b = 0$ , то  $c$  по-предыдущему равно нулю ( $a = b = 0$ ). Если же  $b \neq 0$ , то  $c$  называется ч и с т о м н и м

\*) А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, изд. 8, М., «Наука», 1965, гл. IV.

мым. В частности, при  $b = 1$  получается мнимая единица:  $1 \cdot i = i$ . Вообще комплексное число  $a + bi$  называется мнимым, если его мнимая часть отлична от нуля. Таким образом, чисто мнимое число является частным случаем мнимого (соответствующим равной нулю действительной части).

Комплексные числа образуют поле. Это означает, что для них определены операции сложения и умножения, подчиняющиеся коммутативному, ассоциативному и дистрибутивному (для умножения относительно сложения) законам, причем для сложения существует обратная операция: вычитание, а для умножения — обратная операция: деление. Иными словами, уравнения  $a + x = b$  и  $a \cdot x = b$  всегда имеют решение относительно неизвестного  $x$  (последнее — при дополнительном условии, что  $a \neq 0$ ).

Нулем и единицей поля комплексных чисел являются соответственно действительные числа 0 и 1. С точки зрения операций в поле комплексных чисел, каждое чисто мнимое число  $bi$  может быть истолковано как произведение действительного числа  $b$  на мнимую единицу  $i$  и каждое комплексное число  $a + bi$  как сумма действительного числа  $a$  с чисто мнимым  $bi$ .

2.2. Для геометрического изображения комплексных чисел проще всего воспользоваться точками или векторами плоскости, в которой выбрана какая-либо декартова прямоугольная система координат. В качестве геометрического образа комплексного числа  $z = a + bi$  можно с одинаковым удобством пользоваться точкой с абсциссой  $a$  и ординатой  $b$  (число  $a + bi$  называется тогда *аффиксом* этой точки, от латинского *affixus* — прикрепленный к чему-нибудь) или вектором с проекцией  $a$  на ось абсцисс и проекцией  $b$  на ось ординат.

Употребляя геометрический язык, можно говорить тогда о точке или о векторе, вместо того чтобы говорить о соответствующем комплексном числе.

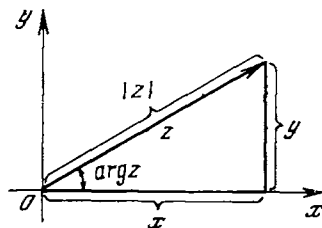


Рис. 1.

Сохраняя за абсциссой и ординатой точки привычные обозначения  $x$  и  $y$ , мы будем записывать комплексные числа чаще всего в виде  $z = x + iy$ . Плоскость, точки (или векторы) которой используются для геометрического представления комплексных чисел, будем называть *комплексной плоскостью* или  *$z$ -плоскостью*, ось абсцисс — *действительной осью*, а ось ординат — *мнимой осью*. Очевидно, что действительные числа изображаются точками действительной оси (или векторами, параллельными ей), чисто мнимые числа — точками мнимой оси (или векторами, параллельными ей), а вообще мнимые

числа — точками, не лежащими на действительной оси (или векторами, не параллельными ей). Если мнимое число отлично от нуля, то изображающая его точка отлична от начала координат. В этом случае для ее определения можно пользоваться наряду с декартовыми координатами  $x$  и  $y$  также и полярными — радиусом-вектором  $r > 0$  и полярным углом  $\Phi$  (определяемым только с точностью до произвольного целого кратного  $2\pi$ ).

По отношению к аффиксу точки  $z = x + iy$  эти числа называются соответственно м о д у л е м и а р г у м е н т о м и обозначаются следующим образом:

$$r = |z|, \quad \Phi = \operatorname{Arg} z.$$

Для  $z = 0$  модуль равен 0, тогда как аргумент не определен (не имеет смысла).

Так как, очевидно,

$$x = r \cos \Phi \quad \text{и} \quad y = r \sin \Phi,$$

то

$$z = x + iy = r(\cos \Phi + i \sin \Phi).$$

Мы получили выражение комплексного числа в полярных координатах (или, как иногда говорят, т р и г о н о м е т р и ч е с к у ю ф о р м у комплексного числа). Понятно, что модуль комплексного числа есть в то же время длина вектора, представляющего это число, а аргумент — угол между этим вектором и положительным направлением действительной оси (определяемый, как всегда, с точностью до целого кратного  $2\pi$ ).

Среди значений аргумента числа  $z \neq 0$  существует одно и только одно, заключенное между  $-\pi$  и  $+\pi$  (быть может, включая последнее значение). Оно называется г л а в н ы м з н а ч е н и е м а р г у м е н т а и обозначается  $\arg z$ . Итак,

$$-\pi < \arg z \leq \pi$$

и

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2n\pi,$$

где  $n$  пробегает все целые числа ( $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Отметим соотношения

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\operatorname{tg}(\arg z) = \frac{y}{x}$$

Из последнего можно заключить, что  $\arg z$  совпадает с одним из значений  $\operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$ . Обозначая главное значение  $\operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$ , т. е. значение, заключенное между  $-\frac{\pi}{2}$  и  $\frac{\pi}{2}$  (быть может, включая

последнее), через  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ , будем иметь:

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \text{если } x > 0,$$

$$\arg z = \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \text{если } x < 0, y \geq 0,$$

$$\arg z = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad \text{если } x < 0, y < 0,$$

$$\arg z = \frac{\pi}{2}, \quad \text{если } x = 0, y > 0,$$

$$\arg z = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{если } x = 0, y < 0.$$

Комплексные числа  $x + iy$  и  $x - iy$  называются сопряженными (взаимно). Они изображаются точками, симметричными относительно действительной оси, и равны между собой только тогда, когда являются действительными числами. Если  $x + iy = z$ , то число, сопряженное с ним, обозначается через  $\bar{z}$ :  $x - iy = \bar{z}$ .

Так как сопряженное с  $x - iy$  есть  $x + iy$ , то  $\overline{(\bar{z})} = z$ .

Из самого определения сопряженных чисел следует, что модули их равны, а значения аргумента получаются друг из друга путем перемены знака, т. е. противоположны. Заметим, впрочем, что если  $z = x < 0$ , то  $\bar{z} = x < 0$  и главные значения аргументов чисел  $z$  и  $\bar{z}$  равны между собой:

$$\arg z = \arg \bar{z} = \pi.$$

**2.3.** Операции над комплексными числами производятся по следующим правилам:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

откуда получаются правила для обратных операций:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (x_2^2 + y_2^2 \neq 0).$$

Если комплексные числа  $z_1$  и  $z_2$  представить в полярных координатах

$$z_1 = r_1 (\cos \Phi_1 + i \sin \Phi_1), \quad z_2 = r_2 (\cos \Phi_2 + i \sin \Phi_2),$$

то правила для умножения и деления приведут к следующим результатам:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos (\Phi_1 + \Phi_2) + i \sin (\Phi_1 + \Phi_2)],$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\Phi_1 - \Phi_2) + i \sin (\Phi_1 - \Phi_2)] \quad (r_2 \neq 0),$$

т. е. при умножении двух комплексных чисел их модули перемножаются и аргументы складываются, тогда как при делении модули делятся и аргументы вычитаются.

Все эти операции имеют простой геометрический смысл. Именно, изображая  $z_1$  и  $z_2$  векторами комплексной плоскости, заключаем, что сумма  $z_1 + z_2$  изображается диагональю параллелограмма, построенного на векторах  $z_1$  и  $z_2$ . Для геометрического изображения разности удобнее представить  $z_1$  и  $z_2$  в виде точек (или, что сводится к тому же самому, в виде векторов, исходящих из начала координат). Тогда разность  $z_1 - z_2$  изобразится вектором, начало которого есть точка  $z_2$  и конец — точка  $z_1$ . Отсюда следует, что модуль разности  $|z_1 - z_2|$  равен расстоянию между точками  $z_1$  и  $z_2$  — замечание, которым весьма часто пользуются. В частности, уравнение  $|z - z_0| = \rho$  изображает окружность с центром  $z_0$  и радиусом  $\rho$ , а неравенство  $|z - z_0| < \rho$  — внутренность этой окружности.

Сумма нескольких комплексных чисел изображается вектором, представляющим собой замыкающую сторону многоугольника, построенного на векторах, изображающих слагаемые.

С помощью указанного геометрического смысла операций сложения и вычитания (или же непосредственно, т. е. чисто алгебраически) устанавливаются важные неравенства, позволяющие оценивать модуль суммы или модуль разности комплексных чисел. А именно:

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|,$$

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

Знак равенства в каждом из этих неравенств достигается тогда и только тогда, когда аргументы комплексных чисел  $z_1, z_2, \dots, z_n$  равны между собой, т. е. когда соответствующие векторы параллельны одной и той же прямой и направлены в одну и ту же сторону.

Заметим здесь, что для выражения модуля суммы нескольких комплексных чисел через эти числа весьма часто поступают следующим образом. Из правила умножения комплексных чисел следует, что  $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$ , т. е.  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  (\*). Полагая  $z = z_1 + z_2 + \dots + z_n$  и замечая, что тогда  $\bar{z} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n$ , находим:

$$|z| = |z_1 + z_2 + \dots + z_n| = \sqrt{(z_1 + z_2 + \dots + z_n)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n)}.$$

---

\*) Через  $\sqrt[n]{r}$  мы обозначаем положительное значение корня степени  $n$  из положительного числа  $r$ , т. е. арифметическое значение корня.

Это и есть нужный результат.

Геометрический смысл умножения немедленно обнаруживается из сформулированного выше правила. Именно, вектор, изображающий произведение  $z_1 z_2$ , получается из вектора  $z_1$  путем поворота на угол, равный  $\text{Arg } z_2$  (т. е. равный одному из значений  $\text{Arg } z_2$ ), и растяжения, т. е. изменения длины в  $|z_2|$  раз. В частности, умножению на комплексное число  $z_2$  с модулем, равным единице:

$$z_2 = \cos \Phi_2 + i \sin \Phi_2,$$

соответствует только поворот вектора  $z_1$  около начала координат на угол  $\Phi_2$ .

Аналогично истолковывается геометрический смысл деления. Из правил вычитания и деления немедленно вытекает, что угол, под которым из некоторой точки  $z_0$  видна пара точек  $z_1$  и  $z_2$ , равен (с точностью до целого кратного  $2\pi$ ) аргументу частного разностей  $z_1 - z_0$  и  $z_2 - z_0$

$$\text{Arg} \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0}$$

Мы здесь приняли  $z_1 - z_0$  в качестве делимого, а  $z_2 - z_0$  в качестве делителя. Это соответствует тому, что угол с вершиной в точке  $z_0$  отсчитывается от вектора  $z_2 - z_0$  до вектора  $z_1 - z_0$  в направлении против часовой стрелки.

Остановимся, наконец, на операциях возвышения в степень и извлечения корня. Как обычно, степенью комплексного числа  $z$  с натуральным показателем  $n$  называется произведение  $n$  множителей, каждый из которых равен  $z$ .

Если

$$z = r (\cos \Phi + i \sin \Phi),$$

то отсюда следует, что

$$z^n = r^n (\cos n\Phi + i \sin n\Phi);$$

при  $r = 1$  получаем:

$$(\cos \Phi + i \sin \Phi)^n = \cos n\Phi + i \sin n\Phi$$

—формула Муавра.

Читатель может легко убедиться в том, что правило для возвышения в степень (в частности, формула Муавра) сохраняет силу и для любого целого показателя  $m$ , если положить

$$z^0 = 1 \quad \text{и} \quad z^{-m} = \frac{1}{z^m}.$$

Корнем  $\sqrt[n]{z}$  степени  $n$  ( $n$  — натуральное число) из комплексного числа  $z$  называется любое комплексное число  $\zeta$ , удовлетво-

ряющее уравнению

$$\zeta^n = z.$$

Если  $z = 0$ , то  $\zeta = 0$ . Если же  $z \neq 0$ , то, полагая  $z = r(\cos \Phi + i \sin \Phi)$  и  $\zeta = \rho(\cos A + i \sin A)$ , получаем:

$$\rho^n (\cos nA + i \sin nA) = r(\cos \Phi + i \sin \Phi),$$

откуда

$$\rho^n = r, \quad \rho = \sqrt[n]{r}$$

и

$$nA = \Phi + 2k\pi = \text{Arg } z, \quad A = \frac{\text{Arg } z}{n}.$$

Следовательно,

$$\zeta = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\text{Arg } z}{n} + i \sin \frac{\text{Arg } z}{n} \right)$$

При одних и тех же  $z$  и  $n$  будем получать различные значения корня, беря такие значения  $\text{Arg } z$ , которые отличаются между собой на  $2k\pi$ , где  $k$  не делится на  $n$ . Рассматривая, например, следующие значения  $\text{Arg } z$ :

$$\arg z, \quad \arg z + 2\pi, \quad \arg z + 2(n-1)\pi,$$

найдем  $n$  различных значений корня, которыми и исчерпываются все возможные его значения, так как любое значение  $\text{Arg } z$  отличается от одного из избранных нами на число вида  $2m\pi$ , где  $m$  — целое число. Итак, корень степени  $n$  из  $z$  имеет  $n$  различных значений (при  $z \neq 0$ ), которые все заключаются в формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\text{Arg } z}{n} + i \sin \frac{\text{Arg } z}{n} \right).$$

Значение  $\sqrt[n]{z}$ , равное

$$\sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\arg z}{n} + i \sin \frac{\arg z}{n} \right),$$

будем называть главным значением корня и обозначать его через  $\sqrt[n]{z}$  (для  $z$  действительного положительного главное значение корня совпадает с арифметическим).

Так как  $\text{Arg } z = \arg z + 2m\pi = \arg z + \text{Arg } 1$ , то

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\arg z + \text{Arg } 1}{n} + i \sin \frac{\arg z + \text{Arg } 1}{n} \right) = \\ &= \left[ \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\arg z}{n} + i \sin \frac{\arg z}{n} \right) \right] \left( \cos \frac{\text{Arg } 1}{n} + i \sin \frac{\text{Arg } 1}{n} \right) = \sqrt[n]{z} \cdot \sqrt[n]{1}, \end{aligned}$$

т. е. все значения  $\sqrt[n]{z}$  можно получить из главного, умножая последнее на различные значения корня той же степени из единицы.

Введем, наконец, степень с произвольным рациональным показателем, положив по определению:

$$z^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{z})^m$$

( $m$  — целое число,  $n$  — натуральное,  $m$  и  $n$  — взаимно-простые числа). Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} z^{\frac{m}{n}} &= \left\{ \sqrt[n]{|z|} \left[ \cos \frac{\operatorname{Arg} z}{n} + i \sin \frac{\operatorname{Arg} z}{n} \right] \right\}^m = \\ &= (\sqrt[n]{|z|})^m \cdot \left( \cos \frac{m}{n} \operatorname{Arg} z + i \sin \frac{m}{n} \operatorname{Arg} z \right) \end{aligned}$$

Если условиться под  $|z|^{\frac{m}{n}}$  понимать положительное число  $\sqrt[n]{|z|^m}$ , то последнее соотношение переписывается в виде

$$z^{\frac{m}{n}} = |z|^{\frac{m}{n}} \left( \cos \frac{m}{n} \operatorname{Arg} z + i \sin \frac{m}{n} \operatorname{Arg} z \right).$$

Читателю предлагается проверить, что определение степени с рациональным показателем посредством равенства

$$z^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{z^m}$$

эквивалентно предыдущему.

### § 3. Множества и функции. Теория пределов. Непрерывные функции

3.1. В дальнейшем, говоря о комплексных числах, мы пользуемся геометрическим языком. Таким образом, рассмотрение различных множеств комплексных чисел сводится к рассмотрению различных точечных множеств на плоскости.

Пусть  $E$  — множество точек плоскости  $z$ . Мы предполагаем его не пустым, т. е. содержащим по крайней мере одну точку, вообще же бесконечным множеством точек. Если каждой точке  $z \in E$  поставлено в соответствие некоторое непустое множество точек  $\mathcal{E}_z$ , то говорят, что на  $E$  определена (или задана) функция, для

---

\*) Мы пишем  $z \in E$ , желая сказать, что  $z$  есть некоторая точка множества  $E$  ( $z$  принадлежит  $E$ ).



которой точки  $z \in E$  представляют значения независимой переменной (или аргумента), а точки  $\mathcal{E}_z$  — значения функции. Так, например,  $\text{Arg } z$  есть функция, определенная на множестве всех точек плоскости, отличных от нуля, причем множество  $\mathcal{E}_z$  образовано здесь числами  $\arg z + 2k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Наше определение имеет в виду вообще многозначные функции. Если каждое  $\mathcal{E}_z$  содержит лишь по одной точке, то мы получаем однозначную функцию.

Будем обозначать значения функции через  $w = u + iv$ . Тогда функции, определенные на  $E$ , могут быть записаны в виде  $w = f(z)$ ,  $w = F(z)$ ,  $w = \varphi(z)$ , ( $z \in E$ ); впрочем, указание множества  $E$  можно опускать там, где это не вызывает недоразумений. Так как  $z$  принимает комплексные, вообще, мнимые значения, то говорят о функции комплексного переменного.

В частном случае все значения функции могут быть действительными:  $w = u$  ( $v = 0$ ). Тогда наша функция комплексного переменного может рассматриваться как функция двух действительных переменных,  $x$  и  $y$ , принимающая действительные значения  $u$ . В самом деле, если комплексному  $z = x + iy$  поставлено в соответствие число (или числа)  $u$ , то это значит, что паре действительных чисел  $x$  и  $y$  поставлено в соответствие действительное число  $u$ .

Обратимся к общему случаю. Так как каждое комплексное число  $w$  определяется своей действительной частью  $u$  и мнимой частью  $v$ , то задание функции  $w = f(z)$  на множестве  $E$  означает, что на том же множестве заданы две функции двух действительных переменных  $x$  и  $y$ :  $u = \varphi(x, y)$ ,  $v = \psi(x, y)$ . И обратно: если на множестве  $E$  заданы независимо одна от другой две принимающие действительные значения функции  $u = \varphi(x, y)$  и  $v = \psi(x, y)$ , то тем самым задана и одна комплексная функция:

$$w = u + iv = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = f(z).$$

Например, имея функцию комплексного переменного

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi,$$

мы вместе с тем имеем и две действительные функции от  $x$  и  $y$ :

$$u = x^2 - y^2 \quad \text{и} \quad v = 2xy.$$

Двум действительным функциям:  $u = x^2 - y^2$ ,  $v = 2xy$  соответствует одна функция комплексного переменного:  $z = x + iy$ :

$$w = u + iv = (x^2 - y^2) + i2xy = f(z).$$

Эти замечания показывают, что всю теорию функции комплексного переменного  $z$  можно было бы истолковать как теорию пар функций двух действительных переменных  $x$  и  $y$ . К такому истолкованию мы и будем иногда прибегать.

Из предыдущего следует, что понятие действительной функции двух действительных переменных есть частный случай понятия функции комплексного переменного. Точно так же и понятие действительной функции одного переменного содержится в понятии функции комплексного переменного как частный случай. Чтобы получить его, достаточно предположить, что множество  $E$  лежит на действительной оси (тогда  $z = x$ ) и что значения функций являются действительными числами ( $w = u$ ).

В дальнейшем, говоря о функциях, мы будем иметь в виду функции комплексного переменного.

3.2. Пусть  $E$  — множество всех натуральных чисел: 1, 2, 3, 4, ...,  $n$ , ... Однозначная функция, определенная на  $E$ , называется последовательностью, а значения этой функции — членами последовательности. Обозначая их через  $w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$ , так что  $w_n$  соответствует значению  $z = n$ , будем записывать последовательность посредством символа  $\{w_n\}$ . Если  $k_1, k_2, k_3, \dots$  какое-либо бесконечное множество натуральных чисел (различных между собой), то соответствующие им члены последовательности  $\{w_n\}$ :  $w_{k_1}, w_{k_2}, w_{k_3}, \dots, w_{k_n}, \dots$  образуют новую последовательность  $\{w_{k_n}\}$ , которая по отношению к  $\{w_n\}$  называется подпоследовательностью. Так, например,  $w_1, w_3, \dots, w_{2k-1}, \dots$ ;  $w_2, w_4, w_6, w_8, \dots, w_{2k}, \dots$ ;  $w_1, w_4, w_9, \dots, w_{k^2}, \dots$  являются различными подпоследовательностями последовательности  $\{w_n\}$ .

Пусть  $z_0$  — некоторая точка плоскости. Любой круг, содержащий эту точку внутри, называется ее окрестностью. В частности, окрестностью точки  $z_0$  называется каждый круг с центром  $z_0$ :  $|z - z_0| < \rho$  ( $\rho > 0$ ).

Точка  $z_0$  называется предельной точкой последовательности  $\{w_n\}$ , если для любой окрестности точки  $z_0$  существует подпоследовательность  $\{w_{k_n}\}$ , все члены которой принадлежат этой окрестности. Так, например, точка 0 является предельной для последовательности  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$  точки 0 и 1 — предельные для последовательности  $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$  (для точки 0 подпоследовательность, фигурирующая в определении предельной точки, образована членами с нечетными номерами:  $0, 0, 0, 0, \dots$ ), для точки 1 — членами с четными номерами:  $1, 1, 1, 1, \dots$ ).

Заметим, что если  $\{w_{l_n}\}$  есть подпоследовательность последовательности  $\{w_{k_n}\}$ , а  $\{w_{k_n}\}$  — подпоследовательность последовательности  $\{w_n\}$ , то и  $\{w_{l_n}\}$  есть подпоследовательность последовательности  $\{w_n\}$ . Отсюда вытекает, что каждая предельная точка подпоследовательности является предельной точкой самой последовательности. Обратное может и не иметь места, как это показывает

пример 0, 1, 0, 1, ..., где подпоследовательность 0, 0, 0, имеет только одну предельную точку, тогда как сама последовательность имеет две предельные точки.

Назовем последовательность  $\{w_n\}$  ограниченной, если существует окрестность начала координат, содержащая все члены последовательности, т. е. если существует такое  $\rho > 0$ , что  $|w_n| < \rho$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Дока-

жем теперь следующую теорему:

**Теорема 1** (принцип Больцано — Вейерштрасса для последовательностей). *Ограниченная последовательность  $\{w_n\}$  имеет по крайней мере одну предельную точку.*

**Доказательство.**

Пусть  $D_1$  — квадрат со сторонами, параллельными осям координат, и с центром в начале координат, содержащий все члены последовательности. Оси координат делят его на четыре квадрата, из которых по

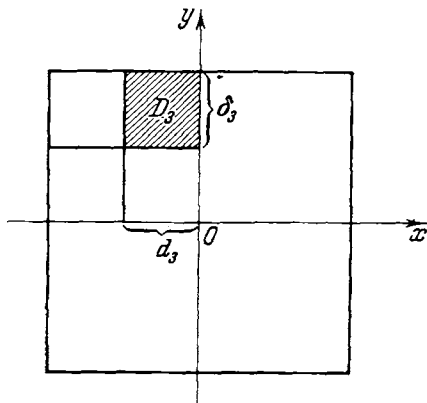


Рис. 2.

крайней мере один, пусть  $D_2$ , содержит внутри или на сторонах бесконечное множество членов последовательности. Деля его на четыре равных квадрата, получим новый квадрат  $D_3$ , содержащий бесконечное множество членов последовательности (рис. 2). Продолжая это рассуждение, найдем последовательность вложенных друг в друга квадратов:

$$D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset D_4 \supset D_5 \supset D_6 \supset \dots \supset D_n \supset \dots^*),$$

каждый из которых содержит внутри или на сторонах бесконечное множество членов последовательности.

Проекции их на оси  $x$  и  $y$  образуют две последовательности вложенных сегментов:

$$\begin{aligned} d_1 \supset d_2 \supset d_3 \supset \dots \supset d_n \supset \dots \\ \delta_1 \supset \delta_2 \supset \delta_3 \supset \dots \supset \delta_n \supset \dots \end{aligned}$$

которые стягиваются соответственно к точкам  $\xi$  и  $\eta$ . Точка  $\xi$  принадлежит каждому из сегментов  $d_n$ , а точка  $\eta$  — каждому из сегментов  $\delta_n$ ; поэтому точка  $\zeta = \xi + i\eta$  принадлежит каждому из квадратов  $D_n$ . Покажем, что  $\zeta$  является предельной точкой после-

\*) Мы пишем:  $D_{n-1} \supset D_n$ , желая сказать, что  $D_{n-1}$  содержит  $D_n$ .

довательности  $\{w_n\}$ . В самом деле, какова бы ни была окрестность  $U$   $|z - \xi| < \rho$  точки  $\xi$ , можно выбрать  $n$  настолько большим, чтобы квадрат  $D_n$  целиком содержался в  $U$ . Для этого достаточно потребовать, чтобы диагональ квадрата была меньше  $\rho$ . Но ее длина равна, очевидно,  $\frac{l}{2^n}$ , где  $l$  — длина диагонали квадрата  $D_1$ , и наше

условие будет выполнено при  $\frac{l}{2^n} < \rho$ . Так как  $D_n$  содержит бесконечное множество членов последовательности  $\{w_n\}$ , то и  $U$  будет содержать бесконечное множество их, откуда и следует, что  $\xi$  есть предельная точка для  $\{w_n\}$ .

Теорема доказана.

Ограниченная последовательность  $\{w_n\}$ , имеющая только одну предельную точку  $z_0$ , называется сходящейся последовательностью, а  $z_0$  называется ее пределом.

Говорят еще, что  $\{w_n\}$  сходится к  $z_0$ , и пишут:  $w_n \rightarrow z_0$  при  $n \rightarrow \infty$ , или  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = z_0$ .

Очевидно, каждая подпоследовательность  $\{w_{k_n}\}$  сходящейся последовательности  $\{w_n\}$  сходится к тому же пределу  $z_0$ . Действительно,  $\{w_{k_n}\}$  ограничена, так как ограничена вся последовательность  $\{w_n\}$ ; поэтому  $w_{k_n}$  (по теореме 1) имеет по крайней мере одну предельную точку. Но предельные точки для  $\{w_{k_n}\}$  суть в то же время предельные точки для  $\{w_n\}$ ; поэтому  $\{w_{k_n}\}$  имеет лишь одну предельную точку  $z_0$ , откуда и следует наше утверждение.

Докажем, что  $\{w_n\}$  сходится к  $z_0$  тогда и только тогда, когда любая окрестность точки  $z_0$  содержит все члены последовательности  $\{w_n\}$ , начиная с некоторого из них, иными словами, если для любого  $\rho > 0$  выполняются неравенства:  $|w_n - z_0| < \rho$  при  $n > N(\rho)$ .

Пусть, в самом деле,  $\{w_n\}$  сходится к  $z_0$ . Если для некоторого  $\rho > 0$  во внешности окружности  $|z - z_0| = \rho$  или на самой этой окружности находится бесконечное множество членов последовательности  $\{w_n\}$ :  $w_{n_1}, w_{n_2}, w_{n_3}, \dots, w_{n_k}, \dots$  ( $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$ ), то члены эти, в свою очередь, образуют некоторую последовательность, которая, как и данная последовательность, будет ограничена. Следовательно, по теореме 1, она должна иметь по крайней мере одну предельную точку  $z_1$ . Но  $z_1 \neq z_0$ , так как окрестность  $|z - z_0| < \rho$  точки  $z_0$  не содержит ни одной точки из  $\{w_{n_k}\}$ ; с другой стороны,  $z_1$ , будучи предельной для  $\{w_{n_k}\}$ , является предельной также и для всей последовательности  $\{w_n\}$ .

Мы получили предельную точку для  $\{w_n\}$ , отличную от  $z_0$ , что противоречит условию. Отсюда вытекает, что во внешности окружности  $|z - z_0| = \rho$  и на самой этой окружности может находиться

только конечное число членов последовательности  $\{w_n\}$  и что, следовательно, все члены этой последовательности, начиная с некоторого номера, лежат внутри окружности.

Итак, высказанное условие необходимо для сходимости последовательности. Но оно и достаточно. В самом деле, последовательность  $\{w_n\}$ , для которой это условие выполнено, ограничена, так как все точки из  $\{w_n\}$ , начиная с некоторой, лежат внутри круга  $|z - z_0| < \rho$  (здесь  $\rho = 1$ ), и мы можем подобрать окрестность точки  $z = 0$  столь большого радиуса, чтобы она включала и круг  $|z - z_0| < \rho$  и те точки  $\{w_n\}$  (в конечном числе), которые не лежат внутри последнего круга. В силу теоремы 1 наша последовательность должна иметь хотя бы одну предельную точку. Но никакая точка  $z_1$ , отличная от  $z_0$ , не может быть для нее предельной. Действительно, взяв  $\rho < \frac{1}{2} |z_1 - z_0|$  и замечая, что только конечное

число членов последовательности  $\{w_n\}$  может лежать вне круга  $|z - z_0| < \rho$ , заключаем, что только конечное число их лежит в круге  $|z - z_1| < \rho$ . Но это означает, что  $z_1$  не есть предельная точка. Таким образом,  $z_0$  — единственная предельная точка для  $\{w_n\}$ , т. е.  $\{w_n\}$  сходится к  $z_0$ .

Покажем, что любая ограниченная последовательность  $\{w_n\}$  обладает сходящейся подпоследовательностью. В самом деле, пусть  $z_0$  — предельная точка последовательности  $\{w_n\}$  (она существует в силу теоремы 1). Тогда любая окрестность точки  $z_0$  содержит бесконечное множество членов  $w_n$ . Рассмотрим окрестность  $|z - z_0| < 1$ , и пусть  $w_{n_1}$  — какая-либо точка, лежащая в этой окрестности. Возьмем, далее, окрестность  $|z - z_0| < \frac{1}{2}$  и среди бесконечного множества членов  $w_n$ , заключающихся в ней, возьмем член  $w_{n_2}$  с номером, большим, чем  $n_1$ . Предположим, что мы уже выбрали члены  $w_{n_1}, w_{n_2}, \dots, w_{n_k}$ , лежащие соответственно в окрестностях:

$$|z - z_0| < 1, \quad |z - z_0| < \frac{1}{2}, \quad |z - z_0| < \frac{1}{k}$$

и такие, что  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k$ . Тогда среди бесконечного множества членов  $w_n$ , лежащих в окрестности  $|z - z_0| < \frac{1}{1+k}$  мы примем за  $w_{n_{k+1}}$  какой-либо член с номером, большим  $n_k$ . Таким образом, существует подпоследовательность  $\{w_{n_k}\}$  последовательности  $\{w_n\}$  такая, что  $|w_{n_k} - z_0| < \frac{1}{k}$ .

Очевидно, все члены этой последовательности с номерами  $n_k$ , удовлетворяющими условию  $k > \frac{1}{\rho}$ , будут лежать в окрестности  $|z - z_0| < \rho$ . Отсюда и следует, что  $\{w_{n_k}\}$  сходится к  $z_0$ , т. е.  $\{w_n\}$  обладает сходящейся подпоследовательностью.

Обратимся к критерию сходимости, не требующему при применении знания предела последовательности (к р и т е р и й К о ш и).

**Т е о р е м а 2.** *Для того чтобы последовательность  $\{w_n\}$  была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для любого  $\varepsilon > 0$  существовало некоторое  $N(\varepsilon)$  такое, что неравенство  $|w_n - w_{n+p}| < \varepsilon$  выполняется при всех  $n > N(\varepsilon)$  и любом натуральном числе  $p$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Условие необходимо. Действительно, если  $\{w_n\}$  сходится к некоторому пределу  $z_0$ , то

$$|w_n - z_0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при  $n > N(\varepsilon)$  и, следовательно,

$$|w_{n+p} - z_0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для тех же значений  $n$  и для любых натуральных  $p$ . Отсюда

$$|w_n - w_{n+p}| = |(w_n - z_0) - (w_{n+p} - z_0)| \leq \\ \leq |w_n - z_0| + |w_{n+p} - z_0| < \varepsilon \quad \text{при } n > N(\varepsilon),$$

т. е. условие выполнено.

Докажем теперь, что это условие является и достаточным для сходимости. В самом деле, взяв  $\varepsilon = 1$ , получаем:

$$|w_n - w_{n+p}| < 1,$$

начиная с некоторого значения  $n$ . Фиксировав одно из таких  $n$ , например  $n = n_0$ , получим, что  $|w_{n_0} - w_{n_0+p}| < 1$ , т. е. что все точки  $w_{n_0+1}$ ,  $w_{n_0+2}$ , ... лежат в круге с центром в точке  $w_{n_0}$  и радиусом, равным единице.

Если выбрать теперь такую окрестность  $|z| < \rho$  начала координат, чтобы она содержала указанный круг и, кроме того, все точки  $w_1$ ,  $w_2$ , ...,  $w_{n_0}$ , то мы получим окрестность, содержащую все члены последовательности, откуда вытекает, что  $\{w_n\}$  — ограниченная последовательность. Следовательно, по теореме 1, она имеет по крайней мере одну предельную точку.

Остается показать, что двух различных предельных точек для нее не может существовать. Допустим противное, и пусть  $z_0$  и  $z_1$ ,  $z_1 \neq z_0$ , — две предельные точки последовательности  $\{w_n\}$ . Положив  $\varepsilon = \frac{1}{3} |z_1 - z_0|$ , находим, что неравенства

$$|w_n - w_{n+p}| < \frac{1}{3} |z_1 - z_0| \quad (3.2.1)$$

будут выполняться, начиная с достаточно большого значения  $n$ :  $n > N$ . С другой стороны, каждая из окрестностей

$$|z - z_0| < \frac{1}{3} |z_1 - z_0| \quad \text{и} \quad |z - z_1| < \frac{1}{3} |z_1 - z_0|$$

точек  $z_0$  и  $z_1$  должна содержать бесконечное множество членов последовательности  $\{w_n\}$ . Пусть  $w_{n_0}$  — член с номером, большим  $N$ , принадлежащий первой из этих окрестностей, а  $w_{n_0+p_0}$  — член, принадлежащий второй окрестности. Тогда, очевидно (рис. 3),

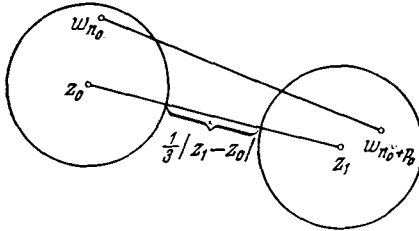


Рис. 3.

$$|w_{n_0} - w_{n_0+p_0}| > \frac{1}{3} |z_1 - z_0|,$$

что, однако, противоречит неравенству (3.2.1). Из полученного противоречия вытекает, что  $\{w_n\}$  обладает только одной предельной точкой, т. е. сходится. Теорема доказана.

**3.3.** Положим,  $w_n = u_n + iv_n$ , где  $u_n$  и  $v_n$  — действительная и мнимая части  $w_n$ . Тогда, наряду с последовательностью комплексных чисел  $\{w_n\}$ , получим две последовательности действительных чисел  $\{u_n\}$  и  $\{v_n\}$ .

Докажем следующее предложение.

**Т е о р е м а.** Последовательность  $\{w_n = u_n + iv_n\}$  сходится к пределу  $z_0 = x_0 + iy_0$  тогда и только тогда, когда последовательности действительных чисел  $\{u_n\}$  и  $\{v_n\}$  сходятся соответственно к пределам  $x_0$  и  $y_0$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = z_0$ ; тогда для любого  $\varepsilon > 0$  неравенства  $|w_n - z_0| < \varepsilon$  будут выполняться при  $n > N(\varepsilon)$ . Но

$$|u_n - x_0| = |\operatorname{Re}(w_n - z_0)| \leq |w_n - z_0|$$

и

$$|v_n - y_0| = |\operatorname{Im}(w_n - z_0)| \leq |w_n - z_0|;$$

следовательно, неравенства

$$|u_n - x_0| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |v_n - y_0| < \varepsilon$$

выполняются при  $n > N(\varepsilon)$ , откуда и следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x_0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = y_0.$$

Обратно, если известно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x_0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = y_0,$$

то для любого  $\varepsilon > 0$  неравенства

$$|u_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |v_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

будут выполняться при  $n > N(\varepsilon)$ . Но

$$|w_n - z_0| = |(u_n - x_0) + i(v_n - y_0)| \leq |u_n - x_0| + |v_n - y_0|;$$

следовательно,

$$|w_n - z_0| < \varepsilon$$

при  $n > N(\varepsilon)$ , откуда вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = z_0.$$

Теорема доказана.

В силу этого предложения любой вопрос о сходимости последовательности комплексных чисел эквивалентен вопросу о сходимости двух последовательностей действительных чисел. Поэтому, например, известные предложения о пределе суммы, разности, произведения и частного двух сходящихся последовательностей без изменения переносятся на последовательности с комплексными членами. А именно, если последовательности  $\{w'_n\}$  и  $\{w''_n\}$  сходятся к пределам  $z'_0$  и  $z''_0$ , то последовательности  $\{w'_n + w''_n\}$ ,  $\{w'_n - w''_n\}$ ,  $\{w'_n \cdot w''_n\}$  также сходятся соответственно к пределам  $z'_0 + z''_0$ ,  $z'_0 - z''_0$ ,  $z'_0 \cdot z''_0$ . Если  $w''_n \neq 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) и  $z''_0 \neq 0$ , то последовательность  $\left\{\frac{w'_n}{w''_n}\right\}$  также сходится, и предел ее равен  $\frac{z'_0}{z''_0}$ .

Заметим, что мы могли бы принять предложение, выраженное последней теоремой, в качестве определения сходимости последовательности с комплексными членами. Тогда все теоремы предыдущего пункта можно было бы вывести из соответствующих теорем о последовательностях действительных чисел.

Для решения вопроса о сходимости последовательности  $\{w_n\}$  можно рассматривать вместо последовательностей действительных и мнимых частей  $\{u_n\}$  и  $\{v_n\}$  последовательности модулей и главных значений аргументов  $\{|w_n|\}$  и  $\{\arg w_n\}$ . Это выгодно, например, при рассмотрении последовательностей, сходящихся к нулю, так как, для того чтобы последовательность комплексных чисел  $\{w_n\}$  сходилась к нулю, необходимо и достаточно, чтобы последовательность модулей  $\{|w_n|\}$  сходилась к нулю. (Вторую последовательность  $\{\arg w_n\}$  здесь совсем не нужно рассматривать — она может и расходиться.) Чтобы убедиться в правильности сказанного, достаточно заметить, что выполнение неравенства  $|w_n - 0| = |w_n| < \varepsilon$  при  $n > N(\varepsilon)$  одновременно обозначает сходимость к нулю как последовательности комплексных чисел  $\{w_n\}$ , так и сходимость последовательности действительных чисел  $\{|w_n|\}$ .

В общем случае одновременная сходимость последовательностей  $\{|w_n|\}$  и  $\{\arg w_n\}$  достаточна для сходимости последовательности  $\{w_n\}$ , причем, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n| = r$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \arg w_n = \varphi$ ,



то  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . В самом деле, имеем  $u_n = \operatorname{Re} (w_n) = |w_n| \cos (\arg w_n)$ ,  $v_n = \operatorname{Im} (w_n) = |w_n| \sin (\arg w_n)$ ; поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [|w_n| \cos (\arg w_n)] = r \cos \varphi$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [|w_n| \sin (\arg w_n)] = r \sin \varphi$ , откуда и следует наше утверждение.

Обратно, если сходится последовательность  $\{w_n\}$ , то сходится и последовательность модулей:  $\{|w_n|\}$ . В самом деле,  $|w_n| = \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$ , и так как последовательности  $\{u_n\}$  и  $\{v_n\}$  сходятся:  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$ , то существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n|$ , равный  $\sqrt{u^2 + v^2}$ . Заметим, что последовательность аргументов  $\{\arg w_n\}$  сходящейся последовательности  $\{w_n\}$  может расходиться даже и в том случае, когда  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n \neq 0$ . Пусть, например,  $w_n = -1 + (-1)^n \frac{i}{n}$

Здесь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = -1,$$

$$\arg w_{2k} = \pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{2k} \quad \text{и} \quad \arg w_{2k+1} = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{2k+1};$$

очевидно, что последовательность  $\{\arg w_n\}$  расходится. Однако и здесь можно найти сходящуюся последовательность значений  $\operatorname{Arg} w_n$ . Именно, обозначим через  $\varphi_n$  значение  $\operatorname{Arg} w_n$ , заключающееся между 0 и  $2\pi$ :  $0 \leq \varphi_n < 2\pi$ . Тогда будем иметь, очевидно,  $\varphi_{2k} = \pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{2k}$  и  $\varphi_{2k+1} = \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{2k+1}$ . Последовательность  $\{\varphi_n\}$  сходится к пределу  $\pi$ .

Если вообще  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w \neq 0$  и  $\varphi$  — какое-либо значение  $\operatorname{Arg} w$ , то, начиная с некоторого значения  $n = N$ , все точки последовательности  $\{w_n\}$  будут лежать внутри угла, образованного лучами, наклоненными под углами  $\varphi - \frac{\pi}{2}$  и  $\varphi + \frac{\pi}{2}$  к оси  $x$ , и содержащего точку  $w$  (рис. 4). Поэтому для аргументов  $\operatorname{Arg} w_{N+1}, \operatorname{Arg} w_{N+2}, \dots$  можно выбрать значения  $\varphi_{N+1}, \varphi_{N+2}, \dots$ , удовлетворяющие неравенствам  $|\varphi_{N+n} - \varphi| < \frac{\pi}{2}$ . Беря для  $\operatorname{Arg} w_1, \dots, \operatorname{Arg} w_N$ , их значения  $\varphi_1, \dots, \varphi_N, \dots$ , можем утверждать, что последовательность  $\{\varphi_n\}$  сходится и имеет пределом  $\varphi$ . В самом деле, для любого  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ , можно указать такое  $N_1(\varepsilon) \geq N$ , что точки последовательности  $\{w_n\}$  с номерами, боль-

шими  $N_1(\epsilon)$ , будут лежать внутри угла, образованного лучами, наклоненными к действительной оси под углами  $\varphi - \epsilon$  и  $\varphi + \epsilon$ , и содержащего точку  $w$ . Для них значения  $\varphi_n$  заключаются в пределах  $\varphi - \epsilon < \varphi_n < \varphi + \epsilon$ , то есть при  $n > N_1(\epsilon)$ , выполняется неравенство  $|\varphi_n - \varphi| < \epsilon$ , откуда и следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi.$$

Заметим, что в случае, когда  $w \neq 0$  не есть действительное отрицательное число, мы можем в качестве  $\varphi$  и  $\varphi_n$  брать главные значения аргумента. Тогда найдем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arg w_n = \arg w.$$

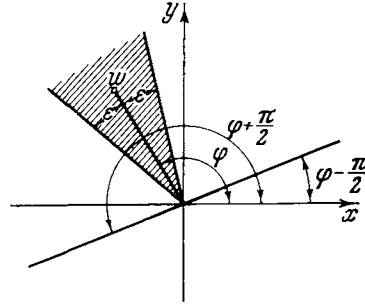


Рис. 4.

Итак, если последовательность  $\{w_n\}$  сходится и предел ее  $w \neq 0$ , то для любого значения  $\varphi = \text{Arg } w$  существует последовательность значений  $\varphi_n = \text{Arg } w_n$ , сходящаяся к  $\text{Arg } w$ . Именно в этом смысле мы и будем в дальнейшем понимать запись  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Arg } w_n = \text{Arg } w$ . В случае, когда  $w \neq 0$  не есть отрицательное число, будем иметь, в частности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arg w_n = \arg w.$$

Предлагаем читателю доказать в качестве упражнения, что если  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n \neq 0$ , то любая последовательность значений  $\psi_n = \text{Arg } w_n$ , удовлетворяющих, начиная с некоторого номера  $n = N$ , условию  $|\psi_{n+1} - \psi_n| \leq \pi$ , будет сходящейся (конечно к одному из значений  $\psi = \text{Arg } w$ ).

**3.4.** Применим полученные результаты к вопросу о рядах с комплексными членами.

Пусть

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n + \dots \quad (3.4:1)$$

— ряд с комплексными членами и

$$\{s_n = w_1 + \dots + w_n\} \quad (3.4:2)$$

— последовательность его частичных сумм. По определению, ряд называется сходящимся, если сходится последовательность его частичных сумм. Предел этой последовательности называется суммой ряда. Если  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ , то пишут:

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n + \dots = s.$$

Ряд, не являющийся сходящимся, называется **расходящимся**.

Полагая  $w_n = u_n + iv_n$  и  $s_n = \sigma_n + i\tau_n = (u_1 + \dots + u_n) + i(v_1 + \dots + v_n)$ , найдем по предыдущему, что ряд (3.4:1) сходится тогда и только тогда, когда сходятся обе последовательности:

$$\{u_1 + u_2 + \dots + u_n\}, \quad \{v_1 + v_2 + \dots + v_n\}.$$

Но они являются последовательностями частичных сумм двух рядов с действительными членами:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (3.4:3)$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (3.4:4)$$

Итак, ряд с комплексными членами сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды, образованные действительными и мнимыми частями членов данного ряда.

Далее, если суммы рядов (3.4:3) и (3.4:4) равны соответственно  $\sigma$  и  $\tau$ , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_1 + \dots + u_n) = \sigma \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (v_1 + \dots + v_n) = \tau,$$

то

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} (w_1 + \dots + w_n) = \sigma + i\tau,$$

т. е. суммы рядов (3.4:3) и (3.4:4) являются соответственно действительной и мнимой частями суммы ряда (3.4:1).

Применяя к последовательности частичных сумм (3.4:2) критерий Коши и замечая, что

$$s_{n+p} - s_n = w_{n+1} + \dots + w_{n+p},$$

получаем следующее предложение:

*Ряд (3.4:1) сходится тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $N(\varepsilon)$  такое, что неравенство*

$$|w_{n+1} + \dots + w_{n+p}| < \varepsilon$$

*выполняется для всех  $n > N(\varepsilon)$  и всех натуральных  $p$ .*

Отсюда, в частности, получаем, что условие  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$  необходимо для сходимости ряда.

Ряд (3.4:1) называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд модулей его членов:

$$|w_1| + |w_2| + \dots + |w_n| + \dots \quad (3.4:5)$$

Так как

$$|w_{n+1} + \dots + w_{n+p}| \leq |w_{n+1}| + \dots + |w_{n+p}|,$$

то из абсолютной сходимости ряда с комплексными членами вытекает сходимость этого ряда. Обратное, конечно, несправедливо, как показывает известный пример ряда:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Из неравенств

$$|u_n| \leq |\omega_n|, \quad |v_n| \leq |\omega_n| \quad \text{и} \quad |\omega_n| \leq |u_n| + |v_n|$$

следует, что ряд (3.4:1) абсолютно сходится тогда и только тогда, когда абсолютно сходятся ряды (3.4:3) и (3.4:4).

Произведем произвольную перестановку членов в абсолютно сходящемся ряде (3.4:1). Тогда получим новый ряд:

$$\omega_{n_1} + \omega_{n_2} + \dots + \omega_{n_k} + \dots \quad (3.4:6)$$

где последовательность  $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$  содержит все натуральные числа и притом каждое по одному разу. Ряды действительных и мнимых частей членов ряда (3.4:6) имеют вид:

$$u_{n_1} + u_{n_2} + \dots + u_{n_k} + \dots \\ v_{n_1} + v_{n_2} + \dots + v_{n_k} + \dots,$$

и так как эти ряды получаются путем перестановки членов в абсолютно сходящихся рядах (3.4:3) и (3.4:4), то они, как известно, сходятся к прежним суммам  $\sigma$  и  $\tau$ . Отсюда следует, что и ряд (3.4:6) сходится к прежней сумме  $s = \sigma + i\tau$ . Итак, в абсолютно сходящихся рядах с комплексными членами законна любая перестановка членов.

Так как абсолютная сходимость ряда (3.4:1) означает сходимость ряда (3.4:5) с действительными неотрицательными членами, то в качестве признаков абсолютной сходимости можно пользоваться любым известным признаком сходимости рядов с неотрицательными членами. Отметим, в частности, признаки Даламбера и Коши.

Именно, для абсолютной сходимости ряда (3.4:1) достаточно, чтобы, начиная с некоторого значения  $n$ , выполнялись неравенства

$$|\omega_{n+1}| \leq q |\omega_n| \quad (0 < q < 1)$$

(признак Даламбера) или

$$\sqrt[n]{|\omega_n|} \leq q \quad (0 < q < 1)$$

(признак Коши).

Последний признак — более общий в том смысле, что если выполнен первый, то выполнен и второй, тогда как второй может выполняться там, где первый неприменим.

Достаточное условие сходимости (вообще, не абсолютной) дает следующее, часто применяемое предложение:

Если

$$\omega_k = a_k b_k,$$

где

$$\left| \sum_1^n a_k \right| \leq M \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$$

и ряд  $\sum_1^\infty |b_k - b_{k+1}|$  сходится, то и ряд  $\sum_1^\infty \omega_k$  сходится.

Доказательство. Обозначим  $\sum_1^m a_k$  через  $\alpha_m$ ; тогда будем

иметь  $\alpha_m = \alpha_m - \alpha_{m-1}$  и сумма  $\sum_{n+1}^{n+p} \omega_k$  запишется в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{n+1}^{n+p} \omega_k &= \sum_{n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{n+1}^{n+p} (a_k - a_{k-1}) b_k = \sum_{n+1}^{n+p} a_k b_k - \sum_{n+1}^{n+p} a_{k-1} b_k = \\ &= \sum_{n+1}^{n+p} a_k b_k - \sum_n^{n+p-1} a_k b_{k+1} = \alpha_{n+p} b_{n+p} - \alpha_n b_{n+1} - \sum_{n+1}^{n+p-1} a_k (b_{k+1} - b_k) *). \end{aligned} \quad (3.4:7)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n+1}^{n+p} \omega_k \right| &\leq |\alpha_{n+p}| |b_{n+p}| + |\alpha_n| |b_{n+1}| + \sum_{n+1}^{n+p-1} |a_k| |b_k - b_{k+1}| \leq \\ &\leq M (|b_{n+p}| + |b_{n+1}| + \sum_{n+1}^{n+p-1} |b_k - b_{k+1}|), \end{aligned}$$

и если выполнены неравенства

$$|b_n| < \frac{\varepsilon}{3M} \quad \text{и} \quad \sum_{n+1}^{n+p} |b_k - b_{k+1}| < \frac{\varepsilon}{3M},$$

при  $n > N(\varepsilon)$  и любом натуральном  $p$ , то при тех же условиях

$$\left| \sum_{n+1}^{n+p} \omega_k \right| < \varepsilon,$$

откуда и следует сходимость ряда  $\sum_1^\infty \omega_k$ .

---

\*) Преобразование (3.4:7), которому мы подвергли сумму  $\sum_{n+1}^{n+p} a_k b_k$ , называется преобразованием Абеля; оно вполне аналогично интегрированию по частям.

Известные предложения об операциях над рядами с действительными членами переносятся и на ряды с комплексными членами.

Отметим следующие, легко доказываемые предложения:

1) Для любого натурального  $n$  ряды

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n + w_{n+1} + \dots \quad \text{и} \quad w_{n+1} + \dots + w_{n+p} + \dots$$

сходятся или расходятся одновременно.

2) Если ряд  $w_1 + w_2 + \dots + w_n + \dots$  сходится и сумма его есть  $s$ , то и ряд  $\lambda w_1 + \lambda w_2 + \dots + \lambda w_n + \dots$  сходится и сумма его есть  $\lambda s$ .

3) Если ряд  $w_1 + w_2 + \dots + w_n + \dots$  сходится и сумма его есть  $s$ , то и ряд

$$(w_1 + \dots + w_{n_1}) + (w_{n_1+1} + \dots + w_{n_2-1}) + \dots \\ + (w_{n_k} + \dots + w_{n_{k+1}-1}) + \dots$$

сходится и сумма его есть также  $s$  ( $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$  — произвольная, возрастающая последовательность натуральных чисел).

4) Если

$$w'_1 + \dots + w'_n + \dots = s' \quad \text{и} \quad w''_1 + \dots + w''_n + \dots = s'',$$

то  $(w'_1 \pm w''_1) + \dots + (w'_n \pm w''_n) + \dots = s' \pm s''$ .

5) Если ряды  $\sum_1^\infty w'_k$  и  $\sum_1^\infty w''_k$  абсолютно сходятся и суммы их суть  $s'$  и  $s''$ , то и ряд  $\sum_1^\infty (w'_1 w''_k + w'_2 w''_{k-1} + \dots + w'_k w''_1)$  абсолютно сходится, причем сумма его равна  $s' s''$ .

Для доказательства последнего предложения рассмотрим ряд:

$$|w'_1| |w''_1| + |w'_1| |w''_2| + |w'_2| |w''_1| + \dots + |w'_1| |w''_k| + \dots \\ \dots + |w'_k| |w''_1| + \dots \quad (3.4:8)$$

Очевидно, он сходится (как произведение двух абсолютно сходящихся рядов  $\sum_1^\infty |w'_k|$  и  $\sum_1^\infty |w''_k|$  с действительными членами). Следовательно, ряд с комплексными членами

$$w'_1 w''_1 + w'_1 w''_2 + w'_2 w''_1 + \dots + w'_1 w''_k + \dots + w'_k w''_1 + \dots \quad (3.4:9)$$

сходится абсолютно. Произведем перестановку членов последнего

ряда, расположив его члены следующим образом:

$$w'_1 w''_1 + w'_1 w''_2 + w'_2 w''_2 + w'_2 w''_1 + w'_1 w''_3 + w'_2 w''_3 + w'_3 w''_3 + w'_3 w''_2 + w'_3 w''_1 + .$$

От этого сумма его не изменится. Но частичные суммы одного, четырех, девяти и, вообще,  $n^2$  членов последнего ряда равны соответственно:

$$\begin{aligned} w'_1 w''_1 &= s'_1 \cdot s''_1, \\ w'_1 w''_1 + w'_1 w''_2 + w'_2 w''_2 + w'_2 w''_1 &= s'_2 \cdot s''_2, \\ w'_1 w''_1 + w'_1 w''_2 + w'_2 w''_2 + w'_2 w''_1 + \dots + w'_3 w''_1 &= s'_3 \cdot s''_3, \\ w'_1 w''_1 + w'_1 w''_2 + \dots + w'_n w''_1 &= s'_n \cdot s''_n \end{aligned}$$

(где  $s'_n$  и  $s''_n$  — соответственно частичные суммы для рядов  $\sum_1^\infty w'_k$  и  $\sum_1^\infty w''_k$ ). А отсюда следует, что сумма ряда (3.4:9) есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n s''_n = s' s''$ . В силу свойства 3) ряд

$$w'_1 w''_1 + (w'_1 w''_2 + w'_2 w''_1) + \dots + (w'_1 w''_k + w'_2 w''_{k-1} + \dots + w'_k w''_1) + \dots \quad (3.4:10)$$

имеет ту же сумму, что и ряд (3.4:9), т. е.  $s' \cdot s''$ . Кроме того, он сходится абсолютно, так как

$$|w'_1 w''_k + w'_2 w''_{k-1} + \dots + w'_k w''_1| \leq |w'_1| \cdot |w''_k| + \dots + |w'_k| \cdot |w''_1|,$$

а ряд

$$\begin{aligned} |w'_1| |w''_1| + (|w'_1| |w''_2| + |w'_2| |w''_1|) + \\ + (|w'_1| |w''_k| + \dots + |w'_k| |w''_1|) + \end{aligned}$$

сходится (в силу сходимости ряда (3.4:8)).

Итак, мы доказали, что ряд (3.4:10) сходится абсолютно и сумма его есть  $s' s''$ , что и требовалось.

Покажем, что каждый абсолютно сходящийся ряд  $\sum_1^\infty w_j$  обладает коммутативным и ассоциативным свойствами в следующем обобщенном смысле. Пусть последовательность всех натуральных чисел каким-либо образом разложена на бесконечное множество возрастающих подпоследовательностей:

$$\{n'_k\}, \quad \{n''_k\}, \quad \{n^{(m)}_k\},$$

таких, что каждое натуральное число  $n$  входит в одну и только в одну из них и притом по одному разу. Рассмотрим ряд

$$(\omega_{n'_1} + \omega_{n'_2} + \dots) + (\omega_{n''_1} + \omega_{n''_2} + \dots) + \dots + (\omega_{n^{(m)}_1} + \omega_{n^{(m)}_2} + \dots) + \dots \quad (3.4:11)$$

Ряд этот получается из данного путем изменения порядка членов и разбиения их на группы (каждая содержит бесконечное множество членов). При этом каждый из членов исходного ряда входит в одну и только в одну из указанных групп. Убедимся, что ряд (3.4:11) сходится и его сумма совпадает с суммой  $\sigma$  данного ряда  $\sum_1^\infty \omega_j$ . В этом и заключается то свойство абсолютно сходящегося ряда, которое мы имеем в виду.

Прежде всего покажем, что сходится каждый из рядов  $\sum_{k=1}^\infty \omega_{n_k^{(m)}} (m=1, 2, \dots)$ , являющихся членами ряда (3.4:11). В самом деле, для суммы модулей любой частичной суммы такого ряда имеем:

$$|\omega_{n_1^{(m)}}| + \dots + |\omega_{n_k^{(m)}}| \leq |\omega_1| + |\omega_2| + \dots + |\omega_j| + |\omega_{j+1}| + \dots = s,$$

откуда и следует сходимость (и притом абсолютная) указанных рядов.

Чтобы доказать, что и ряд (3.4:11) абсолютно сходится, составим сначала следующую сумму:

$$(|\omega_{n'_1}| + |\omega_{n'_2}| + \dots + |\omega_{n'_k}|) + (|\omega_{n''_1}| + |\omega_{n''_2}| + \dots + |\omega_{n''_k}|) + \dots + (|\omega_{n^{(m)}_1}| + \dots + |\omega_{n^{(m)}_k}|).$$

Очевидно, что она не превосходит величины  $\sum_1^\infty |\omega_j| = s$ . С тем большим основанием

$$|\omega_{n'_1} + \omega_{n'_2} + \dots + \omega_{n'_k}| + |\omega_{n''_1} + \omega_{n''_2} + \dots + \omega_{n''_k}| + \dots + |\omega_{n^{(m)}_1} + \omega_{n^{(m)}_2} + \dots + \omega_{n^{(m)}_k}| \leq s.$$

Оставляя здесь  $m$  неизменным и заставляя  $k$  неограниченно возрастать, найдем:

$$|\sum_1^\infty \omega_{n'_k}| + |\sum_1^\infty \omega_{n''_k}| + \dots + |\sum_1^\infty \omega_{n^{(m)}_k}| \leq s,$$

т. е. сумма модулей любого количества  $m$  членов ряда (3.4:11) не превосходит фиксированного числа  $s$ . Отсюда следует, что



ряд этот сходится (и притом абсолютно). Остается показать, что сумма ряда (3.4:11) совпадает с суммой исходного ряда  $\sigma = \sum_1^{\infty} \omega_j$ . Образует разность между  $\sigma$  и частичной суммой  $\sigma_m$  ряда (3.4:11). Так как все члены указанной частичной суммы являются членами ряда  $\sum_1^{\infty} \omega_j$ , то при вычитании произойдет взаимное сокращение, и в разности останутся лишь те члены ряда  $\sum_1^{\infty} \omega_j$ , которые не входят в вычитаемое.

Из построения ряда (3.4:11) следует, что для любого натурального  $N$  можно указать такое  $M = M(N)$ , что при  $m > M$  частичная сумма

$$\sigma_m = \sum_1^{\infty} \omega_{n_k} + \sum_1^{\infty} \omega_{n_k''} + \dots + \sum_1^{\infty} \omega_{n_k^{(m)}}$$

будет содержать все члены  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$  (и, кроме них, еще бесконечное множество членов). Тогда в разности  $\sigma - \sigma_m$ , представляющей бесконечный абсолютно сходящийся ряд, будут содержаться лишь члены  $\omega_j$  с номерами, большими чем  $N$ . Поэтому при  $m > M(N)$

$$|\sigma - \sigma_m| \leq |\omega_{N+1}| + |\omega_{N+2}| + \dots + |\omega_{N+p}| + \dots$$

Но величина, стоящая справа, может быть сделана сколь угодно малой при  $N$  достаточно большом. Следовательно, левая часть может быть сделана сколь угодно малой при  $m$  достаточно большим. Итак,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m = \sigma,$$

т. е.

$$\sum_{m=1}^{\infty} [\omega_{n_1^{(m)}} + \omega_{n_2^{(m)}} + \dots + \omega_{n_k^{(m)}} + \dots] = \sigma = \sum_1^{\infty} \omega_j,$$

чем и заканчивается доказательство.

Ряд (3.4:11) может быть записан в виде двойного ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{n_k^{(m)}}.$$

Обозначение для общего члена этого ряда можно упростить, опустив букву  $n$ , не участвующую в суммировании, и положив

$$\omega_{n_k^{(m)}} = \omega_{km}.$$

Тогда получим ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} w_{km}.$$

С точки зрения только что доказанного предложения этот двойной ряд представляет лишь одну из бесконечно многих возможных форм записи абсолютно сходящегося ряда  $\sum_1^{\infty} w_j$ .

3.5. Пусть  $E$  — произвольное множество точек комплексной плоскости. Точка  $z_0$  называется предельной для множества  $E$ , если любая окрестность точки  $z_0$  содержит бесконечное множество точек, принадлежащих  $E$ .

Очевидно, множество, состоящее из конечного числа точек, не имеет предельных точек. Сравним между собой понятия предельной точки последовательности и предельной точки множества. Предположим, что точки множества  $E$  изображают собой члены некоторой последовательности  $\{w_n\}$ . Тогда каждая точка  $z_0$ , предельная для множества  $E$ , будет предельной и для последовательности, так как любая окрестность точки  $z_0$  содержит бесконечное множество точек из  $E$ , а следовательно, и бесконечное множество членов последовательности  $\{w_n\}$ .

Может случиться, однако, что точка  $z_1$ , принадлежащая  $E$ , не является предельной для  $E$  и вместе с тем изображает бесконечное множество различных членов последовательности  $\{w_n\}$ :  $w_{k_1}, w_{k_2}, \dots, w_{k_n}, \dots$ . Такая точка будет предельной для последовательности  $\{w_n\}$ , не будучи предельной для множества  $E$ . В виде примера достаточно рассмотреть последовательность  $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$ , имеющую две предельные точки  $0$  и  $1$ , тогда как множество  $E$ , изображающее члены этой последовательности, состоит только из двух точек  $0$  и  $1$  и поэтому не имеет ни одной предельной точки.

Обращаясь к произвольному множеству  $E$ , покажем, что точка  $z_0$  является предельной для этого множества тогда и только тогда, когда существует последовательность  $\{w_n\}$  различных между собой точек из  $E$ , сходящихся к  $z_0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = z_0.$$

Пусть, в самом деле,  $z_0$  предельная точка множества  $E$ . Рассмотрим окрестность  $|z - z_0| < 1$  точки  $z_0$ . В ней содержится бесконечное множество точек из  $E$ . Пусть  $w_1$  — одна из них. Так как в окрестности  $|z - z_0| < \frac{1}{2}$  находится также бесконечное множество точек из  $E$ , то среди них должна существовать точка  $w_2 \neq w_1$ . Предположим, что мы нашли уже принадлежащие  $E$  и различные

между собой точки:  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  такие, что точки  $\omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) содержатся соответственно в окрестностях  $|z - z_0| < \frac{1}{k}$ . Так как окрестность  $|z - z_0| < \frac{1}{n+1}$  содержит бесконечное множество точек из  $E$ , то среди них существует точка  $\omega_{n+1}$ , принадлежащая  $E$  и отличная от точек  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ . Отсюда следует, что существует последовательность  $\{\omega_n\}$  различных между собой точек из  $E$ , таких, что  $|\omega_n - z_0| < \frac{1}{n}$ . Поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = z_0$ . Обратно: если известно, что существует последовательность  $\{\omega_n\}$  различных точек из  $E$ , такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = z_0$ , то

в любой окрестности точки  $z_0$  содержится бесконечное множество точек  $\omega_n$ , принадлежащих  $E$ , откуда следует, что  $z_0$  есть предельная точка множества  $E$ . Наше утверждение доказано. Очевидно, точки  $\omega_n$  можно было бы подчинить дополнительному условию: считать их все отличными от  $z_0$ .

Назовем множество  $E$  *ограниченным*, если существует круг  $|z| < R$ , содержащий все точки этого множества. Покажем, что *каждое ограниченное бесконечное множество обладает по крайней мере одной предельной точкой*. В самом деле, пусть  $\omega_1$  — какая-либо точка из  $E$ ; так как  $E$  — бесконечное множество, то существует точка  $\omega_2$ , принадлежащая  $E$  и отличная от  $\omega_1$ . Предположим, что мы нашли уже  $n$  различных точек, принадлежащих  $E$ :  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ ; тогда из бесконечного множества  $E$  можно будет извлечь еще одну точку  $\omega_{n+1}$ , отличную от каждой из этих точек. Таким образом, существует последовательность  $\{\omega_n\}$  различных между собой точек из  $E$ . Эта последовательность является ограниченной, как и само множество  $E$ . Поэтому она имеет по меньшей мере одну предельную точку  $z_0$ . Последняя должна быть предельной также для множества  $E$ , так как любая ее окрестность содержит бесконечное множество точек  $\omega_n$ , принадлежащих  $E$ . Утверждение доказано.

Из доказанных в этом пункте предложений следует, в частности, что *каждое ограниченное бесконечное множество содержит некоторую сходящуюся последовательность различных между собой точек этого множества*.

**3.6.** Пусть  $E$  — произвольное бесконечное множество,  $f(z)$  — функция, определенная на этом множестве, и  $z_0$  — точка, предельная для  $E$ .

Допустим, что для каждой сходящейся к  $z_0$  последовательности точек  $z_n$ , принадлежащих  $E$  и отличных от  $z_0$  (такие последовательности существуют в силу доказанного в предыдущем пункте), последовательность соответствующих значений функции  $\{f(z_n)\}$  сходится. Тогда для двух различных последовательностей  $\{z'_n\}$  и  $\{z''_n\}$ , удовлетворяющих указанным условиям,

пределы  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z'_n)$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z''_n)$  должны быть равны между собой.

В самом деле, последовательность

$$z'_1, z''_1, z'_2, z''_2, \dots, z'_n, z''_n,$$

очевидно, сходится к точке  $z_0$  и состоит из точек множества  $E$ , отличных от  $z_0$ ; по предположению, должна сходиться и последовательность соответствующих значений функции:

$$f(z'_1), f(z''_1), f(z'_2), f(z''_2), \dots, f(z'_n), f(z''_n),$$

Поэтому любые ее подпоследовательности должны иметь один и тот же предел, в частности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z''_n),$$

что мы и утверждали.

Обозначая общую величину предела последовательностей  $\{f(z_n)\}$  для всех возможных последовательностей  $\{z_n\}$ , сходящихся к  $z_0$  (и состоящих из точек  $z_n$ , принадлежащих  $E$  и отличных от  $z_0$ ) через  $A$  мы будем просто писать:

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} f(z) = A \quad (3.6:1)$$

и говорить, что  $f(z)$  имеет предел  $A$  в точке  $z_0$  (относительно множества  $E$ ).

Покажем, что условие (3.6:1) равносильно следующему:

Для  $f(z)$ ,  $z_0$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что из  $z \in E$ ,  $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$  и  $z \neq z_0$  вытекает, что

$$|f(z) - A| < \varepsilon. \quad (3.6:2)$$

Пусть выполнено условие (3.6:2). Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  и для сходящейся к  $z_0$  последовательности точек  $z_n$ , принадлежащих  $E$  и отличных от  $z_0$ , будем иметь:

$$|z_n - z_0| < \delta(\varepsilon)$$

при  $n' > N[\delta(\varepsilon)] = N'(\varepsilon)$ . Поэтому будут выполняться также неравенства

$$|f(z_n) - A| < \varepsilon$$

при  $n > N'(\varepsilon)$ , а это означает, что последовательность  $\{f(z_n)\}$  сходится и  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$ .

Так как это заключение справедливо для любой последовательности точек  $\{z_n\}$ , такой, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ ,  $z_n \in E$  и  $z_n \neq z_0$ , то  $\lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} f(z) = A$ . Итак, из условия (3.6:2) следует (3.6:1).

Пусть теперь выполнено условие (3.6:1), но условие (3.6:2) не выполнено. Тогда для некоторого  $\varepsilon > 0$  не найдется такого значения  $\delta > 0$ , чтобы из  $z \in E$ ,  $|z - z_0| < \delta$  и  $z \neq z_0$  вытекало неравенство  $|f(z) - A| < \varepsilon$ . Беря  $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{n}, \dots$ , получим, что в каждой окрестности  $|z - z_0| < \frac{1}{n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) существует точка  $z_n \in E$ ,  $z_n \neq z_0$ , такая, что  $|f(z_n) - A| \geq \varepsilon$ . Очевидно, что последовательность  $\{z_n\}$  сходится к  $z_0$  и, следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$ . Но это противоречит неравенству  $|f(z_n) - A| \geq \varepsilon > 0$ , чем и заканчивается доказательство равносильности условий (3.6:1) и (3.6:2).

Введенное нами определение предела функции в точке охватывает как частные случаи известные из анализа определения предела функций одного или двух действительных переменных, принимающих действительные значения. В самом деле, если, например,  $f(z) = u(x, y)$  есть действительная функция двух действительных переменных  $x$  и  $y$  ( $z = x + iy$ ),  $z_0 = x_0 + iy_0$  и  $A$  — действительное число, являющееся пределом функции  $f(z)$  в точке  $z_0$ :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A,$$

то, по предыдущему, это означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что

$$|f(z) - A| = |u(x, y) - A| < \varepsilon \text{ при } 0 < |z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta(\varepsilon).$$

Очевидно, полученные неравенства совпадают с теми, при помощи которых понятие предела вводится в курс анализа.

Возвращаясь к общему случаю функции, принимающей комплексные значения

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

покажем, что соотношение

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A, \quad (3.6:1)$$

где  $z = x + iy$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$ ,  $A = a + ib$ , эквивалентно двум соотношениям, в которых фигурируют только действительные функции  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$  и  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} u(x, y) = a, \quad \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} v(x, y) = b. \quad (3.6:3)$$

В самом деле, пусть (3.6:1) выполнено. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что

$$|f(z) - A| < \varepsilon \text{ при } |z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta(\varepsilon).$$

Но

$$|u(x, y) - a| = |\operatorname{Re} [f(z) - A]| \leq |f(z) - A| < \varepsilon$$

и

$$|v(x, y) - b| = |\operatorname{Im} [f(z) - A]| \leq |f(z) - A| < \varepsilon,$$

откуда, ввиду произвольности  $\varepsilon > 0$ , и следуют равенства (3.6:3).

Обратно: если выполнены последние соотношения, то имеем для произвольного  $\varepsilon > 0$ :

$$|u(x, y) - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \text{ и } |v(x, y) - b| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},$$

если

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = |z - z_0| < \delta'(\varepsilon).$$

Поэтому при том же условии

$$|f(z) - A| = \sqrt{(u - a)^2 + (v - b)^2} < \varepsilon,$$

откуда следует (3.6:1).

Из доказанной эквивалентности (3.6:1) и (3.6:3) вытекает, что элементарные предложения о пределах функций, известные из курса анализа, переносятся без изменений на функции комплексного переменного. А именно, если существуют пределы

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} f(z) = A \text{ и } \lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} \varphi(z) = B,$$

то существуют и пределы

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} (f(z) \pm \varphi(z)) = A \pm B, \quad \lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} [f(z) \cdot \varphi(z)] = A \cdot B$$

и

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} \frac{f(z)}{\varphi(z)} = \frac{A}{B}$$

(последнее — в предположении, что  $B \neq 0$ ).

**3.7.** Обратимся к понятию непрерывности функции комплексного переменного. Если точка  $z_0$ , предельная для бесконечного множества  $E$ , принадлежит этому множеству, и для функции  $f(z)$ , определенной на  $E$ , имеем:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0), \quad (3.7:1)$$

то  $f(z)$  называется непрерывной в точке  $z_0$ . Функция, непрерывная в каждой точке множества  $E$ , называется непрерывной на этом множестве. Так как в частном случае функций, принимающих действительные значения, понятие

предела в точке совпадает с известным из анализа, то и данное нами определение непрерывности в том же частном случае совпадает с известным из анализа. Положим,  $z = x + iy$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$  и  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Тогда, по предыдущему пункту, мы можем заменить соотношение (3.7:1) двумя эквивалентными ему:

$$\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} u(x, y) = u(x_0, y_0)$$

и

$$\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} v(x, y) = v(x_0, y_0). \quad (3.7:2)$$

Отсюда следует, что комплексная функция  $f(z)$  непрерывна в точке  $z_0 = x_0 + iy_0$  тогда и только тогда, когда действительная и мнимая части  $f(z)$ , рассматриваемые как функции двух действительных переменных  $x$  и  $y$ , непрерывны в точке  $(x_0, y_0)$ .

Отметим простейшие свойства непрерывных функций комплексного переменного, вытекающие из их определения.

Если  $f(z)$  и  $\varphi(z)$  непрерывны в точке  $z_0$ , то и  $f(z) \pm \varphi(z)$ ,  $f(z) \cdot \varphi(z)$  и  $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$  (последнее в предположении, что  $\varphi(z) \neq 0$ ) непрерывны в той же точке.

Предположим далее, что  $f(z)$  непрерывна на множестве  $E$  в точке  $z_0$ , причем ее значения  $w = f(z)$  сами образуют бесконечное множество  $\mathcal{E}$ , для которого  $w_0 = f(z_0)$  является предельной точкой. Пусть, наконец,  $\varphi(w)$  — функция, определенная на  $\mathcal{E}$  и непрерывная в точке  $w_0$ . Покажем тогда, что сложная функция  $\varphi[f(z)] = F(z)$  будет непрерывной в точке  $z_0$ . В самом деле, если  $\{z_n\}$  какая угодно последовательность точек из  $E$ , сходящаяся к  $z_0$ , то последовательность точек  $\{w_n = f(z_n)\}$ , в силу непрерывности  $f(z)$ , должна сходиться к пределу  $w_0 = f(z_0)$ . Поэтому последовательность  $\{\varphi(w_n) = \varphi[f(z_n)] = F(z_n)\}$ , в силу непрерывности  $\varphi(w)$ , будет сходиться к  $\varphi(w_0) = F(z_0)$ . Итак,  $\lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} F(z) = F(z_0)$ , чем наше утверждение и доказано.

Вследствие установленной выше связи между непрерывностью комплексной функции  $f(z)$  и действительных функций  $u(x, y) = \operatorname{Re} [f(z)]$  и  $v(x, y) = \operatorname{Im} [f(z)]$ , на комплексные непрерывные функции распространяются и другие свойства непрерывных действительных функций.

Прежде чем заняться ими, введем понятие замкнутого множества.

Множество  $F$  называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

Множества, не имеющие предельных точек (например, конечные, в частности, пустое множество или множество натуральных чисел 1, 2, 3, ...,  $n$ , и т. п.), также причисляются к замкнутым

множествам. Чтобы получить определение, явным образом охватывающее эти частные случаи, целесообразно формулировать его в отрицательной форме.

Множество  $E$  называется *замкнутым*, если точка, не принадлежащая  $E$ , не может быть предельной для  $E$ .

Другие примеры замкнутых множеств дают: множество всех точек плоскости, множество всех точек прямой или окружности, множество точек, принадлежащих произвольному отрезку (сегменту) прямой и т. п. Для первого примера (плоскости) это утверждение очевидно; в остальных оно легко проверяется, так как для точки  $z$ , не принадлежащей какому-либо из этих множеств  $F$ , можно построить окрестность, не содержащую ни одной точки из  $F$ . Следовательно, такая точка  $z$  не может быть предельной для  $F$ , и  $F$  замкнуто.

Рассмотрим функцию  $f(z)$ , непрерывную на ограниченном и замкнутом множестве  $F$ . Она обладает следующими свойствами:

1) *Свойство равномерной непрерывности.* Для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что неравенство  $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$  выполняется для любой пары точек  $z'$  и  $z''$ , удовлетворяющей условию  $|z' - z''| < \delta(\varepsilon)$ .

Новым, по сравнению со свойством непрерывности функции в определенной точке  $z_0$ , здесь является то, что  $\delta(\varepsilon)$  не зависит от выбора точек на множестве  $F$ .

2) *Ограниченность модуля функции.* Существует действительное положительное число  $M$ , такое, что неравенство

$$|f(z)| \leq M$$

выполняется во всех точках множества  $F$ .

3) *Достижимость верхней (и нижней) границы модуля.* На множестве  $F$  существует по крайней мере одна такая точка  $Z_0(z_0)$ , что неравенство  $|f(z)| \leq |f(Z_0)|$  ( $|f(z)| \geq |f(Z_0)|$ ) выполняется во всех точках из  $F$ .

Аналогичные свойства для непрерывных функций, принимающих действительные значения, обычно доказываются в курсах анализа \*); покажем, что они немедленно распространяются и на комплексные функции. В самом деле, пусть  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ . Если  $f(z)$  непрерывна во всех точках ограниченного и замкнутого множества  $F$ , то и  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  непрерывны во всех его точках (если их рассматривать как действительные функции двух действительных переменных). Поэтому они и равномерно непрерывны на этом множестве, т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует

---

\* ) См., например, Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, изд. 6, М., «Наука» 1966; т. 1, гл. II, § 5.



такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что неравенства

$$|u(x', y') - u(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{2}} \text{ и } |v(x', y') - v(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{2}}$$

выполняются для любой пары точек  $(x', y')$  и  $(x'', y'')$ , такой, что

$$\sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2} < \delta(\varepsilon).$$

Но тогда и

$$|f(z') - f(z'')| = \sqrt{[u(x', y') - u(x'', y'')]^2 + [v(x', y') - v(x'', y'')]^2} < \varepsilon$$

при  $|z' - z''| < \delta(\varepsilon)$  ( $z' = x' + iy'$ ,  $z'' = x'' + iy''$ ), т. е. свойство равномерной непрерывности распространяется и на комплексные функции.

Чтобы получить два других свойства, достаточно заметить, что модуль непрерывной функции также непрерывен. Это сразу же следует из неравенства

$$||f(z)| - |f(z_0)|| \leq |f(z) - f(z_0)|.$$

**3.8.** Пусть  $\Phi$  — какое-либо не пустое ограниченное замкнутое множество точек плоскости и  $z$  — произвольная точка плоскости. Назовем расстоянием  $\rho(z, \Phi)$  от точки  $z$  до множества  $\Phi$  нижнюю грань расстояний от  $z$  до различных точек, принадлежащих  $\Phi$ . Так как  $z - \xi$  ( $\xi \in \Phi$ ) есть непрерывная функция от  $\xi$ , определенная на  $\Phi$ , то и  $|z - \xi|$  есть непрерывная функция от  $\xi$  на  $\Phi$  и, следовательно, достигает своей нижней грани  $\rho(z, \Phi)$  в некоторой точке  $\xi_0 \in \Phi$ :  $\rho(z, \Phi) = |z - \xi_0|$ .

Итак, расстояние от точки  $z$  до множества  $\Phi$  совпадает с расстоянием от  $z$  до некоторой точки множества  $\Phi$ . Поэтому  $\rho(z, \Phi)$  обращается в нуль только для точек, принадлежащих  $\Phi$ ; для  $z$ , не принадлежащих  $\Phi$ , имеем:  $\rho(z, \Phi) > 0$ .

Рассматривая  $\rho(z, \Phi)$  как функцию от  $z$ , определенную во всей плоскости, покажем, что это непрерывная функция. Пусть, в самом деле,  $\rho(z, \Phi) = |z - \xi_0|$ ,  $\xi_0 \in \Phi$ . Тогда

$$|z' - \xi_0| = |(z' - z) + (z - \xi_0)| \leq |z' - z| + |z - \xi_0| = \rho(z, \Phi) + |z' - z|,$$

и, следовательно,

$$\rho(z', \Phi) \leq |z' - \xi_0| \leq \rho(z, \Phi) + |z' - z|,$$

откуда

$$\rho(z', \Phi) - \rho(z, \Phi) \leq |z' - z|.$$

Поменяв в этом рассуждении роли  $z'$  и  $z$ , найдем

$$\rho(z, \Phi) - \rho(z', \Phi) \leq |z - z'|.$$

Следовательно,

$$|\rho(z, \Phi) - \rho(z', \Phi)| \leq |z - z'|,$$

и достаточно взять  $|z - z'| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon$ , чтобы иметь также

$$|\rho(z, \Phi) - \rho(z', \Phi)| < \varepsilon.$$

Из доказанной непрерывности функции  $\rho(z, \Phi)$  следует, в частности, что если  $z$  принадлежит какому-либо ограниченному замкнутому множеству точек  $F$ , то  $\rho(z, \Phi)$  будет также непрерывной на нем и, следовательно, будет достигать в некоторой точке  $z_0 \in F$  своей нижней грани

$$\inf_{z \in F} \rho(z, \Phi) = \rho(z_0, \Phi).$$

Последнее число обладает тем свойством, что для любой пары точек  $z \in F$  и  $\xi \in \Phi$  имеем

$$|z - \xi| \geq \rho(z, \Phi) \geq \rho(z_0, \Phi).$$

С другой стороны, в силу известных нам свойств расстояния  $\rho(z_0, \Phi)$  существует такая точка  $\xi_0 \in \Phi$ , что

$$\rho(z_0, \Phi) = |z_0 - \xi_0|.$$

Найденное число представляет, очевидно, нижнюю грань расстояний пар точек, принадлежащих соответственно множествам  $F$  и  $\Phi$ . Мы убедились попутно, что эта нижняя грань достигается для некоторой пары точек  $z_0 \in F$  и  $\xi_0 \in \Phi$ . Это число называется расстоянием между двумя множествами  $F$  и  $\Phi$  и обозначается через  $\rho(F, \Phi)$ :

$$\rho(F, \Phi) = \inf_{z \in F, \xi \in \Phi} |z - \xi| = \inf_{z \in F} \rho(z, \Phi).$$

В этом определении множества  $F$  и  $\Phi$  играют совершенно одинаковую роль. Поэтому мы могли бы поменять их местами (в записи):

$$\rho(F, \Phi) = \rho(\Phi, F) = \inf_{\xi \in \Phi} \rho(\xi, F).$$

Очевидно, понятие расстояния от точки до множества есть частный случай понятия расстояния между двумя множествами  $F$  и  $\Phi$  (когда  $F$  состоит из одной только точки  $z$ ).

Так как расстояние между двумя ограниченными замкнутыми множествами  $F$  и  $\Phi$  есть в то же время расстояние между точками некоторой пары  $z_0 \in F$  и  $\xi_0 \in \Phi$ :

$$\rho(F, \Phi) = |z_0 - \xi_0|,$$

то  $\rho(F, \Phi)$  обращается в нуль тогда и только тогда, когда множества  $F$  и  $\Phi$  имеют по крайней мере одну общую точку. В частности, если  $F$  и  $\Phi$  не имеют общих точек, то  $\rho(F, \Phi) > 0$ .

Легко видеть, что в случае, когда  $F$  или  $\Phi$  не замкнуты или замкнуты, но неограниченны, нижняя грань расстояний между парами точек, принадлежащих соответственно  $F$  и  $\Phi$ , может равняться нулю и тогда, когда эти множества не имеют ни одной общей точки. В качестве примера достаточно взять за  $F$  совокупность предельных точек множества  $\Phi$ , не принадлежащих  $\Phi$  (если  $\Phi$  не замкнуто), или взять в качестве  $F$  множество всех точек, расположенных на асимптотах гиперболы, а в качестве  $\Phi$  — множество точек самой этой гиперболы.

Читатель легко докажет, однако, что если  $F$  и  $\Phi$  — замкнутые непустые множества и только одно из них неограниченно, то снова существует пара точек  $z_0 \in F$  и  $\zeta_0 \in \Phi$  такая, что расстояние между  $z_0$  и  $\zeta_0$  совпадает с нижней гранью расстояний всевозможных пар точек  $z \in F$  и  $\zeta \in \Phi$ . В этом случае, следовательно, нижняя грань расстояний между  $z \in F$  и  $\zeta \in \Phi$  также будет отлична от нуля, если  $F$  и  $\Phi$  не имеют общих точек.

#### § 4. Связность множеств. Кривые и области

**4.1.** Множество  $E$  называется с в я з н ы м, если при любом его разбиении на два непустых подмножества  $E_1$  и  $E_2$  без общих точек, по крайней мере одно из этих множеств содержит предельную точку для другого множества.

Пустое множество и множество, состоящее только из одной точки, также относятся к связным. Это оправдывается, если представить определение связности в следующей отрицательной форме: множество  $E$  называется с в я з н ы м, если не существует разбиения его на два непустых множества без общих точек  $E_1$  и  $E_2$ , из которых ни одно не содержит предельных точек другого.

Примером несвязного множества может служить любое конечное множество, состоящее более чем из одной точки, или, более общо, множество, образованное точками конечного числа замкнутых множеств  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , попарно не имеющих общих точек.

Весьма важный класс замкнутых и связных множеств образуют множества точек, принадлежащих непрерывным кривым.

Относительно каждой комплексной функции  $z = f(t)$  действительного переменного  $t$ , определенной и непрерывной на некотором сегменте  $\alpha \leq t \leq \beta$  (т. е. пары непрерывных действительных функций  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ), говорят, что она о п р е д е л я е т или задает н е п р е р ы в н у ю к р и в у ю (линию) в плоскости  $z$ . Значения функции называют при этом т о ч к а м и к р и в о й,

совокупность всех значений функции — множеством точек кривой (часто для краткости просто кривой).

В частности, точки  $z_0 = f(\alpha)$  и  $Z = f(\beta)$  называются начальн о й и к о н е ч н о й точкой кривой. Эти точки могут совпадать друг с другом, и тогда кривая называется з а м к н у т о й.

Действительное переменное  $t$  называется обычно параметром, а равенство  $z = f(t)$ , связывающее значения параметра с точками кривой, — параметрическим уравнением, или просто у р а в н е н и е м к р и в о й.

Две кривые  $L$  и  $\Lambda$ , определяемые функциями  $z = f(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ) и  $z = \varphi(\tau)$  ( $\alpha \leq \tau \leq \beta$ ) рассматриваются как т о ж д е с т в е н н ы е, если уравнение одной из них можно преобразовать в уравнение другой посредством непрерывной и строго монотонной замены параметра, т. е. если существует такая непрерывная и строго монотонная функция  $\tau = \lambda(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ), что функция  $z = \varphi[\lambda(t)]$  совпадает с  $z = f(t)$  на сегменте  $[a, b]$  \*).

При этом в случае, когда функция  $\tau = \lambda(t)$ , осуществляющая переход от одного параметрического представления к другому, является возрастающей, говорят, что на обеих кривых задано о д и н а к о в о е н а п р а в л е н и е, если же убывающей, то р а з н о е. В последнем случае начальная точка  $L$  служит конечной для  $\Lambda$  и наоборот. Кривую  $\Lambda$ , отличающуюся от  $L$  только направлением обхода, мы будем иногда обозначать через  $L_-$ . В силу того, что обозначения  $L$  и  $\Lambda$  являются равноправными, мы можем также обозначать  $L$  через  $\Lambda_-$ .

Одна и та же точка  $z$ , соответствующая различным значениям параметра, из которых по крайней мере одно отлично от крайних его значений, называется к р а т н о й точкой кривой. Кривая, не имеющая кратных точек, называется ж о р д а н о в о й.

Иллюстрируем все эти определения примерами.

1) Функции  $z = t$ ,  $z = t^2$ ,  $z = 1 - t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) определяют одну и ту же непрерывную кривую, изображаемую отрезком действительной оси, заключенным между точками  $z = 0$  и  $z = 1$ . Первому и второму заданиям соответствует одно и то же направление на кривой (начальная точка — в нуле, конечная — в единице), третьему заданию — противоположное направление (начальная точка — в единице, конечная — в нуле). Очевидно, кривая эта не имеет кратных точек, следовательно, является жордановой. Ее начальная и конечная точки не совпадают — это незамкнутая жорданова кривая.

2) Функции  $z = t$  и  $z = \sin \pi t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) определяют различные непрерывные кривые  $L$  и  $\Lambda$ , так как не существует монотон-

\*) Тогда, конечно, и  $f[\lambda^{-1}(\tau)]$  совпадает с  $\varphi(\tau)$  на сегменте  $[\alpha, \beta]$ . Здесь  $\lambda^{-1}(\tau)$  — функция, обратная по отношению к  $\lambda(t)$ .

ного преобразования параметра, переводящего одну из них в другую. В самом деле, такое преобразование должно переводить монотонную функцию  $f(t) = t$  также в монотонную, тогда как функция  $\varphi(t) = \sin \pi t$  не является монотонной на сегменте  $[0, 1]$ .

Заметим, что множества точек кривых  $z = t$  и  $z = \sin \pi t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) совпадают со множеством точек сегмента  $[0, 1]$ , хотя обе кривые различны. Следовательно, совпадение множеств точек двух непрерывных кривых, будучи необходимым условием для тождественности этих кривых, отнюдь не является условием достаточным.

Отметим еще, что кривая  $z = t$  в этом примере — жорданова незамкнутая кривая. Кривая же  $z = \sin \pi t$  имеет кратные точки ( $\sin \pi t = \sin \pi (1 - t)$ ,  $0 < t < \frac{1}{2}$ ) и, следовательно, не является жордановой. Кроме того, она замкнута, так как ее конец совпадает с началом ( $\sin(\pi \cdot 0) = \sin(\pi \cdot 1) = 0$ ).

3) Пусть  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  — система прямолинейных, определенным образом ориентированных отрезков, расположенных на плоскости так, что конец предыдущего отрезка  $\Delta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n-1$ ) совпадает с началом следующего  $\Delta_{j+1}$ . Обозначая через  $a_j$  комплексное число, изображаемое вектором  $\Delta_j$ , а через  $z_0$  — начальную точку отрезка  $\Delta_1$ , мы можем получить на сегменте  $0 \leq t \leq n$  простейшую непрерывную функцию, определяющую кривую, изображенную системой данных отрезков:

$$z = z_0 + a_1 + \dots + a_{j-1} + a_j(t - j + 1) \\ (j-1 \leq t \leq j, j = 1, 2, \dots, n).$$

Кривая эта называется л о м а н о й, отрезки  $\Delta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) — з в е н ь я м и ломаной. Ломаная замкнута или не замкнута, в зависимости от того, совпадает ли конец отрезка  $\Delta_n$  с началом  $\Delta_1$  или не совпадает. Жордановой кривой она будет только при условии отсутствия самопересечений, т. е. при условии, что два различных звена могут иметь не более одной общей точки, причем этой общей точкой может быть только конец предшествующего и начало следующего звеньев, а в случае замкнутой ломаной — еще и конец последнего и начало первого звеньев.

4) Легко видеть, что окружность с центром  $z_0$  и радиусом  $r$ :

$$z = z_0 + r(\cos t + i \sin t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

есть замкнутая жорданова кривая.

Назовем непустое, ограниченное, замкнутое и связное множество к о н т и н у у м о м \*) и докажем, что множество точек любой непрерывной кривой есть континуум.

---

\*) При таком определении каждая точка является континуумом.

В самом деле, пусть  $L$  — непрерывная кривая, заданная уравнением  $z = f(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ) и  $\xi$  — точка, предельная для множества точек кривой. Тогда, по п. 3.5, существует последовательность  $\{z_n\}$  различных точек кривой  $L$ , сходящаяся к  $\xi$ . Положим,  $z_n = f(t_n)$ ; тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = \xi$ . Выберем, далее, из бесконечной последовательности точек  $\{t_n\}$ , принадлежащих ограниченному множеству  $\alpha \leq t \leq \beta$ , сходящуюся подпоследовательность  $\{t_{n_k}\}$  (п. 3.2). Тогда будем иметь:  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n_k} = t_0$ , где  $t_0$ , очевидно, принадлежит сегменту  $[\alpha, \beta]$ . Следовательно, в силу непрерывности функции  $f(t)$  имеем:  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(t_{n_k}) = f(t_0)$ . С другой стороны,  $\{f(t_{n_k})\}$ , будучи подпоследовательностью последовательности  $\{f(t_n)\}$ , должна иметь тот же самый предел  $\xi$ :  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(t_{n_k}) = \xi$ . Следовательно,  $\xi = f(t)$ , т. е.  $\xi$  принадлежит кривой  $L$ . Замкнутость множества точек непрерывной кривой доказана. Докажем теперь, что это множество связное. Допуская противное, мы должны иметь разбиение  $L$  на два непустых множества —  $L_1$  и  $L_2$  без общих точек, таких, что ни одно из них не содержит предельных точек другого множества. Соответственно с этим и сегмент  $\alpha \leq t \leq \beta$  разобьется на два непустых множества —  $E_1$  и  $E_2$  без общих точек: одно из них образовано теми значениями параметра  $t$ , которым соответствуют точки из  $L_1$ , другое — значениями  $t$ , которым соответствуют точки из  $L_2$ . Убедимся в том, что ни одно из множеств  $E_1, E_2$  не должно содержать предельной точки другого. В самом деле, если бы, например, точка  $t' \in E_1$  была предельной для  $E_2$ , то в  $E_2$  нашлась бы последовательность точек  $\{t_n''\}$ , сходящаяся к  $t'$  (п. 3.5). В силу непрерывности функции  $f(t)$  отсюда вытекало бы, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n'') = f(t')$ , т. е. что точка  $f(t') \in L_1$  является предельной для  $L_2$  \*), что противоречит допущению, сделанному относительно  $L_1$  и  $L_2$ .

Итак, предположение о несвязности кривой  $L$  сводится к аналогичному предположению относительно сегмента прямой  $[\alpha, \beta]$ ; остается опровергнуть последнее. Заметим, с этой целью, что  $E_1$  и  $E_2$  — замкнутые множества. Действительно, каждая предельная точка  $E_1$  принадлежит сегменту  $[\alpha, \beta]$ , и так как она не может принадлежать  $E_2$ , то должна принадлежать  $E_1$ . Поэтому  $E_1$  замкнуто. Точно так же замкнуто и  $E_2$ . Из того, что  $E_1$  и  $E_2$  — непустые замкнутые множества без общих точек, вытекает, что расстояние между ними  $\rho(E_1, E_2)$  отлично от нуля.

\*) В рассматриваемом случае точка  $f(t')$ , предельная для последовательности  $\{f(t_n'')\}$ , будет предельной и для множества, изображающего члены этой последовательности, так как ни одна из точек  $f(t_n'')$  не совпадает с  $f(t')$  ( $L_1$  и  $L_2$  не имеют общих точек).

Разделим  $[\alpha, \beta]$  на равные сегменты длиной  $\delta < \rho(E_1, E_2)$ :  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ , так что конечная точка каждого из них является начальной точкой следующего. Очевидно, любой из этих сегментов  $\delta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) целиком принадлежит одному из множеств  $E_1$  или  $E_2$ ; в противном случае мы пришли бы к противоречивому выводу, что расстояние между  $E_1$  и  $E_2$  не больше, чем  $\delta$ , т. е. меньше  $\rho(E_1, E_2)$ . Пусть, например,  $\delta_1$  принадлежит  $E_1$ . Тогда и начальная точка сегмента  $\delta_2$  (совпадающая с конечной точкой сегмента  $\delta_1$ ), а следовательно, и весь отрезок  $\delta_2$  принадлежит  $E_1$ . Если же установлено, что  $\delta_k$  принадлежит  $E_1$  ( $k < n$ ), то начальная точка сегмента  $\delta_{k+1}$ , совпадающая с конечной точкой сегмента  $\delta_k$ , также принадлежит  $E_1$ , а следовательно, и весь отрезок  $\delta_{k+1}$  принадлежит  $E_1$ . Поэтому все отрезки  $\delta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) должны принадлежать лишь одному из множеств  $E_1$  и  $E_2$ , так что другое оказывается пустым, в противоречии с предположением. Этим противоречием и заканчивается все доказательство.

Теперь мы можем доказать, что, вообще, *всякое множество  $E$ , любые две точки которого  $z'$  и  $z''$  можно соединить непрерывной кривой  $L$*  (т. е. построить кривую, для которой одна из точек  $z'$ ,  $z''$  будет начальной, а другая — конечной), *все точки которой принадлежат  $E$ , является связным*. (Заметим, что заключающееся здесь достаточное условие связности отнюдь не является необходимым.)

В самом деле, пусть  $E$  разложено каким-либо образом на два непустых подмножества  $E_1$  и  $E_2$ , не имеющих общих точек. Пусть  $z'$  — фиксированная точка  $E_1$  и  $z''$  — точка  $E_2$ . Соединим  $z'$  и  $z''$  непрерывной кривой  $L$ , все точки которой принадлежат  $E$ , и пусть  $L_1$  и  $L_2$  — подмножества множества точек кривой  $L$ , образованные всеми точками из  $L$ , принадлежащими, соответственно,  $E_1$  или  $E_2$ . Очевидно, это — непустые множества ( $z' \in L_1$ ,  $z'' \in L_2$ ), не имеющие общих точек. В силу связности  $L$ , по крайней мере одно из них, например  $L_1$ , должно содержать предельную точку другого. Пусть  $z_1$  — эта точка. Она принадлежит  $L_1$ , а следовательно, и  $E_1$ . Кроме того, она является предельной для  $L_2$ , а следовательно, предельной и для  $E_2 \supset L_2$ .

Итак, мы нашли, что при любом разбиении множества  $E$  на непустые множества, не имеющие общих точек, по крайней мере одно из них должно содержать предельную точку другого. Этим доказана связность множества  $E$ . Так как любые две точки плоскости можно соединить, например, отрезком прямой, то отсюда следует, в частности, что плоскость есть связное множество.

Для ограниченного замкнутого множества условие связности можно представить в следующем виде: *ограниченное замкнутое множество  $F$  является связным, т. е. континуумом, если для любых двух его точек  $z_0$  и  $z^*$  и для любого  $\epsilon > 0$  можно указать конечное*

число точек этого множества:  $z_0, z_1, \dots, z_n = z'$ , таких, что  $|z_k - z_{k-1}| < \varepsilon$  ( $k = 1, \dots, n$ ).

В самом деле, допустим, что это условие выполнено и  $F$  не является связным. Тогда  $F$  можно разложить на два непустых подмножества  $F_1$  и  $F_2$ , не имеющих общих точек, и таких, что ни одно из них не содержит предельных точек другого. Так как все предельные точки подмножества  $F_j$  ( $j = 1, 2$ ) должны принадлежать  $F$ , то отсюда следует, что они принадлежат  $F_j$ , т. е.  $F_j$  есть замкнутое множество. Итак,  $F_1$  и  $F_2$  ограничены, замкнуты и не имеют общих точек. Поэтому расстояние  $\rho(F_1, F_2) > 0$ ; выбирая точку  $z_0 \in F_1$  и  $z' \in F_2$ , мы, очевидно, не сможем указать конечного числа точек из  $F$ :  $z_0, z_1, \dots, z_n = z'$ , таких, что  $|z_k - z_{k-1}| < \rho(F_1, F_2)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Действительно, среди них должны быть две точки с соседними номерами:  $z_{k-1}$  и  $z_k$ , первая из которых принадлежит  $F_1$ , а вторая  $F_2$ , и, следовательно,  $|z_k - z_{k-1}| \geq \rho(F_1, F_2)$ . Из этого противоречия и следует высказанное предложение.

Применим этот признак связности к доказательству следующей теоремы: *если  $\{F_n\}$  есть последовательность континуумов таких, что  $F_{n+1} \subset F_n$ , то их пересечение  $F$  (т. е. множество точек, общих всем  $F_n$ ) есть также континуум.*

Рассмотрим последовательность точек  $\{z_n\}$ , где  $z_n \in F_n$ . В силу условия  $F_{n+1} \subset F_n$ , точки  $z_n, z_{n+1}, \dots$  принадлежат  $F_n$ ; отсюда вытекает, что все предельные точки последовательности  $\{z_n\}$  принадлежат  $F_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), а следовательно, и  $F$ . Но множество предельных точек последовательности  $\{z_n\}$  не пусто (так как последовательность  $\{z_n\}$  ограничена); поэтому  $F$  — непустое множество. Если оно не имеет предельных точек, то  $F$  замкнуто. Допустим, что предельные точки  $F$  существуют и  $z_0$  — одна из них. Так как  $F \subset F_n$ , то  $z_0$  является предельной для  $F_n$  и, следовательно, принадлежит  $F_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ); поэтому  $z_0 \in F$ . Итак,  $F$  — непустое, замкнутое (и, очевидно, ограниченное) множество.

Докажем, наконец, что  $F$  — связное множество. Допуская противное, найдем, что  $F$  может быть разбито на два непустых, ограниченных, замкнутых множества  $F_0$  и  $F^*$  без общих точек. Пусть  $z_0 \in F_0$  и  $z' \in F^*$ ; так как  $z_0 \in F_n$  и  $z' \in F_n$  при любом  $n$ , то существуют точки  $z_0, z_1, \dots, z_\nu = z'$  множества  $F_n$  такие, что  $|z_k - z_{k-1}| < \frac{1}{3} \rho(F_0, F^*) = \varepsilon$  ( $k = 1, \dots, \nu$ ). Среди них должна быть по крайней мере одна точка  $z_k$ , расстояние которой до  $F_0$  и до  $F^*$ , а следовательно, и до  $F$ , превышает  $\varepsilon$ .

В самом деле, если бы для каждой точки  $z_0, z_1, \dots, z_\nu$  расстояние до одного из множеств  $F_0$  или  $F^*$  было бы не больше  $\varepsilon$ , то все эти точки можно было бы разбить на два непустых класса, для точек одного из которых расстояния до  $F_0$  не больше, чем  $\varepsilon$ , а для другого — расстояния до  $F^*$  не больше, чем  $\varepsilon$ . Очевидно, расстояние



между любыми двумя точками разных классов должно быть больше  $\varepsilon$ , потому что  $\varepsilon = \frac{1}{3}\rho(F_0, F')$ . Но, с другой стороны, если  $\mu < \nu$  есть наибольший из номеров точек первого класса, то точка с номером  $\mu + 1$  должна принадлежать второму классу, и мы получаем для точек  $z_\mu$  и  $z_{\mu+1}$  разных классов неравенство

$$|z_{\mu+1} - z_\mu| < \varepsilon.$$

Из этого противоречия и вытекает существование требуемой точки  $z_h$ . Мы обозначим ее через  $\zeta_n$ , чтобы отметить принадлежность этой точки множеству  $F_n$ .

Итак,  $\zeta_n \in F_n$  и  $\rho(\zeta_n, F) > \varepsilon$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Для любой предельной точки  $\zeta_0$  последовательности  $\{\zeta_n\}$  будем иметь  $\rho(\zeta_0, F) \geq \varepsilon$ . Но это невозможно, так как все предельные точки последовательности  $\{\zeta_n\}$  принадлежат  $F$ . Итак,  $F$  должно быть связным множеством. Доказательство теоремы закончено.

**4.2.** Множество  $O$  называется *открытым*, если для каждой точки его существует окрестность, все точки которой также принадлежат  $O$ . Примерами открытого множества являются: множество всех точек плоскости, множество всех точек, не принадлежащих данному конечному множеству прямых или окружностей, множество всех точек, лежащих внутри данного круга, и т. п. Пустое множество также причисляется к открытым.

Открытое и связное множество называется *областью*. В силу доказанного выше, открытое множество будет связным и, следовательно, будет областью, если любые две точки его можно соединить непрерывной кривой, принадлежащей  $O$ . Но справедливо и обратное: *любые две точки произвольной области можно соединить непрерывной кривой, принадлежащей области*.

Будем доказывать это предложение от противного. Если оно неверно, то в некоторой области  $G$  существуют две точки  $z'$  и  $z''$ , которые нельзя соединить непрерывной кривой, принадлежащей области. Обозначим тогда через  $G_1$  множество тех точек из  $G$ , которые можно соединить с  $z'$  непрерывной кривой, принадлежащей  $G$ , а через  $G_2$  — множество всех остальных точек. Так как  $z'$  принадлежит  $G$  вместе с некоторой своей окрестностью  $|z - z'| < \rho$  (по определению открытого множества), то все точки этой окрестности войдут в  $G_1$ : их можно соединять с  $z'$  отрезками прямых. Итак,  $G_1$  и  $G_2$  — непустые множества ( $z'' \in G_2$ ), не имеющие общих точек. Пусть  $z_1 \in G_1$ ; тогда существует непрерывная кривая  $L_1$ , соединяющая  $z'$  с  $z_1$  и принадлежащая  $G$ . Если  $|z - z_1| < \rho_1$  — окрестность точки  $z_1$ , принадлежащая  $G$ , то всякую точку  $z$  этой окрестности можно соединить с  $z_1$  отрезком прямой  $\Delta_1$ , также принадлежащим  $G$ . Следовательно, такая точка соединяется с  $z'$  непрерывной кривой  $L_1 + \Delta_1$ , принадлежащей  $G$ ; итак,  $z \in G_1$ ,

т. е. окрестность  $|z - z_1| < \rho_1$  точки  $z_1$  целиком принадлежит  $G_1$ . Мы видим, что точка  $z_1$  не может быть предельной для множества  $G_2$ .

Пусть, наконец,  $z_2 \in G_2$ ; тогда снова берем окрестность  $|z - z_2| < \rho_2$  точки  $z_2$ , принадлежащую  $G$ . Если бы какая-либо точка  $z$  этой окрестности принадлежала  $G_1$ , то ее можно было бы соединить с  $z'$  непрерывной кривой  $L_2$ , принадлежащей  $G$ ; но  $z$  можно соединить с  $z_2$  отрезком прямой  $\Delta_2$ , также принадлежащим области  $G$ . Следовательно, точка  $z_2$  соединялась бы с  $z'$  непрерывной кривой  $L_2 + \Delta_2$ , принадлежащей  $G$ , и поэтому принадлежала бы  $G_1$ , вопреки предположению ( $z_2 \in G_2$ ). Итак, ни одна точка из окрестности  $|z - z_2| < \rho_2$  не может принадлежать множеству  $G_1$ . Поэтому ни одна точка множества  $G_2$  не может быть предельной для  $G_1$ . Мы видим, что множество  $G$  разбивается на два непустых множества  $G_1$  и  $G_2$ , без общих точек, ни одно из которых не содержит предельной точки другого. Но это противоречит связности множества  $G$ . Доказательство закончено.

Из сказанного следует, что определение области можно формулировать следующим образом:

Открытое множество  $O$  называется областью, если любые две точки его можно соединить непрерывной кривой  $L$ , все точки которой принадлежат  $O$ .

Пусть  $O$  — произвольное открытое множество и  $z_0$  — какая-либо точка его. Рассмотрим множество всех точек  $O$ , которые можно соединить с  $z_0$  непрерывными кривыми, принадлежащими  $O$ . Очевидно, это множество является непустым (в него входит точка  $z_0$  вместе с ее принадлежащей  $O$  окрестностью), открытым (если  $z_1$  можно соединить с  $z_0$  непрерывной кривой  $\gamma$ , то и любую точку  $z$  окрестности точки  $z_1$ , принадлежащей  $O$ , можно соединить с  $z_0$  непрерывной кривой, состоящей из  $\gamma$ , и из прямолинейного отрезка с концами  $z_1$  и  $z_2$ ) и, по самому определению, связным. Поэтому указанное множество есть область. Оно называется с в я з н о й к о м п о н е н т о й  $O$  (содержащей  $z_0$ ).

Связную компоненту  $O$  можно характеризовать также как наибольшую область, принадлежащую  $O$  и содержащую данную точку  $z_0$ .

Очевидно, две компоненты  $O$ , имеющие общую точку, должны полностью совпадать. Если  $O$  не есть область, т. е. если  $O$  несвязно, то существуют по крайней мере две различные компоненты  $O$ . Совокупность компонент  $O$  может быть бесконечной (представим себе, например, множество  $O$ , образованное кругами радиуса  $\leq \frac{1}{2}$ , с центрами в точках  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ; здесь компонентами  $O$  являются отдельные круги). Во всяком случае эта совокупность должна быть не более чем счетной. В самом деле, фиксируем

в каждой компоненте  $O$  по одной точке с рациональными координатами  $x$  и  $y$ . Мы получаем тогда взаимно однозначное отображение совокупности всех компонент на некоторое подмножество счетного множества, откуда и следует наше утверждение.

Относительно любого открытого множества, в частности области  $O$ , все точки плоскости распадаются на следующие три категории:

1) точки, принадлежащие  $O$ ; они называются *внутренними точками* для  $O$ ;

2) точки, не принадлежащие  $O$  и являющиеся предельными для нее; они называются *граничными точками* для  $O$ ;

3) точки, не принадлежащие  $O$  и не являющиеся предельными для  $O$ ; они называются *внешними точками* для  $O$ .

Множество внутренних точек совпадает с  $O$  и, следовательно, непусто всякий раз, когда  $O$  непусто. Множество граничных точек — оно называется *границей* открытого множества (области) — будет пустым в случае, когда  $O$  есть вся плоскость. Если множество  $O$  отлично от всей плоскости, то должно существовать непустое множество  $E$  точек, не принадлежащих  $O$ . Оно может состоять только из граничных и внешних точек. Если внешних точек нет, то  $E$  состоит из граничных точек, которых, таким образом, должно быть не менее одной. Если же  $E$  содержит внешние точки, то их, очевидно, должно быть бесконечное множество (ибо для внешней точки существует окрестность, все точки которой также внешние). Убедимся в том, что тогда и множество граничных точек должно быть бесконечным. А именно, покажем, что на любом прямолинейном отрезке, один из концов которого есть внутренняя, а другой — внешняя точка для  $O$ , должна лежать по крайней мере одна граничная точка. В противном случае весь отрезок оказался бы разбитым на два непустых множества  $E_1$  и  $E_2$  — внутренних и внешних точек для  $O$ . Но ни одна точка множества  $E_1$  (внутренняя точка для  $O$ ) не может быть предельной точкой множества  $E_2$  (множества внешних точек для  $O$ ), так же как и ни одна точка множества  $E_2$  не может быть предельной для  $E_1$ . Мы пришли к противоречию со свойством связности отрезка, откуда и следует, что отрезок, помимо внутренних и внешних точек, должен содержать еще и граничные точки для  $O$  (по крайней мере одну). Из изложенного вытекает, что если открытое множество  $O$  не есть вся плоскость, то множество его граничных точек не может быть пустым. Однако и в этом случае точки третьей категории — внешние — могут отсутствовать. В самом деле, каждая внешняя точка характеризуется, очевидно, тем, что для нее существует окрестность, ни одна из точек которой не принадлежит данному множеству  $O$ . Если, следовательно, множество точек, не принадлежащих  $O$ , не содержит ни одного кружка, то оно не может содержать и ни одной внешней точки для  $O$ , т. е. все состоит из граничных точек. Так будет, напри-

мер, в случае, когда  $O$  образовано всеми точками, не принадлежащими некоторой прямой (или окружности). Последняя составляет границу для  $O$ ; внешние точки здесь отсутствуют.

4.3. Докажем, что граница  $\Gamma$  любого открытого множества  $O$  есть замкнутое множество. Для этого достаточно доказать, что точка  $z_0$ , не принадлежащая  $\Gamma$ , не может быть предельной для  $\Gamma$ . И действительно, такая точка должна быть либо внутренней, либо внешней для  $O$ . В обоих случаях существует окрестность  $z_0$ , не содержащая ни одной точки из  $\Gamma$ . Следовательно,  $z_0$  не может быть предельной для  $\Gamma$ , и замкнутость множества  $\Gamma$  установлена.

Присоединяя к открытому множеству  $O$  все точки его границы, получим некоторое множество  $\bar{O}$ , которое называется з а м ы к а н и е м множества  $O$ . Покажем, что  $\bar{O}$  — замкнутое множество. Для этого достаточно показать, что ни одна точка  $z_0$ , не принадлежащая  $\bar{O}$ , не может быть предельной для  $\bar{O}$ . И действительно, такая точка может быть только внешней для  $O$ . Поэтому существует окрестность точки  $z_0$ , не содержащая ни одной точки из  $O$ , а следовательно, не содержащая и граничных точек для  $O$ . В указанной окрестности не будет находиться ни одной точки из  $\bar{O}$ , откуда и вытекает, что  $z_0$  не есть предельная точка для  $\bar{O}$ . Следовательно,  $\bar{O}$  — замкнутое множество.

В случае, когда  $O$  есть некоторая область, замыкание множества  $O$  называется з а м к н у т о й о б л а с т ь ю. Так, например, получаем замкнутый круг, состоящий из всех точек, лежащих внутри окружности и на ней; замкнутый круг отличают от открытого круга, под которым разумеют область, образованную всеми точками, лежащими внутри окружности.

Пусть  $G$  — ограниченная область, т. е. область, все точки которой содержатся в некотором круге с центром в начале координат  $|z| < R$ . Тогда все точки, лежащие вне этого круга, будут внешними и по отношению к  $G$ . Отсюда следует, что граничные точки области  $G$  должны удовлетворять условию  $|z| \leq R$ , так что граница  $\Gamma$  ограниченной области  $G$  есть замкнутое и ограниченное множество.

Будем называть ограниченную область  $G$  о д н о с в я з н о й или м н о г о с в я з н о й, в зависимости от того, является ли ее граница  $\Gamma$  связным или несвязным множеством. Внутренность круга дает простейший пример односвязной области, а множество точек, расположенных между двумя концентрическими окружностями, — круговое кольцо, — пример многосвязной области.

Класс многосвязных областей допускает дальнейшее подразделение. Односвязные области характеризуются тем, что их граница есть континуум. Если граница многосвязной области состоит из конечного числа  $n$  ( $n > 1$ ) континуумов, попарно не имеющих

общих точек \*), то область  $G$  называется конечно-связной, а именно,  $n$ -связной. Наконец, если границу многосвязной области нельзя разложить на конечное число континуумов, попарно не имеющих общих точек, то область называется бесконечно-связной.

Если внутри какого-либо открытого круга  $K$  выделим  $n - 1$  ( $n > 1$ ) замкнутых кругов  $K_1, K_2, \dots, K_{n-1}$ , попарно не имеющих общих точек, то множество всех точек круга  $K$ , не принадлежащих ни одному из  $K_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n - 1$ ), представит  $n$ -связную область  $G$ . Ее граница состоит из  $n$  окружностей:  $C$  и  $c_j$ , ограничивающих соответственно круги  $K$  и  $K_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n - 1$ ).

Если мы возьмем, для определенности, единичный круг  $|z| < 1$  и исключим из него замкнутые круги  $\left| z - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{2n(n+1)}$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ), а также его центр  $z = 0$ , то получим бесконечно-связную область, граница которой состоит из окружностей  $|z| = 1$ ;  $\left| z - \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{2n(n+1)}$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ) и из точки  $z = 0$ .

**4.4.** Рассмотрим произвольное замкнутое множество точек  $F$ . Множество  $O$  всех точек плоскости, не принадлежащих  $F$ , есть открытое множество. В самом деле, если  $O$  не является пустым (в этом случае предложение очевидно), то точки его, не принадлежащие  $F$ , не могут быть и предельными для  $F$ . Поэтому для каждой из них существует окрестность, свободная от точек множества  $F$ , и следовательно, целиком принадлежащая  $O$ .

Пусть  $z_0 \in O$ ; обозначим через  $G_0$  множество всех точек из  $O$ , которые можно соединить с  $z_0$  непрерывными кривыми, принадлежащими  $O$ . Очевидно,  $G_0$  есть область. Она называется смежной по отношению к замкнутому множеству  $F$ . Легко видеть,

---

\*) Легко убедиться в том, что если данное множество допускает какое-либо разбиение на конечное число континуумов, попарно не имеющих общих точек, то это разбиение единственно. В самом деле, пусть  $f_1, \dots, f_n$  и  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  — два различных разбиения одного и того же множества на континуумы. Тогда по крайней мере один из континуумов одного разбиения (пусть  $\varphi_j$ ) должен содержать точки, как принадлежащие, так и не принадлежащие некоторому континууму другого разбиения (пусть  $f_k$ ). Обозначим множество точек континуума  $\varphi_j$ , принадлежащих  $f_k$ , через  $\varphi_{jk}$ , а множество всех остальных точек континуума  $\varphi_j$  — через  $\varphi'_{jk}$  (они должны принадлежать какому-либо из континуумов  $f_1, f_{k-1}, f_{k+1}, \dots, f_n$ ).

Очевидно, каждая предельная точка множества  $\varphi_{jk}$  является предельной и для  $f_k$ , а потому содержится в  $f_k$  и не может принадлежать  $\varphi'_{jk}$ . Точно так же предельная точка множества  $\varphi'_{jk}$  должна быть предельной для какого-либо из континуумов  $f_l$  ( $l \neq k$ ); поэтому она содержится в  $f_l$  и не может принадлежать  $\varphi_{jk}$ . Мы нашли, что континуум  $\varphi_j$  допускает разбиение на два непустых множества  $\varphi_{jk}$  и  $\varphi'_{jk}$  без общих точек, из которых ни одно не содержит предельных точек другого. Но это противоречит определению континуума; тем самым наше утверждение доказано.

что различных областей, смежных с  $F$ , может быть бесконечно много.

В виде примера достаточно представить себе, что вся плоскость разграфлена на клетки равноотстоящими прямыми, параллельными осям координат. Здесь множество  $F$  образовано всеми точками этих прямых, а точки, лежащие внутри каждой клетки, образуют области, смежные с  $F$ .

В случае, когда  $F$  есть замкнутая жорданова кривая  $\gamma$ , существуют две и только две различные области, смежные с  $\gamma$ . При этом  $\gamma$  является их общей границей. Это утверждение, легко проверяемое на отдельных примерах (например, в случае, когда  $\gamma$  есть окружность), составляет содержание теоремы Жордана. Мы будем пользоваться ею в дальнейшем, отсылая читателя за доказательством к курсам топологии \*). Заметим, что одна из двух областей всегда является ограниченной — *внутренность* кривой Жордана, другая — неограниченной — *внешность* кривой Жордана (пример — внутренность и внешность окружности). С помощью этих понятий легко установить следующее, фундаментальное для теории функций, свойство односвязных областей: *если  $\gamma$  — замкнутая жорданова кривая, принадлежащая односвязной области  $G$ , то внутренность  $\gamma$  также принадлежит области  $G$ .*

В самом деле, пусть  $\zeta$  — какая-либо точка из  $\gamma$ . Так как  $\zeta$  есть точка области  $G$ , то существует окрестность этой точки, принадлежащая  $G$ . В этой окрестности должны содержаться в бесконечном числе как точки внешности, так и внутренности  $\gamma$  (это следует из того, что  $\zeta$  является граничной точкой и для той и для другой области). Отсюда вытекает, что и во внешности и во внутренности  $\gamma$  содержатся точки области  $G$ . Но внешность  $\gamma$  не может вся принадлежать  $G$ , иначе область  $G$  была бы неограниченной (а это противоречит принятому нами выше определению односвязной области). Следовательно, во внешности  $\gamma$  должны содержаться как точки, принадлежащие области  $G$ , так и не принадлежащие ей. Отсюда следует, что во внешности  $\gamma$  должны лежать граничные точки  $G$ . Действительно, допуская противное, заключаем, что внешность  $\gamma$  разбивается на два непустых множества без общих точек — внешние и внутренние точки для  $G$ , ни одно из которых не содержит предельных точек другого, а это противоречит связности внешности  $\gamma$ . Теперь уже легко показать, что внутренность  $\gamma$  вся принадлежит  $G$ . Действительно, в противном случае в ней заключались бы точки, как принадлежащие  $G$ , так и не принадлежащие ей, и среди них на основании того же рассуждения, что и выше, — граничные точки области  $G$ . Отсюда следовало бы далее, что вся граница

---

\*) См. П. С. Александров, Комбинаторная топология (глава вторая: теорема Жордана).

области  $G$  разбивается на два непустых множества без общих точек — одно во внутренности, другое во внешности  $\gamma$ . Так как ни одно из них не может содержать предельных точек другого (точка внутренности  $\gamma$  не может быть предельной для внешности и обратно), то мы пришли бы к выводу, что граница области  $G$  есть несвязное множество, что противоречит односвязности области  $G$ . Итак, внутренность  $\gamma$  целиком принадлежит  $G$ , и наше утверждение доказано.

Можно без труда доказать, что каждая ограниченная область, обладающая тем свойством, что для любой замкнутой жордановой

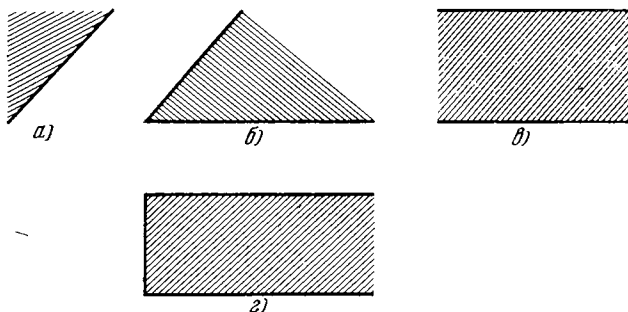


Рис. 5.

кривой  $\gamma$ , принадлежащей  $G$ , внутренность  $\gamma$  также принадлежит  $G$ , является односвязной.

Среди неограниченных областей, к которым мы до сих пор не прилагали понятий односвязности или многосвязности, имеются области, обладающие указанным свойством односвязных областей: если замкнутая жорданова кривая принадлежит области, то и внутренность ее также принадлежит области. Такого рода области мы также будем называть односвязными, распространяя на них первоначальное определение односвязной области.

Таким образом, односвязными будут, например, следующие области: плоскость, полуплоскость (рис. 5, а), угол (рис. 5, б), полоса (рис. 5, в), полуполоса (рис. 5, г) и др. Напротив, внешность круга, например, не будет односвязной областью и при этом последнем определении.

4.5. Мы докажем здесь несколько вспомогательных предложений, на которые придется ссылаться в дальнейшем \*).

---

\*) Читатель может пропустить их при первом чтении, обращаясь к предложениям этого пункта лишь в связи с ссылками, встречающимися в дальнейшем изложении.

Сделаем сначала следующее общее замечание: если  $z_0$  — точка области  $G$  и  $\Delta$  — расстояние ее от границы этой области (в случае, когда граница есть пустое множество, мы будем считать  $\Delta = \infty$ ), то круг  $|z - z_0| < \Delta$  содержится в области  $G$ . Это утверждение очевидно в случае, когда граница области есть пустое множество, так как тогда  $G$  совпадает со всей плоскостью и указанный круг также совпадает со всей плоскостью. Пусть граница области  $G$  не есть пустое множество и, следовательно,  $\Delta < \infty$ . Круг  $|z - z_0| < \Delta$  не может содержать граничных точек  $G$ , так как все они лежат вне этого круга или на окружности  $|z - z_0| = \Delta$  (по крайней мере одна граничная точка лежит на этой окружности). Но он не может содержать и внешних точек для  $G$ , так как на прямой отрезке  $z_0 z_1$ , соединяющем внутреннюю точку  $z_0$  с внешней точкой  $z_1$ , должна лежать по крайней мере одна граничная точка. Итак, круг  $|z - z_0| < \Delta$  содержится в области  $G$ .

а) Любые две точки области можно соединить жордановой кривой, причем в качестве этой кривой можно всегда брать некоторую ломаную.

Пусть  $z'$  и  $z''$  — две точки области  $G$ . По известному свойству области, доказанному в п. 4.2, существует непрерывная кривая  $L: z = f(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ), принадлежащая  $G$  и соединяющая  $z'$  и  $z''$ . Обозначим через  $\Delta$  ( $\Delta > 0$ ) расстояние между кривой  $L$  и границей области  $G$ . В силу непрерывности функции  $f(t)$  сегмент  $[\alpha, \beta]$  можно разбить точками  $t_0 = \alpha < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$  на столь мелкие части, чтобы выполнялись неравенства

$$|f(t_{j+1}) - f(t_j)| < \Delta \quad (j = 0, 1, \dots, n-1).$$

Так как каждый круг  $|z - f(t_j)| < \Delta$  принадлежит области  $G$  (расстояние от  $f(t_j)$  до границы области  $G$  не меньше  $\Delta$ ) и содержит точку  $f(t_{j+1})$ , то отрезки прямых  $\Delta_j$ , соединяющие  $f(t_j)$  с  $f(t_{j+1})$  ( $j = 0, 1, \dots, n-1$ ), также принадлежат  $G$ . Поэтому ломаная  $\Lambda$  со звеньями  $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}$ , соединяющая  $z'$  с  $z''$ , лежит в области  $G$ . Если она не имеет самопересечений, т. е. кратных точек, то наше утверждение доказано. В противном случае существуют два звена  $\Delta_j$  и  $\Delta_k$  ( $0 \leq j < k$ ), имеющие общую точку  $z_0$ , причем в случае, когда звенья соседние ( $k = j + 1$ ), эту точку можно считать отличной от конечной точки звена  $\Delta_j$  (являющейся начальной точкой звена  $\Delta_{j+1}$ ). Если  $k > j + 1$ , то, удаляя из  $\Lambda$  замкнутую ломаную, состоящую из части звена  $\Delta_j$  от точки  $z_0$  до его конечной точки, всех звеньев ломаной  $\Lambda$ , с номерами, заключающимися между  $j$  и  $k$ , и, наконец, из части звена  $\Delta_k$  от начальной точки этого звена до точки  $z_0$ , получим новую ломаную  $\Lambda'$ , по-прежнему соединяющую  $z'$  и  $z''$ , но содержащую по крайней мере одним звеном меньше, чем  $\Lambda$ . Если  $k = j + 1$ , то одно из звеньев  $\Delta_j$  и  $\Delta_{j+1}$ , имеющих общую точку  $z_0$ , помимо другой общей точки, являющейся концом



для  $\Delta_j$  и началом для  $\Delta_{j+1}$ , должно быть частью другого звена. Пусть, например,  $\Delta_j$  является частью  $\Delta_{j+1}$ . Тогда исключаем из ломаной  $\Lambda$  замкнутую ломаную, состоящую из  $\Delta_j$  и части звена  $\Delta_{j+1}$  от начальной точки этого звена до начальной точки звена  $\Delta_j$ . Получаем новую ломаную  $\Lambda''$ , соединяющую  $z'$  и  $z''$  и содержащую одним или двумя звеньями меньше, чем  $\Lambda$ . Итак, во всех случаях наличие самопересечения у ломаной  $\Lambda$  позволяет заменить ее другой ломаной  $\Lambda'$  или  $\Lambda''$ , по-прежнему лежащей в области  $G$  и соединяющей те же точки  $z'$  и  $z''$ , но содержащей по крайней мере на одно звено меньше по сравнению с  $\Lambda$ . Повторяя эту операцию исключения замкнутых ломаных конечное число раз, мы получим, наконец, ломаную  $\lambda$ , не имеющую самопересечений (быть может, состоящую из одного звена) и соединяющую  $z'$  и  $z''$  внутри области  $G$ . Этим и заканчивается доказательство нашего утверждения.

б) Для каждого ограниченного и замкнутого множества точек  $F$ , принадлежащего некоторой области  $G$ , можно указать другое ограниченное и замкнутое множество  $E$ , также принадлежащее  $G$  и содержащее каждую точку  $F$  вместе с ее замкнутой окрестностью некоторого фиксированного радиуса  $\rho > 0$ .

Это предложение утверждает возможность погружения каждого замкнутого множества  $F$  точек области  $G$  внутрь другого замкнутого множества  $E$ , также принадлежащего этой области.

Пусть сначала  $G$  есть вся плоскость. Если  $|z| \leq \rho$  есть круг, содержащий все точки множества  $F$ , то в качестве  $E$  можно взять замкнутый круг вдвое большего радиуса:  $|z| \leq 2\rho$ . Очевидно, все требования теоремы будут тогда выполнены.

Пусть теперь  $G$  не есть вся плоскость. Тогда граница области  $G$  есть непустое множество, и можно говорить о расстоянии от  $F$  до границы области  $G$ . Обозначим это расстояние через  $d$  ( $d > 0$ ) и рассмотрим множество  $E$  тех точек плоскости, для которых расстояние до множества  $F$  не превосходит  $\frac{d}{2}$ .

Очевидно, каждая точка множества  $F$  является внутренней по отношению к  $E$ , причем вместе с каждой точкой  $z_0 \in F$  множеству  $E$  принадлежит также и круг  $|z - z_0| \leq \frac{d}{2}$ . Далее, само множество  $E$ , в силу замечания, сделанного в начале этого пункта, принадлежит области  $G$ .

Остается показать, что  $E$  — замкнутое множество. Пусть  $z'$  — предельная точка множества  $E$  и  $\{z_n\}$  — последовательность точек из  $E$ , сходящаяся к  $z'$ . В силу непрерывности расстояния точки от множества, последовательность чисел  $\rho(z_n, F)$  сходится к числу  $\rho(z', F)$ , и так как  $\rho(z_n, F) \leq \frac{d}{2}$  (по построению множества  $E$ ), то и  $\rho(z', F) \leq \frac{d}{2}$ . Отсюда следует, что  $z'$  принад-

лежит  $E$ . Итак, теорема доказана полностью. Указанное в ней число  $\rho$  можно принять равным  $\frac{d}{2}$ .

в) Пусть  $E$  — непустое открытое подмножество области  $G$ , обладающее тем свойством, что каждая его предельная точка, принадлежащая области  $G$ , принадлежит самому  $E$ ; тогда  $E$  необходимо совпадает со всей областью  $G$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Допустим, что теорема неверна. Тогда существуют точки области  $G$ , не принадлежащие  $E$ . Обозначим их множество через  $E_1$ . В силу связности области, по крайней мере одно из множеств  $E$  или  $E_1$  должно содержать точки, предельные для другого. Этим множеством не может быть  $E$ , так как оно является открытым (все точки, попадающие в достаточно малую окрестность точки из  $E$ , также принадлежат  $E$ ). Поэтому должна существовать точка из  $E_1$ , предельная для  $E$ . По условию теоремы такая точка должна принадлежать  $E$ . Мы пришли к противоречию с тем, что эта точка содержится в  $E_1$ . Из обнаруженного противоречия и вытекает справедливость теоремы.

Заметим, что условия этой теоремы будут, в частности, выполнены в том случае, когда для каждой точки  $z_0 \in E$  ее окрестность радиуса  $d(z_0)$ , равного расстоянию от  $z_0$  до границы области  $G$ , также принадлежит  $E$ . В самом деле, пусть  $z_1$  — точка, предельная для  $E$ , и  $d(z_1)$  — ее расстояние до границы области  $G$ . Тогда для точки  $z_0 \in E$ , лежащей в круге  $|z - z_1| < \frac{d(z_1)}{2}$ , расстояние  $d(z_0)$  до границы области  $G$  будет больше, чем  $\frac{d(z_1)}{2}$ , и, следовательно,

круг  $|z - z_0| < d(z_0)$ , по условию принадлежащий  $E$ , будет содержать точку  $z_1$ . Итак, каждая точка  $z_1 \in G$ , предельная для  $E$ , принадлежит  $E$ . Поэтому условия теоремы выполняются, и  $E = G$ .

г) **Л е м м а Г е й н е - Б о р е л я.** Пусть  $F$  — ограниченное замкнутое множество и  $\{K\}$  — система кругов, покрывающих  $F$ , в том смысле, что каждая точка из  $F$  является внутренней по крайней мере для одного из кругов  $K$ . При этих условиях существует конечное число кругов:  $K_1, K_2, \dots, K_n$  ( $n \geq 1$ ), принадлежащих данной системе кругов и покрывающих  $F$ .

Будем доказывать это предложение от противного. Пусть  $D_1$  — квадрат со сторонами, параллельными осям координат, и с центром в начале координат, содержащий множество  $F$ . Оси координат делят его на четыре равных квадрата, содержащих внутри и на сторонах какие-то подмножества множества  $F$  (некоторые из этих четырех подмножеств могут быть пустыми). Если бы теорема была справедлива для каждого из этих подмножеств и каждое из них покрывалось бы конечным числом кругов из системы  $\{K\}$ , то то же самое имело бы место и для всего  $F$ . Поэтому, отрицая справедли-

вость теоремы для всего  $F$ , мы должны отрицать ее справедливость по крайней мере для одного из указанных подмножеств множества  $F$ . Пусть  $D_2$  — квадрат, содержащий это подмножество. Деля его на четыре равных квадрата, получим новый квадрат  $D_3$ , содержащий некоторое подмножество множества  $F$ , к которому теорема неприменима. Неограниченно повторяя это рассуждение, получим последовательность вложенных друг в друга квадратов:

$$D_1 \supset D_2 \supset \dots \supset D_n \supset \dots$$

длины сторон которых, очевидно, стремятся к нулю и при этом каждый квадрат содержит подмножество множества  $F$ , к которому доказываемая теорема неприменима.

Обозначим через  $\xi$  точку плоскости, к которой стягивается последовательность  $\{D_n\}$ . Так как каждый из этих квадратов  $D_n$  содержит бесконечное множество точек из  $F$  (если бы их было конечное число, то сразу нашлось бы конечное число кругов из системы  $\{K\}$ , покрывающих это множество), то  $\xi$  является предельной точкой для  $F$ . В самом деле, любая ее окрестность содержит все квадраты, начиная с некоторого из них, и, следовательно, содержит бесконечное множество точек из  $F$ . Из того, что  $F$  — замкнутое множество, вытекает, что  $\xi$  принадлежит  $F$ , и, следовательно, по условию теоремы существует круг из системы  $\{K\}$ , содержащий точку  $\xi$ . Этот же круг содержит каждый квадрат  $D_n$  с достаточно большим номером  $n$ , откуда вытекает, что он покрывает принадлежащее  $D_n$  подмножество множества  $F$ . Мы пришли к явному противоречию с допущением, в силу которого ни одно из указанных подмножеств нельзя покрыть конечным числом кругов из системы  $\{K\}$ . Этим противоречием и заканчивается доказательство теоремы.

Заметим, что в приложениях этой теоремы система  $\{K\}$  обычно состоит из кругов с центрами в точках множества  $F$ , т. е. из некоторой совокупности окрестностей точек этого множества. Разумеется, для конечной системы этих окрестностей, покрывающих  $F$ , лишь конечное число точек множества  $F$  будет находиться в центрах окрестностей; остальные точки из  $F$  лежат в кругах  $K_1, \dots, K_n$ , не совпадая с их центрами.

## § 5. Бесконечность. Стереографическая проекция и расширенная плоскость

5.1. В теории функций комплексного переменного большую роль играет б е с к о н е ч н о с т ь ( $\infty$ ), которую мы будем рассматривать как несобственное комплексное число. Для того чтобы надлежащим образом определить это понятие, введем предварительно некоторую интерпретацию комплексных чисел, вполне

естественную в вопросах аналитического характера. С этой целью рассмотрим все возможные сходящиеся последовательности комплексных чисел и распределим их по классам, относя в один и тот же класс две последовательности тогда и только тогда, когда пределы их одинаковы.

Мы будем обозначать этот класс символом  $\alpha$ , где  $\alpha$  — комплексное число, к которому сходятся все последовательности класса, и называть его *собственным комплексным числом*. Относительно каждой последовательности, сходящейся к  $\alpha$ , мы будем говорить также, что она *входит в  $\alpha$*  (подразумевая под  $\alpha$  класс последовательностей) или *принадлежит  $\alpha$* .

Если  $\alpha$  и  $\beta$  — два класса (различные или одинаковые) и  $\{u_n\}$  и  $\{v_n\}$  — последовательности, принадлежащие соответственно  $\alpha$  и  $\beta$ , так что  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \beta$ , то последовательности  $\{u_n + v_n\}$ ,  $\{u_n - v_n\}$ ,  $\{u_n \cdot v_n\}$  и  $\left\{\frac{u_n}{v_n}\right\}$  (последняя в предположении, что  $\beta \neq 0$  и все числа  $v_n \neq 0$ ) сходятся соответственно к числам  $\alpha + \beta$ ,  $\alpha - \beta$ ,  $\alpha \cdot \beta$  и  $\frac{\alpha}{\beta}$ , т. е. принадлежат к классам, обозначенным теми же символами. Беря вместо  $\{u_n\}$  и  $\{v_n\}$  какие-либо другие последовательности  $\{u'_n\} \in \alpha$  и  $\{v'_n\} \in \beta$ , получим снова, что

$$\{u'_n \pm v'_n\} \in \alpha \pm \beta, \quad \{u'_n \cdot v'_n\} \in \alpha \cdot \beta \quad \text{и} \quad \left\{\frac{u'_n}{v'_n}\right\} \in \frac{\alpha}{\beta}$$

Итак, классы, в которые входят последовательности, получающиеся путем алгебраической операции, выполненной над членами произвольных последовательностей двух данных классов  $\alpha$  и  $\beta$ , принадлежат, соответственно, к вполне определенным классам:  $\alpha + \beta$ ,  $\alpha - \beta$ ,  $\alpha \cdot \beta$  и  $\frac{\alpha}{\beta}$ . Естественно поэтому называть последние классы суммой, разностью, произведением и частным классов  $\alpha$  и  $\beta$ . Очевидно, при таком определении совокупность всех классов представит поле, изоморфное полю комплексных чисел: изоморфизм осуществляется, если классу всех последовательностей, сходящихся к числу  $\alpha$ , поставить в соответствие само число  $\alpha$ . Мы получили нужную нам интерпретацию поля комплексных чисел: *комплексное число  $\alpha$  можно истолковывать так же как класс всех последовательностей, сходящихся к  $\alpha$* .

Для геометрического представления классов будем по-прежнему пользоваться точками плоскости. Последовательность комплексных чисел  $\{u_n\}$  входит в класс  $\alpha$  тогда и только тогда, когда предельная точка (единственная) последовательности точек, изображающих числа  $u_n$ , совпадает с  $\alpha$ . Теперь мы построим расширенное

множество комплексных чисел, присоединяя к собственным комплексным числам (классам сходящихся последовательностей) одно несобственное число — новый класс последовательностей. А именно, объединим в класс все последовательности  $\{u_n\}$  комплексных чисел, для каждой из которых и для любого положительного  $M > 0$  можно указать такое  $N$  (зависящее от последовательности и от числа  $M$ ), что  $|u_n| > M$  при  $n > N$ . Этот класс мы назовем несобственным комплексным числом или бесконечностью и будем обозначать его символом  $\infty$ . Относительно каждой из последовательностей  $\{u_n\}$ , в него входящих, будем говорить, что она сходится к бесконечности, и писать  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$ .

По аналогии с тем, как были введены операции над собственными комплексными числами, можно установить операции и для расширенного множества комплексных чисел. Пусть снова  $\alpha, \beta$  — два класса (собственных или несобственных) и  $\{u_n\}, \{v_n\}$  — какие-либо принадлежащие им последовательности. Если последовательность  $\{u_n + v_n\}$  входит в некоторый класс  $\gamma$  нашего расширенного множества, причем переход от  $\{u_n\} \in \alpha$  и  $\{v_n\} \in \beta$  к каким-либо другим последовательностям  $\{u'_n\} \in \alpha$  и  $\{v'_n\} \in \beta$  не влияет на результат, т. е.  $\{u'_n + v'_n\}$  входит по-прежнему в класс  $\gamma$ , то  $\gamma$  называется суммой  $\alpha$  и  $\beta$ :  $\gamma = \alpha + \beta$ . Но если класса, в который входила бы последовательность  $\{u_n + v_n\}$ , вовсе не существует или же он может изменяться при замене  $\{u_n\}$  на  $\{u'_n\}$  и  $\{v_n\}$  на  $\{v'_n\}$ , то говорят, что  $\alpha$  и  $\beta$  не имеют суммы, т. е. выражение  $\alpha + \beta$  объявляется лишенным смысла. Очевидно, введенное таким образом понятие сложения для расширенного множества комплексных чисел согласуется с прежним, когда  $\alpha$  и  $\beta$  — собственные числа (здесь сумма всегда существует). Если же по крайней мере один из классов  $\alpha$  и  $\beta$  несобственный, то мы приходим к следующим результатам:

1)  $\alpha + \infty = \infty + \alpha = \infty$  ( $\alpha$  — собственное число), выражение же  $\infty + \infty$  лишено смысла.

Чтобы убедиться в последнем, достаточно, например, взять две последовательности из класса  $\infty$ :  $1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 9, 9, \dots$  и  $-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, \dots$ . Складывая их почленно, получаем последовательность  $0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$ , которая, очевидно, не входит ни в один собственный класс, а также не входит и в несобственный класс.

Совершенно так же рассматриваются и другие операции: вычитание, умножение и деление классов  $\alpha$  и  $\beta$ . В случае операции деления нужно требовать только, чтобы были отличны от нуля члены последовательности, фигурирующей в качестве делителя.

Получаются следующие результаты:

2)  $a - \infty = \infty - a = \infty$  ( $a$  — собственное число), выражение  $\infty - \infty$  лишено смысла;

3)  $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$  ( $a$  — собственное число, отличное от нуля),  $\infty \cdot \infty = \infty$ ;

4)  $\frac{a}{\infty} = 0$ ,  $\frac{\infty}{a} = \infty$  ( $a$  — собственное число), выражение  $\frac{\infty}{\infty}$  лишено смысла;

5)  $\frac{a}{0} = \infty$  ( $a$  — собственное число, отличное от нуля), выражение  $\frac{0}{0}$  лишено смысла.

5.2. Как впервые заметил Риман, для целей геометрического представления расширенного множества комплексных чисел удобно воспользоваться сферой. Рассмотрим какую-либо сферу  $S$  радиуса 1 и плоскость  $\Pi$ , проходящую через ее центр  $O$  (рис. 6). Выбрав на  $\Pi$  прямоугольную систему координат  $xu$  с началом в  $O$ , мы сможем изображать на плоскости  $\Pi$  все собственные комплексные числа. Каждому из них поставим в соответствие определенную точку сферы. Для этой цели проведем через  $O$  диаметр  $PP'$ , перпендикулярный к плоскости  $\Pi$ , и соединим один из его концов  $P$  с произвольной точкой  $A \in \Pi$  прямолинейным отрезком. Отрезок этот (или его продолжение) пересечет сферу в некоторой точке  $A'$ , отличной от  $P$ . Эту точку сферы мы поставим в соответствие точке  $A$ . Очевидно, таким образом между всеми точками сферы (исключая точку  $P$ ) и точками плоскости установится взаимно однозначное соответствие. Такой способ установления соответствия между точками плоскости и сферы называется *стереографической проекцией* (сферы на плоскость или плоскости на сферу). Если точка  $A$  изображала на плоскости определенное комплексное число  $a$ , то мы будем рассматривать соответствующую ей точку  $A'$  сферы как образ того же самого комплексного числа.

Будем пользоваться для удобства речи географической терминологией, называя окружность пересечения сферы  $S$  и плоскости  $\Pi$  экватором сферы, точки  $P$  и  $P'$ , соответственно, — северным и южным полюсами, большие круги, проходящие через  $P$  и  $P'$ , — меридианами и, в частности, меридиан, лежащий в плоскости

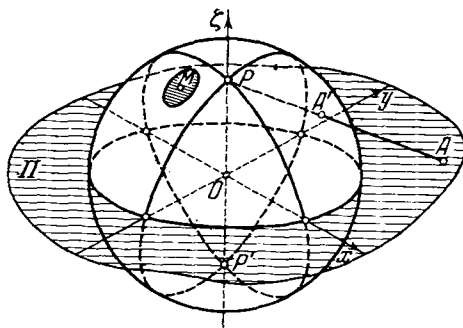


Рис. 6.

$POx$ , — начальным меридианом, и т. п. Тогда легко видеть, что точки плоскости  $\Pi$ , лежащие внутри единичной окружности (совпадающей с экватором), изображаются на сфере точками южного полушария (содержащего  $P'$ ), а точки, лежащие вне единичной окружности, изображаются точками северного полушария (содержащего  $P$ ). Точно так же точки верхней полуплоскости ( $y > 0$ ) изображаются точками восточного полушария (с которым встречается

положительная часть оси  $Oy$ ), а точки нижней полуплоскости ( $y < 0$ ) — точками западного полушария, и т. д.

Введем на  $S$  сферические (географические) координаты — широту  $\varphi$ , отсчитываемую от экватора в пределах от 0 до  $\frac{\pi}{2}$  в северном полушарии и в пределах от 0 до  $-\frac{\pi}{2}$  — в южном, и долготу  $\lambda$ , отсчитываемую от начального меридиана (точнее от точки пересечения его с положительной частью оси  $x$ ) в положительном направлении в пределах от 0 до  $\pi$  (включи-

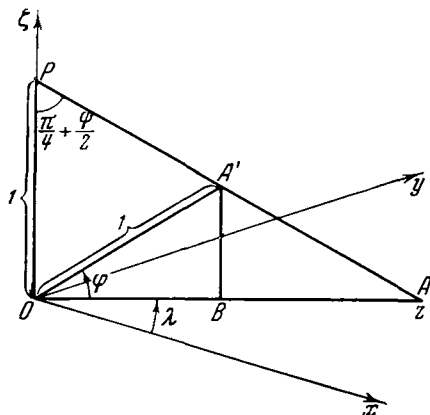


Рис. 7.

тельно) и в отрицательном направлении в пределах от 0 до  $-\pi$  (исключительно).

Из рисунка 7 заключаем, что при стереографической проекции

$$\arg z = \lambda \text{ и } |z| = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Следовательно, точка сферы с координатами  $\lambda$  и  $\varphi$  изображает комплексное число

$$z = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) (\cos \lambda + i \sin \lambda). \quad (5.2:1)$$

Обратно: комплексное число  $z \neq 0$  изображается точкой сферы с координатами  $\lambda = \arg z$  и  $\varphi = 2 \operatorname{arctg} |z| - \frac{\pi}{2}$ .

Отметим еще формулы, связывающие декартовы координаты точки сферы  $A'(\xi, \eta, \zeta)$  и точки плоскости  $A(x, y, 0)$  при стереографической проекции.

Так как

$$\xi = \cos \varphi \cdot \cos \lambda, \quad \eta = \cos \varphi \cdot \sin \lambda, \quad \zeta = \sin \varphi$$

и

$$\cos \varphi = \sin \left( \frac{\pi}{2} + \varphi \right) = \frac{2 \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} = \frac{2|z|}{1 + |z|^2},$$

$$\sin \varphi = -\cos \left( \frac{\pi}{2} + \varphi \right) = -\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} = \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2},$$

то

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \cos \varphi \cos \lambda = \frac{2|z| \cos \lambda}{1 + |z|^2} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \\ \eta &= \cos \varphi \sin \lambda = \frac{2|z| \sin \lambda}{1 + |z|^2} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \\ \zeta &= \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \end{aligned} \right\} \quad (5.2:2)$$

Далее:

$$z = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) (\cos \lambda + i \sin \lambda) = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} (\cos \lambda + i \sin \lambda) =$$

$$= \frac{\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2}} (\cos \lambda + i \sin \lambda) = \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} (\cos \lambda + i \sin \lambda) = \frac{\xi + i \eta}{1 - \zeta},$$

откуда

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}. \quad (5.2:3)$$

Полученные формулы полностью решают вопрос о стереографической проекции.

Из них, в частности, вытекает круговое свойство стереографической проекции: окружностям на поверхности сферы при стереографической проекции соответствуют на плоскости также окружности или прямые (последние соответствуют окружностям сферы, проходящим через ее северный полюс). В самом деле, любая окружность сферы  $S$  получается при пересечении  $S$  некоторой плоскостью

$$A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0. \quad (5.2:4)$$

Отсюда в силу формул (5.2:2) следует, что соответствующие точки плоскости удовлетворяют уравнению

$$Ax + By + \frac{1}{2}(C + D)(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(D - C) = 0. \quad (5.2:5)$$



Последнее является уравнением окружности при  $C + D \neq 0$  и уравнением прямой при  $C + D = 0$ . Но  $C + D$  есть результат подстановки в правую часть уравнения (5.2:4) координат северного полюса  $(0, 0, 1)$ . Итак, мы получаем в плоскости  $\Pi$  прямую или окружность, в зависимости от того, проходит ли окружность на сфере через северный полюс или не проходит.

Отметим, в частности, что в случае, когда плоскость (5.2:4) параллельна плоскости экватора, т. е. когда окружность сферы является одной из параллелей, то  $A = B = 0$ , и в плоскости получается окружность с центром в начале координат:

$$(C + D)(x^2 + y^2) = C - D.$$

Если же плоскость (5.2:4) проходит через ось  $PP'$ , т. е. окружность сферы является одним из меридианов, то  $C = D = 0$  и в плоскости получится прямая, проходящая через начало координат:

$$Ax + By = 0.$$

Конечно, эти факты можно усмотреть и непосредственно из определения стереографической проекции.

Каждая окружность  $\gamma$  на поверхности сферы, не проходящая через данную точку сферы  $M'$ , разбивает сферу на две части, одна из которых содержит  $M'$ , а другая не содержит; будем называть первую из них **окрестностью точки  $M'$** .

Коль скоро понятие окрестности точки на сфере установлено, можно немедленно распространить понятия предельной точки, замкнутого и открытого множества, непрерывной кривой, области и т. п. для множеств точек, рассматриваемых на  $S$ .

Например, некоторая точка сферы будет называться предельной для данного множества  $E$  тогда и только тогда, когда любая ее окрестность содержит бесконечное множество точек, принадлежащих  $E$ . Далее, относительно каждой тройки действительных функций  $\xi = \varphi(t)$ ,  $\eta = \psi(t)$ ,  $\zeta = \chi(t)$  действительного параметра  $t$ , определенных и непрерывных на некотором сегменте  $a \leq t \leq b$  и подчиненных, кроме того, условию  $[\varphi(t)]^2 + [\psi(t)]^2 + [\chi(t)]^2 = 1$ , мы будем говорить, что она определяет непрерывную (сферическую) кривую, и т. д.

Рассмотрим последовательность комплексных чисел  $\{u_n\}$ , сходящуюся к числу  $\alpha$  (собственному), которое является аффиксом точки  $A$ . Если числа  $u_n$  являются аффиксами точек  $U_n$ , то  $A$  есть предельная точка последовательности  $\{U_n\}$  (и притом единственная). Легко видеть, что и точка  $A'$ , изображающая на сфере число  $\alpha$ , является предельной (и притом единственной) для последовательности точек сферы  $U_n$ , изображающих числа  $u_n$ .

Пусть теперь последовательность комплексных чисел  $\{v_n\}$  принадлежит несобственному классу  $\infty$ . Тогда для любого  $M > 0$  точки  $V_n$ , изображающие числа  $v_n$  на плоскости, начиная с некоторого номера  $n > N_*$  будут лежать вне круга радиуса  $M$ . Соответствующие им точки сферы  $V'_n$  будут лежать в окрестности северного полюса, ограниченной параллелью, проекция которой на плоскость есть окружность  $|z| = M$ . Отсюда следует, что северный полюс будет единственной предельной точкой для любой последовательности образов точек, входящей в несобственный класс. Обратное: каждая последовательность точек сферы, для которой северный полюс есть единственная предельная точка, изображает некоторую последовательность из несобственного класса. Все это, впрочем, немедленно следует из найденного выше соотношения (5.2:1)  $|z| = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$ . В самом деле, для последовательности  $\{z_n\}$  соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$$

равносильно соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \frac{\pi}{2}.$$

В соответствии с этим мы будем рассматривать северный полюс сферы как геометрический образ несобственного числа  $\infty$ .

**5.3.** Мы видели, что сфера, за исключением северного полюса, посредством стереографической проекции взаимно однозначно и непрерывно \*) отображается на всю плоскость и может служить для изображения собственных комплексных чисел в такой же мере, как и плоскость. Наличие на сфере еще одной точки, а именно полюса, естественно представляющего несобственное комплексное число, позволяет смотреть на сферу как на модель расширенной плоскости, получающейся из обыкновенной или конечной плоскости посредством присоединения еще одной несобственной или бесконечно удаленной точки. Выполняя стереографическую проекцию, мы будем в дальнейшем изображать расширенную плоскость (сферу) в виде конечной плоскости, мысленно дополняя ее одной несобственной точкой — бесконечно удаленной точкой плоскости. При этом окрестность бесконечно удаленной точки будет представляться внешностью произвольного круга, например круга с центром в начале координат.

---

\*) То есть так, что каждой последовательности точек сферы, сходящейся к точке  $A'$ , отличной от северного полюса, соответствует на плоскости последовательность точек, сходящаяся к точке  $A$  — проекции  $A'$ , и обратно.

Заметим, что расширенную плоскость нельзя смешивать с **проективной плоскостью**, которая получается из конечной плоскости путем присоединения бесконечного множества несобственных точек, образующих несобственную прямую. Чтобы построить модель проективной плоскости, достаточно взять сферу, касающуюся плоскости своим южным полюсом. Проектируя точки южного полушария из центра сферы на плоскость, установим взаимно однозначное и непрерывное соответствие между всеми точками плоскости и точками южного полушария (исключая из последнего точки экватора). Каждой прямой плоскости будет соответствовать на полусфере половина большого круга; множеству параллельных между собой прямых — множество половин больших кругов, проходящих через одну и ту же пару диаметрально противоположных точек экватора. Эту пару точек будем рассматривать как образ одной бесконечно удаленной точки проективной плоскости, общей всем прямым, имеющим одинаковое направление.

Всем возможным бесконечно удаленным точкам проективной плоскости будет соответствовать множество всех пар диаметрально противоположных точек экватора. Это множество будем рассматривать как образ бесконечно удаленной прямой.

Таким образом, модель проективной плоскости получается из полусферы посредством отождествления каждой пары диаметрально противоположных точек экватора.

Отметим, что *в расширенной плоскости любая последовательность точек имеет по крайней мере одну предельную точку*. В самом деле, если последовательность является ограниченной, то существование предельной точки вытекает из теоремы Больцано-Вейерштрасса. Если же она не ограничена, то внешность любого круга, т. е. любая окрестность бесконечно удаленной точки, содержит бесконечное множество членов последовательности. Отсюда следует, что бесконечно удаленная точка является предельной точкой каждой неограниченной последовательности.

Итак, в обычной плоскости существуют последовательности, не имеющие предельной точки, тогда как в расширенной плоскости (на сфере) любая последовательность обладает предельной точкой. Это обстоятельство выражают, говоря, что плоскость **не компактна**, а расширенная плоскость **компактна**.

Распространяя понятие предела, мы назовем сходящейся любую последовательность точек расширенной плоскости, имеющую лишь одну предельную точку. Последнюю мы будем называть пределом последовательности.

Если  $G$  — бесконечное неограниченное множество расширенной плоскости, то бесконечно удаленная точка является предельной для него. Поэтому множество  $G$  не может быть замкнутым, если точка  $\infty$  не принадлежит ему.

Так, например, множество  $1, 2, \dots, n, \dots$  не замкнуто в расширенной плоскости, тогда как в конечной плоскости оно замкнуто.

Если  $G$  — неограниченная область, то точка  $\infty$  может быть либо граничной, либо внутренней для нее. В качестве примеров первого случая можно указать полуплоскость, угол, любую из двух областей, ограниченных параболой или отдельной ветвью гиперболы, полосу или полуполосу и т. п.

Во втором случае должна существовать окрестность точки  $\infty$ , принадлежащая области и, следовательно, не содержащая граничных точек области  $G$ . Поэтому граница области  $G$  в этом случае является ограниченным множеством. Примером может служить внешность  $G$  любой жордановой кривой  $\Gamma$ , например окружности, если причислить к  $G$  также точку  $\infty$ . Если же этого не делать, то получится другая область  $G'$ , граница которой состоит из кривой  $\Gamma$  и из изолированной бесконечно удаленной точки.

Определение порядка связности области в расширенной плоскости дается независимо от того, является ли область ограниченной или неограниченной. А именно, область  $G$  называется односвязной в расширенной плоскости, если ее граница есть континуум. Это определение согласуется с прежним (стр. 55) в случае ограниченной области. Оно согласуется также с обобщенным определением, данным на стр. 58, так как граница полуплоскости, угла, полосы и т. д. представляет собой континуум расширенной плоскости. Однако в случае внешности  $G$  жордановой кривой  $\Gamma$  новое определение приводит к иному результату. А именно, эта внешность (если к ней причислить бесконечно удаленную точку) есть односвязная область расширенной плоскости.

Неодносвязные области мы будем называть многосвязными. Так, например, исключая из внешности  $G$  жордановой кривой  $\Gamma$  точку  $\infty$ , получим многосвязную область  $G'$ . Если граница области  $G$  может быть представлена в виде конечного числа  $p$  континуумов, попарно не имеющих общих точек, то  $G$  называется конечно-связной, а именно  $p$ -связной областью. Например, внешность круга, из которой исключена бесконечно удаленная точка, является двухсвязной областью. Если граница  $G$  не может быть исчерпана конечным числом континуумов, попарно не имеющих общих точек, то область  $G$  называется бесконечно-связной.

Можно показать, что принятое нами определение односвязной области расширенной плоскости эквивалентно следующему:

Область  $G$  называется односвязной, если для любой замкнутой жордановой кривой  $\gamma$ , принадлежащей  $G$ , либо внутренность, либо внешность  $\gamma$  принадлежит  $G$ .

Доказательство эквивалентности того и другого определения мы предоставляем читателю.

Введение понятия бесконечно удаленной точки позволяет несколько обобщить понятие функции комплексного переменного. А именно, бесконечно удаленная точка может входить теперь либо в множество значений аргумента, либо в множество значений функции, либо, наконец, в то и другое вместе.

Сообразно с этим можно говорить о значении функции в бесконечно удаленной точке (само это значение может быть конечным или бесконечным) или о бесконечном значении функции в конечной точке. Такое распространение понятия функции основывается на соображениях непрерывности. При этом мы опираемся на следующее обобщение понятия предела для того случая, когда либо точка  $z_0$ , либо предел  $A$ , либо, наконец, и  $z_0$  и  $A$  являются несобственными:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A,$$

если для любой последовательности  $\{z'_n\}$ , сходящейся к  $z_0$ , имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A.$$

Функция называется непрерывной в точке  $z_0$  (в обобщенном смысле), если

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Имеются два основных случая, в которых целесообразно введение несобственных значений аргумента или функции.

1) Если функция  $f(z)$  задана на множестве  $E$ , для которого бесконечно удаленная точка является предельной, и  $f(z)$  на множестве  $E$  стремится к определенному пределу  $A$  (конечному или бесконечному), когда  $z$  стремится к бесконечности, то целесообразно распространить определение  $f(z)$  и на бесконечно удаленную точку, полагая  $f(\infty) = A$ .

Так, например, если  $f(z)$  — рациональная функция

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m} \quad (a_n \neq 0, b_m \neq 0),$$

то существует предел  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ , равный 0, если  $m > n$ , равный  $\frac{a_m}{b_m}$ , если  $m = n$ , и, наконец, равный  $\infty$ , если  $m < n$ . Соответ-

ственно этому полагаем:  $f(\infty) = \begin{cases} 0 \\ \frac{a_m}{b_m} \\ \infty \end{cases}$

2) Если функция  $f(z)$  задана на множестве  $E$ , для которого точка  $z_0$  является предельной и  $f(z)$  стремится к  $\infty$ , когда

точка  $z$  множества  $E$  стремится к  $z_0$ , то целесообразно распространить определение  $f(z)$  и на точку  $z_0$ , полагая  $f(z_0) = \infty$ .

Так, если  $z_0$  есть нуль многочлена  $b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m$  и не является нулем многочлена  $a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ , то  $f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m}$  стремится к  $\infty$  при  $z \rightarrow z_0$ , что и дает основание положить  $f(z_0) = \infty$ .

В силу принятого определения функция  $f(z)$  обобщенно непрерывна в каждом из этих случаев в соответствующей точке, а именно в точке  $z = \infty$  в первом случае и в точке  $z_0$  — во втором.

5.4. Докажем, что при стереографической проекции углы между кривыми на сфере равны углам между их образами на плоскости. Пусть  $M'_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$  — какая-либо точка сферы (отличная от северного полюса) и  $\gamma'$  — непрерывная кривая, проходящая через точку  $M'_0$  и имеющая в ней касательную. Это означает, что среди различных параметрических представлений кривой  $\gamma'$  существует такое:

$$\xi = \varphi(t), \quad \eta = \psi(t), \quad \zeta = \chi(t) \quad ([\varphi(t)]^2 + [\psi(t)]^2 + [\chi(t)]^2 = 1),$$

для которого функции  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $\chi$  дифференцируемы при  $t = t_0$ , причем

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2 \neq 0.$$

Образом точки  $M'_0$  при стереографической проекции будет точка плоскости  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и образом кривой  $\gamma'$  — кривая  $\gamma$ :

$$x = \frac{\xi}{1-\xi} = \frac{\varphi(t)}{1-\chi(t)}, \quad y = \frac{\eta}{1-\xi} = \frac{\psi(t)}{1-\chi(t)}.$$

Для чисел  $x'(t_0)$  и  $y'(t_0)$ , характеризующих направление касательной в точке  $M_0$ , получаем:

$$x' = \frac{\xi'(1-\xi_0) + \xi'\xi_0}{(1-\xi_0)^2}, \quad y' = \frac{\eta'(1-\xi_0) + \xi'\eta_0}{(1-\xi_0)^2}$$

и

$$x'^2 + y'^2 = \frac{(\xi'^2 + \eta'^2)(1-\xi_0)^2 + 2(\xi_0\xi' + \eta_0\eta') \cdot \xi'(1-\xi_0) + \xi'^2(\xi_0^2 + \eta_0^2)}{(1-\xi_0)^4}$$

Но

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 = 1 - \zeta_0^2 \quad \text{и} \quad \xi_0\xi' + \eta_0\eta' = -\zeta_0\xi';$$

следовательно,

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= \frac{(\xi'^2 + \eta'^2)(1-\xi_0)^2 - \xi'^2(2\xi_0 - 2\xi_0^2) + \xi'^2(1-\xi_0^2)}{(1-\xi_0)^4} = \\ &= \frac{(\xi'^2 + \eta'^2)(1-\xi_0)^2 + \xi'^2(1-\xi_0)^2}{(1-\xi_0)^4} = \frac{\xi'^2 + \eta'^2 + \xi'^2}{(1-\xi_0)^2} \end{aligned}$$

Если мы теперь рассмотрим две кривые  $\gamma'$  и  $\gamma'_1$ , проходящие через точку  $M'_0$  сферы, и их образы  $\gamma$  и  $\gamma_1$  на плоскости, проходящие через точку  $M_0$ , то для косинуса угла  $\alpha$  между кривыми  $\gamma$  и  $\gamma_1$  в точке  $M_0$  найдем:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{x'x'_1 + y'y'_1}{\sqrt{x'^2 + y'^2} \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2}} = \\ &= \frac{[\xi'(1-\zeta_0) + \zeta'\xi_0][\xi_1(1-\zeta_0) + \zeta_1\xi_0] + [\eta'(1-\zeta_0) + \zeta'\eta_0][\eta_1(1-\zeta_0) + \zeta_1\eta_0]}{(1-\zeta_0)^2 \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2} \sqrt{\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2}} = \\ &= \frac{(\xi'\xi_1 + \eta'\eta_1)(1-\zeta_0)^2 + (\xi_0\xi' + \eta_0\eta')\xi_1(1-\zeta_0)}{(1-\zeta_0)^2 \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2} \sqrt{\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2}} + \\ &\quad + \frac{(\xi_0\xi_1 + \eta_0\eta_1)\xi'(1-\zeta_0) + \zeta'\xi_1(\xi_0^2 + \eta_0^2)}{(1-\zeta_0)^2 \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2} \sqrt{\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2}}\end{aligned}$$

Но  $\xi_0^2 + \eta_0^2 = 1 - \zeta_0^2$ ,  $\xi_0\xi' + \eta_0\eta' = -\zeta_0\xi'$  и, точно так же,

$$\xi_0\xi_1 + \eta_0\eta_1 = -\zeta_0\xi'_1;$$

поэтому

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{(\xi'\xi_1 + \eta'\eta_1)(1-\zeta_0)^2 - \xi'\xi'_1(\zeta_0 - \zeta_0^2) - \xi'\xi'_1(\zeta_0 - \zeta_0^2) + \zeta'\xi'_1(1-\zeta_0^2)}{(1-\zeta_0)^2 \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2} \sqrt{\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2}} = \\ &= \frac{\xi'\xi_1 + \eta'\eta_1 + \zeta'\xi'_1}{\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2} \sqrt{\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2}} = \cos \alpha'\end{aligned}$$

Здесь  $\alpha'$ , очевидно, есть угол между сферическими кривыми  $\gamma'$  и  $\gamma'_1$  в точке  $M'_0$ . Этим и доказано наше утверждение.

Отображение одной поверхности (или области на поверхности) на другую называется *к о н ф о р м н ы м*, если при нем углы между кривыми не изменяются (сохраняются). Мы можем сказать теперь, что *стереографическая проекция сферы на плоскость есть конформное отображение*.

Доказанное предложение позволяет заменять измерение углов между кривыми на сфере измерением углов между их образами на плоскости, и наоборот. Рассмотрим, в частности, углы, составленные кривыми, проходящими через бесконечно удаленную точку. На плоскости такие кривые — *н е п р е р ы в н ы е к р и в ы е р а с ш и р е н н о й п л о с к о с т и* — изображаются в виде проекций сферических кривых, проходящих через северный полюс.

Если  $\xi = \varphi(t)$ ,  $\eta = \psi(t)$ ,  $\zeta = \chi(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , — параметрическое уравнение непрерывной кривой  $\gamma$  на сфере, то уравнение ее проекции  $\Gamma$  имеет вид

$$z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta} = \frac{\varphi(t) + i\psi(t)}{1 - \chi(t)} = f(t).$$

Функция  $f(t)$  определена и непрерывна для всех значений  $t$  на сегменте  $[a, b]$ , за исключением тех значений  $t = \tau$ , для которых  $\chi(t) = 1$  (и, следовательно,  $[\varphi(t)]^2 + [\psi(t)]^2 = 1 - [\chi(t)]^2 = 0$ , т. е.  $\varphi(t) = \psi(t) = 0$ ). Но когда  $t \rightarrow \tau$ , то точка кривой  $\gamma$  стремится к северному полюсу и, следовательно,  $f(t) \rightarrow \infty$ . Мы можем определить поэтому  $f(t)$  на всем сегменте  $[a, b]$ , с сохранением непрерывности (в обобщенном смысле), полагая  $f(\tau) = \infty$ .

Пусть, вообще, мы имеем какую-либо функцию  $z = F(t)$ , определенную и непрерывную в обобщенном смысле на сегменте  $[a, b]$  (который теперь может быть и бесконечным в одну или в обе стороны). Тогда координаты точки  $(\xi, \eta, \zeta)$  на поверхности сферы, проектирующейся в  $z = F(t)$ , будут являться, очевидно, функциями от  $t$ , определенными и непрерывными в обычном смысле на  $[a, b]$  (если сегмент бесконечен; если, например,  $b = \infty$ , то функции эти будут иметь определенные пределы при  $t \rightarrow \infty$ ; путем перехода к другому параметру:  $t' = \operatorname{arctg} t$ , мы сможем свести дело к конечному сегменту). Отсюда следует, что каждая функция  $z = F(t)$ , определенная и непрерывная в обобщенном смысле на некотором сегменте  $[a, b]$ , определяет непрерывную кривую расширенной плоскости.

Примерами могут служить прямая линия  $z = (\alpha t + \beta) + i(\gamma t + \delta)$ , где  $\alpha^2 + \gamma^2 \neq 0$  и функция  $z$  обращается в  $\infty$  при  $t = \infty$ , парабола, например  $z = (\alpha t^2 + \beta t + \gamma) + i(\delta t + \varepsilon)$ , где  $\alpha^2 + \delta^2 \neq 0$  и функция  $z$  обращается в  $\infty$  при  $t = \infty$ , гипербола (например  $z = \frac{a(1+t^2)+2bit}{1-t^2}$  где  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ , и функция обращается в  $\infty$  при  $t = \pm 1$ ) и т. п.

*Две плоские кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  образуют угол с вершиной в бесконечно удаленной точке, если соответствующие им кривые  $\Gamma'_1$  и  $\Gamma'_2$  на сфере ( $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  суть стереографические проекции  $\Gamma'_1$  и  $\Gamma'_2$ ) образуют угол в северном полюсе (т. е. обладают касательными в этой точке). Величина последнего угла, по определению, принимается за величину угла между кривыми  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  в бесконечно удаленной точке.*

Рассмотрим, в частности, два прямолинейных луча  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , выходящих из точки  $M_0$  плоскости под некоторым углом  $\alpha$ . На сфере им соответствуют две дуги окружностей  $\Gamma'_1$  и  $\Gamma'_2$ , соединяющих точку  $M'_0$  сферы с северным полюсом  $P$ . По доказанному в этом пункте,  $\Gamma'_1$  и  $\Gamma'_2$  образуют в точке  $M'_0$  угол, равный  $\alpha$ ; но в силу известных свойств сферы,  $\Gamma'_1$  и  $\Gamma'_2$  должны образовывать в точке  $P$  такой же угол, т. е.  $\alpha$ . Отсюда следует, что и лучи  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  образуют в бесконечно удаленной точке угол, равный  $\alpha$ .

Возьмем еще в качестве  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  две параллельные прямые; на сфере им соответствуют две окружности  $\Gamma'_1$  и  $\Gamma'_2$ , проходящие через  $P$  и имеющие здесь общую касательную. В соответствии с этим углом между  $\Gamma'_1$  и  $\Gamma'_2$ , а следовательно, и между  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  равен нулю.



Читатель должен привыкнуть рассматривать часть плоскости, заключенную между двумя прямолинейными лучами (угол) или между параллельными прямыми (полоса), как двухугольник с двумя равными углами. Одна из вершин этого двухугольника (в случае угла) или обе (в случае полосы) находятся в бесконечно удаленной точке.

5.5. Простейшим преобразованиями сферы самое в себя соответствуют, посредством стереографической проекции, некоторые преобразования плоскости самое в себя. Повернем сферу на угол  $\pi$  вокруг диаметра, направленного по оси  $x$ . Тогда северное полушарие перейдет в южное и южное в северное, в частности, поменяются местами северный и южный полюсы, т. е. точки, изображающие  $\infty$  и  $0$ . Кроме того, поменяются местами западное и восточное полушария. Экватор и нулевой меридиан перейдут сами в себя. Из всего этого следует, что наше преобразование сферы эквивалентно следующему преобразованию сферических координат:

$\varphi$  заменяется на  $-\varphi$ ,

$\lambda$  заменяется на  $-\lambda$ .

Рассмотрим, какое преобразование плоскости соответствует этому преобразованию сферы. Заменяя в формуле (5.2:1)  $\varphi$  и  $\lambda$  на  $-\varphi$  и  $-\lambda$ , мы вместо  $z$  получим новую точку:

$$\xi = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) (\cos \lambda - i \sin \lambda) = \frac{1}{\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) (\cos \lambda + i \sin \lambda)} = \frac{1}{z}$$

Таким образом, *повороту сферы на угол  $\pi$  около действительной оси соответствует преобразование плоскости, выражаемое уравнением*

$$\xi = \frac{1}{z}.$$

При этом внешность единичной окружности (соответствующая северному полушарию) переходит во внутренность (соответствующую южному полушарию). Верхняя и нижняя полуплоскости (соответствующие восточному и западному полушариям) также меняются местами. Единичная окружность (образ экватора) и положительная часть действительной оси (образ нулевого меридиана) переходят сами в себя.

Особенно важно то, что при указанном преобразовании меняются местами начало координат и бесконечно удаленная точка, являющиеся образами южного и северного полюсов. Меняются местами также и окрестности этих точек. Сказанное вполне согласуется с известными нам равенствами, относящимися к несобственному

комплексному числу  $\infty$ :

$$\infty = \frac{1}{0}, \quad 0 = \frac{1}{\infty}.$$

Они выражают соответствие между точками 0 и  $\infty$  расширенной плоскости, установленное посредством преобразования  $\xi = \frac{1}{z}$ .

Последнее преобразование постоянно употребляется во всех вопросах, где фигурирует бесконечно удаленная точка. Оно сводит рассмотрение последней точки и любой ее окрестности к рассмотрению нулевой точки и соответствующей ее окрестности.

Заметим, что из кругового свойства и конформности стереографической проекции непосредственно следует, что преобразование  $\xi = \frac{1}{z}$  также обладает круговым свойством и является конформным.

Проверим первое из этих утверждений.

Если  $\gamma$  — какая-либо окружность или прямая плоскости  $z$ , то соответствующая ей при стереографической проекции на сфере окружность после рассматриваемого поворота сферы перейдет также в окружность. Но последней при стереографической проекции соответствует на плоскости некоторая окружность или прямая  $\gamma'$ . Это и есть образ линии  $\gamma$  при преобразовании  $\xi = \frac{1}{z}$ . Круговое свойство последнего преобразования в том и выражается, что образами прямых и окружностей при нем являются также прямые или окружности. Подобным же образом проверяется и свойство конформности преобразования  $\xi = \frac{1}{z}$ . Впрочем, оба указанных свойства будут установлены нами для более общих преобразований в пп. 2.3—2.4 и 4.3 главы второй без использования стереографической проекции.

**5.6.** Вернемся к определению угла с вершиной в бесконечно удаленной точке. Вместо определения, формулированного в конце п. 5.4, можно дать другое, эквивалентное.

Пусть  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — две непрерывные кривые расширенной плоскости, проходящие через бесконечно удаленную точку и образующие в ней угол  $\alpha$ . По п. 5.4 это означает, что  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  являются стереографическими проекциями непрерывных кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  на сфере, проходящих через северный полюс и образующих в нем угол  $\alpha$ .

Поворачивая сферу на угол  $\pi$  вокруг оси  $x$ , мы переведем кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в новые кривые  $\gamma'_1$  и  $\gamma'_2$ , проходящие через южный полюс сферы и образующие в нем тот же угол  $\alpha$ . Их стереографические проекции на плоскость будут непрерывными кривыми  $\Gamma'_1$  и  $\Gamma'_2$ , образующими в начале координат (проекция южного полюса) угол  $\alpha$ . Но, с другой стороны, по сказанному выше, кривые  $\Gamma'_1$  и  $\Gamma'_2$  могут быть получены из кривых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  посредством преобразования

$\zeta = \frac{1}{z}$ . Отсюда следует, что если две кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  расширенной плоскости образуют в бесконечно удаленной точке угол  $\alpha$ , то и их образы  $\Gamma'_1$  и  $\Gamma'_2$ , полученные посредством преобразования  $\zeta = \frac{1}{z}$ , образуют между собой в начале координат такой же угол  $\alpha$ .

Следя за нашими рассуждениями в обратном порядке, убеждаемся, что если известно, что  $\Gamma'_1$  и  $\Gamma'_2$  составляют в начале координат угол  $\alpha$ , то отсюда вытекает, что их образы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  при преобразовании  $\zeta = \frac{1}{z}$  составляют в бесконечно удаленной точке также угол  $\alpha$ .

Поэтому мы можем заменить первоначальное определение угла с вершиной в бесконечно удаленной точке следующим эквивалентным определением: говорят, что непрерывные кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  расширенной плоскости, проходящие через бесконечно удаленную точку, образуют в ней угол  $\alpha$  в том и только в том случае, когда образы этих кривых, полученные в результате преобразования  $\zeta = \frac{1}{z}$ , образуют в начале координат угол  $\alpha$ .

## Глава вторая

### ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ И ЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

#### § 1. Производная. Условия Даламбера — Эйлера

1.1. Пусть  $f(z)$  — функция комплексного переменного, определенная и однозначная на некотором множестве  $E$ , и пусть  $z_0$  — какая-либо точка этого множества, являющаяся предельной для него. Составим разностное отношение

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Очевидно, оно представляет функцию от  $z$ , определенную для всех точек множества  $E$ , отличных от  $z_0$ . Если существует предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

то он называется производной от функции  $f(z)$  по множеству  $E$  в точке  $z_0$  и обозначается через  $f'_E(z_0)$  или, короче,  $f'(z_0)$ . Сама функция  $f(z)$ , обладающая производной, называется дифференцируемой или моногенной по множеству  $E$  в точке  $z_0$ .

В частном случае, когда  $E$  является интервалом действительной оси (конечным или бесконечным),  $f(z)$  есть функция действительного переменного  $z = x$ , принимающая, вообще говоря, комплексные значения:  $f(z) = f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ . Если  $\psi(x) \equiv 0$ , т. е. если и значения  $f(z)$  действительны, то наше определение производной и дифференцируемости, очевидно, совпадает с обычными определениями дифференциального исчисления. Если  $\psi(x) \not\equiv 0$ , то, переписывая  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  в виде  $\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} + i \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{x - x_0}$ , заключаем, в силу п. 3.6 главы первой, что производная  $f'(x)$  существует тогда и только тогда, когда существуют производные  $\varphi'(x)$  и  $\psi'(x)$ , причем  $f'(x) = \varphi'(x) + i\psi'(x)$ . Так, например, если  $f(x) = a \cos x + ib \sin x$ , то  $f'(x) = -a \sin x + ib \cos x$ .

Обозначая  $f(z) - f(z_0)$  через  $\Delta f(z)$  (приращение функции) и  $z - z_0$  через  $\Delta z$  (приращение независимого переменного), запишем условие дифференцируемости так:

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = f'(z_0) + \varepsilon(z_0, \Delta z),$$

где  $\varepsilon(z_0, \Delta z) \rightarrow 0$  при  $\Delta z \rightarrow 0$  ( $z \in E$ ). Отсюда следует, что приращение дифференцируемой функции может быть представлено в виде

$$\Delta f(z) = A \cdot \Delta z + \varepsilon(z_0, \Delta z) \Delta z \quad (A = f'(z_0)) \quad (1.1:1)$$

с  $A$ , не зависящим от  $\Delta z$ , и  $\varepsilon$ , стремящимся к нулю вместе с  $\Delta z$ . Обратно: всякая функция, для которой приращение может быть представлено в виде (1.1:1) при тех же условиях относительно  $A$  и  $\varepsilon(z, \Delta z)$ , является дифференцируемой и ее производная равна  $A$ . В самом деле, из (1.1:1) вытекает, что предел

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} \quad (\Delta z = z - z_0; \quad z \in E)$$

существует и равен  $A$ . Таким образом, представимость приращения функции в виде (1.1:1) с  $A$ , не зависящим от  $\Delta z$  и  $\varepsilon$ , стремящимся к 0 вместе с  $\Delta z$ , является необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции. Заметим, что из (1.1:1) непосредственно следует, что функция, дифференцируемая в точке  $z_0 \in E$ , является непрерывной в этой точке (на этом множестве).

Обозначая  $\Delta z$  через  $dz$  (дифференциал независимого переменного) и  $A \cdot \Delta z = f'_E(z_0) dz$  через  $df(z) = d_E f(z)$  (дифференциал функции), получим для производной следующее выражение через дифференциалы:

$$f'_E(z_0) = \frac{d_E f(z)}{dz}.$$

Поясним на примере, какую роль в определении понятия дифференцируемости играет множество  $E$ , по которому берется производная. Пусть сначала  $E$  есть действительная ось и  $f(z) = = f(x) = x$ . Тогда производная  $f'_E(x)$  существует при любом  $x \in E$  и равна единице, т. е. функция дифференцируема всюду на  $E$ . Продолжим теперь функцию  $f(x)$  на всю комплексную плоскость  $E_1$ , полагая по-прежнему  $f(z) = x$ . Очевидно, эта функция непрерывна при любом  $z$  и совпадает с исходной функцией, когда  $z \in E$  (т. е. когда  $y = 0$ ). Разностное отношение здесь таково:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(x - x_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)}.$$

Оно не имеет предела для  $z \rightarrow z_0$  ( $z_0$  — любая точка плоскости), ибо при  $x = x_0$  и  $y \neq y_0$  равно 0, а при  $x \neq x_0$  и  $y = y_0$  равно 1. Итак, функция  $f(z) = x$  не дифференцируема по плоскости ни в одной точке.

1.2. Из определения производной и свойств пределов функций комплексного переменного вытекает, что основные правила, известные из дифференциального исчисления, распространяются и на производные по множеству от функций комплексных переменных.

Вот эти правила:

1. Если  $f(z) \equiv c$ , то  $\frac{df(z)}{dz} = 0$ .
2.  $\frac{d[cf(z)]}{dz} = c \frac{df(z)}{dz}$
3.  $\frac{dz}{dz} = 1$ .
4.  $\frac{d}{dz}[f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z)] = \frac{df_1(z)}{dz} + \frac{df_2(z)}{dz} + \dots + \frac{df_n(z)}{dz}$ .
5.  $\frac{d}{dz}[f_1(z)f_2(z) \dots f_n(z)] = f_2(z)f_3(z) \dots f_n(z) \frac{df_1(z)}{dz} + f_1(z)f_3(z) \dots f_n(z) \frac{df_2(z)}{dz} + \dots + f_1(z)f_2(z) \dots f_{n-1}(z) \frac{df_n(z)}{dz}$ .
6.  $\frac{d}{dz}[f(z)]^n = n[f(z)]^{n-1} f'(z)$ . 6'.  $\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$ .
7.  $\frac{d}{dz}(a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n) = a_1 + 2a_2z + \dots + na_nz^{n-1}$ .
8.  $\frac{d}{dz} \left[ \frac{f_1(z)}{f_2(z)} \right] = \frac{f_2(z) \frac{df_1(z)}{dz} - f_1(z) \frac{df_2(z)}{dz}}{[f_2(z)]^2}$

Здесь все функции  $f(z)$ ,  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$ , предполагаются дифференцируемыми в данной точке  $z$  множества  $E$ . В правиле 8 требуется еще, чтобы  $f_2(z)$  была отлична от нуля.

9. Правило дифференцирования сложных функций. Допустим, что функция  $w = f(z)$  дифференцируема в точке  $z_0 \in E$  и пусть точка  $w_0 = f(z_0)$  является предельной для множества  $F$  значений этой функции, принимаемых на  $E$ . Рассмотрим функцию  $Z = \varphi(w)$ , определенную на  $F$  и дифференцируемую в точке  $w_0$  по этому множеству. Тогда сложная функция  $Z = \varphi[f(z)]$  дифференцируема в точке  $z_0$  по множеству  $E$ , причем

$$\frac{d_E \varphi[f(z)]}{dz} = \frac{d_F \varphi(w)}{dw} \frac{d_E f(z)}{dz}. \quad (1.2:1)$$

В самом деле, пусть сначала в любой окрестности точки  $z_0$  существуют точки  $z \in E$ ,  $z \neq z_0$ , такие, что  $f(z) = f(z_0) = w_0$ . Тогда существует последовательность точек  $\{z_n\}$  множества  $E$ , сходящаяся к  $z_0$  и такая, что  $f(z_n) = f(z_0)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Для этой последовательности  $\lim_{z_n \rightarrow z_0} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = 0$ , и так как по предположению производная  $\frac{d_E f(z_0)}{dz} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  существует, то она должна равняться нулю. Поэтому правая часть соотношения (1.2:1) равна нулю, и достаточно показать, что равна нулю также и левая часть.

Рассмотрим разностное отношение

$$\frac{\varphi[f(z)] - \varphi[f(z_0)]}{z - z_0};$$

оно обращается в нуль для каждого  $z \neq z_0$  такого, что  $f(z) = f(z_0)$ . Достаточно установить, следовательно, что оно имеет предел, равный нулю для любой последовательности  $\{z'_n\} \rightarrow z_0$ , такой, что  $f(z'_n) = w'_n \neq w_0$ . Но тогда

$$\begin{aligned} \frac{\varphi[f(z'_n)] - \varphi[f(z_0)]}{z'_n - z_0} &= \frac{\varphi(w'_n) - \varphi(w_0)}{w'_n - w_0} \cdot \frac{w'_n - w_0}{z'_n - z_0} = \\ &= \frac{\varphi(w'_n) - \varphi(w_0)}{w'_n - w_0} \cdot \frac{f(z'_n) - f(z_0)}{z'_n - z_0} \rightarrow \frac{d_F \varphi(w)}{dw} \cdot \frac{d_E f(z)}{dz} = 0 \text{ при } z \rightarrow z_0. \end{aligned}$$

Итак, при сделанном выше предположении соотношение (1.2:1) выполняется.

Пусть теперь существует такая окрестность точки  $z_0$ , в которой  $f(z) = w \neq w_0$  при всех  $z$ , принадлежащих  $E$ . Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi[f(z)] - \varphi[f(z_0)]}{z - z_0} &= \frac{\varphi(w) - \varphi(w_0)}{w - w_0} \cdot \frac{w - w_0}{z - z_0} = \\ &= \frac{\varphi(w) - \varphi(w_0)}{w - w_0} \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \rightarrow \frac{d_F \varphi(w)}{dw} \cdot \frac{d_E f(z)}{dz} \text{ при } z \rightarrow z_0, \end{aligned}$$

т. е. мы снова приходим к соотношению (1.2:1).

10. Правило дифференцирования обратных функций. Пусть функция  $w = f(z)$  устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками двух множеств  $E$  и  $F$ , причем обратная ей функция  $z = \varphi(w)$  непрерывна на  $F$ . Тогда, если  $f(z)$  дифференцируема в точке  $z_0 \in E$  и  $f'_E(z_0) \neq 0$ , то и обратная функция  $z = \varphi(w)$  дифференцируема в точке  $w_0 = f(z_0) \in F$  и

$$\varphi'_F(w_0) = \frac{1}{f'_E(z_0)}.$$

В самом деле, в силу взаимной однозначности отображения  $w = f(z)$ ,  $z \neq z_0$  при  $w \neq w_0$ , поэтому разностное отношение для функции  $\varphi(w)$  может быть представлено в виде

$$\frac{\varphi(w) - \varphi(w_0)}{w - w_0} = \frac{z - z_0}{w - w_0} = \frac{1}{\frac{w - w_0}{z - z_0}},$$

и так как при  $w \rightarrow w_0$   $z = \varphi(w) \rightarrow z_0 = \varphi(w_0)$ , то

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_0)}{w - w_0} = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{w - w_0}{z - z_0}} = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}} = \frac{1}{f'_E(z_0)},$$

что и требовалось доказать.

1.3. Мы будем преимущественно рассматривать функции, определенные в некоторой области  $E = G$ , и в этом случае вместо  $f'_E(z)$  или  $\frac{d_E f(z)}{dz}$  будем писать короче:  $f'(z)$  или  $\frac{df(z)}{dz}$ .

Пусть  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ; напомним, что функция двух действительных переменных  $u(x, y)$  называется дифференцируемой в точке  $(x_0, y_0)$  области, где она определена, если имеет место соотношение

$$u(x, y) - u(x_0, y_0) = A(x_0, y_0)(x - x_0) + B(x_0, y_0)(y - y_0) + \varepsilon_1(x, y; x_0, y_0)(x - x_0) + \varepsilon_2(x, y; x_0, y_0)(y - y_0),$$

где

$$\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} \varepsilon_1(x, y; x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} \varepsilon_2(x, y; x_0, y_0) = 0.$$

Коэффициенты  $A(x_0, y_0)$  и  $B(x_0, y_0)$  в правой части равенства представляют частные производные функции  $u(x, y)$ :

$$A(x_0, y_0) = \left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0}, \quad B(x_0, y_0) = \left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right|_{x=x_0, y=y_0}$$

Докажем следующее важное предложение.

**Теорема.** Для того чтобы функция  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , определенная в некоторой области  $G$ , была дифференцируема в точке  $z$  этой области как функция комплексного переменного, необходимо и достаточно, чтобы функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  были дифференцируемы в той же точке (как функции двух действительных переменных) и чтобы, кроме того, в этой точке выполнялись условия:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1.3.1)$$



При выполнении всех условий теоремы производная  $f'(z)$  может быть представлена в одной из следующих форм:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.3:2)$$

Условия (1.3:1) имеют основное значение в теории аналитических функций и в приложениях этой теории к задачам механики и физики. Они называются условиями (или уравнениями) Коши-Римана.

Следует отметить, что это общепринятое в учебной и научной литературе наименование несправедливо с исторической точки зрения, так как условия (1.3:1) изучались еще в XVIII веке Даламбером и, в особенности, Эйлером в работах, посвященных применению функций комплексного переменного к гидромеханике (Даламбер и Эйлер), картографии и интегральному исчислению (Эйлер). Поэтому правильнее изменить установившуюся терминологию и называть уравнения (1.3:1) уравнениями Даламбера—Эйлера.

Обратимся к доказательству теоремы и покажем сначала, что ее условия необходимы для дифференцируемости функции  $f(z)$ .

В самом деле, если  $f(z)$  дифференцируема в точке  $z$  области  $G$ , то

$$\Delta f(z) = f'(z) \Delta z + \varepsilon \Delta z, \quad (1.3:3)$$

где

$$\Delta z = z_1 - z = (x_1 - x) + i(y_1 - y) = \Delta x + i\Delta y,$$

$$\Delta f(z) = f(z_1) - f(z) =$$

$$= [u(x_1, y_1) - u(x, y)] + i[v(x_1, y_1) - v(x, y)] = \Delta u + i\Delta v,$$

$$f'(z) = a + ib, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2,$$

причем  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  стремятся к нулю, когда  $\Delta x$  и  $\Delta y$  одновременно стремятся к нулю.

Отделяя в соотношении (1.3:3) действительные и мнимые части, будем иметь:

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \varepsilon_1\Delta x - \varepsilon_2\Delta y,$$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \varepsilon_2\Delta x - \varepsilon_1\Delta y.$$

Отсюда, в силу того, что  $\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \varepsilon_1 = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \varepsilon_2 = 0$ , вытекает:

1) функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  двух действительных переменных  $x$  и  $y$  дифференцируемы в точке  $(x, y)$ ;

2) их частные производные в этой точке таковы:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -b, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = b, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a$$

и, следовательно, удовлетворяют условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Наконец, для  $f'(z)$  получаем:

$$f'(z) = a + ib = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

Итак, необходимость условий теоремы доказана.

Докажем достаточность условий теоремы. Пусть они выполнены. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y, \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \beta_1 \Delta x + \beta_2 \Delta y, \end{aligned} \right\} \quad (1.3:4)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  и  $\beta_2$  стремятся к нулю при  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , стремящихся к нулю. Кроме того,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = a, \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = b. \quad (1.3:5)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta u &= a\Delta x - b\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y, \\ \Delta v &= b\Delta x + a\Delta y + \beta_1\Delta x + \beta_2\Delta y \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \Delta f(z) &= \Delta u + i\Delta v = \\ &= a(\Delta x + i\Delta y) + ib(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha_1 + i\beta_1)\Delta x + (\alpha_2 + i\beta_2)\Delta y = \\ &= (a + ib)\Delta z + \left[ (\alpha_1 + i\beta_1)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z} \right] \Delta z = A\Delta z + \varepsilon\Delta z. \end{aligned} \quad (1.3:6)$$

Так как

$$\begin{aligned} |\varepsilon| &= \left| (\alpha_1 + i\beta_1)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z} \right| \leq \\ &\leq \left| \alpha_1 + i\beta_1 \right| \left| \frac{\Delta x}{\Delta z} \right| + \left| \alpha_2 + i\beta_2 \right| \left| \frac{\Delta y}{\Delta z} \right| \leq \\ &\leq |\alpha_1 + i\beta_1| + |\alpha_2 + i\beta_2| \leq |\alpha_1| + |\beta_1| + |\alpha_2| + |\beta_2|, \end{aligned}$$

то  $\varepsilon$  вместе с  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  стремится к нулю при  $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ , стремящемся к нулю. Отсюда и из соотношения (1.3:6) следует, что функция  $f(z)$  дифференцируема, и ее производная  $f'(z)$  равна  $A$ :

$$f'(z) = A = a + bi = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

Этим и заканчивается доказательство.

Из общего курса анализа известно, что для дифференцируемости функций  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  достаточно существования и непрерывности их частных производных:  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ . Поэтому для дифференцируемости функции  $f(z) = u + iv$  достаточно, чтобы частные производные  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$  существовали, были непрерывными и удовлетворяли уравнениям (1.3:1).

Функция  $f(z)$ , дифференцируемая в каждой точке области  $G$ , называется дифференцируемой в этой области, а также голоморфной, или аналитической (иногда регулярной, или правильной). Название голоморфный (подобный целому, от греческих слов *όλος* — весь, целый и *μορφος* — форма, вид) было введено учениками Коши — Брю и Буке. «Этим названием мы указываем, — писали они, — что она (т. е. голоморфная функция. — А. М.) подобна целым функциям (т. е. многочленам. — А. М.), обладающим теми же свойствами во всей плоскости». Смысл термина «аналитический», употреблявшегося ранее Лагранжем, а позднее Вейерштрассом и в настоящее время общепринятого, разъяснен в § 1 главы первой; его применимость к функциям комплексного переменного, дифференцируемым в некоторой области, будет оправдана в дальнейшем изложении, когда мы покажем, что такая функция может быть представлена в некоторой окрестности любой точки области в виде суммы сходящегося степенного ряда. Пока же мы будем употреблять термин «аналитическая функция» в качестве синонима термина «дифференцируемая в данной области функция комплексного переменного».

В виде примера рассмотрим функцию  $f(z) = e^x (\cos y + i \sin y)$ , определенную во всей плоскости. Здесь

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Таким образом, условия (1.3:1) выполнены, и функция  $f(z)$  является аналитической во всей плоскости. Для ее производной имеем:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i e^x \sin y = f(z).$$

В примере, рассмотренном в конце п. 1.1,  $f(z) = x$ ,  $u = x$ ,  $v = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ , и условия Даламбера — Эйлера не выпол-

нены:  $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$ . Мы видели, что эта функция нигде не дифференцируема (по плоскости).

Условия (1.3:1) можно представить в более компактной форме, если воспользоваться понятием так называемых формальных производных, полезным в различных вопросах теории функций комплексного переменного. Рассмотрим в некоторой области комплекснозначную функцию  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ , дифференцируемую в ней относительно  $x$  и  $y$ . Если произвести замену переменных:

$$x = \alpha\xi + \beta\eta, \quad y = \gamma\xi + \delta\eta,$$

$$\text{где } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

то получим дифференцируемую функцию от  $\xi$  и  $\eta$ , для которой

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \gamma \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \beta \frac{\partial f}{\partial x} + \delta \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Разумеется, в этих формулах  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  — действительные числа. Однако мы можем придать им и мнимые значения, условившись, что правые части формул будут служить тогда определением левых. Именно, положим:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = -\frac{i}{2}, \quad \delta = \frac{i}{2};$$

в этом случае

$$\xi = x + iy = z, \quad \eta = x - iy = \bar{z}$$

и наши формулы дают определение формальных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Из доказанной в этом пункте теоремы следует, что функция  $f = u + iv$ , дифференцируемая в области  $G$  относительно  $x$  и  $y$ , будет аналитической в этой области тогда и только тогда, когда во всех точках области выполняется условие

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0;$$

при этом

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = f'(z).$$

Во многих случаях важно иметь условия дифференцируемости функции комплексного переменного  $f(z) = u + iv$  в точке  $z \neq 0$ ,

выраженные с помощью полярных координат:  $|z| = r$  и  $\text{Arg } z = \Phi$ . Условия эти (необходимые и достаточные) таковы:

- 1')  $u$  и  $v$  являются дифференцируемыми функциями  $r$  и  $\Phi$ ;  
2') их частные производные связаны соотношениями:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \Phi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \Phi}. \quad (1.3:7)$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что  $u$  и  $v$  дифференцируемы как функции  $r$  и  $\Phi$  ( $r \neq 0$ ) тогда и только тогда, когда они дифференцируемы как функции  $x$  и  $y$ , и что при этих условиях уравнения (1.3:7) эквивалентны уравнениям (1.3:1). Но выполнение первого требования следует из того, известного из общего курса анализа факта, что дифференцируемая функция (например,  $u = u(x, y)$ ) от дифференцируемых функций (например  $x = r \cos \Phi$  и  $y = r \sin \Phi$ ) является также дифференцируемой (относительно переменных  $r$  и  $\Phi$ ). Второе утверждение проверяется непосредственно. Например, если условие 1') выполнено и, кроме того, выполнены условия (1.3:1), то

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \Phi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \Phi = \frac{\partial v}{\partial y} \cos \Phi - \frac{\partial v}{\partial x} \sin \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \Phi}, \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{\partial v}{\partial x} \cos \Phi + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \Phi = -\frac{\partial u}{\partial y} \cos \Phi + \frac{\partial u}{\partial x} \sin \Phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \Phi} \end{aligned} \right\} \quad (1.3:8)$$

Читатель легко выполнит и обратный переход от условий (1.3:7) к условиям (1.3:1).

Записывая уравнения (1.3:8) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \Phi - \frac{\partial v}{\partial x} \sin \Phi, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos \Phi + \frac{\partial u}{\partial x} \sin \Phi,$$

получаем из них

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \Phi + \frac{\partial v}{\partial r} \sin \Phi, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial r} \sin \Phi + \frac{\partial v}{\partial r} \cos \Phi,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} (\cos \Phi - i \sin \Phi) + i \frac{\partial v}{\partial r} (\cos \Phi - i \sin \Phi) = \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) (\cos \Phi - i \sin \Phi) = \frac{r}{z} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (1.3:9)$$

Эта формула удобна для вычисления  $f'(z)$  с помощью полярных координат. Уравнения (1.3:7) позволяют записывать  $f'(z)$  также в виде

$$f'(z) = \frac{1}{z} \left( \frac{\partial v}{\partial \Phi} - i \frac{\partial u}{\partial \Phi} \right). \quad (1.3:10)$$

В качестве примера рассмотрим функцию

$$z^{\frac{m}{n}} = |z|_+^{\frac{m}{n}} \left( \cos \frac{m \operatorname{Arg} z}{n} + i \sin \frac{m \operatorname{Arg} z}{n} \right) = r_+^{\frac{m}{n}} \left( \cos \frac{m\Phi}{n} + i \sin \frac{m\Phi}{n} \right)$$

где  $m$  — целое число и  $n$  — натуральное. Функция эта определена в области  $G: z \neq 0$  и является многозначной, если рациональное число  $\frac{m}{n}$  не является целым (см. гл. первую, п. 2.3).

Многозначность функции  $z^{\frac{m}{n}}$  обусловлена многозначностью аргумента  $\Phi$ . Чтобы иметь возможность говорить о производной этой многозначной функции в некоторой точке  $z$  области  $G$ , возьмем в этой области какую-либо окрестность точки  $z$ , не содержащую начала координат, и фиксировав одно из значений  $\Phi$  в точке  $z$ , будем брать во всех других точках  $z_1$  той же окрестности значения  $\Phi_1$ , удовлетворяющие условию  $|\Phi_1 - \Phi| < \frac{\pi}{2}$  (рис. 8). Тогда получим в рассматриваемой окрестности однозначную и непрерывную ветвь\*) функции  $z^{\frac{m}{n}}$ . Будем обозначать эту однозначную функцию тем же знаком:  $f(z) = z^{\frac{m}{n}}$ .

Очевидно, в этом случае

$$u = r_+^{\frac{m}{n}} \cos \frac{m\Phi}{n}, \quad v = r_+^{\frac{m}{n}} \sin \frac{m\Phi}{n},$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{m}{n} r_+^{\frac{m}{n}-1} \cos \frac{m\Phi}{n} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \Phi},$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{m}{n} r_+^{\frac{m}{n}-1} \sin \frac{m\Phi}{n} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \Phi},$$

и, следовательно,  $f(z)$  является дифференцируемой функцией. Для ее производной получаем в силу формулы (1.3:9):

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{r}{z} \left( \frac{m}{n} r_+^{\frac{m}{n}-1} \cos \frac{m\Phi}{n} + \frac{m}{n} r_+^{\frac{m}{n}-1} \sin \frac{m\Phi}{n} \right) = \\ &= \frac{m}{n} r_+^{\frac{m}{n}} \left( \cos \frac{m\Phi}{n} + i \sin \frac{m\Phi}{n} \right) \frac{1}{z} = \frac{m}{n} \frac{f(z)}{z}. \end{aligned}$$

\*) Подробнее об однозначных ветвях многозначных функций мы будем говорить ниже, в § 5 этой главы.

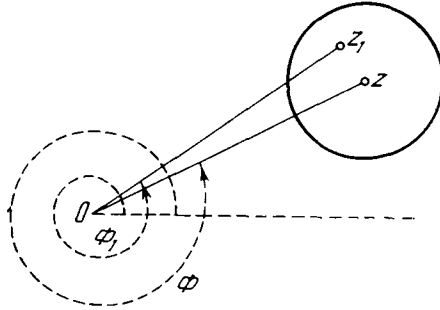


Рис. 8.

Читатель видит, таким образом, что правило дифференцирования «дробной степени»  $z^{\frac{m}{n}}$  формально остается тем же, что и для соответствующей функции действительного переменного  $x^{\frac{m}{n}}$ . Нужно помнить, что наша выкладка выполнялась при условии  $z \neq 0$ , которое можно опустить только в том случае, когда  $\frac{m}{n}$  является неотрицательным целым числом.

В виде упражнения предлагаем читателю убедиться в том, что функция  $f(z) = \ln r + i\Phi$ , определенная в той же области  $G$ , дифференцируема и производная ее равна  $\frac{1}{z}$  (здесь также необходимо выделять однозначные и непрерывные ветви функции).

## § 2. Геометрический смысл производной. Конформное отображение

**2.1.** Рассмотрим сначала комплексную функцию  $z = \lambda(t)$  действительного переменного  $t$ , определенную и непрерывную на некотором сегменте  $E: [\alpha, \beta]$  действительной оси. Как указывалось в главе первой, п. 4.1, такая функция определяет непрерывную кривую  $L$ . Предположим, что в некоторой точке сегмента  $[\alpha, \beta]$  существует производная (по множеству  $E$ )  $\lambda'(t) \neq 0$ . Покажем, что тогда в соответствующей точке  $z_0 = \lambda(t_0)$  кривой  $L$  существует касательная  $T$  к ней (понимаемая как предельное положение секущей, проходящей через  $z_0$ ), причем угол между  $T$  и действительной осью совпадает с  $\arg \lambda'(t_0)$ .

В самом деле, проведем секущую через точки  $z_0 = \lambda(t_0)$  и  $z_1 = \lambda(t_1)$  кривой  $L$ . Можно предполагать, что точки эти не совпадают для всех  $t_1$ , отличных от  $t_0$  и достаточно близких к  $t_0$  (в противном случае найдется последовательность  $\{t_{1n}\} \rightarrow t_0$ , такая, что

$$\lambda(t_{1n}) - \lambda(t_0) = 0$$

при всех  $n$ , и, следовательно,

$$\lambda'(t_0) = \lim_{t_{1n} \rightarrow t_0} \frac{\lambda(t_{1n}) - \lambda(t_0)}{t_{1n} - t_0} = 0$$

Замечая, что направление секущей одинаково с направлением вектора  $\frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0}$ , заключаем, что секущая, наверное, имеет предельное положение при  $t_1 \rightarrow t_0$  ( $z_1 \rightarrow z_0$ ), если только угол между последним вектором и действительной осью, равный

$\operatorname{Arg} \frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0}$ , имеет предел при  $t_1 \rightarrow t_0$ . Но в силу условия существования предел

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0} = \lambda'(t_0) \neq 0;$$

поэтому существует и предел

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \operatorname{Arg} \frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0} = \operatorname{Arg} \lambda'(t_0) *),$$

чем и завершается доказательство.

Итак, для комплексной функции действительного переменного наличие отличной от нуля производной означает существование касательной к соответствующей кривой; угол наклона касательной к действительной оси совпадает с аргументом производной.

Обратимся теперь к функции комплексного переменного  $w = f(z)$ , определенной и непрерывной в некоторой области  $G$ , и допустим, что в точке  $z_0 \in G$  существует производная  $f'(z_0) \neq 0$ . Проведем через точку  $z_0$  какую-либо кривую  $L: z = \lambda(t)$ , ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ,  $\lambda(\alpha) = z_0$ ), для которой существует производная  $\lambda'(t_0) \neq 0$ ; по предыдущему, кривая  $L$  обладает касательной в точке  $z_0 = \lambda(\alpha)$  с углом наклона, равным  $\operatorname{Arg} \lambda'(t_0)$ . Эта кривая преобразуется посредством отображения  $w = f(z)$  в кривую  $\Lambda$ , расположенную в плоскости  $w$ :  $w = f[\lambda(t)] = \mu(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ,  $\mu(t_0) = f(z_0) = w_0$ ). Так как, по правилу дифференцирования сложных функций (п. 1.1), функция  $\mu(t)$  дифференцируема в точке  $t = t_0$  и  $\mu'(t_0) = f'(z_0) \lambda'(t_0) \neq 0$ , то кривая  $\Lambda$  обладает касательной в точке  $w_0 = f(z_0)$ , причем угол между касательной и действительной осью равен

$$\operatorname{Arg} \mu'(t_0) = \operatorname{Arg} [\lambda'(t_0) f'(z_0)] = \operatorname{Arg} \lambda'(t_0) + \operatorname{Arg} f'(z_0).$$

Отсюда вытекает, что при переходе от кривой  $L$  к ее образу  $\Lambda$  угол наклона касательной в начальной точке кривой изменяется на величину

$$\operatorname{Arg} \mu'(t_0) - \operatorname{Arg} \lambda'(t_0) = \operatorname{Arg} f'(z_0),$$

не зависящую от этой кривой. Если из точки  $z_0$  выходят какие-либо две кривые  $L_1$  и  $L_2$ , обладающие касательными  $t_1$  и  $t_2$  в точке  $z_0$ , то касательные  $\tau_1$  и  $\tau_2$  к их образам  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  в точке  $w_0 = f(z_0)$  получатся из  $t_1$  и  $t_2$  посредством поворота на один и тот же угол  $\operatorname{Arg} f'(z_0)$ , и, следовательно, угол между кривыми  $L_1$  и  $L_2$  будет равен (по величине и по направлению отсчета) углу между  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$ . Таким образом, при отображении посредством непрерывной функции  $w = f(z)$ , обладающей отличной от нуля производной  $f'(z_0)$ , все кривые плоскости  $z$ , проходящие через точку  $z_0$  и обладающие

\*) См. конец п. 3.3 гл. 1.



касательными в этой точке, преобразуются в кривые плоскости  $\omega$ , проходящие через точку  $\omega_0 = f(z_0)$  и также обладающие касательными в этой точке, причем углы между кривыми при этом преобразовании сохраняются. Отображение посредством непрерывной функции, сохраняющее углы между кривыми, проходящими через данную точку, называется конформным в этой точке.

Если при этом сохраняются не только величины углов, но и направления их отсчета, то говорят о конформном отображении первого рода; если же направления отсчета углов изменяются на противоположные, то говорят о конформном отображении второго рода.

Итак, отображение посредством аналитической в некоторой области  $G$  функции комплексного переменного является конформным отображением первого рода во всех точках, в которых производная отлична от нуля. Если отображение является конформным во всех без исключения точках области  $G$ , то его называют конформным отображением области  $G$ .

Примером конформного отображения второго рода может служить зеркальное отражение в действительной оси:  $\omega = \bar{z}$ . Более общий пример дают отображения, осуществляемые посредством функций, сопряженных с аналитическими:  $\omega = \bar{f}(z)$  (предполагается, что  $f'(z) \neq 0$ ).

Предлагаем читателю доказать, что если производная в некоторой точке равна нулю, то углы могут как сохраняться, так и изменяться (рассмотреть отображения:

$$f_1(z) = r^2 (\cos \Phi + i \sin \Phi)$$

и

$$f_2(z) = r^2 (\cos 2\Phi + i \sin 2\Phi) = z^2$$

в точке  $z = 0$ ).

2.2. В предыдущем пункте было доказано, что  $\text{Arg } f'(z_0)$  выражает собой угол поворота касательной к кривой  $L$  в некоторой ее точке  $z_0$  при переходе к ее образу  $\Lambda$  и к точке  $\omega_0 = f(z_0)$ . В частности, если  $f'(z_0)$  — действительное положительное число, то векторы касательных к  $L$  в  $z_0$  и к  $\Lambda$  в  $f(z_0)$  параллельны и направлены в одну и ту же сторону.

Выясним теперь геометрический смысл модуля производной  $|f'(z_0)|$ . С этой целью заметим, что

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$$

и что числа  $|z - z_0|$  и  $|f(z) - f(z_0)|$  представляют собой соответственно расстояния между точками  $z$  и  $z_0$  плоскости  $z$  и между их образами  $f(z)$  и  $f(z_0)$  в плоскости  $\omega$ . Если отношение  $\frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$  можно рассматривать как растяжение вектора  $z - z_0$

в результате отображения посредством функции  $w = f(z)$  (это растяжение может быть меньше единицы, равно единице и больше единицы), то *модуль производной  $|f'(z_0)|$  можно рассматривать как растяжение в точке  $z_0$  при отображении посредством функции  $w = f(z)$* . Величина растяжения в точке  $z_0$ , как следует из только что сказанного, не зависит от того, какой берется вектор  $z - z_0$ , выходящий из этой точки; однако она не совпадает с растяжением вектора  $z - z_0$ , а представляет собой предел этого растяжения при условии, что  $z$  стремится к  $z_0$ .

2.3. В виде иллюстрации рассмотрим дробно-линейную функцию  $L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  (по крайней мере одно из чисел  $c$  или  $d$  отлично от нуля). Пусть сначала  $c = 0$ . Тогда  $L(z)$  можно переписать в виде  $L(z) = \alpha z + \beta$  ( $\alpha = \frac{a}{d}$ ,  $\beta = \frac{b}{d}$ ); это — целая линейная функция. Она определена при всех значениях  $z$  и имеет производную  $L'(z) = \alpha$ , сохраняющую постоянное значение и отличную от нуля, если  $\alpha \neq 0$ . Следовательно, функция  $L(z)$  производит конформное отображение всей плоскости комплексного переменного  $z$ . При этом отображении касательные ко всем кривым плоскости  $z$  поворачиваются на один и тот же угол, равный  $\text{Arg } \alpha$ , и растяжение во всех точках оказывается равным  $|\alpha|$ . Если  $\alpha = 1$ , то  $\text{Arg } \alpha = 2k\pi$ ,  $|\alpha| = 1$ , и как поворот, так и растяжение фактически отсутствуют. Так как отображение в этом случае принимает вид  $w = z + \beta$ , то оно, очевидно, сводится к сдвигу всей плоскости, как целого, на вектор  $\beta$ . Если же  $\alpha \neq 1$  (и  $\alpha \neq 0$ ), то отображение можно представить в виде  $w - \gamma = \alpha(z - \gamma)$ , где  $\gamma$  определяется из уравнения  $\gamma = \alpha\gamma + \beta$ . Отсюда следует, что каждый вектор  $z - \gamma$ , выходящий из точки  $\gamma$ , в результате отображения поворачивается на угол, равный  $\text{Arg } \alpha$ , и подвергается растяжению в  $|\alpha|$  раз, превращаясь в вектор  $w - \gamma$ , выходящий из той же точки  $\gamma$ . Это означает, что отображение  $L(z) = \alpha z + \beta$  при  $\alpha \neq 1$  (и  $\alpha \neq 0$ ) сводится к повороту всей плоскости, как целого, вокруг точки  $\gamma = \frac{\beta}{1-\alpha}$  на угол  $\text{Arg } \alpha$  и к растяжению относительно этой точки в  $|\alpha|$  раз. Очевидно, это отображение подобия с центром в точке  $\gamma = \frac{\beta}{1-\alpha}$  и коэффициентом подобия  $|\alpha|$ , сопровождающееся поворотом вокруг той же точки на угол  $\text{Arg } \alpha$ . Таково конформное отображение в простейшем случае.

Пусть теперь  $c \neq 0$ . Тогда при  $z \neq \delta = -\frac{d}{c}$  существует производная

$$L'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{c^2} \cdot \frac{1}{(z-\delta)^2}.$$

Если определитель  $ad - bc \neq 0$  (а равенство нулю выражения  $ad - bc$  означает справедливость пропорции  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \lambda$ , откуда  $a = c\lambda$ ,  $b = d\lambda$  и  $L(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{c\lambda z + d\lambda}{cz+d} \equiv \lambda$ ), то  $L'(z) \neq 0$  при всех  $z \neq \delta$ . Следовательно, отображение  $w = L(z)$  является конформным во всех конечных точках, отличных от  $\delta$ . При этом

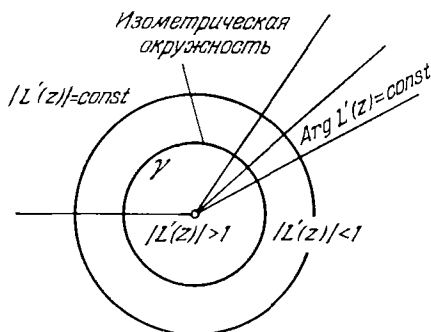


Рис. 9.

отображении касательные к кривым, проходящим через произвольную точку  $z \neq \delta$ , поворачиваются на угол, равный

$$\operatorname{Arg} L'(z) = \operatorname{Arg} \frac{ad - bc}{c^2} - 2 \operatorname{Arg} (z - \delta).$$

Угол поворота касательной, очевидно, меняется от точки к точке, сохраняя одно и то же значение для тех точек, для которых  $\operatorname{Arg} (z - \delta)$  сохраняет одно и то же значение, т. е. для

точек каждого из прямолинейных лучей, выходящих из точки  $\delta$ . Растяжение длины в точке  $z$  при данном отображении есть  $|L'(z)| = \left| \frac{ad - bc}{c^2} \right| : |z - \delta|^2$  и также меняется от точки к точке. Оно сохраняет одно и то же значение для тех точек, для которых величина  $|z - \delta|$  одна и та же, т. е. для точек каждой окружности с центром в точке  $\delta$ . В частности, это растяжение равно единице в каждой точке окружности  $\gamma$ :  $|z - \delta| = \frac{1}{|c|} \sqrt{|ad - bc|}$  (изометрическая окружность дробно-линейного преобразования), больше единицы внутри  $\gamma$ , стремясь к бесконечности при  $z$ , стремящемся к  $\delta$ , и меньше единицы вне  $\gamma$ , стремясь к нулю при  $z$ , стремящемся к бесконечности (рис. 9).

2.4. Пусть, по-прежнему,  $c \neq 0$  и  $ad - bc \neq 0$ . Тогда, очевидно,

$$\lim_{z \rightarrow \delta = -\frac{d}{c}} \frac{az+b}{cz+d} = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} = \alpha.$$

В соответствии с этим мы получаем:

$$L(\delta) = \infty \quad \text{и} \quad L(\infty) = \alpha.$$

Таким образом, конечная точка  $\delta$  преобразуется посредством функции  $w = L(z)$  в бесконечно удаленную точку, а бесконечно

удаленная точка — в конечную точку  $\alpha$ . Покажем, что отображение является конформным также и в этих точках. В самом деле, пусть  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — две кривые, проходящие через точку  $\delta$  и составляющие в ней угол  $\theta$ , а  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — их образы в плоскости  $w$ . Мы хотим доказать, что  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  составляют в бесконечно удаленной точке также угол  $\theta$ . С этой целью подвергнем плоскость  $w$  преобразованию  $\zeta = \frac{1}{w}$ .

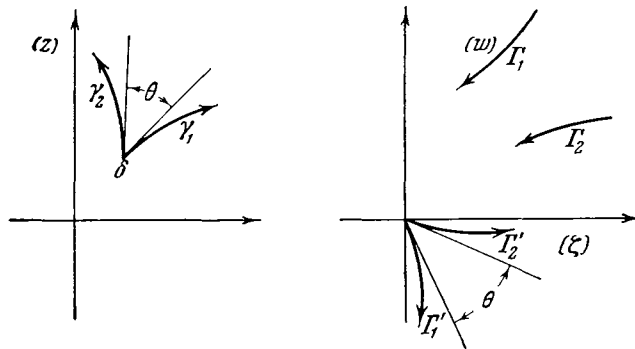


Рис. 10.

При этом кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  перейдут в  $\Gamma'_1$  и  $\Gamma'_2$ , а бесконечно удаленная точка — в начало координат (рис. 10). Переход от  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в плоскости  $z$  к  $\Gamma'_1$  и  $\Gamma'_2$  в плоскости  $\zeta$ , очевидно, совершается посредством дробно-линейного отображения

$$\zeta = \frac{1}{w} = \frac{cz + d}{az + b},$$

которое является конформным в точке  $z = \delta = -\frac{d}{c}$ . Следовательно,  $\Gamma'_1$  и  $\Gamma'_2$  составляют в начале координат также угол  $\theta$ . А отсюда, в силу определения п. 5.6 главы первой, кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  также составляют угол  $\theta$  в бесконечно удаленной точке. Итак, конформность отображения  $w = L(z)$  в точке  $z = \delta$  установлена.

Аналогично устанавливается конформность и в бесконечно удаленной точке. Именно, если кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  проходят через бесконечно удаленную точку в плоскости  $z$ , то их образы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  в плоскости  $w$  проходят через точку  $\alpha$ . Пусть  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  составляют между собой угол  $\theta$  в бесконечно удаленной точке. Это означает, что их образы  $\gamma'_1$  и  $\gamma'_2$ , полученные в результате преобразования  $\zeta = \frac{1}{z}$ , составляют угол  $\theta$  в начале координат. Но перейти от  $\gamma'_1$  и  $\gamma'_2$  к  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  можно,

очевидно, посредством преобразования

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a\frac{1}{\xi}+b}{c\frac{1}{\xi}+d} = \frac{a+b\xi}{c+d\xi}.$$

Это преобразование является дробно-линейным и, следовательно, конформным в точке  $\xi = 0$ . Отсюда вытекает, что  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  составляют между собой также угол  $\theta$  в точке  $\alpha = \frac{a}{c}$ , чем и заканчивается доказательство конформности отображения  $w = L(z)$  в бесконечно удаленной точке.

В случае, когда  $c = 0$ , получаем целую линейную функцию

$$w = L(z) = az + \beta \quad (a \neq 0).$$

Здесь полагаем  $L(\infty) = \infty$  и посредством вспомогательного преобразования  $\xi = \frac{1}{w} = \frac{1}{az+\beta}$  сводим этот случай к только что разобранному (бесконечно удаленной точке плоскости  $z$  соответствует начало координат в плоскости  $w$ ).

Предлагаем читателю полностью провести все рассуждение.

Резюмируя, мы можем сказать, что *дробно-линейная функция  $w = L(z)$  осуществляет конформное отображение расширенной плоскости самой на себя.*

### § 3. Многочлены. Показательная функция. Синус и косинус

3.1. Простейший и наиболее важный класс дифференцируемых функций составляют однозначные функции, аналитические во всей плоскости, исключая из последней бесконечно удаленную точку. Такие функции называются *целыми*. Весьма частным примером целых функций служит *многочлен* (полином):

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n = P_n(z).$$

Он может сводиться к постоянной ( $n = 0$ ). Если же  $n > 0$  и  $a_n \neq 0$ , то  $\lim_{z \rightarrow \infty} P_n(z) = \infty$ . Следовательно, многочлен степени выше первой обращается в  $\infty$  в бесконечно удаленной точке.

Если  $w$  — произвольное комплексное число (собственное), то, как известно из алгебры, уравнение  $P_n(z) = w$  имеет  $n$  корней, из которых некоторые могут быть равными между собой (кратные корни). Поэтому каждая точка плоскости  $w$  принадлежит образу плоскости  $z$  при отображении  $P_n(w) = f(z)$ , причем эта точка будет иметь  $n$  прообразов:  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . Прибавим к этому, что  $P_n(\infty) = \infty$  и, следовательно,  $\infty$  принадлежит к образу расширенной плоскости. Прообразами бесконечно удаленной точки  $w = \infty$  служат

корни уравнения  $P_n(z) = \infty$ , т. е. также бесконечно удаленная точка. Мы будем считать ее для симметрии  $n$ -кратным корнем этого уравнения. Итак, *многочлен степени  $n$  ( $a_n \neq 0$ ,  $n > 0$ ) отображает расширенную плоскость на самое себя так, что каждая точка образа  $w$  имеет  $n$  прообразов  $z_1, z_2, \dots, z_n$* . Впрочем, как уже было оговорено, для отдельных, исключительных значений  $w$  (к которым относится и  $w = \infty$ ) число прообразов может быть и меньше  $n$ .

Легко видеть, что количество этих исключительных значений не превышает  $n$ . В самом деле, если  $w_0 \neq \infty$  и уравнение  $P_n(z) = w_0$  имеет кратные корни, то, как известно из алгебры, для каждого из них  $P'_n(z) = 0$ . Но последнее уравнение имеет  $n - 1$  корней (среди которых также могут быть равные между собой):  $\zeta_1, \zeta_2,$

$\zeta_{n-1}$ . Отсюда следует, что  $w_0$  должно иметь одно из следующих  $n - 1$  значений:  $P_n(\zeta_1), \dots, P_n(\zeta_{n-1})$ , и если сюда еще присоединить бесконечно удаленную точку, то мы и получим те (самое большее)  $n$  точек плоскости  $w$ , которые имеют менее чем по  $n$  прообразов в плоскости  $z$ .

3.2. В силу общей теории, отображение  $w = P_n(z)$  является конформным во всех точках, за исключением тех точек  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-1}$ , в которых производная обращается в нуль, а также, быть может, за исключением точки  $z = \infty$ .

В случае, когда  $n = 1$ , многочлен является целой линейной функцией, и здесь отображение является взаимно однозначным и конформным во всей расширенной плоскости, включая и бесконечность (см. пп. 2.3—2.4). При  $n > 1$  конформность действительно нарушается в указанных точках.

Пусть, в самом деле,  $P'_n(z_0) = 0$ . Тогда  $z = z_0$  является кратным корнем уравнения  $P_n(z) - P_n(z_0) = 0$  и, следовательно,  $P_n(z) - P_n(z_0)$  можно представить в виде

$$P_n(z) - P_n(z_0) = (z - z_0)^k Q(z),$$

где  $k \geq 2$  — кратность корня  $z = z_0$  (число  $k$ , как известно, на единицу выше кратности корня  $z = z_0$  для уравнения  $P'_n(z) = 0$ ) и многочлен  $Q(z)$  не обращается в нуль при  $z = z_0$ . Полагая  $P_n(z) = w$  и  $P_n(z_0) = w_0$ , получаем отсюда, что

$$\operatorname{Arg}(w - w_0) = \operatorname{Arg}(z - z_0)^k + \operatorname{Arg} Q(z),$$

и далее:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \{\operatorname{Arg}(w - w_0) - \operatorname{Arg}(z - z_0)^k\} = \operatorname{Arg} Q(z_0).$$

Пусть теперь  $z = \lambda(t)$  — кривая  $L$ , проходящая через точку  $z_0$  ( $z_0 = \lambda(t_0)$ ) и имеющая в этой точке касательную, наклоненную под углом

$$\operatorname{Arg} \lambda'(t_0) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \operatorname{Arg} \frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0}$$

к действительной оси (см. п. 2.1). Образ  $\Lambda$  этой кривой в плоскости  $w$  будет:  $w = P_n[\lambda(t)] = \mu(t)$ . Непосредственно мы не можем заключить отсюда о существовании касательной к  $\Lambda$  в точке  $w_0(t=t_0)$  (так как  $\mu'(t_0) = P'_n(z_0)\lambda'(t_0) = 0$ ). Но для наклона секущей, проходящей через точки  $w_0$  и  $w \neq w_0$ , получаем по предыдущему:

$$\operatorname{Arg} \frac{w - w_0}{t - t_0} =$$

$$\operatorname{Arg} \frac{w - w_0}{(z - z_0)^h} + k \operatorname{Arg} \frac{(z - z_0)}{t - t_0} \rightarrow \operatorname{Arg} Q(z_0) + k \operatorname{Arg} \lambda'(t_0) \text{ при } t \rightarrow t_0,$$

откуда и следует, что касательная существует.

Если  $L_1$  и  $L_2$  — две кривые:  $z = \lambda_1(t)$  и  $z = \lambda_2(t)$ , проходящие через точку  $z_0$  и образующие в ней угол  $\theta$ :

$$\theta = \operatorname{Arg} \lambda'_2(t_2) - \operatorname{Arg} \lambda'_1(t_1) \quad (\lambda_1(t_1) = \lambda_2(t_2) = z_0),$$

то образы этих кривых  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  проходят через  $w_0$  и образуют в ней угол

$$\begin{aligned} [\operatorname{Arg} Q(z_0) + k \operatorname{Arg} \lambda'_2(t_2)] - [\operatorname{Arg} Q(z_0) + k \operatorname{Arg} \lambda'_1(t_1)] = \\ = k [\operatorname{Arg} \lambda'_2(t_2) - \operatorname{Arg} \lambda'_1(t_1)] = k\theta. \end{aligned}$$

Итак, при отображении  $w = P_n(z)$  все углы с вершинами в точках, в которых производная  $P_n(z)$  обращается в нуль, изменяются, а именно увеличиваются в  $k$  раз, если кратность соответствующего корня уравнения  $P'_n(z) = 0$  равна  $k - 1$ .

Используя преобразование  $\xi = \frac{1}{z}$ , читатель легко убедится в том, что при  $n > 1$  конформность отображения нарушается также и в бесконечно удаленной точке. А именно, углы с вершиной в бесконечно удаленной точке при отображении  $w = P_n(z)$  увеличиваются в  $n$  раз.

3.3. Рассмотрим, в частности, отображение вида  $w = (z - a)^n$  ( $n > 1$ ). Оно отображает расширенную плоскость самое на себя так, что каждая точка  $w$  имеет  $n$  прообразов в плоскости  $z$ . Исключение представляют точки  $w = 0$  и  $w = \infty$ , для которых прообразы сливаются в одну точку:  $a$  и  $\infty$  соответственно. Пробразы  $z (\neq a, \neq \infty)$  определяются из уравнения

$$w = (z - a)^n,$$

так что

$$z = a + \sqrt[n]{w} = a + \sqrt[n]{|w|} \left( \cos \frac{\operatorname{Arg} w}{n} + i \sin \frac{\operatorname{Arg} w}{n} \right)$$

Очевидно, эти  $n$  точек располагаются в вершинах правильного  $n$ -угольника с центром в  $a$ .

Отображение  $w = (z - a)^n$  является конформным во всех точках, за исключением точек  $z = a$  и  $z = \infty$ . Углы с вершинами в двух последних точках увеличиваются при данном отображении в  $n$  раз.

Для того чтобы получить более отчетливое представление об этом отображении, заметим, что

$$|w| = |z - a|^n \quad \text{и} \quad \text{Arg } w = n \text{Arg } (z - a).$$

Отсюда следует, что каждая окружность радиуса  $r$  с центром в точке  $z = a$  отображается на окружность радиуса  $r^n$  с центром в точке  $w = 0$ . Если при этом точка  $z$  пробегает окружность  $|z - a| = r$

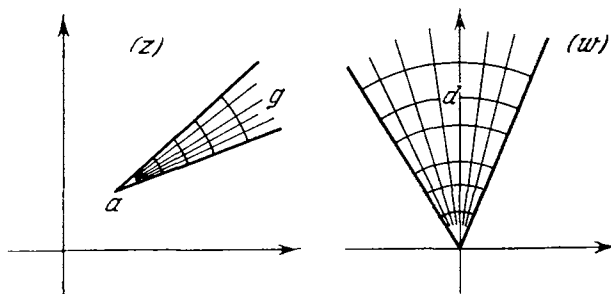


Рис. 11.

один раз в положительном направлении (т. е.  $\text{Arg } (z - a)$ , непрерывно возрастаая, увеличивается на  $2\pi$ ), то точка  $w$  пробегает окружность  $|w| = r^n$  в том же направлении  $n$  раз (т. е.  $\text{Arg } w$ , непрерывно возрастаая, увеличивается на  $2\pi n$ ). Заставим теперь точку  $z$  пробегать прямолинейный луч  $\text{Arg } (z - a) = \varphi_0 + 2k\pi$  от точки  $a$  до бесконечности. Наши формулы показывают, что соответствующая точка  $w$  будет пробегать при этом прямолинейный луч  $\text{Arg } w = n\varphi_0 + 2m\pi$  от начала координат до бесконечности.

Рассмотрим область  $g$ , представляющую внутренность угла раствора  $\theta$ ,  $0 < \theta \leq \frac{2\pi}{n}$ , с вершиной в точке  $a$ . Пусть этот угол ограничен прямолинейными лучами

$$\text{Arg } (z - a) = \varphi_0 + 2k\pi$$

и

$$\text{Arg } (z - a) = \varphi_1 + 2m\pi,$$

$$(\varphi_1 - \varphi_0 = \theta).$$

Из сказанного следует, что образом области  $g$  в плоскости  $w$  является область  $d$ , представляющая угол раствора  $n\theta$  с вершиной в начале координат, ограниченный прямолинейными лучами (рис. 11). Соответствие между  $g$  и  $d$ , устанавливаемое посредством функции



$w = (z - a)^n$  будет взаимно однозначным. Действительно, так как функция  $w = (z - a)^n$  однозначна, то, чтобы проверить это утверждение, достаточно установить, что каждая точка  $w$  из области  $d$  имеет лишь один прообраз в области  $g$ . Для этого заметим, что все  $n$  прообразов точки  $w$  располагаются в плоскости  $z$  в вершинах правильного  $n$ -угольника с центром в  $a$ , так что два из них могли бы попасть внутрь некоторого угла с вершиной в  $a$  лишь в том случае, когда раствор угла больше, чем  $\frac{2\pi}{n}$ . Но раствор угла  $g$  не превышает  $\frac{2\pi}{n}$ , следовательно, углу  $g$  принадлежит лишь по одному прообразу каждой точки из  $d$ , чем и заканчивается доказательство нашего утверждения.

Итак, функция  $w = (z - a)^n$  отображает взаимно однозначно и конформно внутренность любого угла с прямолинейными сторонами, вершиной в точке  $a$  и раствором  $\theta$ ,  $0 < \theta \leq \frac{2\pi}{n}$ , на внутренность соответствующего угла также с прямолинейными сторонами, вершиной в начале координат и раствором  $n\theta$ .

Поэтому к рассматриваемой функции прибегают каждый раз, когда нужно отобразить один угол с прямолинейными сторонами на другой угол, в несколько раз больший.

Разумеется, было бы ошибочным думать, что при отображении  $w = (z - a)^n$  ( $n > 1$ ) всякая, вообще, прямая преобразуется в прямую, а всякая окружность — в окружность. Положим, например,  $a = 0$  и  $n = 2$ . Тогда получим функцию  $w = z^2$ . Рассмотрим, во что преобразуются посредством функции  $w = z^2$  прямые, не проходящие через начало и параллельные одной из координатных осей. Возьмем, например, прямую, параллельную мнимой оси  $z = c + it$ ,  $c \neq 0$ ,  $-\infty < t < +\infty$ . В качестве образа получим линию  $w = (c + it)^2$ , или, полагая  $w = u + iv$  и отделяя действительные и мнимые части:

$$u = c^2 - t^2, \quad v = 2ct, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Это и суть уравнения преобразованной линии, представленные в декартовых координатах в параметрической форме. Если исключить отсюда параметр  $t$ , то получим:

$$v^2 = 4c^2(c^2 - u).$$

Это уравнение параболы с осью, направленной по действительной оси в отрицательную сторону, с фокусом в начале координат и с параметром  $p = 2c^2$ . Совершенно так же обнаружим, что каждая прямая, параллельная действительной оси:  $z = t + ic'$ , преобразуется в параболу

$$v^2 = 4c'^2(u + c'^2)$$

с осью, направленной по действительной оси в положительную сторону, с фокусом в начале координат и с параметром  $p' = 2c'^2$ . Итак, *два семейства прямых, параллельных координатным осям, отображаются посредством функции  $w = z^2$  в два семейства парабол с общим фокусом в начале и с осями на действительной оси* (рис. 12). Из того, что семейства прямых были взаимно ортогональными, а отображение конформное, вытекает, что и полученные семейства парабол взаимно ортогональны; это легко проверить и непосредственным подсчетом.

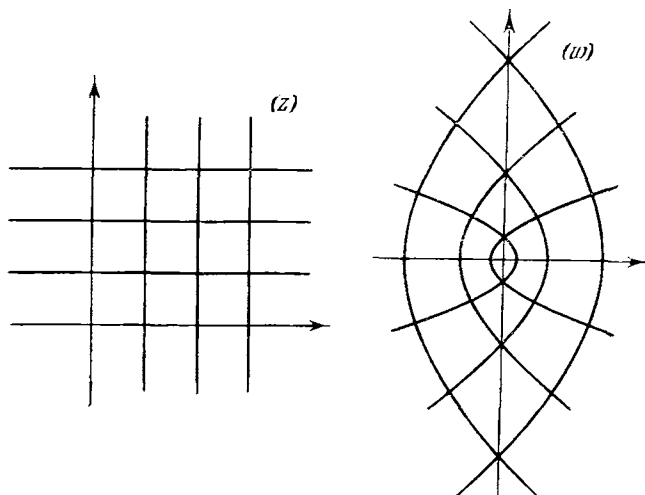


Рис. 12.

Читатель должен помнить, конечно, что отображение всей плоскости  $z$  посредством функции  $w = z^2$  не является взаимно однозначным: каждая точка  $w$ , отличная от нуля и от бесконечности, имеет два прообраза. В частности, прообразами параболы  $v^2 = 4c^2 (c^2 - u)$  являются две прямые, симметричные относительно мнимой оси:  $z = c + it$  и  $z = -c + it$ ; точно так же прообразами параболы  $v^2 = 4c'^2 (u + c'^2)$  являются две прямые, симметричные относительно действительной оси:  $z = t + ic'$  и  $z = t - ic'$ . Но если рассматривать только образ какой-нибудь полуплоскости  $g$ , ограниченной прямой, проходящей через начало координат (такая полуплоскость есть внутренность угла с вершиной в начале координат и раствором  $\pi$ ), то, по предыдущему, соответствие между  $g$  и ее образом  $d$  будет взаимно однозначным;  $d$  будет представлять здесь угол раствора  $2\pi$  с вершиной в начале координат; обе стороны этого угла сливаются в один прямолинейный луч, выходящий из начала координат.

**3.4.** Целые функции, отличные от многочленов, называются трансцендентными целыми функциями. Простейшей из них является показательная функция  $\exp z$  или  $e^z$ . Она получается в результате распространения показательной функции действительного переменного  $e^x$  в комплексную плоскость. Известно, что функция  $f(x) = e^x$  вполне характеризуется следующими своими свойствами: она

1) однозначно определена для всех действительных значений  $x$ , принимает действительные значения и при  $x = 1$  имеет значение  $e$ ;

2) удовлетворяет теореме сложения

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) f(x_2)$$

при любых  $x_1$  и  $x_2$ ;

3) непрерывна в точке  $x = 0$  \*).

Мы построим показательную функцию комплексного переменного  $f(z) = \exp z$ , подчинив ее следующим условиям: она

1') однозначно определена для всех (конечных) комплексных значений  $z$ , при  $z = x$  действительных принимает также действительные значения и при  $x = 1$  имеет значение  $e$ ;

2') удовлетворяет теореме сложения

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1) f(z_2)$$

при любых  $z_1$  и  $z_2$ ;

3') дифференцируема в точке  $z = 0$ .

Из условий 1') и 2') вытекает, что  $f(0) = 1$ . В самом деле,  $f(0) \cdot f(1) = f(1) \neq 0$  и, следовательно,  $f(0) = 1$ . Далее заключаем, что  $f(z) \neq 0$  при всех значениях  $z$ . Действительно,  $f(z) \cdot f(-z) = f(0) = 1$ , откуда и следует, что  $f(z) \neq 0$ . С помощью 2') и 3') получаем для любого  $z$ :

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{f(z) \cdot f(\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} f(z) \rightarrow f'(0) f(z)$$

при  $\Delta z \rightarrow 0$ . Это означает, что  $f(z)$  функция аналитическая во всей плоскости (целая), удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$f'(z) = f'(0) f(z). \quad (3.4.1)$$

В частности,  $f'(x) = f'(0) f(x)$ , откуда  $f(x) = e^{f'(0)x + C}$ ; из условий  $f(0) = 1$  и  $f(1) = e$  следует, что  $C = 0$  и  $f'(0) = 1$ . Итак,  $f(x) = e^x$ ; впрочем, это заключение непосредственно вытекает из того, что  $f(x)$  удовлетворяет условиям 1), 2) и 3).

\* См., например, Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, изд. 6, М., «Наука», 1966, гл. II, § 4, п. 68.

Подставляя значение  $f'(0)$  в (3.4:1), получим:

$$f'(z) = f(z). \quad (3.4:2)$$

Представим  $f(z)$  в виде

$$f(z) = f(x + iy) = f(x)f(iy) = e^x [\alpha(y) + i\beta(y)]. \quad (3.4:3)$$

Тогда

$$f'(z) = \frac{\partial [e^x \beta(y)]}{\partial y} - i \frac{\partial [e^x \alpha(y)]}{\partial y} = e^x [\beta'(y) - i\alpha'(y)].$$

Из уравнения (3.4:2) найдем:

$$\beta'(y) = \alpha(y), \quad \alpha'(y) = -\beta(y),$$

откуда  $\beta''(y) + \beta(y) = 0$  и, следовательно:

$$\beta(y) = C_1 \cos y + C_2 \sin y, \quad \alpha(y) = \beta'(y) = -C_1 \sin y + C_2 \cos y.$$

Но  $f(0) = \alpha(0) + i\beta(0) = 1$ , т. е.  $\alpha(0) = 1$  и  $\beta(0) = 0$ ; поэтому  $C_1 = 0$  и  $C_2 = 1$ . Окончательно

$$\alpha(y) = \cos y, \quad \beta(y) = \sin y$$

и по формуле (3.4:2)

$$f(z) = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Мы получили единственную функцию, удовлетворяющую условиям 1'), 2') и 3'). Она называется показательной функцией (комплексного переменного) и обозначается  $\exp z$  или  $e^z$ . Итак, по определению:

$$\exp z = e^z = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (3.4:3)$$

Заметим, что если условие 3') заменить более общим: 3'') функция  $f(z)$  непрерывна в точке  $z = 0$ , то можно будет найти бесконечное множество различных функций, удовлетворяющих условиям 1'), 2') и 3''). Все они заключаются в формуле

$$f(z) = e^{x+ay} (\cos ay + i \sin ay),$$

где  $a$  и  $\alpha$  — действительные числа. Однако лишь одна из них, получающаяся при  $a = 0$ ,  $\alpha = 1$ , является аналитической и притом целой функцией.

3.5. Из определения показательной функции

$$\exp z = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (3.5:1)$$

следует, что она не обращается в нуль ни при каком  $z$  и что

$$|\exp z| = e^x \quad \text{и} \quad \text{Arg}(\exp z) = y + 2k\pi.$$

При  $z = iy$  ( $x = 0$ ) получаем:

$$\exp(iy) = \cos y + i \sin y.$$

Это соотношение позволяет вместо тригонометрической формы записи комплексного числа

$$c = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (r \neq 0)$$

пользоваться более компактной показательной формой

$$c = r \exp(i\varphi) = re^{i\varphi}.$$

Мы видим из формулы (3.5:1), что показательная функция обладает периодом  $2\pi i$  (так как при изменении  $y$  на  $2\pi$   $z$  изменяется на  $2\pi i$ , а значение функции не изменяется):

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp z.$$

Покажем, что  $2\pi i$  является основным периодом функции, т. е. что любой другой период ее должен иметь вид  $2k\pi i$ , где  $k$  — целое число.

В самом деле, пусть  $\omega = \alpha + \beta i$  есть период показательной функции. Тогда

$$\exp(z + \omega) = \exp z$$

при любом  $z$  и, в частности, при  $z = 0$

$$\exp \omega = \exp(\alpha + i\beta) = e^\alpha (\cos \beta + i \sin \beta) = 1.$$

Но это означает, что  $e^\alpha = 1$ , т. е.  $\alpha = 0$  и  $\cos \beta + i \sin \beta = 1$ , т. е.  $\beta = 2k\pi$ . Следовательно,

$$\omega = \alpha + i\beta = 2k\pi i,$$

что и требовалось доказать.

Выражение  $\exp \infty$  мы будем считать лишенным смысла, так как  $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z$  не существует. Достаточно заметить, что  $e^x \rightarrow \infty$ , при  $x > 0$  и стремящемся к  $\infty$ , и  $e^x \rightarrow 0$ , при  $x < 0$  и стремящемся к  $-\infty$ .

Отсюда, в частности, следует, что  $\exp z$  не совпадает ни с одним многочленом, т. е. действительно является целой трансцендентной функцией. В самом деле, всякий многочлен, не равный постоянной, стремится к бесконечности при  $z \rightarrow \infty$ .

Впоследствии (гл. четвертая, п. 33) будет показано, что никакая целая трансцендентная функция не имеет предела в точке  $z = \infty$ .

Для производной показательной функции получаем:

$$(\exp z)' = \frac{\partial (e^x \cos y)}{\partial x} + i \frac{\partial (e^x \sin y)}{\partial x} = e^x (\cos y + i \sin y) = \exp z.$$

Следовательно, производная показательной функции не обращается в нуль ни при каком  $z$ .

Ознакомимся с геометрическим поведением функции  $w = \exp z$  или, что то же самое, с отображением, осуществляемым при ее помощи. Мы уже отмечали, что значение  $w = 0$  не принимается этой функцией ни при каком  $z$ . Это означает, что начало координат плоскости  $w$  не принадлежит к образу конечной плоскости  $z$  при отображении  $w = \exp z$ . Покажем, что всякая другая конечная точка плоскости  $w$  принадлежит этому образу. В самом деле, из уравнения  $w = \exp z$ , где  $w \neq 0$  задано, а  $z = x + iy$  неизвестное, получаем:

$$|w| = e^x, \text{ откуда } x = \ln |w| \text{ и } \operatorname{Arg} w = y + 2\pi k, \text{ т. е. } y = \operatorname{Arg} w.$$

Итак, прообразами точек  $w$  могут быть только точки вида

$$z = \ln |w| + i \operatorname{Arg} w.$$

Очевидно, их бесконечно много, так как  $\operatorname{Arg} w$  имеет бесконечное множество значений, различающихся попарно на целые кратные  $2\pi$ . Кроме того, каждая из найденных точек действительно есть прообраз точки  $w$ , так как

$$\begin{aligned} \exp(\ln |w| + i \operatorname{Arg} w) &= e^{\ln |w|} (\cos \operatorname{Arg} w + i \sin \operatorname{Arg} w) = \\ &= |w| (\cos \operatorname{Arg} w + i \sin \operatorname{Arg} w) = w. \end{aligned}$$

Итак, множество всех корней уравнения  $w = e^z$  ( $w \neq 0$ ) представляется формулой

$$z = \ln |w| + i \operatorname{Arg} w = \ln |w| + i (\arg w + 2k\pi), \quad (3.5:2)$$

где  $k = 0, \pm 1, \pm 2,$

Все эти точки расположены на одной прямой, параллельной мнимой оси, на расстояниях  $2\pi$  друг от друга.

Мы обнаружили, что функция  $w = \exp z$  отображает конечную плоскость  $z$  на область, получающуюся из конечной плоскости  $w$  путем исключения одной точки  $w = 0$ , причем отображение не взаимно однозначно, так как каждая точка  $w \neq 0$  имеет бесконечное множество прообразов (3.5 2).

Так как производная показательной функции всюду отлична от нуля, то это отображение конформно во всех точках конечной плоскости  $z$ .

Заставим  $z$  описывать какую-либо прямую, параллельную одной из координатных осей (рис. 13). Если это будет прямая  $z = c + it$ , параллельная мнимой оси, то  $w = e^c (\cos t + i \sin t)$ , т. е.  $w$  будет находиться на окружности с центром в начале координат и радиусом, равным  $e^c$ . При этом, когда точка  $z$  описывает прямую однократно так, что ордината этой точки, равная  $t$ , непрерывно растет от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то  $w$  описывает соответствующую окружность бесконечно много раз в одном и том же положительном направлении.

Если же точка  $z$  описывает прямую  $z = t + ic'$ , параллельную действительной оси, то  $w = e^z = e^t (\cos c' + i \sin c')$ , очевидно, пробегает прямолинейный луч, выходящий из начала координат и образующий с положительной частью действительной оси угол  $c'$ . При

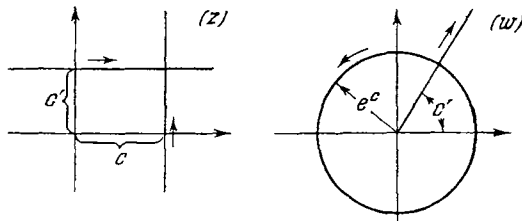


Рис. 13.

этом, когда точка  $z$  описывает прямую однократно так, что абсцисса этой точки, равная  $t$ , непрерывно растет от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то и  $w$  описывает соответствующий луч однократно так, что расстояние этой точки от начала координат непрерывно растет от 0 до  $\infty$  (и тот и другой пределы, конечно, исключаются, так как  $|w| = e^t$ ).

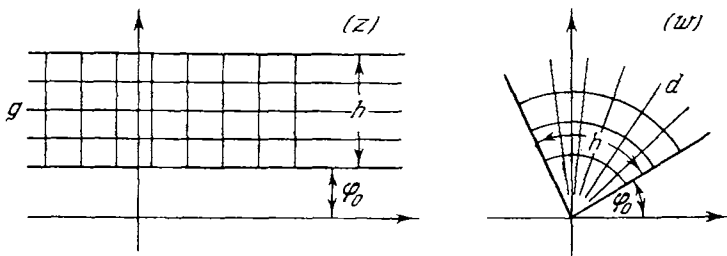


Рис. 14.

Итак, при отображении плоскости  $z$  посредством функции  $w = e^z$  семейство прямых, параллельных мнимой оси, преобразуется в семейство окружностей с центром в начале координат, а семейство прямых, параллельных действительной оси, — в семейство прямолинейных лучей, выходящих из начала координат.

Рассмотрим область  $g$ , представляющую внутренность прямолинейной полосы ширины  $h$ ,  $0 < h \leq 2\pi$ , параллельной действительной оси. Пусть эта полоса ограничена прямыми линиями:  $y = \varphi_0$  и  $y = \varphi_1$  ( $\varphi_1 - \varphi_0 = h$ ). Из установленного нами выше следует, что образом области  $g$  в плоскости  $w$  будет область  $d$ , представляющая угол раствора  $h$ , с вершиной в начале координат, ограниченный прямолинейными лучами  $\text{Arg } w = \varphi_0 + 2k\pi$  и  $\text{Arg } w = \varphi_1 + 2l\pi$  (рис. 14). При этом соответствие между точками областей  $g$  и  $d$ ,

устанавливаемое посредством функции  $w = \exp z$ , будет взаимно однозначным. Чтобы проверить последнее утверждение, достаточно заметить, что прообразами некоторой точки  $w$  из области  $d$  могут быть только точки  $\ln |w| + i \operatorname{Arg} w$ , различающиеся друг от друга значениями мнимой части. Две такие точки лежат на одной прямой, параллельной мнимой оси, на расстоянии, кратном  $2\pi$ . Но наша полоса  $h$  имеет ширину не более  $2\pi$ , поэтому она может содержать внутри лишь один прообраз точки  $w$ . Итак, каждая точка  $z \in g$  имеет лишь один образ и каждая точка  $w \in d$  лишь один прообраз внутри  $g$ , что и выражает взаимную однозначность отображения.

Мы видим, что *показательная функция  $w = \exp z$  взаимно однозначно и конформно отображает полосу ширины  $h \leq 2\pi$ , параллельную действительной оси, на угол раствора  $h$  с вершиной в начале координат.*

Поэтому к показательной функции прибегают каждый раз, когда нужно конформно отобразить некоторую прямолинейную полосу на внутренность угла.

Если прямая плоскости  $z$  не является параллельной какой-либо оси координат, то образ ее в плоскости  $w$  будет уже не прямой и не окружностью, а логарифмической спиралью. В самом деле, если эта прямая есть

$$z = t(1 + i\alpha) + bi, \quad -\infty < t < +\infty$$

( $\alpha$  — угловой коэффициент прямой, а  $b$  — ордината в начале), то образом будет кривая

$$w = \exp [t + i(at + b)] = e^t [\cos (at + b) + i \sin (at + b)].$$

Здесь

$$|w| = r = e^t, \quad \varphi = \operatorname{Arg} w = at + b + 2m\pi,$$

или, исключая параметр  $t$ :  $r = \exp \frac{\varphi - b - 2m\pi}{\alpha}$ . Но  $\operatorname{Arg} w$  или полярный угол  $\varphi$  определен только с точностью до целого кратного  $2\pi$ . Поэтому, обозначая  $\varphi - 2m\pi$  снова через  $\varphi$ , получаем:

$$r = ce^{\frac{\varphi}{\alpha}}, \quad \text{где } c = e^{-\frac{b}{\alpha}}.$$

Это и есть уравнение логарифмической спирали (рис. 15). Из того, что она является образом прямой  $z = t(1 + i\alpha) + bi$ , пересекающей прямые, параллельные действительной оси под постоянным углом  $\arctg \alpha$ , следует, в силу конформности отображения, что и логарифмическая спираль пересекает под тем же углом образы указанных прямых, т. е. все лучи, выходящие из начала координат. Мы получили характеристическое свойство логарифмической спирали.



Отображения, осуществляемые посредством функций  $w = (z - a)^n$  и  $w = \exp z$ , обнаруживают некоторое сходство между собой. Это сходство можно выяснить при помощи формулы

$$\exp z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

доказательство которой мы предлагаем читателю в качестве упражнения.

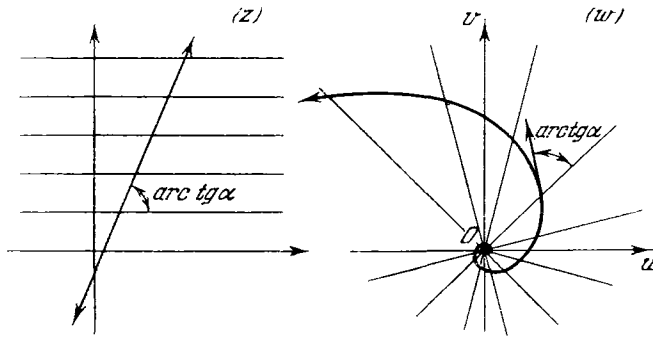


Рис. 15.

Рассмотрим отображение  $w = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \frac{1}{n^n} [z - (-n)]^n$ , по отношению к которому отображение  $w = \exp z$  является предельным. В силу сказанного в п. 3.3, эта функция отображает

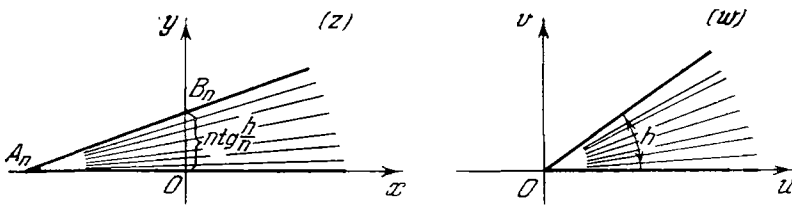


Рис. 16.

угол раствора  $\frac{h}{n}$  ( $0 < h \leq 2\pi$ ) с вершиной в точке  $A_n (-n)$ , ограниченный частью действительной оси  $x \geq -n$  ( $y=0$ ) и лучом  $\text{Arg}(z+n) = \frac{h}{n} + 2k\pi$ , на угол раствора  $h$  с вершиной в начале координат, ограниченный лучами  $\text{Arg } w = 0$  и  $\text{Arg } w = h + 2m\pi$  (рис. 16). Если  $n$  стремится к бесконечности, то вершина  $A_n$

удаляется в бесконечность вдоль отрицательной части действительной оси и длина отрезка  $OB_n$  стремится к пределу  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{tg} \frac{h}{n} = h$  так, что предельное положение луча  $A_n B_n$  есть прямая  $y = h$ , ограничивающая вместе с действительной осью полосу ширины  $h$ . При этом очевидно, что предельным положением для лучей, выходящих из вершины угла, будут прямые, параллельные действительной оси, а предельными положениями для дуг окружностей с центром в точке  $A_n$  — отрезки прямых, перпендикулярных к действительной оси, заключенные внутри полосы. Мы видим, что картина отображения посредством показательной функции может быть получена из соответствующей картины отображения посредством степенной функции при помощи надлежащего предельного перехода.

**3.6.** Перейдем к определению синуса и косинуса комплексного аргумента. Из формул

$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x \quad \text{и} \quad \exp(-ix) = \cos x - i \sin x$$

получаем известные формулы Эйлера:

$$\cos x = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}, \quad \sin x = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$$

справедливые, таким образом, при любом действительном  $x$ . Так как правые части этих формул определены при любом комплексном  $z$  ( $z \neq \infty$ ) и являются, очевидно, аналитическими функциями от  $z$ , то мы имеем здесь две целые функции от  $z$ :

$$\frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \quad \text{и} \quad \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i},$$

принимające при действительных значениях  $z = x$  действительные значения, совпадающие соответственно с  $\cos x$  и  $\sin x$ . Естественно, что, по определению, первую из них обозначают  $\cos z$ , вторую  $\sin z$  и называют основными тригонометрическими функциями — косинусом и синусом  $z$ :

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad \sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} \quad (3.6:1)$$

Формулы (3.6:1) называются формулами Эйлера. Формулой Эйлера называется также и формула, получающаяся путем умножения обеих частей второй формулы на  $i$  и почленного сложения с первой формулой

$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z. \quad (3.6:2)$$

Из формул (3.6:1) непосредственно вытекает, что  $\cos z$  — четная, а  $\sin z$  — нечетная функции:

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z. \quad (3.6:3)$$

Из тех же формул (3.6:1) следует, что  $\cos z$  и  $\sin z$  обладают периодом  $2\pi$  (так как при изменении  $z$  на  $2\pi$  аргументы показательных функций в правых частях формул изменяются на  $\pm 2\pi i$  — величины периодов показательной функции). Покажем, что  $2\pi$  является основным периодом функций  $\cos z$  и  $\sin z$ . В самом деле, если  $\omega$  есть период функции  $\cos z$ , то

$$\cos(z + \omega) = \cos z,$$

и при  $z = \frac{\pi}{2}$  получаем:

$$\cos\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Но отсюда следует, что

$$\exp\left[i\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)\right] + \exp\left[-i\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)\right] = 0,$$

или

$$\exp[i(2\omega + \pi)] = -1.$$

Следовательно, по формуле (3.5:2)  $i(2\omega + \pi) = \ln|-1| + i \operatorname{Arg}(-1) = i(\pi + 2k\pi)$ , т. е.  $\omega = k\pi$ , и так как  $\cos \omega = \cos 0 = 1$ , то  $k$  есть четное число и  $\omega = 2k\pi$ .

Подобным же образом устанавливаем, что  $2\pi$  является основным периодом и функции  $\sin z$ .

Перейдем к выводу теорем сложения для функций  $\cos z$  и  $\sin z$ , т. е. к отысканию соотношений между  $\cos(z_1 + z_2)$  и  $\sin(z_1 + z_2)$ , с одной стороны, и  $\cos z_1$ ,  $\cos z_2$ ,  $\sin z_1$  и  $\sin z_2$ , с другой стороны ( $z_1$  и  $z_2$  — произвольные комплексные числа). Мы получим требуемые соотношения как следствия из теоремы сложения для показательной функции.

Заменяя в формуле (3.6:2)  $z$  суммой  $z_1 + z_2$ , находим:

$$\begin{aligned} \cos(z_1 + z_2) + i \sin(z_1 + z_2) &= \exp[i(z_1 + z_2)] = \\ &= \exp(iz_1) \cdot \exp(iz_2) = (\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2) \end{aligned}$$

или, выполняя умножение:

$$\begin{aligned} \cos(z_1 + z_2) + i \sin(z_1 + z_2) &= \\ &= (\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) + i(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2). \end{aligned}$$

Если сюда подставить  $-z_1$  и  $-z_2$  вместо  $z_1$  и  $z_2$  и воспользоваться соотношениями (3.6:3), то получим:

$$\begin{aligned} \cos(z_1 + z_2) - i \sin(z_1 + z_2) &= \\ &= (\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) - i(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2). \end{aligned}$$

Складывая и вычитая почленно две последние формулы, найдем:

$$\left. \begin{aligned} \cos(z_1 + z_2) &= \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2, \\ \sin(z_1 + z_2) &= \sin z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_1 \cdot \sin z_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.6:4)$$

Эти формулы являются основными в теории тригонометрических функций. В частности, в них содержатся так называемые «формулы приведения аргумента». Действительно, полагая в формулах (3.6:4)  $z_1 = z$  и  $z_2 = \frac{\pi}{2}$ , получаем:

$$\begin{aligned} \cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos z \cos \frac{\pi}{2} - \sin z \sin \frac{\pi}{2} = -\sin z, \\ \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin z \cos \frac{\pi}{2} + \cos z \sin \frac{\pi}{2} = \cos z. \end{aligned}$$

При  $z_1 = z$  и  $z_2 = \pi$  находим другую пару формул приведения:

$$\begin{aligned} \cos(z + \pi) &= -\sin z, \\ \sin(z + \pi) &= -\cos z \end{aligned}$$

и т. п.

Полагая в первой из формул (3.6:4)  $z_1 = z$  и  $z_2 = -z$ , находим следующее соотношение между  $\sin z$  и  $\cos z$ :

$$1 = \cos^2 z + \sin^2 z. \quad (3.6:5)$$

Мы видим, что все известные из тригонометрии соотношения между тригонометрическими функциями действительного аргумента сохраняются и в комплексной области. Однако из формулы (3.6:5) нельзя заключать, что  $|\cos z| \leq 1$  и  $|\sin z| \leq 1$ , так как  $\cos^2 z$  и  $\sin^2 z$  не являются, вообще говоря, действительными неотрицательными числами.

С тригонометрическими функциями  $\sin z$  и  $\cos z$  тесно связаны гиперболические функции  $\operatorname{ch} z$  и  $\operatorname{sh} z$ , определяемые посредством формул

$$\operatorname{ch} z = \frac{\exp z + \exp(-z)}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{\exp z - \exp(-z)}{2} \quad (3.6:6)$$

При  $z = x$  действительном эти функции, очевидно, принимают действительные значения и совпадают тогда с известными из анализа функциями  $\operatorname{ch} x$  и  $\operatorname{sh} x$ . Первая из них (четная) убывает на полуинтервале  $-\infty < x \leq 0$  от  $\infty$  до 1 и затем возрастает от 1 до  $\infty$  на полуинтервале  $0 \leq x < \infty$ ; вторая (нечетная) возрастает на всем бесконечном интервале  $-\infty < x < +\infty$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , обращаясь в нуль при  $x = 0$ .

Из сравнения формул (3.6:6) с формулами (3.6:1) следует, что между тригонометрическими и гиперболическими функциями

существуют следующие соотношения:

$$\operatorname{ch} z = \cos(iz), \quad \operatorname{sh} z = -i \sin(iz). \quad (3.6:7)$$

Отсюда, в частности, вытекает, что

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = [\cos(iz)]^2 + [\sin(iz)]^2 = 1. \quad (3.6:8)$$

Определим действительные и мнимые части, а также модули функций  $\cos z$  и  $\sin z$ . Полагая  $z = x + iy$ , получаем по формулам (3.6:4) и (3.6:7):

$$\cos(x + iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y, \quad (3.6:4')$$

$$\sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y.$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} [\cos(x + iy)] &= \cos x \operatorname{ch} y, \quad \operatorname{Im} [\cos(x + iy)] = -\sin x \operatorname{sh} y, \\ \operatorname{Re} [\sin(x + iy)] &= \sin x \operatorname{ch} y, \quad \operatorname{Im} [\sin(x + iy)] = \cos x \operatorname{sh} y. \end{aligned} \right\} \quad (3.6:9)$$

Для модулей функций  $\cos z$  и  $\sin z$  получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} |\cos z| &= \sqrt{(\cos x \cdot \operatorname{ch} y)^2 + (\sin x \operatorname{sh} y)^2} = \\ &= \sqrt{\operatorname{ch}^2 y (1 - \sin^2 x) + \sin^2 x \cdot \operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x} \end{aligned}$$

$$\text{и, аналогично, } |\sin z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x}.$$

Итак,

$$|\cos z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}, \quad |\sin z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x}. \quad (3.6:10)$$

Отсюда следуют неравенства:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} y &\geq |\cos z| \geq \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1} = |\operatorname{sh} y|, \\ \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + 1} &= \operatorname{ch} y \geq |\sin z| \geq |\operatorname{sh} y|. \end{aligned} \right\} \quad (3.6:11)$$

Впрочем, эти неравенства немедленно следуют из формул (3.6:1). Например:

$$\begin{aligned} |\cos z| &\leq \frac{|\exp(iz)| + |\exp(-iz)|}{2} = \frac{\exp(-y) + \exp y}{2} = \operatorname{ch} y, \\ |\cos z| &\geq \left| \frac{|\exp(iz)| - |\exp(-iz)|}{2} \right| = \frac{|\exp(-y) - \exp y|}{2} = |\operatorname{sh} y|. \end{aligned}$$

Мы видим, что модули функций  $\cos z$  и  $\sin z$  бесконечно возрастают вместе с  $|y|$  по мере удаления от действительной оси, причем имеют место асимптотические формулы:

$$|\cos z| \approx \frac{1}{2} \exp |y|, \quad |\sin z| \approx \frac{1}{2} \exp |y|.$$

На рис. 17 представлена поверхность:  $u = |\sin z|$ , так называемый рельеф синуса\*). Так как  $\operatorname{sh} y \neq 0$  при  $y \neq 0$ , то из неравенств (3.6:11) вытекает, далее, что  $\cos z$  и  $\sin z$  не могут обращаться в нуль вне действительной оси, т. е. что уравнения

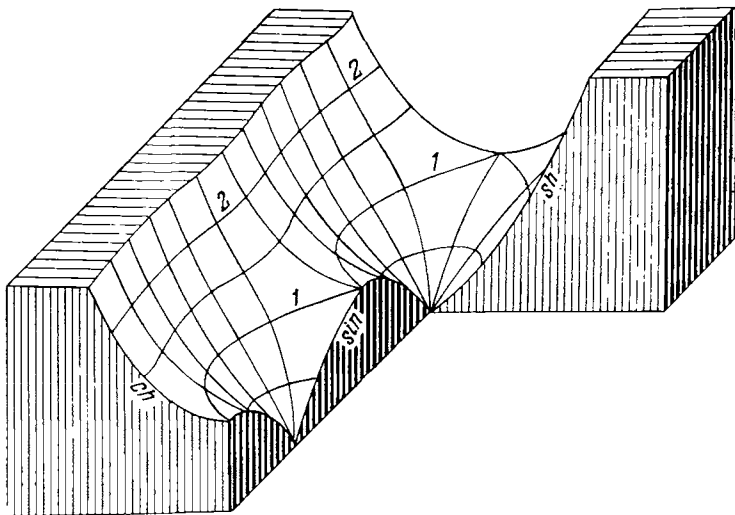


Рис. 17.

$\cos z = 0$  или  $\sin z = 0$  не имеют мнимых корней. Следовательно, все корни этих уравнений сводятся к известным из тригонометрии:

$$z = (2k-1)\frac{\pi}{2} \text{ для уравнения } \cos z = 0$$

и

$$z = k\pi \text{ для уравнения } \sin z = 0.$$

Отметим еще формулы для производных от тригонометрических и гиперболических функций:

$$(\cos z)' = \left[ \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \right]' = i \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2} = -\sin z,$$

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z, \quad (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z.$$

**3.7.** Займемся изучением геометрического поведения тригонометрических функций. При этом мы можем ограничиться

\*) Чертеж заимствован из «Таблиц функций» Янке и Эмде

изучением отображения

$$\dot{w} = \cos z,$$

так как отображение  $w = \sin z$  может быть представлено в виде

$$w = -\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$$

и, следовательно, сводится к сдвигу  $z_1 = z + \frac{\pi}{2}$  плоскости в направлении действительной оси, отображению  $z_2 = \cos z_1$  и, наконец, повороту всей плоскости относительно начала координат на угол, равный  $\pi$ :  $w = -z_2$ .

Рассмотрим сначала прообразы точки  $w$  при отображении  $w = \cos z$ , т. е. корни уравнения

$$w = \cos z, \quad (3.7:1)$$

где  $w$  — произвольное комплексное число, отличное от  $\infty$ . Заменяя  $\cos z$  по формуле Эйлера (3.6:1) и полагая для краткости

$$\exp(iz) = t, \quad (3.7:2)$$

получим для определения  $t$  уравнение

$$w = \frac{t + t^{-1}}{2}$$

или

$$t^2 - 2wt + 1 = 0, \quad (3.7:3)$$

откуда

$$t_j = w + \sqrt{w^2 - 1} \quad (j = 1, 2) \quad (3.7:4)$$

(мы не ставим перед квадратным корнем двойного знака, так как этот корень сам по себе имеет два значения). Очевидно, произведение чисел  $t_1$  и  $t_2$  равно 1, поэтому каждое из них отлично от нуля. Обозначая одно из них через  $\tau$ , а другое через  $\frac{1}{\tau}$ , получаем из (3.7:2) два уравнения для определения  $z$ :

$$\exp(iz) = \tau (\neq 0) \quad \text{и} \quad \exp(iz) = \frac{1}{\tau} (\neq 0). \quad (3.7:5)$$

Каждое из этих уравнений по п. 3.5 имеет бесконечное множество решений, выражаемых по формуле (3.5:2)

$$iz' = \ln |\tau| + i \operatorname{Arg} \tau$$

и

$$iz'' = \ln \left| \frac{1}{\tau} \right| + i \operatorname{Arg} \frac{1}{\tau} = -(\ln |\tau| + i \operatorname{Arg} \tau),$$

или

$$z' = \operatorname{Arg} \tau - i \ln |\tau| \quad \text{и} \quad z'' = -(\operatorname{Arg} \tau - i \ln |\tau|). \quad (3.7:6)$$

Мы получили два бесконечных множества точек, расположенных на паре прямых  $y = \pm \ln |\tau|$ , параллельных действительной оси. На каждой из них соседние точки  $z'$ , соответственно  $z''$ , отстоят друг от друга на расстоянии  $2\pi$ ; при этом для каждой точки  $z'$ , лежащей на прямой  $y = -\ln |\tau|$ , имеется на другой прямой  $y = \ln |\tau|$  точка  $z''$ , симметричная с  $z'$  относительно начала координат (см. рис. 18, где  $|\tau| < 1$ ). При  $\omega = \pm 1$  корни  $\tau$  и  $\frac{1}{\tau}$  уравнения (3.7:3) становятся равными  $\pm 1$ . Тогда обе прямые совмещаются с действительной осью и оба множества точек  $z'$  и  $z''$  также совмещаются.

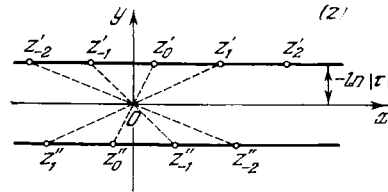


Рис. 18.

Итак, уравнение (3.7:1) во всех случаях имеет решения и всегда множество решений является бесконечным. Отсюда следует, во-первых, что функция  $\omega = \cos z$  отображает конечную плоскость  $z$  на всю (конечную) плоскость  $\omega$ , и, во-вторых, что каждая точка  $\omega$  имеет бесконечное множество прообразов в плоскости  $z$ . Отображение это является конформным во всех точках, в которых  $(\cos z)' = -\sin z \neq 0$ , т. е. при  $z \neq k\pi$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Заставим  $z$  описывать какую-либо прямую, параллельную одной из координатных осей. Если это будет прямая  $z = c + it$ , параллельная мнимой оси, то образом ее будет кривая  $L: \omega = \cos z = \cos c \operatorname{ch} t - i \sin c \operatorname{sh} t$  (см. первую из формул (3.6:4')). При  $c = k\pi$  получаем  $\omega = \cos k\pi \operatorname{ch} t = (-1)^k \operatorname{ch} t$  ( $-\infty < t < +\infty$ ), т. е.  $\omega$  дважды описывает часть  $u \geq 1$  действительной оси при  $k$  четном и  $u \leq -1$  при  $k$  нечетном. При  $c = (2k-1)\frac{\pi}{2}$  получаем  $\omega = (-1)^k i \operatorname{sh} t$ , т. е.  $\omega$  описывает однократно всю мнимую ось в направлении возрастания  $u$  при  $k$  четном и в направлении убывания  $u$  при  $k$  нечетном.

Пусть теперь  $c \neq m\frac{\pi}{2}$  (ни для какого целого  $m$ ). Перепишем уравнение кривой  $L$  в виде

$$u = \cos c \cdot \operatorname{ch} t, \quad v = -\sin c \cdot \operatorname{sh} t \quad (-\infty < t < \infty) \quad (3.7:7)$$

или, исключая параметр  $t$  ( $\cos c \neq 0$  и  $\sin c \neq 0$ ):

$$\frac{u^2}{\cos^2 c} - \frac{v^2}{\sin^2 c} = 1. \quad (3.7:8)$$



Мы получили уравнение гиперболы с полуосями  $|\cos c|$  и  $|\sin c|$  и с фокусами в точках  $\pm 1$ .

Не нужно думать, однако, что кривая  $L$  совпадает со всей этой гиперболой. Из параметрического представления (3.7:7) для  $L$  вытекает, что  $u$  сохраняет все время один и тот же знак, одинаковый со знаком  $\cos c$ , тогда как  $v$  монотонно и непрерывно меняется от  $-\infty$  до  $+\infty$  (или обратно). Отсюда следует, что кривая  $L$  совпадает только с одной из двух ветвей гиперболы (3.7:8), а именно

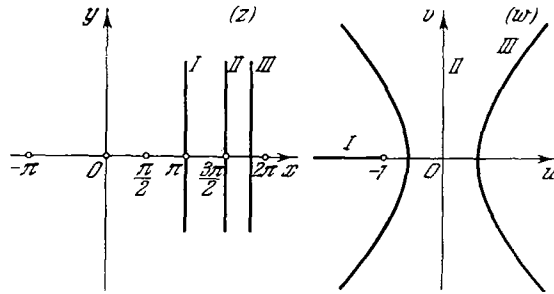


Рис. 19.

с правой ветвью, если  $\cos c > 0$ , или с левой ветвью, если  $\cos c < 0$  (рис. 19, где на правой половине представлены образы трех прямых плоскости  $z$ ):

$$I \left( x = \pi \right), \quad II \left( x = \frac{3\pi}{2} \right) \quad \text{и} \quad III \left( x = c, \text{ где } \frac{3\pi}{2} < c < 2\pi \right).$$

Отображение прямой  $z = c + it$  на соответствующую ветвь является при этом взаимно однозначным и каждая из двух полу-прямых, на которые наша прямая разделяется действительной осью, взаимно однозначно отображается на одну из полуветвей, на которые ветвь гиперболы разделяется в вершине.

Пусть теперь  $z$  описывает прямую  $l' : z = t + ic'$ , параллельную действительной оси. Образом ее будет кривая

$$L' : w = \cos z = \cos t \operatorname{ch} c' - i \sin t \operatorname{sh} c'$$

При  $c' = 0$   $l'$  есть действительная ось и  $L'$  имеет уравнение  $w = \cos t$  ( $-\infty < t < +\infty$ ); следовательно,  $w$  описывает бесконечно много раз отрезок  $-1 \leq u \leq 1$  действительной оси, причем каждому отрезку прямой  $l'$  длины  $2\pi$  соответствует двукратный обход указанного отрезка. Пусть  $c' \neq 0$ ; тогда переписываем уравнение кривой  $L'$  в виде

$$u = \cos t \operatorname{ch} c', \quad v = -\sin t \operatorname{sh} c', \quad (-\infty < t < \infty) \quad (3.7:9)$$

и, исключая параметр  $t$  ( $\operatorname{ch} c' \neq 0$ ,  $\operatorname{sh} c' \neq 0$ ), получаем:

$$\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 c'} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 c'} = 1. \quad (3.7:10)$$

Это уравнение эллипса с полуосями  $|\operatorname{ch} c'|$  и  $|\operatorname{sh} c'|$  и фокусами в точках  $\pm 1$ . Из параметрического представления (3.7 9) кривой  $L^*$  вытекает, что точка  $w$  бесконечное множество раз пробегает эллипс в одном и том же направлении, причем каждый пробег соответствует перемещению точки  $z$  по прямой  $z = t + ic'$  на расстояние, равное  $2\pi$  (рис. 20, где на правой половине представлены образы двух прямых плоскости  $z$  — I ( $y = 0$ ) и II ( $y = c' \neq 0$ )).

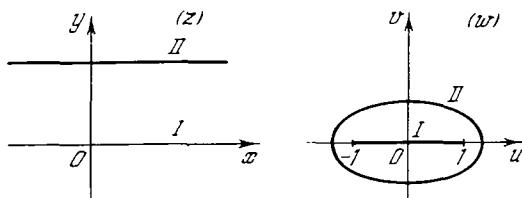


Рис. 20.

Итак, отображение  $w = \cos z$  переводит ортогональную сетку прямых, параллельных координатным осям, в сетку эллипсов и гипербол с общими фокусами  $\pm 1$ . Так как отображение является конформным во всех точках плоскости  $z$ , исключая точки вида  $z = k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) (образами которых как раз и являются указанные фокусы), то сетка конфокальных эллипсов и гипербол также должна быть ортогональной.

3.8. Возьмем в плоскости  $z$  область  $g$ , которая отображалась бы посредством функции  $w = \cos z$  взаимно однозначно на соответствующую область плоскости  $w$ . Выбор такой области можно произвести многими способами. Нужно лишь позаботиться о том, чтобы ей не принадлежали два прообраза одной и той же точки  $w$ . Выберем, например, в качестве  $g$  полуполосу шириной  $h$  ( $0 < h \leq 2\pi$ ), параллельную мнимой оси, с основанием, расположенным на действительной оси (рис. 21). Очевидно, она удовлетворяет поставленным условиям. Действительно, если для какой-либо точки  $z_0 \in g$ ,  $\cos z_0 = w_0$ , то все другие прообразы точки  $w_0$  в плоскости  $z$  должны, как мы уже знаем (стр. 115), располагаться в одной своей части на прямой, параллельной действительной оси, проходящей через точку  $z_0$ , а в другой части — на прямой, симметричной с первой относительно действительной оси. Но прообразы, расположенные на первой прямой, отстоят от точки  $z_0$  на расстояния, кратные  $2\pi$ ; так как ширина полуполосы не больше, чем  $2\pi$ , то ни один из них не попадет ни внутрь полуполосы, ни на ее границу. Вторая же

прямая вообще не имеет общих точек с полуполосой. Итак, функция  $w = \cos z$  отображает область  $g$  взаимно однозначно и конформно на некоторое множество точек плоскости  $w$ .

Чтобы построить это множество, заставим точку  $z$  описывать границу  $\gamma$  области  $g$  так, чтобы она последовательно и непрерывно пробегала сначала сторону I полуполосы, затем основание II и, наконец, другую сторону III полуполосы. Точка  $w = \cos z$  опишет при этом также последовательно и непрерывно полуветвь (I') одной гиперболы, затем пройдет часть (II') кривой, являющейся

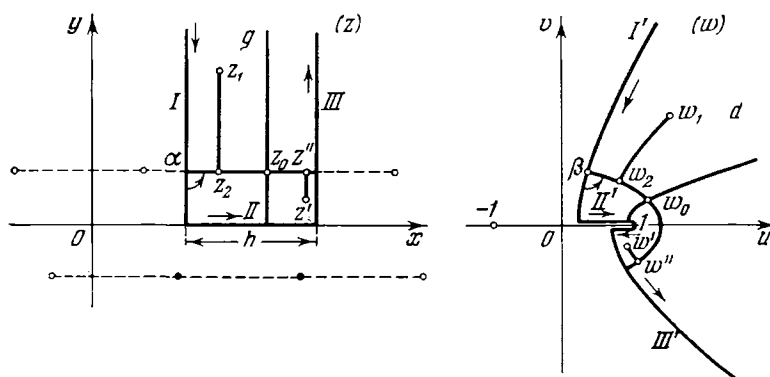


Рис. 21.

образом действительной оси и изображаемой отрезком  $-1 \leq u \leq 1$ ,  $v = 0$  (так как основание полуполосы не длиннее, чем  $2\pi$ , то  $w$  обойдет последний отрезок не более чем двукратно), и, наконец, пройдет еще одну полуветвь (III') некоторой гиперболы.

Полученный нами в плоскости  $w$  полный образ границы области  $g$  — обозначим его  $\Gamma$  — делит плоскость на две области; мы утверждаем, что одна из них есть искомый образ  $d$  области  $g$ . Укажем два общих приема, с помощью которых можно установить, какая именно из найденных областей является образом области  $g$ .

Первый прием заключается в том, что берут какую-нибудь точку  $z_0 \in g$  и отмечают ее образ  $w_0 = \cos z_0$ . Этот образ не может принадлежать контуру  $\Gamma$ , так как иначе один из прообразов точки  $w_0$  принадлежал бы области  $g$ , а другой — границе  $\gamma$  этой области, что, как мы видели, невозможно. Следовательно, точка  $w_0$  попадет в одну из указанных выше областей. Эта область и будет искомой.

Другой прием заключается в том, что мы отмечаем направление обхода границы  $\gamma$  области  $g$ . Это можно сделать, например, вообразив наблюдателя, перемещающегося вдоль границы области  $g$  вместе с точкой  $z$  и замечающего, с какой стороны от него находится

внутренность области. При обходе, принятом на нашем чертеже, область  $g$  остается, очевидно, слева от наблюдателя. Заставим теперь того же наблюдателя перемещаться по  $\Gamma$  вместе с точкой  $\omega = \cos z$ . Тогда он должен будет увидеть образ области  $g$  с той же стороны, т. е. в нашем примере слева от себя.

Приведем доказательство всех этих утверждений. Пусть для точки  $z_0 \in g$  ее образ  $\omega_0$  принадлежит области  $d$ . Покажем, что тогда для любой другой точки  $z_1 \in g$  ее образ  $\omega_1$  также принадлежит той же области  $d$ . Проведем через  $z_1$  прямую, параллельную мнимой оси, до пересечения в точке  $z_2$  с прямой, проходящей через точку  $z_0$  и параллельной действительной оси. Если из точки  $z_0$  двигаться по отрезку последней прямой к  $z_2$ , то соответствующая точка  $\omega = \cos z$  будет двигаться по дуге эллипса с фокусами  $\pm 1$ , проходящего через  $\omega_0$  к точке  $\omega_2 = \cos z_2$ . При этом мы не встретим на пути ни одной точки границы  $\Gamma$  области  $d$ . В противном случае найдется точка  $\omega$ , которая будет и образом некоторой точки, лежащей на  $\gamma$ , и образом некоторой точки области  $g$  (отрезка  $z_0 z_2$ ), что, как мы знаем, невозможно. Итак, дуга эллипса  $\omega_0 \omega_2$  целиком принадлежит области  $d$ . Принадлежит ей также и точка  $\omega_2$ . Пусть, далее,  $z$  движется по отрезку прямой из точки  $z_2$  в точку  $z_1$ . Соответствующая точка  $\omega = \cos z$  будет двигаться по дуге гиперболы с фокусами  $\pm 1$  от точки  $\omega_2$  к точке  $\omega_1 = \cos z_1$  и так как при этом мы снова не можем встретить ни одной точки из  $\Gamma$ , то вся эта дуга гиперболы, включая ее конец  $\omega_1$ , будет принадлежать области  $d$ . Итак, образ любой точки  $z_1 \in g$  принадлежит той же области  $d$ , которой принадлежит и образ точки  $z_0 \in g$ . Следовательно, весь образ области  $g$  содержится в  $d$ . Остается показать, что он совпадает с  $d$ , а для этого нужно установить, что каждая точка  $\omega' \in d$  есть образ некоторой точки  $z' \in g$ . Проведем через  $\omega'$  дугу гиперболы с фокусами  $\pm 1$  до пересечения в точке  $\omega''$  с дугой эллипса, проходящего через  $\omega_0$ . В результате получим дугу эллипса  $\omega_0 \omega''$  и дугу гиперболы  $\omega'' \omega'$ , целиком лежащие в  $d$ . Заставим точку  $z$  описывать отрезок прямой, параллельной действительной оси и проходящей через  $z_0$  от точки пересечения со стороной I до точки пересечения со стороной III. Соответствующая точка опишет дугу эллипса, заключающуюся в области  $d$ , от точки пересечения с полуветвью гиперболы I' до точки пересечения с полуветвью III', и, следовательно, пройдет через точку  $\omega''$ . Отсюда следует, что указанный отрезок прямой содержит прообраз  $z''$  точки  $\omega''$ . Опишем, наконец, полупрямую, параллельную мнимой оси и проходящую через точку  $z''$ . Ее образ будет полуветвью гиперболы с фокусами  $\pm 1$ , проходящей через точку  $\omega''$ . Но эта полуветвь проходит через точку  $\omega'$ . Следовательно, указанная полупрямая содержит прообраз  $z'$  точки  $\omega'$ .

Мы доказали, что  $\omega'$  принадлежит образу  $g$ , откуда, ввиду произвольности точки  $\omega'$ , следует совпадение образа области  $g$  с

областью  $d$ . Теперь уже нетрудно обосновать способ выбора области, являющейся образом области  $g$ , на основании соответствия между обходами контуров  $\gamma$  и  $\Gamma$ . Пусть, например, мы проходим сторону  $I$  полуполосы  $g$  в направлении, указанном стрелкой, так, что область  $g$  остается при этом слева от нас. В какой-нибудь точке  $\alpha \in I$  проведем внутрь области отрезок нормали к границе. В данном случае этот отрезок пойдет по прямой, параллельной действительной оси. Образ этого отрезка должен принадлежать образу области  $g$ . В данном случае он представляет собой дугу эллипса, проходящего через

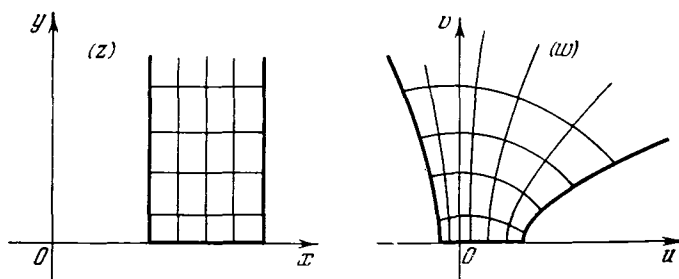


Рис. 22.

точку  $\beta = \cos \alpha$ , лежащую на полуветви гиперболы  $\Gamma$ , и, следовательно, в качестве образа области  $g$  следует выбирать ту область (мы уже установили, что образ области  $g$  есть одна из областей, ограниченных контуром  $\Gamma$ ), в которую направлена эта эллиптическая дуга. Воспользуемся теперь тем, что при конформном отображении сохраняются не только величины углов, но и направления их отсчета. Должен сохраниться по направлению отсчета также и угол между частью границы  $\gamma$ , выходящей из точки  $\alpha$  в направлении обхода  $\gamma$ , и внутренней нормалью. Но указание на то, что область при обходе контура  $\gamma$  остается слева от наблюдателя, равносильно тому, что наблюдатель, находящийся в точке  $\alpha$ , должен повернуться справа налево на прямой угол, для того чтобы смотреть по нормали внутрь области  $g$ . Поэтому наблюдатель, обходящий  $\Gamma$  и находящийся в точке  $\beta = \cos \alpha$ , должен также повернуться справа налево на прямой угол, для того чтобы смотреть по направлению образа нормали — дуги эллипса — внутрь образа области  $g$ . Это означает, что искомый образ области  $g$  будет расположен слева от наблюдателя, что мы и утверждали.

Заметим в заключение, что вид области  $d$  будет, вообще, меняться вместе с изменением расположения и ширины полуполосы  $g$ . На рис. 22 мы изобразили случай, встречающийся, когда основание полуполосы принадлежит одному из интервалов вида  $(k\pi, (k+1)\pi)$ . Случай же, представленный на рис. 21 и характеризующийся тем,

что основание полосы как бы переламывается в результате отображения в точке  $w = 1$  или  $w = -1$ , встречается, когда основание полуполосы содержит внутри точку вида  $k\pi$ .

#### § 4. Рациональные функции. Дробно-линейная функция. Геометрия Лобачевского. Тригонометрические функции

4.1. В предыдущем параграфе мы познакомились с несколькими наиболее элементарными представителями класса целых функций. Следующим за классом целых функций, в порядке возрастающей общности, является класс мероморфных функций. Так называются функции, которые можно представить в виде отношения двух целых функций. Самый термин «мероморфный» происходит от греческих слов *μέρος* (часть, дробь) и *μορφή* (форма, вид) и означает «подобный дроби». Очевидно, каждая целая функция  $f(z)$  является вместе с тем и мероморфной, так как ее можно представить в виде  $\frac{f(z)}{1}$ . Обратное, конечно, неверно, как показывает пример функции  $\frac{1}{z}$ . Это — мероморфная функция, которая не является целой, так как обращается в  $\infty$  в начале координат.

Простейшими представителями класса мероморфных функций в собственном смысле этого слова (т. е., вообще говоря, не сводящихся к целым) являются рациональные функции. Так называется всякая функция, которую можно представить в виде частного двух многочленов:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m} \quad (4.1:1)$$

(знаменатель не равен тождественно нулю). Будем считать, что дробь  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  несократима, т. е. что уравнения  $P(z) = 0$  и  $Q(z) = 0$  не имеют общих корней. Пусть, кроме того,  $a_n \neq 0$  и  $b_m \neq 0$ , т. е.  $P(z)$  и  $Q(z)$  имеют соответственно степени  $n$  и  $m$  (точно!). Обозначим через  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  все различные между собой корни уравнения  $P(z) = 0$ , а через  $k_1, \dots, k_p$  — их кратности; точно так же пусть  $\beta_1, \dots, \beta_q$  — все различные между собой корни уравнения  $Q(z) = 0$ , а  $l_1, \dots, l_q$  — их кратности. Тогда (4.1:1) можно переписать так:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n (z - \alpha_1)^{k_1} \dots (z - \alpha_p)^{k_p}}{b_m (z - \beta_1)^{l_1} \dots (z - \beta_q)^{l_q}}. \quad (4.1:2)$$

Очевидно, любое из чисел  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  отлично от любого из чисел  $\beta_1, \dots, \beta_q$ ; в противном случае многочлены  $P(z)$  и  $Q(z)$  не были бы взаимно простыми. Кроме того  $k_1 + \dots + k_p = n$  и  $l_1 + \dots + l_q = m$ . В каждой из точек  $z = \alpha_s$   $f(z)$  обращается

в 0, а в каждой из точек  $z = \beta_t$   $f(z)$  обращается в  $\infty$ . Точки  $\alpha_s$  называются нулями, а точки  $\beta_t$  — полюсами функции  $f(z)$ . Соответствующие им числа  $k_s$  или  $l_t$  называются кратностями нулей или полюсов. Если кратность  $k_s$  (или  $l_t$ ) равна единице, то нуль  $\alpha_s$  (или полюс  $\beta_t$ ) называется простым, если же кратность больше единицы — кратным.

Из нашего определения следует, что нули функции  $f(z)$  являются полюсами функции  $\frac{1}{f(z)}$ , а полюсы функции  $f(z)$  являются нулями функции  $\frac{1}{f(z)}$ , причем кратности при таком переходе от  $f(z)$  к  $\frac{1}{f(z)}$  сохраняются (т. е. нуль определенной кратности становится полюсом той же кратности, и наоборот). Условиями  $f(\beta_t) = \infty$  ( $t = 1, 2, \dots, q$ ) рациональная функция определена в точках  $\beta_t$ ; определим теперь ее и в бесконечно удаленной точке, положив  $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ . Получим, очевидно,

$$1) f(\infty) = 0 \text{ при } n < m,$$

$$2) f(\infty) = \frac{a_n}{b_n} \text{ при } n = m,$$

$$3) f(\infty) = \infty \text{ при } n > m.$$

В случае 1) мы будем говорить, что  $f(z)$  имеет нуль в бесконечно удаленной точке, а в случае 3) — что она имеет полюс в бесконечно удаленной точке. Чтобы приписать этой точке определенную кратность, совершим предварительное преобразование  $z = \frac{1}{\xi}$ , переводящее  $z = \infty$  в  $\xi = 0$ . Тогда получим:

$$\begin{aligned} f(z) = f\left(\frac{1}{\xi}\right) &= \frac{a_0 + a_1 \frac{1}{\xi} + \dots + a_n \frac{1}{\xi^n}}{b_0 + b_1 \frac{1}{\xi} + \dots + b_m \frac{1}{\xi^m}} = \\ &= \frac{\xi^m}{\xi^n} \cdot \frac{a_n + a_{n-1}\xi + \dots + a_0\xi^n}{b_m + b_{m-1}\xi + \dots + b_0\xi^m} = \varphi(\xi). \end{aligned}$$

Различаем следующие случаи:

1)  $n < m$ ; тогда

$$\varphi(\xi) = \frac{\xi^{m-n} (a_n + a_{n-1}\xi + \dots + a_0\xi^n)}{b_m + b_{m-1}\xi + \dots + b_0\xi^m}.$$

Эта рациональная функция имеет нуль кратности  $m-n$  в точке  $\xi = 0$ . В соответствии с этим мы будем говорить, что  $f(z)$  имеет нуль той же кратности  $m-n$  в точке  $z = \infty$ .

2)  $n = m$ ; тогда

$$\varphi(\xi) = \frac{a_n + a_{n-1}\xi + \dots + a_0\xi^n}{b_n + b_{n-1}\xi + \dots + b_0\xi^n}.$$

Эта рациональная функция не имеет ни нуля, ни полюса в точке  $\xi = 0$  (она обращается здесь в  $\frac{a_n}{b_n}$ ). В соответствии с этим и  $f(z)$  не имеет ни нуля, ни полюса в точке  $z = \infty$  (она обращается здесь в  $\frac{a_n}{b_n}$ ).

3)  $n > m$ ; тогда

$$\varphi(\xi) = \frac{a_n + a_{n-1}\xi + \dots + a_0\xi^n}{\xi^{n-m}(b_m + b_{m-1}\xi + \dots + b_0\xi^m)}$$

Эта рациональная функция имеет полюс кратности  $n - m$  в точке  $\xi = 0$ . Соответственно говорим, что и  $f(z)$  имеет полюс той же кратности  $n - m$  в точке  $z = \infty$ .

Определим полное число нулей или полюсов рациональной функции в расширенной плоскости, считая каждый из них соответственно его кратности. Прежде всего получаем  $k_1 + \dots + k_p = n$  конечных нулей. В случае  $n \geq m$  нули в бесконечности отсутствуют. Если же  $n < m$ , то мы получаем еще нуль в бесконечно удаленной точке с кратностью  $m - n$ , и общее число нулей становится равным  $n + (m - n) = m$ . Если мы во всех случаях обозначим наибольшее из чисел  $m$  и  $n$  через  $N$

$$N = \max(m, n)$$

и назовем его порядком рациональной функции  $f(z)$ , то получим, что общее число нулей функций  $f(z)$  в расширенной плоскости равно порядку этой функции. Точно таким же оказывается и общее число полюсов. А именно, если  $n \leq m$ , то  $f(z)$  не имеет полюсов в бесконечно удаленной точке и все ее полюсы являются конечными. Но число последних есть  $l_1 + \dots + l_q = m = N$ . Если же  $n > m$ , то, помимо  $m$  конечных полюсов,  $f(z)$  имеет еще полюс кратности  $n - m$  в бесконечно удаленной точке. Следовательно, общее число ее полюсов есть  $m + (n - m) = n = N$ .

Пусть теперь  $A$  — произвольное комплексное число, отличное от 0 и от  $\infty$ . Будем искать все корни уравнения

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = A \quad (4.1:3)$$

или, что то же самое, корни уравнения

$$F(z) = \frac{P(z) - AQ(z)}{Q(z)} = 0. \quad (4.1:4)$$

Если приписать каждому корню уравнения (4.1:3) ту же кратность, которую имеет равный ему корень уравнения (4.1:4), то можно будет утверждать, по предыдущему, что общее число корней уравнения (4.1:3), равное числу нулей функции  $F(z) = \frac{P(z) - AQ(z)}{Q(z)}$ ,



должно совпадать с порядком этой последней. Но если  $n > m$ , то степень многочлена  $P(z) - AQ(z)$  есть  $n$  и, следовательно, порядок функции  $F(z)$  также равен  $n$ , т. е. совпадает с порядком функции  $f(z)$ . В случае  $n = m$  степень многочлена  $P(z) - AQ(z)$  не выше  $n$ , и так как степень многочлена  $Q(z)$  есть  $n$ , то порядок функции  $F(z)$  равен  $n$ , т. е. снова совпадает с порядком функции  $f(z)$ . Наконец, если  $n < m$ , то степень многочлена  $P(z) - AQ(z)$  есть  $m$  ( $A \neq 0$ ), и так как степень многочлена  $Q(z)$  также равна  $m$ , то и порядок функции  $F(z)$  есть  $m$ . Следовательно, порядок функции  $F(z)$  и в этом случае совпадает с порядком функции  $f(z)$ . Итак, во всех случаях порядки функций  $f(z)$  и  $F(z)$  одинаковы, откуда вытекает, что *общее число корней уравнения (4.1:3) в расширенной плоскости одинаково для всех значений  $A$  и совпадает с порядком  $N$  функции  $f(z)$ .*

Мы обнаружили здесь, что известное свойство многочленов принимать любое значение  $A$  в одном и том же числе точек плоскости, равном степени многочлена, распространяется при замене степени порядком и на любую рациональную функцию.

В виде примера рассмотрим функцию  $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}$ . Она имеет два простых нуля:  $\pm i$  и два простых полюса:  $\pm 1$ . Для значения  $A = 1$  уравнение

$$\frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{2}{z^2 - 1} = 0$$

не имеет, очевидно, конечных корней. Но оно имеет двукратный корень в  $\infty$ , так как степень знаменателя дроби на две единицы превосходит степень числителя.

Из полученных результатов вытекает, что *рациональная функция  $w = f(z)$  порядка  $N$  отображает расширенную плоскость на расширенную плоскость так, что каждая точка  $w = f(z)$  имеет вообще  $N$  прообразов в плоскости  $z$ . Для отдельных значений  $w$  число различных между собой прообразов может оказаться меньшим, чем  $N$ . Так, например, если  $f(z)$  имеет кратные нули или кратные полюсы, то точкам  $w = 0$  или  $w = \infty$  будут соответствовать в качестве прообразов меньше чем  $N$  различных точек в плоскости  $z$ .*

Прочие значения  $w$  ( $w \neq 0, w \neq \infty$ ) такого рода получаем, разыскивая условия, при которых уравнение

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = w \quad \text{или} \quad \frac{P(z) - wQ(z)}{Q(z)} = 0$$

имеет кратные корни. Все конечные кратные корни последнего уравнения совпадают с кратными корнями уравнения

$$P(z) - wQ(z) = 0,$$

следовательно, удовлетворяют также уравнению

$$P'(z) - \omega Q'(z) = 0$$

и, наконец, уравнению степени не выше, чем  $m + n - 1$ ,

$$P(z) Q'(z) - P'_j(z) Q(z) = 0. \quad (4.1:5)$$

Последнее имеет не более чем  $m + n - 1$  различных корней  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ , которым соответствует не более  $m + n - 1$  различных значений

$$\omega_j = \frac{P(\gamma_j)}{Q(\gamma_j)} \quad (j = 1, 2, \dots, r),$$

обладающих прообразами в числе, меньшем чем  $N$ .

Заметим, что все конечные кратные нули  $f(z)$  удовлетворяют уравнениям

$$P(z) = 0 \quad \text{и} \quad P'(z) = 0,$$

а конечные кратные полюсы — уравнениям

$$Q(z) = 0 \quad \text{и} \quad Q'(z) = 0.$$

Следовательно, и те и другие удовлетворяют также уравнению (4.1:5), т. е. встречаются среди его корней  $\gamma_j$ . Поэтому и числа 0 и  $\infty$  будут встречаться среди  $r$  чисел  $\omega_j$  (в случае, когда существуют конечные кратные нули или кратные полюсы). Может случиться, однако, что уравнение  $f(z) = f(\infty)$  имеет кратные корни только в бесконечно удаленной точке; тогда число  $f(\infty)$  (быть может, равное нулю или бесконечности) не встретится среди чисел  $\omega_j$  ( $j = 1, \dots, r$ ) и, следовательно, его нужно будет присоединить к ним. Общее количество полученных точек не будет превосходить  $m + n$ .

Итак, во всех случаях общее количество тех точек плоскости  $\omega$ , которые имеют менее чем по  $N$  прообразов, не превосходит  $m + n$ . Совокупность всех прообразов этих точек состоит из  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ ; к последним иногда нужно присоединять еще и  $\infty$ .

При  $z$ , отличном от полюсов функции  $f(z)$  и от бесконечности, функция  $f(z)$  обладает производной

$$f'(z) = \frac{P'(z) Q(z) - P(z) Q'(z)}{[Q(z)]^2};$$

для того чтобы она была не равной нулю, нужно еще потребовать, чтобы точка  $z$  не совпадала ни с одной из точек  $\gamma_j$  ( $j = 1, \dots, r$ ). Отсюда следует, что отображение  $\omega = f(z)$  является конформным всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек.

Предоставляем читателю доказать, что это отображение является конформным и в любом простом полюсе функции  $f(z)$ ,

а также в бесконечно удаленной точке, если только  $z = \infty$  не является кратным корнем уравнения  $f(z) = f(\infty)$ . Точно так же можно показать, что конформность действительно не имеет места в каждой из точек  $\gamma_j$  ( $j = 1, 2, \dots, r$ ), к которым нужно присоединить еще и  $\gamma_0 = \infty$ , если  $z = \infty$  является кратным корнем уравнения  $f(z) = f(\infty)$ . А именно, угол с вершиной в точке  $\gamma_j$  увеличивается при отображении  $w = f(z)$  в число раз, равное кратности корня  $\gamma_j$  для уравнения  $f(z) = f(\gamma_j)$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, r$ ).

4.2. Из результатов предыдущего пункта вытекает, что рациональная функция первого порядка, т. е. дробно-линейная функция  $w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , является *единственной среди рациональных функций, осуществляющей взаимно однозначное отображение расширенной плоскости самое на себя*. (При этом нужно еще потребовать, чтобы определитель функции  $L(z)$  был отличен от нуля:  $ad - bc \neq 0$ ; при невыполнении этого условия  $L(z)$  становится тождественно равной постоянной, т. е. отображает расширенную плоскость в одну точку.) Мы уже видели в п. 2.3, что отображение  $w = L(z)$  является конформным во всех точках расширенной плоскости. К этому отображению (к различным его частным случаям) приходится прибегать в самых разнообразных вопросах теории функций комплексного переменного. Поэтому оно заслуживает особого изучения. Рассмотрим здесь его основные свойства.

Мы будем изучать множество  $M$  всех дробно-линейных отображений (или преобразований) с определителями, отличными от нуля. Два отображения

$$L_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1} \quad \text{и} \quad L_2(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}$$

будем рассматривать как одинаковые тогда и только тогда, когда  $L_1(z) = L_2(z)$  при всех значениях  $z$ . Для этого достаточно, чтобы соответствующие коэффициенты были пропорциональны между собой:

$$a_2 = \lambda a_1, \quad b_2 = \lambda b_1, \quad c_2 = \lambda c_1 \quad \text{и} \quad d_2 = \lambda d_1 \quad (\lambda \neq 0).$$

Эти же условия и необходимы. Действительно, если  $L_1(z) = L_2(z)$ , то, в частности:

$$L_1(0) = L_2(0), \quad L_1(1) = L_2(1) \quad \text{и} \quad L_1(\infty) = L_2(\infty);$$

это означает, что

$$\frac{b_1}{d_1} = \frac{b_2}{d_2} = p, \quad \frac{a_1 + b_1}{c_1 + d_1} = \frac{a_2 + b_2}{c_2 + d_2}, \quad \frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = q.$$

Подставляя

$$b_1 = d_1 p, \quad b_2 = d_2 p, \quad a_1 = c_1 q \quad \text{и} \quad a_2 = c_2 q$$

в среднее равенство, получим

$$\frac{c_1 q + d_1 p}{c_1 + d_1} = \frac{c_2 q + d_2 p}{c_2 + d_2}, \quad \text{или} \quad (c_1 d_2 - c_2 d_1)(q - p) = 0.$$

Но  $q \neq p$  (иначе было бы  $\frac{a_1}{c_1} = \frac{b_1}{d_1}$ , т. е.  $a_1 d_1 - b_1 c_1 = 0$  в противоречие с предположением) Следовательно,

$$\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2}.$$

Полученные соотношения можно переписать в виде

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{d_2}{d_1} = \lambda,$$

что и требовалось доказать.

Из изложенного следует, что значение определителя дробно-линейного отображения само по себе не является характерным для этого отображения. В самом деле, при переходе от коэффициентов  $a_1, b_1, c_1$  и  $d_1$  к коэффициентам  $\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1$  и  $\lambda d_1$  ( $\lambda \neq 0$ ) определитель помножается на  $\lambda^2$ . Но во всяком случае этот определитель, будучи отличным от нуля для каких-нибудь значений коэффициентов, остается всегда отличным от нуля.

Отображение,

$$U(z) = z,$$

очевидно, принадлежащее множеству  $M$ , будем называть тождественным или единичным отображением.

Отображением, обратным по отношению к некоторому отображению

$$z_1 = L(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

мы назовем такое, при котором каждому  $z$  в качестве образа ставится его прообраз  $z_1$  при данном отображении. Обратным отображением служит

$$z = \frac{dz_1 - b}{-cz_1 + a}.$$

Мы будем обозначать отображение, обратное по отношению к  $L$ , через  $L^{-1}$ .

Если

$$z_1 = L(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{и} \quad z_2 = L_1(z_1) = \frac{a_1 z_1 + b_1}{c_1 z_1 + d_1}$$

— два произвольных дробно-линейных отображения (как всегда, с не равными нулю определителями), то отображение, получаемое,

если выполнить их последовательно одно за другим в определенном порядке, называется произведением данных отображений. Пусть мы производим сначала отображение  $z_1 = L(z)$ , а затем отображение  $z_2 = L_1(z_1)$ . Тогда их произведение обозначается через  $L_1L(z)$ . Для него имеем:

$$z_2 = L_1L(z) = \left[ a_1 \frac{az+b}{cz+d} + b_1 \right] : \left[ c_1 \frac{az+b}{cz+d} + d_1 \right] = \\ = [(aa_1 + cb_1)z + (ba_1 + db_1)] : [(ac_1 + cd_1)z + (bc_1 + dd_1)].$$

Следовательно,  $z_2 = L_1L(z)$  есть также дробно-линейное отображение; для его определителя получаем:

$$(aa_1 + cb_1)(bc_1 + dd_1) - (ba_1 + db_1)(ac_1 + cd_1) = \\ = (ad - bc)(a_1d_1 - b_1c_1) \neq 0.$$

Итак отображение  $L_1L(z)$  принадлежит множеству  $M$ .

Очевидно,

$$LL^{-1}(z) = L^{-1}L(z) = U(z).$$

Заметим, что отображение  $z_2 = LL_1(z)$ , получающееся, если сначала выполнить отображение  $z_1 = L_1(z)$ , а затем отображение  $z_2 = L(z_1)$ , вообще отличается от отображения  $L_1L(z)$ . Так, например, если

$$L(z) = \frac{z}{z+1} \quad \text{и} \quad L_1(z) = \frac{z+1}{z-1},$$

то

$$L_1L(z) = -2z - 1, \quad \text{а} \quad LL_1(z) = \frac{z+1}{2z}$$

Определенная нами операция умножения отображений ассоциативна, т. е. для любых дробно-линейных отображений  $L$ ,  $L_1$  и  $L_2$  имеет место соотношение

$$(LL_1)L_2 = L(L_1L_2).$$

Свойство это легко проверяется. В самом деле, пусть  $L_2(z) = z_2$ . Тогда

$$(LL_1)L_2(z) = LL_1[L_2(z)] = LL_1(z_2)$$

и

$$L(L_1L_2)(z) = L[L_1L_2(z)] = LL_1(z_2),$$

итак

$$(LL_1)L_2(z) = L(L_1L_2)(z).$$

Свойство ассоциативности распространяется на произведение любого числа отображений. Оно избавляет нас от необходимости писать скобки в этом произведении. Так например,

$$L[L_1(L_2L_3)](z) = LL_1(L_2L_3)(z) = L(L_1L_2)L_3(z) = \dots = LL_1L_2L_3(z).$$

Так как множество  $M$  наряду с каждым двумя отображениями  $L$  и  $L_1$  содержит также и их произведение  $L_1L$  (или  $LL_1$ ) и наряду с отображением  $L$  содержит обратное отображение  $L^{-1}$ , то оно образует группу отображений (преобразований)\*).

**4.3.** Обратимся к доказательству кругового свойства дробно-линейного отображения, выражающегося в том, что образом прямой или окружности при отображении  $w = L(z)$  является прямая или окружность, причем образом прямой могут быть и прямая и окружность, точно так же как и образом окружности могут быть прямая и окружность.

Для целой линейной функции  $L(z) = az + \beta$  это свойство является очевидным, так как отображение  $w = L(z)$  сводится к сдвигу (при  $a = 1$ ) или же к повороту и растяжению (если  $a \neq 1$ ); см. п. 2.3.

Рассмотрим теперь отображение

$$w = \Lambda(z) = \frac{1}{z},$$

которым мы неоднократно пользовались.

Очевидно, уравнение любой прямой или окружности можно представить в виде

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0.$$

Мы получаем прямую при  $A = 0$  и  $B$  и  $C$ , не равных одновременно нулю, и окружность при  $A \neq 0$  и  $B^2 + C^2 - AD > 0$ . Заменяя здесь  $x^2 + y^2$  через  $zz$ ,  $2x$  через  $z + \bar{z}$  и  $2y$  через  $-i(z - \bar{z})$ , мы представим это уравнение в виде

$$Azz + (B - iC)z + (B + iC)\bar{z} + D = 0,$$

или

$$Azz + \bar{E}z + E\bar{z} + D = 0, \quad (4.3:1)$$

где  $E = B + iC$ . Здесь  $A = 0$ , а комплексное число  $E$  отлично от нуля в случае прямой и  $A \neq 0$  и  $E\bar{E} - AD > 0$  в случае окружности. Обратное: любое уравнение такого вида с действительными коэффициентами  $A$  и  $D$  и комплексными сопряженными коэффициентами  $E$  и  $\bar{E}$  будет являться уравнением прямой, если  $A = 0$  и число  $E$  отлично от нуля, и уравнением окружности, если  $A \neq 0$  и  $E\bar{E} - AD > 0$ . Чтобы убедиться в этом, достаточно перейти от  $z$  к  $x$  и  $y$  по формулам

$$z\bar{z} = x^2 + y^2, \quad z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy.$$

\*) См., например, А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, изд. 8, М., «Наука», 1965; § 63 или Ван дер Варден, Современная алгебра, т. 1, М., Гостехиздат, 1947, § 6.

Желая получить образ кривой (4.3:1) при отображении  $w = \frac{1}{z}$ , заменим  $z$  в уравнении (4.3:1) на  $\frac{1}{w}$ . Получим:

$$A \frac{1}{\overline{w}} + \overline{E} \frac{1}{w} + E \frac{1}{\overline{w}} + D = 0,$$

или

$$Dw\overline{w} + Ew + \overline{E}\overline{w} + A = 0. \quad (4.3:2)$$

Уравнение (4.3:2) имеет тот же вид, что и уравнение (4.3:1), с заменой  $A$  на  $D$ ,  $D$  на  $A$  и  $E$  на  $\overline{E}$ . Отсюда следует, что при  $D=0$  это есть уравнение прямой (так как тогда либо  $A=0$  и  $E \neq 0$ , либо  $A \neq 0$  и  $E\overline{E} - AD = E\overline{E} > 0$ , т. е. снова  $E \neq 0$ ), а при  $D \neq 0$  уравнение окружности (так как при  $A \neq 0$  уравнение (4.3:1) изображало окружность и, следовательно, выполнялось условие  $E\overline{E} - AD > 0$ , а при  $A=0$  оно изображало прямую, следовательно,  $E$  было отлично от нуля, откуда  $E\overline{E} - AD = E\overline{E} > 0$ ). Мы доказали, что образом прямой или окружности при отображении  $w = \Lambda(z) = \frac{1}{z}$  является прямая или окружность.

Переходя к произвольной дробно-линейной функции

$$w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (c \neq 0),$$

представим ее в виде

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)}.$$

Положим,

$$z_1 = L_1(z) = cz + d, \quad z_2 = \Lambda(z_1) = \frac{1}{z_1}$$

и

$$w = L_2(z_2) = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} z_2;$$

тогда  $L(z)$  запишется в виде произведения трех отображений:

$$L = L_2 \Lambda L_1.$$

Так как образом прямой или окружности при каждом из отображений  $L_1$ ,  $\Lambda$  и  $L_2$  является прямая или окружность, то тем же свойством обладает и отображение  $L$ . Круговое свойство дробно-линейного отображения доказано полностью.

Обозначим через  $\delta = -\frac{d}{c}$  полюс дробно-линейной функции  $L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  ( $c \neq 0$ ). Образ каждой прямой или окружности, про-

ходящей через  $\delta$ , должен содержать бесконечно удаленную точку  $L(\delta) = \infty$  и, следовательно, не может быть окружностью. В силу кругового свойства этот образ есть прямая. Образ прямой или окружности, не проходящей через точку  $\delta$ , не может содержать бесконечно удаленную точку и, следовательно, не может быть прямой. В силу кругового свойства этот образ есть окружность. Итак, при отображении  $w = L(z)$  все прямые и окружности, проходящие через полюс  $\delta$  этой функции, преобразуются в прямые плоскости  $w$ , а прямые и окружности, не проходящие через  $\delta$ , преобразуются в окружности плоскости  $w$ .

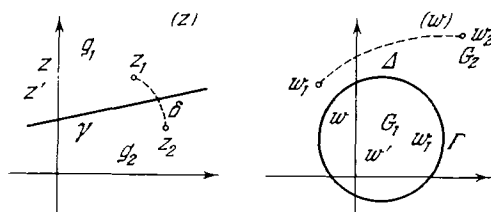


Рис. 23

Пусть  $w = L(z)$  — произвольная дробно-линейная функция,  $\gamma$  — прямая или окружность плоскости  $z$  и  $\Gamma$  — ее образ в плоскости  $w$  (т. е. также прямая или окружность). Рассмотрим области  $g_1$  и  $g_2$ , ограниченные линией  $\gamma$  в плоскости  $z$ ; это будут две полуплоскости, или же внутренность и внешность круга. Покажем, что образом одной из них будет служить одна, а другой — другая из двух областей, ограниченных линией  $\Gamma$  в плоскости  $w$ . В самом деле, пусть  $z_1$  — точка области  $g_1$  и  $z_2$  — точка области  $g_2$ . Так как  $z_1$  и  $z_2$  не лежат на  $\gamma$ , то образы этих точек  $w_1$  и  $w_2$  не могут лежать на  $\Gamma$  и, следовательно, попадают в области, на которые  $\Gamma$  разбивает плоскость  $w$ . Если допустить, что они попадают в одну и ту же область, то их можно будет соединить в ней отрезком  $\Delta$  прямой (или дугой окружности), не имеющим общих точек с  $\Gamma$  (рис. 23). Прообразом отрезка  $\Delta$  в плоскости  $z$  должен быть отрезок прямой (или дуга окружности)  $\delta$ , соединяющий  $z_1$  с  $z_2$  и не имеющий общих точек с  $\gamma$ . Но существование такого отрезка противоречит тому, что  $z_1$  и  $z_2$  лежат в различных областях  $g_1$  и  $g_2$ . Итак, из того, что точки  $z_1$  и  $z_2$  принадлежат различным областям  $g_1$  и  $g_2$ , следует, что их образы  $w_1$  и  $w_2$  также принадлежат различным областям, ограниченным линией  $\Gamma$ . Мы обозначим через  $G_1$  область, содержащую  $w_1$ , а через  $G_2$  — область, содержащую  $w_2$ , и покажем, что образом области  $g_1$  является  $G_1$ , а образом области  $g_2$  служит  $G_2$ .

В самом деле, если  $z'$ , например, какая-либо точка области  $g_1$ , то из того, что  $z'$  и  $z_2$  принадлежат разным областям  $g_1$  и  $g_2$ , следует,



по доказанному, что их образы  $w'$  и  $w_2$  принадлежат разным областям  $G_1$  и  $G_2$ . Но  $w_2$  принадлежит  $G_2$ , поэтому  $w'$  принадлежит  $G_1$ . Итак, образ каждой точки области  $g_1$  принадлежит области  $G_1$ ; точно так же образ каждой точки области  $g_2$  принадлежит  $G_2$ . Возьмем, наконец, произвольную точку  $w$  области  $G_1$ . Она должна быть образом одной из точек  $z$  области  $g_1$  или  $g_2$ . Но  $z$  не может быть точкой области  $g_2$ , так как иначе  $w$  была бы точкой области  $G_2$ . Следовательно,  $w$  является образом точки  $z$ , принадлежащей  $g_1$ . Итак,  $G_1$  есть образ области  $g_1$ , а  $G_2$  есть образ области  $g_2$ . Мы доказали, следовательно, что две области, ограниченные линией  $\gamma$ , отображаются на две области, ограниченные линией  $\Gamma$ , и установили при этом, что, для того чтобы узнать, какая, именно, из двух областей, ограниченных линией  $\Gamma$ , является образом данной области  $g_1$ , ограниченной линией  $\gamma$ , достаточно проследить за образом  $w_1$  одной только точки  $z_1 \in g_1$ : та область  $G_1$ , которой принадлежит  $w_1$ , и будет образом области  $g_1$ .

**4.4.** Если дробно-линейное преобразование  $w = L(z)$  отлично от тождественного, то  $w$  вообще отлично от  $z$ . Однако и здесь существуют неподвижные точки преобразования, характеризующиеся уравнением

$$z = L(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Пусть сначала  $c=0$  ( $d \neq 0$ ). Тогда  $L(z)$  представляет целую линейную функцию:

$$l(z) = az + \beta \quad \left( a = \frac{a}{d}, \beta = \frac{b}{d} \right)$$

Так как  $l(\infty) = \infty$ , то одной из неподвижных точек целого линейного преобразования является бесконечно удаленная точка плоскости  $z = \infty$ . При  $a \neq 1$  существует и другая неподвижная точка, определяемая из уравнения

$$z = az + \beta.$$

Это — точка  $z = \frac{\beta}{1-a}$ . При  $a=1$  и  $\beta \neq 0$  не существует конечной неподвижной точки. Но если  $a \neq 1$ ,  $\beta \neq 0$  и  $a \rightarrow 1$ , то конечная неподвижная точка  $\frac{\beta}{1-a}$  стремится к бесконечно удаленной точке. Поэтому в случае преобразования  $l(z) = z + \beta$  ( $\beta \neq 0$ ) бесконечно удаленную точку можно рассматривать как две слившиеся неподвижные точки.

Пусть теперь  $c \neq 0$ . Тогда  $L(\infty) = \frac{a}{c} \neq \infty$ , т. е. точка  $z = \infty$  не является неподвижной. Точно так же не является неподвижной

и точка  $-\frac{d}{c}$ , ибо

$$L\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \neq -\frac{d}{c}.$$

Считая, что  $z \neq \infty$  и  $z \neq -\frac{d}{c}$ , будем решать уравнение

$$z = \frac{az+b}{cz+d},$$

или

$$cz^2 - (a-d)z - b = 0.$$

Получим:

$$z = \frac{a-d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}$$

Если  $(a-d)^2 + 4bc \neq 0$ , то мы находим отсюда две различные конечные неподвижные точки. В случае  $(a-d)^2 + 4bc = 0$  эти две точки сливаются в одну конечную неподвижную точку  $\frac{a-d}{2c}$ .

Итак, *дробно-линейное преобразование, отличное от тождественного, имеет только две неподвижные точки, которые в частном случае могут сливаться в одну*. Целые линейные преобразования вполне характеризуются тем, что по крайней мере одна неподвижная точка является бесконечно удаленной.

Дробно-линейное преобразование, имеющее больше двух неподвижных точек, может быть только тождественным преобразованием  $U(z) = z$  (для которого все точки суть неподвижные). Отсюда можно вывести, что для совпадения двух дробно-линейных преобразований  $L(z)$  и  $\Lambda(z)$  достаточно, чтобы уравнение  $L(z) = \Lambda(z)$  выполнялось для трех различных точек  $z_1, z_2$  и  $z_3$ . Действительно, пусть  $L(z_k) = \Lambda(z_k) = w_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ); тогда  $\Lambda^{-1}(w_k) = z_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ), и, следовательно, преобразование  $\Lambda^{-1}L(z)$  переводит точки  $z_k$  снова в те же точки, т. е.  $\Lambda^{-1}L(z_k) = z_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) (ибо  $L(z_k) = w_k$  и  $\Lambda^{-1}(w_k) = z_k$ ). Поэтому преобразование  $\Lambda^{-1}L$  имеет три различные неподвижные точки:  $z_1, z_2$  и  $z_3$ , т. е. является тождественным преобразованием:

$$\Lambda^{-1}L = U.$$

Следовательно,

$$\Lambda(\Lambda^{-1}L) = \Lambda U.$$

Но

$$\Lambda(\Lambda^{-1}L) = (\Lambda\Lambda^{-1})L = UL = L$$

и

$$\Lambda U = \Lambda.$$

Окончательно получаем:

$$L = \Lambda,$$

что и требовалось доказать.

Итак, для того чтобы определить дробно-линейное преобразование, достаточно задать три различные точки:  $w_1$ ,  $w_2$  и  $w_3$ , в которые преобразуются три заданные различные точки:  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_3$ .

Поставим себе задачу найти дробно-линейную функцию, осуществляющую это преобразование, и предположим сначала, что  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_3$  конечные точки и что  $w_1 = 0$ ,  $w_2 = \infty$  и  $w_3 = 1$ .

Для того чтобы линейная функция

$$w = \Lambda(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

обращалась в 0 при  $z = z_1$  и в  $\infty$  при  $z = z_2$ , необходимо и достаточно, чтобы  $z = z_1$  было нулем числителя  $az+b$ , т. е. числитель имел вид  $a(z-z_1)$  и  $z = z_2$  было нулем знаменателя, т. е. знаменатель имел вид  $c(z-z_2)$ . Поэтому искомая функция должна иметь вид

$$w = \frac{a}{c} \frac{z-z_1}{z-z_2}.$$

Но при  $z = z_3$   $w$  должно равняться 1. Из уравнения

$$1 = \frac{a}{c} \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

получаем:

$$\frac{a}{c} = 1 : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2},$$

откуда

$$w = \Lambda(z) = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}.$$

Это и есть искомая дробно-линейная функция, переводящая точки  $z_1$ ,  $z_2$ , и  $z_3$  соответственно в точки 0,  $\infty$  и 1.

Пусть теперь  $w_1$ ,  $w_2$  и  $w_3$  — произвольные (различные) конечные точки и  $w = L(z)$  дробно-линейное преобразование, удовлетворяющее условиям:

$$L(z_1) = w_1, \quad L(z_2) = w_2 \quad \text{и} \quad L(z_3) = w_3.$$

По доказанному, функция  $\zeta = \Lambda_1(w) = \frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}$  преобразует точки  $w_1$ ,  $w_2$  и  $w_3$  в точки 0,  $\infty$  и 1. Поэтому функция  $\Lambda_1 L(z)$  преобразует точки  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_3$  в точки 0,  $\infty$  и 1, т. е.

$$\Lambda_1 L(z) = \Lambda(z) = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}.$$

Из соотношения

$$\Lambda_1 L = \Lambda$$

следует, что

$$\Lambda_1^{-1} (\Lambda_1 L) = \Lambda_1^{-1} \Lambda,$$

т. е.

$$L = \Lambda_1^{-1} \Lambda$$

(так как  $\Lambda_1^{-1} (\Lambda_1 L) = (\Lambda_1^{-1} \Lambda_1) L = UL = L$ ).

Последнее соотношение решает задачу, так как преобразования  $\Lambda$  и  $\Lambda_1$  — известные:

$$\Lambda(\zeta) = \frac{\zeta - z_1}{\zeta - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}, \quad \Lambda_1(\zeta) = \frac{\zeta - w_1}{\zeta - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2}$$

Впрочем для изучения преобразования  $w = L(z)$  удобнее пользоваться прямо соотношением

$$\Lambda_1 L(z) = \Lambda(z),$$

откуда, после замены  $L(z)$  через  $w$ , следует:

$$\Lambda_1(w) = \Lambda(z),$$

или

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \quad (4.4:1)$$

Это уравнение дает дробно-линейную функцию  $w = L(z)$  в неявном виде.

Мы решили нашу задачу в предположении, что все точки  $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2$  и  $w_3$  — конечные. Если, например,  $z_1 = \infty$ , то функция  $\Lambda(z)$ , преобразующая точки  $z_1 = \infty, z_2$  и  $z_3$  в точки  $w_1 = 0, w_2 = \infty$  и  $w_3 = 1$ , принимает вид

$$\Lambda(z) = \frac{1}{z - z_2} : \frac{1}{z_3 - z_2} \quad *)$$

Поэтому уравнение (4.4:1) заменяется уравнением

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{1}{z - z_2} : \frac{1}{z_3 - z_2} \quad (4.4:1')$$

---

\*) К этому выражению можно прийти, если, считая  $z_1$  конечным, переписать

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

в виде

$$\frac{\frac{z - 1}{z_1} - 1}{z - z_2} : \frac{\frac{z_3 - 1}{z_1} - 1}{z_3 - z_2}$$

и затем перейти к пределу при  $z_1 \rightarrow \infty$ .

(в предположении, что точки  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  — конечные). Если  $z_2 = \infty$ , то функция  $\Lambda(z)$ , преобразующая точки  $z_1$ ,  $z_2 = \infty$  и  $z_3$  в точки  $\omega = 0$ ,  $\omega_2 = \infty$  и  $\omega_3 = 1$ , принимает вид

$$\Lambda(z) = (z - z_1) : (z_3 - z_1)$$

и, следовательно, уравнение (4.4:1) заменяется уравнением

$$\frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_2} : \frac{\omega_3 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_2} = (z - z_1) : (z_3 - z_1). \quad (4.4:1'')$$

Если  $z_3 = \infty$ , то функция  $\Lambda(z)$ , преобразующая точки  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_3 = \infty$  в точки  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = \infty$  и  $\omega_3 = 1$ , принимает вид

$$\Lambda(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

и уравнение (4.4:1) заменяется уравнением

$$\frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_2} : \frac{\omega_3 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2}. \quad (4.4:1''')$$

Подобным же образом левую часть уравнения (4.4:1) нужно заменять через

$$\frac{1}{\omega - \omega_2} : \frac{1}{\omega_3 - \omega_2}, \quad (\omega - \omega_1) : (\omega_3 - \omega_1), \quad \frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_2}$$

в зависимости от того, будет ли  $\omega_1 = \infty$ ,  $\omega_2 = \infty$ , либо  $\omega_3 = \infty$ .

В результате приходим к следующему мнемоническому правилу: если  $z_k = \infty$  или  $\omega_l = \infty$  ( $k = 1, 2, 3$ ;  $l = 1, 2, 3$ ), то в уравнении (4.4:1) разности, в которых фигурирует  $z_k$  или  $\omega_l$ , нужно заменять через 1. Читатель легко подтвердит справедливость этого правила с помощью предельного перехода в уравнении (4.4:1) (при  $z_k \rightarrow \infty$  или  $\omega_l \rightarrow \infty$ ).

Из уравнения (4.4:1) вытекает важное общее свойство дробно-линейных преобразований. Пусть  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  — произвольные различные (конечные) комплексные числа. Назовем отношение

$$\frac{c - a}{c - b} : \frac{d - a}{d - b}$$

двойным или ангармоническим отношением четырех чисел или точек  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ . Отношение это будем обозначать символом  $(a, b, c, d)$ :

$$(a, b, c, d) = \frac{c - a}{c - b} : \frac{d - a}{d - b}$$

Определение двойного отношения мы распространим и на тот случай, когда одна из четырех точек  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  будет бесконечно удаленной. Именно, двойным отношением четырех точек, среди которых одна — бесконечно удаленная, мы будем называть предел

двойного отношения четырех конечных точек, из которых три совпадают с заданными точками, а четвертая стремится к бесконечно удаленной точке. Следуя этому определению, будем иметь:

$$\begin{aligned}(\infty, b, c, d) &= \frac{1}{c-b} : \frac{1}{d-b}, \\(a, \infty, c, d) &= (c-a) : (d-a), \\(a, b, \infty, d) &= 1 : \frac{d-a}{d-b}, \\(a, b, c, \infty) &= \frac{c-a}{c-b}.\end{aligned}$$

Пусть теперь  $\omega = L(z)$  — произвольное дробно-линейное преобразование. Обозначим через  $A, B, C$  и  $D$  точки, в которые оно преобразует какие-либо четыре различные точки:  $a, b, c$  и  $d$ . Так как три точки  $a, b$  и  $d$  преобразуются в точки  $A, B$  и  $D$ , то  $\omega = L(z)$  и  $z$  будут связаны соотношением (4.4:1):

$$\frac{\omega-A}{\omega-B} : \frac{D-A}{D-B} = \frac{z-a}{z-b} : \frac{d-a}{d-b},$$

в котором нужно заменять через 1 те разности, где фигурирует бесконечно удаленная точка. Полагая  $z=c$ , мы должны положить  $\omega=C$  (так как при нашем преобразовании точке  $c$  соответствует точка  $C$ ). Следовательно,

$$\frac{C-A}{C-B} : \frac{D-A}{D-B} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$$

(разности, в которых фигурирует бесконечно удаленная точка, должны быть заменены через 1), или

$$(A, B, C, D) = (a, b, c, d). \quad (4.4:2)$$

Итак, при дробно-линейном преобразовании двойное отношение любых четырех точек не изменяется; иными словами, двойное отношение является инвариантом линейного преобразования.

4.5. Опираясь на круговое свойство дробно-линейного отображения и на возможность отобразить любую тройку точек  $z_1, z_2, z_3$  в другую, наперед заданную тройку  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , докажем следующее предложение:

*Каковы бы ни были прямые или окружности  $\gamma$  и  $\Gamma$  и две тройки точек  $z_1, z_2, z_3$  и  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , принадлежащих соответственно  $\gamma$  и  $\Gamma$ , существует дробно-линейная функция  $\omega = L(z)$ , отображающая  $\gamma$  на  $\Gamma$  так, что точки  $z_1, z_2, z_3$  отображаются соответственно в  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ .*

В самом деле, построим дробно-линейную функцию  $\omega = L(z)$ , удовлетворяющую условиям  $L(z_j) = \omega_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). По предыду-

щему, такая функция существует и является единственной, удовлетворяющей этим условиям. Прямую или окружность  $\gamma$  она отображает на некоторую прямую или окружность  $\Gamma$ . Но  $\gamma$  проходит через точки  $z_1, z_2$  и  $z_3$ ; поэтому  $\Gamma$  проходит через точки  $w_1, w_2$  и  $w_3$ , и так как через три точки нельзя провести двух различных прямых или окружностей, то  $\Gamma$  совпадает с  $\Gamma$ . Итак,  $w = L(z)$  удовлетворяет всем условиям высказанного предложения.

Возьмем снова произвольные прямые или окружности  $\gamma$  и  $\Gamma$  (различные или совпадающие) и пусть  $g$  — одна из двух областей,

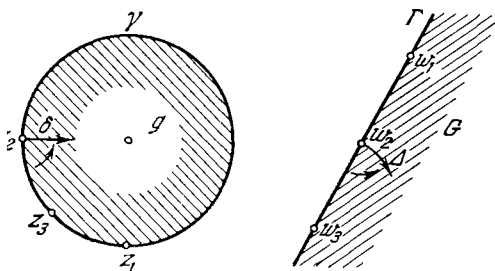


Рис. 24.

ограниченных линией  $\gamma$ , а  $G$  — одна из двух областей, ограниченных линией  $\Gamma$ . Очевидно, та и другая могут быть полуплоскостью, внутренностью окружности или внешностью окружности. Выберем произвольную тройку точек  $z_1, z_2$  и  $z_3$  на  $\gamma$  и предположим для определенности, что при движении наблюдателя вдоль  $\gamma$ , в направлении от точки  $z_1$  к  $z_3$  через точку  $z_2$  область  $g$  остается слева от

него. Пусть  $w_1, w_2$  и  $w_3$  — тройка точек на  $\Gamma$  такая, что при передвижении наблюдателя вдоль  $\Gamma$  в направлении от точки  $w_1$  к  $w_3$  через точку  $w_2$  область  $G$  остается слева от него. В остальных точках  $w_1, w_2$  и  $w_3$  остаются произвольными. Образует, как это было показано выше, дробно-линейную функцию  $w = L(z)$ , удовлетворяющую условиям  $w_j = L(z_j)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) и, следовательно, отображающую  $\gamma$  на  $\Gamma$ . Покажем, что эта функция отображает также область  $g$  на область  $G$ . Действительно, если  $\delta$  есть отрезок нормали к линии  $\gamma$ , проведенной через точку  $z_2$  внутрь области  $g$ , т. е. влево от наблюдателя, находящегося в точке  $z_2$  и смотрящего вдоль  $\gamma$  по установленному выше направлению, то, в силу конформности отображения  $w = L(z)$ , образ  $\Delta$  этого отрезка (он будет отрезком прямой или дугой окружности) также направлен влево от наблюдателя, находящегося в точке  $w_2$  и смотрящего вдоль  $\Gamma$  в установленном на  $\Gamma$  направлении (рис. 24). Следовательно, по условию  $\Delta$  будет принадлежать  $G$ . Итак, мы установили уже, что область  $G$  содержит образы некоторых точек, принадлежащих  $g$  (а именно, образы точек отрезка  $\delta$ ). Но по п. 4.3  $L(g)$  есть одна из областей, граница которых совпадает с образом границы области  $g$ , т. е. с  $\Gamma = L(\gamma)$ . Так как таких областей только две и одна из них  $G$  содержит образы точек области  $g$ , то она и есть искомый образ этой области  $g$ :  $G = L(g)$ .

Поясним изложенное примером. Пусть нужно конформно отобразить верхнюю полуплоскость  $y > 0$  на внутренность единичного круга.

Для решения задачи полагаем, например,  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = 0$  и  $z_3 = 1$ , так что полуплоскость остается слева от наблюдателя, идущего по действительной оси в направлении от  $z_1$  к  $z_3$  через  $z_2$ , и выбираем на единичной окружности также три точки:  $w_1$ ,  $w_2$  и  $w_3$  так, чтобы внутренность круга оставалась слева от наблюдателя, идущего по окружности в направлении от  $w_1$  к  $w_3$  через  $w_2$ . Можно взять, для простоты,  $w_1 = 1$ ,  $w_2 = i$  и  $w_3 = -1$ . Тогда линейное отображение, удовлетворяющее условиям  $w_j = L(z_j)$  ( $j = 1, 2, 3$ ), и будет искомым. Его можно представить в виде

$$\frac{w-1}{w-i} : \frac{-1-1}{-1-i} = \frac{z+1}{z} : \frac{1+1}{1},$$

или

$$w = \frac{z-i}{iz-1}.$$

**4.6.** Пусть  $z_1$  и  $z_2$  — две точки, симметричные относительно некоторой прямой  $\gamma$ . Тогда центр произвольной окружности  $\delta$ , проходящей через  $z_1$  и  $z_2$ , будет лежать на  $\gamma$  и, следовательно,  $\delta$  будет ортогональной к  $\gamma$ . Ортогональной к  $\gamma$  будет и прямая, проходящая через  $z_1$  и  $z_2$ . Легко видеть, что справедливо и обратное: если любая окружность или прямая, проходящая через пару точек  $z_1$  и  $z_2$ , ортогональна к прямой  $\gamma$ , то  $z_1$  и  $z_2$  симметричны относительно  $\gamma$ .

Отобразим плоскость посредством дробно-линейной функции  $w = L(z)$  так, чтобы прямая  $\gamma$  перешла в некоторую прямую или окружность  $\Gamma$ . Тогда пара точек  $z_1$  и  $z_2$ , симметричных относительно  $\gamma$ , перейдет в некоторую пару точек  $w_1$  и  $w_2$ , а каждая окружность или прямая  $\delta$ , проходящая через  $z_1$  и  $z_2$ , перейдет в окружность или прямую  $\Delta$ , проходящую через  $w_1$  и  $w_2$ , и обратно: любая прямая или окружность, проходящая через  $w_1$  и  $w_2$ , будет образом некоторой прямой или окружности, проходящей через  $z_1$  и  $z_2$ . В силу симметрии точек  $z_1$  и  $z_2$  относительно  $\gamma$  и конформности отображения  $w = L(z)$ , прямые и окружности, проходящие через  $w_1$  и  $w_2$ , все будут ортогональны к  $\Gamma$ . Если, следовательно,  $\Gamma$  будет прямой линией, то точки  $w_1 = L(z_1)$  и  $w_2 = L(z_2)$  будут симметричными относительно  $\Gamma$ . Обобщая понятие симметрии, назовем *две точки симметричными относительно окружности, если любая прямая или окружность, через них проходящая, ортогональна к данной окружности*. Тогда можно будет сказать, что если прямая  $\gamma$  отображается посредством дробно-линейной функции  $w = L(z)$  на окружность  $\Gamma$ , то любая пара точек, симметричных относительно прямой, отображается в некоторую пару точек, симметричных



относительно окружности, и обратно. Отсюда, следует, что по данной окружности  $\Gamma$  и точке  $w_1$  точка, симметричная с  $w_1$  относительно  $\Gamma$ , определяется единственным образом. Действительно, если бы существовали две различные точки  $w_2$  и  $w'_2$ , симметричные с  $w_1$  относительно  $\Gamma$ , то при дробно-линейном отображении  $\Gamma$  на прямую  $\gamma$  точки  $w_1$ ,  $w_2$  и  $w'_2$  перешли бы в точки  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z'_2 \neq z_2$ , причем  $z_1$  и  $z_2$ , а также  $z_1$  и  $z'_2$  были бы симметричными относительно  $\gamma$ , что, очевидно, невозможно.

Приведенные здесь рассуждения об отображении прямой  $\gamma$  на прямую или окружность  $\Gamma$  переносятся без всяких изменений на случай, когда окружность отображается на окружность, и мы получаем, что при дробно-линейном отображении любая пара точек, симметричных относительно окружности  $\gamma$ , отображается в пару точек, симметричных относительно окружности  $\Gamma$ , являющейся образом  $\gamma$ . Итак, мы пришли к следующему общему свойству сохранения симметрии при дробно-линейных преобразованиях:

*Если точки  $z_1$  и  $z_2$  симметричны относительно некоторой прямой или окружности  $\gamma$ , то при любом дробно-линейном отображении  $w = L(z)$  их образы  $w_1$  и  $w_2$  будут симметричными относительно образа  $\Gamma = L(\gamma)$ .*

Отметим частный случай этого предложения. Пусть  $\gamma$  отображается на окружность  $\Gamma$ , и  $z_1$  — точка, отображающаяся при этом в центр  $w_1$  окружности  $\Gamma$ . Тогда точка  $z_2$ , симметричная с  $z_1$ , должна отобразиться в точку  $w_2$  расширенной плоскости, симметричную с  $w_1$  относительно  $\Gamma$ . Но такой точкой является бесконечно удаленная. В самом деле, прямая, соединяющая  $w_1$  и  $w_2 = \infty$ , т. е. любая прямая, проходящая через центр окружности  $\Gamma$ , ортогональна к  $\Gamma$ . В силу единственности симметричной точки (для данной точки относительно данной окружности),  $\infty$  и только она одна будет симметричной с центром окружности  $\Gamma$  относительно  $\Gamma$ .

Пусть  $\gamma$  — произвольная прямая или окружность. Преобразование расширенной плоскости, заключающееся в том, что каждая точка  $z$  преобразуется в точку  $z^*$ , симметричную с  $z$ , относительно  $\gamma$ , называется преобразованием симметрии относительно  $\gamma$ , или зеркальным отражением в  $\gamma$ . В случае, когда  $\gamma$  есть окружность, это отображение называют также *инверсией* относительно  $\gamma$ .

Дадим аналитические выражения для преобразования симметрии. Пусть сначала  $\gamma$  есть прямая. Она вполне определяется некоторой своей точкой  $a$  и единичным вектором  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , по ней направленным.

Выполним линейное преобразование

$$z = a + e^{i\theta}w = l(w),$$

очевидно отображающее действительную ось на нашу прямую (сдвиг на  $a$ , переводящий начало координат в точку  $a$ , и затем поворот около последней точки на угол  $\theta$ ). Так как отображение  $w = l^{-1}(z)$  преобразует  $\gamma$  в действительную ось, то оно отображает каждую пару точек  $z$  и  $z^*$ , симметричных относительно  $\gamma$ , в пару точек  $w$  и  $w^*$ , симметричных относительно действительной оси. Последние выражаются сопряженными комплексными числами  $w = t$  и  $w^* = \bar{t}$ . Поэтому  $z - a = e^{i\theta}t$ , или  $\overline{z - a} = e^{-i\theta}\bar{t}$ , и  $z^* - a = e^{i\theta}w^* = e^{i\theta}\bar{t}$ . Исключая  $t$  из двух последних равенств, получаем:

$$z^* - a = e^{2i\theta}(\overline{z - a}). \quad (4.6:1)$$

Это уравнение показывает, что для выполнения преобразования симметрии относительно прямой  $\gamma$ , проходящей через точку  $a$  под углом  $\theta$  к действительной оси, следует от вектора  $z - a$  перейти к симметричному с ним относительно действительной оси вектору  $\overline{z - a}$  и затем повернуть последний около точки  $a$  на угол  $2\theta$ .

Рассмотрим теперь преобразование симметрии относительно окружности  $\Gamma$  с центром в  $a$  и радиусом  $R$  ( $0 < R < \infty$ ). Выполним дробно-линейное преобразование, отображающее  $\Gamma$  на действительную ось. Проще всего взять отображение

$$z = a + R \frac{1 + iw}{1 - iw} = L(w),$$

которое точкам действительной оси  $w_1 = -1$ ,  $w_2 = 0$  и  $w_3 = 1$  ставит в соответствие точки окружности  $\Gamma$   $z_1 = a - iR$ ,  $z_2 = a + R$  и  $z_3 = a + iR$  и, следовательно, отображает действительную ось на  $\Gamma$ . Обратное отображение  $w = L^{-1}(z)$  преобразует  $\Gamma$  в действительную ось и каждую пару точек  $z$  и  $z^*$ , симметричных относительно  $\Gamma$ , преобразует в пару точек  $w$  и  $w^*$ , симметричных относительно действительной оси. Так как  $w$  и  $w^*$  изображаются сопряженными комплексными числами:  $w = t$  и  $w^* = \bar{t}$ , то  $z - a = R \frac{1 + it}{1 - it}$  или  $\overline{z - a} = R \frac{1 - i\bar{t}}{1 + i\bar{t}}$  и  $z^* - a = R \frac{1 + i\bar{t}}{1 - i\bar{t}}$ . Перемножая почленно последние два соотношения, найдем:

$$(\overline{z - a})(z^* - a) = R^2$$

или

$$z^* - a = \frac{R^2}{\overline{z - a}}. \quad (4.6:2)$$

Отсюда вытекает, во-первых, что

$$\text{Arg}(z^* - a) = -\text{Arg}(\overline{z - a}) = \text{Arg}(z - a)$$

и, во-вторых, что

$$|z^* - a| |z - a| = R^2.$$

Следовательно, точки  $z^*$  и  $z$  лежат на одном и том же луче, выходящем из центра, и на таких расстояниях от центра, произведение которых равно квадрату радиуса. Этими двумя условиями или, что то же самое, формулой (4.6:2) вполне определяется положение одной из точек  $z$ ,  $z^*$  по заданной другой точке, т. е. преобразование инверсии относительно окружности  $|z - a| = R$ .

Из равенств (4.6:1) или (4.6:2) следует, что *общее преобразование симметрии сводится к последовательно произведенным линейному (целому или дробному) преобразованию и затем преобразованию симметрии относительно действительной оси.*

Так, например, преобразование симметрии относительно прямой можно представить в виде:

$$z_1 = \bar{a} + e^{-2i\theta} (z - a) \text{ и } z^* = \bar{z}_1, \quad (4.6:1')$$

а преобразование симметрии относительно окружности — в виде

$$z_1 = \bar{a} + \frac{R^2}{z - a} \text{ и } z^* = \bar{z}_1. \quad (4.6:2')$$

Так как линейное преобразование является конформным и обладает круговым свойством, а преобразование симметрии относительно действительной оси обладает теми же свойствами, с тем единственным различием, что, сохраняя величины углов, оно меняет направления их отсчета на противоположные, то и преобразование симметрии в самом общем случае обладает указанными свойствами. А именно, оно является конформным отображением второго рода и преобразует прямые и окружности в прямые или окружности.

4.7. Иллюстрируем двумя примерами применение свойства сохранения симметрии при дробно-линейных отображениях.

**Пример 1.** Отобразить конформно верхнюю полуплоскость на внутренность круга  $|\omega| < R$  так, чтобы заданная точка  $a$  полуплоскости перешла в центр круга:  $\omega = 0$ .

Искомая функция, если она существует, обращается в нуль при  $z = a$ :  $L(a) = 0$ . Итак, мы знаем нуль  $z = a$  функции  $L(z)$ . Но точка  $\bar{a}$ , симметричная с  $a$  относительно действительной оси, должна отображаться в точку, симметричную с центром окружности относительно самой окружности, т. е. в бесконечность. Следовательно, мы знаем также и полюс  $z = \bar{a}$  дробно-линейной функции  $L(z)$ . Поэтому  $L(z)$  имеет вид

$$\omega = L(z) = \frac{a(z-a)}{c(z-\bar{a})} = \lambda \frac{z-a}{z-\bar{a}}, \quad (4.7:1)$$

где  $\lambda$  — комплексное число, отличное от нуля.

Покажем, что найденная функция отображает полуплоскость на круг  $|\omega| < |\lambda|$  так, что точка  $\alpha$  переходит в центр круга  $\omega = 0$ . Последнее условие, очевидно, удовлетворяется для функции (4.7:1) при любом  $\lambda$ . Остается проверить, что действительная ось переходит при этом в окружность радиуса  $|\lambda|$  с центром в начале координат. В самом деле, если  $z = x$  произвольное действительное число, то числа  $x - \alpha$  и  $x - \bar{\alpha}$  — комплексно сопряженные, и, следовательно,

$$|\omega| = |L(x)| = \left| \lambda \frac{x - \alpha}{x - \bar{\alpha}} \right| = |\lambda| \left| \frac{x - \alpha}{x - \bar{\alpha}} \right| = |\lambda|.$$

Мы получили, что образы всех точек действительной оси лежат на окружности  $|\omega| = |\lambda|$ , откуда, в силу кругового свойства, и вытекает, что образ действительной оси есть эта окружность.

Чтобы получить отображение полуплоскости на круг радиуса  $R$ , следует взять  $|\lambda| = R$ . Останется неопределенным еще аргумент числа  $\lambda$ . Геометрический смысл этой неопределенности вполне ясен. Переход в формуле (4.7:1) от одного значения  $\lambda$  к другому при неизменном модуле  $|\lambda| = R$  равносильен изменению аргументов всех точек на одну и ту же величину, т. е. повороту круга около своего центра  $\omega = 0$ . При таком повороте круг переходит сам в себя, центр его остается на месте, и условия задачи не нарушаются.

Если мы хотим, чтобы поставленная задача имела единственное решение, то нужно ввести дополнительное условие. Можно потребовать, например, чтобы:

а) заданная точка действительной оси  $x = x_0$  перешла в точку  $\omega = R$  окружности, или

б) производная  $L'(\alpha)$  была действительным положительным числом (это означает, геометрически, что касательные к кривым, проходящим через точку  $\alpha$ , не должны менять наклона в результате отображения).

Действительно, при условии а) получаем из (4.7:1):

$$R = L(x_0) = \lambda \frac{x_0 - \alpha}{x_0 - \bar{\alpha}},$$

откуда

$$\lambda = R \frac{x_0 - \alpha}{x_0 - \bar{\alpha}}$$

и

$$L(z) = R \frac{x_0 - \bar{\alpha}}{x_0 - \alpha} \cdot \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}} \quad (4.7:2)$$

Очевидно,

$$|\lambda| = R \left| \frac{x_0 - \bar{\alpha}}{x_0 - \alpha} \right| = R.$$

Пусть теперь  $\alpha = \xi + i\eta$ , где  $\eta > 0$ . Так как

$$L'(\alpha) = \frac{\lambda}{\alpha - \bar{\alpha}},$$

то при условии б) заключаем, что  $\frac{\lambda}{\alpha - \bar{\alpha}} = \frac{\lambda}{2\eta i}$ , а значит, и  $\frac{\lambda}{i}$  есть действительное положительное число. Но, с другой стороны, модуль  $|\lambda|$  должен равняться  $R$ . Поэтому  $\lambda = iR$  и

$$L(z) = iR \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}. \quad (4.7:3)$$

**Пример 2.** Отобразить конформно круг  $|z| < R$  самого на себя так, чтобы заданная точка  $z = \alpha$  этого круга перешла в его центр  $w = 0$ .

Искомая дробно-линейная функция  $L(z)$ , если она существует, обращается в нуль при  $z = \alpha$ :  $L(\alpha) = 0$ . Итак, мы знаем нуль  $z = \alpha$  функции  $L(z)$ . Но точка  $\alpha^*$ , симметричная с  $\alpha$  относительно окружности  $|z| = R$ , должна перейти в точку, симметричную с центром относительно той же окружности. Поэтому мы знаем и полюс  $z = \alpha^*$  функции  $L(z)$ . Следовательно, дробно-линейная функция  $L(z)$  должна иметь вид

$$w = L(z) = \lambda \frac{z - \alpha}{z - \alpha^*},$$

где  $\lambda$  — комплексное число, отличное от нуля. По формуле (4.6:2) точка  $\alpha^*$ , симметричная с точкой  $\alpha$ , относительно окружности  $|z| = R$ , есть

$$\alpha^* = \frac{R^2}{\bar{\alpha}}.$$

Поэтому

$$w = L(z) = -\lambda \bar{\alpha} \frac{z - \alpha}{R^2 - \bar{\alpha}z} = \mu \frac{z - \alpha}{R^2 - \bar{\alpha}z} \quad (4.7:4)$$

Покажем, что найденная функция отображает круг  $|z| < R$  на круг  $|w| < \frac{|\mu|}{R}$  так, что точка  $\alpha$  переходит в центр круга 0. Последнее, очевидно, имеет место для функции  $w = L(z)$  при любом  $\mu$ . Остается показать, что окружность  $|z| = R$  отображается посредством (4.7:4) на окружность  $|w| = \frac{|\mu|}{R}$ . Но действительно, пусть

$$z = Re^{i\theta} \quad (0 < \theta < 2\pi)$$

произвольная точка окружности  $|z| = R$ . Тогда для ее образа

$$w = L(Re^{i\theta}) = \mu \frac{Re^{i\theta} - \alpha}{R^2 - \bar{\alpha}Re^{i\theta}} = \frac{\mu}{Re^{i\theta}} \frac{Re^{i\theta} - \alpha}{Re^{-i\theta} - \bar{\alpha}}$$

имеем:

$$|w| = \left| \frac{\mu}{Re^{i\theta}} \right| \left| \frac{Re^{i\theta} - \alpha}{Re^{-i\theta} - \bar{\alpha}} \right| = \frac{|\mu|}{R}$$

(так как  $|e^{i\theta}| = 1$  и  $\left| \frac{Re^{i\theta} - \alpha}{Re^{-i\theta} - \bar{\alpha}} \right| = 1$ ), откуда и следует, что образом окружности  $|z| = R$  является окружность  $|w| = \frac{|\mu|}{R}$ .

Чтобы получить отображение круга радиуса  $R$  самого на себя, следует, очевидно, в формуле (4.7:4) взять  $|\mu| = R^2$ . Аргумент числа  $\mu$  продолжает оставаться неопределенным. Для того чтобы задача отображения имела единственное решение, можно наложить одно из следующих дополнительных условий:

а) заданная точка  $\alpha$  окружности  $|z| = R$  переходит в точку  $w = R$  той же окружности;

б) производная  $L'(\alpha)$  является действительным положительным числом.

Мы предоставляем читателю проверить, что в случае а)

$$L(z) = R \frac{R^2 - \bar{\alpha}\alpha}{\alpha - \bar{\alpha}} \frac{z - \alpha}{R^2 - \bar{\alpha}z}, \quad (4.7:5)$$

а в случае б)

$$L(z) = \frac{R^2(z - \alpha)}{R^2 - \bar{\alpha}z}. \quad (4.7:6)$$

4.8. Мы показали выше, что каждая функция вида

$$w = \Lambda(z) = \mu \frac{z - \alpha}{R^2 - \bar{\alpha}z} \quad (|\alpha| < R, |\mu| = R^2) \quad (4.8:1)$$

отображает круг  $K: |z| < R$  самого на себя. В частности, наряду с каждой функцией  $\Lambda(z) = \mu \frac{z - \alpha}{R^2 - \bar{\alpha}z}$  тем же свойством будет обладать и функция

$\bar{\mu} \frac{z - \bar{\alpha}}{R^2 - \alpha z}$ , которую мы условимся обозначать  $\bar{\Lambda}(z)$ . Очевидно,  $\overline{\Lambda(z)} = \bar{\Lambda}(\bar{z})$ .

Легко видеть, что, выбирая в формуле (4.8:1)  $\alpha$  и  $\mu$  всеми возможными способами при сохранении условий  $|\alpha| < R$ ,  $|\mu| = R^2$ , мы получим все возможные дробно-линейные отображения круга  $K$  самого на себя. Действительно, если  $w = L(z)$  — одно из них, то оно преобразует некоторую точку круга  $z = \alpha$  в его центр и, следовательно, по п.4.7 должно иметь вид (4.8:1).

Если  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  — два отображения круга  $K$  самого на себя, то их произведение  $\Lambda = \Lambda_1 \Lambda_2$  обладает тем же свойством; точно так же отображение, обратное какому-либо из преобразований (4.8:1), отображает круг  $K$  самого на себя, т. е. является преобразованием вида (4.8:1). Отсюда следует, что все возможные преобразования вида (4.8:1) (при фиксированном  $R > 0$ ) образуют группу. Обозначим ее через  $\Gamma$ ; она является подгруппой группы всех дробно-линейных отображений. Группа  $\Gamma$  допускает замечательную геометрическую интерпретацию, а именно, ее можно рассматривать как

группу движений плоскости в геометрии Лобачевского.

Будем называть внутренность круга  $K$  плоскостью Лобачевского, точки круга  $K$  — точками Лобачевского и дуги окружностей или отрезки прямых, принадлежащие  $K$  и ортогональные к окружности  $\Gamma: |z| = R$ , — прямыми Лобачевского, или, короче:  $L$ -плоскость,  $L$ -точки,  $L$ -прямые. Впрочем всюду в дальнейшем мы будем вместо  $L$ -точка говорить просто: точка. Эти наименования оправдываются тем, что между внутренностью круга, его точками и указанными дугами окружностей или отрезками прямых в геометрии Евклида выполняются те же соотношения, что и между плоскостью, ее точками и прямыми — в геометрии Лобачевского. Прежде всего в  $L$ -плоскости справедливы следующие предложения (аксиомы Гильберта \*)):

Аксиомы соединения:

I<sub>1</sub>. Для каждых двух точек  $A$  и  $B$  всегда существует  $L$ -прямая, проходящая через  $A$  и  $B$ .

I<sub>2</sub>. Для двух точек  $A$  и  $B$  существует не более одной  $L$ -прямой, проходящей через  $A$  и  $B$ .

I<sub>3</sub>. На каждой  $L$ -прямой существуют по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной  $L$ -прямой.

Аксиомы порядка:

II<sub>1</sub>. Если  $A$ ,  $B$  и  $C$  точки одной  $L$ -прямой и  $B$  лежит между  $A$  и  $C$ , то  $B$  лежит также между  $C$  и  $A$ .

II<sub>2</sub>. Если  $A$  и  $C$  — точки одной  $L$ -прямой, то существует по меньшей мере одна точка  $B$  такая, что  $C$  лежит между  $A$  и  $B$ .

II<sub>3</sub>. Среди любых трех точек  $L$ -прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.

II<sub>4</sub>. Пусть  $A$ ,  $B$  и  $C$  — три не лежащие на одной  $L$ -прямой точки и  $a$  —  $L$ -прямая, не проходящая ни через одну из точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ; если при этом она проходит через точку отрезка  $AB$ , то она непременно проходит и через точку отрезка  $AC$  или же через точку отрезка  $BC$ .

Чтобы доказать справедливость аксиом I<sub>1</sub> и I<sub>2</sub> \*\*), допустим сначала, что одна из данных точек, например  $A$ , совпадает с центром круга  $K$ . Тогда диаметр круга, проходящий через точку  $B$ , и будет  $A$ -прямой, удовлетворяющей условию I<sub>1</sub>. Пусть, вопреки аксиоме I<sub>2</sub>, существует еще одна  $L$ -прямая, проходящая через точки  $A$  и  $B$ . Она должна быть дугой окружности, ортогональной к  $\Gamma$ , и, следовательно, радиусы  $\Gamma$ , проведенные к концам этой дуги, должны быть касательными к ней. Но это невозможно, так как каждый из радиусов имеет по две различных общих точки с дугой (точку  $A$  и один из концов дуги). Пусть теперь ни одна из точек  $A$  и  $B$  не совпадает с центром круга. Тогда, выполнив преобразование вида (4.8 1), где  $\alpha$  есть аффикс  $A$ , сведем вопрос к только что рассмотренному случаю, а затем, посредством обратного преобразования, получим единственную  $L$ -прямую, проходящую через заданные точки (образ диаметра единичной окружности при последнем преобразовании). Проверку справедливости остальных аксиом предоставляем читателю.

\*) См. Д. Г и л ь б е р т, Основания геометрии, М. — Л., Гостехиздат, 1948.

\*\*) Нас не должно смущать, конечно, то обстоятельство, что мы доказываем аксиомы. Для нас все они являются лишь некоторыми теоремами геометрии Евклида, относящимися к внутренности круга, его точкам и принадлежащим этому кругу, отрезкам прямых и дугам окружностей; доказывая их, мы имеем право использовать все известные нам предложения и понятия геометрии Евклида.

Назовем движением Лобачевского — коротко  $L$ -движением — любое дробно-линейное отображение вида (4.8 1), т. е. дробно-линейное отображение круга  $K$  самого на себя. Каждое  $L$ -движение отображает  $L$ -плоскость взаимно однозначно само на себя так, что точки переходят в точки, а  $L$ -прямые — в  $L$ -прямые (здесь мы опираемся на круговое свойство и на конформность дробно-линейного отображения).

Рассмотрим некоторое множество  $E$  точек  $L$ -плоскости и множество  $\bar{E}$  точек, симметричных с ним относительно действительной оси. Если  $F$  — еще одно множество точек  $L$ -плоскости, то мы назовем множество  $E$  конгруэнтным множеству  $F$  в смысле Лобачевского — коротко:  $L$ -конгруэнтным — тогда и только тогда, когда существует некоторое  $L$ -движение  $L$ , преобразующее  $F$  в  $E$ , или в  $\bar{E}$ , так что  $L(F) = E$  или  $L(F) = \bar{E}$ .

Из определения  $L$ -конгруэнтности следует, что каждое множество  $E$   $L$ -конгруэнтно самому себе, а также симметричному с ним относительно действительной оси множеству  $\bar{E}$ . Кроме того, из определения следует, что если  $E$   $L$ -конгруэнтно  $F$ , то и  $F$   $L$ -конгруэнтно  $E$ . В самом деле, если  $L(F) = E$ , то  $F = L^{-1}(E)$ , а если  $L(F) = \bar{E}$ , то  $F = L^{-1}(\bar{E}) = \overline{L^{-1}(E)}$ . Пусть, наконец,  $E$   $L$ -конгруэнтно  $F$ , а  $F$   $L$ -конгруэнтно  $G$ ; покажем, что тогда  $E$   $L$ -конгруэнтно  $G$ . Действительно, предположим сначала, что  $F = \Lambda(G)$  и  $E = L(F)$  или  $\bar{E} = L(F)$ . В первом случае будем иметь  $E = L\Lambda(G)$ , а во втором случае  $\bar{E} = L\Lambda(G)$ ; и в том и другом случае получаем, по определению, что  $E$   $L$ -конгруэнтно  $G$ .

Пусть теперь  $\bar{F} = \Lambda(G)$ ; тогда, если  $E = L(F)$ , то  $\bar{E} = \bar{L}(\bar{F}) = \bar{L}\Lambda(G)$ , а если  $\bar{E} = L(F)$ , то  $E = \bar{L}(\bar{F}) = \bar{L}\Lambda(G)$ . Мы снова получаем, что  $E$   $L$ -конгруэнтно  $G$ .

Итак, введенное здесь понятие  $L$ -конгруэнтности обладает всеми свойствами эквивалентности, а именно рефлексивностью (каждое множество  $L$ -конгруэнтно самому себе), симметрией (если  $E$   $L$ -конгруэнтно  $F$ , то и  $F$   $L$ -конгруэнтно  $E$ ) и транзитивностью (если  $E$   $L$ -конгруэнтно  $F$ , а  $F$   $L$ -конгруэнтно  $G$ , то  $E$   $L$ -конгруэнтно  $G$ ). Обозначим отношение конгруэнтности между  $E$  и  $F$  знаком  $\equiv$ . Тогда будем иметь: 1)  $E \equiv E$ ; 2) если  $E \equiv F$ , то  $F \equiv E$ ; 3) если  $E \equiv F$  и  $F \equiv G$ , то  $E \equiv G$ .

Теперь можно формулировать и доказывать справедливость следующих предложений:

Аксиомы конгруэнтности:

III<sub>1</sub>. Если  $A$  и  $B$  — две точки на  $L$ -прямой  $a$  и  $A'$  — точка на той же или на другой  $L$ -прямой  $a'$ , то всегда можно найти по данную от точки  $A'$  сторону прямой  $a'$  одну и только одну точку  $B'$ , такую, что отрезок  $A'B'$   $L$ -конгруэнтен  $AB$ .

III<sub>2</sub>. Если  $AB \equiv A'B'$  и  $AB \equiv A''B''$ , то  $A'B' \equiv A''B''$ .

III<sub>3</sub>. Пусть  $AB$  и  $BC$  — два отрезка  $L$ -прямой  $a$  без общих внутренних точек; далее, пусть  $A'B'$  и  $B'C'$  — два отрезка этой же или другой  $L$ -прямой  $a'$  также без общих внутренних точек. Если при этом  $AB \equiv A'B'$  и  $BC \equiv B'C'$ , то и  $AC \equiv A'C'$ .

Прежде чем формулировать две остальные аксиомы конгруэнтности, докажем справедливость только что перечисленных аксиом.

Обращаясь к доказательству аксиомы III<sub>1</sub>, обозначим через  $C$  один из концов изображающей  $L$ -прямую  $a$  дуги окружности (или отрезка прямой). По п. 4.7 можно отобразить круг  $K$  сам на себя так, что точка  $A$  перейдет в центр  $O$  круга  $K$ , а точка  $C$  — в точку  $R$  окружности  $\Gamma$  этого круга (рис. 25). В результате получим  $L$ -движение  $L$ , преобразующее  $a$  в  $L$ -прямую  $d$ , изображаемую диаметром круга  $K$ , лежащим на действительной оси, причем  $L$ -полупрямая  $AC$  перейдет в  $L$ -полупрямую  $OR$ .



Если  $AC$  содержала отрезок  $AB$ , то образ  $B_1 = L(B)$  точки  $B$  будет лежать на  $OR$ . На  $L$ -прямой  $a'$  мы отметим ту полупрямую  $A'C'$ , которая расположена по заданную сторону от  $A'$ . Пусть  $L'$  —  $L$ -движение, преобразующее  $a'$  в  $d$  и  $A'C'$  в  $OR$  и  $B'$  — точка  $L$ -прямой  $a'$  такая, что  $L'(B') = B_1$ . Тогда, очевидно,  $L$ -отрезок  $A'B'$  лежит на  $a'$  по заданную сторону от  $A'$  и  $L$ -движение  $L^{-1}L'$  преобразует  $a'$  в  $a$  и отрезок  $A'B'$  в  $AB$ .

Нужно показать еще, что  $B'$  — единственная точка, удовлетворяющая условиям аксиомы. Но действительно, если допустить, что имеется еще точка

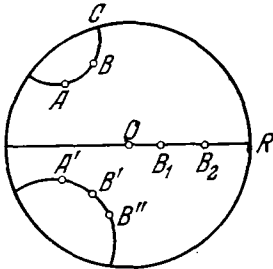


Рис. 25.

$B''$ , лежащая на полупрямой  $A'C'$  и такая, что отрезок  $A'B''$  конгруентен  $AB$ , то и на полупрямой  $OR$  найдется точка  $B_2 \neq B_1$  ( $B_2 = L'(B'')$ ) такая, что  $OB_2 \equiv OB_1$ . Отсюда, по определению, следует, что существует  $L$ -движение  $\Lambda$  такое, что  $OB_2 = \Lambda(OB_1)$ . (Рассмотрение множества  $\overline{OB_2}$ , симметричного с  $OB_2$  относительно действительной оси, здесь излишне, так как  $\overline{OB_2}$  совпадает с  $OB_2$ .) Это означает, что  $w = \Lambda(z)$  есть отображение круга  $K$  самого на себя такое, что при этом прямой линейный отрезок  $OB_1$  отображается на  $OB_2$ , и, следовательно, диаметр, расположенный на действительной оси, отображается сам на себя. А priori, имеются две возможности:

1) точка  $O$  переходит в  $O$  и  $B_1$  в  $B_2$ ; тогда [по формуле (4.8; 1), где  $\alpha = 0$ ]  $\Lambda(z)$  должно иметь вид

$$w = \Lambda(z) = \frac{\mu}{R^2} z,$$

и так как  $|\mu| = R^2$ , то  $|w| = |z|$ ; но это противоречит тому, что  $B_1$  переходит в  $B_2$  ( $|B_1| \neq |B_2|$ );

2) точка  $B_1$  переходит в  $O$  и  $O$  в  $B_2$ , тогда

$$w = \Lambda(z) = \mu \cdot \frac{z - B_1}{R^2 - \overline{B_1}z} \quad (\alpha = B_1), \quad B_2 = \Lambda(0) = -\frac{\mu B_1}{R^2},$$

откуда  $|B_2| = \frac{|\mu|}{R^2} |B_1| = |B_1|$ , что снова противоречит условию  $|B_2| \neq |B_1|$ .

Итак, отрицание единственности точки  $B'$  в условиях аксиомы  $III_1$  приводит к противоречию. Основное содержание аксиомы установлено.

Аксиома  $III_2$  непосредственно следует из свойств симметрии и транзитивности  $L$ -конгруентности.

Обратимся к аксиоме  $III_3$ . Посредством некоторого  $L$ -движения  $L$  преобразуем  $a$  в  $d$  так, чтобы точка  $B$  попала в центр круга  $B_1 = O$ , а точка  $C$  расположилась на положительной части действительной оси. Тогда, в силу условия аксиомы, точка  $A$  расположится на отрицательной части действительной оси. Пусть  $A$  и  $C$  преобразуются при этом в  $A_1$  и  $C_1$  (рис. 26). Если мы рассмотрим аналогичное  $L$ -движение, построенное, отправляясь от  $L$ -прямой  $a'$ , то получим точку  $A_2$  на отрицательной части действительной оси,  $B_2 = O$  и  $C_2$  на положительной части действительной оси.

Из того, что  $AB \equiv A'B'$ ,  $AB \equiv A_1B_1$  и  $A'B' \equiv A_2B_2$ , будет следовать тогда, что  $A_1B_1 \equiv A_2B_2$ , т. е.  $A_1O \equiv A_2O$ , и, аналогично, что  $C_1O \equiv C_2O$ .

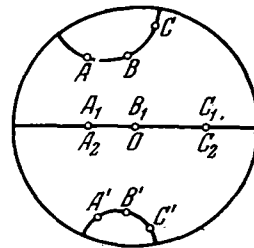


Рис. 26.

Но  $A_1$  и  $A_2$  лежат на  $d$  по одну сторону от  $O$ . Поэтому из  $A_1O \equiv A_2O$  следует, что  $A_1 = A_2$ ; аналогично получаем, что  $C_1 = C_2$  и, следовательно,  $A_1C_1 \equiv A_2C_2$ . Отсюда, наконец, с помощью свойства транзитивности для  $L$ -конгруентности, получаем, что  $AC \equiv A'C'$ , что и требовалось доказать.

Введем понятие  $L$ -угла (как геометрической фигуры).  $L$ -углом будем называть совокупность двух  $L$ -полупрямых  $h$  и  $k$ , выходящих из одной точки  $A$  и принадлежащих разным  $L$ -прямым. Угол обозначается через  $\widehat{h, k}$  или  $\widehat{k, h}$ ; точка  $A$  называется вершиной, а  $h$  и  $k$  — сторонами  $L$ -угла (рис. 27).

Очевидно, стороны  $L$ -угла делят  $L$ -плоскость на две области такие, что любую пару точек, принадлежащую одной из областей, можно соединить отрезком  $L$ -прямой, не пересекающим сторон угла (выпуклая область), тогда как существуют пары точек, принадлежащие другой области, для которых подобное соединение невозможно (невыпуклая область). Проще всего убедиться в сказанном, переводя точку  $A$  некоторым  $L$ -движением в  $O$ , благодаря чему полупрямые  $h$  и  $k$  перейдут в радиусы окружности. Первую из указанных областей назовем внутренностью, а вторую — внешностью  $L$ -угла. Убедимся в справедливости следующих плоскостных аксиом конгруентности (аксиомы, рассмотренные выше, называются линейными).

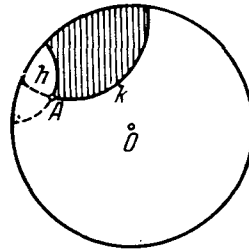


Рис. 27.

III<sub>4</sub>. Пусть даны  $L$ -угол  $\widehat{h, k}$ ,  $L$ -прямая  $a'$  и ее  $L$ -полупрямая  $h'$ , выходящая из некоторой точки  $A$  этой  $L$ -прямой. Тогда по данную сторону от  $a'$  существует одна и только одна выходящая из  $A$

$L$ -полупрямая  $k'$  такая, что угол  $\widehat{h', k'}$  конгруентен углу  $\widehat{h, k}$ . Каждый угол конгруентен самому себе, т. е.  $\widehat{h, k} \equiv \widehat{h, k}$  и также  $\widehat{h, k} \equiv \widehat{k, h}$ .

Формулировка этой аксиомы и проверка ее справедливости подобны аксиоме III<sub>1</sub>. Только при доказательстве единственности  $L$ -полупрямой  $k'$  приходится теперь опираться на сохранение величины (меры) угла при  $L$ -движении. На основании этого очевидно, что два  $L$ -угла  $\widehat{h', k'}$  и  $\widehat{h'', k''}$  с общей вершиной  $A$  и общей стороной  $h'$ , для которых  $k'$  и  $k''$  лежат по одну сторону от  $a'$  и представляют различные  $L$ -полупрямые, не могут быть  $L$ -конгруентными.

Рассмотрим, наконец, три отрезка  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$ , принадлежащих различным  $L$ -прямым. Эти отрезки образуют  $L$ -треугольник, для которого точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  служат вершинами, а  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  — сторонами. Если  $h$  и  $k$  — полупрямые, исходящие из  $A$  и содержащие стороны  $AB$  и  $AC$ , то угол  $(\widehat{h, k})$  называется углом треугольника  $ABC$ , заключенным между сторонами  $AB$  и  $AC$  или, против лежащим стороне  $BC$ . Внутри него лежат все внутренние точки треугольника  $ABC$ ; он обозначается  $\widehat{BAC}$  или  $\widehat{A}$ .

III<sub>5</sub>. Если в треугольниках  $ABC$  и  $A'B'C'$   $AB \equiv A'B'$ ,  $AC \equiv A'C'$  и  $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$ , то  $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$  и  $\widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}$ .

Для проверки этой последней аксиомы конгруентности сдвинем треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$  так, чтобы вершины  $A$  и  $A'$  попали бы в точку  $z = O$ , а стороны  $AB$  и  $A'B'$  совместились с одним и тем же отрезком прямой  $OR$ . Тогда стороны  $AB$ ,  $A'B'$ ,  $AC$  и  $A'C'$  изобразятся отрезками радиусов, исходящими из общей вершины  $O$  ( $A$  и  $A'$ ). Если  $AC$  и  $A'C'$  будут, при этом лежать по одну сторону от диаметра  $d$  окружности, несущего отрезок  $AB =$

$= A'B'$ , то, в силу конгруентности углов  $\widehat{BAC}$  и  $\widehat{B'A'C'}$ ,  $AC$  и  $A'C'$  должны лежать на одной и той же  $\mathcal{L}$ -полупрямой, выходящей из  $O$ . Поэтому точки  $C$  и  $C'$  совпадут (ибо  $AC \equiv A'C'$ ) и, вследствие совпадения точек  $A$  и  $A'$  и  $C$  и  $C'$ , совпадут и стороны  $AC$  и  $A'C'$ , а также  $BC$  и  $B'C'$ , откуда и будет следовать конгруентность углов  $\widehat{ABC}$  и  $\widehat{A'B'C'}$  и  $\widehat{BCA}$  и  $\widehat{B'C'A'}$  (а вместе с тем и конгруентность самих треугольников). Если же  $AC$  и  $A'C'$  будут лежать по разные стороны от диаметра  $d$ , то посредством преобразования симметрии относительно этого диаметра мы придем к уже рассмотренному случаю.

Введем теперь понятие величины угла и длины отрезка. Понятия эти, которые мы обозначим общим термином «мера», должны удовлетворять следующим условиям:

I. Мера должна быть числом неотрицательным.

II. Мера не должна меняться при  $\mathcal{L}$ -движениях, т. е. конгруентным углам или отрезкам должны соответствовать одинаковые меры.

III. Мера должна обладать свойством аддитивности в том смысле, что мера отрезка  $AC$  должна равняться сумме мер  $AB$  и  $BC$  для любой внутренней точки  $B$  этого отрезка и мера угла  $(\widehat{h, k})$  должна равняться сумме мер углов  $(\widehat{h, l})$  и  $(\widehat{l, k})$  для любой полупрямой  $l$ , исходящей из вершины угла и заключающейся внутри угла.

Особенно просто решается вопрос о мере углов. В качестве меры  $\mathcal{L}$ -угла  $(\widehat{h, k})$  мы принимаем евклидову меру угла между дугами окружностей, представляющими  $h$  и  $k$ . Очевидно, условия I и III будут при этом выполнены; что касается условия II, то оно также выполняется в силу сохранения величин углов при  $\mathcal{L}$ -движениях.

Перейдем теперь к мере отрезков. Евклидова длина дуги окружности, представляющей отрезок  $AB$ , также удовлетворяет условиям I и III. Однако она не удовлетворяет условию II, ибо  $\mathcal{L}$ -движения (за исключением поворота около точки  $O$  и преобразования симметрии относительно диаметра) изменяют евклидову длину. Чтобы найти меру, удовлетворяющую всем трем условиям, воспользуемся инвариантностью при  $\mathcal{L}$ -движениях двойного отношения четырех точек, лежащих на любой евклидовой прямой или окружности.

Пусть  $a$  и  $b$  — аффиксы концов отрезка  $AB$  и пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — аффиксы концов дуги окружности, несущей этот отрезок. Выберем обозначения для двух последних точек так, чтобы четыре точки:  $\alpha, \beta, a$  и  $b$  расположились на дуге окружности в порядке  $\alpha, a, b$  и  $\beta$ . При  $\mathcal{L}$ -движении точки  $\alpha, a, b$  и  $\beta$  перейдут в новые точки:  $\alpha', a', b'$  и  $\beta'$ , причем точки  $\alpha'$  и  $\beta'$  останутся на окружности, и взаимный порядок точек  $\alpha', a', b'$  и  $\beta'$  на дуге, в которую перейдет первоначальная дуга, не нарушится. Не изменится также и двой-

ное отношение  $(\alpha, \beta, b, a) = \frac{b-a}{b-\beta} \cdot \frac{a-\alpha}{a-\beta}$ . Покажем, что оно является положительным числом, большим единицы. Для этого совместим, посредством некоторого  $\mathcal{L}$ -движения,  $\mathcal{L}$ -прямую, несущую отрезок  $AB$ , с диаметром  $d$ , расположенным на действительной оси так, чтобы точка  $a$  перешла в точку  $O$ . Пусть при этом точка  $\alpha$  перейдет в  $R$ , тогда  $\beta$  перейдет в  $-R$  и точка  $b$  — в точку  $b'$  такую, что  $0 > b' > -R$  (последнее обстоятельство вытекает из сохранения взаимного расположения точек  $\mathcal{L}$ -прямой при  $\mathcal{L}$ -движении).

Получим  $(\alpha, \beta, b, a) = (R, -R, b', 0) = \frac{b'-R}{b'+R} \cdot \frac{0-R}{0+R} = \frac{R-b'}{R+b'} > 1$ , что

и требовалось доказать. Таким образом, двойное отношение  $(\alpha, \beta, b, a)$  в качестве меры отрезка  $AB$  обладает свойствами I и II. Легко видеть, однако, что оно не обладает свойством аддитивности III. Действительно, для точки  $C$

с аффиксом  $c$ , принадлежащей  $AB$ , имеем:

$$(\alpha, \beta, c, a) = \frac{c-a}{c-\beta} : \frac{a-a}{a-\beta}, \quad (\alpha, \beta, b, c) = \frac{b-a}{b-\beta} : \frac{c-a}{c-\beta}$$

и, следовательно,

$$(\alpha, \beta, b, a) = \frac{b-a}{b-\beta} \cdot \frac{a-a}{a-\beta} = \left( \frac{c-a}{c-\beta} : \frac{a-a}{a-\beta} \right) \left( \frac{b-a}{b-\beta} : \frac{c-a}{c-\beta} \right) =$$

$$= (\alpha, \beta, c, a) \cdot (\alpha, \beta, b, c),$$

т. е. двойное отношение  $(\alpha, \beta, b, a)$  равно не сумме двойных отношений  $(\alpha, \beta, c, a)$  и  $(\alpha, \beta, b, c)$ , а их произведению (которое, вообще говоря не равно сумме).

Но теперь ясно, что мы удовлетворим всем предъявляемым к мере требованиям, если возьмем в качестве длины отрезка логарифм двойного отношения:  $\ln(\alpha, \beta, b, a)$ . Действительно, так как  $(\alpha, \beta, b, a) > 1$ , то  $\ln(\alpha, \beta, b, a) > 0$ . Далее,  $\ln(\alpha, \beta, b, a)$  не изменяется при  $L$ -движениях, ибо это верно для  $(\alpha, \beta, b, a)$ . Наконец, для всякой точки  $C$ , принадлежащей отрезку  $AB$ , имеем:

$$\ln(\alpha, \beta, b, a) = \ln(\alpha, \beta, c, a) + \ln(\alpha, \beta, b, c).$$

Заметим, что при нашем определении  $L$ -длины отрезка  $AB$  (или, что то же самое,  $L$ -расстояния точек  $A$  и  $B$ ) точки окружности можно рассматривать как бесконечно удаленные точки  $L$ -плоскости. Действительно, фиксируя на  $L$ -прямой точку  $A(a)$ , заставим  $B(b)$  неограниченно приближаться к  $\beta$  (или, фиксируя  $B$ , заставим  $A$  неограниченно приближаться к  $\alpha$ ).

Тогда двойное отношение  $(\alpha, \beta, b, a) = \frac{b-a}{b-\beta} \cdot \frac{a-a}{a-\beta}$  будет неограниченно возрастать и, следовательно,  $L$ -длина отрезка  $AB$ :  $\ln(\alpha, \beta, b, a)$  будет стремиться к  $+\infty$ .

Продолжая проверку справедливости системы аксиом Гильберта для нашей модели геометрии Лобачевского, мы опустим пока IV группу аксиом (аксиома параллельности), перейдя сразу к последней, V группе — а к с и о м н е п р е р ы в н о с т и.

$V_1$  (а к с и о м а А р х и м е д а). Пусть  $A_1$  — произвольная точка на  $L$ -прямой, лежащая между произвольно данными точками  $A$  и  $B$ ; строим точки  $A_2, A_3, A_4, \dots$  так, что точка  $A_1$  лежит между  $A$  и  $A_2$ ,  $A_2$  — между  $A_1$  и  $A_3$ ,  $A_3$  — между  $A_2$  и  $A_4$  и т. д. и сверх того отрезки  $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$  конгруэнтны между собой; тогда в ряде точек  $A_2, A_3, A_4, \dots$  всегда существует такая точка  $A_n$ , что точка  $B$  лежит между  $A$  и  $A_n$ .

Чтобы убедиться в справедливости этой аксиомы, достаточно заметить, что длина отрезка  $AA_n$  равна, в силу свойств II и III меры, произведению длины отрезка  $AA_1$  на  $n$ . Следовательно, длина отрезка  $AA_n$  неограниченно возрастает вместе с  $n$  и точка  $A_n$  стремится к одному из концов дуги, изображающей  $L$ -прямую. Так как точка  $B$  лежит между  $A$  и этим концом, то, начиная с некоторого  $n$ , она будет лежать между  $A$  и  $A_n$ .

В качестве второй аксиомы непрерывности мы вместо гильбертовой аксиомы полноты возьмем аксиому непрерывности Кантора.

$V_2$ . Если на  $L$ -прямой существуют две последовательности точек  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  и  $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$  таких, что  $B_q$  лежит между  $A_p$  и  $B_{q-1}$ , а  $A_p$  — между  $B_q$  и  $A_{p-1}$ , каковы бы ни были  $p$  и  $q$ , то на этой  $L$ -прямой существует по крайней мере одна точка  $C$ , лежащая между  $A_p$  и  $B_q$  при любых  $p$  и  $q$ .

Рассматривая это предложение как теорему евклидовой геометрии, выражающую свойство дуги окружности, изображающей нашу  $L$ -прямую, мы немедленно убеждаемся в его справедливости.

До сих пор мы обнаруживали полное сходство двух геометрий: геометрии Евклида и геометрии Лобачевского. Это сходство выражалось в том, что все аксиомы соединения (относящиеся к геометрии на плоскости), порядка конгруэнтности и непрерывности одинаково формулируются в этих геометриях. Отсюда следует, что все теоремы евклидовой геометрии, доказательство которых основывается на указанных аксиомах, справедливы также и в геометрии

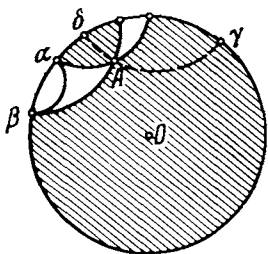


Рис. 28.

Лобачевского. Разница двух геометрий проявляется лишь при рассмотрении аксиомы IV группы евклидовой геометрии, а именно а к с и о м ы п а р а л л е л ь н о с т и. Она не имеет места в геометрии Лобачевского. Здесь через каждую точку  $A$   $L$ -плоскости, не лежащую на заданной  $L$ -прямой  $a$ , можно провести бесконечное множество различных  $L$ -прямых, не имеющих общих точек с  $a$ . Это предложение становится ясным при одном взгляде на рис. 28. Здесь через точку  $A$  проведены две дуги  $A\alpha$  и  $A\beta$ , ортогональные к окружности  $\Gamma$  и имеющие по одному общему концу с дугой  $\alpha\beta$ , изображающей  $L$ -прямую  $a$ . Дуги  $A\alpha$  и  $A\beta$  изображают  $L$ -прямые, не имеющие общих точек с  $L$ -прямой  $a$  (напомним читателю, что, по определению, точками  $L$ -плоскости являются только точки, лежащие внутри окружности  $\Gamma$ ). Эти две  $L$ -прямые называются  $L$ -параллелями к  $a$ , проведенными через точку  $A$ . Они имеют с  $a$  по одной общей бесконечно удаленной точке ( $\alpha$  и  $\beta$ , соответственно). Очевидно, всякая  $L$ -прямая, проходящая через  $A$  и заключенная в угле между  $L$ -параллелями, не имеет общих точек с  $a$ , не только конечных, но и бесконечно удаленных. Последние  $L$ -прямые не носят названия  $L$ -параллелей.

Из указанного факта вытекает ряд важных следствий. Докажем прежде всего следующую теорему: *сумма углов  $L$ -треугольника меньше  $\pi$* . Пусть  $ABC$   $L$ -треугольник, с углами  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Применим к нему  $L$ -движение, переводящее вершину  $A$  в центр  $z = O$  круга. Тогда этот  $L$ -треугольник примет вид, указанный на рис. 29. Очевидно, дуга  $B'C'$ , изображающая  $L$ -прямую, на которой расположена сторона  $BC$   $L$ -треугольника, будет обращена выпуклостью к вершине  $A$ . Действительно, эта точка является точкой пересечения касательных к дуге  $B'BCC'$ , проведенных в точках  $B'$  и  $C'$ , и, следовательно, лежит вне окружности, которой принадлежит дуга  $B'BCC'$ . Соединяя  $B$  и  $C$  отрезком прямой (евклидовой), мы получим евклидов треугольник  $ABC$ , сумма углов которого  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$  равна  $\pi$ . Но  $\alpha = \hat{A}$ ,  $\beta < \hat{B}$  и  $\gamma < \hat{C}$ ; поэтому  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ , что и требовалось доказать.

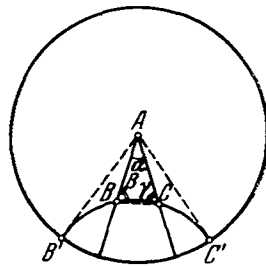


Рис. 29.

Докажем еще одну теорему, которой нет в евклидовой геометрии: *два  $L$ -треугольника с равными углами  $L$ -конгруэнтны*.

Пусть  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  — треугольники с равными углами, т. е. пусть  $\alpha = \alpha_1$ ,  $\beta = \beta_1$  и  $\gamma = \gamma_1$ . Подвергнем каждый из этих треугольников  $L$ -движению, переводящему точки  $A$  и  $A_1$  в точку  $O$ , а стороны  $AB$  и  $A_1B_1$  в отрезки одного и того же радиуса  $h$  окружности  $\Gamma$  (конечно, эти движения будут различными). Если при этом стороны  $AC$  и  $A_1C_1$  не попадут на один и тот же радиус окружности, то в силу равенства углов  $\alpha$  и  $\alpha_1$  они расположатся на радиусах, симметричных относительно  $h$ . Поэтому, применяя к одному из треугольников преобразование симметрии относительно  $h$ , мы совместим

радиусы, на которых лежат стороны  $AC$  и  $A_1C_1$ . Если при этом треугольники не совпадут, то мы встретимся с одной из двух возможностей, указанных на рис. 30.

В случае а) стороны  $BC$  и  $B_1C_1$  пересекаются в некоторой точке  $D$ , благодаря чему образуются два  $\mathcal{L}$ -треугольника:  $BDB_1$  и  $CDC_1$  (если  $D$

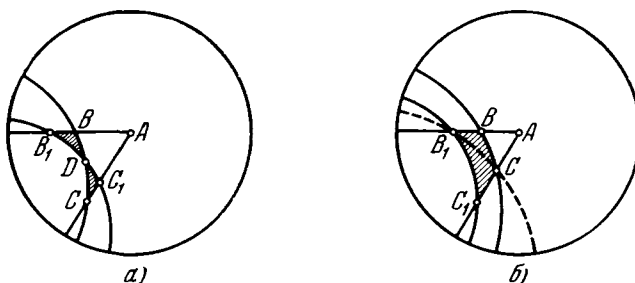


Рис. 30.

совпадает с  $B$  и  $B_1$  или с  $C$  и  $C_1$ , то один из последних  $\mathcal{L}$ -треугольников вырождается в точку). Подсчитывая углы  $\mathcal{L}$ -треугольника  $BDB_1$ , будем иметь, например, для случая, изображенного на чертеже а):

$$\hat{B}_1 = \beta_1, \quad \hat{B} = \pi - \beta \quad \text{и} \quad \hat{D} > 0.$$

Поэтому

$$\hat{B}_1 + \hat{B} + \hat{D} = \pi + \beta_1 - \beta + \hat{D} = \pi + D \quad (\text{ибо } \beta_1 = \beta).$$

Итак, мы пришли к выводу, что сумма углов  $\mathcal{L}$ -треугольника  $BDB_1$  больше  $\pi$ , что невозможно.

В случае б) углы  $\mathcal{L}$ -четырёхугольника  $BB_1CC_1$  суть:

$$\hat{B} = \pi - \beta, \quad \hat{B}_1 = \beta_1, \quad \hat{C} = \pi - \gamma \quad \text{и} \quad \hat{C}_1 = \gamma_1.$$

Поэтому

$$\hat{B} + \hat{B}_1 + \hat{C} + \hat{C}_1 = 2\pi + \beta_1 - \beta + \gamma_1 - \gamma = 2\pi.$$

Но сумму углов того же  $\mathcal{L}$ -четырёхугольника можно подсчитать, разбив его  $\mathcal{L}$ -диагональю  $B_1C$  на два  $\mathcal{L}$ -треугольника  $BCB_1$  и  $B_1CC_1$  и сложив суммы углов этих последних. Так как при этом должно получиться число, меньшее  $2\pi$ , то отсюда мы снова получаем противоречие.

Итак,  $\mathcal{L}$ -треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  в результате указанных  $\mathcal{L}$ -движений должны совпасть, т. е. они  $\mathcal{L}$ -конгруэнтны.

Для построения геометрии Лобачевского большое значение имеет так называемый угол параллельности. Пусть  $a$  —  $\mathcal{L}$ -прямая и  $A$  — точка вне ее. Проведем через  $A$  две  $\mathcal{L}$ -параллели к  $a$  и  $\mathcal{L}$ -прямую, перпендикулярную к  $a$  (рис. 31). Параллели образуют с этим перпендикуляром два угла при точке  $A$ . Эти углы и называются углами параллельности и зависят только от  $\mathcal{L}$ -расстояния точки  $A$  до  $\mathcal{L}$ -прямой  $a$  (это расстояние измеряется  $\mathcal{L}$ -длиной  $\delta$  перпендикуляра  $AB$ , опущенного из  $A$  на  $a$ ). Чтобы изучить угол параллельности в функции от  $\delta$ , — эта функция обозначается через  $\Pi(\delta)$ , — воспользуемся  $\mathcal{L}$ -движением, переводящим  $\mathcal{L}$ -прямую, перпендикулярную к  $a$ , в диаметр  $d$  так, что точка  $A$  переходит в точку  $A' = O$

(рис. 32). Тогда  $\mathcal{L}$ -параллели к  $a$  перейдут в радиусы окружности. Из симметрии чертежа обнаруживается равенство углов между  $\mathcal{L}$ -параллелями и перпендикуляром  $A'B'$ .

Обозначим через  $b'$  аффикс точки  $B'$  и пусть, для определенности,  $b' > 0$ . Тогда для  $\mathcal{L}$ -расстояния точки  $A'$  до прямой  $a'$  будем иметь:

$$\delta = \ln(-1, 1, b', 0) = \ln\left(\frac{b'+1}{b'-1} : \frac{0+1}{0-1}\right) = \ln \frac{1+b'}{1-b'},$$

откуда

$$\frac{1+b'}{1-b'} = e^\delta \quad b' = \frac{e^\delta - 1}{e^\delta + 1}$$

Проведем в точке  $\beta'$  касательную к единичной окружности до пересечения с действительной осью в точке  $C'$ .  $C'$  будет, очевидно, центром окружности, дуга которой изображает  $\mathcal{L}$ -прямую  $a'$ , а  $C'\beta' = \rho$  — ее радиусом.

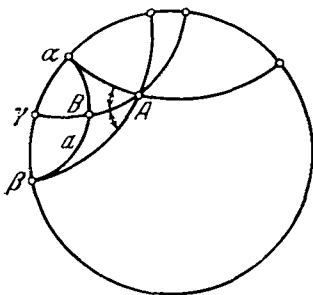


Рис. 31.

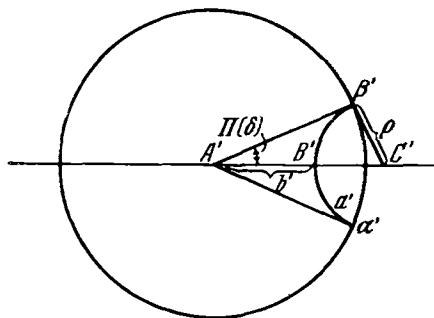


Рис. 32.

Так как  $A'\beta'$  есть отрезок касательной к этой окружности, то  $A'\beta'^2 = A'B'(A'B' + 2\rho)$ , т. е.

$$1 = b'(b' + 2\rho),$$

откуда

$$\rho = \frac{1-b'^2}{2b'} = \frac{1 - \left(\frac{e^\delta - 1}{e^\delta + 1}\right)^2}{2 \frac{e^\delta - 1}{e^\delta + 1}} = \frac{2e^\delta}{e^{2\delta} - 1} = \frac{1}{\frac{e^\delta - e^{-\delta}}{2}} = \frac{1}{\operatorname{sh} \delta},$$

где  $\operatorname{sh} \delta$  — гиперболический синус  $\delta$ . Окончательно из треугольника  $A'\beta'C'$  находим:

$$\Pi(\delta) = \arctg \frac{\beta'C'}{A'\beta'} = \arctg \frac{1}{\operatorname{sh} \delta}$$

Отсюда следует, что угол параллельности  $\Pi(\delta)$  заключается между 0 и  $\frac{\pi}{2}$

$$0 < \Pi(\delta) < \frac{\pi}{2},$$

причем  $\Pi(\delta) \rightarrow \frac{\pi}{2}$  по мере того, как  $\delta \rightarrow 0$  (ибо  $\operatorname{sh} \delta \rightarrow 0$ ,  $\frac{1}{\operatorname{sh} \delta} \rightarrow +\infty$  и, следовательно,  $\operatorname{arctg} \frac{1}{\operatorname{sh} \delta} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ), и  $\Pi(\delta) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow \infty$  (ибо  $\operatorname{sh} \delta \rightarrow \infty$ ,  $\frac{1}{\operatorname{sh} \delta} \rightarrow 0$  и  $\operatorname{arctg} \frac{1}{\operatorname{sh} \delta} \rightarrow 0$ ).

Формула, выведенная нами для  $\Pi(\delta)$ , лежит в основе всей тригонометрии Лобачевского.

Мы не будем развивать здесь далее геометрии Лобачевского, отсылая читателя к специальной литературе \*).

**4.9.** Из рациональных функций степени выше первой мы рассматривали в п. 3.3 функцию вида  $w = (z - a)^n$ , где  $n$  — натуральное число ( $n > 1$ ).

Остановимся еще на функции  $w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) = \lambda(z)$ , часто встречающейся при решении различных задач. Из-за тех приложений, которые Н. Е. Жуковский дал ей в аэромеханике (см. гл. V), ее называют функцией Жуковского.

Очевидно, это — функция второго порядка  $\left( w = \frac{z^2 + 1}{2z} \right)$ , удовлетворяющая условию  $\lambda(z) = \lambda\left(\frac{1}{z}\right)$ . Отсюда следует, что каждая точка плоскости  $w$  при отображении  $w = \lambda(z)$  имеет два (не более, чем два) прообраза  $z_1$  и  $z_2$ , связанных соотношением  $z_1 z_2 = 1$ . Если один из них принадлежит внутренности единичного круга, то другой принадлежит ее внешности и обратно. Следовательно, множества значений  $w = \lambda(z)$ , принимаемых во внутренности или во внешности единичного круга, должны быть одинаковыми. Покажем, что функция  $w = \lambda(z)$ , будучи непрерывной (в обобщенном смысле слова) в замкнутой области  $|z| \leq 1$  (или  $|z| \geq 1$ ) и принимая в различных точках области  $|z| < 1$  (или  $|z| > 1$ ) различные значения, отображает область  $|z| < 1$  (или  $|z| > 1$ ) взаимно однозначно и непрерывно также на некоторую область  $G$  плоскости  $w$ . Для определения границы  $\Gamma$  последней нужно найти образ единичной окружности  $\gamma: |z| = 1$ . Но если  $z = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , то  $w = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \cos t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ), т. е. образом единичной окружности  $\gamma$  является отрезок действительной оси, пробегаемый дважды. Поэтому можно ожидать, что область  $G$  образована всеми точками плоскости  $w$ , за исключением тех, которые принадлежат отрезку действительной оси  $\Gamma: -1 \leq x \leq 1$ .

\*) Н. И. Лобачевский, Три сочинения по геометрии. Геометрические исследования по теории параллельных линий, М., Гостехиздат, 1956. См. также Н. В. Ефимов, Высшая геометрия, изд. 4, 1961, гл. III и VI.



Чтобы доказать эти утверждения исследуем данное отображение подробнее; с этой целью рассмотрим (рис. 33) образы окружностей  $|z| = r$  и радиусов  $\text{Arg } z = \alpha + 2k\pi$ . При этом мы

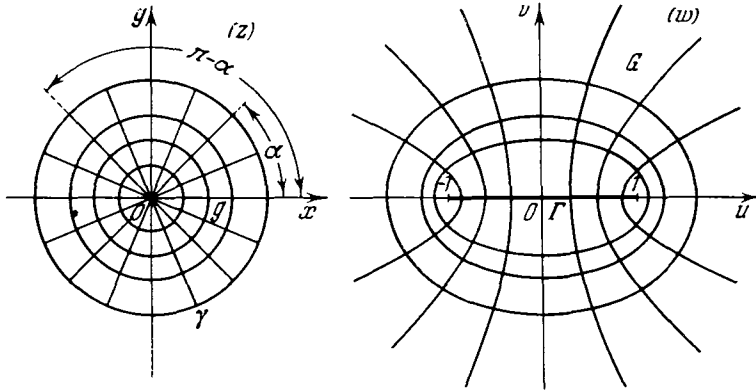


Рис. 33.

можем ограничиться, например, внутренностью единичного круга  $|z| < 1$ .

Положим,

$$z = re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (0 < r < 1);$$

тогда

$$w = \frac{1}{2} \left[ re^{it} + \frac{1}{r} e^{-it} \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + r \right) \cos t - i \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} - r \right) \sin t$$

или

$$u = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + r \right) \cos t, \quad v = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} - r \right) \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi). \quad (4.9:1)$$

Отсюда, исключая параметр  $t$ , получаем:

$$\frac{u^2}{\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + r \right) \right]^2} + \frac{v^2}{\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} - r \right) \right]^2} = 1. \quad (4.9:2)$$

Это — уравнение эллипса с полуосями  $a = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + r \right)$  и  $b = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} - r \right)$  и фокусами  $\pm 1$ . Из формулы (4.9:1) следует, что когда  $t$  непрерывно возрастает от 0 до  $2\pi$  (т. е. точка  $z$  описывает однократно в положительном направлении всю окружность  $|z| = r$ ), соответствующая точка описывает однократно в отрицательном направлении весь эллипс (4.9:2). В самом деле, при

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $u$  положительно и убывает от  $a$  до 0, а  $v$  отрицательно и убывает от 0 до  $-b$ ; при  $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ ,  $u$  продолжает убывать от 0 до  $-a$ , а  $v$  возрастает от  $-b$  до 0; при  $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$ ,  $u$  возрастает от  $-a$  до 0, а  $v$  возрастает от 0 до  $b$ ; наконец, при  $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$ ,  $u$  возрастает от 0 до  $a$ , а  $v$  убывает от  $b$  до 0.

Меняя радиус  $r$  окружности  $|z|=r$  от 0 до 1, мы заставим  $a$  убывать от  $\infty$  до 1 и  $b$  убывать от  $\infty$  до 0; соответствующие эллипсы пробегут всю совокупность эллипсов плоскости  $w$  с фокусами  $\pm 1$ . Уже отсюда следует, что  $w=\lambda(z)$  отображает единичный круг взаимно однозначно на область  $G$ , представляющую внешность отрезка  $\Gamma$ . При этом образом центра единичного круга является бесконечно удаленная точка, а образом единичной окружности — (дважды пробегаемый) отрезок  $\Gamma$ .

Для образа радиуса  $z=te^{i\alpha}$ ,  $0 \leq t < 1$  получаем сначала уравнение

$$w = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} + t \right) \cos \alpha - i \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} - t \right) \sin \alpha,$$

или

$$u = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} + t \right) \cos \alpha, \quad v = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} - t \right) \sin \alpha \quad (0 \leq t < 1). \quad (4.9:3)$$

Отсюда видно, что образы двух радиусов, симметричных относительно действительной оси (если один из них соответствует углу  $\alpha$ , то другой соответствует углу  $-\alpha$ ), также симметричны относительно действительной оси, а образы двух радиусов, симметричных относительно мнимой оси (если один из них соответствует углу  $\alpha$ , то другой соответствует углу  $\pi - \alpha$ ), симметричны относительно мнимой оси. Поэтому достаточно рассмотреть лишь образы радиусов, принадлежащих, например, первому квадранту:  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ .

Заметим, что при  $\alpha=0$  имеем:

$$u = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} + t \right), \quad v = 0 \quad (0 \leq t < 1).$$

Это — бесконечный полуинтервал действительной оси:  $1 < u \leq \infty$ . Симметричный с ним интервал  $-\infty \leq u < -1$  является образом радиуса, соответствующего  $\alpha = \pi$ .

При  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  имеем:

$$u = 0, \quad v = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} - t \right) \quad (0 \leq t < 1).$$

Это — мнимая полуось:  $-\infty \leq v < 0$ . Другая мнимая полуось  $0 < v \leq \infty$  является образом радиуса, соответствующего  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ .

Итак, образом «горизонтального» диаметра единичной окружности является бесконечный интервал действительной оси, идущий от точки  $-1$  к точке  $+1$  через  $\infty$ , а образом «вертикального» диаметра является вся мнимая ось, за исключением начала координат (и с включением бесконечно удаленной точки).

Пусть теперь  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Тогда, исключая из уравнений (4.9:3) параметр  $t$ , получаем:

$$\frac{u^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{v^2}{\sin^2 \alpha} = 1. \quad (4.9:4)$$

Это — уравнение гиперболы с действительной полуосью  $a = \cos \alpha$ , мнимой полуосью  $b = \sin \alpha$  и с фокусами  $\pm 1$ . Однако точка  $w$  не описывает этой гиперболы полностью, когда точка  $z$  описывает весь радиус  $z = te^{i\alpha}$  ( $0 \leq t < 1$ ). Действительно, из уравнений (4.9:3) следует, что при возрастании  $t$  от 0 до 1  $u$  убывает от  $\infty$  до  $\cos \alpha$ , а  $v$  возрастает от  $-\infty$  до 0. Следовательно, точка описывает однократно лишь четвертую часть всей гиперболы, принадлежащую четвертому квадранту. В силу замеченного выше, четверть, принадлежащая первому квадранту, т. е. симметричная с данной относительно действительной оси, будет образом радиуса, симметричного с данным радиусом относительно действительной оси, т. е. радиуса, соответствующего углу  $-\alpha$ . Но было бы неправильно сказать, что вся ветвь гиперболы, проходящая в первом и четвертом квадрантах, является образом пары указанных радиусов. Действительно, вершина гиперболы  $u = a$ ,  $v = 0$  не принадлежит этому образу (не забудем, что наши радиусы берутся без их конечных точек, а вершина гиперболы есть образ каждой из этих точек:  $t = 1$ ).

Далее получаем, что образами радиусов, соответствующих углам  $\pi - \alpha$  и  $\alpha + \pi$  (или  $\alpha - \pi$ ), будут четверти той же гиперболы, расположенные в третьем и втором квадрантах.

Полная гипербола, за исключением своих двух вершин, является образом четверки радиусов:  $\pm \alpha$ ,  $\pi \pm \alpha$ . Заметим, что образом каждого из двух диаметров, составленных из этих радиусов, будет часть гиперболы, составленная из пары ее симметричных относительно начала координат четвертей, связанных между собой в бесконечно удаленной точке.

Итак, функция  $w = \lambda(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  отображает взаимно однозначно как внутренность, так и внешность единичного круга на внешность отрезка  $-1 \leq u \leq +1$  (действительной оси).

При этом окружности  $|z| = r$  отображаются на эллипсы с фокусами  $\pm 1$  и полуосями:  $\frac{1}{2} \left| \frac{1}{r} \pm r \right|$ , а пары диаметров,

симметричных относительно координатных осей (составленных из радиусов  $z = \pm re^{\pm i\alpha}$  ( $0 \leq r < 1$ )) отображаются на гиперболы с фокусами  $\pm 1$  и полюсами  $|\cos \alpha|$ ,  $|\sin \alpha|$ , с исключением вершин этих гипербол.

Так как производная нашей функции

$$\omega = \lambda'(z) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{z^2} \right)$$

отлична от нуля при  $z \neq \pm 1$ , то отображение является конформным во всех точках рассматриваемых областей (внутренность и внешность единичного круга). Отсюда следует, что гиперболы пересекают эллипсы под теми же углами, под которыми радиусы пересекают окружности, т. е. под прямыми. С этим выводом мы встречались раньше (п. 3.7).

Рассмотрим еще образы окружностей, проходящих через точки  $\pm 1$ . Из равенства

$$\omega = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) = \lambda(z)$$

получаем:

$$\omega - 1 = \frac{z^2 - 2z + 1}{2z} = \frac{(z-1)^2}{2z}, \quad \omega + 1 = \frac{z^2 + 2z + 1}{2z} = \frac{(z+1)^2}{2z},$$

откуда

$$\frac{\omega-1}{\omega+1} = \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^2$$

Легко видеть, что это уравнение эквивалентно заданному. Полагая  $\frac{z-1}{z+1} = z'$  и  $\frac{\omega-1}{\omega+1} = \omega'$ , найдем, что отображение  $\omega = \lambda(z)$  можно заменить следующими:

$$z' = \frac{z-1}{z+1}, \quad \omega' = z'^2 \quad \text{и} \quad \frac{\omega-1}{\omega+1} = \omega' \quad (4.9:5)$$

Первое из них переводит окружности, проходящие через точки  $\pm 1$ , в прямые, проходящие через начало координат, второе преобразует каждую из этих прямых в луч, выходящий из начала координат, и, наконец, последнее отображает каждый из этих лучей на дугу окружности, соединяющую точки  $\pm 1$ . Из формул (4.9:5) легко видеть, что если угол между окружностью и положительным направлением действительной оси в точке  $z = 1$  был равен  $\theta$ , то угол в точке  $\omega = 1$  между ее образом (дугой окружности) и положительным направлением действительной оси будет равен  $2\theta$  (рис. 34).

Итак, функция  $\omega = \lambda(z)$  отображает каждую окружность  $\gamma$ , проходящую через точки  $\pm 1$  и составляющую в точке 1 угол  $\theta$  с положительным направлением действительной оси, на дугу  $\delta$  окружности, проходящей через точки  $\pm 1$  и составляющей угол  $2\theta$

с положительным направлением действительной оси. Те же формулы (4.9:5) показывают, что при этом каждая из двух дуг  $\gamma$  с концами  $\pm 1$  в отдельности отображается на ту же дугу  $\delta$ .

Заметим, что внешность окружности  $\gamma$  при первом из отображений (4.9:5) преобразуется в полуплоскость, при втором из отображений (4.9:5) мы получаем область, ограниченную прямолинейным лучом, выходящим из начала координат, и, наконец, при третьем отображении — область, границей которой служит дуга  $\delta$ .

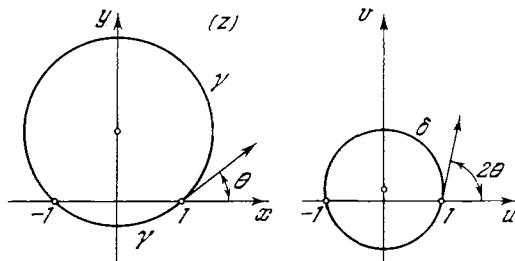


Рис. 34.

Так как все эти отображения являются взаимно однозначными в соответствующих областях, то и функция  $w = \lambda(z)$  дает взаимно однозначное конформное отображение внешности окружности  $\gamma$

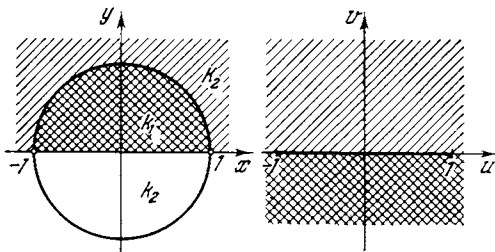


Рис. 35.

(а также и внутренности этой окружности) на область, границей которой является дуга окружности  $\delta$ , соединяющая точки  $\pm 1$ .

Полезно заметить, что функция  $w = \lambda(z)$  отображает полукруг  $k_1$   $|z| < 1$ , находящийся в верхней полуплоскости, на нижнюю полуплоскость  $w$ , а полукруг  $k_2$ , находящийся в нижней полуплоскости, — на верхнюю полуплоскость  $w$ . Но в силу соотношения  $\lambda(z) = \lambda\left(\frac{1}{z}\right)$  функция принимает в точках полукруга  $k_2$  те же значения, что и в точках верхней полуплоскости, внешних к полукругу  $k_1$ . Если мы обозначим множество последних точек через  $K_2$  (рис. 35), то можно будет утверждать, что образом области  $K_2$  также является

верхняя полуплоскость. Учтем, наконец, что образом полуокружности, разделяющей  $k_1$  и  $K_2$ , служит однократно пробегаемый интервал  $-1 < u < 1$ . Отсюда следует, что образ верхней полуплоскости при отображении  $w = \lambda(z)$  состоит из верхней и нижней полуплоскостей и из интервала действительной оси:  $-1 < u < 1$ , т. е. это есть вся плоскость, за исключением бесконечного отрезка действительной оси, соединяющего точки  $-1$  и  $+1$  через бесконечно удаленную точку.

В качестве приложений сделанных здесь замечаний мы предлагаем читателю изучить отображение полосы  $0 < x < \pi$  посредством функции  $w = \cos z$ , рассматривая это отображение, как совокупность последовательно выполненных одно за другим отображений:

$$z_1 = iz, \quad z_2 = e^{z_1}, \quad w = z_3 = \frac{1}{2} \left( z_2 + \frac{1}{z_2} \right)$$

В результате читатель должен будет получить, что  $w = \cos z$  отображает указанную полосу взаимно однозначно и конформно на область плоскости  $w$ , ограниченную бесконечным отрезком действительной оси, соединяющим точки  $-1$  и  $1$  через бесконечно удаленную точку.

**4.10.** Здесь мы остановимся коротко на простейших трансцендентных мероморфных функциях (т. е. мероморфных не рациональных функциях). К простейшим из них (если исключить целые функции) относятся, например, функции

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}.$$

Что они действительно являются не рациональными, сразу же следует из того, что каждая из этих функций имеет бесконечное множество полюсов, т. е. точек, в которых функция обращается в бесконечность, тогда как рациональная функция имеет лишь конечное число полюсов.

Указанные функции, так же как и целые функции  $\cos z$  и  $\sin z$ , входят в класс тригонометрических функций. Последний определяется как класс мероморфных функций  $f(z)$ , допускающих представление

$$w = f(z) = \frac{P(e^{iz})}{Q(e^{iz})} = \frac{a_0 + a_1 e^{iz} + a_2 e^{2iz} + \dots + a_n e^{niz}}{b_0 + b_1 e^{iz} + b_2 e^{2iz} + \dots + b_m e^{miz}}. \quad (4.10:1)$$

Очевидно, мы получим тот же самый класс, рассматривая функции, представимые в виде

$$F(z) = \frac{\sum_{j=0}^n a_j e^{ijz}}{\sum_{k=0}^m b_k e^{ikz}}. \quad (4.10:2)$$

Последнее выражение можно переписать так:

$$\begin{aligned}
 F(z) &= \frac{a_0 + \sum_1^n [(a_j + a_{-j}) \cos jz + i(a_j - a_{-j}) \sin jz]}{b_0 + \sum_1^m [(b_k + b_{-k}) \cos kz + i(b_k - b_{-k}) \sin kz]} = \\
 &= \frac{a_0 + \sum_1^n (A'_j \cos jz + A''_j \sin jz)}{b_0 + \sum_1^m (B'_k \cos kz + B''_k \sin kz)}. \quad (4.10:3)
 \end{aligned}$$

В частном случае, когда знаменатель есть постоянная (тогда  $b_0$  можно считать равным 1), получаем тригонометрический многочлен:

$$F(z) = a_0 + \sum_1^n (A'_j \cos jz + A''_j \sin jz).$$

Если по крайней мере одно из чисел  $A'_n$  или  $A''_n$  отлично от нуля, то говорят, что  $F(z)$  есть тригонометрический многочлен порядка  $n$ .

Вернемся к формуле (4.10:1) и положим  $e^{iz} = t$ ; тогда получим:

$$\omega = \frac{P(t)}{Q(t)} = S(t), \quad t = e^{iz},$$

т. е. произвольная тригонометрическая функция есть рациональная функция от показательной. Очевидно, каждая тригонометрическая функция является периодической, с периодом  $2\pi$ . Поэтому достаточно изучить ее поведение в какой-либо полосе  $g: x_0 \leq x < x_0 + 2\pi$ . В каждой из полос

$$g_k: x_0 + 2k\pi \leq x < x_0 + (2k+1)\pi$$

функция эта, в силу периодичности, будет иметь одно и то же поведение. Заставим  $z$  описывать полосу  $g$  (включая в нее прямую  $x = x_0$ ); тогда  $z_1 = iz$  опишет полосу  $x_0 \leq y_1 < x_0 + 2\pi$  той же ширины  $2\pi$ , параллельную действительной оси. Следовательно,  $t = e^{iz}$  опишет угол раствора  $2\pi$  с вершиной в начале координат. Стороны этого угла сливаются в одну полупрямую  $\text{Arg } t = x_0 + 2k\pi$ , которая также описывается точкой  $t$ , а именно, когда  $z$  описывает прямую  $\text{Re } z = x_0$ . В конечном счете  $t$  описывает всю плоскость, за исключением точек  $t = 0$  и  $t = \infty$ , когда  $z$  описывает полосу  $g$ .

Если  $N$  есть порядок рациональной функции  $\omega = S(t)$ , то она, как мы знаем из п. 4.1, принимает каждое свое значение, вообще говоря, в  $N$  точках расширенной плоскости  $t$ . Так как значения  $t = 0$  и  $t = \infty$  в нашем случае исключены, то можно утверждать

только, что  $w$  будет принимать все значения, за исключением, быть может, значений  $S(0)$  и  $S(\infty)$  при  $N$  значениях  $t$  (из которых некоторые могут быть равны между собой для специальных значений  $w$ ).

Но соответствие между  $t$  и  $z$  является взаимно однозначным в пределах полосы  $g$ ; поэтому тригонометрическая функция  $w = S(e^{iz})$  принимает каждое комплексное значение (за исключением, быть может, чисел  $S(0)$  и  $S(\infty)$ ) в  $N$  точках полосы  $g$ , а следовательно, и каждой вообще полосы  $g_k$ . Среди этих  $N$  точек могут иметься и совпадающие; но последнее возможно лишь для отдельных значений  $w$  (общим числом не более, чем  $n + m$ , где  $n$  и  $m$  — степени  $P(t)$  и  $Q(t)$ ; см. п. 4.1).

Из изложенного следует, что каждое уравнение вида

$$f(z) = S(e^{iz}) = A,$$

где  $f(z)$  — тригонометрическая функция ( $\neq \text{const}$ ) и  $A$  — какое-либо комплексное число, имеет бесконечное множество корней (по  $N$  корней в каждой полосе  $g_k$ ), за исключением, быть может, двух специальных значений  $A$ :  $A = S(0)$  и  $A = S(\infty)$ , для которых уравнение может не иметь ни одного корня.

Примеры.

$$1) \quad f(z) = e^{inz} = t^n, \quad t = e^{iz}.$$

Здесь  $S(t) = t^i$ ,  $S(0) = 0$ ,  $S(\infty) = \infty$  и функция  $S(t)$  не обращается ни в нуль, ни в  $\infty$  при  $t \neq 0$ ,  $t \neq \infty$ ; поэтому  $f(z)$  не обращается ни в нуль, ни в  $\infty$  ни при каком  $z$ .

$$2) \quad f(z) = \sec z = \frac{2e^{iz}}{1 + e^{2iz}} = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad t = e^{iz}.$$

Здесь  $S(t) = \frac{2t}{1 + t^2}$ ,  $S(0) = S(\infty) = 0$  и  $S(t)$  не обращается в 0 при  $t \neq 0$ ,  $t \neq \infty$ . Поэтому  $f(z) = \sec z$  не обращается в 0 ни при каком  $z$ .

$$3) \quad f(z) = \operatorname{tg} z = \frac{1}{i} \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = \frac{1}{i} \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad t = e^{iz}.$$

Здесь  $S(t) = \frac{1}{i} \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ ,  $S(0) = i$ ,  $S(\infty) = -i$  и  $S(t)$  не обращается ни в  $i$ , ни в  $-i$  при  $t \neq 0$ ,  $t \neq \infty$ . Поэтому  $f(z) = \operatorname{tg} z$  не обращается ни в  $i$ , ни в  $-i$  ни при каком  $z$ .

$$4) \quad f(z) = \frac{\cos z}{\cos 2z} = \frac{e^{3iz} + e^{iz}}{e^{4iz} + 1} = \frac{t^3 + t}{t^4 + 1}, \quad t = e^{iz}.$$

Здесь  $S(t) = \frac{t^3 + t}{t^4 + 1}$ ,  $S(0) = S(\infty) = 0$ . Однако  $S(t)$  обращается в нуль также и в точках, отличных от 0 и  $\infty$ , а именно при



$t = \pm i$ . Поэтому  $f(z) = \frac{\cos z}{\cos 2z}$  принимает все комплексные значения без исключения (и каждое из них в бесконечном множестве точек).

Рассмотрим подробнее функцию  $\operatorname{tg} z = \frac{1}{i} \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$  ( $t = e^{iz}$ ). На рисунке 36 представлена поверхность  $u = |\operatorname{tg} z|$ , т. е. рельеф тангенса\*). Чтобы изучить отображение  $w = \operatorname{tg} z$ , представим его

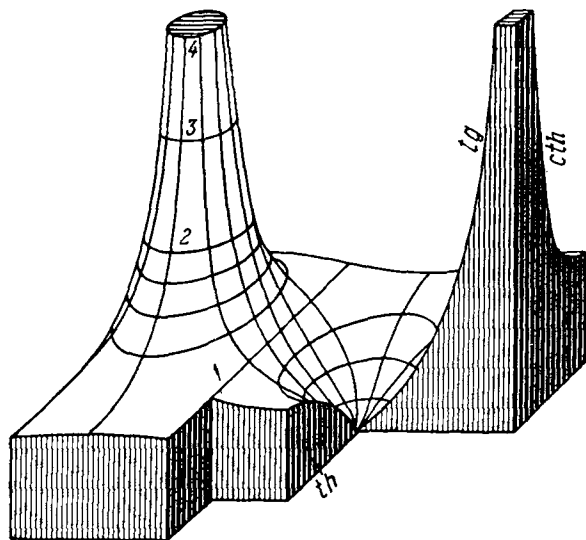


Рис. 36.

в виде следующих отображений, выполняемых последовательно одно за другим:

$$\zeta = iz, \quad t = e^\zeta, \quad t_1 = t^2, \quad w = t_2 = \frac{1}{i} \frac{t_1 - 1}{t_1 + 1}.$$

Если  $g$  есть полоса  $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ , где  $0 < h \leq \pi$ , то  $\zeta = iz$  отобразит ее на полосу  $x_0 \leq \eta \leq x_0 + h$ ,  $t = e^\zeta$  отобразит последнюю полосу на угол раствора  $h$  с вершиной в начале координат и со сторонами  $\operatorname{Arg} t = x_0 + 2k\pi$  и  $\operatorname{Arg} t = x_0 + h + 2n\pi$ ; далее, отображение  $t_1 = t^2$  даст нам угол раствора  $2h$  со сторонами  $\operatorname{Arg} t_1 = 2x_0 + 2k\pi$  и  $\operatorname{Arg} t_1 = 2x_0 + 2h + 2n\pi$  и, наконец,  $w = \frac{1}{i} \frac{t_1 - 1}{t_1 + 1}$ , как дробно-линейное отображение, преобразует стороны угла в дуги окружностей, соединяющих точки  $w = i$  ( $t_1 = 0$ ) и  $w = -i$  ( $t_1 = \infty$ ), а сам

\*) Чертеж заимствован из «Таблиц функций» Янке и Эмде.

угол — в круговую луночку (двухугольник) с теми же углами  $2h$ . Так как производная  $\left. \frac{d\omega}{dt_1} \right|_{t_1=0} = -2i$  и  $\text{Arg}(-2i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ , то касательные к кривым, выходящим из точки  $t_1=0$  поворачиваются при отображении  $\omega = \frac{1}{i} \frac{t_1-1}{t_1+1}$  на угол  $-\frac{\pi}{2}$ ; поэтому касательные к дугам окружностей, ограничивающих двухугольник,

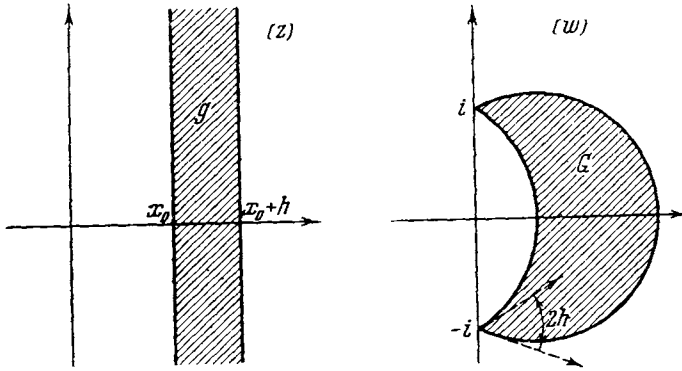


Рис. 37.

должны в точке  $\omega = i$  составлять углы  $2x_0 - \frac{\pi}{2}$  и  $2x_0 + 2h - \frac{\pi}{2}$  с положительным направлением действительной оси. Этими условиями двухугольник с вершинами  $i$  и  $-i$  вполне определен (рис. 37).

Каждое из отдельных рассмотренных нами отображений взаимно однозначно и конформно. Поэтому и результирующее отображение  $\omega = \text{tg } z$  взаимно однозначно и конформно отображает полосу  $x_0 \leq x = \text{Re } z \leq x_0 + h$  шириной  $h$  ( $h \leq \pi$ ) на круговой двухугольник с углами, равными  $2h$ , и с вершинами в точках  $-i$  и  $i$ .

В частности, при  $h = \frac{\pi}{2}$  углы двухугольника обращаются в  $\pi$ , а сам двухугольник — в круг или полуплоскость. Отсюда следует, что функция  $\omega = \text{tg } z$  отображает каждую полосу  $x_0 < x < x_0 + \frac{\pi}{2}$  шириной  $\frac{\pi}{2}$  на круг или полуплоскость.

## § 5. Элементарные многозначные функции

5.1. Изученные нами в предыдущих пунктах целые и мероморфные функции  $\omega = f(z)$  принимают одно и то же значение  $\omega$ , вообще, в нескольких (двух или более) точках плоскости  $z$ . Исключение составляет лишь дробно-линейная функция, дающая взаимно

однозначное отображение расширенной плоскости самое на себя. Если оставить в стороне это исключение, то во всех остальных случаях обратное отображение  $z = f^{-1}(w)$  неоднозначно. Это означает, что функции, обратные рассмотренным нами, являются многозначными.

Для того чтобы к многозначным функциям можно было применять понятия и результаты, полученные для однозначных функций, нужно уметь выделять однозначные ветви этих функций.

Вот каким образом это обычно достигается.

Пусть  $z = f(w)$  — функция определенная, однозначная и непрерывная (в обобщенном смысле) в области  $G$  расширенной плоскости. Предположим, что область  $G$  удалось разбить каким-либо способом на конечное или счетное множество областей  $g_1, g_2, \dots$ , попарно не имеющих общих точек, так, что любая точка области  $G$  является внутренней для одной только области  $g_k$  или же общей граничной точкой по крайней мере для двух областей  $g_j$  и  $g_k$ , причем в каждой из этих областей отображение  $z = f(w)$  является взаимно однозначным. Тогда образ каждой  $g_k$  будет также областью  $f(g_k) = G_k$  (в гл. V это утверждение будет доказано при условии, что  $f(w)$  — аналитическая функция) и весь образ  $f(G)$  будет покрываться областями  $G_k$ , а также образами общих частей границ областей  $g_k$ .

Будем рассматривать обратную функцию  $w = F(z)$  в каждой из областей  $G_k$ , определяя ее тем дополнительным условием, что ее значения принадлежат  $g_k$  — прообразу области  $G_k$ . Тогда функция  $F(z)$ , вообще многозначная, представится посредством нескольких, быть может, бесконечно многих, однозначных и непрерывных (в обобщенном смысле) функций  $F_k(z)$ . Каждую из них мы будем называть *однозначной ветвью* функции  $F(z)$  в соответствующей области  $G_k$ . При этом определении важно помнить, что характер областей  $G_k$ , а вместе с тем и однозначных ветвей функции  $F_k(z)$ , существенно зависит от того, как именно область  $G$  разбита на области  $g_k$ . В простейших случаях область  $G$  допускает такое разбиение на области  $g_k$ , при котором соответствующие области  $G_k$  совпадают между собой. Пусть, например,  $G_{k_1}, G_{k_2}, \dots$  совпадают с одной и той же областью  $G'$ . Тогда многозначная функция  $w = F(z)$  обладает многими, быть может, бесконечно многими однозначными ветвями в области  $G'$ , а именно:  $F_{k_1}(z), F_{k_2}(z), \dots$

Ко всему сказанному выше нужно прибавить, что для произвольной непрерывной функции  $z = f(w)$  разбиение области  $G$  на области  $g_k$ , удовлетворяющие указанным выше условиям, вообще говоря, невозможно. Однако для случая, когда  $f(w)$ , аналитическая в области  $G$  (за исключением изолированных точек, в которых она может обращаться в  $\infty$ ), мы покажем в п. 3.4 главы восьмой, что подобное разбиение всегда возможно и притом бесконечно многими способами.

Назовем функцию  $z = f(w)$ , аналитическую в некоторой области  $g$  (за исключением, быть может, точек, в которых она обращается в  $\infty$ ) и принимающую в различных точках области различные значения ( $f(w_1) \neq f(w_2)$ , если  $w_1 \neq w_2$  и  $w_1, w_2 \in g$ ), **однолистной** в области  $g$ . Если же в области существует по крайней мере одна пара различных точек, в которых  $f(w)$  принимает одно и то же значение:  $f(w_1) = f(w_2)$ ,  $w_1 \neq w_2$ , то мы назовем функцию **многолистной** в этой области.

Факт, на который мы сослались выше, можно формулировать так: если аналитическая функция  $z = f(w)$  многолистна в области  $G$ , то эту область можно разбить на конечное или счетное множество областей, в каждой из которых  $f(w)$  будет однолистной. Соответствующие области  $g_k$  называются **областями однолистности** функции  $f(w)$ .

Таким образом, к функциям, обратным по отношению к многолистным, всегда применим описанный выше способ выделения однозначных ветвей.

В этом разделе мы иллюстрируем указанный способ на элементарных функциях; нам не придется опираться на упомянутую, еще недоказанную теорему, так как разбиение области  $G$  на области однолистности будет получаться каждый раз путем использования известных свойств элементарных функций.

Помимо функций, обратных элементарным, мы будем рассматривать здесь и другие многозначные функции, получающиеся как сложные функции вида  $\varphi\psi(z)$  (где  $\varphi(z)$  или  $\psi(z)$  — функции, обратные элементарным), или как рациональные комбинации таких функций.

5.2. Рассмотрим радикал  $w = \sqrt[n]{z}$ , представляющий функцию, обратную по отношению к степенной функции  $z = w^n$  ( $n$  — натуральное число, большее, чем единица).

При каждом  $z$ , отличном от нуля и бесконечности, радикал имеет  $n$  различных значений, которые даются формулой

$$w = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\text{Arg } z}{n} + i \sin \frac{\text{Arg } z}{n} \right). \quad (5.2:1)$$

При  $z = 0$  или  $z = \infty$  получаем по одному значению функции соответственно  $w = 0$  или  $w = \infty$ .  $n$  значений (5.2:1), представляющих те точки плоскости  $w$ , в которых  $w^n$  принимает одно и то же значение  $z$ , располагаются в вершинах правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность  $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ .

Обратно: вершины любого правильного  $n$ -угольника с центром в начале координат можно рассматривать как  $n$  значений  $\sqrt[n]{z}$ . Поэтому область  $g$  плоскости  $w$  будет областью однолистности для

$z = w^n$  тогда и только тогда, когда из  $n$  вершин любого правильного многоугольника с центром  $w = 0$  она содержит не более, чем одну вершину.

Очевидно, этому условию удовлетворяет каждый угол раствора  $\frac{2\pi}{n}$  с вершиной в начале координат.

Проведем из начала координат  $n$  прямолинейных лучей под равными углами. Тогда найдем, что вся плоскость, в которой определена многостная функция  $z = w^n$ , разделится на  $n$  областей однолистности этой функции:  $g_1, g_2, \dots, g_n$ . Образом каждой из них будет одна и та же область  $G'$  плоскости  $z$ , границей которой является некоторый прямолинейный луч  $L$ , выходящий из начала. Если область  $g_k$  ограничена лучами, составляющими углы  $\varphi_0 + \frac{2k\pi}{n}$  и  $\varphi_0 + \frac{2(k+1)\pi}{n}$  с положительной частью действительной оси, то луч  $L$  составляет с положительной частью действительной оси угол  $n\varphi_0$ .

Сообразно со сказанным в п. 5.1, получим в области  $G'$   $n$  однозначных ветвей функции  $\sqrt[n]{z}$ . Каждая из них:  $\sqrt[n]{z}_k (k = 1, 2, \dots, n)$  вполне определяется условием, что ее значения  $w = \sqrt[n]{z}_k$  принадлежат области  $g_k$ . Так как  $z = w^n$  имеет отличную от нуля производную во всех точках области  $g_k$ :  $z' = nw^{n-1}$ , то и ветви  $\sqrt[n]{z}_k$  обладают отличными от нуля производными

$$\left(\sqrt[n]{z}_k\right)' = \frac{1}{nw^{n-1}} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{z}_k\right)^{n-1}}.$$

Возьмем теперь систему прямолинейных лучей, выходящих из начала координат, получающуюся из предыдущей путем поворота вокруг начала координат на угол  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < \frac{2\pi}{n}$ . Тогда новая система разделит плоскость  $w$  на  $n$  областей  $d_1, \dots, d_n$ , из которых каждая область  $d_k$  будет иметь общие части с двумя соседними областями  $g_k$  и  $g_{k+1}$  (если  $k = n$ , то  $g_{n+1}$  следует заменить на  $g_1$ ) (рис. 38).

Образом каждой из областей  $d_k$  плоскости  $w$  будет одна и та же область  $D'$ , ограниченная прямолинейным лучом  $M$ , выходящим из начала координат под углом  $n\varphi_0 + n\alpha$  к положительной части действительной оси. В этой области мы также получим  $n$  однозначных ветвей функции  $\sqrt[n]{z}$ , из которых каждая вполне определяется тем, что ее значения принадлежат соответствующей области  $d_k$ . Обозначим эти ветви через  $\left(\sqrt[n]{z}\right)_k$ . Они являются дифференцируемыми в  $D'$

и для их производных имеем:

$$(\sqrt[n]{z})'_k = 1 : n (\sqrt[n]{z})_k^{n-1}.$$

Сравним их с ветвями  $\sqrt[n]{z}$ ; так как часть прообраза  $d_k$  области  $D'$  в плоскости  $w$  принадлежит области  $g_k$ , а часть — области  $g_{k+1}$ , то ветвь  $(\sqrt[n]{z})_k$  в части области  $D'$ , представляющей образ общей части областей  $d_k$  и  $g_k$ , будет совпадать с  $\sqrt[n]{z}$ , а в другой части области  $D'$  (представляющей образ общей части областей  $d_k$  и  $g_{k+1}$ ) будет совпадать с  $\sqrt[n]{z}_{k+1}$ .

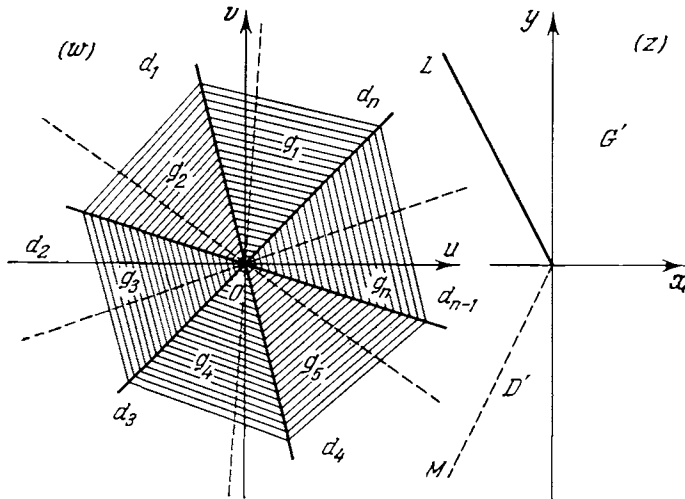


Рис. 38.

Мы видим, что при замене одних областей однолиственности другими каждая новая однозначная ветвь получается путем объединения части определения одной из прежних ветвей с частью определения другой прежней ветви.

Если угол поворота  $\alpha = 0$ , то  $d_k$  совпадает с  $g_k$ ,  $D'$  — с  $G'$  и каждая ветвь  $(\sqrt[n]{z})_k$  совпадает с  $\sqrt[n]{z}$ . Когда же угол  $\alpha$ , непрерывно увеличиваясь, приближается к  $\frac{2\pi}{n}$ , то область  $d_k$  приближается к  $g_{k+1}$ , соответствующая область  $D'$  приближается к  $G'$  и ветвь  $(\sqrt[n]{z})_k$  во все большей и большей части области  $D'$

совпадает с ветвью  $\sqrt[n]{z}_{k+1}$  (вместо  $g_{k+1}$  и  $\sqrt[n]{z}_{n+1}$  следует брать  $g_1$  и  $\sqrt[n]{z}_1$ ).

При  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$   $d_k$  совпадает с  $g_{k+1}$ ,  $D' - c G'$  и ветвь  $(\sqrt[n]{z})_k$  переходит в ветвь  $\sqrt[n]{z}_{k+1}$ .

За переходом одной ветви  $\sqrt[n]{z}_k$  в другую  $\sqrt[n]{z}_{k+1}$  можно проследить также, заставляя точку  $z$  описывать полный круг с центром в начале координат. Если значение  $\sqrt[n]{z}$  в точке  $z_0$  было взято принадлежащим ветви  $\sqrt[n]{z}_k$  и изображалось точкой  $w_0$  области  $g_k$ :

$$w_0 = \sqrt[n]{|z_0|} \left( \cos \frac{\varphi_0}{n} + i \sin \frac{\varphi_0}{n} \right),$$

то при непрерывном движении точки  $z$  по окружности  $|z| = |z_0|$  в положительном направлении соответствующее значение радикала

$$w = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right)$$

будет непрерывно изменяться вместе с  $\varphi$ , и после полного обхода и возвращения точки  $z$  в исходное положение  $z_0$  значение радикала перейдет в

$$w_1 = \sqrt[n]{|z_0|} \left( \cos \frac{\varphi_0 + 2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi_0 + 2\pi}{n} \right)$$

Последнее получается из  $w_0$  путем поворота вокруг начала координат на угол  $\frac{2\pi}{n}$ ; следовательно, точка  $w_1$  принадлежит области  $g_{k+1}$ , соседней с  $g_k$ , и  $w_1$  является значением ветви  $\sqrt[n]{z}_{k+1}$  в точке  $z_0$ .

Это заключение применимо к любой точке области  $G'$ , откуда следует, что в результате обхода точкой  $z$  окружности любого радиуса с центром в начале координат значения  $\sqrt[n]{z}$ , непрерывно изменяясь, переходят от ветви  $\sqrt[n]{z}_k$  к ветви  $\sqrt[n]{z}_{k+1}$ .

Понадобится  $n$ -кратный обход точки  $z$  в положительном направлении вокруг точки  $z=0$  для того, чтобы ветви радикала  $\sqrt[n]{z}$ , заменяясь одна на другую ( $\sqrt[n]{z}_k$  на  $\sqrt[n]{z}_{k+1}$ ,  $\sqrt[n]{z}_{k+1}$  на  $\sqrt[n]{z}_{k+2}$ , ...,  $\sqrt[n]{z}_n$  на  $\sqrt[n]{z}_1$ ,  $\sqrt[n]{z}_{k-1}$  на  $\sqrt[n]{z}_k$ ), вернулись к исходным ветвям.

Точка, обладающая тем свойством, что полный (однократный) обход вокруг нее в любой ее окрестности по какой-либо замкну-

той жордановой кривой заменяет одну непрерывно изменяющуюся ветвь многозначной функции другой ветвью этой функции, называется точкой разветвления функции.

То обстоятельство, что после  $n$ -кратного обхода в одном и том же направлении мы снова возвращаемся к исходной ветви, выражают, говоря, что данная точка разветвления обладает конечным порядком, а именно порядком  $n-1$ , и точку эту называют алгебраической точкой разветвления\*).

Итак, точка  $z=0$  есть алгебраическая точка разветвления порядка  $n-1$  для функции  $\sqrt[n]{z}$ .

Очевидно, точку  $z=\infty$  можно также рассматривать как алгебраическую точку разветвления порядка  $n-1$  функции  $\sqrt[n]{z}$ , так как каждый обход вокруг нее вдоль окружности сколь угодно большого радиуса с центром в начале координат является вместе с тем и обходом вокруг начала координат. Поэтому многозначная функция  $\omega = \sqrt[n]{z}$  имеет две точки разветвления в плоскости  $z$ :  $z=0$  и  $z=\infty$ , обе порядка  $n-1$ .

Описанные выше однозначные ветви этой функции строились для областей типа  $G'$  или  $D'$ , граница которых представляла прямолинейный луч, соединяющий обе точки разветвления. Более общий тип подобной области получится, если вместо прямолинейного луча провести произвольную жорданову кривую расширенной плоскости, соединяющую точки  $0$  и  $\infty$ . Пусть  $\Gamma$  — эта кривая и  $G$  — ограниченная ею область. Если  $z$  описывает  $\Gamma$  от начальной точки ( $0$ ) до конечной ( $\infty$ ), то соответствующие ей  $n$  точек  $\omega = \sqrt[n]{z}$  описывают  $n$  жордановых кривых  $\gamma_k$ , соединяющих точку  $0$  с точкой  $\infty$ . Эти кривые не имеют других общих точек, кроме  $0$  и  $\infty$ , и составляют попарно ( $\gamma_k$  с  $\gamma_{k+1}$ ) замкнутые жордановы кривые расширенной плоскости.

Пусть  $g'_k$  — та из двух областей, ограниченных кривыми  $\gamma_k$  и  $\gamma_{k+1}$ , которая не содержит кривых  $\gamma_1, \gamma_{k-1}, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_n$ . При повороте плоскости  $z$  вокруг начала координат на угол  $\frac{2\pi}{n}$ ,  $\gamma_k$  в силу построения переходит в  $\gamma_{k+1}$ ,  $\gamma_{k+1}$  — в  $\gamma_{k+2}$  и область  $g'_k$  переходит в область  $g'_{k+1}$ . Так как  $g'_k$  и  $g'_{k+1}$  не имеют общих точек, то ни одна из этих областей не содержит пары точек, которые переходили бы одна в другую в результате такого поворота. Поэтому все области  $g'_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) являются областями однолиственности для  $z=\omega^n$ , и мы получаем  $n$  однозначных ветвей функции  $\sqrt[n]{z}$  в области  $G$ , потребовав, чтобы значения каждой

---

\*) Последнее понятие предполагает еще, что в данной точке существует предел функции (конечный или бесконечный).



ветви принадлежали соответствующей области  $g'_k$ . Для фиксации одной ветви достаточно указать значение  $\sqrt[n]{z}$  в какой-либо точке  $z_0$  области  $G$ ; если это значение есть  $\omega_0$ , то найдется единственная область  $g_k$ , содержащая точку  $\omega_0$ , и вместе с тем и единственная ветвь  $\sqrt[n]{z}$  в области  $G$ , принимающая значение  $\omega_0$  в точке  $z_0$ . Именно таким путем и поступают обычно, когда хотят фиксировать определенную ветвь  $\sqrt[n]{z}$  в области типа  $G$ .

Пусть  $\sqrt[n]{z}_k$  и  $\sqrt[n]{z}_l$  — две ветви  $\sqrt[n]{z}$  в области  $G$  и их значения в некоторой точке  $z_0$  суть соответственно  $\omega'_0$  и  $\omega''_0$ . Так как

$$\begin{aligned}\omega'_0 &= \sqrt[n]{z}_k = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi_0 + 2m'\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi_0 + 2m'\pi}{n} \right), \\ \omega''_0 &= \sqrt[n]{z}_l = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi_0 + 2m''\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi_0 + 2m''\pi}{n} \right),\end{aligned}$$

где  $m'$  и  $m''$  — целые числа, то  $\omega''_0$  можно получить из  $\omega'_0$  путем умножения на

$$\eta = \cos \frac{2(m'' - m')\pi}{n} + i \sin \frac{2(m'' - m')\pi}{n},$$

т. е. на одно из значений  $\sqrt[n]{1}$ . Но, умножая функцию  $\sqrt[n]{z}_k$  на число  $\eta$ , мы, очевидно, получим однозначную и непрерывную в области  $G$  функцию  $\eta \sqrt[n]{z}_k$ , значения которой представляют  $\sqrt[n]{z}$  и принадлежат той же области, что и точка  $\eta \sqrt[n]{z}_0 = \sqrt[n]{z}_0$ .

Следовательно,  $\eta \sqrt[n]{z}_k = \sqrt[n]{z}_l$  во всей области  $G$ . Мы видим, что две ветви  $\sqrt[n]{z}$  в одной и той же области  $G$  могут быть получены одна из другой посредством умножения на некоторое значение  $\sqrt[n]{1}$ .

Все выводы этого пункта переносятся, с соответствующими очевидными изменениями, на функции несколько более общего вида:

$$\omega = \sqrt[n]{z-a} \quad \text{или} \quad \omega = \sqrt[n]{\frac{z-a}{z-b}}.$$

Рекомендуем читателю рассмотреть эти примеры, заметив, что функции эти являются обратными по отношению к функциям  $z = a + \omega^n$  или  $z = \frac{b\omega^n - a}{\omega^n - 1}$ , для которых области однолиственности те же, что и для функции  $z = \omega^n$ . При этом следует обнаружить,

что точки разветвления функции  $w = \sqrt[n]{z-a}$  суть  $a$  и  $\infty$ , а точки разветвления функции  $w = \sqrt[n]{\frac{z-a}{z-b}}$  суть  $a$  и  $b$  и что выделение однозначной ветви функции возможно во всякой области, граница которой есть жорданова дуга, соединяющая точки разветвления.

5.3. Для лучшего выяснения понятия точки разветвления рассмотрим многозначную функцию

$$w = f(z) = \sqrt[n]{P(z)}, \quad (5.3:1)$$

где  $P(z)$  — произвольный многочлен. Пусть  $N$  — степень этого многочлена,  $a_1, a_2, \dots, a_m$  — все различные его нули, а  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  — их кратности ( $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = N$ ). Тогда  $P(z)$  можно представить в виде

$$P(z) = A(z-a_1)^{\alpha_1} \dots (z-a_m)^{\alpha_m},$$

откуда

$$f(z) = \sqrt[n]{A(z-a_1)^{\alpha_1} \dots (z-a_m)^{\alpha_m}}. \quad (5.3:2)$$

Рассмотрим произвольную замкнутую жорданову кривую  $\gamma$  (например окружность), не проходящую ни через одну из точек  $a_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ). Заставим  $z$  однократно обойти эту кривую в определенном направлении. Фиксируем значения аргументов для  $z-a_1, \dots, z-a_m$  в какой-либо точке  $z_0$  на кривой  $\gamma$ . Пусть эти значения будут  $\varphi_1^{(0)}, \dots, \varphi_m^{(0)}$ . При обходе точкой  $z$  кривой  $\gamma$  угол  $\varphi_k$  между вектором  $z-a_k$  и положительным направлением действительной оси будет непрерывно изменяться, отправляясь от начального значения  $\varphi_k^{(0)}$ , и в результате однократного обхода кривой  $\gamma$  он либо вернется к прежнему значению  $\varphi_k^{(0)}$  (если точка  $a_k$  лежала во внешности  $\gamma$ ), либо приобретет приращение  $\pm 2\pi$  (если точка  $a_k$  лежала во внутренности  $\gamma_k$  \*) (рис. 39). При этом знак приращения  $+$  или  $-$  будет зависеть только от выбранного направления обхода кривой  $\gamma$ ; мы будем называть положительным

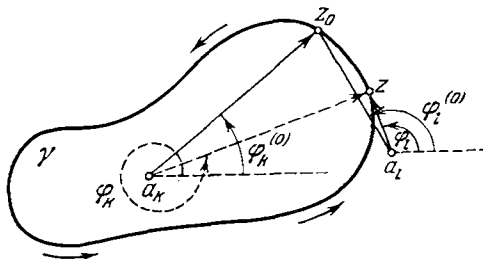


Рис. 39.

\*) Эти факты, легко проверяемые в простейших случаях (например, когда  $\gamma$  есть окружность, эллипс или многоугольник), могут быть доказаны в самом общем случае. См., например, П. С. А л е к с а н д р о в, Комбинаторная топология, глава II.

то направление, при котором соответствующие углы получают положительное приращение  $2\pi$ . Предположим для определенности, что точка  $z$  описывает  $\gamma$  в положительном направлении. Если ни одна из точек  $a_k$  не лежит внутри  $\gamma$ , то все углы  $\varphi_k$  вернуться в результате обхода к первоначальным значениям  $\varphi_k^{(0)}$ , а вместе с тем вернется к первоначальному значению и функция  $f(z)$  (5.3:2). Отсюда следует, что ни одна из конечных точек  $\zeta$  плоскости, отличных от  $a_k$ , не может быть точкой разветвления для этой функции. В самом деле, для такой точки можно указать окрестность, не содержащую ни одной точки  $a_k$ ; тогда обход любой замкнутой жордановой кривой  $\gamma$ , принадлежащей этой окрестности и содержащей внутри точку  $\zeta$ , будет сохранять избранную ветвь нашей функции.

Итак, никакая конечная точка  $\zeta$ , отличная от всех  $a_k$ , не является точкой разветвления для  $f(z)$ .

Рассмотрим теперь окрестность какой-нибудь точки  $a_k$ , настолько малую, чтобы в ней не содержались другие точки:  $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_m$ . Тогда при обходе кривой  $\gamma$ , принадлежащей этой окрестности и содержащей  $a_k$  внутри, угол  $\varphi_k$  изменится на  $2\pi$ , тогда как все углы  $\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_m$  вернуться к прежним значениям. Отсюда следует, что аргумент подкоренного выражения в формуле (5.3:2) в результате обхода кривой  $\gamma$  изменится на  $2\pi\alpha_k$ , а следовательно, радикал (5.3:2) приобретет множитель  $\cos \frac{2\pi\alpha_k}{n} + i \sin \frac{2\pi\alpha_k}{n}$ , который, очевидно, будет отличен от единицы тогда и только тогда, когда  $\alpha_k$  не является кратным  $n$ . Итак, каждый нуль  $a_k$  многочлена  $P(z)$ , кратность которого  $\alpha_k$  не есть число, кратное  $n$ , является точкой разветвления для функции  $\sqrt[n]{P(z)}$ . Чтобы определить порядок этой точки, предположим, что  $\delta_k$  ( $\delta_k < n$ ) есть наибольший общий делитель  $\alpha_k$  и  $n$ . Тогда, полагая  $\alpha_k = \delta_k \alpha'_k$  и  $n = \delta_k \cdot v_k$  ( $v_k > 1$ ), запишем двухчлен  $\cos \frac{2\pi\alpha_k}{n} +$

$$+ i \sin \frac{2\pi\alpha_k}{n} \text{ в виде } \cos \frac{2\pi\alpha'_k}{v_k} + i \sin \frac{2\pi\alpha'_k}{v_k}$$

В результате  $p$ -кратного обхода кривой  $\gamma$  в одном и том же направлении функция  $f(z)$  приобретет множитель  $\cos \frac{2\pi\alpha'_k p}{v_k} + i \sin \frac{2\pi\alpha'_k p}{v_k}$ , который, очевидно, будет равным единице тогда и только тогда, когда  $p$  кратно  $v_k$ . Наименьшее соответствующее значение  $p$  есть  $v_k$ . Отсюда следует, что порядок точки разветвления  $a_k$  есть  $v_k - 1$ .

Рассмотрим, наконец, окрестность бесконечно удаленной точки, не содержащую ни одну из точек  $a_k$ , и в этой окрестности жорданову кривую  $\gamma$ , содержащую внутри все точки  $a_k$ . Тогда внешность  $\gamma$  будет содержать точку  $\infty$  и не будет содержать

ни одной из точек  $a_k$ . Совершим однократный обход кривой  $\gamma$ . Все углы  $\varphi$  приобретут приращения  $2\pi$ , следовательно, аргумент подкоренного выражения в формуле (5.3:2) изменится на  $2\pi(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m)$  и вся функция  $f(z)$  приобретет множитель

$$\cos \frac{2\pi(\alpha_1 + \dots + \alpha_m)}{n} + i \sin \frac{2\pi(\alpha_1 + \dots + \alpha_m)}{n} = \cos \frac{2\pi N}{n} + i \sin \frac{2\pi N}{n}.$$

Он будет равен единице или отличен от единицы в зависимости от того, будет ли  $N$  кратным  $n$  или нет. В первом случае  $\infty$  не будет, а во втором будет точкой разветвления функции  $f(z)$ . Если при этом  $\delta$  есть наибольший общий делитель  $N$  и  $n$  ( $\delta \leq n$ ) и  $n = \delta v$ , то порядок бесконечно удаленной точки, рассматриваемой как точка разветвления, будет равняться  $v - 1$ .

Мы заметили, что в случае, когда  $\alpha_k$  кратно  $n$ , обход жордановой кривой  $\gamma$ , заключающей внутри точку  $a_k$  и не заключающей ни одной из остальных точек  $a_j$ , не изменяет значения  $f(z)$ . Точно так же не изменяет значений  $f(z)$  обход кривой  $\gamma$ , заключающей внутри все точки  $a_k$ , в случае, когда  $N$  кратно  $n$ .

Пусть, вообще,  $a_{k_1}, \dots, a_{k_q}$  — такая группа точек разветвления, для которой сумма  $\alpha_{k_1} + \dots + \alpha_{k_q}$  кратна  $n$ ; тогда обход любой замкнутой жордановой кривой  $\gamma$ , содержащей внутри указанные точки и не содержащей ни одной точки  $a_k$ , отличной от них, не сможет изменить значений  $f(z)$ . Поэтому во всякой области  $G$ , содержащей только такие замкнутые жордановы кривые, внутренности которых либо не включают ни одной точки разветвления  $a_k$ , либо включают группы точек разветвления, для которых суммы соответствующих чисел  $\alpha_k$  делятся на  $n$ , можно выделять однозначные ветви функции  $f(z)$ .

Для этого достаточно фиксировать значение  $\omega_0$  функции  $f(z)$  в одной из точек  $z_0$  этой области. Среди  $n$  образов  $f(G)$  области  $G$  в плоскости  $w$  один будет содержать точку  $\omega_0$ ; пусть этот образ есть  $g_k$ . Тогда однозначная ветвь функции  $f(z)$  в области  $G$  вполне определится тем требованием, что все ее значения принадлежат  $g_k$ . Значение этой ветви в любой точке  $z_1$  области  $G$  можно получить также следующим образом: соединим точку  $z_0$  с точкой  $z_1$  какой-нибудь непрерывной кривой  $\lambda$ , принадлежащей области  $G$ , и будем пробегать эту кривую от точки  $z_0$  до точки  $z_1$ , следя за тем, чтобы соответствующее значение  $f(z)$  непрерывно изменялось, начиная от значения  $\omega_0$ . Тогда мы придем в точку  $z_1$  с одним из  $n$  значений  $f(z)$ , которое обозначим через  $\omega_1$ . Это значение зависит только от значения  $\omega_0$ , выбранного в точке  $z_0$ , и от самой точки  $z_1$  и не зависит от выбора пути, соединяющего  $z_0$  и  $z_1$ , и, следовательно, представляет однозначную функцию от  $z_1$  в области  $G$ . В самом деле, если  $\gamma_2$  другая кривая, соединяющая  $z_0$  и  $z_1$  в области  $G$ , то при обходе замкнутой кривой  $\gamma$ , составленной из  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , мы получим сначала,

двигаясь от  $z_0$  до  $z_1$  вдоль  $\gamma_1$ , значение  $w_1$  в точке  $z_1$ , а затем, двигаясь вдоль  $\gamma_2$  — от точки  $z_1$  до  $z_0$ , должны вновь прийти к исходному значению  $w_0$  (так как обход замкнутой кривой в области  $G$ , по условию, не может привести к изменению значений функции  $f(z)$ ). Отсюда и следует, что, двигаясь вдоль  $\gamma_2$  от  $z_0$  к  $z_1$ , мы придем в точке  $z_1$  к тому же значению  $w_1$ , что и при движении вдоль  $\gamma_1$ .

Поясним все сказанное примерами:

1.  $w = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ , где  $0 < k < 1$ . Это — двухзначная функция с четырьмя точками разветвления:  $\pm 1, \pm \frac{1}{k}$ . Здесь  $N=4$  кратно  $n=2$  и поэтому  $\infty$  не является точкой разветвления.

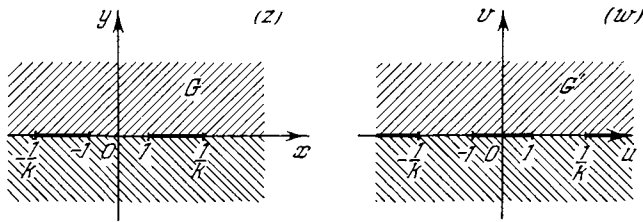


Рис. 40.

Так как все числа  $\alpha_k$  равны 1 ( $\pm 1, \pm \frac{1}{k}$  суть простые нули подкоренного выражения), то обход вдоль любой замкнутой кривой  $\gamma$ , заключающей внутри только две точки разветвления, не изменяет значения функции. Поэтому можно выделять ее однозначные ветви, например в области  $G$ , границей которой служат два отрезка:  $-\frac{1}{k} \leq x \leq -1$  и  $1 \leq x \leq \frac{1}{k}$ , или в области  $G'$  с границей, состоящей из отрезков:  $-1 \leq x \leq 1$  и бесконечного отрезка действительной оси, соединяющего точки  $-\frac{1}{k}$  и  $\frac{1}{k}$  через бесконечно удаленную точку (рис. 40).

В первой из них ветви  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  можно различать по тому значению, которое они принимают в начале координат. Например,  $f_1(0) = 1$  и  $f_2(0) = -1$ .

2.  $w = \sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}$ , где  $g_2$  и  $g_3$  — комплексные числа, удовлетворяющие условию  $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ , означающему, что дискриминант многочлена  $4z^3 - g_2z - g_3$  отличен от нуля, а следовательно, различны и нули  $l_1, l_2$  и  $l_3$  этого многочлена. Так как в этом примере  $N=3$  не делится на  $n=2$ , то точка  $\infty$  также является точкой разветвления. Снова обход какой-либо пары точек разветвления по замкнутой жордановой кривой не изменяет зна-

чения функции. Поэтому, соединяя жордановыми кривыми  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  точку  $l_1$  с  $l_2$  и  $l_3$  с  $\infty$ , мы получим область  $G$  с границей, состоящей из  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , в которой можно выделять однозначные ветви данной функции (рис. 41).

3. Рассмотрим функцию, обратную по отношению к функции  $z = \frac{1}{2} \left( \omega + \frac{1}{\omega} \right)$ , т. е.  $\omega = \varphi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ . Это — двузначная функция, обладающая теми же точками разветвления, что и функция  $\sqrt{z^2 - 1}$ , т. е.  $z = \pm 1$ .

Чтобы получить область  $G$ , в которой можно выделить однозначные ветви рассматриваемой функции, соединим точки  $-1$  и  $1$

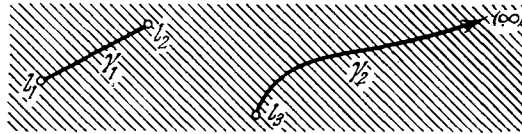


Рис. 41.

конечным отрезком действительной оси. Получим область, которая взаимно однозначно отображается посредством функции  $\omega = z + \sqrt{z^2 - 1}$  на каждую из двух областей: внутренность единичного круга ( $g_1$ ) и его внешность ( $g_2$ ) (см. п. 4.9). Выделить любую из них можно, фиксируя одно из двух значений  $\omega$  в какой-либо из точек области  $G$ , например в бесконечно удаленной точке. Как видно из формулы  $z = \frac{1}{2} \left( \omega + \frac{1}{\omega} \right)$ ,  $z$  обращается в  $\infty$  либо при  $\omega = 0$ , либо при  $\omega = \infty$ . Поэтому одна из ветвей функции  $\varphi(z)$  характеризуется тем, что для нее  $\varphi(\infty) = 0$ ; она отображает  $G$  на внутренность единичного круга. Другая же ветвь характеризуется тем, что для нее  $\varphi(\infty) = \infty$ ; она отображает область  $G$  на внешность единичного круга.

Мы могли бы вместо области  $G$  брать, например, область  $G'$ , границей которой служит бесконечный отрезок действительной оси, соединяющей точки  $-1$  и  $1$ , или области  $G''$  и  $G'''$ , границы которых суть верхние или нижние единичные полуокружности.

Мы предоставляем читателю, опираясь на результаты п. 4.9, выяснить, на какого рода области плоскости  $\omega$  отображают соответствующие однозначные ветви функции  $\varphi(z)$  области  $G'$ ,  $G''$  или  $G'''$ .

Все содержание настоящего пункта относилось к многозначной функции вида  $\sqrt[n]{P(z)}$ , где  $P(z)$  есть многочлен.

Читатель без труда распространит полученные результаты на случай более общей функции  $\sqrt[n]{R(z)}$ , где  $R(z)$  есть произвольная рациональная функция. Для нахождения точек разветвления функции  $\sqrt[n]{R(z)}$  придется рассматривать не только нули, но и полюсы рациональной функции  $R(z)$ .

5.4. Функция, обратная по отношению к

$$z = e^w = e^u (\cos v + i \sin v),$$

определена для любого  $z$ , отличного от 0 и  $\infty$ , и представляется формулой (см. формулу (3.5:2))

$$w = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Эта функция, очевидно, многозначная и даже бесконечнозначная, называется логарифмом и обозначается  $\operatorname{Ln} z$ .

Итак, по определению:

$$w = \operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z. \quad (5.4:1)$$

Если значение логарифма, равное  $\ln |z| + i \arg z$ , назвать главным значением и обозначить его  $\ln z$ , то для  $\operatorname{Ln} z$  будем иметь:

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i. \quad (5.4:2)$$

где  $k = 0, \pm 1, \pm 2,$

Отсюда следует, что *каждое комплексное число, отличное от нуля и бесконечности, имеет бесчисленное множество логарифмов* (т. е. значений логарифмической функции), из которых любые два различаются на целое кратное  $2\pi i$ . Если  $z$  — действительное положительное число, то главное значение логарифма совпадает с  $\ln |z|$  и, следовательно, представляет то действительное число, с которым мы имели дело в курсе анализа, когда рассматривали логарифмы как действительную функцию действительного переменного. Так, получаем:  $\ln 1 = 0$ ,  $\ln e = 1$ ,  $\ln 2 = 0,69314718$  и т. д.

Но, кроме этих действительных значений, логарифмы положительных чисел имеют еще и бесконечное множество мнимых, получаемых по формуле (5.4:2). Так, например,  $\operatorname{Ln} 1 = 2k\pi i$ ,  $\operatorname{Ln} e = 1 + 2k\pi i$ ,  $\operatorname{Ln} 2 = 0,69314718 + 2k\pi i$  и т. д.

Для отрицательных чисел и для мнимых чисел главное значение логарифма есть мнимое число

$$\ln |z| + i \arg z \quad (\arg z \neq 0, \quad |\arg z| \leq \pi).$$

Все прочие значения логарифма также являются мнимыми числами, вычисляемыми по формуле (5.4:2).

Например,

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln}(-1) &= (2k+1)\pi i, \quad \operatorname{Ln}(-2) = 0,69314718 \dots + (2k+1)\pi i, \\ \operatorname{Ln}(1-i) &= \ln \sqrt{2} + i \left( -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) = \\ &= 0,34657359 \dots + (8k-1)\frac{\pi i}{4} \text{ и т. д.}\end{aligned}$$

Известные правила о логарифме произведения и частного сохраняют свою силу и для многозначного логарифма комплексного числа, а именно:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln}(z_1 z_2) &= \ln |z_1 z_2| + i \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \\ &= \ln |z_1| + \ln |z_2| + i (\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad (5.4:3) \\ \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} &= \ln \left| \frac{z_1}{z_2} \right| + i \operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \ln |z_1| - \ln |z_2| + i (\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2) = \\ &= \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2. \quad (5.4:4)\end{aligned}$$

Здесь  $z_1$  и  $z_2$  — произвольные, отличные от нуля и  $\infty$ , комплексные числа. В каждом из этих равенств левая и правая части при заданных  $z_1$  и  $z_2$  изображают бесконечные множества комплексных чисел. Равенства следует понимать в том смысле, что эти множества одинаковы, т. е. состоят из одних и тех же чисел. Забвение этого обстоятельства может повести к ошибкам.

Рассмотрим, например, следующий софизм, принадлежащий И. Бернулли.

Утверждается, что  $\operatorname{Ln}(-z) = \operatorname{Ln} z$  при любом  $z \neq 0$ .

Для доказательства рассматривается следующая цепь равенств:

$$\begin{aligned}1) \operatorname{Ln}((-z)^2) &= \operatorname{Ln}(z^2), \quad 2) \operatorname{Ln}(-z) + \operatorname{Ln}(-z) = \operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} z, \\ 3) 2 \operatorname{Ln}(-z) &= 2 \operatorname{Ln} z \quad \text{и} \quad 4) \operatorname{Ln}(-z) = \operatorname{Ln} z.\end{aligned}$$

Но это заключение неверно, так как

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i \arg z + 2k\pi i,$$

$$\operatorname{Ln}(-z) = \ln |-z| + i \operatorname{Arg}(-z) = \ln |z| + i \arg z + (2k+1)\pi i$$

и, очевидно, ни одно из чисел, являющихся значениями  $\operatorname{Ln} z$ , не совпадает ни с одним из чисел, являющихся значениями  $\operatorname{Ln}(-z)$ .

Ошибка в приведенном выше доказательстве произошла при переходе от равенства 2) к равенству 3). Первое из них, полученное на основании формулы (5.4:3), конечно, справедливо. Но сумму  $\operatorname{Ln}(-z) + \operatorname{Ln}(-z)$  нельзя заменять через  $2 \operatorname{Ln}(-z)$ , так как указанная сумма получается из множества чисел  $\operatorname{Ln}(-z)$  путем сложения любого из этих чисел с таким же или отличным от него числом того же множества, тогда как множество  $2 \operatorname{Ln}(-z)$



получается путем удвоения каждого из чисел  $\text{Ln}(-z)$ , т. е. путем сложения такого числа только с самим собой. Итак,  $\text{Ln}(-z) + \text{Ln}(-z) \neq 2 \text{Ln}(-z)$ ; точно так же и

$$\text{Ln } z + \text{Ln } z \neq 2 \text{Ln } z.$$

Читатель вполне уяснит себе суть этого возражения, обратившись к простейшему примеру. Пусть  $A$  обозначает множество, состоящее из двух чисел: 0 и 1. Тогда  $A + A$  обозначает множество, состоящее из трех чисел:  $0 + 0 = 0$ ,  $0 + 1 = 1$  и  $1 + 1 = 2$ , тогда как множество  $2A$  состоит только из двух чисел:  $2 \cdot 0 = 0$  и  $2 \cdot 1 = 2$ .

Заметим еще, что, полагая в соотношении (5.4:4)  $z_1 = z_2 = z \neq 0$ , мы получим:

$$\text{Ln } 1 = \text{Ln } z - \text{Ln } z.$$

Это — верное соотношение; но правую часть здесь нельзя заменять нулем, так как речь идет о множестве всех разностей между парами значений логарифма одного и того же числа. Это множество состоит из всевозможных целых кратных числа  $2\pi i$ , так что, в соответствии с истиной, имеем:

$$\text{Ln } 1 = 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Переходя к рассмотрению однозначных ветвей логарифма, найдем сначала области однолиственности функции  $z = e^w$ , для которой логарифм является обратной функцией.

Так как все значения  $w$ , в которых  $e^w$  принимает данное значение  $z$  ( $z \neq 0$  и  $z \neq \infty$ ), даются формулой (3.5:2)

$$w = \ln |z| + i \text{Arg } z$$

и значения эти получаются из любого из них путем сдвига на величину  $2k\pi i$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ), то область однолиственности показательной функции не должна содержать ни одной пары точек, одна из которых может быть получена из другой путем подобного сдвига.

Проще всего удовлетворить этим условиям, взяв какую-нибудь прямолинейную полосу  $g_0$ , параллельную действительной оси и имеющую ширину  $2\pi$ :  $v_0 < v < v_0 + 2\pi$ .

Наряду с ней мы получим еще бесконечное множество областей однолиственности  $g_k$ :  $v_0 + 2k\pi < v < v_0 + (2k + 2)\pi$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Очевидно, каждая точка плоскости  $w$  будет либо внутренней для одной из областей  $g_k$ , либо общей граничной точкой для двух областей  $g_k$  и  $g_{k+1}$  (рис. 42). Образом каждой полосы  $g_k$  в плоскости  $z$  является одна и та же область  $G$ , а именно, угол раствора  $2\pi$  с вер-

шиной в начале координат. Границей области  $G$  служит прямолинейный луч, выходящий из начала координат под углом  $v_0$  к действительной оси.

В области  $G$  получаем бесконечное счетное множество различных однозначных ветвей функции  $\text{Ln } z$ . Каждая из этих ветвей  $\text{Ln}_k z$  будет полностью характеризоваться тем, что ее значения должны принадлежать определенной полосе  $g_k$ . Впрочем вполне достаточно фиксировать значение  $w_0$  функции  $\text{Ln } z$  в некоторой точке  $z_0$  области  $G$ , так как из всех областей  $g_k$  одна и только одна область  $g_{k_0}$  содержит точку  $w_0$ .

Рассмотрим какую-нибудь ветвь логарифма:

$$\text{Ln}_k z = \ln |z| + i \text{Arg}_k z,$$

где  $\text{Arg}_k z$  есть значение аргумента, удовлетворяющее условию

$$v_0 + 2k\pi < \text{Arg}_k z < v_0 + (2k+2)\pi.$$

(Это условие как раз и означает, что значения  $\text{Ln}_k z$  принадлежат полосе  $g_k$ .)

Так как функция  $w = \text{Ln}_k z$  осуществляет взаимно однозначное и непрерывное отображение области  $G$  на полосу  $g_k$  и функцией, ей обратной, является  $z = e^w$ , обладающая отличной от нуля производной во всех точках области  $g_k$ , то, по правилу дифференцирования обратных функций,  $\text{Ln}_k z$  также обладает производной, вычисляемой по формуле

$$(\text{Ln}_k z)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}.$$

Точками разветвления функции  $\text{Ln } z$  являются нуль и бесконечность. В самом деле, когда  $z$  однократно описывает какую-нибудь окружность с центром в начале координат (сколь угодно

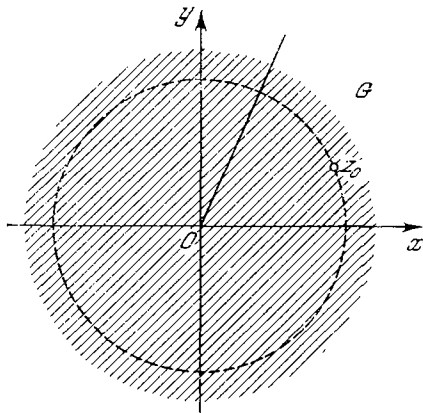
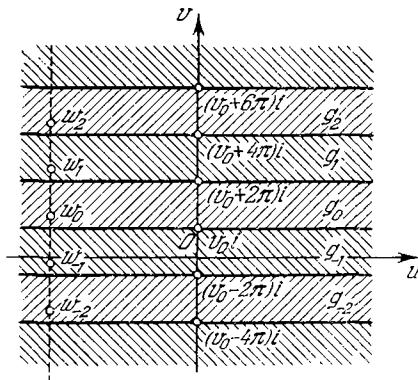


Рис. 42.

малого или сколь угодно большого радиуса), значение  $\operatorname{Arg} z$ , непрерывно изменяясь, отправляясь от какого-либо начального значения  $\operatorname{Arg}_k z_0$ , получает, по возвращении в исходную точку, приращение  $\pm 2\pi$  (в зависимости от направления обхода окружности), и, следовательно, ветвь

$$\operatorname{Ln}_k z = \ln |z| + i \operatorname{Arg}_k z$$

переходит в другую ветвь:

$$\operatorname{Ln}_{k\pm 1} z = \ln |z| + i (\operatorname{Arg}_k z \pm 2\pi) = \ln |z| + i \operatorname{Arg}_{k\pm 1} z.$$

Очевидно, описывая окружность сколько угодно раз в одном и том же (например в положительном) направлении, мы каждый раз будем получать новые ветви:

$$\operatorname{Ln}_{k+1} z, \operatorname{Ln}_{k+2} z, \operatorname{Ln}_{k+3} z,$$

и, следовательно, никогда не вернемся к исходной ветви  $\operatorname{Ln}_k z$ . По этой причине точки разветвления 0 или  $\infty$  называются здесь точками разветвления бесконечного порядка, или логарифмическими точками разветвления.

Области более общего типа, чем  $G$ , в которых возможно выделение однозначных ветвей  $\operatorname{Ln} z$ , получаются, например, если в плоскости  $z$  провести какую-нибудь жорданову кривую  $\Gamma'$ , соединяющую точку  $z = 0$  с точкой  $z = \infty$ . Образами этой кривой в плоскости  $w$ , при отображении  $w = \operatorname{Ln} z$ , будут жордановы кривые  $\gamma'_k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), разбивающие плоскость  $w$  на бесконечное множество криволинейных полос  $g'_k$  с границами, составленными из пар кривых  $\gamma'_k$  и  $\gamma'_{k+1}$ . В области  $G'$ , границей которой является кривая  $\Gamma'$ , мы получим счетное множество однозначных ветвей  $\operatorname{Ln} z$ :  $(\operatorname{Ln} z)_k$ , каждая из которых отображает  $G'$  взаимно однозначно на соответствующую область  $g'_k$ .

Любую из функций  $(\operatorname{Ln} z)_k$  можно получить из любой другой функции  $(\operatorname{Ln} z)_m$  путем прибавления соответствующего целого кратного от  $2\pi i$ .

Для производной от  $(\operatorname{Ln} z)_k$  имеем прежнюю формулу:

$$(\operatorname{Ln} z)'_k = \frac{1}{z}.$$

Независимость последнего результата от выбора ветви  $\operatorname{Ln} z$  позволяет писать вообще:

$$(\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z},$$

понимая левую часть как производную от произвольной однозначной ветви  $\operatorname{Ln} z$ , выделенной в области, заключающей данную точку  $z$ .

5.5. В этом пункте мы рассмотрим общую степенную и общую показательную функции, а также логарифм при произвольном основании. Предварительно мы должны определить понятие степени с произвольным показателем.

Пусть  $a$  — произвольное отличное от нуля число. Если  $n$  — число целое, то, как мы знаем,  $a^n$  определяется соотношением

$$a^n = |a|^n [\cos (n \operatorname{Arg} a) + i \sin (n \operatorname{Arg} a)].$$

Если  $n$  — произвольное рациональное число, равное  $\frac{p}{q}$ , где  $q$  — число натуральное и дробь  $\frac{p}{q}$  несократима, то  $a^{\frac{p}{q}}$  имеет  $q$  различных значений, получаемых из формулы (см. п. 2.3 гл. первой):

$$a^{\frac{p}{q}} = |a|^{\frac{p}{q}} \left[ \cos \left( \frac{p}{q} \operatorname{Arg} a \right) + i \sin \left( \frac{p}{q} \operatorname{Arg} a \right) \right].$$

Эта формула охватывает и случай целого показателя.

Пусть теперь  $\rho$  — действительное иррациональное число. Фиксируем произвольное значение  $\varphi = \operatorname{Arg} a$  и рассмотрим последовательность рациональных чисел  $r_n$ , сходящихся к  $\rho$ . Последовательность определенных значений  $a^{r_n}$ :

$$|a|_+^{r_n} [\cos (r_n \operatorname{Arg} a) + i \sin (r_n \operatorname{Arg} a)],$$

очевидно, сходится к определенному пределу

$$|a|_+^{\rho} [\cos (\rho \operatorname{Arg} a) + i \sin (\rho \operatorname{Arg} a)],$$

который мы и примем за одно из значений  $a^{\rho}$ . Чтобы получить все значения степени  $a^{\rho}$  с иррациональным показателем  $\rho$ , будем придавать  $\operatorname{Arg} a$  в полученном выражении все возможные значения.

Так как два различных значения  $\rho \operatorname{Arg} a$  различаются на число вида  $2k\rho\pi$ , которое не может быть целым кратным  $2\pi$  ( $k$  — целое число, не равное нулю, и  $\rho$  — иррациональное число), то все значения  $a^{\rho}$ , соответствующие различным  $\operatorname{Arg} a$ , различны между собой.

Итак, мы определили степень  $a^{\alpha}$  для случая, когда  $a$  есть произвольное действительное число. Все значения степени заключаются в формуле

$$a^{\alpha} = |a|_+^{\alpha} [\cos (\alpha \operatorname{Arg} a) + i \sin (\alpha \operatorname{Arg} a)]. \quad (5.5:1)$$

Мы получаем одно значение степени в случае, когда  $\alpha$  есть целое число, несколько, а именно,  $q$  различных значений в случае, когда  $\alpha$  есть рациональное число, представимое несократимой дробью  $\frac{p}{q}$ , и, наконец, бесконечное (счетное) множество различных значений в случае, когда  $\alpha$  — иррациональное число.

Для того чтобы определить понятие степени  $a^\alpha$  в случае любого комплексного показателя  $\alpha$ , заметим, что формула (5.5:1) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} a^\alpha &= e^{\alpha \ln |a|} [\cos (\alpha \operatorname{Arg} a) + i \sin (\alpha \operatorname{Arg} a)] = \\ &= \exp (\alpha \ln |a| + i \alpha \operatorname{Arg} a) = \exp (\alpha \operatorname{Ln} a). \end{aligned}$$

Правая часть этой формулы имеет смысл не только при  $a$  действительном, но и при любом комплексном  $a$ . В соответствии с этим положим, по определению, для любого комплексного  $a$ :

$$a^\alpha = \exp (\alpha \operatorname{Ln} a). \quad (5.5:2)$$

Очевидно, при  $a$  мнимом все значения  $a^\alpha$ , соответствующие различным значениям  $\operatorname{Ln} a$ , или, что то же самое, соответствующие различным значениям  $\operatorname{Arg} a$ , также различны между собой. Действительно, два различных значения  $\alpha \operatorname{Ln} a$  различаются на число вида  $2\pi i k$ , которое при  $a$  мнимом не может быть целым кратным от  $2\pi i$ .

Из сравнения выражений

$$\begin{aligned} a^\alpha a^\beta &= \exp (\alpha \operatorname{Ln} a) \cdot \exp (\beta \operatorname{Ln} a) = \exp (\alpha \operatorname{Ln} a + \beta \operatorname{Ln} a) = \\ &= \exp [( \alpha + \beta ) \operatorname{Ln} a + 2\pi i (k\alpha + l\beta)] \end{aligned}$$

и

$$a^{\alpha+\beta} = \exp [( \alpha + \beta ) \operatorname{Ln} a] = \exp [( \alpha + \beta ) \operatorname{Ln} a + 2\pi i m ( \alpha + \beta )],$$

где  $k$ ,  $l$  и  $m$  — произвольные целые числа, следует, что среди значений произведения  $a^\alpha a^\beta$  содержатся все значения степени  $a^{\alpha+\beta}$ , но в общем случае имеются и другие значения. Чтобы имело место равенство

$$a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta},$$

необходимо и достаточно, чтобы для любых целых  $k$  и  $l$  существовали такие целые  $m$  и  $n$ , что

$$k\alpha + l\beta = m(\alpha + \beta) + n.$$

Это условие может не выполняться даже если  $\alpha$  и  $\beta$  — рациональные числа; впрочем, достаточно условия  $\alpha = m(\alpha + \beta) + n$  (например,  $\beta = i$ ,  $\alpha = \frac{n+mi}{1-m}$ )

Аналогично из сравнения выражений

$$\begin{aligned} (a^\alpha)^\beta &= [\exp (\alpha \operatorname{Ln} a)]^\beta = \exp [\beta (\alpha \operatorname{Ln} a + 2l\pi i)] = \\ &= \exp [\alpha\beta \operatorname{Ln} a + 2\pi i\beta (k\alpha + l)] \end{aligned}$$

и

$$a^{\alpha\beta} = \exp (\alpha\beta \operatorname{Ln} a) = \exp (\alpha\beta \operatorname{Ln} a + 2m\pi i\alpha\beta),$$

где  $k, l$  и  $m$  — произвольные целые числа, заключаем, что среди значений  $(a^\alpha)^\beta$  содержатся все значения  $a^{\alpha\beta}$ , но в общем случае имеются и другие значения. Чтобы выполнялось равенство

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta},$$

необходимо и достаточно, чтобы для любых целых  $k$  и  $l$  существовали целые  $m$  и  $n$  такие, что

$$k\alpha\beta + l\beta = m\alpha\beta + n.$$

Это условие может не выполняться даже если  $\alpha$  и  $\beta$  — рациональные числа; впрочем достаточно условия  $\beta = m\alpha\beta + n$  (например,  $\beta = i, \alpha = \frac{1-ni}{m}$ ).

Поясним примерами определение степени:

- 1)  $1^{\sqrt{2}} = \exp(\sqrt{2} \operatorname{Ln} 1) = \exp(2k\pi i \sqrt{2}) =$   
 $= \cos(2k\pi \sqrt{2}) + i \sin(2k\pi \sqrt{2}) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots);$
- 2)  $e^z = \exp(z \operatorname{Ln} e) = \exp[z(1 + 2k\pi i)] = \exp z \exp(2k\pi iz)$   
 $(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

Отсюда видно, что лишь одно из значений степени  $e^z$  совпадает с  $\exp z$ . Другие значения суть:  $\exp z \exp 2\pi iz, \exp z \exp(-2\pi iz)$  и т. д. В частности, лишь одно из значений  $e^x$  ( $x$  — действительное число) совпадает с действительным положительным числом  $\exp x$ . Другие значения таковы:  $\exp x \exp 2\pi ix, \exp x \exp(-2\pi ix)$ . Их будет конечное число при  $x$  рациональном и бесконечное множество различных значений при  $x$  иррациональном.

Тем не менее мы в нашем курсе пользуемся привычным из курса анализа пониманием символа  $e^z$ , как совпадающего с  $\exp z$ . Такое употребление многозначного символа вполне аналогично обычному в анализе пониманию символа  $\sqrt[n]{a}$  ( $a$  — действительное положительное число), как единственного положительного («арифметического») значения радикала.

$$\begin{aligned} 3) i^i &= \exp(i \operatorname{Ln} i) = \exp\left[i\left(\frac{\pi}{2}i - 2k\pi i\right)\right] = \\ &= \exp\left[(4k-1)\frac{\pi}{2}\right] = e^{\frac{(4k-1)\pi}{2}} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

Таким образом, все значения степени  $i^i$  суть действительные положительные числа, среди которых имеются и сколь угодно большие и сколь угодно малые.

Опираясь на определение степени, можно рассматривать следующие две многозначные функции:

$$z^\alpha \text{ и } a^z.$$

Первая из них — степень с произвольным показателем — определена, вообще, только при  $z \neq 0$ .

Если  $\alpha$  есть действительное целое число, то  $z^\alpha$  представляет рациональную функцию частного вида. Она определена тогда и при  $z = 0$ , где имеет нуль (если  $\alpha > 0$ ), или полюс (если  $\alpha < 0$ ). В случае, когда  $\alpha$  — действительное рациональное нецелое число:  $\alpha = \frac{p}{q}$  ( $q$  — натуральное число и дробь  $\frac{p}{q}$  несократима),  $z^\alpha$  может быть представлена в виде

$$z^\alpha = \sqrt[q]{z^p}.$$

Это — многозначная, а именно,  $q$ -значная функция. Для нее точки  $z = 0$  и  $z = \infty$  служат точками разветвления порядка  $q - 1$ . В любой области  $G$ , полученной из расширенной плоскости путем проведения жордановой кривой, соединяющей точки разветвления, можно выделить  $q$  различных однозначных дифференцируемых ветвей функции. Эти ветви непрерывно переходят одна в другую при обходе точкой  $z$  кривых, окружающих начало координат (или бесконечно удаленную точку).

Если, наконец,  $\alpha$  не есть действительное рациональное число (т. е.  $\alpha$  — действительное иррациональное или произвольное мнимое число), то функция  $z^\alpha$  бесконечнозначна. Все ее значения заключены в формуле

$$z^\alpha = \exp(\alpha \operatorname{Ln} z).$$

Для нее также точки  $z = 0$  и  $z = \infty$  являются точками разветвления. Но теперь это точки разветвления бесконечного порядка.

В самом деле, при однократном обходе точки  $z = 0$ , например в положительном направлении, значение  $\operatorname{Arg} z$ , непрерывно изменяясь, увеличивается на  $2\pi$ ; поэтому значение  $\alpha \operatorname{Ln} z$  изменится на  $2\pi i \alpha$ , а значение функции приобретает множитель  $\exp(2\pi i \alpha) \neq 1$ .

Обратимся к общей показательной функции  $a^z$  ( $a \neq 0$ ). Она определена при любом конечном значении  $z$  формулой

$$a^z = \exp(z \operatorname{Ln} a).$$

Чтобы получить определенную однозначную ветвь, достаточно фиксировать одно из значений  $\operatorname{Ln} a = b$ .

Предполагая, что это сделано, мы получим однозначную и всюду дифференцируемую функцию  $\exp(bz)$ . Беря все возможные значения  $\operatorname{Ln} a$ , получим все возможные однозначные ветви функции  $a^z$ .

Так как два значения  $\text{Ln } a$  различаются слагаемым вида  $2k\pi i$ , то две ветви функции  $a^z$  различаются множителем вида  $\exp(2k\pi iz)$ , представляющим также однозначную всюду дифференцируемую функцию, принимающую значение 1 только для действительных и целых значений  $z$ . Однако в рассматриваемом случае ветви многозначной функции будут существенно отличаться по своему характеру от ветвей всех ранее рассмотренных нами многозначных функций. А именно, во всех прежних примерах существовали такие точки расширенной плоскости (точки разветвления), двигаясь вокруг которых по замкнутым жордановым кривым и заставляя значения функции (определенной ветви) непрерывно изменяться, мы имели возможность непрерывно перевести одну ветвь в другую.

Здесь эта возможность исключена именно потому, что каждая ветвь представляет функцию непрерывную и однозначную во всей конечной плоскости. По какой бы мы замкнутой кривой ни двигались, по возвращении в исходную точку получим то же самое исходное число  $z$  (пусть с другим значением аргумента), а следовательно, и то же самое значение функции  $\exp(bz)$  ( $b$  — фиксированное значение  $\text{Ln } a$ ).

Таким образом, многозначная функция  $a^z$  не имеет ни одной точки разветвления и ее однозначные непрерывные ветви не могут непрерывно переходить одна в другую. Все это позволяет смотреть на них как на самостоятельные, не связанные друг с другом, однозначные всюду дифференцируемые функции, а следовательно, целые функции:

$$\exp(z \ln a), \quad \exp[z(\ln a + 2\pi i)], \quad \exp[z(\ln a - 2\pi i)],$$

То обстоятельство, что все эти различные целые функции могут быть представлены как ветви одной бесконечнозначной функции  $a^z$ , имеет для нас не большее значение, чем тот, например, факт, что функции  $\sin z$  и  $-\sin z$  можно рассматривать как ветви двузначной функции  $\sqrt{1 - \cos^2 z}$ , или гиперболические функции  $\text{sh } z$  и  $\text{ch } z$  рассматривать как две ветви двузначной функции  $\frac{1}{2} [\exp z + \sqrt{\exp(-2z)}]$ . (Обращаем внимание читателя на то, что функции  $\sqrt{1 - \cos^2 z}$  и  $\frac{1}{2} [\exp z + \sqrt{\exp(-2z)}]$ , так же как и функция  $a^z$ , не обладают точками разветвления.)

Фиксировав одну из ветвей функции  $z = a^w = \exp(bw)$ , где  $b$  является одним из значений  $\text{Ln } a$ , мы можем рассматривать функцию, обратную по отношению к этой ветви. Получим, очевидно:

$$w = \frac{1}{b} \text{Ln } z \quad (b = \ln a + 2k_0\pi i). \quad (5.5:3)$$



Эта функция отличается от  $\text{Ln } z$  только постоянным множителем  $\frac{1}{b}$ . Так как из соотношения (5.5:3) следует, что

$$z = \exp(bw) = a^w \quad (\text{одно из значений } a^w),$$

то  $w$  можно рассматривать как логарифм  $z$  по основанию  $a$ .

Итак, мы определяем логарифм произвольного комплексного числа по некоторому основанию  $a$  ( $a$  — комплексное число, отличное от нуля) посредством формулы

$$\text{Log}_a z = \frac{\text{Ln } z}{\text{Ln } a}, \quad (5.5:3')$$

где в знаменателе фиксировано одно из бесконечно многих значений  $\text{Ln } a$  (одно и то же значение  $b$  для всех  $z$ ).

Это определение требует, таким образом, не только указания основания  $a$  системы логарифмов, но и фиксации одного из значений  $\text{Ln } a$ .

Поясним сказанное примерами.

1)  $a = e$ . Если фиксируем значение  $\text{Ln } e$ , равное 1, то получим

$$\text{Log}_e z = \text{Ln } z.$$

Это и есть обычное определение натурального логарифма. Но мы могли бы взять значение  $\text{Ln } e$ , равное, например,  $1 + 2\pi i$ . Тогда имели бы:

$$\text{Log}_e z = \frac{\text{Ln } z}{1 + 2\pi i}$$

Читатель легко проверит, что при таком определении из всех положительных чисел одни только числа вида  $e^k$  ( $k$  — целое число) имели бы по одному действительному значению натурального логарифма.

2)  $a = 10$ . Беря значение  $\text{Ln } 10$ , равное 2,302585 =  $\frac{1}{0,43429}$  =  $\frac{1}{M}$ , получим:

$$\text{Log}_{10} z = M \text{Ln } z = 0,43429 \quad \text{Ln } z.$$

Это определение десятичного логарифма произвольного комплексного числа  $z$  ( $z \neq 0$ ) согласуется с обычным определением десятичных логарифмов действительных положительных чисел. А именно, если  $z = x > 0$ , то, беря главные значения логарифмов, будем иметь:

$$\lg x = 0,43429 \quad \ln x.$$

3)  $a = 1$ . В этом случае при определении главного значения логарифма с основанием 1 нельзя пользоваться главным значением

$\operatorname{Ln} 1$ , равным нулю. Возьмем значение  $\operatorname{Ln} 1$ , равное  $2\pi i$ . Тогда, по определению, будем иметь:

$$\operatorname{Log}_1 z = \frac{\operatorname{Ln} z}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arg} z - \frac{i}{2\pi} \ln |z|.$$

Отсюда следует, что все значения  $\operatorname{Log}_1 z$  являются действительными, если  $|z| = 1$ , и мнимыми, если  $|z| \neq 1$ . Следовательно, действительными логарифмами при основании, равном 1, обладают те и только те числа, которые изображаются точками единичной окружности. Для этих чисел значения логарифма совпадают со значениями их аргументов (измеренных в долях от  $2\pi$ ). Итак,  $\frac{1}{2\pi} \operatorname{Arg} z$  для комплексных чисел с модулем единица совпадает с логарифмом  $z$  при основании, равном единице.

5.6. В этом пункте мы остановимся на обратных тригонометрических функциях  $\operatorname{Arc} \cos z$  и  $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} z$ . Функция  $w = \operatorname{Arc} \cos z$  определяется посредством уравнения

$$z = \cos w. \quad (5.6:1)$$

Заменяя  $\cos w$  через  $\frac{\exp(iw) + \exp(-iw)}{2}$  и полагая, для сокращения,  $\exp(iw) = t$ , перепишем уравнение (5.6:1) в виде

$$z = \frac{t + t^{-1}}{2}, \quad (5.6:2)$$

откуда

$$t^2 - 2zt + 1 = 0 \quad (5.6:3)$$

и

$$t = z \pm \sqrt{z^2 - 1}. \quad (5.6:4)$$

Так как оба корня квадратного уравнения (5.6:3) отличны от нуля (их произведение равно 1), то уравнение

$$\exp(iw) = t$$

имеет корни (относительно неизвестного  $w$ ). Получаем:

$$w = \frac{1}{i} \operatorname{Ln} t = \frac{1}{i} \operatorname{Ln} (z \pm \sqrt{z^2 - 1}). \quad (5.6:5)$$

Итак, многозначная функция  $w = \operatorname{Arccos} z$  выражается через логарифм и квадратный корень

$$w = \operatorname{Arccos} z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln} (z \pm \sqrt{z^2 - 1}). \quad (5.6:6)$$

Ее точками разветвления являются прежде всего точки  $z = \pm 1$ . В самом деле, при однократном обходе точкой  $z$  какой-нибудь замкнутой жордановой кривой, заключающей внутри лишь одну из этих

точек, одно из значений  $\sqrt{z^2 - 1}$  заменяется другим, отличающимся от первого знаком. При этом значение  $z + \sqrt{z^2 - 1} = t$ , являющееся корнем квадратного уравнения (5.6:3), заменяется другим корнем того же уравнения, равным  $\frac{1}{t}$  (мы уже указывали, что произведение обоих корней равно 1). Следовательно, мы от значений  $w = \frac{1}{i} \operatorname{Ln} t$  переходим к значениям  $\frac{1}{i} \operatorname{Ln} \frac{1}{t}$ , наверное отличным от исходных, если только  $t \neq \frac{1}{t}$ . Но  $t$  может равняться  $\frac{1}{t}$  только при  $t = \pm 1$ ; как видно из (5.6:3) или (5.6:4), это возможно только при  $z = \pm 1$ . Так как обходимые нами жордановы кривые не проходят через точки  $z = \pm 1$ , то указанный случай не может встретиться, и мы действительно можем утверждать, что значения  $w = \operatorname{Arg} \cos z$  изменяются в результате отмеченных обходов. Итак, точки  $\pm 1$  являются точками разветвления для  $\operatorname{Arg} \cos z$ . Они обязаны своим существованием присутствию в формуле (5.6:6) квадратного радикала. Но формула (5.6:6) имеет вид  $w = \frac{1}{i} \operatorname{Ln} t$  ( $t = z + \sqrt{z^2 + 1}$ ), и мы можем еще ожидать точки разветвления, соответствующие двум точкам разветвления для  $\operatorname{Ln} t$   $t = 0$  и  $t = \infty$ .

Мы знаем из п. 4.9 этой главы, что каждому однократному обходу точкой  $t$  окружности с центром в начале координат соответствует в плоскости  $z$  однократный обход точкой  $z$  эллипса с фокусами  $\pm 1$  и обратно.

Итак, однократному обходу точкой  $z$  эллипса с фокусами  $\pm 1$  соответствует изменение  $\operatorname{Arg} t$  на  $\pm 2\pi$  и изменение  $\frac{1}{i} \operatorname{Ln} t$  на  $\pm 2\pi$ . Так как такой эллипс может принадлежать любой, наперед заданной, окрестности точки  $z = \infty$ , то она является точкой разветвления для  $\operatorname{Arg} \cos z$  и притом бесконечного порядка.

Конечно, обход любого эллипса с фокусами  $\pm 1$  можно рассматривать также как обход вокруг точки  $z = 0$ . Но ни один из этих эллипсов не лежит целиком в окрестности  $|z| \leq \rho$ , где  $\rho \leq 1$ .

Покажем, что ни точка  $z = 0$  и никакая вообще точка  $z_0$  расширенной плоскости, за исключением указанных выше ( $z = \pm 1$  и  $z = \infty$ ), не может быть точкой разветвления для  $\operatorname{Arg} \cos z$ . В самом деле, формула (5.6:4) дает нам для  $z = z_0$  два различных значения:  $t'_0$  и  $t''_0$ , отличных от 0,  $\pm 1$  и  $\infty$  и удовлетворяющих условию  $t'_0 t''_0 = 1$ . Мы можем взять настолько малые окрестности  $U'$  и  $U''$  этих точек, чтобы они не заключали точек 0 и  $\infty$  и чтобы ни  $U'$ , ни  $U''$  порознь не содержали двух точек  $t_1, t_2$ , удовлетворяющих условию  $t_1 t_2 = 1$ . В самом деле, если точка  $t'_0$  не лежит на единичной окружности, например  $|t'_0| < 1$ , то и точка  $t''_0$  не лежит на этой

окружности и  $|t_0''| > 1$ . В этом случае нам достаточно взять окрестности, одна из которых ( $U'$ ) целиком лежит внутри единичной окружности, а другая ( $U''$ ) — вне окружности (рис. 43). Если же  $t_0'$  лежит на единичной окружности и находится, например, в верхней полуплоскости, то  $t_0'' = \frac{1}{t_0'}$  также лежит на единичной окружности, и притом в нижней полуплоскости. В этом случае достаточно взять одну окрестность ( $U'$ ) в верхней полуплоскости, а другую ( $U''$ ) — в нижней полуплоскости. В каждой из окрестностей  $U'$  и  $U''$  функция

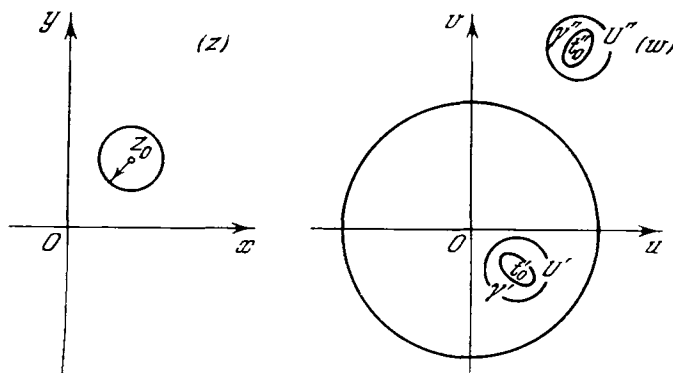


Рис. 43.

$z = \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right)$  будет однолистной (она принимает одно и то же значение только в парах точек, связанных соотношением  $t' \cdot t'' = 1$ ) и, следовательно, будет взаимно однозначно отображать  $U'$  и  $U''$  на некоторые области  $g'$  и  $g''$  плоскости  $z$ , содержащие внутри точку  $z_0$  (образ центров  $t_0'$  и  $t_0''$  окрестностей  $U'$  и  $U''$ ).

Будем брать окружности  $|z - z_0| = \rho$  с центром в  $z_0$  столь малыми, чтобы они содержались как в области  $g'$ , так и в области  $g''$ . Очевидно, все окружности с достаточно малыми радиусами удовлетворяют этому требованию. Тогда, в силу отображения (5.6:2), такой окружности будут соответствовать замкнутые жордановы кривые  $\gamma'$  и  $\gamma''$ , по одной в окрестностях  $U'$  и  $U''$ . Ни одна из этих кривых не содержит внутри точки  $O$ . Поэтому, когда  $z$  обходит окружность  $|z - z_0| = \rho$ ,  $t$  обходит либо кривую  $\gamma'$  (соответственно одной ветви функции (5.6:4)), либо кривую  $\gamma''$  (соответственно другой ветви функции (5.6:4)). Если фиксировать значение  $\text{Arg } t$  в какой-нибудь точке  $\gamma'$  (или  $\gamma''$ ) до обхода, то оно, изменяясь непрерывно, вернется в результате обхода к прежнему значению (именно потому, что ни  $\gamma'$ , ни  $\gamma''$  не содержат внутри точки  $t = 0$ ). Поэтому,

в результате обхода вернется к своему исходному значению, и значение  $\frac{1}{i} \operatorname{Ln} t = \operatorname{Arccos} z$ .

Итак, точка  $z_0$ , отличная от  $\pm 1$  и  $\infty$ , не может быть точкой разветвления для  $\operatorname{Arccos} z$ .

Для того чтобы получить какую-нибудь область плоскости  $z$ , в которой возможно выделить однозначные непрерывные ветви  $\operatorname{Arccos} z$ , нужно соединить между собой точки разветвления этой функции жордановыми кривыми. Возьмем, например, бесконечный сегмент  $\Delta$  действительной оси, соединяющей точки  $-1$  и  $+1$  через бесконечно удаленную точку. Этот сегмент  $\Delta$  является границей некоторой области  $G$ .

Из того, что нам известно о функции (5.6:2), следует, что эта функция отображает на область  $G$  взаимно однозначно как верхнюю, так и нижнюю полуплоскости  $t$ . В свою очередь функция  $w = \frac{1}{i} \operatorname{Ln} t$  отображает каждую из них на полосы плоскости  $w$ , параллельные мнимой оси  $y$ , имеющие ширину  $\pi$ ; а именно, верхнюю полуплоскость — на полосы  $g_{2k-1}$ :

$$(2k-1)\pi < u < 2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

и нижнюю полуплоскость — на полосы  $g_{2k}$ :

$$2k\pi < u < (2k+1)\pi.$$

Итак, образами области  $G$  в плоскости  $w$  являются указанные полосы  $g_n$ .

Чтобы фиксировать какую-либо однозначную ветвь  $\operatorname{Arccos} z$  в области  $G$ , достаточно указать, какой именно из полос  $g_n$  принадлежат ее значения. Так, получаем ветви:  $\operatorname{Arccos}_0 z$ ,  $\operatorname{Arccos}_1 z$ ,  $\operatorname{Arccos}_{-1} z$ . Впрочем достаточно фиксировать значение  $\operatorname{Arccos} z$  в какой-либо одной точке области  $G$ , например в начале координат. Тогда та полоса  $g_n$ , куда попадает это значение, и определит собой всю ветвь  $\operatorname{Arccos} z$ .

Однозначные ветви  $\operatorname{Arccos} z$  можно определять, конечно, и во многих других областях плоскости  $z$ . Укажем, например, область  $G'$ , граница которой состоит из конечного сегмента  $\delta$  действительной оси, соединяющего точки  $-1$  и  $+1$ , и из положительной части мнимой оси, или область  $G''$ , граница которой состоит из того же сегмента  $\delta$  и отрицательной части мнимой оси.

Предлагаем читателю выяснить, на какие области плоскости  $w$  отображают  $G'$  или  $G''$  соответствующие этим областям однозначные ветви функции  $\operatorname{Arccos} z$ .

Перейдем к рассмотрению функции  $w = \operatorname{Arctg} z$ , обратной по отношению к функции  $z = \operatorname{tg} w$ . Выражая  $\operatorname{tg} w$  через  $\sin w$  и  $\cos w$

и, далее, через показательную функцию, получим:

$$z = \frac{1}{i} \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} = \frac{1}{i} \frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1}, \quad (5.6:7)$$

или, полагая  $e^{2iw} = \tau$ :

$$z = \frac{1}{i} \frac{\tau - 1}{\tau + 1},$$

откуда

$$\tau = \frac{1 + iz}{1 - iz},$$

и, наконец,

$$w = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

Итак,  $\operatorname{Arctg} z$  выражается через логарифм от дробно-линейной функции

$$w = \operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}. \quad (5.6:8)$$

Мы предлагаем читателю убедиться в том, что  $\operatorname{Arctg} z$  имеет только две точки разветвления:  $\pm i$ . Простейшими областями, в которых можно выделять однозначные ветви  $\operatorname{Arctg} z$ , будут область  $D$ , границей которой служит бесконечный сегмент  $\Delta$  мнимой оси, соединяющий точки разветвления  $-i$  и  $+i$ , и область  $d$ , границей которой является конечный сегмент  $\delta$ , соединяющий те же точки.

Читатель легко убедится далее в том, что однозначные ветви  $\operatorname{Arctg} z$  в области  $D$  отображают эту область взаимно однозначно и конформно на полосы шириной  $\pi$ , параллельные мнимой оси:

$$k\pi - \frac{\pi}{2} < u < k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \dots),$$

а однозначные ветви этой функции в области  $d$  отображают  $d$  на подобные же полосы  $k\pi < u < (k+1)\pi$ .

5.7. В дальнейшем нам понадобится отображение, осуществляемое посредством функции  $w = z + \operatorname{Ln} z$ , точнее, посредством ее однозначной в верхней полуплоскости ветви

$$w = z + \ln z. \quad (5.7:1)$$

Полагая  $z = re^{i\theta}$ , получим:

$$u = r \cos \theta + \ln r, \quad v = r \sin \theta + \theta \quad (0 < \theta < \pi). \quad (5.7:2)$$

Рассмотрим образы лучей  $\theta = \text{const}$ . Уравнения (5.7:2) определяют эти образы, причем  $r$  играет роль параметра, изменяющегося от 0 до  $\infty$ .

Если  $\theta = 0$ , то  $u = r + \ln r$ ,  $v = 0$ , и так как  $r + \ln r$  возрастает от  $-\infty$  до  $\infty$ , когда  $r$  изменяется от 0 до  $\infty$ , то образом луча  $\theta = 0$  является вся действительная ось в плоскости  $w$ . Если  $\theta = \pi$ , то  $u = -r + \ln r$ ,  $v = \pi$ , и мы получаем параллельную действительной оси полупрямую  $-\infty < u \leq -1$ ,  $v = \pi$ , пробегаемую точкой  $w$  дважды, в то время как  $z$  однократно пробегает луч  $\theta = \pi$ . Пусть, наконец,  $0 < \theta < \pi$ . Второе из уравнений (5.7:2) показывает,

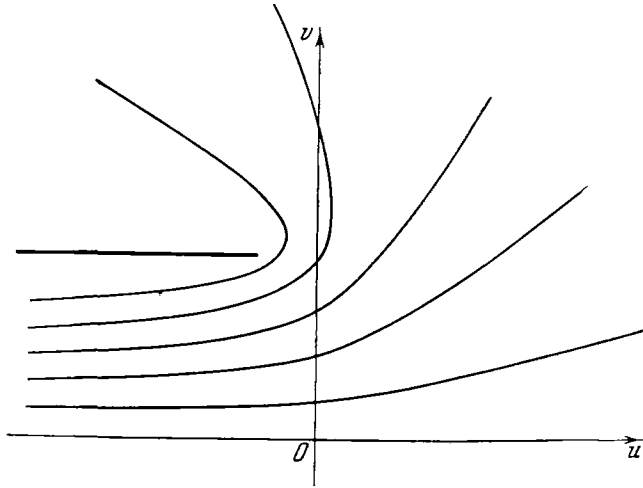


Рис. 44.

что  $v$  возрастает от значения  $\theta$  до  $\infty$ , когда  $r$  изменяется от 0 до  $\infty$ . Выражая  $r$  через  $v$  и  $\theta$  из этого уравнения и подставляя в первое из уравнений (5.7:2), получим уравнение образа луча  $\theta = \text{const}$  в следующем виде:

$$u = (v - \theta) \operatorname{ctg} \theta + \ln \frac{v - \theta}{\sin \theta}, \quad \theta < v < \infty. \quad (5.7:3)$$

Читатель легко убедится в том, что уравнение (5.7:3) изображает кривую, имеющую асимптоту  $v = \theta$ , причем вся кривая расположена выше асимптоты. Если  $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , то  $u$  возрастает от  $-\infty$  до  $\infty$ , когда  $v$  возрастает от  $\theta$  до  $\infty$ , а если  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ , то  $u$  возрастает от  $-\infty$  до максимального значения  $\ln \left( -\frac{1}{\cos \theta} \right) - 1$ , достигаемого при  $v = \theta - \operatorname{tg} \theta$ , а затем убывает до  $-\infty$ . Во всех случаях эти кривые обращены выпуклостью вправо (рис. 44).

Рассмотрим  $u$  в уравнении (5.7:3) как функцию от  $\theta$  при фиксированном  $v = v_0$  ( $0 < \theta < \min(v_0, \pi)$ ). Пользуясь производной,

обнаруживаем, что  $u$  монотонно убывает \*); поэтому две различные точки  $z'$  и  $z''$ , лежащие на различных лучах  $\theta = \theta'$  и  $\theta = \theta''$ , не могут иметь один и тот же образ  $w_0 = u_0 + iv_0$ . Но две точки  $z'$  и  $z''$ , лежащие на одном и том же луче, также не могут иметь одинаковых образов; в самом деле, как мы видели, точка  $w = u + iv$  монотонно пробегает кривую (5.7:3), не имеющую кратных точек, когда  $r = |z|$  возрастает от 0 до  $\infty$ . Отсюда вытекает, что функция  $w = z + \ln z$  однолистка в верхней полуплоскости; она конформно отображает полуплоскость на область  $D$ , получаемую из верхней полуплоскости  $w$  путем исключения полупрямой  $-\infty < u \leq -1, v = \pi$ .

Полагая  $z = e^t$ , получим функцию:

$$w = e^t + t, \quad (5.7:4)$$

которая, как легко убедится читатель, конформно отображает полосу  $0 < \operatorname{Im} t < \pi$  на ту же область  $D$ .

Замечая, что функция (5.7:4) в симметричных относительно действительной оси точках принимает сопряженные значения, заключаем, что она отображает полосу  $-\pi < \operatorname{Im} t < 0$  на область  $D^*$ , симметричную с  $D$  относительно действительной оси. Так как эта функция взаимно однозначно отображает действительную ось на действительную ось, то она же дает взаимно однозначное отображение полосы  $-\pi < \operatorname{Im} t < \pi$  на область, получаемую из плоскости  $w$  исключением двух лучей:  $-\infty < \operatorname{Re} w < -1, \operatorname{Im} w = \pi$  и  $-\infty < \operatorname{Re} w < -1, \operatorname{Im} w = -\pi$ .

---

\*)  $\frac{\partial u}{\partial \theta} = -(v - \theta) - \frac{[1 + (v - \theta) \operatorname{ctg} \theta]^2}{v - \theta} < 0$  при  $0 < \theta < \min(v, \pi)$ . Как показывает формула (5.7:3),  $u$  при возрастании  $\theta$  в указанном интервале убывает от  $+\infty$  до  $-\infty$ , если  $v \neq \pi$ , и от  $+\infty$  до  $-1$ , если  $v = \pi$ .



## Глава третья

### ИНТЕГРАЛЫ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

#### § 1. Спрямоляемые кривые. Интегралы

1.1. Пусть  $L: z = \lambda(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$  — непрерывная кривая. Каждому разбиению сегмента  $[\alpha, \beta]$  на частичные сегменты  $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ;  $\alpha_0 = \alpha < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = \beta$ ) соответствует разбиение кривой  $L$  на частичные дуги  $\sigma_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ), с начальными точками  $z_k = \lambda(\alpha_k)$  и конечными точками  $z_{k+1} = \lambda(\alpha_{k+1})$ ; при этом конечная точка каждой дуги (кроме последней) будет совпадать с начальной точкой следующей за ней дуги. Соединяя точки  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$  по порядку отрезками прямых, мы получим ломаную  $\Lambda$ , вписанную в кривую  $L$ . Звенья этой ломаной суть хорды дуг  $\sigma_k$ . Очевидно, длина ломаной  $\Lambda$  равна  $\sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|$ . Если эта величина, независимо от взятого разбиения, остается ограниченной:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| \leq C < \infty,$$

то кривая  $L$  называется *спрямоляемой*, а верхняя грань указанных сумм называется *длиной кривой*. Если же существуют разбиения сегмента  $[\alpha, \beta]$ , для которых соответствующие суммы, т. е. длины вписанных в кривую ломаных, сколь угодно велики, то кривая называется *неспрямоляемой*. В этом случае ей не приписывается никакой длины, или, если угодно, длина кривой  $L$  считается бесконечной.

Можно легко убедиться в том, что длина прямоляемой кривой является пределом длин любой последовательности вписанных ломаных при условии, что максимальная длина сегментов, соответствующих разбиению сегмента  $[\alpha, \beta]$ , стремится к нулю \*).

Частный класс прямоляемых кривых представляют *гладкие кривые*. Непрерывная кривая  $L$  называется *гладкой*, если

---

\*) О прямоляемых кривых см., например, Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, изд. 6, М., «Наука», 1966, т. II, п. 329.

среди различных ее параметрических представлений существует по крайней мере одно  $z = \lambda(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , для которого  $\lambda(t)$  обладает непрерывной и отличной от нуля производной на всем сегменте  $[\alpha, \beta]$ .

Геометрический смысл гладкости ясен из пункта 2.1 главы второй.

Именно, там было показано, что наличие производной  $\lambda'(t_0) \neq 0$  означает, что в точке  $z_0 = \lambda(t_0)$  кривая обладает касательной, образующей с действительной осью угол, равный  $\text{Arg } \lambda'(t_0)$ . Итак, гладкая кривая обладает касательной в каждой точке. Если  $t$  непрерывно изменяется от  $\alpha$  до  $\beta$ , то  $z$  описывает кривую от начальной точки до конечной, причем  $\lambda'(t)$  также непрерывно изменяется, не обращаясь в нуль, а следовательно, непрерывно изменяется и  $\text{Arg } \lambda'(t)$  \*). Это означает, что наклон касательной к гладкой кривой меняется непрерывно, когда точка касания непрерывно перемещается по кривой.

Для длины  $l$  гладкой кривой  $L$  в интегральном исчислении выводится известная формула

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Эту формулу можно записать в более компактном виде, если заметить, что

$$\lambda'(t) = x'(t) + iy'(t) \quad \text{и} \quad |\lambda'(t)|^2 = [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2;$$

тогда получим:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} |\lambda'(t)| dt.$$

Более общий класс спрямляемых кривых представляют кусочно-гладкие кривые.

Непрерывная кривая  $L$  называется кусочно-гладкой, если она составлена из конечного числа гладких кривых, или, выражаясь точнее, если для некоторого ее параметрического представления  $z = \lambda(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , сегмент  $[\alpha, \beta]$  может быть подразделен на конечное число сегментов  $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$  ( $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_m = \beta$ ), на каждом из которых  $\lambda(t)$  обладает непрерывной и отличной от нуля производной. Из этого определения следует, что кусочно-гладкая кривая может и не иметь касательной в точках  $z_k = \lambda(\alpha_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, m-1$ ), но в каждой из этих точек существуют «левая» и «правая» касательные, так что указанные точки являются угловыми точками кусочно-гладкой кривой.

\*)  $\text{Arg } \lambda'(t) = \text{Im } \{\text{Ln}[\lambda'(t)]\}$ , и так как  $\lambda'(t)$  непрерывно изменяется, не обращаясь в нуль, то и  $\text{Ln}[\lambda'(t)]$ , а следовательно, и  $\text{Im} \{\text{Ln}[\lambda'(t)]\}$  непрерывно изменяются.

Для длины  $l$  кусочно-гладкой кривой остается в силе предыдущая формула

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} |\lambda'(t)| dt.$$

Кусочно-гладкими кривыми, конечно, не исчерпывается весь класс спрямляемых кривых. Впрочем, читатель, не знакомый со спрямляемыми кривыми во всем объеме, может в дальнейшем изложении заменять для себя понятие спрямляемой кривой более узким понятием кусочно-гладкой кривой.

Пусть  $L$  — какая-нибудь спрямляемая кривая  $z = \lambda(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , и  $P(z) = P(x, y)$ ,  $Q(z) = Q(x, y)$  — две действительные функции, определенные и непрерывные на этой кривой. Для произвольного разбиения сегмента  $[\alpha, \beta]$  на сегменты  $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , выберем на каждой из дуг  $\sigma_k$  с концами  $z_k = x_k + iy_k$  и  $z_{k+1} = x_{k+1} + iy_{k+1}$  по одной точке кривой:  $\xi_k = \xi_k + i\eta_k = \lambda(\tau_k)$  ( $\alpha_k \leq \tau_k \leq \alpha_{k+1}$ ) и составим для функций  $P$  и  $Q$  соответствующую интегральную сумму

$$\sum_{k=0}^{n-1} [P(\xi_k, \eta_k)(x_{k+1} - x_k) + Q(\xi_k, \eta_k)(y_{k+1} - y_k)].$$

В интегральном исчислении доказывается\*), что для любой последовательности разбиений сегмента  $[\alpha, \beta]$  на сегменты с максимальной длиной, стремящейся к нулю, последовательности соответствующих интегральных сумм сходятся к одному и тому же пределу. Последний обозначают:

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

и называют интегралом (криволинейным) от  $P dx + Q dy$  вдоль кривой  $L$ .

Опираясь на этот факт, мы в следующем пункте введем понятие интеграла от комплексной функции вдоль спрямляемой кривой.

В частности, если  $L$  — кусочно-гладкая кривая, криволинейный интеграл можно следующим образом выразить через определенный интеграл от функции параметра  $t$ :

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t), y(t)] x'(t) + Q[x(t), y(t)] y'(t)\} dt. \end{aligned}$$

\*) См., например, В ал л е - П у с с е н, Курс анализа бесконечно малых, т. I, п. 360 или Г. М. Ф и х т е н г о л ь ц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, изд. 3, М., Физматгиз, 1963, т. III, гл. 15.

1.2. Итак, пусть  $L: z = \lambda(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$  — спрямляемая кривая и  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  — функция, определенная и непрерывная на  $L$ . Рассмотрим какое-нибудь разбиение кривой  $L$  на дуги  $\sigma_k$  (мы сохраняем обозначения предыдущего пункта) и составим для функции  $f(z)$  соответствующую интегральную сумму:

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) (z_{k+1} - z_k).$$

Каждое слагаемое этой суммы есть произведение значения  $f(z)$  в некоторой точке  $\xi_k$  дуги  $\sigma_k$  на разность аффиксов конечной и начальной точек этой дуги. Введем для краткости следующие обозначения:

$$u(\xi_k, \eta_k) = u_k, \quad v(\xi_k, \eta_k) = v_k, \quad x_{k+1} - x_k = \Delta x_k, \quad y_{k+1} - y_k = \Delta y_k.$$

Тогда будем иметь:

$$f(\xi_k) = u_k + iv_k, \quad z_{k+1} - z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) (z_{k+1} - z_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (u_k + iv_k) (\Delta x_k + i\Delta y_k) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i \sum_{k=0}^{n-1} (v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что действительная и мнимая части интегральной суммы  $S$  представляют собой интегральные суммы, составленные для того же разбиения кривой  $L$  и для следующих пар действительных функций: первая — для  $u(x, y)$  и  $-v(x, y)$ , вторая — для  $v(x, y)$  и  $u(x, y)$ . Так как функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  непрерывны (в силу непрерывности  $f(z)$ ), а кривая  $L$  спрямляема, то указанные интегральные суммы будут стремиться к определенным пределам при неограниченном измельчении разбиения кривой (т. е. при условии, что максимальная из разностей соседних значений параметра  $t$  стремится к нулю), а именно к

$$\int_L u(x, y) dx - v(x, y) dy \quad \text{и} \quad \int_L v(x, y) dx + u(x, y) dy.$$

Отсюда следует, что при тех же условиях интегральная сумма комплексной функции  $f(z)$  также стремится к определенному пределу и этот предел есть

$$\int_L u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_L v(x, y) dx + u(x, y) dy.$$

Указанный предел обозначают  $\int_L f(z) dz$  и называют интегралом от функции  $f(z)$ , взятым вдоль (или по) кривой  $L$ .

Итак,

$$\begin{aligned} \int_L f(z) dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) (z_{k+1} - z_k) = \\ &= \int_L u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_L v(x, y) dx + u(x, y) dy. \quad (1.2:1) \end{aligned}$$

Мы видим, что вычисление интеграла от комплексной функции может быть сведено к вычислению двух криволинейных интегралов от действительных функций.

В частном случае, когда  $L$  есть отрезок действительной оси  $a \leq x \leq b$ ,  $z = x$  и  $f(z) = f(x)$ , причем  $f(x)$  — действительная функция, получаем по принятому определению:

$$\int_L f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) (x_{k+1} - x_k).$$

Но именно так выражается определенный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$ .

Следовательно,

$$\int_L f(x) dx = \int_a^b f(x) dx, \quad (1.2:2)$$

и определенный интеграл от действительной функции действительного переменного оказывается частным случаем интеграла от комплексной функции вдоль прямой. В случае, когда  $L$  по-прежнему есть отрезок действительной оси, но функция  $f(x)$  комплексная:  $f(x) = u(x) + iv(x)$ , получаем:

$$\begin{aligned} \int_L f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} [u(\xi_k) + iv(\xi_k)] (x_{k+1} - x_k) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} u(\xi_k) (x_{k+1} - x_k) + i \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} v(\xi_k) (x_{k+1} - x_k) = \\ &= \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx. \quad (1.2:3) \end{aligned}$$

Обращаясь к более общему случаю, когда  $L$  есть какая-нибудь кусочно-гладкая кривая, мы сможем заменить каждый из криволинейных интегралов в правой части формулы (1.2:1) соответствующим определенным интегралом от функции действительного переменного  $t$ ; тогда получим:

$$\int_L f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} \{u[x(t), y(t)]x'(t) - v[x(t), y(t)]y'(t)\} dt + \\ + i \int_{\alpha}^{\beta} \{v[x(t), y(t)]x'(t) + u[x(t), y(t)]y'(t)\} dt. \quad (1.2:4)$$

Сравнивая правую часть этой формулы с правой частью формулы (1.2:3), мы можем рассматривать ее как интеграл от комплексной функции:

$$\{u[x(t), y(t)]x'(t) - v[x(t), y(t)]y'(t)\} + \\ + i \{v[x(t), y(t)]x'(t) + u[x(t), y(t)]y'(t)\} = \\ = \{u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)]\} \cdot [x'(t) + iy'(t)] = f[\lambda(t)] \cdot \lambda'(t)$$

вдоль отрезка действительной оси  $\delta: \alpha \leq t \leq \beta$ .

Следовательно, формулу (1.2:4) можно представить в виде

$$\int_L f(z) dz = \int_{\delta} f[\lambda(t)] \cdot \lambda'(t) dt. \quad (1.2:5)$$

Здесь правая часть получается из левой путем замены, во-первых, кривой  $L$  отрезком  $\delta$  действительной оси и, во-вторых,  $z$  на  $\lambda(t)$ , а  $dz$  на  $\lambda'(t) dt$ . Ее преимущество перед левой частью заключается в том, что после отделения действительной и мнимой частей под знаком интеграла она немедленно записывается в виде двух определенных интегралов от действительных функций параметра  $t$  (см. правую часть формулы (1.2:4)).

**1.3.** Перечислим простейшие свойства интегралов от комплексных функций:

$$а) \quad \int_L f(z) dz = - \int_{L_-} f(z) dz. \quad (1.3:1)$$

Здесь через  $L_-$  обозначена кривая, отличающаяся от  $L$  только направлением обхода.

$$б) \quad \int_L f(z) dz = \int_{L_1} f(z) dz + \int_{L_2} f(z) dz + \dots + \int_{L_m} f(z) dz. \quad (1.3:2)$$

Здесь  $L_1, L_2, \dots, L_m$  — дуги, получающиеся при каком-либо разбиении кривой  $L$  на части, причем начало дуги  $L_1$  совпадает

с началом кривой  $L$ , начало дуги  $L_{k+1}$  — с концом дуги  $L_k$  ( $k=1, 2, \dots, m-1$ ) и конец дуги  $L_m$  — с концом кривой  $L$ .

$$в) \quad \int_L \sum_{j=1}^m C_j f_j(z) dz = \sum_{j=1}^m C_j \int_L f_j(z) dz. \quad (1.3:3)$$

Здесь  $f_1(z), \dots, f_m(z)$  — функции, определенные и непрерывные на  $L$ , а  $C_1, \dots, C_m$  — комплексные постоянные.

Каждое из этих трех свойств легко проверяется либо путем перехода к криволинейным интегралам по формуле (1.2:1), либо непосредственно на основании определения интеграла  $\int_L f(z) dz$

как предела интегральной суммы.

Часто приходится оценивать сверху модуль интеграла. Для этого прежде всего пользуются неравенством

$$г) \quad \left| \int_L f(z) dz \right| \leq \int_L |f(z)| ds. \quad (1.3:4)$$

Здесь  $\int_L |f(z)| ds$  — криволинейный интеграл от действительной (не отрицательной) непрерывной функции  $|f(z)|$ , взятый вдоль кривой  $L$ , т. е.  $\lim \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)| l_k$ , где  $l_k$  — длина дуги  $\sigma_k$ , а  $\zeta_k$ , по-прежнему, — точка этой дуги.

Для доказательства неравенства (1.3:4) оценим модуль интегральной суммы  $\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k)$ . Имеем:

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)| |z_{k+1} - z_k| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)| l_k.$$

Переходя в обеих частях этого неравенства к пределу, при условии, что разбиение неограниченно измельчается, получаем:

$$\left| \int_L f(z) dz \right| \leq \int_L |f(z)| ds,$$

что и требовалось доказать.

Интеграл в правой части этого неравенства нередко записывается в виде  $\int_L |f(z)| |dz|$ . При такой записи неравенство (1.3:4) приобретает вид

$$г') \quad \left| \int_L f(z) dz \right| \leq \int_L |f(z)| |dz|. \quad (1.3:4')$$

Чаше, чем неравенством (1.3:4) или (1.3:4'), пользуются другой, более грубой оценкой. А именно, предположим, что во всех точках кривой  $L$  функция  $f(z)$  удовлетворяет неравенству

$$|f(z)| \leq M$$

(в качестве  $M$  здесь можно брать, например,  $\max_L |f(z)|$ ). Тогда для модуля интеграла от  $f(z)$  получаем:

$$д) \quad \left| \int_L f(z) dz \right| \leq Ml, \quad (1.3:5)$$

где  $l$  — длина кривой  $L$ . Чтобы получить это неравенство, достаточно заметить, что

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) (z_{k+1} - z_k) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)| |z_{k+1} - z_k| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| \leq Ml,$$

и перейти к пределу.

Все перечисленные свойства являются точными аналогами соответствующих свойств интегралов от действительных функций.

Необходимо указать на одно из важных свойств интегралов от действительных функций, которое непосредственно не имеет места для интегралов от комплексных функций. Речь идет о теореме о среднем значении (первая теорема о среднем), которая в простейшем виде утверждает, что

$$\int_a^b f(t) dt = f(\tau) \int_a^b dt = f(\tau) (b-a),$$

где  $a < \tau < b$  (функция  $f(t)$  непрерывна на сегменте  $[a, b]$ ). Из нее, в частности, следует, что интеграл  $\int_a^b f(t) dt$  не может равняться нулю, если непрерывная функция  $f(t)$  не обращается в нуль ни в одной точке интервала  $(a, b)$ . Но последнее заключение неприменимо к интегралам от комплексных функций даже в том случае, если ограничиться интегрированием вдоль отрезка действительной оси.

Рассмотрим, например, интеграл  $\int_L \exp(2\pi i x) dx$ , взятый вдоль отрезка действительной оси  $L$ :  $0 \leq x \leq 1$ . Так как  $\exp(2\pi i x) = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$ , то по формуле (1.2:3) имеем:

$$\int_L \exp(2\pi i x) dx = \int_0^1 \cos 2\pi x dx + i \int_0^1 \sin 2\pi x dx = 0.$$



Однако  $\exp(2\pi ix)$  не обращается в нуль ни в одной точке отрезка  $L$ . Таким образом, указанное выше следствие из теоремы о среднем неприменимо к интегралам от комплексных функций; поэтому и сама теорема о среднем значении вообще неприменима к ним.

Приведем несколько примеров вычисления простейших интегралов от комплексных функций.

$$1) \quad \int_L dz = \lim \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) = \lim (z_n - z_0) = Z - z_0,$$

где  $z_0$  — начальная, а  $Z$  — конечная точка кривой  $L$ .

В частности, когда кривая  $L$  замкнута, то  $Z = z_0$  и интеграл обращается в нуль:

$$\int_L dz = 0.$$

$$2) \quad \int_L z dz = \lim \sum_{k=0}^{n-1} z_k (z_{k+1} - z_k) = \lim \sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1} (z_{k+1} - z_k).$$

Здесь мы для одного и того же разбиения кривой  $L$  полагаем один раз точку  $\xi_k$  совпадающей с начальной точкой  $z_k$  дуги  $\sigma_k$ , а другой раз — с конечной точкой  $z_{k+1}$  той же дуги. Так как пределы той и другой интегральной сумм одинаковы, то и среднее арифметическое их будет иметь тот же предел:

$$\begin{aligned} \int_L z dz &= \frac{1}{2} \lim \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} + z_k) (z_{k+1} - z_k) = \frac{1}{2} \lim \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1}^2 - z_k^2) = \\ &= \frac{1}{2} \lim (z_n^2 - z_0^2) = \frac{1}{2} (Z^2 - z_0^2). \end{aligned}$$

В частности, если  $L$  — замкнутая кривая, мы снова получаем, что интеграл обращается в нуль:

$$\int_L f(z) dz = 0.$$

$$3) \quad \int_L \frac{dz}{z-a}, \text{ где } L: z = a + r \exp(it), 0 \leq t \leq 2\pi,$$

есть окружность с центром в  $a$  и радиусом —  $r$ , пробегаемая однократно в положительном направлении.

Проведем вычисление двумя разными способами.

Для получения возможно более простой интегральной суммы разобьем  $L$  на  $n$  равных дуг точками:

$$z_0 = a + r, \quad z_1 = a + r \exp \left( i \frac{2\pi}{n} \right), \\ z_2 = a + r \exp \left( i \frac{4\pi}{n} \right), \quad \dots, \quad z_{n-1} = a + r \exp \left[ i \frac{2(n-1)\pi}{n} \right]$$

и положим еще

$$z_n = z_0 = a + r.$$

Наконец, в качестве точек  $\zeta_k$  на дугах  $\widehat{z_k z_{k+1}}$  выберем середины этих дуг:

$$\zeta_k = a + r \exp \left[ i \frac{(2k+1)\pi}{n} \right] \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Тогда

$$f(\zeta_k) = \frac{1}{\zeta_k - a} = \frac{1}{r} \exp \left[ -i \frac{(2k+1)\pi}{n} \right]$$

и

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k) (z_{k+1} - z_k) = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} \exp \left[ -i \frac{(2k+1)\pi}{n} \right] \left\{ \exp \left[ i \frac{2(k+1)\pi}{n} \right] - \exp \left( i \frac{2k\pi}{n} \right) \right\} = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \exp \frac{\pi i}{n} - \exp \left( -\frac{\pi i}{n} \right) \right\} = 2i \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{\pi}{n} = 2in \sin \frac{\pi}{n}$$

Следовательно,

$$\int_L \frac{dz}{z-a} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2in \sin \frac{\pi}{n} = 2\pi i \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi i.$$

Тот же результат можно получить, пользуясь формулой (1.2:5). Имеем:

$$z = \lambda(t) = a + re^{it}, \quad \lambda'(t) = ire^{it}$$

и, следовательно,

$$\int_L \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = i \int_0^{2\pi} dt.$$

Здесь  $\delta$  обозначает отрезок действительной оси от 0 до  $2\pi$ .

Поэтому  $\int_{\delta} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$  и, наконец,

$$\int_L \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

## § 2. Интегральная теорема Коши

**2.1. Теорема,** к формулировке и доказательству которой мы сейчас переходим, принадлежит к числу основных теорем всей теории аналитических функций.

**Интегральная теорема Коши.** Если  $G$  — односвязная область конечной плоскости и  $f(z)$  — однозначная функция, аналитическая в этой области, то для любой замкнутой спрямляемой кривой  $L$ , принадлежащей  $G$ , интеграл  $\int_L f(z) dz$  равен нулю.

При некоторых дополнительных ограничениях эту теорему можно легко получить из известной формулы Грина. Формула эта имеет вид

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_g \int \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

где  $g$  есть внутренность замкнутой жордановой кусочно-гладкой кривой  $L$ ,  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  — функции, непрерывные на  $L$  и внутри нее вместе со своими частными производными  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  и  $\frac{\partial P}{\partial y}$ , и, наконец, криволинейный интеграл в левой части берется в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки.

Запишем интеграл  $\int_L f(z) dz$  по формуле (1.2:1):

$$\int_L f(z) dz = \int_L u dx - v dy + i \int_L v dx + u dy.$$

Чтобы применить к интегралам в правой части формулу Грина, мы потребуем, чтобы кривая  $L$  была жордановой и кусочно-гладкой и, далее, чтобы частные производные функций  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  были непрерывными в области  $G$ . Так как

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y},$$

то последнее требование сводится к непрерывности  $f'(z)$  в области  $G$ . Так как область  $G$  односвязна и замкнутая жорданова кривая  $L$  принадлежит  $G$ , то и внутренность кривой  $L$ , т. е. область  $g$ , принадлежит  $G$ . Следовательно, частные производные функций  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  существуют и непрерывны во всех точках кривой  $L$  и ее внутренности. По формуле Грина получаем:

$$\int_L u dx - v dy = \iint_g \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy,$$

$$\int_L v dx + u dy = \iint_g \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy,$$

и так как выражения, стоящие под знаками двойных интегралов, в силу уравнений Даламбера—Эйлера обращаются в нуль, то и наши криволинейные интегралы равны нулю. Поэтому равен нулю и интеграл  $\int_L f(z) dz$ .

Мы не удовлетворимся, однако, полученным результатом и обратимся к доказательству теоремы Коши в том виде, в каком мы ее формулировали выше, т. е. не требуя ни непрерывности производной от  $f(z)$ , ни того, чтобы кривая  $L$  была жордановой и кусочно-гладкой.

**2.2. Лемма.** Если  $F(z)$ —функция, непрерывная в области  $G$ , и  $\Gamma$ —какая-нибудь спрямляемая кривая, лежащая в этой области, то для любого  $\epsilon > 0$  можно указать такое  $\delta$ , что для каждого разбиения кривой  $\Gamma$  на дуги, меньшие по длине, чем  $\delta$ , соответствующая вписанная ломаная  $\gamma$  будет содержаться в области  $G$ , причем разность между интегралами  $\int_{\Gamma} F(z) dz$

и  $\int_{\gamma} F(z) dz$  будет по модулю меньше, чем  $\epsilon$ :

$$\left| \int_{\Gamma} F(z) dz - \int_{\gamma} F(z) dz \right| < \epsilon.$$

**Доказательство.** В силу предложения б) п. 4.5 главы первой в области  $G$  можно указать ограниченное замкнутое множество  $E$ , для которого все точки кривой  $\Gamma$  будут внутренними, причем будет существовать положительное число  $\rho$  такое, что каждый круг радиуса  $\rho$  с центром в какой-либо точке кривой  $\Gamma$  принадлежит этому множеству  $E$ . Фиксировав множество  $E$  и взяв произвольное положительное число  $\epsilon$ , определим (в силу равномерной непрерывности функции  $F(z)$  на замкнутом множестве  $E$ ) такое  $\delta_1 > 0$ , чтобы для любой пары точек  $z'$  и  $z''$

принадлежащих  $E$  и удовлетворяющих условию  $|z' - z''| < \delta_1$ , выполнялось неравенство

$$|F(z') - F(z'')| < \frac{\varepsilon}{2l}, \quad (2.2:1)$$

где  $l$  — длина кривой  $\Gamma$ .

Выберем, далее, положительное число  $\delta$  столь малым, чтобы выполнялось условие  $\delta < \min(\delta, \rho)$ . Фиксируем какое-либо разбиение кривой  $\Gamma$  с максимальной длиной дуг  $\sigma_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) меньшей, чем указанное  $\delta$ , и пусть  $\zeta_k$  — точки, осуществляющие разбиение, и  $\gamma_k$  — хорды дуг  $\sigma_k$  ( $\zeta_k$  — начало и  $\zeta_{k+1}$  — конец  $\gamma_k$ ). Обозначая ломаную, последовательными звеньями которой являются  $\gamma_k$ , через  $\gamma$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} F(z) dz - \int_{\gamma} F(z) dz \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \int_{\sigma_k} F(z) dz - \int_{\gamma_k} F(z) dz \right] \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{\sigma_k} F(z) dz - \int_{\gamma_k} F(z) dz \right| \quad (2.2:2) \end{aligned}$$

Замечая, что  $\int_{\sigma_k} F(\zeta_k) dz = \int_{\gamma_k} F(\zeta_k) dz = F(\zeta_k)(\zeta_{k+1} - \zeta_k)$  (см. пример 1) п. 1.3), найдем:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\sigma_k} F(z) dz - \int_{\gamma_k} F(z) dz \right| &= \\ &= \left| \int_{\sigma_k} [F(z) - F(\zeta_k)] dz - \int_{\gamma_k} [F(z) - F(\zeta_k)] dz \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{\sigma_k} [F(z) - F(\zeta_k)] dz \right| + \left| \int_{\gamma_k} [F(z) - F(\zeta_k)] dz \right|. \quad (2.2:3) \end{aligned}$$

Разность под знаками последних интегралов можно оценить по формуле (2.2:1), так как расстояние между любой точкой  $\sigma_k$  или  $\gamma_k$  и точкой  $\zeta_k$  меньше, чем  $\delta_1$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \int_{\sigma_k} F(z) dz - \int_{\gamma_k} F(z) dz \right| &\leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2l} \cdot \text{дл. } \sigma_k + \frac{\varepsilon}{2l} \cdot \text{дл. } \gamma_k < \frac{\varepsilon}{l} \cdot \text{дл. } \sigma_k, \quad (2.2:4) \end{aligned}$$

и, следовательно, неравенство (2.2:2) дает:

$$\left| \int_{\Gamma} F(z) dz - \int_{\gamma} F(z) dz \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{l} \cdot \text{дл. } \sigma_k = \varepsilon. \quad (2.2:5)$$

Этим и заканчивается доказательство леммы.

**2.3.** Теперь обратимся собственно к доказательству интегральной теоремы Коши. Мы установим ее сначала для ломаных линий, а затем, пользуясь леммой п. 2.2, перейдем к самому общему случаю. Самое доказательство теоремы для замкнутых ломаных расчленим на отдельные этапы.

а) Д в у х у г о л ь н и к. Пусть  $L$  есть прямолинейный отрезок  $\gamma$ , проходимый два раза во взаимно противоположных направлениях. Тогда

$$\int_L f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma^{-}} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

В этом простейшем случае нам не пришлось даже обращаться к дифференцируемости функции  $f(z)$ .

б) Т р е у г о л ь н и к. Этот случай, как мы увидим из дальнейшего хода доказательства, является основным, и в нем придется существенно опереться на факт дифференцируемости функции  $f(z)$ . Итак, пусть  $L$  есть контур расположенного в области  $G$  треугольника, пробегаемый однократно в определенном направлении (например, против часовой стрелки). Положим:

$$\left| \int_L f(z) dz \right| = M (\geq 0).$$

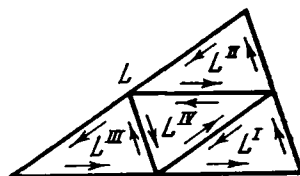


Рис. 45.

Мы хотим доказать, что  $M = 0$ . Разделим треугольник отрезками прямых, соединяющими середины его сторон, на четыре равных треугольника с контурами  $L'$ ,  $L''$ ,  $L'''$  и  $L^{IV}$  (рис. 45) и составим сумму интегралов, взятых по  $L'$ ,  $L''$ ,  $L'''$ ,  $L^{IV}$  в направлениях, указанных на чертеже стрелками (каждое — против часовой стрелки). Получим:

$$\int_{L'} f(z) dz + \int_{L''} f(z) dz + \int_{L'''} f(z) dz + \int_{L^{IV}} f(z) dz. \quad (2.3:1)$$

Каждый из этих четырех интегралов можно заменить суммой трех интегралов, взятых вдоль отдельных сторон наших треугольников. Шесть из этих интегралов, взятых по отрезкам,

расположенным на  $L$ , дадут в сумме интеграл  $\int_L f(z) dz$ . Остальные шесть разобьются на три пары интегралов, из которых каждая пара берется по одному и тому же отрезку, проходящему в двух противоположных направлениях (эти отрезки не лежат на  $L$ ). Очевидно, каждая пара дает в сумме нуль. Отсюда следует, что вся сумма (2.3:1) равна одному интегралу  $\int_L f(z) dz$ , и так как модуль суммы не превосходит суммы модулей слагаемых, то

$$\begin{aligned} M &= \left| \int_L f(z) dz \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{L'} f(z) dz \right| + \left| \int_{L''} f(z) dz \right| + \left| \int_{L'''} f(z) dz \right| + \left| \int_{L^{IV}} f(z) dz \right| \end{aligned} \quad (2.3:2)$$

Из последнего неравенства заключаем, что по крайней мере одно из слагаемых правой части должно быть не меньше, чем  $\frac{M}{4}$ . Обозначая соответствующий контур через  $L_1$  ( $L_1$  совпадает с  $L'$ ,  $L''$ ,  $L'''$  или  $L^{IV}$ ), получим:

$$\left| \int_{L_1} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4}.$$

Повторим теперь с треугольником  $L_1$  то же, что мы проделывали выше с треугольником  $L$ , а именно разделим  $L_1$  на четыре равных треугольника:  $L'_1$ ,  $L''_1$ ,  $L'''_1$  и  $L^{IV}_1$ , заметим, что интеграл вдоль  $L_1$  равен сумме четырех интегралов вдоль  $L'_1$ ,  $L''_1$ ,  $L'''_1$  и  $L^{IV}_1$  (взятых в одном и том же направлении — против часовой стрелки), и, наконец, заключим, что модуль одного из этих последних будет не меньше, чем  $\frac{1}{4} \frac{M}{4} = \frac{M}{4^2}$ . Пусть это будет интеграл вдоль  $L_2$  ( $L_2$  совпадает с  $L'_1$ ,  $L''_1$ ,  $L'''_1$  или  $L^{IV}_1$ ). Тогда будем иметь:

$$\left| \int_{L_2} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^2}.$$

Продолжая рассуждение, получим последовательность треугольников с контурами  $L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$ , обладающих следующими свойствами:

1) Каждый последующий треугольник содержится в предыдущем и получается из него, если середины двух его сторон соединить отрезками прямых; отсюда вытекает, в частности, что

длина контура  $L_n$  — обозначим ее  $l_n$  — в два раза менее  $l_{n-1}$  и, следовательно,  $l_n = \frac{l}{2^n}$ , где  $l$  есть длина контура  $L$ .

2) Каждый из треугольников содержится в области  $G$ ; это следует из того, что  $L$  содержится в  $G$ , а поэтому (в силу односвязности области  $G$ ) и внутренность  $L$  принадлежит  $G$ .

3) Интеграл от  $f(z)$  вдоль  $L_n$  удовлетворяет неравенству

$$\left| \int_{L_n} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^n} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.3:3)$$

Из свойства 1) вытекает, что наши треугольники стягиваются к некоторой точке  $\zeta$ , которая принадлежит каждому из треугольников (она может находиться внутри  $L_n$  или на  $L_n$ ).

В силу свойства 2) точка  $\zeta$  содержится в области  $G$ . Следовательно, по условию теоремы, функция  $f(z)$  обладает в точке  $\zeta$  производной  $f'(\zeta)$ , и мы можем для любого  $\varepsilon > 0$  указать такое  $\delta$ , что неравенство

$$\left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} - f'(\zeta) \right| < \varepsilon \quad (2.3:4)$$

будет выполняться при  $|z - \zeta| < \delta$ .

Так как точка  $\zeta$  принадлежит любому из рассматриваемых треугольников и они стягиваются к этой точке (длины контуров  $L_n$  стремятся к нулю), то, начиная с некоторого  $n > N$ , эти треугольники целиком будут содержаться в круге  $|z - \zeta| < \delta$ , и, следовательно, для всех точек  $z$ , принадлежащих  $L_n$ , будет выполняться неравенство (2.3:4).

Перепишем его в виде:

$$|f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)(z - \zeta)| < \varepsilon |z - \zeta|;$$

замечая, что расстояние  $|z - \zeta|$  между двумя точками одного и того же треугольника меньше, чем периметр этого треугольника, т. е. меньше, чем  $\frac{l}{2^n}$ , получим:

$$|f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)(z - \zeta)| < \varepsilon \frac{l}{2^n}, \quad z \in L_n, \quad n > N. \quad (2.3:5)$$

Проинтегрируем теперь функцию  $f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)(z - \zeta)$  вдоль замкнутой линии  $L_n$ . Получим:

$$\begin{aligned} \int_{L_n} [f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)(z - \zeta)] dz = \\ = \int_{L_n} f(z) dz - f(\zeta) \int_{L_n} dz - f'(\zeta) \int_{L_n} z dz - \zeta f'(\zeta) \int_{L_n} dz = \int_{L_n} f(z) dz. \end{aligned} \quad (2.3:6)$$



Мы воспользовались здесь тем, что интегралы  $\int_{L_n} dz$  и  $\int_{L_n} z dz$  равны нулю (см. примеры 1) и 2) в п. 1.3). Следовательно, в силу (2.3:6), (2.3:5) и неравенства (1.3:5), получим:

$$\left| \int_{L_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{L_n} [f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)(z - \zeta)] dz \right| < \varepsilon \frac{l}{2^n} l_n = \\ = \varepsilon \frac{l}{2^n} \frac{l}{2^n} = \varepsilon \frac{l^2}{4^n}. \quad (2.3:7)$$

Итак, нам удалось в дополнение к неравенству (2.3:3), где числа  $\frac{M}{4^n}$  оценивались сверху модулем интеграла вдоль  $L_n$ , получить неравенство (2.3:7), где этот модуль оценивается сверху числами  $\varepsilon \frac{l^2}{4^n}$ . Из сопоставления неравенств (2.3:3) и (2.3:7) выводим, что

$$M < \varepsilon l^2,$$

или, заставляя  $\varepsilon$  стремиться к нулю:

$$M \leq 0.$$

Но  $M$  не может быть меньше нуля. Следовательно,

$$M = \left| \int_L f(z) dz \right| = 0,$$

чем и заканчивается доказательство интегральной теоремы Коши для случая треугольника.

в) Теперь мы в состоянии перейти к случаю, когда  $L$  — произвольная замкнутая ломаная, лежащая в области  $G$ . Задача заключается в том, чтобы суметь разложить такую ломаную на треугольники (для которых теорема уже доказана).

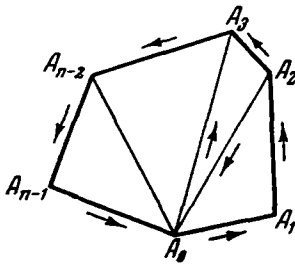


Рис. 46.

Начнем со случая, когда  $L$  представляет контур выпуклого  $n$ -угольника ( $n \geq 4$ )  $A_0 A_1 \dots A_{n-1} A_0$ , проходящий однократно в определенном направлении. Разложим многоугольник на  $n - 2$  треугольников посредством диагоналей, проведенных из вершины  $A_0$  (рис. 46). Каждый из этих треугольников принадлежит данному многоугольнику и потому — также области  $G$  (мы снова используем односвязность этой области). Следовательно, к полученным треугольникам применима доказываемая теорема.

Запишем интеграл от  $f(z)$  вдоль  $L$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_L &= \left( \int_{A_0 A_1 A_2} + \int_{A_2 A_0} \right) + \left( \int_{A_0 A_2} + \int_{A_2 A_3 \dots A_{n-1} A_0} \right) = \\ &= \int_{A_0 A_1 A_2 A_0} + \int_{A_0 A_2 A_3 \dots A_{n-1} A_0} = \int_{A_0 A_2 A_3 \dots A_{n-1} A_0} \end{aligned}$$

(так как, по доказанному,  $\int_{A_0 A_1 A_2 A_0} = 0$ ) Мы видим, что интеграл по

контур выпуклого  $n$ -угольника оказался равным интегралу по контуру выпуклого  $(n-1)$ -угольника. Отсюда, повторяя это рассуждение несколько раз, заключаем, что тот же интеграл равен интегралу по контуру треугольника  $A_0 A_{n-2} A_{n-1}$ , т. е. нулю. Таким образом, теорема доказана и для произвольного выпуклого многоугольника.

Перейдем к случаю, когда  $L$  есть произвольная замкнутая ломаная, не имеющая самопересечений и однократно проходимая. Из сделанных предположений следует, что она является жордановой кривой; поэтому можно говорить о ее внутренности, которая, в силу односвязности области  $G$ , должна принадлежать  $G$ . Покажем, что внутренность ломаной  $L$  можно разложить на выпуклые многоугольники. С этой целью заметим, что выпуклый многоугольник

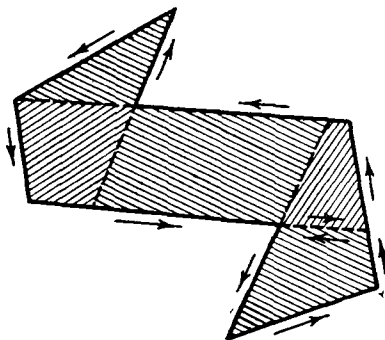


Рис. 47.

вполне характеризуется тем, что любую из его сторон можно продолжать по прямой через любую из двух соответствующих вершин, не попадая при этом продолжении внутрь многоугольника. Напротив, среди сторон невыпуклого многоугольника должны иметься такие, которые при продолжении могут попасть внутрь многоугольника. Будем продолжать каждую из таких сторон одним или двумя возможными способами внутрь  $L$  до тех пор, пока снова не встретим  $L$  (рис. 47). В результате первоначальный многоугольник окажется разложенным на конечное число многоугольников, из которых каждый будет выпуклым (так как, в силу проведенного построения, ни одна из сторон не может быть продолжена внутрь нового многоугольника). Но интеграл по каждому выпуклому многоугольнику равен нулю; следовательно, можно отщеплять их по одному от всего многоугольника, не меняя значения интеграла

$\int_L f(z) dz$ . В результате получим, что и в этом случае интеграл по  $L$  равен нулю.

Пусть, наконец,  $L$  — произвольная замкнутая ломаная. По определению, она состоит из конечного числа прямолинейных звеньев  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ , заданных в определенном порядке так, что конец каждого является началом следующего звена, причем конец последнего звена совпадает с началом первого (п. 4. 1 главы первой). Некоторые из звеньев могут иметь общие точки и помимо

указанных, т. е. кривая может самопересекаться; при этом некоторые из прямолинейных отрезков  $\Delta_k$  могут являться частями других отрезков или даже совпадать с ними. Это означает, что при прохождении ломаной  $L$  некоторые из принадлежащих ей отрезков частично или полностью будут описываться по несколько раз (рис. 48).

Для облегчения рассуждений мы будем проводить их применительно к нашему чертежу, где изображена ломаная, состоящая из

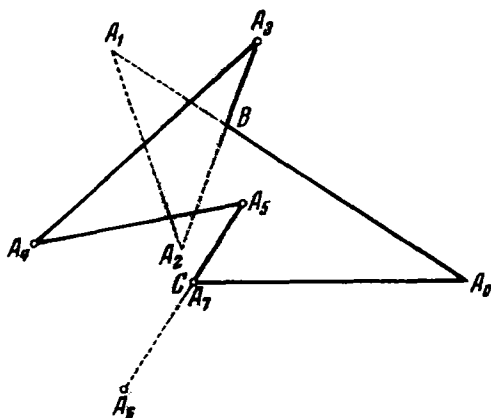


Рис. 48.

восьми звеньев:  $\Delta_k = A_k A_{k+1}$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ;  $A_8 = A_0$ ), причем звено  $A_8 A_7$  составляет часть звена  $A_5 A_6$ . Будем последовательно двигаться по  $L$ , начиная от  $A_0$ , до тех пор, пока некоторое новое звено в первый раз не встретит одно из ранее пройденных звеньев. В нашем случае таким звеном будет  $A_2 A_3$ , пересекающее  $A_0 A_1$  в точке  $B$ . Тогда замкнутая ломаная, получающаяся, если обходить  $L$ , начиная от точки  $B$  до первого возвращения в ту же точку (в нашем случае треугольник  $BA_1 A_2$ ), будет представлять замкнутую жорданову кривую, лежащую в области  $G$ . Следовательно, интеграл вдоль нее равен нулю, и мы не изменим значения интеграла вдоль  $L$ , если исключим из  $L$  указанную кривую.

Получим ломаную  $L'$ , образованную по порядку звеньями  $A_0 B, BA_3, A_3 A_4, A_4 A_5, A_5 A_6, A_6 A_7, A_7 A_0$ . Количество ее вершин, а следовательно и звеньев, по крайней мере на единицу меньше первоначального количества, так как отброшенная нами часть ломаной  $L$  была по крайней мере треугольником, так что отброшены были не менее чем две вершины, а на их место появилась не более чем одна новая вершина ( $B$ ).

Этим рассуждением можно было бы и ограничиться, если бы разобранный только что случай был единственно возможным. Но имеется еще одна возможность, которую мы обнаружим на примере ломаной  $L'$ . Обходим ее снова, начиная от  $A_0$ , вдоль звеньев  $A_0B$ ,  $BA_3$ ,  $A_3A_4$ ,  $A_4A_5$ ,  $A_5A_6$ . До сих пор самопересечений не встречалось. Но следующее звено  $A_6A_7$  направляется по звену  $A_5A_6$  так, что мы при этом встречаем ранее пройденные внутренние точки звеньев, т. е. точки самопересечения, однако ни одна из них не является при этом первой (точка  $A_6$ , общая для двух последовательных звеньев  $A_5A_6$  и  $A_6A_7$ , не является точкой самопересечения для  $L'$ ).

В связи с этим мы возвращаемся по звену  $A_5A_6$  назад до тех пор, пока не встретим ближайшую к  $A_6$  из числа двух соседних вершин  $A_5$  и  $A_7$ . В нашем случае это будет  $C = A_7$ . Замкнутая ломаная, состоящая из части звена  $A_5A_6$ , начиная от точки  $C$  до вершины  $A_6$ , и затем из части звена  $A_6A_7$  от  $A_6$  снова до точки  $C$ , представляет двухугольник, интеграл по которому есть нуль. Поэтому указанную ломаную можно исключить из  $L'$ , не меняя значения интеграла вдоль  $L'$ . Получится замкнутая ломаная  $L''$ , образованная по порядку звеньями  $A_0B$ ,  $BA_3$ ,  $A_3A_4$ ,  $A_4A_5$ ,  $A_5C$ ,  $CA_0$ . Количество ее вершин, а следовательно, и звеньев на единицу меньше, чем у ломаной  $L'$ , так как мы отбросили вместе с двухугольником одну вершину ( $A_6$ ), не введя взамен ее никаких новых вершин ( $C$  совпадает с  $A_7$  либо в другом возможном случае — с  $A_5$ ).

Наше рассуждение имеет вполне общий характер. После конечного числа шагов мы получим либо замкнутую ломаную  $L^{(h)}$ , являющуюся жордановой кривой (в нашем случае такова ломаная  $L''$ ), либо получим двухугольник. В каждом из этих случаев заключаем, что интеграл вдоль первоначальной ломаной  $L$  есть нуль.

Итак, теорема доказана для произвольной замкнутой ломаной. Заметим, что, распространяя теорему от случая треугольника к этому последнему случаю, мы уже не пользовались никакими соображениями теоретико-функционального порядка. Все наши рассуждения здесь имели исключительно элементарно-геометрический характер.

г) Рассмотрим, наконец, самый общий случай произвольной замкнутой спрямляемой кривой  $L$ , принадлежащей области  $G$ . Вследствие леммы п. 2.2, для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такую замкнутую ломаную  $\gamma$ , вписанную в  $L$  и принадлежащую области  $G$ ,

что интегралы  $\int_L f(z) dz$  и  $\int_\gamma f(z) dz$  будут удовлетворять неравенству

$$\left| \int_L f(z) dz - \int_\gamma f(z) dz \right| < \varepsilon.$$

Но, по доказанному выше,  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ ; следовательно,

$$\left| \int_L f(z) dz \right| < \epsilon,$$

и так как  $\epsilon$  здесь — произвольно малое положительное число, то

$$\int_L f(z) dz = 0,$$

чем и заканчивается все доказательство.

В доказанной теореме контур интегрирования  $L$  принадлежал области  $G$ , в которой функция  $f(z)$  является аналитической. Однако ее можно распространить и на тот случай, когда  $L$  представляет границу этой области. Именно, справедливо следующее предложение.

*Если  $G$  есть внутренность замкнутой жордановой спрямляемой кривой  $L$  и  $f(z)$  — функция непрерывная в замкнутой области  $\bar{G}$  и аналитическая в области  $G$ , то интеграл от  $f(z)$  по  $L$  равен нулю:*

$$\int_L f(z) dz = 0.$$

В полном объеме мы докажем эту теорему в главе пятой. Здесь же ограничимся доказательством одного ее частного случая, достаточного для большинства приложений. Пусть  $L$  — спрямляемая кривая, которую каждый луч, выходящий из некоторой точки  $z_0$  области  $G$ , встречает лишь в одной точке.

Предположим, что уравнение кривой  $L$  представлено в виде

$$z = z_0 + \lambda(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

где  $\theta$  — полярный угол относительно полярной системы координат с полюсом в точке  $z_0$ . Тогда для любого  $\rho$ ,  $0 < \rho < 1$ , кривая  $L_\rho: z = z_0 + \rho\lambda(\theta)$ , подобная с  $L$  относительно точки  $z_0$ , принадлежит области  $G$ . Поэтому, в силу интегральной теоремы Коши,

$$\int_{L_\rho} f(z) dz = 0, \quad 0 < \rho < 1.$$

Если

$$\sum_0^n f(z_k) (z_{k+1} - z_k) = \sum_0^n f[z_0 + \lambda(\theta_k)] [\lambda(\theta_{k+1}) - \lambda(\theta_k)]$$

— интегральная сумма для интеграла  $\int_L f(z) dz$ , то, вследствие подобия кривых  $L_\rho$  и  $L$ , выражение

$$\sum_0^n f[z_0 + \rho\lambda(\theta_k)] \cdot [\rho\lambda(\theta_{k+1}) - \rho\lambda(\theta_k)]$$

будет интегральной суммой для  $\int_{L_\rho} f(z) dz$ . Поэтому последний интеграл можно представить также в виде интеграла вдоль  $L$ :

$$\int_L \rho f[z_0 + \rho \lambda(\theta)] dz = 0.$$

Преобразуем теперь интеграл  $\int_L f(z) dz$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_L f[z_0 + \lambda(\theta)] dz &= \int_L \{f[z_0 + \lambda(\theta)] - \rho f[z_0 + \rho \lambda(\theta)]\} dz = \\ &= \int_L \{(1 - \rho) f[z_0 + \lambda(\theta)] + \rho (f[z_0 + \lambda(\theta)] - f[z_0 + \rho \lambda(\theta)])\} dz. \end{aligned}$$

Обозначим  $\max_{\bar{G}} |f(z)| = M$  и  $\max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |\lambda(\theta)| = m$ . Для любого  $\epsilon > 0$  можно указать такое  $\delta(\epsilon) > 0$ , что неравенство

$$|f(z') - f(z'')| < \epsilon$$

будет выполняться в каждой паре точек  $z', z''$  области  $G$ , удовлетворяющей условию  $|z' - z''| < \delta(\epsilon)$ . Поэтому, взяв  $1 - \rho < \frac{\delta(\epsilon)}{m}$  будем иметь:

$$|f[z_0 + \lambda(\theta)] - f[z_0 + \rho \lambda(\theta)]| < \epsilon$$

и, следовательно,

$$\left| \int_L f(z) dz \right| < [(1 - \rho) M + \rho \epsilon] \cdot \text{дл. } L.$$

Беря здесь  $\rho \rightarrow 1$ , получаем:

$$\left| \int_L f(z) dz \right| \leq \epsilon \cdot \text{дл. } L,$$

и, наконец, беря  $\epsilon \rightarrow 0$ , заключаем, что

$$\int_L f(z) dz = 0,$$

что и требовалось доказать.

В частности, в качестве  $L$  можно брать круг или любой выпуклый многоугольник.

Заметим, что из того, что наше предложение справедливо для любого треугольника, вытекает, уже известным нам путем, что оно справедливо также и для любого замкнутого многоугольного контура без самопересечений (не обязательно выпуклого).

Мы не можем, однако, опереться на лемму п. 2.2 и распространить предложение на случай произвольной замкнутой жордановой спрямляемой кривой  $L$ , так как вписанные в нее ломаные  $\Delta$  могут частично выходить за пределы замкнутой области  $\bar{G}$ , ограниченной кривой  $L$ , и, следовательно, интегралы  $\int_L f(z) dz$  не будут иметь смысла.

Как мы уже сказали, доказательство теоремы в полном объеме будет дано позже (на основании иных соображений).

2.4. В первых работах Коши его теорема служила средством вычисления различных определенных интегралов от функций действительного переменного (главным образом, несобственных интегралов). Чтобы дать понятие об этих приложениях теоремы Коши, вызвавших к жизни саму теорему, приведем три примера.

1. Интегралы Френеля:  $\int_0^\infty \cos \xi^2 d\xi$  и  $\int_0^\infty \sin \xi^2 d\xi$ .

Для вычисления этих, встречающихся в теории дифракции, интегралов рассмотрим вспомогательную функцию комплексного переменного  $F(z) = e^{iz^2}$ . Функцию эту можно рассматривать как сложную функцию  $F(z) = \varphi[f(z)]$ , где  $f(z) = iz^2$  и  $\varphi(\xi) = e^\xi$ . Отсюда по правилам дифференцирования сложной функции следует, что  $F(z)$  дифференцируема во всей плоскости, причем  $\frac{dF(z)}{dz} = 2ize^{iz^2}$ . Следовательно, к ней применима интегральная теорема Коши.

Возьмем линию  $L$  рис. 49 в качестве контура интегрирования. Она состоит из отрезка  $OA$  положительной полуоси, длиной  $R$  ( $R$  — произвольное положительное число), дуги  $AB$  окружности радиуса  $R$  с центром в начале координат и отрезка  $BO$  биссектрисы первого координатного угла. Угол  $AOB$  равен, таким образом,  $\frac{\pi}{4}$ .

В силу интегральной теоремы, интеграл  $\int_L e^{iz^2} dz$  равен нулю:

$$\int_L e^{iz^2} dz = \int_{OA} e^{iz^2} dz + \int_{AB} e^{iz^2} dz + \int_{BO} e^{iz^2} dz = 0.$$

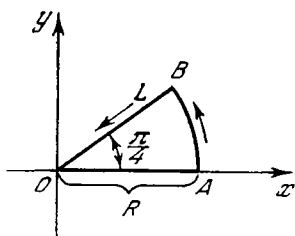


Рис. 49.

На  $OA$   $\zeta$  равно действительному числу  $\xi$ . Поэтому  $d\zeta = d\xi$  и

$$J_1(R) = \int_{OA} e^{i\zeta^2} d\zeta = \int_0^R e^{i\xi^2} d\xi.$$

На  $AB$   $\zeta = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , где  $\varphi$  меняется в пределах от 0 до  $\frac{\pi}{4}$ . Поэтому

$$\zeta^2 = R^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) \quad \left(0 \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$d\zeta = R(-\sin \varphi + i \cos \varphi) d\varphi = iR(\cos \varphi + i \sin \varphi) d\varphi$$

и

$$J_2(R) = \int_{AB} e^{i\zeta^2} d\zeta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp[iR^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)] iR(\cos \varphi + i \sin \varphi) d\varphi.$$

Наконец, на  $BO$   $\zeta = \rho \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$ , где  $\rho$  меняется от  $R$  до 0. Поэтому

$$\zeta^2 = \rho^2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = i\rho^2, \quad d\zeta = \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) d\rho$$

и

$$\begin{aligned} J_3(R) &= \int_{BO} e^{i\zeta^2} d\zeta = \int_R^0 e^{-\rho^2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) d\rho = \\ &= -\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \int_0^R e^{-\rho^2} d\rho = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \int_0^R e^{-\rho^2} d\rho. \end{aligned}$$

Заставим  $R$  неограниченно возрастать.  $J_3(R)$  будет стремиться при этом к пределу  $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \int_0^\infty e^{-\rho^2} d\rho = -\frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i)$ , так

$$\text{как } \int_0^\infty e^{-\rho^2} d\rho = \frac{\sqrt{\pi}}{2} *).$$

\*) В самом деле,

$$\int_{-R}^R \int_{-R}^R e^{-\xi^2 - \eta^2} d\xi d\eta = \left(\int_{-R}^R e^{-\xi^2} d\xi\right)^2 = 4 \left(\int_0^R e^{-\xi^2} d\xi\right)^2 \quad (a)$$

Впишем в квадрат с центром в начале координат, со сторонами, параллельными осям координат и равными по длине  $2R$ , круг  $k$ , а также опишем около



Покажем, что  $J_2(R) \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ . Для этого оценим модуль  $|J_2(R)|$ . Имеем:

$$|J_2(R)| \leq R \int_0^{\pi/4} |\exp[iR^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)]| \cdot |\cos \varphi + i \sin \varphi| d\varphi.$$

Здесь

$$|\exp[iR^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)]| = \exp(-R^2 \sin 2\varphi)$$

и  $|\cos \varphi + i \sin \varphi| = 1$ ; поэтому

$$|J_2(R)| \leq R \int_0^{\pi/4} \exp(-R^2 \sin 2\varphi) d\varphi.$$

Но  $\sin 2\varphi \geq \frac{2}{\pi} \cdot 2\varphi$  при  $0 \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2}$  \*).

этого квадрата круг  $K$ . Тогда в силу положительности подынтегральной функции

$$\int_K \int_K e^{-\xi^2 - \eta^2} d\xi d\eta < \int_{-R}^R \int_{-R}^R e^{-\xi^2 - \eta^2} d\xi d\eta < \int_K \int_K e^{-\xi^2 - \eta^2} d\xi d\eta,$$

или, заменяя прямоугольные декартовы координаты  $\xi$  и  $\eta$  полярными  $\rho$  и  $\varphi$  и пользуясь формулой (а), получим:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-\rho^2} \rho d\rho d\varphi < 4 \left( \int_0^R e^{-\xi^2} d\xi \right)^2 < \int_0^{2\pi} \int_0^{R\sqrt{2}} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\varphi.$$

Выполняя интегрирование и извлекая квадратный корень из всех членов неравенства, найдем:

$$\sqrt{\pi(1-e^{-R^2})} < 2 \int_0^R e^{-\xi^2} d\xi < \sqrt{\pi(1-e^{-2R^2})}$$

откуда

$$\lim_{R \rightarrow \infty} 2 \int_0^R e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi} \quad \text{или} \quad \int_0^\infty e^{-\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

\* ) В самом деле, функция  $f(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$  убывает в интервале  $(0, \frac{\pi}{2})$  так как ее производная

$$f'(\alpha) = \frac{\alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{\alpha^2} = \frac{\cos \alpha (\alpha - \operatorname{tg} \alpha)}{\alpha^2} < 0$$

при  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Поэтому  $f(\alpha) > f(\frac{\pi}{2})$ , если  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ , т. е.  $\frac{\sin \alpha}{\alpha} > \frac{2}{\pi}$ ,

или

$$\sin \alpha > \frac{2}{\pi} \alpha \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

Это неравенство переходит в равенство при  $\alpha=0$  или  $\alpha=\frac{\pi}{2}$

Следовательно,

$$|J_2(R)| \leq R \int_0^{\pi/4} \exp\left(-\frac{4}{\pi} R^2 \varphi\right) d\varphi = R \frac{\exp\left(-\frac{4}{\pi} R^2 \varphi\right) \Big|_0^{\pi/4}}{-\frac{4}{\pi} R^2} = \\ = \frac{\pi}{4} \frac{1 - e^{-R^2}}{R}$$

откуда и вытекает, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} J_2(R) = 0.$$

Наконец, рассмотрим

$$J_1(R) = \int_0^R e^{i\xi^2} d\xi = \int_0^R \cos \xi^2 d\xi + i \int_0^R \sin \xi^2 d\xi.$$

Так как  $J_1(R) + J_2(R) + J_3(R) = 0$  при любом  $R$ , то  $J_1(R) = -J_2(R) - J_3(R)$  и

$$\lim_{R \rightarrow \infty} J_1(R) = -\lim_{R \rightarrow \infty} J_2(R) - \lim_{R \rightarrow \infty} J_3(R) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} (1 + i),$$

г. е.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_0^R \cos \xi^2 d\xi + i \int_0^R \sin \xi^2 d\xi \right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} (1 + i).$$

Отсюда следует, во-первых, что существуют интегралы

$$\int_0^\infty \cos \xi^2 d\xi = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \cos \xi^2 d\xi \quad \text{и} \quad \int_0^\infty \sin \xi^2 d\xi = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \sin \xi^2 d\xi$$

и, во-вторых, что

$$\int_0^\infty \cos \xi^2 d\xi = \int_0^\infty \sin \xi^2 d\xi = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

## 2. Интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} \cos(2\lambda \alpha x) dx \quad (\lambda > 0, \alpha > 0).$$

Для его вычисления будем интегрировать функцию  $f(z) = e^{-\lambda z^2}$  по контуру  $L$  прямоугольника, изображенного на рис. 50. Так как эта функция дифференцируема во всей плоскости, то к ней применима интегральная теорема. Следовательно,

$$\int_L e^{-\lambda \zeta^2} d\zeta = \int_{AB} e^{-\lambda \zeta^2} d\zeta + \int_{BC} e^{-\lambda \zeta^2} d\zeta + \int_{CD} e^{-\lambda \zeta^2} d\zeta + \int_{DA} e^{-\lambda \zeta^2} d\zeta = 0.$$

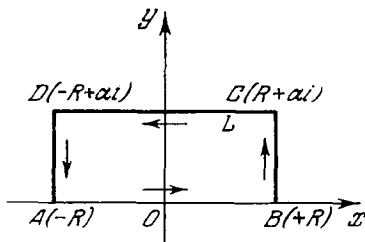


Рис. 50.

На  $AB$

$$\zeta = x \quad (-R \leq x \leq R) \quad \text{и} \quad d\zeta = dx;$$

поэтому

$$J_1 = \int_{AB} e^{-\lambda \zeta^2} d\zeta = \int_{-R}^{+R} e^{-\lambda x^2} dx.$$

На  $BC$

$$\zeta = R + iy \quad (0 \leq y \leq a), \quad \zeta^2 = R^2 + 2iRy - y^2 \quad \text{и} \quad d\zeta = i dy.$$

поэтому

$$\begin{aligned} J_2 = \int_{BC} e^{-\lambda \zeta^2} d\zeta &= \int_0^a \exp[-\lambda(R^2 + 2iRy - y^2)] i dy = \\ &= i \int_0^a \exp[-\lambda(R^2 - y^2)] \exp(-2Riy\lambda) dy. \end{aligned}$$

На  $CD$

$$\zeta = x + ia \quad (R \geq x \geq -R), \quad \zeta^2 = x^2 + 2iax - a^2 \quad \text{и} \quad d\zeta = dx,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} J_3 = \int_{CD} e^{-\lambda \zeta^2} d\zeta &= \int_{+R}^{-R} \exp[-\lambda(x^2 + 2iax - a^2)] dx = \\ &= -e^{\lambda a^2} \int_{-R}^{+R} \exp(-\lambda x^2 - 2ia\lambda x) dx = \\ &= -e^{\lambda a^2} \int_{-R}^{+R} e^{-\lambda x^2} [\cos(2\lambda a x) - i \sin(2\lambda a x)] dx. \end{aligned}$$

Наконец, на  $DA$

$$\zeta = -R + iy \quad (a \geq y \geq 0), \quad \zeta^2 = R^2 - 2Riy - y^2 \quad \text{и} \quad d\zeta = i dy;$$

поэтому

$$\begin{aligned} J_4 &= \int_{DA} e^{-\lambda \zeta^2} d\zeta = \int_a^0 \exp[-\lambda(R^2 - 2Riy - y^2)] i dy = \\ &= -i \int_0^a \exp[-\lambda(R^2 - y^2)] \exp(2Riy\lambda) dy. \end{aligned}$$

Заставим теперь  $R$  неограниченно возрастать. Тогда интегралы  $J_2$  и  $J_4$  будут стремиться к нулю. В самом деле,

$$|J_2| \leq \int_0^a |\exp[-\lambda(R^2 - y^2)]| |\exp(-2iR\lambda y)| dy = \int_0^a e^{-\lambda(R^2 - y^2)} dy.$$

При  $R > a$  получаем:

$$|J_2| \leq \int_0^a \exp[-\lambda(R^2 - a^2)] dy = a \exp[-\lambda(R^2 - a^2)] \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty).$$

Точно так же

$$\begin{aligned} |J_4| &\leq \int_0^a |\exp[-\lambda(R^2 - y^2)]| |\exp 2iR\lambda y| dy = \\ &= \int_0^a \exp[-\lambda(R^2 - y^2)] dy \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Интеграл  $J_1$  при  $R \rightarrow \infty$  будет стремиться к пределу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\lambda x^2) dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-(\sqrt{\lambda}x)^2] d(\sqrt{\lambda}x) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

(так как  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ ; см. предыдущий пример).

Наконец, из соотношения

$$J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = 0$$

выводим:

$$\begin{aligned} e^{\lambda a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} [\cos(2\lambda a x) - i \sin(2\lambda a x)] dx = \\ = -\lim_{R \rightarrow \infty} J_3 = \lim_{R \rightarrow \infty} J_1 + \lim_{R \rightarrow \infty} J_2 + \lim_{R \rightarrow \infty} J_4 = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \end{aligned}$$

Сравнивая в этом соотношении действительные части, получаем:

$$e^{\lambda a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} \cos(2\lambda ax) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}},$$

т е

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} \cos(2\lambda ax) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\lambda a^2}.$$

3. Интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi$ .

Возьмем вспомогательную функцию  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ . Функция эта

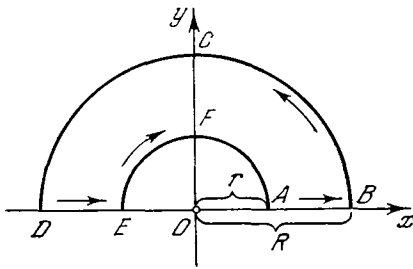


Рис. 51.

определена в области  $G$ , образованной всеми точками плоскости, исключая начало координат, и дифференцируема в этой области (в последнем убеждаемся прямым дифференцированием:  $\frac{df(z)}{dz} = \frac{e^{iz}(iz-1)}{z^2}$ ).

Беря контур интегрирования  $L$ , изображенный на рис. 51 (этот контур, как и все точки его внутренней области, лежит в области  $G$ ), найдем по интегральной

теореме, примененной к функции  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ :

$$\int_L \frac{e^{i\xi} d\xi}{\xi} = \int_{AB} \frac{e^{i\xi} d\xi}{\xi} + \int_{BCD} \frac{e^{i\xi} d\xi}{\xi} + \int_{DE} \frac{e^{i\xi} d\xi}{\xi} + \int_{EFA} \frac{e^{i\xi} d\xi}{\xi} = 0.$$

На  $AB$   $\xi$  равно действительному числу  $\xi$ . Поэтому  $d\xi = d\xi$  и интеграл

$$J_1 = \int_{AB} \frac{e^{i\xi} d\xi}{\xi} = \int_r^R \frac{e^{i\xi} d\xi}{\xi} = \int_r^R \frac{\cos \xi d\xi}{\xi} + i \int_r^R \frac{\sin \xi d\xi}{\xi}$$

На  $BCD$   $\xi = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ), поэтому

$$d\xi = R(-\sin \varphi + i \cos \varphi) d\varphi = iR(\cos \varphi + i \sin \varphi) d\varphi$$

и

$$\begin{aligned} J_2 = \int_{BCD} \frac{e^{i\xi} d\xi}{\xi} &= \int_0^\pi \frac{\exp[iR(\cos \varphi + i \sin \varphi)] iR(\cos \varphi + i \sin \varphi) d\varphi}{R(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \\ &= i \int_0^\pi \exp(iR \cos \varphi - R \sin \varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

На  $DE$   $\zeta$  равно действительному числу  $\xi$ ; поэтому  $d\zeta = d\xi$  и

$$J_3 = \int_{DE} \frac{e^{i\zeta} d\zeta}{\zeta} = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{i\xi} d\xi}{\xi} = \int_{-R}^{-r} \frac{\cos \xi d\xi}{\xi} + i \int_{-R}^{-r} \frac{\sin \xi d\xi}{\xi}.$$

Заменяя здесь переменную интегрирования  $\xi$  на  $-\xi$ , получим:

$$J_3 = - \int_r^R \frac{\cos \xi d\xi}{\xi} + i \int_r^R \frac{\sin \xi d\xi}{\xi}.$$

Наконец, на  $EFA$

$$\zeta = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (\pi \geq \varphi \geq 0);$$

поэтому

$$d\zeta = ir (\cos \varphi + i \sin \varphi) d\varphi$$

и

$$\begin{aligned} J_4 = \int_{EFA} \frac{e^{i\zeta} d\zeta}{\zeta} &= \int_{\pi}^0 \frac{\exp [ir (\cos \varphi + i \sin \varphi)] ir (\cos \varphi + i \sin \varphi)}{r (\cos \varphi + i \sin \varphi)} d\varphi = \\ &= -i \int_0^{\pi} \exp (ir \cos \varphi - r \sin \varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Заставим  $R$  неограниченно возрастать; при этом

$$J_2 = i \int_0^{\pi} \exp (iR \cos \varphi - R \sin \varphi) d\varphi$$

будет стремиться к нулю. В самом деле,

$$\begin{aligned} |J_2| &= \left| \int_0^{\pi} \exp (iR \cos \varphi - R \sin \varphi) d\varphi \right| \leq \int_0^{\pi} |\exp (iR \cos \varphi - R \sin \varphi)| d\varphi = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \exp (-R \sin \varphi) d\varphi < 2 \int_0^{\pi/2} \exp \left( -R \frac{2}{\pi} \varphi \right) d\varphi = \pi \frac{1 - e^{-R}}{R} < \frac{\pi}{R}, \end{aligned}$$

откуда и следует, что  $\lim_{R \rightarrow \infty} J_2 = 0$ .

Пусть, наконец,  $r$  стремится к нулю; найдем предел интеграла  $J_4$ , равного

$$-i \int_0^{\pi} \exp (ir \cos \varphi - r \sin \varphi) d\varphi.$$

Так как функция  $\exp(iz)$  непрерывна в точке  $z=0$ , где она обращается в единицу, то для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что при  $|z| = r < \delta(\varepsilon)$  будет выполняться неравенство

$$|\exp(iz) - 1| = |\exp(ir \cos \varphi - r \sin \varphi) - 1| < \varepsilon.$$

Отсюда вытекает, что

$$\left| J_4 - \left( -i \int_0^\pi 1 \cdot d\varphi \right) \right| = \left| \int_0^\pi [\exp(ir \cos \varphi - r \sin \varphi) - 1] d\varphi \right| < \pi \varepsilon,$$

т. е.

$$\lim_{r \rightarrow 0} J_4 = -i \int_0^\pi 1 \cdot d\varphi = -\pi i.$$

Возвращаясь к основному соотношению

$$\int_L \frac{e^{i\xi} d\xi}{\xi} = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = 0,$$

выводим из него:  $J_1 + J_3 = -J_2 - J_4$  или, пользуясь указанными выше выражениями для  $J_1$  и  $J_3$ :

$$2i \int_r^R \frac{\sin \xi d\xi}{\xi} = -J_2 - J_4.$$

При  $R \rightarrow \infty$  и  $r \rightarrow 0$  правая часть, как мы видели, стремится к пределу  $-\lim_{R \rightarrow \infty} J_2 - \lim_{r \rightarrow 0} J_4 = \pi i$ . Следовательно, и левая часть стремится к тому же пределу:

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} 2i \int_r^R \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi = \pi i.$$

Обозначая  $\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_r^R \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi$ , существование которого мы доказали, через  $\int_0^\infty \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi$ , получаем:  $2i \int_0^\infty \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi = \pi i$ , или окончательно

$$\int_0^\infty \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi = \frac{\pi}{2}.$$

2.5. Мы доказали интегральную теорему для функций аналитических в односвязных областях. Легко видеть, что теорему эту, без оговорок, нельзя распространить на неодносвязные области. Рассмотрим, например, функцию  $f(z) = \frac{1}{z}$ , дифференцируемую при любом  $z \neq 0$ . В качестве области  $G$  здесь можно принять всю конечную плоскость, исключая из нее начало координат. Очевидно,  $G$  не является односвязной областью, так как внутренность любой принадлежащей  $G$  окружности  $\gamma$  с центром в начале координат не вся принадлежит  $G$ . Вместе с тем  $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0$  (п. 1.3, пример 3).

Однако с некоторыми ограничениями, наложенными на кривые, интегральную теорему можно применять и к неодносвязным областям  $G$ . Пусть, прежде всего,  $L$  — треугольник, принадлежащий области  $G$  вместе со всеми своими внутренними точками. Тогда для любой функции  $f(z)$ , однозначной и аналитической в (неодносвязной) области  $G$ , к интегралу  $\int_L f(z) dz$  применимы

все рассуждения п. 2.3, б) и, следовательно,  $\int_L f(z) dz = 0$ .

К такому же выводу, со ссылкой на п. 2.3, в), мы придем и тогда, когда  $L$  есть произвольная замкнутая ломаная, принадлежащая  $G$  и притом такая, что все многоугольные области, ограниченные ею, также принадлежат  $G$ . Пусть, наконец,  $L$  — произвольная замкнутая спрямляемая кривая, принадлежащая области  $G$ . Рассмотрим  $\int_L f(z) dz$ . По лемме п. 2.2 этот интеграл можно

с точностью до произвольно малого  $\epsilon > 0$  заменять интегралами по ломаным  $\Lambda$ , вписанным в  $\Gamma$  и принадлежащим той же области  $G$ . Если для таких ломаных с достаточно малыми звеньями ограниченные этими ломаными многоугольные области принадлежат  $G$ , то соответствующие интегралы обращаются в нуль, а следовательно, должен равняться нулю и интеграл вдоль  $L$  (ср. п. 2.3, г)).

Указанные условия являются достаточными для того, чтобы интеграл от аналитической функции  $\int_L f(z) dz$ , взятый вдоль замкнутой спрямляемой кривой, принадлежащей неодносвязной области, был равен нулю. Эти условия удовлетворяются, например, тогда, когда  $L$  принадлежит некоторой односвязной области  $g$ , являющейся подобластью по отношению к  $G$ , но и не только в этом случае. На рис. 52 изображена кривая  $L$ , принадлежащая двусвязной области  $G$ . Очевидно, не существует односвязной



подобласти области  $G$ , которая содержала бы  $L$ . Однако для  $L$  выполнены требования, высказанные выше, следовательно,  $\int_L f(z) dz = 0$  для любой функции  $f(z)$ , аналитической в области  $G$ .

С помощью сделанных замечаний нетрудно доказать справедливость следующей теоремы, которой мы неоднократно будем пользоваться.

**Интегральная теорема для системы контуров.** Пусть  $f(z)$  — однозначная и аналитическая функция в произвольной области  $G$  и  $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  — система замкнутых спрямляемых жордановых кривых, лежащих в области  $G$  и удовлетворяющих следующим условиям:

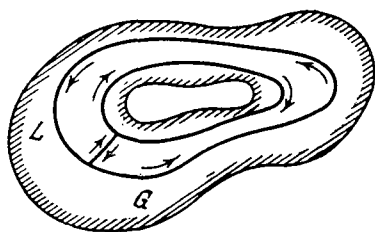


Рис. 52.

а) кривые  $\gamma_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) принадлежат внутренней области  $\Gamma$ ;

б) для любого  $k_0$  ( $k_0 = 1, 2, \dots, n$ ) кривые  $\gamma_k$  при  $k \neq k_0$  лежат во внешности  $\gamma_{k_0}$ ;

в) многосвязная область  $g$ , ограниченная кривыми  $\Gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n$

(она получается, если из внутренней области  $\Gamma$  исключить замкнутые области, ограниченные кривыми  $\gamma_k, k = 1, 2, \dots, n$ ), принадлежит области  $G$ .

При этих условиях имеет место равенство

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz, \quad (2.5:1)$$

где все интегралы берутся в одном и том же направлении, например так, что внутренности кривых остаются слева от наблюдателя, обходящего кривые в направлении интегрирования (положительное направление).

Заметим, что утверждение этой теоремы становится тривиальным в случае односвязной области  $G$ , так как в этом случае все интегралы в равенстве (2.4:1) обращаются в нуль.

Для доказательства теоремы в общем случае проведем в области  $G$  жордановы спрямляемые дуги  $\delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_n, \delta'_{n+1}$ , соединяющие последовательно некоторую точку  $z_0$  кривой  $\Gamma$  с точкой  $\zeta_1$  на кривой  $\gamma_1$ , далее некоторую точку  $z_1 \neq \zeta_1$  на  $\gamma_1$  с точкой  $\zeta_2$ , лежащей на  $\gamma_2$ , и т. д., наконец, точку  $z_n$  кривой  $\gamma_n$  с точкой  $\zeta_0 \neq z_0$  кривой  $\Gamma$ . Вообще говоря, эти дуги будут частично выходить за пределы области  $g$ . Но их можно всегда заменить другими дугами:  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n+1}$ , которые будут, за исключением своих концов, принадлежать области  $g$  целиком

(рис. 53). Для этой цели достаточно, например, отметить на дуге  $\delta'_1$ , проходимой в направлении от точки  $z_0 \in \Gamma$  к точке  $\xi_1$ , лежащей на  $\gamma_1$ , ее последнюю точку пересечения с  $\Gamma$  и первую точку пересечения с  $\gamma_1$ . Часть дуги  $\delta'_1$ , заключенная между указанными точками, и даст нужную дугу  $\delta_1$ . Аналогичным путем получаем и  $\delta_2, \dots, \delta_{n+1}$ . Вообще говоря, различные дуги  $\delta_k$  и  $\delta_m (k \neq m)$  могут иметь при этом точки пересечения. Но их всегда можно заменить другими дугами, удовлетворяющими

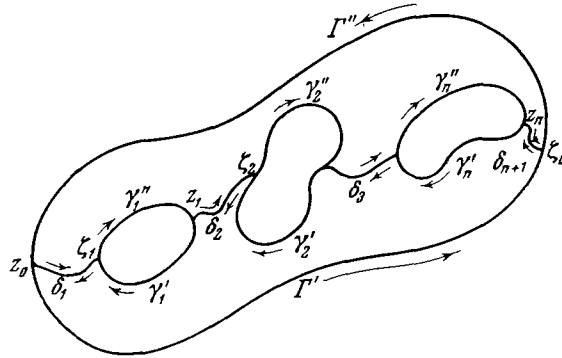


Рис. 53.

поставленным условиям и попарно не имеющими общих точек. Мы не останавливаемся на этом, предоставляя читателю проведение всех необходимых рассуждений. Начальные и конечные точки дуг  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n+1}$  разобьют каждую из кривых  $\Gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n$  на две части, которые мы будем обозначать теми же буквами, что и всю кривую, но с одним или двумя штрихами наверху:  $\Gamma', \Gamma'', \gamma'_1, \gamma''_1, \dots, \gamma'_n, \gamma''_n$ . Началом дуг  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$  мы будем считать начало  $z_0$  дуги  $\delta_1$ , а концом — конец  $\xi_0$  дуги  $\delta_{n+1}$ ; началом дуг  $\gamma'_1$  и  $\gamma''_1$  — конец  $\xi_1$  дуги  $\delta_1$ , а концом — начало  $z_1$  дуги  $\delta_2$  и т. д.; наконец, началом дуг  $\gamma'_n$  и  $\gamma''_n$  — конец  $\xi_n$  дуги  $\delta_n$ , а концом — начало  $z_n$  дуги  $\delta_{n+1}$ . Дуги  $\Gamma', \Gamma'', \gamma'_1, \gamma''_1, \dots, \gamma'_n, \gamma''_n$  образуют вместе с  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n+1}$  две замкнутые жордановы спрямляемые кривые. Одна из них  $\Lambda'$ , будет образована, например, дугами  $\Gamma', -\delta_{n+1}, -\gamma''_n, -\delta_n, \dots, -\gamma'_1, -\delta_1$ , а другая,  $\Lambda''$ , — дугами  $-\Gamma'', \delta_1, \gamma'_1, \dots, \delta_n, \gamma''_n$ .

В силу построения, внутренности кривых  $\Lambda'$  и  $\Lambda''$  лежат в области  $g$  и, следовательно, принадлежат области  $G$ . Поэтому к ним применима интегральная теорема Коши

$$\int_{\Lambda'} f(z) dz = 0 \quad \text{и} \quad \int_{\Lambda''} f(z) dz = 0.$$

Складывая почленно полученные равенства и замечая, что части интегралов по дугам  $\delta_k$  и  $-\delta_k$  ( $k=1, 2, \dots, n+1$ ) взаимно уничтожаются, а части интегралов по парам дуг  $\Gamma', -\Gamma'', -\gamma_1', \gamma_1'', -\gamma_n', \gamma_n''$  дадут интегралы  $\int_{\Gamma} f(z) dz, \int_{-\gamma_1} f(z) dz,$

$\int_{-\gamma_n} f(z) dz$ , получаем:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz + \int_{-\gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{-\gamma_n} f(z) dz = 0,$$

или

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz.$$

Это и есть нужный результат.

2.6. Рассмотрим однозначную функцию  $f(z)$ , аналитическую в односвязной области  $G$ . Пусть  $z_0$  — фиксированная точка области  $G$ , а  $L'$  и  $L''$  — спрямляемые кривые, лежащие в этой области и соединяющие  $z_0$  с произвольной точкой  $z$  области  $G$ . Если считать  $z_0$  начальной, а  $z$  конечной точками кривых  $L'$  и  $L''$ , то кривые  $L'$  и  $-L''$  составят вместе замкнутую спрямляемую кривую, по которой интеграл от  $f(z)$ , в силу интегральной теоремы, должен равняться нулю. Но это означает, что

$$\int_{L'} f(z) dz + \int_{-L''} f(z) dz = 0,$$

т. е.

$$\int_{L'} f(z) dz = \int_{L''} f(z) dz.$$

Итак, значение интеграла от аналитической функции  $f(z)$  не зависит от той кривой, по которой производится интегрирование (от пути интегрирования), а зависит только от начальной и конечной точек этой кривой. По этой причине для обозначения интеграла можно пользоваться символом

$$\int_{z_0}^z f(z) dz,$$

опуская указание на путь интегрирования и отмечая только его начальную и конечную точки  $z_0$  и  $z$ .

Так как точка  $z_0$  нами фиксирована, то интеграл этот представляет собой однозначную функцию от  $z$ :

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz.$$

Докажем, что она является аналитической в области  $G$ , причем ее производная равна подынтегральной функции

$$F'(z) = f(z).$$

Пользуясь непрерывностью функции  $f(z)$ , построим окрестность  $U$  точки  $z$  так, чтобы, во-первых, эта окрестность принадлежала области  $G$ , а, во-вторых, чтобы для любой ее точки  $\zeta$  выполнялось неравенство

$$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon.$$

Обозначим через  $\gamma$  какую-нибудь спрямляемую кривую, соединяющую  $z_0$  и  $z$  внутри области  $G$ , и через  $\delta$  прямолинейный отрезок, соединяющий точку  $z$  с произвольной точкой  $\zeta$  указанной окрестности. Тогда (обозначая переменную интегрирования буквой  $t$ ) будем иметь:

$$F(\zeta) - F(z) = \int_{\gamma+\delta} f(t) dt - \int_{\gamma} f(t) dt = \int_{\delta} f(t) dt$$

и

$$\begin{aligned} \frac{F(\zeta) - F(z)}{\zeta - z} - f(z) &= \frac{\int_{\delta} f(t) dt - f(z)(\zeta - z)}{\zeta - z} = \\ &= \frac{\int_{\delta} f(t) dt - f(z) \int_{\delta} dt}{\zeta - z} = \frac{\int_{\delta} [f(t) - f(z)] dt}{\zeta - z} \end{aligned}$$

Но для всех точек  $t \in \delta$  имеем:

$$|f(t) - f(z)| < \varepsilon;$$

следовательно,

$$\left| \frac{F(\zeta) - F(z)}{\zeta - z} - f(z) \right| = \frac{\left| \int_{\delta} [f(t) - f(z)] dt \right|}{|\zeta - z|} \leq \frac{\varepsilon \delta}{|\zeta - z|} = \varepsilon \quad (\zeta \in U).$$

Из последнего неравенства следует, в силу произвольности  $\varepsilon$ , что

$$\lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{F(\zeta) - F(z)}{\zeta - z} = f(z), \text{ т. е. } F'(z) = f(z),$$

что и требовалось доказать.

Назовем, вообще, функцию  $\Phi(z)$  первообразной от функции  $f(z)$  в области  $G$ , если  $\Phi(z)$  — аналитическая в области  $G$  и  $\Phi'(z) = f(z)$ .

Из доказанного следует, что интеграл  $F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$  является первообразной от  $f(z)$ .

Докажем, что любая первообразная от  $f(z)$  может быть представлена в виде

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz + C,$$

где  $C$  — некоторое комплексное число (произвольное постоянное).

В самом деле, пусть

$$\Phi(z) - \int_{z_0}^z f(z) dz = u(x, y) + iv(x, y) = \varphi(z).$$

Тогда имеем:

$$\varphi'(z) = \Phi'(z) - f(z) \equiv 0.$$

С другой стороны,

$$\varphi'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

в области  $G$ , и так как  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  — дифференцируемые функции от  $x$  и  $y$ , то

$$u(x, y) \equiv C_1 \quad \text{и} \quad v(x, y) \equiv C_2,$$

или

$$\varphi(z) \equiv C_1 + iC_2 = C.$$

Итак,

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz + C,$$

что и требовалось доказать.

Полагая здесь  $z = z_0$ , получим:

$$\Phi(z_0) = C.$$

Следовательно,

$$\int_{z_0}^z f(z) dz = \Phi(z) - \Phi(z_0).$$

Мы получили выражение интеграла от аналитической функции комплексного переменного через произвольную первообразную от  $f(z)$ . Отсюда вытекают многочисленные формулы для интегралов от элементарных функций, имеющие тот же вид, что и соответствующие формулы для функций действительного переменного. Так, например,

$$\int_{z_0}^z z^n dz = \frac{z^{n+1} - z_0^{n+1}}{n+1} \quad (n - \text{целое число, не равное } -1);$$

$$\int_{z_0}^z \exp z dz = \exp z - \exp z_0;$$

$$\int_{z_0}^z \cos z dz = \sin z - \sin z_0;$$

$$\int_{z_0}^z \sin z dz = \cos z_0 - \cos z$$

и т. д.

2.7. Пусть теперь  $G$  — неодносвязная область и  $f(z)$  — однозначная и аналитическая в этой области функция. Фиксируя какую-либо точку  $z_0$  этой области, рассмотрим две спрямляемые кривые  $L'$  и  $L''$ , соединяющие  $z_0$  с произвольной точкой  $z$  области  $G$ . Вообще говоря, мы не сможем утверждать, что интегралы  $\int_{L'} f(z) dz$  и  $\int_{L''} f(z) dz$  равны между собой.

В самом деле, такое утверждение эквивалентно тому, что интеграл от  $f(z)$  по замкнутой кривой  $L' - L''$  равен нулю, что для кривых, принадлежащих многосвязной области, может и не выполняться.

Обозначая по-прежнему интеграл  $\int_L f(z) dz$ , взятый вдоль кривой, соединяющей  $z_0$  и  $z$ , через  $\int_{z_0}^z f(z) dz$ , мы сможем снова рассматривать его как функцию верхнего предела интегрирования:

$$\int_{z_0}^z f(z) dz = F(z). \quad (2.7:1)$$

Но на этот раз функция  $F(z)$  будет многозначной (так как ее значения, вообще говоря, будут изменяться вместе с изменениями

пути интегрирования). Убедимся в том, что в любой односвязной области  $g$ , принадлежащей  $G$ , можно выделить непрерывные и однозначные ветви функции (2.7:1), которые будут являться в этой области различными первообразными от  $f(z)$  и, следовательно, будут отличаться одна от другой на постоянные слагаемые. С этой целью фиксируем одно из значений  $F(z)$  в некоторой точке  $z_1 \in g$ , т. е. фиксируем путь интегрирования  $L$ , соединяющий  $z_0$  и  $z_1$  в области  $G$ , и далее будем интегрировать  $f(z)$  по всевозможным спрямляемым кривым  $l$ , соединяющим внутри области  $g$  точку  $z_1$  со всевозможными точками этой области. Получим значение  $F(z)$  в виде

$$F(z) = \int_L f(z) dz + \int_l f(z) dz.$$

Второе слагаемое правой части этой формулы представляет собой интеграл от однозначной аналитической функции  $f(z)$ , взятый по кривой  $l$ , принадлежащей односвязной области  $g$  и соединяющей  $z_1$  с  $z$ . По п. 2.6 он является однозначной функцией от  $z$ , представляющей одну из первообразных  $f(z)$  в области  $g$ .

Положим:

$$\int_l f(z) dz = \varphi(z).$$

Тогда будем иметь однозначную ветвь функции  $F(z)$  в области  $g$  в следующем виде:

$$F(z) = \int_L f(z) dz + \varphi(z). \quad (2.7:2)$$

Здесь первое слагаемое представляет собой одно из значений  $F(z)$  в точке  $z_1 \in g$ . Меняя его всевозможными способами, мы будем получать различные однозначные ветви функции  $F(z)$  в области  $g$ , которые, таким образом, все будут отличаться друг от друга на постоянные слагаемые и давать различные первообразные  $f(z)$  в области  $g$ .

Заметим, что значения полученных нами ветвей (2.7:2) будут исчерпывать все возможные значения интеграла  $\int_{z_0}^z f(z) dz$  по всем кривым области  $G$ , соединяющим точку  $z_0$  с произвольной точкой  $z$  области  $g$ . В самом деле, пусть  $\Lambda$  — произвольная спрямляемая кривая области  $G$ , соединяющая  $z_0$  с  $z$ , а  $\lambda$  — какая-либо спрямляемая кривая области  $g$ , соединяющая  $z_1$  с  $z$ . Тогда,

очевидно, будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} f(z) dz &= \int_{\Lambda} f(z) dz - \int_{\lambda} f(z) dz + \int_{\lambda} f(z) dz = \\ &= \int_{\Lambda-\lambda} f(z) dz + \int_{\lambda} f(z) dz. \end{aligned}$$

Здесь  $\Lambda - \lambda$  есть спрямляемая кривая области  $G$ , соединяющая  $z_0$  с  $z_1$ ; обозначим ее  $L$ . Далее,  $\int_{\lambda} f(z) dz$  — значение функции  $\varphi(z)$  в точке  $z$ . Поэтому

$$\int_{\Lambda} f(z) dz = \int_L f(z) dz + \varphi(z),$$

т. е. произвольное значение интеграла  $\int_{z_0}^z f(z) dz$  совпадает со значением в точке  $z$  одной из однозначных ветвей (2.7:2).

В виде примера положим, что  $G$  есть плоскость с исключенными из нее точками 0 и  $\infty$ , а  $f(z) = \frac{1}{z}$ . В качестве односвязной области  $g$  возьмем, например, плоскость с исключенной из нее неположительной частью действительной оси:  $x \leq 0, y = 0$ ; пусть, наконец,  $z_1 = z_0 = 1$ . Тогда будем иметь:

$$F(z) = \int_L \frac{dz}{z} + \varphi(z), \text{ где } \varphi(z) = \int_1^z \frac{dz}{z}$$

и интегрирование происходит по кривым, целиком лежащим в области  $g$ , а  $L$  есть какая-нибудь спрямляемая кривая области  $G$ , начинающаяся в точке  $z_0$  и кончающаяся в точке  $z_1 = z_0$ , т. е. замкнутая спрямляемая кривая.

По п. 2.6  $\varphi(z)$  выражается через любую первообразную  $\Phi(z)$  от  $\frac{1}{z}$  в области  $g$  по формуле

$$\varphi(z) = \Phi(z) - \Phi(1).$$

В качестве такой первообразной можно взять любую однозначную ветвь логарифма в области  $g$ , например ветвь, принимающую значение 0 в точке  $z = 1$ . Эта ветвь представляет главное значение логарифма:

$$\Phi(z) = \ln z = \ln |z| + i \arg z.$$



Следовательно,

$$\varphi(z) = \Phi(z) - \Phi(1) = \ln z$$

и

$$F(z) = \int_L \frac{dz}{z} + \ln z.$$

Выберем в качестве  $L$  единичную окружность  $\gamma$ , пробегаемую  $n$  раз в положительном или отрицательном направлении. Так как при однократном пробеге в положительном направлении соответствующий интеграл равен  $2\pi i$  (см. пример 3 в п. 1.3), то

$$\int_L \frac{dz}{z} = \int_{\pm n\gamma} \frac{dz}{z} = \pm \left( \int_{\gamma} \frac{dz}{z} + \dots + \int_{\gamma} \frac{dz}{z} \right) = \pm 2n\pi i,$$

и мы получаем:

$$F(z) = \ln z \pm 2n\pi i.$$

Здесь  $n$  отлично от нуля; если в качестве  $L$  взять какую-нибудь замкнутую жорданову спрямляемую кривую области  $G$ , не содержащую внутри начала координат, то к интегралу  $\int_L \frac{dz}{z}$  будет применима интегральная теорема, и мы получим:  $\int_L \frac{dz}{z} = 0$ . Итак, в качестве значений  $\int_L \frac{dz}{z}$  может получиться любое целое кратное  $2\pi i$ , и мы приходим окончательно к следующим однозначным ветвям  $F(z)$  в области  $g$ :

$$F(z) = \ln z + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots).$$

Так как замкнутая кривая  $L$  области  $g$ , проходящая через точку 1, и кривая  $l$ , соединяющая точку 1 с точкой  $z$  области  $g$ , составляют вместе некоторую спрямляемую кривую области  $G$ , соединяющую 1 и  $z$ , то вместо  $F(z)$  можно писать просто  $\int_1^z \frac{dz}{z}$ . Правая же часть формулы дает все значения логарифма  $\text{Ln } z$  в точке  $z$ . Следовательно,

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = \text{Ln } z \quad (z \in g).$$

Мы видим здесь, что все значения  $\text{Ln } z$  в любой точке  $z$  области  $g$  могут быть получены путем интегрирования функции  $\frac{1}{z}$  вдоль соответствующих кривых области  $G$ , отличающихся друг от

друга количеством и направлением обходов вокруг начала координат.

В этом примере точки отрицательной части действительной оси принадлежали границе области  $g$  и поэтому исключались из рассмотрения. Однако мы могли бы вместо области  $g$  взять область  $g'$ , границей которой служит, например, неположительная часть мнимой оси:  $y \leq 0$ ,  $x = 0$ , и для нее повторить предыдущие рассуждения. Мы снова получили бы совокупность однозначных ветвей интеграла  $\int_1^z \frac{dz}{z}$ , совпадающую в  $g'$  со всеми однозначными ветвями  $\text{Ln } z$ . Иными словами,

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = \text{Ln } z \quad (z \in g').$$

В этом случае точки отрицательной части действительной оси являются внутренними точками области  $g'$  и не исключаются.

Мы убедились теперь, что в любой конечной точке плоскости  $z$ , отличной от начала координат, все значения  $\text{Ln } z$  могут быть получены в виде интеграла от функции  $\frac{1}{z}$ , взятого по некоторому спрямляемому пути, соединяющему точки 1 и  $z$ . Таким образом, многозначность логарифма находит свое истолкование в многозначности интеграла, который может принимать различные значения вдоль различных путей, соединяющих 1 с  $z$ .

Ко всему сказанному нужно еще добавить, что все однозначные ветви интеграла  $\int_1^z \frac{dz}{z}$  (в областях типа  $g$ ,  $g'$  или других односвязных подобластях области  $G$ ) исчерпываются соответствующими ветвями  $\text{Ln } z$ .

Рассмотрим для определенности случай области  $g$ . Все однозначные ветви  $\int_1^z \frac{dz}{z}$  выражаются здесь по формуле (2.7:2), принимающей вид:

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = \int_L \frac{dz}{z} + \ln z,$$

где  $L$  — произвольная замкнутая спрямляемая кривая области  $G$ , проходящая через точку 1. Мы получим наше утверждение, если покажем, что интеграл  $\int_L \frac{dz}{z}$  для любой замкнутой спрямляемой

кривой  $L$  равен некоторому целому кратному  $2\pi i$ . Ограничимся разбором частного случая, который достаточно разъяснит суть дела.

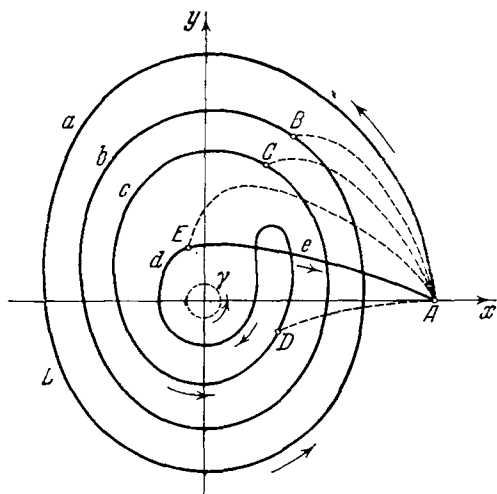


Рис. 54.

Пусть  $L$  есть замкнутая кривая, изображенная на рис. 54. Присоединим к  $L$  вспомогательные дуги  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$  и  $AE$ , проходимые по два раза в противоположных направлениях. Получим:

$$\begin{aligned} \int_L \frac{dz}{z} &= \int_{AaBA} \frac{dz}{z} + \\ &+ \int_{ABbCA} \frac{dz}{z} + \int_{ACcDA} \frac{dz}{z} + \\ &+ \int_{ADdEA} \frac{dz}{z} + \int_{AEeA} \frac{dz}{z} \end{aligned}$$

Применяя к каждой из четырех замкнутых кривых, по которым берутся первые четыре интеграла правой части, и к окружно-

сти  $\gamma$  с центром в начале координат интегральную теорему для случая системы кривых (в данном случае системы двух кривых), получим:

$$\int_L \frac{dz}{z} = 2\pi i + 2\pi i + 2\pi i - 2\pi i + \int_{AEeA} \frac{dz}{z}.$$

Заметим еще, что интеграл  $\int_{AEeA} \frac{dz}{z}$ , в силу интегральной теоремы Коши, равен нулю. Следовательно,

$$\int_L \frac{dz}{z} = 2 \cdot 2\pi i.$$

Мы получили целое кратное  $2\pi i$ . Очевидно, проведенное рассуждение имеет общий характер.

### § 3. Интеграл Коши. Формулы Ю. В. Сохоцкого

**3.1.** Пусть  $f(z)$  — функция однозначная и аналитическая в области  $G$  и  $L$  — замкнутая жорданова спрямляемая кривая, принадлежащая этой области вместе со своей внутренностью  $g$ . При этих условиях имеет место (основная для всей теории

аналитических функций) *формула*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (z \in g). \quad (3.1:1)$$

Формула эта называется интегральной формулой Коши, а стоящий справа интеграл — интегралом Коши. Для интеграла Коши характерны два признака:

- 1) он берется по замкнутой спрямляемой жордановой кривой  $L$ ;
- 2) подынтегральная функция имеет вид  $\frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$  (множитель  $\frac{1}{2\pi i}$  выносится из-под знака интеграла), где  $f(z)$  является функцией аналитической в области, которой принадлежит вместе со своей внутренностью кривая  $L$ .

Для доказательства формулы (3.1:1) опишем из точки  $z$ , как из центра, окружность  $\gamma_\rho$  настолько малого радиуса  $\rho$ , чтобы она содержалась внутри  $L$ . Рассмотрим функцию  $\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$  как функцию от  $\zeta$  в области  $G'$ , получающейся из  $G$  путем исключения точки  $z$ . Очевидно,  $\varphi(\zeta)$  определена всюду в  $G'$  и, как частное двух дифференцируемых функций, дифференцируема.

Применим к функции  $\varphi(\zeta)$  и кривым  $L$  и  $\gamma_\rho$  интегральную теорему для системы контуров. Получим:

$$\int_L \varphi(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_\rho} \varphi(\zeta) d\zeta,$$

или

$$\int_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad (3.1:2)$$

Формула (3.1:1) будет доказана, если мы сумеем установить справедливость соотношения

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i f(z). \quad (3.1:3)$$

Таким образом, вместо заданной кривой  $L$  мы имеем право при доказательстве формулы (3.1:1) рассматривать окружность произвольного малого радиуса  $\rho$  с центром в  $z$ .

Так как из формулы (3.1:2) следует, что величина интеграла  $\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$  не изменяется при уменьшении радиуса, то

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

и, следовательно, вместо доказательства формулы (3.1:3) достаточно установить справедливость равенства

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = 2\pi i f(z), \quad (3.1:4)$$

т. е. установить, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что при  $\rho < \delta(\varepsilon)$  будет выполняться неравенство

$$\left| \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - 2\pi i f(z) \right| < \varepsilon. \quad (3.1:5)$$

Замечая, что  $\int_{\gamma_\rho} \frac{d\xi}{\xi - z} = 2\pi i$  (см. пример 3 п. 1.3), представим выражение в левой части формулы (3.1:5) в виде

$$\left| \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - 2\pi i f(z) \right| = \left| \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - f(z) \int_{\gamma_\rho} \frac{d\xi}{\xi - z} \right| = \left| \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \right|$$

В силу непрерывности  $f(z)$  модуль разности  $|f(\xi) - f(z)|$  может быть сделан меньше, чем  $\frac{\varepsilon}{2\pi}$ , если  $|\xi - z| = \rho < \delta(\varepsilon)$ . При этом условии будем иметь:

$$\left| \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - 2\pi i f(z) \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot 2\pi \rho = \varepsilon,$$

чем и заканчивается все доказательство.

При пользовании формулой Коши (3.1:1) следует помнить условия, при которых она установлена, и, в частности, помнить, что точка  $z$  должна принадлежать внутренности контура  $L$ . Если в интеграле Коши подставить какую-либо точку  $z$ , принадлежащую внешности контура  $L$ , то он обратится в нуль. В самом деле, если точка  $z$  лежит во внешности контура  $L$ , то функция  $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ , рассматриваемая как функция от  $\xi$ , дифференцируема во всех точках области  $G$  (исключая, быть может, точку  $\xi = z$ ), и так как кривая  $L$  вместе со своей внутренностью принадлежит последней области, то, по интегральной теореме Коши, интеграл от  $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ , взятый вдоль  $L$ , должен равняться нулю.

Итак,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0,$$

если  $z$  принадлежит внешности контура  $L$ .

Пусть  $z$  — произвольная точка области  $G$  и  $\gamma_\rho$  — окружность радиуса  $\rho$  с центром в этой точке, содержащаяся в области вместе со своей внутренностью. По формуле (3.1:1) имеем:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}.$$

Так как уравнением окружности  $\gamma_\rho$  служит

$$\xi = z + \rho e^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

то предыдущую формулу можно преобразовать к следующему виду (см. формулу (1.2:5)):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \rho e^{i\theta}) \cdot \rho e^{i\theta} \cdot i d\theta}{\rho e^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{i\theta}) d\theta. \quad (3.1:6)$$

Последнее равенство читается так: значение аналитической функции в любой точке области  $G$  равно среднему арифметическому ее значений, взятых по любой окружности  $\gamma_\rho$  с центром в  $z$ .

Обозначим

$$\max_{\gamma_\rho} |f(\xi)| = M(\rho).$$

Тогда из формулы (3.1:6) будем иметь:

$$|f(z)| \leq M(\rho). \quad (3.1:7)$$

В силу непрерывности функции  $f(\xi)$  на окружности  $\gamma_\rho$  значение  $M(\rho)$  достигается в некоторой точке этой окружности. Так как ее радиус можно брать сколь угодно малым, то из неравенства (3.1:7) вытекает, что в любой окрестности точки  $z \in G$  найдутся другие точки, в которых модуль аналитической функции не меньше, чем ее модуль в точке  $z$ . Таким образом, модуль функции, аналитической в области  $G$ , не может иметь строгого максимума ни в одной точке области. В этом предложении заключается так называемый принцип максимума модуля, который мы существенно дополним ниже (п. 6.2) доказательством того, что и нестрогий максимум модуля не может достигаться во внутренней точке области, если только  $f(z) \neq \text{const}$ .

3.2. В теории функций важную роль играет обобщение интеграла Коши, называемое интегралом типа Коши. Так называется интеграл вида

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad (3.2:1)$$

где  $\Gamma$  — какая-либо спрямляемая кривая (необязательно замкнутая),  $\varphi(\xi)$  — функция, непрерывная на  $\Gamma$ , и  $z$  — точка, не лежащая

на  $\Gamma$ . Очевидно, интеграл Коши является частным случаем интеграла типа Коши. А именно, выражение (3.2:1) становится интегралом Коши, если выполнены условия 1) и 2) п. 3.1.

Приведем примеры интегралов типа Коши, не являющихся интегралами Коши:

$$а) \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta} \frac{f(x) dx}{x-z},$$

где  $f(x) \neq 0$  — функция действительного переменного, непрерывная на сегменте  $\delta$  действительной оси, по которому берется интеграл. В частности, отметим интеграл типа Коши  $\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x-z}$ ;

$$б) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{\bar{\xi} d\xi}{\xi-z}; \quad в) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{\xi^{-2} d\xi}{\xi-z}$$

Предлагаем читателю установить в каждом из этих примеров, почему соответствующий интеграл не является интегралом Коши.

Очевидно, интеграл типа Коши определяет однозначную функцию  $F(z)$  во всякой области  $G$ , не содержащей ни одной точки кривой  $\Gamma$ . Докажем, что *эта функция обладает производными любого порядка* (т. е. бесконечно дифференцируема) в области  $G$ , причем ее производная порядка  $n$  может быть получена путем  $n$ -кратного дифференцирования по  $z$  подынтегральной функции:

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{(\xi-z)^{n+1}}. \quad (3.2:2)$$

Доказательство проведем по индукции. В силу определения функции  $F(z) = F^{(0)}(z)$ , формула (3.2:2) справедлива при  $n=0$  (вспомним, что  $0! = 1$ ). Допустим, что формула (3.2:2) уже доказана для некоторого целого неотрицательного  $n$ , и докажем, что она справедлива также и для  $n$ , на единицу большего. Доказательство проведем путем непосредственного вычисления производной от  $F^{(n)}(z)$ , т. е.

$$\lim_{z' \rightarrow z} \frac{F^{(n)}(z') - F^{(n)}(z)}{z' - z}.$$

Возьмем замкнутый круг  $k: |z' - z| \leq \rho$ , принадлежащий области  $G$ . Пусть  $\delta > 0$  — расстояние между его окружностью и кривой  $\Gamma$ . Пусть, далее,  $K: |z| < R$  — круг с центром в начале координат, содержащий внутри и круг  $k$  и кривую  $\Gamma$ . Для точки  $z' \in k$

имеем:

$$F^{(n)}(z') - F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\xi) \frac{(\xi - z)^{n+1} - (\xi - z')^{n+1}}{(\xi - z)^{n+1} (\xi - z')^{n+1}} d\xi,$$

или, полагая  $\xi - z = t$ ,  $z' - z = h$  и, следовательно,  $\xi - z' = t - h$ :

$$\frac{F^{(n)}(z+h) - F^{(n)}(z)}{h} = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\xi) \frac{(t-h)^n + t(t-h)^{n-1} + \dots + t^n}{t^{n+1} (t-h)^{n+1}} d\xi. \quad (3.2:3)$$

Мы хотим доказать, что выражение (3.2:3) при  $h \rightarrow 0$  стремится к пределу, равному

$$\psi(z) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\xi) \frac{1}{t^{n+2}} d\xi. \quad (3.2:4)$$

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \frac{F^{(n)}(z+h) - F^{(n)}(z)}{h} - \psi(z) &= \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\xi) \frac{t(t-h)^{n+1} + (t-h)^{n+2} + \dots + t^{n+1} - (n+1)(t-h)^{n+1}}{t^{n+2} (t-h)^{n+1}} d\xi = \\ &= \frac{n!h}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\xi) \frac{(t-h)^n + [t+(t-h)](t-h)^{n-1} + \dots + [t^n + t^{n-1}(t-h) + \dots + (t-h)^n]}{t^{n+2} (t-h)^{n+1}} d\xi. \end{aligned} \quad (3.2:5)$$

При наших условиях

$$2R > |t| = |\xi - z| > \delta, \quad 2R > |t-h| = |\xi - z'| \geq \delta.$$

Пусть, далее,  $\mu = \max_{\Gamma} |\varphi(\xi)|$  и  $\lambda$  — длина  $\Gamma$ ; из (3.2:5) получаем:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F^{(n)}(z+h) - F^{(n)}(z)}{h} - \psi(z) \right| &\leq \\ &\leq \frac{n! |h|}{2\pi} \mu \frac{(2R)^n + 2(2R)^n + 3(2R)^n + \dots + (n+1)(2R)^n}{\delta^{2n+3}} \lambda. \end{aligned}$$

Но, очевидно, правая часть стремится к нулю при  $h \rightarrow 0$ . Следовательно,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F^{(n)}(z+h) - F^{(n)}(z)}{h} = F^{(n+1)}(z) = \psi(z) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{n+2}},$$

чем и заканчивается доказательство.

Из доказанной теоремы вытекают важные следствия:

а) Каждая функция комплексного переменного, аналитическая в некоторой области  $G$ , бесконечно дифференцируема в этой области.



Действительно, пусть  $f(z)$  — функция, аналитическая в области  $G$ ,  $z_0$  — какая-либо точка этой области и  $\gamma$  — окружность с центром в точке  $z_0$ , принадлежащая области  $G$  вместе со всеми точками, лежащими внутри  $\gamma$ .

Применяя к  $f(z)$  и к  $\gamma$  интегральную формулу Коши, получаем:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (3.2:6)$$

Итак,  $f(z)$  представляется внутри  $\gamma$  интегралом Коши (и тем самым — интегралом типа Коши). Отсюда, по доказанному выше, вытекает, что  $f(z)$  бесконечно дифференцируема внутри  $\gamma$ , причем

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.2:7)$$

Конечно, в приведенном рассуждении вместо окружности  $\gamma$  можно взять произвольную замкнутую жорданову спрямляемую кривую  $L$ , принадлежащую области  $G$  вместе со своей внутренностью  $g$ . Тогда для любой точки  $z \in g$  получим:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.2:8)$$

б) Производные любого порядка от функции  $f(z)$ , аналитической в области  $G$ , также являются аналитическими в этой области.

Этот факт непосредственно следует из того, что, по доказанному, каждая функция  $f^{(n)}(z)$  сама является дифференцируемой в области  $G$ .

в) Теорема Морера. Каждая функция  $f(z)$ , однозначная и непрерывная в некоторой односвязной области  $G$  и такая, что интеграл от  $f(z)$ , взятый по любому треугольному контуру  $\Delta$ , лежащему в области, равен нулю, является аналитической в этой области.

Из условий теоремы следует, что интеграл от  $f(z)$  по любому многоугольному контуру, принадлежащему области  $G$ , и, далее, по любому спрямляемому замкнутому контуру равен нулю (сравните с доказательством интегральной теоремы Коши). Поэтому теорема Морера является обратной по отношению к интегральной теореме Коши.

Для доказательства теоремы образуем интеграл

$$\int_{z_0}^z f(z) dz = F(z).$$

В силу сказанного он представляет однозначную функцию в области  $G$  и к нему применимы все рассуждения п. 2.6, в силу которых  $F(z)$  является аналитической функцией, производная которой совпадает с  $f(z)$ :

$$F'(z) = f(z).$$

Но мы только что видели, что производная аналитической функции сама является аналитической. Итак,  $f(z)$  есть аналитическая функция, чем и заканчивается доказательство.

г) Вернемся к формуле (3.2:7) и положим в ней  $z = z_0$  ( $z_0$  — центр окружности  $\gamma$ ). Если  $\rho$  есть радиус  $\gamma$  и  $M(\rho) = \max_{\gamma} |f(z)|$ , то для модуля производной порядка  $n$  в точке  $z_0$  получаем следующую оценку:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! M(\rho)}{2\pi\rho^{n+1}} 2\pi\rho = \frac{n! M(\rho)}{\rho^n}.$$

Очевидно, этот результат верен и для  $n=0$  (в этом случае мы получаем известное неравенство (3.1:7)).

Итак, в любой точке  $z$  области  $G$  имеют место неравенства

$$|f^{(n)}(z)| \leq n! \frac{M(\rho)}{\rho^n} \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (3.2:9)$$

Здесь  $\rho$  обозначает радиус произвольной окружности  $\gamma$  с центром в точке  $z$ , содержащейся в области  $G$  вместе со всеми своими внутренними точками, а  $M(\rho)$  — максимум модуля функции на  $\gamma$ . Неравенства (3.2:9) играют существенную роль в теории функций. Они называются неравенствами Коши.

Оценка, даваемая неравенствами (3.2:9) при заданных  $n$  и  $z$ , зависит от величины  $\rho$ , которую мы можем брать произвольно в пределах  $0 < \rho < \Delta$ , где  $\Delta$  — расстояние от точки  $z$  до границы области  $G$ .

В тех случаях, где нужна возможно более точная оценка, приходится отыскивать минимум функции  $\frac{M(\rho)}{\rho^n}$  и брать именно такое  $\rho$ , для которого эта функция имеет минимальное значение. В виде иллюстрации допустим, что  $G$  есть единичный круг  $|z| < 1$ , точка  $z$ , в которой мы производим оценку производных, есть центр круга  $z=0$ , и, наконец, что  $M(\rho) = \max_{|z|=\rho} |f(z)|$  удовлетворяет неравенству

$$M(\rho) \leq \frac{1}{1-\rho}$$

Тогда неравенство (3.2:9) даст:

$$|f^{(n)}(0)| \leq n! \frac{1}{(1-\rho)\rho^n} \quad (0 < \rho < 1),$$

и, чтобы получить наилучшую оценку, следует разыскать минимум функции  $\frac{1}{(1-\rho)\rho^n}$ , т. е. максимум функции  $(1-\rho)\rho^n$  в интервале  $(0, 1)$ . Применяя обычные правила дифференциального исчисления, найдем, что искомый экстремум достигается при  $\rho = \frac{n}{n+1}$ ; он равен  $(n+1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e(n+1)$ . Следовательно, при любом  $n = 1, 2, 3, \dots$  имеем:

$$|f^{(n)}(0)| \leq e(n+1)!.$$

В частном случае, когда  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  (эта функция является аналитической в единичном круге, причем для нее  $M(\rho) = \frac{1}{1-\rho}$ ), получаем путем непосредственного вычисления:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \quad \text{и} \quad f^{(n)}(0) = n!.$$

Значение неравенств Коши заключается в том, что они позволяют давать оценки для производных аналитической функции (пусть завышенные) на основании одного только знания максимума модуля функции  $M(\rho)$ .

Фиксируя  $\rho < \Delta$  в неравенствах (3.2:9), перепишем их в виде

$$\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!}} \leq \frac{\sqrt[n]{M(\rho)}}{\rho}.$$

Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M(\rho)} = 1$ , то отсюда следует, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!}} \leq \frac{1}{\rho}$$

(через  $\overline{\lim}$  мы обозначаем, как обычно, верхний, или наибольший предел последовательности действительных чисел \*)).

Так как в этом соотношении в качестве  $\rho$  можно взять любое положительное число меньшее  $\Delta$ , то, переходя к пределу при  $\rho \rightarrow \Delta$ , получаем:

$$\Lambda = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!}} \leq \frac{1}{\Delta}. \quad (3.2:10)$$

Это неравенство, носящее название неравенства Коши — Адамара, показывает, что величина  $\Lambda$ , зависящая от значений производных аналитической функции в некоторой точке области  $G$ ,

\*) О верхнем и нижнем (наибольшем и наименьшем) пределах последовательности см. А. Я. Хинчин, Восемь лекций по математическому анализу, лекция вторая или Г. М. Фихтенгольца, Курс дифференциального и интегрального исчисления, изд. 6, М., «Наука», 1966, т. 1, п° 42.

связана с расстоянием  $\Delta$  этой точки  $z$  до границы области. Связь выражается в том, что число  $\Delta$  не может быть большим там, где  $\Delta$  велико, т. е., где граница области аналитичности далеко отстоит от точки  $z$ . В частности, для целых функций, т. е. для функций, аналитических во всей плоскости, где единственная граничная точка области находится в  $\infty$ ,  $\Delta = \infty$  для любой точки плоскости и, следовательно,  $\frac{1}{\Delta} = 0$ . Поэтому для целых функций имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!}} = 0$$

в любой точке плоскости.

В виде примера возьмем  $f(z) = \exp z$ . Здесь  $f^{(n)}(z) = \exp z$  при любом  $n$ , и, следовательно,  $|f^{(n)}(z)| = |\exp z| = e^x$ . Далее, если  $k = \left[ \frac{n}{2} \right]$  (целая часть  $\frac{n}{2}$ ), то  $n! \geq n(n-1) \dots (n-k+1) > k^{n-k}$  и  $\sqrt[n]{n!} > k^{1-\frac{k}{n}} \geq \sqrt[k]{k}$ . Поэтому

$$\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!}} < \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\sqrt[k]{k}} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Воспользуемся установленной в этом пункте аналитичностью, а следовательно, и непрерывностью производной  $f'(z)$  от аналитической функции для того, чтобы вывести правило замены переменной в интегралах от комплексных функций.

Пусть  $f(z)$  — функция, аналитическая в области  $G$ , и  $L$  — спрямляемая кривая, лежащая в этой области. Функция  $w = f(z)$  отображает кривую  $L$  на некоторую кривую  $\Gamma$ , которая также будет спрямляемой. В самом деле, если  $z = \lambda(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , — уравнение кривой  $L$ , то уравнение кривой  $\Gamma$  будет иметь вид

$$w = f[\lambda(t)].$$

Рассматривая произвольное разбиение сегмента  $[\alpha, \beta]$  точками  $t_0 = \alpha$ ,  $t_1$ , ...,  $t_n = \beta$  и полагая  $z_j = \lambda(t_j)$ ,  $w_j = f[\lambda(t_j)]$ , найдем:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n-1} |w_{j+1} - w_j| = \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \left| \int_{z_j}^{z_{j+1}} f'(z) dz \right| \leq \max_L |f'(z)| \sum_{j=0}^{n-1} \int_{z_j}^{z_{j+1}} |dz| \leq \max |f'(z)| \text{ дл. } L, \end{aligned}$$

откуда и следует спрямляемость кривой  $\Gamma$ .

Покажем, что для любой функции  $\Phi(w)$ , непрерывной на  $\Gamma$ , имеет место формула

$$\int_{\Gamma} \Phi(w) dw = \int_L \Phi[f(z)] f'(z) dz, \quad (3.2.11)$$

которая и выражает правило замены переменной под знаком интеграла.

Для доказательства рассмотрим интегральные суммы, пределом которых является  $\int_{\Gamma} \Phi(w) dw$ . Имеем:

$$\sum_0^{n-1} \Phi(w_j) (w_{j+1} - w_j) = \sum_0^{n-1} \Phi[f(z_j)] \int_{z_j}^{z_{j+1}} f'(z) dz.$$

С другой стороны, интеграл  $\int_L \Phi[f(z)] f'(z) dz$  можно представить

в виде  $\sum_0^{n-1} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \Phi[f(z)] f'(z) dz$ , следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_0^{n-1} \Phi(w_j) (w_{j+1} - w_j) - \int_L \Phi[f(z)] f'(z) dz &= \\ &= \sum_0^{n-1} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \{\Phi[f(z_j)] - \Phi[f(z)]\} f'(z) dz. \end{aligned}$$

При достаточно мелком разбиении сегмента  $[\alpha, \beta]$  все величины

$$\max_{t_j \leq t \leq t_{j+1}} |\Phi[f(z_j)] - \Phi[f(z)]|$$

можно сделать меньшими любого  $\epsilon$ . Обозначая, далее,  $\max_L |f'(z)|$  через  $M$ , получим:

$$\begin{aligned} \left| \sum_0^{n-1} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \{\Phi[f(z_j)] - \Phi[f(z)]\} f'(z) dz \right| &\leq \\ &\leq M\epsilon \sum_0^{n-1} \int_{z_j}^{z_{j+1}} |dz| \leq M\epsilon \cdot \text{дл. } L, \end{aligned}$$

следовательно, интегральные суммы

$$\sum_0^{n-1} \Phi[f(w_j)](w_{j+1} - w_j)$$

стремятся к пределу

$$\int_L \Phi[f(z)] f'(z) dz,$$

когда разбиение кривой  $\Gamma$  неограниченно измельчается.

Отсюда и вытекает равенство (3.2:11).

**3.3.** Здесь мы займемся вопросом о граничных значениях интеграла типа Коши. Основные результаты, сюда относящиеся, были получены русским математиком Ю. В. Сохоцким в 1873 г.\*). При самых общих предположениях относительно кривой (спрямляемость) и функции (суммируемость в смысле Лебега) этот вопрос был изучен в работах В. В. Голубева и И. И. Привалова\*\*).

В трудах Н. И. Мусхелишвили и его школы разработаны приложения интеграла типа Коши к задачам механики, в особенности к теории упругости\*\*\*).

Пусть сначала  $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$  есть интеграл Коши. Тогда в обла-

сти  $g$ , внутренней к кривой  $L$ ,  $F(z)$  совпадает с функцией  $f(z)$ , аналитической во всех точках некоторой области  $G$ , содержащей  $L$  и  $g$ . Поэтому, если  $\xi_0$  — какая-либо точка на  $L$ , то  $F(z) = f(z)$  стремится к пределу  $f(\xi_0)$ , когда  $z$  стремится к  $\xi_0$  изнутри  $L$ . Во внешности кривой  $L$  интеграл Коши обращается в нуль (см. п. 3.1). Поэтому, когда  $z$  стремится к точке  $\xi_0$ , оставаясь во внешности кривой  $L$ , интеграл Коши стремится к пределу, равному нулю.

Итак, для интеграла Коши в каждой точке  $\xi_0$  кривой  $L$  существуют граничные значения, равные  $f(\xi_0)$  изнутри  $L$  и 0 извне  $L$ .

Будем теперь рассматривать интеграл типа Коши  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi(\xi) d\xi}{\xi - z}$  при

следующих частных предположениях:

а)  $\gamma$  является жордановой спрямляемой кривой,

б) функция  $\Phi(\xi)$  является аналитической в некоторой окрестности каждой точки кривой  $\gamma$ .

Покажем, что при этих условиях также существуют два граничных значения интеграла в каждой точке  $\xi_0 \in \gamma$ , отличной от концов  $L$ . В отличие

\*) Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложении в ряды. Сочинение Ю. Сохоцкого, СПб., 1873.

\*\*) В. В. Голубев, Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особых точек, М., 1916. И. И. Привалов, Интеграл Cauchy, Саратов, 1919. См. также монографию: И. И. Привалов, Граничные свойства однозначных аналитических функций, Гостехиздат, 1950.

\*\*\*) Н. И. Мусхелишвили, Applications des Intégrales analogues à celles de Cauchy à quelques problèmes de la physique mathématique, Тифлис, 1922. См. также монографию Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения (Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике), М., Физматгиз, 1962.

от случая интеграла Коши, значения эти не будут выражаться непосредственно через  $\varphi(\xi_0)$ . Однако их разность в точке  $\xi_0$  будет равна  $\varphi(\xi_0)$  (если взять надлежащим образом одно из них за уменьшаемое, а другое за вычитаемое). Следовательно, здесь обнаруживается та же закономерность, что и в случае интеграла Коши, где разность внутреннего и внешнего граничных значений есть  $f(\xi_0) - 0 = f(\xi_0)$ .

Переходя к доказательству, возьмем окрестность  $U$  точки  $\xi_0$  так, чтобы функция  $\varphi(z)$  была аналитической в  $U$ , и проведем окружность  $C$  с центром в  $\xi_0$ , содержащуюся в  $U$  и имеющую столь малый радиус, чтобы среди точек

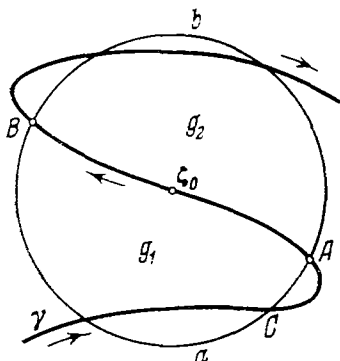


Рис. 55.

кривой  $\gamma$ , предшествующих  $\xi_0$  и следующих за  $\xi_0$  (в направлении интегрирования), имелись точки, лежащие на  $C$ . Тогда, отправляясь от точки  $\xi_0$  сначала в направлении обхода кривой  $\gamma$  до первой точки  $B$  пересечения  $\gamma$  с окружностью  $C$ , а затем от той же точки  $\xi_0$  в противоположном направлении также до первой точки  $A$  пересечения  $\gamma$  с окружностью  $C$ , получим дугу  $AB \subset \gamma$ , содержащую точку  $\xi_0$  и принадлежащую внутренности  $C$ , за исключением своих концов  $A$  и  $B$ , лежащих на  $C$ . Точки  $A$  и  $B$  делят окружность  $C$  на две дуги  $AaB$  и  $AbB$ , которые вместе с дугой  $AB$ , принадлежащей  $\gamma$ , образуют две замкнутые жордановы кривые  $\gamma_1 (ABaA)$  и  $\gamma_2 (ABbA)$ , с внутренностями  $g_1$  и  $g_2$ , лежащими внутри  $C$  (рис. 55).

Заметим, что наши обозначения выбраны так, что область  $g_1$  лежит слева от наблюдателя,двигающегося по  $AB$  в направлении интегрирования, а область  $g_2$  — справа от него. Пусть теперь точка  $z \in g_1$  стремится к пределу  $\xi_0$ . Так как  $z$  лежит во внешности кривой  $\gamma_2$ , которая вместе со своей внутренностью  $g_2$  принадлежит области  $U$ , где  $\varphi(\xi)$  является аналитической, то по интегральной теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0,$$

т. е.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{AB} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{AbB} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - z}.$$

Отсюда следует, что для точек  $z \in g_1$  мы не изменим значения интеграла

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - z},$$

если вместо дуги  $AB$  будем вести интегрирование по дуге окружности  $AbB$ .

Итак, в области  $g_1$  имеем:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma' + AbB} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - z}, \quad (3.3:1)$$

где  $\gamma'$  получается из  $\gamma$  путем удаления дуги  $AB$ .

Но  $\gamma' + AbB$  есть спрямляемая кривая (быть может, не жорданова), и, следовательно, интеграл (3.3:1) есть интеграл типа Коши, который в силу п. 3.2 должен представлять аналитическую функцию  $\Phi(z)$  в любой окрестности точки  $\zeta_0$ , не содержащей точек кривой  $\gamma' + AbB$ , причем в точках этой окрестности, принадлежащих  $g_1$ ,  $\Phi_1(z)$ , как показывает равенство (3.3:1), совпадает с  $F(z)$ . Следовательно,

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \zeta_0 \\ z \in g_1}} F(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta_0 \\ z \in g_1}} \Phi_1(z) = \Phi_1(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma' + AbB} \frac{\Phi(\zeta) d\zeta}{\zeta - \zeta_0}. \quad (3.3:2)$$

Совершенно так же для точек области  $g_2$  мы можем написать:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma' + AaB} \frac{\Phi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad (3.3:3)$$

где стоящий в правой части интеграл типа Коши представляет в окрестности  $\zeta_0$  некоторую аналитическую функцию  $\Phi_2(z)$ , совпадающую с  $F(z)$  в точках этой окрестности, принадлежащих  $g_2$ .

Отсюда следует, что

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \zeta_0 \\ z \in g_2}} F(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta_0 \\ z \in g_2}} \Phi(z) = \Phi_2(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma' + AaB} \frac{\Phi(\zeta) d\zeta}{\zeta - \zeta_0}. \quad (3.3:4)$$

Итак, мы установили существование двух граничных значений интеграла типа Коши в произвольной точке  $\zeta_0$  спрямляемой кривой и нашли их значения (3.3:2) и (3.3:4). Одно из них, соответствующее стремлению  $z$  к  $\zeta_0$

по области  $g_1$ , примыкающей к дуге  $\widehat{AB} \subset \gamma$  слева по направлению интегрирования, можно назвать левым, а другое — правым граничным значением и обозначить их соответственно через  $F_{\text{Л}}(\zeta_0)$  (3.3:2) и  $F_{\text{П}}(\zeta_0)$  (3.3:4).

Из формул (3.3:2) и (3.3:4) следует, что

$$F_{\text{Л}}(\zeta_0) - F_{\text{П}}(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{AbB - AaB} \frac{\Phi(\zeta) d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Phi(\zeta) d\zeta}{\zeta - \zeta_0}.$$

В силу сделанных нами предположений полученный интеграл есть интеграл Коши, образованный для функции  $\Phi(z)$  и окружности  $C$ . По интегральной формуле Коши, его значение равно  $\Phi(\zeta_0)$ . Итак,

$$F_{\text{Л}}(\zeta_0) - F_{\text{П}}(\zeta_0) = \Phi(\zeta_0), \quad (3.3:5)$$

что мы и утверждали.

В виде примера рассмотрим интеграл типа Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{dx}{x - z},$$

где  $\Delta$  представляет сегмент действительной оси  $-1 \leq x \leq 1$  (интегрирование ведется в направлении возрастания  $x$ ), и возьмем для простоты  $\zeta_0 = 0$ . Здесь  $\Phi(\zeta) = 1$  является функцией, аналитической во всей плоскости. Следовательно, мы ничем не стеснены в выборе окружности  $C$  с центром в точке 0, кроме единственного условия, что на  $C$  должны находиться точки отрезка  $\Delta$ , предшествующие точке 0 и следующие за ней. Выберем в качестве  $C$  единичную окружность. Тогда дуга  $AB$  совпадет со всем сегментом  $\Delta$  и дуги окружности  $AbB$  и  $AaB$  будут, соответственно, нижней и верхней полуокружностями.



В формуле (3.3:5) мы должны иметь для разности граничных значений интеграла типа Коши:

$$F_{\Pi}(0) - F_{\Pi}(0) = \varphi(0) = 1.$$

Что касается каждого из них в отдельности, то формула (3.3:2) дает:

$$F_{\Pi}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{AbB} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta}} = \frac{1}{2},$$

и формула (3.3:4):

$$F_{\Pi}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{AaB} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\pi}^0 \frac{e^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta}} = -\frac{1}{2}.$$

3.4. Относительно полученного в предыдущем пункте результата (3.3:5) можно сделать то существенное возражение, что он выведен в предположении аналитичности функции  $\varphi(\zeta)$ , тогда как в приложениях часто бывает важен случай, когда  $\varphi(\zeta)$  не является аналитической функцией.

В связи с этим мы дадим здесь другое доказательство того же факта, приводящее вместе с тем к важным формулам для  $F_{\Pi}(\zeta_0)$  и  $F_{\Pi}(\zeta_0)$ , отличным от формул (3.3:2) и (3.3:4).

Пусть  $\gamma$ , по-прежнему, — жорданова спрямляемая кривая и  $\varphi(\zeta)$  — функция, непрерывная на  $\gamma$ . Рассматривая  $\zeta$  как функцию длины дуги  $s$ , отсчитываемой от начальной точки  $\gamma$ :

$$\zeta = \lambda(s), \quad 0 \leq s \leq l \quad (l — \text{длина } \gamma),$$

предположим, что в некоторой точке  $\zeta_0 = \lambda(s_0)$  ( $0 < s_0 < l$ ) существует конечная и отличная от нуля производная  $\lambda'(s)$  \*).

Допустим далее, что существуют числа  $K > 0$  и  $\alpha > 0$  такие, что

$$|\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)| < K |\zeta - \zeta_0|^\alpha. \quad (3.4:1)$$

Легко видеть, что при сделанных предположениях несобственный интеграл

$$I_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta \quad (3.4:2)$$

абсолютно сходится. Чтобы убедиться в этом, условимся обозначать дугу кривой  $\gamma$ , соответствующую определенному сегменту изменения длины дуги  $s$ :  $a \leq s \leq b$ , символом  $[a, b]$ . Тогда для любой дуги  $[a, b]$ , не содержащей точки  $\zeta_0$  (пусть, для определенности,  $s_0 < a < b$ ), будем иметь, в силу (3.4:1):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[a, b]} \left| \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} \right| ds < \frac{K}{2\pi} \int_{[a, b]} |\zeta - \zeta_0|^{\alpha-1} ds.$$

\*) В теории функций действительного переменного доказывается, что всюду в интервале  $(0, l)$ , за исключением, быть может, множества точек меры нуль,  $\lambda'(s)$  существует, причем  $|\lambda'(s)| = 1$ . См., например, В а л л е-П у с с е н, Курс анализа, т. I, п. 359.

По предположению  $\lim_{s \rightarrow s_0} \left| \frac{\xi - \xi_0}{s - s_0} \right| = |\lambda'(s_0)| \neq 0$ , откуда вытекает, что  $\left| \frac{\xi - \xi_0}{s - s_0} \right| > \frac{1}{2} |\lambda'(s_0)|$  при  $|\xi - \xi_0| < \rho$ ; если же  $|\xi - \xi_0| \geq \rho$ , то  $\left| \frac{\xi - \xi_0}{s - s_0} \right| > \frac{\rho}{l}$ . Итак,  $\left| \frac{\xi - \xi_0}{s - s_0} \right| > c > 0$  при всех  $\xi \in \gamma$ . Отсюда следует, что

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{[a, b]} \frac{\Phi(\xi) - \Phi(\xi_0)}{\xi - \xi_0} d\xi \right| < K' \int_a^b (s - s_0)^{\alpha-1} ds = K' \frac{(b - s_0)^\alpha - (a - s_0)^\alpha}{\alpha} \rightarrow 0$$

при  $a$  и  $b \rightarrow s_0$ . Итак, интеграл (3.4:2) абсолютно сходится.

Обращаясь к интегралу типа Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

представим его в виде

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi(\xi) - \Phi(\xi_0)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi(\xi_0)}{\xi - z} d\xi \quad (3.4:3)$$

и покажем, что

$$\lim_{z \rightarrow \xi_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi(\xi) - \Phi(\xi_0)}{\xi - z} d\xi = I_0. \quad (3.4:4)$$

При этом мы будем предполагать, что  $z$  стремится к  $\xi_0$ , оставаясь внутри произвольного угла  $g_0$ , раствора меньшего  $2\theta < \pi$ , с вершиной в точке  $\xi_0$  и биссектрисой, совпадающей с нормалью к кривой в этой точке. Такого рода стремление  $z$  к  $\xi_0$  характеризуют как «*стремление по некасательным к  $\gamma$  путям*». В частности, этому условию удовлетворяет стремление точки  $z$  по нормальям к  $\gamma$ . Легко видеть, что в достаточно малой окрестности точки  $\xi_0$  ни одна точка кривой  $\gamma$  не попадает внутрь фиксированного угла  $g_{\theta_0}$  (а также внутрь вертикального с ним угла). Действительно, допустим противное. Тогда должна существовать последовательность точек  $\xi_n = \lambda(s_n) \in \gamma$ , лежащих внутри  $g_{\theta_0}$  (или внутри вертикального с ним угла) и сходящихся к  $\xi_0$ . При этом мы можем считать, что  $\{s_n\}$  также сходится, т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s'$ , откуда следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \lambda(s')$ . Но, с другой стороны,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi_0 = \lambda(s_0)$ ; в силу того, что  $\gamma$  жорданова кривая (и  $\xi_0$  отлична от ее концов), заключаем, что  $s' = s_0$ . Поэтому векторы  $\xi_n - \xi_0$  должны по направлению стремиться к касательной в точке  $\xi_0$  и, следовательно, не могут все оставаться внутри угла  $g_{\theta_0}$ .

Пусть  $\theta$  — число, удовлетворяющее условию  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ; фиксируем  $\theta_0$ ,  $\theta < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$  и рассмотрим окрестность  $|z - \xi_0| < \rho$  такую, что ни одна точка кривой  $\gamma$ , лежащая в этой окрестности, не принадлежит углу  $g_{\theta_0}$  (а также углу, вертикальному с ним), и пусть  $g_\theta, \rho$  — часть угла  $g_{\theta_0}$ , принадлежащая указанной окрестности. Продолжая  $\gamma$  от точки  $\xi_0$  в двух направлениях до первых точек  $A$  и  $B$  пересечения с окружностью  $|z - \xi_0| = \rho$ , получим дугу

$$\sigma_\rho = [s_0 - \varepsilon', s_0 + \varepsilon''] \subset \gamma.$$

Очевидно, для любых точек  $z \in g_{\theta, \rho}$  и  $\xi \in \sigma_\rho$  будем иметь:

$$\frac{|z - \xi_0|}{|z - \xi|} < \csc(\theta_0 - \theta)$$

(рис. 56). Поэтому

$$\begin{aligned} A &= \left| I_0 - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi(\xi) - \Phi(\xi_0)}{\xi - z} d\xi \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} [\Phi(\xi) - \Phi(\xi_0)] \frac{\xi_0 - z}{(\xi - z)(\xi - \xi_0)} d\xi \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - \sigma_\rho} [\Phi(\xi) - \Phi(\xi_0)] \frac{\xi_0 - z}{(\xi - z)(\xi - \xi_0)} d\xi \right| + \\ &\quad + \csc(\theta_0 - \theta) \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_\rho} \left| \frac{\Phi(\xi) - \Phi(\xi_0)}{\xi - \xi_0} \right| ds = i_1 + i_2. \end{aligned}$$

Если  $\varepsilon$  — произвольное положительное число, то  $\rho$  можно считать столь малым, чтобы  $i_2$  было меньше, чем  $\frac{\varepsilon}{2}$ ; фиксируем это значение  $\rho$ . Далее

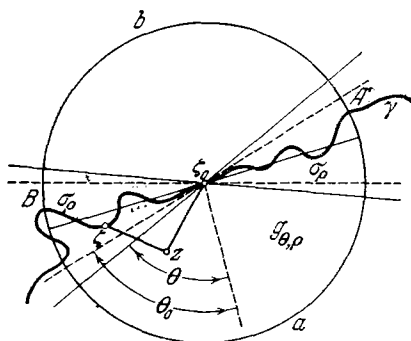


Рис. 56.

заметим, что расстояние  $\delta_0$  точки  $\xi_0$  до дуги  $\gamma - \sigma_\rho$  положительно; поэтому  $|\xi - \xi_0| \geq \delta_0 > 0$ , если  $\xi \in \gamma - \delta_\rho$ , и  $|\xi - z| \geq \delta_0 - |\xi_0 - z|$ . Поэтому при  $|z - \xi_0| < \frac{\delta_0}{2}$  будем иметь:

$$\begin{aligned} i_1 &< \frac{1}{\pi} \frac{|\xi_0 - z|}{\delta_0^2} \int_{\gamma - \sigma_\rho} |\Phi(\xi) - \Phi(\xi_0)| ds \leq \\ &\leq \frac{|\xi_0 - z|}{\pi \delta_0^2} \int_{\gamma} |\Phi(\xi) - \Phi(\xi_0)| ds, \end{aligned}$$

откуда при всех  $z$ , достаточно близких к  $\xi_0$ , получим:  $i_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ . Итак,  $A < \varepsilon$  при всех  $z$ , достаточно близких к  $\xi_0$  и принадлежащих  $g_{\theta, \rho}$ , т. е. соотношение (3.4:4) доказано для  $z$ , стремящихся к  $\xi_0$  по не касательным к  $\gamma$  путям.

Рассмотрим теперь второй из интегралов в правой части равенства (3.4:3). Очевидно это — интеграл типа Коши с постоянной, а следовательно, аналитической функцией  $\varphi(\zeta)$  ( $\equiv \varphi(\zeta_0)$ ). При этом он представляет  $\varphi(\zeta_0) \operatorname{Ln} \frac{Q-z}{P-z}$ , где  $P$  — начальная, а  $Q$  — конечная точки кривой  $\gamma$ . Однако мы не будем пользоваться этим последним замечанием, но сошлемся на результаты предыдущего пункта, в силу которых

$$f_{\Pi}(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma' + AbB} \frac{\varphi(\zeta_0) d\zeta}{\zeta - \zeta_0}, \quad f_{\Pi}(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma' + AaB} \frac{\varphi(\zeta_0) d\zeta}{\zeta - \zeta_0} \quad (3.4:5)$$

Сопоставляя (3.4:3), (3.4:4) и (3.4:5), заключаем, что при гипотезах относительно  $\gamma$ ,  $\varphi(\zeta)$  и  $\zeta_0 \in \gamma$ , формулированных в этом пункте, существуют граничные значения  $F_{\Pi}(\zeta_0)$  и  $F_{\Pi}(\zeta_0)$  интеграла типа Коши, выраженные формулами:

$$F_{\Pi}(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma' + AbB} \frac{\varphi(\zeta_0) d\zeta}{\zeta - \zeta_0}, \quad (3.4:6)$$

$$F_{\Pi}(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma' + AaB} \frac{\varphi(\zeta_0) d\zeta}{\zeta - \zeta_0} \quad (3.4:7)$$

Вычитая почленно (3.4:7) из (3.4:6), получаем:

$$F_{\Pi}(\zeta_0) - F_{\Pi}(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - \zeta_0| = \rho} \frac{\varphi(\zeta_0) d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = \varphi(\zeta_0). \quad (3.4:8)$$

Мы получили эту формулу, совпадающую с формулой (3.3:5), не предполагая аналитичности функции  $\varphi(\zeta)$ .

Преобразуем (3.4:6) и (3.4:7) к более простому виду, а именно, перепишем (3.4:6) следующим образом:

$$\begin{aligned} F_{\Pi}(\zeta_0) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_{\rho}} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{\varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{AbB} \frac{\varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - \zeta_0} + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_{\rho}} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{AbB} \frac{\varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta. \end{aligned} \quad (3.4:9)$$

При  $\rho \rightarrow 0$  второй из интегралов правой части формулы (3.4:9) стремится к нулю (в силу установленной выше сходимости интеграла (3.4:2)). Третий интеграл может быть записан в виде  $\frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi i} \operatorname{Изм} \operatorname{Ln}(\zeta - \zeta_0)$  и (так как

$\operatorname{Ln}(\zeta - \zeta_0) = \ln \rho + i \operatorname{Arg}(\zeta - \zeta_0)$ ) совпадает с

$$\frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi} \operatorname{Изм} \operatorname{Arg}(\zeta - \zeta_0) = \frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi} \frac{d \operatorname{Arg} AbB}{\rho}.$$

Но дуга  $\sigma_\rho \in \gamma$  с концами  $A$  и  $B$  может быть заключена, по предыдущему, в сколь угодно узкие вертикальные углы с общей вершиной  $\zeta_0$  и биссектрисой, совпадающей с касательной к  $\gamma$  в точке  $\zeta_0$ . Поэтому точки  $A$  и  $B$  стремятся при  $\rho \rightarrow 0$  соответственно к двум точкам пересечения этой касательной с окружностью  $|\zeta - \zeta_0| = \rho$ , откуда следует, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{AB} \frac{\varphi(\zeta_0) d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = \frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi} \pi = \frac{\varphi(\zeta_0)}{2}.$$

Так как левая часть формулы (3.4:9) от  $\rho$  не зависит, то мы заключаем, что существует также

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - \zeta_0}, \quad (3.4:10)$$

который мы обозначим через  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - \zeta_0} *$ .

Итак, окончательно получаем:

$$F_{\Pi}(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - \zeta_0} + \frac{1}{2} \varphi(\zeta_0). \quad (3.4:11)$$

Отсюда и из формулы (3.4:8) следует, что

$$F_{\Pi}(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - \zeta_0} - \frac{1}{2} \varphi(\zeta_0). \quad (3.4:12)$$

Формулы эти, имеющие важные приложения к механике, были впервые получены Ю. В. Сохоцким при предположениях, совпадающих с предположениями настоящего пункта, и поэтому называются формулами Сохоцкого.

3.5. Формулу Коши можно получить как частный случай более общей формулы, справедливой для функций, вообще говоря, неаналитических.

Пусть  $\Delta$  — область, ограниченная конечным числом замкнутых жордановых кусочно-гладких кривых:  $\Gamma$  (внешний контур),  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  (внутренние контуры),  $F(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$  — функция непрерывная с частными производными первого порядка в замкнутой области  $\bar{\Delta}$ . Тогда, применяя

\*) Заметим, что интеграл  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - \zeta_0}$ , вообще говоря, расходится.

Символ  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - \zeta_0}$  выбран лишь для обозначения предела (3.4:10), существование которого мы установили. Этот предел называется главным значением интеграла  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - \zeta_0}$  (в смысле Коши).

формулу Грина, получим:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F(z) dz &= \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} F(z) dz = \\ &= \int_{\Gamma} P dx - Q dy + i \int_{\Gamma} Q dx + P dy - \sum_{j=1}^n \left[ \int_{\gamma_j} P dx - Q dy + i \int_{\gamma_j} Q dx + P dy \right] = \\ &= \iint_{\Delta} \left[ - \left( \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) + i \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right] dx dy = 2i \iint_{\Delta} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} dx dy \end{aligned} \quad (3.5:1)$$

(здесь  $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$  — формальная производная, см. п. 1.3) Фиксируем  $z_0 \in \Delta$  и исключим из  $\Delta$  окрестность  $|z - z_0| < \varepsilon$ , радиус которой меньше расстояния от  $z_0$  до границы области  $\Delta$ . Получим область  $\Delta_\varepsilon$ , граница которой состоит из  $\Gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n$  и окружности  $\gamma_\varepsilon: |z - z_0| = \varepsilon$ . Применим формулу (3.5:1) к функции  $\Phi(z) = \frac{F(z)}{z - z_0}$ ; получим:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{F(z) dz}{z - z_0} - \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} \frac{F(z) dz}{z - z_0} - \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{F(z) dz}{z - z_0} &= 2i \iint_{\Delta_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[ \frac{F(z)}{z - z_0} \right] dx dy = \\ &= 2i \iint_{\Delta_\varepsilon} \left[ \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z - z_0} + F(z) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{1}{z - z_0} \right) \right] dx dy = \\ &= 2i \iint_{\Delta_\varepsilon} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z - z_0} dx dy, \end{aligned}$$

$\left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{1}{z - z_0} \right) = 0, \text{ так как } \frac{1}{z - z_0} \text{ — функция, аналитическая в области } \Delta_\varepsilon \right)$

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  получим:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{F(z) dz}{z - z_0} = 2\pi i F(z_0), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\Delta_\varepsilon} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z - z_0} dx dy = \iint_{\Delta} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z - z_0} dx dy$$

и, следовательно,

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(z) dz}{z - z_0} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{F(z) dz}{z - z_0} - \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z - z_0} dx dy. \quad (3.5:2)$$

Это и есть искомая общая формула. В ней сумма интегралов типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(z) dz}{z - z_0} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{F(z) dz}{z - z_0} = \Psi(z_0)$$

является аналитической функцией  $z_0$ .

Следовательно, функция

$$F(z_0) - \Psi(z_0) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z - z_0} dx dy$$

подобно  $F(z_0)$  непрерывна вместе с частными производными первого порядка в области  $\Delta$ , причем

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_0} \left[ -\frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z - z_0} dx dy \right] = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_0} [F(z_0) - \Psi(z_0)] = \frac{\partial F}{\partial \bar{z}_0}.$$

В случае, когда  $F(z)$  есть функция, аналитическая в области  $\Delta$ , формальная производная  $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \equiv 0$  и формула (3.5.2) переходит в интегральную формулу Коши:

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(z) dz}{z - z_0} - \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} \frac{F(z) dz}{z - z_0}.$$

## § 4. Ряды функций и бесконечные произведения

### 4.1. Пусть

$$f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots = \sum_0^{\infty} f_n(z) \quad (4.1:1)$$

— ряд функций комплексного переменного, определенных на некотором бесконечном множестве точек  $E$ . Обозначим через  $S_n(z)$  частичную сумму  $n+1$  первых членов ряда:

$$S_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z). \quad (4.1:2)$$

Ряд (4.1:1) называется равномерно сходящимся на  $E$ , если для любого  $\epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ , можно указать такое  $N(\epsilon)$ , что при  $n > N(\epsilon)$  неравенство

$$|S_{n+p}(z) - S_n(z)| < \epsilon \quad (4.1:3)$$

выполняется для любого натурального  $p$  во всех точках множества  $E$ .

Из этого определения следует, что ряд, равномерно сходящийся на множестве  $E$ , сходится в каждой точке этого множества (в силу критерия Коши). Обратное, вообще, неверно, как показывает пример геометрического ряда

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$$

В самом деле, этот ряд сходится в единичном круге, так как

$$1 + z + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \rightarrow \frac{1}{1 - z}$$

при  $n \rightarrow \infty$ , если  $|z| < 1$ . Однако сходится он неравномерно. Действительно, здесь

$$|S_{n+p}(z) - S_n(z)| = |z^{n+1}(1 + z + \dots + z^{p-1})| = \\ = \frac{|z|^{n+1}|1 - z^p|}{|1 - z|} \geq \frac{|z|^{n+1}(1 - |z|^p)}{|1 - z|}$$

Возьмем произвольное  $n$  и положим  $p = n$ ,  $z_n = \frac{n}{n+1}$ . Тогда будем иметь:

$$|S_{2n}(z_n) - S_n(z_n)| \geq \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \left[1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]}{\frac{1}{n+1}} = \\ = n \frac{1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Итак, для произвольно больших  $n$  существуют такие  $p (=n)$  и такие точки  $z_n$  единичного круга, в которых числа  $|S_{2n}(z_n) - S_n(z_n)|$  сколь угодно велики. Отсюда и следует, что геометрический ряд не сходится равномерно в единичном круге.

Обозначая сумму ряда (4.1:1) через  $f(z)$ :

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z), \quad (4.1:4)$$

мы можем представить условие равномерной сходимости в ином виде. А именно, для равномерной сходимости ряда (4.1:1) необходимо и достаточно, чтобы для любого  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , можно было найти такое  $N(\varepsilon)$ , чтобы неравенство

$$|f(z) - S_n(z)| < \varepsilon \quad (4.1:5)$$

выполнялось в любой точке  $z \in E$  при  $n > N(\varepsilon)$ .

Пусть, в самом деле, ряд (4.1:1) сходится равномерно. Найдем такое  $N_1(\varepsilon)$ , чтобы при  $n > N_1(\varepsilon)$  и любых  $z$  и  $p$  ( $z \in E$ ,  $p$  — натуральное число), выполнялось неравенство

$$|S_{n+p}(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Заставляя здесь  $p$  неограниченно расти, получим:

$$|f(z) - S_n(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

при  $n > N_1(\varepsilon)$  и любом  $z \in E$ . Итак, из выполнения условия (4.1:3) следует и выполнение условия (4.1:5).



Обратно, если неравенство

$$|f(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

выполняется при  $n > N_2(\varepsilon)$  для любой точки  $z \in E$ , то при тех же условиях для любого натурального  $p$  будем иметь:

$$\begin{aligned} |S_{n+p}(z) - S_n(z)| &= |f(z) - S_n(z) - [f(z) - S_{n+p}(z)]| \leq \\ &\leq |f(z) - S_n(z)| + |f(z) - S_{n+p}(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, из выполнения условия (4.1:5) следует также выполнение условия (4.1:3).

Простой достаточный признак равномерной сходимости ряда (4.1:1) дает сравнение ряда функций со сходящимся рядом с постоянными положительными членами. Именно, если модули членов ряда (4.1:1), начиная с некоторого номера  $n \geq \nu$ , не превосходят на  $E$  соответствующих членов сходящегося ряда

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots \quad (4.1:6)$$

с постоянными положительными членами, то ряд (4.1:1) равномерно сходится на  $E$ . Действительно, для любого  $\varepsilon > 0$ , в силу сходимости ряда (4.1:6), найдется такое  $N(\varepsilon)$ , что при  $n > N(\varepsilon)$  и любом  $p$  будет выполняться неравенство

$$\alpha_{n+1} + \dots + \alpha_{n+p} < \varepsilon.$$

Но на множестве  $E$ , по предположению, справедливы неравенства

$$|f_k(z)| \leq \alpha_k \quad (k \geq \nu).$$

Следовательно, во всякой точке  $z \in E$  при  $n > \max(N(\varepsilon), \nu)$  и любом натуральном  $p$  будем иметь:

$$\begin{aligned} |S_{n+p}(z) - S_n(z)| &\leq |f_{n+1}(z)| + \dots + |f_{n+p}(z)| \leq \\ &\leq \alpha_{n+1} + \dots + \alpha_{n+p} < \varepsilon, \end{aligned}$$

что и означает равномерную сходимость ряда (4.1:1).

Пусть каждая точка множества  $E$  является предельной для этого множества, т. е., как говорят,  $E$  — множество, плотное в себе. Это будет, например, в том случае, когда  $E$  есть произвольное открытое (не пустое) множество, в частности область, а также, когда  $E$  — непрерывная кривая. Тогда, если каждый член ряда, равномерно сходящегося на  $E$ , является функцией, непрерывной на  $E$ , то и сумма ряда является функцией, непрерывной на  $E$ .

Для доказательства рассмотрим какие-либо две точки  $z_0$  и множества  $E$  и оценим  $|f(z) - f(z_0)|$  следующим образом:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= \\ &= |[f(z) - S_n(z)] + [S_n(z) - S_n(z_0)] + [S_n(z_0) - f(z_0)]| \leq \\ &\leq |f(z) - S_n(z)| + |S_n(z) - S_n(z_0)| + |f(z_0) - S_n(z_0)|. \end{aligned} \quad (4.1:7)$$

Пусть  $\varepsilon$  — произвольное положительное число. В силу равномерной сходимости ряда существует такое  $N(\varepsilon)$ , что при  $n > N(\varepsilon)$  для любых точек множества  $E$  справедливо неравенство:

$$|f(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.1:8)$$

В частности, следовательно, будем иметь:

$$|f(z_0) - S_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.1:9)$$

Фиксируем произвольное  $n_0 > N(\varepsilon)$ . В силу непрерывности функции  $S_{n_0}(z)$  в точке  $z_0$ , можно указать такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что при  $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$  ( $z, z_0 \in E$ ) будет выполнено неравенство

$$|S_{n_0}(z) - S_{n_0}(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.1:10)$$

Полагая в (4.1:7)  $n = n_0$  и беря  $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$ , получим вследствие неравенств (4.1:8), (4.1:9) и (4.1:10):

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon,$$

откуда и следует непрерывность функции  $f(z)$  в любой точке  $z_0 \in E$ .

Пусть, в частности,  $E$  есть спрямляемая кривая  $L$ . Докажем, что если члены ряда (4.1:1) непрерывны на  $L$  и ряд этот равномерно сходится на  $L$ , то его можно почленно интегрировать вдоль  $L$ , т. е.

$$\int_L f(z) dz = \int_L f_0(z) dz + \int_L f_1(z) dz + \dots + \int_L f_n(z) dz + \dots \quad (4.1:11)$$

В самом деле, из непрерывности членов ряда и его равномерной сходимости на  $L$  следует, по доказанному выше, непрерывность  $f(z)$  на  $L$ . Обозначим длину кривой  $L$  через  $\Delta$ . Если  $\varepsilon$  — произвольное положительное число и  $N(\varepsilon)$  таково, что при  $n > N(\varepsilon)$  во всех точках кривой  $L$  выполняется неравенство

$$|f(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{\Delta},$$

то, очевидно:

$$\left| \int_L f(z) dz - \left[ \int_L f_0(z) dz + \dots + \int_L f_n(z) dz \right] \right| = \\ = \left| \int_L [f(z) - S_n(z)] dz \right| < \frac{\varepsilon}{\Delta} \Delta = \varepsilon$$

(при  $n > N(\varepsilon)$ ), откуда и следует соотношение (4.1:11).

Часто теорему о возможности почленного интегрирования ряда приходится применять в следующей форме. Пусть члены ряда (4.1:1) непрерывны в некоторой области  $G$ , причем ряд сходится равномерно на каждом замкнутом множестве точек этой области. Тогда ряд (4.1:1) можно почленно интегрировать вдоль любой спрямляемой кривой  $L$ , лежащей в области  $G$ .

Чтобы свести эту теорему к предыдущей, достаточно заметить, что каждая спрямляемая кривая  $L$  (и, вообще, каждая непрерывная кривая), лежащая в области  $G$ , представляет собой замкнутое множество точек области. Следовательно, по условию теоремы, ряд (4.1:1) равномерно сходится на  $L$ .

В теории аналитических функций равномерная сходимость ряда функций на каждом ограниченном замкнутом множестве точек некоторой области  $G$  играет весьма важную роль. Мы будем называть подобную сходимость **равномерной сходимостью внутри области  $G$** , отличая ее от равномерной сходимости в области  $G$ . Всякий ряд, равномерно сходящийся в области  $G$ , сходится равномерно и на каждом замкнутом множестве ее точек и, следовательно, равномерно сходится внутри  $G$ . Обратное, вообще говоря, несправедливо, как показывает пример геометрического ряда

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$$

Действительно, мы видели выше, что этот ряд сходится в единичном круге  $|z| < 1$  неравномерно. Тем не менее он равномерно сходится внутри единичного круга. В самом деле, пусть  $F$  — некоторое замкнутое множество точек единичного круга и  $\delta > 0$  — расстояние от  $F$  до границы области — единичной окружности. Тогда для любой точки  $z \in F$  имеем:  $|z| \leq 1 - \delta$  и, следовательно,

$$|z^{n+1} + \dots + z^{n+p}| = \left| z^{n+1} \frac{1 - z^p}{1 - z} \right| \leq |z|^{n+1} \frac{1 + |z|^p}{1 - |z|} \leq (1 - \delta)^{n+1} \frac{2}{\delta}.$$

Очевидно, величина  $(1 - \delta)^{n+1} \frac{2}{\delta}$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$  и может быть сделана меньше  $\varepsilon > 0$  при  $n > N(\varepsilon)$ . Итак, геометрический ряд равномерно сходится на любом замкнутом множестве  $F$  точек единичного круга и, следовательно, равномерно сходится внутри круга, хотя и не сходится равномерно в круге.

Докажем, что для того чтобы ряд (4.1:1) равномерно сходилась внутри некоторой области  $G$ , необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки  $z_0$  области существовала окрестность, в которой этот ряд сходится равномерно. Необходимость этого условия очевидна, так как если  $|z - z_0| \leq \rho$  — замкнутый круг с центром в точке  $z_0$ , принадлежащий  $G$ , то ряд должен равномерно сходиться на нем, а следовательно, и в окрестности  $|z - z_0| < \rho$  точки  $z_0$ . Чтобы убедиться в достаточности условия, будем вести доказательство от противного. Пусть условие выполнено, но ряд сходится неравномерно на некотором замкнутом множестве  $F \subset G$ . Тогда должны существовать: положительное число  $\varepsilon_0$ , сколь угодно большие натуральные числа  $n_k$  ( $n_k < n_{k+1}$ ) и точки  $z_k \in F$  такие, что

$$|f(z_k) - S_{n_k}(z_k)| \geq \varepsilon_0. \quad (4.1:12)$$

(Мы формулировали здесь отрицание равномерной сходимости ряда (4.1:1) на множестве  $F$ .)

Из последовательности точек  $\{z_k\}$  можно выбрать подпоследовательность  $\{z_{k'}\}$ , сходящуюся к некоторой точке  $z_0 \in F$  ( $F$  — замкнутое множество). Так как  $z_0$  есть точка области  $G$ , то для нее, по условию, существует окрестность  $U$ , принадлежащая  $G$ , в которой ряд сходится равномерно. Следовательно, во всех точках из  $U$  должно выполняться неравенство

$$|f(z) - S_n(z)| < \varepsilon_0,$$

если  $n$  достаточно велико.

С другой стороны, вследствие нашего допущения существуют сколь угодно большие номера  $n_{k'}$ , такие, что в точках  $z_{k'}$ , лежащих в  $U$  (а  $U$  принадлежат все точки  $\{z_{k'}\}$ , начиная с некоторой из них), выполняется противоположное неравенство:

$$|f(z_{k'}) - S_{n_{k'}}(z_{k'})| \geq \varepsilon_0.$$

Из полученного противоречия и следует справедливость нашего утверждения.

Вернемся к вопросу об интегрировании равномерно сходящегося ряда аналитических функций  $\sum_0^\infty f_k(z)$ . Фиксируя произвольную точку  $z_0 \in G$ , будем иметь для любой спрямляемой кривой  $\gamma$ , принадлежащей  $G$  и соединяющей  $z_0$  с точкой  $z$ , также принадлежащей  $G$ :

$$\int_\gamma f(z) dz = \sum_0^\infty \int_\gamma f_k(z) dz.$$

Интегралы  $\int_{\gamma} f(z) dz$  и  $\int_{\gamma} f_n(z) dz$  можно рассматривать как функции от  $z$ , вообще многозначные (см. п. 2.7):

$$\int_{z_0}^z f(z) dz \quad \text{и} \quad \int_{z_0}^z f_n(z) dz.$$

Чтобы выделить их однозначные ветви в окрестности  $U$   $|z - z_1| < \rho$  какой-либо точки  $z_1$  области  $G$  (мы предполагаем, что эта окрестность вместе с ее границей  $|z - z_1| = \rho$  содержится в области  $G$ ), будем производить все интегрирования от точки  $z_0$  до точки  $z_1$  по одной и той же, принадлежащей области  $G$ , спрямляемой кривой  $\gamma_1$  и, далее, от точки  $z_1$  до любой точки  $z \in U$  вдоль произвольных спрямляемых кривых, лежащих в  $U$ , например, вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего  $z_1$  и  $z$ .

Покажем, что при соблюдении этих условий ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{z_0}^z f_n(z) dz$  будет равномерно сходиться в  $U$ , т. е. в произвольном замкнутом круге, лежащем в области  $G$ .

В самом деле, для величины

$$\left| \sum_{n=1}^{n+p} \int_{z_0}^z f_n(z) dz \right|$$

получаем следующую оценку:

$$\left| \sum_{n=1}^{n+p} \int_{z_0}^z f_n(z) dz \right| \leq \left| \sum_{n=1}^{n+p} \int_{\gamma_1} f_n(z) dz \right| + \left| \sum_{n=1}^{n+p} \int_{z_1}^z f_n(z) dz \right|.$$

Но ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_1} f_n(z) dz$  сходится, и, следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $N_1(\varepsilon)$ , что

$$\left| \sum_{n=1}^{n+p} \int_{\gamma_1} f_n(z) dz \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } n > N_1(\varepsilon).$$

Далее, пользуясь равномерной сходимостью ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$  в замкнутом круге  $|z - z_1| \leq \rho$ , мы можем выбрать число  $N_2(\varepsilon)$  такое, что

$$\left| \sum_{n=1}^{n+p} f_n(z) \right| < \frac{\varepsilon}{2\rho}$$

при  $n > N_2(\epsilon)$  для всех точек этого круга. Беря интегралы  $\int_{z_1}^z f_k(z) dz$  вдоль отрезка прямой, соединяющего  $z_1$  и  $z$ , будем иметь:

$$\left| \sum_{n+1}^{n+p} \int_{z_1}^z f_k(z) dz \right| = \left| \int_{z_1}^z \sum_{n+1}^{n+p} f_k(z) dz \right| \leq \frac{\epsilon}{2\rho} \rho = \frac{\epsilon}{2}.$$

Следовательно, при  $n > N(\epsilon) = \max[N_1(\epsilon), N_2(\epsilon)]$  в любой точке круга  $|z - z_1| \leq \rho$  будет выполнено неравенство

$$\left| \sum_{n+1}^{n+p} \int_{z_1}^z f_k(z) dz \right| < \epsilon,$$

чем и доказывается равномерная сходимость ряда в любом замкнутом круге, содержащемся в  $G$ .

В частном случае, когда все интегралы  $\int_{z_0}^z f_k(z) dz$  являются однозначными функциями в области  $G$ , из доказанного вытекает, что ряд

$$\sum_0^\infty \int_{z_0}^z f_k(z) dz$$

равномерно сходится внутри области  $G$ , если ряд  $\sum_0^\infty f_k(z)$  равномерно сходится внутри той же области.

Теорема Вейерштрасса о равномерно сходящихся рядах аналитических функций. Если члены ряда

$$f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z) + \dots, \quad (4.1:1)$$

равномерно сходящегося внутри области  $G$ , являются аналитическими в этой области, то сумма ряда  $f(z)$  также является аналитической в области  $G$ .

Кроме того, ряды

$$f_0^{(k)}(z) + f_1^{(k)}(z) + \dots + f_n^{(k)}(z) + \dots, \quad (4.1:13)$$

получаемые путем  $k$ -кратного почленного дифференцирования ряда (4.1:1), также сходятся равномерно внутри  $G$  и представляют в области  $G$  производные  $k$ -го порядка от суммы ряда  $f(z)$ .

Пусть  $z_0$  — произвольная точка области  $G$  и  $\gamma$  — окружность радиуса  $\rho$  с центром в точке  $z_0$ , принадлежащая  $G$  вместе со своей внутренностью. Очевидно, достаточно доказать все утверждения теоремы для точек окрестности  $U: |z - z_0| < \frac{\rho}{2}$  точки  $z_0$ . Пусть  $\zeta$  обозначает произвольную точку на  $\gamma$  и  $z$  — произвольную точку из  $U$ . Положим в (4.1:1)  $z = \zeta$  и умножим все члены ряда на  $\frac{k!}{2\pi i} \frac{1}{(\zeta - z)^{k+1}}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Получим:

$$\frac{k!}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} = \sum_0^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}. \quad (4.1:14)$$

Так как ряд (4.1:1) равномерно сходится на  $\gamma$  и при наших предположениях

$$\left| \frac{k!}{2\pi i} \frac{1}{(\zeta - z)^{k+1}} \right| \leq \frac{k!}{2\pi \left(\frac{\rho}{2}\right)^{k+1}},$$

то ряд (4.1:14) также равномерно сходится на  $\gamma$ ; поэтому его можно почленно интегрировать. В результате получаем:

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} = \sum_0^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}. \quad (4.1:15)$$

В силу аналитичности функций  $f_n(z)$  в области  $G$  интегралы  $\frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}$  изображают производные  $f_n^{(k)}(z)$  (см. (3.2:7)).

При  $k = 0$  равенство (4.1:15) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \sum_0^{\infty} f_n(z) = f(z),$$

откуда вытекает, что  $f(z)$  представляется в  $U$  интегралом типа Коши и, следовательно, является аналитической в  $U$  функцией.

При  $k > 0$  получаем из равенства (4.1:15):

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} = \sum_0^{\infty} f_n^{(k)}(z).$$

Но выражение в левой части этого равенства изображает производную порядка  $k$  от интеграла типа Коши  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$  и, следо-

вательно, равно  $f^{(k)}(z)$ . Итак, в окрестности  $U$  точки  $z_0$  имеем:

$$f^{(k)}(z) = \sum_0^{\infty} f_n^{(k)}(z).$$

Остается доказать равномерную сходимость этого ряда, или, что то же самое, ряда (4.1:15) в той же окрестности. Но если на  $\gamma$  выполняется неравенство

$$|f(\zeta) - S_n(\zeta)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > N(\varepsilon),$$

то для всех точек  $z \in U$  при тех же значениях  $n$  имеем:

$$\begin{aligned} \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} - \sum_0^n \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_j(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} \right| = \\ = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) - S_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \right| < \frac{k!}{2\pi} \frac{\varepsilon}{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{k+1}} 2\pi\rho. \end{aligned}$$

Так как правая часть, очевидно, может быть сделана произвольно малой вместе с  $\varepsilon$ , то последнее неравенство выражает равномерную сходимость ряда (4.1:15) или ряда (4.1:13) в  $U$ , чем и заканчивается доказательство теоремы.

Для правильного применения теоремы Вейерштрасса необходимо помнить, что она формулирована и доказана для рядов аналитических функций, сходящихся в области. В случае произвольного множества (не открытого) она может быть неверна.

Рассмотрим, прежде всего, построенный Вейерштрассом пример нигде не дифференцируемой функции:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x \pi)$$

( $a$  — нечетное целое число,  $0 < b < 1$ ). Каждый член этого ряда есть функция, аналитическая во всех точках действительной оси (и даже во всей плоскости). Кроме того, ряд равномерно сходится на действительной оси, ибо абсолютная величина общего члена ряда  $|b^n \cos(a^n x \pi)|$  не превышает члена  $b^n$  сходящегося геометрического ряда. Однако сумма ряда не является аналитической в точках действительной оси, ибо, как показал Вейерштрасс, она не дифференцируема ни при каком  $x$ .

В качестве второго примера возьмем ряд

$$\sin x + \left( \frac{\sin 2x}{2} - \sin x \right) + \left( \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 2x}{2} \right) + \dots$$

Члены этого ряда являются аналитическими на действительной оси (и даже во всей плоскости). Кроме того, ряд сходится



равномерно на действительной оси, причем его сумма, будучи тождественно равна нулю, представляет аналитическую функцию. В самом деле, частичная сумма ряда

$$\sin x + \left( \frac{\sin 2x}{2} - \sin x \right) + \dots + \left[ \frac{\sin nx}{n} - \frac{\sin (n-1)x}{n-1} \right] = \frac{\sin nx}{n}$$

не превышает по абсолютной величине  $\frac{1}{n}$ , откуда и следует, что она сходится к нулю и притом равномерно.

Но если ряд почленно дифференцировать, то получим ряд

$$\cos x + (\cos 2x - \cos x) + \dots + [\cos nx - \cos (n-1)x] +$$

частичные суммы которого суть

$$\cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots$$

Последовательность этих сумм, очевидно, расходится при всяком  $x \neq 2k\pi$ , а при  $x = 2k\pi$  дает в пределе 1, т. е. величину, отличную от производной суммы ряда.

Основываясь на теореме Вейерштрасса, мы должны заключить, что в этих двух случаях *не существует области, содержащей точки всей действительной оси или даже какой-либо ее части, в которой данные ряды сходились бы равномерно*. В противном случае эти примеры противоречили бы теореме Вейерштрасса.

Во многих случаях оказывается полезной следующая теорема, позволяющая заключать о равномерной сходимости ряда в замкнутой области по его равномерной сходимости на границе области.

**Теорема.** Если члены ряда  $\sum_0^\infty f_k(z)$  непрерывны в замкнутой ограниченной области  $\bar{G}$  и аналитичны в области  $G$ , то из равномерной сходимости ряда на границе  $\Gamma$  области  $G$  следует его равномерная сходимость в замкнутой области  $\bar{G}$ .

**Доказательство.** По условию теоремы, для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $N(\varepsilon)$ , что неравенство

$$\left| \sum_{n+1}^{n+p} f_k(z) \right| < \varepsilon \quad (4.1:16)$$

выполняется при  $n > N(\varepsilon)$  и любом натуральном  $p$  во всех точках границы  $\Gamma$ . Но функция  $\sum_{n+1}^{n+p} f_k(z)$  является непрерывной в  $\bar{G}$

и аналитической в  $G$ . Поэтому максимум модуля  $\left| \sum_{n+1}^{n+p} f_k(z) \right|$  в замкнутой области  $\bar{G}$  достигается на границе области  $G$ , и, следовательно, в силу неравенства (4.1:16) этот максимум имеет

значение, меньшее  $\varepsilon$ . Отсюда вытекает, что неравенство (4.1:16) выполняется при  $n > N(\varepsilon)$  и любом натуральном  $p$  во всех точках замкнутой области  $\bar{G}$ , что и означает равномерную сходимость ряда  $\sum_0^{\infty} f_k(z)$  в этой области.

4.2. Все формулированное и доказанное в предыдущем пункте для равномерно сходящихся рядов функций непосредственно распространяется на равномерно сходящиеся последовательности функций.

Последовательность функций

$$\{F_n(z)\}, \quad (4.2:1)$$

определенных на множестве  $E$ , мы называем равномерно сходящейся на этом множестве, если для любого  $\varepsilon$  можно указать такое  $N(\varepsilon)$ , что неравенство

$$|F_{n+p}(z) - F_n(z)| < \varepsilon$$

выполняется для любого натурального  $p$  во всех точках  $z \in E$ .

Очевидно, что последовательность (4.2:1) можно рассматривать как последовательность частичных сумм следующего ряда функций:

$$F_0(z) + [F_1(z) - F_0(z)] + [F_2(z) - F_1(z)] + \dots \\ + [F_n(z) - F_{n-1}(z)] + \dots \quad (4.2:2)$$

и что она сходится равномерно на  $E$  тогда и только тогда, когда равномерно сходится на  $E$  ряд (4.2:2). Кроме того, члены последовательности (4.2:1) являются непрерывными, соответственно, аналитическими функциями одновременно с членами ряда (4.2:2). Отсюда и следует, что все предложения предыдущего пункта применимы к последовательностям функций.

Вместо последовательности функций нередко приходится рассматривать семейство функций от некоторого непрерывно изменяющегося параметра  $\tau$ :  $\{F_\tau(z)\}$ . Пусть каждая из этих функций определена на множестве  $E$ , а параметр  $\tau$ , для определенности действительный, пробегает интервал  $(\alpha, \beta)$  ( $\beta \leq +\infty$ ). Если для каждого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\beta(\varepsilon) < \beta$ , что при  $\tau > \beta(\varepsilon)$  и  $\tau' > \beta(\varepsilon)$  неравенство

$$|F_{\tau'}(z) - F_\tau(z)| < \varepsilon$$

выполняется во всех точках множества  $E$ , то говорят, что семейство  $\{F_\tau(z)\}$  равномерно сходится на  $E$  при  $\tau$ , стремящемся к  $\beta$ . Если  $\{\tau_n\}$  — последовательность значений параметра, сходящаяся к  $\beta$ , то последовательность  $\{F_{\tau_n}(z)\}$ , в силу этого определения, будет равномерно сходящейся на  $E$ . Ее предельная функция

$F(z)$  не зависит от избранной последовательности  $\{\tau_n\}$ . В самом деле, если

$$|F(z) - F_{\tau_n}(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при } n > N_1,$$

а для другой последовательности  $\tau'_n$  предельная функция есть  $F'(z)$ , так что

$$|F'(z) - F_{\tau'_n}(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при } n > N_2,$$

то, пользуясь тем, что для всех  $\tau_n$  и  $\tau'_n$ , достаточно близких к  $\beta$ , выполняется неравенство

$$|F_{\tau_n}(z) - F_{\tau'_n}(z)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

заключаем, что

$$|F(z) - F'(z)| < \varepsilon,$$

откуда и следует совпадение функций  $F'(z)$  и  $F(z)$ .

Из этого соотношения между равномерно сходящимся семейством функций  $\{F_\tau(z)\}$  и равномерно сходящимися последовательностями функций  $\{F_{\tau_n}(z)\}$  вытекает, что все предложения предыдущего пункта переносятся и на семейства функций. В частности, справедливо предложение: если функции  $F_\tau(z)$ ,  $\alpha < \tau < \beta$ , являются аналитическими в области  $G$  и семейство  $\{F_\tau(z)\}$  равномерно сходится внутри  $G$  при  $\tau$ , стремящемся к  $\beta$ , то предельная функция  $F(z)$  также является аналитической в области  $G$ ; кроме того, для любого натурального  $k$  семейство производных  $\{F_\tau^{(k)}(z)\}$  равномерно сходится внутри  $G$  к производной  $F^{(k)}(z)$ .

В виде важного примера рассмотрим несобственный интеграл типа Коши.

Пусть  $L$  — неограниченная кривая:  $z = \lambda(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , где  $\lambda(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \beta$ , причем каждая конечная дуга ее  $L_\tau: \alpha \leq t \leq \tau < \beta$  спрямляема. Если  $\varphi(\xi)$  — непрерывная функция, определенная на  $L$ , то интегралы типа Коши

$$F_\tau(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\tau} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - z}$$

представляют семейство функций, определенных и аналитических в каждой области, не содержащей точек кривой  $L$ .

Допустим, что это семейство равномерно сходится внутри каждой области, не содержащей точек кривой  $L$ . Это будет выполняться, например, при условии абсолютной сходимости интеграла  $\int_L \varphi(\xi) d\xi$ ,

т. е. в предположении, что существует предел

$$\lim_{\tau \rightarrow \beta} \int_{L_\tau} |\varphi(\zeta)| d\sigma = \int_L |\varphi(\zeta)| d\sigma.$$

В самом деле, тогда на любом ограниченном замкнутом множестве  $E$ , не содержащем точек кривой  $L$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} |F_{\tau'}(z) - F_\tau(z)| &= \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{\tau'} - L_\tau} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \right| \leq \frac{1}{2\pi\rho} \left| \int_{L_{\tau'}} |\varphi(\zeta)| d\sigma - \int_{L_\tau} |\varphi(\zeta)| d\sigma \right|, \end{aligned}$$

где  $\rho$  — расстояние между  $E$  и  $L$ , и, очевидно, для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\beta(\varepsilon) < \beta$ , что при  $\tau > \beta(\varepsilon)$  и  $\tau' > \beta(\varepsilon)$  будет выполняться неравенство

$$|F_{\tau'}(z) - F_\tau(z)| < \varepsilon \quad (z \in E).$$

При сделанных относительно семейства  $\{F_\tau(z)\}$  предположениях будет существовать несобственный интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \lim_{\tau \rightarrow \beta} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\tau} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Мы назовем его несобственным интегралом типа Коши вдоль неограниченной кривой  $L$ , или, короче: интегралом типа Коши вдоль  $L$ . Из теоремы Вейерштрасса, сформулированной для случая семейства функций, вытекает, что этот интеграл представляет аналитическую функцию  $F(z)$  в каждой области, не содержащей точек кривой  $L$ .

Из той же теоремы вытекает, что семейство производных

$$\left\{ F_\tau^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{L_\tau} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} \right\}$$

также равномерно сходится к  $F^{(k)}(z)$ . Но, с другой стороны, равномерная сходимость этого семейства означает, что существует несобственный интеграл

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} = \lim_{\tau \rightarrow \beta} \frac{k!}{2\pi i} \int_{L_\tau} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}.$$

Следовательно,

$$F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}.$$

Мы убедились, таким образом, что свойства, установленные выше для интегралов типа Коши, справедливы и для несобственных интегралов типа Коши.

Эти результаты переносятся без изменения и на тот случай, когда  $L$  есть неограниченная кривая, для которой не только конечная, но и начальная точки находятся в бесконечности, т. е. функция  $z = \lambda(t)$ , определенная в интервале  $\alpha < t < \beta$ , удовлетворяет условиям  $\lim_{t \rightarrow \alpha} \lambda(t) = \lim_{t \rightarrow \beta} \lambda(t) = \infty$  (например,  $L$  есть прямая или парабола).

Вернемся к общему случаю последовательности  $\{F_n(z)\}$ .

Отметим, что если последовательность (4.2:1) равномерно сходится на  $E$ , то и последовательность модулей  $\{|F_n(z)|\}$  равномерно сходится на  $E$ . В самом деле:

$$||F_{n+p}(z)| - |F_n(z)|| \leq |F_{n+p}(z) - F_n(z)|.$$

Далее, если  $\Phi(z)$  — функция, ограниченная по модулю на  $E$ :

$$|\Phi(z)| < M \quad (z \in E),$$

и последовательность (4.2:1) равномерно сходится на  $E$ , то и последовательность  $\{\Phi(z)F_n(z)\}$  равномерно сходится на  $E$ .

В самом деле, если на множестве  $E$  при  $n > N(\epsilon)$  выполняется неравенство

$$|F_{n+p}(z) - F_n(z)| < \frac{\epsilon}{M},$$

то на этом множестве при тех же  $n > N(\epsilon)$  выполняется и неравенство

$$|\Phi(z)F_{n+p}(z) - \Phi(z)F_n(z)| < \frac{\epsilon}{M} M = \epsilon.$$

Допустим, наконец, что функции последовательности (4.2:1), равномерно сходящейся на  $E$ , будут равномерно ограниченными по модулю на  $E$ :

$$|F_n(z)| < M \quad (z \in E), \quad n = 0, 1, 2,$$

Тогда последовательности  $\{[F_n(z)]^k\}$  ( $k$  — натуральное число) будут также равномерно сходиться на  $E$ .

В самом деле,

$$\begin{aligned} |[F_{n+p}(z)]^k - [F_n(z)]^k| &= |[F_{n+p}(z) - F_n(z)] \{[F_{n+p}(z)]^{k-1} + \\ &+ [F_{n+p}(z)]^{k-2} [F_n(z)] + \dots \\ &\dots + [F_n(z)]^{k-1}\}| < kM^{k-1} |F_{n+p}(z) - F_n(z)|. \end{aligned}$$

Поэтому, если

$$|F_{n+p}(z) - F_n(z)| < \frac{\epsilon}{kM^{k-1}} \quad \text{при } n > N(\epsilon),$$

то

$$|[F_{n+p}(z)]^k - [F_n(z)]^k| < \epsilon \quad \text{при } n > N(\epsilon),$$

чем и устанавливается равномерная сходимость последовательности  $\{[F_n(z)]^k\}$ .

Равномерная ограниченность модулей функций, составляющих равномерно сходящуюся последовательность, всегда имеет место, если  $F_n(z)$  — непрерывные функции и  $E$  — ограниченное замкнутое множество. В самом деле,  $F(z) = \lim F_n(z)$  есть функция, непрерывная на  $E$  и, следовательно, ограниченная по модулю:  $|F(z)| < M'$ . Возьмем  $\varepsilon = 1$ , тогда  $|F_n(z) - F(z)| < 1$  при  $n > N$ ; поэтому  $|F_n(z)| < |F(z)| + 1 < M' + 1$  при  $n = N + 1, N + 2$ . Но каждая из функций  $F_1(z), \dots, F_N(z)$  также ограничена по модулю на  $E$ :

$$|F_k(z)| < M_k \quad (k = 0, 1, \dots, N).$$

Полагая  $M = \max(M_0, M_1, \dots, M_N, M' + 1)$ , будем иметь:

$$|F_n(z)| < M, \quad z \in E, \quad n = 0, 1, 2,$$

4.3. Дадим общее определение и укажем некоторые свойства бесконечных произведений. Пусть  $\{u_n\}$  — последовательность комплексных чисел, отличных от нуля. Если существует предел

$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_1^n u_k$  и этот предел  $u$  отличен от нуля, то говорят, что бес-

конечное произведение  $\prod_1^\infty u_k$  сходится, а число  $u$  называют величиной этого произведения и пишут:

$$u = \prod_1^\infty u_k.$$

В случае, когда предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_1^n u_k$  либо не существует, либо существует и равен нулю (при отличных от нуля множителях), мы будем говорить, что бесконечное произведение расходится.

Очевидно, для сходящегося произведения должно быть выполнено необходимое условие:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1.$$

В самом деле, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_1^n u_k = u \neq 0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_1^n u_k}{\prod_1^{n-1} u_k} = 1$ .

Вследствие этого общий член произведения удобно записывать

в виде  $u_k = 1 + v_k$ , где, в случае сходимости, должно выполняться необходимое условие:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = 0.$$

Покажем, что бесконечное произведение  $\prod_1^{\infty} (1 + v_k)$  сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд  $\sum_1^{\infty} \ln(1 + v_k)$ .

В самом деле, сходимость последнего ряда эквивалентна сходимости двух рядов:

$$\sum_1^{\infty} \ln |1 + v_k| \quad \text{и} \quad \sum_1^{\infty} \arg(1 + v_k).$$

Из их сходимости следует, что последовательности

$$\left\{ \sum_1^n \ln |1 + v_k| = \ln \left| \prod_1^n (1 + v_k) \right| \right\}$$

и

$$\left\{ \sum_0^n \arg(1 + v_k) = \operatorname{Arg}_n \left[ \prod_1^n (1 + v_k) \right] \right\}$$

сходятся (здесь  $\operatorname{Arg}_n \left[ \prod_1^n (1 + v_k) \right]$  обозначает то значение аргумента, которое дается левой частью равенства); поэтому сходится и последовательность  $\left\{ \prod_1^n (1 + v_k) \right\}$ , и притом к пределу  $u$ , отличному от нуля, т. е. бесконечное произведение сходится. Обратно: если оно сходится

$$\prod_1^{\infty} (1 + v_k) = u \neq 0,$$

то существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_1^n |1 + v_k| = |u| \neq 0,$$

и, следовательно, ряд  $\sum_1^{\infty} \ln |1 + v_k|$  сходится. Кроме того (см. п. 3.3 гл. первой), должна существовать последовательность значений

$$\operatorname{Arg} \left[ \prod_1^n (1 + v_k) \right] = \sum_1^n \arg(1 + v_k) + 2\pi\mu_n = \varphi_n,$$

сходящаяся к одному из значений  $\text{Arg } u$  ( $\mu_n$  — целые числа).

Из сходимости бесконечного произведения  $\prod_1^\infty (1 + v_k)$  следует, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} (1 + v_k) = 1$ , поэтому при  $k > N$  имеем:

$$|\arg(1 + v_k)| < \pi$$

и

$$|\varphi_{k+1} - \varphi_k| = |\arg(1 + v_{k+1}) + 2\pi(\mu_{k+1} - \mu_k)| > 2\pi|\mu_{k+1} - \mu_k| - \pi.$$

С другой стороны,  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\varphi_{k+1} - \varphi_k) = 0$ . Отсюда следует, что целые неотрицательные числа  $|\mu_{k+1} - \mu_k|$  должны обращаться в нуль, начиная с некоторого из них, т. е.  $\mu_n = \mu_{n+1} = \dots = \mu$ . Поэтому сходится не только последовательность  $\{\varphi_n\}$ , но и последовательность

$$\{\varphi_n - 2\pi\mu_n = \sum_1^n \arg(1 + v_k)\},$$

т. е. сходится ряд  $\sum_1^\infty \arg(1 + v_k)$ .

Итак, оба ряда  $\sum_1^\infty \ln|1 + v_k|$  и  $\sum_1^\infty \arg(1 + v_k)$  сходятся, т. е.

сходится ряд  $\sum_1^\infty \ln(1 + v_k)$ , чем и завершается все доказательство.

Замечая тождество

$$\prod_1^n (1 + v_k) = \exp \left[ \sum_1^n \ln(1 + v_k) \right],$$

заключаем на основании доказанного, что в случае сходимости бесконечного произведения выполняется равенство

$$\prod_1^\infty (1 + v_k) = \exp \left[ \sum_1^\infty \ln(1 + v_k) \right]. \quad (4.3:1)$$

Назовем бесконечное произведение  $\prod_1^\infty (1 + v_k)$  абсолютно

сходящимся, если абсолютно сходится ряд  $\sum_1^\infty \ln(1 + v_k)$ . Так как в абсолютно сходящемся ряде можно произвольно изменять порядок членов, не нарушая сходимости ряда и не изменяя его суммы, то из формулы (4.3:1) следует, что и в абсолютно сходящемся произведении можно произвольно менять порядок сомножителей, не нарушая сходимости произведения и не меняя его величины.



Замечая, что

$$\ln(1 + v_k) = v_k - \frac{v_k^2}{2} + \frac{v_k^3}{3} - \dots = v_k \left( 1 - \frac{v_k}{2} + \frac{v_k^2}{3} - \dots \right)$$

и, следовательно, при  $|v_k| < \frac{1}{2}$  выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|v_k| &= |v_k| \left( 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \dots \right) < |\ln(1 + v_k)| < \\ &< |v_k| \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \right) = \frac{3}{2}|v_k|, \end{aligned} \quad (4.3:2)$$

закключаем, что ряд  $\sum_1^\infty |\ln(1 + v_k)|$  будет сходиться тогда и только тогда, когда сходится ряд  $\sum_1^\infty |v_k|$ .

Итак, для того чтобы бесконечное произведение  $\prod_1^\infty (1 + v_k)$  абсолютно сходилось, необходимо и достаточно, чтобы абсолютно сходился ряд  $\sum_1^\infty v_k$ .

Пусть  $\{v_k(z)\}$  — последовательность функций, однозначных и аналитических в области  $G$  и не принимающих в ней значения  $-1$ . Если ряд  $\sum_1^\infty \ln[1 + v_k(z)]$  равномерно сходится внутри области  $G$ , то бесконечное произведение  $\prod_1^\infty [1 + v_k(z)]$  также сходится в этой области и, следовательно, представляет некоторую функцию  $f(z)$ , не обращающуюся в нуль. По формуле (4.3:1)  $f(z)$  может быть представлена в виде

$$f(z) = \exp \left\{ \sum_1^\infty \ln[1 + v_k(z)] \right\} \quad (4.3:3)$$

и, следовательно, является аналитической функцией (так как сумма равномерно сходящегося внутри  $G$  ряда  $\sum_1^\infty \ln[1 + v_k(z)]$  есть аналитическая функция).

Покажем, что произведение  $\prod_1^\infty [1 + v_k(z)]$  равномерно сходится внутри  $G$ , т. е. последовательность  $\left\{ \prod_1^n [1 + v_k(z)] \right\}$  является равномерно сходящейся.

В самом деле, пусть  $F$  — ограниченное замкнутое множество точек области  $G$ ,  $M = \max |f(z)|$  и  $\varepsilon$  — произвольное положительное число, меньшее  $M$ . В силу равномерной сходимости ряда  $\sum_1^\infty \ln [1 + v_k(z)]$ , имеем:

$$\left| \sum_{n+1}^\infty \ln [1 + v_k(z)] \right| < \frac{\varepsilon}{2M} < \frac{1}{2} \quad \text{при } n > N(\varepsilon), \quad z \in F.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| f(z) - \prod_1^n [1 + v_k(z)] \right| &= \left| \exp \left( \sum_1^\infty \right) - \exp \left( \sum_1^n \right) \right| = \\ &= \left| \exp \left( \sum_1^\infty \right) \right| \left| 1 - \exp \left( - \sum_{n+1}^\infty \right) \right| \leq M \left[ \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{1}{2!} \left( \frac{\varepsilon}{2M} \right)^2 + \right] = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2!} \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{1}{3!} \left( \frac{\varepsilon}{2M} \right)^2 + \dots \right] < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) = \varepsilon \end{aligned}$$

при  $n < N(\varepsilon)$  во всех точках множества  $F$ , чем и доказывается равномерная сходимость бесконечного произведения.

В силу неравенства

$$|\ln [1 + v_k(z)]| < \frac{3}{2} |v_k(z)|,$$

выполняющегося при  $|v_k(z)| < \frac{1}{2}$ , ряд  $\sum_1^\infty \ln [1 + v_k(z)]$  будет абсолютно и равномерно сходящимся внутри  $G$ , если существует сходящийся ряд  $\sum_1^\infty \varepsilon_k$  с постоянными и положительными членами, такой, что  $|v_k(z)| < \varepsilon_k$ , начиная с некоторого, достаточно большого значения  $k \geq K$ , во всех точках области  $G$ . Отсюда вытекает, что, для того чтобы бесконечное произведение

$$\prod_1^\infty [1 + v_k(z)]$$

абсолютно и равномерно сходилось внутри области  $G$  и, следовательно, представляло в ней аналитическую, не обращающуюся в нуль функцию  $f(z)$ , достаточно, чтобы, начиная с некоторого

$k \geq K$ , во всей области  $G$ , выполнялись неравенства

$$|v_k(z)| < \epsilon_k,$$

где  $\epsilon_k$  — члены сходящегося ряда.

Разумеется, сформулированное условие не является необходимым для равномерной сходимости произведения.

Расширим, наконец, класс бесконечных произведений, допуская, и такие, в которых конечное число множителей (один или более) обращается в нуль. Если  $n_0 > 1$  есть номер, начиная с которого все члены произведения отличны от нуля, то произведение  $\prod_1^\infty u_k$  мы будем называть сходящимся в том и только в том случае, когда сходится бесконечное произведение  $\prod_{n_0}^\infty u_k$  множителей, отличных от нуля. Значением всего бесконечного произведения будет число 0:

$$\prod_1^\infty u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_1^n u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \prod_1^{n_0-1} u_k \prod_{n_0}^n u_k \right) = 0.$$

Имея в виду такое обобщение понятия сходящегося бесконечного произведения, можно формулировать следующее предложение:

*Бесконечное произведение обращается в нуль тогда и только тогда, когда обращается в нуль по крайней мере один из его множителей.*

Особенно важны бесконечные произведения вида  $\prod_1^\infty f_k(z)$ , где  $f_k(z)$  ( $k=1, 2, \dots$ ) — аналитические функции, которые могут обращаться в нуль в отдельных точках данной области  $G$ . Мы будем рассматривать такие произведения при следующих условиях:

а) каждое ограниченное замкнутое множество  $F \subset G$  может содержать лишь конечное множество точек, в которых функции последовательности  $\{f_k(z)\}$  обращаются в нуль;

б) для каждого ограниченного замкнутого множества  $F \subset G$  существует такое натуральное число  $n(F) > 1$ , что при  $k > n(F)$  ни одна из функций  $f_k(z)$  не обращается в нуль в точках множества  $F$ .

Читатель легко проверит, что эти условия эквивалентны следующим:

а') множество  $E$  точек, в которых по крайней мере одна из функций  $\{f_k(z)\}$  обращается в нуль, не имеет предельных точек внутри  $G$ ;

б') в каждой точке из  $E$  обращается в нуль только конечное число функций  $\{f_k(z)\}$ .

Допустим еще, что выполняется условие в): ряд  $\sum_{n(F)+1}^{\infty} \ln f_k(z)$  равномерно сходится на каждом ограниченном замкнутом множестве  $F$ , принадлежащем  $G$ . Тогда произведение  $\prod_{n(F)+1}^{\infty} f_k(z)$  равномерно сходится на  $F$ , т. е. равномерно сходится последовательность  $\left\{ \prod_{n(F)+1}^n f_k(z) \right\} (n \geq n(F) + 1)$ .

Так как функция  $\prod_1^{n(F)} f_k(z)$  непрерывна на  $F$ , то она ограничена по модулю, а следовательно, последовательность функций

$$\prod_1^n f_k(z) = \prod_1^{n(F)} f_k(z) \prod_{n(F)+1}^n f_k(z)$$

также равномерно сходится на  $F$ .

Итак, из сделанных нами относительно  $\{f_k(z)\}$  предположений вытекает, что бесконечное произведение  $\prod_1^{\infty} f_k(z)$  равномерно сходится внутри  $G$ . Следовательно, оно представляет в этой области некоторую аналитическую функцию

$$f(z) = \prod_1^{\infty} f_k(z),$$

обращающуюся в нуль в тех и только в тех точках  $G$ , в которых обращается в нуль по крайней мере одна из функций  $f_k(z)$ .

## § 5. Степенные ряды. Связь с рядами Фурье. Разложение аналитической функции в степенной ряд

5.1. Наиболее простой и вместе с тем наиболее важный класс рядов аналитических функций образуют степенные ряды. Так называются ряды вида

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots, \quad (5.1:1)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots, z_0$  — заданные комплексные числа. Следующая теорема дает полное представление об области сходимости степенных рядов.

**Теорема Коши — Адамара.** Пусть  $\Lambda = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ . Тогда при  $\Lambda = \infty$  ряд (5.1:1) сходится в единственной точке  $z = z_0$ ; при  $0 < \Lambda < \infty$  он абсолютно сходится в круге  $|z - z_0| < \frac{1}{\Lambda}$ .

и расходится вне этого круга; наконец, при  $\Lambda = 0$  степенной ряд абсолютно сходится во всей плоскости.

В случае когда  $0 < \Lambda < \infty$ , существует, таким образом, круг с центром в точке  $z = z_0$ , внутри которого ряд абсолютно сходится, а вне — расходится. Этот круг называется кругом сходимости степенного ряда, а его радиус  $R = \frac{1}{\Lambda}$  — радиусом сходимости степенного ряда. Случаи, когда  $\Lambda = \infty$  или  $\Lambda = 0$ , можно рассматривать как предельные. В первом из них круг сходимости стягивается в точку  $z_0$  и его радиус  $R$  становится равным 0. Во втором случае круг сходимости распространяется на всю плоскость так, что его радиус можно считать равным  $\infty$ . Называя во всех трех случаях число  $R$  радиусом сходимости степенного ряда, мы можем представить содержание теоремы Коши—Адамара формулой

$$R = \frac{1}{\Lambda}. \quad (5.1:2)$$

Формула эта называется формулой Коши—Адамара.

Обращаемся к доказательству теоремы. Мы разбиваем его на три случая.

а)  $\Lambda = \infty$ . В этом случае для любого  $z \neq z_0$  найдется бесчисленное множество значений  $n = n_k$ , для которых

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{|z - z_0|}.$$

Но отсюда следует, что  $|a_{n_k}(z - z_0)^{n_k}| > 1$  и необходимое условие сходимости ряда (5.1:1):  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(z - z_0)^n = 0$  не выполняется ни в какой точке  $z \neq z_0$ . Таким образом, ряд (5.1:1) сходится при  $\Lambda = \infty$  только в одной точке:  $z = z_0$ .

б)  $0 < \Lambda < \infty$ . Возьмем сначала точку  $z$  внутри круга  $|z - z_0| < \frac{1}{\Lambda}$  и пусть  $|z - z_0| = \frac{\theta^2}{\Lambda}$ , где  $0 < \theta < 1$  (в точке  $z = z_0$  сходимость ряда очевидна). Так как  $\frac{\theta}{|z - z_0|} = \frac{\Lambda}{\theta} > \Lambda$ , то все значения  $\sqrt[n]{|a_n|}$ , начиная с некоторого из них, должны быть меньше  $\frac{\theta}{|z - z_0|}$ . Поэтому, начиная с некоторого  $n$ , модули всех членов ряда (5.1:1) удовлетворяют неравенству

$$|a_n(z - z_0)^n| < \theta^n,$$

и так как ряд  $1 + \theta + \dots + \theta^n + \dots$  сходится, то и ряд (5.1:1) абсолютно сходится во всякой точке  $z$ , лежащей внутри круга  $|z - z_0| < \frac{1}{\Lambda}$ .

Пусть теперь  $z$  лежит вне этого круга. Тогда  $\Lambda > \frac{1}{|z - z_0|}$ , и, следовательно, найдется бесконечное множество значений  $n = n_k$ , для которых

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{|z - z_0|}.$$

Но отсюда вытекает, что  $|a_{n_k}(z - z_0)^{n_k}| > 1$ , т. е. необходимое условие сходимости ряда (5.1:1):  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(z - z_0)^n = 0$  не выполняется ни в одной точке вне круга  $|z - z_0| < \frac{1}{\Lambda}$ .

в)  $\Delta = 0$ . Для любого  $z \neq z_0$  и  $0 < \theta < 1$  неравенство

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{\theta}{|z - z_0|}$$

будет иметь место, начиная с достаточно больших значений  $n$ . Следовательно, начиная с некоторого  $n$ , модули всех членов ряда (5.1:1) удовлетворяют неравенствам

$$|a_n(z - z_0)^n| < \theta^n,$$

откуда и следует абсолютная сходимость ряда (5.1:1) в любой точке плоскости.

Для приложений формулы Коши — Адамара во многих случаях полезно следующее соотношение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$$

Для доказательства его заметим, что

$$e^n = 1 + \frac{n}{1!} + \dots + \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{n^n}{n!} \left[ 1 + \frac{n}{n+1} + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} + \dots \right]$$

откуда вытекает, что

$$e^n < n \frac{n^n}{n!} + \frac{n^n}{n!} \left[ 1 + \frac{n}{n+1} + \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 + \dots \right] = (2n+1) \frac{n^n}{n!},$$

а с другой стороны,

$$e^n > \frac{n^n}{n!}.$$

Итак,

$$\frac{1}{e^n} < \frac{n!}{n^n} < \frac{2n+1}{e^n},$$

откуда и следует наше утверждение \*).

\*) В главе седьмой мы получим соотношение, из которого следует, что

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n} (1 + \varepsilon_n),$$

где  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  при  $n$ , стремящемся к бесконечности.

Читатель легко проверит, пользуясь формулой Коши — Адамара, что радиусы сходимости рядов

$$\text{а) } \sum_1^{\infty} n^k z^n, \quad \text{б) } \sum_1^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n, \quad \text{в) } \sum_1^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad \text{г) } \sum_1^{\infty} n! z^n$$

равны соответственно:  $1, \frac{1}{e}, \infty, 0$ .

Во многих случаях радиус сходимости степенного ряда удобно определять, пользуясь признаком Даламбера. Так, в примере б) модуль отношения последующего члена к предыдущему равен  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n |z|$  и, следовательно, стремится к пределу  $e|z|$  при  $n$ , стремящемся к бесконечности. Отсюда следует, что ряд абсолютно сходится, если  $|z| < \frac{1}{e}$ , и расходится, если  $|z| > \frac{1}{e}$ , т. е. его радиус сходимости равен  $\frac{1}{e}$ .

Рассмотрим еще пример ряда  $\sum_1^{\infty} \frac{z^{k^2}}{k!}$ . Здесь коэффициенты  $a_k$  равны 0, если  $n \neq k^2$ , и равны  $\frac{1}{k!}$ , если  $n = k^2$ . Поэтому

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k^2]{\frac{1}{k!}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k^2]{\frac{k^k}{k!} \cdot \frac{1}{k^k}} = 1$$

и радиус сходимости равен 1. Модуль отношения последующего члена к предыдущему в данном случае равен  $\frac{|z|^{2k+1}}{k+1}$  и, следовательно, стремится к нулю, если  $|z| < 1$ , и к бесконечности, если  $|z| > 1$ . Отсюда снова следует, что радиус сходимости ряда равен единице.

В дальнейшем мы будем рассматривать степенные ряды, для которых  $R > 0$ , т. е.  $\Lambda < \infty$ . Из равенства Коши — Адамара

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$$

закключаем, что для любого  $\varepsilon > 0$  ( $\varepsilon < R$ )

$$|a_n| < \frac{1}{(R-\varepsilon)^n} \quad \text{при } n > N(\varepsilon) \quad (5.1:3)$$

в случае, когда  $R < \infty$ , и

$$|a_n| < \varepsilon^n \quad \text{при } n > N(\varepsilon) \quad (5.1:4)$$

в случае, когда  $R = \infty$ .

Итак, коэффициенты степенного ряда с радиусом сходимости, бóльшим нуля, растут не быстрее геометрической прогрессии со знаменателем  $\frac{1}{R-\varepsilon}$  ( $R < \infty$ ) или  $\varepsilon$  ( $R = \infty$ ), где  $\varepsilon$  — сколь угодно малое положительное число.

Из теоремы Коши — Адамара как следствие вытекает следующее предложение:

*Первая теорема Абеля. Если ряд (5.1:1) сходится в некоторой точке  $z_1 \neq z_0$ , то он абсолютно сходится внутри окружности с центром в  $z_0$ , проходящей через  $z_1$ .*

Действительно, из того, что ряд (5.1:1) сходится в точке  $z_1 \neq z_0$ , следует, во-первых, что его радиус сходимости больше нуля (быть может, равен бесконечности), и, во-вторых, что  $z_1$  лежит либо внутри, либо на границе круга сходимости (во всякой точке, внешней к кругу сходимости, степенной ряд расходится). Поэтому круг  $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$  есть либо часть всего круга сходимости, либо совпадает с ним; отсюда и следует абсолютная сходимость ряда в таком круге.

Установим, далее, равномерную сходимость степенного ряда внутри его круга сходимости  $|z - z_0| < R$ . Очевидно, достаточно доказать равномерную сходимость ряда в каждом замкнутом круге  $|z - z_0| \leq r < R$ . Действительно, любое ограниченное замкнутое множество  $F$ , принадлежащее кругу сходимости, будет содержаться в круге  $|z - z_0| \leq r$  при  $r$ , достаточно близком к  $R$ .

Выберем в круге сходимости точку  $\xi$ , лежащую вне окружности  $|z - z_0| = r$ ,  $r < |\xi - z_0| = \rho < R$ . В этой точке ряд (5.1:1) должен абсолютно сходиться:

$$\sum_0^{\infty} |a_n| |\xi - z_0|^n = \sum_0^{\infty} |a_n| \rho^n < \infty.$$

Так как в каждой точке замкнутого круга  $|z - z_0| \leq r$  выполняется неравенство

$$|a_n (z - z_0)^n| \leq |a_n| \rho^n,$$

то, по признаку сравнения рядов, заключаем, что ряд (5.1:1) равномерно сходится в каждом круге  $|z - z_0| \leq r < R$ , чем и завершается доказательство.

Заметим, что мы не утверждали, что степенной ряд равномерно сходится в своем круге сходимости. В самом деле, в п. 4.1 было показано, что геометрическая прогрессия

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots,$$

очевидно, представляющая степенной ряд с радиусом сходимости, равным единице, не сходится равномерно в единичном круге, т. е. в своем круге сходимости.



## 5.2. Так как степенной ряд

$$a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots \quad (5.2:1)$$

является рядом аналитических функций, равномерно сходящихся внутри области  $K: |z - z_0| < R$  ( $R > 0$ ), то к нему применима теорема Вейерштрасса п. 4.1. Следовательно, сумма  $f(z)$  степенного ряда является аналитической функцией в круге  $K$  и ее производная любого порядка  $k$  может быть получена путем почленного дифференцирования ряда (5.2:1):

$$f^{(k)}(z) = k!a_k + (k+1)k \quad 2a_{k+1}(z - z_0) + \dots + n(n-1) \quad (n-k+1)a_n(z - z_0)^{n-k} + \dots \quad (5.2:2)$$

Полагая здесь  $z = z_0$ , получаем:

$$f^{(k)}(z_0) = k!a_k,$$

откуда

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \quad (k = 1, 2, \dots, n, \dots). \quad (5.2:3)$$

Полученные формулы, очевидно, справедливы и при  $k = 0$ , что непосредственно получается из ряда (5.2:1) при  $z = z_0$ . Подставляя найденные значения коэффициентов степенного ряда в выражение (5.2:1), будем иметь:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \dots \quad (5.2:4)$$

Ряд, стоящий в правой части, называется рядом Тейлора функции  $f(z)$ . Мы доказали, следовательно, что каждый степенной ряд является рядом Тейлора для своей суммы  $f(z)$ .

Допустим, что суммы двух степенных рядов

$$A_0 + A_1(z - z_0) + A_2(z - z_0)^2 + \dots + A_n(z - z_0)^n + \dots \quad (5.2:5)$$

и

$$B_0 + B_1(z - z_0) + B_2(z - z_0)^2 + \dots + B_n(z - z_0)^n + \dots \quad (5.2:6)$$

с положительными радиусами сходимости  $R_1$  и  $R_2$  совпадают в некоторой окрестности точки  $z_0$ , т. е.

$$\begin{aligned} A_0 + A_1(z - z_0) + A_2(z - z_0)^2 + \dots = \\ = B_0 + B_1(z - z_0) + B_2(z - z_0)^2 + \dots, \end{aligned}$$

если  $|z - z_0| < r$ . Обозначая общую величину сумм этих рядов через  $F(z)$ , будем иметь по формулам (5.2:3):

$$A_0 = B_0 = F(z_0), \quad A_1 = B_1 = \frac{F'(z_0)}{1!}, \quad A_n = B_n = \frac{F^{(n)}(z_0)}{n!},$$

Таким образом, соответствующие коэффициенты рядов, а потому и радиусы сходимости  $R_1$  и  $R_2$  этих рядов совпадают — ряды

одинаковы. Мы получили теорему единственности разложения в степенной ряд.

*Теорема. Из совпадения сумм двух степенных рядов в некоторой окрестности точки  $z_0$  следует совпадение коэффициентов при одинаковых степенях  $z - z_0$ .*

В теореме существенно то, что  $z_0$  для обоих рядов одно и то же. Отметим, что эта теорема допускает следующую формулировку: *может существовать лишь один ряд по степеням  $(z - z_0)$ , имеющий заданную в некоторой окрестности  $z_0$  сумму.*

Эта формулировка поясняет самое название теоремы: теорема единственности.

В качестве иллюстрации к доказанному свойству рассмотрим вид степенных рядов, расположенных по степеням  $z$  и представляющих, соответственно, четные или нечетные функции от  $z$ .

Пусть  $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n + \dots$ , причем сначала  $f(z)$  — четная функция, т. е.  $f(-z) = f(z)$ . Тогда, заменяя  $z$  через  $-z$ , будем иметь:

$$f(-z) = a_0 - a_1z + a_2z^2 + \dots + (-1)^n a_nz^n + \dots$$

Так как суммы двух этих рядов, по условию, совпадают, то, в силу единственности разложения в степенной ряд, получаем:

$$a_n = (-1)^n a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

откуда при  $n$  нечетном

$$a_{2m+1} = -a_{2m+1}, \text{ или } a_{2m+1} = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Итак, если сумма степенного ряда есть четная функция, то все коэффициенты ряда при нечетных степенях  $z$  должны равняться нулю, и, следовательно, разложение  $f(z)$  имеет вид

$$f(z) = a_0 + a_2z^2 + a_4z^4 + \dots + a_{2m}z^{2m} + \dots$$

Аналогично, в случае когда  $f(z)$  есть нечетная функция, т. е.  $f(-z) = -f(z)$ , получаем, что все коэффициенты при четных степенях  $z$  должны быть нулями, так что разложение  $f(z)$  имеет вид

$$f(z) = a_1z + a_3z^3 + \dots + a_{2m+1}z^{2m+1} + \dots$$

Чтобы читатель понял, что теорему единственности нельзя считать самоочевидной, формулируем свойство единственности для рядов в общем виде. Мы скажем, что разложение в ряд

$$A_0\varphi_0(z) + A_1\varphi_1(z) + \dots + A_n\varphi_n(z) + \dots$$

по заданным функциям

$$\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z),$$

обладает свойством единственности на некотором множестве  $E$ , если из совпадения сумм двух рядов

$$\begin{aligned} A_0\varphi_0(z) + A_1\varphi_1(z) + \dots + A_n\varphi_n(z) + \dots, \\ B_0\varphi_0(z) + B_1\varphi_1(z) + \dots + B_n\varphi_n(z) + \dots, \end{aligned}$$

сходящихся на этом множестве, следует совпадение соответствующих коэффициентов:

$$A_0 = B_0, \quad A_1 = B_1, \quad A_n = B_n,$$

Переписывая соотношение

$$\begin{aligned} A_0\varphi_0(z) + A_1\varphi_1(z) + \dots + A_n\varphi_n(z) &= \\ &= B_0\varphi_0(z) + B_1\varphi_1(z) + \dots + B_n\varphi_n(z) + \end{aligned}$$

в виде

$$C_0\varphi_0(z) + C_1\varphi_1(z) + \dots + C_n\varphi_n(z) + \dots = 0,$$

где

$$C_0 = A_0 - B_0, \quad C_1 = A_1 - B_1, \quad C_n = A_n - B_n,$$

можно свойство единственности формулировать иначе: разложения в ряды по функциям  $\{\varphi_n(z)\}$  обладают свойством единственности на множестве  $E$ , если из обращения в нуль суммы ряда для всех  $z$ , принадлежащих  $E$ , следует обращение в нуль всех коэффициентов ряда

$$C_0 = C_1 = \dots = C_n = \dots = 0.$$

Как мы доказали, разложения по функциям  $\varphi_n(z) = (z - z_0)^n$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) обладают свойством единственности во всяком круге с центром в  $z_0$ . Если же взять, например,

$$\varphi_0(z) = 1, \quad \varphi_1(z) = z - 1, \quad \varphi_2(z) = z^2 - z, \quad \varphi_n(z) = z^n - z^{n-1},$$

то свойство единственности не будет выполняться в круге  $|z| < 1$ .

В самом деле, для ряда

$$\varphi_0(z) + \varphi_1(z) + \dots + \varphi_n(z) +$$

с отличными от нуля коэффициентами ( $C_0 = C_1 = C_2 = \dots = C_n = 1$ ) частичная сумма

$$\varphi_0(z) + \varphi_1(z) + \dots + \varphi_n(z) = 1 + (z - 1) + (z^2 - z) + \dots + (z^n - z^{n-1})$$

равна  $z^n$ , и так как при  $|z| < 1: \lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$ , то данный ряд схо-

дится внутри круга  $|z| < 1$  (и притом равномерно) и имеет сумму, равную нулю.

Отсюда следует, что если ряд

$$A_0\varphi_0(z) + A_1\varphi_1(z) + \dots + A_n\varphi_n(z) + \dots,$$

расположенный по функциям  $\{\varphi_n(z)\}$ , сходится внутри круга  $|z| < 1$  и имеет суммой некоторую функцию  $F(z)$ , то и все ряды

$$(A_0 + \lambda) \varphi_0(z) + (A_1 + \lambda) \varphi_1(z) + \dots + (A_n + \lambda) \varphi_n(z) + \dots,$$

где  $\lambda$  — произвольное комплексное число, сходятся внутри круга  $|z| < 1$  и имеют ту же сумму  $F(z)$ . Итак, суммы двух рядов для системы функции  $\{\varphi_n(z)\}$  могут совпадать, несмотря на то, что ни один коэффициент одного ряда не равен соответствующему коэффициенту другого.

На свойстве единственности разложения по данной системе функций  $\{\varphi_n(z)\}$  основан метод неопределенных коэффициентов.

Если коэффициенты сходящегося ряда

$$A_0 \varphi_0(z) + A_1 \varphi_1(z) + \dots + A_n \varphi_n(z) + \dots$$

неизвестны («неопределенные коэффициенты») и если путем некоторых операций, произведенных над этим рядом и заданными рядами, получается соотношение вида

$$C_0 \varphi_0(z) + C_1 \varphi_1(z) + \dots + C_n \varphi_n(z) + \dots = 0,$$

коэффициенты которого представляют определенные комбинации неизвестных  $A_0, A_1, \dots, A_n$ , и других заданных чисел, то по свойству единственности получаем бесконечную систему уравнений:

$$C_0 = 0, \quad C_1 = 0, \quad \dots, \quad C_n = 0,$$

Последняя система может служить для отыскания коэффициентов  $A_0, A_1, \dots, A_n$ . Ниже мы рассмотрим приложение этого метода к делению степенных рядов.

В простейшем случае, когда степенные ряды (5.2:5) и (5.2:6) сводятся к многочленам

$$A_0 + A_1 z + \dots + A_n z^n \quad \text{и} \quad B_0 + B_1 z + \dots + B_m z^m,$$

для применения теоремы единственности нет надобности требовать, чтобы значения этих многочленов совпадали для всех  $z$ , принадлежащих некоторому кругу. Если известно, что степени многочленов не превосходят некоторого натурального числа  $N$  ( $n \leq N$  и  $m \leq N$ ), то из совпадения значений многочленов в  $N+1$  различных точках следует, что степени этих многочленов равны ( $n=m$ ) и соответствующие коэффициенты также попарно равны:

$$A_0 = B_0, \quad A_1 = B_1, \quad \dots, \quad A_n = B_n.$$

Для степенных рядов (которые во многих отношениях можно рассматривать как своего рода «многочлены бесконечно высокой степени») о равенстве коэффициентов можно заключать лишь из совпадения сумм рядов на бесконечном множестве точек.

Однако и здесь нет необходимости, чтобы суммы рядов совпадали для всех точек некоторого круга (а именно, это мы предполагали при доказательстве теоремы о единственности разложения в степенной ряд). Достаточно, чтобы суммы рядов (5.2:5) и (5.2:6) совпадали на множестве точек, имеющем  $z_0$  предельной точкой (например, на множестве точек  $z_n = z_0 + \frac{1}{n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )). Именно, справедлива следующая теорема, являющаяся обобщением уже доказанной теоремы единственности.

*Если суммы двух степенных рядов*

$$A_0 + A_1(z - z_0) + \dots + A_n(z - z_0)^n + \dots$$

*и*

$$B_0 + B_1(z - z_0) + \dots + B_n(z - z_0)^n + \dots$$

*совпадают на множестве точек  $E$ , для которого  $z_0$  является предельной точкой, то коэффициенты этих рядов равны между собой, т. е.*

$$A_0 = B_0, \quad A_1 = B_1, \quad \dots, \quad A_n = B_n,$$

**Доказательство.** Пусть  $\{z_n\}$  — какая-либо последовательность отличных от  $z_0$  точек множества  $E$ , сходящаяся к  $z_0$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ .

Из равенства

$$A_0 + A_1(z_n - z_0) + A_2(z_n - z_0)^2 + \dots = B_0 + B_1(z_n - z_0) + B_2(z_n - z_0)^2 + \dots, \quad (5.2:7)$$

справедливого при любом  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), заключаем, на основании непрерывности суммы степенного ряда внутри круга сходимости, что

$$\begin{aligned} A_0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} [A_0 + A_1(z_n - z_0) + A_2(z_n - z_0)^2 + \dots] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [B_0 + B_1(z_n - z_0) + B_2(z_n - z_0)^2 + \dots] = B_0, \end{aligned}$$

т. е.

$$A_0 = B_0.$$

Отсюда следует, что

$$A_1(z_n - z_0) + A_2(z_n - z_0)^2 + \dots = B_1(z_n - z_0) + B_2(z_n - z_0)^2 + \dots$$

при  $n = 1, 2, 3, \dots$  и так как  $z_n \neq z_0$ , то

$$A_1 + A_2(z_n - z_0) + \dots = B_1 + B_2(z_n - z_0) + \dots$$

при любом  $n$ . Снова переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получаем:

$$A_1 = B_1.$$

Пусть, вообще, мы доказали уже равенства

$$A_0 = B_0, \quad A_1 = B_1, \quad \dots, \quad A_k = B_k.$$

Тогда из равенства (5.2:7) следует, что при любом  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

$$\begin{aligned} A_{k+1}(z_n - z_0)^{k+1} + A_{k+2}(z_n - z_0)^{k+2} + \dots = \\ = B_{k+1}(z_n - z_0)^{k+1} + B_{k+2}(z_n - z_0)^{k+2} + \dots \end{aligned}$$

или, сокращая на  $(z_n - z_0)^{k+1} \neq 0$  и переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ ,  $A_{k+1} = B_{k+1}$ . Этим и доказывается теорема.

5.3. Убедимся в том, что степенной ряд можно рассматривать как некоторый аналог ряда Фурье для функции  $f(z)$ . С этой целью заметим, что степени  $(z - z_0)^n$  обладают следующим свойством ортогональности на каждой окружности  $|z - z_0| = \rho$ :

$$\int_0^{2\pi} (z - z_0)^n \overline{(z - z_0)^m} d\theta = 0 \quad \text{при } n \neq m. \quad (5.3:1)$$

В самом деле, полагая  $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$ , будем иметь:

$$(z - z_0)^n \overline{(z - z_0)^m} = \rho^{m+n} e^{i(n-m)\theta}$$

и, следовательно,

$$\int_0^{2\pi} (z - z_0)^n \overline{(z - z_0)^m} d\theta = \rho^{m+n} \left[ \frac{e^{i(n-m)\theta}}{i(n-m)} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Пусть  $\rho$  удовлетворяет условиям:  $0 < \rho < R$  ( $R$  — радиус сходимости ряда). Так как степенной ряд равномерно сходится на окружности  $|\xi - z_0| = \rho$ , лежащей в круге сходимости  $K$ , то на той же окружности будет равномерно сходиться и ряд

$$f(\xi) \overline{(\xi - z_0)^m} = a_0 \overline{(\xi - z_0)^m} + \dots + a_n (\xi - z_0)^n \overline{(\xi - z_0)^m} + \dots$$

Интегрируя его почленно и принимая во внимание соотношения ортогональности (5.3:1), получаем:

$$\int_0^{2\pi} f(\xi) \overline{(\xi - z_0)^m} d\theta = a_m \int_0^{2\pi} (\xi - z_0)^m \overline{(\xi - z_0)^m} d\theta = 2\pi \rho^{2m} a_m.$$

Отсюда

$$a_m = \frac{1}{2\pi \rho^{2m}} \int_0^{2\pi} f(\xi) \overline{(\xi - z_0)^m} d\theta \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (5.3:2)$$

и следовательно, степенной ряд можно записать в виде

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{2\pi\rho^{2m}} \int_0^{2\pi} f(\xi) (\overline{\xi - z_0})^m d\theta \cdot (z - z_0)^m. \quad (5.3:3)$$

Итак, степенной ряд представляет собой разложение функции  $f(z)$  в ряд по многочленам  $\{(z - z_0)^m\}$ , ортогональным на каждой окружности с центром в точке  $z_0$ .

В качестве одного из применений соотношений ортогональности (5.3:1) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_0^n a_m (z - z_0)^m \right|^2 d\theta &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_0^n a_m (z - z_0)^m \cdot \sum_0^n \bar{a}_m (\overline{z - z_0})^m d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k, m=0}^n a_k \bar{a}_m (z - z_0)^k (\overline{z - z_0})^m d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k, m=0}^n a_k \bar{a}_m \int_0^{2\pi} (z - z_0)^k (\overline{z - z_0})^m d\theta = \sum_0^n |a_m|^2 \rho^{2m}. \end{aligned}$$

(Все интегралы, соответствующие  $k \neq m$ , суть нули.)

Итак,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_0^n a_m (z - z_0)^m \right|^2 d\theta = \sum_0^n |a_m|^2 \rho^{2m}.$$

Считая здесь  $\rho < R$ , перейдем к пределу при  $n \rightarrow \infty$ . Так как последовательность

$$\left\{ \sum_0^n a_m (z - z_0)^m \right\}$$

образована из непрерывных функций и равномерно сходится на окружности  $|z - z_0| = \rho$ , то и последовательность непрерывных функций  $\left\{ \left| \sum_0^n a_m (z - z_0)^m \right| \right\}$  будет равномерно сходящейся на той же окружности (см. замечания в конце п. 4.2). Следовательно, возможен предельный переход под знаком интеграла (соответствующий в случае рядов почленному интегрированию), и мы

получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})|^2 d\theta = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_0^n a_m (z - z_0)^m \right|^2 d\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_0^n |a_m|^2 \rho^{2m}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, во-первых, что ряд  $\sum_0^\infty |a_m|^2 \rho^{2m}$  сходится и, во-вторых, что сумма его есть интеграл  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z)|^2 d\theta$ :

$$\sum_0^\infty |a_m|^2 \rho^{2m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})|^2 d\theta. \quad (5.3:4)$$

Это соотношение аналогично равенству Парсеваля в теории рядов Фурье. Из соотношения (5.3:4) вытекает, что интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})|^2 d\theta,$$

представляющий среднее значение квадрата модуля аналитической функции  $f(z)$  на окружности  $|z - z_0| = \rho$ , является неубывающей функцией  $\rho$ . Следовательно, всегда существует предел (конечный или бесконечный)

$$\lim_{\rho \rightarrow R} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Преобразуем выражения (5.3:2) для коэффициентов степенного ряда. С этой целью положим  $\xi - z_0 = \rho e^{i\theta}$ ; тогда будем иметь:

$$a_m = \frac{1}{2\pi \rho^m} \int_0^{2\pi} f(\xi) e^{-im\theta} d\theta. \quad (5.3:5)$$

С другой стороны, по интегральной теореме Коши:

$$\int_0^{2\pi} f(\xi) (\xi - z_0)^{m-1} d\xi = 0 \quad (m \geq 1),$$

или

$$\int_0^{2\pi} f(\xi) \rho^{m-1} e^{i(m-1)\theta} \rho i e^{i\theta} d\theta = 0,$$



и, наконец,

$$0 = \frac{1}{2\pi\rho^m} \int_0^{2\pi} f(\zeta) e^{im\theta} d\theta \quad (m \geq 1). \quad (5.3:6)$$

Складывая и вычитая (5.3:5) и (5.3:6), получаем:

$$a_m = \frac{1}{\pi\rho^m} \int_0^{2\pi} f(\zeta) \cos m\theta d\theta = \frac{-i}{\pi\rho^m} \int_0^{2\pi} f(\zeta) \sin m\theta d\theta \quad (m \geq 1). \quad (5.3:7)$$

Пусть

$$\alpha_m = \alpha_m + i\beta_m \quad \text{и} \quad f(\zeta) = u(\rho, \theta) + iv(\rho, \theta);$$

тогда из формул (5.3:7) находим:

$$\left. \begin{aligned} \rho^m \alpha_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho, \theta) \cos m\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(\rho, \theta) \sin m\theta d\theta, \\ \rho^m \beta_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(\rho, \theta) \cos m\theta d\theta = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho, \theta) \sin m\theta d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (5.3:8)$$

Кроме того, формула (5.3:5) при  $m=0$  дает:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho, \theta) d\theta, \quad \beta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\rho, \theta) d\theta.$$

Отсюда следует, что числа  $\alpha_0$ ,  $\rho^m \alpha_m$  и  $-\rho^m \beta_m$  ( $m=1, 2, \dots$ ) являются коэффициентами Фурье функции  $u(\rho, \theta) = \operatorname{Re} f(z_0 + \rho e^{i\theta})$ , а числа  $\beta_0$ ,  $\rho^m \beta_m$  и  $\rho^m \alpha_m$  — коэффициентами Фурье для функции  $v(\rho, \theta) = \operatorname{Im} f(z_0 + \rho e^{i\theta})$ .

Иными словами, функции  $u(\rho, \theta)$  и  $v(\rho, \theta)$  обладают сопряженными разложениями Фурье:

$$\begin{aligned} u(\rho, \theta) &\sim \alpha_0 + \sum_1^{\infty} \rho^m (\alpha_m \cos m\theta - \beta_m \sin m\theta), \\ v(\rho, \theta) &\sim \beta_0 + \sum_1^{\infty} \rho^m (\beta_m \cos m\theta + \alpha_m \sin m\theta). \end{aligned}$$

Эти же ряды получаются, если в степенном ряде

$$\begin{aligned} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) &= u(\rho, \theta) + iv(\rho, \theta) = \\ &= \sum_0^{\infty} a_m (z - z_0)^m = \sum_0^{\infty} (\alpha_m + i\beta_m) \rho^m (\cos m\theta + i \sin m\theta) \end{aligned}$$

отделить действительную и мнимую части:

$$\left. \begin{aligned} u(\rho, \theta) &= \alpha_0 + \sum_1^{\infty} (\alpha_m \rho^m \cos m\theta - \beta_m \rho^m \sin m\theta), \\ v(\rho, \theta) &= \beta_0 + \sum_1^{\infty} (\beta_m \rho^m \cos m\theta + \alpha_m \rho^m \sin m\theta). \end{aligned} \right\} \quad (5.3:9)$$

Итак, действительная и мнимая части степенного ряда представляют ряды Фурье для действительной и мнимой частей суммы степенного ряда. Ряды эти являются сопряженными друг с другом.

Покажем еще, как из равенства (5.3:4) можно вывести равенства Парсеваля для функций  $u(\rho, \theta)$  и  $v(\rho, \theta)$ .

Замечая, что

$$|f(z_0 + \rho e^{i\theta})|^2 = [u(\rho, \theta)]^2 + [v(\rho, \theta)]^2,$$

представим (5.3:4) в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(\rho, \theta)]^2 d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [v(\rho, \theta)]^2 d\theta = \sum_0^{\infty} |\alpha_m|^2 \rho^{2m}. \quad (5.3:10)$$

С другой стороны, можно легко получить соотношение, дающее разность интегралов  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(\rho, \theta)]^2 d\theta$  и  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [v(\rho, \theta)]^2 d\theta$ , если вспомнить, что среднее арифметическое значений аналитической функции  $[f(z_0 + \rho e^{i\theta})]^2$ , принимаемых ею на окружности  $|z - z_0| = \rho$ , должно совпадать со значением ее в центре круга (п. 3.2):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(z_0 + \rho e^{i\theta})]^2 d\theta = [f(z_0)]^2. \quad (5.3:11)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} [f(z_0 + \rho e^{i\theta})]^2 &= [u(\rho, \theta)]^2 - [v(\rho, \theta)]^2 + 2iu(\rho, \theta)v(\rho, \theta), \\ [f(z_0)]^2 &= \alpha_0^2 = \alpha_0^2 - \beta_0^2 + 2i\alpha_0\beta_0, \end{aligned}$$

и отделяя действительные части в равенстве (5.3:11), получим:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(\rho, \theta)]^2 d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [v(\rho, \theta)]^2 d\theta = \alpha_0^2 - \beta_0^2. \quad (5.3:12)$$

Складывая и вычитая почленно (5.3:10) и (5.3:12), находим, наконец:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [u(\rho, \theta)]^2 d\theta &= \alpha_0^2 - \beta_0^2 + \sum_0^{\infty} |a_m|^2 \rho^{2m} = 2\alpha_0^2 + \sum_1^{\infty} (\alpha_m^2 + \beta_m^2) \rho^{2m}, \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [v(\rho, \theta)]^2 d\theta &= \beta_0^2 - \alpha_0^2 + \sum_0^{\infty} |a_m|^2 \rho^{2m} = 2\beta_0^2 + \sum_1^{\infty} (\beta_m^2 + \alpha_m^2) \rho^{2m}.\end{aligned}$$

Полученные соотношения, очевидно, представляют собой равенства Парсеваля для функций  $u(\rho, \theta)$  и  $v(\rho, \theta)$ .

5.4. В п. 5.2 мы получили выражение коэффициентов степенного ряда через производные от его суммы в центре круга сходимости  $K$ :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Но мы видели в п. 3.3, что для любого  $\rho$ ,  $0 < \rho < R$ , модули производных удовлетворяют неравенствам

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq n! \frac{M(\rho)}{\rho^n},$$

где  $M(\rho) = \max_{|z-z_0|=\rho} |f(z)|$ . Отсюда вытекают следующие неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда:

$$|a_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.4:1)$$

Из неравенств Коши следует, что все члены ряда  $\sum_0^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n}$  ограничены, а именно, что каждый из них не превосходит  $[M(\rho)]^2$ . Однако соотношение (5.3:4) позволяет утверждать значительно больше. А именно, ряд  $\sum_0^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n}$  сходится (при  $\rho < R$ ) и вся сумма его не превосходит той же самой границы  $[M(\rho)]^2$ . В самом деле, мы имеем:

$$\sum_0^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Но

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})|^2 d\theta \leq [M(\rho)]^2,$$

следовательно,

$$\sum_0^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n} \leq [M(\rho)]^2. \quad (5.4:1')$$

Если допустить, что для некоторого  $n = n_0 \geq 0$  и для  $\rho$ ,  $0 < \rho < R$ , в соотношениях Коши имеет место равенство

$$|a_{n_0}| = \frac{M(\rho)}{\rho^{n_0}},$$

или

$$|a_{n_0}|^2 \rho^{2n_0} = [M(\rho)]^2,$$

то из неравенства (5.4:1') заключаем, что все коэффициенты  $a_n$  при  $n \neq n_0$  равны нулю. Это означает, что степенной ряд сводится к одному своему члену  $a_{n_0} z^{n_0}$  и, следовательно,

$$f(z) = a_{n_0} z^{n_0}.$$

Итак, если исключить случай, когда степенной ряд сводится к одному своему члену (коэффициенты всех прочих членов суть нули), то в соотношениях (5.4:1) всегда имеет место строгий знак неравенства. В частности, при  $n = 0$ , получаем:

$$|a_0| = |f(z_0)| < M(\rho), \quad \text{если } f(z) \not\equiv a_0,$$

т. е. принцип максимума модуля в его окончательной форме для суммы степенного ряда.

Так как производные аналитической функции могут быть представлены по формулам п. 3.3 в виде интегралов

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad (\rho < R),$$

то для коэффициентов степенного ряда имеют место также следующие интегральные выражения:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.4:2)$$

Покажем, что эти формулы можно получить непосредственно из рассмотрения степенного ряда. А именно, помножим все члены равномерно сходящегося на окружности  $|\xi - z_0| = \rho$  ряда

$$f(\xi) = \sum_0^{\infty} a_m (\xi - z_0)^m$$

на  $\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(\xi - z_0)^{n+1}}$  и проинтегрируем почленно по окружности  $\gamma$ :  $|\xi - z_0| = \rho$ ; получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \sum_0^{\infty} a_m \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\xi - z_0)^{m-n-1} d\xi. \quad (5.4:3)$$

Но

$$\int_{\gamma} (\xi - z_0)^{m-n-1} d\xi = \int_0^{2\pi} \rho^{m-n-1} e^{(m-n-1)i\theta} \rho e^{i\theta} i d\theta = i\rho^{m-n} \int_0^{2\pi} e^{(m-n)i\theta} d\theta;$$

если  $m \neq n$ , то этот интеграл, очевидно, равен нулю:

$$i\rho^{m-n} \int_0^{2\pi} e^{(m-n)i\theta} d\theta = i\rho^{m-n} \left[ \frac{e^{(m-n)i\theta}}{(m-n)i} \right]_0^{2\pi} = 0;$$

при  $m = n$  он равен  $2\pi i$ :

$$i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

Отсюда следует, что все слагаемые в правой части формулы (5.4:3), кроме одного, соответствующего  $m = n$ , равны нулю, и мы получаем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

т. е. формулы (5.4:2).

Пользуясь интегральными выражениями для коэффициентов, полученными только что, не опираясь на интегральную формулу Коши, можно дать вывод интегральной формулы Коши для функции  $f(z)$  (суммы степенного ряда), отличающийся от изложенного ранее (п. 3.1). Подставим выражения (5.4:2) в степенной ряд. Будем иметь:

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi (z - z_0)^n. \quad (5.4:4)$$

Ряд, стоящий в правой части, можно получить путем почленного интегрирования ряда  $\sum_0^{\infty} \frac{1}{2\pi i} f(\xi) \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}$ , равномерно сходящегося на окружности  $\gamma$ :  $|\xi - z_0| = \rho$ , если  $z$  — фиксированная точка, лежащая внутри  $\gamma$ . В самом деле, для модуля общего члена

ряда имеем оценку:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} f(\zeta) \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \right| < \frac{1}{2\pi} \frac{M(\rho)}{\rho} \left( \frac{|z-z_0|}{\rho} \right)^n,$$

где  $M(\rho) = \max |f(\zeta)|$  и  $|z-z_0| < \rho$ . Но, очевидно, справа стоит общий член сходящегося числового ряда (геометрической прогрессии со знаменателем  $\frac{|z-z_0|}{\rho} < 1$ ), откуда и следует равномерная сходимость рассматриваемого ряда. Поэтому результат почленного интегрирования этого ряда должен совпадать с интегралом от суммы ряда, и мы получаем:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_0^{\infty} f(\zeta) \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) \sum_0^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta-z}. \end{aligned}$$

Мы пришли к интегральной формуле Коши для суммы степенного ряда.

Итак, интегральную формулу Коши можно получить из степенного ряда, если представить его коэффициенты в виде интегралов, заменить, далее, сумму интегралов от членов равномерно сходящегося ряда интегралом от суммы, и, наконец, суммировать получившуюся под знаком интеграла геометрическую прогрессию. Коши провел эти рассуждения в обратном порядке и нашел, что каждая функция, представимая интегралом Коши, т. е. каждая аналитическая функция, изображается степенным рядом. Докажем это замечательное предложение.

**Теорема Коши о разложимости аналитической функции в степенной ряд.** Пусть  $f(z)$  — функция, однозначная и аналитическая в области  $G$ ,  $z_0$  — произвольная (конечная) точка области  $G$  и  $\Delta$  — расстояние от  $z_0$  до границы этой области. Тогда существует степенной ряд, расположенный по степеням  $z - z_0$ , сходящийся в круге  $K: |z - z_0| < \Delta$  и представляющий в этом круге функцию  $f(z)$ :

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (5.4.5)$$

(Заметим, что граница области  $G$  может сводиться к единственной бесконечно удаленной точке. В этом случае  $\Delta$  следует считать равным бесконечности.)

Обращаясь к доказательству теоремы, возьмем произвольную точку  $z \in K$  и опишем из  $z_0$ , как из центра, окружность  $\gamma$ :

$|\xi - z_0| = \rho$ , где  $0 \leq |z - z_0| < \rho < \Delta$  (рис. 57). По интегральной формуле Коши будем иметь:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Чтобы получить отсюда ряд, расположенный по степеням  $z - z_0$ , будем рассматривать  $\frac{1}{\xi - z}$  как сумму геометрического ряда со знаменателем  $\frac{z - z_0}{\xi - z_0}$ , модуль которого:  $\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{\rho} = \theta < 1$ .

С этой целью представим  $\frac{1}{\xi - z}$  в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \frac{1}{\xi - z_0} + \frac{z - z_0}{(\xi - z_0)^2} + \\ &+ \frac{(z - z_0)^2}{(\xi - z_0)^3} + \dots + \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} + \dots = \sum_0^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}. \end{aligned} \quad (5.4:6)$$

Так как для всех точек  $\xi$ , принадлежащих  $\gamma$ , модуль общего члена последнего ряда есть:

$$\left| \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right| = \frac{1}{\rho} \theta^n \quad (0 < \theta < 1),$$

то ряд (5.4:6) равномерно сходится на  $\gamma$  (относительно  $\xi \in \gamma$ ). Равномерно будет сходиться также и ряд, получаемый из (5.4:6) путем умножения на функцию  $\frac{1}{2\pi i} f(\xi)$ , ограниченную по модулю на  $\gamma$ , т. е. ряд

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{f(\xi)}{\xi - z} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n. \quad (5.4:7)$$

Отсюда следует, что ряд (5.4:7) можно почленно интегрировать на  $\gamma$ . Выполняя интегрирование, получим:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = \sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (5.4:8)$$

где

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \quad (5.4:9)$$

Мы получили разложение аналитической функции в степенной ряд (ряд Тейлора). Из самого способа его получения ( $z$  — произвольная точка круга  $K$ ) следует, что ряд этот сходится в любой точке круга  $K$ :  $|z - z_0| < \Delta$ .

Теорема доказана полностью.

Эта теорема имеет большое принципиальное значение. Она показывает, что функция  $f(z)$  комплексного переменного, дифференцируемая в некоторой области  $G$  (ибо таково было принятое нами определение аналитической функции комплексного переменного), изображается степенным рядом, расположенным по степеням  $z - z_0$  в окрестности любой точки  $z_0$  области  $G$ . Именно этим свойством и оправдывается самое наименование дифференцируемых в области функций комплексного переменного — аналитическими функциями.

Для функций действительного переменного, или более общо, для функций, определенных на некоторой линии  $\Gamma$  (например, на жордановой кривой в расширенной плоскости), подобное свойство не имеет места.

Функция, дифференцируемая и даже бесконечно дифференцируемая на  $\Gamma$ , может и не представляться степенным рядом ни в одной из окрестностей точек на  $\Gamma$  и, следовательно, не быть аналитической. Поэтому, применяя понятие аналитической функции к функциям, определенным на жордановых кривых (например, функциям действительного переменного), следует опираться не на требование дифференцируемости, а на требование представимости функции степенными рядами.

Так как степенной ряд

$$\sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_0^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

представляющий функцию  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0$ , сходится, по доказанному в теореме Коши, в круге  $|z - z_0| < \Delta$ , то его радиус сходимости  $R$  должен быть не меньше, чем  $\Delta$ :

$$R \geq \Delta.$$

Записывая это неравенство в виде  $\frac{1}{R} \leq \frac{1}{\Delta}$  и заменяя  $\frac{1}{R}$  по формуле Коши — Адамара через  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!}}$ , получаем уже знакомое нам неравенство Коши — Адамара (3.3:10):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!}} \leq \frac{1}{\Delta}.$$

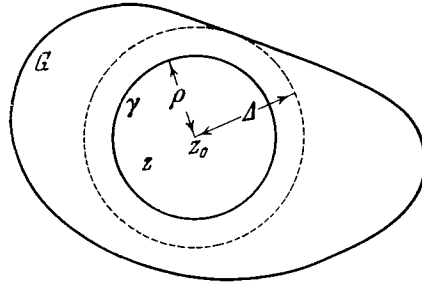


Рис. 57.



Из теоремы Коши вытекает, в частности, что степенные ряды, представляющие целую функцию, сходятся к ней во всей плоскости. В самом деле, целая функция является аналитической в области  $G$ , совпадающей со всей плоскостью, так что расстояние  $\Delta$  от любой точки  $z_0$  до границы этой области  $G$  следует считать равным бесконечности.

Пусть  $f(z)$  — целая функция и  $z_0$  — какая-либо точка плоскости. Тогда будем иметь:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots, \quad (5.4.10)$$

где

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z_0}.$$

Ряд этот, как только что было замечено, сходится к  $f(z)$  во всей плоскости. Для коэффициентов ряда имеем оценки Коши:

$$|a_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (5.4.11)$$

где

$$M(\rho) = \max_{|z - z_0| = \rho} |f(z)|.$$

В нашем случае  $\rho$  можно брать сколь угодно большим. Отсюда следует, что если модуль целой функции  $f(z)$  ограничен во всей плоскости, т. е.  $M(\rho) \leq M < \infty$  при всех  $\rho$ , то  $f(z) \equiv \text{const}$ .

В этом утверждении заключается теорема Лиувилля, имеющая многочисленные применения в различных вопросах теории функций.

Для ее доказательства заменим в неравенствах (5.4.11)  $M(\rho)$  на  $M$  и выпишем эти неравенства только для натуральных значений индекса  $n$ :

$$|a_n| \leq \frac{M}{\rho^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Произвольно фиксируя  $n$ , заставим  $\rho$  неограниченно возрастать: в пределе получим:

$$|a_n| \leq 0, \text{ т. е. } a_n = 0 \text{ при } n = 1, 2,$$

Из соотношения (5.4.10) следует поэтому, что  $f(z) = a_0$  при любом  $z$ , т. е.  $f(z) \equiv \text{const}$ , что и требовалось доказать.

Полагая  $z_0 = 0$  и вычисля производные различных порядков от элементарных функций:  $\exp z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{ch} z$ , читатель легко получит для них следующие сходящиеся во всей плоскости

разложения:

$$\begin{aligned} \exp z &= \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_0^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \\ \cos z &= \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \operatorname{sh} z = \sum_0^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \operatorname{ch} z = \sum_0^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

Остановимся на степенных разложениях однозначных ветвей простейших многозначных функций. Рассмотрим прежде всего однозначную ветвь  $\ln z$ , определяемую посредством условия  $\ln 1 = 0$  в области  $G$ , границей которой служит неположительная часть действительной оси:  $x \leq 0, y = 0$  (ветвь эта может быть представлена в виде  $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ , где  $|\arg z| < \pi$ ). Так как  $(\ln z)' = \frac{1}{z}$ , то  $(\ln z)^{(k)} = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{z^k}$ , и, следовательно, разложение  $\ln z$  по степеням  $z-1$  имеет вид

$$\ln z = \sum_0^{\infty} \frac{(\ln z)^{(k)}_{z=1}}{k!} (z-1)^k,$$

или

$$\ln z = \sum_0^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(z-1)^k}{k}.$$

Расстояние  $\Delta$  от точки  $z_0 = 1$  до границы области  $G$  равно единице. Поэтому найденным разложением можно пользоваться при  $|z-1| < 1$ . Заменяя здесь  $z-1$  на  $z$ , получим степенной ряд для  $\ln(1+z)$ , сходящийся при  $|z| < 1$ :

$$\ln(1+z) = \sum_0^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k} \quad (|z| < 1).$$

$\ln(1+z)$  является однозначной ветвью функции  $\operatorname{Ln}(1+z)$ , определяемой условием  $[\operatorname{Ln}(1+z)]_{z=0} = \ln 1 = 0$  в области  $G$ , границей которой служит часть действительной оси:  $x \leq -1, y = 0$ .

Рассмотрим, далее, функцию  $z^\alpha$ , где  $\alpha$  — произвольное комплексное число. Это — многозначная (в случае, когда  $\alpha$  не есть целое число) функция, выражающаяся через показательную функцию и логарифм при помощи соотношения  $z^\alpha = \exp(\alpha \operatorname{Ln} z)$ .

Выделим однозначную ветвь  $\varphi(z)$  этой функции в той же области  $G$ , которая фигурировала в предыдущем примере, посредством условия  $\varphi(1) = 1$ . Эту ветвь можно представить в виде

$$\varphi(z) = \exp(\alpha \ln z),$$

откуда

$$\varphi'(z) = \alpha \exp(\alpha \ln z) \cdot \frac{1}{z} = \alpha \exp(\alpha \ln z) \cdot \exp(-\ln z) = \alpha \exp[(\alpha - 1) \ln z]$$

и, далее,

$$\varphi^{(k)}(z) = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - k + 1) \exp[(\alpha - k) \ln z] \quad (k = 1, 2, \dots).$$

В точке  $z = 1$  производные принимают значения  $\varphi^{(k)}(1) = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - k + 1)$  и, следовательно, разложение  $\varphi(z)$  по степеням  $z - 1$  имеет вид

$$\varphi(z) = \sum_0^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - k + 1)}{k!} (z - 1)^k.$$

Оно имеет место, как и в предыдущем примере, при  $|z - 1| < 1$ . Заменяя здесь  $z - 1$  на  $z$ , получим разложение для  $\varphi(z + 1)$  в ряд по степеням  $z$ . Пользуясь вместо  $\varphi(z + 1)$  привычным обозначением  $(1 + z)^\alpha$  (понимаемым как обозначение однозначной в области  $G$  функции  $\exp[\alpha \ln(1 + z)]$ ), получаем:

$$(1 + z)^\alpha = \sum_0^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - k + 1)}{k!} z^k \quad (|z| < 1).$$

Это — б и н о м и а л ь н а я ф о р м у л а, установленная здесь для самого общего случая, когда показатель степени есть произвольное комплексное число.

## § 6. Единственность. А-точки аналитической функции.

### Принцип максимума модуля.

#### Особые точки элемента аналитической функции

6.1. В п. 5.2 мы доказали теорему, выражающую свойства единственности разложений в степенной ряд, расположенный по степеням  $z - z_0$ , где  $z_0$  — данное комплексное число. Эта теорема утверждает, что если суммы двух таких степенных рядов совпадают на множестве точек  $E$ , для которого  $z_0$  является предельной точкой, то и коэффициенты рядов соответственно совпадают. Отсюда следует, далее, что и круги сходимости двух рядов совпадают и суммы рядов совпадают между собой во всем общем круге сходимости. Иначе говоря, сумма степенного ряда единственным образом определяется во всех точках круга сходимости, если известны ее значения на каком-либо множестве точек, имеющих предельную точку в центре круга.

Поставим, в связи с этим свойством сумм степенных рядов (являющихся в круге сходимости однозначными аналитическими функциями), следующий общий вопрос: вполне ли определяется однозначная функция  $f(z)$ , аналитическая в некоторой области  $G$ , своими значениями, заданными на произвольном множестве  $E$ , имеющем в качестве предельной точки по крайней мере одну точку этой области?

Иными словами, будут ли значения двух однозначных аналитических в области функций  $f(z)$  и  $\varphi(z)$  совпадать во всей области  $G$ , если они совпадают на множестве точек  $E$  этой области, имеющем предельной точкой одну из ее точек?

Утвердительный ответ на этот вопрос дается следующим предложением.

**Внутренняя теорема единственности.** Пусть  $G$  — область, в которой определены две однозначные и аналитические во всех ее точках функции:  $f(z)$  и  $\varphi(z)$ . Пусть значения этих функций совпадают на некотором множестве точек  $E$  ( $E \subset G$ ), имеющем предельную точку  $z_0$ , принадлежащую  $G$ . Тогда  $f(z)$  и  $\varphi(z)$  совпадают во всей области  $G$ .

**Доказательство.** Пусть

$$A_0 + A_1(z - z_0) + \dots + A_n(z - z_0)^n + \dots$$

и

$$B_0 + B_1(z - z_0) + \dots + B_n(z - z_0)^n + \dots$$

— степенные ряды, представляющие  $f(z)$  и  $\varphi(z)$  в некоторой окрестности  $|z - z_0| < \rho$  точки  $z_0$ . Так как в точках множества  $E$ , имеющего  $z_0$  предельной точкой, суммы обоих рядов совпадают, то, согласно доказанному в п. 5.2, ряды эти тождественны, так что  $f(z)$  и  $\varphi(z)$  совпадают во всех точках области  $G$ , принадлежащих окрестности  $|z - z_0| < \rho$ . Обозначим через  $E_1$  множество всех принадлежащих  $G$  точек, обладающих тем же свойством, что и точка  $z_0$ , т. е. таких точек, для которых существуют окрестности, где  $f(z)$  и  $\varphi(z)$  совпадают.

По самому своему определению,  $E_1$  является открытым множеством. Кроме того, к каждой точке области, предельной для  $E_1$ , можно применить то же рассуждение, которое мы только что применяли к точке  $z_0$ , откуда следует, что каждая такая точка должна принадлежать  $E_1$ . Поэтому множество  $E_1$  должно совпадать со всей областью  $G$  (см. предложение в), п. 4.5 гл. первой), что и требовалось доказать.

Из этой теоремы следует, что если функции  $f(z)$  и  $\varphi(z)$ , аналитические в области  $G$ , совпадают в некоторой области  $g \subset G$  (например, в окрестности некоторой точки  $z_0 \in G$ ) или на дуге некоторой непрерывной кривой, лежащей в области  $G$ , то они совпадают и во всей области  $G$ .

В частности, если функция, аналитическая в области  $G$ , не равна тождественно постоянной, то она не может сохранять постоянное значение ни в какой из окрестностей точки  $z_0$ , принадлежащей данной области, и ни на какой дуге кривой, лежащей в этой области.

Пусть  $f'(z_0)$ ,  $f''(z_0)$ , ...,  $f^{(n)}(z_0)$ , ... — последовательность значений производных функции  $f(z)$  в некоторой точке  $z_0$  области  $G$ . Если  $f(z) \neq \text{const}$ , то по крайней мере одно из этих чисел не должно равняться нулю. В противном случае тейлоровское разложение  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0$  имело бы вид

$$f(z) = f(z_0) + 0 \cdot (z - z_0) + \dots + 0 \cdot (z - z_0)^n + \dots = f(z_0),$$

откуда вытекало бы, что  $f(z) \equiv f(z_0)$  в области  $G$ .

Наряду с внутренней теоремой единственности, в теории аналитических функций имеют место различные г р а н и ч н ы е теоремы единственности. Наиболее общие и глубокие предложения этого рода были получены Н. Н. Лузиным и И. И. Приваловым. Мы ограничимся здесь формулировкой принадлежащей им классической граничной теоремы единственности.

Начнем с определения. Пусть  $G$  — область, ограниченная жордановой кривой  $\Gamma$ , и  $\xi_0$  — точка кривой  $\Gamma$ , в которой существует касательная к этой кривой. Рассмотрим функцию  $f(z)$ , определенную в области  $G$ , и предположим, что она стремится к определенному пределу  $A$ , когда  $z \in G$  стремится к  $\xi_0$  по любым некасательным к  $\Gamma$  путям (ср. стр. 253), т. е. оставаясь внутри произвольного угла раствора, меньшего  $\pi$ , с вершиной в точке  $\xi_0$  и биссектрисой, совпадающей с нормалью к  $\Gamma$  в точке  $\xi_0$ . Будем говорить тогда, что  $f(z)$  обладает угловым граничным значением  $A$  в точке  $\xi_0 \in \Gamma$ .

**Теорема Н. Н. Лузина и И. И. Привалова.** Пусть  $G$  — область, ограниченная спрямляемой кривой  $\Gamma$ , и  $f(z)$ ,  $\varphi(z)$  — две функции, аналитические в области  $G$ . Если для некоторого множества  $E \subset \Gamma$ , имеющего положительную меру (например, для некоторой дуги кривой  $\Gamma$ ), разность  $f(z) - \varphi(z)$  обладает угловыми граничными значениями, и значения эти равны нулю, то функции  $f(z)$  и  $\varphi(z)$  совпадают во всей области  $G$ .

За доказательством этой теоремы, требующим знакомства с теорией функций действительного переменного, отсылаем читателя к уже упоминавшейся в связи с интегралами типа Коши монографии И. И. Привалова «Граничные свойства однозначных аналитических функций». В ней читатель найдет также очень тонкую граничную теорему единственности тех же авторов, относящуюся к радиальным граничным значениям, т. е. к значениям, являющимся пределами при приближении точки  $z \in G$  к точке  $\xi_0 \in \Gamma$  по нормали к  $\Gamma$  в точке  $\xi_0$  (по радиусу — в случае, когда  $\Gamma$  есть окружность).

Пусть  $A$  — произвольное комплексное число. Назовем  $A$ -точками функции  $f(z)$  корни уравнения  $f(z) = A$ . Из теоремы единственности следует, что если  $f(z) \not\equiv A$ , то множество  $A$ -точек этой функции не может иметь ни одной предельной точки, принадлежащей области  $G$ . Отсюда вытекает, что любое ограниченное замкнутое множество  $F$  области  $G$  может содержать лишь конечное число  $A$ -точек (для фиксированного  $A$ ). В самом деле, допуская, что  $F$  содержит бесконечное множество  $A$ -точек, мы имели бы предельную точку для них, принадлежащую множеству  $F$ , а следовательно, и области  $G$ .

Пусть  $z_0$  — какая-нибудь  $A$ -точка функции  $f(z)$ , так что  $f(z_0) = A$ . Разложим  $f(z)$  в ряд по степеням  $z - z_0$ . Получим:

$$f(z) = A + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 +$$

или

$$f(z) - A = f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \quad (6.1:1)$$

Если  $f(z) \not\equiv \text{const}$ , то среди коэффициентов правой части найдутся отличные от нуля. Пусть  $(z - z_0)^k$  — младшая степень  $z - z_0$ , коэффициент при которой отличен от нуля. Тогда равенство (6.1:1) принимает вид

$$f(z) - A = (z - z_0)^k \left[ \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z - z_0) + \dots \right], \quad (6.1:2)$$

где  $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ . Натуральное число  $k$  ( $k \geq 1$ ) называется порядком или кратностью  $A$ -точки  $z_0$ . В случае, когда  $k = 1$ ,  $A$ -точка называется простой; в случае, когда  $k > 1$ , — кратной. В силу определения, простая  $A$ -точка характеризуется тем, что для нее

$$f(z_0) = A \text{ и } f'(z_0) \neq 0;$$

кратная  $A$ -точка порядка  $k$  характеризуется соотношениями:

$$f(z_0) = A, \quad f'(z_0) = 0, \quad \dots, \quad f^{(k-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Из равенства (6.1:2) следует также, что в случае, когда  $z_0$  есть  $A$ -точка кратности  $k$ , функция  $\varphi(z) = \frac{f(z) - A}{(z - z_0)^k}$  является аналитической в окрестности точки  $z_0$ :

$$\varphi(z) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z - z_0) +$$

причем ее значение в точке  $z_0$  отлично от нуля:

$$\varphi(z_0) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0.$$

Обратно: если известно, что для некоторого натурального  $k$  функция  $\varphi(z) = \frac{f(z) - A}{(z - z_0)^k}$  является аналитической в окрестности точки  $z_0$ , причем ее значение в точке  $z_0$  (определяемое как  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - A}{(z - z_0)^k}$ ) отлично от нуля, то  $z_0$  является  $A$ -точкой для  $f(z)$  кратности  $k$ .

В самом деле, из того, что

$$\frac{f(z) - A}{(z - z_0)^k} = \varphi(z) = a_k + a_{k+1}(z - z_0) + \dots \quad (a_k = \varphi(z_0) \neq 0),$$

вытекает, что

$$f(z) = A + a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots$$

в окрестности точки  $z_0$  и, следовательно,

$$A = f(z_0), \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0$$

и, кроме того (при  $k > 1$ ):

$$f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0.$$

Пусть снова  $F$  — произвольное замкнутое множество точек области  $G$ ; будем определять количество  $A$ -точек функции  $f(z) \neq A$ , принадлежащих  $F$ , считывая каждую из них столько раз, какова ее кратность. Так как различных  $A$ -точек на  $F$  конечное число и порядок кратности каждой из них также есть конечное число, то и результат подсчета даст конечное число.

Все сказанное относительно  $A$ -точек приложимо, разумеется, и к тому важному частному случаю, когда  $A = 0$ .

$0$ -точки аналитической функции  $f(z)$  называются короче ее нулями. Читатель легко проверит, что принятые в алгебре и использованные нами в п. 4.1 главы второй определения кратности нуля многочлена или, вообще, произвольной рациональной функции согласуются с общими определениями, данными выше.

Заметим, что для каждого  $A \neq \infty$   $A$ -точки функции  $f(z)$  являются нулями функции  $f(z) - A$ . Поэтому любая общая закономерность, установленная для нулей аналитических функций, справедлива и для  $A$ -точек аналитических функций, где  $A$  — произвольное комплексное число.

Докажем, что если множество всех нулей (соответственно  $A$ -точек) произвольной однозначной аналитической функции  $f(z)$  в данной области  $G$  не является конечным, то оно есть счетное множество. Иными словами, все нули функции, однозначной и аналитической в данной области  $G$ , можно перенумеровать и расположить в виде некоторой

последовательности:

$$z_1, z_2, \dots, z_n,$$

Эта последовательность, как указано выше, не имеет предельных точек в области  $G$  и, следовательно, все ее предельные точки являются граничными для  $G$ .

Для доказательства счетности множества нулей аналитической функции (в случае, если это множество бесконечно), рассмотрим сначала случай, когда  $G$  есть вся конечная плоскость. Тогда в круге  $|z| < 1$ , а также в кольцах:

$$1 \leq |z| < 2, 2 \leq |z| < 3, \dots, n \leq |z| < n+1,$$

содержатся лишь конечные множества нулей функции  $f(z)$  (быть может, пустые в круге или в некоторых кольцах). Нумеруя сначала все нули, принадлежащие кругу  $|z| < 1$ , а затем продолжая нумерацию нулей, принадлежащих по порядку первому, второму, ...,  $n$ -му и т. д. из указанных колец, мы получим, очевидно, последовательность  $\{z_n\}$ , в которую войдут все нули функции  $f(z)$ . При этом можно, по желанию, получить последовательность, в которой представлены только различные между собой нули (без учета их кратности), или такую последовательность, в которой каждый нуль повторяется столько раз, какова его кратность.

Заметим, что в том и другом случае нумерацию можно производить, располагая нули в порядке неубывающих модулей:

$$|z_n| \leq |z_{n+1}|.$$

Пусть теперь  $G$  имеет по крайней мере одну конечную граничную точку.

Для произвольного натурального  $n$  обозначим через  $F_n$  множество всех точек области  $G$ , расстояние которых до границы не меньше, чем  $\frac{1}{n}$ . Очевидно, эти множества, начиная с некоторого  $n \geq n_0$  ( $n_0 \geq 1$ ), не будут пустыми. Каждая точка  $z \in G$  принадлежит всем  $F_n$ , начиная с некоторого из них (достаточно взять  $\frac{1}{n} < \rho$ , где  $\rho$  — расстояние от  $z$  до границы области  $G$ ). Наконец, каждое из множеств  $F_n$ , будучи замкнутым множеством точек области  $G$  (каждая предельная точка множества  $F_n$  является предельной и для  $G$ ; кроме того, расстояние этой точки до границы области  $G$  не меньше, чем  $\frac{1}{n}$ , поэтому она принадлежит  $G$  и  $F_n$ ), содержит лишь конечное число нулей функции  $f(z)$ . Нумеруя сначала все нули, принадлежащие  $F_1$ , а затем продолжая нумерацию нулей, принадлежащих по порядку  $F_2 - F_1, F_3 - F_2, \dots, F_{n+1} - F_n, \dots$ , мы получим последовательность  $\{z_n\}$ , в которую войдут все нули функции  $f(z)$ , принадлежащие области  $G$ .



Рассмотрение степенного ряда

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_k(z - z_0)^k + \dots$$

сразу же дает ответ на вопрос о том, является ли данная точка  $z_0$  нулем функции  $f(z)$  и, в случае, когда  $z_0$  есть нуль, указывает порядок его кратности. Однако этот ряд не позволяет непосредственно судить о том, имеет ли  $f(z)$  нули, отличные от  $z_0$ , где находятся эти нули, и каковы их кратности. Достаточно вспомнить пример функции  $\sin z$ , представляемой всюду сходящимся степенным рядом

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

Из этого разложения видно, что  $\sin z$  имеет простой нуль в начале координат. Однако из него мы не усматриваем непосредственно, что  $\sin z$  имеет простые нули во всех точках вида  $k\pi$  ( $k$  — целое число) и что никаких других нулей, кроме указанных, не существует.

Средством для изображения аналитических функций, позволяющим выявить все их нули, принадлежащие данной области, являются бесконечные произведения.

Допустим, что  $\{f_n(z)\}$  — последовательность функций, аналитических в области  $G$  и удовлетворяющих условиям, указанным на стр. 278, а именно:

а') множество  $E$ -точек, являющихся нулями функций  $f_1(z)$ ,

..,  $f_k(z)$ , .. не имеет предельных точек внутри  $G$ ;

б') каждая из точек  $E$  является нулем только для конечного числа функций  $\{f_k(z)\}$ .

При этих условиях каждое замкнутое множество  $F \subset G$  содержит лишь конечное число точек из  $E$  и для него существует натуральное число  $n(F)$  такое, что  $f_k(z)$  не обращается в нуль в точках множества  $F$ , если  $k > n(F)$ .

Предположим еще, что ряд  $\sum_{n(F)+1}^{\infty} \ln[f_k(z)]$  равномерно сходится

на  $F$ . Отсюда, как мы знаем, следует, что произведение  $\prod_1^{\infty} f_k(z)$  равномерно сходится внутри области  $G$  и, следовательно, изображает в ней некоторую аналитическую функцию  $f(z)$ . Функция  $f(z)$  обращается в нуль в тех и только в тех точках, в которых обращается в нуль по крайней мере одна из функций  $f_k(z)$ , т. е. в точках множества  $E$ .

Заметим, что если  $z_0 \in E$  и сумма кратностей этой точки, рассматриваемой как нуль соответствующих функций  $f_k(z)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), есть  $\alpha_0$ , то  $z_0$  является  $\alpha_0$ -кратным нулем функ-

ции  $f(z)$ . В самом деле, если  $n_0 \geq 1$  обозначает такое натуральное число, что ни одна из функций  $f_k(z)$  не обращается в нуль в точке  $z_0$  при  $k > n_0$ , то, представляя  $f(z)$  в виде

$$f(z) = \prod_1^{n_0} f_k(z) \prod_{n_0+1}^{\infty} f_k(z),$$

убеждаемся, что  $\prod_1^{n_0} f_k(z)$  есть аналитическая функция, имеющая  $\alpha_0$ -кратный нуль в точке  $z_0$ , а  $\prod_{n_0+1}^{\infty} f_k(z)$  — аналитическая функция, не обращающаяся в нуль в этой точке. Отсюда и следует, что  $z_0$  есть  $\alpha_0$ -кратный нуль функции  $f(z)$ .

В случае, когда нули каждой функции  $f_k(z)$  известны, например в случае, когда  $f_k(z)$  имеет вид

$$f_k(z) = (z - z_k) g_k(z),$$

где  $g_k(z)$  — аналитическая функция, не имеющая нулей, разложение  $f(z)$  в бесконечное произведение

$$f(z) = \prod_1^{\infty} [(z - z_k) g_k(z)]$$

позволяет сразу же усмотреть все нули функции  $f(z)$ , принадлежащие области  $G$ , и установить их кратности. Последние совпадают с количествами равных между собой чисел  $z_k$ , встречающихся в составе различных множителей произведения.

**6.2.** Докажем принцип максимума модуля аналитической функции в его окончательном виде: *модуль функции  $f(z)$ , аналитической в области  $G$  и не равной тождественно постоянной, не может иметь максимума ни в одной точке области.*

Очевидно, аналогичный принцип для минимума модуля аналитической функции несправедлив, так как модуль имеет минимум в каждом нуле аналитической функции. Из принципа максимума следует, однако, что *модуль аналитической функции  $f(z) \not\equiv \text{const}$  не может иметь минимум ни в одной точке области, не являющийся нулем функции  $f(z)$ .*

В самом деле, если  $f(z_0) \neq 0$ , то в силу непрерывности функции  $f(z)$  неравенство  $f(z) \neq 0$  имеет место и в некоторой окрестности  $U$  точки  $z_0$ , принадлежащей области  $G$ . Следовательно, в этой окрестности функция  $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$  является аналитической и не равной тождественно постоянной; поэтому модуль  $\varphi(z)$  не может

иметь максимума в точке  $z_0$ . Возвращаясь к  $f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ , получаем, что модуль  $f(z)$  не имеет минимума в точке  $z_0$ .

Дадим два различных доказательства принципа максимума модуля.

I. Доказывая теорему от противного, предположим, что в некоторой точке  $z_0 \in G$  модуль функции имеет максимум. Положим  $|f(z_0)| = M$ ; тогда в достаточно малой окрестности  $U_0$  точки  $z_0$ :  $|f(z)| \leq M$ . Мы можем считать, что  $M \neq 0$ , так как в противном случае  $f(z) = 0$  во всех точках  $U_0$ , откуда следует, что  $f(z) \equiv 0$ , вопреки условию теоремы.

Покажем, что во всех точках  $U_0$  выполняется равенство  $|f(z)| = M$ . Если допустить, что в точке  $z_1 \in U_0$   $|z_1 - z_0| = \delta > 0$ ,

$|f(z_1)| < M$ , то для интеграла  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \delta e^{i\theta}) d\theta$  получим оценку

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \delta e^{i\theta}) d\theta \right| < M,$$

так как на окружности  $|z - z_0| = \delta$  найдется дуга, содержащая  $z_1$ , во всех точках которой  $|f(z)| < M$ . Но эта оценка противоречит равенству (см. (3.1:6))

$$M = |f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \delta e^{i\theta}) d\theta \right|$$

Итак, из принятого нами допущения вытекает существование некоторой окрестности точки  $z_0$ , в которой модуль функции сохраняет постоянное значение. Если  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , то имеем во всех точках  $U_0$ :

$$|f(z)|^2 = u^2 + v^2 = M^2,$$

или, дифференцируя по  $x$  и  $y$ :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Так как  $M \neq 0$ , то  $u$  и  $v$  не обращаются одновременно в нуль в точках  $U_0$ ; поэтому определитель последней системы равен нулю:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Используя уравнения Даламбера—Эйлера, получаем отсюда  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0$  и, следовательно,  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ; в силу

тех же уравнений  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ . Поэтому

$$u(x, y) \equiv C_1, \quad v(x, y) \equiv C_2 \quad \text{и} \quad f(z) = C_1 + iC_2 \quad \text{в} \quad U_0.$$

По теореме единственности последнее равенство выполняется во всей области  $G$ , что противоречит условию теоремы. Итак, принцип максимума модуля доказан.

II. Для доказательства можно использовать представимость аналитической функции степенным рядом\*). Пусть снова  $|f(z)|$  имеет максимум в точке  $z_0$ :  $|f(z_0)| = M$ . Как и выше, можно считать, что  $M \neq 0$ . Разложим  $f(z)$  в ряд по степеням  $z - z_0$ :

$$f(z) = a_0 + a_p(z - z_0)^p + a_{p+1}(z - z_0)^{p+1} + \dots,$$

где  $|a_0| = |f(z)| = M$ ,  $|a_p| \neq 0$  ( $p \geq 1$ ). В силу предположения в любой достаточно малой окрестности  $U_0$  точки  $z_0$  выполняется неравенство  $|f(z)| \leq M$ . Возьмем точку  $z_1 \in U_0$ , отличную от  $z_0$  и лежащую на одном из лучей:

$$\text{Arg}[a_p(z - z_0)^p] = \text{Arg } a_0,$$

т. е.

$$\text{Arg}(z - z_0) = \frac{1}{p} \text{Arg} \frac{a_0}{a_p}$$

(число таких лучей равно  $p$ ). Тогда векторы, изображающие  $a_0$  и  $a_p(z - z_0)^p$ , параллельны и направлены в одну и ту же сторону, откуда

$$|a_0 + a_p(z - z_0)^p| = |a_0| + |a_p(z - z_0)^p|.$$

Потребуем еще, чтобы  $z$  было настолько близкой к  $z_0$  на выбранном луче, что

$$|a_{p+1}(z - z_0)^{p+1} + a_{p+2}(z - z_0)^{p+2} + \dots| < \frac{1}{2}|z - z_0|^p.$$

Тогда во всех таких точках  $z$  (сколько угодно близких к  $z_0$ ) будем иметь:

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |a_0 + a_p(z - z_0)^p + a_{p+1}(z - z_0)^{p+1} + \dots| \geq \\ &\geq |a_0 + a_p(z - z_0)^p| - |a_{p+1}(z - z_0)^{p+1} + \dots| = \\ &= |a_0| + |a_p(z - z_0)^p| - |a_{p+1}(z - z_0)^{p+1} + \dots| > \\ &> |a_0| + \frac{1}{2}|a_p(z - z_0)^p| > |a_0| = M. \end{aligned}$$

Но это противоречит допущению; следовательно, принцип максимума модуля справедлив.

---

\*) На стр. 295 уже было приведено одно такое доказательство.

Пусть функция  $f(z) \not\equiv \text{const}$  непрерывна в замкнутой области  $\bar{G}$  и аналитична в области  $G$ . Тогда ее модуль, будучи функцией, непрерывной в  $\bar{G}$ , должен достигать своей верхней грани в некоторой точке  $\xi \in \bar{G}$ . В силу принципа максимума модуля эта точка не может принадлежать области  $G$ ; следовательно, это — граничная точка области. Итак, *модуль функции  $f(z) \not\equiv \text{const}$ , непрерывной в замкнутой области и аналитической внутри области, достигает наибольшего значения в граничной точке области.*

Допустим, что для некоторой функции  $f(z) \not\equiv \text{const}$ , непрерывной в замкнутой области  $\bar{G}$  и аналитической в области  $G$ , ее модуль  $|f(z)|$  сохраняет постоянное значение на границе этой области. Покажем, что отсюда следует, что  $f(z)$  имеет по крайней мере один нуль внутри  $G$ . Если бы это было не так, то модуль  $|f(z)|$  во внутренних точках области не мог бы иметь не только максимума, но и минимума. Поэтому, являясь функцией непрерывной на замкнутом множестве  $\bar{G}$ , он достигал бы своего наибольшего и наименьшего значения в граничных точках области. Но в этих точках он, по условию, сохраняет постоянное значение. Следовательно, его наибольшее и наименьшее значения в области  $G$  совпадают, т. е.  $|f(z)| \equiv \text{const}$  в области  $G$ , и, значит, каждая точка области  $G$  является для  $|f(z)|$  точкой максимума, что при  $f(z) \not\equiv \text{const}$  невозможно. Итак, область  $G$  содержит по крайней мере один нуль функции  $f(z)$ .

С помощью только что доказанного предложения легко доказывается теорема о существовании нулей любого многочлена степени не ниже первой (так называемая **основная теорема алгебры**).

Пусть  $P(z)$  — многочлен степени  $n$ :

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \quad (a_n \neq 0, n \geq 1).$$

Если  $a_0 = 0$ , то  $P(0) = 0$ , т. е. многочлен имеет нуль в начале координат. Если  $a_0 \neq 0$ , то  $P(0) \neq 0$ .

Рассмотрим множество  $E$  точек плоскости, для которых  $|P(z)| < 2|a_0|$ . Это множество не пустое (ибо  $z = 0 \in E$ ), ограниченное (ибо при  $|z|$ , достаточно больших, модуль сколь угодно велик и, в частности, больше, чем  $2|a_0|$ ). Кроме того, в силу непрерывности модуля  $|P(z)|$  множество  $E$  — открытое (в каждой точке  $z_0 \in E$   $|P(z_0)| < 2|a_0|$ , и, следовательно, существует окрестность точки  $z_0$ , в которой  $|P(z)| < 2|a_0|$ ; тем самым эта окрестность принадлежит  $E$ ). Наконец, в граничных точках множества  $E$  имеем  $|P(z)| = 2|a_0|$  (если  $\xi$  — граничная точка  $E$ , то в ней  $|P(\xi)| \geq 2|a_0|$ , а с другой стороны,  $\xi$  является предельной для точек  $E$ , в которых  $|P(z)| < 2|a_0|$ , поэтому  $|P(\xi)| \leq 2|a_0|$ ; итак,  $|P(\xi)| = 2|a_0|$ ). Любое открытое множество

представляет собой область или распадается на отдельные области. Применяя к каждой области доказанное выше предложение, получаем, что каждая из них должна содержать по крайней мере по одному нулю многочлена  $P(z)$ . Таким образом, существование по крайней мере одного нуля  $P(z)$  в плоскости  $z$  доказано. Вместе с тем с помощью известных рассуждений (со ссылкой на теорему Безу) доказано и существование  $n$  нулей многочлена (среди которых могут быть и кратные).

В связи с приведенным доказательством основной теоремы алгебры, остановимся на рассмотрении множества  $E_\rho$  всех точек плоскости  $z$ , в котором выполняется неравенство

$$|P(z)| < \rho < \infty,$$

где  $\rho$  — произвольное фиксированное положительное число. Это множество — не пустое, так как ему принадлежат все нули многочлена  $P(z)$ . Повторяя далее все, что было сказано выше относительно частного случая множества  $E$ :  $|P(z)| < 2|a_0|$ , убеждаемся в том, что  $E_\rho$  является ограниченным и открытым множеством, на границе которого выполняется равенство  $|P(z)| = \rho$ .

Множество  $E_\rho$  может быть связным и тогда представляет одну область, или не быть связным и тогда представляет систему областей. Так как каждая из областей должна содержать по крайней мере один нуль многочлена  $P(z)$  (ибо на границе такой области  $|P(z)|$  сохраняет постоянное значение), то общее число областей не может превышать  $n$ . Пусть  $g_\rho$  — одна из этих областей и  $\gamma$  — произвольная замкнутая жорданова кривая, принадлежащая  $g_\rho$ . Так как в точках кривой  $\gamma$  выполняется неравенство  $|P(z)| < \rho$ , то это же неравенство, в силу принципа максимума модуля, должно выполняться и во всех точках внутренности  $\gamma$ . Отсюда вытекает, что внутренность  $\gamma$  принадлежит  $E_\rho$ , а следовательно, вместе с  $\gamma$  принадлежит и  $g_\rho$ . Итак,  $E_\rho$  состоит из одной или нескольких, но не более чем из  $n$ , односвязных областей\*), содержащих внутри все нули многочлена  $P(z)$ . Поэтому граница  $E_\rho$  состоит из одного или нескольких, но не более чем из  $n$ , континуумов, являющихся границами односвязных областей.

Очевидно, во всякой точке, внешней к  $E_\rho$ , должно выполняться неравенство  $|P(z)| > \rho$ . В самом деле, если допустим, что в некоторой точке  $z_1$ , внешней для множества  $E_\rho$ , имеет место равенство  $|P(z_1)| = \rho$  (неравенство  $|P(z_1)| < \rho$  исключается, так как, по определению, все точки, в которых  $|P(z)| < \rho$ , принадлежат  $E_\rho$ ), то тогда, в силу того, что  $P(z_1) \neq 0$  и, следовательно, в точке  $z_1$  модуль  $|P(z)|$  не может иметь минимум, в произвольно малой окрестности точки  $z_1$  должны иметься точки, в которых  $|P(z)| <$

\*) См. п. 4.4 гл. I.

$< |P(z_1)| = \rho$ , т. е. точки, принадлежащие  $E_\rho$ . Но это невозможно, так как  $z_1$  — внешняя точка для  $E_\rho$ . Итак, внутри  $E_\rho$  имеем:  $|P(z)| < \rho$ , на границе  $E_\rho$ :  $|P(z)| = \rho$  и вне  $E_\rho$ :  $|P(z)| > \rho$ .

Граница области  $E_\rho$ , т. е. множество всех точек плоскости, удовлетворяющих условию

$$|P(z)| = \rho,$$

называется лемнискатой. Если обозначим нули многочлена  $P(z)$  через  $z_1, z_2, \dots, z_n$  (кратные нули выписываются здесь столько раз, какова их кратность), то  $P(z)$  можно переписать в виде

$$P(z) = a_n (z - z_1) \dots (z - z_n);$$

следовательно, условие, определяющее лемнискату, примет следующий вид:

$$|z - z_1| \dots |z - z_n| = \frac{\rho}{|a_n|} = r^n$$

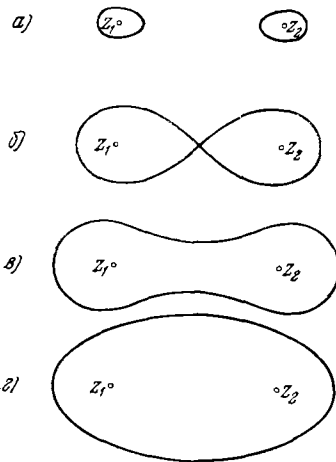


Рис. 58.

Итак, лемнискату можно определить как геометрическое место точек плоскости, для которых произведение расстояний до  $n$  данных точек плоскости  $z_1, \dots, z_n$  (некоторые из этих точек могут совпадать между собой) есть величина постоянная.

Точки  $z_1, \dots, z_n$ , фигурирующие в этом определении (нули многочлена  $P(z)$ ), называются фокусами лемнискаты, число  $r$  — радиусом лемнискаты, а сама лемниската — лемнискатой с  $n$ -фокусами и радиусом  $r$ .

Простейший частный случай получаем при  $n = 1$ :

$$|z - z_1| = r;$$

это, очевидно, окружность с центром в единственном фокусе  $z_1$  и радиусом  $r$ .

При  $n = 2$  и  $z_1 \neq z_2$  получаем лемнискату с двумя фокусами:

$$|z - z_1| |z - z_2| = r^2.$$

Ее вид зависит от отношения радиуса  $r$  к расстоянию  $|z_1 - z_2|$  между фокусами. На рис. 58 изображена лемниската с двумя фокусами для следующих величин этого отношения: а)  $\frac{r}{|z_1 - z_2|} <$

$< \frac{1}{2}$ , б)  $\frac{r}{|z_1 - z_2|} = \frac{1}{2}$ , в)  $\frac{1}{2} < \frac{r}{|z_1 - z_2|} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ , г)  $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{r}{|z_1 - z_2|}$ .

Заметим, что лемниската с двумя фокусами носит также название овала Кассини, а частный случай ее при  $\frac{r}{|z_1 - z_2|} = \frac{1}{2}$  лемнискаты Бернулли.

При большем числе фокусов получаем большее разнообразие различных форм лемнискат. Гильбертом было доказано, что для границы  $\Gamma$  произвольной односвязной области  $G$  и для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать лемнискату  $\Lambda$ , такую, что в  $\varepsilon$ -окрестности каждой точки множества  $\Gamma$  будут существовать точки лемнискаты  $\Lambda$ , причем каждая точка лемнискаты  $\Lambda$  попадет в  $\varepsilon$ -окрестность соответствующей точки множества  $\Gamma$ . Иными словами, *лемнискатами можно произвольно хорошо приближать границы произвольных односвязных областей*.

Проследим за изменением вида лемнискаты с  $n$ -фокусами  $z_1, z_2, \dots, z_n$  в зависимости от изменения ее радиуса  $r$ . Будем считать для определенности все точки  $z_1, z_2, \dots, z_n$  различными между собой и положим  $P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$ . Если положительное число  $\delta$  столь мало, что круги  $k_j: |z - z_j| < \delta$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) не имеют попарно общих точек, то при  $r < \delta$  ни одна точка множества  $E_{r,n}: |P(z)| < r^n$  не будет лежать вне кругов  $k_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Так как, с другой стороны, центры кругов являются внутренними для  $E_{r,n}$ , то  $E_{r,n}$  состоит по крайней мере из  $n$  областей, лежащих внутри кругов  $k_j$ . Но общее число областей, на которые распадается  $E_{r,n}$ , не может быть больше  $n$ ; поэтому их должно быть ровно  $n$ , по одной в каждом круге  $k_j$ . Соответствующая лемниската  $|P(z)| = r^n$  состоит, следовательно, из  $n$  не имеющих попарно общих точек континуумов, являющихся границами односвязных областей.

Пусть теперь  $K$  — круг диаметра  $D$ , заключающий внутри все фокусы лемнискаты. Тогда каждая точка круга  $K$  удовлетворяет неравенству  $|z - z_j| < D$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) и, следовательно,  $|P(z)| < D^n$  внутри  $K$ . Отсюда следует, что круг  $K$  будет весь принадлежать  $E_r$  при  $r > D^n$ . Поэтому  $E_r$  будет состоять лишь из одной области, содержащей этот круг (мы знаем, что каждая область  $E_r$  должна содержать внутри по крайней мере одну из точек  $z_j$ ). Соответствующая лемниската будет представлять один континуум, являющийся границей этой области.

Итак, лемниската с  $n$  фокусами ( $n > 1$ ) является несвязной, а именно состоит из  $n$  континуумов, попарно не имеющих общих точек при всех достаточно малых значениях радиуса ( $r < \delta$ ) и является связной при всех достаточно больших значениях радиуса ( $r > D$ ).

Заметим, наконец, что лемниската  $|P_n(z)| = r$  принадлежит любому множеству  $E_{r'}$ , где  $r' > r$ , и, следовательно, все составляющие ее континуумы заключены внутри односвязных областей,



ограниченных компонентами лемнискаты  $|P_n(r)| = r'$ . Иными словами, лемниската с данным радиусом вложена строго внутри любой лемнискаты с большим радиусом (и с теми же фокусами). Таким образом, изменение вида лемнискаты, в зависимости от роста  $r$ , можно рассматривать как постепенное разбухание ее компонент. Имеющие вид маленьких овалов, при малых  $r$ , они постепенно увеличиваются, меняя свою форму. При некоторых значениях

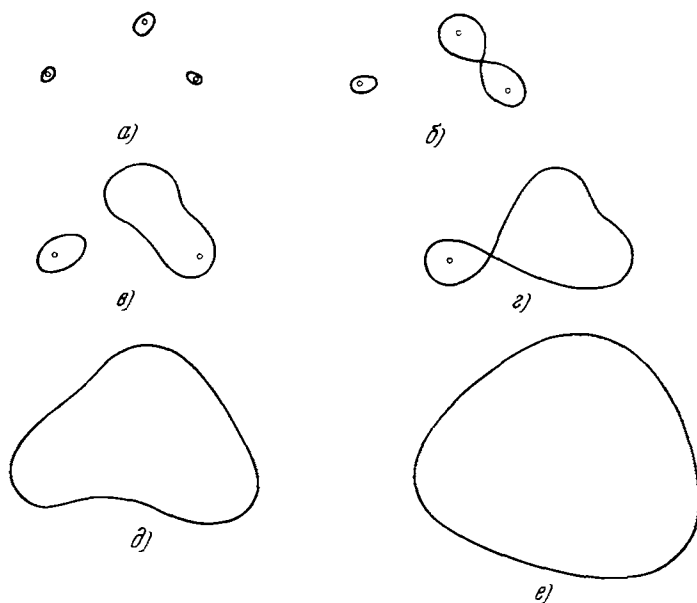


Рис. 59.

$r$  отдельные связные компоненты лемнискаты сливаются по две, по три и более в одну, в связи с чем общее число компонент уменьшается, затем происходит дальнейшее разбухание, сопровождающееся время от времени дальнейшим сокращением числа компонент, и, наконец, мы получаем лемнискату в виде единственной связной кривой. Ее мы и имели в виду, когда говорили выше о результате Гильберта.

Разнообразие форм этих кривых объясняется различиями в количестве и способе размещения фокусов лемнискаты на плоскости. На рис. 59 мы схематически представили эволюцию вида лемнискаты в зависимости от величины радиуса для случая трех фокусов (не лежащих на одной прямой).

Остановимся еще на одном приложении принципа максимума модуля, играющем важную роль в вопросах отображения посредством аналитических функций.

**Л е м м а Ш в а р ц а.** Пусть  $f(z)$  — функция аналитическая в круге  $K: |z| < R$ , обращающаяся в нуль в начале координат и удовлетворяющая в этом круге неравенству

$$|f(z)| \leq M \quad (M < \infty). \quad (6.2:1)$$

Тогда в любой точке круга  $K$  выполняется неравенство

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R} |z| \quad (6.2:2)$$

и, кроме того,

$$|f'(0)| \leq \frac{M}{R}. \quad (6.2:3)$$

Равенство в соотношении (6.2:2) в какой-либо точке  $z$  ( $0 < |z| < R$ ) или равенство в соотношении (6.2:3) может достигаться только в том случае, когда  $f(z)$  есть целая линейная функция вида

$$f(z) = \frac{M}{R} e^{i\alpha z} \quad (6.2:4)$$

( $\alpha$  — некоторое действительное число).

Для доказательства рассмотрим разложение функции  $f(z)$  в ряд Тейлора:

$$f(z) = f'(0)z + \frac{f''(0)}{2}z^2 + \dots \quad (6.2:5)$$

Из него видно, что функция

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z} = f'(0) + \frac{f''(0)}{2}z + \dots \quad (6.2:6)$$

является аналитической в круге  $K$ , причем ее значение в начале координат есть  $f'(0)$ . Пусть  $z$  — произвольная точка круга  $K$  и  $r$  — число, удовлетворяющее неравенствам  $|z| < r < R$ . Так как для всех точек  $\xi$ , лежащих на окружности  $\gamma: |\xi| = r$ , выполняется неравенство

$$|\varphi(\xi)| = \frac{|f(\xi)|}{|\xi|} \leq \frac{M}{r},$$

то, в силу принципа максимума, то же неравенство должно выполняться в точке  $z$ , лежащей внутри окружности  $\gamma$ :

$$|\varphi(z)| \leq \frac{M}{r}.$$

Заставим здесь  $r$  стремиться к пределу  $R$ , получим:

$$|\varphi(z)| \leq \frac{M}{R}. \quad (6.2:7)$$

Если  $z \neq 0$ , то  $\varphi(z)$  можно заменить на  $\frac{f(z)}{z}$  и представить это неравенство в виде

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R} |z|.$$

Мы получили неравенство (6.2:2) (очевидно, справедливое и при  $z=0$ ). При  $z=0$  имеем  $\varphi(0)=f'(0)$ , и неравенство (6.2:7) приобретает вид

$$|f'(0)| \leq \frac{M}{R}.$$

Это — неравенство (6.2:3).

Если первое из полученных неравенств обращается в равенство в некоторой точке  $z \in K$ , отличной от начала координат, или если второе неравенство обращается в равенство, то это означает, что знак равенства достигается в соотношении (6.2:7) в одной из точек круга  $K$ . Отсюда вытекает, что в этой точке модуль  $|\varphi(z)|$  достигает максимума, откуда, в силу принципа максимума,

$$\varphi(z) \equiv \text{const.}$$

Так как модуль этой постоянной равен  $\frac{M}{R}$ , то

$$\varphi(z) = \frac{M}{R} e^{i\alpha},$$

или

$$f(z) = \frac{M}{R} e^{i\alpha} z.$$

Этим и заканчивается доказательство леммы Шварца.

Лемма Шварца имеет простой геометрический смысл. Из нее следует, что если  $w = f(z)$  есть функция, аналитическая в круге  $K: |z| < R$ , и образ  $f(K)$  этого круга заключается в круге  $|w| < M$ , причем образом точки  $z=0$  является точка  $w=0$ , то образ  $f(k)$  каждого замкнутого круга  $k: |z| \leq r$ , радиус которого в  $\lambda = \frac{r}{R}$  раз меньше, чем радиус круга  $K$ , помещается в замкнутом круге  $|w| \leq \frac{r}{R} M$ , радиус которого в  $\lambda$  раз меньше, чем  $M$ . При этом образ какой-либо точки  $z_0$ , лежащей на окружности  $|z|=r$ , может попасть на окружность  $|w| = \frac{r}{R} M$  лишь в том случае, когда отображение имеет вид (6.2:4), т. е. состоит из пово-

рота вокруг начала координат и растяжения относительно него в  $\lambda$  раз.

6.3. Рассмотрим функцию  $\varphi(z)$ , аналитическую в некотором круге  $K: |z - z_0| < R$  ( $R < \infty$ ). Такую функцию мы будем называть элементом (подразумевается элемент аналитической функции). Точки, лежащие на окружности  $\Gamma: |z - z_0| = R$ , мы будем подразделять на два класса (каждый из классов, а priori, может быть пустым):

1) точки  $\xi \in \Gamma$ , обладающие окрестностью  $U_\xi: |z - \xi| < \rho$ , в которой существует некоторая аналитическая функция  $\psi_\xi(z)$ , совпадающая с  $\varphi(z)$  в общей части кругов  $K$  и  $U_\xi$ , мы назовем правильными или регулярными для данного элемента;

2) точки  $\Gamma$ , не обладающие такой окрестностью, назовем особыми и точками элемента.

Определение особой точки носит, таким образом, негативный характер. Это — граничные точки круга  $K$ , не обладающие ни одной окрестностью, в которой могла бы найтись аналитическая функция, совпадающая с  $\varphi(z)$  в точках, общих для этой окрестности и круга  $K$ .

Из определения правильной точки вытекает, что если  $\xi_0 \in \Gamma$  — правильная точка, то и все точки дуги окружности  $\Gamma$ , находящейся внутри соответствующей окрестности  $U_{\xi_0}$ , также являются правильными. Действительно, для такой точки  $\xi$  в качестве  $U_\xi$  можно взять какой-либо круг с центром в  $\xi$ , содержащийся в  $U_{\xi_0}$ , а в качестве функции  $\psi_\xi(z)$  — ту же функцию  $\psi_{\xi_0}(z)$ , которая, являясь аналитической в  $U_{\xi_0}$ , совпадала с  $\varphi(z)$  во всех точках, общих для  $U_{\xi_0}$  и  $K$ . Отсюда, в частности, следует, что если существует одна правильная точка, то существует и бесконечное множество их. В противоположность этому, особая точка может быть единственной.

Заметим, что каждая точка  $z' \in K$  обладает характеристическим свойством правильной точки, а именно, для нее существуют окрестность  $U_{z'}$  (можно взять любую окрестность точки  $z'$ , содержащуюся в  $K$ ) и функция аналитическая в  $U_{z'}$  (сама функция  $\varphi(z)$ ), которая совпадает с  $\varphi(z)$  во всех точках, общих для  $U_{z'}$  и  $K$  (т. е. в  $U_{z'}$ ). Поэтому все точки круга  $K$  мы также будем называть правильными точками элемента  $\varphi(z)$ .

Поясним введенные понятия на простейшем примере. Пусть  $K$  есть единичный круг и  $\varphi(z) = \frac{1}{1-z}$ . Для каждой точки  $\xi$ , лежащей на границе круга  $K$ , т. е. на единичной окружности, и отличной от единицы, существует окрестность  $U_\xi: |z - \xi| < |1 - \xi|$  и в ней аналитическая функция  $\psi_\xi(z) = \frac{1}{1-z}$ , совпадающая с  $\varphi(z)$

в точках, общих для  $K$  и  $U_\xi$ . Поэтому каждая такая точка  $\xi$  является правильной точкой для элемента  $\varphi(z)$ .

Убедимся в том, что точка 1 является особой точкой элемента. Действительно, в противном случае в некоторой окрестности  $U$  этой точки существовала бы аналитическая функция  $\psi(z)$ , совпадающая с  $\varphi(z) = \frac{1}{1-z}$  в точках области  $d$ , являющейся общей частью для  $U$  и  $K$ . Но тогда должен был бы существовать конечный предел:

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in d}} \psi(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in d}} \frac{1}{1-z} = \psi(1),$$

что, очевидно, невозможно. Итак, точка 1 является особой точкой для данного элемента.

Докажем следующее предложение.

*Если каждая точка окружности  $\Gamma$  является правильной для элемента  $\varphi(z)$ , то существует элемент  $\psi(z)$ , аналитический в некотором круге  $K_1: |z - z_0| < R_1$ , радиус которого  $R_1$  больше, чем радиус  $R$  окружности  $\Gamma$ , совпадающий с  $\varphi(z)$  во всех точках внутри  $\Gamma$  (т. е. во всех точках круга  $K$ ).*

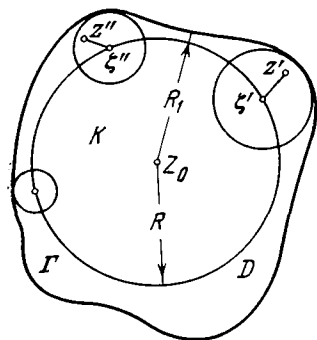


Рис. 60.

Для доказательства объединим все точки круга  $K$  и кругов  $U_\xi$ , фигурирующих в определении правильных точек  $\xi$  (для всех  $\xi \in \Gamma$ ) в одно множество  $D$  (рис. 60).

Очевидно,  $D$  является открытым множеством. В самом деле, каждая точка  $z' \in D$  должна принадлежать одному из кругов  $K$  или  $U_\xi$ , а следовательно, должна обладать окрестностью, принадлежащей тому же самому кругу (т. е.  $K$  или  $U_\xi$ , соответственно), а потому принадлежащей и множеству  $D$ . Покажем,

далее, что  $D$  — связное множество. Достаточно показать, что для любых двух точек  $z'$  и  $z''$ , содержащихся в  $D$ , существует соединяющая их непрерывная кривая, также принадлежащая  $D$ .

В случае, когда  $z'$  и  $z''$  принадлежат одному и тому же кругу ( $K$  или  $U_\xi$ ), в качестве  $\gamma$  можно взять прямолинейный отрезок, их соединяющий; он принадлежит тому же кругу, а потому принадлежит и множеству  $D$ . Если одна точка, например  $z'$ , принадлежит  $K$ , а другая —  $z''$  принадлежит  $U_\xi$ , то в качестве  $\gamma$  можно взять ломаную, состоящую из двух звеньев: прямолинейного отрезка, соединяющего  $z'$  с  $\xi$ , и прямолинейного отрезка, соединяющего  $\xi$  с  $z''$ . Так как отрезок  $z'\xi$  принадлежит  $K$  (за исключением своего конца



Заметим теперь, что все граничные точки области  $D$  лежат во внешности окружности  $\Gamma$  (так как точки внутренности  $\Gamma$ , т. е. точки круга  $K$ , и все точки окружности  $\Gamma$  содержатся в  $D$  и, следовательно, не являются граничными для  $D$ ). Отсюда вытекает, что расстояние  $R_1$  от точки  $z_0$  до границы области  $D$ , которое должно совпадать с расстоянием от  $z_0$  до некоторой граничной точки области  $D$ , больше радиуса окружности  $\Gamma$ , т. е.  $R_1 > R$ . Очевидно, круг  $K_1: |z - z_0| < R_1$  и функция  $\psi(z)$  удовлетворяют всем условиям леммы. А именно, функция  $\psi(z)$  является аналитической в круге  $K_1$  радиуса, большего, чем  $R$ , и совпадает с  $\varphi(z)$  в круге  $K$ .

Предложение доказано.

Рассмотрим произвольный степенной ряд

$$\varphi(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots \quad (6.3:1)$$

радиус сходимости которого удовлетворяет условию  $0 < R < \infty$ . В силу определения сумма этого ряда  $\varphi(z)$  является элементом в круге  $K: |z - z_0| < R$ .

Докажем следующую теорему.

**Т е о р е м а.** *На границе  $\Gamma: |z - z_0| = R$  круга сходимости степенного ряда лежит по крайней мере одна особая точка элемента  $\varphi(z)$  (т. е. суммы степенного ряда).*

Доказательство будем вести от противного. Если теорема неверна, то каждая точка окружности  $\Gamma$  должна быть правильной точкой элемента  $\varphi(z)$ . Тогда, по доказанному выше, должна существовать функция  $\psi(z)$ , аналитическая в некотором круге  $K_1: |z - z_0| < < R_1$ , где  $R_1 > R$ , совпадающая с  $\varphi(z)$  в круге  $K$ . Из равенства  $\varphi(z) = \psi(z)$ , выполняющегося в точках круга  $K$ , следует, что теيلоровское разложение функции  $\psi(z)$  должно совпадать с рядом (6.3:1). Но, по теореме Коши, разложение  $\psi(z)$  должно сходиться во всем круге  $K_1$  радиуса  $R_1 > R$ , тогда как, по условию, радиус сходимости ряда (6.3:1) равен  $R$ . Из полученного противоречия и следует справедливость высказанной теоремы.

**С л е д с т в и е.** *Для того чтобы радиус сходимости  $R$  теилоровского разложения функции  $f(z)$ :*

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \dots \quad (6.3:2)$$

*аналитической в некотором круге  $|z - z_0| < \rho$ , совпадал с радиусом  $\rho$  этого круга, необходимо и достаточно, чтобы на окружности  $\gamma: |z - z_0| = \rho$  лежала по крайней мере одна особая точка элемента  $f(z)$ .*

В самом деле, если  $R = \rho$ , то, по предыдущей теореме, получаем, что на окружности  $\gamma$  лежит по крайней мере одна особая точка элемента  $f(z)$ . Поэтому высказанное условие необходимо для равенства  $R$  и  $\rho$ . Но оно же является и достаточным для этого равенства.

Действительно, по теореме Коши,  $R \geq \rho$ . Если допустить, что на окружности  $\gamma$  лежит по крайней мере одна особая точка элемента  $f(z)$  и  $R \neq \rho$ , то мы должны иметь  $R > \rho$ . В этом случае сумма ряда (6.3:2) представляет функцию, аналитическую в круге  $|z - z_0| < R$  и, следовательно, аналитическую в некоторой окрестности каждой точки окружности  $\gamma$ , совпадающую с  $f(z)$  во внутренности  $\gamma$ . Отсюда вытекает, что каждая точка окружности  $\gamma$  является правильной для  $f(z)$ . Из найденного противоречия и следует справедливость нашего утверждения.

В виде примера приведем геометрический ряд

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$$

Его радиус сходимости равен единице и сумма равна  $\frac{1}{1-z}$ . На границе круга сходимости  $|z| = 1$ , как мы видели, действительно имеется особая точка, притом единственная  $z = 1$ .

Можно без труда указать примеры степенных рядов, для которых каждая точка границы круга сходимости является особой. Вот один из простейших примеров такого рода.

Рассмотрим ряд:

$$f(z) = 1 + z^2 + z^4 + \dots + z^{2^n} + \dots$$

Его радиус сходимости, очевидно, равен единице. Покажем, что при  $z \rightarrow 1$  (изнутри единичного круга по его радиусу, т. е. по действительной оси),  $f(z)$  стремится к  $\infty$ . В самом деле, для любого натурального  $n$  частичная сумма ряда  $1 + x^2 + \dots + x^{2^n}$  при  $x \rightarrow 1$  стремится к  $n + 1$  и, следовательно, удовлетворяет неравенству

$$1 + x^2 + \dots + x^{2^n} > n \quad \text{при} \quad 1 - x < \delta(n), \quad \text{т. е.} \quad x > 1 - \delta(n).$$

Но при тех же значениях  $x$  имеем:

$$f(x) = \sum_0^\infty x^{2^k} > \sum_0^n x^{2^k} > n,$$

откуда и следует, что

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty.$$

Опираясь на этот факт, легко убеждаемся, как и выше в случае геометрического ряда, в том, что точка 1 является особой точкой для  $f(z)$ .

Заметим теперь тождество:

$$f(z) = z^2 + z^4 + \dots + z^{2^n} + [1 + (z^{2^n})^2 + (z^{2^n})^4 + \dots].$$



Так как ряд в квадратных скобках отличается от исходного лишь тем, что здесь  $z$  заменено на  $z^{2^n}$ , то заключаем, что

$$f(z) = z^2 + z^4 + \dots + z^{2^n} + f(z^{2^n})$$

для любого натурального  $n$ .

Рассмотрим все корни степени  $2^n$  из единицы:  $\sqrt[2^n]{1}$ . Они представляют точки, расположенные на единичной окружности в вершинах правильного  $2^n$ -угольника. Если  $\xi$  — одна из них и точка  $z$  единичного круга лежит на радиусе  $O\xi$ , то  $z^{2^n}$  очевидно, является числом положительным и при  $z \rightarrow \xi$   $z^{2^n} \rightarrow 1$ . Отсюда вытекает, что  $\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in O\xi}} f(z^{2^n}) = \infty$  и, следовательно,

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in O\xi}} f(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in O\xi}} [z^2 + z^4 + \dots + z^{2^n} + f(z^{2^n})] = \infty.$$

Итак, каждый из корней  $\sqrt[2^n]{1}$  также является особой точкой для  $f(z)$  (при любом  $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Мы видим, что множество особых точек элемента  $f(z)$  расположено всюду плотно на единичной окружности (т. е. так, что любая, сколь угодно малая дуга окружности содержит точки этого множества).

Но отсюда следует, что все без исключения точки единичной окружности являются особыми точками для  $f(z)$ , так как для правильной точки, если бы она имелась на окружности, существовала бы и целая дуга, все точки которой должны быть также правильными, что в данном случае невозможно.

Укажем общий метод, позволяющий для любой точки  $\xi$ , лежащей на границе  $\Gamma$  круга сходимости степенного ряда (6.3:1), решать, будет ли эта точка правильной или особой для суммы ряда  $\Phi(z)$ . Пусть  $z_1$  — точка радиуса  $z_0\xi$ , отличная от  $z_0$  и  $\xi$ . Разложим сумму ряда  $\Phi(z)$  в степенной ряд по степеням  $z - z_1$ . Получим:

$$\Phi(z) = b_0 + b_1(z - z_1) + \dots + b_n(z - z_1)^n + \dots \quad (6.3:3)$$

где

$$b_n = \frac{\Phi^{(n)}(z_1)}{n!} = a_n + \frac{n+1}{1} a_{n+1}(z_1 - z_0) + \dots + \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} a_{n+2}(z_1 - z_0)^2 + \dots \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

По теореме Коши, найденный степенной ряд сходится в круге  $|z - z_1| < \Delta$ , где  $\Delta$  — расстояние от  $z_1$  до  $\Gamma$ , т. е.  $\Delta = R - |z_1 - z_0|$ . Итак, ряд (6.3:3) сходится внутри окружности  $\gamma$  с центром в точке  $z_1$ , касающейся окружности  $\Gamma$  в точке  $\xi$ . Вычислим

радиус сходимости ряда (6.3:3). Получим, по формуле Коши—Адамара:

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}}.$$

Если  $r$  совпадает с  $\Delta$ , то на окружности  $\gamma: |z - z_0| = \Delta$  должна лежать по крайней мере одна особая точка суммы ряда (6.3:3). Но ни одна точка  $\xi' \in \gamma$ , лежащая внутри  $K$ , не может быть особой для этого ряда, так как в окрестности точки  $\xi'$ , целиком принадлежащей  $K$ ,  $\varphi(z)$  является аналитической функцией, которая внутри  $\gamma$  совпадает с суммой ряда (6.3:3). Следовательно, особой является точка  $\xi$ . Очевидно, она должна быть особой точкой и для  $\varphi(z)$  — суммы ряда (6.3:1). Допуская противное, мы имели бы функцию  $\psi(z)$ , аналитическую в некоторой  $U_\xi$  окрестности точки  $\xi$ , которая в точках окрестности  $U_\xi$ , лежащих внутри  $K$ , совпадала бы с  $\varphi(z)$ . Тогда эта же функция совпадала бы и с суммой ряда (6.3:3) в точках окрестности  $U_\xi$ , лежащих внутри  $\gamma$ , т. е.  $\xi$  не была бы особой точкой для ряда (6.3:3).

Итак, если

$$\Delta = R - |z_1 - z_0| = r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}},$$

то точка  $\xi$  является особой точкой для  $\varphi(z)$ . Покажем, что в случае, когда  $\Delta \neq r$ , т. е.  $\Delta < r$ , точка  $\xi$  является правильной для  $\varphi(z)$ .

В самом деле, в этом случае сумма ряда (6.3:3) представляет функцию  $\psi(z)$ , аналитическую в окрестности  $U_\xi$  точки  $\xi$  и совпадающую с  $\varphi(z)$  в части круга  $U_\xi$ , лежащей внутри  $\gamma$  (рис. 62). Но  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  суть однозначные аналитические функции в луночке, являющейся общей частью кругов  $U_\xi$  и  $K$ . Из того, что они совпадают в заштрихованной на чертеже части луночки, следует, по теореме единственности, что  $\psi(z)$  совпадает с  $\varphi(z)$  и во всей луночке. Итак, точка  $\xi$  является в этом случае правильной для  $\varphi(z)$ .

Мы установили, таким образом, что точка  $\xi$  будет особой или правильной для  $\varphi(z)$  в зависимости от того, будет ли выполняться

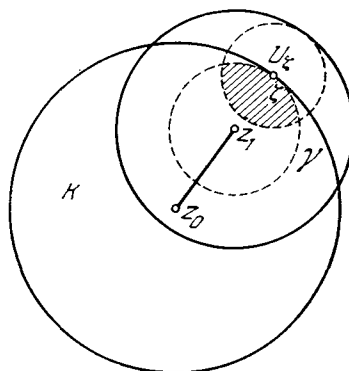


Рис. 62.

равенство

$$\Delta = R - |z_1 - z_0| = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}},$$

или неравенство

$$\Delta < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}}.$$

В виде иллюстрации полученного критерия докажем следующую теорему Прингсхейма:

Если коэффициенты ряда  $\sum_0^\infty a_n z^n$  с единичным кругом сходимости суть действительные неотрицательные числа  $a_n \geq 0$ , то точка  $z=1$  является особой для суммы ряда.

Для доказательства возьмем какую-либо точку  $z_1 = x$  в интервале  $(0,1)$ .

Если допустить, что точка  $z=1$  не будет особой для суммы ряда, то, по только что доказанному, должно выполняться неравенство

$$\Delta = R - |z_1 - z_0| = 1 - x < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(x)|}{n!}}} \quad (6.3:4)$$

Рассмотрим теперь произвольную точку  $\xi$  единичной окружности; пусть  $z_1$  — точка радиуса  $O\xi$ , находящаяся на окружности  $|z|=x$ , т. е.  $|z_1|=x$ . Тогда для  $z_1$  расстояние  $\Delta$  до единичной окружности будет также равным  $1-x$ . С другой стороны,

$$\begin{aligned} |\varphi^{(n)}(z_1)| &= \left| a_n + \frac{n+1}{1} a_{n+1} z_1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2} a_{n+2} z_1^2 + \dots \right| \leq \\ &\leq a_n + \frac{n+1}{1} a_{n+1} x + \frac{(n+1)(n+2)}{2!} a_{n+2} x^2 + \dots = \varphi^{(n)}(x) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}} \geq \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!}}}. \quad (6.3:5)$$

Поэтому для точки  $z_1$  имеем на основании неравенств (6.3:4) и (6.3:5):

$$\Delta < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\varphi^{(n)}(z_1)}{n!}}},$$

откуда вытекает, что для суммы степенного ряда  $\sum_0^{\infty} a_n z^n$  любая точка единичной окружности является правильной. Но это, как мы знаем, противоречит условию доказываемой теоремы (что единичная окружность является границей круга сходимости).

Итак, точка  $z=1$  должна быть особой точкой для суммы ряда  $\sum_0^{\infty} a_n z^n$  при условиях  $a_n \geq 0$  и  $R=1$ .

Из доказательства теоремы видно, что если вместо точки  $z=1$  рассматривать какую-либо другую точку  $\xi$  единичной окружности, то, для того чтобы  $\xi$  была особой точкой, достаточно потребовать, чтобы действительными неотрицательными были числа  $a_n \xi^n$ . Более того, достаточно потребовать, чтобы эти числа были действительными и неотрицательными, лишь начиная с некоторого  $n \geq n_0$ , так как, представляя  $\varphi(z)$  в виде

$$\varphi(z) = \sum_0^{n_0-1} a_h z^h + \sum_{n_0}^{\infty} a_h z^h,$$

немедленно убедимся в том, что точка  $\xi$  будет особой для  $\varphi(z)$  тогда и только тогда, когда она будет особой точкой для суммы ряда  $\sum_{n_0}^{\infty} a_h z^h$ .

Рассмотрим, например, ряд  $\sum_0^{\infty} \frac{z^{2^k}}{2^{k^2}}$ . Здесь коэффициенты  $a_n$  равны нулю, если  $n \neq 2^k$ , и равны  $\frac{1}{2^{k^2}}$ , если  $n = 2^k$ . Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2^k]{\frac{1}{2^{k^2}}} = 1,$$

откуда, по формуле Коши—Адамара, вытекает, что радиус сходимости ряда равен единице.

Поэтому, по доказанной теореме, точка  $z=1$  является особой точкой для суммы ряда  $\varphi(z)$ . Но из той же теоремы (в силу замечания, сделанного выше) следует, что и каждая точка  $\xi = \sqrt[n]{1}$ , где  $n$ —произвольное натуральное число, есть особая точка для  $\varphi(z)$ . Действительно, при  $k \geq n$  имеем:

$$\frac{\xi^{2^k}}{2^{k^2}} = \frac{(\xi^{2^n})^{2^{k-n}}}{2^{k^2}} = \frac{1}{2^{k^2}} > 0.$$

Итак, множество особых точек функции  $\varphi(z)$  всюду плотно на единичной окружности. Отсюда следует, что на этой окружности нет ни одной правильной точки элемента  $\varphi(z)$ , т. е. все точки  $\xi$ ,  $|\xi|=1$ , являются особыми.

Замечательно, что это обстоятельство не мешает данному степенному ряду сходиться абсолютно и равномерно в замкнутом единичном круге, а его сумме  $\varphi(z)$  быть бесконечно дифференцируемой функцией на множестве  $|z| \leq 1$  (в частности, во всех особых точках). В самом деле, при  $|z| \leq 1$  имеем неравенства:

$$\left| \frac{z^{2^k}}{2^{k^2}} \right| \leq \frac{1}{2^{k^2}},$$

и так как ряд  $\sum_0^\infty \frac{1}{2^{k^2}}$  сходится, то и ряд  $\sum_0^\infty \frac{z^{2^k}}{2^{k^2}}$  абсолютно

и равномерно сходится в замкнутом круге, и, следовательно, его сумма  $\varphi(z)$  является непрерывной в замкнутом круге. Далее, если данный ряд продифференцировать почленно любое число  $m$  раз, то получим ряд:

$$\sum_0^\infty \frac{2^k (2^k - 1) \dots (2^k - m + 1)}{2^{k^2}} z^{2^k - m},$$

модули членов которого при  $|z| \leq 1$  удовлетворяют неравенствам

$$\left| \frac{2^k (2^k - 1) \dots (2^k - m + 1)}{2^{k^2}} z^{2^k - m} \right| \leq \frac{2^{km}}{2^{k^2}} = \frac{1}{2^{k(k-m)}} < \frac{1}{2^k}$$

при  $k > m$ . Следовательно, ряды, получаемые почленным дифферен-

цированием степенного ряда  $\sum_0^\infty \frac{z^{2^k}}{2^{k^2}}$ , равномерно сходятся в зам-

кнутом круге  $|z| \leq 1$ . Отсюда по теореме, известной для функций действительного переменного и без всяких изменений переносимой на функции комплексного переменного (определенных, например, в какой-либо выпуклой области), вытекает, что эти ряды представляют производные  $\varphi^{(m)}(z)$ . Итак,  $\varphi(z)$  есть функция, непрерывная и бесконечно дифференцируемая в замкнутом круге  $|z| \leq 1$  и аналитическая внутри круга, для которой каждая точка единичной окружности является особой точкой.

Этот поучительный пример показывает, что наличие особых точек аналитической функции на границе рассматриваемой области (круга) может в некоторых случаях не сказываться внешним образом на поведении функции вблизи особой точки, точнее говоря, не обнаруживаться нарушением непрерывности функции или ее

производных в данной граничной точке  $\zeta$ . Необходимо рассмотрение всех производных  $\varphi(z)$  в некоторой точке  $z_1$  данной области для того, чтобы из сравнения величины  $\left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}} \right]^{-1}$  с расстоянием  $\Delta$  от точки  $z_1$  до точки  $\zeta$  решить, будет ли точка  $\zeta$  особой или правильной.

Предложения, установленные на стр. 322, часто позволяют находить радиус сходимости тейлоровского разложения аналитической функции  $f(z)$ , не прибегая к вычислению коэффициентов ряда, т. е. чисел  $\frac{f^{(n)}(z)}{n!}$ . Все сводится при этом к нахождению особых точек элементов. Нужно иметь в виду при этом, что для данной функции  $f(z)$ , аналитической в некоторой области  $G$ , существует бесконечное множество различных элементов, соответственно бесконечному множеству кругов с различными центрами, принадлежащих области. Таким образом, приходится иметь дело с особыми точками различных элементов одной и той же аналитической функции, и может случиться, что точка, являющаяся особой для одних элементов, оказывается правильной для других. Эти обстоятельства мы выясним сейчас на простых примерах. Предварительно заметим, что в случае, когда аналитическая функция  $f(z)$  задается формулой, содержащей конечное число элементарных функций, возможные особые точки ее элементов легко обнаруживаются среди точек разрыва этой функции, например точек, в которых она обращается в бесконечность, а также среди точек разветвления функции  $f(z)$ .

**Пример 1.** Пусть  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ . Эта функция однозначна и аналитична во всей плоскости, за исключением точек  $z = \pm i$ , в которых она обращается в  $\infty$ . Пусть  $z_0$  — произвольная точка, отличная от  $\pm i$ ; опишем из нее, как из центра, окружность  $\gamma: |z - z_0| = \rho$ , проходящую через ближайшую к  $z_0$  точку  $+i$  или  $-i$ . Пусть для определенности этой ближайшей точкой будет  $i$ . Внутри  $\gamma$  функция  $f(z)$  является аналитической и, следовательно, представляет некоторый элемент. Убедимся, что точка  $i$  будет особой точкой элемента. В самом деле, допуская противное, мы должны иметь окрестность  $U$  точки  $i$  и в ней аналитическую функцию  $\psi(z)$ , совпадающую с  $f(z)$  в части окрестности  $U$ , лежащей внутри  $\gamma$  (эту часть мы обозначим  $d$ ). Тогда в точке  $i$  должен существовать конечный предел:

$$\psi(i) = \lim_{\substack{z \rightarrow i \\ z \in d}} \psi(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow i \\ z \in d}} f(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow i \\ z \in d}} \frac{1}{1+z^2},$$

что, очевидно, невозможно.

Итак, на  $\gamma$  лежит особая точка элемента  $f(z)$ , и, следовательно, радиус сходимости  $R$  тейлоровского разложения для  $f(z)$  по

степеням  $z - z_0$  совпадает с радиусом  $\rho$  окружности  $\gamma$ , т. е. с расстоянием от  $z_0$  до ближайшей к ней из двух точек  $\pm i$ .

Само тейлоровское разложение в данном случае проще всего получить, разлагая  $\frac{1}{1+z^2}$  на простейшие дроби и затем используя геометрический ряд. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z^2} &= -\frac{1}{2i} \left( \frac{1}{i-z} + \frac{1}{i+z} \right) = \\ &= -\frac{1}{2i} \left( \frac{1}{i-z_0} \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{i-z_0}} + \frac{1}{i+z_0} \frac{1}{1+\frac{z-z_0}{i+z_0}} \right) \end{aligned}$$

Так как  $\left| \frac{z-z_0}{i-z_0} \right| < 1$  и  $\left| \frac{z-z_0}{i+z_0} \right| < 1$  (точка  $z$  лежит внутри  $\gamma$ , а точки  $\pm i$  лежат либо обе на  $\gamma$ , либо одна из них лежит на  $\gamma$ , а другая — во внешности  $\gamma$ ), то каждую из дробей  $\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{i-z_0}}$ ,

$\frac{1}{1+\frac{z-z_0}{i+z_0}}$  можно представить геометрическим рядом со знаменателем  $\frac{z-z_0}{i-z_0}$  или  $\frac{z-z_0}{i+z_0}$ . Получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z^2} &= -\frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{i-z_0} \sum_0^{\infty} \left( \frac{z-z_0}{i-z_0} \right)^n + \frac{1}{i+z_0} \sum_0^{\infty} (-1)^n \left( \frac{z-z_0}{i+z_0} \right)^n \right] = \\ &= \frac{1}{2i} \sum_0^{\infty} (-1)^{n+1} [(z_0+i)^{-n-1} - (z_0-i)^{-n-1}] (z-z_0)^n. \end{aligned}$$

Это и есть разложение, радиус сходимости  $R$  которого мы выше определили. В частности, для  $z_0 = 1$  получаем:  $R = \rho = \sqrt{2}$ , и разложение принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z^2} &= \sum_0^{\infty} (-1)^n 2^{-\frac{n+1}{2}} \sin(n+1) \frac{\pi}{4} (z-1)^n = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (z-1) + \frac{1}{4} (z-1)^2 - \frac{1}{8} (z-1)^4 + \end{aligned}$$

**Пример 2.** Пусть  $F(z) = \frac{1}{\operatorname{Ln} z}$ . Рассмотрим область  $G$ , границей которой служит неотрицательная часть действительной оси  $\Lambda: x \geq 0, y = 0$ . В ней многозначная функция  $F(z)$  распадается на однозначные аналитические ветви, из которых мы

рассмотрим одну ветвь:

$$f(z) = \frac{1}{\operatorname{Ln}_1 z} = \frac{1}{\ln |z| + i \operatorname{Arg}_1 z},$$

где  $\operatorname{Arg}_1 z$  удовлетворяет неравенствам

$$0 < \operatorname{Arg}_1 z < 2\pi.$$

Из формулы, определяющей  $F(z)$  (или  $f(z)$ ), следует, что особые точки элементов функции  $F(z)$  могут совпадать либо с  $z = 0$  (точка разветвления для  $\operatorname{Ln} z$  и  $F(z)$ ), либо с точкой  $z = 1$ , в которой обращается в нуль одно из значений логарифма. Положим для определенности  $z_0 = 1 + i$ . Тогда ближайшей к  $z_0$  из двух точек 0 и 1 будет, очевидно, точка 1. Описав из  $z_0$ , как из центра, окружность  $\gamma$  радиусом  $\rho$ , равным 1 (рис. 63), найдем, что  $f(z)$  внутри  $\gamma$  определяет некоторый элемент  $\varphi(z)$ . Так как при стремлении точки  $z$  (лежащей внутри  $\gamma$ ) к точке 1, лежащей на  $\gamma$ ,  $\ln |z|$  стремится к 0 и  $\operatorname{Arg}_1 z$  также стремится к 0, то значения элемента  $\varphi(z)$  стремятся к  $\infty$ , откуда, рассуждая как и в предыдущем примере, заключаем, что точка  $z = 1$  является особой точкой для рассматриваемого элемента. Поэтому радиус сходимости  $R$  тейлоровского разложения для  $\varphi(z)$  (разложение берется по степеням  $z - (1 + i)$ ) равен 1.

Рассмотрим, далее, точку  $z'_0 = 1 - i$ , лежащую в нижней полуплоскости. Для нее ближайшей из двух точек 0 и 1 будет снова точка 1. Описав из  $z'_0$ , как из центра, окружность  $\gamma'$  радиусом 1, будем иметь внутри нее определенный элемент функции  $f(z)$ , который обозначим  $\psi(z)$ . Покажем, что все точки окружности  $\gamma'$  являются правильными точками этого элемента. С этой целью рассмотрим круг  $K$ :  $|z - (1 - i)| < \sqrt{2}$ , граница которого содержит точку 0. Внутри круга  $K$  функция  $\operatorname{Ln} z$  распадается на однозначные аналитические ветви, одна из которых совпадает с  $\operatorname{Ln}_1 z$  внутри

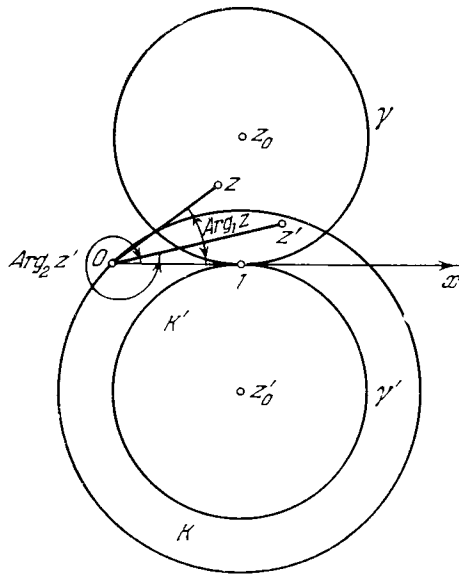


Рис. 63.



окружности  $\gamma'$  (достаточно выбрать однозначную ветвь  $\text{Ln } z$ , значение которой совпадает с  $\text{Ln}_1 z$  в точке  $z'_0$ ). Обозначим эту однозначную ветвь  $\text{Ln } z$  через  $\text{Ln}_2 z = \text{Ln } |z| + i \text{Arg}_2 z$ . Так как в точке  $z'_0$  значение  $\text{Arg}_2 z$  совпадает со значением  $\text{Arg}_1 z$ , равным  $\frac{7\pi}{4}$ , а внутри круга  $K$  значения  $\text{Arg}_2 z$  отклоняются от значения в центре этого круга менее чем на  $\frac{\pi}{2}$  по абсолютной величине, то  $\text{Arg}_2 z$  во всех точках круга  $K$  удовлетворяет неравенствам

$$\frac{5\pi}{4} < \text{Arg}_2 z < \frac{9\pi}{4}.$$

Отсюда следует, что  $\text{Ln}_2 z$  не обращается в нуль в круге  $K$ . Поэтому функция  $\frac{1}{\text{Ln}_2 z}$  является аналитической в этом круге. Но она совпадает с  $\frac{1}{\text{Ln}_1 z}$  в круге  $K: |z - (1 - i)| < 1$ , т. е. совпадает с элементом  $\psi(z)$  функции  $f(z)$ . Отсюда и следует, что каждая точка окружности  $\gamma'$  является правильной для  $\psi(z)$ . В самом деле, для каждой точки  $\xi \in \gamma'$  существует окрестность  $U_\xi$  и в ней аналитическая функция  $\frac{1}{\text{Ln}_2 z}$ , совпадающая с  $\psi(z)$  в части, общей для  $U_\xi$  и  $K'$ . В частности, точка  $z = 1$  будет также правильной точкой для  $\psi(z)$ . На этом примере мы убеждаемся, что одна и та же точка  $z = 1$  является особой точкой для одного элемента аналитической функции  $f(z)$  (для  $\varphi(z)$ ) и правильной точкой для другого элемента этой функции (для  $\psi(z)$ ).

Из того, что все точки окружности  $\gamma'$  являются правильными для  $\psi(z)$ , вытекает, что радиус сходимости тейлоровского разложения этого элемента по степеням  $z - (1 - i)$  больше, чем радиус окружности  $\gamma'$ , т. е. больше 1. Но в круге  $K'$   $\psi(z) = \text{Ln}_2 z$ ; поэтому тейлоровские разложения функций  $\psi(z)$  и  $\text{Ln}_2 z$  совпадают. Так как  $\text{Ln}_2 z$  является функцией аналитической в круге  $|z - (1 - i)| < \sqrt{2}$ , то радиус сходимости  $R'$  этого разложения не может быть меньше, чем  $\sqrt{2}$ . Чтобы показать, что он точно равен  $\sqrt{2}$ , достаточно убедиться в том, что по крайней мере одна из точек окружности  $\Gamma: |z - (1 - i)| = \sqrt{2}$  является особой точкой для  $\frac{1}{\text{Ln}_2 z}$ . Такой точкой является начало координат. Действительно,  $\left(\frac{1}{\text{Ln}_2 z}\right)' = -\frac{1}{z(\text{Ln}_2 z)^2} \rightarrow \infty$ , когда  $z \rightarrow 0$ , оставаясь внутри  $\Gamma$ . Отсюда и следует, что не существует никакой функции  $\chi(z)$ , аналитической в окрестности  $U$  начала координат, которая бы в точках, общих для  $U$  и  $K$ , совпадала с  $\frac{1}{\text{Ln}_2 z}$  (если допустить существование такой

функции, то нужно допустить также существование конечного предела:

$$\chi'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \chi'(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{1}{L p_2 z} \right)',$$

что, как мы заметили, невозможно).

Предлагаем читателю убедиться в том, что в нашем примере для каждой точки  $z_0$  области  $G$ , лежащей в верхней полуплоскости, радиус сходимости тейлоровского разложения функции  $f(z)$  по степеням  $z - z_0$  равен расстоянию от  $z_0$  до ближайшей к ней точки из пары 0 и 1, тогда как для точек  $z'_0$ , лежащих в нижней полуплоскости, расстояние от  $z'_0$  до 1 не играет никакой роли при определении радиуса сходимости соответствующего ряда; этот радиус всегда совпадает здесь с расстоянием от  $z'_0$  до точки 0.

### § 7. Приемы разложения функций в степенной ряд.

#### Поведение степенного ряда на границе круга сходимости

7.1. В этом пункте мы займемся рассмотрением некоторых приемов разложения аналитических функций в степенные ряды. Принципиально вопрос о нахождении тейлоровского разложения решается формулами для вычисления коэффициентов ряда

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_n)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Но непосредственное проведение выкладок, опирающихся на вычисление последовательных производных функций  $f(z)$ , нередко может оказаться весьма громоздким или трудно выполнимым. Однако во многих практически важных случаях можно получать тейлоровские разложения, выводя их определенным образом из других, ранее известных разложений.

Допустим, что функция  $f(z)$  представляется в виде ряда аналитических функций, равномерно сходящегося внутри некоторой окрестности  $|z - z_0| < \rho$  точки  $z_0$ :

$$f(z) = \sum_1^{\infty} f_n(z). \quad (7.1:1)$$

Тогда, в силу теоремы Вейерштрасса, будем иметь:

$$f^{(k)}(z) = \sum_1^{\infty} f_n^{(k)}(z)$$

и

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) = \sum_1^{\infty} \frac{f_n^{(k)}(z_0)}{k!}. \quad (7.1:2)$$

Здесь  $\frac{1}{k!} f_n^{(k)}(z_0)$  представляет коэффициент при  $(z - z_0)^k$  в тейлоровском разложении функции  $f_n(z)$ , а  $\frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$  — коэффициент при  $(z - z_0)^k$  в тейлоровском разложении  $f(z)$ .

Следовательно, тейлоровские коэффициенты суммы равномерно сходящегося ряда аналитических функций  $\sum_1^\infty f_n(z)$  получаются путем сложения одноименных тейлоровских коэффициентов (т. е. коэффициентов при той же степени  $(z - z_0)^k$ ), взятых из разложений каждой из функций  $f_n(z)$ .

Приведем два примера. Рассмотрим сначала сумму ряда

$$F(z) = \sum_1^\infty \frac{z^n}{1-z^n}.$$

Члены этого ряда являются функциями от  $z$ , аналитическими в единичном круге, причем ряд  $\sum_1^\infty \frac{z^n}{1-z^n}$  сходится равномерно внутри единичного круга. В самом деле, если  $E$  — замкнутое множество точек этого круга и  $\delta > 0$  — расстояние от  $E$  до единичной окружности, то для любой точки  $z \in E$  имеем:  $|z| \leq 1 - \delta = \rho < 1$ ; следовательно,  $\left| \frac{z^n}{1-z^n} \right| \leq \frac{\rho^n}{1-\rho^n} \leq \frac{\rho^n}{1-\rho}$ , и так как ряд  $\sum_1^\infty \frac{\rho^n}{1-\rho}$  сходится (это — геометрическая прогрессия со знаменателем  $\rho$ ), то данный ряд сходится равномерно на  $E$ , т. е. равномерно сходится внутри единичного круга. Для определения тейлоровского коэффициента функции  $F(z)$  при  $z^k$ , по предыдущему, нужно сложить тейлоровские коэффициенты при  $z^k$  во всех тейлоровских разложениях функции

$$\frac{z^n}{1-z^n} = z^n + z^{2n} + z^{3n} + \dots$$

Коэффициент при  $z^k$  в таком разложении равен 0, если  $k$  не делится на  $n$ , и равен 1, если  $k$  делится на  $n$ . Следовательно, искомый коэффициент при  $z^k$  в разложении  $F(z)$  равен сумме единиц в количестве, равном числу всех натуральных делителей числа  $k$ . Обозначая это число через  $\tau(k)$  ( $\tau(1) = 1$ ,  $\tau(2) = 2$ ,  $\tau(3) = 2$ ,  $\tau(4) = 3$ ,  $\tau(5) = 2$ , ...), будем иметь:

$$F(z) = \sum_1^\infty \tau(k) z^k.$$

Это и есть искомое разложение. Так как  $F(z)$  является функцией, аналитической в единичном круге (по теореме Вейерштрасса), то найденное разложение сходится в единичном круге.

Заметим еще, что при  $z = 1$  оно расходится, так как ряд принимает вид  $\sum_1^{\infty} \tau(k)$ , где все члены — натуральные числа. Отсюда следует, что радиус сходимости ряда равен 1.

Возьмем еще пример ряда

$$\Phi(z) = \sum_1^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}$$

Функция  $\frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}$  является аналитической всюду, кроме точек  $z = \pm n\pi$ , где она обращается в  $\infty$ . Следовательно, каждая из этих функций является аналитической в круге  $|z| < \pi$ . Покажем, что данный ряд сходится равномерно внутри этого круга. В самом деле, если  $|z| \leq \rho$ , где  $\rho < \pi$ , то

$$\left| \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2} \right| \leq \frac{2\rho}{n^2\pi^2 - \rho^2} = \frac{2\rho}{n^2\pi^2} \frac{1}{1 - \frac{\rho^2}{n^2\pi^2}} \leq \frac{2\rho}{n^2\pi^2} \frac{1}{1 - \frac{\rho^2}{\pi^2}},$$

и так как в правой части получился общий член сходящегося ряда (ряд  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$  сходится), то ряд  $\sum_1^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}$  равномерно сходится внутри круга  $|z| < \pi$ . Следовательно, коэффициент при  $z^k$  в тейлоровском разложении функции  $\Phi(z)$  равен сумме коэффициентов при той же степени  $z$  в тейлоровских разложениях каждой из функций  $\frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}$ . Последнее разложение имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2} &= -\frac{2z}{n^2\pi^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{n\pi}\right)^2} = \\ &= -\frac{2z}{n^2\pi^2} - \frac{2z^3}{n^4\pi^4} - \frac{2z^5}{n^6\pi^6} - \dots - \frac{2z^{2q-1}}{n^{2q}\pi^{2q}} - \end{aligned}$$

здесь коэффициент при  $z^k$  равен нулю, если  $k$  четное, и равен  $-\frac{2}{n^{2q}\pi^{2q}}$ , если  $k = 2q - 1$  (нечетное). Поэтому коэффициент при  $z^k$  в разложении функции  $\Phi(z)$  равен нулю, если  $k$  — четное число, и равен  $-2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^{2q}}$ , если  $k$  — нечетное число:  $k = 2q - 1$ .

Итак,

$$\Phi(z) = -2 \sum_{q=1}^{\infty} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi n)^{2q}} \right] z^{2q-1}.$$

Это и есть искомый степенной ряд. Он должен сходиться в круге  $|z| < \pi$ , так как функция  $\Phi(z)$  является аналитической в этом круге. В точке  $z = \pi$  для каждого члена ряда получаем неравенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi n)^{2q}} \pi^{2q-1} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2q}} > \frac{1}{\pi},$$

откуда следует, что необходимое условие сходимости ряда не выполнено и ряд расходится. Итак, радиус сходимости полученного ряда равен  $\pi$ .

Пусть  $f(z)$  представляется в виде

$$f(z) = F[\varphi(z)], \quad (7.1:3)$$

где

$$\varphi(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_n z^n + \dots \quad |z| < r \quad (7.1:4)$$

и

$$F(w) = A_0 + A_1(w - \alpha_0) + A_2(w - \alpha_0)^2 + \dots + A_m(w - \alpha_0)^m + \dots \\ |w - \alpha_0| < R, \quad (7.1:5)$$

причем коэффициенты степенных рядов для  $\varphi(z)$  и  $F(w)$  известны. Так как при наших предположениях  $\varphi(z) \rightarrow \alpha_0$  при  $z \rightarrow 0$ , то можно указать такое число  $\rho$ ,  $0 < \rho \leq r$ , что модуль  $|\varphi(z) - \alpha_0|$  будет меньше, чем  $R$ , при  $|z| < \rho$ . При этом условии точка  $w = \varphi(z)$  принадлежит кругу сходимости ряда (7.1:5), и, следовательно, функция  $f(z) = F(w) = F[\varphi(z)]$  является аналитической при  $|z| < \rho$ . Отсюда следует, что должно существовать разложение функции  $f(z)$  в ряд по степеням  $z$ , сходящееся при  $|z| < \rho$ . Задача заключается в вычислении коэффициентов этого ряда.

Рассмотрим разложение

$$f(z) = F[\varphi(z)] = \sum_0^{\infty} A_n [\varphi(z) - \alpha_0]^n, \quad (7.1:6)$$

относительно которого мы уже знаем, что оно будет сходящимся при  $|z| < \rho$ . Для того чтобы можно было сослаться на равномерную сходимость этого ряда, заменим  $\rho$  не большим числом  $\rho'$ ,  $0 < \rho' \leq \rho$ , так, чтобы в круге  $|z| < \rho'$  выполнялось неравенство

$$|\varphi(z) - \alpha_0| < \frac{R}{2}.$$

Так как ряд (7.1:5) равномерно сходится при  $|\omega - \alpha_0| < \frac{R}{2}$ , то и ряд (7.1:6) равномерно сходится при  $|z| < \rho'$ . Следовательно, коэффициент при  $z^h$  в тейлоровском разложении функции  $f(z)$  можно получить, взяв сумму одноименных коэффициентов в разложении каждой из функций  $A_n [\varphi(z) - \alpha_0]^n$ .

Последние разложения получаются путем  $n$ -кратного умножения ряда для  $\varphi(z) - \alpha_0$  самого на себя. В данном случае почленное умножение рядов законно, так как мы имеем дело со степенным рядом в круге его сходимости, где он абсолютно сходится.

В итоге приходим к следующему предложению: для того чтобы получить тейлоровское разложение функции  $f(z) = F[\varphi(z)]$ , где  $\varphi(z)$  — функция, аналитическая в окрестности начала координат, а  $F(\omega)$  — функция, аналитическая в окрестности точки  $\alpha_0 = \varphi(0)$ , следует подставить ряд для  $\omega = \varphi(z)$  (7.1:4) в ряд для  $F(\omega)$  (7.1:5), выполнить необходимые возведения в степень, т. е. умножения рядов, и, наконец, сложить коэффициенты членов, содержащих одинаковые степени  $z$ . Полученный ряд и даст искомое тейлоровское разложение функции  $f(z)$ . Он будет наверное сходиться в круге  $|z| < \rho$ , где  $\rho$  выбирается так, чтобы при  $|z| < \rho$  было  $|\varphi(z) - \alpha_0| < R$ .

Изложенный прием получения степенных разложений называется подстановкой ряда в ряд. Иллюстрируем его двумя примерами.

Пусть

$$f(z) = \sqrt{\cos z},$$

где рассматривается та однозначная в окрестности начала координат ветвь этой двузначной функции, которая принимает значение 1 при  $z = 0$ . Чтобы применить к этому примеру предыдущее правило, представим  $f(z)$  в виде

$$f(z) = [1 - (1 - \cos z)]^{\frac{1}{2}}.$$

В нашем случае

$$\omega = \varphi(z) = 1 - \cos z = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \dots \quad |z| < \infty,$$

$$F(\omega) = (1 - \omega)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{8}\omega^2 - \frac{1}{16}\omega^3 - \frac{5}{128}\omega^4 - \dots, \quad |\omega| < 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f(z) = F[\varphi(z)] = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \frac{z^6}{720} - \dots \right) - \\ - \frac{1}{8} \left( \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \dots \right)^2 - \frac{1}{16} \left( \frac{z^2}{2} - \dots \right)^3 - \dots \end{aligned}$$

Ограничимся вычислением коэффициентов при первых степенях, до шестой включительно. Тогда, очевидно, ненаписанные члены можно не рассматривать, так как все они будут участвовать лишь в образовании членов ряда, содержащих степени  $z$  выше шестой. Имеем:

$$\left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \dots\right)^2 = \frac{z^4}{4} - \frac{z^6}{24} + \dots, \quad \left(\frac{z^2}{2} - \dots\right)^3 = \frac{z^6}{8} -$$

следовательно,

$$f(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \frac{z^6}{720} - \dots \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{z^4}{4} - \frac{z^6}{24} + \dots \right) - \\ - \frac{1}{16} \left( \frac{z^6}{8} - \dots \right) + \dots = 1 - \frac{z^2}{4} - \frac{z^4}{96} - \frac{19z^6}{5760} -$$

Так как  $f(z) = \sqrt{\cos z}$  является функцией, аналитической в круге  $|z| < \frac{\pi}{2}$  (она обладает в нем производной  $-\frac{\sin z}{2\sqrt{\cos z}}$ ), то ряд для  $f(z)$  должен сходиться при  $|z| < \frac{\pi}{2}$ . При  $z = \frac{\pi}{2}$  получаем, как легко проверить, особую точку функции  $f(z)$ , откуда следует, что радиус сходимости ряда равен  $\frac{\pi}{2}$ .

Рассмотрим еще

$$f(z) = \exp \frac{1}{1-z}$$

Представляя  $f(z)$  в виде  $f(z) = e \exp \frac{z}{1-z}$ , положим:

$$w = \varphi(z) = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \dots \quad (|z| < 1) \quad \text{и} \quad F(w) = e^{w+1} = \\ = e \left( 1 + \frac{w}{1!} + \frac{w^2}{2!} + \dots \right), \quad |w| < \infty.$$

Подстановка ряда в ряд дает:

$$f(z) = e \left[ 1 + (z + z^2 + z^3 + \dots) + \frac{(z + z^2 + z^3 + \dots)^2}{2!} + \right. \\ \left. + \frac{(z + z^2 + z^3 + \dots)^3}{3!} + \dots \right]$$

В данном примере, где  $\varphi(z) = \frac{z}{1-z}$ , можно избежать непосредственного выполнения умножений рядов, замечая, что при  $|z| < 1$ :

$$(z + z^2 + z^3 + \dots)^k = \left( \frac{z}{1-z} \right)^k = z^k (1-z)^{-k} = \\ = z^k \cdot \left[ 1 + \frac{k}{1} z + \frac{k(k+1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{k \dots (k+n-1)}{n!} z^n + \dots \right]$$

и так как

$$\frac{k(k+1)\dots(k+n-1)}{n!} = \frac{(k+n-1)(k+n-2)\dots(n+1)}{(k-1)!} = \binom{k+n-1}{k-1},$$

то, следовательно,

$$(z + z^2 + z^3 + \dots)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{k-1} z^{n+k}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f(z) &= e \left[ 1 + \frac{1}{1!} \sum_0^{\infty} z^{n+1} + \frac{1}{2!} \sum_0^{\infty} (n+1) z^{n+2} + \right. \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_0^{\infty} \frac{(n+2)(n+3)}{2!} z^{n+3} + \dots + \frac{1}{k!} \sum_0^{\infty} \binom{k+n-1}{k-1} z^{n+k} + \dots \left. \right] = \\ &= e \left\{ 1 + z + \left( \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \right) z^2 + \left( \frac{1}{1!} + 2 \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \right) z^3 + \right. \\ &+ \left( \frac{1}{1!} + 3 \frac{1}{2!} + 3 \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right) z^4 + \dots + \left[ \frac{1}{1!} + \binom{n-1}{1} \frac{1}{2!} + \right. \\ &\left. + \binom{n-1}{2} \frac{1}{3!} + \dots + \binom{n-1}{n-2} \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \right] z^n + \dots \left. \right\} \end{aligned}$$

Это и есть искомое разложение. Так как функция  $f(z)$  является аналитической в круге  $|z| < 1$ , то полученный ряд сходится в единичном круге. Легко видеть, что точка  $z = 1$  особая для  $f(z)$ . Действительно, когда  $z$  стремится к 1, принимая положительные значения, меньшие единицы, то  $\exp \frac{1}{1-z}$  стремится к  $\infty$ . Отсюда следует, что радиус сходимости полученного ряда равен единице.

7.2. Перейдем теперь к вопросу о делении степенных рядов.

Пусть

$$a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_n(z-a)^n + \dots \quad (7.2:1)$$

и

$$b_0 + b_1(z-a) + \dots + b_n(z-a)^n + \dots \quad (7.2:2)$$

— два степенных ряда с положительными радиусами сходимости  $r$  и  $\rho$ , причем свободный член  $b_0$  второго ряда отличен от нуля. Обозначим  $\sigma = \min(r, \rho)$  (если  $r = \rho$ , то  $\sigma = r = \rho$ ). Тогда в круге  $|z-a| < \sigma$  оба ряда сходятся. Если в этом круге содержатся нули суммы ряда (7.2:2), то возьмем новый круг меньшего радиуса, внутри которого сумма ряда (7.2:2) не обращается в нуль. (Такой круг существует, так как точка  $a$  не является нулем для суммы



ряда (7.2:2) в силу условия  $b_0 \neq 0$ .) Итак, существует круг  $|z - a| < R$ , в котором оба ряда сходятся, причем сумма второго ряда не имеет нулей. Внутри этого круга отношение

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_n(z-a)^n + \dots}{b_0 + b_1(z-a) + \dots + b_n(z-a)^n + \dots} \quad (7.2:3)$$

представляет аналитическую функцию, как это следует из правила дифференцирования частного. Поэтому существует степенной ряд

$$c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots \quad (7.2:4)$$

представляющий  $f(z)$  внутри круга  $|z - a| < R$ . Ряд этот мы можем называть частным рядом (7.2:1) (делимого) и (7.2:2) (делителя), а самый процесс его отыскания — делением рядов.

Произведем деление рядов сначала по методу неопределенных коэффициентов. Для этого перепишем соотношение (7.2:3) в виде

$$[c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots] \cdot [b_0 + b_1(z-a) + \dots + b_n(z-a)^n + \dots] = a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_n(z-a)^n + \dots$$

и заметим, что наши степенные ряды, сходящиеся внутри круга  $|z - a| < R$ , должны сходиться здесь абсолютно. Поэтому ряды, стоящие в правой части последнего равенства, можно почленно перемножать. Выполняя перемножение, получим:

$$\begin{aligned} & c_0 b_0 + (c_0 b_1 + c_1 b_0)(z-a) + (c_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0)(z-a)^2 + \\ & + \dots + (c_0 b_n + c_1 b_{n-1} + \dots + c_n b_0)(z-a)^n + \dots = \\ & = a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_n(z-a)^n + \dots \end{aligned} \quad (7.2:5)$$

Из того, что суммы степенных рядов, стоящих слева и справа, совпадают в круге  $|z - a| < R$ , следует, по теореме единственности для степенных рядов, что коэффициенты обоих рядов равны. Получаем уравнения:

$$\left. \begin{aligned} c_0 b_0 &= a_0, \\ c_0 b_1 + c_1 b_0 &= a_1, \\ c_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0 &= a_2, \\ c_0 b_n + c_1 b_{n-1} + c_2 b_{n-2} + \dots + c_n b_0 &= a_n, \end{aligned} \right\} \quad (7.2:6)$$

Это — бесконечная система линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ . Особенность этой системы, крайне упрощающая ее решение, состоит в том, что для любого  $n$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) первые  $n + 1$  уравнений содер-

жат первые  $n + 1$  неизвестных. Определяя  $c_0$  из первого уравнения  $c_0 = \frac{a_0}{b_0}$  ( $b_0 \neq 0$ , то предположению) и подставляя во второе, получим уравнение  $\frac{a_0}{b_0} b_1 + c_1 b_0 = a_1$ , откуда

$$c_1 = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0^2}$$

Пусть, вообще, мы нашли значения первых  $n$  коэффициентов  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ . Подставляя их в  $n + 1$  уравнение, получим:

$$c_n = \frac{a_n - c_0 b_n - c_1 b_{n-1} - \dots - c_{n-1} b_1}{b_0^{n+1}}. \quad (7.2:7)$$

Таким образом, можно определить коэффициент с любым наперед заданным номером. Легко получить выражение для  $c_n$  через коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  и  $b_0, b_1, \dots, b_n$  в виде определителя. Определитель системы, образованной первыми  $n + 1$  уравнениями, равен

$$\begin{vmatrix} b_0 & 0 & 0 \\ b_1 b_0 & 0 & 0 \\ b_2 b_1 & b_0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n b_{n-1} b_{n-2} & b_0 & 0 \end{vmatrix} = b_0^{n+1} \neq 0,$$

следовательно,

$$c_n = \frac{1}{b_0^{n+1}} \begin{vmatrix} b_0 & 0 & a_0 \\ b_1 b_0 & 0 & a_1 \\ b_2 b_1 & b_0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n b_{n-1} b_{n-2} & b_0 & a_n \end{vmatrix} \quad (7.2:8)$$

Эта формула полностью решает задачу деления рядов.

Покажем, что частное (7.2:4) двух степенных рядов может быть получено путем деления ряда (7.2:1) на ряд (7.2:2), выполняемого по тем же правилам, как если бы ряды (7.2:1) и (7.2:2) были многочленами, расположенными по возрастающим степеням  $z - a$ . Для доказательства начнем производить указанную операцию. Получим:

$$\begin{array}{l} a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_n(z-a)^n + \dots \mid b_0 + b_1(z-a) + \dots + b_n(z-a)^n + \dots \\ a_0 + \frac{a_0}{b_0} b_1(z-a) + \dots + \frac{a_0}{b_0} b_n(z-a)^n + \dots \quad \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0^2} (z-a) + \dots \\ \hline \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0} (z-a) + \dots + \frac{a_n b_0 - a_0 b_n}{b_0} (z-a)^n + \dots \\ \hline \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0} (z-a) + \dots + \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0^2} b_n (z-a)^n + \dots \end{array}$$

Первые два коэффициента получаемого частного совпадают со значениями  $c_0$  и  $c_1$ , найденными выше из уравнений (7.2:6). Допустим, что мы получили, таким образом, первые  $n$  коэффициентов частного, совпадающие со значениями  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ , найденными из системы (7.2:6). Тогда будем иметь:

$$\frac{a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots + a_n(z-a)^n + \dots}{b_0c_0 + b_1c_0(z-a) + b_2c_0(z-a)^2 + \dots + b_nc_0(z-a)^n + \dots} \cdot \frac{b_0 + b_1(z-a) + \dots + b_n(z-a)^n + \dots}{c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_{n-1}(z-a)^{n-1} + \dots} =$$

$$\frac{(a_1 - b_1c_0)(z-a) + (a_2 - b_2c_0)(z-a)^2 + \dots + (a_n - b_nc_0)(z-a)^n + \dots}{(a_2 - b_2c_0 - b_1c_1)(z-a)^2 + \dots + (a_n - b_nc_0 - b_{n-1}c_1)(z-a)^n + \dots} \cdot$$

$$\frac{b_0c_1(z-a) + b_1c_1(z-a)^2 + \dots + b_{n-1}c_1(z-a)^n + \dots}{(a_n - b_nc_0 - b_{n-1}c_1 - \dots - b_1c_{n-1})(z-a)^n + \dots}$$

Первый член  $n$ -го остатка есть  $(a_n - b_nc_0 - b_{n-1}c_1 - \dots - b_1c_{n-1}) \times (z-a)^n$ , поэтому следующий за  $c_{n-1}(z-a)^{n-1}$  член частного равен

$$\frac{a_n - b_nc_0 - b_{n-1}c_1 - \dots - b_1c_{n-1}}{b_0} (z-a)^n.$$

Но коэффициент этого члена совпадает со значением  $c_n$ , определяемым по формуле (7.2:7) из уравнений (7.2:6).

Итак, способ неопределенных коэффициентов в применении к делению степенных рядов приводит к тому же результату, что и операция, выполняемая по правилам деления многочленов, расположенных по возрастающим степеням  $x = z - a$ .

Приведем пример на деление степенных рядов. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \frac{z}{e^z - 1}.$$

Функция эта является аналитической во всех точках плоскости, за исключением нулей функции  $e^z - 1$ , т. е. за исключением точек:  $0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \dots$ . Заменяя  $e^z - 1$  разложением в ряд:

$$e^z - 1 = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

и сокращая числитель и знаменатель дроби на  $z$ , мы получим следующее выражение для  $F(z)$  (которое определит функцию  $F(z)$  также и при  $z = 0$ ):

$$F(z) = \frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \dots + \frac{z^n}{(n+1)!} + \dots}.$$

Ряд, стоящий в знаменателе, сходится при любом  $z$  и имеет те же нули, что и функция  $e^z - 1$ , за исключением одного нуля в начале координат. (Все это следует из того, что ряд этот представляет функцию  $\frac{e^z - 1}{z}$  (при  $z \neq 0$ ).) Поэтому внутри круга  $|z| < 2\pi$  сумма его не обращается в нуль. Следовательно, функцию  $F(z)$  можно разложить в ряд в этом круге, пользуясь делением рядов. Первое из уравнений (7.2:6) дает:

$$c_0 \cdot 1 = 1, \quad \text{т. е. } c_0 = 1.$$

Так как все коэффициенты ряда делимого, кроме начального коэффициента, равны нулю, то  $(n+1)$ -е уравнение (7.2:6) имеет вид

$$c_0 \frac{1}{(n+1)!} + c_1 \frac{1}{n!} + \dots + c_{n-1} \frac{1}{2!} + c_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (7.2:9)$$

Это уравнение позволяет определять числа  $c_n$  одно за другим. Для определения коэффициента  $c_n$  можно воспользоваться также формулой (7.2:8):

$$c_0 = 1, \quad c_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 \\ \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 0 \\ \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \dots \frac{1}{2!} \end{vmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Числа  $c_n n!$  называются числами Бернулли и обозначаются через  $B_n$ :  $B_n = c_n n!$ .

Через эти числа просто выражаются коэффициенты многих важных соотношений. Для их вычисления имеем формулы:  $B_0 = c_0 \cdot 0! = 1$ ,

$$B_n = c_n n! = (-1)^n n! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 0 \\ \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (7.2:10)$$

Впрочем, вычисление бернуллиевых чисел удобнее производить последовательно, пользуясь формулой (7.2:9). Из нее получаем:

$$B_0 \cdot \frac{1}{0! (n+1)!} + B_1 \frac{1}{1! n!} + \dots + B_n \frac{1}{n! 1!} = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

или, умножая обе части равенства на  $(n+1)!$  и замечая, что  $\frac{(n+1)!}{k! (n+1-k)!}$  есть биномиальный коэффициент  $\binom{n+1}{k}$

$$B_0 \binom{n+1}{0} + B_1 \binom{n+1}{1} + \dots + B_n \binom{n+1}{n} = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Формулу эту можно представить в следующем символическом виде:

$$(1+B)^{n+1} - B^{n+1} = 0. \quad (7.2:11)$$

После возведения в степень по биномиальной формуле все показатели степени здесь нужно заменить индексами.

Так как  $B_0 = 1$ , то последовательно находим:

$$B_0 + 2B_1 = 0; \quad B_1 = -\frac{1}{2} B_0 = -\frac{1}{2};$$

$$B_0 + 3B_1 + 3B_2 = 0; \quad B_2 = -\frac{1}{3} B_0 - B_1 = \frac{1}{6};$$

$$B_0 + 4B_1 + 6B_2 + 4B_3 = 0; \quad B_3 = -\frac{1}{4} B_0 - B_1 - \frac{3}{2} B_2 = 0;$$

$$B_0 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3 + 5B_4 = 0;$$

$$B_4 = -\frac{1}{5} B_0 - B_1 - 2B_2 - 2B_3 = -\frac{1}{30};$$

$$B_0 + 6B_1 + 15B_2 + 20B_3 + 15B_4 + 6B_5 = 0;$$

$$B_5 = -\frac{1}{6} B_0 - B_1 - \frac{5}{2} B_2 - \frac{10}{3} B_3 - \frac{5}{2} B_4 = 0;$$

$$B_0 + 7B_1 + 21B_2 + 35B_3 + 35B_4 + 21B_5 + 7B_6 = 0;$$

$$B_6 = -\frac{1}{7} B_0 - B_1 - 3B_2 - 5B_3 - 5B_4 - 3B_5 = \frac{1}{42};$$

Итак,

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0,$$

$$B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \dots$$

Покажем, что все бернуллиевы числа с нечетными номерами, большими единицы, равны нулю:

$$B_{2k+1} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Для доказательства заменим в разложении

$$\frac{z}{e^z - 1} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots =$$

$$= B_0 + \frac{B_1}{1!} z + \frac{B_2}{2!} z^2 + \dots + \frac{B_n}{n!} z^n + \dots \quad (7.2:12)$$

$z$  на  $-z$ ; получим:

$$\frac{-z}{e^{-z} - 1} = -\frac{ze^z}{(e^z - 1)e^z} = \frac{ze^z}{e^z - 1} = B_0 - \frac{B_1}{1!} z + \frac{B_2}{2!} z^2 - \frac{B_3}{3!} z^3 + \dots$$

или, вычитая последнее соотношение из (7.2:12)

$$\frac{z}{e^z - 1} - \frac{ze^z}{e^z - 1} = -z = 2 \frac{B_1}{1!} z + 2 \frac{B_3}{3!} z^3 + \dots + 2 \frac{B_{2k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1} + \dots$$

Отсюда, на основании единственности разложений в степенной ряд, следует:

$$2B_1 = -1, \quad B_3 = B_5 = \dots = B_{2k+1} = \dots = 0,$$

что и требовалось доказать.

Пользуясь доказанным свойством бернуллиевых чисел, мы можем переписать разложение (7.2:12) в виде

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}. \quad (7.2:13)$$

Так как особые точки функции  $\frac{z}{e^z - 1}$ , ближайšie к началу координат, суть  $z_1 = 2\pi i$  и  $z_2 = -2\pi i$  (в этих точках функция не определена и не может быть определена так, чтобы сохранялась непрерывность), то радиус сходимости ряда (7.2:13)

равен  $2\pi$ . Отсюда, по формуле Коши—Адамара, следует:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|B_n|}{n!}} = \frac{1}{2\pi},$$

и так как  $B_{2k+1} = 0$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ), то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2k]{\frac{|B_{2k}|}{(2k)!}} = \frac{1}{2\pi}.$$

Вследствие этого для любого  $\varepsilon > 0$  существует бесконечное множество чисел  $B_{2k}$ , удовлетворяющих неравенству

$$|B_{2k}| > \frac{(2k)!}{(2\pi + \varepsilon)^{2k}},$$

т. е. чрезвычайно больших по сравнению со своим номером  $2k$ .

Из разложения (7.2:13) можно без труда получить разложения функций  $z \operatorname{ctg} z$ ,  $\operatorname{tg} z$  и  $z \operatorname{csc} z$ . Представим  $\operatorname{ctg} z$  в виде

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} = i + \frac{2i}{e^{2iz} - 1},$$

откуда

$$z \operatorname{ctg} z = iz + \frac{2iz}{e^{2iz} - 1}$$

Функцию  $\frac{2iz}{e^{2iz} - 1}$  можно разложить по формуле (7.2:13), если заменить в этой формуле  $z$  на  $2iz$ . Так как ряд (7.2:13) сходиллся при  $|z| < 2\pi$ , то вновь полученный ряд будет сходиться при  $|2iz| < 2\pi$ , т. е. при  $|z| < \pi$ .

Итак,

$$\frac{2iz}{e^{2iz} - 1} = 1 - \frac{2iz}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2iz)^{2k} = 1 - iz + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}$$

и, следовательно,

$$z \operatorname{ctg} z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k} z^{2k}}{(2k)!}. \quad (7.2:14)$$

Чтобы получить тейлоровское разложение  $\operatorname{tg} z$ , проще всего заметить, что

$$\operatorname{ctg} z - \operatorname{tg} z = 2 \operatorname{ctg} 2z,$$

откуда

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{ctg} z - 2 \operatorname{ctg} 2z.$$

Заменяя в формуле (7.2:14)  $z$  на  $2z$ , получим ряд, сходящийся при  $|2z| < \pi$ , т. е. при  $|z| < \frac{\pi}{2}$ :

$$2z \operatorname{ctg} 2z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{4k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}. \quad (7.2:14')$$

Вычитая почленно (7.2:14') из (7.2:14), найдем:

$$z \operatorname{ctg} z - 2z \operatorname{ctg} 2z = z \operatorname{tg} z = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} (1 - 2^{2k}) B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}$$

или

$$\operatorname{tg} z = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k} (2^{2k} - 1) B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}. \quad (7.2:15)$$

Из способа получения этого ряда следует, что он сходится, если  $|z| < \frac{\pi}{2}$ , причем  $\frac{\pi}{2}$  представляет радиус сходимости ряда (это вытекает из того, что точки  $z = \pm \frac{\pi}{2}$  являются особыми для суммы ряда)

Переходя к функции  $z \csc z$ , замечаем, что

$$\operatorname{ctg} z + \operatorname{tg} \frac{z}{2} = \frac{\cos z \cos \frac{z}{2} + \sin z \sin \frac{z}{2}}{\sin z \cos \frac{z}{2}} = \frac{\cos \frac{z}{2}}{\sin z \cos \frac{z}{2}} = \csc z.$$

Заменяя в (7.2:15)  $z$  на  $\frac{z}{2}$ , получим ряд, который будет сходиться при  $\left| \frac{z}{2} \right| < \frac{\pi}{2}$ , т. е. при  $|z| < \pi$ . Отсюда и из разложения (7.2:14), сходящегося также при  $|z| < \pi$ , находим:

$$z \csc z = z \operatorname{ctg} z + z \operatorname{tg} \frac{z}{2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2^{2k} - 2) B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}. \quad (7.2:16)$$

Найдем, наконец, разложение  $\sec z$ . Так как ближайшие к началу координат особые точки функции суть:  $z = -\frac{\pi}{2}$  и  $z = \frac{\pi}{2}$ , то искомое разложение обладает кругом сходимости:  $|z| < \frac{\pi}{2}$ . Чтобы его найти, воспользуемся способом деления рядов.



Будем иметь:

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{1}{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \dots} =$$

$$= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

Из того, что  $\sec z$  — четная функция, следует, что все коэффициенты при нечетных степенях  $a_1, a_3, a_5, \dots$  равны нулю

$$\sec z = \frac{1}{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots} = a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots \quad (7.2:17)$$

Коэффициенты  $a_0, a_2, a_4, \dots$  этого разложения принято записывать в виде

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{E_{2k}}{(2k)!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Числа  $E_{2k}$ , определяемые таким способом, называются эйлеровыми числами. Переписывая (7.2:17) следующим образом:

$$1 = \left( 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) \left( E_0 - \frac{E_2}{2!} z^2 + \frac{E_4}{4!} z^4 - \dots \right)$$

и производя умножение в правой части, найдем:

$$1 = E_0 - \left( \frac{E_0}{2!} + \frac{E_2}{2!} \right) z^2 + \left( \frac{E_0}{4!} + \frac{E_2}{2! 2!} + \frac{E_4}{4!} \right) z^4 -$$

$$- \left( \frac{E_0}{6!} + \frac{E_2}{4! 2!} + \frac{E_4}{2! 4!} + \frac{E_6}{6!} \right) z^6 + \dots$$

откуда

$$E_0 = 1;$$

$$\frac{E_0}{2!} + \frac{E_2}{2!} = 0;$$

$$\frac{E_0}{4!} + \frac{E_2}{2! 2!} + \frac{E_4}{4!} = 0;$$

$$\frac{E_0}{6!} + \frac{E_2}{4! 2!} + \frac{E_4}{2! 4!} + \frac{E_6}{6!} = 0;$$

Эти уравнения позволяют последовательно определять эйлеровы числа. Получаем

$$E_0 = 1, \quad E_2 = -1, \quad E_4 = 5; \quad E_6 = -61, \quad E_8 = 1385,$$

Если вообще найдены числа  $E_0, E_2, \dots, E_{2n-2}$ , то для определения  $E_{2n}$  имеем уравнение

$$\frac{E_0}{(2n)!} + \frac{E_2}{(2n-2)! 2!} + \frac{E_4}{(2n-4)! 4!} + \dots + \frac{E_{2n}}{(2n)!} = 0,$$

или

$$E_0 + \binom{2n}{2} E_2 + \binom{2n}{4} E_4 + \dots + \binom{2n}{2n-2} E_{2n-2} + E_{2n} = 0.$$

Отсюда следует, что если числа  $E_0, E_2, \dots, E_{2n-2}$  — целые, то и число  $E_{2n}$  будет целым. Но первые найденные нами числа суть целые. Следовательно, все эйлеровы числа целые.

Разложение  $\sec z$  окончательно запишем в виде

$$\sec z = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{E_{2h}}{(2h)!} z^{2h}. \quad (7.2:18)$$

Оно сходится при  $|z| < \frac{\pi}{2}$ . Эйлеровы числа  $E_{2h}$ , входящие в коэффициенты разложения, полностью определяются условиями:

$$E_0 = 1, \quad E_0 + \binom{2n}{2} E_2 + \binom{2n}{4} E_4 + \dots + \binom{2n}{2n-2} E_{2n-2} + E_{2n} = 0 \quad (7.2:19)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots).$$

7.3. Здесь мы изучим некоторые вопросы, связанные с поведением степенного ряда на границе круга сходимости. Простые примеры рядов с радиусом сходимости  $R=1$  показывают, что на границе круга сходимости ряд может расходиться в каждой точке (геометрический ряд:  $1+z+z^2+\dots+z^n+\dots$ ), сходиться в одних точках и расходиться в других точках (ряд  $z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots$  сходится при  $z=1$  и расходится при  $z=-1$ ) и, наконец, сходиться во всех точках границы (ряд  $z + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^2} + \dots + \frac{z^n}{n^2} + \dots$  сходится и притом абсолютно на всей единичной окружности).

Займемся сначала установлением некоторых связей между сходимостью степенного ряда в отдельных точках границы круга сходимости и поведением суммы ряда в этом круге.

Заметим, что во всех случаях, не ограничивая общности результатов, можно рассматривать степенные ряды с единичным кругом сходимости и предполагать, что граничная точка, в которой сходится степенной ряд, есть точка  $z=1$ . В самом деле, общий случай ряда

$$a_0 + a_1 (\xi - \xi_0) + \dots + a_n (\xi - \xi_0)^n + \dots$$

с конечным радиусом сходимости  $R$  и с точкой сходимости  $\xi_1$ ,  $|\xi_1 - \xi_0| = R$  сводится к указанному посредством целого линейного преобразования

$$z = \frac{\xi - \xi_0}{\xi_1 - \xi_0}.$$

Первый по времени и по значимости результат в этом направлении принадлежит Абелю.

Вторая теорема Абеля. Если степенной ряд

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots \quad (7.3:1)$$

сходится в граничной точке круга сходимости  $z=1$ , то при стремлении точки  $z$  единичного круга к точке 1 внутри любого угла  $g_0$  раствора  $2\theta < \pi$  с вершиной в точке  $z=1$ , симметричного относительно действительной оси, сумма степенного ряда  $f(z)$  стремится к пределу, равному сумме ряда в граничной точке, т. е.

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in g_0}} f(z) = \sum_0^{\infty} a_n. \quad (7.3:2)$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\Delta(z) = \sum_0^{\infty} a_k - f(z) = \sum_0^{\infty} a_k (1 - z^k).$$

Представим ее в виде

$$\Delta(z) = \sum_0^n a_k (1 - z^k) + \sum_{n+1}^{\infty} a_k (1 - z^k), \quad (7.3:3)$$

где  $n$  — фиксированное натуральное число.

Первое слагаемое в правой части стремится к нулю при  $z$ , стремящемся к 1. Поэтому для доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что второе слагаемое внутри угла  $g_0$  можно сделать сколь угодно малым при  $n$  достаточно большом. С этой целью рассмотрим сумму

$$\sum_{n+1}^{n+p} a_k (1 - z^k) = (1 - z) \sum_{n+1}^{n+p} a_k (1 + z + \dots + z^{k-1}).$$

Вводя обозначения:  $\sum_{n+1}^m a_k = \alpha_m$  ( $m > n$ ),  $\alpha_n = 0$ , так что  $a_k = \alpha_k - \alpha_{k-1}$  ( $k = n+1, \dots$ ), и далее, полагая  $1 + z + \dots + z^{k-1} = b_k$ , получим, пользуясь преобразованием Абеля (гл. первая, п. 3.4):

$$\begin{aligned} \sum_{n+1}^{n+p} a_k (1 - z^k) &= (1 - z) \sum_{n+1}^{n+p} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) b_k = \\ &= (1 - z) \left[ \alpha_{n+p} b_{n+p} - \sum_{n+1}^{n+p-1} \alpha_k (b_{k+1} - b_k) \right] = \\ &= (1 - z) \left[ \sum_{n+1}^{n+p} a_k \sum_0^{n+p-1} z^k - \sum_{n+1}^{n+p-1} \left( \sum_{n+1}^k a_j \right) z^k \right]. \quad (7.3:4) \end{aligned}$$

Так как суммы  $\sum_{n+1}^{n+p} a_k (1 - z^k) = \sum_{n+1}^{n+p} a_k - \sum_{n+1}^{n+p} a_k z^k$ ,  $\sum_{n+1}^{n+p} a_k$  и  $\sum_0^{n+p-1} z^k$  стремятся к конечным пределам при  $p \rightarrow \infty$  (соответствующие им ряды сходятся), то должна стремиться к пределу и сумма  $\sum_{n+1}^{n+p} \left( \sum_{n+1}^k a_j \right) z^k$ . Осуществляя

предельный переход, получаем из (7.3:4):

$$\begin{aligned} \sum_{n+1}^{\infty} a_k (1-z^k) &= (1-z) \left[ \sum_{n+1}^{\infty} a_k \cdot \sum_0^{\infty} z^h - \sum_{n+1}^{\infty} \left( \sum_{n+1}^k a_j \right) z^k \right] = \\ &= \sum_{n+1}^{\infty} a_k - (1-z) \sum_{n+1}^{\infty} \left( \sum_{n+1}^k a_j \right) z^k. \quad (7.3:5) \end{aligned}$$

Пусть  $\varepsilon$  — произвольное положительное число. Выберем  $n$  столь большим,  $n > N(\varepsilon)$ , чтобы осуществлялись неравенства

$$\left| \sum_{n+1}^k a_j \right| < \frac{\varepsilon \cos \theta}{6}$$

при любом натуральном  $k$ . Тогда, в частности, должно быть:

$$\left| \sum_{n+1}^{\infty} a_k \right| \leq \frac{\varepsilon \cos \theta}{6}$$

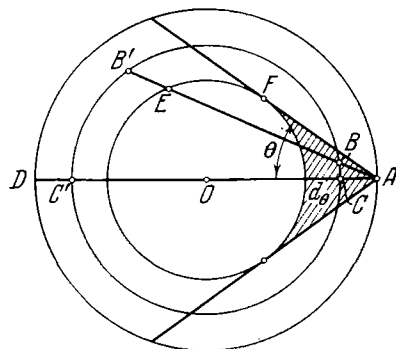


Рис. 64.

Следовательно,

$$\left| \sum_{n+1}^{\infty} a_k (1-z^k) \right| \leq \frac{\varepsilon \cos \theta}{6} + \frac{\varepsilon \cos \theta}{6} |1-z| \sum_{n+1}^{\infty} |z|^h = \frac{\varepsilon \cos \theta}{6} + \frac{\varepsilon}{6} \frac{|1-z| \cos \theta}{1-|z|}.$$

Но вблизи вершины угла  $g_\theta$ , в его части  $d_\theta$ , заключенной между сторонами угла и дугой окружности с центром в начале координат, касающейся сторон угла (рис. 64), имеем:

$$AB \cdot AB' = AC \cdot AC',$$

откуда

$$\frac{AB}{AC} = \frac{|1-z|}{1-|z|} = \frac{AC'}{AB'} < \frac{AD}{AE} < \frac{AD}{AF} = \frac{2}{\cos \theta},$$

т. е.

$$|1-z| \cos \theta < 2(1-|z|).$$

Поэтому для  $z \in d_\theta$  и  $n > N(\varepsilon)$  выполняется неравенство

$$\left| \sum_{n+1}^{\infty} a_k (1-z^k) \right| < \frac{\varepsilon \cos \theta}{6} + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Фиксируя некоторое  $n > N(\varepsilon)$  и затем выбирая  $\delta(\varepsilon)$  так, чтобы при  $|1-z| < \delta(\varepsilon)$  внутри  $d_\theta$  выполнялось неравенство

$$\left| \sum_0^n a_k (1-z^k) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

получаем из (7.3.3):

$$|\Delta(z)| = \left| \sum_0^{\infty} a_k - f(z) \right| < \varepsilon \quad (z \in d_0, |1-z| < \delta(\varepsilon)),$$

откуда и следует, что

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in g_0}} f(z) = \sum_0^{\infty} a_k.$$

В качестве иллюстрации ко второй теореме Абеля рассмотрим логарифмический ряд  $\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ .

Докажем прежде всего, что этот ряд сходится в каждой точке  $z = e^{i\theta}$  единичной окружности, отличной от  $-1$ .

Для этого воспользуемся теоремой п. 3.4 главы первой.

Полагая  $a_k = (-1)^{k-1} e^{ik\theta}$  и  $b_k = \frac{1}{k}$ , имеем:

$$\left| \sum_1^n a_k \right| = \left| \sum_1^n (-1)^{k-1} e^{ik\theta} \right| = \left| \frac{e^{i\theta} - (-1)^n e^{i(n+1)\theta}}{1 + e^{i\theta}} \right| \leq \frac{2}{|1 + e^{i\theta}|},$$

т. е. суммы  $\sum_1^n a_k$  равномерно (относительно  $n$ ) ограничены по модулю.

Далее,  $|b_{k+1} - b_k| = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ ; поэтому ряд  $\sum_1^{\infty} |b_{k+1} - b_k|$  сходится.

Отсюда, по упомянутой теореме, ряд  $\sum_1^{\infty} a_k b_k = \sum_1^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{e^{ik\theta}}{k}$  сходится, что мы и утверждали.

Но при  $|z| < 1$  сумма ряда  $\sum_1^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k}$  есть

$$f(z) = \ln(1+z) = \ln|1+z| + i \arg(1+z).$$

Поэтому, по второй теореме Абеля, для любого  $\theta$  ( $-\pi < \theta < \pi$ ) имеем:

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{e^{ik\theta}}{k} &= \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} \ln(1+z) = \ln|1 + e^{i\theta}| + i \arg(1 + e^{i\theta}) = \\ &= \ln \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} + i \arg \left[ e^{i\frac{\theta}{2}} \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2} \right] = \ln \left( 2 \cos \frac{\theta}{2} \right) + i \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Отделяя действительные и мнимые части в этом соотношении, получаем два разложения в тригонометрические ряды, сходящиеся при  $-\pi < \theta < \pi$ :

$$\ln \left( 2 \cos \frac{\theta}{2} \right) = \sum_1^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos k\theta}{k},$$

$$\frac{\theta}{2} = \sum_1^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin k\theta}{k}.$$

В частности, при  $\theta=0$  получаем из первой формулы:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

и из второй при  $\theta = \frac{\pi}{2}$ :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

В качестве другого примера рассмотрим биномиальный ряд  $\sum_0^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ ,

где  $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n}$  и  $\alpha$  — комплексное число:  $\alpha = \beta + i\gamma$ . Предположим сначала, что  $\beta > -1$ . Обозначая через  $\lambda_n$  модуль отношения  $\binom{\alpha}{n} : \binom{\alpha}{n-1}$ , имеем:

$$\lambda_n = \left| \binom{\alpha}{n} : \binom{\alpha}{n-1} \right| = \left| \frac{\alpha-n+1}{n} \right| = \left| 1 - \frac{\alpha+1}{n} \right| = \left| 1 - \frac{1+\beta}{n} - \frac{i\gamma}{n} \right| =$$

$$= \sqrt{1 - 2 \frac{1+\beta}{n} + \frac{(1+\beta)^2 + \gamma^2}{n^2}}$$

Пусть  $\beta'$  — действительное число, удовлетворяющее условию  $\beta > \beta' > -1$ . Тогда при  $n > N(\beta')$  будем иметь:

$$\frac{(1+\beta)^2 + \gamma^2}{n} < 2(\beta - \beta')$$

и, следовательно,

$$\lambda_n < \sqrt{1 - 2 \frac{1+\beta}{n} + 2 \frac{\beta - \beta'}{n}} = \sqrt{1 - 2 \frac{1+\beta'}{n}} < 1 - \frac{1+\beta'}{n} < \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\beta'}} \quad *)$$

\*) Так как

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-(1+\beta')} = 1 - \frac{1+\beta'}{n} + \frac{(1+\beta') \left(1 + \frac{\beta'}{2}\right)}{n^2} -$$

$$- \frac{(1+\beta') \left(1 + \frac{\beta'}{2}\right) \left(1 + \frac{\beta'}{3}\right)}{n^3} + \dots$$

или

$$\lambda_n < \frac{n^{1+\beta'}}{(n+1)^{1+\beta'}} = \mu_n.$$

Выписывая аналогичные неравенства для значений  $N(\beta') + 1$ ,  $N(\beta') + 2$ ,  $n$  и перемножая их почленно, получим:

$$\lambda_{N(\beta')+1} \cdot \lambda_{N(\beta')+2} \cdots \lambda_n < \mu_{N(\beta')+1} \cdot \mu_{N(\beta')+2} \cdots \mu_n,$$

или, подставляя вместо  $\lambda$  и  $\mu$  их значения и производя сокращения:

$$\left| \binom{\alpha}{n} \right| = \left| \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} \right| < \frac{C(\beta')}{(n+1)^{1+\beta'}}.$$

Здесь через  $C(\beta')$  обозначена величина, не зависящая от  $n$ :

$$C(\beta') = \left| \binom{\alpha}{N(\beta')} \right| [N(\beta') + 1]^{\beta'+1}.$$

Отсюда следует, что последовательность коэффициентов  $\left\{ \binom{\alpha}{n} \right\}$  биномиального ряда сходится к нулю, если  $\beta = \operatorname{Re} \alpha > -1$ .

В случае, когда  $\beta > 0$ , число  $\beta'$ , подчиненное единственному условию  $-1 < \beta' < \beta$ , можно выбрать положительным.

Так как ряд  $\sum_0^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{1+\beta'}}$  сходится при  $\beta' > 0$ , то из полученных нами неравенств вытекает, что биномиальный ряд сходится абсолютно и равномерно во всех точках единичной окружности, если  $\beta = \operatorname{Re} \alpha > 0$ .

Замечая, что внутри единичного круга сумма биномиального ряда есть  $(1+z)^\alpha = \exp[\alpha \ln(1+z)]$ , находим в силу второй теоремы Абеля:

$$\sum_0^{\infty} \binom{\alpha}{n} e^{in\theta} = \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} (1+z)^\alpha.$$

Если  $e^{i\theta} = -1$ , то получаем, что  $\lim_{z \rightarrow -1} (1+z)^\alpha = 0$ . При  $e^{i\theta} \neq -1$  ( $-\pi < \theta < \pi$ ) имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} (1+z)^\alpha &= (1+e^{i\theta})^\alpha = \exp[\alpha \ln(1+e^{i\theta})] = \\ &= \exp \left\{ \alpha \left[ \ln \left( 2 \cos \frac{\theta}{2} \right) + i \frac{\theta}{2} \right] \right\} = \left( 2 \cos \frac{\theta}{2} \right)^\alpha \left( \cos \frac{\alpha\theta}{2} + i \sin \frac{\alpha\theta}{2} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_0^{\infty} \binom{\alpha}{n} e^{in\theta} = \left( 2 \cos \frac{\theta}{2} \right)^\alpha \left( \cos \frac{\alpha\theta}{2} + i \sin \frac{\alpha\theta}{2} \right).$$

и при  $\frac{1+\beta'}{n} < 1$  члены этого ряда убывают по абсолютной величине, то  $\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-(1+\beta')} > 1 - \frac{1+\beta'}{n}$ .

В частности, если  $\alpha$ —действительное число, получаем, отделяя действительные и мнимые части:

$$\sum_0^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cos n\theta = \left(2 \cos \frac{\theta}{2}\right)^{\alpha} \cos \frac{\alpha\theta}{2}, \quad \sum_0^{\infty} \binom{\alpha}{n} \sin n\theta = \left(2 \cos \frac{\theta}{2}\right)^{\alpha} \sin \frac{\alpha\theta}{2}.$$

Из способа получения этих рядов следует, что они сходятся абсолютно и равномерно на сегменте  $[0, 2\pi]$ .

Предложение, обратное второй теореме Абеля, несправедливо. В самом деле, для геометрического ряда  $\sum_0^{\infty} z^n$  сумма его  $\frac{1}{1-z}$  стремится к конечному пределу, равному  $\frac{1}{1-e^{i\theta}}$ , при приближении  $z$  к любой отличной от единицы точке  $e^{i\theta}$  единичной окружности, хотя ряд  $\sum_0^{\infty} e^{in\theta}$  расходится в каждой точке единичной окружности.

При некоторых специальных ограничениях, наложенных на коэффициенты ряда, можно, однако, утверждать, что из существования предела  $\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$  (здесь точка  $z = re^{i\theta}$  стремится к граничной точке  $e^{i\theta}$  вдоль радиуса) вытекает сходимость степенного ряда в точке  $e^{i\theta}$ .

Вот одно из предложений такого рода.

**Теорема Таубера.** Если коэффициенты степенного ряда, имеющего единичный круг сходимости, удовлетворяют условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0 \quad (7.3:6)$$

и если существует предел

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = A,$$

то ряд  $\sum_0^{\infty} a_n$  сходится (сумма его есть  $A$ ).

**Доказательство.** Заметим сначала, что из условия (7.3:6) следует также, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_1^m n |a_n|}{m} = 0. \quad (7.3:7)$$

В самом деле, для любого  $\epsilon > 0$  мы должны иметь  $n |a_n| < \frac{\epsilon}{2}$  при  $n > N(\epsilon)$ .

Фиксируем  $n = n_0$ , удовлетворяющее этому условию, и оценим  $\frac{\sum_1^m n |a_n|}{m}$



при  $m > n_0$  следующим образом:

$$\frac{\sum_1^m n |a_n|}{m} = \frac{\sum_1^{n_0} n |a_n|}{m} + \frac{\sum_{n_0+1}^m n |a_n|}{m} < \frac{\sum_1^{n_0} n |a_n|}{m} + \frac{(m-n_0)\varepsilon}{2m} < \frac{\sum_1^{n_0} n |a_n|}{m} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Но при  $m$ , достаточно большом,  $m > M$ , будем, очевидно, иметь:

$$\frac{\sum_1^{n_0} n |a_n|}{m} < \frac{\varepsilon}{2};$$

следовательно,

$$\frac{\sum_1^m n |a_n|}{m} < \varepsilon \text{ при } m > \max \{N(\varepsilon), M\},$$

откуда и вытекает соотношение (7.3:7).

Рассмотрим модуль разности:

$$\begin{aligned} \left| \sum_0^n a_k - f(x) \right| &= \left| \sum_0^n a_k (1-x^k) - \sum_{n+1}^{\infty} a_k x^k \right| \leq \\ &= (1-x) \sum_0^n |a_k| (1+x+\dots+x^{k-1}) + \sum_{n+1}^{\infty} |a_k| x^k < \\ &< n(1-x) \frac{\sum_0^n k |a_k|}{n} + \sum_{n+1}^{\infty} k |a_k| \cdot \frac{x^k}{k} \end{aligned} \quad (7.3:8)$$

Пусть  $m |a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$  и, кроме того,  $\frac{\sum_0^m k |a_k|}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$  при  $m > M(\varepsilon)$ ; тогда при  $n > M(\varepsilon)$  выводим из соотношения (7.3:8):

$$\begin{aligned} \left| \sum_0^n a_k - f(x) \right| &< n(1-x) \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2n} \sum_{n+1}^{\infty} x^k = \frac{\varepsilon}{2} \left[ n(1-x) + \frac{1}{n} \frac{x^{n+1}}{1-x} \right] < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \left[ n(1-x) + \frac{1}{n(1-x)} \right] \end{aligned}$$

Следовательно, при  $1-x = \frac{1}{n}$  и  $n > M(\varepsilon)$ :

$$\left| \sum_0^n a_k - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| < \varepsilon,$$

откуда и вытекает, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_0^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = A,$$

т. е. ряд  $\sum_0^\infty a_k$  сходится (и сумма его есть  $A$ ).

Теорема доказана.

Аналогичные предложения имеют место и при более общих условиях. А именно, достаточно предполагать, что последовательность  $\{n \cdot a_n\}$  ограничена, вместо того чтобы требовать ее сходимости к нулю. Доказательство этой теоремы, принадлежащей Харди и Литтльвуду, значительно сложнее, чем доказательство теоремы Таубера. Заметим, что одного лишь стремления к нулю коэффициентов степенного ряда недостаточно для того, чтобы имела место теорема, аналогичная теореме Таубера.

В п. 6.3 было показано, что на границе круга сходимости степенного ряда существует по крайней мере одна особая точка для суммы степенного ряда. Возникает вопрос: имеется ли какая-нибудь зависимость между распределением особых точек на границе круга сходимости степенного ряда и точками сходимости или расходимости этого ряда на той же границе?

Примеры, с которых мы начали этот пункт, показывают, что простой зависимости здесь не существует. В самом деле, в случае, например, ряда

$$\sum_1^\infty \frac{z^n}{n^2}$$

радиус сходимости равен 1, и, следовательно, на единичной окруж-

ности лежит по крайней мере одна особая точка для суммы этого ряда. Между тем ряд сходится абсолютно и равномерно на всей единичной окружности, в частности, абсолютно сходится и в особой точке. В случае гео-

метрического ряда  $\sum_0^\infty z^n$ , представляющего разложение функции  $\frac{1}{1-z}$ , все

точки единичной окружности, отличные от  $z=1$ , суть правильные, и точка  $z=1$  является единственной особой точкой. Однако наш ряд расходится во всех точках единичной окружности как в особой, так и в правильных точках.

Закономерности в интересующих нас явлениях удается усмотреть, подчинив рассматриваемые степенные ряды некоторым ограничениям. Так, например, получается следующее предложение:

**Т е о р е м а Ф а т у.** Если коэффициенты степенного ряда (7.3:1) с единичным кругом сходимости стремятся к нулю:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , то степенной ряд сходится, и притом равномерно, на каждой дуге единичной окружности, все точки которой (включая концы дуги) являются правильными для суммы ряда.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Как это следует из формулировки, теорема имеет в виду лишь те степенные ряды с коэффициентами, стремящимися к нулю, для которых на единичной окружности существуют правильные точки. Примером может служить логарифмический ряд

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n},$$

коэффициенты которого стремятся к нулю и сумма  $\ln(1+z)$  имеет лишь единственную особую точку  $z = -1$ . И действительно, на стр. 352 мы показали, что логарифмический ряд сходится во всех точках единичной окружности, за исключением точек  $z = -1$ . Для геометрического ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ,

сумма которого есть  $\frac{1}{1-z}$  и, следовательно, все точки единичной окружности, за исключением точки  $z = 1$ , являются правильными, теорема, очевидно, неприменима, так как геометрический ряд расходится во всех точках единичной окружности. Но он и не удовлетворяет условию теоремы, ибо его коэффициенты не стремятся к нулю.

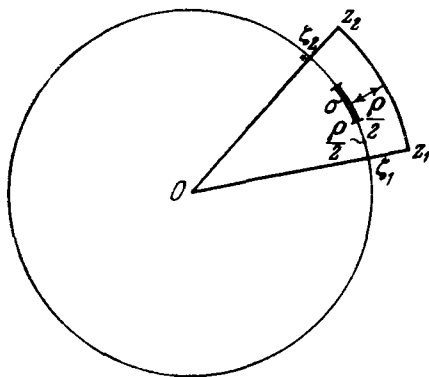


Рис. 65.

Обращаясь к доказательству теоремы, предположим, что каждая точка некоторой дуги  $\sigma$  единичной окружности является правильной для суммы  $f(z)$  ряда. Это означает, что каждая точка  $\xi \in \sigma$  (включая концы дуги  $\sigma$ ) обладает окрестностью  $U_\xi$ , в которой существует аналитическая функция  $\psi_\xi(z)$ , совпадающая с  $f(z)$  в точках, общих для  $U_\xi$  и единичного круга. Присоединяя точки всех окрестностей  $U_\xi$  ( $\xi \in \sigma$ ) к единичному кругу  $K$ , получим область  $\Delta$ , для которой все точки круга  $K$  и все точки дуги  $\sigma$  будут внутренними точками. (Сравните рассуждения в п. 6.3, где роль дуги  $\sigma$  играла вся окружность.)

Определим в области  $\Delta$  функцию  $\psi(z)$ , полагая ее равной  $f(z)$  в точках круга  $K$  и равной  $\psi_\xi(z)$  в точках окрестностей  $U_\xi$ . Полученная функция  $\psi(z)$  будет однозначной и аналитической в области  $\Delta$ . Так как она совпадает с  $f(z)$  в  $K$ , то ее степенной ряд совпадает с рядом (7.3:1).

В дальнейшем мы будем говорить именно о функции  $\psi(z)$  и о том же степенном ряде (7.3:1). Обозначая через  $\rho > 0$  расстояние от  $\sigma$  до границы области  $\Delta$  (эта граница включает в себя часть единичной окружности), возьмем на единичной окружности две точки  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , не лежащие на дуге  $\sigma$  и удаленные от ближайших ее концов на  $\frac{\rho}{2}$ ; тогда дуга  $\widehat{\xi_1 \xi_2}$  вся будет принадлежать области  $\Delta$  и содержать дугу  $\sigma$ . Проведем радиусы  $O\xi_1$  и  $O\xi_2$  и продолжим их за единичную окружность на длину  $\frac{\rho}{2}$ . Наконец, соединим их концы дугой окружности; получим круговой сектор  $Oz_1z_2$  (рис. 65), который, как это следует из его построения, целиком лежит в области  $\Delta$  и содержит внутри дугу  $\sigma$ .

Наша задача заключается в том, чтобы показать, что ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  равномерно сходится на дуге  $\sigma$ . Мы покажем это, установив попутно, что сумма ряда есть  $\psi(z)$ . С этой целью рассмотрим

$$\omega_n(z) = \frac{\varphi_n(z)}{z^{n+1}} (z - \xi_1)(z - \xi_2), \quad (7.3:9)$$

где

$$\varphi_n(z) = \psi(z) - (a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n).$$

Внутри единичного круга, где ряд  $\sum_0^{\infty} a_k z^k$  сходится, эта функция может быть представлена в виде

$$\omega_n(z) = \frac{\sum_0^{\infty} a_k z^k - \sum_0^n a_k z^k}{z^{n+1}} (z - \zeta_1)(z - \zeta_2) = (a_{n+1} + a_{n+2}z + \dots)(z - \zeta_1)(z - \zeta_2)$$

и, следовательно, является аналитической в окрестности начала координат. Из формулы (7.3:9) следует, что она является аналитической и во всей области  $\Delta$  (где функция  $\varphi_n(z) = \psi(z) - \sum_0^n a_k z^k$  является аналитической).

Для нужной нам оценки функция  $\omega_n(z)$  имеет преимущества перед функцией  $\varphi_n(z)$ . Именно, в точках границы сектора, лежащих вне единичного круга, мы сможем воспользоваться тем, что модуль знаменателя дроби  $|z|^{n+1}$  весьма велик (при больших  $n$ ), а в точках радиусов, близких к  $\zeta_1$  или  $\zeta_2$ , — тем, что соответствующие разности  $z - \zeta_1$  или  $z - \zeta_2$  весьма малы по модулю.

После этих разъяснений оценим сверху модуль  $\omega_n(z)$  на различных частях границы сектора.

Пусть  $\varepsilon'$  — произвольное положительное число. Выберем  $N(\varepsilon')$  так, чтобы было  $|a_k| < \varepsilon'$  при  $k > N(\varepsilon')$ . Тогда в точках, принадлежащих интервалу  $O\zeta_1$  (или  $O\zeta_2$ ), будем иметь ( $n > N(\varepsilon')$ ):

$$|\omega_n(z)| = \left| \frac{\psi(z) - \sum_0^n a_k z^k}{z^{n+1}} (z - \zeta_1)(z - \zeta_2) \right| = \left| \sum_{n+1}^{\infty} a_k z^{k-n-1} (z - \zeta_1)(z - \zeta_2) \right| \leq \varepsilon' \sum_{n+1}^{\infty} |z|^{k-n-1} |z - \zeta_1| |z - \zeta_2|.$$

$$\text{Замечая, что } \sum_{n+1}^{\infty} |z|^{k-n-1} = \frac{1}{1-|z|}, \quad |z - \zeta_1| = 1 - |z| \quad \text{и} \quad |z - \zeta_2| < 2,$$

получаем:

$$|\omega_n(z)| < 2\varepsilon' \quad \text{при} \quad n > N'(\varepsilon).$$

Рассмотрим, далее,  $|\omega_n(z)|$  на интервале  $\zeta_1 z_1$  (или  $\zeta_2 z_2$ ). Обозначим радиус  $1 + \frac{\rho}{2}$  дуги сектора через  $R$ . Замечая, что  $|z - \zeta_1| = |z| - 1$ ,  $|z - \zeta_2| < |z| + |\zeta_2| < 2R$ , и обозначая  $\max |\psi(z)|$  на множестве всех точек сектора через  $M$ , будем иметь при  $n > N(\varepsilon')$ :

$$\begin{aligned} |\omega_n(z)| &= \left| \frac{\psi(z) - \sum_0^n a_k z^k}{z^{n+1}} (z - \zeta_1)(z - \zeta_2) \right| \leq \frac{M + \sum_0^n |a_k| |z|^k}{|z|^{n+1}} (|z| - 1) 2R = \\ &= 2R \frac{M + \sum_0^{N(\varepsilon')} |a_k| |z|^k}{|z|^{n+1}} (|z| - 1) + 2R \frac{\sum_{N(\varepsilon')+1}^n |a_k| |z|^k}{|z|^{n+1}} (|z| - 1) < \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< 2R \left( M + \sum_0^{N(\varepsilon')} |a_k| R^k \right) \frac{|z|-1}{|z|^{n+1}} + 2R\varepsilon' \sum_{N(\varepsilon')+1}^n |z^k| \frac{|z|-1}{|z|^{n+1}} = \\
&= 2R \left( M + \sum_0^{N(\varepsilon')} |a_n| R^k \right) \frac{|z|-1}{|z|^{n+1}} + 2R\varepsilon' \frac{|z|^{n+1}-|z|^{N(\varepsilon')+1}}{|z|-1} \frac{|z|-1}{|z|^{n+1}} < \\
&< 2R \left( M + \sum_0^{N(\varepsilon')} |a_k| R^k \right) \frac{|z|-1}{|z|^{n+1}} + 2R\varepsilon'.
\end{aligned}$$

Но

$$\frac{|z|-1}{|z|^{n+1}} < \frac{|z|-1}{|z|^{n+1}-1} = \frac{1}{|z|^n + \dots + 1} < \frac{1}{n+1}.$$

Следовательно,

$$|\omega_n(z)| < \frac{2R \left( M + \sum_0^{N(\varepsilon')} |a_k| R^k \right)}{n+1} + 2R\varepsilon',$$

и мы можем выбрать число  $N_1(\varepsilon') \gg N(\varepsilon')$  так, чтобы при  $n > N_1(\varepsilon')$  первое слагаемое в правой части неравенства было также меньше  $\varepsilon'$ , и, следовательно,

$$|\omega_n(z)| < (2R+1)\varepsilon' \quad \text{при } n > N_1(\varepsilon') \gg N(\varepsilon').$$

Перейдем, наконец, к оценке модуля  $|\omega_n(z_n)|$  в точках дуги  $\widehat{z_1 z_2}$  (включая ее концы  $z_1$  и  $z_2$ ). Здесь имеем:  $|z - \zeta_1| < 2R$ ,  $|z - \zeta_2| < 2R$  и

$$\begin{aligned}
|\omega_n(z)| &< \frac{M + \sum_0^n |a_k| R^k}{R^{n+1}} 4R^2 = 4 \frac{M + \sum_0^{N(\varepsilon')} |a_k| R^k}{R^{n-1}} + 4 \frac{\sum_{N(\varepsilon')+1}^n |a_k| R^k}{R^{n-1}} \leq \\
&\leq 4 \frac{M + \sum_0^{N(\varepsilon')} |a_k| R^k}{R^{n-1}} + 4\varepsilon' \frac{\sum_{N(\varepsilon')+1}^n R^k}{R^{n-1}} < \\
&< 4 \frac{M + \sum_0^{N(\varepsilon')} |a_k| R^k}{R^{n-1}} + \frac{4R^2\varepsilon'}{R-1} = 4 \frac{M + \sum_0^{N(\varepsilon')} |a_k| R^k}{R^{n-1}} + \frac{8R^2}{\rho} \varepsilon'.
\end{aligned}$$

Выбирая  $N_2(\varepsilon') \gg N_1(\varepsilon') \gg N(\varepsilon')$  так, чтобы первое слагаемое в правой части неравенства было меньше, чем  $\varepsilon'$  при  $n > N_2(\varepsilon')$ , получаем:

$$|\omega_n(z)| < \left( \frac{8R^2}{\rho} + 1 \right) \varepsilon', \quad n > N_2(\varepsilon').$$

Заметим, что в точке  $z=0$   $\omega_n(z)$  имеет значение  $a_{n+1}\zeta_1\zeta_2$  (равное  $\lim_{z \rightarrow 0} \omega_n(z)$ ), так, что  $|\omega_n(0)| = |a_{n+1}| < \varepsilon'$  при  $n > N(\varepsilon')$ , а в точках  $z=\zeta_1$  и  $z=\zeta_2$   $\omega_n(z)$  обращается в нуль. Следовательно, во всех точках границы

сектора при  $n > N_2(\varepsilon')$  имеем:

$$|\omega_n(z)| < \left(\frac{8R^2}{\rho} + 1\right) \varepsilon' = \max \left\{ 2\varepsilon', (2R+1)\varepsilon', \left(\frac{8R^2}{\rho} + 1\right) \varepsilon' \right\}$$

В силу принципа максимума это неравенство справедливо также и в точках дуги  $\sigma$ . Но

$$\omega_n(z) = \frac{\psi(z) - \sum_{k=0}^n a_k z^k}{z^{h+1}} (z - \xi_1)(z - \xi_2)$$

и в точках дуги  $\sigma$  модуль  $|\omega_n(z)|$  удовлетворяет неравенству

$$|\omega_n(z)| = \left| \psi(z) - \sum_{k=0}^n a_k z^k \right| |z - \xi_1| |z - \xi_2| > \left| \psi(z) - \sum_{k=0}^n a_k z^k \right| \left(\frac{\rho}{2}\right)^2$$

откуда

$$\left| \psi(z) - \sum_{k=0}^n a_k z^k \right| < \frac{4(8R^2 + \rho)}{\rho^3} \varepsilon' = \varepsilon \quad \text{при } n > N_1(\varepsilon').$$

Вследствие произвольной малости  $\varepsilon'$ , отсюда и следует требуемый результат.

В качестве простого примера рассмотрим снова биномиальный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n = (1+z)^\alpha.$$

На стр. 354 мы показали, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{\alpha}{n} = 0$ , если  $\operatorname{Re} \alpha > -1$ . Поэтому биномиальный ряд должен сходиться во всех точках единичной окружности правильных для его суммы  $(1+z)^\alpha$ , т. е. при всех  $z = e^{i\theta} \neq -1$ . Сходимость является равномерной на каждой дуге окружности, не содержащей точки  $z = 1$  ни внутри, ни в качестве одного из своих концов.

Заметим, что из того, что коэффициенты степенного ряда с единичным кругом сходимости стремятся к нулю и ряд равномерно сходится на некоторой дуге единичной окружности, отнюдь еще не следует, что точки этой

дуги являются правильными. В этом нас убеждает пример ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{2^{k^2}}$ ,

для которого, как мы видели (стр. 327), все точки единичной окружности являются особыми.

В заключение приведем принадлежащий Н. Н. Лузину пример степенного ряда, коэффициенты которого стремятся к нулю и который расходится во всех точках единичной окружности.

Рассмотрим многочлен

$$g_p(z) = 1 + z + \dots + z^{p-1} = \frac{1-z^p}{1-z}.$$

В точке  $\zeta = e^{i\theta}$ , лежащей на единичной окружности и отличной от 1, модуль  $g_p(\zeta)$  имеет следующее значение:

$$|g_p(e^{i\theta})| = \left| \frac{1 - e^{ip\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| = \left| \frac{e^{\frac{ip\theta}{2}} (e^{\frac{ip\theta}{2}} - e^{-\frac{ip\theta}{2}})}{e^{\frac{i\theta}{2}} (e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}})} \right| = \left| \frac{\sin \frac{p\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right|$$

Так как при  $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$

$$\frac{2}{\pi} |\varphi| \leq |\sin \varphi| \leq |\varphi|,$$

то при  $0 < |\theta| \leq \frac{\pi}{p}$  получаем неравенство:

$$|g_p(e^{i\theta})| \geq \frac{2 \frac{p|\theta|}{2}}{\frac{|\theta|}{2}} = \frac{2}{\pi} p.$$

Это неравенство удовлетворяется и при  $\theta = 0$ , так как  $g_p(1) = p$ . Очевидно, для любой точки  $\zeta_0 = e^{i\theta}$  существует такое целое  $k_0$ ,  $0 \leq k_0 \leq p-1$ , что точка  $z = e^{\frac{2\pi k_0 i}{p}} \zeta_0$  принадлежит дуге единичной окружности, на которой  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{p}$ . Для этого значения  $k_0$  получаем:

$$|g_p(e^{\frac{2\pi k_0 i}{p}} \zeta_0)| \geq \frac{2}{\pi} p.$$

Следовательно,

$$\max_{k=0, 1, \dots, p-1} |g_p(e^{\frac{2\pi k i}{p}} \zeta_0)| \geq \frac{2}{\pi} p.$$

Образует теперь для каждого натурального числа  $p$  многочлен

$$H_p(z) = g_p(z) + z^p g_p(e^{-\frac{2\pi i}{p}} z) + \\ + z^{2p} g_p(e^{-\frac{2\pi \cdot 2}{p} i} z) + \dots + z^{(p-1)p} g_p(e^{-\frac{2\pi(p-1)}{p} i} z).$$

Так как  $g_p(z)$  содержит члены со степенями  $z$  от нулевой до  $p-1$ ,  $z^p g_p(e^{-\frac{2\pi i}{p}} z)$  — члены со степенями  $z$  от  $p$  до  $2p-1$ ,  $z^{(p-1)p} g_p(e^{-\frac{2\pi(p-1)}{p} i} z)$  — члены со степенями  $z$  от  $(p-1)p$  до  $p^2-1$ , то в выражении  $H_p(z)$  отсутствуют подобные члены и  $H_p(z)$  является многочленом степени  $p^2-1$ , все коэффициенты которого по модулю равны единице.

Образует, наконец, ряд

$$H_1(z) + \sum_2^{\infty} \frac{1}{V^p} z^{1^2+2^2+\dots+(p-1)^2} H_p(z). \quad (7.3:10)$$

Так как, каждый член ряда в левой части представляет многочлен, содержащий степени  $z$  от  $1^2 + 2^2 + \dots + (p-1)^2$  до  $1^2 + 2^2 + \dots + (p-1)^2 + p^2 - 1$ , то два члена ряда не содержат одинаковых степеней  $z$ . Выписывая все степени  $z$  в порядке возрастания с теми коэффициентами, которые они имеют в составе выражения (7.3:10), получаем степенной ряд:

$$\sum_0^{\infty} a_n z^n. \quad (7.3:11)$$

Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  ( $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{p}}$ , где  $p$  — натуральное число, неограниченно возрастающее вместе с  $n$ ), то ряд (7.3:11) сходится внутри единичного круга. Покажем, что он расходится в каждой точке единичной окружности. Допустим противное и пусть ряд  $\sum_0^{\infty} a_n \xi^n$ , где  $|\xi| = 1$ , сходится. Тогда должен сходиться и ряд

$$\sum_{1 \leq p < \infty, 0 \leq m < p} \frac{1}{\sqrt{p}} \xi^{1^2 + \dots + (p-1)^2} \xi^{mp} g_p (e^{-\frac{2\pi m}{p} i} \xi),$$

получаемый из (7.3:11) путем объединения определенных групп соседних членов в одну. Но последний ряд не может сходиться, так как его члены не стремятся к нулю:

$$\begin{aligned} \max_{m=0, 1, \dots, p-1} \left| \frac{1}{\sqrt{p}} \xi^{1^2 + \dots + (p-1)^2} \xi^{mp} g_p (e^{-\frac{2\pi m}{p} i} \xi) \right| = \\ = \max_{m=0, 1, \dots, p-1} \frac{1}{\sqrt{p}} |g_p (e^{-\frac{2\pi m}{p} i} \xi)| \geq \frac{2p}{\pi \sqrt{p}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{p}. \end{aligned}$$

Итак, ряд Лузина (7.3:11) является степенным рядом с коэффициентами, стремящимися к нулю, не сходящимся ни в одной точке единичной окружности.

Из теоремы Фату следует, что все точки единичной окружности являются особыми для суммы построенного ряда. В самом деле, в правильных точках он должен был бы сходиться.

Отметим еще, что степенной ряд

$$a_0 - a_0 z + a_1 z^2 - a_1 z^3 + \dots + a_k z^{2k} - a_k z^{2k+1} + \dots,$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_k, \dots$  — коэффициенты ряда Лузина, сходится в точке  $z = 1$  (так как  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ ) и расходится во всех остальных точках единичной окружности. В самом деле, если допустить, что он сходится в некоторой точке  $\xi \neq 1$ ,  $|\xi| = 1$ , то должен сходиться также ряд

$$a_0 (1 - \xi) + a_1 \xi^2 (1 - \xi) + \dots + a_k \xi^{2k} (1 - \xi) + \dots,$$

а следовательно, должен сходиться и ряд

$$a_0 + a_1 \xi^2 + \dots + a_k \xi^{2k} + \dots,$$

т. е. ряд Лузина сходится в точке  $z = \xi^2$  единичной окружности, что невозможно.



## Глава четвертая

### РАЗЛИЧНЫЕ РЯДЫ. ВЫЧЕТЫ. ОБРАТНЫЕ И НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

#### § 1. Принцип компактности

1.1. Если  $\{z_n\}$  — произвольная последовательность точек, то, как мы знаем, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $\{z_{n_k}\}$ . При этом предел последней может оказаться несобственным числом, т. е. бесконечностью. Для того чтобы предел был всегда конечным, достаточно потребовать, чтобы последовательность  $\{z_n\}$  была ограниченной. Имеют ли место аналогичные предложения для произвольной последовательности функций  $\{f_n(z)\}$ , аналитических в некоторой области  $G$ ? Можно ли утверждать, например, что любая такая последовательность содержит некоторую равномерно сходящуюся внутри  $G$  подпоследовательность функций (предельная функция, по теореме Вейерштрасса, должна быть аналитической в области  $G$ )? Простые примеры показывают, что для произвольной последовательности аналитических функций такая подпоследовательность может и не существовать.

Рассмотрим, например, последовательность функций:  $z, 2z, \dots, nz, \dots$  в единичном круге. Она сходится к нулю при  $z = 0$  и к  $\infty$  при  $z \neq 0$ , и каждая ее подпоследовательность обладает теми же свойствами. Возьмем еще последовательность функций  $z, z^2, z^3, \dots, z^n, \dots$  в круге  $|z| < 2$ . Она сходится равномерно к нулю внутри единичного круга и сходится к бесконечности при  $1 < |z| < 2$ . Следовательно, любая ее подпоследовательность обладает теми же свойствами. Очевидно, в каждом из указанных примеров не существует ни одной подпоследовательности, которая равномерно сходилась бы внутри соответствующей области (круга  $|z| < 1$  — в первом примере и круга  $|z| < 2$  — во втором примере).

Назовем некоторое бесконечное множество  $E$  (или последовательность функций), аналитических в какой-либо области  $G$ , компактными в этой области, если любая последовательность  $\{f_n(z)\}$  функций, принадлежащих  $E$ , обладает подпоследовательностью  $\{f_{n_k}(z)\}$ , равномерно сходящейся внутри  $G$ . Наши примеры показывают, что последовательность  $\{nz\}$  некомпактна в единичном круге, а последовательность  $\{z^n\}$  некомпактна в круге  $|z| < 2$ .

Докажем следующее предложение:

**Лемма.** Если последовательность  $\{f_n(z)\}$  равномерно ограничена в круге  $K: |z - z_0| < R$ , т. е. существует положительное число  $M$  такое, что неравенства

$$|f_n(z)| < M$$

выполняются во всех точках круга  $K$  для любого  $n$ , то эта последовательность компактна в  $K$ .

**Доказательство.** Рассмотрим разложения функций  $f_n(z)$  в степенной ряд:

$$f_n(z) = A_0^{(n)} + A_1^{(n)}(z - z_0) + \dots + A_h^{(n)}(z - z_0)^h + \dots \quad (1.1:1)$$

В силу неравенств Коши для коэффициентов степенного ряда (см. гл. третью, п. 5.4), имеем для каждого  $\rho$ ,  $0 < \rho < R$ :

$$|A_h^{(n)}| \leq \frac{M_n(\rho)}{\rho^h},$$

где

$$M_n(\rho) = \max_{|z - z_0| = \rho} |f_n(z)| < M.$$

Заставляя  $\rho$  стремиться к пределу  $R$ , получаем для любого целого неотрицательного  $k$

$$|A_h^{(n)}| \leq \frac{M}{R^k}, \quad n = 1, 2, \quad (1.1:2)$$

Отсюда следует, что любая последовательность одноименных тейлоровских коэффициентов функций  $f_n(z)$  (т. е. коэффициентов при фиксированной степени  $z$ ) ограничена.

Пользуясь этим свойством, выберем из последовательности  $\{f_n(z)\}$  такую подпоследовательность:

$$f_{n_1}'(z), f_{n_2}'(z), \dots, f_{n_m}'(z), \quad (1.1:3)$$

чтобы для нее сходилась к некоторому пределу последовательность свободных членов  $\{A_0^{(n_m)}\}$  соответствующих тейлоровских разложений. Из полученной подпоследовательности выберем новую:

$$f_{n_1}''(z), f_{n_2}''(z), \dots, f_{n_m}''(z), \quad (1.1:4)$$

так, чтобы для нее сходилась также и последовательность коэффициентов при первой степени  $z - z_0$  в тейлоровских разложениях этих функций. Вообще, если какая-либо подпоследовательность функций

$$f_{n_1}^{(m)}(z), f_{n_2}^{(m)}(z), \dots, f_{n_m}^{(m)}(z), \quad (1.1:5)$$

уже выбрана так, что для нее сходятся к конечным пределам последовательности коэффициентов тейлоровских разложений при степенях  $(z - z_0)^0, \dots, (z - z_0)^{m-1}$ , то из нее извлекаем подпоследовательность:

$$f_{n_1^{(m+1)}}(z), f_{n_2^{(m+1)}}(z), \dots, f_{n_{m+1}^{(m+1)}}(z),$$

так, чтобы для нее сходилась к конечному пределу еще и последовательность коэффициентов при  $(z - z_0)^m$ .

Пусть подпоследовательности (1.1:5) построены для любого натурального  $m$ ; извлечем из них диагональную последовательность, образованную функциями, занимающими  $m$ -е место в последовательности с номером  $m$ . Получим последовательность:

$$f_{v_1}(z), f_{v_2}(z), \dots, f_{v_m}(z), \quad (1.1:6)$$

где положено  $v_m = n_m^{(m)}$  и

$$f_{v_m}(z) = A_0^{(v_m)} + A_1^{(v_m)}(z - z_0) + \dots + A_k^{(v_m)}(z - z_0)^k + \dots$$

Очевидно, (1.1:6) является подпоследовательностью первоначальной последовательности  $\{f_n(z)\}$ . Кроме того, для любого целого неотрицательного  $k$  все функции (1.1:6), начиная с  $(k+1)$ -й функции  $f_{v_{k+1}}(z)$ , принадлежат подпоследовательности

$$f_{n_1^{(k+1)}}(z), f_{n_2^{(k+1)}}(z), \dots, f_{n_k^{(k+1)}}(z),$$

Следовательно, для функций (2.1:6) сходятся последовательности коэффициентов  $\{A_k^{(v_m)}\}$  для любого фиксированного целого неотрицательного  $k$ . Положим,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_k^{(v_m)} = A_k.$$

Так как каждый из коэффициентов  $A_k^{(v_m)}$  удовлетворяет неравенству (1.1:2), то то же неравенство выполняется и для чисел  $A_k$ :

$$|A_k| \leq \frac{M}{R^k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.1:7)$$

Отсюда следует, что

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|A_k|} \leq \frac{1}{R}$$

и в силу формулы Коши — Адамара (гл. третья, п. 5.1) радиус сходимости степенного ряда

$$A_0 + A_1(z - z_0) + \dots + A_k(z - z_0)^k + \dots \quad (1.1:8)$$

не меньше, чем  $R$ . Поэтому сумма  $f(z)$  ряда (1.1:8) представляет функцию, аналитическую в круге  $K$ . Покажем, что последовательность (1.1:6) равномерно сходится к  $f(z)$  внутри  $K$ . Достаточно убедиться, что равномерная сходимость имеет место в каждом замкнутом круге  $|z - z_0| \leq \rho < R$ .

Пусть  $\varepsilon$  — произвольное положительное число; выберем натуральное число  $n_0$  так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{n_0+1}^{\infty} M \left( \frac{\rho}{R} \right)^n < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1.1:9)$$

Тогда, в силу неравенств (1.1:2) и (1.1:7)

$$\sum_{n_0+1}^{\infty} |A_n^{(v_m)}| \rho^n \leq \sum_{n_0+1}^{\infty} M \left( \frac{\rho}{R} \right)^n < \frac{\varepsilon}{3}$$

и

$$\sum_{n_0+1}^{\infty} |A_n| \rho^n \leq \sum_{n_0+1}^{\infty} M \left( \frac{\rho}{R} \right)^n < \frac{\varepsilon}{3},$$

и, следовательно, при  $|z - z_0| \leq \rho$  будем иметь:

$$\begin{aligned} |f_{v_m}(z) - f(z)| &= \left| \sum_0^{\infty} (A_n^{(v_m)} - A_n) (z - z_0)^n \right| \leq \\ &\leq \sum_0^{n_0} |A_n^{(v_m)} - A_n| \rho^n + \sum_{n_0+1}^{\infty} |A_n^{(v_m)}| \rho^n + \sum_{n_0+1}^{\infty} |A_n| \rho^n < \\ &< \sum_0^{n_0} |A_n^{(v_m)} - A_n| \rho^n + \frac{2}{3} \varepsilon. \quad (1.1:10) \end{aligned}$$

Так как  $n_0$  здесь фиксировано и  $\lim_{m \rightarrow \infty} A_n^{(v_m)} = A_n$ , то при достаточно большом  $m > m_0$

$$\sum_0^{n_0} |A_n^{(v_m)} - A_n| \rho^n < \frac{\varepsilon}{3}$$

Следовательно,

$$|f_{v_m}(z) - f(z)| < \varepsilon \quad (|z - z_0| \leq \rho, \quad m > m_0).$$

Таким образом, установлена равномерная сходимость последовательности (1.1:6) внутри круга  $K$ . Мы нашли, что последовательность (1.1:1) содержит подпоследовательность (1.1:6),

равномерно сходящуюся внутри  $K$ . Этим и заканчивается доказательство леммы.

Чтобы сформулировать необходимое и достаточное условие компактности в любой области  $G$ , условимся называть множество функций  $E$  равномерно ограниченным внутри области  $G$ , если для любого замкнутого множества точек  $F$  области  $G$  существует положительное число  $M(F)$  такое, что каждая функция  $f(z) \in E$  удовлетворяет во всех точках множества  $F$  неравенству

$$|f(z)| \leq M(F).$$

Докажем теперь следующее предложение:

*Теорема Монтеля. Для того чтобы множество  $E$  функций, аналитических в данной области  $G$ , было компактным в этой области, необходимо и достаточно, чтобы оно было равномерно ограниченным внутри этой области.*

Условие теоремы необходимо для компактности множества  $E$ . В самом деле, пусть  $E$  компактно, но не является равномерно ограниченным внутри  $G$ . Тогда должно существовать замкнутое множество  $F$  точек области  $G$ , на котором модули функций, принадлежащих  $E$ , могут принимать сколь угодно большие значения. Иными словами, для каждого натурального  $n$  можно будет указать такую функцию  $f_n(z) \in E$  и такую точку  $z_n \in F$ , что в этой точке будет выполняться неравенство

$$|f_n(z_n)| > n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.1:11)$$

В силу компактности множества  $E$  из  $\{f_n(z)\}$ , можно извлечь подпоследовательность  $\{f_{n_k}(z)\}$ , равномерно сходящуюся внутри  $G$  и, в частности, равномерно сходящуюся на  $F$ . Предельная функция  $f(z)$  будет аналитической в  $G$  и, следовательно, непрерывной на  $F$ . Обозначим  $\max_F |f(z)|$  через  $M (< \infty)$ . Так как в силу равномерной сходимости во всех точках множества  $F$  должны выполняться неравенства

$$|f_{n_k}(z) - f(z)| < 1 \quad \text{при } n_k > N,$$

то

$$|f_{n_k}(z)| \leq |f(z)| + 1 \leq M + 1$$

во всех точках множества  $F$  и для всех  $n_k > N$ . Но это противоречит тому, что значения  $|f_{n_k}(z_{n_k})|$  сколь угодно велики (превышают  $n_k$ ). Из этого противоречия следует, что условие теоремы является необходимым для компактности.

Докажем, что оно является также и достаточным. Пусть множество функций  $E$  равномерно ограничено внутри области  $G$ . Убедимся сначала, что для любого замкнутого множества  $F$  точек области  $G$

из произвольной последовательности функций  $\{f_n(z)\}$ , принадлежащих  $E$ , можно извлечь равномерно сходящуюся на  $F$  подпоследовательность. С этой целью рассмотрим для каждой точки  $z$  множества  $F$  какую-либо окрестность  $U_z$ , принадлежащую  $G$  вместе со своей границей, и пусть  $u_z$  — окрестность с тем же центром и меньшим радиусом (например, в два раза). В силу леммы Гейне — Бореля существует конечное число таких окрестностей:  $u_{z_1}, u_{z_2},$

$u_{z_q}$ , покрывающих  $F$ . В каждой из соответствующих окрестностей  $U_{z_j}$  ( $j = 1, \dots, q$ ) модули функций последовательности  $\{f_n(z)\}$  будут равномерно ограничены:

$$|f_n(z)| < M_j, \quad z \in U_{z_j} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Следовательно, по доказанной лемме, можно извлечь из  $\{f_n(z)\}$  подпоследовательность  $\{f_{v'_k}(z)\}$ , равномерно сходящуюся внутри  $U_{z_1}$ , из  $\{f_{v'_k}(z)\}$  — подпоследовательность  $\{f_{v''_k}(z)\}$ , равномерно сходящуюся внутри  $U_{z_2}$ , и т. д., наконец, из  $\{f_{v^{(q-1)}_k}(z)\}$  — подпоследовательность  $\{f_{v^{(q)}_k}(z)\}$ , равномерно сходящуюся внутри  $U_{z_q}$ .

В силу построения, последовательность  $\{f_{v^{(q)}_k}(z)\}$  равномерно сходится внутри каждой из окрестностей  $U_{z_j}$  ( $j = 1, \dots, q$ ), в частности равномерно сходится в каждой окрестности  $u_{z_j}$  ( $j = 1, \dots, q$ ), а следовательно, равномерно сходится и на множестве  $F$ , покрываемом окрестностями  $u_{z_j}$  ( $j = 1, \dots, q$ ).

Итак, последовательность  $\{f_n(z)\}$  для любого замкнутого множества  $F \in G$  содержит подпоследовательность, равномерно сходящуюся на  $F$ .

Рассмотрим последовательность замкнутых множеств  $\{F_v\}$  ( $v = 1, 2, \dots$ ), из которых каждое  $F_v$  образовано всеми точками области  $G$ , расстояние которых до границы не меньше, чем  $\frac{1}{v}$  (замкнутость множества  $F_v$  следует из того, что расстояние  $\rho(z, \Gamma)$  от точки  $z$  до границы  $\Gamma$  области  $G$  является непрерывной функцией от  $z$  (п. 3.8 гл. первой), и следовательно, если  $z_0$  есть предельная точка для  $F_v$ , то в ней

$$\rho(z_0, \Gamma) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in F_v}} \rho(z, \Gamma) \geq \frac{1}{v}.$$

Очевидно, при достаточно большом  $v$  ( $v \geq v_0$ ) все множества  $F_v$  не пустые; кроме того,  $F_{v+1} \supset F_v$  ( $v = 1, 2, \dots$ ) и, наконец, каждое замкнутое множество  $F \subset G$  принадлежит всем  $F_v$ , начиная с некоторого  $v$  (если расстояние от  $F$  до границы области  $G$  есть

$\rho > 0$ , то достаточно взять  $\frac{1}{v} < \rho$ , чтобы было  $F \subset F_v$ ). Иными словами, последовательность  $\{F_v\}$  является возрастающей последовательностью замкнутых множеств, приближающих  $G$  изнутри. Извлечем из  $\{f_n(z)\}$  подпоследовательность  $\{f_{n_k}'(z)\}$ , равномерно сходящуюся на  $F_1$ , далее, из  $\{f_{n_k}'(z)\}$  извлечем подпоследовательность  $\{f_{n_k}''(z)\}$ , равномерно сходящуюся на  $F_2$ , и т. д. Мы получим подпоследовательности  $\{f_{n_k}^{(m)}(z)\}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), из которых каждая (соответствующая номеру  $m$ ) содержится в предыдущей и сходится равномерно на  $F_m$ . Очевидно, диагональная последовательность

$$f_{n_1}'(z), f_{n_2}''(z), \dots, f_{n_m}^{(m)}(z),$$

содержится в  $\{f_n(z)\}$  и для любого натурального  $n$  все ее члены, начиная с  $f_{n_m}^{(m)}(z)$ , принадлежат подпоследовательности  $\{f_{n_k}^{(m)}(z)\}$ .

Поэтому она равномерно сходится на любом множестве  $F_m$ , а следовательно, равномерно сходится внутри области  $G$  (ибо, как мы заметили выше, каждое замкнутое множество  $F \subset G$  содержится в  $F_m$  при  $m$  достаточно большом). Итак, любая последовательность  $\{f_n(z)\}$  функций множества  $E$  содержит подпоследовательность, равномерно сходящуюся внутри области  $G$ , чем и заканчивается доказательство теоремы Монтеля.

В ряде вопросов теории функций вводится понятие более общее, чем рассмотренное здесь понятие компактности.

Назовем последовательность функций  $\{f_n(z)\}$ , аналитических в области  $G$ , равномерно сходящейся к бесконечности внутри области  $G$ , если для любого замкнутого множества  $F \subset G$  и для любого положительного числа  $M$  существует такое  $N = N(M, F)$ , что во всех точках множества  $F$  и для каждого  $n > N = N(M, F)$  выполняются неравенства

$$|f_n(z)| > M.$$

Множество  $E$  функций, аналитических в области  $G$ , называется нормальным семейством функций в этой области, если любая последовательность функций  $\{f_n(z)\}$ , принадлежащих  $E$ , обладает подпоследовательностью  $\{f_{n_k}(z)\}$ , равномерно сходящейся внутри области  $G$  к аналитической функции или к бесконечности.

В силу этого определения каждое компактное множество аналитических функций является также нормальным семейством. Поэтому условие равномерной ограниченности внутри области  $G$ , являясь

условием, достаточным для компактности, будет достаточным также и для нормальности. Но необходимым оно теперь, конечно, не является, как это видно из примера последовательности функций  $\{z + n\}$ , равномерно сходящейся к  $\infty$  в единичном круге и, следовательно, нормальной. К изучению нормальных семейств мы вернемся в конце главы восьмой.

**1.2.** Важное свойство компактных множеств аналитических функций устанавливается следующим предложением.

**Т е о р е м а В и т а л и.** Если последовательность  $\{f_n(z)\}$  функций, аналитических в области  $G$ , компактна в этой области и сходится на некотором множестве точек  $e \subset G$ , имеющем по крайней мере одну предельную точку, принадлежащую области, то эта последовательность равномерно сходится внутри  $G$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В силу компактности последовательности  $\{f_n(z)\}$ , из любой ее подпоследовательности  $\{f_{n_k}(z)\}$  можно извлечь другую подпоследовательность  $\{f_{n_k''}(z)\}$ , равномерно сходящуюся внутри  $G$ . Покажем, что все подпоследовательности последовательности  $\{f_n(z)\}$ , равномерно сходящиеся внутри  $G$ , сходятся к одной и той же предельной функции  $f(z)$ . Пусть, в самом деле,  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{v_k}(z) = f(z)$  и  $\lim_{h \rightarrow \infty} f_{\mu_h}(z) = \varphi(z)$ , где  $\{f_{v_k}(z)\}$  и  $\{f_{\mu_h}(z)\}$  — две равномерно сходящиеся внутри  $G$  подпоследовательности последовательности  $\{f_n(z)\}$ . Функции  $f(z)$  и  $\varphi(z)$  являются аналитическими в области  $G$  (в силу теоремы Вейерштрасса); кроме того, они совпадают на множестве  $e$ , имеющем предельные точки в области  $G$  (в точках множества  $e$  существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ ); поэтому тот же предел в этих точках имеют и подпоследовательности  $\{f_{v_k}(z)\}$  и  $\{f_{\mu_h}(z)\}$ . Следовательно, по теореме единственности (гл. третья, п. 6.1) функции  $f(z)$  и  $\varphi(z)$  совпадают во всей области  $G$   $\varphi(z) = f(z)$ .

Докажем, что вся последовательность  $\{f_n(z)\}$  равномерно сходится внутри  $G$  к функции  $f(z)$ . Допуская, что это утверждение неверно, мы должны иметь замкнутое множество  $F \subset G$ , на котором  $\{f_n(z)\}$  не сходится равномерно к  $f(z)$ . Следовательно, существуют положительное число  $\alpha$  и такие номера  $n_k$  и соответствующие им точки  $z_k$  множества  $F$ , что имеют место неравенства

$$|f_{n_k}(z_k) - f(z_k)| \geq \alpha (> 0), \quad k = 1, 2, \quad (1.2:1)$$

Рассмотрим последовательность  $\{f_{n_k}(z)\}$ . Она содержит подпоследовательность  $\{f_{n_k'}(z)\}$ , равномерно сходящуюся на  $F$ , причем мы установили выше, что предельная функция есть  $f(z)$ . Поэтому

$$|f_{n_k'}(z) - f(z)| < \alpha \text{ при } z \in F, \quad n_k' > N$$



и, в частности,

$$|f_{n_k}'(z_k) - f'(z_k)| < \alpha \quad (1.2:2)$$

при всех достаточно больших  $k$ . Но неравенства (1.2:2) противоречат неравенствам (1.2:1). Следовательно, наше допущение о том, что последовательность  $\{f_n(z)\}$  не сходится равномерно внутри  $G$  к функции  $f(z)$ , неверно. Этим и заканчивается доказательство теоремы Витали.

Приведем здесь одно из простейших приложений теоремы Витали, на которое мы будем ссылаться в дальнейшем. Пусть  $G$  — произвольная область плоскости  $z$  и  $\Gamma$  — спрямляемая кривая плоскости  $w$ . Рассмотрим функцию двух переменных  $F(z, w)$ , аналитическую по  $z$  в области  $G$  для каждого  $w$ , принадлежащего  $\Gamma$ . Пусть эта функция является непрерывной по  $w$  на  $\Gamma$  для каждого  $z \in G$  и ограниченной по модулю внутри области  $G$  равномерно относительно  $w \in \Gamma$ . При этих условиях можно утверждать, что функция

$$f(z) = \int_{\Gamma} F(z, w) dw$$

является аналитической в области  $G$ , причем любая последовательность интегральных сумм

$$f_n(z) = \sum_0^n F(z, w_k^{(n)}) (w_{k+1}^{(n)} - w_k^{(n)}),$$

сходящаяся к интегралу для каждого  $z$ , принадлежащего  $G^*$ ), равномерно сходится к  $f(z)$  внутри  $G$ . В силу теоремы Вейерштрасса о рядах аналитических функций достаточно доказать справедливость последнего утверждения. Но оно немедленно следует из теоремы Витали в силу того, что последовательность  $\{f_n(z)\}$  сходится в области  $G$  и является равномерно ограниченной на каждом замкнутом ограниченном множестве  $E \subset G$ :

$$|f_n(z)| \leq M_E \sum_0^n |w_{k+1}^{(n)} - w_k^{(n)}| \leq M_E L,$$

где  $M_E$  — верхняя грань  $|F(z, w)|$  при  $z \in E$  и  $w \in \Gamma$  и  $L$  — длина кривой  $\Gamma$ . Из той же теоремы Вейерштрасса следует:

$$f^{(m)}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_0^n \frac{\partial^m F(z, w_k^{(n)})}{\partial z^m} (w_{k+1}^{(n)} - w_k^{(n)}) = \int_{\Gamma} \frac{\partial^m F(z, w)}{\partial z^m} dw$$

для любого натурального  $m$ .

\*) Если уравнение кривой  $\Gamma$  есть  $w = \varphi(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ) и  $w_k^{(n)} = \varphi(t_k^{(n)})$ , то достаточно потребовать, чтобы  $\delta_n = \max_{k=0, 1, \dots, n-1} (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)})$  стремилось к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

Распространим полученное предложение на тот важный для приложений случай, когда  $\Gamma$  есть неограниченная кривая:  $w = \varphi(t)$ ,  $\alpha \leq t < \beta$ ,  $\lim_{t \rightarrow \beta} \varphi(t) = \infty$ , для которой каждая дуга  $\Gamma_\tau$ :  $\alpha \leq t \leq \tau < \beta$  является спрямляемой.

Пусть  $F(z, w)$  — функция, аналитическая по  $z$  в области  $G$  для каждого  $w$ , фиксированного на  $\Gamma$ , и непрерывная по  $w$  на  $\Gamma$  для каждого  $z$ , фиксированного в области  $G$ . Предположим, далее, что для любого  $\tau < \beta$  функция эта ограничена по модулю внутри области  $G$  равномерно относительно  $w \in \Gamma_\tau$ . Иными словами, для каждого ограниченного замкнутого множества  $E \subset G$  и для каждого  $\tau$ ,  $\alpha \leq \tau < \beta$ , существует число  $M_E(\tau) < \infty$  такое, что

$$|F(z, w)| \leq M_E(\tau) \quad \text{при } z \in E \text{ и } w \in \Gamma_\tau.$$

При этих условиях, по предыдущему, интегралы

$$\int_{\Gamma_\tau} F(z, w) dw = f_\tau(z)$$

представляют функции, аналитические в области  $G$ .

Мы предположим, наконец, что эти интегралы абсолютно сходятся при  $\tau \rightarrow \infty$ , т. е. для каждого  $z \in G$  существует конечный предел  $\lim_{\tau \rightarrow \beta} \int_{\Gamma_\tau} |F(z, w)| ds = \int_{\Gamma} |F(z, w)| ds$ , причем функция

$$\int_{\Gamma} |F(z, w)| ds \text{ ограничена внутри области } G.$$

Тогда семейство аналитических функций  $\{f_\tau(z)\}$  будет равномерно ограниченным внутри области  $G$  (так как  $|f_\tau(z)| \leq \int_{\Gamma_\tau} |F(z, w)| ds \leq \int_{\Gamma} |F(z, w)| ds$ ), и, следовательно, к нему или к любой последовательности  $\{f_{\tau_n}(z)\}$ , где  $\tau_n \rightarrow \beta$ , можно будет применить теорему Витали.

Окончательно получаем, что несобственный интеграл

$$\int_{\Gamma} F(z, w) dw = f(z) = \lim_{\tau \rightarrow \beta} f_\tau(z)$$

представляет, при высказанных предположениях, функцию, аналитическую в области  $G$ .

Кроме того, по предыдущему, будем иметь для каждого натурального  $m$  и каждого  $\tau < \beta$ :

$$f_\tau^{(m)}(z) = \int_{\Gamma_\tau} \frac{\partial^m F(z, w)}{\partial z^m} dw;$$

поэтому на основании равномерной сходимости семейства  $\{f_\tau(z)\}$  внутри области  $G$  получим:

$$f^{(m)}(z) = \lim_{\tau \rightarrow \beta} f_\tau^{(m)}(z) = \lim_{\tau \rightarrow \beta} \int_{\Gamma_\tau} \frac{\partial^m F(z, w)}{\partial z^m} d\omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial^m F(z, w)}{\partial z^m} d\omega.$$

В виде примера рассмотрим так называемое преобразование Лапласа функции  $\varphi(t)$ :

$$\int_0^\infty e^{-zt} \varphi(t) dt.$$

Здесь интегрирование ведется вдоль положительной части действительной оси ( $\Gamma: x=t, 0 \leq t < \infty$ ) и  $\varphi(t)$  обозначает функцию действительного переменного, определенную и непрерывную при  $0 \leq t < \infty$ . Полагая

$$F(z, t) = e^{-zt} \varphi(t),$$

мы видим, что  $F(z, t)$  есть функция, аналитическая по  $z$  во всей плоскости. Кроме того, из равенства

$$|F(z, t)| = e^{-xt} |\varphi(t)|$$

следует ограниченность  $|F(z, t)|$  в каждой ограниченной области плоскости  $z$  и для всех  $t$ , принадлежащих произвольно фиксированному конечному интервалу. Если мы допустим еще, что для некоторого действительного числа  $C$  и положительного числа  $\alpha$  выполняется неравенство

$$|\varphi(t)| < \alpha e^{Ct} \quad \text{при } t > T(\alpha, C),$$

то для каждого  $z$ , принадлежащего полуплоскости  $x = \operatorname{Re} z > C$ , будем иметь:

$$|F(z, t)| < \alpha e^{-t(x-C)} \quad \text{при } t > T(\alpha, C).$$

Отсюда прежде всего следует абсолютная сходимость интеграла

$$\int_0^\infty |F(z, t)| dt$$

в полуплоскости  $\operatorname{Re} z > C$  и, далее, ограниченность этого интеграла в каждой полуплоскости  $\operatorname{Re} z \geq C + \varepsilon, \varepsilon > 0$ ; если  $x \geq C + \varepsilon$ , то

$$\int_0^\infty |F(z, t)| dt < A + \alpha \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} dt = A + \frac{\alpha}{\varepsilon},$$

где  $A$  — какое-либо положительное число, превосходящее

$$\int_0^{T(\alpha, C)} |F(z, t)| dt,$$

например,

$$A = \int_0^{T(\alpha, C)} e^{-Ct} |\varphi(t)| dt.$$

Итак, из условия

$$|\varphi(t)| < \alpha e^{Ct} \quad \text{при} \quad t > T(\alpha, C)$$

следует, что преобразование Лапласа функции  $\varphi(t)$

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} \varphi(t) dt$$

представляет функцию, однозначную и аналитическую в полуплоскости  $\operatorname{Re} z > C$ . Для производной порядка  $m$  получаем в той же полуплоскости формулу:

$$f^{(m)}(z) = \int_0^{\infty} (-t)^m e^{-zt} \varphi(t) dt.$$

Сравнение преобразования Лапласа  $\int_0^{\infty} e^{-zt} \varphi(t) dt$  с рядом

Дирихле  $\sum_1^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}$ , также изображающим функцию, аналитическую в полуплоскости (см. ниже, п. 2.2), показывает, что первое можно рассматривать как интегральный аналог второго, подобно тому, например, как преобразование Фурье  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} \varphi(t) dt$  можно рассматривать как интегральный аналог ряда Фурье (записанного в комплексной форме)  $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{ikx}$ .

## § 2. Ряд Лорана. Ряды Дирихле. Теорема Рунге

**2.1.** Среди классов рядов аналитических функций, отличных от степенных, наиболее близкими к степенным по своему происхождению и свойствам являются ряды, расположенные по целым отрицательным степеням  $z - z_0$ :

$$A_0 + A_1(z - z_0)^{-1} + A_2(z - z_0)^{-2} + \dots + A_n(z - z_0)^{-n} + \dots \quad (2.1:1)$$

Полагая  $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$ , преобразуем (2.1:1) ряд к виду:

$$A_0 + A_1\zeta + A_2\zeta^2 + \dots + A_n\zeta^n + \dots \quad (2.1:2)$$

Радиус сходимости последнего ряда есть  $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A_n|}}$ ; если

$R = 0$ , то ряд (2.1:2) сходится только в точке  $\xi = 0$ ; если  $0 < R < \infty$ , то ряд абсолютно сходится в круге  $|\xi| < R$  и расходится вне его; наконец, если  $R = \infty$ , то ряд абсолютно сходится в каждой конечной точке плоскости. Отсюда в силу соотношения  $|\xi| = \frac{1}{|z - z_0|}$

следует, что если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A_n|} = \infty$ , то ряд (2.1:1) расходится в каждой конечной точке; если  $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A_n|} < \infty$ , то он абсолютно сходится при  $|z - z_0| > \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A_n|}$  и расходится при  $|z - z_0| < \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A_n|}$ ; наконец, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A_n|} = 0$ , то ряд абсолютно сходится во всех точках плоскости, за исключением точки  $z = z_0$ . Иными словами, область сходимости ряда (2.1:1) есть внешность круга радиуса  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A_n|}$  с центром  $z_0$ , которая при  $r = \infty$  вырождается в бесконечно удаленную точку, при  $0 < r < \infty$  является внешностью круга в собственном смысле слова и, наконец, при  $r = 0$  превращается во всю плоскость, за исключением из нее точки  $z = z_0$ . Будем считать, что  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A_n|} < \infty$ ; тогда действительно существует область сходимости ряда (2.1:1)  $|z - z_0| > r$ , которую мы обозначим через  $K$ . Так как ряд (2.1:2) сходится равномерно на каждом замкнутом множестве точек круга  $k: |\xi| < R$  и линейное преобразование  $\xi = \frac{1}{z - z_0}$  переводит любое замкнутое множество точек круга  $k$  в некоторое замкнутое множество точек области  $K$  и обратно, то ряд (2.1:1) равномерно сходится внутри области  $K$ . В этой области он определяет функцию  $F(z)$ :

$$F(z) = A_0 + A_1(z - z_0)^{-1} + \dots + A_n(z - z_0)^{-n} + \dots, \quad (2.1:1')$$

аналитическую (по теореме Вейерштрасса) во всех конечных точках области  $K$ . В бесконечно удаленной точке  $F(z)$  принимает значение  $A_0$ :  $F(\infty) = A_0$ . Мы будем, по определению, называть функцию  $F(z)$  аналитической в бесконечно удаленной точке. Таким образом, аналитичность функции в бесконечно удаленной точке будет характеризоваться наличием разложения вида (2.1:1'), сходящегося в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки.

Рядом, обобщающим понятие ряда, расположенного только по целым неотрицательным степеням  $z - z_0$  (степенного ряда) или только по целым неположительным степеням  $z - z_0$ , является ряд

Лорана. Так называется ряд вида

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (2.1:3)$$

Ряд этот понимается как сумма двух рядов:

$$\sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{и} \quad \sum_1^{\infty} a_{-m} (z - z_0)^{-m} \quad (2.1:4)$$

и рассматривается как сходящийся тогда и только тогда, когда сходятся оба ряда (2.1:4). Итак, по определению:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_0^{\nu} a_n (z - z_0)^n + \lim_{\mu \rightarrow \infty} \sum_1^{\mu} a_{-m} (z - z_0)^{-m},$$

или, что то же самое,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \lim_{\substack{\nu \rightarrow \infty \\ \mu \rightarrow \infty}} \sum_{-\mu}^{\nu} a_n (z - z_0)^n. \quad (2.1:5)$$

Здесь  $\mu$  и  $\nu$  стремятся к бесконечности независимо друг от друга. В последнюю запись вкладывается следующий смысл: для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $N(\varepsilon)$ , что неравенство

$$\left| \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n - \sum_{-\mu}^{\nu} a_n (z - z_0)^n \right| < \varepsilon$$

выполняется при  $\nu > N(\varepsilon)$  и  $\mu > N(\varepsilon)$ .

В силу определения, свойства абсолютной и равномерной сходимости ряда Лорана сводятся к соответствующим свойствам рядов (2.1:4).

Обозначим  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  через  $\lambda$  и  $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|a_{-m}|}$  через  $r$ . Тогда

первый из рядов (2.1:4) сходится абсолютно и равномерно внутри области  $G$ , представляющей внутренность окружности  $\Gamma: |z - z_0| = \frac{1}{\lambda} = R$ , и расходится во внешности этой окружности, а второй из рядов (2.1:4) сходится абсолютно и равномерно внутри области  $g$ , представляющей внешность окружности  $\gamma: |z - z_0| = r$ , и расходится во внутренности этой окружности.

Области  $G$  и  $g$  имеют общие точки тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$r < R. \quad (2.1:6)$$

В этом случае общая часть областей  $G$  и  $g$  представляет круговое кольцо  $D$ :

$$r < |z - z_0| < R. \quad (2.1:7)$$

Внутри области (2.1:7) оба ряда сходятся абсолютно и равномерно; следовательно, внутри этой области абсолютно и равномерно сходится и ряд Лорана (2.1:3), представляющий в  $D$  некоторую аналитическую функцию:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad r < |z - z_0| < R. \quad (2.1:8)$$

В каждой точке вне области  $D$  расходится один из рядов (2.1:4), тогда как другой ряд продолжает сходитьсь; отсюда следует, что вне области  $D$  ряд Лорана расходится. Итак, *область сходимости ряда Лорана есть круговое кольцо* (при условии (2.1:6)). В дальнейшем, говоря о рядах Лорана, мы всегда будем предполагать, что выполнено условие (2.1:6), без которого не существует области сходимости ряда.

Если  $r < \rho < R$ , то ряд (2.1:8) равномерно сходится на окружности  $\gamma: |z - z_0| = \rho$ ; он будет равномерно сходитьсь на  $\gamma$  и после того, как все члены будут умножены на  $\frac{1}{2\pi i} (z - z_0)^{-k-1}$ , где  $k$  — произвольное целое число. Интегрируя полученный ряд на  $\gamma$ , найдем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (z - z_0)^{n-k-1} dz.$$

Все интегралы в правой части, как показывает простое вычисление (следует воспользоваться уравнением окружности  $\gamma: z = z_0 + \rho e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ), равны нулю, кроме одного, соответствующего  $n = k$  и равного  $2\pi i$ . Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = a_k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (2.1:9)$$

Мы получили выражения для коэффициентов ряда Лорана через сумму этого ряда. Отсюда следует, что если суммы рядов Лорана:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{и} \quad \varphi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_k (z - z_0)^k,$$

сходящихся в круговых кольцах  $D$  и  $\Delta$ , содержащих одну и ту же окружность  $|z - z_0| = \rho$ , совпадают в точках этой окружности, то коэффициенты обоих рядов попарно равны:

$$a_k = b_k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

т. е. ряды тождественны. В частности, ряды будут тождественными, если кольца  $D$  и  $\Delta$  совпадают друг с другом и  $f(z) = \varphi(z)$  во всех

точках кольца  $D$ . Из изложенного вытекает, что *разложения в ряд Лорана обладают свойством единственности*.

Опираясь на свойство единственности, получим совершенно так же, как и в п. 5.2 главы третьей, что если разложение  $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$  представляет четную функцию, то в нем равны нулю все коэффициенты при нечетных степенях  $z$ , а если нечетную, то равны нулю все коэффициенты при четных степенях.

Докажем следующее важное предложение.

**Т е о р е м а Л о р а н а.** *Каждая функция  $f(z)$ , однозначная и аналитическая в круговом кольце  $D$ :  $r < |z - z_0| < R$ , представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана:*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Заметим, что в условиях этой теоремы кольцо может вырождаться в круг с выколотым центром ( $r = 0$ ,  $R < \infty$ ), во внешность круга с выколотой бесконечно удаленной точкой ( $0 < r$ ,  $R = \infty$ ) и, наконец, во всю плоскость с двумя выколотыми точками  $z_0$  и  $\infty$  ( $r = 0$  и  $R = \infty$ ). Указанные случаи не исключаются при дальнейшем доказательстве.

Пусть  $z$  — какая-либо точка кольца  $D$ . Образует новое кольцо  $D'$ :

$$r' < |\zeta - z_0| < R',$$

лежащее внутри первоначального и содержащее точку  $z$  (рис. 66). Чтобы построить его, достаточно взять:

$$r < r' < |z - z_0| < R' < R.$$

Пусть еще  $|\zeta - z| = \rho$  — окружность с центром в  $z$ , лежащая внутри  $D'$ . Так как

$$\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

является аналитической функцией от  $\zeta$  в области  $D$ , исключая точку  $\zeta = z$ , то по интегральной теореме Коши для системы контуров (п. 2.5 главы третьей) будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{R'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{r'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad (2.1:10)$$

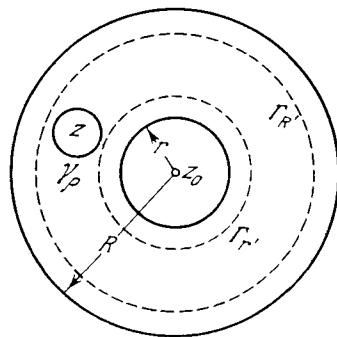


Рис. 66.



где  $\Gamma_{R'}$ ,  $\Gamma_{r'}$  и  $\gamma_\rho$  обозначают соответственно окружности:

$$|\zeta - z_0| = R', \quad |\zeta - z_0| = r' \quad \text{и} \quad |\zeta - z| = \rho,$$

проходимые при интегрировании в направлении против часовой стрелки. Но последний интеграл в формуле (2.1:10) есть интеграл Коши и, следовательно, равен  $f(z)$ . Поэтому

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{R'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{r'}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad (2.1:11)$$

Представим  $\frac{1}{\zeta - z}$  под знаком первого интеграла ( $\zeta \in \Gamma_{R'}$ ) в виде суммы геометрического ряда со знаменателем  $\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$ , модуль которого

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{R'} = \theta < 1.$$

Получим:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_0^\infty \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \quad (2.1:12)$$

Так как для всех точек  $\zeta$ , принадлежащих  $\Gamma_{R'}$ , модуль общего члена последнего ряда есть

$$\left| \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| = \frac{1}{R'} \theta^n \quad (0 < \theta < 1),$$

то ряд (2.1:12) равномерно сходится на  $\Gamma_{R'}$  (относительно  $\zeta$ ). Равномерно будет сходиться также и ряд, получаемый из (2.1:12) путем умножения на функцию  $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$  (ограниченную по модулю на  $\Gamma_{R'}$ ):

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_0^\infty \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n.$$

Отсюда следует, что последний ряд можно почленно интегрировать на  $\Gamma_{R'}$ . Получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{R'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_0^\infty a_n (z - z_0)^n, \quad (2.1:13)$$

где

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{R'}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.1:14)$$

Итак, первый из интегралов в правой части равенства (2.1:11) мы разложили в сходящийся ряд по неотрицательным степеням  $z - z_0$ .

Обращаясь ко второму интегралу в правой части равенства (2.1:11), представим  $-\frac{1}{\xi - z}$  ( $\xi \in \Gamma_r$ ) как сумму геометрического ряда со знаменателем  $\frac{\xi - z_0}{z - z_0}$ , модуль которого

$$\left| \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right| = \frac{r'}{|z - z_0|} = \vartheta < 1.$$

Получим:

$$-\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} = \sum_0^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}. \quad (2.1:15)$$

Замечая, что этот ряд также сходится равномерно на  $\Gamma_r$ , умножая все члены его на  $\frac{1}{2\pi i} f(\xi)$  и интегрируя почленно, находим:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_1^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}, \quad (2.1:16)$$

где

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{-n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.1:17)$$

Итак, второй интеграл в правой части равенства (2.1:11) мы представили в виде суммы сходящегося ряда, расположенного по отрицательным степеням  $z - z_0$ .

Подставляя найденные разложения (2.1:13) и (2.1:16) в правую часть равенства (2.1:11), получаем разложение функции  $f(z)$  в ряд Лорана для произвольной точки  $z \in D$ :

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_1^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (2.1:18)$$

Коэффициенты этого разложения вычисляются частью по формулам (2.1:14), частью по формулам (2.1:17). Беря произвольную окружность  $\Gamma$ :  $|z - z_0| = \lambda$ , где  $r < \lambda < R$ , убеждаемся с помощью интегральной теоремы Коши для случая системы контуров, что каждый из них можно вычислять, выполняя интегрирование по окружности  $\Gamma$ :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (2.1:19)$$

Этот результат вполне согласуется с полученным нами ранее (см. формулы (2.1:9)).

2.2. Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}, \quad (2.2:1)$$

где  $a_n$  — комплексные коэффициенты и  $\lambda_n$  — действительные неотрицательные числа, удовлетворяющие условиям

$$\lambda_{n+1} > \lambda_n \quad (n=1, 2, \dots), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty, \quad (2.2:2)$$

называется рядом Дирихле (общим), а числа  $\lambda_n$  называются показателями ряда.

Полагая, в частности,  $\lambda_n = \ln n$ , получим  $e^{-\lambda_n z} = \frac{1}{n^z}$ , и ряд приобретает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z};$$

это — обыкновенный (классический) ряд Дирихле, имеющий приложения в теории чисел.

Если в общем ряде Дирихле произвести замену  $w = e^{-z}$ , то получим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n w^{\lambda_n},$$

расположенный по произвольным положительным и неограниченно возрастающим степеням  $w$  (вообще говоря, не целым). С этой точки зрения ряд Дирихле можно рассматривать как обобщение степенного ряда на случай произвольных показателей, удовлетворяющих условиям (2.2:2).

Ряды Дирихле обладают многими свойствами, аналогичными свойствам степенных рядов.

Только здесь областью сходимости является не круг, а полуплоскость. Докажем для них следующую основную теорему.

**Теорема.** Если ряд (2.2:1) сходится в некоторой точке  $z_0 = x_0 + iy_0$ , то он сходится также во всех точках полуплоскости  $x = \operatorname{Re} z > x_0$ , причем сходимость ряда равномерна в каждой области  $g_0$  вида:  $|\arg(z - z_0)| \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

(рис. 67).

Эта теорема по своей формулировке напоминает первую теорему Абеля. Только здесь, как уже указывалось, вместо круга появляется полуплоскость, и далее доказывается сходимость, вообще говоря, не абсолютная.

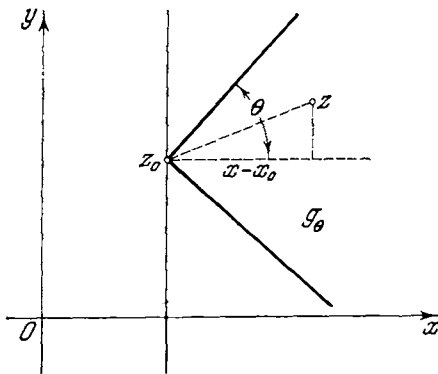


Рис. 67.

Для доказательства теоремы произведем оценку величины  $\left| \sum_{n+1}^{n+p} a_k e^{-\lambda_k z} \right|$ ,

используя при этом то обстоятельство, что ряд  $\sum_1^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z_0}$  сходится.

Положим,

$$\alpha_m = \sum_{n+1}^m a_k e^{-\lambda_k z_0} \quad (m > n \text{ и } \alpha_n = 0,$$

так что

$$a_k e^{-\lambda_k z_0} = \alpha_k - \alpha_{k-1} \quad (k = n+1, n+2, \dots);$$

полагая еще для краткости

$$e^{-\lambda_k (z-z_0)} = b_k,$$

получаем:

$$\sum_{n+1}^{n+p} a_k e^{-\lambda_k z} = \sum_{n+1}^{n+p} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) b_k = \alpha_{n+p} b_{n+p} - \sum_{n+1}^{n+p-1} \alpha_k (b_{k+1} - b_k). \quad (2.2:3)$$

Последнее тождество мы написали на основании преобразования Абеля (см. гл. первую, п. 3.4).

Пусть  $\varepsilon$  — произвольное положительное число. В силу сходимости ряда (2.2:1) в точке  $z_0$  при  $n > M(\varepsilon)$  и любом  $m \geq n$  будем иметь:

$$|\alpha_m| = \left| \sum_{n+1}^m a_k e^{-\lambda_k z_0} \right| < \varepsilon \cos \theta. \quad (2.2:4)$$

Кроме того,

$$|b_{n+p}| = |e^{-\lambda_{n+p} (z-z_0)}| = e^{-\lambda_{n+p} (x-x_0)} \quad (2.2:5)$$

и

$$\begin{aligned} |b_{k+1} - b_k| &= \left| (z-z_0) \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} e^{-t(z-z_0)} dt \right| \leq |z-z_0| \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} e^{-t(x-x_0)} dt = \\ &= \frac{|z-z_0|}{x-x_0} [e^{-\lambda_k (x-x_0)} - e^{-\lambda_{k+1} (x-x_0)}]. \end{aligned} \quad (2.2:6)$$

Если точка  $z$  принадлежит области  $g_\theta$ , то  $x-x_0 > 0$  и

$$\frac{|z-z_0|}{x-x_0} < \frac{1}{\cos \theta}.$$

Поэтому из (2.2:3) и неравенств (2.2:4), (2.2:5) и (2.2:6) вытекает следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n+1}^{n+p} a_k e^{-\lambda_k z} \right| &\leq \varepsilon \cos \theta e^{-\lambda_{n+p} (x-x_0)} + \\ &+ \varepsilon \cos \theta \sum_{n+1}^{n+p-1} \frac{|z-z_0|}{x-x_0} [e^{-\lambda_k (x-x_0)} - e^{-\lambda_{k+1} (x-x_0)}] < \varepsilon e^{-\lambda_{n+1} (x-x_0)} < \varepsilon, \end{aligned}$$

чем и доказывается равномерная сходимость ряда Дирихле в области  $g_\theta$  (для любого  $\theta < \frac{\pi}{2}$ ), а вместе с тем и обычная его сходимость во всей полуплоскости  $x > x_0$ .

Если исключить случай ряда Дирихле, не сходящегося ни в одной из точек плоскости  $z$ , то остаются еще две возможности:

ряд Дирихле сходится в любой точке плоскости;  
существуют точки, в которых он сходится, а также точки, в которых он расходится.

Остановимся на этом последнем случае. Пусть  $z_0 = x_0 + iy_0$  — точка сходимости ряда Дирихле, а  $z_1 = x_1 + iy_1$  — точка его расходимости. Из доказанного предложения вытекает, что  $x_1 \leq x_0$ . Далее, ряд должен сходиться во всех точках полуплоскости  $x > x_0$  и расходиться во всех точках полуплоскости  $x < x_1$  (если бы он сходился в некоторой точке  $z$ , для которой  $x < x_1$ , то, в силу доказанной теоремы, должен был бы сходиться и в точке  $z_1$ , что противоречит предположению). Может случиться, что  $x_1 = x_0$ ; тогда мы имеем прямую  $x = x_0$ , по одну сторону от которой ряд (2.2 1) сходится, а по другую — расходится. Пусть  $x_1 < x_0$ ; тогда рассмотрим нижнюю грань  $C$  действительных частей тех точек  $z$ , в которых ряд сходится. Мы будем иметь:  $x_1 \leq C \leq x_0$ .

Убедимся в том, что ряд сходится при  $x > C$  и расходится при  $x < C$ . В самом деле, если  $\operatorname{Re} z = x > C$ , то на полуинтервале  $[C, x)$  должно находиться, в силу определения числа  $C$ , по крайней мере одно число  $\xi$ , являющееся действительной частью точки  $\xi = \xi + i\eta$ , в которой ряд сходится. Отсюда по доказанному следует, что он сходится и в данной точке  $z$ . Если же  $\operatorname{Re} z = x < C$ , то допуская, что ряд сходится в точке  $z = x$ , мы получили бы противоречие с определением числа  $C$  как нижней грани.

Резюмируя изложенное, находим, что для произвольного ряда Дирихле существуют три возможности:

- а) ряд всюду расходится;
- б) существует прямая  $x = C$ , такая, что в полуплоскости  $x > C$  ряд сходится, а в полуплоскости  $x < C$  он расходится;
- в) ряд всюду сходится.

Называя число  $C$  абсциссой сходимости и полуплоскость  $x > C$  — полуплоскостью сходимости ряда Дирихле, мы можем рассматривать случаи а) и в) как предельные, в которых соответственно  $C = +\infty$  и  $C = -\infty$ .

Рассматривая только случаи б) и в), когда  $C < +\infty$ , можно утверждать на основании равномерной сходимости ряда, что сумма ряда Дирихле является функцией, аналитической в полуплоскости сходимости. Однако в ряд Дирихле с данными показателями  $\{\lambda_n\}$  может быть разложена далеко не всякая функция, аналитическая в некоторой полуплоскости. Так, например, в простейшем случае, когда все числа  $\lambda_n$  целые, сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$$

должна обладать периодом  $2\pi i$ . Но даже и это необходимое условие не является достаточным: относительно любой функции  $f(z)$ , аналитической в некоторой полуплоскости  $\operatorname{Re} z > C$  и обладающей в ней периодом  $2\pi i$ , можно утверждать только, что она разлагается в ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-n\tau},$$

сходящийся абсолютно и равномерно внутри этой полуплоскости. Чтобы прийти к этому разложению, обобщающему ряд Дирихле в том же направ-

лении, в каком ряд Лорана обобщает ряд Тейлора, достаточно выполнить отображение  $\xi = e^{-z}$ . В результате  $f(z)$  перейдет в функцию  $f^*(\xi)$ , однозначную и аналитическую в круге  $|\xi| < e^{-c}$ , за исключением, быть может, его центра. В этом круге будем иметь:

$$f^*(\xi) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \xi^n,$$

или, возвращаясь к переменному  $z$ :

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{-nz}.$$

До сих пор мы ничего не говорили об абсолютной сходимости ряда Дирихле в общем случае.

Покажем, что *если ряд (2.2:1) абсолютно сходится в некоторой точке  $z_0 = x_0 + iy_0$ , то этот ряд абсолютно и равномерно сходится в полуплоскости  $x \geq x_0$ .*

В самом деле, если  $x \geq x_0$ , то

$$a_n e^{-\lambda_n z} = |a_n e^{-\lambda_n z_0}| |e^{-\lambda_n (z - z_0)}| = |a_n e^{-\lambda_n z_0}| e^{-\lambda_n (x - x_0)} \leq |a_n e^{-\lambda_n z_0}|.$$

Отсюда, в силу сходимости ряда  $\sum_1^{\infty} |a_n e^{-\lambda_n z_0}|$ , с постоянными неотрицательными членами, следует абсолютная и равномерная сходимость ряда

(2.2:1) в полуплоскости  $x \geq x_0$ .

Рассуждая совершенно так же, как и выше для случая простой сходимости, легко установить, что в отношении произвольного ряда Дирихле имеются три возможности:

а') ряд не сходится абсолютно ни в одной точке плоскости;

б') существует прямая  $x = A$ ,  $A \geq C$ , такая, что в полуплоскости  $x > A$  ряд абсолютно сходится, а в полуплоскости  $x < A$  не сходится абсолютно ни в одной точке;

в') ряд всюду абсолютно сходится.

Называя число  $A$  абсциссой абсолютной сходимости ряда Дирихле и полуплоскость  $x > A$  — полуплоскостью абсолютной сходимости, мы можем рассматривать случаи а') и в') как предельные, в которых соответственно  $A = +\infty$  и  $A = -\infty$ .

Если показатели  $\lambda_n$  удовлетворяют дополнительному условию

$$L = \overline{\lim} \frac{\ln n}{\lambda_n} < +\infty \quad (2.2:7)$$

(это условие выполняется, как в случае обыкновенного ряда Дирихле, где  $\lambda_n = \ln n$  и  $L = 1$ , так и в случае, соответствующем степенному ряду, где  $\lambda_n = n$  и  $L = 0$ ), то абсцисса сходимости  $C$  и абсцисса абсолютной сходимости  $A$  удовлетворяют условию

$$0 \leq A - C \leq L. \quad (2.2:8)$$

В самом деле, пусть  $C < +\infty$ . Возьмем точку  $x = C + \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$ ; так как  $x$  принадлежит полуплоскости сходимости ряда Дирихле, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n e^{-\lambda_n (C + \varepsilon)} = 0$  и, следовательно, последовательность  $\{a_n e^{-\lambda_n (C + \varepsilon)}\}$  ограничена:  $|a_n e^{-\lambda_n (C + \varepsilon)}| < M$ . Поэтому для точки  $x_1 = C + L + 3\varepsilon$  будем иметь:

$$|a_n e^{-\lambda_n (C + L + 3\varepsilon)}| = |a_n e^{-\lambda_n (C + \varepsilon)}| e^{-\lambda_n (L + 2\varepsilon)} < M e^{-\lambda_n (L + 2\varepsilon)}$$

Но при достаточно больших  $n > N$ , в силу (1.2:7), имеем:

$$\frac{\ln n}{\lambda_n} < L + \varepsilon,$$

т.

$$\ln n < (L + \varepsilon) \lambda_n \quad \text{и} \quad e^{-\lambda_n (L + 2\varepsilon)} = [e^{-\lambda_n (L + \varepsilon)}]^{L + \varepsilon} < \frac{1}{n^{1 + \delta}},$$

где  $\delta = \frac{\varepsilon}{L + \varepsilon} > 0$ . Итак, при  $n > N$  выполняются неравенства

$$|a_n e^{-\lambda_n (C + L + 3\varepsilon)}| < \frac{M}{n^{1 + \delta}},$$

откуда следует, что ряд Дирихле абсолютно сходится в точке  $x_1 = C + L + 3\varepsilon$  при любом  $\varepsilon > 0$ . Следовательно,

$$C + L + 3\varepsilon \leq A,$$

или, переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$A - C \leq L,$$

что и требовалось доказать.

Что  $A$  и  $C$  могут быть действительно различны между собой, следует из примера ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^z} \quad (2.2:9)$$

Это обыкновенный ряд Дирихле, для которого  $L=1$ , и, следовательно, в силу доказанного, должно быть:

$$A - C \leq 1.$$

Очевидно, ряд (2.2:9) расходится в точке  $z=0$ . С другой стороны, в каждой точке  $z=\delta > 0$  его члены представляют действительные числа, убывающие по абсолютной величине, стремящиеся к нулю и попеременно положительные и отрицательные. Следовательно (по признаку Лейбница), ряд сходится. Отсюда вытекает, что абсцисса сходимости ряда  $C=0$ . Но в точках

$z=x=\delta > 0$  при  $\delta \leq 1$  ряд сходится не абсолютно, так как ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\delta}$

расходится, если  $\delta \leq 1$ . С другой стороны, при  $\delta > 1$  ряд абсолютных

величин  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\delta}$  является сходящимся. Итак, абсцисса абсолютной сходимости ряда (2.2:9)  $A=1$ . Мы видим, что для ряда (2.2:9) существует полоса  $0 < x < 1$ , в которой он сходится, не будучи абсолютно сходящимся.

В случае, когда  $L=0$  (этому случаю соответствует, как мы указывали, ряд Тейлора), числа  $A$  и  $C$  совпадают, как это следует из неравенства (2.2:8). Таким образом, для рядов Дирихле, удовлетворяющих условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0, \quad (2.2:10)$$

полуплоскость сходимости является вместе с тем и полуплоскостью абсолютной сходимости.

Покажем, что при условии (2.2:10) общее значение чисел  $A$  и  $C$  выражается формулой

$$A = C = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n}, \quad (2.2:11)$$

являющейся аналогом (и вместе с тем обобщением) формулы Коши—Адамара.

В самом деле, пусть  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n} = \Lambda < +\infty$ . Возьмем произвольную точку  $z_0 = x_0 + iy_0$  в полуплоскости  $x > \Lambda$ , и пусть  $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}(x_0 - \Lambda)$ . Тогда, в силу определения числа  $\Lambda$ , имеем при  $n > N_1(\varepsilon)$ :

$$\frac{\ln |a_n|}{\lambda_n} < \Lambda + \varepsilon \quad \text{или} \quad |a_n| < e^{\lambda_n(\Lambda + \varepsilon)}$$

Следовательно, при  $n > N_1(\varepsilon)$  выполняются неравенства

$$|a_n e^{-\lambda_n z_0}| = |a_n| e^{-\lambda_n x_0} < e^{-\lambda_n(x_0 - \Lambda - \varepsilon)} < e^{-2\lambda_n \varepsilon}$$

Но из условия (2.2:10) следует, что при  $n > N_2(\varepsilon)$  имеем:

$$\frac{\ln n}{\lambda_n} < \varepsilon, \quad \text{т. е.} \quad n < e^{\lambda_n \varepsilon} \quad \text{или} \quad -\lambda_n \varepsilon < \frac{1}{n}$$

Поэтому при  $n > N = \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$  получаем:

$$|a_n e^{-\lambda_n z_0}| < \frac{1}{n^2},$$

что означает абсолютную сходимость ряда Дирихле в точке  $z_0$  — произвольной точке полуплоскости  $x > \Lambda$ ; итак,  $A = C \leq \Lambda$ .

С другой стороны, если точка  $z_1 = x_1 + iy_1$  принадлежит полуплоскости  $x < \Lambda$ , т. е. если  $x_1 < \Lambda$ , то для  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \Lambda - x_1$ , должна существовать последовательность натуральных чисел  $\{n_k\}$  таких, что

$$\frac{\ln |a_{n_k}|}{\lambda_{n_k}} > \Lambda - \varepsilon > x_1 \quad \text{или} \quad |a_{n_k}| > e^{\lambda_{n_k} x_1}$$

Тогда получаем:

$$|a_{n_k} e^{-\lambda_{n_k} z_1}| = |a_{n_k}| e^{-\lambda_{n_k} x_1} > e^{\lambda_{n_k} x_1} e^{-\lambda_{n_k} x_1} = 1.$$

Итак, необходимое условие сходимости ряда (2.2:1) не выполняется ни в какой точке  $z_1$ , принадлежащей полуплоскости  $x < \Lambda$ . Следовательно, ряд Дирихле расходится в этой полуплоскости. Мы получили, что  $\Lambda \leq A = C$ . Сопоставляя полученные результаты, находим, наконец:

$$A = C = \Lambda.$$

Формула (2.2:11) установлена.

**2.3.** Пусть  $E$  — произвольное бесконечное множество точек, каждая точка которого является предельной для  $E$  ( $E$  — плотное в себе множество). Функцию  $f(z)$ , определенную и однозначную на  $E$ , мы будем называть **локально-аналитической** на  $E$ , если для каждой



точки  $z_0 \in E$  существует степенной ряд  $\sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  и окрестность  $U_0$  такие, что во всех точках  $E$ , принадлежащих  $U_0$ , функция  $f(z)$  представляется в виде суммы ряда

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

В случае, когда  $E$  есть область, понятие локально-аналитической функции совпадает с понятием функции, однозначной и аналитической в области.

В качестве примера рассмотрим разбиение плоскости на квадраты  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ , со сторонами, параллельными координатным осям

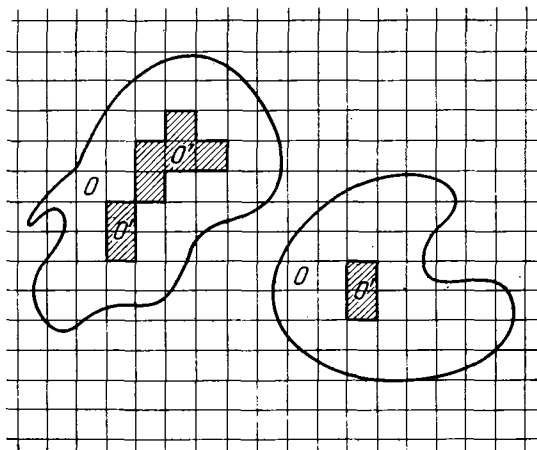


Рис. 68.

и равными по длине единице; и пусть  $E$  представляет совокупность внутренних точек всех этих квадратов. Тогда, полагая  $f(z) = z^n$  для  $z \in \Delta_n$ , получим функцию, локально-аналитическую на  $E$ .

Пусть  $E = O$  — произвольное открытое множество. Если оно связно, то  $O$  является областью; если же оно не связно, то  $O$  состоит из конечного или счетного множества областей, попарно не имеющих общих точек. Рассмотрим какое-либо разбиение плоскости на равные квадраты со сторонами, параллельными координатным осям, такое, что начало координат служит вершиной одного из квадратов. Выделим лишь те квадраты, которые принадлежат множеству  $O$  вместе с восемью квадратами, непосредственно к ним прилегающими. Точки, лежащие внутри выделенных квадратов, точки сторон, общих для двух квадратов этого рода, и вершины, общие для четырех квадратов, образуют открытое множество  $O'$  такое, что  $\bar{O}' \subset O$  (рис. 68).

Пусть длина стороны квадрата разбиения равна  $\frac{1}{3^n}$ . Обозначим через  $O_n$  пересечение множества  $O'$  с квадратом  $-3^n < x < 3^n, -3^n < y < 3^n$ .

$O_n$  — ограниченное открытое множество такое, что  $\bar{O}_n \subset O$ . Граница множества  $O_n$  состоит из конечного числа замкнутых жордановых спрямляемых кривых, каждая из которых образована конечным числом прямолинейных отрезков.

Кроме того, очевидно, выполняются следующие свойства:

- 1)  $O_n$  вместе с границей лежит внутри  $O_{n+1}$ ;
- 2) для каждого ограниченного замкнутого множества  $F$ ,  $F \subset O$ , можно найти такое положительное число  $N(F)$ , что при  $n \geq N(F)$   $F \subset O_n$ .

Выражая эти свойства, мы будем говорить, что  $\{O_n\}$  есть возрастающая последовательность открытых множеств, приближающих  $O$ .

Пусть  $f(z)$  — функция, локально-аналитическая на  $O$ . Обозначая границу множества  $O_m$  через  $\Gamma_m$  ( $m=1, 2, 3, \dots$ ), будем иметь для  $z \in \bar{O}_m$ :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{m+1}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}. \quad (2.3:1)$$

Здесь интеграл по  $\Gamma_{m+1}$  следует понимать как сумму интегралов, распространенных на отдельные замкнутые жордановы спрямляемые кривые, из которых состоит  $\Gamma_{m+1}$ . Если точка  $z \in \bar{O}_m$ , то она лежит внутри одной компоненты  $O_{m+1}$ , границу которой обозначим  $\gamma$ . Тогда интеграл  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = f(z)$ , а аналогичные интегралы, по границам остальных

компонент  $O_{m+1}$ , равны нулю. Складывая их вместе, мы и получаем равенство (2.3:1). Покажем, что для произвольного  $\varepsilon > 0$  можно найти для интеграла (2.3:1) такую интегральную сумму

$$S^{(m+1)}(z) = S^{(m+1)}(z, \varepsilon),$$

чтобы для всех точек  $z$  множества  $\bar{O}_m$  выполнялось бы неравенство

$$|f(z) - S^{(m+1)}(z, \varepsilon)| < \varepsilon. \quad (2.3:2)$$

Это утверждение вытекает из теоремы Витали (п. 1.2). В самом деле, построим для интеграла (2.3:1) сходящуюся к нему последовательность интегральных сумм:

$$\left\{ \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \frac{f(\xi'_k)}{\xi'_k - z} (\xi''_k - \xi'_k) \right\}$$

Здесь  $\xi'_k$  и  $\xi''_k$  — соответственно начальная и конечная точки дуги  $\sigma_k$ , принадлежащей разбиению  $\Gamma_{m+1}$ . Вообще говоря,  $\xi''_k$  совпадает с  $\xi'_k$ , но это условие нарушается, когда  $\sigma_k$  и  $\sigma_{k+1}$  принадлежат различным кривым, составляющим  $\Gamma_{m+1}$  (не забудем, что  $\Gamma_{m+1}$  может быть несвязным множеством). Для равномерной сходимости на  $\bar{O}_m$  последовательности интегральных сумм достаточно, по теореме Витали, чтобы эта последовательность была равномерно ограничена внутри  $O_{m+1}$ . Но это действительно так, ибо для любого замкнутого множества  $F \subset O_{m+1}$  имеем:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \frac{f(\xi'_k)}{\xi'_k - z} (\xi''_k - \xi'_k) \right| \leq \frac{M_{m+1}}{2\pi \delta(F)} L_{m+1} \quad (n=1, 2, \dots),$$

где  $M_{m+1} = \max |f(z)|$  на  $\Gamma_{m+1}$ ,  $\delta(F)$  — расстояние от  $F$  до  $\Gamma_{m+1}$  и  $L_{m+1}$  — длина  $\Gamma_{m+1}$ . Поэтому для каждого  $\varepsilon > 0$  можно найти такое  $N(\varepsilon)$ , что при

$n \gg N(\epsilon)$  каждая из рассматриваемых интегральных сумм может быть взята в качестве  $S^{(m+1)}(z, \epsilon)$  в неравенстве (2.3 2).

Полагая  $\epsilon = \epsilon_m$ ,  $\epsilon_m \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ , получим последовательность рациональных функций  $S^{(m+1)}(z) = S^{(m+1)}(z, \epsilon_{m+1})$ , равномерно сходящуюся к  $f(z)$  на каждом замкнутом множестве  $\bar{O}_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) и, следовательно, равномерно сходящуюся к  $f(z)$  внутри  $O$ . Итак, получаем следующую теорему:

*Для любого открытого множества  $O$  и для любой однозначной функции  $f(z)$ , локально-аналитической на  $O$ , существует последовательность рациональных функций  $R_n(z) = S^{(n+1)}(z)$ , равномерно сходящаяся к  $f(z)$  внутри  $O$ .*

**Л е м м а.** Пусть  $F$  — ограниченное замкнутое множество и  $\zeta$  — точка вне  $F$ . Пусть  $R(z)$  — рациональная функция, имеющая единственный полюс в  $\zeta$ :  $R(z) = \frac{P(z)}{(z-\zeta)^k}$  (степень многочлена  $P(z)$  не больше  $k$ ). Если точка  $z$  принадлежит той же области  $g$ , смежной с  $F$ , которой принадлежит и точка  $\zeta$ , то для любого  $\epsilon > 0$  можно построить рациональную функцию  $\tilde{R}(z)$ :  $\tilde{R}(z) = \frac{\tilde{P}(z)}{(z-\delta)^{\tilde{k}}}$  (степень  $\tilde{P}(z)$  не больше  $\tilde{k}$ ) такую, что  $|\tilde{R}(z) - R(z)| < \epsilon$  ( $z \in F$ ).

Для доказательства соединим точки  $\zeta$  и  $z$  внутри  $g$  непрерывной кривой  $\gamma$  и обозначим расстояние между  $\gamma$  и  $F$  через  $\rho$ ,  $\rho > 0$ . Разбивая  $\gamma$  на дуги  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ , диаметры которых меньше  $\frac{\rho}{2}$ , и обозначая точки деления  $\zeta_0 = \zeta, \zeta_1, \dots, \zeta_m = z$ , построим рациональную функцию

$$R_1(z) = \frac{P(z)}{(z-\zeta)^k} \left[ 1 - \left( \frac{\zeta - \zeta_1}{z - \zeta_1} \right)^{n_1} \right]^k = \frac{P_1(z)}{(z-\zeta_1)^{n_1 k}}$$

(степень  $P_1(z)$  не больше, чем  $k + n_1 k - k = n_1 k$ ). Будем иметь для  $z \in F$ :

$$|R_1(z) - R(z)| = |R(z)| \left| \left[ 1 - \left( \frac{\zeta - \zeta_1}{z - \zeta_1} \right)^{n_1} \right]^k - 1 \right| \leq \\ \leq M \left[ \binom{k}{1} \left( \frac{\rho}{2} \right)^{n_1} + \dots \right] < M \frac{2^k}{2^{n_1}},$$

где  $M = \max_F |R(z)|$ .

Выбирая  $n_1$  достаточно большим, получим, что

$$|R_1(z) - R(z)| < \frac{\epsilon}{m} \quad (z \in F).$$

Повторяя это рассуждение, мы на  $m$ -м шаге получим нужную функцию  $\tilde{R}(z) = R_m(z)$ .

**Т е о р е м а Р у н г е.** Пусть  $O$  есть (конечная или счетная) совокупность односвязных областей, попарно не имеющих общих точек и не содержащих точку  $\infty$ . Для каждой функции  $f(z)$ , однозначной и локально-аналитической на  $O$ , можно построить последовательность многочленов  $\{P_n(z)\}$ , равномерно сходящуюся к  $f(z)$  внутри  $O$ .

Для доказательства заметим, что каждая компонента множества  $O_n$ , в условиях теоремы, является односвязной областью, так как граница такой компоненты есть замкнутая жорданова кривая, принадлежащая одной из компонент множества  $O$ . Поэтому каждую точку границы  $\Gamma_{n+1}$  множества  $O_{n+1}$ , в частности каждую точку  $\zeta_k^{(n+1)}$ , можно соединить жордановой дугой, не имеющей общих точек с  $\bar{O}_n$ , с одной и той же точкой  $z$ , лежащей вне круга

$|z| < R_n$ , содержащего  $\bar{O}_n$  (рис. 69). Применяя к рациональным функциям

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta_k^{(n+1)})}{\zeta_k^{(n+1)} - z} (\zeta_k^{(n+1)'} - \zeta_k^{(n+1)'}) \quad (k=1, 2, \dots, N^{(n+1)})$$

лемму при  $\varepsilon = \frac{\varepsilon_n}{N^{(n+1)}}$ , построим рациональную функцию  $\tilde{S}_n(z)$ , с един-

ственным полюсом в  $\delta$ :  $\tilde{S}_n(z) = \frac{\tilde{P}(z)}{(z-\delta)^{\tilde{n}}}$  (степень  $\tilde{P}(z)$  не больше  $\tilde{n}$ ), удо-

летворяющую во всех точках множества  $\bar{O}_n$  неравенству

$$|\tilde{S}_n(z) - S^{(n+1)}(z)| < \varepsilon_n$$

и, следовательно, неравенству

$$|f(z) - \tilde{S}_n(z)| < 2\varepsilon_n.$$

Но функция  $\tilde{S}_n(z)$  является аналитической в круге  $|z| < R_n$ , и, следовательно, на множестве  $\bar{O}_n$ , лежащем внутри этого круга, ее можно заменить

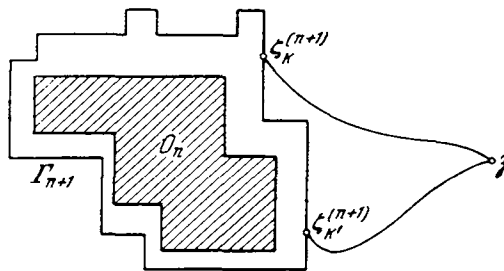


Рис. 69.

степенным рядом. Беря достаточно длинный отрезок  $P_n(z)$  степенного ряда, будем иметь

$$|f(z) - P_n(z)| < 3\varepsilon_n, \quad z \in \bar{O}_n.$$

Последовательность  $\{P_n(z)\}$  удовлетворяет всем условиям теоремы.

**С л е д с т в и е.** Пусть  $P$  — ограниченное совершенное множество, дополнение к которому  $G$ , относительно расширенной плоскости, связно, т. е. является областью. Тогда для любой функции  $f(z)$ , однозначной и локально-аналитической на  $P$ , и для любого  $\varepsilon > 0$  существует многочлен  $Q(z)$  такой, что

$$|f(z) - Q(z)| < \varepsilon \quad (z \in P).$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Для каждой точки  $z_0, z_0 \in P$ , существует круг  $K_{z_0}$  радиуса  $\rho_{z_0}$  с центром в  $z_0$ , такой, что во всех точках множества  $P$ , лежащих внутри этого круга,  $f(z)$  представляется суммой степенного ряда, расположенного по степеням  $z - z_0$ . Из покрытия множества  $P$  кругами

$\bar{K}_{z_0} \quad |z - z_0| < \frac{1}{2} \rho_{z_0}$  выбираем конечное покрытие:  $\bar{K}_{z_1}, \dots, \bar{K}_{z_p}$ . Сумма этих

кругов образует открытое множество  $O'$ , содержащее  $P$ . Если два круга  $\tilde{K}_{z_i}$  и  $\tilde{K}_{z_j}$  имеют общую часть, то из того, что  $|z_i - z_j| < \frac{1}{2}(\rho_{z_i} + \rho_{z_j})$ , следует, что  $|z_i - z_j| < \max(\rho_{z_i}, \rho_{z_j})$ . Пусть, например,  $\max(\rho_{z_i}, \rho_{z_j}) = \rho_{z_i}$ . Тогда круг  $K_{z_i}: |z - z_i| < \rho_{z_i}$  содержит внутри  $z_j$ , а следовательно, и бесконечное множество точек множества  $P$ . Суммы степенных рядов, расположенных по  $z - z_i$  и  $z - z_j$ , совпадают на указанном множестве точек, а следовательно, совпадают и во всей общей части кругов  $\tilde{K}_{z_i}$  и  $\tilde{K}_{z_j}$ . Итак, степенные ряды  $\sum_{k=0}^{\infty} a_j^{(h)}(z - z_j)^h$  ( $j=1, \dots, p$ ), представляющие в соответствующих кругах функцию  $f(z)$ , определяют на  $O'$  однозначную аналитическую функцию, совпадающую с  $f(z)$  на  $P$ . Если  $O'$  есть сумма односвязных областей.

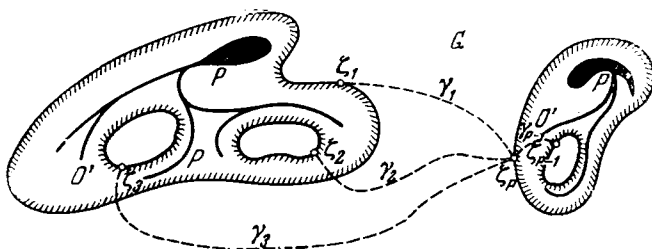


Рис. 70.

попарно не имеющих общих точек, то к множеству  $O'$  и функции  $f(z)$  остается применить теорему Рунге. Пусть среди компонент множества  $O'$  имеются многосвязные области. Граница множества  $O'$  состоит из конечного числа  $p$  континуумов, попарно не имеющих общих точек и расположенных в области  $G$ . Выбрав на каждом из них по точке, пусть это будут  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ , соединим точки  $\xi_1, \dots, \xi_{p-1}$  с  $\xi_p$  внутри  $G$  жордановыми дугами  $\gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}$ . Тогда  $O' - O' \cap (\gamma_1 + \dots + \gamma_{p-1}) = O$  представит открытое множество, содержащее  $P$ , все компоненты которого будут односвязными областями без общих точек (рис. 70). Остается добавить, что  $P \subset O \subset O'$ , так что мы оказываемся в условиях применимости теоремы Рунге.

Опираясь на доказанное следствие, легко получить следующее усиление теоремы Рунге:

**Т е о р е м а.** Пусть  $O$  — открытое множество, не содержащее точки  $\infty$  и представляющее сумму односвязных областей без общих точек. Пусть  $P$ , не имеющее общих точек с  $O$ , ограниченное совершенное множество, дополнение к которому связно, т. е. является областью. Если  $f(z)$  — функция, однозначная и локально-аналитическая на  $O$ , и  $\varphi(z)$  — функция, однозначная и локально-аналитическая на  $P$ , то можно построить последовательность многочленов, сходящуюся к  $f(z)$  на  $O$  и к  $\varphi(z)$  на  $P$ , причем сходимость равномерна на каждом множестве  $F + P$ , где  $F$  — какое-либо замкнутое ограниченное множество, содержащееся в  $O$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $\{O_n\}$  — последовательность открытых множеств, построенных для множества  $O$  так, как это было указано выше, на стр. 389. В условиях теоремы каждое  $O_n$  есть сумма односвязных областей

без общих точек,  $\bar{O}_n \subset O$  и, следовательно,  $\bar{O}_n$  и  $P$  не имеют общих точек. Поэтому функция  $F(z)$ , равная  $f(z)$  на  $\bar{O}_n$  и  $\varphi(z)$  на  $P$ , однозначна и локально-аналитична на совершенном множестве  $\bar{O}_n + P$ . Кроме того, дополнение к  $\bar{O}_n + P$  есть связное множество. Следовательно, для любого  $\varepsilon_n > 0$  существует многочлен  $P_n(z)$ , удовлетворяющий условию

$$|F(z) - P_n(z)| < \varepsilon_n, \quad z \in \bar{O}_n + P.$$

Последовательность  $\{P_n(z)\}$  и есть искомая.

Приведем три примера, иллюстрирующие доказанные теоремы.

**Пример 1.** Пусть дано некоторое разбиение плоскости на квадраты со сторонами, параллельными осям координат и равными по длине единице. Пусть для определенности начало координат совпадает с одной из вершин этих квадратов.

Покажем, опираясь на теорему Рунге, что можно построить последовательность многочленов  $\{P_n(z)\}$ , сходящуюся во всей плоскости, причем внутри каждого квадрата предел последовательности будет равен произвольной целой функции  $g(z)$ , а на сторонах квадрата — другой целой функции  $h(z)$ .

Рассмотрим для произвольного натурального  $n$  квадрат  $-n \leq x \leq n$ ,  $-n \leq y \leq n$  и заменим каждый из принадлежащих ему квадратов нашего разбиения совокупностью пяти квадратов и четырех прямоугольников, изображенных на рис. 71, где показаны также и размеры этих фигур. Очевидно, любая точка плоскости при достаточно большом  $n$  попадет внутрь одной из этих фигур, причем точка, лежащая на сторонах одного из первоначальных квадратов, окажется внутри одного из маленьких квадратов с центром в вершине первоначального квадрата или внутри одного из прямоугольников, вытянутых вдоль сторон, а точка, лежащая внутри первоначального квадрата, окажется внутри concentрического с ним квадрата с длиной стороны, равной  $1 - \frac{2}{3n}$ .

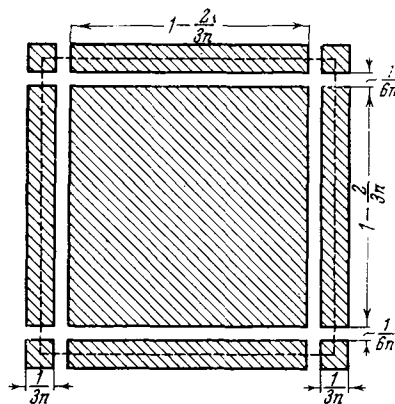


Рис. 71.

Совокупность фигур, построенных для данного значения  $n$ , представляет собой ограниченное совершенное множество  $F_n$ , дополнение к которому связно. Определим на этом множестве однозначную локально-аналитическую функцию  $f_n(z)$ , полагая  $f_n(z) = g(z)$  в квадратах, concentрических с первоначальными, и  $f_n(z) = h(z)$  в остальных квадратах и прямоугольниках, периферийных по отношению к первоначальным. На основании следствия из теоремы Рунге существует многочлен  $P_n(z)$ , удовлетворяющий неравенству

$$|f_n(z) - P_n(z)| < \frac{1}{n}, \quad z \in F_n.$$

Очевидно, последовательность  $\{P_n(z)\}$  удовлетворяет всем условиям поставленной задачи.

**Пример 2.** Построим при помощи теоремы Рунге целую функцию  $f(z)$ , обладающую следующими свойствами: какова бы ни была ограниченная

односвязная область  $G$  и в ней аналитическая функция  $\varphi(z)$ , можно найти последовательность натуральных чисел  $(n_k)$  такую, что последовательность  $\{f(z + n_k)\}$  будет равномерно сходиться к  $\varphi(z)$  внутри  $G$ . Иными словами, искомая целая функция является универсальной функцией, с помощью которой (путем одних только сдвигов плоскости  $z$  на соответствующие величины  $n_k$ ) можно аппроксимировать в любой односвязной области любые аналитические функции.

Для построения рассмотрим все возможные многочлены, действительные и мнимые части коэффициентов которых являются рациональными числами. Очевидно, совокупность всех этих многочленов счетна, так что ее можно расположить в виде одной последовательности:  $\{P_n(z)\}$ .

Рассмотрим, далее, последовательность замкнутых кругов  $K_n$ :  $|z - n^3| \leq n$ . Они не имеют общих точек, и каждый из этих кругов  $K_n$  при  $n > 1$  содержится в круговом кольце

$$(n-1)^3 + (n-1)^2 + (n-1) + 1 < |z| < n^3 + n^2 + n + 1.$$

Возьмем теперь произвольный многочлен  $P_1(z)$ ; считая, что многочлен  $P_{n-1}(z)$  ( $n > 1$ ) определен, будем определять следующий многочлен  $P_n(z)$  помощью теоремы Рунге так, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$|P_n(z) - P_{n-1}(z)| < \frac{1}{2^n} \text{ при } |z| < (n-1)^3 + (n-1)^2 + (n-1) + 1.$$

$$|P_n(z) - \Pi_n(z - n^3)| < \frac{1}{2^n} \text{ при } |z - n^3| \leq n.$$

Очевидно, ряд многочленов

$$P_1(z) + \sum_2^{\infty} [P_n(z) - P_{n-1}(z)] = f(z)$$

равномерно сходится в любом круге  $|z| < R$ , так как модули его членов,

начиная с некоторого из них, меньше членов сходящегося ряда  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{2^n}$

Следовательно,  $f(z)$  является функцией, аналитической в конечной плоскости, т. е. целой. В каждом круге  $K_n$  она удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} |f(z) - \Pi_n(z - n^3)| &\leq |f(z) - P_n(z)| + |P_n(z) - \Pi_n(z - n^3)| \leq \\ &\leq \sum_{n+1}^{\infty} |P_k(z) - P_{k-1}(z)| + |P_n(z) - \Pi_n(z - n^3)| < \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

(Мы воспользовались здесь тем, что  $K_n$  лежит внутри круга  $|z| < n^3 + n^2 + n + 1$ .) Следовательно, в круге  $|z| < n$  должно выполняться неравенство

$$|f(z + n^3) - \Pi_n(z)| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Пусть  $G$  — произвольная ограниченная односвязная область и  $\varphi(z)$  — аналитическая в ней функция. По теореме Рунге существует последовательность многочленов  $\{p_m(z)\}$ , равномерно сходящаяся к  $\varphi(z)$  внутри  $G$ . Но для каждого многочлена  $p_m(z)$  можно указать бесконечное множество многочленов  $\Pi(z)$ , действительные и мнимые части коэффициентов которых

суть рациональные числа, удовлетворяющих неравенству

$$|p_m(z) - \Pi(z)| < \frac{1}{m}, \quad z \in \bar{G}.$$

Многочлены  $\Pi(z)$  принадлежат к последовательности  $\{\Pi_n(z)\}$ ; так как их бесконечно много, то их номера в этой последовательности сколь угодно велики. Выберем  $\Pi(z) = \Pi_{n_m}(z)$  так, чтобы номер  $n_m$  был больше, чем  $m$ . Получим:

$$|p_m(z) - \Pi_{n_m}(z)| < \frac{1}{m}, \quad z \in \bar{G}.$$

Очевидно, последовательность многочленов  $\{\Pi_{n_m}(z)\}$  сходится к  $\varphi(z)$  равномерно внутри  $G$ . Остается заметить, что если  $n_m$  настолько велико, что  $G$  содержится в круге  $|z| < n_m$ , то в замкнутой области  $\bar{G}$  должно, по построению целой функции  $f(z)$ , выполняться неравенство:

$$|\Pi_{n_m}(z) - f(z + n_m^3)| < \frac{1}{2^{n_m-1}}$$

Следовательно, последовательность  $\{f(z + n_m^3)\}$  также равномерно сходится к  $\varphi(z)$  внутри  $G$ , откуда и следует, что она удовлетворяет всем требованиям задачи.

**Пример 3.** Построим функцию  $f(z)$ , аналитическую в единичном круге и не стремящуюся к пределу ни на одном из радиусов при приближении к соответствующей точке единичной окружности (относительно функций такого рода говорят, что они нигде не имеют радиальных граничных значений).

Пусть

$$0 < r_0 < r_1 < \dots < r_n < \dots \quad \lim r_n = 1.$$

Определим открытые множества:

$$B_0(|z| < r_0),$$

$$B_1\left(r_1 < |z| < r_2 \text{ и } |\arg z| < \frac{3\pi}{4}, \text{ или } r_3 < |z| < r_4 \text{ и } |\arg z| > \frac{\pi}{4}\right)$$

$$B_2\left(r_5 < |z| < r_6 \text{ и } |\arg z| < \frac{3\pi}{4}, \text{ или } r_7 < |z| < r_8 \text{ и } |\arg z| > \frac{\pi}{4}\right)$$

вообще,  $B_n$ :

$$r_{4n-3} < |z| < r_{4n-2} \text{ и } |\arg z| < \frac{3\pi}{4},$$

или

$$r_{4n-1} < |z| < r_{4n} \quad |\arg z| > \frac{\pi}{4} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(рис. 72). Построим теперь последовательность многочленов  $\{P_n(z)\}$ , положив  $P_0(z) = 0$  и подчиняя  $P_{2n-1}(z)$  и  $P_{2n}(z)$  (в предположении, что  $P_0(z), \dots, P_{2n-2}(z)$  уже построены) следующим условиям:

$$|P_{2n-1}(z) - P_{2n-2}(z)| < \frac{1}{2^{2n-1}} \quad \text{при } |z| < r_{8n-8}$$



$$|P_{2n-1}(z) - 1| < \frac{1}{2^{2n-1}} \quad \text{при } z \in B_{2n-1};$$

$$|P_{2n}(z) - P_{2n-1}(z)| < \frac{1}{2^{2n}} \quad \text{при } |z| < r_{8n-4}$$

$$|P_{2n}(z)| < \frac{1}{2^{2n}} \quad \text{при } z \in B_{2n}.$$

Последовательность  $\{P_n(z)\}$  равномерно сходится на всяком замкнутом множестве точек, лежащем в единичном круге. Действительно, такое множество  $F$  принадлежит кругу  $|z| < r_{4n}$  при  $n \geq N(F)$ . Поэтому при  $n > N(F)$  имеем:  $|P_{n+1}(z) - P_n(z)| < \frac{1}{2^{n+1}}$  ( $z \in F$ ). Предел последовательности  $\{P_n(z)\}$  представляет однозначную и аналитическую в единичном круге функцию  $F(z)$ , удовлетворяющую условию

$$\begin{aligned} |F(z) - 1| &\leq |F(z) - P_{2n-1}(z)| + \\ &+ |P_{2n-1}(z) - 1| = \left| \sum_{j=2n-1}^{\infty} [P_{j+1}(z) - P_j(z)] \right| + |P_{2n-1}(z) - 1| < \\ &< \sum_{j=2n-1}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^{2n-1}} = \frac{1}{2^{2n-2}} \end{aligned}$$

при  $z \in B_{2n-1}$  и условию

$$\begin{aligned} |F(z)| &\leq |P_{2n}(z)| + \left| \sum_{j=2n}^{\infty} [P_{j+1}(z) - P_j(z)] \right| \leq \frac{1}{2^{2n}} + \sum_{j=2n}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}} = \\ &= \frac{1}{2^{2n-1}} \quad \text{при } z \in B_{2n}. \end{aligned}$$

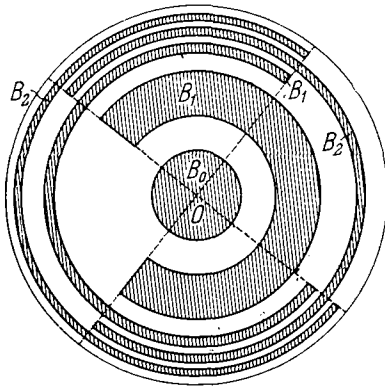


Рис. 72.

В силу этих неравенств и взаимного расположения множеств  $B_n$  заключаем, что  $F(z)$  не имеет граничных значений при стремлении к точке единичной окружности по радиусам.

Пусть  $O$  — открытое множество, не содержащее бесконечно удаленной точки, и пусть среди компонент множества  $O$  имеется по крайней мере одна многосвязная область. Тогда среди граничных точек множества  $O$  имеются такие точки  $\zeta$ , которые принадлежат внутренности некоторой замкнутой жордановой кривой  $\Gamma$ , содержащейся в  $O$ . Если  $\{P_n(z)\}$  — последовательность многочленов, равномерно сходящаяся на каждом замкнутом множестве точек, содержащемся в  $O$ , то она равномерно сходится на  $\Gamma$ , а следовательно, и внутри  $\Gamma$ . Поэтому функция  $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z)$  должна быть аналитической в точке  $\zeta$ . Отсюда выводим, что каждая функция  $f(z)$ , представимая последовательностью многочленов, равномерно сходящейся на каждом замкнутом

множестве точек из  $O$ , необходимо должна быть однозначной и аналитической на множестве  $\bar{O}$ , представляющем собой сумму всех минимальных односвязных областей, содержащих компоненты открытого множества  $O$ .

В силу теоремы, доказанной в начале этого пункта, для каждой функции  $f(z)$ , локально-аналитической на  $O$ , существует последовательность рациональных функций  $\{R_n(z)\}$  (не многочленов), равномерно сходящаяся к  $f(z)$  внутри  $O$ . По построению функции  $R_n(z)$ , все ее полюсы лежат на границе  $\Gamma_{n+1}$  открытого множества  $O_{n+1}$ , содержащего  $\bar{O}_n$  и заключающегося в  $O$ . Дополнение к  $\bar{O}_n$  относительно расширенной плоскости состоит из конечного числа областей  $D_1^{(n)}, \dots, D_{\nu_n}^{(n)}$ . При этом каждая из них содержит по крайней мере по одной граничной или внешней точке для  $O$ , а следовательно, содержит по крайней мере одну замкнутую ломаную, входящую в состав  $\Gamma_{n+1}$ . Фиксируем в областях  $D_j^{(n)}$  по одной точке  $\alpha_j^{(n)}$ , являющейся внешней или граничной точкой для  $O$ . Тогда, в силу леммы, послужившей для доказательства теоремы Рунге, функцию  $R_n(z)$  можно будет заменить другой рациональной функцией  $\tilde{R}_n(z)$ , все полюсы которой будут исчерпываться точками  $\alpha_j^{(n)}$  ( $j = 1, 2, \dots, p$ ),

и которая будет удовлетворять условию  $|\tilde{R}_n(z) - R_n(z)| < \frac{1}{n}$

на множестве  $\bar{O}_n$ . Отсюда следует, что для нашей функции  $f(z)$  существует равномерно сходящаяся к ней внутри  $O$  последовательность рациональных функций  $\{\tilde{R}_n(z)\}$ , все полюсы которых являются внешними или граничными для  $O$  и выбираются, как это видно из предыдущего, в известной мере произвольно. Чтобы ясно видеть степень этого произвола, допустим, в частности, что  $O$  есть конечносвязная область, граница которой состоит из  $p \geq 2$  жордановых кривых, попарно не имеющих общих точек. Каждая из этих кривых  $\gamma_j$  является границей некоторой области, не имеющей общих точек с  $O$ . Выберем в этих областях по одной точке  $\alpha_j$  ( $j = 1, 2, \dots, p$ ). Тогда можно требовать, чтобы все полюсы функции  $\tilde{R}_n(z)$  содержались среди точек  $\alpha_j$  ( $j = 1, 2, \dots, p$ ).

Если, например,  $O$  есть круговое кольцо:  $0 < r < |z - z_0| < R < \infty$ , то  $p = 2$  и можно положить:  $\alpha_1 = z_0$  и  $\alpha_2 = \infty$ . Тогда функция  $\tilde{R}_n(z)$  должна иметь вид

$$\tilde{R}_n(z) = \frac{A_0^{(n)} + A_1^{(n)}(z - z_0) + \dots + A_{\mu_n}^{(n)}(z - z_0)^{\lambda_n}}{(z - z_0)^{\mu_n}} = \sum_{j=-\mu_n}^{\lambda_n - \mu_n} A_j^{(n)}(z - z_0)^j.$$

Поэтому каждая функция  $f(z)$ , однозначная и аналитическая в круговом кольце, может быть представлена в следующем виде:

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{R}_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-\mu_n}^{\lambda_n - \mu_n} A_j^{(n)}(z - z_0)^j.$$

Мы знаем, что теорема Лорана позволяет в этом случае утверждать нечто большее, а именно, что коэффициенты  $A_j^{(n)}$  можно считать не зависящими от  $n$ , так что для  $f(z)$  получается разложение

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j(z - z_0)^j.$$

**Теорема Монтеля.** Пусть  $O$  — произвольное открытое множество, не содержащее точки  $z = \infty$ , и  $f(z)$  — функция, однозначная и локально-аналитическая на этом множестве. Существует последовательность многочленов  $\{P_n(z)\}$ , сходящаяся к  $f(z)$  на  $O$  (вообще неравномерно).

**Доказательство.** Пусть  $\{O_n\}$  — возрастающая последовательность открытых множеств, построенная выше. Представим  $O_n$  в виде

$$O_n = O_1 + (O_2 - O_1) + \dots + (O_n - O_{n-1}) = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n.$$

В силу построения  $\omega_j$  образовано равными квадратами со стороной  $\frac{1}{3^j}$  ( $j$

1, 2, ...,  $n$ ). Каждый такой квадрат заменим девятью прямоугольниками, указанными на рис. 71 (с заменой длины стороны квадрата на  $\frac{1}{3^j}$ ).

Рассматривая каждый прямоугольник как замкнутое множество, обозначим через  $R_n$  объединение всех прямоугольников, соответствующих квадратам  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ . Легко видеть, что  $R_n$  является совершенным множеством, не содержащим бесконечно удаленной точки, причем дополнение к  $R_n$  связно. Кроме того,  $R_n \subset O$  (и даже  $R_n \subset O_{n+1}$ ), благодаря чему для любого  $\varepsilon_n > 0$  можно найти многочлен  $P_n(z)$ , удовлетворяющий на  $R_n$  неравенству

$$|P_n(z) - f(z)| < \varepsilon_n$$

(см. следствие из теоремы Рунге на стр. 391).

Последовательность  $\{P_n(z)\}$  удовлетворяет всем условиям теоремы, если последовательность  $\{\varepsilon_n\}$  сходится к нулю.

В самом деле, каждая точка  $z$ ,  $z \in O$ , принадлежит какому-либо из множеств  $\omega_n$ . Пусть  $z \in \omega_j$ . Тогда  $z$  принадлежит одному из квадратов со стороной  $\frac{1}{3^j}$ , составляющих  $\omega_j$ , и если  $z$  лежит в одной из вершин квадрата, то эта

точка принадлежит всем  $R_n$  при  $n \geq j$ ; если же  $z$  отлична от вершины, но лежит на периферии квадрата, то она попадает внутрь одного из периферийных прямоугольников при достаточно большом  $n$  и остается внутри этого прямоугольника, т. е. снова принадлежит всем  $R_n$ , начиная с некоторого; наконец, если  $z$  лежит внутри основного квадрата, то она попадает в concentрический с ним квадрат при достаточно большом  $n$  и остается внутри него, т. е. также принадлежит всем  $R_n$ , начиная с некоторого из них. Итак, в любой из точек  $z$ ,  $z \in O$ , при достаточно большом  $n$ ,  $n > N(z)$ , выполняется неравенство:  $|P_n(z) - f(z)| < \varepsilon_n$ , и значит,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z) = f(z)$  (так как  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ).

### § 3. Изолированные особые точки. Вычеты.

#### Принцип аргумента

**3.1.** Рассмотрим однозначную функцию  $f(z)$ , аналитическую в окрестности некоторой точки  $z_0$ , за исключением, быть может, самой этой точки. Тогда  $f(z)$  является аналитической в некоторой области  $D$ :

$$0 < |z - z_0| < R.$$

Пусть  $z_1$  — точка области  $D$ , удовлетворяющая условию  $0 < |z_1 - z_0| < \frac{R}{2}$ . В круге  $k_{z_1}$   $|z - z_1| < |z_0 - z_1|$

$f(z)$  является однозначной аналитической функцией и, следовательно, представляет собой некоторый элемент  $\varphi_{z_1}(z)$  (гл. третья, п. 6.3). Все точки окружности  $\gamma_{z_1}: |z - z_1| = |z_0 - z_1|$  будут правильными для него, за исключением, быть может, точки  $z_0$ . Покажем, что если и точка  $z_0$  является правильной для рассматриваемого элемента, то она будет правильной и для любого другого элемента  $\varphi_{z_2}(z)$  функции  $f(z)$ , соответствующего какой-либо точке  $z_2$ ,  $0 < |z_2 - z_0| < \frac{R}{2}$ . В самом деле, при сделанном допущении все точки окружности  $\gamma_{z_1}$  будут правильными для  $\varphi_{z_1}(z)$ , поэтому степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!} (z - z_1)^n \text{ будет сходиться в некотором круге } K_{z_1}: |z - z_1| < \rho_1,$$

радиус которого  $\rho_1 > |z_0 - z_1|$ , и, следовательно, точка  $z_0$  будет внутренней для  $K_{z_1}$ . Так как сумма ряда  $\psi(z)$  совпадает с  $\varphi_{z_1}(z) = f(z)$  в круге  $k_{z_1}$ , то, по теореме единственности, она должна совпадать с  $f(z)$  и во всех точках, общих для  $K_{z_1}$  и  $D$ . В частности, она совпадает с  $f(z)$  во всех точках некоторой окрестности  $U$  точки  $z_0$  (за исключением самой точки  $z_0$ , где функция  $f(z)$  пока не определена). Возьмем теперь любую точку  $z_2 \neq z_1$ ,  $|z_2 - z_0| < \frac{R}{2}$ , соответствующий ей круг  $k_{z_2}: |z - z_2| < |z_2 - z_0|$  и элемент  $\varphi_{z_2}(z)$  (представляющий не что иное, как функцию  $f(z)$  в круге  $k_{z_2}$ ). Точка  $z_0$  лежит на окружности  $\gamma_{z_2}: |z - z_2| = |z_2 - z_0|$ .

$|z_2 - z_0|$ . Так как в ее окрестности  $U$  существует аналитическая функция  $\psi(z)$ , совпадающая с  $f(z)$  во всех точках из  $U$ , отличных от  $z_0$ , то она совпадает с  $\varphi_{z_2}(z)$  в точках, общих для  $U$  и  $k_{z_2}$ , откуда вытекает, что  $z_0$  является правильной точкой для  $\varphi_{z_2}(z)$ .

Итак, если рассматривать все элементы, представляющие функцию  $f(z)$  внутри окружностей, проходящих через  $z_0$ , и точка  $z_0$  окажется правильной для одного из этих элементов  $\varphi_{z_1}(z)$ , то она будет правильной и для любого другого элемента  $\varphi_{z_2}(z)$ . В этом случае мы называем функцию  $f(z)$  правильной в точке  $z_0$  и дополняем ее определение, полагая  $f(z_0) = \psi(z_0)$ . В результате функция оказывается аналитической во всех точках круга  $|z - z_0| < R$  и, следовательно, разлагается в ряд Тейлора, расположенный по степеням  $z - z_0$ , сходящийся внутри этого круга.

Рассмотрим, далее, случай, когда точка  $z_0$  оказывается особой точкой для некоторого элемента  $\varphi_{z_1}(z)$ . Тогда она должна быть особой при наших условиях и для любого другого элемента  $\varphi_{z_2}(z)$ . В самом деле, допуская, что она является правильной для  $\varphi_{z_2}(z)$ , мы, по только что доказанному, должны заключить, что она является правильной также и для  $\varphi_{z_1}(z)$ , вопреки сделанному предположению.

Итак, если точка  $z_0$  будет особой точкой для одного из элементов  $\varphi_{z_1}(z)$ , представляющих нашу однозначную функцию  $f(z)$  внутри окружности, проходящей через точку  $z_0$ , то она будет особой точкой также и для любого другого элемента  $\varphi_{z_2}(z)$ . В этом случае мы говорим, что функция  $f(z)$  имеет особую точку  $z = z_0$ , а именно, изолитрованную особую точку однозначного характера.

Основным аппаратом для представления и изучения аналитической функции в окрестности изолированной особой точки  $z_0$  является ряд Лорана. Применим теорему Лорана к функции  $f(z)$  в области  $D$   $0 < |z - z_0| < R$ . Эта область представляет собой вырожденное круговое кольцо с внутренним радиусом  $r = 0$ . Получим:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in D, \quad (3.1:1)$$

где

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

причем  $\gamma_\rho$  есть окружность с центром в точке  $z_0$  и радиусом  $\rho$ ,  $0 < \rho < R$ . Разложением (3.1:1) можно пользоваться и в том случае, когда  $z_0$  — правильная точка. В этом случае ряд Лорана превращается в ряд Тейлора, и мы имеем:  $a_{-1} = a_{-2} = \dots = 0$ .

Докажем следующее основное предложение.

**Т е о р е м а.** Для того чтобы функция  $f(z)$ , однозначная и аналитическая в области  $D: 0 < |z - z_0| < R$ , была правильной в точке  $z_0$ , необходимо и достаточно, чтобы существовала окрестность  $U$  точки  $z_0$ , в которой  $f(z)$  ограничена по модулю.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть точка  $z_0$  является правильной для  $f(z)$ . Тогда  $f(z)$  в некоторой окрестности точки  $z_0$  совпадает с функцией  $\psi(z)$ , аналитической в этой окрестности. Выбирая окрестность  $U$  так, чтобы она лежала вместе со своей границей внутри области, где  $\psi(z)$  является аналитической, найдем в силу непрерывности аналитической функции  $\psi(z)$ , что существует  $M < \infty$  такое, что

$$|f(z)| = |\psi(z)| < M, \quad z \in U.$$

Тем самым необходимость условия теоремы доказана.

Докажем теперь достаточность. Пусть существуют окрестность  $U$  точки  $z_0$  и положительное число  $M < \infty$  такое, что

$$|f(z)| < M \text{ для всех } z \in U.$$

Тогда, выбирая  $\rho$ ,  $0 < \rho < R$ , так, чтобы окружность  $\gamma_\rho$  принадлежала  $U$ , получаем для модулей коэффициентов  $a_n$  ряда Лорана

(3.1 1) следующие оценки:

$$|a_n| < \frac{1}{2\pi} M \frac{2\pi\rho}{\rho^{n+1}}, \text{ т. е. } |a_n| < \frac{M}{\rho^n}.$$

Рассмотрим здесь лишь коэффициенты при отрицательных степенях  $z - z_0$ , т. е. для  $n < 0$ . Устремляя  $\rho$  (подчиненное единственному условию  $0 < \rho < R$ ) к нулю, получим, очевидно:

$$a_n = 0 \text{ при } n = -1, -2, -3,$$

Итак, ряд Лорана превращается в ряд Тейлора:

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

откуда следует, что  $f(z)$  совпадает в области  $D$  с функцией, аналитической в окрестности точки  $z_0$  (с суммой найденного степенного ряда), т. е. точка  $z_0$  является правильной для  $f(z)$ .

Из доказанной теоремы вытекает, что для того чтобы точка  $z_0$  была изолированной особой точкой для  $f(z)$ , необходимо и достаточно, чтобы в любой ее окрестности модуль  $|f(z)|$  был неограниченным, т. е. чтобы выполнялось условие

$$\overline{\lim_{z \rightarrow z_0}} |f(z)| = \infty. \quad (3.1:2)$$

Отсюда следует, что, а priori, имеются две возможности для поведения  $f(z)$  в окрестности изолированной особой точки:

а)  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ ;

б) не существует ни конечного, ни бесконечного предела функции  $f(z)$  при  $z$ , стремящемся к  $z_0$ .

Каждый из этих случаев действительно осуществляется.

Положим  $f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n}$ , где  $n$  — натуральное число. Очевидно, эта функция является аналитической при  $0 < |z - z_0|$  и для нее  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ . Итак, в этом примере осуществляется случай а).

В качестве другого примера возьмем  $f(z) = e^{\frac{1}{z - z_0}}$ . Эта функция также является аналитической при  $0 < |z - z_0|$ , но, в отличие от предыдущего примера,  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  не существует. В самом деле, если, например, точка  $z$  лежит на прямой, проходящей через  $z_0$  параллельно действительной оси, так что  $z - z_0 = x - x_0$  — действительное число, то при  $x > x_0$  и  $x \rightarrow x_0$   $e^{\frac{1}{x - x_0}} \rightarrow \infty$ , а при  $x < x_0$  и  $x \rightarrow x_0$   $e^{\frac{1}{x - x_0}} \rightarrow 0$ . Итак, в этом примере осуществляется

случай б). На рис. 73 представлена поверхность  $u = \left| \exp \frac{1}{z} \right|$  — рельеф рассматриваемой функции (при  $z_0 = 0$ ) \*).

Изолированная особая точка  $z_0$  однозначного характера, для которой выполнено условие а):  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$  называется полюсом аналитической функции. Мы уже встречались в главе второй с полюсами элементарных функций.

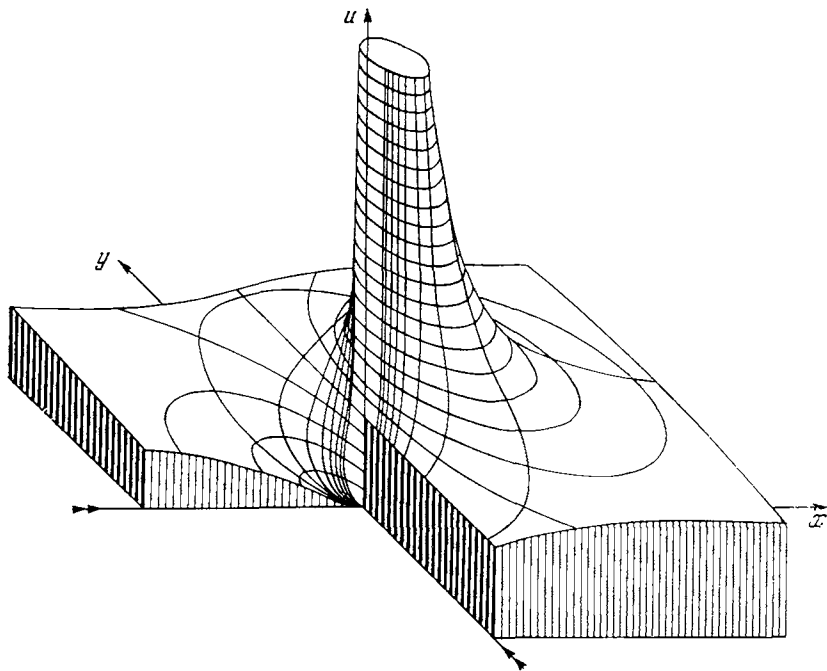


Рис. 73.

Изолированная особая точка  $z_0$  однозначного характера, для которой выполнено условие б):  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  не существует (ни конечный, ни бесконечный), называется существенно особой точкой функции.

Исследуем подробно каждый из этих двух типов особых точек.

Пусть  $z_0$  есть полюс функции  $f(z)$ . Тогда  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ , и следовательно, существует окрестность  $|z - z_0| < \delta < R$  точки  $z_0$ , в которой  $f(z)$  удовлетворяет неравенству  $|f(z)| > 1$ . В этой

\*) Рисунок заимствован из «Таблиц функций» Янке и Эмде.

окрестности функция  $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$  будет, очевидно, аналитической всюду, за исключением, быть может, точки  $z_0$ . Но из того, что  $|\varphi(z)| = \frac{1}{|f(z)|} < 1$ , следует, по теореме этого пункта, что точка  $z_0$  является правильной для  $\varphi(z)$ . Значение этой функции в точке  $z_0$  равно  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$ . Поэтому точка  $z_0$  является нулем функции  $\varphi(z)$ .

Обратно: если известно, что  $\varphi(z)$  — функция, однозначная и аналитическая в некоторой окрестности точки  $z_0$ , и  $z_0$  является нулем этой функции, причем  $\varphi(z) \neq 0$ , то можно указать  $\Delta > 0$  столь малое, чтобы  $\varphi(z)$  не имела в круге  $|z - z_0| < \Delta$  других нулей, кроме точки  $z_0$  (см. п. 6.1 гл. третьей). Образует функцию  $f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ ; она является однозначной и аналитической при  $0 < |z - z_0| < \Delta$  и стремится к  $\infty$ , когда  $z$  стремится к  $z_0$ . Следовательно,  $z_0$  является полюсом для  $f(z)$ .

Итак, мы доказали следующее предложение: *для того чтобы точка  $z_0$  была полюсом функции  $f(z)$ , необходимо и достаточно, чтобы эта точка была нулем для функции  $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ .*

Благодаря этому свойству, устанавливающему соответствие между нулями и полюсами, появляется возможность ввести понятие кратности или порядка кратности (короче, порядка) полюса. Мы будем говорить, что точка  $z_0$  является полюсом кратности  $k$  ( $k \geq 1$ ) для функции  $f(z)$ , если эта точка является нулем порядка  $k$  для функции  $\frac{1}{f(z)}$ . В случае  $k = 1$  полюс будет называться простым, в случае  $k > 1$  — кратным.

В окрестности полюса кратности  $k$  лорановское разложение имеет определенный характер, который мы сейчас обнаружим. Именно, докажем следующее предложение:

*Для того чтобы точка  $z_0$  была полюсом кратности  $k$  для функции  $f(z)$ , необходимо и достаточно, чтобы лорановское разложение  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0$  не содержало членов со степенями ниже, чем  $-k$ , и коэффициент при  $(z - z_0)^{-k}$  был отличен от нуля.* Иными словами, лорановское разложение функции  $f(z)$  должно иметь вид

$$f(z) = a_{-k}(z - z_0)^{-k} + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots \quad (3.1:3)$$

где  $a_{-k} \neq 0$ .

Пусть, в самом деле,  $z_0$  есть полюс функции  $f(z)$  кратности  $k$ . Тогда для  $\frac{1}{f(z)}$  мы должны иметь в этой точке нуль порядка  $k$ ,



откуда

$$\frac{1}{f(z)} = A_k (z - z_0)^k + A_{k+1} (z - z_0)^{k+1} + \dots, \quad A_k \neq 0,$$

в некоторой окрестности точки  $z_0$ . Поэтому

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \frac{1}{A_k + A_{k+1}(z - z_0) + \dots} \quad (3.1:4)$$

Степенной ряд  $A_k + A_{k+1}(z - z_0) + \dots$  представляет аналитическую функцию, не обращающуюся в нуль в некоторой окрестности точки  $z_0$  (так как  $A_k \neq 0$ ). Поэтому функция  $\frac{1}{A_k + A_{k+1}(z - z_0) + \dots}$  является аналитической в окрестности  $z_0$  и допускает разложение вида  $\alpha_0 + \alpha_1(z - z_0) + \dots$  где  $\alpha_0 = \frac{1}{A_k} \neq 0$ . Подставляя последний ряд в формулу (3.1:4), получаем для  $f(z)$  разложение:

$$f(z) = \alpha_0 (z - z_0)^{-k} + \alpha_1 (z - z_0)^{-k+1} + \dots \quad (\alpha_0 \neq 0),$$

которое, в силу единственности разложения в ряд Лорана, является лорановским разложением функции  $f(z)$ . Оно совпадает с (3.1 3) с точностью до обозначений ( $\alpha_n = a_{n-k}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Итак, условие доказываемой теоремы является необходимым. Докажем теперь, что оно и достаточно. Пусть  $f(z)$  обладает в окрестности  $z_0$  разложением вида (3.1 3), где  $a_{-k} \neq 0$ . Переписывая его в виде

$$f(z) = \frac{a_{-k} + a_{-k+1}(z - z_0) + \dots}{(z - z_0)^k},$$

закключаем отсюда, что

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^k \frac{1}{a_{-k} + a_{-k+1}(z - z_0) + \dots}$$

или, заменяя функцию  $\frac{1}{a_{-k} + a_{-k+1}(z - z_0) + \dots}$  ее разложением в ряд Тейлора по степеням  $z - z_0$ :

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^k [\beta_0 + \beta_1(z - z_0) + \dots] = \beta_0 (z - z_0)^k + \beta_1 (z - z_0)^{k+1} +$$

где  $\beta_0 = \frac{1}{a_{-k}} \neq 0$ .

Мы нашли, что точка  $z_0$  является нулем порядка  $k$  для функции  $\frac{1}{f(z)}$ . Следовательно, та же точка есть полюс кратности  $k$  для функции  $f(z)$ . Теорема доказана.

Обратимся к случаю существенно особой точки. Поведение функции в окрестности существенно особой точки характеризуется следующим предложением:

**Теорема Сохоцкого — Казорати — Вейерштрасса \*).** *Каково бы ни было комплексное число  $A$  (собственное или несобственное), существует такая последовательность точек  $\{z_n\}$ , сходящаяся к существенно особой точке  $z_0$ , что*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A.$$

**Доказательство.** В случае, когда  $A = \infty$ , теорема справедлива, ибо функция  $f(z)$  не ограничена по модулю в любой окрестности существенно особой точки. Пусть теперь  $A \neq \infty$ ; будем доказывать теорему от противного. Если в произвольной окрестности точки  $z_0$  нельзя найти точек, в которых значения функции сколь угодно близки к  $A$ , то должны существовать окрестность  $0 < |z - z_0| < \delta$  и число  $\alpha > 0$  такие, что  $|f(z) - A| > \alpha$  при  $0 < |z - z_0| < \delta$ . Построим функцию  $\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - A}$ ; она является аналитической в окрестности  $0 < |z - z_0| < \delta$ . Кроме того, она удовлетворяет в этой окрестности неравенству

$$|\varphi(z)| = \frac{1}{|f(z) - A|} < \frac{1}{\alpha}$$

Следовательно, по первой теореме этого пункта  $\varphi(z)$  является правильной в точке  $z_0$  и ее значение в этой точке должно равняться пределу  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z) - A}$ . Но  $f(z)$  не ограничена ни в какой окрестности точки  $z_0$ . Поэтому указанный предел может быть только нулем, т. е.  $\varphi(z_0) = 0$ . Итак, функция  $\frac{1}{f(z) - A}$  имеет нуль в точке  $z_0$ , откуда вытекает, что функция  $f(z) - A$ , а значит и  $f(z)$  имеет полюс в этой точке. Мы пришли к противоречию с условием теоремы, откуда и следует ее справедливость.

Иллюстрируем эту теорему на двух примерах.

**Пример 1.**  $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ . Здесь существенно особой точкой является начало координат. В самом деле, при  $z$ , стремящемся к нулю,  $\sin \frac{1}{z}$  не стремится ни к какому пределу, ни к конечному, ни к бесконечному, как немедленно обнаруживается при рассмотрении одних лишь действительных значений  $z$ .

Если  $A = \infty$ , то, полагая, например,  $z_n = \frac{i}{n}$  и, следовательно,  $\frac{1}{z_n} = -in$ , получим:  $\sin \frac{1}{z_n} = -i \operatorname{sh} n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

---

\*) Теорема эта была опубликована независимо друг от друга Сохоцким и итальянским математиком Казорати в 1868 г., а Вейерштрассом — в 1876 г.; в дальнейшем эту теорему будем для краткости называть теоремой Сохоцкого.

Пусть теперь  $A \neq \infty$ . Чтобы получить последовательность  $\{z_n\}$ , о которой говорит теорема Сохоцкого, попытаемся решить уравнение

$$\sin \frac{1}{z} = A.$$

Получим:

$$\frac{1}{z} = \operatorname{Arcsin} A = \frac{1}{i} \operatorname{Ln} (iA + \sqrt{1 - A^2}),$$

откуда

$$z = \frac{i}{\operatorname{Ln} (iA + \sqrt{1 - A^2})} = \frac{i}{\ln |iA + \sqrt{1 - A^2}| + 2k\pi i}$$

Полагая

$$z_n = \frac{i}{\ln |iA + \sqrt{1 - A^2}| + 2n\pi i}$$

и придавая  $n$  значения 1, 2, 3, ..., получим последовательность  $\{z_n\}$ , сходящуюся к нулю и удовлетворяющую условию

$$f(z_n) = A \quad (n = 1, 2, \dots),$$

следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$ .

**Пример 2.**  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$  Здесь существенно особой точкой также является начало координат, так как снова не существует предела  $\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{1}{z}}$

Полагая  $A = \infty$ , возьмем  $z_n = \frac{1}{n}$ . Имеем:  $f(z_n) = e^n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , т. е. последовательность  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$  отвечает утверждению теоремы Сохоцкого при  $A = \infty$ . Пусть теперь  $A = 0$ . Тогда, полагая  $z_n = -\frac{1}{n}$ , будем иметь:  $f(z_n) = e^{-n}$  при  $n \rightarrow \infty$ , т. е. утверждение теоремы проверено и в этом случае. Пусть, наконец,  $A \neq 0$ ,  $A \neq \infty$ . Здесь проще всего подобрать соответствующие точки  $z_n$ , решая уравнение

$$e^{\frac{1}{z}} = A.$$

Получим:

$$\frac{1}{z} = \operatorname{Ln} A,$$

откуда

$$z = \frac{1}{\operatorname{Ln} A} = \frac{1}{\ln |A| + 2k\pi i}$$

Полагая

$$z_n = \frac{1}{\ln|A| + 2n\pi i} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

будем иметь последовательность  $\{z_n\}$ , сходящуюся к нулю и удовлетворяющую условию  $f(z_n) = A$ ; следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$ .

Из теоремы Сохоцкого вытекает, что если  $z_0$  — существенно особая точка функции  $f(z)$  и  $E_\delta$  — множество значений, принимаемых функцией в произвольно малой окрестности  $|z - z_0| < \delta$  этой точки, то замыкание множества  $E_\delta$  (т. е.  $E_\delta$  вместе со всеми предельными точками этого множества) совпадает с расширенной комплексной плоскостью.

В самом деле, каждая точка  $A$  комплексной плоскости является пределом для последовательности  $\{f(z_n)\}$  точек, принадлежащих к  $E_\delta$ , и, следовательно,  $A$  принадлежит замыканию множества  $E_\delta$ .

В примерах 1 и 2 мы видели, что за отдельными исключениями ( $A = \infty$  в первом примере,  $A = \infty$  и  $A = 0$  — во втором), вместо последовательности точек  $\{z_n\}$ , для которой выполняется предельное равенство

$$\lim_{z_n \rightarrow z_0} f(z_n) = A,$$

удается находить такие последовательности, для которых справедливы точные равенства:

$$f(z_n) = A, \quad n = 1, 2,$$

Оказывается, что аналогичное положение имеет место и в общем случае. Об этом говорит следующее предложение:

**Т е о р е м а П и к а р а (большая).** Если  $z_0$  — существенно особая точка функции  $f(z)$ , то для каждого  $A \neq \infty$ , за исключением, быть может, одного значения  $A = A_0$ , существует бесконечная последовательность  $A$ -точек функции  $f(z)$ , сходящаяся к  $z_0$ .

В примере  $f(z) = \sin \frac{1}{z}$  исключительное значение отсутствует, в примере  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$  оно равно 0, ибо функция  $e^{\frac{1}{z}}$  всегда отлична от нуля.

Мы докажем эту теорему позднее (гл. восьмая). Отметим здесь, что, как легко проверить, теорема Сохоцкого заключается в утверждениях теоремы Пикара.

Из последней теоремы следует, что множество значений функции  $f(z)$ , принимаемых в произвольной окрестности  $|z - z_0| < \delta$  существенно особой точки  $z_0$ , совпадает со всей конечной плоскостью  $|z| < \infty$ , исключая из нее, самое большее, одну точку  $A_0$  ( $A_0$  не зависит от  $\delta$ ).

Лорановское разложение функции  $f(z)$  в окрестности существенно особой точки  $z_0$  обязательно должно содержать бесконечное множество членов с отрицательными степенями  $z - z_0$  (подразумевается, с отличными от нуля коэффициентами). В самом деле, если бы такие члены совсем отсутствовали в этом разложении, то точка  $z_0$  была бы правильной для  $f(z)$ , а если бы они имелись только в конечном числе, то точка  $z_0$  была бы полюсом  $f(z)$  (по теореме, стр. 403). Обратно: всякий раз, когда лорановское разложение функции  $f(z)$  в окрестности некоторой точки  $z_0$  содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями  $z - z_0$ ,  $z_0$  является существенно особой точкой функции  $f(z)$ . В самом деле, она не может быть ни правильной для  $f(z)$  (ибо тогда члены с отрицательными степенями должны полностью отсутствовать), ни полюсом (ибо тогда должно иметься лишь конечное число таких членов).

В виде примера рассмотрим функцию  $\exp \frac{1}{z^4}$ ; для нее справедливо следующее разложение, сходящееся при любом  $z \neq 0$ :

$$\exp \frac{1}{z^4} = 1 + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{2! z^8} + \frac{1}{3! z^{12}} + \dots$$

Очевидно, его можно рассматривать как лорановское разложение функции в окрестности точки  $z = 0$ . Так как это разложение содержит бесконечное множество отрицательных степеней  $z$ , то  $z = 0$  является существенно особой точкой функции. Разумеется, то же самое можно установить, наблюдая поведение этой функции в окрестности начала координат. Читатель легко обнаружит, что она стремится к  $\infty$ , когда  $z$  приближается к началу координат, оставаясь на координатных осях, и к 0, когда  $z$  приближается к началу координат, оставаясь на биссектрисах координатных углов. Следовательно,  $\lim_{z \rightarrow 0} \exp \frac{1}{z^4}$  не существует, и точка  $z = 0$  является существенно особой точкой функции  $\exp \frac{1}{z^4}$ .

Из всего изложенного вытекает, что определяющее значение для характера особой точки имеет совокупность членов с отрицательными степенями в лорановском разложении рассматриваемой функции  $f(z)$  в окрестности этой точки. По этой причине

ряд  $\sum_1^{\infty} a_{-k} (z - z_0)^{-k}$  называют главной частью лорановского разложения  $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$  в окрестности точки  $z_0$ .

Ряд  $\sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ , состоящий из всех членов разложения с неот-

рицательными степенями, представляет функцию, правильную в точке  $z_0$ , и поэтому называется правильной частью ряда Лорана.

Применяя высказанные предложения, следует помнить, что они имеют в виду лишь те лорановские разложения, которые сходятся в некоторой окрестности  $0 < |z - z_0| < R$  исследуемой точки.

В виде примера рассмотрим ряд Лорана:

$$\dots + \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \dots + \frac{z^n}{2^{n+1}} +$$

Он содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями  $z$ . Однако раньше, чем утверждать, что  $z=0$  является существенно особой точкой для суммы ряда, следует выяснить, сходится ли он в какой-нибудь окрестности этой точки. Заметим, что наш ряд представляет сумму двух прогрессий:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}. \text{ Первая из них сходится для } |z| > 1 \text{ и пред-}$$

ставляет функцию  $\frac{\frac{1}{z}}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z-1}$ ; вторая сходится для  $|z| < 2$

и представляет функцию  $\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{1}{2-z}$ . Следовательно, область

сходимости данного ряда есть кольцо  $1 < |z| < 2$ , которое, конечно, не является окрестностью начала координат. Сумма ряда в этом кольце равна  $\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2-z} = \frac{1}{z^2-3z+2}$  — функции, для которой начало координат является правильной точкой и все особые точки которой сводятся к двум простым полюсам:  $z=1$  и  $z=2$ .

**3.2.** Для скорейшего определения положения и характера особых точек функции в конкретных случаях полезно иметь в виду следующие простые предложения, вытекающие из теорем пункта 3.1.

а) Если  $f(z)$  и  $\varphi(z) \not\equiv 0$  — две функции, однозначные и аналитические в данной области  $G$ , то функция  $F(z) = \frac{f(z)}{\varphi(z)}$  может иметь в области  $G$  особые точки, а именно полюсы, только в нулях функции  $\varphi(z)$ . Пусть  $\xi$  является  $k$ -кратным нулем функции  $\varphi(z)$  ( $k \geq 1$ ) и  $l$ -кратным нулем функции  $f(z)$  ( $l \geq 0$ ) (в случае, когда  $\xi$  не является нулем функции  $f(z)$ , полагаем  $l=0$ ).

Тогда в окрестности точки  $\zeta$  имеем:

$$F(z) = \frac{\frac{f^{(l)}(\zeta)}{l!}(z-\zeta)^l + \dots}{\frac{\varphi^{(k)}(\zeta)}{k!}(z-\zeta)^k + \dots} = (z-\zeta)^{l-k} \frac{\frac{f^{(l)}(\zeta)}{l!} + \dots}{\frac{\varphi^{(k)}(\zeta)}{k!} + \dots},$$

где  $f^{(l)}(\zeta) \neq 0$  и  $\varphi^{(k)}(\zeta) \neq 0$ . Отсюда следует, что  $F(z)$  имеет в точке  $\zeta$  полюс порядка  $k-l$ , если  $k > l$ , и правильную точку, если  $k \leq l$ , причем она является нулем функции  $F(z)$  порядка  $l-k$ , если  $k < l$ .

б) Если  $f(z)$  и  $\varphi(z)$  — две функции, не имеющие в области  $G$  других особых точек, кроме полюсов, то их сумма, разность, произведение и частное (последнее образуется только в том случае, когда  $\varphi(z) \neq 0$ ) также не имеет других особых точек, кроме полюсов.

В частности, рассмотрим разность этих функций  $f(z) - \varphi(z)$  и пусть  $\zeta$  — точка, в окрестности которой лорановские разложения функций  $f(z)$  и  $\varphi(z)$  имеют вид

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a_{-l}}{(z-\zeta)^l} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-\zeta} + a_0 + a_1(z-\zeta) + \dots \\ \varphi(z) &= \frac{b_{-k}}{(z-\zeta)^k} + \dots + \frac{b_{-1}}{z-\zeta} + b_0 + b_1(z-\zeta) + \dots \end{aligned}$$

Здесь  $l$  и  $k$  обозначают порядок точки  $\zeta$ , рассматриваемой соответственно как полюс той или другой функции. Условимся, для большей общности, считать, что  $l \leq 0$  (или  $k \leq 0$ ) в случае, когда  $\zeta$  является правильной точкой для  $f(z)$  (или  $\varphi(z)$ ), и начинать в этом случае разложение с членов с неотрицательными степенями  $z - \zeta$ .

Вычитая почленно из разложения для  $f(z)$  разложение для  $\varphi(z)$ , получим разложение для  $f(z) - \varphi(z)$ . Очевидно, точка  $\zeta$  будет полюсом для этой разности тогда и только тогда, когда она является полюсом по крайней мере для одной из функций  $f(z)$  и  $\varphi(z)$  ( $k \geq 1$  или  $l \geq 1$ ), причем главные части разложений для  $f(z)$  и  $\varphi(z)$  не совпадают друг с другом. В случае же, когда главные части одинаковы (т. е.  $k = l$ ,  $a_{-k} = b_{-k}$ ,  $a_{-1} = b_{-1}$ ), мы получаем для разности разложение:

$$f(z) - \varphi(z) = a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)(z - \zeta) + \dots,$$

откуда следует, что  $\zeta$  является правильной точкой для  $f(z) - \varphi(z)$ .

Рассмотрим, далее, функцию

$$F(z) = \frac{f(z)}{\varphi(z)} \quad (\varphi(z) \neq 0).$$

Ее особые точки возможны только в нулях функции  $\varphi(z)$  или в полюсах функции  $f(z)$ . Пусть  $\zeta$  — точка, являющаяся нулем или

поллюсом функций  $f(z)$  или  $\varphi(z)$ . Во всех случаях мы можем писать:

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-\zeta)^l [a_0 + a_1(z-\zeta) + \dots], \\ \varphi(z) &= (z-\zeta)^k [b_0 + b_1(z-\zeta) + \dots], \end{aligned}$$

где  $l$  и  $k$  — целые числа (положительные, отрицательные или нули), а в квадратных скобках заключены степенные ряды, сходящиеся в некоторой окрестности точки  $\zeta$  и имеющие отличные от нуля свободные члены ( $a_0 \neq 0$ ,  $b_0 \neq 0$ ). При этом условию  $k > 0$ , например, соответствует случай, когда  $\varphi(z)$  имеет  $k$ -кратный нуль в точке  $\zeta$ ,  $k = 0$  означает, что  $z = \zeta$  есть правильная точка, в которой  $\varphi(z) \neq 0$ , и, наконец,  $k < 0$  означает, что  $z = \zeta$  является особой точкой функции  $\varphi(z)$ , а именно, полюсом порядка  $-k$ .

Подставим разложения для  $f(z)$  и  $\varphi(z)$  в формулу для  $F(z)$ . Будем иметь:

$$F(z) = (z-\zeta)^{l-k} \frac{a_0 + a_1(z-\zeta) + \dots}{b_0 + b_1(z-\zeta) + \dots}.$$

Очевидно, при  $l \geq k$  точка  $\zeta$  будет правильной для  $F(z)$  (в частности, при  $l > k$  — нулем порядка  $l - k$ ), а при  $l < k$  — полюсом функции  $F(z)$  порядка  $k - l$ .

в) Пусть  $f(z)$  — однозначная функция, не имеющая в области  $G$  других особенностей, кроме полюсов. Тогда и производная этой функции  $f'(z)$  не может иметь в области  $G$  других особенностей, кроме полюсов. А именно,  $f'(z)$  имеет полюс в каждом полюсе функции  $f(z)$  и притом кратности на единицу большей, чем кратность полюса  $f(z)$ .

В самом деле, пусть  $\zeta$  — полюс функции  $f(z)$  кратности  $k \geq 1$ . Тогда  $f(z)$  имеет в некоторой окрестности  $U$  точки  $\zeta$   $0 < |z - \zeta| < R$  разложение

$$f(z) = \frac{A_{-k}}{(z-\zeta)^k} + \dots + \frac{A_{-1}}{z-\zeta} + A_0 + A_1(z-\zeta) + \dots \quad (A_{-k} \neq 0).$$

Так как члены этого разложения являются аналитическими в  $U$  и само разложение сходится равномерно внутри области  $U$  (по свойству ряда Лорана), то его можно почленно дифференцировать в  $U$ . Получаем:

$$f'(z) = -\frac{kA_{-k}}{(z-\zeta)^{k+1}} - \dots - \frac{A_{-1}}{(z-\zeta)^2} + A_1 + \dots \quad (kA_{-k} \neq 0).$$

Мы получили для  $f'(z)$  лорановское разложение в окрестности точки  $\zeta$ , откуда видно, что  $\zeta$  является полюсом кратности  $k + 1$  для производной  $f'(z)$ .

г) Пусть  $f(z) \neq \text{const}$  — однозначная функция, не имеющая в области  $G$  других особых точек, кроме полюсов, и  $A \neq \infty$  —



произвольное комплексное число. Тогда л о г а р и ф м и ч е с к а я производная функции  $f(z) - A$

$$\frac{d \{ \operatorname{Ln} [f(z) - A] \}}{dz} = \frac{f'(z)}{f(z) - A}$$

не имеет в области  $G$  других особых точек, кроме полюсов; а именно, она имеет простые полюсы во всех полюсах функции  $f(z)$  и во всех  $A$ -точках этой функции (т. е. во всех нулях функции  $f(z) - A$ ).

Для проверки этого утверждения сошлемся на общий случай, рассмотренный выше в рубрике б). Мы видели, что частное двух функций может иметь полюсы в нулях знаменателя или в полюсах числителя. Пусть точка  $z = \xi$  является  $k$ -кратным нулем знаменателя, т. е.  $A$ -точкой функции  $f(z)$  кратности  $k$ . Тогда

$$f(z) - A = a_0(z - \xi)^k + a_1(z - \xi)^{k+1} + \quad (k \geq 1, a_0 \neq 0).$$

Отсюда следует, что

$$f'(z) = ka_0(z - \xi)^{k-1} + a_1(k+1)(z - \xi)^k + \dots$$

т. е. точка  $\xi$  является  $k - 1$ -кратным нулем числителя дроби. Отсюда и следует, что эта точка есть простой полюс логарифмической производной.

Пусть, с другой стороны,  $z = \xi$  есть полюс числителя  $f'(z)$ . Это возможно лишь в случае, когда  $\xi$  есть полюс для  $f(z) - A$ ; при этом, как мы видели в рубрике в), кратность полюса для  $f'(z)$  будет на единицу выше кратности того же полюса для  $f(z) - A$ . Следовательно, для логарифмической производной снова получаем простой полюс в точке  $\xi$ .

д) Если  $\xi$  является правильной точкой или полюсом для функции  $f(z) \neq 0$ , а для функции  $\varphi(z)$   $\xi$  есть существенно особая точка, то  $\xi$  будет существенно осевой и для каждой из функций  $\varphi(z) \pm \pm f(z)$ ,  $f(z)\varphi(z)$  и  $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ .

Действительно, обозначим последние функции соответственно через  $\psi_1(z)$ ,  $\psi_2(z)$  и  $\psi_3(z)$ . Тогда будем иметь:

$$\varphi(z) = \psi_1(z) \pm f(z), \quad \varphi(z) = \frac{\psi_2(z)}{f(z)}, \quad \varphi(z) = \psi_3(z) f(z).$$

Если допустить, что  $\psi_j(z)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) имеет правильную точку или полюс при  $z = \xi$ , то и функция  $\varphi(z)$  будет иметь правильную точку или полюс при  $z = \xi$ , что противоречит условию. Итак, точка  $z = \xi$  не может быть правильной для функций  $\psi_j(z)$ . Так как эти функции являются однозначными аналитическими в некоторой окрестности точки  $\xi$ , исключая эту точку, то она должна быть изолированной осевой точкой однозначного характера для  $\psi_j(z)$ .

Но мы убедились в том, что точка  $\zeta$  не может быть полюсом для  $\psi_j(z)$ . Следовательно, она является существенно особой для каждой из этих функций.

е) Если  $\zeta$  является существенно особой точкой для функции  $\varphi(z)$ , то функция  $\frac{1}{\varphi(z)}$  будет иметь в  $\zeta$  либо также существенно особую, либо неизолированную особую точку — предельную точку полюсов.

В самом деле, имеются две возможности: либо существует окрестность точки  $\zeta$ , в которой  $\varphi(z)$  не обращается в нуль, либо такой окрестности не существует. В первом случае функция  $\psi(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$  будет аналитической в некоторой окрестности точки  $\zeta$ , за исключением самой точки  $\zeta$ . Эта точка не может быть для  $\psi(z)$  ни правильной точкой, ни полюсом; в противном случае  $\zeta$  была бы полюсом или правильной точкой для  $\varphi(z) = \frac{1}{\psi(z)}$ , вопреки предположению. Следовательно,  $\zeta$  является существенно особой точкой для  $\psi(z)$ .

Во втором случае в каждой окрестности точки  $\zeta$  существуют нули функции  $\varphi(z)$  и, следовательно, в ней же существуют полюсы функции  $\psi(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ . Отсюда вытекает, что любая окрестность точки  $\zeta$  содержит особые точки (а именно, полюсы) функции  $\psi(z)$ . Поэтому  $\zeta$  является в рассматриваемом случае неизолированной особой точкой для  $\psi(z)$ . Это — предельная точка полюсов.

**3.3.** Рассмотрим однозначную функцию  $f(z)$ , аналитическую во всех точках внешности  $|z| > r$  некоторого круга с центром в начале координат, за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки. Выполняя преобразование  $z = \frac{1}{\zeta}$ , мы сведем изучение такой функции к изучению функции  $f^*(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ , аналитической во всех точках окрестности начала координат, за исключением, быть может, самого начала координат. При этом точка  $\zeta = 0$  будет служить образом бесконечно удаленной точки  $z = \infty$ , и каждой последовательности точек  $\{z_n\}$ , сходящейся к бесконечно удаленной точке, будет соответствовать последовательность  $\left\{\zeta_n = \frac{1}{z_n}\right\}$  точек, сходящаяся к нулю, и обратно.

В зависимости от того, будет ли точка  $\zeta = 0$  правильной точкой, полюсом порядка  $k$  или существенно особой точкой для  $f^*(\zeta)$ , мы будем называть точку  $z = \infty$  правильной точкой, полюсом порядка  $k$  или существенно особой точкой. Так как в указанных случаях  $f^*(\zeta)$  будет иметь в окрестности точки  $\zeta = 0$  лорановское

разложение, имеющее соответственно вид

$$\begin{aligned} f^*(\zeta) &= a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \dots + a_n\zeta^n + \dots, \\ f^*(\zeta) &= a_k\zeta^{-k} + \dots + a_1\zeta^{-1} + a_0 + a_{-1}\zeta + \dots, \quad (a_k \neq 0) \\ f^*(\zeta) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n\zeta^{-n} \end{aligned}$$

(где в последнем случае бесконечное множество коэффициентов  $a_n$  при отрицательных степенях  $\zeta$  отлично от нуля), то функция  $f(z) = f^*\left(\frac{1}{z}\right)$  в окрестности бесконечно удаленной точки, в зависимости от того, будет ли эта точка правильной, полюсом порядка  $k$  или существенно особой точкой, должна иметь лорановское разложение вида

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_{-1}z^{-1} + a_{-2}z^{-2} + \dots + a_{-n}z^{-n} + \dots, \\ f(z) &= a_kz^k + \dots + a_1z + a_0 + a_{-1}z^{-1} + \dots, \quad (a_k \neq 0) \\ f(z) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} a_nz^n \end{aligned}$$

(где в последнем случае бесконечное множество коэффициентов при положительных степенях  $z$  отлично от нуля).

Таким образом, связи между характером точки по отношению к функции и соответствующим разложением в ряд Лорана получаются здесь такие же, как и в случае конечной точки, только роли членов с положительными и отрицательными степенями меняются между собой. В соответствии с этим главной частью лорановского разложения в окрестности бесконечно удаленной точки является совокупность членов с положительными степенями, а правильной частью — совокупность членов с не положительными степенями.

Мы знаем, что различать правильную точку, полюс и существенно особую точку при  $\zeta = 0$  можно, не рассматривая соответствующего лорановского разложения, а изучая лишь, какая из трех возможностей имеет место:

- 1)  $f^*(\zeta)$  ограничена в окрестности начала координат;
- 2) предел  $f^*(\zeta)$  при  $\zeta$ , стремящемся к нулю, равен бесконечности;
- 3) не существует ни конечного, ни бесконечного предела  $f^*(\zeta)$  при  $\zeta$ , стремящемся к нулю.

Из того, что  $f(z) = f^*\left(\frac{1}{z}\right)$  и  $z = \frac{1}{\zeta}$ , следует, что те же критерии остаются в силе и для бесконечно удаленной точки, и функция  $f(z)$  будет иметь правильную точку, полюс или существенно особую точку при  $z = \infty$ , в зависимости от того, будет ли она ограниченной в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки, стремится ли к бесконечности при  $z$ , стремящемся к бесконечности, или же, наконец, не имеет никакого, ни конечного, ни бесконечного, предела при  $z$ , стремящемся к бесконечности.

Рассмотрим целую функцию  $f(z)$ . Она, в силу своего определения, является однозначной и аналитической во всех конечных точках плоскости и допускает всюду сходящееся разложение

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

Так как оно сходится в любой окрестности бесконечно удаленной точки, то его можно рассматривать как лорановское разложение функции в окрестности бесконечно удаленной точки. Отсюда заключаем, что:

а) целая функция является правильной в бесконечно удаленной точке тогда и только тогда, когда она тождественно равна постоянному:

$$f(z) \equiv a_0;$$

б) целая функция имеет полюс порядка  $k \geq 1$  в бесконечно удаленной точке тогда и только тогда, когда она является многочленом степени  $k$ :

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_k z^k, \quad a_k \neq 0;$$

в) целая трансцендентная функция может быть определена как целая функция с существенно особой точкой в бесконечности. Следовательно, для целой трансцендентной функции не существует предела:  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$  (ни конечного, ни бесконечного).

**3.4.** В этом пункте мы займемся вычислением интегралов от однозначных аналитических функций по замкнутым кривым, в предположении, что в некоторой области, содержащей контур интегрирования, не заключается других особых точек, кроме изолированных особых точек однозначного характера. При такой постановке вопроса внутренность кривой может содержать лишь конечное число особых точек (в противном случае особые точки имели бы по крайней мере одну предельную, являющуюся также особой точкой функции, но неизолированную). Пусть  $z_1, z_2, \dots, z_n$  — изолированные особые точки функции  $f(z)$ , расположенные внутри спрямляемой замкнутой кривой  $\Gamma$ . Опишем около каждой из точек  $z_k$  окружность  $\gamma_k$   $|z - z_k| = \rho_k$  столь малого радиуса  $\rho_k$ , чтобы эта окружность лежала внутри  $\Gamma$  и чтобы каждая из них лежала во внешности всех остальных. Тогда, в силу интегральной теоремы для системы контуров, будем иметь:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz.$$

Таким образом, вопрос сводится к вычислению интеграла  $\int_{\gamma_k} f(z) dz$  по окружности  $|z - z_k| = \rho_k$ , находящейся в окрестности изолированной особой точки  $z_k$  функции  $f(z)$ .

Заменяя  $f(z)$  ее разложением Лорана в окрестности точки  $z_k$  и интегрируя почленно (что возможно ввиду равномерной сходимости ряда Лорана на  $\gamma_k$ ), найдем:

$$\int_{\gamma_k} f(z) dz = \int_{\gamma_k} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m^{(k)} (z - z_k)^m dz = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m^{(k)} \int_{\gamma_k} (z - z_k)^m dz = a_{-1}^{(k)} 2\pi i.$$

В самом деле, из всех интегралов  $\int_{\gamma_k} (z - z_k)^m dz$  отличен от нуля только один, соответствующий значению  $m = -1$ , причем интеграл этот равен  $2\pi i$ .

Итак,

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i (a_{-1}^{(1)} + a_{-1}^{(2)} + \dots + a_{-1}^{(n)}). \quad (3.4:1)$$

Формула (3.4:1) полностью решает поставленную задачу. Мы видим, что значение интеграла аналитической функции зависит, при наших предположениях, только от коэффициентов при минус первой степени в лорановских разложениях функции в окрестностях особых точек. Эти коэффициенты называются **в ы ч е т а м и** **ф у н к ц и и**.

Таким образом, **в ы ч е т о м** функции  $f(z)$  относительно изолированной особой точки  $a$  однозначного характера называется коэффициент  $(z - a)^{-1}$  в лорановском разложении функции в окрестности  $a^*$ .

---

\*) Понятие вычета принадлежит Коши. Им же указаны и многочисленные приложения этого понятия к различным вопросам анализа. Название **в ы ч е т** (résidu) объясняется, по-видимому, тем, что Коши пришел к этому понятию, отыскивая **р а з н о с т ь** между интегралами, взятыми по таким двум путям, имеющим общие начало и конец, между которыми заключаются полюсы функции. В таком виде вычеты можно усмотреть еще в «Мемуаре об определенных интегралах» (1814). Самый термин «вычет» встречается впервые в статье «О новом роде исчисления, аналогичного исчислению бесконечно малых», помещенной в первом томе «Exercices de mathématique» Коши (1826). Вот каким образом Коши вводит здесь это понятие: «Если, после того как найдены значения  $x$ , обращающие  $f(x)$  в бесконечность, прибавить к одному из этих значений, обозначаемому через  $x_1$ , бесконечно малое количество  $\epsilon$ , и далее разложить  $f(x_1 + \epsilon)$  по возрастающим степеням того же количества, то первые члены разложения будут содержать отрицательные степени  $\epsilon$  и один из них будет произведением  $\frac{1}{\epsilon}$  на конечный коэффициент, который мы назовем **в ы ч е т о м** функции  $f(x)$ , относящимся к частному значению  $x_1$  переменной  $x$ ». Вслед за этой статьей Коши дал большое количество других, помещенных в этом и следующих трех томах «Exercices» (1826—1829), в которых он рассматривал приложения теории вычетов к вычислению интегралов, разложению функций в ряды и бесконечные произведения, к теории уравнений и т. д.

Формула (3.4:1) выражает следующую теорему.

**Теорема о вычетах.** *Интеграл от функции  $f(z)$ , взятый по замкнутому контуру  $\Gamma$ , содержащемуся в области, где функция является однозначной и аналитической, за исключением изолированных особых точек однозначного характера, и не проходящему через особые точки, равен произведению суммы вычетов функции относительно всех особых точек, заключенных внутри  $\Gamma$ , на  $2\pi i$ .*

Чтобы применять эту теорему, нужно уметь вычислить вычеты. Последние находятся без труда в случае, когда особая точка функции есть полюс. Пусть сначала  $a$  — простой полюс функции. Тогда в некоторой окрестности точки  $a$  имеет место разложение

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) +$$

откуда

$$f(z)(z-a) = a_{-1} + a_0(z-a) + a_1(z-a)^2 + \dots$$

и, следовательно,

$$a_{-1} = \text{Выч. } f(z) = \lim_{z \rightarrow a} [f(z)(z-a)]. \quad (3.4:2)$$

Вычисление вычета еще более упрощается, если  $f(z)$  имеет вид

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

где  $\varphi(a) \neq 0$ , а  $\psi(z)$  имеет простой нуль при  $z=a$  (т. е.  $\psi(a) = 0$  и  $\psi'(a) \neq 0$ ). Тогда  $z=a$  является простым полюсом функции  $f(z)$ , и по формуле (3.4:2) получаем:

$$\text{Выч. } f(z) = \text{Выч. } \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)(z-a)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi'(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}. \quad (3.4:3)$$

В случае, когда  $a$  есть полюс кратности  $k$  ( $k > 1$ ), имеем в окрестности точки  $a$  разложение

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-a)^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) +$$

откуда

$$f(z)(z-a)^k = a_{-k} + a_{-k+1}(z-a) + \dots + a_{-1}(z-a)^{k-1} + \dots$$

Дифференцируя почленно  $k-1$  раз, получим:

$$\frac{d^{k-1} [f(z)(z-a)^k]}{dz^{k-1}} = (k-1)! a_{-1} + k(k-1) \dots 2a_0(z-a) + \dots$$

и, наконец, при  $z \rightarrow a$ :

$$(k-1)! a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{k-1} [f(z)(z-a)^k]}{dz^{k-1}}$$

или

$$a_{-1} = \text{Выч. } f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{k-1} [f(z)(z-a)^k]}{dz^{k-1}} \quad (3.4:4)$$

Легко проверить, что эта формула сохраняет силу и тогда, когда кратность полюса меньше, чем  $k$ .

Пример 1. Вычислить интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx$ , где  $F(x)$  — рациональная функция:  $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , не имеющая полюсов на действительной оси и такая, что степень знаменателя  $Q(x)$  по крайней мере на две единицы превышает степень числителя  $P(x)$ .

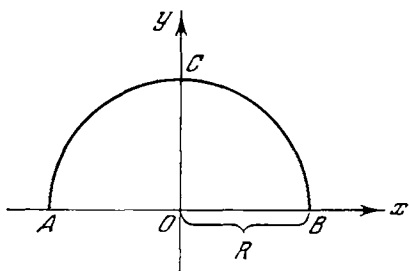


Рис. 74.

Возьмем контур интегрирования, изображенный на рис. 74, где  $BCA$  — полуокружность радиуса  $R$  с центром в начале координат. Выберем радиус  $R$  столь большим, чтобы все полюсы функции  $F(z)$ , находящиеся в верхней полуплоскости, заключались внутри этого контура. Тогда будем иметь:

$$\int_{-R}^{+R} F(x) dx + \int_{BCA} F(z) dz = 2\pi i \sum \text{Выч. } F(z),$$

где сумма распространяется на все полюсы функции  $F(z)$ , принадлежащие верхней полуплоскости.

Так как

$$|F(z)| = \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| = \left| \frac{a_m z^m + \dots + a_0}{b_n z^n + \dots + b_0} \right| = \left| \frac{a_m}{b_n z^{n-m}} \right| \left| \frac{1 + \dots + \frac{a_0}{a_m z^m}}{1 + \dots + \frac{b_0}{b_n z^n}} \right|$$

и  $n-m \geq 2$ , то при достаточно больших значениях  $|z| = R$  будем иметь:

$$|F(z)| < \frac{2|a_m|}{|b_n|R^2} = \frac{C}{R^2}$$

Поэтому

$$\left| \int_{BCA} F(z) dz \right| < \frac{C}{R^2} \pi R = \frac{\pi C}{R} \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} F(x) dx = 2\pi i \sum \text{Выч. } F(z).$$

Итак, интеграл от рациональной функции, не имеющей полюсов на действительной оси и обладающей в бесконечно удаленной точке нулем по крайней мере второго порядка (это условие эквивалентно требованию  $n - m \geq 2$ ), равен произведению  $2\pi i$  на сумму вычетов функции  $F(z)$  относительно полюсов, лежащих в верхней полуплоскости.

Пусть, в частности,

$$F(z) = \frac{z^{2p} - z^{2q}}{1 - z^{2r}},$$

где  $p, q$  и  $r$  — целые неотрицательные числа, причем  $p < r$  и  $q < r$ .

Здесь степень знаменателя  $2r$  по крайней мере на две единицы превосходит степень числителя. Все полюсы функции  $F(z)$  заключаются в формуле

$$z = e^{\frac{k\pi i}{r}} \quad (k = 1, \dots, r-1, r+1, \dots, 2r-1)$$

(точки  $\pm 1$  не являются полюсами функции  $F(z)$ , так как числитель и знаменатель дроби имеют общий множитель  $1 - z^2$ ; если  $p - q$  и  $r$  не взаимно простые, то некоторые из указанных точек также не являются полюсами  $F(z)$ ). Из них в верхней полуплоскости лежат полюсы

$$z = e^{\frac{k\pi i}{r}} \quad (k = 1, 2, \dots, r-1).$$

Все они являются простыми, и, следовательно,

$$\text{Выч.}_{z=e^{\frac{k\pi i}{r}}} F(z) = \frac{e^{\frac{k\pi i}{r} 2p} - e^{\frac{k\pi i}{r} 2q}}{-2re^{\frac{k\pi i}{r} (2r-1)}} = \frac{1}{2r} [e^{(2q+1)\frac{k\pi i}{r}} - e^{(2p+1)\frac{k\pi i}{r}}].$$



Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2p} - x^{2q}}{1 - x^{2r}} dx &= \frac{\pi i}{r} \sum_1^{r-1} \left[ e^{(2q+1) \frac{h\pi i}{r}} - e^{(2p+1) \frac{h\pi i}{r}} \right] = \\ &= \frac{\pi}{r} \left[ i \frac{1 + e^{(2q+1) \frac{\pi i}{r}}}{1 - e^{(2q+1) \frac{\pi i}{r}}} - i \frac{1 + e^{(2p+1) \frac{\pi i}{r}}}{1 - e^{(2p+1) \frac{\pi i}{r}}} \right] = \\ &= \frac{\pi}{r} \left( \operatorname{ctg} \frac{2p+1}{2r} \pi - \operatorname{ctg} \frac{2q+1}{2r} \pi \right) \end{aligned}$$

Замечая, что подынтегральная функция является четной, получаем:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2p} - x^{2q}}{1 - x^{2r}} dx = \frac{\pi}{2r} \left( \operatorname{ctg} \frac{2p+1}{2r} \pi - \operatorname{ctg} \frac{2q+1}{2r} \pi \right)$$

Если  $r = 2n$  и  $q = p + n$  ( $p < n$ ), то последняя формула приобретает вид

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2p}}{1 + x^{2n}} dx = \frac{\pi}{2n \sin \frac{2p+1}{2n} \pi}$$

**Пример 2.** Пусть  $\Phi(z)$  — функция, аналитическая, за исключением конечного числа полюсов, в некоторой области, содержащей замкнутую верхнюю полуплоскость (исключая бесконечно удаленную точку). Если она не имеет полюсов на действительной оси и стремится к нулю при  $z$ , стремящемся к  $\infty$  в верхней полуплоскости, то для любого  $\mu > 0$  справедлива формула

$$\int_0^{\infty} [e^{\mu ix} \Phi(x) + e^{-\mu ix} \Phi(-x)] dx = 2\pi i \sum \text{Выч. } [e^{\mu iz} \Phi(z)],$$

где сумма распространяется на все полюсы функции  $\Phi(z)$ , лежащие в верхней полуплоскости.

Беря тот же контур интегрирования, что и в примере 1, получаем:

$$\int_{-R}^R e^{\mu ix} \Phi(x) dx + \int_{BCA} e^{\mu iz} \Phi(z) dz = 2\pi i \sum \text{Выч. } [e^{\mu iz} \Phi(z)].$$

Радиус  $R$  выбираем столь большим, чтобы все полюсы функции  $e^{\mu iz} \Phi(z)$ , принадлежащие верхней полуплоскости (они совпадают с полюсами функции  $\Phi(z)$ ), лежали внутри контура интегрирования.

Покажем, что при наших условиях

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{BCA} e^{\mu iz} \Phi(z) dz = 0.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} |J_R| &= \left| \int_{BCA} e^{\mu iz} \Phi(z) dz \right| = \\ &= \left| \int_0^\pi \exp(\mu i R \cos \varphi - \mu R \sin \varphi) \Phi(Re^{i\varphi}) i R e^{i\varphi} d\varphi \right| \leq \\ &\leq \int_0^\pi e^{-\mu R \sin \varphi} |\Phi(Re^{i\varphi})| R d\varphi. \end{aligned}$$

По условию  $\max_{0 \leq \varphi \leq \pi} |\Phi(Re^{i\varphi})| = \varepsilon(R) \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ . Поэтому

$$\begin{aligned} |J_R| &< \varepsilon(R) \int_0^\pi R e^{-\mu R \sin \varphi} d\varphi = \\ &= 2\varepsilon(R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} R e^{-\mu R \sin \varphi} d\varphi < 2\varepsilon(R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} R e^{-\frac{2}{\pi} \mu R \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{\pi \varepsilon(R)}{\mu} (1 - e^{-\mu R}) < \frac{\pi \varepsilon(R)}{\mu} \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} e^{\mu ix} \Phi(x) dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R [e^{\mu ix} \Phi(x) + e^{-\mu ix} \Phi(-x)] dx = \\ &= \int_0^\infty [e^{\mu ix} \Phi(x) + e^{-\mu ix} \Phi(-x)] dx = 2\pi i \sum \text{Выч. } [e^{\mu iz} \Phi(z)]. \end{aligned}$$

Это и есть нужный результат. Если  $\Phi(z)$  — четная функция, то формула принимает вид

$$\int_0^\infty \cos \mu x \Phi(x) dx = \pi i \sum \text{Выч. } [e^{\mu iz} \Phi(z)].$$

Если  $\Phi(z)$  — нечетная функция, то получаем формулу:

$$\int_0^\infty \sin \mu x \Phi(x) dx = \pi \sum \text{Выч. } [e^{\mu iz} \Phi(z)].$$

Например,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \mu x}{a^2 + x^2} dx = \pi i \operatorname{Выч.}_{z=ai} \frac{e^{\mu iz}}{a^2 + z^2} = \frac{\pi e^{-\mu a}}{2a},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin \mu x}{a^2 + x^2} dx = \pi \operatorname{Выч.}_{z=ai} \frac{ze^{\mu iz}}{a^2 + z^2} = \frac{\pi e^{-\mu a}}{2}.$$

3.5. В качестве одного из важных приложений теории вычетов найдем значение интеграла  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z) - A} dz$ , где  $f(z)$  — функция, однозначная в области  $G$  и не имеющая в ней особых точек, за исключением, быть может, полюсов,  $A$  — произвольное комплексное число,  $\varphi(z)$  — функция однозначная и аналитическая в той же области, а  $\Gamma$  — замкнутая жорданова спрямляемая кривая, принадлежащая области  $G$  вместе со своей внутренностью и не проходящая ни через полюсы, ни через  $A$ -точки функции  $f(z)$ .

Особыми точками функции  $F(z) = \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z) - A}$  в области  $G$  могут быть только полюсы, происходящие от  $A$ -точек или полюсов функции  $f(z)$ . Пусть  $a_1, \dots, a_m$  —  $A$ -точки функции  $f(z)$ , лежащие внутри  $\Gamma$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  — кратности этих  $A$ -точек,  $b_1, \dots, b_n$  — полюсы функции  $f(z)$ , лежащие внутри  $\Gamma$ , и  $\beta_1, \dots, \beta_n$  — кратности этих полюсов. В окрестности точки  $a_j$  функции  $\varphi(z)$  и  $f(z)$  имеют следующие разложения:

$$\varphi(z) = \varphi(a_j) +$$

$$f(z) - A = c_{\alpha_j} (z - a_j)^{\alpha_j} +$$

Следовательно,  $f'(z) = c_{\alpha_j} \alpha_j (z - a_j)^{\alpha_j - 1} +$  и

$$F(z) = [\varphi(a_j) + \dots] \frac{c_{\alpha_j} \alpha_j (z - a_j)^{\alpha_j - 1} +}{c_{\alpha_j} (z - a_j)^{\alpha_j} + \dots} =$$

$$= \frac{\alpha_j}{z - a_j} [\varphi(a_j) + \dots] \frac{1 + \dots}{1 + \dots} = \frac{\alpha_j}{z - a_j} [\varphi(a_j) + \dots] = \frac{\alpha_j \varphi(a_j)}{z - a_j} +$$

Члены, не выписанные нами, содержат старшие степени  $z - a_j$ . В частности, за членом, содержащим  $(z - a_j)^{-1}$ , должен идти свободный член лорановского разложения, затем член, содержащий  $z - a_j$ , и т. д. Отсюда следует, что  $z = a_j$  есть простой полюс функции  $F(z)$ , имеющий вычетом число  $\alpha_j \varphi(a_j)$ . Этот вычет может равняться нулю, если  $\varphi(a_j) = 0$ ; в этом случае точка  $a_j$  фактически не будет являться полюсом функции  $F(z)$ .

Рассмотрим, далее, какой-либо из полюсов  $b_j$  функции  $f(z)$ . В его окрестности имеем следующие разложения:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \varphi(b_j) + \dots \\ f(z) - A &= d_{-\beta_j}(z - b_j)^{-\beta_j} + \\ f'(z) &= -\beta_j d_{-\beta_j}(z - b_j)^{-\beta_j-1} -\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}F(z) &= [\varphi(b_j) + \dots] \frac{-\beta_j d_{-\beta_j}(z - b_j)^{-\beta_j-1}}{d_{-\beta_j}(z - b_j)^{-\beta_j} +} = \\ &= \frac{-\beta_j}{z - b_j} [\varphi(b_j) + \dots] \frac{1 + \dots}{1 + \dots} = \\ &= -\frac{\beta_j}{z - b_j} [\varphi(b_j) + \dots] = -\frac{\beta_j \varphi(b_j)}{z - b_j} - \dots\end{aligned}$$

Следовательно,  $F(z)$  имеет простой полюс в точке  $z = b_j$  с вычетом, равным  $-\beta_j \varphi(b_j)$  (обращающимся в нуль, если  $\varphi(b_j) = 0$ ).

Применяя теорему о вычетах к интегралу

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z) - A} dz,$$

получаем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z) - A} dz = \sum_{j=1}^m \alpha_j \varphi(a_j) - \sum_{j=1}^n \beta_j \varphi(b_j). \quad (3.5:1)$$

Первая сумма в правой части представляет сумму значений функции  $\varphi(z)$ , принимаемых ею в  $A$ -точках функции  $f(z)$ , причем каждое из них повторяется слагаемым число раз, равное кратности соответствующей  $A$ -точки. Если считать, что в перечне  $A$ -точек, лежащих внутри  $\Gamma$ , каждая выписывается в количестве, равном ее кратности, то сумму  $\sum_{j=1}^m \alpha_j \varphi(a_j)$  можно называть просто суммой значений функции  $\varphi(z)$  в  $A$ -точках функции  $f(z)$ . Аналогичное замечание справедливо и для второй суммы, где суммирование производится по полюсам функции  $f(z)$ . Окончательно приходим к следующей формулировке.

*Интеграл  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z) - A} dz$  равен разности между суммой значений, принимаемых функцией  $\varphi(z)$  в  $A$ -точках функции  $f(z)$ , лежащих внутри  $\Gamma$ , и суммой значений, принимаемых той же функцией  $\varphi(z)$  в полюсах функции  $f(z)$ , лежащих внутри  $\Gamma$ .*

Отметим частные случаи этого предложения:

а)  $\varphi(z) = z$ . В этом случае получаем формулу:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z \frac{f'(z)}{f(z) - A} dz = \sum_{j=1}^m \alpha_j a_j - \sum_{j=1}^n \beta_j b_j, \quad (3.5:2)$$

т. е. интеграл оказывается равным разности между суммой  $A$ -точек функции  $f(z)$ , лежащих внутри  $\Gamma$ , и суммой полюсов этой функции, лежащих внутри  $\Gamma$ ;

б)  $\varphi(z) = 1$ . В этом случае получаем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - A} dz = \sum_{j=1}^m \alpha_j - \sum_{j=1}^n \beta_j, \quad (3.5:3)$$

т. е. интеграл оказывается равным разности между числом  $A$ -точек функции  $f(z)$ , лежащих внутри  $\Gamma$ , и числом ее полюсов, лежащих внутри  $\Gamma$ .

Если  $A = 0$ , то  $A$ -точки будут нулями функции  $f(z)$ . Обозначая их число внутри  $\Gamma$  через  $N$ , а число полюсов функции  $f(z)$ , лежащих внутри  $\Gamma$ , через  $P$ , находим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P. \quad (3.5:4)$$

Интеграл в левой части носит название л о г а р и ф м и ч е с к о г о в ы ч е т а функции  $f(z)$  относительно контура  $\Gamma$  (заметьте, что под знаком интеграла стоит логарифмическая производная функции  $f(z)$ ). Итак, мы приходим к следующей теореме:

*Разность между количеством нулей и полюсов функции  $f(z)$  внутри контура  $\Gamma$  (оба количества подсчитываются с учетом кратностей нулей и полюсов) равна логарифмическому вычету функции относительно этого контура.*

Логарифмический вычет функции имеет простой смысл. Чтобы раскрыть его, перепишем интеграл в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d}{dz} \{\operatorname{Ln} [f(z)]\} dz.$$

Отметим на кривой  $\Gamma$  произвольную точку  $z_0$ , которую будем считать начальной и конечной точкой пути интегрирования. При обходе кривой  $\Gamma$  точкой  $z$  в положительном направлении  $\operatorname{Ln} f(z)$  будет непрерывно меняться, и после обхода всей кривой его значение в точке  $z_0$  будет вообще отличаться от исходного значения в той же точке. Но при одном и том же  $f(z_0)$  значения  $\operatorname{Ln} f(z_0)$  могут различаться лишь благодаря различным значениям, приписываемым  $\operatorname{Arg} f(z_0)$  до и после обхода. Обозначая исходное значение  $\operatorname{Arg} f(z_0)$

через  $\Phi_0$ , а значение  $\text{Arg } f(z_0)$  после обхода через  $\Phi_1$ , найдем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \{ [\ln |f(z_0)| + i\Phi_1] - [\ln |f(z_0)| + i\Phi_0] \} = \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{2\pi}.$$

Следовательно, по формуле (3.5:4)

$$N - P = \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{2\pi} \quad (3.5:5)$$

Это соотношение выражает так называемый принцип а р г у м е н т а.

*Разность между количествами нулей и полюсов функции  $f(z)$ , заключающихся внутри замкнутой кривой  $\Gamma$ , равна изменению  $\text{Arg } f(z)$  при обходе точкой  $z$  контура  $\Gamma$  в положительном направлении, деленному на  $2\pi$ .*

Отметим еще геометрическую интерпретацию полученного предложения. При обходе точкой  $z$  замкнутой кривой  $\Gamma$  в положительном направлении конец вектора  $w = f(z)$  описывает некоторую замкнутую кривую  $\Gamma'$ . Обозначим через  $\nu$  количество полных оборотов вокруг начала координат, которые вектор  $w$  сделает при указанном обходе. Каждый оборот будем при этом засчитывать как  $+1$ , если он совершается в положительном направлении, и как  $-1$ , если он совершается в отрицательном направлении. Тогда для изменения  $\text{Arg } f(z)$  получим величину  $2\pi\nu$ , откуда вытекает следующая формулировка принципа а р г у м е н т а:

*Разность между количеством нулей и полюсов однозначной функции  $f(z)$ , заключенных внутри замкнутой кривой  $\Gamma$ , равна числу полных оборотов  $\nu$ , которые делает вокруг начала координат вектор, изображающий  $f(z)$ , в то время как точка  $z$  описывает контур  $\Gamma$  в положительном направлении.*

В частном случае, когда  $f(z)$  не имеет полюсов внутри  $\Gamma$ , получаем:

*количество нулей функции  $f(z)$ , заключенных внутри замкнутой кривой  $\Gamma$ , равно числу полных оборотов вектора  $f(z)$  вокруг начала координат при однократном обходе точкой  $z$  контура  $\Gamma$  в положительном направлении.*

Из принципа а р г у м е н т а вытекает следующая теорема:

**Т е о р е м а Р у ш е.** *Если  $f(z)$  и  $\varphi(z)$  — две функции, однозначные и аналитические в точках замкнутой спрямляемой кривой  $\Gamma$  и внутри нее, и если в точках этой кривой выполнено условие  $|f(z)| > |\varphi(z)|$ , то внутри  $\Gamma$  сумма  $f(z) + \varphi(z)$  имеет столько же нулей, сколько их имеет функция  $f(z)$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Для отыскания числа нулей функции  $f(z) + \varphi(z)$  воспользуемся принципом а р г у м е н т а. Переписывая  $f(z) + \varphi(z)$  для точек кривой  $\Gamma$  в виде

$$f(z) + \varphi(z) = f(z) \left[ 1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right]$$

( $|f(z)|$  в точках кривой  $\Gamma$  больше, чем  $|\varphi(z)|$ , и, следовательно, в нуль не обращается), найдем

$$\operatorname{Arg} [f(z) + \varphi(z)] = \operatorname{Arg} f(z) + \operatorname{Arg} \left[ 1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right]$$

Но  $\left| \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right| < 1$ ; поэтому конец вектора, изображающего  $1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}$ , описывает замкнутую кривую, целиком заключающуюся внутри круга с центром в точке 1 и радиусом 1. Следовательно, соответствующий вектор не делает ни одного оборота вокруг начала координат, и изменение  $\operatorname{Arg} \left[ 1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right]$  при обходе точкой  $z$  кривой  $\Gamma$  равно нулю. Итак, изменение  $\operatorname{Arg} [f(z) + \varphi(z)]$  при указанном обходе совпадает с изменением  $\operatorname{Arg} f(z)$  при том же обходе, откуда по принципу аргумента вытекает равенство числа нулей функций  $f(z) + \varphi(z)$  и  $f(z)$ .

Полезным приложением этой теоремы является следующее предложение:

**Т е о р е м а Г у р в и ц а.** Если  $\{f_n(z)\}$  — последовательность функций, аналитических в области  $G$ , равномерно сходящаяся внутри этой области к некоторой функции  $f(z) \neq 0$ , то для любой замкнутой спрямляемой кривой  $\gamma$ , принадлежащей  $G$  вместе со своей внутренностью и не проходящей через нули функции  $f(z)$ , можно указать такое число  $\nu = \nu(\gamma)$ , что при  $n > \nu(\gamma)$  каждая из функций  $f_n(z)$  будет иметь внутри  $\gamma$  одно и то же число нулей, равное числу нулей функции  $f(z)$ , лежащих внутри этой кривой.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Обозначим через  $\mu$  минимум  $|f(z)|$  в точках кривой  $\gamma$ : в силу условия,  $\mu > 0$ . Следовательно, в силу равномерной сходимости последовательности  $\{f_n(z)\}$  на  $\gamma$ , можно указать такое  $\nu(\gamma)$ , что при  $n > \nu(\gamma)$  во всех точках кривой  $\gamma$  будет выполнено неравенство

$$|f_n(z) - f(z)| < \mu \leq |f(z)|.$$

Но отсюда, по теореме Руше, следует, что функции  $f(z)$  и  $f(z) + [f_n(z) - f(z)] = f_n(z)$  ( $n > \nu(\gamma)$ ) имеют одно и то же число нулей внутри  $\gamma$ , чем и заканчивается доказательство.

**П р и м е р 1.** Найти число корней уравнения  $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$ , по модулю меньших, чем 1.

Применим теорему Руше.

Для этого представим  $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$  в виде  $f(z) + \varphi(z)$ , где  $f(z) = -4z^5$  и  $\varphi(z) = z^8 + z^2 - 1$ . Так как при  $|z| = 1$

$$|\varphi(z)| = |z^8 + z^2 - 1| \leq |z^8| + |z^2| + 1 = 3$$

и

$$|f(z)| = |4z^5| = 4,$$

то

$$|\varphi(z)| < |f(z)|.$$

Следовательно, по теореме Руше, функция  $f(z) + \varphi(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$  имеет внутри окружности  $|z| = 1$  столько же нулей, сколько их имеет функция  $f(z) = -4z^5$ . Но последняя имеет пятикратный нуль в начале координат, и, следовательно, число ее нулей в единичном круге равно 5. Поэтому и уравнение  $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$  имеет пять корней внутри единичного круга, т. е. пять корней, по модулю меньших единицы.

Пример 2. Доказать, что уравнение

$$a_0 + a_1 \cos \vartheta + a_2 \cos 2\vartheta + \dots + a_n \cos n\vartheta = 0,$$

где  $0 < a_0 < a_1 < \dots < a_n$ , имеет  $2n$  различных корней в интервале  $0 < \vartheta < 2\pi$ . Кроме того, данное уравнение совсем не имеет мнимых корней.

Докажем сначала, что все нули многочлена

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

лежат внутри единичного круга. Этот многочлен, очевидно, не имеет действительных положительных корней. Если же  $z$  не есть положительное число, то

$$\begin{aligned} |p(z)(z-1)| &= |a_n z^{n+1} - [a_0 + (a_1 - a_0)z + \dots + (a_n - a_{n-1})z^n]| \geq \\ &\geq |a_n z^{n+1}| - |a_0 + (a_1 - a_0)z + \dots + (a_n - a_{n-1})z^n| > \\ &> a_n |z|^{n+1} - [a_0 + (a_1 - a_0)|z| + \dots + (a_n - a_{n-1})|z|^n]. \end{aligned}$$

В самом деле, так как числа  $a_0, a_1 - a_0, \dots, a_n - a_{n-1}$  положительны, а число  $z$  не является положительным, то векторы  $a_0, (a_1 - a_0)z, \dots, (a_n - a_{n-1})z^n$  не могут быть направлены все в одну и ту же сторону, и следовательно,

$$|a_0 + (a_1 - a_0)z + \dots + (a_n - a_{n-1})z^n| < a_0 + (a_1 - a_0)|z| + \dots + (a_n - a_{n-1})|z|^n.$$

Если, кроме того,  $|z| \geq 1$ , то

$$\begin{aligned} a_0 + (a_1 - a_0)|z| + \dots + (a_n - a_{n-1})|z|^n &\leq \\ &\leq a_0|z|^{n+1} + (a_1 - a_0)|z|^{n+1} + \dots + (a_n - a_{n-1})|z|^{n+1} = \\ &= [a_0 + (a_1 - a_0) + \dots + (a_n - a_{n-1})]|z|^{n+1} = a_n|z|^{n+1}. \end{aligned}$$

Итак, при  $|z| \geq 1$  и  $z$  неположительном

$$|p(z)(z-1)| > a_n|z|^{n+1} - a_n|z|^{n+1} = 0, \text{ т. е. } p(z)(z-1) \neq 0.$$

Но отсюда следует, что при  $z$  неположительном и по модулю не меньшем 1  $p(z) \neq 0$ . Последнее справедливо и для положительных



$z$ , и, следовательно,  $p(z)$  не имеет нулей ни вне единичного круга, ни на его окружности. Поэтому все  $n$  нулей многочлена  $p(z)$  лежат строго в н у т р и единичного круга.

Заставим точку  $z$  описывать окружность  $|z| = 1$  в положительном направлении. Тогда вектор, представляющий  $p(z)$ , должен, по принципу аргумента, сделать около начала координат число оборотов, равное числу нулей многочлена  $p(z)$ , т. е.  $n$ . Так как при каждом обороте кривая, описываемая концом вектора, пересекает мнимую ось по крайней мере два раза (раз сверху и раз снизу), то мы будем иметь по крайней мере  $2n$  таких пересечений. Каждое из них соответствует определенному положению точки  $z$  на окружности  $|z| = 1$ , т. е. определенному значению ее аргумента  $\vartheta$ , изменяющегося при одном обороте в интервале  $(0, 2\pi)$ .

Мы имеем, следовательно, по крайней мере  $2n$  различных значений аргумента  $\vartheta$  в интервале  $0 < \vartheta < 2\pi$ , для которых точка, изображающая  $p(z) = p(e^{i\vartheta})$ , попадает на мнимую ось. Для каждого из этих значений  $\vartheta$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[p(e^{i\vartheta})] &= \operatorname{Re}(a_0 + a_1 e^{i\vartheta} + \dots + a_n e^{in\vartheta}) = \\ &= \operatorname{Re}[a_0 + a_1(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) + \dots + a_n(\cos n\vartheta + \\ &\quad + i \sin n\vartheta)] = a_0 + a_1 \cos \vartheta + \dots + a_n \cos n\vartheta \end{aligned}$$

обращается в нуль; следовательно, существование по крайней мере  $2n$  корней уравнения

$$a_0 + a_1 \cos \vartheta + \dots + a_n \cos n\vartheta = 0$$

в интервале  $(0, 2\pi)$  доказано.

Покажем, что число всех корней в этом интервале точно равно  $2n$ . С этой целью положим  $e^{i\vartheta} = \xi$ ; тогда будем иметь:

$$\cos k\vartheta = \frac{e^{ik\vartheta} + e^{-ik\vartheta}}{2} = \frac{\xi^k + \xi^{-k}}{2},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 \cos \vartheta + \dots + a_n \cos n\vartheta &= \\ &= \frac{1}{2} \xi^{-n} (a_n + a_{n-1} \xi + \dots + a_1 \xi^{n-1} + 2a_0 \xi^n + a_1 \xi^{n+1} + \dots + a_n \xi^{2n}). \end{aligned}$$

Если  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n}$  — нули многочлена, стоящего справа, то все нули тригонометрического многочлена, стоящего слева, удовлетворяют соотношениям

$$e^{i\vartheta_j} = \xi_j \quad (j = 1, 2, \dots, 2n).$$

Отсюда вытекает прежде всего, что количество различных действительных нулей рассматриваемого тригонометрического многочлена в интервале  $(0, 2\pi)$  не превосходит  $2n$ . Так как выше

было доказано существование не менее чем  $2n$  различных действительных нулей этого многочлена в интервале  $(0, 2\pi)$ , то общее число их равно  $2n$ . Заметим, что модули чисел  $\xi_j = e^{i\theta_j}$  все равны единице; поэтому среди нулей данного тригонометрического многочлена не может быть ни одного мнимого.

Пример 3. Пусть  $\varphi(t)$  — положительная непрерывная и возрастающая на отрезке  $[0, 1]$  функция действительного переменного. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 \varphi(t) \cos zt \, dt.$$

На основании замечания, сделанного в п. 1.2 (стр. 372), его можно рассматривать в любой ограниченной области плоскости как предел равномерно сходящейся в этой области последовательности интегральных сумм\*):

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \cos \frac{k}{n} z.$$

Следовательно, наш интеграл представляет функцию  $f(z)$ , аналитическую в любой области плоскости, т. е. целую. Очевидно,  $f(z) \not\equiv 0$  (например,  $f(0) = \int_0^1 \varphi(t) \, dt > 0$ ). Поэтому к по-

следовательности  $\{f_n(z)\}$  и функции  $f(z)$  можно применить теорему Гурвица. Если  $z_0$  — какой-нибудь нуль функции  $f(z)$ , то в любой фиксированной окрестности точки  $z_0$  все функции  $f_n(z)$ , начиная с некоторой из них, должны, следовательно, иметь столько же нулей, сколько их имеет  $f(z)$ , т. е. по крайней мере один нуль. Но функции  $f_n(z)$  суть тригонометрические многочлены, удовлетворяющие условиям примера 2 (в нашем случае  $0 < a_k = \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) < a_{k+1} = \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{k+1}{n}\right)$  и  $\vartheta = \frac{z}{n}$ ). Поэтому функции  $f_n(z)$  не имеют мнимых нулей. Следовательно, и целая функция  $f(z) = \int_0^1 \varphi(t) \cos zt \, dt$  также не имеет мнимых нулей — все нули ее суть действительные числа.

3.6. Если  $f(z)$  является однозначной и аналитической в некоторой окрестности  $|z| > R$  бесконечно удаленной точки (за исключением, быть может, самой этой точки), то в этой окрестности

\*) Это утверждение в данном случае легко проверить и непосредственно.

справедливо разложение

$$f(z) = \dots + A_{-m}z^{-m} + \dots + A_{-1}z^{-1} + A_0 + A_1z + \dots + A_nz^n + \dots$$

Будем интегрировать  $f(z)$  вдоль окружности  $C_\sigma$   $|z| = \sigma$ , для которой  $\sigma > R$ , причем направление обхода выберем таким, чтобы окрестность  $|z| > \sigma$  бесконечно удаленной точки оставалась при обходе слева. Такое направление естественно считать положительным по отношению к обходу вокруг бесконечно удаленной точки. Но по отношению к внутренности круга  $|z| < \sigma$ , т. е. по отношению к окрестности конечной точки  $z = 0$ , оно будет отрицательным. В результате почленного интегрирования лорановского ряда получим:

$$\int_{C_\sigma} f(z) dz = A_{-1}(-2\pi i) = 2\pi i(-A_{-1}).$$

Для того чтобы и в случае интегрирования вокруг бесконечно удаленной точки интеграл от функции равнялся произведению вычета функции на  $2\pi i$ , целесообразно дать следующее определение:

*Вычетом функции, однозначной и аналитической в некоторой окрестности точки  $z = \infty$ , относительно этой точки, называется взятый со знаком минус коэффициент при  $z^{-1}$  в лорановском разложении функции в этой окрестности.*

Тогда

$$\int_{C_\sigma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Выч.}_{z=\infty} f(z),$$

где интеграл берется в направлении, положительном по отношению к бесконечно удаленной точке, т. е. по направлению, при котором остается слева не внутренность кривой, как обычно, а ее внешность.

Пользуясь этим определением, получаем следующую теорему:

*Сумма всех вычетов однозначной и аналитической функции, имеющей одни только изолированные особые точки, равна нулю.*

Действительно, прежде всего, число особых точек такой функции конечно (в противном случае существовала бы конечная или бесконечно удаленная предельная точка множества особых точек, которая являлась бы тем самым неизолированной особой точкой функции). Опишем такую окружность  $|z| = \sigma$  с центром в начале координат, чтобы на ней и в ее внешности (за исключением, быть может, точки  $z = \infty$ ) не лежало особых точек функции. Тогда все конечные особые точки:  $z_1, z_2, \dots, z_n$  будут лежать внутри этой окружности, так что, по теореме о вычетах, будем иметь:

$$\int_{C_\sigma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Выч.}_{z=z_k} f(z).$$

Интеграл здесь берется в обычном положительном направлении, т. е. в таком, при котором внутренность окружности находится слева. Но это же направление будет отрицательным по отношению к бесконечно удаленной точке. Поэтому тот же интеграл будет равен

$$\int_{C_0} f(z) dz = -2\pi i \operatorname{Выч.}_{z=\infty} f(z).$$

Вычитая из первого соотношения второе, получим окончательно:

$$2\pi i [\operatorname{Выч.}_{z=z_1} f(z) + \dots + \operatorname{Выч.}_{z=z_n} f(z) + \operatorname{Выч.}_{z=\infty} f(z)] = 0,$$

или

$$\operatorname{Выч.}_{z=z_1} f(z) + \dots + \operatorname{Выч.}_{z=z_n} f(z) + \operatorname{Выч.}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Теорема доказана.

В частности, эта теорема справедлива для любой рациональной функции, ибо рациональная функция имеет только изолированные особые точки однозначного характера (а именно, полюсы).

Заметим, что вычет функции относительно бесконечно удаленной точки определяется посредством коэффициента одного из членов правильной части лорановского разложения, в то время как вычет относительно конечной точки определяется посредством коэффициента одного из членов главной части (следует вспомнить, что совокупность отрицательных степеней лорановского ряда представляет правильную часть для точки  $z = \infty$  и главную часть для конечной точки). Отсюда следует, что вычет относительно точки  $z = \infty$  может отличаться от нуля и в том случае, если эта точка не есть особая, т. е. является правильной, тогда как вычет относительно конечной правильной точки всегда равен 0. Так, например, для функции  $f(z) = \frac{1}{z}$  точка  $z = \infty$  правильная (нуль первого порядка). Вместе с тем, здесь  $\operatorname{Выч.}_{z=\infty} f(z) = -1 \neq 0$ .

#### § 4. Приложения теории вычетов к разложению функций в ряды. Интерполирование

**4.1.** Пусть  $f(z)$  — однозначная аналитическая функция, не имеющая в конечной части плоскости других особых точек, кроме полюсов.

Обозначим через  $C$  какую-либо замкнутую жорданову спрямляемую кривую, не проходящую через полюсы функции  $f(z)$ , и пусть  $z$  — точка внутри  $C$ , отличная от начала координат

и полюсов. Вычислим интеграл типа Коши:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}.$$

Очевидно, полюсами функции  $\varphi(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - z}$  внутри  $C$  являются точка  $\xi = z$  и все полюсы функции  $f(z)$ , лежащие внутри  $C$ . Обозначим те из этих полюсов, которые отличны от нуля, через  $\beta_1$ ,

...,  $\beta_n$ , а соответствующие им главные части лорановских разложений функции  $f(z)$  — через  $G_1(z)$ , ...,  $G_n(z)$ . Положим еще  $\beta_0 = 0$ , считая  $G_0(z)$  равной главной части лорановского разложения функции  $f(z)$  в окрестности точки  $z = 0$ , так что функция  $G_0(z)$  тождественно равна нулю, если  $z = 0$  есть правильная точка для  $f(z)$ , и  $G_0(z)$  есть рациональная функция с единственным полюсом в начале, если  $z = 0$  есть полюс функции  $f(z)$ .

Подсчитаем вычеты функции  $\varphi(\xi)$  относительно точек  $\xi = z$ ,  $\beta_1$ , ...,  $\beta_n$ . Получим прежде всего:

$$\text{Выч. } \varphi(\xi) = f(z).$$

Далее, заменяя  $f(\xi)$  в окрестности точки  $\beta_k$  соответствующим лорановским разложением

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{A_{-\gamma_k}^{(k)}}{(\xi - \beta_k)^{\gamma_k}} + \dots + \frac{A_{-1}^{(k)}}{\xi - \beta_k} + A_0^{(k)} + A_1^{(k)}(\xi - \beta_k) + \dots = \\ &= G_k(\xi) + P_k(\xi), \end{aligned}$$

где  $G_k(\xi)$  и  $P_k(\xi)$ , соответственно, — главная и правильная части разложения, и замечая, что при  $|\xi - \beta_k| < |z - \beta_k|$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= -\frac{1}{(z - \beta_k) - (\xi - \beta_k)} = \\ &= -\frac{1}{z - \beta_k} - \frac{\xi - \beta_k}{(z - \beta_k)^2} - \dots - \frac{(\xi - \beta_k)^{\gamma_k - 1}}{(z - \beta_k)^{\gamma_k}} \end{aligned}$$

находим, что член, содержащий  $(\xi - \beta_k)^{-1}$  в разложении  $\varphi(\xi) = -f(\xi) \frac{1}{\xi - z}$ , равен

$$-\left[ \frac{A_{-1}^{(k)}}{z - \beta_k} + \frac{A_{-2}^{(k)}}{(z - \beta_k)^2} + \dots + \frac{A_{-\gamma_k}^{(k)}}{(z - \beta_k)^{\gamma_k}} \right] \frac{1}{\xi - \beta_k} = -G_k(z) \frac{1}{\xi - \beta_k}.$$

Следовательно,

$$\text{Выч. } \varphi(\xi) = -G_k(z).$$

Итак,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = f(z) - \sum_0^n G_k(z),$$

или

$$f(z) = \sum_0^n G_k(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) dz}{\zeta - z}. \quad (4.1:1)$$

Эту формулу можно было бы получить иным путем. А именно, заметим, что  $\sum_0^n G_k(\zeta)$  — рациональная функция, обращающаяся в нуль в бесконечности; все полюсы ее лежат внутри  $C$ . Функция  $\frac{\sum_0^n G_k(\zeta)}{\zeta - z}$  ( $z$  лежит внутри  $C$ ) обладает теми же свойствами и в бесконечности имеет нуль по крайней мере второго порядка. Поэтому ее вычет относительно бесконечно удаленной точки равен нулю, и, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\sum_0^n G_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) - \sum_0^n G_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Но функция  $f(\zeta) - \sum_0^n G_k(\zeta)$  является аналитической во всех точках внутри  $C$ ; поэтому к последнему интегралу применима формула Коши, и мы получаем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) - \sum_0^n G_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) - \sum_0^n G_k(z),$$

т. е. формулу (4.1:1).

Допустим, что существует последовательность не проходящих через полюсы функции  $f(z)$  замкнутых жордановых спрямляемых кривых  $\{C_m\}$ , из которых каждая  $(C_m)$  содержится внутри следующей  $(C_{m+1})$  и внутренности которых при достаточно

большом  $m$  содержат любой заданный круг  $|z| < R$ , причем для кривых  $C_m$  удовлетворяется следующее условие:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_m} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = 0. \quad (4.1:2)$$

Тогда число полюсов функции  $f(z)$ , лежащих внутри  $C_m$ , будет зависеть от  $m: n = n_m$ , и из формулы (4.1:1) получим:

$$f(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_0^{n_m} G_h(z), \quad (4.1:3)$$

т. е. функция  $f(z)$  представляется в виде предела последовательности сумм главных частей ее лорановских разложений, относящихся к полюсам, лежащим внутри  $C_m$ .

Условие (4.1:2) удовлетворяется, например, в случае, когда

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \int_{C_m} |f(\xi)| ds < \infty. \quad (4.1:4)$$

В самом деле, обозначая через  $r_m$  расстояние от начала координат до  $C_m$  ( $r_m \rightarrow \infty$  при  $m \rightarrow \infty$ ) и полагая, что  $z$  принадлежит кругу  $|z| < R$ , получим при  $r_m > R$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_m} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \right| < \frac{1}{2\pi(r_m - R)} \int_{C_m} |f(\xi)| ds \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty.$$

Из этой оценки видно, что при условии (4.1:4) остаточный член формулы (4.1:1) стремится к нулю равномерно относительно  $z$ , принадлежащего произвольному кругу  $|z| < R$ . Поэтому последовательность (4.1:3) равномерно сходится к функции  $f(z)$  в любом круге  $|z| < R$ .

Можно получить представление для  $f(z)$ , аналогичное (4.1:3), при значительно более общих условиях. Именно, допустим, что вместо (4.1:4) для последовательности кривых  $\{C_m\}$  и некоторого целого неотрицательного числа  $p$  выполняется соотношение

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \int_{C_m} \frac{|f(\xi)|}{|\xi|^{p+1}} ds < \infty. \quad (4.1:5)$$

Если предположить, что длины  $l_m$  кривых  $C_m$  растут не быстрее, чем  $\lambda r_m$ , где  $\lambda$  — некоторая постоянная (так будет во всех случаях, когда  $C_m$  являются кривыми, подобными относительно начала координат), то найдем, что

$$\int_{C_m} \frac{|f(\xi)|}{|\xi|^{p+1}} ds < \max_{C_m} |f(\xi)| \frac{l_m}{r_m^{p+1}} < \lambda \frac{\max_{C_m} |f(\xi)|}{r_m^p}.$$

Отсюда видно, что условие (4.1:5) будет удовлетворяться, если выполнено более простое условие

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{\max_{C_m} |f(\zeta)|}{r_m^p} < \infty, \quad (4.1:6)$$

допускающее бесконечный рост  $\max_{C_m} |f(\zeta)|$ , но не более быстрый,

чем рост  $r_m^p$ .

Сделав предположение, что условие (4.1:5) или (4.1:6) выполнено, вернемся к соотношению (4.1:1) и заменим в нем  $(\zeta - z)^{-1}$  под знаком интеграла выражением

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \dots + \frac{z^p}{\zeta^{p+1}} + \frac{1}{(\zeta - z)} \frac{z^{p+1}}{\zeta^{p+1}}.$$

Тогда будем иметь:

$$f(z) = \sum_0^n G_k(z) + \sum_0^p \frac{z^j}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{z^{p+1}}{\zeta^{p+1}} d\zeta. \quad (4.1:7)$$

Заметив, что функция  $\frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}}$  имеет своими полюсами внутри  $C$  точки  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ , положим

$$\text{Выч.}_{z=\beta_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}} = A_k^{(j)} \quad (j=0, 1, \dots, p).$$

Тогда получим:

$$\sum_{j=0}^p \frac{z^j}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}} d\zeta = \sum_{j=0}^p (A_0^{(j)} + \dots + A_n^{(j)}) z^j = \sum_{k=0}^n P_k(z),$$

где  $P_k(z)$  — многочлены степени не выше  $p$ :

$$P_k(z) = A_k^{(0)} + A_k^{(1)}z + \dots + A_k^{(p)}z^p. \quad (4.1:8)$$

Итак, формулу (4.1:7) можно переписать в виде

$$f(z) = \sum_0^n [G_k(z) + P_k(z)] + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{z^{p+1}}{\zeta^{p+1}} d\zeta. \quad (4.1:9)$$

Заменяя здесь  $C$  на  $C_m$  и, следовательно,  $n$  на  $n_m$ , получим, используя условие (4.1:5), что остаточный член этой формулы

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_m} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{z^{p+1}}{\zeta^{p+1}} d\zeta$$



стремится к нулю, и притом равномерно относительно точек  $z$ , принадлежащих любому фиксированному кругу:  $|z| < R$ . В самом деле, при  $m$ , настолько большом, что  $r_m > R$ , имеем:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_m} \frac{f(\xi) z^{p+1}}{\xi - z} \xi^{p+1} d\xi \right| < \frac{1}{2\pi} \int_{C_m} \frac{|f(\xi)|}{|\xi| - |z|} \frac{|z|^{p+1}}{|\xi|^{p+1}} ds < \\ < \frac{R^{p+1}}{2\pi(r_m - R)} \int_{C_m} \frac{|f(\xi)|}{|\xi|^{p+1}} ds.$$

Но в силу условия (4.1:5) интегралы  $\int_{C_m} \frac{|f(\xi)|}{|\xi|^{p+1}} ds$  ограничены:

$$\int_{C_m} \frac{|f(\xi)|}{|\xi|^{p+1}} ds < M < \infty.$$

Следовательно,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_m} \frac{f(\xi) z^{p+1}}{\xi - z} \xi^{p+1} d\xi \right| < \frac{MR^{p+1}}{2\pi(r_m - R)} \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty,$$

и мы получаем из формулы (4.1:9) разложение

$$f(z) = \lim_{n_m \rightarrow \infty} \sum_0^{n_m} [G_k(z) + P_k(z)], \quad (4.1:10)$$

равномерно сходящееся к  $f(z)$  в каждом круге  $|z| < R$ . Это разложение можно записать в виде ряда

$$f(z) = [G_0(z) + P_0(z)] + \sum_{m=0}^{\infty} \{[G_{n_{m+1}}(z) + P_{n_{m+1}}(z)] + \\ + [G_{n_{m+1}}(z) + P_{n_{m+1}}(z)]\}, \quad (4.1:11)$$

где  $n_0$  следует положить равным нулю.

Заметим, что первые члены последовательности (4.1:10) или ряда (4.1:11) обращаются в  $\infty$  в точках  $\beta_0, \dots, \beta_{n_m}$ , т. е. там, где обращается в  $\infty$  функция  $f(z)$ . Поэтому равномерную сходимость ряда (4.1:10) нужно понимать как равномерную сходимость того ряда, который получается из данного после отбрасывания нескольких первых членов, имеющих полюсы в круге  $|z| < R$ .

Разложения вида (4.1:10) (в частности, (4.1:3) или (4.1:11)) называются разложениями  $f(z)$  на простейшие дроби.

**4.2.** Изложенный нами метод разложения функций в ряды принадлежит Коши. Применим его к нескольким частным примерам, имеющим важное значение.

1) Разложение  $\sec z$ . В качестве  $C_m$  выберем контуры квадратов с центрами в точке  $z=0$  и сторонами, параллельными осям координат и равными по длине  $2m\pi$ . На сторонах квадратов, параллельных мнимой оси, имеем  $z = \pm m\pi + iy$ , и, следовательно:

$$|\sec z| = \frac{1}{|\cos(\pm m\pi + iy)|} = \frac{1}{|\cos iy|} = \frac{1}{\operatorname{ch} y}$$

На сторонах квадратов, параллельных действительной оси, имеем  $z = x \pm im\pi$ , и, следовательно (см. формулы (3.6:11) гл. второй),

$$|\sec z| = \frac{1}{|\cos(x \pm im\pi)|} \leq \frac{1}{\operatorname{sh} m\pi}$$

Из этих неравенств получаем для интеграла  $\int_{C_m} |\sec \xi| ds$  оценку:

$$\int_{C_m} |\sec \xi| ds < 2 \int_{-m\pi}^{m\pi} \frac{dy}{\operatorname{ch} y} + 4m\pi \frac{1}{\operatorname{sh} m\pi}.$$

Так как интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\operatorname{ch} y}$  сходится и  $\frac{4m\pi}{\operatorname{sh} m\pi} \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ , то условие (4.1:4), а следовательно, и условие (4.1:2) выполнено. Поэтому в данном случае можно пользоваться формулой (4.1:3).

Внутри  $C_m$  функция  $\sec z = \frac{1}{\cos z}$  имеет полюсы вида  $(2j-1)\frac{\pi}{2}$ , где  $-m+1 \leq j \leq m$ ; все они являются простыми, так как нули  $\cos z$  — простые. Очевидно,

$$\text{Выч.}_{z=(2j-1)\frac{\pi}{2}} \sec z = -\frac{1}{\sin\left(\frac{2j-1}{2}\pi\right)} = (-1)^j,$$

и следовательно, главная часть  $\sec z$  в окрестности точки  $z = (2j-1)\frac{\pi}{2}$  есть  $G_j(z) = \frac{(-1)^j}{z - (2j-1)\frac{\pi}{2}}$ . Заметим еще, что  $z=0$

не является полюсом для  $\sec z$  и, следовательно, соответствующую главную часть следует считать равной нулю. Из формулы (4.1:3) находим:

$$\begin{aligned} \sec z &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=-m+1}^m \frac{(-1)^j}{z - (2j-1)\frac{\pi}{2}} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^j}{z - (2j-1)\frac{\pi}{2}} + \sum_{j=-m+1}^0 \frac{(-1)^j}{z - (2j-1)\frac{\pi}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Заменим во второй из сумм под знаком предела  $j$  на  $1-k$ . Получим, что  $k$  будет изменяться в пределах от 1 до  $m$ , и, следовательно,

$$\sum_{-m+1}^0 \frac{(-1)^j}{z - (2j-1) \frac{\pi}{2}} = \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k+1}}{z + (2k-1) \frac{\pi}{2}}$$

Поэтому, меняя обозначение  $k$  на  $j$ , найдем:

$$\begin{aligned} \sec z &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^j}{z - (2j-1) \frac{\pi}{2}} + \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^{j+1}}{z + (2j-1) \frac{\pi}{2}} \right] = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m (-1)^j \frac{(2j-1) \pi}{z^2 - (2j-1)^2 \frac{\pi^2}{4}} \end{aligned}$$

Мы пришли к разложению  $\sec z$  в ряд

$$\sec z = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{(2j-1) \pi}{z^2 - (2j-1)^2 \frac{\pi^2}{4}}. \quad (4.2:1)$$

Из способа получения этого ряда (частный случай формулы (4.1:3) при условии (4.1:4)) вытекает, что он равномерно сходится в каждом круге  $|z| < R$  (причем, чтобы говорить о сходимости ряда, из него следует исключить несколько первых членов, имеющих полюсы в данном круге).

2) Разложение  $\operatorname{ctg} z$ . В качестве  $C_m$  выберем контуры квадратов с центрами в точке  $z=0$  и со сторонами, параллельными осям координат и равными по длине  $(2m+1)\pi$ . Тогда на сторонах квадратов, параллельных мнимой оси,

$$z = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi + iy,$$

и, следовательно,

$$|\operatorname{ctg} z| = \left| \frac{\cos \left[ \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi + iy \right]}{\sin \left[ \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi + iy \right]} \right| = \left| \frac{\sin(iy)}{\cos(iy)} \right| = \left| \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \right| < 1.$$

На сторонах квадратов, параллельных действительной оси,

$$z = x \pm i \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi,$$

и, следовательно (см. формулы (3.6:11) главы второй),

$$|\operatorname{ctg} z| = \left| \frac{\cos \left[ x \pm i \left( m + \frac{1}{2} \right) \pi \right]}{\sin \left[ x \pm i \left( m + \frac{1}{2} \right) \pi \right]} \right| \leq \frac{\operatorname{ch} \left( m + \frac{1}{2} \right) \pi}{\operatorname{sh} \left( m + \frac{1}{2} \right) \pi} = \\ = \frac{1 + e^{-(2m+1)\pi}}{1 - e^{-(2m+1)\pi}} \leq \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = \frac{e^{\pi} + 1}{e^{\pi} - 1}$$

Итак, на сторонах квадратов  $C_m$  модуль  $|\operatorname{ctg} z|$  удовлетворяет неравенству

$$|\operatorname{ctg} z| \leq \frac{e^{\pi} + 1}{e^{\pi} - 1}.$$

Поэтому условие (4.1:6), а следовательно, и условие (4.1:5), выполняется при  $p=0$ , и мы можем пользоваться формулой (4.1:10).

Внутри  $C_m$  функция  $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$  имеет полюсы:  $0, \pm \pi$ ,

...,  $\pm m\pi$ , причем все они являются простыми, так как все нули  $\sin z$  суть простые. Очевидно,

$$\text{Выч.}_{z=k\pi} \operatorname{ctg} z = \frac{\cos k\pi}{\cos k\pi} = 1,$$

поэтому главная часть  $G_k(z)$  разложения  $\operatorname{ctg} z$  в окрестности точки  $z = k\pi$  равна  $\frac{1}{z - k\pi}$ .

Многочлены  $P_k(z)$  (см. формулу (4.1:8)) в данном случае суть многочлены степени не выше  $p=0$ :

$$P_k(z) = A_k^{(0)} = \text{Выч.}_{\xi=k\pi} \frac{\operatorname{ctg} \xi}{\xi}$$

Но функция  $\frac{\operatorname{ctg} \xi}{\xi}$ , очевидно, четная. Поэтому ее разложение в ряд Лорана в окрестности начала координат содержит только четные степени  $\xi$ , и, следовательно,

$$\text{Выч.}_{\xi=0} \frac{\operatorname{ctg} \xi}{\xi} = 0.$$

Далее, точки  $\xi = k\pi$  ( $k \neq 0$ ) являются простыми полюсами для  $\frac{\operatorname{ctg} \xi}{\xi}$ . Поэтому

$$\text{Выч.}_{\xi=k\pi} \frac{\operatorname{ctg} \xi}{\xi} = \frac{\cos k\pi}{k\pi \cos k\pi} = \frac{1}{k\pi}.$$

Итак,

$$P_0(z) = 0, \quad P_k(z) = \frac{1}{k\pi} \quad (k \neq 0),$$

следовательно, по формуле (4.1:10):

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} z &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^m \left( \frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right) + \sum_{k=1}^m \left( \frac{1}{z + k\pi} - \frac{1}{k\pi} \right) \right] = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^m \left( \frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{z + k\pi} \right) \right] = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{z + k\pi} \right) \end{aligned} \quad (4.2:2)$$

Мы получили разложение  $\operatorname{ctg} z$  на простейшие дроби. Как следует из самого способа получения этой формулы (из общей формулы (4.1:10)), ряд (4.2:2) равномерно сходится в любом круге  $|z| < R$ , если исключить из него конечное число членов, имеющих полюсы в этом круге.

Перепишав соотношение (4.2:2) в виде

$$\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} = \sum_1^{\infty} \left( \frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{z + k\pi} \right),$$

проинтегрируем его почленно вдоль произвольной кривой  $L$ , выходящей из начала координат и не проходящей через точки  $k\pi$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Получим:

$$\int_0^z \left( \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} \right) dz = \sum_1^{\infty} \operatorname{Ln} \left( \frac{k\pi - z}{k\pi} \frac{k\pi + z}{k\pi} \right) = \sum_1^{\infty} \operatorname{Ln} \left( 1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2} \right),$$

где в правой части стоят вполне определенные значения логарифмов, а именно, значения, представляющие величины соответствующих интегралов:

$$\int_L \left( \frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{z + k\pi} \right) dz.$$

Интеграл в левой части равен одному из значений  $\operatorname{Ln} \frac{\sin z}{z}$ .  
Итак,

$$\operatorname{Ln} \frac{\sin z}{z} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^n \operatorname{Ln} \left( 1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2} \right),$$

откуда

$$\frac{\sin z}{z} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_1^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2} \right),$$

что записывают обычно при помощи символа бесконечного произведения:

$$\sin z = z \prod_1^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2} \right). \quad (4.2:3)$$

Мы получили разложение  $\sin z$  в бесконечное произведение.

К этому же разложению мы придем в главе седьмой, исходя из более общих соображений.

3) Разложения  $\csc z$  и  $\operatorname{tg} z$ . Из разложений для  $\sec z$  и  $\operatorname{ctg} z$  немедленно получаются разложения для  $\csc z$  и  $\operatorname{tg} z$ . В самом деле,  $\csc z = \sec\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$ . Поэтому из найденной выше формулы

$$\sec z = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=-m+1}^m \frac{(-1)^j}{z - (2j-1)\frac{\pi}{2}}$$

находим:

$$\begin{aligned} \csc z &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=-m+1}^m \frac{(-1)^j}{\frac{\pi}{2} - z - (2j-1)\frac{\pi}{2}} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=-m+1}^m \frac{(-1)^j}{-\pi(j-1) - z} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=-m+1}^m \frac{(-1)^{j-1}}{\pi(j-1) + z}. \end{aligned}$$

Заменяя  $j-1$  на  $k$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} \csc z &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=-m}^{m-1} \frac{(-1)^k}{z + k\pi} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{z} - \left( \frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z+\pi} \right) + \left( \frac{1}{z-2\pi} + \frac{1}{z+2\pi} \right) - \dots + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{m-1} \left( \frac{1}{z-(m-1)\pi} + \frac{1}{z+(m-1)\pi} \right) + (-1)^m \frac{1}{z-m\pi} \right] \end{aligned}$$

Добавим в квадратных скобках еще один член:  $(-1)^m \frac{1}{z+m\pi}$ , предел которого равен нулю (равномерно относительно  $z$ , принадлежащих произвольному кругу  $|z| < R$ ). Получим:

$$\begin{aligned} \csc z &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{z} - \frac{2z}{z^2 - \pi^2} + \frac{2z}{z^2 - (2\pi)^2} - \dots + (-1)^m \frac{2z}{z^2 - (m\pi)^2} \right] = \\ &= \frac{1}{z} + \sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{2z}{z^2 - (k\pi)^2}. \end{aligned}$$

Это и есть нужный результат.

Аналогично, для  $\operatorname{tg} z$  имеем:  $\operatorname{tg} z = \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2} - z \right)$ , поэтому из найденной выше формулы

$$\operatorname{ctg} z = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^m \left( \frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{z + k\pi} \right) \right]$$

получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} z &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\frac{\pi}{2} - z} + \sum_{k=1}^m \left( \frac{1}{\frac{\pi}{2} - z - k\pi} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} - z + k\pi} \right) \right] = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{1}{\frac{\pi}{2} - z} + \frac{1}{-\frac{\pi}{2} - z} \right) + \left( \frac{1}{\frac{3\pi}{2} - z} + \frac{1}{-\frac{3\pi}{2} - z} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{(2m-1)\frac{\pi}{2} - z} + \frac{1}{-(2m-1)\frac{\pi}{2} - z} \right) + \frac{1}{(2m+1)\frac{\pi}{2} - z} \right] \end{aligned}$$

Отбросив в квадратных скобках член  $\frac{1}{(2m+1)\frac{\pi}{2} - z}$ , предел которого равен нулю, найдем:

$$\operatorname{tg} z = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \frac{2z}{z^2 - \frac{(2k-1)^2}{4} \pi^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \frac{(2k-1)^2}{4} \pi^2}$$

Это и есть искомое разложение для  $\operatorname{tg} z$ .

4) Из найденных разложений легко получить, в частности, лорановские разложения тригонометрических функций в окрестности начала координат, которые мы раньше находили посредством деления рядов (гл. третья, п. 7.2).

Рассмотрим  $\sec z$ . Эта функция является аналитической в круге  $|z| < \frac{\pi}{2}$  и, следовательно, допускает в нем разложение в ряд Тейлора. Формула (4.2:1) представляет эту функцию в виде суммы ряда

$$\begin{aligned} \sec z &= \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{(2j-1)\pi}{z^2 - (2j-1)^2 \frac{\pi^2}{4}} = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left[ \frac{1}{z - (2j-1)\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{z + (2j-1)\frac{\pi}{2}} \right], \end{aligned}$$

равномерно сходящегося в каждом круге, в частности, внутри круга  $|z| < \frac{\pi}{2}$ . Поэтому, опираясь на теорему Вейерштрасса

о равномерно сходящихся рядах аналитических функций, тейлоровские коэффициенты  $\sec z$  можно получить путем сложения соответствующих коэффициентов тейлоровских разложений каждой из функций, стоящих в квадратных скобках в правой части последней формулы (см. гл. 3, п. 7.1). Но

$$\begin{aligned} (-1)^j \left[ \frac{1}{z - (2j-1) \frac{\pi}{2}} - \frac{1}{z + (2j-1) \frac{\pi}{2}} \right] &= \\ &= -(-1)^j \left[ \sum_0^{\infty} \frac{z^k}{\left[ (2j-1) \frac{\pi}{2} \right]^{k+1}} + \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{\left[ (2j-1) \frac{\pi}{2} \right]^{k+1}} \right] = \\ &= 2(-1)^{j-1} \sum_0^{\infty} \frac{z^{2m}}{\left[ (2j-1) \frac{\pi}{2} \right]^{2m+1}} \quad \left( |z| < (2j-1) \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты при нечетных степенях равны нулю, а коэффициент при  $z^{2m}$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ) равен

$$\frac{2(-1)^{j-1}}{\left[ (2j-1) \frac{\pi}{2} \right]^{2m+1}} = 2 \left( \frac{2}{\pi} \right)^{2m+1} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^{2m+1}}.$$

Поэтому тейлоровские коэффициенты в разложении  $\sec z$  при нечетных степенях  $z$  равны нулю (что, очевидно, можно было видеть сразу, так как  $\sec z$  — четная функция), а при четных степенях  $z^{2m}$  представляются в виде рядов:

$$2 \left( \frac{2}{\pi} \right)^{2m+1} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^{2m+1}}$$

Итак,

$$\sec z = \sum_0^{\infty} \left[ 2 \left( \frac{2}{\pi} \right)^{2m+1} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^{2m+1}} \right] z^{2m}.$$

Вспомним, что в гл. 3, п. 7.2, то же разложение было получено в другой форме:

$$\sec z = \sum_0^{\infty} (-1)^m \frac{E_{2m}}{(2m)!} z^{2m},$$

где  $E_{2m}$  — целые числа, называемые эйлеровыми ( $E_0=1$ ,  $E_2=-1$ ,  $E_4=5$ ,  $E_6=-61$ ,  $\dots$ ). Из сравнения коэффициентов обоих рядов получаем равенства:

$$2 \left( \frac{2}{\pi} \right)^{2m+1} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^{2m+1}} = (-1)^m \frac{E_{2m}}{(2m)!} \quad (m=0, 1, 2, \dots),$$



в частности:

$$\begin{aligned}\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1} &= \frac{E_0}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}, \\ \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^3} &= -\frac{E_2}{2 \cdot 2!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = \frac{\pi^3}{32}, \\ \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^5} &= \frac{E_4}{2 \cdot 4!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 = \frac{5\pi^5}{1536},\end{aligned}$$

Рассмотрим еще функцию  $\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$ , аналитическую в круге  $|z| < \pi$ . Чтобы вычислить коэффициенты ее тейлоровского разложения, воспользуемся формулой (4.2:2), из которой вытекает следующее представление этой функции в виде ряда:

$$\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z - j\pi} + \frac{1}{z + j\pi} \right)$$

Для каждого слагаемого этой суммы имеем следующее тейлоровское разложение:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z - j\pi} + \frac{1}{z + j\pi} &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(j\pi)^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{(j\pi)^{k+1}} = \\ &= -2 \sum_1^{\infty} \frac{z^{2m-1}}{(j\pi)^{2m}} \quad (|z| < \pi j).\end{aligned}$$

Поэтому тейлоровские коэффициенты при четных степенях  $z$  в разложении функции  $\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$  равны нулю (что сразу же следует из нечетности этой функции), а при нечетных степенях  $z^{2m-1}$  представляются в виде рядов

$$-2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j\pi)^{2m}} = -\frac{2}{\pi^{2m}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2m}} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Следовательно,

$$\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ -\frac{2}{\pi^{2m}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2m}} \right] z^{2m-1}.$$

В главе третьей, п. 7.2, то же разложение было получено в иной форме:

$$\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{2m} B_{2m}}{(2m)!} z^{2m-1}.$$

Из сравнения двух разложений вытекает, что

$$\frac{2}{\pi^{2m}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2m}} = (-1)^{m-1} \frac{2^{2m} B_{2m}}{(2m)!}$$

Так как левая часть этого равенства положительна, то и правая должна быть положительной, т. е.  $(-1)^{m-1} B_{2m} > 0$ . Отсюда следует, что бернуллиевы числа  $B_{2m}$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) должны иметь чередующиеся знаки (в гл. 3, п. 7.2 мы видели, что  $B_2 = \frac{1}{6}$ ,  $B_4 = -\frac{1}{30}$ ,  $B_6 = \frac{1}{42}$ ,

Из найденного соотношения следуют, в частности, следующие равенства:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} &= \frac{B_2}{2 \cdot 2!} (2\pi)^2 = \frac{\pi^2}{6}, \\ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^4} &= -\frac{B_4}{2 \cdot 4!} (2\pi)^4 = \frac{\pi^4}{90}, \\ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^6} &= \frac{B_6}{2 \cdot 6!} (2\pi)^6 = \frac{\pi^6}{945}, \end{aligned}$$

4.3. Рассмотрим задачу о построении интерполяционного многочлена для данной аналитической функции  $f(z)$ . Задача заключается в том, чтобы по системе точек

$$z_1, z_2, \dots, z_m,$$

принадлежащих области  $G$ , и по заданным в таком же количестве натуральным числам

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n \geq m$$

построить многочлен  $\Pi(z)$ , возможно более низкой степени, удовлетворяющий условиям

$$\Pi(z_j) = f(z_j), \dots, \Pi^{(\alpha_j-1)}(z_j) = f^{(\alpha_j-1)}(z_j) \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Многочлен  $\Pi(z)$ , удовлетворяющий этим условиям, называется интерполяционным многочленом для  $f(z)$ , соответствующим точкам интерполяции  $z_j$ , с кратностями  $\alpha_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ).

Если  $\Pi(z)$  — такой многочлен, то для разности

$$R(z) = f(z) - \Pi(z),$$

представляющей, очевидно, аналитическую функцию в области  $G$ , имеем:

$$R(z_j) = \dots = R^{(\alpha_j - 1)}(z_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Следовательно,  $R(z)$  имеет нуль в каждой из точек  $z_j$ , с кратностью, по меньшей мере равной  $\alpha_j$ . Пусть  $\Pi_1(z)$  — другой многочлен, удовлетворяющий условиям задачи. Соответствующая функция

$$R_1(z) = f(z) - \Pi_1(z)$$

также будет иметь нули  $z_1, \dots, z_m$ , с кратностями, не меньшими, чем  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ; то же самое будет справедливым и для

$$R(z) - R_1(z) = \Pi_1(z) - \Pi(z).$$

Итак,  $\Pi_1(z) - \Pi(z)$  есть многочлен, имеющий по крайней мере  $n$  нулей:  $z_1, z_2, \dots, z_m$ , с кратностями, не меньшими, чем  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , откуда следует, что  $\Pi_1(z) - \Pi(z)$  делится на многочлен

$$(z - z_1)^{\alpha_1} \dots (z - z_m)^{\alpha_m} = \omega(z)$$

степени  $n$ . Поэтому в случае, когда каждый из многочленов  $\Pi(z)$  и  $\Pi_1(z)$  имеет степень ниже  $n$ , их разность должна быть тождественным нулем, т. е. среди многочленов степени ниже  $n$  существует не более чем один многочлен, решающий поставленную задачу.

Покажем, что такой многочлен действительно существует и может быть представлен в виде интеграла

$$\Pi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)} \frac{\omega(\zeta) - \omega(z)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (4.3:1)$$

где  $\gamma$  — какая-либо замкнутая жорданова спрямляемая кривая, лежащая в области вместе со своей внутренностью  $G$  и содержащая внутри точки  $z_1, \dots, z_m$ .

В самом деле, если  $\omega(z) = \sum_0^n A_k z^k$ , то

$$\begin{aligned} \frac{\omega(\zeta) - \omega(z)}{\zeta - z} &= \frac{\sum_0^n A_k (\zeta^k - z^k)}{\zeta - z} = \\ &= A_1 + A_2(\zeta + z) + \dots + A_n(\zeta^{n-1} + \dots + z^{n-1}) = \\ &= A_1 + A_2\zeta + \dots + A_n\zeta^{n-1} + (A_2 + A_3\zeta + \dots + A_n\zeta^{n-2})z + \dots + A_n z^{n-1} = \\ &= B_{n-1}(\zeta) + B_{n-2}(\zeta)z + \dots + B_0(\zeta)z^{n-1}, \end{aligned}$$

где  $B_{n-1}(\zeta), B_{n-2}(\zeta), \dots, B_0(\zeta)$  — многочлены относительно  $\zeta$ , степени которых совпадают с их индексами. Следовательно,  $\Pi(z)$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Pi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)} \sum_{k=0}^{n-1} B_{n-1-k}(\zeta) z^k d\zeta = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)} B_{n-1-k}(\zeta) d\zeta \right) z^k = \sum_{k=0}^{n-1} P_k z^k, \end{aligned}$$

где

$$P_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)} B_{n-1-k}(\zeta) d\zeta \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Итак, формула (4.3:1) представляет многочлен степени не выше, чем  $n-1$ . Образуем разность  $R(z) = f(z) - \Pi(z)$ . Если точка  $z$  лежит внутри  $\gamma$ , то  $f(z)$  можно представить в виде  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ , и, следовательно,  $R(z)$  можно преобразовать следующим образом:

$$R(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\omega(\xi)} \frac{\omega(\xi) - \omega(z)}{\xi - z} d\xi = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \frac{\omega(z)}{\omega(\xi)} d\xi \quad (4.3:2)$$

или, наконец,

$$R(z) = \omega(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \frac{d\xi}{\omega(\xi)} \quad (4.3:2')$$

Интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \frac{d\xi}{\omega(\xi)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\frac{f(\xi)}{\omega(\xi)}}{\xi - z} d\xi,$$

очевидно, есть интеграл типа Коши и, следовательно, представляет функцию, аналитическую внутри  $\gamma$ . Так как  $\omega(z) = (z - z_1)^{\alpha_1} \dots (z - z_m)^{\alpha_m}$ , то

$$\frac{R(z)}{(z - z_j)^{\alpha_j}} = (z - z_1)^{\alpha_1} \dots (z - z_{j-1})^{\alpha_{j-1}} (z - z_{j+1})^{\alpha_{j+1}} \dots (z - z_m)^{\alpha_m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\frac{f(\xi)}{\omega(\xi)}}{\xi - z} d\xi$$

представляет функцию, аналитическую в окрестности точки  $z_j$  (и даже во всей внутренности кривой  $\gamma$ ). Поэтому  $z = z_j$  является для  $R(z)$  нулем порядка, по крайней мере равного  $\alpha_j$ , а может быть, и более высокого. Но это означает, что

$$R(z_j) = 0, \dots, R^{(\alpha_j - 1)}(z_j) = 0,$$

т. е.

$$f(z_j) = \Pi(z_j), \quad f^{(\alpha_j - 1)}(z_j) = \Pi^{(\alpha_j - 1)}(z_j) \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Итак, мы нашли интерполяционный многочлен (4.3:1) степени не выше  $n-1$ , решающий поставленную задачу. В силу сделанного выше замечания, это единственный из многочленов степени ниже  $n$ , удовлетворяющий условиям задачи.

Формула (4.3:1), дающая интерполяционный многочлен, и формула (4.3:2), выражающая разность  $f(z) - \Pi(z)$ , т. е. дающая остаточный член  $R(z)$  интерполяционной формулы

$$f(z) = \Pi(z) + R(z),$$

называются формулами Эрмита.

4.4. Иллюстрируем значение полученных формул на нескольких примерах.

1) Пусть сначала  $m=1$ , так что мы имеем лишь одну точку интерполяции  $z_1$  кратности  $\alpha_1 = n$ . Речь идет об отыскании многочлена  $\Pi(z) = \Pi_{n-1}(z)$

степени не выше  $n-1$ , удовлетворяющего условиям:

$$t_{n-1}(z_1) = f(z_1), \quad t'_{n-1}(z_1) = f'(z_1), \quad t_{n-1}^{(n-1)}(z_1) = f^{(n-1)}(z_1).$$

В данном случае  $\omega(z) = \omega_n(z) = (z - z_1)^n$  и формула (4.3:1) дает:

$$t_{n-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_1)^n} \frac{(\xi - z_1)^n - (z - z_1)^n}{\xi - z} d\xi.$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\xi - z_1)^n} \frac{(\xi - z_1)^n - (z - z_1)^n}{\xi - z} &= \\ &= \frac{1}{(\xi - z_1)^n} [(\xi - z_1)^{n-1} + (\xi - z_1)^{n-2}(z - z_1) + \dots + (z - z_1)^{n-1}] = \\ &= \frac{1}{\xi - z_1} + \frac{1}{(\xi - z_1)^2}(z - z_1) + \dots + \frac{1}{(\xi - z_1)^n}(z - z_1)^{n-1}. \end{aligned} \quad (4.4:1)$$

Получим:

$$t_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi (z - z_1)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(z_1)}{k!} (z - z_1)^k. \quad (4.4:2)$$

Мы получили интерполяционный многочлен Тейлора, т. е. частичную сумму ряда Тейлора (что, конечно, и следовало ожидать с самого начала). Остаточный член (4.3:2') имеет вид

$$R(z) = R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \frac{(z - z_1)^n}{(\xi - z_1)^n} d\xi. \quad (4.4:3)$$

Это — остаточный член формулы Тейлора. В силу интегральной теоремы для системы контуров его значение не изменится, если интегрирование вести по какой-либо окружности  $C_\rho$ :  $|\xi - z_1| = \rho$ , где  $\rho$  меньше, чем расстояние  $\Delta$  от точки  $z_1$  до границы области  $G$  (в которой  $f(z)$  является аналитической). Поэтому для точек  $z$ , лежащих внутри  $C_\rho$ , имеем:

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \frac{(z - z_1)^n}{(\xi - z_1)^n} d\xi$$

и

$$|R_n(z)| < \frac{\rho}{2\pi} \frac{M(\rho)}{\rho - |z - z_1|} \left( \frac{|z - z_1|}{\rho} \right)^n$$

Так как  $\frac{|z - z_1|}{\rho} < 1$ , то  $R_n(z)$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , откуда снова получается тот факт, что последовательность многочленов Тейлора  $\{t_{n-1}(z)\}$  сходится к  $f(z)$  внутри круга  $|z - z_1| < \Delta$ , принадлежащего области аналитичности функции  $f(z)$ .

2) Пусть  $m = n$ , так что мы имеем  $n$  точек интерполяции  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , каждая кратности 1 ( $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$ ). Речь идет об отыскании многочлена  $\Pi(z) = l_{n-1}(z)$  степени не выше  $n-1$ , удовлетворяющего условиям:

$$l_{n-1}(z_1) = f(z_1), \quad l_{n-1}(z_2) = f(z_2), \quad \dots, \quad l_{n-1}(z_n) = f(z_n).$$

В данном случае

$$\omega(z) = \omega_n(z) = (z - z_1) \dots (z - z_n),$$

и формула (4.3:1) дает:

$$l_{n-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\omega_n(\xi)} \frac{\omega_n(\xi) - \omega_n(z)}{\xi - z} d\xi. \quad (4.4:4)$$

Для вычисления этого интеграла проще всего воспользоваться теоремой о вычетах. Подынтегральная функция  $\varphi(z)$ , рассматриваемая как функция от  $\xi$ , имеет простые полюсы в точках  $z_k$  ( $k=1, \dots, n$ ). Точка  $\xi=z$  не является для нее особой, так как многочлен  $\omega_n(\xi) - \omega_n(z)$  делится на  $\xi - z$ . Для вычетов  $\varphi(\xi)$  в точках  $z_k$  получаем выражения:

$$\text{Выч. } \varphi(\xi) = \frac{f(z_k)}{\omega'_n(z_k)} \frac{\omega_n(z)}{z - z_k},$$

где  $\frac{\omega_n(z)}{z - z_k} = (z - z_1) \dots (z - z_{k-1})(z - z_{k+1}) \dots (z - z_n)$  — многочлен относительно  $z$  степени  $n-1$ .

Следовательно,

$$l_{n-1}(z) = \sum_{k=1}^n \text{Выч. } \varphi(\xi) = \sum_{k=1}^n \frac{f(z_k)}{\omega'_n(z_k)} \frac{\omega_n(z)}{z - z_k}. \quad (4.4:5)$$

Мы получили интерполяционный многочлен Лагранжа степени  $n-1$ . Остаточный член соответствующей интерполяционной формулы имеет вид:

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \frac{\omega_n(z)}{\omega_n(\xi)} d\xi. \quad (4.4:6)$$

Его поведение при  $n \rightarrow \infty$  зависит от соотношения между распределением точек интерполяции  $\{z_n\}$  внутри области  $G$  и характером функции  $f(z)$ .

3) Интерполяционный многочлен Лагранжа можно записать в иной форме. Преобразуем выражение

$$\sigma_n = \frac{1}{\omega_n(\xi)} \frac{\omega_n(\xi) - \omega_n(z)}{\xi - z},$$

представляющее, как мы знаем, многочлен степени  $n-1$  относительно  $z$ .

При  $n=1$  имеем:

$$\sigma_1 = \frac{1}{\xi - z_1} \frac{(\xi - z_1) - (z - z_1)}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_1}.$$

Рассмотрим разность

$$\delta_k = \sigma_{k+1} - \sigma_k = \frac{1}{\omega_{k+1}(\xi)} \frac{\omega_{k+1}(\xi) - \omega_{k+1}(z)}{\xi - z} - \frac{1}{\omega_k(\xi)} \frac{\omega_k(\xi) - \omega_k(z)}{\xi - z};$$

так как

$$\omega_{k+1}(\xi) = (\xi - z_{k+1}) \omega_k(\xi) \quad \text{и} \quad \omega_{k+1}(z) = (z - z_{k+1}) \omega_k(z),$$

то разность эту можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta_k &= \frac{(\xi - z_{k+1}) \omega_k(\xi) - (z - z_{k+1}) \omega_k(z) - (\xi - z_{k+1}) \omega_k(\xi) + (\xi - z_{k+1}) \omega_k(z)}{\omega_{k+1}(\xi) (\xi - z)} = \\ &= \frac{(\xi - z) \omega_k(z)}{\omega_{k+1}(\xi) (\xi - z)} = \frac{\omega_k(z)}{\omega_{k+1}(\xi)}. \end{aligned}$$

Полагая  $\delta_0 = \sigma_1 = \frac{1}{\xi - z_1} = \frac{1}{\omega_1(\xi)}$ , составим сумму  $\sum_{k=0}^{n-1} \delta_k(\xi)$ , получим:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \delta_k(\xi) = \sigma_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\sigma_{k+1} - \sigma_k) = \sigma_n = \frac{1}{\omega_1(\xi)} + \frac{\omega_1(z)}{\omega_2(\xi)} + \dots + \frac{\omega_{n-1}(z)}{\omega_n(\xi)}.$$

Итак,

$$\frac{1}{\omega_n(\xi)} \frac{\omega_n(\xi) - \omega_n(z)}{\xi - z} = \frac{1}{\omega_1(\xi)} + \frac{\omega_1(z)}{\omega_2(\xi)} + \dots + \frac{\omega_{n-1}(z)}{\omega_n(\xi)}. \quad (4.4:7)$$

Очевидно, тождество (4.4:1) получится отсюда, если положить  $z_1 = \dots = z_n$ .

Из равенства (4.4:7) следует, что интерполяционный многочлен Лагранжа  $l_{n-1}(z)$  можно представить в виде

$$l_{n-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\omega_n(\xi)} \frac{\omega_n(\xi) - \omega_n(z)}{\xi - z} d\xi = \sum_0^{n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\omega_{k+1}(\xi)} d\xi \omega_k(z). \quad (4.4:8)$$

В этом виде он носит название интерполяционного многочлена Ньютона. Преимущество формулы (4.4:8) перед формулой (4.4:5) заключается в том, что при переходе от  $l_{n-1}(z)$  к  $l_n(z)$  по формуле (4.4:8) достаточно присоединить к  $l_{n-1}(z)$  лишь одно слагаемое вида  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\omega_{n+1}(\xi)} d\xi \cdot \omega_n(z)$ , тогда как формула (4.4:5) требует не только увеличения количества слагаемых на одно, но и замену каждого прежнего слагаемого новым, отличным от прежнего.

В частности, в случае, когда последовательность  $\{l_{n-1}(z)\}$  сходится к функции  $f(z)$ , мы вместо соотношения

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} l_{n-1}(z)$$

можем пользоваться, с учетом формулы (4.4:8), следующим рядом:

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\omega_{k+1}(\xi)} d\xi \omega_k(z). \quad (4.4:9)$$

Этот ряд называется интерполяционным рядом Ньютона. Очевидно, при  $z_1 = z_2 = \dots = z_n = \dots \omega_{k+1}(\xi)$  переходит в  $(\xi - z_1)^{k+1}$ ,  $\omega_k(z) \rightarrow (z - z_1)^k$ , и мы получаем ряд Тейлора:

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_1)^{k+1}} d\xi (z - z_1)^k, \quad (4.4:10)$$

как частный случай ряда Ньютона.

Заметим, впрочем, что условия сходимости ряда (4.4:10) нами установлены, тогда как общий вопрос о сходимости ряда Ньютона, т. е. изучение условий, при которых остаточный член ряда Ньютона (он же — остаточный член ряда Лагранжа) (4.4:6) стремится к нулю, когда  $n$  стремится к бесконечности, требует особого исследования, учитывающего и распределение

точек интерполирования и поведение функции  $f(z)$ . Этот вопрос разработан А. О. Гельфондом.

Остановимся еще на рассмотрении коэффициентов ряда Ньютона:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\omega_{k+1}(\zeta)} d\zeta \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

В частном случае ряда Тейлора коэффициенты эти выражаются через производные от  $f(z)$ , а именно, представляются в виде  $\frac{f^{(k)}(z_1)}{k!}$ . В общем случае они выражаются через разделенные разности функции  $f(z)$ , относящиеся к точкам  $\{z_n\}$ .

Чтобы получить нужное выражение для этих коэффициентов, воспользуемся теоремой о вычетах. Найдем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\omega_{k+1}(\zeta)} d\zeta = \sum_{j=1}^{k+1} \text{Выч.}_{\zeta=z_j} \frac{f(\zeta)}{\omega_{k+1}(\zeta)} = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{f(z_j)}{\omega'_{k+1}(z_j)}, \quad (4.4:11)$$

где

$$\omega_{k+1}(z_j) = (z_j - z_1) \dots (z_j - z_{j-1})(z_j - z_{j+1}) \dots (z_j - z_{k+1}).$$

В частности, при  $k=1$  получаем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\omega_2(\zeta)} d\zeta = \frac{f(z_1)}{z_1 - z_2} + \frac{f(z_2)}{z_2 - z_1} = \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}.$$

Назовем это выражение первой разделенной разностью функции  $f(z)$  относительно точек  $z_1$  и  $z_2$  и обозначим его через  $\Delta^{(1)}[f; z_1, z_2]$ . Вообще, если разделенная разность порядка  $k-1$  уже определена, то мы назовем разделенной разностью порядка  $k$  функции  $f(z)$  относительно точек  $z_1, z_2, \dots, z_{k+1}$  выражение

$$\frac{\Delta^{(k-1)}[f; z_2, \dots, z_{k+1}] - \Delta^{(k-1)}[f; z_1, \dots, z_k]}{z_{k+1} - z_1} = \Delta^{(k)}[f; z_1, \dots, z_k, z_{k+1}].$$

Допустим, что уже доказано, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\omega_k(\zeta)} d\zeta = \Delta^{(k-1)}[f(z); z_1, \dots, z_k]$$

для любой системы точек  $z_1, \dots, z_k$ ; покажем, что тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\omega_{k+1}(\zeta)} d\zeta = \Delta^{(k)}[f(z); z_1, \dots, z_k, z_{k+1}]. \quad (4.4:12)$$

В самом деле, по сделанному допущению имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1) \dots (\zeta - z_k)} d\zeta &= \Delta^{(k-1)}[f(z); z_1, \dots, z_{k+1}], \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_2) \dots (\zeta - z_{k+1})} d\zeta &= \Delta^{(k-1)}[f(z); z_2, \dots, z_{k+1}]. \end{aligned}$$



Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta^{(k)} [f(z); z_1, \dots, z_{k+1}] &= \\ &= \frac{\Delta^{(k-1)} [f(z); z_2, \dots, z_{k+1}] - \Delta^{(k-1)} [f(z); z_1, \dots, z_k]}{z_{k+1} - z_1} = \\ &= \frac{1}{z_{k+1} - z_1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) \left[ \frac{1}{(\zeta - z_2) \dots (\zeta - z_{k+1})} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(\zeta - z_1) \dots (\zeta - z_k)} \right] d\zeta = \\ &= \frac{1}{z_{k+1} - z_1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) \frac{(\zeta - z_1) - (\zeta - z_{k+1})}{(\zeta - z_1) \dots (\zeta - z_{k+1})} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\omega_{k+1}(\zeta)} d\zeta, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Полагая еще

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\omega_1(\zeta)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z_1) = \Delta^{(0)} [f; z_1],$$

представим интерполяционный многочлен Ньютона (4.4:8) в виде

$$l_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta^k [f(z); z_1, \dots, z_{k+1}] \omega_k(z).$$

В соответствии с этим интерполяционный ряд Ньютона принимает следующий вид:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k [f(z); z_1, \dots, z_{k+1}] \omega_k(z).$$

4) В заключение рассмотрим интерполяционную задачу, в которой даны  $m$  различных точек:  $z_1, \dots, z_m$ , с одинаковыми кратностями  $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = p$ ; число  $p$  мы будем затем неограниченно увеличивать, не меняя самих точек интерполяции. Речь идет об отыскании многочлена  $j_{mp-1}(z)$  степени не выше  $mp-1$ , удовлетворяющего условиям:

$$j_{mp-1}(z_k) = f(z_k), \quad j'_{mp-1}(z_k) = f'(z_k), \dots, j^{(p-1)}_{mp-1}(z_k) = f^{(p-1)}(z_k)$$

( $k = 1, 2, \dots, m$ ). Полагая

$$(z - z_1) \dots (z - z_m) = q(z),$$

имеем:

$$\omega_{mp}(z) = (z - z_1)^p \dots (z - z_m)^p = [q(z)]^p,$$

и, следовательно,

$$j_{mp-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{[q(\zeta)]^p} \frac{[q(\zeta)]^p - [q(z)]^p}{\zeta - z} d\zeta.$$

Преобразуем выражение  $\frac{1}{[q(\xi)]^p} \frac{[q(\xi)]^p - [q(z)]^p}{\xi - z}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{[q(\xi)]^p} \frac{[q(\xi)]^p - [q(z)]^p}{\xi - z} &= \\ &= \frac{1}{[q(\xi)]^p} \frac{q(\xi) - q(z)}{\xi - z} \{ [q(\xi)]^{p-1} + [q(\xi)]^{p-2} q(z) + \dots + [q(z)]^{p-1} \} = \\ &= \frac{q(\xi) - q(z)}{\xi - z} \left\{ \frac{1}{q(\xi)} + \frac{q(z)}{[q(\xi)]^2} + \dots + \frac{[q(z)]^{p-1}}{[q(\xi)]^p} \right\}. \end{aligned}$$

Тогда будем иметь:

$$j_{mp-1}(z) = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{[q(\xi)]^{n+1}} \frac{q(\xi) - q(z)}{\xi - z} d\xi [q(z)]^n. \quad (4.4:13)$$

Для дальнейших преобразований воспользуемся формулой (4.4:7), в которой заменим  $\omega_n(z)$  на  $q(z)$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{[q(\xi)]^{n+1}} \frac{q(\xi) - q(z)}{\xi - z} &= \frac{1}{[q(\xi)]^n} \left\{ \frac{1}{q(\xi)} \frac{q(\xi) - q(z)}{\xi - z} \right\} = \\ &= \frac{1}{[q(\xi)]^n} \left[ \frac{1}{\xi - z_1} + \frac{z - z_1}{(\xi - z_1)(\xi - z_2)} + \dots + \frac{(z - z_1) \dots (z - z_{m-1})}{(\xi - z_1)(\xi - z_2) \dots (\xi - z_m)} \right] \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{[q(\xi)]^{n+1}} \frac{q(\xi) - q(z)}{\xi - z} d\xi &= \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{[q(\xi)]^n} \frac{d\xi}{(\xi - z_1) \dots (\xi - z_{j+1})} (z - z_1) \dots (z - z_j). \end{aligned}$$

Мы получили многочлен  $Q_n(z)$  степени не выше  $m-1$ , коэффициенты которого суть интегралы вида  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{[q(\xi)]^n} \frac{d\xi}{(\xi - z_1) \dots (\xi - z_{j+1})}$ . Их выражения через значения функции  $f(z)$  и ее производных в точках  $z_1, \dots, z_m$  можно было бы получить при помощи теоремы о вычетах.

Возвращаясь к формуле (4.4:13), находим:

$$j_{mp-1}(z) = \sum_{n=0}^{p-1} Q_n(z) [q(z)]^n;$$

этот многочлен называется интерполяционным многочленом Якоби.

Рассмотрим остаточный член соответствующей интерполяционной формулы

$$R_{mp}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \frac{[q(z)]^p}{[q(\xi)]^p} d\xi.$$

Для его оценки заметим, что на кривую  $\gamma$  наложены с самого начала только следующие ограничения:  $\gamma$  вместе со своей внутренностью

принадлежит области  $G$ , в которой функция  $f(z)$  является аналитической и содержит внутри все точки  $z_1, \dots, z_m$ . Выберем в качестве кривой  $\gamma$  лемнискату  $\Lambda_\rho$  с фокусами в точках  $z_1, \dots, z_m$ :

$$|q(z)| = \rho^m$$

(см. гл. 3, п. 6.2). Мы знаем, что она содержит внутри себя точки  $z_1, \dots, z_m$ , каково бы ни было  $\rho > 0$ . Пусть, далее,  $\rho_0 > 0$  — такое значение радиуса, что  $f(z)$  является однозначной и аналитической внутри  $\Lambda_{\rho_0}$ , и пусть  $\rho > 0$  — произвольное положительное число меньшее  $\rho_0$ . Тогда для любого  $\rho'$ , удовлетворяющего неравенствам  $\rho < \rho' < \rho_0$ , лемниската  $\Lambda_{\rho'}$  принадлежит внутренности  $\Lambda_{\rho_0}$  и содержит замкнутое множество  $\bar{G}_\rho$ , состоящее из внутренности лемнискаты  $\Lambda_\rho$  и самой этой лемнискаты. Так как во всех точках  $z \in \bar{G}_\rho$  выполняется неравенство

$$|q(z)| \leq \rho^m,$$

а в точках  $\zeta \in \Lambda_{\rho'}$  имеет место равенство

$$|q(\zeta)| = \rho'^m,$$

то, принимая в качестве  $\gamma$  лемнискату  $\Lambda_{\rho'}$  и обозначая через  $M(\rho')$  максимум модуля  $f(z)$  в ее точках, будем иметь:

$$|R_{mp}(z)| < \frac{1}{2\pi} \frac{M(\rho')}{\delta(\rho, \rho')} \left( \frac{\rho}{\rho'} \right)^{mp} \text{ дл. } \Lambda_{\rho'} (z \in G_\rho),$$

где через  $\delta(\rho, \rho')$  обозначено расстояние между  $\Lambda_\rho$  и  $\Lambda_{\rho'}$ .

Из этой формулы видно, что  $R_{mp}(z)$  при неограниченно возрастающем  $p$  равномерно стремится к нулю на множестве  $\bar{G}_\rho$ . Так как

$$R_{mp}(z) = f(z) - j_{mp-1}(z)$$

и  $\rho$  можно выбрать сколь угодно близким к  $\rho_0$ , то отсюда вытекает, что последовательность полиномов  $j_{mp-1}(z)$  равномерно сходится внутри  $\Lambda_{\rho_0}$  к функции  $f(z)$ :

$$f(z) = \lim_{p \rightarrow \infty} j_{mp-1}(z) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{p-1} Q_n(z) [q(z)]^n,$$

т. е. имеет место разложение в ряд

$$f(z) = \sum_0^\infty Q_n(z) [q(z)]^n. \quad (4.4:14)$$

Ряд этот называется интерполяционным рядом Якоби.

Итак, всякая функция  $f(z)$ , аналитическая внутри лемнискаты  $\Lambda_{\rho_0}$ , с фокусами  $z_1, \dots, z_m$ , может быть разложена в ряд Якоби (4.4:14), равномерно сходящийся внутри  $\Lambda_{\rho_0}$ .

Напомним, что  $q(z) = (z - z_1) \dots (z - z_m)$  и

$$Q_n(z) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{[q(\zeta)]^n} \frac{d\zeta}{(\zeta - z_1) \dots (\zeta - z_{j+1})} (z - z_1) \dots (z - z_j).$$

В частном случае, когда  $m=1$ , имеем  $q(z)=z-z_1$ ,

$$Q_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_1)^{n+1}} d\xi = \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!},$$

и ряд Якоби превращается в ряд Тейлора, а лемниската  $\Lambda_{\rho_0}$  — в окружность  $|z-z_1|=\rho_0$ .

В случае, когда  $m=2$ , имеем:  $q(z)=(z-z_1)(z-z_2)$  и

$$Q_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_1)^{n+1}(\xi-z_2)^n} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_1)^{n+1}(\xi-z_2)^{n+1}} d\xi (z-z_1).$$

Применяя к каждому из интегралов теорему о вычетах и производя затем простые преобразования, получим:

$$Q_0(z) = \frac{f(z_1)(z-z_2) - f(z_2)(z-z_1)}{z_1 - z_2},$$

и при  $n \geq 1$

$$Q_n(z) = \frac{1}{n! (z_1 - z_2)^{n+1}} \sum_{h=0}^n \frac{\lambda_h}{(z_1 - z_2)^h} \left[ (-1)^h f^{(n-h)}(z_1) \left( z - \frac{kz_1 + nz_2}{k+n} \right) - \right. \\ \left. - (-1)^n f^{(n-k)}(z_2) \left( z - \frac{nz_1 + kz_2}{k+n} \right) \right],$$

где

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = n(n+1), \quad \lambda_k = \frac{n(n^2-1) \dots [n^2 - (k-1)^2] (n+k)}{k!} \quad (k \geq 2).$$

В частности, полагая  $z_1 = -z_2 = a$ , найдем, что каждая функция  $f(z)$ , аналитическая внутри лемнискаты  $\Lambda_{\rho_0}$ :

$$|(z-a)(z+a)| = \rho_0^2,$$

разлагается в ряд:

$$f(z) = \frac{f(a)(z+a) - f(-a)(z-a)}{2a} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z^2 - a^2)}{n! (2a)^{n+1}} \sum_{h=0}^n \frac{\lambda_h}{(2a)^h} \left[ (-1)^h f^{(n-h)}(a) \left( z - \frac{n-k}{n+k} a \right) - \right. \\ \left. - (-1)^n f^{(n-k)}(-a) \left( z - \frac{n-k}{n+k} a \right) \right]$$

Полезно заметить, что пока внутренность лемнискаты  $\Lambda_{\rho_0}$  не является связной (что будет при всех достаточно малых значениях  $\rho_0$ ), аналитическая функция  $f(z)$  может определяться в каждой компоненте открытого множества, границей которого служит  $\Lambda_{\rho_0}$ , независимо от того, как она определяется в других компонентах того же множества. Так, например, в случае  $m=2$  и  $\rho_0 \leq |a|$  лемниската  $|(z-a)(z+a)| = \rho_0^2$  ограничивает две односвязные области, не имеющие общих точек. Положим  $f(z)$  равной постоянной  $A$  в той из этих областей, которая содержит точку  $-a$ , и

равной постоянной  $B$  в той области, которая содержит точку  $a$ . Тогда получим ряд:

$$\frac{B+A}{2} + z \frac{B-A}{2a} + \frac{B-A}{2a} \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1) \dots (2n-1) 2n}{n!} \frac{z(z^2-a^2)^n}{2^{2n} a^{2n}},$$

сходящийся в одной из двух областей, ограниченных лемнискатой, к постоянной  $A$ , а в другой — к  $B$ .

Впрочем, последний результат легко получить и с помощью биномиального разложения. А именно, заменяя в формуле

$$(1+t)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1) \dots (2n-1) 2n}{n! 2^{2n}} t^n, \quad |t| < 1$$

$t$  на  $\frac{z^2-a^2}{a^2}$ , будем иметь внутри лемнискаты  $|z^2-a^2| = |a|^2$ :

$$|t| = \frac{|z^2-a^2|}{|a|^2} < 1.$$

Следовательно,

$$\pm \frac{a}{z} = 1 + \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1) \dots (2n-1) 2n}{n! 2^{2n}} \frac{(z^2-a^2)^n}{a^{2n}},$$

где знак в левой части следует выбирать так, чтобы при  $z = \pm a$  получать единицу; поэтому в области, ограниченной лемнискатой и содержащей точку  $-a$  (одна половина «восьмерки»), следует брать знак минус, а в области, ограниченной лемнискатой и содержащей точку  $a$  (другая половина «восьмерки»), — знак плюс. Из найденного разложения следует, что

$$\pm \frac{B-A}{2} = \frac{B-A}{2a} z + \frac{B-A}{2a} \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1) \dots (2n-1) 2n}{n! 2^{2n}} \frac{z(z^2-a^2)^n}{a^{2n}},$$

откуда, наконец, и вытекает указанный выше результат.

Для изучения теории интерполяции мы отсылаем читателя к книгам В. Л. Гончарова, Теория интерполирования и приближения функций, М., Гостехиздат, 1954 (гл. I. Точечное интерполирование) и А. О. Гельфонда, Исчисление конечных разностей, изд. 3, «Наука», 1966.

## § 5. Обратные и неявные функции

### 5.1. Пусть

$$w = f(z) = w_0 + a_1(z-z_0) + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots, \quad (5.1:1)$$

где  $a_1 = f'(z_0) \neq 0$ . Рассмотрим круг  $|z - z_0| < \rho_0$ , радиус которого меньше, чем радиус сходимости ряда (5.1 : 1) и в точках которого, отличных от  $z_0$ , функция  $f(z)$  принимает значения, неравные  $f(z_0) = w_0$  (см. п. 6.1 гл. 3). Обозначая через  $\delta$  расстояние от точки  $w_0$  до образа окружности  $\gamma : |z - z_0| = \rho_0$  при отображении

$w = f(z)$ , получим для каждой точки  $w_1$ , принадлежащей окрестности  $|w - w_0| < \delta$ :

$$|f(z) - w_0| > |w_0 - w_1| \quad (z \in \gamma),$$

откуда, в силу теоремы Руше (см. п. 3.5), следует, что уравнения

$$f(z) - w_0 = 0$$

и

$$f(z) - w_1 = f(z) - w_0 + (w_0 - w_1) = 0$$

имеют одно и то же число корней внутри  $\gamma$ . Но первое из них имеет только один корень  $z_0$ ; следовательно, и второе имеет только один корень  $z_1$ :

$$f(z_1) = w_1.$$

Итак, в окрестности  $|w - w_0| < \delta$  определена однозначная функция  $z = \varphi(w)$ , значения которой принадлежат окрестности  $|z - z_0| < \rho$ , обратная по отношению к функции  $w = f(z)$ .

Мы получим для нее разложение в ряд по степеням  $w - w_0$ , сходящееся в круге  $|w - w_0| < \delta$ , откуда будет следовать, что функция  $\varphi(z)$  является аналитической в указанном круге. Ряд, к которому мы придем, представит обращение ряда (5.1:1). Желая установить более общий результат, введем произвольную функцию  $F(z)$ , аналитическую в области, содержащей замкнутый круг  $|z - z_0| \leq \rho_0$ , и будем строить разложение в ряд для функции  $F[\varphi(w)]$ . В частности, полагая  $F(z) = z$ , получим разложение для  $\varphi(w)$ .

Если  $w$  — произвольная точка из круга  $|w - w_0| < \delta$ , то функция  $f(z) - w$ , как мы заметили, имеет единственный простой нуль  $z = \varphi(w)$  внутри  $\gamma$ :  $|z - z_0| = \rho_0$ . Следовательно, функция  $F(\xi) \frac{f'(\xi)}{f(\xi) - w}$  имеет единственный простой полюс  $\varphi(w)$  внутри  $\gamma$ , с вычетом, равным  $F[\varphi(w)]$ , откуда вытекает, что

$$F[\varphi(w)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(\xi) \frac{f'(\xi)}{f(\xi) - w} d\xi. \quad (5.1:2)$$

Полученная формула является, очевидно, частным случаем формулы (3.5:1). Чтобы получить отсюда требуемое разложение в ряд, применим к интегралу (5.1:2) прием, аналогичный тому, посредством которого из интеграла Коши был получен степенной ряд для аналитической функции.

Так как  $|\omega - \omega_0| < \delta$ , а  $|f(\zeta) - \omega_0| \geq \delta$  ( $\zeta \in \gamma$ ), то дробь  $\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - \omega}$  можно разложить в ряд по степеням  $\frac{\omega - \omega_0}{f(\zeta) - \omega_0}$ :

$$\begin{aligned} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - \omega} &= \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - \omega_0 - (\omega - \omega_0)} = \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - \omega_0} \frac{1}{1 - \frac{\omega - \omega_0}{f(\zeta) - \omega_0}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - \omega_0} \left[ \frac{\omega - \omega_0}{f(\zeta) - \omega_0} \right]^n \end{aligned}$$

Полагая  $\max_{\gamma} |f'(\zeta)| = M$ , найдем, что модуль общего члена полученного ряда не превосходит в точках окружности  $\gamma$  числа  $\frac{M}{\delta} \left( \frac{|\omega - \omega_0|}{\delta} \right)^n$  откуда следует, что ряд сходится равномерно на  $\gamma$  и его можно почленно интегрировать. Подставляя это разложение в формулу (5.1:2), получим:

$$\begin{aligned} F[\varphi(\omega)] &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - \omega_0} \left[ \frac{\omega - \omega_0}{f(\zeta) - \omega_0} \right]^n d\zeta = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(\zeta) f'(\zeta)}{[f(\zeta) - \omega_0]^{n+1}} d\zeta (\omega - \omega_0)^n. \quad (5.1:3) \end{aligned}$$

Мы получили степенной ряд для  $F[\varphi(\omega)]$ , сходящийся при  $|\omega - \omega_0| < \delta$ . В частности, если  $F(z) = z$ , получаем:

$$z = \varphi(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\zeta f'(\zeta)}{[f(\zeta) - \omega_0]^{n+1}} d\zeta (\omega - \omega_0)^n. \quad (5.1:4)$$

Это и есть обращение ряда (5.1:1).

Преобразуем коэффициенты найденных разложений.

При  $n=0$  получаем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(\zeta) f'(\zeta)}{f(\zeta) - \omega_0} d\zeta = F(z_0),$$

так как внутри  $\gamma$  подынтегральная функция имеет единственный полюс (простой) в точке  $\zeta = z_0$  с вычетом, равным  $F(z_0)$ .

Пусть теперь  $n \geq 1$ . Тогда, пользуясь интегрированием по частям (очевидно, применимым к интегралам от аналитических функций комплексного переменного), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(\zeta) f'(\zeta)}{[f(\zeta) - \omega_0]^{n+1}} d\zeta &= \\ &= -\frac{1}{2\pi i n} \int_{\gamma} F(\zeta) d \left\{ \frac{1}{[f(\zeta) - \omega_0]^n} \right\} = \frac{1}{2\pi i n} \int_{\gamma} \frac{F'(\zeta)}{[f(\zeta) - \omega_0]^n} d\zeta. \end{aligned}$$

Функция  $\frac{F'(\zeta)}{[f(\zeta) - w_0]^n}$  внутри  $\gamma$  имеет  $n$ -кратный полюс в точке  $\zeta = z_0$  (так как знаменатель дроби  $[f(\zeta) - w_0]^n$  имеет  $n$ -кратный нуль в этой точке). Поэтому (см. п. 3.4):

$$\text{Выч. } \left\{ \frac{F'(\zeta)}{[f(\zeta) - w_0]^n} \right\} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \left\{ \frac{F'(\zeta) (\zeta - z_0)^n}{[f(\zeta) - w_0]^n} \right\}_{\zeta=z_0}.$$

Полагая для краткости

$$\frac{z - z_0}{f(z) - w_0} = \chi(z), \quad (5.1:5)$$

где, в силу сделанных относительно  $f(z)$  предположений, функция  $\chi(z)$  является аналитической в круге  $|z - z_0| < \rho_0$ , получаем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(\zeta) f'(\zeta)}{[f(\zeta) - w_0]^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \{F'(\zeta) [\chi(\zeta)]^n\}_{\zeta=z_0}. \quad (5.1:6)$$

Следовательно, ряд (5.1:3) можно окончательно записать в виде

$$F[\varphi(w)] = F(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \{F'(\zeta) [\chi(\zeta)]^n\}_{\zeta=z_0} (w - w_0)^n. \quad (5.1:7)$$

Ряд этот, так же как и его частный случай (при  $F(z) = z$ ):

$$z = \varphi(w) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \{[\chi(\zeta)]^n\}_{\zeta=z_0} (w - w_0)^n, \quad (5.1:8)$$

называется рядом Лагранжа.

5.2. Перейдем к обращению степенного ряда вида

$$w = f(z) = w_0 + a_k (z - z_0)^k + a_{k+1} (z - z_0)^{k+1} + \quad (5.2:1)$$

где

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0 \quad \text{и} \quad k > 1.$$

Рассмотрим круг  $K: |z - z_0| < \rho_0$ , в котором выполняется соотношение

$$|a_{k+1} (z - z_0) + a_{k+2} (z - z_0)^2 + \dots| = |\lambda(z)| < |a_k|.$$

Тогда в этой окрестности имеем при  $z \neq z_0$ :

$$|f(z) - w_0| = |z - z_0|^k |a_k + \lambda(z)| \geq |z - z_0|^k [|a_k| - |\lambda(z)|] > 0,$$

т. е.  $f(z)$  не принимает значения  $w_0$  в точках, отличных от  $z_0$ .

Введем, далее, функцию

$$\left[ 1 + \frac{\lambda(z)}{a_k} \right]^{\frac{1}{k}}$$



В силу аналитичности  $\lambda(z)$  в круге  $K$ , а также в силу неравенства  $\left| \frac{\lambda(z)}{a_k} \right| < 1$ , выполняемого в этом круге, она обладает в нем однозначной аналитической ветвью  $\psi(z)$ , представляемой формулой

$$\psi(z) = \sqrt[k]{\left| 1 + \frac{\lambda(z)}{a_k} \right|} \left\{ \cos \left[ \frac{1}{k} \arg \left( 1 + \frac{\lambda(z)}{a_k} \right) \right] + \right. \\ \left. + i \sin \left[ \frac{1}{k} \arg \left( 1 + \frac{\lambda(z)}{a_k} \right) \right] \right\}$$

и вполне характеризуемой тем, что в точке  $z = z_0$ , где  $\lambda(z) = 0$ , эта функция принимает значение 1.

Функция  $\psi(z)$  разлагается в круге  $K$  в степенной ряд

$$\psi(z) = 1 + \alpha_1(z - z_0) + \alpha_2(z - z_0)^2 + \dots,$$

который можно получить, например, посредством подстановки ряда

$$\frac{\lambda(z)}{a_k} = \frac{a_{k+1}}{a_k}(z - z_0) + \frac{a_{k+2}}{a_k}(z - z_0)^2 + \dots$$

в биномиальный ряд

$$\psi(z) = \left[ 1 + \frac{\lambda(z)}{a_k} \right]^{\frac{1}{k}} = \\ = 1 + \frac{1}{k} \frac{\lambda(z)}{a_k} + \frac{1}{2!} \frac{1}{k} \left( \frac{1}{k} - 1 \right) \left[ \frac{\lambda(z)}{a_k} \right]^2 + \dots$$

С помощью введенных здесь функций отображение  $w = f(z)$  можно представить в круге  $K$  в следующем виде:

$$w = f(z) = w_0 + a_k(z - z_0)^k \left[ 1 + \frac{\lambda(z)}{a_k} \right] = \\ = w_0 + a_k(z - z_0)^k [\psi(z)]^k. \quad (5.2:2)$$

Заменим его двумя отображениями, выполняемыми последовательно одно за другим:

$$t = \sqrt[k]{f(z) - f(z_0)} = \sqrt[k]{a_k}(z - z_0) \psi(z) = \\ = \sqrt[k]{a_k}(z - z_0) + \sqrt[k]{a_k} \alpha_1(z - z_0)^2 + \dots, \quad (5.2:3)$$

$$w = w_0 + t^k. \quad (5.2:4)$$

В силу результатов предыдущего пункта уравнение (5.2:3) определяет  $z$  в некоторой окрестности точки  $t = 0$ , как однозначную

и аналитическую функцию  $t$  (значение  $\sqrt[k]{a_k}$  фиксировано):

$$z = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \{[\chi(\zeta)]^n\}_{\zeta=z_0} t^n,$$

где

$$\chi(\zeta) = \frac{\zeta - z_0}{a_k^{\frac{1}{k}} (\zeta - z_0) \psi(\zeta)} = \frac{\zeta - z_0}{[f(\zeta) - f(z_0)]^{\frac{1}{k}}}.$$

Замечая, что  $t = (\omega - \omega_0)^{\frac{1}{k}}$  является  $k$ -значной функцией от  $\omega$ , аналитической при  $\omega \neq \omega_0$ , заключаем, что функция  $z = \varphi(\omega)$ , обратная по отношению к (5.2:1), является  $k$ -значной функцией от  $\omega$ , аналитической в некоторой окрестности  $\omega$  точки  $\omega_0$ , за исключением самой точки  $\omega_0$ . В этой окрестности она изображается рядом, расположенным по дробным степеням  $\omega - \omega_0$ :

$$z = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \{\chi[(\zeta)]^n\}_{\zeta=z_0} (\omega - \omega_0)^{\frac{n}{k}} \quad (5.2:5)$$

Если в указанной окрестности  $\omega$  точки  $\omega_0$  провести какой-либо радиус, то функция  $t = (\omega - \omega_0)^{\frac{1}{k}}$  будет иметь в области, получаемой из  $\omega$  путем исключения точек, принадлежащих этому радиусу,  $k$  однозначных аналитических ветвей. Каждой из них соответствует определенная однозначная аналитическая ветвь функции  $z = \varphi(\omega)$  (5.2:5).

Однократному обходу точкой  $\omega$  окружности с центром  $\omega_0$  будет соответствовать переход от одной из ветвей  $(\omega - \omega_0)^{\frac{1}{k}}$  к другой ветви и, вследствие этого, переход от одной ветви функции  $z = \varphi(\omega)$  к другой. В результате  $k$ -кратного обхода вокруг точки  $\omega_0$  каждая ветвь  $(\omega - \omega_0)^{\frac{1}{k}}$  перейдет сама в себя; поэтому и каждая ветвь функции  $z = \varphi(\omega)$  перейдет сама в себя, откуда следует, что точка  $\omega = \omega_0$  является алгебраической точкой разветвления функции  $\varphi(\omega)$  порядка  $k - 1$ .

Итак, в результате обращения степенного ряда (5.2:1) получается  $k$ -значная аналитическая функция с алгебраической точкой разветвления порядка  $k - 1$  в точке  $\omega = \omega_0$ .

Читатель легко распространит предыдущие результаты на случаи, когда ряды расположены по отрицательным степеням  $z$ , или же на случай, когда каждый из рядов, будучи расположен по целым степеням  $z - z_0$ , содержит конечное число отрицательных степеней  $z - z_0$ .

5.3. Рассмотрим несколько примеров на применение ряда Лагранжа.

Пример 1. Пусть

$$w = ze^{-az} = \sum_0^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} z^{n+1} = f(z),$$

где  $a \neq 0$ .

Обозначая по-прежнему обратную функцию через  $z = \varphi(w)$ , выбирая  $F(z) = e^{bz}$  ( $b \neq 0$ ) и замечая, что в данном случае  $z_0 = w_0 = 0$  и  $\chi(z) = \frac{z}{f(z)} = e^{az}$ , получим по формуле (5.1:7):

$$\begin{aligned} F[\varphi(w)] &= e^{b\varphi(w)} = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} [be^{(b+an)\xi}]_{\xi=0} w^n = \\ &= 1 + b \sum_1^{\infty} \frac{(b+an)^{n-1}}{n!} w^n. \end{aligned}$$

Радиус сходимости этого ряда можно определить по формуле Коши — Адамара

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|b+an|^{n-1}}{n!}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e|b+an|^{1-\frac{1}{n}}}{n}} = \frac{1}{e|a|}.$$

Полагая  $b = a$ , получим при  $z = \varphi(w)$ :

$$F(z) = e^{az} = \frac{z}{w}.$$

Следовательно,

$$\frac{\varphi(w)}{w} = 1 + \sum_1^{\infty} a^n \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} w^n$$

и

$$\varphi(w) = w + \sum_1^{\infty} a^n \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} w^{n+1} = \sum_0^{\infty} a^n \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} w^{n+1}.$$

Пример 2. Многочлены Лежандра. Пусть

$$w = 2 \frac{z-t}{z^2-1} = f(z) \quad (t \neq \pm 1).$$

Здесь

$$z_0 = t, \quad w_0 = 0, \quad \chi(z) = \frac{z-z_0}{f(z)} = \frac{z^2-1}{2},$$

и, следовательно, по формуле (5.1:8), в некоторой окрестности точки  $\omega=0$  должно иметь место разложение

$$z = \varphi(\omega) = t + \sum_1^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \left\{ \left( \frac{\zeta^2-1}{2} \right)^n \right\}_{\zeta=t} \omega^n. \quad (5.3:1)$$

Покажем, что этот ряд сходится равномерно относительно параметра  $t$  во всяком круге  $|t| < R$ , если только  $\omega$  соответственно достаточно мало по модулю. В самом деле, коэффициенты ряда можно представить в виде интегралов:

$$\alpha_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \left\{ \left( \frac{\zeta^2-1}{2} \right)^n \right\}_{\zeta=t} = \frac{1}{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-t|=1} \frac{\left( \frac{\zeta^2-1}{2} \right)^n}{(\zeta-t)^n} d\zeta,$$

откуда при всех  $|t| < R$  будем иметь:

$$|\alpha_n| < \frac{1}{2\pi} \frac{(R+2)^{2n}}{2^n} 2\pi = \left[ \frac{(R+2)^2}{2} \right]^n$$

Если, следовательно,  $|\omega| \leq \frac{2\theta}{(R+2)^2}$ , где  $0 < \theta < 1$ , то

$$|\alpha_n \omega^n| < \theta^n,$$

откуда и следует равномерная сходимость ряда.

Пользуясь этим замечанием, дифференцируем почленно полученный ряд по  $t$ , оставляя  $\omega$  фиксированным. Получим:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\zeta^n} \left\{ \left( \frac{\zeta^2-1}{2} \right)^n \right\}_{\zeta=t} \omega^n$$

С другой стороны, из предложенного уравнения можно легко выразить  $z = \varphi(\omega)$  через элементарные функции. Имеем:

$$z = \varphi(\omega) = \frac{1 - \sqrt{1 - 2t\omega + \omega^2}}{\omega},$$

где следует взять то значение квадратного корня, которое обращается в 1 при  $\omega=0$  (тогда, как легко проверить, получим  $\varphi(0)=t$ , как и должно быть). Отсюда находим:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2t\omega + \omega^2}}$$

Сравнивая два выражения для  $\frac{\partial z}{\partial t}$ , получаем разложение:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2t\omega + \omega^2}} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \left\{ \frac{d^n}{d\zeta^n} (\zeta^2 - 1)^n \right\}_{\zeta=t} \omega^n, \quad (5.3:2)$$

равномерно сходящееся по  $t$  в произвольном круге  $|t| < R$  и по  $w$  в соответствующем круге достаточно малого радиуса. Чтобы определить радиус сходимости ряда при фиксированном  $t = t_0$ , достаточно заметить, что функция, находящаяся в левой части равенства, остается аналитической в окрестности начала координат до тех пор, пока в эту окрестность не попадают точки, в которых подкоренное выражение обращается в нуль. Для указанных точек должно выполняться равенство

$$t_0 = \frac{1}{2} \left( w + \frac{1}{w} \right)$$

Но известно (см. п. 4.9 главы второй), что функция  $t = \frac{1}{2} \left( w + \frac{1}{w} \right)$  отображает внутренность круга  $|w| < \rho < 1$  на внешность эллипса  $E_\rho$  с фокусами  $\pm 1$  и полуосями  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho} + \rho \right)$  и  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho} - \rho \right)$ . Если точка  $t_0$  находится на эллипсе  $E_{\rho_0}$  (в случае, когда  $t_0$  лежит на интервале  $(-1, +1)$  действительной оси, следует взять  $\rho_0 = 1$ ), то для всех  $w$ , принадлежащих кругу  $|w| < \rho_0$ , значения  $t = \frac{1}{2} \left( w + \frac{1}{w} \right)$  будут лежать вне эллипса  $E_{\rho_0}$  и, следовательно, равенство  $t_0 = \frac{1}{2} \left( w + \frac{1}{w} \right)$  не может осуществиться. Итак, функция  $\frac{1}{\sqrt{1-2tw+w^2}}$  является аналитической внутри окружности  $|w| = \rho_0 < 1$ , образ которой при отображении  $t = \frac{1}{2} \left( w + \frac{1}{w} \right)$  (эллипс  $E_{\rho_0}$ ) проходит через точку  $t_0$ . Внутри этой окружности сходится полученный нами степенной ряд.

Коэффициенты ряда представляют функции параметра  $t$ . Так как  $(\zeta^2 - 1)^n$  есть многочлен степени  $2n$  относительно  $\zeta$ , то  $\frac{d^n}{d\zeta^n} (\zeta^2 - 1)^n$  является многочленом степени  $n$  относительно  $\zeta$ , и, следовательно, функции

$$\frac{1}{2^n n!} \left\{ \frac{d^n}{d\zeta^n} (\zeta^2 - 1)^n \right\}_{\zeta=t}$$

суть многочлены степени  $n$  относительно  $t$ . Они называются многочленами Лежандра и обозначаются  $P_n(t)$ .

Итак,

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \left\{ \frac{d^n}{d\zeta^n} (\zeta^2 - 1)^n \right\}_{\zeta=t}. \quad (5.3:3)$$

Многочлены эти обладают многими замечательными свойствами. Отметим некоторые из них.

а) Положим,  $(t^2 - 1)^n = s$ ; тогда будем иметь, вычисляя логарифмическую производную:

$$\frac{2nt}{t^2 - 1} = \frac{s'}{s}, \quad \text{или} \quad (t^2 - 1) s' = 2nts,$$

откуда, дифференцируя  $n + 1$  раз:

$$\begin{aligned} (t^2 - 1) s^{(n+2)} + 2(n+1) t s^{(n+1)} + (n+1) n s^{(n)} = \\ = 2nts^{(n+1)} + 2n(n+1) s^{(n)}. \end{aligned}$$

Заменяя здесь  $\frac{1}{2^n n!} s^{(n)}$  на  $P_n(t)$ , получаем:

$$(t^2 - 1) \frac{d^2 P_n(t)}{dt^2} + 2t \frac{dP_n(t)}{dt} - n(n+1) P_n(t) = 0.$$

Это — линейное дифференциальное уравнение второго порядка, которому удовлетворяет  $P_n(t)$ .

б) Дифференцируя разложение (5.3:2) почленно по  $w$ , получаем:

$$\frac{t-w}{(1-2tw+w^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(t) w^{n-1}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{t-w}{(1-2tw+w^2)^{\frac{1}{2}}} &= (1-2tw+w^2) \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(t) w^{n-1} = \\ &= P_1(t) + 2[P_2(t) - tP_1(t)]w + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)P_{n+1}(t) - 2nP_n(t) + (n-1)P_{n-1}(t)]w^n. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{t-w}{(1-2tw+w^2)^{\frac{1}{2}}} &= (t-w) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) w^n = \\ &= t + [tP_1(t) - 1]w + \sum_{n=2}^{\infty} [tP_n(t) - P_{n-1}(t)]w^n. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $w^n$  в полученных разложениях функции  $\frac{t-w}{(1-2tw+w^2)^{\frac{1}{2}}}$ , найдем:

$$P_1(t) = t, \quad 2P_2(t) - 3tP_1(t) + 1 = 0,$$

$$(n+1)P_{n+1}(t) - (2n+1)tP_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0 \quad (n \geq 2).$$

Эти соотношения позволяют вычислять многочлены Лежандра один за другим.

Вот многочлены Лежандра низших степеней:

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{3t^2 - 1}{2}, \quad P_3(t) = \frac{5t^3 - 3t}{2}, \\ P_4(t) = \frac{35t^4 - 30t^2 + 3}{8},$$

в) Отметим, наконец, важное свойство ортогональности многочленов Лежандра, выражающееся в следующих соотношениях:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(t) P_m(t) dt = 0, \quad \text{если } n \neq m.$$

Для доказательства этих соотношений воспользуемся дифференциальными уравнениями, которым удовлетворяют  $P_n(t)$  и  $P_m(t)$ . Имеем:

$$(1 - t^2) P_n''(t) - 2t P_n'(t) - n(n-1) P_n(t) = 0, \\ (1 - t^2) P_m''(t) - 2t P_m'(t) + m(m+1) P_m(t) = 0.$$

Умножая первое из них на  $P_m(t)$ , а второе на  $P_n(t)$  и вычитая, получим:

$$(1 - t^2) [P_n''(t) P_m(t) - P_m''(t) P_n(t)] - 2t [P_n'(t) P_m(t) - \\ - P_m'(t) P_n(t)] + (n-m)(n+m+1) P_n(t) P_m(t) = 0.$$

Замечая, что первые два члена левой части этого соотношения представляют производную от произведения

$$(1 - t^2) [P_n'(t) P_m(t) - P_m'(t) P_n(t)],$$

и интегрируя найденное соотношение на отрезке  $[-1, +1]$ , найдем:

$$\{(1 - t^2) [P_n'(t) P_m(t) - P_m'(t) P_n(t)]\}_{-1}^{+1} + \\ + (n-m)(n+m+1) \int_{-1}^{+1} P_n(t) P_m(t) dt = 0.$$

Так как выражение в фигурных скобках обращается в нуль при  $t = \pm 1$ , а  $(n-m)(n+m+1) \neq 0$  при  $n \neq m$ , то получаем:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(t) P_m(t) dt = 0.$$

Таким образом, ортогональность многочленов Лежандра на отрезке  $[-1, +1]$  доказана.

Пример 3. Уравнение Кеплера. Это уравнение играет важную роль в астрономии при определении так называемой эксцентрической аномалии планеты. Оно имеет вид

$$E - e \sin E = \frac{t-T}{U} 2\pi,$$

где  $E$  — эксцентрическая аномалия планеты,  $e$  — эксцентриситет орбиты планеты,  $t-T$  есть время, протекшее с момента последнего прохождения планеты через перигелий, и  $U$  — период полного обращения планеты вокруг Солнца. Заменяя здесь  $E$  на  $z$ ,  $e$  на  $\omega$  и  $\frac{t-T}{U} 2\pi$  — на  $\tau$ , перепишем уравнение Кеплера в виде

$$\omega = \frac{z - \tau}{\sin z} = f(z).$$

Здесь  $z_0 = \tau \neq k\pi$  ( $k$  — целое число) и, следовательно,

$$\omega_0 = 0, \quad \chi(\zeta) = \frac{\zeta - z_0}{f(\zeta)} = \sin \zeta.$$

Поэтому формула (5.1:8) дает для функции  $z = \varphi(\omega)$ :

$$z = \tau + \sum_1^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} (\sin \zeta)^n \right\}_{\zeta=\tau} \omega^n \quad (5.3:4)$$

Этот ряд и решает поставленную задачу, так как позволяет по заданным  $\omega = e$  и  $\tau = \frac{t-T}{U} 2\pi$  вычислить  $z = E$ .

Для определения радиуса сходимости этого ряда следует вспомнить, что при выводе ряда Лагранжа мы исходили из круга  $|z - z_0| \leq \rho$ , в котором  $f(z)$  является аналитической и не принимает значения  $\omega_0 = 0$  в точках, отличных от  $z_0$ , и затем определяли число

$$\delta = \min_{|z - z_0| = \rho} |f(z) - f(z_0)| > 0.$$

Наш вывод гарантировал сходимость ряда как раз в круге  $|\omega - \omega_0| < \delta$ . Очевидно, среди различных чисел  $\delta$ , удовлетворяющих поставленным условиям, нас интересует возможно большее. В качестве  $\rho$  в данном примере можно взять произвольное положительное число, не превышающее расстояния от точки  $\tau$  до ближайшего к ней нуля  $\sin z$ , представляющего полюс функции  $f(z)$ . Положим для определенности  $\tau = \frac{\pi}{2}$  (по самому своему смыслу,  $\tau = \frac{t-T}{U} 2\pi$  изменяется от 0 до  $2\pi$ ); тогда  $\rho$  можно изменять в пределах от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ , так как ближайшие к  $\tau$  нули



$\sin z$  ( $z=0$  и  $z=\pi$ ) отстоят от  $\tau$  на  $\frac{\pi}{2}$ . Если  $\rho$  фиксировано в этих пределах, то соответствующее  $\delta$  есть

$$\min_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=\rho} |f(z)| = \min_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=\rho} \left| \frac{z-\tau}{\sin z} \right| = \min_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=\rho} \frac{\rho}{|\sin z|} = \frac{\rho}{\max_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=\rho} |\sin z|}$$

Но  $z$ , удовлетворяющее условию  $\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=\rho$ , можно представить в виде  $z=\frac{\pi}{2}+\rho e^{i\varphi}$ . Следовательно (см. формулы (3.6.11) гл. второй),

$$|\sin z| = |\cos(\rho e^{i\varphi})| = |\cos(\rho \cos \varphi + i\rho \sin \varphi)| \leq |\operatorname{ch}(\rho \sin \varphi)| \leq \operatorname{ch} \rho.$$

Так как при  $\varphi=\frac{\pi}{2}$  имеем:

$$|\sin z| = |\cos(i\rho)| = \operatorname{ch} \rho,$$

то заключаем, что

$$\max_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=\rho} |\sin z| = \operatorname{ch} \rho,$$

и, следовательно,

$$\delta \min_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=\rho} |f(z)| = \frac{\rho}{\operatorname{ch} \rho} = \delta(\rho).$$

Остается выбрать  $\rho$  так, чтобы  $\delta(\rho)$  приняло наибольшее значение. Приравнявая нулю логарифмическую производную  $\delta(\rho)$ , получим уравнение:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{e^{\rho} - e^{-\rho}}{e^{\rho} + e^{-\rho}} = 0 \quad \text{или} \quad e^{2\rho} = \frac{\rho+1}{\rho-1},$$

откуда можно вывести, что  $\rho = 1,1997 < \frac{\pi}{2}$

При этом значении  $\delta(\rho)$  действительно достигает максимума, равного  $\sqrt{\rho^2 - 1} = 0,6627 = \delta$ .

Итак, если  $\tau = \frac{\pi}{2}$ , то разложение (5.3.4) сходится при  $|\omega| < 0,6627$ . Можно показать, что найденное значение  $\delta$  совпадает с радиусом сходимости ряда (5.3.4).

**5.4. Результаты, полученные в связи с задачей обращения рядов, можно рассматривать как частные случаи теорем о неявных функциях. Этим теоремам и посвящен конец этой главы.**

Предварительно сообщим некоторые сведения об аналитических функциях двух переменных, ограничиваясь только самым необходимым.

Будем рассматривать функцию  $F(z, w)$  двух комплексных переменных  $z$  и  $w$ , однозначную и непрерывную по совокупности переменных для  $z \in G$  и  $w \in D$ , где  $G$  и  $D$  — две области, принадлежащие соответственно плоскостям  $z$  и  $w$ . Мы будем называть ее аналитической в четырехмерной области  $G \times D$  \*), если функция  $F(z, w_0)$  является аналитической в области  $G$  для каждого  $w_0 \in D$ , а функция  $F(z_0, w)$  является аналитической в области  $D$  для каждого  $z_0 \in G$ .

Пусть для определенности  $G$  и  $D$  — односвязные области, а  $C$  и  $\Gamma$  — две замкнутые жордановы спрямляемые кривые, принадлежащие, соответственно,  $G$  и  $D$ .

Рассмотрим двукратный интеграл

$$I = \int_C d\zeta \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta, \tau) d\tau}{(\zeta - z)(\tau - w)},$$

где  $z$  лежит внутри  $C$  и  $w$  лежит внутри  $\Gamma$ , причем каждый из контуров описывается в положительном направлении.

Тогда, замечая, что по интегральной формуле

$$\int_{\Gamma} \frac{F(\zeta, \tau) d\tau}{\tau - w} = 2\pi i F(\zeta, w),$$

представим  $I$  в виде

$$I = 2\pi i \int_C \frac{F(\zeta, w) d\zeta}{\zeta - z} = -4\pi^2 F(z, w).$$

Отсюда следует, что

$$F(z, w) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_C d\zeta \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta, \tau) d\tau}{(\zeta - z)(\tau - w)}$$

Читатель легко проверит, что тот же результат получится, если исходить из интеграла

$$\int_{\Gamma} d\tau \int_C \frac{F(\zeta, \tau) d\zeta}{(\zeta - z)(\tau - w)}$$

Поэтому порядок интегрирования в найденной формуле несуществен, и мы можем писать:

$$F(z, w) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_C \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta, \tau) d\zeta d\tau}{(\zeta - z)(\tau - w)}. \quad (5.4.1)$$

Эта формула аналогична интегральной формуле Коши.

На основании этой формулы можно, подобно тому, как это делается в пункте 3.3 главы третьей, для интегралов типа Коши, установить

---

\*) Четырехмерной потому, что каждая ее точка определяется заданием четырех действительных чисел — действительной и мнимой частей переменных  $z$  и действительной и мнимой частей переменной  $w$ . Знаком  $\times$  мы обозначаем *произведение* двух множеств, т. е. совокупность всех возможных пар элементов, взятых по одному из данных множеств.

существование частных производных любого порядка, выражаемых формулами:

$$\frac{\partial^{k+m} F(z, w)}{\partial z^k \partial w^m} = -\frac{k!m!}{4\pi^2} \iint_{C \times \Gamma} \frac{F(\zeta, \tau) d\zeta d\tau}{(\zeta - z)^{k+1} (\tau - w)^{m+1}}. \quad (5.4:2)$$

Эти формулы обнаруживают, что частные производные от  $F(z, w)$  не зависят от порядка дифференцирования. Далее, каждая из частных производных является непрерывной в области, являющейся произведением внутренностей кривых  $C$  и  $\Gamma$ . В самом деле, если  $M = \max |F(\zeta, \tau)|$  на  $C \times \Gamma$ ,  $|z' - z| \leq r$  и  $|w' - w| \leq \rho$  — замкнутые круги, лежащие, соответственно, внутри  $C$  и  $\Gamma$ ,  $R$  — наибольший из диаметров кривых  $C$  и  $\Gamma$  и, наконец,  $\delta (> 0)$  — наименьшее из двух расстояний между  $|z' - z| = r$  и  $C$  и  $|w' - w| = \rho$  и  $\Gamma$ , то для  $z'$  и  $w'$ , принадлежащих указанным кругам, выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^{k+m} F(z', w')}{\partial z^k \partial w^m} - \frac{\partial^{k+m} F(z, w)}{\partial z^k \partial w^k} \right| = \\ &= \frac{k!m!}{4\pi^2} \left| \iint_{C \times \Gamma} F(\zeta, \tau) \frac{(\zeta - z')^{k+1} (\tau - w')^{m+1} - (\zeta - z)^{k+1} (\tau - w)^{m+1}}{(\zeta - z)^{k+1} (\tau - w)^{m+1} (\zeta - z')^{k+1} (\tau - w')^{m+1}} d\zeta d\tau \right| \leq \\ & \frac{k!m!}{4\pi^2} \left| \iint_{C \times \Gamma} F(\zeta, \tau) \left[ \frac{(\zeta - z')^{k+1} [(\tau - w')^{m+1} - (\tau - w)^{m+1}]}{(\zeta - z)^{k+1} (\tau - w)^{m+1} (\zeta - z')^{k+1} (\tau - w')^{m+1}} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{(\tau - w)^{m+1} [(\zeta - z')^{k+1} - (\zeta - z)^{k+1}]}{(\zeta - z)^{k+1} (\tau - w)^{m+1} (\zeta - z')^{k+1} (\tau - w')^{m+1}} \right] d\zeta d\tau \right| \leq \\ & \leq \frac{k!m!}{4\pi^2} M \frac{R^{k+1} \rho (m+1) R^m + R^{m+1} r (k+1) R^k}{\delta^{2k+2m+4}} \text{ для } C, \text{ для } \Gamma \end{aligned}$$

Очевидно, правая часть этого неравенства может быть сделана менее любого  $\varepsilon > 0$  при достаточно малых  $r$  и  $\rho$ . Следовательно, функция  $\frac{\partial^{k+m} F(z, w)}{\partial z^k \partial w^m}$  непрерывна. Кроме того, она является аналитической по  $z$  при фиксированном  $w$  и по  $w$  при фиксированном  $z$ , так как существуют производные  $\frac{\partial^{k+1+m} F(z, w)}{\partial z^{k+1} \partial w^m}$  и  $\frac{\partial^{k+m+1} F(z, w)}{\partial z^k \partial w^{m+1}}$ . Поэтому частная производная любого порядка от функции  $F(z, w)$  является аналитической в произведении внутренностей кривых  $C$  и  $\Gamma$ . Так как это — произвольные кривые внутри областей  $G$  и  $D$ , мы заключаем, что

$$\frac{\partial^{k+m} F(z, w)}{\partial z^k \partial w^m}$$

является аналитической во всей четырехмерной области  $G \times D$ .

С помощью формулы (5.4:1) можно получить разложение аналитической функции двух переменных в двойной степенной ряд — ряд Тейлора функции  $F(z, w)$ . С этой целью разложим в степенной ряд функцию  $\frac{1}{(\zeta - z)(\tau - w)}$  где

$$|\zeta - z_0| = r, \quad |\tau - w_0| = \rho, \quad |z - z_0| < r \quad \text{и} \quad |w - w_0| < \rho.$$

Так как

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} + \frac{z - z_0}{(\zeta - z_0)^2} + \dots$$

$$\frac{1}{\tau - w} = \frac{1}{\tau - w_0 - (w - w_0)} = \frac{1}{\tau - w_0} + \frac{w - w_0}{(\tau - w_0)^2} + \dots$$

причем оба ряда сходятся абсолютно, то разложение функции  $\frac{1}{(\zeta - z)(\tau - w)}$  можно получить путем почленного умножения рядов

$$\frac{1}{(\zeta - z)(\tau - w)} = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^h (w - w_0)^m}{(\zeta - z_0)^{h+1} (\tau - w_0)^{m+1}}, \quad (5.4:3)$$

где члены полученного ряда, вследствие его абсолютной сходимости, можно писать в любом порядке.

Так как при фиксированных  $z$  и  $w$  и при  $\zeta$  и  $\tau$ , пробегающих окружности  $|\zeta - z_0| = r$  и  $|\tau - w_0| = \rho$ , модули членов последнего ряда сохраняют постоянные значения, то ряд этот сходится равномерно относительно  $\zeta$  и  $\tau$  и его можно почленно интегрировать. Подставляя разложение (5.4:3) в формулу (5.4:1), где  $C$  и  $\Gamma$  обозначают окружности  $|\zeta - z_0| = r$  и  $|\tau - w_0| = \rho$ , и интегрируя, находим разложение:

$$F(z, w) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} -\frac{1}{4\pi^2} \iint_{C \times \Gamma} \frac{F(\zeta, \tau) d\zeta d\tau}{(\zeta - z_0)^{h+1} (\tau - w_0)^{m+1}} (z - z_0)^h (w - w_0)^m. \quad (5.4:4)$$

Если  $M(r, \rho)$  есть  $\max |F(\zeta, \tau)|$  на  $\bar{C} \times \bar{\Gamma}$ , то для коэффициентов  $A_{hm}$  ряда получаем оценку:

$$|A_{hm}| = \left| -\frac{1}{4\pi^2} \iint_{C \times \Gamma} \frac{F(\zeta, \tau) d\zeta d\tau}{(\zeta - z_0)^{h+1} (\tau - w_0)^{m+1}} \right| \leq \frac{M 2\pi r 2\pi \rho}{4\pi^2 r^{h+1} \rho^{m+1}} = \frac{M}{r^h \rho^m},$$

откуда

$$|A_{hm} (z - z_0)^h (w - w_0)^m| < M \left( \frac{|z - z_0|}{r} \right) \left( \frac{|w - w_0|}{\rho} \right)^m$$

Так как ряд  $\sum_{h=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|z - z_0|^h}{r^h} \frac{|w - w_0|^m}{\rho^m}$  сходится при  $|z - z_0| < r$

и  $|w - w_0| < \rho$ , то отсюда следует, что ряд (5.4:4) сходится абсолютно и равномерно внутри четырехмерной области, представляющей произведение двух кругов  $|z - z_0| < r$  и  $|w - w_0| < \rho$ . Коэффициенты  $A_{hm}$ , по формулам (5.4:2), могут быть представлены в виде

$$A_{hm} = -\frac{1}{4\pi^2} \iint_{C \times \Gamma} \frac{F(\zeta, \tau) d\zeta d\tau}{(\zeta - z_0)^{h+1} (\tau - w_0)^{m+1}} = \frac{1}{h!m!} \frac{\partial^{h+m} F(z_0, w_0)}{\partial z^h \partial w^m}$$

Итак, окончательно, для аналитической функции двух переменных  $z$  и  $w$  получаем тейлоровское разложение:

$$F(z, w) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{h!m!} \frac{\partial^{h+m} F(z_0, w_0)}{\partial z^h \partial w^m} (z - z_0)^h (w - w_0)^m. \quad (5.4:5)$$

Пользуясь абсолютной сходимостью этого ряда, мы можем представить его также в одном из следующих двух видов:

$$\begin{aligned} F(z, w) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^{k+m} F(z_0, w_0)}{\partial z^k \partial w^m} (w - w_0)^m \right] (z - z_0)^k = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^{k+m} F(z_0, w_0)}{\partial z^k \partial w^m} (z - z_0)^k \right] (w - w_0)^m \end{aligned}$$

Выражения в квадратных скобках представляют, очевидно, частные производные функции  $F(z, w)$ , а именно:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^{k+m} F(z_0, w_0)}{\partial z^k \partial w^m} (w - w_0)^m = \frac{\partial^k F(z_0, w)}{\partial z^k}$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^{k+m} F(z, w_0)}{\partial z^k \partial w^m} (z - z_0)^k = \frac{\partial^m F(z, w_0)}{\partial w^m}.$$

Поэтому найденные разложения могут быть также записаны в виде

$$F(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k F(z_0, w)}{\partial z^k} (z - z_0)^k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m F(z, w_0)}{\partial w^m} (w - w_0)^m.$$

Разумеется, каждое из них можно было бы получить и непосредственно, рассматривая  $F(z, w)$  как аналитическую функцию от  $z$  (при фиксированном  $w$ ) или как аналитическую функцию от  $w$  (при фиксированном  $z$ ).

5.5. Обращаясь к теории неявных функций, рассмотрим уравнение

$$F(z, w) = 0, \quad (5.5:1)$$

где  $F(z, w)$  — функция двух переменных, аналитическая в области  $|z - z_0| < r$ ,  $|w - w_0| < \rho$ . Пусть известно, что

$$F(z_0, w_0) = 0 \quad \text{и} \quad F(z_0, w) \neq 0.$$

При этих условиях имеет место следующее предложение, известное под именем *подготовительной теоремы Вейерштрасса*.

*Существует окрестность  $|z - z_0| < r' < r$ ,  $|w - w_0| < \rho' < \rho$ , в которой  $F(z, w)$  представляется в виде*

$$F(z, w) = [A_0(z) + \dots + A_{k-1}(z) w^{k-1} + w^k] \Phi(z, w), \quad (5.5:2)$$

где  $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z)$  — функции, аналитические при  $|z - z_0| < r'$ ,  $k$  — натуральное число, совпадающее с наименьшим порядком отличных от нуля производных  $\frac{\partial^n F(z_0, w_0)}{\partial w^n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), и  $\Phi(z, w)$  — функция, аналитическая в области  $|z - z_0| < r' < r$ ,  $|w - w_0| < \rho' < \rho$  и не обращающаяся здесь в нуль.

Из этой теоремы следует, что уравнение (5.5:1) в некоторой окрестности данной точки  $(z_0, w_0)$  эквивалентно уравнению

$$A_0(z) + A_1(z) w + \dots + A_{k-1}(z) w^{k-1} + w^k = 0, \quad (5.5:3)$$

алгебраическому относительно  $w$ .

Таким образом, подготовительная теорема Вейерштрасса сводит локальное изучение общего случая неявной функции  $w(z)$  к случаю неявной функции, заданной алгебраическим относительно  $w$  (но не относительно  $z$ ) уравнением.

Обращаясь к доказательству, мы установим сначала наличие  $k$  решений уравнения (5.5:1) в окрестности точки  $(z_0, w_0)$ , а затем покажем, что все эти решения удовлетворяют одному и тому же уравнению вида (5.5:3).

Рассмотрим функцию  $F(z_0, w)$ . Так как она не есть тождественный нуль, то среди производных  $\frac{\partial^n F(z_0, w_0)}{\partial w^n}$  имеются отличные от нуля. Пусть  $k$  ( $k \geq 1$ ) — наименьший порядок отличных от нуля производных. Тогда функция  $F(z_0, w)$  имеет  $k$ -кратный нуль в точке  $w_0$ . Выберем замкнутую окрестность  $|w - w_0| \leq \rho' < \rho$  точки  $w_0$  столь малой, чтобы  $F(z_0, w)$  не имела в ней нулей, отличных от  $w_0$ . Модуль  $|F(z_0, w)|$  в точках окружности  $\gamma'$ :  $|w - w_0| = \rho'$  имеет положительный минимум  $m$ . Если  $|z - z_0| \leq r' < r$  — замкнутая окрестность точки  $z_0$  столь малая, что для любой ее точки и для любого  $w \in \gamma'$  выполняется неравенство

$$|F(z, w) - F_k(z_0, w)| < m,$$

то, в силу теоремы Руше (см. п. 3.5) уравнения

$$F(z_0, w) = 0 \quad \text{и} \quad F(z, w) + [F(z, w) - F(z_0, w)] = F(z, w) = 0$$

(в последнем  $z$  произвольно фиксировано в замкнутом круге  $|z - z_0| \leq r'$ ) должны иметь одно и то же число корней внутри  $\gamma'$ , а именно,  $k$  корней. Итак, мы установили существование окрестностей  $|z - z_0| \leq r'$ ,  $|w - w_0| < \rho'$  таких, что для каждого  $z$ , принадлежащего первой из них, уравнение

$$F(z, w) = 0$$

имеет  $k$  корней (с учетом кратности) внутри второй окрестности (разумеется, оно может обладать еще и другими корнями, лежащими во внешности окружности  $|w - w_0| = \rho'$ ). Обозначая эти корни через  $w_j(z)$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ), составим многочлен относительно  $w$ , нулями которого являются  $w_j(z)$ :

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^k [w - w_j(z)] &= w^k - [w_1(z) + \dots + w_k(z)] w^{k-1} + [w_1(z) w_2(z) + \dots \\ &+ w_{k-1}(z) w_k(z)] w^{k-2} - \dots + (-1)^k w_1(z) \dots w_k(z) = \\ &= w^k + A_{k-1}(z) w^{k-1} + A_{k-2}(z) w^{k-2} + \dots + A_k(z) = P(z, w). \end{aligned} \quad (5.5:4)$$

Как известно из алгебры\*), коэффициенты  $A_j(z)$  связаны со степенными суммами

$$s_m(z) = w_1^m(z) + \dots + w_k^m(z)$$

следующими соотношениями:

$$s_m + s_{m-1} A_{k-1} + s_{m-2} A_{k-2} + \dots + m A_{k-m} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, k).$$

Отсюда вытекает, что каждый коэффициент  $A_j(z)$  выражается через степенные суммы  $s_m(z)$  в виде многочлена числовыми коэффициентами. Так, например,

$$A_{k-1}(z) = -s_1(z), \quad A_{k-2}(z) = \frac{1}{2} [s_1(z)]^2 - \frac{1}{2} s_2(z) \quad \text{и т. д.}$$

\*) См. А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, изд. 8, М., «Наука», 1965, § 52.

Поэтому аналитичность функций  $A_j(z)$  в некоторой окрестности точки  $z_0$  будет вытекать как следствие из аналитичности функций  $s_m(z)$  в той же окрестности.

Для вычисления последних функций воспользуемся формулой (3.5:1). По этой формуле интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} w^m \frac{\frac{\partial F(z, w)}{\partial w}}{F(z, w)} dw \quad (5.5:5)$$

(здесь  $z$  фиксировано в замкнутом круге  $|z - z_0| \leq r'$ ) равен сумме

$$w_1^m(z) + \dots + w_k^m(z) = s_m(z),$$

так как  $w_j(z)$  ( $j=1, 2, \dots, k$ ) суть все нули функции  $F(z, w)$  внутри  $\gamma'$ , а полюсов она (внутри  $\gamma'$ ) не имеет.

Но  $F(z, w)$  и  $\frac{\partial F(z, w)}{\partial w}$  являются аналитическими функциями  $z$  в круге  $|z - z_0| \leq r'$  при  $w$ , произвольно фиксированном на  $\gamma'$ . Кроме того,  $F(z, w)$  не обращается при этом в нуль (так как  $|F(z, w) - F(z_0, w)| < m$ , а  $|F(z_0, w)| \geq m$ , если  $|z - z_0| \leq r'$  и  $|w - w_0| = \rho'$ ). Поэтому функция

$w^m \frac{\frac{\partial F(z, w)}{\partial w}}{F(z, w)}$  является аналитической функцией от  $z$  в круге  $|z - z_0| < r'$  и притом равномерно ограниченной по модулю в силу того, что она непрерывна по совокупности переменных  $z$  и  $w$  на замкнутом множестве  $|z - z_0| \leq r'$ ,  $|w - w_0| = \rho'$ . Отсюда (см. следствие из теоремы Витали, п. 1.2) вытекает, что интеграл (5.5:5), а тем самым и степенная сумма  $s_m(z)$ , являются аналитическими функциями от  $z$  в круге  $|z - z_0| < r'$ . Поэтому и  $A_j(z)$  ( $j=0, 1, \dots, k-1$ ) суть аналитические функции в том же круге, т. е. все коэффициенты многочлена (5.5:4) являются аналитическими функциями от  $z$  в указанном круге.

Остается показать, что частное

$$\Phi(z, w) = \frac{F(z, w)}{P(z, w)}$$

есть аналитическая функция двух переменных  $z$  и  $w$  в области  $|z - z_0| < r'$ ,  $|w - w_0| < \rho'$ . С этой целью заметим, что при фиксированном  $z$  ( $|z - z_0| < r'$ )  $F(z, w)$  и  $P(z, w)$  являются аналитическими функциями от  $w$  в круге  $|w - w_0| < \rho'$ , обладающими в нем одними и теми же нулями:  $w_j(z)$  ( $j=1, 2, \dots, k$ ). Следовательно,  $\Phi(z, w)$  при любом  $z$  ( $|z - z_0| < r'$ ) есть не обращающаяся в нуль аналитическая функция от  $w$  в круге  $|w - w_0| < \rho'$ .

Так как для  $|z - z_0| \leq r'$  корни  $w_j(z)$  ( $j=1, \dots, k$ ) уравнения  $F(z, w) = 0$  лежат внутри круга  $|w - w_0| < \rho'$ , т. е.  $|w_j(z) - w_0| < \rho'$ , то функция  $P(z, w)$  не обращается в нуль, если  $|z - z_0| < r'$  и  $|w - w_0| = \rho'$ . Фиксируем произвольное  $r''$ ,  $0 < r'' < r'$ . Функции  $A_j(z)$  ( $j=0, 1, \dots, k-1$ ) являются аналитическими в круге  $|z - z_0| < r''$ ; поэтому они непрерывны в замкнутом круге  $|z - z_0| \leq r''$ , а следовательно, функция  $P(z, w)$  непрерывна на замкнутом множестве  $|z - z_0| \leq r''$ ,  $|w - w_0| \leq \rho'$ . Отсюда вытекает, что существует круговое кольцо  $\rho_1 \leq |w - w_0| \leq \rho'$ , столь узкое, что  $P(z, w)$  не обращается в нуль для всех  $z$  и  $w$ , принадлежащих множеству  $|z - z_0| \leq r''$ ,  $\rho_1 \leq |w - w_0| \leq \rho'$ .

Пусть  $\rho''$  — произвольное число, заключенное между  $\rho_1$  и  $\rho'$ . Тогда

$$\Phi(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau - w_0| = \rho''} \frac{\Phi(z, \tau)}{\tau - w} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau - w_0| = \rho''} \frac{F(z, \tau)}{P(z, \tau)(\tau - w)} d\tau$$

для  $|z - z_0| \leq r''$  и  $|w - w_0| < \rho''$ . Функция  $\frac{F(z, \tau)}{P(z, \tau)(\tau - w)}$  при фиксированных  $\tau$  и  $w$  представляет частное двух аналитических функций от  $z$  и, следовательно, также является аналитической функцией от  $z$  ( $P(z, \tau) \neq 0$ ). Далее, для  $w$ , по-прежнему фиксированного в круге  $|w - w_0| < \rho''$ , а  $z$ , пробегающего замкнутый круг  $|z - z_0| \leq r''$ , и  $\tau$ , пробегающего окружность  $|\tau - w_0| = \rho''$ , числитель и знаменатель рассматриваемой дроби суть непрерывные функции от  $z$  и  $\tau$ , и так как знаменатель дроби не обращается в нуль, то модуль дроби остается ограниченным. Отсюда, в силу известного следствия из теоремы Витали (п. 1.2), вытекает, что  $\Phi(z, w)$  есть аналитическая функция от  $z$  в круге  $|z - z_0| < r''$  для каждого  $w$  из круга  $|w - w_0| < \rho''$ .

Покажем, наконец, что она является непрерывной по совокупности переменных  $z$  и  $w$  в указанных кругах. Для этого заметим, что функция  $\frac{F(z, \tau)}{P(z, \tau)(\tau - w)}$  непрерывна по совокупности переменных  $z$ ,  $\tau$  и  $w$ , если  $|z - z_0| \leq r''$ ,  $|\tau - w_0| = \rho''$  и  $|w - w_0| \leq \rho_2 < \rho''$ . Последние условия характеризуют замкнутое множество (шестимерного пространства); поэтому рассматриваемая функция эта будет и равномерно непрерывной, так что для любого  $\varepsilon > 0$  будем иметь:

$$\left| \frac{F(z', \tau)}{P(z', \tau)(\tau - w')} - \frac{F(z, \tau)}{P(z, \tau)(\tau - z)} \right| < \frac{2\varepsilon}{\rho''},$$

если

$$|z - z_0| < r'', \quad |w - w_0| < \rho_2, \quad |\tau - w_0| = \rho''$$

и

$$|z' - z| < \delta(\varepsilon), \quad |w' - w| < \delta(\varepsilon).$$

Поэтому при указанных условиях

$$\begin{aligned} |\Phi(z', w') - \Phi(z, w)| &= \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau - w_0| = \rho''} \left[ \frac{F(z', \tau)}{P(z', \tau)(\tau - w')} - \frac{F(z, \tau)}{P(z, \tau)(\tau - w)} \right] d\tau \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак,  $\Phi(z, w) = \frac{F(z, w)}{P(z, w)}$  есть функция, непрерывная по совокупности переменных в области  $|z - z_0| < r''$ ,  $|w - w_0| < \rho''$  и аналитическая по каждому из переменных  $z$  и  $w$ . Следовательно, это — аналитическая функция двух переменных:  $z$  и  $w$ . Остается заметить, что  $r''$  и  $\rho''$  могут быть взяты соответственно сколь угодно близкими к  $r'$  и  $\rho$ .

Мы получили в конечном счете, что при  $|z - z_0| < r'$  и  $|w - w_0| < \rho'$  функция  $F(z, w)$  представляется в виде

$$F(z, w) = [A_0(z) + A_1(z)w + \dots + A_{k-1}(z)w^{k-1}] \Phi(z, w),$$

где  $A_j(z)$  — функции, аналитические в круге  $|z - z_0| < r'$ , а  $\Phi(z, w)$  — функция двух переменных, аналитическая в области  $|z - z_0| < r'$ ,  $|w - w_0| < \rho'$  и не обращающаяся в нуль. Подготовительная теорема Вейерштрасса доказана. Из нее немедленно вытекает следующее важное предложение.



**Теорема о неявных функциях.** Если  $F(z, w)$  — функция двух переменных, аналитическая в области  $|z - z_0| < r$ ,  $|w - w_0| < \rho$  и удовлетворяющая условиям

$$F(z_0, w_0) = 0, \quad \frac{\partial F(z_0, w_0)}{\partial w_0} \neq 0,$$

то в некоторой окрестности  $|z - z_0| < r'$ ,  $|w - w_0| < \rho'$  точки  $(z_0, w_0)$  уравнение  $F(z, w) = 0$  имеет для каждого  $z$  один и только один корень  $w(z)$ . Этот корень является однозначной аналитической функцией в круге  $|z - z_0| < r'$  и представляет неявную функцию, определяемую уравнением  $F(z, w) = 0$  и дополнительным условием  $w(z_0) = w_0$ .

Для доказательства достаточно сослаться на подготовительную теорему Вейерштрасса, в силу которой  $F(z, w)$  в данном случае ( $k = 1$ ) имеет вид

$$F(z, w) = [A_0(z) + w] \Phi(z, w),$$

где  $\Phi(z, w) \neq 0$ . Следовательно, для  $|z - z_0| < r'$  и  $|w - w_0| < \rho'$  (числа  $r'$  и  $\rho'$  получаются из доказательства предыдущей теоремы) уравнение

$$F(z, w) = 0$$

эквивалентно следующему:

$$A_0(z) + w = 0,$$

откуда и получаем:

$$w = w(z) = -A_0(z).$$

Так как первоначально данное уравнение удовлетворяется при  $z = z_0$  и  $w = w_0$ , то и последнее уравнение должно удовлетворяться при этих значениях, т. е. имеем:

$$w_0 = w(z_0) = -A_0(z_0).$$

Теорема доказана.

Возвращаясь к общему случаю, рассмотрим уравнение

$$P(z, w) = A_0(z) + A_1(z)w + \dots + w^k = 0 \quad (k > 1).$$

Мы знаем, что для каждого  $z$ ,  $|z - z_0| < r'$ , это уравнение имеет  $k$  корней  $w_j(z)$  (различных или частично одинаковых), принадлежащих кругу  $|w - w_0| < \rho'$ .

Если для данного  $z_1 \neq z_0$  и одного из значений  $w_j(z_1) = w_1$  частная производная  $\frac{\partial P(z_1, w_1)}{\partial w_1}$  отлична от нуля, то, опираясь на теорему о неявных функциях, найдем аналитическую в окрестности точки  $z_1$  функцию  $w(z)$ , удовлетворяющую уравнению  $P(z, w) = 0$  (а следовательно, и первоначальному уравнению  $F(z, w) = 0$ ) и обращающуюся в  $w_1$  при  $z = z_1$ .

Вычисляя  $\frac{\partial P(z, w)}{\partial w}$ , находим:

$$\frac{\partial P(z, w)}{\partial w} = A_1(z) + 2A_2(z)w + \dots + kw^{k-1}.$$

Следовательно, теорему о неявных функциях мы не сможем применять лишь для тех пар значений  $z$  и  $w$ , для которых одновременно выполняются два уравнения:

$$\begin{aligned} A_0(z) + A_1(z)w + \dots + w^k &= 0, \\ A_1(z) + 2A_2(z)w + \dots + (k-1)A_{k-1}(z)w^{k-2} + kw^{k-1} &= 0. \end{aligned}$$

Исключая отсюда  $w$ , получим дискриминант уравнения  $P(z, w) = 0$  в виде \*)

$$D = D(z) = \begin{vmatrix} k & s_1 & s_2 & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_k \\ s_{k-1} & s_k & s_{k+1} & s_{2k-2} \end{vmatrix} = 0,$$

где  $s_m = s_m(z)$  — степенные суммы, представляющие, как мы видели выше, аналитические функции от  $z$  в рассматриваемой окрестности.

Отсюда следует, что теорему о неявных функциях можно прилагать к любой точке  $z_1$ , для которой  $D(z_1) \neq 0$ , и к любому из соответствующих значений  $w_j(z_1)$  ( $j = 0, 1, \dots, k-1$ ).

*A priori* имеются две возможности:  $D(z) \equiv 0$  и  $D(z) \neq 0$ . В первом случае мы не сможем опираться непосредственно на теорему о неявных функциях ни для одной пары точек  $z, w_j(z)$ . Во втором случае можно будет указать столь малую окрестность точки  $z_0$ , в которой  $D(z) \neq 0$  всюду, за исключением самой точки  $z_0$ . Для любой точки  $z_1$  этой окрестности все корни  $w_j(z_1)$  ( $j = 0, 1, \dots, k-1$ ) будут различны, и в окрестности точки  $z_1$  будем иметь  $k$  аналитических функций  $w_j(z)$ , — однозначных ветвей функции  $w(z)$ , — удовлетворяющих данному уравнению и обращающихся соответственно в  $w_j(z_1)$  при  $z = z_1$ .

Здесь мы ограничимся этими замечаниями. Более подробное исследование будет предпринято нами позднее, в связи с изучением алгебраических функций (см. гл. восьмую). Сейчас же иллюстрируем изложенную только что теорию на простейшем примере, когда  $k = 2$ , т. е.

$$F(z_0, w_0) = 0, \quad \frac{\partial F(z_0, w_0)}{\partial w_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 F(z_0, w_0)}{\partial w_0^2} \neq 0.$$

Примем для простоты, что  $z_0 = w_0 = 0$  (к этому случаю немедленно придем путем замены  $z$  на  $z' + z_0$  и  $w$  на  $w' + w_0$ ). Тогда, по предварительной теореме Вейерштрасса, уравнение  $F(z, w)$  будет эквивалентно следующему:

$$A_0(z) + A_1(z)w + w^2 = 0,$$

где  $A_0(z)$  и  $A_1(z)$  — функции, аналитические в некоторой окрестности точки  $z = 0$ :  $|z| < r'$ .

При  $z = 0$  это уравнение должно иметь двойной корень, равный нулю. Поэтому

$$A_0(0) = 0 \quad \text{и} \quad A_1(0) = 0.$$

Дискриминант уравнения получается путем исключения  $w$  из двух уравнений:

$$A_0(z) + A_1(z)w + w^2 = 0$$

и

$$A_1(z) + 2w = 0$$

и имеет вид

$$D(z) = [A_1(z)]^2 - 4A_0(z) = 0.$$

Если  $D(z) \equiv 0$ , то общая теорема о неявных функциях неприменима. Но в этом случае данное уравнение может быть записано в виде

$$\left[ w + \frac{1}{2} A_1(z) \right]^2 = 0,$$

\*) См. А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, изд. 8, М., «Наука», 1965, § 54.

откуда  $w = -\frac{1}{2} A_1(z)$ . Мы получили здесь однозначную аналитическую функцию.

Пусть теперь  $D(z) \not\equiv 0$ . Так как  $D(0) = [A_1(0)]^2 - 4A_0(0) = 0$ , то мы можем указать такую окрестность начала координат  $|z| < r$ , что в ней  $D(z)$  не будет иметь нулей при  $z \neq 0$ . Если  $z_1$  — точка этой окрестности, для определенности удовлетворяющая условию  $|z_1| < \frac{r}{2}$ , то в круге  $|z - z_1| < \frac{r}{2}$  коэффициенты  $A_0(z)$  и  $A_1(z)$  будут аналитическими функциями,  $D(z) \neq 0$  и, следовательно, мы получим две однозначные аналитические ветви функции  $w(z)$ , выражаемые формулой

$$w_{1,2}(z) = -\frac{1}{2} A_1(z) + \frac{1}{2} \sqrt{D(z)},$$

причем каждая ветвь  $w_1(z)$  и  $w_2(z)$  соответствует определенной ветви корня  $\sqrt{D(z)}$ . Что касается поведения  $w(z)$  в начале координат, то здесь возможны два случая, в зависимости от того, будет ли начало координат нулем четной или нечетной кратности для  $D(z)$ .

В первом случае разложение  $D(z)$  имеет вид

$$D(z) = a_{2m} z^{2m} + a_{2m+1} z^{2m+1} + \dots \quad (a_{2m} \neq 0),$$

откуда

$$\sqrt{D(z)} = \sqrt{a_{2m}} (z^m + \dots)$$

и

$$w(z) = -\frac{1}{2} A_1(z) + \sqrt{a_{2m}} (z^m + \dots).$$

Мы получаем две однозначные аналитические ветви функции  $w(z)$  в окрестности начала координат.

Во втором случае

$$D(z) = a_{2m-1} z^{2m-1} + a_{2m} z^{2m} + \dots \quad (a_{2m-1} \neq 0),$$

откуда

$$\sqrt{D(z)} = \sqrt{a_{2m-1}} z^{\frac{2m-1}{2}} (1 + \dots)$$

и

$$w(z) = -\frac{1}{2} A_1(z) + \sqrt{a_{2m-1}} z^{\frac{2m-1}{2}} (1 + \dots).$$

Получаем одну двухзначную в любой сколь угодно малой окрестности начала координат функцию, для которой начало координат служит алгебраической точкой разветвления первого порядка.

## ЛИТЕРАТУРА

### 1. Учебники и сборники задач по теории аналитических функций одного переменного

1. Волковський Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г., Сборник задач по теории функций комплексного переменного, М., 1961.
2. Гурвиц А., Теория аналитических и эллиптических функций, перев. с 3-го нем. изд. Ю. В. Икорникова, под ред. Н. Е. Кочина, Л.—М., 1933.
3. Гурса Э., Курс математического анализа, т. II, Теория аналитических функций, дифференциальные уравнения. Перев. с французского А. И. Некрасова, под ред. Б. К. Млодзеевского, просмотрен и переработан по 5-му франц. изд. В. В. Степановым, 3-е изд., М.—Л., 1936 (гл. XIII—XVII).
4. Евграфов М. А., Аналитические функции, М., 1965.
5. Курант Р., Геометрическая теория функций комплексного переменного, перев. с 3-го нем. изд. Ю. В. Икорникова, под ред. Н. Е. Кочина, Л.—М., 1934.
6. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, изд. 3-е, испр., М., 1965.
7. Маркушевич А. И., Элементы теории аналитических функций, М., 1944.
8. Маркушевич А. И., Краткий курс теории аналитических функций, 3 изд., испр. и доп., М., 1966.
9. Поля Г. и Сеге Г., Задачи и теоремы из анализа, ч. I, перев. с нем. Д. А. Райкова, изд. 2-е, М., 1956.
10. Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, изд. 10-е, М., 1960.
11. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, ч. 2, изд. 6-е, М., 1956.
12. Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, т. I, Основные понятия и принципы, Перев. с рум. К. Бернштейна, М., 1962.
13. Титчмарш Е., Теория функций, перев. с англ. В. А. Рохлина, М.—Л., 1951.
14. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, ч. I, Основные операции анализа, перев. с англ. под ред. Ф. В. Широкова, изд. 2-е, М., 1963.
15. Фукс Б. А. и Шабат Б. В., Функции комплексного переменного и некоторые их приложения, изд. 3-е, М., 1964.
16. Эрмит Ш., Курс анализа, перев. В. М. Озерского с 4-го франц. изд., под ред. Н. М. Гюнтера, Л.—М., 1936.
17. Behnke H. und Sommer F., Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen veränderlichen, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1962.
18. Bieberbach L., Lehrbuch der Funktionentheorie, B. I, Elemente der Funktionentheorie, 3 Aufl., Leipzig — Berlin, 1930.
19. Carathéodory C., Funktionentheorie, B. I, Basel, 1950.
20. Dienes P., The Taylor series. An introduction to the theory of functions of a complex variable, Oxford, 1931.

21. D i n g h a s A., Vorlesungen über Funktionentheorie, Berlin — Göttingen — Geidelberg, 1961.
22. F a v a r d J., Cours d'analyse de l'École polytechnique, t. II. Représentations. Functions analytiques, Paris, 1960.
23. J o r d a n C., Cours d'analyse de l'École polytechnique, 3 éd, t. II, Calcul intégral, Paris, 1913 (ch. VI—VIII).
24. К н о п п К., 1) Funktionentheorie, T. I, Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen, 6 Aufl., Berlin, 1944; 2) то же, T. II, Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie, 6 Aufl., Berlin, 1944; 3) Aufgabensammlung zur Funktionentheorie, T. I, Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie, 3 Aufl., Berlin, 1944; 4) то же, T. II, Aufgaben zur höheren Funktionentheorie, 3 Aufl., Berlin, 1944.
25. L i t t l e w o o d J. E., Lectures on the theory of functions Oxford, 1944.
26. M i l l o u x H., Principes methodes générales, t. I, F. I [Traité de théorie des fonctions publié sous la direction de M. Gaston Julia], Paris, 1953.
27. O s g o o d W. F., Lehrbuch der Funktionentheorie, B. I, 4 Aufl Leipzig — Berlin, 1923.
28. P i c a r d E., Traité d'analyse, t. II, Fonctions harmoniques et fonctions analytiques, Introduction à la théorie des équation différentielles, Intégrales abéliennes et surfaces de Riemann, 3 éd., Paris, 1927.
29. S a k s S. and Z y g m u n d A., Analytic Functions, transl. by E. J. Scott, Warszawa — Wrocław, 1952.
30. V a l i r o n G., Cours d'analyse mathématique, t. I, Théorie des fonctions, 2 éd. Paris, 1948.

## II. Монографии по отдельным вопросам

### А. История теории аналитических функций

М а р к у ш е в и ч А. И., Очерки по истории теории аналитических функций, М.—Л., 1951.

### Б. Дробно-линейные преобразования

1. Ж ю л и а Г., Геометрические принципы анализа, ч. I, перев. с франц. А. И. М а р к у ш е в и ч а, М.—Л., 1935.
2. Ф о р д Л. Р., Автоморфные функции, перев. с англ М. М. Г р и н б л ю м а и В. С. Р а б и н о в и ч а, под ред. М. М. Г р и н б л ю м а, М.—Л., 1936.
3. F a t o u P., Fonctions automorphes (Théorie des fonctions algébriques d'une variable et des transcendentes qui s'y rattachent, par MM. P. Appell, É. Goursat, 2 éd., t. II), Paris, 1930 (ch. XIII, ch. XIV).

### В. Практика конформных отображений

1. К а н т о р о в и ч Л. В. и К р ы л о в В. И., Приближенные методы высшего анализа, изд. 5-е, М.—Л., 1962.
2. К о п п е н ф е л ь с В. и Ш т а л ь м а н Ф., Практика конформных отображений, перев. с нем. К. С. Ф и ш м а н а, под ред. Л. И. В о л к о в с к о г о, М., 1936.

### Г. Интеграл типа Коши

1. Г о л у б е в В. В., Однозначные аналитические функции, Автоморфные функции, М., 1961.
2. М у с х е л и ш в и л и Н. И., Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике, изд. 2-е, М., 1962.

3. Привалов И. И., *Граничные свойства аналитических функций*, изд. 2-е, М.—Л., 1950.

*Д. Степенные ряды. Ряды Дирихле*

1. Зигмунд А., *Тригонометрические ряды*, перев. с англ. О. С. Ивашева-Мусатова, под ред. Н. К. Барри, тт. I, II, М., 1965.
2. Bernstein V., *Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet*, Paris, 1933.
3. Hadamard J. et Mandelbrojt S., *La série de Taylor et son prolongement analytique*, 2 éd., Paris, 1926.
4. Landau E., *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, 2 Aufl., Berlin, 1929.

*Е. Принцип компактности*

- Монтель П., *Нормальные семейства аналитических функций*, перев. с франц. В. М. Шепелева, М.—Л., 1936.

*Ж. Теорема Рунге*

1. Montel P., *Leçons sur les séries de polynômes à une variable complexe*, Paris, 1926.
2. Painlevé P., *Sur le développement des fonctions analytiques* (Note I в книге: É. Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réelles et le développement en séries de polynômes*, 2 éd., Paris, 1928).
3. Смирнов В. И. и Лебедев Н. А., *Конструктивная теория функций комплексного переменного*, М.—Л., 1964.
4. Уолш Дж. Л., *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области*, перев. с англ. А. А. Гончара и С. Я. Хавинсона, М., 1961.

*З. Теория вычетов*

- Lindelöf E., *Le calcul de résidus et ses applications à la théorie des fonctions*, Paris, 1905.

*И. Интерполирование*

1. Гельфонд А. О., *Исчисление конечных разностей*, изд. 3-е, М., 1966.
2. Гончаров В. Л., *Теория интерполирования и приближения функций*, М., 1954.

*К. Функции многих переменных*

1. Бохнер С. и Мартин У. Т., *Функции многих комплексных переменных*, М., 1951.
2. Владимиров В. С., *Методы теории функций многих комплексных переменных*, М., 1964.
3. Osgood W. F., *Lehrbuch der Funktionentheorie*, B. II, 1-e Lieferung, 2 Aufl., 1929, Leipzig und Berlin.
4. Фукс Б. А., *Теория аналитических функций многих комплексных переменных*, М., 1962.
5. Эрве М., *Функции многих комплексных переменных. Локальная теория*, перев. с англ. Б. А. Фукса, М., 1965.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абеля вторая теорема 350  
— первая теорема 283  
— преобразование 33  
Абсолютно сходящееся бесконечное произведение 275  
— сходящийся ряд 30  
Адамара — Коши неравенство 246  
— — теорема 279  
— — формула 280  
Алгебраическая точка разветвления 171  
— — —, порядок 171  
Алгебры основная теорема 312  
Аналитическая функция 7, 86, 299  
— —, полюс 402  
— —, существенно особая точка 402  
— —, элемент 319  
Ангармоническое отношение 136  
Аргумент, главное значение 14  
— комплексного числа 14  
Аргумента принцип 425  
Арккосинус 189  
—, конформное отображение 192  
Арктангенс 192  
—, конформное отображение 193  
А-точка 305  
Аффикс 13
- Бернулли лемниската 315  
— софизм 179  
— числа 343  
Бесконечное произведение 273  
Бесконечно-связная область 56  
Бесконечность 62  
Биномиальная формула 302  
Больцано—Вейерштрасса принцип 22  
Бореля — Гейне лемма 61
- Вейерштрасса теорема 265  
— — подготовительная 472  
Вейерштрасса—Больцано принцип 22  
Вейерштрасса — Сохоцкого — Казорати теорема 405
- Витали теорема 371  
Внешняя точка 54  
Внутренняя точка 54  
Вторая теорема Абеля 350  
Вычет 416  
— логарифмический 424
- Гейне—Бореля лемма 61  
Геометрический смысл производной 90  
Геометрия Лобачевского 146  
Гиперболические функции 111  
Главная часть ряда Лорана 408  
Главное значение аргумента 14  
— — интеграла 256  
— — корня 18  
— — логарифма 178  
Гладкая кривая 196  
Голоморфная функция 86  
Граница множества 54  
Граничная точка 54  
Граничное значение 304  
Гурвица теорема 426
- Даламбера признак 31  
Даламбера—Эйлера уравнения 84  
Движение Лобачевского 147  
Двойное отношение 136  
Двойной ряд 36  
Действительная ось 13  
— часть 12  
Деление степенных рядов 339  
Дирихле ряд 382  
Дифференциал 80  
Дифференцируемая функция 79  
Длина кривой 196  
Долгота 66  
Дробно-линейная функция 93, 126  
— — —, конформное отображение 96  
Дробно-линейное отображение, круговое свойство 129
- Единичное отображение 127

- Жорданова кривая 47  
 Жуковского функция 155  
 — —, конформное отображение 158  
 Замкнутая кривая 47  
 — область 55  
 Замкнутое множество 42, 43  
 Замыкание множества 55  
 Звено ломаной 48  
 Зеркальное отражение 92, 140  
 Изолированная особая точка 400  
 Инверсия 140  
 Интеграл 200  
 —, главное значение 256  
 — Коши 239  
 — типа Коши 241  
 — — — несобственный 270  
 — Френеля 218  
 Интегральная теорема Коши 206, 228  
 — формула Коши 239  
 Интерполяционный многочлен 445  
 — — Лагранжа 449  
 — — Ньютона 450  
 — — Тейлора 448  
 — — Якоби 453  
 — ряд Ньютона 450  
 — — Якоби 454  
 Казорати — Сохоцкого — Вейер-  
 штрасса теорема 405  
 Кассини овал 315  
 Кеплера уравнение 467  
 Классический ряд Дирихле 382  
 Компактное множество 364  
 Комплексная плоскость 13  
 Комплексного переменного функция  
 20  
 Комплексное число 12  
 — —, аргумент 14  
 — —, модуль 14  
 — — несобственное 64  
 — — собственное 63  
 — — сопряженное 15  
 — —, тригонометрическая форма 14  
 Конечная плоскость 69  
 — точка кривой 47  
 Конечно-связная область 56  
 Континуум 48  
 Конформное отображение 74, 92  
 — — второго рода 92  
 Корень 17, 167  
 —, главное значение 18  
 Косеканс 161, 441  
 Косинус 109  
 —, конформное отображение 117  
 Котангенс 161, 438  
 Коши интеграл 239  
 — интегральная теорема 206, 228  
 — — формула 239  
 — критерий 25  
 — неравенство 245, 294  
 — признак 31  
 — теорема о разложимости в сте-  
 пенной ряд 297  
 Коши — Адамара неравенство 246  
 — — теорема 279  
 — — формула 280  
 Коши — Римана условия (уравне-  
 ния) 84  
 Кратная А-точка 305  
 — точка кривой 47  
 Кратный полюс 122, 403  
 Кривая гладкая 196  
 —, длина 196  
 — жорданова 47  
 — замкнутая 47  
 — кусочно-гладкая 197  
 — непрерывная 46  
 — непрямолинейная 196  
 — спрямляемая 196  
 —, уравнение 47  
 Критерий Коши 25  
 Круг сходимости 280  
 Круговое кольцо 377  
 — свойство дробно-линейного ото-  
 бражения 129  
 — — стереографической проекции  
 67  
 Кусочно-гладкая кривая 197  
 Лагранжа интерполяционный мно-  
 гочлен 449  
 — ряд 459  
 Лапласа преобразование 374  
 Лежандра многочлены 462  
 Лемниската 314  
 — Бернулли 315  
 Линейная функция 93  
 Лиувилля теорема 300  
 Лобачевского геометрия 146  
 — движение 147  
 — плоскость 146  
 — прямая 146  
 — точка 146  
 Логарифм 178, 188  
 —, главное значение 178  
 Логарифмическая точка разветвле-  
 ния 182  
 Логарифмический вычет 424  
 Локально-аналитическая функция  
 387



- Ломаная 48  
 Лорана ряд 377  
 — —, главная часть 408  
 — —, правильная часть 409  
 — теорема 379  
 Лузина пример 361  
 Лузина — Привалова теорема 304  
  
 Максимум модуля принцип 309  
 Мероморфная функция 121  
 — — трансцендентная 161  
 Мнимая единица 13  
 — ось 13  
 — часть 12  
 Мнимое число 13  
 Многозначная функция 165  
 — —, однозначная ветвь 166  
 Многолиственная функция 167  
 Многосвязная область 55  
 Многочлен 96  
 — интерполяционный 445  
 —, конформное отображение 97  
 — тригонометрический 162  
 Многочлены Лежандра 462  
 Множество, граница 54  
 — замкнутое 42, 43  
 —, замыкание 55  
 — компактное 364  
 — ограниченное 38  
 — открытое 52  
 —, предельная точка 37  
 — равномерно ограниченное 368  
 —, связная компонента 53  
 — связное 46  
 Модуль комплексного числа 14  
 Моногенная функция 79  
 Монтеля теорема 368, 398  
 Морера теорема 244  
 Муавра формула 17  
  
 Начальная точка кривой 47  
 Неопределенных коэффициентов метод 287  
 Непрерывная кривая 46  
 — функция 41, 72  
 Несобственное комплексное число 64  
 Несобственный интеграл типа Коши 270  
 Непрямая кривая 196  
 Неявная функция 468, 476  
 Нормальное семейство аналитических функций 370  
 Нуль рациональной функции 122  
 Ньютона интерполяционный многочлен 450  
 — — ряд 450  
  
 Область 52  
 — бесконечно-связная 56  
 — замкнутая 55  
 — конечно-связная 56  
 — многосвязная 55  
 — однолиственности 167  
 — односвязная 55  
 Обобщенно-непрерывная функция 73  
 Обратная функция 456  
 Обратное отображение 127  
 Обратные тригонометрические функции 189  
 Обращение ряда 457  
 Общая показательная функция 186  
 — степенная функция 183  
 Общий ряд Дирихле 382  
 Обыкновенный ряд Дирихле 382  
 Овал Кассини 315  
 Ограниченная последовательность 22  
 Ограниченное множество 38  
 Однозначная ветвь многозначной функции 166  
 Однолиственная функция 167  
 Однолиственности область 167  
 Односвязная область 55  
 Окрестность 21, 68  
 Основная теорема алгебры 312  
 Основной период показательной функции 104  
 Особая точка 319  
 — — изолированная 400  
 Остаточный член 447, 448  
 Ось действительная 13  
 — — мнимая 13  
 Открытое множество 52  
 Отображение 127  
 — единичное 127  
 — конформное 74, 92  
 — обратное 127  
 — тождественное 127  
  
 Параллельности угол 153  
 Первая теорема Абеля 283  
 Пикара теорема (большая) 407  
 Плоскость комплексная 13  
 — конечная 69  
 — Лобачевского 146  
 — проективная 70  
 — расширенная 69  
 Подготовительная теорема Вейерштрасса 472  
 Подпоследовательность 21  
 Подстановка ряда в ряд 337  
 Показатель ряда Дирихле 382  
 Показательная функция 102, 186  
 — —, конформное отображение 107

- Показательная функция, основной период 104  
 Полином 96  
 Полюс 122, 402  
 —, кратность 403  
 Порядок рациональной функции 123  
 — точки разветвления 171, 182  
 Последовательность 21  
 — ограниченная 22  
 —, предел 22  
 Правильная точка 319  
 — функция 86  
 — часть ряда Лорана 409  
 Предел последовательности 22  
 — функции 39  
 Предельная точка 21, 37  
 Преобразование Абеля 33  
 — Лапласа 374  
 Привалова — Лузина теорема 304  
 Признак Даламбера 31  
 — Коши 31  
 Прингсхейма теорема 326  
 Принцип аргумента 425  
 — Больцано — Вейерштрасса 22  
 — максимума модуля 309  
 Проективная плоскость 70  
 Проекция стереографическая 65  
 Произведение бесконечное 273  
 Производная 79  
 —, геометрический смысл 90  
 — формальная 87  
 Простая А-точка 305  
 Простой полюс 122, 403  
 Прямая Лобачевского 146
- Равномерная непрерывность** 43  
 Равномерно ограниченное множество 368  
 — сходящийся ряд 258  
 — —, теорема Вейерштрасса 265  
 Радиальное граничное значение 304  
 Радиал 167  
 Радиус лемнискаты 314  
 Разветвления точка 171  
 — — алгебраическая 171  
 — — логарифмическая 182  
 Разделенная разность 451  
 Разложение на простейшие дроби 436  
 Разность разделенная 451  
 Расходящееся бесконечное произведение 273  
 Расходящийся ряд 30  
 Расширенная плоскость 69  
 Рациональная функция 121  
 — —, конформное отображение 124  
 — —, нуль 122
- Рациональная функция, полюс 122  
 — —, порядок 123  
 Регулярная точка 319  
 — функция 86  
 Рельеф 113  
 Римана — Коши условия (уравнения) 84  
 Рунге теорема 390  
 Руше теорема 425  
 Ряд 29  
 — двойной 36  
 — Дирихле 382  
 — Лагранжа 459  
 — Лорана 377  
 — Ньютона интерполяционный 450  
 —, обращение 457  
 — равномерно сходящийся 258  
 — расходящийся 30  
 — степенной 279  
 — сумма 29  
 — сходящийся 29  
 —, — абсолютно 30  
 — Тейлора 284  
 —, частичная сумма 29  
 — Якоби интерполяционный 454
- Связная компонента 53  
 Связное множество 46  
 Секанс 161, 437  
 Симметрия 140  
 Синус 109  
 —, рельеф 113  
 Собственное комплексное число 63  
 Сопряженные комплексные числа 15  
 Софизм Бернулли 179  
 Сохоцкого формулы 256  
 Сохоцкого — Казорати — Вейерштрасса теорема 405  
 Спряжяемая кривая 196  
 Степенная функция 89, 183  
 Степенной ряд 279  
 — —, деление 339  
 — —, круг сходимости 280  
 — —, неравенства Коши для коэффициентов 294  
 — —, пример Лузина 361  
 — —, теорема единственности 285  
 — —, — — внутренняя 303  
 — —, — Коши о разложимости 297  
 Степень 19  
 —, конформное отображение 100  
 Стереографическая проекция 65  
 — —, круговое свойство 67  
 Сумма ряда 29  
 Существенно особая точка 402  
 Сходимости круг 280

- Сходящаяся последовательность 23  
 Сходящееся бесконечное произведение 273, 275  
 Сходящийся ряд 29  
 — — абсолютно 30  
 — — равномерно 258
- Тангенс 161, 164, 442  
 —, конформное отображение 165  
 Таубера теорема 355  
 Тейлора интерполяционный многочлен 448  
 — ряд 284  
 Тождественное отображение 127  
 Точка внешняя 54  
 — внутренняя 54  
 — граничная 54  
 — кривой 46  
 — — конечная 47  
 — — кратная 47  
 — — начальная 47  
 — Лобачевского 146  
 — особая 319  
 — — изолированная 400  
 — правильная 319  
 — разветвления 171  
 — — алгебраическая 171  
 — — бесконечного порядка 182  
 — — конечного порядка 171  
 — — логарифмическая 182  
 — регулярная 319  
 — существенно особая 402  
 Трансцендентная целая функция 102  
 Трансцендентные мероморфные функции 161  
 Тригонометрическая форма комплексного числа 14  
 Тригонометрические функции 109, 161  
 Тригонометрический многочлен 162
- Угловое граничное значение 304  
 Угол параллельности 153
- Фату теорема 357  
 Фокусы лемнискаты 314  
 Формальная производная 87  
 Френеля интеграл 218  
 Функции гиперболические 111  
 — обратные тригонометрические 189  
 — трансцендентные мероморфные 161  
 — тригонометрические 109, 161
- Функция аналитическая 7, 86, 299  
 — голоморфная 86  
 — дифференцируемая 79  
 — дробно-линейная 93, 126  
 — Жуковского 155  
 — комплексного переменного 20  
 — — —, бесконечность 62  
 — логарифмическая 178, 188  
 — локально-аналитическая 387  
 — мероморфная 121  
 — многозначная 165  
 — многостная 167  
 — моногенная 79  
 — непрерывная 41, 72  
 — неявная 468, 476  
 — обобщенно-непрерывная 73  
 — обратная 456  
 — однолистная 167  
 — показательная 102, 186  
 — правильная 86  
 —, предел 39  
 —, равномерная непрерывность 43  
 — рациональная 121  
 — регулярная 86  
 — степенная 89, 183  
 — целая 96  
 — — линейная 93  
 — — трансцендентная 102
- Целая линейная функция 93  
 — трансцендентная функция 102  
 — функция 96
- Частичная сумма ряда 29  
 Числа Бернулли 343  
 — Эйлера 348  
 Число комплексное 12  
 — мнимое 18  
 — чисто мнимое 13
- Шварца лемма 317  
 Широта 66
- Эйлера формула 11, 109  
 Эйлера — Даламбера уравнения 84  
 Эйлеровы числа 348  
 Элемент (аналитической функции) 319  
 Эрмита формула 447
- Якоби интерполяционный многочлен 453  
 — — ряд 454