

Pure and applied mathematics
A series monographs and textbooks

**HOMOLOGY
AND
COHOMOLOGY
THEORY**

An approach based on Alexander — Spanier cochains

WILLIAM S. MASSEY

**Department of mathematics
Yale University
New Haven, Connecticut**

MARCEL DEKKER, INC.
New York and Basel 1978

У. Масси

Теория гомологий и когомологий

**Подход, основанный на применении коцепей
Александера — Спеньера**

*Перевод с английского
А. Ю. Воловикова*

*под редакцией
Е. Г. Скляренко*

Москва «Мир» 1981

Книга известного американского тополога, содержащая современное изложение теории гомологий и когомологий. Ее характеризует отсутствие формализма, простота и ясность изложения.

Изложение основано на систематическом употреблении модифицированных коцепей Александра — Спеньера и ассоциированных с ними цепей. Классические определения гомологий и когомологий фигурируют как способы их вычисления. Много внимания уделяется гомологиям и когомологиям локально конечных клеточных комплексов, а также локально компактных пространств, гомологическим и когомологическим умножениям, теории двойственности в топологических многообразиях.

Книга рассчитана на математиков различных специальностей, интересующихся теорией гомологий. Она доступна и для студентов, впервые знакомящихся с этой теорией.

Редакция литературы по математическим наукам

1702040000

М $\frac{20203-009}{041(01)-81}$ 9-81, ч. 1

© 1978 by Marcel Dekker, Inc.

© Перевод на русский язык, «Мир», 1981

Предисловие редактора перевода

Теория гомологий и когомологий как составная часть алгебраической топологии излагается во многих книгах, посвященных этому разделу математики. В настоящей книге эта теория вместе с ее традиционными применениями находит наиболее полное отражение, приобретая вполне заверченный вид. Много внимания уделяется различным вариантам гомологических и когомологических умножений и их роли в описании двойственности Пуанкаре — Лефшеца в топологических многообразиях. Книга существенно выделяется среди прочих не только полнотой изложения, но и рядом других особенностей. Остановимся кратко на некоторых из них.

Обычно принято начинать изложение с симплициальных или клеточных гомологий в категории полиэдров, которые интуитивно понятнее других в связи с их простой геометрической интерпретацией. За первоначальную простоту, однако, вскоре приходится платить доказательством независимости возникающей теории гомологий и когомологий от используемой в исходном определении триангуляции, т. е. теоремой о топологической инвариантности теории. Для доказательства, как правило, устанавливается изоморфизм между симплициальной теорией и некоторой более общей, чаще всего сингулярной, которая определена в более широких категориях топологических пространств, является топологически инвариантной по самому определению и находит в топологии множество применений независимо от симплициальной теории.

Автор предпочитает иной подход. При этом подходе сначала рассматривается общая теория и устанавливаются основные свойства гомологий и когомологий («аксиомы»), необходимые для развития как самой теории, так и ее многочисленных применений. Описание такой теории — это фактически теорема существования для гомологий и когомологий, удовлетворяющих некоторым основным требованиям — аксиомам. Классические определения в категориях симплициальных и клеточных полиэдров появляются как однозначные алгоритмы для вычисления групп гомологий и когомологий. В частности, автоматически подтверждается топологическая инвариантность классических гомологий и когомологий в категориях полиэдров. На таком

пути, очевидно, для гомологий и когомологий в категориях полиэдров могут быть получены и теоремы единственности. Отпадает необходимость дублировать доказательства некоторых типичных свойств гомологий и когомологий, рассматриваемых на разных этапах развития теории.

Оперируя с полиэдрами или многообразиями, можно пользоваться любым подходящим определением гомологий или когомологий, так как все они приводят к одной и той же теории. Однако на практике часто возникает необходимость рассматривать более общие топологические пространства (нередко даже в тех случаях, когда окончательные результаты касаются многообразий или полиэдров). Естественно, что число возможных определений (гомологий или когомологий) в общих категориях топологических пространств меньше. Известно, однако, что разные определения могут приводить к неэквивалентным теориям. Чаще всего за пределами категории полиэдров используется сингулярная теория, поскольку она отличается сравнительно простым описанием и имеет естественные связи с теорией гомотопий. Но применение сингулярной теории вполне оправдано лишь при существенных ограничениях на топологические пространства типа локальной стягиваемости или гомологической локальной связности. Без этих ограничений сингулярные гомологии и когомологии ведут себя «аномально» в том смысле, что не отражают топологическую структуру рассматриваемых пространств (см., например, [2], а также введение в [49]). Для объяснения этого явления нередко подобные пространства объявляют «патологическими». Однако такая точка зрения не может считаться оправданной по следующим причинам. Во-первых, во многих задачах о возможной локальной структуре исследуемых топологических пространств (множеств неподвижных точек и точек совпадения, прообразов точек при непрерывных отображениях, орбит точек и пространств орбит в топологических вопросах теории групп преобразований, в анализе и т. п.) заранее ничего не известно, поэтому трудно и даже невозможно четко обозначить границу, отделяющую допустимые топологические пространства от недопустимых. Во-вторых, во всех отмеченных выше случаях «хорошо» ведут себя когомологии Александрова — Чеха (или эквивалентные им когомологии Александера — Спеньера) и ассоциированные с ними гомологии, причем эти теории эквивалентны сингулярной всякий раз, когда ее применение не вызывает сомнений. Известно, что основное содержание теории когомологий в категории полиэдров за пределами этой категории (как правило, в категории паракомпактных хаусдорфовых пространств) остается в силе именно для когомологий Александрова — Чеха (или Александера — Спеньера), а не для сингулярных, причем некоторые факты (как например, свой-

ство вырезания) оказываются справедливыми даже в несколько усиленной форме (см. введение в [49], стр. 75—76 в [38], а также настоящую книгу). Это означает, что указанные выше аномалии объясняются не столько природой рассматриваемых пространств, сколько тем, что сингулярную теорию применяют за пределами ее естественных границ¹⁾.

В связи с указанными обстоятельствами автор рассматривает в качестве основной не сингулярную теорию, как это обычно принято, а теорию кохомологий Александера — Спеньера и дуальных к ним гоомологий. В этом состоит одна из особенностей настоящей книги.

Значительное место отведено компактным и локально компактными пространствам. Такие пространства встречаются во многих задачах, в которых сингулярная теория, как правило, оказывается неприменимой. Однако для развития теории гоомологий и кохомологий в категории локально компактных пространств отдельно от общего случая имеются и более существенные причины.

В отличие от кохомологий гоомологии по самой своей природе всегда связаны с компактностью: всякий цикл компактен, поэтому понятие компактности содержится уже в исходном понятии «гоомология». В любом определении гоомологий обязательно учитываются (явно или неявно) свойства пространства, связанные с компактностью, и любые обычные гоомологии некомпактных пространств (симплициальные, клеточные, сингулярные) — это гоомологии H_*^c с компактными носителями: гоомологии пары (X, A) естественным образом совпадают с прямым пределом $\varinjlim H_*(C, C \cap A)$ гоомологий, определяемых всеми компактными подмножествами $C \subset X$. Таким образом, гоомологии некомпактных пространств однозначно определяются гоомологиями их компактных подмножеств. Это означает, что построение подходящей теории гоомологий следует начинать с описания гоомологий в категории компактных пространств.

Известно также, что в категории локально компактных пространств и их собственных отображений наряду с обычной

¹⁾ Замечено, что аномальное поведение каких-либо кохомологий, как правило, сопутствует их отклонению от кохомологий, определяемых в теории пучков. Эти кохомологии (к поведению которых обычно не предъявляют никаких претензий) определены для любых топологических пространств и допускают естественное «сравнение» с любой конкретной теорией кохомологий. Обычно это сравнение оказывается изоморфизмом для паракомпактных пространств при условии, что прямой предел кохомологий (в смысле обследуемой теории) окрестностей любой точки равен кохомологиям точки. Это требование автоматически выполняется для кохомологий Александрова — Чеха (Александера — Спеньера) и определяет естественные границы эффективности сингулярной теории.

определена (и находит много полезных применений) специальная теория гомологий H_* и когомологий H_c^* — так называемая теория гомологий и когомологий второго рода. Например, ориентирующий цикл некомпактного n -мерного многообразия M принадлежит группе $H_n(M)$, в то время как фундаментальный класс когомологий — элемент группы $H_c^n(M)$. В случае локально конечного полиэдра гомологии H_* определяются бесконечными симплициальными цепями, а когомологии H_c^* — конечными (т. е. с компактными носителями) коцепями. В отличие от обычной ситуации комплекс целочисленных коцепей с компактными носителями свободен, а комплекс бесконечных цепей с коэффициентами в группе G получается применением к нему функтора $\text{Hom}(-, G)$. Хотя гомологии и когомологии второго рода уже давно используются в научной литературе, их теория до сих пор существовала лишь на «нелегальном» положении в том смысле, что она не была отражена ни в одной из монографий по алгебраической топологии. Краткое определение H_c^* в терминах сингулярных коцепей дано в трудах семинара Картана [17*], а в терминах коцепей Александра — Спеньера — в § 6 гл. 6 книги [51]. Весьма скудные сведения о группах H_* и H_c^* в категории полиэдров содержатся в упражнениях к гл. 6 и 8 в [14]. В настоящей книге дается первое систематическое описание этой теории.

Для всякого локально компактного пространства X группы $H_*(X)$ и $H_c^*(X)$ естественно изоморфны приведенным гомологиям и когомологиям одноточечной компактификации этого пространства. С другой стороны, для компактных пар (X, A) группы $H_*(X, A)$ и $H^*(X, A)$ естественно изоморфны соответственно $H_*(X \setminus A)$ и $H_c^*(X \setminus A)$. Таким образом, развитие теории второго рода в сущности эквивалентно развитию теории гомологий и когомологий в компактной категории. Однако переход к одноточечным компактификациям не всегда естествен (например, в категории полиэдров или многообразий, а также во всех тех случаях, когда гомологии и когомологии второго рода фигурируют одновременно с обычными), поэтому даваемое в первой части книги описание гомологий H_* и когомологий H_c^* в категории локально компактных пространств вполне оправдано.

Книга написана на высоком научном уровне, но без лишнего формализма. Изложение прозрачно и просто. Одно из основных определений когомологий появляется уже на первой странице текста. Необходимые для понимания предварительные сведения минимальны, причем некоторые из них освещаются автором (обычно в оригинальной трактовке и в подходящих местах книги). Категорные термины и конструкции вводятся по мере надобности лишь после описания соответствующих им конкретных примеров.

Однако читатель, безусловно, обратит внимание на то обстоятельство, что изложение теории начинается в книге не с гомологий, как это делается у всех других авторов, а с когомологий. Для этого также имеются естественные причины. Дело в том, что, как и в категории полиэдров, когомологии H_c^* локально компактных пространств с коэффициентами в группе Z целых чисел могут быть определены с помощью свободных коцепных комплексов. Это существенно упрощает задачу описания гомологий H_* : цепи с коэффициентами в группе G можно определить формально как результат применения к свободным коцепям функтора $\text{Hom}(-, G)$.

Внешний формализм в описании гомологий по сравнению с когомологиями в значительной степени объясняется самим развитием теории гомологий, в ходе которого выяснилось, что эта теория, в сущности, единственная удовлетворяющая всем вскрытым в ходе развития традиционным связям как с когомологиями, так и с классическими гомологиями. Хотя классические гомологии (будучи нагляднее и проще, чем когомологии) появились в математической литературе задолго до когомологий, в своем развитии за пределами категории полиэдров теория когомологий намного опередила теорию гомологий. Одна из причин состоит в том, что когомологии в значительной степени «устойчивы» по отношению к естественным заменам в их первоначальном определении: многие внешне несходные определения приводят к одной и той же теории когомологий, по крайней мере при естественных ограничениях на топологические пространства, легко формулируемых в каждом конкретном случае. Наоборот, гомологии обычно чувствительны к логическим нюансам в исходном определении. Например, в случае гомологий H_* Александрова — Чеха (группы $H_*(X)$ — обратные пределы обычных гомологий, определяемых нервами открытых покрытий пространства X) не менее употребительно и другое определение групп гомологий: $\check{H}_*^c = \varprojlim \check{H}_*(C)$, где C — компактные подмножества X .

Оказывается, что $\check{H}_*^c \neq \check{H}_*$. Аналогичный эффект наблюдается для гомологий пространства X , определяемых соответствующими вариантами цепей. Принято считать, что основным препятствием для развития теории гомологий в общих категориях топологических пространств служила неточность функтора обратного предела $\varprojlim$. Приведенный пример показывает, что затруднения возникают и при оценке роли компактности в определении гомологий. В частности, независимое от компактности определение гомологий некомпактных пространств не может привести к корректной конструкции гомологий.

При описании гомологий приходится тщательно учитывать и некоторые другие моменты, влияние которых мало заметно в

теории когомологий. Взаимное влияние различных трудностей, возникающих при построении гомологий, привело, с одной стороны, к появлению многих теорий, не только не эквивалентных друг другу, но и нередко отличающихся от симплициальных в категориях бесконечных полиэдров¹⁾, а с другой — к значительному отставанию теории гомологий от теории когомологий, в связи с чем обсуждаемая теория стала употребляться в литературе лишь в 60-е годы²⁾.

Развитию теории в правильном направлении способствовало наличие многих задач, в которых естественно появляются гомологии. Так, в топологических вопросах теории групп преобразований приходится «...использовать группы, играющие роль групп гомологий, а потому это предполагает наличие некоторой теории гомологий» (см. стр. 23 в [15*]). Некоторые из указанных задач можно использовать в качестве своеобразного критерия для опознания нужной теории гомологий среди других.

Типичный пример — задача описания двойственности в многообразиях. Если X — компактное подмногообразие ориентируемого многообразия M^n и $Y = M^n \setminus X$, то когомологии Александрова — Чеха $H^p(X)$ естественно изоморфны сингулярным гомологиям $H_{n-p}^c(M^n, Y)$ (двойственность Пуанкаре — Лефшеца, см. [51], [11]). Если $M^n = S^n$ — сфера, то $H_{q+1}^c(M^n, Y) = H_q^c(Y)$, откуда возникает соотношение $H^p(X) = H_q^c(Y)$, $p + q = n - 1$, известное как двойственность Понтрягина [1*] (для замкнутых множеств; в случае когда X — полиэдр, это двойственность Александера). В этих конструкциях гомологии и когомологии участвуют несимметрично. Естественно предположить, что аналогичные соотношения должны быть справедливы не только для когомологий Александрова — Чеха, но и для подходящей теории гомологий, и, в частности, что имеют место тождества $H_p(X) = H^q(Y)$. Поскольку справа — классические когомологии

¹⁾ Такие теории, в отличие от $\tilde{H}_*$ и $\tilde{H}_*^c$, могут удовлетворять всем аксиомам Стиррода — Эйленберга, включая точность (например, теория, развитая В. И. Кузьминовым и И. А. Шведовым в серии работ 70-х годов, см. [13*]). Следует иметь в виду, однако, что эти аксиомы однозначно характеризуют теорию лишь в категории конечных полиэдров. В более широких категориях к аксиомам Стиррода — Эйленберга добавляются новые утверждения, которые, как правило, сводятся к некоторым прозрачным соотношениям аддитивности и проливают дополнительный свет на природу соответствующих гомологий (а также когомологий).

²⁾ Обзор основных исследований, способствовавших созданию обсуждаемой теории гомологий, вместе с критикой их недостатков, был дан в 1969 г. в статье [49]. В этой же статье дано описание теории (гомологии и когомологии второго рода, гомологии H_*^c и когомологии Александрова — Чеха, связи этих теорий между собой и с другими теориями, некоторые применения). Более полный обзор см. в [13*] (здесь же приведен итог исследований за последние 10 лет). См. также статью Масси [38].

полиэдра Y , то указанные гомологии для X могут быть определены лишь единственным образом (с точностью до изоморфизма), по крайней мере для конечномерных метризуемых компактов.

Оказывается, соотношения двойственности $H_p(X) = H^q(Y)$ были получены Стинродом [55] еще в 1940 г. Позже (1951 г.) аналогичные соотношения были установлены К. А. Ситниковым [9*], который рассматривал их не только для компактных, но и для любых подмножеств $X \subset S^n$: $H_p^c(X) = H^q(Y)$ (двойственность Ситникова для незамкнутых множеств). Как Стинроду, так и Ситникову для получения этой двойственности пришлось определить «новые» гомологии (явный вид изоморфизма между гомологиями Стинрода и Ситникова указан в § 1 обзора [49]). Позже выяснилось, что именно эти гомологии и появляются в указанных выше задачах.

Природа гомологий (а также когомологий) в категории метризуемых компактов и, в частности, их связь с симплициальной теорией второго рода вскрываются также следующей конструкцией. Как известно, компакт X можно представить в виде обратного предела последовательности конечных полиэдров и их кусочно-линейных отображений. Можно считать, что первый полиэдр в последовательности — одна точка. Склеивая цилиндры отображений и присоединяя X в пределе, легко получить содержащий X стягиваемый компакт $\bar{X}$, для которого $\bar{X} \setminus X$ — локально конечный полиэдр. Для отображения $f: X \rightarrow Y$ построения можно выполнить так, что найдется продолжение $\bar{f}$ до отображения $\bar{X} \rightarrow Y$, ограничение которого на $\bar{X} \setminus X$ будет собственным отображением в $Y \setminus Y$. Из этих построений вытекает (см. [49], [11*]), что должны иметь место естественные изоморфизмы¹⁾ $H_n(X) = H_{n+1}(\bar{X} \setminus X)$, $H^n(X) = H_{c}^{n+1}(\bar{X} \setminus X)$.

Эта конструкция указывает на дефект, содержащийся в определении гомологий H_* компактных и локально компактных пространств, которое было предложено в известной работе Бореля и Мура [16*]. В категории конечных комплексов цепи и коцепи с коэффициентами в группе G всегда можно получить из целочисленных цепей или коцепей применением одного из функторов $\text{Hom}(-, G)$, $\otimes G$. В конструкции Бореля — Мура цепи с коэффициентами в группе G получаются из целочисленных цепей посредством операции $\otimes G$. Однако, как установлено в [49], в случае симплициальных гомологий второго рода эта операция отражает реальную связь между соответствующими цепями

¹⁾ Основываясь на этой идее и используя аксиоматический подход к гомологиям и когомологиям второго рода в категории полиэдров [11*], гомологии и когомологии в категории метризуемых компактов можно определить вообще без каких-либо цепей и коцепей.

лишь для конечно порожденных групп коэффициентов. В связи с этим выяснилось, что для бесконечно порожденных групп G гомологии Бореля — Мура в категории компактных пространств отличаются от гомологий Стиррода — Ситникова, а в категории локально конечных полиэдров — от симплициальных гомологий второго рода. Оказалось также, что с этим связаны и некоторые другие недостатки конструкции Бореля — Мура, замеченные ранее (например, гомологии с коэффициентами в G зависят, вообще говоря, от того, над каким кольцом группа G рассматривается в качестве модуля).

Значение гомологий Стиррода — Ситникова выяснилось не сразу. Например, в книге Стиррода и Эйленберга [14], где много внимания уделяется гомологиям и когомологиям компактных пространств и, в частности, обсуждению неудобств, вызванных неточностью функтора H_* , гомологии Стиррода даже не упоминаются. Первоначальные определения Стиррода и Ситникова, приспособленные к изучению двойственности в сфере, довольно сложны и не отвечают современным требованиям (отсутствуют гомологии пары и точная последовательность, в определении Стиррода неточно указан индекс размерности). В связи с этим предпринимались попытки найти другие способы описания гомологий.

Подход, близкий к основной конструкции Бореля — Мура, был изложен в [15*]. Описание гомологий в категории компактных пространств, свободное от указанных выше недостатков конструкции Бореля — Мура, предложено Милнором [41]. В этом описании цепи с коэффициентами в группе G получаются применением функтора $\text{Hom}(-, G)$ к некоторым свободным коцепям C^* . Однако определение коцепей (как и доказательство изоморфизма групп $H^*(C^*)$ когомологиям Александрова — Чеха) слишком искусственно, например, $C^p \neq 0$ при всех $p < 0$. Исправленный вариант теории Бореля — Мура предлагался в середине 60-х годов У. Масси. В каждом из этих описаний гомологическая последовательность пары начинается с «загадочной» группы H_{-1} , что свидетельствует о значительной их искусственности.

Тем не менее конструкция Бореля — Мура содержит в себе много ценного, ибо в ней сконцентрированы все основные идеи. В отличие от других, она позволяет свободно применять аппарат гомологической алгебры и теории пучков. С ее помощью могут быть определены гомологии с непостоянными коэффициентами, что очень существенно в некоторых приложениях. Работа Бореля и Мура [16*] оказала решающее влияние как на развитие теории гомологий, так и на ее многочисленные приложения. Окончательный вариант теории Бореля — Мура (вместе с наиболее типичными применениями) изложен в известной книге Бредона

[5], вышедшей в 1967 г. Наиболее полные результаты (в частности, двойственность Пуанкаре — Лефшеца) получаются для конечно порожденных коэффициентов.

Сравнительно простая конструкция гомологий H_* и когомологий H_*^c в категории локально компактных пространств и их собственных отображений (а также описание теории H_*^c) дана в работах [49], [11*], [12*]. В этой конструкции цепи и коцепи определяются независимо посредством перехода соответственно к обратному и прямому пределам по некоторой специальной системе покрытий. Целочисленные коцепи оказываются свободными, а цепи с коэффициентами в группе G автоматически совпадают с результатом применения к этим коцепям функтора $\text{Hom}(-, G)$. Как обычно, цепи и коцепи определены лишь в неотрицательных размерностях, поэтому $H_{-1} = 0$. В категории метризуемых компактов гомологии изоморфны группам Стиррода — Ситникова, а для произвольных компактных пространств — группам, определенным Милнором [41]. В категории локально конечных полиэдров возникающая теория эквивалентна классическим гомологиям и когомологиям второго рода. Для конечно порожденных коэффициентов теория гомологий изоморфна теории Бореля — Мура. Описание конструкции элементарно в том смысле, что укладывается в стандартные рамки теории цепных комплексов. Однако цепи и коцепи автоматически совпадают с сечениями определяемых ими вялых и мягких дифференциальных пучков, что позволяет оперировать средствами теории пучков без каких-либо искусственных ограничений. Это проявляется, например, в доказательстве двойственности Пуанкаре — Лефшеца, которая устанавливается при минимальных предположениях и без ограничений на коэффициенты.

Существенным недостатком конструкции является то, что определяющая цепи и коцепи пространства система покрытий строится неоднозначно, в связи с чем приходится доказывать независимость теории от выбора этой системы (т. е. фактически топологическую инвариантность). С этим связаны некоторые неудобства и в самом описании теории (основное из которых, как справедливо отмечает автор [38], проявляется в определении гомоморфизма гомологий, индуцированного непрерывным отображением). В отличие от этого цепи, рассматриваемые в настоящей книге, функториальны и потому значительно более удобны для систематического изложения теории. Вместе с тем конструкция из [49] не лишена и некоторых преимуществ. В частности, из описания цепей в терминах функтора $\varprojlim$ естественно вытекают некоторые предельные соотношения, учитывающие производный функтор $\varprojlim^1$ (например, связь между H_* и H_*^c). Возможность выбирать цепи различными способами

позволяет, в зависимости от конкретных условий, учитывать сопутствующую информацию (соображения размерности, в случае метризуемых пространств — соображения счетности и т. п.). Независимость определения цепей от коцепей автоматически снимает вопрос об инвариантности гомологий при замене кольца и позволяет рассматривать гомологии не только с постоянными коэффициентами. В общих чертах различие между двумя подходами напоминает различие между описаниями когомологий Александра — Чеха и Александра — Спеньера. Доказательство эквивалентности теорий, получающихся в обоих случаях, приводится в статье [13*].

Наличие нескольких существенно отличающихся друг от друга способов описания теории гомологий в конкретных случаях позволяет свободно выбирать полезные конструкции для получения наиболее полных результатов.

При переводе книги на русский язык некоторые обозначения заменены на более употребительные. В частности, обычные гомологии и когомологии всюду обозначаются через H^c и H^* , в то время как для гомологий и когомологий второго рода употребляются символы H_* и H_*^c . В оригинале обозначения, используемые при описании этих теорий (а также некоторых вспомогательных, как например, в гл. 5 и 6), одинаковы, поэтому автору приходится изменять их в тех местах, где эти теории фигурируют одновременно. Содержащиеся в книге ссылки на первоисточники не всегда точны (это относится не только к советским авторам), а отражаемые в этих ссылках сведения — не всегда наиболее полные и окончательные. Иногда они касаются второстепенных фактов и могут способствовать неправильному представлению об основном содержании цитируемой статьи. Во всех таких случаях в переводе сделаны необходимые примечания. Список литературы расширен и помещен в конце книги. Ссылки на дополнительную литературу помечены звездочкой.

К некоторым главам сделаны краткие добавления, содержащие сведения, существенно дополняющие материал этих глав, но по каким-то причинам выпавшие из поля зрения автора. В добавлении к гл. 4 указан окончательный вид формул универсальных коэффициентов и приведено краткое описание конструкции гомологий (вместе с некоторыми выводами), данной в [49].

В добавлении к гл. 5 устанавливается, что рассматриваемый в книге изоморфизм гомологий H_* и когомологий H_*^c локально компактных клеточных комплексов их клеточным гомологиям и когомологиям второго рода в случае регулярных комплексов имеет место без каких-либо ограничений на эти комплексы.

Добавление к гл. 6 посвящено аксиоматике. В теории гомологий и когомологий второго рода группы пары (X, A) совпа-

дают с группами пространства $X \setminus A$, благодаря чему она может быть изложена как «теория одного пространства». Значение этого факта, однако, в книге несколько преувеличено, ибо отвечающая такому подходу аксиоматика, отличаясь рядом преимуществ, обладает и существенным недостатком: она применима только к этому частному случаю и не имеет никаких аналогов в других категориях топологических пространств. В связи с этим при описании обычных когомологий в гл. 8 аксиомы уже не обсуждаются (хотя такое обсуждение и было бы полезным, см. § 8.9), а при описании гомологий с компактными носителями в гл. 9 автор даже вынужден перейти на стандартный язык гомологий пар, употребляемый в обычных аксиомах Стинрода — Эйленберга. В добавлении к гл. 6 приведены наиболее типичные списки аксиом и сформулированы соответствующие теоремы единственности.

Фигурирующие в описании гомологий и когомологий цепи и коцепи обычно образуют пучки, благодаря чему теория пучков находит в теории гомологий множество естественных приложений. Например, определяемые разными способами когомологии всегда изоморфны, если участвующие в их определении коцепи могут быть интерпретированы как сечения ациклических резольвент пучка коэффициентов. В добавлении к гл. 11 показывается, как с помощью теории пучков можно получить двойственность Пуанкаре — Лефшеца (а также ее следствия). Конструкция применима к любым многообразиям и позволяет получить соотношения между гомологиями и когомологиями с локально постоянными коэффициентами.

Книга полезна математикам разных специальностей, интересующимся теорией гомологий. Нестандартность подхода делает ее интересной не только для начинающих, но и для специалистов.

Е. Г. Скляренко

Предисловие

Эта книга содержит описание основных свойств и некоторых приложений теории гомологий и когомологий. Для ее понимания необходимы минимальные предварительные знания. Большая часть книги основана на курсе лекций, прочитанном автором несколько лет назад в Йельском университете.

Изложение систематически использует концепции Александера — Спеньера. Опыт работы со студентами показывает, что такой подход вполне пригоден для первоначального ознакомления с теорией гомологий и когомологий. Однако наша основная цель — *дать ясное систематическое описание теории когомологий типа Чеха — Александера — Спеньера и ассоциированной с ней теории гомологий.*

Известны теории гомологий и когомологий двух основных типов: сингулярная теория и теория Чеха — Александера — Спеньера. Хотя обе теории приводят к одинаковым результатам для топологических пространств с хорошим локальным строением, известно, что при рассмотрении более общих пространств теория когомологий типа Чеха — Александера — Спеньера имеет некоторые технические преимущества. Несмотря на эти преимущества, обычно считается, что с педагогической точки зрения для первоначального курса алгебраической топологии лучше использовать сингулярную теорию. Разумеется, это объясняется прежде всего тем фактом, что выявление и доказательство основных свойств в сингулярной теории гомологий не составляют большого труда. В противоположность этому описание теории гомологий, ассоциированной с когомологиями Чеха — Александера — Спеньера, до сих пор считалось довольно сложным. Одной из главных отличительных особенностей настоящей книги является существенное упрощение процедуры построения теории гомологий¹⁾, упоминаемой иногда как «теория гомологий Стиррода». При таких упрощениях эта теория уже может конкурировать с сингулярной и с педагогической точки зрения.

Книга состоит из трех частей. Первая часть касается когомологий и гомологий локально компактных пространств. Груп-

¹⁾ Эта процедура кратко описана в статье автора [38].

ны когомологий определяются посредством коцепей Александра — Спеньера с компактными носителями. Однако первоначальное определение Спеньера немного модифицируется: мы используем лишь конечнозначные коцепи, т. е. коцепи, принимающие конечное число различных значений. Это изменение не влияет на группы когомологий и имеет то преимущество, что в силу недавней теоремы Нёбелинга указанные группы целочисленных коцепей — свободные абелевы группы (подробности см. в гл. 4). Для определения цепей с коэффициентами в группе G остается лишь применить к группам целочисленных коцепей функтор $\text{Hom}(\_, G)$. Эта процедура в точности совпадает с процедурой получения сингулярных коцепей из сингулярных цепей, только цепи и коцепи меняются местами. Поскольку группы целочисленных коцепей — свободные абелевы группы, для локально компактного пространства и его замкнутого подпространства получается точная гомологическая последовательность пары. Возникающие таким образом группы гомологий (так называемые «гомологии Стинрода») отличаются от гомологий Чеха, определяемых как обратный предел гомологий нервов открытых покрытий пространства, и для локально конечных симплициальных комплексов совпадают с группами гомологий, определяемых «бесконечными» цепями.

Несмотря на неудовлетворительный характер широко известного определения групп гомологий Чеха пространств общего типа, это определение повторялось разными авторами и в не столь отдаленном прошлом. Мы надеемся, что настоящая книга приведет к распространению «правильного» определения, так что в повторении прежнего не будет нужды.

Другая существенная особенность теорий гомологий и когомологий, рассматриваемых в части I, состоит в том, что обе они в терминологии Стинрода и Эйленберга — «теории одного пространства». Это означает, что нет необходимости в рассмотрении относительных гомологий и когомологий пар: группы гомологий и когомологий пары (X, A) совпадают соответственно с группами гомологий и когомологий дополнения $X \setminus A$. Во многих отношениях эти теории гомологий и когомологий «одного пространства» проще, чем обычные, в которых фигурируют относительные группы пар. Аналог свойства вырезания превращается в тавтологию и не нуждается в рассмотрении. Ставится возможным интуитивное и прямое описание групп гомологий многообразий в старшей размерности без каких-либо предположений типа дифференцируемости, триангулируемости, компактности и даже паракомпактности.

Можно было бы рассматривать сингулярные когомологии с компактными носителями и двойственную теорию гомологий (основанную на рассмотрении бесконечных локально конечных

сингулярных цепей). Однако эти теории не обладают такими удобными свойствами, как теории, рассматриваемые в части I настоящей книги. Свойство вырезания для них удовлетворяется лишь в ослабленной форме, и поэтому они не приводят к «теории одного пространства».

В части II рассматриваются гомологии и когомологии произвольных пространств, и свойство локальной компактности уже не имеет какого-либо значения. Давно известно, что в случае общих пространств удовлетворительная теория когомологий может быть получена с помощью комплекса коцепей Александра — Спеньера (с любыми, а не обязательно компактными, носителями). Можно также использовать подкомплекс, состоящий из локально конечнозначных коцепей. Для паракомпактных хаусдорфовых пространств локально конечнозначные коцепи приводят к тем же самым группам когомологий (теорема Гордона). Локально конечнозначные коцепи обладают некоторыми преимуществами при рассмотрении $\cup$ - и $\cap$ -умножений.

Группы гомологий произвольного пространства X определяются в части II как прямой предел групп гомологий компактных подмножеств этого пространства. При этом, разумеется, предполагается, что для компактных пространств используются гомологии, определенные в части I. Таким образом, гомологии общих пространств — гомологии с компактными носителями.

В категории CW -комплексов определенные таким образом группы гомологий и когомологий совпадают с сингулярными. В общем случае эти группы обладают свойством вырезания в более сильной форме, чем сингулярные, и имеют перед ними ряд других технических преимуществ.

Следует подчеркнуть, что теории гомологий и когомологий, развиваемые в части II, уже не являются теориями одного пространства. Для получения точной последовательности пары необходимо рассматривать относительные группы. Однако на категории компактных пространств рассматриваемые в части I и части II теории совпадают.

Часть III посвящена одновременному использованию теорий гомологий и когомологий *обоих* видов (т. е. теорий из части I и из части II) в категории локально компактных пространств. Одновременное использование гомологий и когомологий двух видов приводит к различным типам $\cup$ - и $\cap$ -умножений. Два из таких $\cap$ -умножений оказываются существенными при описании соответствующих им вариантов двойственности Пуанкаре в некомпактных многообразиях. Доказательство обоих вариантов двойственности Пуанкаре, приводимое в последней главе, использует технику Милнора. Оно отличается простотой и проходит при минимальных предположениях. Доказываются также обобщения теоремы двойственности Александра и теорема

двойственности Ситникова. Теорема двойственности Ситникова связывает гомологии с компактными носителями произвольного подмножества компактного многообразия с когомологиями Александера — Спеньера его дополнения (подмножество не обязано быть ни открытым, ни замкнутым).

Материал последней главы убедит читателя в естественности параллельного использования гомологий и когомологий двух типов в категории локально компактных пространств.

По всему тексту рассеяны упражнения. Помимо того, что они дают возможность читателю проверять себя, они полезны для дальнейшего развития теории, для рассмотрения различных частных случаев и примеров, относящихся к обсуждаемой теме.

Предварительные требования. Формально для понимания первых нескольких глав не требуется ничего, кроме знания основ теоретико-множественной топологии и теории абелевых групп. Автор предполагает, что всякий изучающий подобную книгу в аудитории или самостоятельно читает и другие математические книги того же уровня. Поэтому для понимания некоторых дальнейших глав требуются более специальные знания. Например, перед чтением гл. 3 читателю рекомендуется узнать что-нибудь о CW -комплексах, если он еще не знаком с этим материалом. Для этого даны ссылки на стандартные учебники, из которых можно быстро почерпнуть необходимые сведения. Далее, в гл. 4 вводится функтор Hom , в связи с чем до конца этой главы предполагается знание начал гомологической алгебры. Нужные факты содержатся в стандартных учебниках, на которые даны исчерпывающие ссылки. В главе 8 читатель отсылается к книге Спеньера за доказательствами нескольких теорем. По-видимому, нет смысла копировать доказательства, изложенные в этом широко доступном учебнике. Во второй половине настоящей книги в формулировках некоторых утверждений используется терминология теории категорий. Однако результаты теории категорий не используются.

Читатели, знакомые с сингулярными гомологиями и когомологиями, довольно быстро смогут прочесть большую часть книги.

Обозначения и терминология. В основном используются стандартные обозначения и терминология. Как обычно в теории множеств, $X \setminus A$ означает множество $\{x \in X \mid x \notin A\}$. Композиция отображений f и g обозначается через gf или иногда для большей ясности через $g \circ f$.

Что касается теоретико-множественной топологии, то предполагается, что все компактные и локально компактные пространства удовлетворяют аксиоме отделимости Хаусдорфа, хотя

это и не везде сформулировано в явном виде. Замыкание множества A обозначается через $\bar{A}$.

Буквами Z , Q , R , C и H всюду обозначаются соответственно множества целых, рациональных, действительных и комплексных чисел и тело кватернионов. Символ R^n означает n -кратное декартово произведение $R \times R \times \dots \times R$, а Z_n — кольцо целых чисел, приведенных по модулю n . Отрезок $[0, 1]$ обозначается через I .

Указанных обозначений мы последовательно придерживаемся на протяжении всей книги. Ряд других обозначений поясняется в том месте, где они вводятся. В книге такого объема невозможно строго придерживаться однажды принятых обозначений (не хватит букв в алфавите), любая попытка добиться этого приведет к появлению неприятных и сложных обозначений. Поэтому символы, используемые в части III для обозначения различных групп гомологий и когомологий, отличаются от соответствующих обозначений в частях I и II¹⁾. В подобных случаях обозначения, используемые в каждой части, четко объясняются и аккуратно соблюдаются.

Идеи, лежащие в основе этой книги, рассеяны по литературе, и перечислить все относящиеся к делу источники невозможно. Наиболее очевидное и важное влияние оказали следующие из них: (1) S. Eilenberg and N. Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton University Press, 1952²⁾; (2) Труды семинара А. Картана; (3) J. Milnor, *On the Steenrod Homology Theory* (unpublished manuscript, Berkeley, 1960); (4) H. Cartan, *Méthodes Moderne en Topologie Algébrique*, *Comm. Math. Helv.*, 18 (1945), 1—18; (5) A. Borel and J. Moore, *Homology Theory for Locally Compact Spaces*, *Mich. Math. J.*, 7 (1960), 137—159; (6) A. Borel, *Cohomologie des Espaces localement compacts d'après J. Leray*, *Springer Lectur Notes in Mathematics*, Vol. 2, Springer Verlag, 1964. (7) E. Spanier, *Cohomology Theory for General Spaces*, *Ann. Math.*, 49 (1948), 405—427.

В заключение автор выражает глубокую благодарность г-же Джойс Харри и г-же Донне Белли за тщательность и аккуратность, с которой они перепечатали первоначальный и окончательный варианты рукописи.

Уильям С. Масси

¹⁾ См. по этому поводу предисловие редактора перевода. — *Прим. ред.*

²⁾ Имеется перевод: Стинрод Н., Эйленберг С. Основания алгебраической топологии. — М.: Физматгиз, 1958.

Часть I

Когомологии и гомологии локально компактных пространств

Глава I

Определения и основные свойства групп когомологий

§ 1.0. Введение

В настоящей главе рассматриваются определения и основные свойства групп когомологий с компактными носителями. Они определяются для локально компактных пространств. *Собственные* отображения последних индуцируют гомоморфизмы этих групп. Применения теории когомологий отложены до гл. 2.

§ 1.1. Определения коцепей, кограничного оператора и групп когомологий

Для любого множества X , целого числа $p \geq 0$ и абелевой группы G обозначим через $\Phi^p(X; G)$ множество всех *конечнозначных* функций $\varphi(x_0, \dots, x_p)$ от $p+1$ переменных $x_0, \dots, x_p$, где x_i — точки из X , со значениями в G . Под конечнозначной понимается функция, принимающая только конечное число различных значений. Такую функцию φ мы будем называть *p -функцией со значениями в G* . Множество $\Phi^p(X; G)$, очевидно, является абелевой группой относительно операции поточечного сложения функций. Если X — пустое множество, то для всех p положим $\Phi^p(X; G) = 0$.

Для каждого $p \geq 0$ определим гомоморфизм $\delta: \Phi^p(X; G) \rightarrow \Phi^{p+1}(X; G)$ следующей формулой:

$$(\delta\varphi)(x_0, \dots, x_{p+1}) = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \varphi(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{p+1}).$$

Здесь «крышка» над x_i означает, что этот символ в формуле опущен. Заметим, что определенная таким образом функция $\delta\varphi$ также конечнозначна.

1.1. Лемма. $\delta(\delta\varphi) = 0$ для любой функции $\varphi \in \Phi^p(X; G)$.

Доказательство проводится прямым вычислением, и мы оставляем его читателю.

δ называется *кограничным оператором*.

До сих пор в определениях участвовало произвольное множество X . Предположим теперь, что X является топологическим пространством. Определим *носитель p -функции* φ как подмножество $|\varphi|$ из X , описываемое таким условием: $x \notin |\varphi|$ тогда и только тогда, когда существует окрестность V точки x , такая, что если $x_0, \dots, x_p \in V$, то $\varphi(x_0, \dots, x_p) = 0$. Это определение можно сформулировать и так: $x \in |\varphi|$ тогда и только тогда, когда для любой окрестности V точки x найдутся точки $x_0, \dots, x_p \in V$, для которых $\varphi(x_0, \dots, x_p) \neq 0$. Носитель p -функции обладает следующими четырьмя свойствами:

- (1) $|\varphi|$ — замкнутое подмножество в X ,
- (2) $|0| = \emptyset$ — пустое множество,
- (3) $|\varphi \pm \psi| \subset |\varphi| \cup |\psi|$,
- (4) $|\delta(\varphi)| \subset |\varphi|$.

Доказательства очевидны.

В связи со свойством (2) заметим, что пустой носитель может иметь и ненулевая функция φ . Действительно, легко видеть, что $|\varphi| = \emptyset$ тогда и только тогда, когда найдется такое открытое покрытие $\mathcal{U}$ пространства X , что $\varphi(x_0, \dots, x_p) = 0$ для любого $U \in \mathcal{U}$ и любых $x_0, \dots, x_p \in U$ (позже мы будем пользоваться этим критерием).

Положим

$$\Phi_0^p(X; G) = \{\varphi \in \Phi^p(X; G) \mid |\varphi| = \emptyset\},$$

$$\Phi_c^p(X; G) = \{\varphi \in \Phi^p(X; G) \mid |\varphi| \text{ — компакт}\}.$$

Следующие утверждения непосредственно вытекают из свойств (1) — (4):

$$(5) \quad \Phi_0^p(X; G) \subset \Phi_c^p(X; G) \text{ — подгруппы в } \Phi^p(X; G),$$

$$(6) \quad \delta[\Phi_0^p(X; G)] \subset \Phi_0^{p+1}(X; G) \text{ и } \delta[\Phi_c^p(X; G)] \subset \Phi_c^{p+1}(X; G).$$

Определим ¹⁾

$$C_c^p(X; G) = \Phi_c^p(X; G) / \Phi_0^p(X; G),$$

$$C^p(X; G) = \Phi^p(X; G) / \Phi_0^p(X; G).$$

¹⁾ Пусть $X' \subset X^{p+1}$ — диагональ в произведении $p+1$ экземпляров пространства X , а W_1 и W_2 — окрестности множества X' в X^{p+1} . Функции $f_i: W_i \rightarrow G$ будем называть *эквивалентными*, если их ограничения на некоторую окрестность $W \subset W_i$ диагонали X' совпадают. *Ростком* функции f вблизи диагонали $X' \subset X^{p+1}$ называется класс эквивалентных функции f функций указанного типа. Легко видеть, что $C_c^p(X; G)$ — группа ростков, определяемых конечнозначными функциями с компактными носителями. — Прим. ред.

Любой элемент группы $C^p(X; G)$ называется p -мерной коцепью пространства X с коэффициентами в G , а любой элемент группы $C_c^p(X; G)$ называется p -мерной коцепью пространства X с компактным носителем и коэффициентами в группе G .

Заметим, что некоторые свойства групп $\Phi^p(X; G)$ и $\Phi_c^p(X; G)$ наследуются факторгруппами $C^p(X; G)$ и $C_c^p(X; G)$. Из (3) вытекает, что если $u \in C^p(X; G)$ и если $\varphi, \psi \in \Phi^p(X; G)$ принадлежат смежному классу u , то $|\varphi| = |\psi|$. Следовательно, мы можем определить носитель p -мерной коцепи u правилом $|u| = |\varphi|$ для любой p -функции φ из класса u . Так определенные носители коцепей удовлетворяют аналогам условий (1)–(4), причем свойство (2) справедливо в следующей усиленной форме:

(2') $|u| = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $u = 0$.

Легко видеть, что $C_c^p(X; G)$ — подгруппа группы $C^p(X; G)$, состоящая из всех коцепей с компактными носителями, чем определяется ее название. Из свойства (6) вытекает, что гомоморфизм δ индуцирует гомоморфизмы (за которыми мы сохраним то же обозначение и название):

$$\delta: C^p(X; G) \rightarrow C^{p+1}(X; G),$$

$$\delta: C_c^p(X; G) \rightarrow C_c^{p+1}(X; G).$$

Для этих заново определенных кограницных операторов также $\delta \circ \delta = 0$ (следствие леммы 1.1).

Чтобы избежать рассмотрения исключительных случаев в приведенных ниже определениях, при $p < 0$ положим

$$C^p(X; G) = C_c^p(X; G) = 0, \quad \delta = 0.$$

Далее определим

$$Z^p(X; G) = \{u \in C_c^p(X; G) \mid \delta u = 0\},$$

$$B^p(X; G) = \delta[C_c^{p-1}(X; G)].$$

Эти группы — ядро и образ соответствующего оператора δ . Они называются группами p -мерных коциклов и p -мерных кограниц (пространства X с коэффициентами в G) соответственно. Соотношение $\delta \circ \delta = 0$ влечет за собой включение $B^p(X; G) \subset Z^p(X; G)$, поэтому определена факторгруппа¹⁾ $H_c^p(X; G) = Z^p(X; G)/B^p(X; G)$, называемая p -мерной группой когомологий (с компактными носителями) пространства X с коэффициентами в группе G . По самому определению она есть топологический

¹⁾ Изоморфизм когомологий $H_c^p(X; G)$ обычным когомологиям Александера — Спенсера с компактными носителями устанавливается в § 6.6. — Прим. ред.

инвариант пространства X . В части I этой книги в основном изучаются группы $H_c^p(X; G)$ для локально компактных хаусдорфовых пространств X^1).

Поскольку группы $H_c^p(X; G)$ являются основным объектом нашего исследования, читателю необходимо хорошо овладеть данными выше определениями. Без этого дальнейшее продвижение вперед практически невозможно. По общему мнению, на этом этапе определения выглядят довольно надуманными и неестественными. Когда читатель глубже проникнет в предмет и увидит применения теории когомологий, естественность введенных понятий станет виднее. Следует иметь в виду, что гомотической и когомотической теории уже 80 лет и что над ней работали представители плеяды наиболее изобретательных и одаренных математиков мира. Для изучения алгебраической топологии не существует легкого пути.

Группы когомологий пространства можно определить многими другими способами. Для компактных пространств с «хорошим» локальным строением все определения приводят к одному и тому же результату. Для пространств, являющихся в некотором смысле «дикими» или «патологическими», различные определения могут давать разные результаты. Разные определения основываются на различных предположениях, у каждого есть свои достоинства и недостатки. Выбранное нами определение имеет такие преимущества, как общность и простота, и (надемся) быстро вводит в суть предмета.

Рассмотрим теперь несколько простых примеров. Прежде всего, заметим, что $H_c^p(X; G) = 0$ для любого пространства X и любой группы G при $p < 0$.

Пример 1. X — пространство, состоящее из единственной точки. В этом случае легко видеть, что для $p \geq 0$

$$(1) \quad \Phi^p(X; G) \cong G,$$

$$(2) \quad \Phi^p(X; G) = 0,$$

$$(3) \quad C_c^p(X; G) = C^p(X; G) = \Phi^p(X; G).$$

Здесь можно явно вычислить кограничный оператор δ . Это приводит к следующему результату: $H^p(X; G) = 0$ для $p > 0$ и $H^0(X; G) \cong G$. Подробные доказательства мы оставляем читателю в качестве упражнения. Заметим, что изоморфизм между группами G и $H^0(X; G)$ канонический, или естественный.

Пример 2. $H_c^0(X; G)$ для любого локально компактного пространства X . Заметим, что 0-функция $\varphi \in \Phi^0(X; G)$ — это просто

¹⁾ Для компактных пространств X эта группа будет обозначаться просто через $H^p(X; G)$. Аналогичное соглашение действует для коцепей пространств и пар пространств. — Прим. перев.

отображение $\varphi: X \rightarrow G$, а ее носитель $|\varphi|$ — замыкание множества, на котором $\varphi \neq 0$. Следовательно,

$$\Phi_c^0(X; G) = 0 \quad \text{и} \quad C_c^0(X; G) = \Phi_c^0(X; G).$$

Заметим далее, что $B^0(X; G) = 0$ (фактически по определению), откуда $H_c^0(X; G) = Z^0(X; G)$. Таким образом, вычисление H_c^0 сводится к нахождению ядра гомоморфизма

$$\begin{array}{c} C_c^0(X; G) \xrightarrow{\delta} C_c^1(X; G) \\ \parallel \\ \Phi_c^0(X; G) \end{array}$$

Для этого легко доказать следующее утверждение: 0-функция $\varphi \in \Phi_c^0(X; G)$ тогда и только тогда является 0-мерным коциклом, когда существует такое открытое покрытие $\mathcal{U}$ пространства X , что $\varphi(x_0) = \varphi(x_1)$ для любого $U \in \mathcal{U}$ и любых $x_0, x_1 \in U$. Таким образом, φ является 0-мерным коциклом в том и только в том случае, когда она локально постоянна. Мы оставляем читателю проверить, что функция φ тогда и только тогда оказывается 0-мерным коциклом, когда она есть непрерывное отображение из X в G , где G рассматривается в дискретной топологии.

1.2. Лемма. *Группа когомологий $H_c^0(X; G)$ состоит из всех конечнозначных функций $\varphi: X \rightarrow G$, имеющих компактный носитель и непрерывных, если G рассматривать в дискретной топологии.*

Эта лемма — прямое следствие предшествовавшего ей обсуждения.

В частности, 0-мерный коцикл φ постоянен на любой связной компоненте пространства X и даже, более того, на каждой квазикомпоненте (определение и описание квазикомпонент см. в [23])¹⁾. Отсюда вытекает, что структуру группы $H_c^0(X; G)$ легко описать в случае, когда X имеет конечное число компонент, или в более общем случае, когда все компоненты открыты. В других ситуациях ее структура может оказаться не столь очевидной²⁾. Рассмотрим, например, случай канторова множества. В гл. 4 мы докажем более глубокие результаты о группе $H_c^0(X; G)$.

¹⁾ Квазикомпонента точки $x \in X$ — это пересечение всех открыто-замкнутых множеств, содержащих x . — *Прим. ред.*

²⁾ Из леммы 1.2 вытекает очевидно, что $H_c^0(X; G)$ — группа локально постоянных функций на X со значениями в G , каждая из которых обращается в нуль вне некоторого компактного множества. — *Прим. ред.*

Из этого примера видно, что алгебраическая структура группы $H_c^0(X; G)$ отражает топологические свойства пространства X . Это верно и для групп $H_c^p(X; G)$ при $p > 0$, но читатель не должен ожидать здесь столь же простой интерпретации топологических свойств; именно поэтому и вводятся группы $H_c^p(X; G)$.

Упражнения

1. Опишите в явном виде алгебраическую структуру группы $H_c^0(X; G)$ в случаях, когда

- (а) каждая компонента пространства X открыта;
- (б) X имеет только конечное число компонент.

2. Докажите, что 0-мерный коцикл постоянен на каждой квазикомпоненте.

3. Пусть $X = \{0\} \cup \{1/n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ (подмножество вещественной оси). Дайте явное описание алгебраической структуры группы $H_c^0(X; G)$.

§ 1.2. Гомоморфизм, индуцированный непрерывным отображением

Пусть X и Y — множества и $f: X \rightarrow Y$ — некоторое отображение. Тогда оно определяет гомоморфизм $f^\#: \Phi^p(Y; G) \rightarrow \Phi^p(X; G)$ по формуле $(f^\# \varphi)(x_0, \dots, x_p) = \varphi(fx_0, \dots, fx_p)$, $\varphi \in \Phi^p(Y; G)$. Легко проверить следующие свойства этого индуцированного гомоморфизма.

(1) Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Phi^p(Y; G) & \xrightarrow{\delta} & \Phi^{p+1}(Y; G) \\ \downarrow f^\# & & \downarrow f^\# \\ \Phi^p(X; G) & \xrightarrow{\delta} & \Phi^{p+1}(X; G) \end{array}$$

коммутативна.

(2) Если $f: X \rightarrow X$ — тождественное отображение, то $f^\#: \Phi^p(X; G) \rightarrow \Phi^p(X; G)$ — тождественный изоморфизм.

(3) Если X, Y и Z — множества, а $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ — отображения, то $(g \circ f)^\# = f^\# \circ g^\#: \Phi^p(Z; G) \rightarrow \Phi^p(X; G)$.

Предположим теперь, что X и Y — топологические пространства, а отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно. Легко проверяется также следующее дополнительное свойство:

(4) $|f^\# \varphi| \subset f^{-1}(|\varphi|)$ для любой функции $\varphi \in \Phi^p(Y; G)$.

В качестве следствия получаем $f^\#(\Phi_0^p(Y; G)) \subset \Phi_0^p(X; G)$, и, таким образом, $f^\#$ индуцирует гомоморфизм факторгрупп

$f^\#: C^p(Y; G) \rightarrow C^p(X; G)$, который мы продолжаем обозначать тем же символом. Аналоги свойств (1) — (4) выполняются и для нового гомоморфизма $f^\#$.

Заметим, что $f^\#$ не обязательно отображает $\Phi_c^p(Y)$ в $\Phi_c^p(X)$. Чтобы исправить положение, введем еще одно определение: непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ будем называть *собственным*, если прообраз любого компактного подмножества из Y компактен в X . Тогда из свойства (4) вытекает, что для собственного отображения $f: X \rightarrow Y$ имеет место включение $f^\#[\Phi_c^p(Y)] \subset \Phi_c^p(X)$ и, следовательно, f индуцирует гомоморфизм $f^\#: C_c^p(Y) \rightarrow C_c^p(X)$. Аналоги свойств (1) — (4) по-прежнему выполняются.

Если $f: X \rightarrow Y$ — собственное отображение, то из аналога свойства (1) для гомоморфизма $f^\#: C_c^p(Y) \rightarrow C_c^p(X)$ вытекает, что

$$f^\#[Z^p(Y)] \subset Z^p(X),$$

$$f^\#[B^p(Y)] \subset B^p(X),$$

и потому f индуцирует гомоморфизм $f^*: H_c^p(Y) \rightarrow H_c^p(X)$. Индуцированный гомоморфизм f^* обладает аналогами свойств (2) и (3). Поскольку этот факт важен для дальнейших применений, выпишем их в явном виде:

(5) Если $f: X \rightarrow X$ — тождественное отображение, то $f^*: H_c^p(X) \rightarrow H_c^p(X)$ — также тождественное отображение.

(6) Если $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ — собственные отображения, то $(gf)^* = f^*g^*: H_c^p(Z) \rightarrow H_c^p(X)$. (Заметьте, что композиция собственных отображений — собственное отображение.)

Упражнения

1. Используя только свойства (5) и (6), докажите, что если $f: X \rightarrow Y$ — гомеоморфизм, то $f^*: H_c^p(Y) \rightarrow H_c^p(X)$ — изоморфизм.

2. Опишите гомоморфизм $f^*: H_c^0(Y) \rightarrow H_c^0(X)$ в терминах топологических свойств отображения f (ср. описание H_c^0 в § 1.1).

3. Пусть X и Y — локально компактные хаусдорфовы пространства и $f: X \rightarrow Y$ — сюръективное и *монотонное* (прообраз каждой точки пространства Y связан) собственное отображение. Докажите, что $f^*: H_c^0(Y; G) \rightarrow H_c^0(X; G)$ — изоморфизм. (Замечание. Это утверждение — частный случай знаменитой в алгебраической топологии теоремы, доказанной Вьеторисом в 1927 г.)

4. Пусть X и Y — локально компактные хаусдорфовы пространства, а X' и Y' — их одноточечные компактификации Александера, получаемые добавлением одной «бесконечно удаленной» точки к каждому пространству. Докажите, что непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ собственно тогда и только тогда, когда

непрерывно продолжение $f': X' \rightarrow Y'$, определяемое отображением бесконечно удаленной точки пространства X' в бесконечно удаленную точку пространства Y' . (Замечание. Для наших целей это свойство собственных отображений — одно из наиболее существенных. Другие свойства собственных отображений можно найти в книге Бурбаки [4, гл. I, § 10].)

§ 1.3. Гомоморфизм $\tau: H_c^p(U) \rightarrow H_c^p(X)$ для открытого подмножества $U \subset X$

В этом параграфе все встречающиеся пространства локально компактны и хаусдорфовы; напомним, что пространства, обладающие этими свойствами, регулярны. Пусть U — непустое открытое подмножество такого пространства X и $A = X \setminus U$. Через $Q^p(X, A)$ обозначим множество $\{u \in C_c^p(X) \mid u|_A = 0\}$. Заметим, что $Q^p(X, A)$ — подгруппа в $C_c^p(X)$ и $\delta[Q^p(X, A)] \subset Q^{p+1}(X, A)$.

Включение $i: U \rightarrow X$ непрерывно, но, вообще говоря, не является собственным отображением. Имеется индуцированный гомоморфизм $i^\#: C^p(X) \rightarrow C^p(U)$. Ясно, что

$$i^\#[Q^p(X, A)] \subset C_c^p(U).$$

1.3. Лемма. Гомоморфизм $i^\#$ изоморфно отображает $Q^p(X, A)$ на $C_c^p(U)$.

Доказательство. Легко видеть, что $|i^\#u| = |u|$ для любого $u \in Q^p(X, A)$, поэтому $i^\#$ отображает $Q^p(X, A)$ в $C_c^p(U)$ мономорфно. Для доказательства того, что $i^\#$ — отображение на, воспользуемся следующими двумя утверждениями.

(1) Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство, а A и B — его непересекающиеся замкнутые подмножества, причем B компактно. Тогда существуют непересекающиеся открытые окрестности U и V множеств A и B соответственно. При этом можно V выбрать так, что замыкание $\bar{V}$ компактно.

(2) Два элемента φ и ψ из $C^p(X)$ представляют один и тот же элемент группы $C^p(X)$ тогда и только тогда, когда найдется такое открытое покрытие $\mathcal{U}$ пространства X , что для любого $U \in \mathcal{U}$ и для любых точек $x_0, \dots, x_p \in U$ имеем $\varphi(x_0, \dots, x_p) = \psi(x_0, \dots, x_p)$ (очевидно). Это утверждение можно сформулировать по-другому. Чтобы определить какой-нибудь элемент из $C^p(X)$, необходимо задать p -функцию лишь на «малых» наборах $(x_0, \dots, x_p)$ «порядка $\mathcal{U}$ », где $\mathcal{U}$ — открытое покрытие пространства X . Значения φ на «больших» наборах аргументов несущественны.

Пусть $u \in C_c^p(U)$ и $\varphi \in \Phi_c^p(U)$ принадлежит смежному классу u . Выберем непересекающиеся открытые окрестности W и V множеств $|\varphi|$ и A соответственно. Для любой точки $x \in U \setminus |\varphi|$ существует открытая окрестность $N_x \subset U$, такая, что если $x_0, \dots, x_p \in N_x$, то $\varphi(x_0, \dots, x_p) = 0$. Тогда $\{W, V, N_x | x \in U \setminus |\varphi|\}$ — открытое покрытие X . Определим $\psi \in \Phi_c^p(X)$ следующим образом:

$$\psi(x_0, \dots, x_p) = \begin{cases} \varphi(x_0, \dots, x_p), & \text{если } x_0, \dots, x_p \in W \text{ или} \\ & x_0, \dots, x_p \in N_x \text{ для некоторого } x, \\ 0, & \text{если } x_0, \dots, x_p \in V. \end{cases}$$

Пусть $v \in C_c^p(X)$ — смежный класс, содержащий ψ . Тогда легко видеть, что $|\varphi - i^* \psi| = \emptyset$ и, следовательно, $u = i^* v$, что и требовалось.

Через $\sigma_U, x: C_c^p(U) \rightarrow C_c^p(X)$ обозначим единственный мономорфизм, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} Q^p(X, A) & \xrightarrow{\quad} & C_c^p(X) \\ i^* \downarrow \cong & \nearrow \sigma_{U,x} & \\ C_c^p(U) & & \end{array}$$

Здесь горизонтальная стрелка — включение. Заметим, что σ коммутирует с кограничным оператором δ (т. е. $\sigma \delta(u) = \delta \sigma(u)$ для любого $u \in C_c^p(U)$); это следует из свойства (1) § 1.2, в силу которого i^* коммутирует с δ . Поэтому, как и в § 1.2, σ индуцирует гомоморфизм

$$\tau: H_c^p(U) \rightarrow H_c^p(X).$$

Гомоморфизм τ определен для любого открытого подмножества U локально компактного пространства X . Там, где могут возникнуть недоразумения, мы будем обозначать индуцированный гомоморфизм через $\tau_{U,x}$; аналогичное соглашение принимается относительно σ .

Теперь мы установим основные свойства гомоморфизмов σ и τ . Первое из них касается частного случая $U = X$:

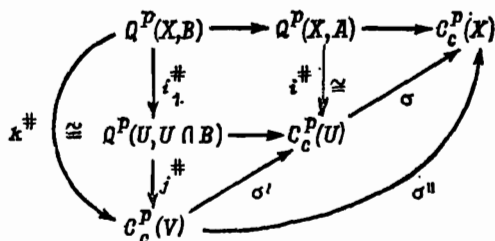
(3) Оба гомоморфизма $\sigma_X, x: C_c^p(X) \rightarrow C_c^p(X)$, $\tau_X, x: H_c^p(X) \rightarrow H_c^p(X)$ являются тождественными.

Доказательство тривиально. Далее, имеет место свойство транзитивности:

(4) Если $V \subset U \subset X$ и U, V открыты, то $\sigma_{V,x} = \sigma_{U,x} \circ \sigma_{V,u}$ и, следовательно, $\tau_{V,x} = \tau_{U,x} \circ \tau_{V,u}$.

Доказательство. Пусть $A = X \setminus U$ и $B = X \setminus V$. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму, в которой для

краткости введены такие обозначения: $\sigma = \sigma_{U, X}$, $\sigma' = \sigma_{V, U}$ и $\sigma'' = \sigma_{V, X}$.



Здесь горизонтальные стрелки — гомоморфизмы включения, $i^\#$ и $i_1^\#$ индуцированы включением $i: U \rightarrow X$, $j^\#$ индуцирован отображением включения $j: V \rightarrow U$, а $k^\#$ — включением $k: V \rightarrow X$. Поскольку $k^\# = j^\# \circ i_1^\#$, а квадрат и два треугольника коммутативны, легко получить равенство $\sigma'' = \sigma \circ \sigma'$. Отсюда требуемое свойство вытекает и для гомоморфизма τ .

Пусть X, Y — локально компактные хаусдорфовы пространства, U, V — открытые подмножества пространств X и Y соответственно, $f: X \rightarrow Y$ — собственное отображение, для которого $f(U) \subset V$ и $f(X \setminus U) \subset Y \setminus V$, т. е. $U = f^{-1}(V)$. Легко видеть, что в этом случае индуцированное отображением f непрерывное отображение $f_0: U \rightarrow V$ также собственное.

(5) При сделанных предположениях коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} C_c^p(X) & \xleftarrow{f^\#} & C_c^p(Y) \\ \uparrow \sigma_{U, X} & & \uparrow \sigma_{V, Y} \\ C_c^p(U) & \xleftarrow{f_0^\#} & C_c^p(V) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} H_c^p(X) & \xleftarrow{f^*} & H_c^p(Y) \\ \uparrow \tau_{U, X} & & \uparrow \tau_{V, Y} \\ H_c^p(U) & \xleftarrow{f_0^*} & H_c^p(V) \end{array}$$

Доказательство. Пусть $i: U \rightarrow X$, $j: V \rightarrow Y$ — включения. Тогда коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow f_0 & & \downarrow f \\ V & \xrightarrow{j} & Y \end{array}$$

Следовательно, и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C^p(U) & \xleftarrow{i^\#} & C^p(X) \\ \uparrow f_0^\# & & \uparrow f^\# \\ C^p(V) & \xleftarrow{j^\#} & C^p(Y) \end{array}$$

коммутативна.

Из наших предположений легко вытекает, что $f^\# [Q^p(Y, B)] \subset \subset Q^p(X, A)$. Поэтому последняя диаграмма обеспечивает коммутативность следующей диаграммы, которая устанавливает требуемое свойство:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \sigma_{u,x} & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 C_c^p(U) & \xleftarrow[\tau^\#]{\cong} & Q^p(X, A) & \xrightarrow{\quad} & C_c^p(X) \\
 \uparrow \tau^\# & & \uparrow & & \uparrow f^\# \\
 C_c^p(V) & \xleftarrow[j^\#]{\cong} & Q^p(Y, B) & \xrightarrow{\quad} & C_c^p(Y) \\
 & \nwarrow & & \swarrow & \\
 & & \sigma_{v,y} & &
 \end{array}$$

Следующие два свойства формализуют тот факт, что наша теория когомологий — это теория когомологий с компактными носителями. Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство.

(6) Для любого $a \in H_c^p(X)$ существует открытое подмножество $U \subset X$ с компактным замыканием и такой элемент $b \in H_c^p(U)$, что $\tau(b) = a$.

(7) Пусть U — открытое подмножество в X с компактным замыканием и a — такой элемент из $H_c^p(U)$, что $\tau(a) = 0$. Тогда найдется открытое подмножество $V \subset X$ с компактным замыканием, для которого $U \subset V$ и $\tau_{U,V}(a) = 0$.

Заметим, что оба свойства очевидны в случае, когда X компактно. Поэтому основной интерес представляет случай некомпактного X .

Доказательство свойства (6). Выберем коцикл $u \in C_c^p(X)$, представляющий a . Поскольку $|u|$ компактно, а X локально компактно, мы можем выбрать открытое множество U с компактным замыканием $\bar{U}$, содержащее $|u|$. Пусть $A = X \setminus U$. Ясно, что $u \in Q^p(X, A)$. Положим $v = i^\#(u) \in C_c^p(U)$. Пусть b — когомологический класс коцикла v . Тогда b обладает требуемыми свойствами.

Доказательство свойства (7). Выберем коцикл $u \in C_c^p(U)$, представляющий когомологический класс a . Поскольку $\tau(a) = 0$, $\sigma(u)$ является кограницей, т. е. существует $v \in C_c^{p-1}(X)$, для которого $\delta(v) = \sigma(u)$. Пусть W — открытая окрестность множества $|v|$ с компактным замыканием $\bar{W}$. Рассмотрим $V = U \cup W$. Как и в доказательстве свойства (6), найдем единственный элемент $v' \in C_c^{p-1}(V)$, для которого

$\sigma_{v, x}(v') = v$. Для завершения доказательства остается воспользоваться равенством $\sigma_{u, x} = \sigma_{v, x} \circ \sigma_{u, v}$, установленным в (4), и тем, что все гомоморфизмы σ — мономорфизмы.

Замечание. Для тех, кто знаком с понятием прямого предела (см. приложение в конце книги), свойства (6) и (7) могут быть объединены в одно утверждение: $H_c^p(X)$ — прямой предел групп $H_c^p(U)$ по всем открытым подмножествам U из X , имеющим компактное замыкание.

Предостережение. Хотя $\sigma: C_c^p(U) \rightarrow C_c^p(X)$ — мономорфизм, гомоморфизм $\tau: H_c^p(U) \rightarrow H_c^p(X)$, вообще говоря, не является мономорфизмом (или эпиморфизмом). Ниже мы увидим множество подтверждающих это примеров.

Упражнение

Для открытого подмножества U локально компактного пространства X опишите гомоморфизм $\tau: H_c^0(U; G) \rightarrow H_c^0(X; G)$ (используйте описание групп $H_c^0(X; G)$ и $H_c^0(U; G)$, данное леммой 1.2).

§ 1.4. Кограничный оператор пары и точная последовательность пары

Теперь мы займемся свойством, которое труднее всего доказывается, но в то же время является, по-видимому, самым интересным.

Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство и A — замкнутое подпространство в X . Включение $i: A \rightarrow X$ является собственным и, следовательно, индуцирует гомоморфизм

$$i^\#: C_c^p(X) \rightarrow C_c^p(A).$$

Этот гомоморфизм является эпиморфизмом, так как $i^\#: \Phi_c^p(X) \rightarrow \Phi_c^p(A)$ — отображение на. Обозначим через $C_c^p(X, A)$ ядро гомоморфизма $i^\#$. Имеем $C_c^p(X, A) = \Phi_c^p(X, A)/\Phi_c^p(X)$, где

$$\Phi_c^p(X, A) = \{ \varphi \in \Phi_c^p(X) \mid i^\# \varphi = 0 \}.$$

Ясно, что $C_c^p(X, A)$ — подгруппа в $C_c^p(X)$ и $\delta[C_c^p(X, A)] \subset C_c^{p+1}(X, A)$. Кроме того, $Q^p(X, A) \subset C_c^p(X, A)$. Эти группы, вообще говоря, не совпадают. В предыдущем параграфе мы доказали, что $Q^p(X, A) \cong C_c^p(X \setminus A)$, поэтому $H^p(Q^*(X, A)) \cong H_c^p(X \setminus A)$, где через $H^p(Q^*(X, A))$ мы обозначили p -мерную группу когомологий коцепного комплекса $Q^*(X, A) = \{Q^p(X, A)\}$

(точное определение см. ниже). Пусть $H^p(C_c^*(X, A))$ есть p -мерная группа когомологий комплекса $\{C_c^p(X, A)\}^1$. Следующая теорема показывает, что группы $H^p(C_c^*(X, A))$ нам уже известны.

1.4. Теорема. Включение $Q^p(X, A) \rightarrow C_c^p(X, A)$ индуцирует изоморфизм $H^p(Q^*(X, A)) \cong H^p(C_c^*(X, A))$.

В качестве следствия получаем $H^p(C_c^*(X, A)) \cong H_c^p(X \setminus A)$. Мы докажем эту теорему в дополнении к настоящей главе (§ 1.7).

Имеем следующую ситуацию: для пространства X и его замкнутого подмножества A группа $C_c^p(X, A)$ является подгруппой в $C_c^p(X)$ при любом p , а $i^\#: C_c^p(X) \rightarrow C_c^p(A)$ является эпиморфизмом с ядром $C_c^p(X, A)$. Включение $C_c^p(X, A) \rightarrow C_c^p(X)$ и $i^\#$ индуцируют гомоморфизмы $\tau: H^p(C_c^*(X, A)) \rightarrow H_c^p(X)$ и $i^*: H_c^p(X) \rightarrow H_c^p(A)$. Однако τ не всегда является мономорфизмом, а i^* — эпиморфизмом. Возникает вопрос, можно ли каким-нибудь общим способом охарактеризовать ядро и образ гомоморфизмов τ и i^* ? Ответ на этот вопрос положительный: информация заключена в точной последовательности пары (X, A) .

1.5. Определение. Последовательность абелевых групп и гомоморфизмов

$$\dots \rightarrow A_{n-1} \xrightarrow{h_{n-1}} A_n \xrightarrow{h_n} A_{n+1} \xrightarrow{h_{n+1}} \dots$$

называется *точной*, если образ каждого гомоморфизма совпадает с ядром следующего гомоморфизма. Например, последовательность $0 \rightarrow C_c^p(X, A) \rightarrow C_c^p(X) \xrightarrow{i^\#} C_c^p(A) \rightarrow 0$ точна. Понятие точности, впервые введенное Гуревичем, является основным в алгебраической топологии и гомологической алгебре.

1.6. Теорема. Пусть X — любое локально компактное хаусдорфово пространство, A — замкнутое подмножество в X и $U = X \setminus A$. Тогда существует гомоморфизм

$$\delta_{X, A}: H_c^p(A) \rightarrow H_c^{p+1}(U), \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

такой, что

(1) Последовательность

$$\dots \xrightarrow{\delta} H_c^p(U) \xrightarrow{\tau} H_c^p(X) \xrightarrow{i^*} H_c^p(A) \xrightarrow{\delta} H_c^{p+1}(U) \xrightarrow{\tau} \dots$$

точна.

¹⁾ Когомологии этого комплекса обычно обозначаются через $H_c^p(X, A)$ и называются когомологиями пары (X, A) (с компактными носителями). — Прим. ред.

(2) Пусть V — открытое подмножество в U и $B = X \setminus V$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_c^q(V) & \xrightarrow{\tau} & H_c^q(U) \\ \uparrow \delta_{X, V} & & \uparrow \delta_{X, A} \\ H_c^{q-1}(B) & \xrightarrow{h^*} & H_c^{q-1}(A) \end{array}$$

коммутативна. Здесь $h: A \rightarrow B$ — отображение включения.

(3) Пусть $f: X \rightarrow Y$ — собственное отображение локально компактных пространств, U и V — открытые подмножества в X и Y соответственно и $A = X \setminus U$, $B = Y \setminus V$. Предположим, что $f(U) \subset V$ и $f(A) \subset B$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_c^p(U) & \xleftarrow{f_1^*} & H_c^p(V) \\ \uparrow \delta_{X, A} & & \uparrow \delta_{Y, B} \\ H_c^{p-1}(A) & \xleftarrow{f_2^*} & H_c^{p-1}(B) \end{array}$$

коммутативна. Здесь f_1 и f_2 определены отображением f (замечим, что f_1 является собственным).

(4) Пусть V — открытое подмножество в X и $U \subset V$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_c^q(V \cap A) & & \\ \downarrow \tau & \searrow \delta_{V, V \cap A} & \\ H_c^q(A) & \xrightarrow{\delta_{X, A}} & H_c^{q+1}(U) \end{array}$$

коммутативна.

Замечание. Точную последовательность из утверждения (1) этой теоремы обычно называют *когомологической последовательностью пары* (X, A) .

Прежде чем приступать к доказательству теоремы 1.6 (и теоремы 1.4), стоит затратить время на развитие некоторого алгебраического формализма. Мы будем часто пользоваться им в дальнейшем.

1.7. Определение. *Цепной комплекс абелевых групп* $K = \{K_n, \partial_n\}$ — это последовательность абелевых групп K_n (опре-

¹ То есть A и U — полные прообразы множеств B и V . Утверждения (2) и (3) — частные случаи аналогичного утверждения, справедливого для любого собственного отображения f , при котором $f(A) \subset B$ (см. упр. к § 1.6). — *Прим. ред.*

деленных для всех целых n) и гомоморфизмов $\partial_n: K_n \rightarrow K_{n-1}$, таких, что

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0.$$

Аналогично определяется *коцепной комплекс абелевых групп* $K = \{K^n, \delta^n\}$. В этом случае δ^n отображает K^n в K^{n+1} .

Теория цепных комплексов, конечно, изоморфна теории коцепных комплексов, поскольку одна из другой получается изменением знака у индексов. Цепные и коцепные комплексы очень важны в алгебраической топологии и гомологической алгебре; посвященные им разделы можно найти в большинстве учебников.

Цепной комплекс K называется *положительным*, если $K_n = 0$ при $n < 0$. Аналогичное определение дается и для коцепного комплекса. Комплексы, встречающиеся в топологии, в большинстве положительных. Мы уже имели следующие примеры положительных коцепных комплексов:

$$\{\Phi^n(X)\}, \quad \{\Phi_c^n(X)\}, \quad \{\Phi_0^n(X)\}, \quad \{C^n(X)\}, \quad \{C_c^n(X)\}, \\ \{Q^n(X, A)\}, \quad \{C_c^n(X, A)\}.$$

Пусть $K = \{K_n, \partial_n\}$ — цепной комплекс. Обозначим через $Z_n(K)$ и $B_n(K)$ ядро оператора ∂_n и образ оператора ∂_{n+1} соответственно, т. е. $Z_n(K) = \text{Ker } \partial_n$ и $B_n(K) = \text{Im } \partial_{n+1}$. Тогда $B_n(K) \subset Z_n(K) \subset K_n$, и, следовательно, можно определить факторгруппу $H_n(K) = Z_n(K)/B_n(K)$, которая называется *n -мерной группой гомологий комплекса K* . Мы предоставляем читателю самому сформулировать аналогичное определение для коцепного комплекса.

Пусть K и K' — цепные комплексы. *Цепное отображение* $f: K \rightarrow K'$ — это последовательность таких гомоморфизмов $f_n: K_n \rightarrow K'_n$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & K_n \\ \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n \\ K'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & K'_n \end{array}$$

коммутативна для всякого целого n . Заметим, что цепное отображение $f: K \rightarrow K'$ удовлетворяет условиям $f_n(Z_n(K)) \subset Z_n(K')$ и $f_n(B_n(K)) \subset B_n(K')$. Следовательно, определен индуцированный гомоморфизм $f_*: H_n(K) \rightarrow H_n(K')$. Этот индуцированный гомоморфизм обладает очевидными, но важными свойствами, аналогичными свойствам (2) и (3) из § 1.2.

Предоставляем читателю самому дать определение коцепного отображения коцепных комплексов и индуцированного отображения групп когомологий. Мы уже встречались выше с некоторыми примерами коцепных отображений.

Скажем, что $\{K'_n, \partial'_n\}$ — *подкомплекс* комплекса $\{K_n, \partial_n\}$, если для каждого n группа K'_n является подгруппой в K_n и $\partial'_n = \partial_n|_{K'_n}$. В этих предположениях можно определить *фактор-комплекс* $K/K' = \{K_n/K'_n, \partial''_n\}$, где ∂''_n индуцирован гомоморфизмом ∂_n . Заметим, что отображения включения $K'_n \rightarrow K_n$ и естественные проекции $K_n \rightarrow K_n/K'_n$ определяют цепные отображения $K' \rightarrow K$ и $K \rightarrow K/K'$. (Индукцированные гомоморфизмы $H_n(K') \rightarrow H_n(K)$ и $H_n(K) \rightarrow H_n(K/K')$ не являются, вообще говоря, мономорфизмами и эпиморфизмами соответственно.)

Пусть K, K' и K'' — цепные комплексы, а $i: K' \rightarrow K$ и $j: K \rightarrow K''$ — цепные отображения. Мы скажем, что $K' \xrightarrow{i} K \xrightarrow{j} K''$ — *короткая точная последовательность цепных комплексов*, если для каждого n последовательность абелевых групп $0 \rightarrow K'_n \rightarrow K_n \rightarrow K''_n \rightarrow 0$ точна. Например, в предыдущем абзаце мы имели короткую точную последовательность $K' \rightarrow K \rightarrow K/K'$.

Для короткой точной последовательности цепных комплексов $E: K' \xrightarrow{i} K \xrightarrow{j} K''$ можно определить *инвариантный граничный оператор* или *связывающий гомоморфизм*

$$\partial_E: H_n(K'') \rightarrow H_{n-1}(K').$$

Для этого рассмотрим следующую диаграмму:

$$(1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & K'_n & \xrightarrow{i_n} & K_n & \xrightarrow{j_n} & K''_n \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial'_n & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial''_n \\ 0 & \rightarrow & K'_{n-1} & \xrightarrow{i_{n-1}} & K_{n-1} & \xrightarrow{j_{n-1}} & K''_{n-1} \rightarrow 0 \end{array}$$

Строки этой диаграммы точны и каждый квадрат коммутативен. Для $a \in H_n(K'')$ выберем цикл u (элемент из $Z_n(K'')$), представляющий класс гомологий a . Поскольку j_n — эпиморфизм, существует такой элемент $v \in K_n$, что $j_n(v) = u$. Имеем

$$j_{n-1}\partial_n(v) = \partial''_n j_n(v) = \partial''_n(u) = 0.$$

Следовательно, существует единственный элемент $w \in K'_{n-1}$, такой, что $i_{n-1}(w) = \partial_n(v)$. Мы утверждаем, что w — цикл (т. е. $\partial'_{n-1}(w) = 0$). Для этого достаточно показать, что $i_{n-2}\partial'_{n-1}(w) = 0$, поскольку i — мономорфизм. Но

$$i_{n-2}\partial'_{n-1}(w) = \partial_{n-1}i_{n-1}(w) = \partial_{n-1}\partial_n(v) = 0.$$

Теперь определим $\partial_E(a)$ как класс гомологий цикла w . Оставляем читателю в качестве упражнения проверить корректность этого определения (т. е. независимость от выбора u и v), а также убедиться в том, что отображение ∂_E — гомоморфизм.

1.8. Теорема. Пусть $E: K' \xrightarrow{i} K \xrightarrow{j} K''$ — короткая точная последовательность цепных комплексов. Тогда последовательность

$$\dots \rightarrow H_n(K') \xrightarrow{i_*} H_n(K) \xrightarrow{j_*} H_n(K'') \xrightarrow{\partial_E} H_{n-1}(K') \rightarrow \dots$$

точна.

Эта важная теорема состоит из шести утверждений: для доказательства точности в трех различных местах последовательности нужно установить включения образ $\subset$ ядро, ядро $\subset$ образ. Первое включение доказать легче. Доказательство этой теоремы мы оставляем читателю в качестве упражнения, которое настоятельно рекомендуем сделать, чтобы освоиться с техникой этой части предмета.

Остается доказать, что гомоморфизм ∂_E естествен в следующем смысле. Пусть

$$E: K' \xrightarrow{i} K \xrightarrow{j} K'', \quad F: L' \xrightarrow{k} L \xrightarrow{l} L''$$

— короткие точные последовательности цепных комплексов и $f': K' \rightarrow L'$, $f: K \rightarrow L$, $f'': K'' \rightarrow L''$ — такие цепные отображения, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} K' & \xrightarrow{i} & K & \xrightarrow{j} & K'' \\ \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' \\ L' & \xrightarrow{k} & L & \xrightarrow{l} & L'' \end{array}$$

коммутативна.

В этих предположениях имеет место следующее важное свойство: диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_n(K'') & \xrightarrow{\partial_E} & H_{n-1}(K') \\ \downarrow f''_* & & \downarrow f'_* \\ H_n(L'') & \xrightarrow{\partial_F} & H_{n-1}(L') \end{array}$$

коммутативна. Заметим, что в тех же предположениях гомоморфизмы f'_* , f_* и f''_* определяют «отображение» одной точной последовательности в другую в том смысле, что в диаграмме

$$(2) \quad \begin{array}{ccccccc} H_n(K') & \xrightarrow{i_*} & H_n(K) & \xrightarrow{j_*} & H_n(K'') & \xrightarrow{\partial_E} & H_{n-1}(K') \\ \downarrow f'_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f''_* & & \downarrow f_* \\ H_n(L') & \xrightarrow{k_*} & H_n(L) & \xrightarrow{l_*} & H_n(L'') & \xrightarrow{\partial_F} & H_{n-1}(L') \end{array}$$

коммутативны все квадраты.

Естественно, что аналогичные утверждения справедливы и для коцепных комплексов. Основное отличие лишь в том, что связывающий гомоморфизм или инвариантный кограничный оператор повышает, а не понижает размерности.

Теперь мы применим эти конструкции к доказательству теоремы 1.6. Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство и A — замкнутое подмножество в X . Имеем две короткие точные последовательности коцепных комплексов вместе с коцепными отображениями между ними

$$(3) \quad \begin{array}{ccccc} Q^*(X, A) & \xrightarrow{1} & C_c^*(X) & \xrightarrow{5} & C_c^*(X)/Q^*(X, A) \\ & \downarrow 2 & \downarrow 4 & & \downarrow 6 \\ C_c^*(X, A) & \xrightarrow{3} & C_c^*(X) & \xrightarrow{i^\#} & C_c^*(A) \end{array}$$

Здесь стрелки с номерами 1, 2 и 3 обозначают гомоморфизмы включения, стрелка 4 — тождественный гомоморфизм, стрелка 5 — естественную проекцию на факторкомплекс и стрелка 6 индуцирована отображением $i^\#$. Строки диаграммы точны, и оба квадрата коммутативны. Следовательно, можно воспользоваться только что изложенными результатами. Таким образом, получаем диаграмму

$$(4) \quad \begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow H^p(Q^*(X, A)) & \xrightarrow{1} & H_c^p(X) & \xrightarrow{5} & H^p(C_c^*(X)/Q^*(X, A)) & \xrightarrow{6} & H^{p+1}(Q^*(X, A)) \\ & \downarrow 2 & \downarrow 4 & & \downarrow 6 & & \downarrow 2 \\ \dots \rightarrow H^p(C_c^*(X, A)) & \xrightarrow{3} & H_c^p(X) & \xrightarrow{i^*} & H_c^p(A) & \xrightarrow{\delta} & H^{p+1}(C_c^*(X, A)) \end{array}$$

Обе строки здесь точны и все квадраты коммутативны. По теореме 1.4 стрелка 2 является изоморфизмом; стрелка 4 — тождественное отображение. Из леммы о пяти гомоморфизмах (см. лемму 1.9 в конце этого параграфа) следует, что стрелка с номером 6 — тоже изоморфизм. Таким образом, эти две точные последовательности изоморфны. По лемме 1.3 коцепные комплексы $\{Q^p(X, A)\}$ и $\{C_c^p(U)\}$ изоморфны, где $U = X \setminus A$. Поэтому в каждой из этих точных последовательностей можно заменить соответствующую группу на $H_c^p(U)$.

Изложенные конструкции определяют гомоморфизм $\delta_{X,A}$, упомянутый в теореме 1.6, и доказывают первое утверждение этой теоремы. Аргументы, использованные при проверке свойств (4) и (5) в § 1.3, вместе с техникой цепных и коцепных комплексов доказывают утверждения (2) и (3) теоремы 1.6. Детали мы оставляем читателю.

Вместо диаграммы (3) можно было рассмотреть следующую диаграмму:

$$(5) \quad \begin{array}{ccccc} C_c^*(U) & \xrightarrow{\sigma} & C_c^*(X) & \xrightarrow{i} & C_c^*(X)/Q^*(X, A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C_c^*(X, A) & \xrightarrow{j} & C_c^*(X) & \xrightarrow{i^*} & C_c^*(A) \end{array}$$

Гомоморфизм σ описан в § 1.3.

Доказательство свойства (4) из теоремы 1.6 основано на рассмотрении следующей диаграммы, состоящей из четырех коротких точных последовательностей коцепных комплексов:

$$\begin{array}{ccccccc} C_c^*(U) & \xrightarrow{\sigma} & C_c^*(V) & \longrightarrow & C_c^*(V)/Q^*(V, B) & & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ C_c^*(U) & \xrightarrow{\sigma} & C_c^*(X) & \longrightarrow & C_c^*(X)/Q^*(X, A) & & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ C_c^*(V, B) & \longrightarrow & C_c^*(V) & \xrightarrow{i^*} & C_c^*(B) & & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ C_c^*(X, A) & \longrightarrow & C_c^*(X) & \xrightarrow{i^*} & C_c^*(A) & & \end{array}$$

Здесь $B = V \setminus U$. Каждый квадрат в диаграмме коммутативен. Переходя к когомологиям, получаем требуемый результат.

Остается доказать следующую лемму, которая обычно называется леммой о пяти гомоморфизмах.

1.9. Лемма. Пусть задана следующая коммутативная диаграмма абелевых групп и гомоморфизмов:

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \rightarrow & A_2 & \rightarrow & A_3 & \rightarrow & A_4 & \rightarrow & A_5 \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 & & \downarrow h_4 & & \downarrow h_5 \\ B_1 & \rightarrow & B_2 & \rightarrow & B_3 & \rightarrow & B_4 & \rightarrow & B_5 \end{array}$$

Предположим, что обе строки диаграммы точны, h_2 и h_4 — изоморфизмы, h_1 — эпиморфизм и h_5 — мономорфизм. Тогда h_3 является изоморфизмом.

Для доказательства этой леммы нужно установить, что h_3 — эпиморфизм с нулевым ядром. Читателю проще проверить это утверждение самому, чем разбирать чье-либо доказательство, поскольку на каждом этапе рассуждений имеется лишь одно логически возможное «движение».

Упражнения

1. Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство, U и V — открытые подмножества в X и $A = X \setminus U$. Докажите, что следующая диаграмма с точными последовательностями в качестве строк коммутативна:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\delta} & H_c^q(V \cap U) & \xrightarrow{\tau} & H_c^q(V) & \xrightarrow{i^*} & H_c^q(U \cap A) \xrightarrow{\delta} H_c^{q+1}(V \cap U) \\ & & \downarrow \tau & & \downarrow \tau & & \downarrow \tau \\ \dots & \xrightarrow{\delta} & H_c^q(U) & \xrightarrow{\tau} & H_c^q(X) & \xrightarrow{i^*} & H_c^q(A) \xrightarrow{\delta} H_c^{q+1}(U) \end{array}$$

(Замечание. Это утверждение можно доказать, используя основные свойства когомологий, которые уже изучены нами. То же самое можно сделать, вернувшись к коцепям.)

2. Покажите, что утверждение (4) теоремы 1.6 вытекает из частного случая, в котором X — компактное хаусдорфово пространство, а $X \setminus V$ состоит из одной точки. Докажите это, используя только основные свойства когомологий без возвращения к коцепям. (Указание. Используйте одноточечную компактификацию Александрова.)

§ 1.5. Свойство гомотопии

Пусть I — единичный отрезок. Заметим, что, если X локально компактно и хаусдорфово, этими свойствами обладает и произведение $X \times I$. Аналогично, для $t \in I$ отображения $X \rightarrow X \times I$, определенные соответствием $x \rightarrow (x, t)$, являются собственными.

1.10. Определение. Пусть X и Y — локально компактные хаусдорфовы пространства и $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ — собственные отображения. Будем говорить, что f_0 и f_1 *собственно гомотопны*, если существует такое собственное отображение $f: X \times I \rightarrow Y$, что $f(x, 0) = f_0(x)$ и $f(x, 1) = f_1(x)$. Оно называется *собственной гомотопией* между f_0 и f_1 .

Заметим, что для компактных X понятия гомотопии и собственной гомотопии совпадают.

1.11. Теорема. Для собственно гомотопных отображений $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ индуцированные гомоморфизмы $f_0^*, f_1^*: H_c^p(Y) \rightarrow H_c^p(X)$ совпадают при всех p .

Доказательство Для любого $t \in I$ определим $h_t: X \rightarrow X \times I$ соотношением $h_t(x) = (x, t)$. Поскольку $f_t = f h_t$, $t = 0, 1$, достаточно доказать равенство $h_0^* = h_1^*$.

Для $t \in I$ определим $j_t: X \rightarrow X \times \{t\}$, полагая $j_t(x) = (x, t)$, и пусть $i_t: X \times \{t\} \rightarrow X \times I$ — вложение. Коммутативная диа-

грамма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j_t} & X \times t \\ & \searrow h_t & \downarrow i_t \\ & & X \times I \end{array}$$

обеспечивает коммутативность диаграммы

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} H_c^p(X) & \xleftarrow{j_t^*} & H_c^p(X \times t) \\ & \nwarrow h_t^* & \uparrow i_t^* \\ & & H_c^p(X \times I) \end{array}$$

Поскольку j_t — гомеоморфизм, j_t^* — изоморфизм. Далее пусть $\rho: X \times I \rightarrow X$ — проекция, $\rho(x, t) = x$. Отображение ρ является собственным, и $\rho h_t = \text{id}: X \rightarrow X$ — тождественный гомеоморфизм. Поэтому $h_t^* \rho^* = \text{id}: H_c^p(X) \rightarrow H_c^p(X)$ — тождественный изоморфизм. Следовательно, имеем разложение в прямую сумму

$$(7) \quad H_c^p(X \times I) = \text{Im } \rho^* \oplus \text{Ker } h_t^*.$$

Поскольку j_t^* — изоморфизм, $\text{Ker } h_t^* = \text{Ker } i_t^*$. Поэтому

$$(8) \quad H_c^p(X \times I) = \text{Im } \rho^* \oplus \text{Ker } i_t^*.$$

Так как $h_t^* \rho^* = \text{id} = h_r^* \rho^*$, то

$$(9) \quad h_t^*|_{\text{Im } \rho^*} = h_r^*|_{\text{Im } \rho^*}.$$

Мы утверждаем, что для любого $a \in I$ и любого элемента $a \in \text{Ker } h_t^*$ найдется окрестность N точки t , такая, что $a \in \text{Ker } h_r^*$ для всех $r \in N$. Для доказательства этого заметим, что $a \in \text{Ker } i_t^*$. Рассмотрим отрезок точной когомологической последовательности

$$H_c^p(X \times (I \setminus t)) \xrightarrow{\tau} H_c^p(X \times I) \xrightarrow{i_t^*} H_c^p(X \times t).$$

Из точности следует существование такого элемента $b \in \text{Im } \tau \subset H_c^p(X \times (I \setminus t))$, что $\tau(b) = a$. По свойству (6) из § 1.3 можно найти такое открытое в $X \times (I \setminus t)$ множество U с компактным замыканием $\bar{U}$, что b принадлежит образу гомоморфизма $\tau': H_c^p(U) \rightarrow H_c^p(X \times (I \setminus t))$. Легко видеть, что существует такой отрезок $I_0 \subset I$, что t лежит в его внутренности и $U \subset X \times (I \setminus I_0)$. Тогда a принадлежит образу гомоморфизма $\tau'': H_c^p(X \times (I \setminus I_0)) \rightarrow H_c^p(X \times I)$, который в силу точности совпадает с ядром отображения $H_c^p(X \times I) \rightarrow H_c^p(X \times I_0)$. Теперь за N можно принять I_0 . Утверждение доказано.

Отсюда вытекает, что для каждого $t \in I$ и любого элемента $u \in H_c^p(X \times I)$ найдется такая окрестность N' точки t , что

$$h_r^*(u) = h_i^*(u)$$

при любом $r \in N'$. Действительно, заметим, что

$$u = u_1 + u_2,$$

где $u_1 \in \text{Im } p^*$ и $u_2 \in \text{Ker } h_i^*$. Из предыдущего утверждения следует существование такой окрестности N' точки t , что $u_2 \in \text{Ker } h_r^*$ для любого $r \in N'$. Тогда, используя (9), получим

$$h_r^*(u) = h_r^*(u_1) + h_r^*(u_2) = h_r^*(u_1) = h_i^*(u_1) = h_i^*(u_1) + h_i^*(u_2) = h_i^*(u).$$

Последнее утверждение можно сформулировать иначе. Снабдим группу $H_c^p(X)$ дискретной топологией. Тогда отображение $I \rightarrow H_c^p(X)$, определенное для любого $u \in H_c^p(X \times I)$ соответствием $t \rightarrow h_t^*(u)$, непрерывно. Поскольку I связно, это отображение постоянно для любого u . Следовательно, $h_0^*(u) = h_i^*(u)$, что и требовалось¹⁾.

§ 1.6. Сводка основных свойств теории когомологий

Пусть G — абелева группа. Наша теория когомологий включает следующие четыре положения:

(а) Каждому локально компактному хаусдорфову пространству X и любому целому p сопоставлена абелева группа $H_c^p(X; G)$, для краткости $H_c^p(X)$.

(б) Для каждого собственного отображения $f: X \rightarrow Y$ локально компактных хаусдорфовых пространств определена последовательность гомоморфизмов $f^*: H_c^p(Y) \rightarrow H_c^p(X)$.

(с) Всякому открытому подмножеству U локально компактного хаусдорфова пространства X отвечает последовательность гомоморфизмов

$$\tau_{U, X}: H_c^p(U) \rightarrow H_c^p(X).$$

(d) Для любого замкнутого подмножества A локально компактного хаусдорфова пространства X определена последова-

¹⁾ Это доказательство можно найти в [31]. Оно использует не специфику определения $H_c^p(X)$, а лишь основные свойства групп когомологий (особенно свойство (6) из § 1.3). Другое доказательство, основанное на рассмотрении коцепей, дал Спейсер [50].

тельность гомоморфизмов

$$\delta_X, \alpha: H_c^p(A) \rightarrow H_c^{p+1}(U),$$

где $U = X \setminus A$.

Эти сопоставления обладают следующими свойствами (по возможности мы сохранили первоначальную нумерацию этих свойств).

[Пример 1, § 1.1] Если X — пространство, состоящее из одной точки, то $H^p(X; G) = 0$ при $p \neq 0$, $H^0(X; G) \cong G$.

[(5), § 1.2] Если $f: X \rightarrow X$ — тождественный гомеоморфизм, то $f^*: H_c^p(X) \rightarrow H_c^p(X)$ — тождественный изоморфизм.

[(6), § 1.2] Если $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ — собственные отображения, то

$$(gf)^* = f^*g^*: H_c^p(Z) \rightarrow H_c^p(X).$$

[(3), § 1.3] $\tau_{X, X}: H_c^p(X) \rightarrow H_c^p(X)$ — тождественный изоморфизм.

[(4), § 1.3] Если $V \subset U \subset X$, где U и V открыты, то

$$\tau_{V, X} = \tau_{U, X} \tau_{V, U}.$$

[(5), § 1.3] Пусть $f: X \rightarrow Y$ — такое собственное отображение, что $f(U) \subset V$ и $f(X \setminus U) \subset Y \setminus V$ для открытых подмножеств $U \subset X$ и $V \subset Y$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_c^p(X) & \xleftarrow{f^*} & H_c^p(Y) \\ \uparrow \tau_{U, X} & & \uparrow \tau_{V, Y} \\ H_c^p(U) & \xleftarrow{f_0^*} & H_c^p(V) \end{array}$$

коммутативна.

[(6), § 1.3] Для любого $a \in H_c^p(X)$ существует открытое в X подмножество U с компактным замыканием и такой элемент $b \in H_c^p(U)$, что $\tau(b) = a$.

[(7) § 1.3] Пусть U — открытое подмножество в X с компактным замыканием $\bar{U}$. Если элемент $a \in H_c^p(U)$ удовлетворяет условию $\tau_{U, X}(a) = 0$, то существует такое открытое подмножество V пространства X с компактным замыканием $\bar{V}$, что $U \subset V$ и $\tau_{U, V}(a) = 0$.

[(1), теорема 1.6] Пусть A — замкнутое подмножество локально компактного пространства X и $U = X \setminus A$. Тогда точная последовательность

$$\dots \rightarrow H_c^p(U) \xrightarrow{\tau} H_c^p(X) \xrightarrow{i^*} H_c^p(A) \xrightarrow{\delta} H_c^{p+1}(U) \rightarrow \dots$$

[(2), теорема 1.6] Пусть $V \subset U$ — открытые подмножества в X , $A = X \setminus U$ и $B = X \setminus V$. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_c^q(V) & \xrightarrow{\tau_{V,U}} & H_c^q(U) \\ \uparrow \delta_{X,B} & & \uparrow \delta_{X,A} \\ H_c^{q-1}(B) & \xrightarrow{h^*} & H_c^{q-1}(A) \end{array}$$

коммутативна.

[(3), теорема 1.6] В предположениях свойств (5) из § 1.3 имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} H_c^p(U) & \xleftarrow{f_1^*} & H_c^p(V) \\ \uparrow \delta & & \uparrow \delta \\ H_c^{p-1}(A) & \xleftarrow{f_2^*} & H_c^{p-1}(B) \end{array}$$

Здесь $f_1: A \rightarrow B$ и $f_2: U \rightarrow V$ индуцированы отображением $f: X \rightarrow Y$.

[(4), теорема 1.6] Пусть $U \subset V$ — открытые в X подмножества и $A = X \setminus U$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_c^q(V \cap A) & \xrightarrow{\sigma_{V,V \cap A}} & H_c^{q+1}(U) \\ \downarrow \tau & \searrow \delta_{X,A} & \\ H_c^q(A) & \xrightarrow{\delta_{X,A}} & \end{array}$$

коммутативна.

[Теорема 1.11] Если $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ собственны гомотопны, то индуцированные гомоморфизмы $f_0^*, f_1^*: H_c^p(Y) \rightarrow H_c^p(X)$ совпадают.

Читателя может удивить, что мы выделили эти свойства как основные, фундаментальные. Оказывается, что они в некотором смысле (который будет уточнен в дальнейшем) характеризуют теорию когомологий. Этот вопрос будет подробно обсужден в гл. 6.

Замечание. Свойства (4) из § 1.3 и (2) из теоремы 1.6 имеют одинаковые предположения и вместе утверждают коммутативность следующей диаграммы, в которой горизонтальные последовательности точны:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & H_c^p(U) & \rightarrow & H_c^p(X) & \rightarrow & H_c^p(A) \xrightarrow{\delta} H_c^{p+1}(U) \rightarrow \dots \\ & & \uparrow \tau & & \uparrow \parallel & & \uparrow h^* & & \uparrow \tau \\ \dots & \rightarrow & H_c^p(V) & \rightarrow & H_c^p(X) & \rightarrow & H_c^p(B) \xrightarrow{\delta} H_c^{p+1}(V) \rightarrow \dots \end{array}$$

Точно так же, свойство (5) из § 1.3 и свойство (3) из теоремы 1.6 имеют одни и те же предположения и вместе утверждают, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & H_c^p(U) & \xrightarrow{\tau} & H_c^p(X) & \rightarrow & H_c^p(A) \xrightarrow{\delta} H_c^{p+1}(U) \rightarrow \dots \\ & & \uparrow f_0^* & & \uparrow f^* & & \uparrow f_2^* & & \uparrow f_0^* \\ \dots & \rightarrow & H_c^p(V) & \xrightarrow{\tau} & H_c^p(Y) & \rightarrow & H_c^p(B) \xrightarrow{\delta} H_c^{p+1}(V) \rightarrow \dots \end{array}$$

К этому списку можно добавить и коммутативную диаграмму из упражнения 1 из § 1.4.

Упражнение

Пусть $f: X \rightarrow Y$ — собственное отображение локально компактных пространств, $A \subset X$ и $B \subset Y$ — такие замкнутые подмножества, что $f(A) \subset B$. С помощью двух коммутативных диаграмм из предыдущего замечания получите следующую коммутативную диаграмму точных последовательностей:

$$\begin{array}{ccccccc} H_c^q(Y \setminus B) & \xrightarrow{\tau} & H_c^q(Y) & \xrightarrow{f^*} & H_c^q(B) & \xrightarrow{\delta} & H_c^{q+1}(Y \setminus B) \\ \downarrow & & \downarrow f^* & & \downarrow f_1^* & & \downarrow \\ H_c^q(X \setminus A) & \xrightarrow{\tau} & H_c^q(X) & \xrightarrow{f^*} & H_c^q(A) & \xrightarrow{\delta} & H_c^{q+1}(X \setminus A) \end{array}$$

Здесь $f_1: A \rightarrow B$ индуцировано отображением f (мы не предполагаем, что $f^{-1}(B) = A$ — в этом смысл упражнения).

§ 1.7. Дополнение. Доказательство теоремы 1.4

В этом параграфе используются те же обозначения, что и в § 1.4: X — локально компактное пространство, A — замкнутое подмножество в X . Рассмотрим следующую короткую точную последовательность коцепных комплексов:

$$Q^*(X, A) \xrightarrow{I} C_c^*(X, A) \xrightarrow{k} C_c^*(X, A) / Q^*(X, A).$$

С помощью ассоциированной с ней длинной точной последовательности когомологий легко доказать, что гомоморфизм $j^*: H^p(Q^*(X, A)) \rightarrow H^p(C_c^*(X, A))$ является изоморфизмом при любом p тогда и только тогда, когда $H^p(C_c^*(X, A)/Q^*(X, A)) = 0$ для всех p . Поэтому достаточно доказать последнее равенство.

Имеем $C_c^p(X, A) = \Phi_c^p(X, A)/\Phi_0^p(X)$ (см. § 1.4). Аналогично $Q^p(X, A) = R^p(X, A)/\Phi_0^p(X)$, где $R^p(X, A) = \{\varphi \in \Phi_c^p(X) \mid \varphi|_{X \setminus A} = 0\}$. Воспользовавшись теоремой Нётер, получим

$$\frac{\Phi_c^p(X, A)}{\Phi_0^p(X)} \bigg/ \frac{R^p(X, A)}{\Phi_0^p(X)} \cong \Phi_c^p(X, A) / R^p(X, A).$$

Кроме того, легко проверить, что этот изоморфизм коммутирует с δ . Таким образом, комплексы $C_c^*(X, A)/Q^*(X, A)$ и $\Phi_c^*(X, A)/R^*(X, A)$ изоморфны. Следовательно, мы должны доказать, что

$$H^p(\Phi_c^*(X, A)/R^*(X, A)) = 0$$

для любого p .

Рассмотрим сначала случай компактного X . Мы докажем, что если $u \in Z^p(\Phi^*(X, A)/R^*(X, A))$, то $u \in B^p(\Phi^*(X, A)/R^*(X, A))$. Пусть $\varphi \in \Phi^p(X, A)$ представляет класс u , тогда $\delta\varphi \in R^{p+1}(X, A)$. В терминах носителей это утверждение можно выразить так:

$$|i^\# \varphi| = \emptyset, \quad |\delta\varphi| \subset X \setminus A.$$

Поскольку $|i^\# \varphi| = \emptyset$, любая точка $a \in A$ имеет такую открытую окрестность U_a , что $\varphi(x_0, \dots, x_p) = 0$ для $x_0, \dots, x_p \in U_a \cap A$. Тогда $\{U_a | a \in A\} \cup \{X \setminus A\}$ — открытое покрытие пространства X . Выберем из него конечное подпокрытие $\mathcal{U}_1$. Аналогично, в силу $|\delta\varphi| \subset X \setminus A$ каждая точка $x \in A$ обладает такой открытой окрестностью V_x , что если $x_0, \dots, x_{p+1} \in V_x$, то $(\delta\varphi)(x_0, \dots, x_{p+1}) = 0$. Тогда $\{V_x | x \in A\} \cup \{X \setminus A\}$ — также открытое покрытие пространства X . Пусть $\mathcal{U}_2$ — конечное подпокрытие этого покрытия.

Теперь нам необходимо сделать небольшое отступление об открытых покрытиях. Если $\mathcal{V}$ — открытое покрытие и $V \in \mathcal{V}$, то обозначим через V^* объединение всех элементов покрытия, которые имеют непустое пересечение с V . Это множество называется *звездой* множества V . Положим $\mathcal{V}^* = \{V^* | V \in \mathcal{V}\}$. Для любого покрытия $\mathcal{U}$ компактного хаусдорфова пространства существует такое покрытие $\mathcal{V}$, что $\mathcal{V}^*$ вписано в $\mathcal{U}$ (покрытие $\mathcal{V}$ называется *звездно вписанным* в $\mathcal{U}$). Доказательство этого стандартного факта — хорошее упражнение в общей топологии.

Замечание. Один из стандартных критериев паракомпактности формулируется в терминах звездной вписанности¹⁾.

Вернемся к доказательству. Пусть $\mathcal{U}$ — такое покрытие пространства X , что $\mathcal{U}^*$ вписано как в $\mathcal{U}_1$, так и в $\mathcal{U}_2$. Пусть $\mathcal{U}_0 = \{U \in \mathcal{U} | U \cap A \neq \emptyset\}$ и N — объединение всех множеств из $\mathcal{U}_0$. Тогда N — открытая окрестность множества A . Для любого $U \in \mathcal{U}_0$ выберем точку $x_U \in U \cap A$. Определим (не являющееся непрерывным) отображение $f: X \rightarrow X$ правилом $f(x) = x$, если $x \notin N$, и $f(x) = x_U$ при $x \in N$, где $U \in \mathcal{U}_0$ выбрано так, что $x \in U$. Тогда $f(N) \subset A$.

¹⁾ Имеется в виду известная теорема Стоуна (Stone A. H., Bull. Amer. Math. Soc., 54 (1948), 977—982) о том, что свойство паракомпактности эквивалентно наличию у любых открытых покрытий звездно вписанных измельчений. — Прим. ред.

Далее определим гомоморфизм $D: \Phi^p(X) \rightarrow \Phi^{p-1}(X)$ формулой

$$(D\psi)(x_0, \dots, x_{p-1}) = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \psi(fx_0, \dots, fx_i, x_i, \dots, x_{p-1}).$$

(Легко проверить, что функция $D\psi$ конечнозначна.) Прямое вычисление показывает, что

$$\psi - f^*(\psi) = \delta D(\psi) + D\delta(\psi)$$

для любых $\psi \in \Phi^p(X)$ (D — пример коцепной гомотопии, понятия, которое будет изучаться ниже). Последнее равенство можно записать как

$$\psi = \delta D\psi + (f^*\psi + D\delta\psi).$$

Применим это равенство к рассматриваемому $\varphi \in \Phi^p(X, A)$. В этом случае $D\varphi \in \Phi^{p-1}(X, A)$, а $f^*\varphi$ и $D\delta\varphi$ содержатся в $R^p(X, A)$. Для доказательства следует использовать определения покрытия $\mathcal{U}$, отображения f и гомоморфизма D . Переходя к факторкомплексу $\{\Phi^p(X, A)/R^p(X, A)\}$, получаем, что u является кограницей. Таким образом, для компактного X теорема 1.4 доказана¹⁾.

Далее, пусть Y — компактное хаусдорфово пространство и B — это непустое замкнутое подмножество. Пусть $X = Y \setminus \{b\}$ и $A = B \setminus \{b\}$, где $b \in B$ — некоторая точка. Заметим, что X открыто в Y , а A открыто в B . Применим свойство (5) из § 1.3 к отображению включения $i: B \rightarrow Y$. Поскольку $i(A) \subset X$ и $i(\{b\}) \subset \{b\}$, коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C_c^*(A) & \xrightarrow{\sigma_{A, B}} & C^*(B) \\ \uparrow i_0^\# & & \uparrow i^\# \\ C_c^*(X) & \xrightarrow{\sigma_{X, Y}} & C^*(Y) \end{array}$$

Имеем $\text{Ker } i^\# = C^*(Y, B)$ и $\text{Ker } i_0^\# = C_c^*(X, A)$. Так как диаграмма коммутативна, то $\sigma_{X, Y}$ отображает $C_c^*(X, A)$ в $C^*(Y, B)$. Таким образом, коммутативна также диаграмма

$$(10) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow C^*(Y, B) & \rightarrow & C^*(Y) & \xrightarrow{i^\#} & C^*(B) & \rightarrow & 0 \\ & \uparrow & \uparrow \sigma_{X, Y} & \uparrow i_0^\# & \uparrow \sigma_{A, B} & & \\ 0 \rightarrow C_c^*(X, A) & \rightarrow & C_c^*(X) & \rightarrow & C_c^*(A) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Здесь строки точны, а каждая вертикальная стрелка обозначает мономорфизм.

¹⁾ Эта часть доказательства принадлежит Уоллесу [62].

Положим $V = Y \setminus B = X \setminus A$. По свойству (4) из § 1.3 коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C_c^*(V) & \xrightarrow{\sigma_{V,X}} & C_c^*(X) \\ & \searrow \sigma_{V,Y} & \downarrow \sigma_{X,Y} \\ & & C^*(Y) \end{array}$$

Каждое отображение σ — мономорфизм и $\text{Im } \sigma_{V,X} = Q^*(X, A)$, $\text{Im } \sigma_{V,Y} = Q^*(Y, B)$. Поэтому $\sigma_{X,Y}$ отображает $Q^*(X, A)$ изоморфно на $Q^*(Y, B)$. Таким образом, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Q^*(X, A) & \rightarrow & C_c^*(X, A) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \\ Q^*(Y, B) & \rightarrow & C^*(Y, B) \end{array}$$

коммутативна. Здесь горизонтальные стрелки обозначают отображения включения, а вертикальные стрелки — отображения, индуцированные гомоморфизмом $\sigma_{X,Y}$. Рассмотрим индуцированные отображения групп когомологий

$$\begin{array}{ccc} H^p(Q^*(X, A)) & \xrightarrow{4} & H^p(C_c^*(X, A)) \\ \downarrow 1 & & \downarrow 3 \\ H^p(Q^*(Y, B)) & \xrightarrow{2} & H^p(C^*(Y, B)) \end{array}$$

Отображение 1 — изоморфизм, поскольку оно индуцировано изоморфизмом коцепей. Выше было доказано, что 2 — тоже изоморфизм. Из коммутативности диаграммы вытекает, что 4 — изоморфизм, если изоморфизмом является отображение 3.

Докажем, что отображение с номером 3 — изоморфизм. Для этого в диаграмме (10) перейдем к когомологиям и воспользуемся леммой о пяти гомоморфизмах (леммой 1.9). Получаем диаграмму

$$(11) \quad \begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\delta} & H^p(C^*(Y, B)) & \rightarrow & H^p(Y) & \xrightarrow{i^*} & H^p(B) \xrightarrow{\delta} \dots \\ & & \uparrow 3 & & \uparrow \tau_{X,Y} & & \uparrow \tau_{A,B} \\ \dots & \xrightarrow{\delta} & H^p(C_c^*(X, A)) & \rightarrow & H_c^p(X) & \xrightarrow{i_0^*} & H_c^p(A) \xrightarrow{\delta} \dots \end{array}$$

Гомоморфизмы $\tau_{X,Y}$ и $\tau_{A,B}$ включаются в точные когомологические последовательности

$$\begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{\delta} & H_c^p(X) & \xrightarrow{\tau_{X,Y}} & H^p(Y) & \xrightarrow{i^*} & H^p(\{b\}) & \xrightarrow{\delta} \\ & \downarrow i_0^* & & \downarrow i^* & & \downarrow \parallel & \\ \xrightarrow{\delta} & H_c^p(A) & \xrightarrow{\tau_{A,B}} & H^p(B) & \xrightarrow{i_0^*} & H^p(\{b\}) & \xrightarrow{\delta} \end{array}$$

Имеем $H^p(\{b\}) = 0$ для $p \neq 0$ и $H^0(\{b\}) = G$. Отображения $f: Y \rightarrow \{b\}$ и $g: B \rightarrow \{b\}$ собственные, так как Y и B компактны. Имеем $f \circ j = \text{id}$, $g \circ j_0 = \text{id}$. Следовательно, $j^* \circ f^* = \text{id}$ и $j_0^* \circ g^* = \text{id}$. Отсюда легко вытекает, что имеют место разложения в прямую сумму

$$H^0(Y) = \text{Im } \tau_{X,Y} \oplus \text{Im } f^*,$$

$$H^0(B) = \text{Im } \tau_{A,B} \oplus \text{Im } g^*,$$

совместимые с гомоморфизмом $i^*: H^0(Y) \rightarrow H^0(B)$. Кроме того, f^* и g^* — мономорфизмы, а $\tau_{X,Y}$ и $\tau_{A,B}$ — мономорфизмы в нулевой размерности. Объединяя все эти факты вместе, заключаем, что в диаграмме (11) $H^0(Y)$ и $H^0(B)$ можно заменить соответственно на $\text{Im } \tau_{X,Y}$ и $\text{Im } \tau_{A,B}$. После этого воспользуемся леммой о пяти гомоморфизмах для доказательства того, что отображение с номером 3 — изоморфизм.

Замечание. Такого рода рассуждения будут подробнее рассматриваться в гл. 2 в связи с так называемыми приведенными группами когомологий.

Теперь легко закончить доказательство в общем случае. Пусть X — произвольное локально компактное хаусдорфово пространство и A — его замкнутое подмножество. Обозначим через $Y = X \cup \infty$ одноточечную компактификацию Александера пространства X . Пусть $B = A \cup \infty$. Остается воспользоваться только что изложенной конструкцией.

Теорема 1.4 доказана.

Применения и дальнейшее развитие теории когомологий

§ 2.1. Гомотопическая эквивалентность. Стягиваемые пространства

Стандартное определение: два пространства X и Y имеют одинаковый *гомотопический тип*, если существуют непрерывные отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$, такие, что gf гомотопно тождественному отображению $X \rightarrow X$, а fg — тождественному отображению $Y \rightarrow Y$.

Аналогично, локально компактные хаусдорфовы пространства X и Y имеют один и тот же *собственный гомотопический тип*, если в этом определении отображения f, g , а также гомотопии являются *собственными*.

Примеры. При $n > 0$ евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и пространство, состоящее из одной точки, имеют одинаковый гомотопический тип, но разные собственные гомотопические типы, поскольку отображение $\mathbb{R}^n$ в точку несобственно.

Следующий пример более интересен. Пусть X и Y — сегменты прямой, $X = \{t | 0 \leq t < 1\}$ и $Y = \{t | -1 < t < 1\}$. Эти пространства имеют одинаковый гомотопический тип, поскольку оба стягиваемы. Более того, любое непрерывное отображение $X \rightarrow Y$ или $Y \rightarrow X$ является гомотопической эквивалентностью. Отображение включения X в Y является собственным. Отображение $Y \rightarrow X$, заданное соответствием $t \rightarrow t^2$, также собственно. Тем не менее X и Y имеют разный собственный гомотопический тип. Это следует из приведенного в этой главе вычисления групп когомологий X и Y .

Однако для компактных пространств оба понятия — гомотопического и собственного гомотопического типов — совпадают.

Отображения f и g , участвующие в определении гомотопического типа (соответственно собственного гомотопического типа), называются *гомотопическими эквивалентностями* (соответственно *собственными гомотопическими эквивалентностями*).

2.1. Теорема. Если $f: X \rightarrow Y$ — собственная гомотопическая эквивалентность, то $f^*: H_c^p(Y) \rightarrow H_c^p(X)$ является изоморфизмом.

Доказательство оставляем читателю. Обратное утверждение неверно. Одна из основных задач алгебраической топологии состоит в отыскании условий, достаточных для совпадения гомо-

топических типов двух пространств (из некоторого подходящего класса).

2.2. Определение. Пространство X *стягиваемо в точку*, если существует отображение $f: X \times I \rightarrow X$, такое, что $f(x, 0) = x$ и $f(x, 1) = x_0 \in X$ для всех $x \in X$.

Легко видеть, что X тогда и только тогда имеет гомотопический тип пространства, состоящего из одной точки, когда X стягиваемо в точку. Пространство тогда и только тогда имеет *собственный* гомотопический тип точки, когда оно стягиваемо в точку и компактно. Таким образом, для компактного стягиваемого пространства X имеем

$$H^q(X; G) = \begin{cases} 0, & q \neq 0, \\ G, & q = 0. \end{cases}$$

2.3. Определение. Пусть A — подмножество в X . Мы скажем, что A — *ретракт* пространства X , если существует такое непрерывное отображение $f: X \rightarrow A$, что $f(a) = a$ для любой точки $a \in A$ (это отображение называется *ретракцией*). Мы скажем, что A — *деформационный ретракт* пространства X , если существуют ретракция $f: X \rightarrow A$ и отображение $g: X \times I \rightarrow X$, такие, что $g(x, 0) = x$ и $g(x, 1) = f(x)$ для всех $x \in X$.

Если X локально компактно и хаусдорфово, то A называется *собственным ретрактом* пространства X , если ретракция $f: X \rightarrow A$ — *собственное* отражение. Аналогично, в определении *собственного деформационного ретракта* требуем, чтобы гомотопия $g: X \times I \rightarrow X$ была *собственной*.

Упражнения

1. Докажите, что пространство X и его деформационный ретракт (соответственно собственный деформационный ретракт) A имеют одинаковый гомотопический тип (соответственно собственный гомотопический тип).

2. Пусть A — собственный ретракт пространства X и $U = X \setminus A$. Покажите, что в точной последовательности

$$\dots \xrightarrow{\delta} H_c^q(U) \xrightarrow{\tau} H_c^q(X) \xrightarrow{i^*} H_c^q(A) \rightarrow \dots$$

$\delta = 0$, τ — мономорфизм, а i^* — эпиморфизм. Кроме того, $\text{Im } \tau$ выделяется прямым слагаемым в $H_c^q(X)$ и

$$H_c^q(X) \cong H_c^q(A) \oplus H_c^q(U).$$

3. Докажите, что если в упр. 2 подпространство A — собственный деформационный ретракт X , то $H_c^q(U) = 0$ для всех q .

4. Докажите, что ретракт хаусдорфова пространства — замкнутое подмножество.

§ 2.2. Приведенные нульмерные группы когомологий компактного пространства

Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство. Его отображение в одноточечное пространство является *собственным* тогда и только тогда, когда X непусто и компактно. В связи с этим в настоящем параграфе мы ограничимся в основном рассмотрением непустых компактных пространств.

Пусть P — пространство, состоящее из одной точки. Для любого компактного хаусдорфова пространства X существует единственное (очевидно, собственное) отображение $\varphi_X: X \rightarrow P$.

2.4. Определение. Коядро $H^0(X; G)$ индуцированного гомоморфизма $\varphi_X^*: H^0(P) \rightarrow H^0(X; G)$ называется *приведенной 0-мерной группой когомологий* пространства X . Таким образом,

$$\tilde{H}^0(X; G) = H^0(X; G) / \text{Im } \varphi_X^*.$$

Кроме того, при $q \neq 0$ положим $H^q(X; G) = H^q(X; G)$.

2.5. Лемма. Если X и Y компактны, а $f: X \rightarrow Y$ непрерывно, то индуцированный гомоморфизм $f^*: H^0(Y; G) \rightarrow H^0(X; G)$ обладает свойством

$$f^*(\text{Im } \varphi_Y^*) \subseteq \text{Im } \varphi_X^*.$$

Следовательно, f^* индуцирует гомоморфизм факторгрупп

$$\tilde{H}^0(Y; G) \rightarrow \tilde{H}^0(X; G)$$

(который по-прежнему будет обозначаться через f^*).

Доказательство оставляем читателю. Заметим, что для этого отображения остаются в силе свойства (5) и (6) из § 1.2.

Далее, пусть X — компактное хаусдорфово пространство, A — замкнутое подмножество и $U = X \setminus A$ — дополнение к A . В коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H^0(P) & & & & \\
 & \nearrow \varphi_X^* & & \searrow \varphi_A^* & & & \\
 0 \longrightarrow & H_c^0(U) & \xrightarrow{\tau} & H^0(X) & \xrightarrow{i^*} & H^0(A) & \xrightarrow{\sigma} H_c^0(U) \xrightarrow{\tau} \dots \\
 & \searrow \tau' & & \downarrow p_1 & & \downarrow p_2 & \\
 & & & \tilde{H}^0(X) & \xrightarrow{i} & \tilde{H}^0(A) &
 \end{array}$$

строка — начало когомологической последовательности пары (X, A) , p_1 и p_2 — естественные проекции и $\tau' = p_1 \tau$. Из этой диа-

граммы видно, что $\text{Ker } \delta \supset \text{Im } \varphi_A^*$. Следовательно, существует единственный гомоморфизм $\delta': \tilde{H}^0(A) \rightarrow H_c^1(U)$, такой, что $\delta' p_2 = \delta$. Таким образом, возникает последовательность

$$0 \rightarrow H_c^0(U) \xrightarrow{\tau'} \tilde{H}^0(X) \xrightarrow{i^*} \tilde{H}^0(A) \xrightarrow{\delta'} H_c^1(U) \rightarrow \dots$$

Она называется *приведенной когомологической последовательностью пары* (X, A) .

2.6. Теорема. *Приведенная когомологическая последовательность (компактной) пары точна.*

Доказательство. Выберем точку $a \in A$. Пусть $f: P \rightarrow X$ и $g: P \rightarrow A$ — отображения P в точку a . Тогда $\varphi_X f$ и $\varphi_A g$ — тождественные отображения. Следовательно, тождественны также гомоморфизмы $f^* \varphi_X^*: H^0(P) \rightarrow H^0(P)$ и $g^* \varphi_A^*: H^0(P) \rightarrow H^0(P)$. Поэтому имеют место разложения в прямую сумму

$$H^0(X) = \text{Im } \varphi_X^* \oplus \text{Ker } f^*,$$

$$H^0(A) = \text{Im } \varphi_A^* \oplus \text{Ker } g^*.$$

Таким образом, p_1 отображает $\text{Ker } f^*$ изоморфно на $H^0(X)$, а p_2 отображает $\text{Ker } g^*$ изоморфно на $H^0(A)$. Кроме того, φ_X^* и φ_A^* мономорфны. Следовательно, $H^0(X; G) \cong G \oplus H^0(X; G)$. Далее, легко видеть, что отображение $i^*: H^0(X) \rightarrow H^0(A)$ совместимо с этим прямым разложением. Более точно, i^* отображает $\text{Im } \varphi_X^*$ изоморфно на $\text{Im } \varphi_A^*$ и $i^*(\text{Ker } f^*) \subset \text{Ker } g^*$. Следовательно, $\text{Im } \tau = \text{Ker } i^*$ содержится в $\text{Ker } f^*$.

Кроме того, как было замечено раньше, $\text{Im } \varphi_A^*$ содержится в $\text{Ker } \delta$.

Объединив вместе все эти факты, легко убедиться, что приведенная когомологическая последовательность является точной.

В процессе доказательства теоремы 2.6 получено также следующее утверждение.

2.6'. Лемма. *Для любого компактного хаусдорфова пространства X имеет место изоморфизм*

$$H^0(X; G) \cong \tilde{H}^0(X; G) \oplus G.$$

Этот изоморфизм не является естественным.

Разложение в прямую сумму не является естественным, поскольку оно зависит от выбора точки a . Беря точку a в разных компонентах пространства X , будем получать различные разложения в прямую сумму¹⁾.

¹⁾ См. лемму 1.2 гл. 1. — Прим. ред.

Замечание. Может случиться, что в предыдущей теореме U компактно. Однако в приведенной когомологической последовательности группу $H^0(U)$ нельзя заменить на $\tilde{H}^0(U)$. Если это сделать, последовательность станет неточной.

2.7. Теорема. Если X — компактное стягиваемое пространство, то $H^q(X; G) = 0$ при всех q .

Эта теорема — простое следствие определений и результатов из § 2.1.

2.8. Теорема. Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство, не являющееся компактным, и $\dot{X}$ — его одноточечная компактификация Александера. Включение $X \rightarrow \dot{X}$ индуцирует изоморфизм $H_c^q(X; G) \cong \tilde{H}^q(\dot{X}; G)$.

Это вытекает из рассмотрения точной когомологической последовательности пары $(X, X \setminus X)$.

2.9. Следствие. Пусть X — некомпактное локально компактное хаусдорфово пространство, одноточечная компактификация которого — стягиваемый компакт. Тогда $H_c^q(X; G) = 0$ при всех q .

Упражнения

1. Пусть X — хаусдорфов компакт, $V \subset U$ — открытые подмножества в X с непустыми дополнениями, $A = X \setminus U$ и $B = X \setminus V$. Докажите коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} H_c^0(U) & \xrightarrow{\tau'} & \tilde{H}^0(X) & \xrightarrow{i^*} & \tilde{H}^0(A) & \xrightarrow{\delta'} & H_c^1(U) \\ \uparrow \tau_{v,u} & & \uparrow \parallel & & \uparrow & & \uparrow \tau_{v,u} \\ H_c^0(V) & \xrightarrow{\tau'} & \tilde{H}^0(X) & \xrightarrow{j^*} & \tilde{H}^0(B) & \xrightarrow{\delta'} & H_c^1(V) \end{array}$$

2. Пусть X и Y — компактные хаусдорфовы пространства, а A и B — непустые замкнутые подмножества в X и Y соответственно. Предположим, что $f: X \rightarrow Y$ — такое непрерывное отображение, что $f(A) \subset B$ и $f(U) \subset V$, где $U = X \setminus A$ и $V = Y \setminus B$. Докажите, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} H_c^0(U) & \xrightarrow{\tau'} & \tilde{H}^0(X) & \xrightarrow{i^*} & \tilde{H}^0(A) & \xrightarrow{\delta'} & H_c^1(U) \\ \uparrow f_0^* & & \uparrow f^* & & \uparrow i_1^* & & \uparrow f_0^* \\ H_c^0(V) & \xrightarrow{\tau'} & \tilde{H}^0(Y) & \xrightarrow{j^*} & \tilde{H}^0(B) & \xrightarrow{\delta'} & H_c^1(V) \end{array}$$

коммутативна.

3. Пусть X — компактное пространство. Опишите структуру группы $H^0(X; G)$ в терминах топологических свойств пространства X (ср. § 1.1).

§ 2.3. Теоремы о прямых суммах

Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство и A — его открыто-замкнутое подмножество (если A — собственное подмножество, то X несвязно). Определены гомоморфизмы

$$\begin{aligned} i^*: H_c^q(X) &\rightarrow H_c^q(A), \\ \tau_{A, X}: H_c^q(A) &\rightarrow H_c^q(X). \end{aligned}$$

2.10. Лемма. В указанных предположениях $i^* \tau: H_c^q(A) \rightarrow H_c^q(A)$ — тождественный изоморфизм и, следовательно, имеет место разложение в прямую сумму

$$H_c^q(X) = \text{Im } \tau \oplus \text{Ker } i^*$$

(τ — мономорфизм, i^* — эпиморфизм).

Доказательство. Мы воспользуемся тем, что собственное отображение $i: A \rightarrow X$ обладает свойством (5) из § 1.3. Оно отображает открытое подмножество A пространства A в открытое подмножество A пространства X . Кроме того, $i(A \setminus A) \subset \subset X \setminus A$. Следовательно, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_c^q(A) & \xrightarrow{\tau_{A, A}} & H_c^q(A) \\ \uparrow i_0^* & & \uparrow i^* \\ H_c^q(A) & \xrightarrow{\tau_{A, X}} & H_c^q(X) \end{array}$$

коммутативна. Здесь $i_0: A \rightarrow A$ индуцировано отображением i , т. е. i_0 — тождественное отображение. Таким образом, i_0^* , а также $\tau_{A, A}$ — тождественные изоморфизмы. Лемма следует из этих утверждений.

2.11. Теорема. Пусть локально компактное хаусдорфово пространство X является дизъюнктивным объединением непустых открытых подмножеств A и B . Тогда отображения

$$\begin{aligned} \tau_{A, X}: H_c^p(A) &\rightarrow H_c^p(X), \\ \tau_{B, X}: H_c^p(B) &\rightarrow H_c^p(X) \end{aligned}$$

— мономорфизмы, а $H_c^p(X)$ — прямая сумма их образов.

Доказательство. По лемме 2.10 $\tau_{A, X}$ и $\tau_{B, X}$ — мономорфизмы и каждый из образов — прямое слагаемое. Пусть $i: A \rightarrow X$

и $j: B \rightarrow X$ — отображения включения. Точны следующие последовательности:

$$\begin{aligned} H_c^p(A) &\xrightarrow{\tau_{A, X}} H_c^p(X) \xrightarrow{i^*} H_c^p(B), \\ H_c^p(B) &\xrightarrow{\tau_{B, X}} H_c^p(X) \xrightarrow{i^*} H_c^p(A). \end{aligned}$$

Отсюда $\text{Ker } j^* = \text{Im } \tau_{A, X}$ и $\text{Ker } i^* = \text{Im } \tau_{B, X}$. Поэтому теорема вытекает из леммы 2.10.

2.12. Следствие. Пусть $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$ — дизъюнктное объединение открытых непустых подмножеств X_i локально компактного пространства X . Тогда отображения

$$\tau_{X_i, X}: H_c^p(X_i) \rightarrow H_c^p(X)$$

являются мономорфизмами и $H_c^p(X)$ — прямая сумма их образов.

Доказательство проводится индукцией по n .

Довольно неожиданно, что это утверждение остается справедливым и для дизъюнктного объединения любого количества открытых подпространств. Это объясняется тем, что мы рассматриваем теорию когомологий с компактными носителями.

2.13. Теорема. Пусть X — объединение семейства $\{X_i\}$ непересекающихся открытых подпространств. Тогда все отображения

$$\tau_{X_i, X}: H_c^p(X_i) \rightarrow H_c^p(X)$$

являются мономорфизмами, а $H_c^p(X)$ — прямая сумма их образов.

Набросок доказательства. Достаточно показать, что $\tau_{X_i, X}$ — мономорфизмы, что их образы являются прямыми слагаемыми и что пересечения $\text{Im } \tau_{X_i, X} \cap \text{Im } \tau_{X_j, X}$ состоят при $i \neq j$ лишь из нуля¹⁾. Для доказательства теоремы остается воспользоваться свойством (6) из § 1.3.

¹⁾ Надо воспользоваться также следствием 2.12. Другое доказательство теоремы вытекает, очевидно, из того факта, что коцепной комплекс $C_c^*(X; G)$ — прямая сумма комплексов $C_c^*(X_i; G)$, см. конец § 4.7. — Прим. ред.

§ 2.4. Когомологии сфер и евклидовых пространств. Применения

Будем использовать следующие обозначения:

$$E^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}, \quad U^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}, \\ S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}.$$

Всякое пространство, гомеоморфное S^{n-1} , будем называть $(n-1)$ -сферой, а пространства, гомеоморфные E^n и U^n — соответственно замкнутыми и открытыми n -дисками (или n -шарами) по аналогии со случаями $n=2$ и $n=3$.

Напомним следующие простые факты:

- (1) U^n и $\mathbb{R}^n$ гомеоморфны.
- (2) $\mathbb{R}^n$ гомеоморфно дополнению к точке в S^n , т. е. сфера S^n гомеоморфна одноточечной компактификации пространства $\mathbb{R}^n$. Это устанавливается с помощью стереографической проекции.
- (3) E^n компактно, связно и стягиваемо.
- (4) Сфера S^n компактна при $n \geq 0$ и связна при $n \geq 1$ (S^0 — двоеточие).

По определению $\mathbb{R}^0$ — пространство, состоящее из одной точки.

2.14. Теорема. Пространства $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 0$) и S^n ($n \geq 1$) имеют следующие группы когомологий:

$$H_c^q(\mathbb{R}^n; G) = \begin{cases} G & \text{при } q = n, \\ 0 & \text{при } q \neq n, \end{cases} \\ H^q(S^n; G) = \begin{cases} G & \text{для } q = 0 \text{ или } q = n, \\ 0 & \text{при } q \neq 0, n. \end{cases}$$

Доказательство. Сначала докажем индукцией по n утверждение о когомологиях пространства $\mathbb{R}^n$. В силу нашего соглашения указанная формула верна при $n=0$. Чтобы сделать шаг индукции, положим

$$\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}.$$

Пространство $\mathbb{R}_+^n$ некомпактно. С помощью стереографической проекции легко показать, что его одноточечная компактификация является замкнутым n -диском. Следовательно, $H^*(\mathbb{R}_+^n; G) = 0$ при всех q (см. следствие 2.9). Пусть

$$\mathbb{R}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}.$$

Из точной когомологической последовательности пары $(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}^{n-1})$ вытекает, что отображение

$$\delta: H_c^{q-1}(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow H_c^q(\mathbb{R}_+^n \setminus \mathbb{R}^{n-1})$$

при всех q является изоморфизмом. Но $\mathbb{R}_+^n \setminus \mathbb{R}^{n-1}$ очевидным образом гомеоморфно $\mathbb{R}^n$. Этим завершается шаг индукции.

Формула для когомологий сферы S^n вытекает из того, что S^n — одноточечная компактификация пространства $\mathbb{R}^n$ (см. теорему 2.8).

2.15. Теорема. (Инвариантность размерности евклидовых пространств.) При $m \neq n$ пространства $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ не гомеоморфны.

Действительно, они даже имеют разный собственный гомотопический тип.

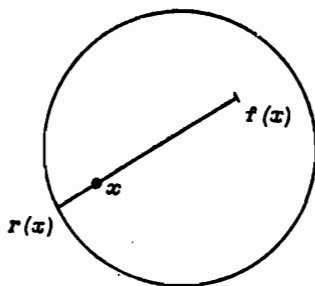
2.16. Теорема. При $n \geq 1$ сфера S^n не стягивается в точку.

Это интуитивно очевидно при $n = 1$ и $n = 2$.

2.17. Теорема. При $n \geq 1$ сфера S^n не является ретрактом шара E^n .

Это также интуитивно очевидно при $n \leq 3$.

2.18. Теорема. (Теорема Брауэра о неподвижной точке.) Любое непрерывное отображение $f: E^n \rightarrow E^n$ имеет неподвижную точку, т. е. существует такая точка x , что $f(x) = x$.



Доказательство от противного: если существует отображение $f: E^n \rightarrow E^n$, для которого $f(x) \neq x$ при всех x , то можно построить ретракцию $r: E^n \rightarrow S^{n-1}$ (см. рисунок для случая $n = 2$). Но это противоречит теореме 2.17.

Далее рассмотрим применения теории когомологий к задаче гомотопической классификации отображений n -сферы в себя. Детали доказательств мы в основном будем оставлять читателю.

В качестве группы коэффициентов G возьмем $\mathbb{Z}$. Тогда $H^n(S^n) \cong H_c^n(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{Z}$. Для любого непрерывного отображения $f: S^n \rightarrow S^n$ существует единственное целое число k , такое, что $f^*(u) = ku$ для всякого $u \in H^n(S^n)$. Аналогичным свойством обладает и любое собственное отображение $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Это целое

число называется *степенью* отображения f . В соответствии с теоремой 1.11 степени собственно гомотопных отображений равны. Обратное утверждение также справедливо: это классическая теорема Брауэра. Однако ее доказательство выпадает из настоящего контекста.

2.19. Теорема. Для любого целого k существуют собственные отображения $f: S^n \rightarrow S^n$ и $g: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ степени k ($n \geq 1$).

Набросок доказательства. Доказательство проводится индукцией по n . При $n=1$ будем рассматривать S^1 как единичную окружность в комплексной плоскости с центром в нуле. Для любого комплексного числа z , такого, что $|z|=1$, пусть $f: S^1 \rightarrow S^1$ определено соотношением $f(z) = z^k$.

2.20. Лемма. Определенное таким образом отображение f имеет степень k .

Употребив достаточные усилия, можно было бы доказать эту лемму сейчас. Однако проще воспользоваться стандартными вычислениями на основе развитой в следующей главе техники клеточных комплексов.

Для того чтобы сделать шаг индукции, заметим, что всякое отображение $f: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ продолжается до отображения $F: E^n \rightarrow E^n$ (полагаем $F(0)=0$ и считаем, что F линейно отображает всякий отрезок $[0, x]$, $x \in S^{n-1}$, на отрезок $[0, f(x)]$). Это отображение обладает свойством $F(U^n) \subset U^n$.

2.21. Лемма. Пусть $F: E^n \rightarrow E^n$ — такое непрерывное отображение, что $F(S^{n-1}) \subset S^{n-1}$ и $F(U^n) \subset U^n$ ($n \geq 2$). Тогда степени индуцированных отображений $S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ и $U^n \rightarrow U^n$ равны.

Доказательство оставляется читателю.

Заметим, что собственное отображение $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ можно продолжить до непрерывного отображения

$$F: \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$$

одноточечных компактификаций Александера (полагаем $F(\infty)=\infty$), а $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ гомеоморфно S^n . Далее можно показать, что отображение f и его продолжение F имеют одинаковую степень. Учитывая, что U^n и $\mathbb{R}^n$ гомеоморфны, для завершения доказательства остается воспользоваться леммой 2.21.

Упражнения

1. Если отображение $S^n \rightarrow S^n$ или (собственное) отображение $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет отличную от нуля степень, то оно сюръективно (т. е. является отображением на).

2. отождествим $\mathbb{R}^2$ с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$. Пусть $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — полиномиальное отображение, т. е. $f(z)$ — многочлен от z с комплексными коэффициентами. Докажите, что оно существенно. Какова степень этого отображения?

3. Докажите так называемую основную теорему алгебры: каждый многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.

§ 2.5. Коэффициентные гомоморфизмы и коэффициентная точная последовательность

Естественно выяснить, как влияет на когомологии $H_c^n(X; G)$ группа коэффициентов G . Более определенные результаты на этот счет мы получим в другой главе. В настоящем параграфе мы покажем, что гомоморфизм групп коэффициентов $h: G \rightarrow G'$ индуцирует естественный гомоморфизм $H_c^n(X; G) \rightarrow H_c^n(X; G')$ групп когомологий, а также укажем точную последовательность, которая дает дополнительную информацию о таких коэффициентных гомоморфизмах.

Гомоморфизм абелевых групп $h: G \rightarrow G'$ индуцирует отображение $h_{\#}: \Phi^p(X; G) \rightarrow \Phi^p(X; G')$, относящее p -функции $\varphi \in \Phi^p(X; G)$ ее композицию с h . Индуцированное отображение $h_{\#}$ обладает многими хорошими свойствами. Во-первых, оно не увеличивает носители в том смысле, что $|\varphi| \supset |h_{\#}\varphi|$ для любой функции $\varphi \in \Phi^p(X; G)$. Таким образом, $h_{\#}$ отображает $\Phi_c^p(X; G)$ в $\Phi_c^p(X; G')$, $\Phi_0^p(X; G)$ — в $\Phi_0^p(X; G')$ и, следовательно, индуцирует гомоморфизм факторгрупп

$$h_{\#}: C_c^p(X; G) \rightarrow C_c^p(X; G')$$

Во-вторых, $h_{\#}$ коммутирует с кограничным оператором, т. е.

$$h_{\#}(\delta\varphi) = \delta(h_{\#}\varphi).$$

Возникает коцепное отображение $C_c^*(X; G) \rightarrow C_c^*(X; G')$. Следовательно, существуют индуцированные гомоморфизмы групп когомологий

$$h_*: H_c^p(X; G) \rightarrow H_c^p(X; G').$$

В-третьих, если $f: X \rightarrow Y$ — собственное отображение локально компактных пространств, то гомоморфизм h_* коммутирует с го-

гоморфизмом f^* , индуцированным отображением f , т. е. имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_c^p(Y; G) & \xrightarrow{h_*} & H_c^p(Y; G') \\ \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\ H_c^p(X; G) & \xrightarrow{h_*} & H_c^p(X; G') \end{array}$$

В-четвертых, если U — открытое подмножество локально компактного пространства X и $A = X \setminus U$, то оба гомоморфизма $\tau: H_c^p(U) \rightarrow H_c^p(X)$ и $\delta: H_c^p(A) \rightarrow H_c^{p+1}(U)$ коммутируют с h_* . Мы предоставляем читателю самому выписать соответствующие коммутативные диаграммы. Наконец, индуцированный гомоморфизм обладает всеми обычными свойствами аддитивного ковариантного функтора. Именно, если $h: G \rightarrow G$ — тождественное отображение, то h_* — тождественный изоморфизм, а для гомоморфизмов $h: G \rightarrow G'$ и $k: G' \rightarrow G''$ имеем $(kh)_* = k_*h_*$. Более того, для заданных гомоморфизмов h_1 и $h_2: G \rightarrow G'$ имеем $(h_1 + h_2)_* = h_{1*} + h_{2*}$.

Доказательство этих утверждений оставляется читателю.

Изложенные соображения можно применить к случаю, когда абелева группа G обладает дополнительной структурой левого модуля над кольцом R . Каждый элемент $r \in R$ определяет эндоморфизм группы G по правилу $g \rightarrow rg$ для любых $g \in G$. Следовательно, возникает индуцированный эндоморфизм группы $H_c^p(X; G)$, который удобно обозначить через $u \rightarrow ru$, $u \in H_c^p(X; G)$. Это определяет левое действие кольца R на абелевой группе $H_c^p(X; G)$. Легко проверить, что такое действие задает на группе $H_c^p(X; G)$ структуру левого R -модуля. Более того, рассмотренные выше гомоморфизмы $f^*: H_c^p(Y; G) \rightarrow H_c^p(X; G)$, $\tau: H_c^p(U; G) \rightarrow H_c^p(X; G)$ и $\delta: H_c^p(A; G) \rightarrow H_c^{p+1}(U; G)$ являются гомоморфизмами левых R -модулей.

Эта дополнительная структура на группах когомологий часто оказывается очень полезной. Например, если R — поле, а G — векторное пространство над R , то $H_c^p(X; G)$ также векторное пространство над R , причем f^* , τ и δ являются R -линейными отображениями. В этом случае можно пользоваться стандартной техникой линейной алгебры, которая обычно существенно упрощает рассмотрение любой задачи.

Предположим далее, что задана короткая точная последовательность абелевых групп

$$0 \rightarrow G' \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} G'' \rightarrow 0.$$

Для локально компактного пространства X она порождает следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & \Phi_0^p(X; G') & \xrightarrow{i_\#} & \Phi_0^p(X; G) & \xrightarrow{i_\#} & \Phi_0^p(X; G'') \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & \Phi_c^p(X; G') & \xrightarrow{i_\#} & \Phi_c^p(X; G) & \xrightarrow{i_\#} & \Phi_c^p(X; G'') \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & C_c^p(X; G') & \xrightarrow{i_\#} & C_c^p(X; G) & \xrightarrow{i_\#} & C_c^p(X; G'') \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

Столбцы этой диаграммы точны по определению. Из определений гомоморфизмов $i_\#$ и $j_\#$ легко вытекает точность двух верхних строк диаграммы. С помощью элементарного диаграммного поиска убеждаемся, что и третья строка точна. Переходя к когомологиям, получим следующую длинную точную последовательность

$$\dots \xrightarrow{\beta} H_c^p(X; G') \xrightarrow{i_*} H_c^p(X; G) \xrightarrow{i_*} H_c^p(X; G'') \xrightarrow{\beta} H_c^{p+1}(X; G') \rightarrow \dots$$

(точность вытекает из общей теории, изложенной в § 1.4). Связывающий гомоморфизм β этой последовательности обычно называют гомоморфизмом Бокштейна. Мы оставляем читателю проверить, что он коммутирует с другими гомоморфизмами теории когомологий.

Упражнения

1. Пусть $h: G \rightarrow G$ — эндоморфизм группы G , определенный для $x \in G$ соотношением $h(x) = nx$, где n — фиксированное целое положительное число. Опишите индуцированный гомоморфизм $h_*: H_c^p(X; G) \rightarrow H_c^p(X; G)$.

2. Для любой группы G и целого положительного числа n определим группы

$$\begin{aligned}
 nG &= \{nx \mid x \in G\}, \\
 [G]_n &= G/nG, \\
 {}_n[G] &= \{x \in G \mid nx = 0\}.
 \end{aligned}$$

Докажите, что для любого пространства X существует короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow [H_c^n(X; \mathbb{Z})]_n \rightarrow H_c^n(X; \mathbb{Z}_n) \rightarrow {}_n[H^{n+1}(X; \mathbb{Z})] \rightarrow 0,$$

связывающая группы когомологий пространства X с коэффициентами в $\mathbb{Z}_n$ и в $\mathbb{Z}$ соответственно. (Указание. Рассмотрите короткую точную последовательность $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathbb{Z}_n \rightarrow 0$ групп коэффициентов, где $i(x) = nx$, и соответствующую длинную точную последовательность групп когомологий.)

Когомологии клеточных разбиений и многообразий

§ 3.1. Введение

До сих пор мы вычислили лишь группы когомологий наиболее простых объектов, таких, как клетки, сферы и евклидовы пространства. Для дальнейшего продвижения вперед необходимо научиться находить когомологии более сложных пространств. Этой цели подчинено содержание настоящей главы. Осуществление нашей программы будет продолжено в гл. 5. В качестве приложений в этой главе будут доказаны некоторые классические теоремы типа теоремы Брауэра об инвариантности области, теоремы Жордана на плоскости и ее обобщения на более высокие размерности.

§ 3.2. Клеточные разбиения пространств

Пусть X — хаусдорфово пространство. *Клеточное разбиение пространства X* — это возрастающая последовательность замкнутых в X подпространств

$$X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \dots \subset X^q \subset \dots,$$

такая, что $\bigcup_i X^i = X$, причем выполнены два условия:

(а) X^0 — дискретное подпространство в X (возможно, пустое). Точки пространства X^0 называются *вершинами* или *0-мерными клетками* разбиения.

(б) При $q \geq 1$ множество $X^q \setminus X^{q-1}$ является дизъюнктым объединением своих открытых подпространств, гомеоморфных U^q (или $\mathbb{R}^q$), которые называются *q-мерными клетками* разбиения. Пространство X^q называется *q-мерным остовом* разбиения. Ясно, что X — дизъюнктивное объединение клеток всевозможных размерностей, а X^q — объединение клеток размерности $\leq q$. Клеточное разбиение можно также определить в терминах клеток, а не через остовы.

Клеточное разбиение называется *конечным*, если оно состоит из конечного числа клеток. Оно называется *конечномерным*, если размерности всех его клеток ограничены в совокупности. *Размерностью* разбиения называется максимум размерностей его клеток.

По определению пусть $X^q = \emptyset$ при $q < 0$. Заметим, что для q -мерной клетки e^q клеточного разбиения $\{X^q\}$ пространства X

имеем $\bar{e}^q \subset X^q$, $\bar{e}^q \setminus e^q \subset X^{q-1}$, где $\bar{e}^q$ — замыкание клетки e^q . Возможен случай $e^q = \bar{e}^q$. Кроме того, в q -мерном клеточном разбиении не обязательно имеются клетки всех размерностей $< q$.

Данное выше определение клеточного разбиения является более общим, чем обычное определение клеточного пространства или CW -комплекса, поскольку мы не требуем существования для каждой клетки так называемого характеристического отображения. В действительности мы даже не требуем компактности замыкания клетки. Однако условия, наложенные на разбиение пространства, достаточны для целей этой главы. Разумеется, CW -комплексы Дж. Г. К. Уайтхеда являются клеточными разбиениями в нашем смысле и поэтому доставляют множество примеров клеточных разбиений. Читателю рекомендуется ознакомиться с основными свойствами CW -комплексов. Обширную информацию о них можно найти в [35] или в исходной статье Уайтхеда [65]. Краткое изложение этих вопросов, вполне достаточное для наших целей, можно найти во многих учебниках, например в [9], [11, гл. V, § 2 и 3], [21, гл. VII, § 1], [25], [37], [46], [51, гл. 7, § 6], [60], [64].

Симплициальные комплексы, являясь CW -комплексами, также подпадают под данное выше определение. Приведем еще несколько примеров.

(1) Пусть X — дизъюнктное объединение открытых подпространств, каждое из которых гомеоморфно $\mathbb{R}^n$ для некоторого n . Эти подпространства определяют довольно естественное клеточное разбиение пространства X .

(2) Пусть X — круговой цилиндр в $\mathbb{R}^3$, $X^0 = \emptyset$, X^1 — объединение двух образующих цилиндра и $X^2 = X$.

(3) Существует хаусдорфово пространство, не являющееся CW -комплексом, но допускающее клеточное разбиение, состоящее из одной нульмерной клетки, одной одномерной и одной двумерной. Одномерный остов этого клеточного разбиения гомеоморфен окружности, однако характеристического отображения двумерной клетки не существует, несмотря на компактность ее замыкания. Это пространство в некоторых точках оказывается не локально стягиваемым. Отдельные детали в построении обсуждаемого примера имеют довольно сложное описание, и мы не будем здесь его приводить¹⁾.

¹⁾ Для получения нужного компакта внутренность U^2 замкнутого единичного двумерного диска E^2 «подклеивается» к окружности S^1 таким же образом, как при разрывном отображении границы E^2 в S^1 , при котором точке с полярным углом $0 < \varphi < 2/\pi$ сопоставляется точка S^1 , полярный угол которой равен $(2/\pi)\sin(1/\varphi)$. При этом произвольно малые области U^2 вблизи точки с координатой $\varphi = 0$ на границе E^2 растягиваются до конечных размеров. — *Прим. ред.*

В дальнейшем клеточное разбиение пространства X будет обозначаться одной буквой, например буквой K или L . Таким образом, $K = \{K^q\}$, где замкнутое подпространство $K^q \subset X$ — это q -мерный остов разбиения K .

§ 3.3. Коцепи и когомологи клеточного разбиения

Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство и $K = \{K^q\}$ — его клеточное разбиение. Тогда по теореме 2.13 группа $H_c^n(K^q \setminus K^{q-1})$ естественно изоморфна прямой сумме $\sum_i H_c^n(e_i^q)$, где $\{e_i^q\}$ — множество q -мерных клеток. Поскольку клетка e_i^q гомеоморфна $\mathbb{R}^q$, то

$$H_c^n(e_i^q) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq q, \\ G & \text{при } n = q. \end{cases}$$

3.1. Определение. Группа $H_c^q(K^q \setminus K^{q-1}; G)$ называется группой q -мерных коцепей разбиения K с коэффициентами в G . Будем обозначать ее через $C^q(K; G)$ (или просто через $C^q(K)$).

Определим кограницный оператор $\delta: C^q(K; G) \rightarrow C^{q+1}(K; G)$. Для этого рассмотрим пространство $K^{q+1} \setminus K^{q-1}$, его замкнутое подпространство $K^q \setminus K^{q-1}$ и открытое подпространство $K^{q+1} \setminus K^q$. По определению

$$\delta = \delta_{(K^{q+1} \setminus K^{q-1}, K^q \setminus K^{q-1})}: H_c^q(K^q \setminus K^{q-1}) \rightarrow H_c^{q+1}(K^{q+1} \setminus K^q).$$

3.2. Лемма. $\delta \circ \delta = 0$; следовательно, $\{C^q(K), \delta\}$ — коцепной комплекс (как обычно, считаем, что $C^q(K) = 0$ при $q < 0$).

Доказательство. Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} H_c^q(K^q \setminus K^{q-1}) & \xrightarrow{\delta} & H_c^{q+1}(K^{q+1} \setminus K^q) & \xrightarrow{\delta} & H_c^{q+2}(K^{q+2} \setminus K^{q+1}) \\ & \searrow \delta(Z, A) & \nearrow i^* & \searrow \delta(Y, B) & \nearrow \\ & H_c^{q+1}(X \setminus K^q) & & H_c^{q+2}(X \setminus K^{q+1}) & \end{array}$$

Здесь $(Z, A) = (X \setminus K^{q-1}, K^q \setminus K^{q-1})$ и $(Y, B) = (X \setminus K^q, K^{q+1} \setminus K^q)$. Оба треугольника диаграммы коммутативны и

$$\delta(X \setminus K^q, K^{q+1} \setminus K^q) \circ i^* = 0$$

как композиция двух соседних гомоморфизмов точной когомологической последовательности пары (Y, B) . Отсюда и вытекает утверждение леммы.

Мы хотим показать, что $H_c^q(X; G)$ и q -мерная группа когомологий коцепного комплекса $C_f^q(K; G) = \{C_f^q(K; G), \delta\}$ естественно изоморфны¹⁾. Для этого предположим, что клеточное разбиение K конечномерно. Пусть $i_q: K^q \setminus K^{q-1} \rightarrow X \setminus K^{q-1}$ — отображение включения. Для каждого q имеем следующую диаграмму:

$$(1) \quad C_f^q(K) = H_c^q(K^q \setminus K^{q-1}) \xleftarrow{i_q^*} H_c^q(X \setminus K^{q-1}) \xrightarrow{\tau_q} H_c^q(X).$$

Теорема 3.3. Пусть K — конечномерное клеточное разбиение локально компактного хаусдорфова пространства X . Тогда в диаграмме (1)

(a) i_q^* — мономорфизм и $\text{Im } i_q^* = Z^q(K)$,

(b) τ_q — эпиморфизм и $\text{Ker } \tau_q = (i_q^*)^{-1} B^q(K)$.

Следовательно, $\tau_q \circ (i_q^*)^{-1}$ определяет изоморфизм

$$\theta_q: Z^q(K)/B^q(K) = H_f^q(K) \cong H_c^q(X).$$

Доказательство. Пусть n — размерность клеточного разбиения K . Тогда $X = K^n$. Имеем возрастающую последовательность открытых подпространств

$$\emptyset = X \setminus K^n \subset X \setminus K^{n-1} \subset \dots \subset X \setminus K^q \subset \dots \subset X \setminus K^0 \subset X.$$

Возникает последовательность гомоморфизмов

$$\begin{aligned} H_c^q(X \setminus K^n) &\xrightarrow{\tau'_n} H_c^q(X \setminus K^{n-1}) \xrightarrow{\tau'_{n-1}} \dots \xrightarrow{\tau'_{q+1}} H_c^q(X \setminus K^q) \xrightarrow{\tau'_q} \dots \\ &\dots \xrightarrow{\tau'_1} H_c^q(X \setminus K^0) \xrightarrow{\tau'_0} H_c^q(X). \end{aligned}$$

Каждый гомоморфизм τ'_m содержится в когомологической последовательности соответствующей пары. Из этих точных последовательностей вытекает, что τ'_m может не быть изоморфизмом лишь при $m = q$ и $m = q - 1$, причем τ'_{q-1} — эпиморфизм. Поэтому группы $H_c^q(X \setminus K^m)$ изоморфны при $m \geq q$, а так как $H_c^q(X \setminus K^n) = H^q(\emptyset) = 0$, то $H_c^q(X \setminus K_m) = 0$ при $m \geq q$. Аналогично группы $H_c^q(X \setminus K^m)$ изоморфны при $m < q - 1$. Следовательно,

$$H_c^q(X \setminus K^m) = H_c^q(X \setminus K^{-1}) = H_c^q(X)$$

¹⁾ Когомологии клеточного разбиения, определяемые финитными коцепями $C_f^q(K; G)$, обозначаются в дальнейшем через $H_f^q(K; G)$. — Прим. перев.

при $m < q - 1$. Поскольку τ_q является композицией гомоморфизмов τ'_m при $m < q$, то τ_q — эпиморфизм.

Далее рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_c^q(X \setminus K^q) = 0 & & \\
 & & \downarrow \tau'_q & & \\
 H_c^{q-1}(K^{q-1} \setminus K^{q-2}) & \xrightarrow{\delta(X \setminus K^{q-2}, K^{q-1} \setminus K^{q-2})} & H_c^q(X \setminus K^{q-1}) & \xrightarrow{i_q^*} & H_c^q(K^q \setminus K^{q-1}) \\
 \parallel & & \downarrow \tau'_{q-1} & & \parallel \\
 C_f^{q-1}(K) & & H_c^q(X \setminus K^{q-2}) & & C_f^q(K) \\
 & & \parallel & & \\
 & & H_c^q(X) & &
 \end{array}$$

В процессе доказательства леммы 3.2 было показано, что композиция двух горизонтальных стрелок совпадает с кограницным оператором $\delta: C_f^{q-1}(K) \rightarrow C_f^q(K)$. Кроме того,

$$\text{Im } \tau'_q = \text{Ker } i_q^*,$$

$$\text{Im } \delta_{(X \setminus K^{q-2}, K^{q-1} \setminus K^{q-2})} = \text{Ker } \tau'_{q-1},$$

поскольку эти гомоморфизмы включаются в когомологические последовательности соответствующих пар. Так как $H_c^q(X \setminus K^q) = 0$, гомоморфизм i_q^* является мономорфизмом.

Далее, докажем, что $\text{Ker } \tau_q = (i_q^*)^{-1} B^q(K)$. Ясно, что $\text{Ker } \tau_q = \text{Ker } \tau'_{q-1} = \text{Im } \delta_{(X \setminus K^{q-2}, K^{q-1} \setminus K^{q-2})}$, поэтому утверждение следует из того, что i_q^* — мономорфизм.

Докажем, наконец, что $\text{Im } i_q^* = Z^q(K)$. Рассмотрим ту же диаграмму, что и в лемме 3.2,

$$\begin{array}{ccccc}
 C_f^{q-1}(K) & \xrightarrow{\delta} & C_f^q(K) & \xrightarrow{\delta} & C_f^{q+1}(K) \\
 & \searrow & \nearrow i_q^* & \searrow \delta_{(X \setminus K^{q-1}, K^q \setminus K^{q-1})} & \nearrow i_{q+1}^* \\
 & & H_c^q(X \setminus K^{q-1}) & & H_c^{q+1}(X \setminus K^q)
 \end{array}$$

В силу точности $\text{Im } i_q^* = \text{Ker } \delta_{(X \setminus K^{q-1}, K^q \setminus K^{q-1})}$. Поскольку i_{q+1}^* — мономорфизм,

$$\text{Ker } \delta_{(X \setminus K^{q-1}, K^q \setminus K^{q-1})} = \text{Ker } \delta = Z^q(K).$$

Этим завершается доказательство теоремы 3.3.

Замечание. Предположение о конечномерности разбиения крайне существенно. Можно привести простые примеры бесконечномерных локально конечных CW-комплексов, для которых утверждение теоремы 3.3 неверно¹⁾.

3.4. Следствие. В предположениях теоремы $H_c^q(X) = 0$ при $q > \dim X$ ²⁾.

В качестве примера рассмотрим n -мерные вещественное, комплексное и кватернионное проективные пространства, обозначаемые через $P_n(\mathbb{R})$, $P_n(\mathbb{C})$ и $P_n(\mathbb{H})$ соответственно. Читатель, незнакомый с этими важными пространствами, может найти их описание во многих учебниках, например в [11], [35], [51] и [60]. Для наших целей достаточно знать об этих пространствах следующее: каждое из них компактно, связно и хаусдорфово, $P_0(\mathbb{R})$, $P_0(\mathbb{C})$ и $P_0(\mathbb{H})$ — одноточечные пространства и существуют естественные вложения $P_{q-1} \subset P_q$, такие, что

$$P_q(\mathbb{R}) \setminus P_{q-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^q, \quad P_q(\mathbb{C}) \setminus P_{q-1}(\mathbb{C}) = \mathbb{R}^{2q}, \\ P_q(\mathbb{H}) \setminus P_{q-1}(\mathbb{H}) = \mathbb{R}^{4q}.$$

Таким образом, возрастающая цепочка проективных пространств

$$P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_{n-1} \subset P_n$$

определяет довольно естественное клеточное разбиение пространства P_n , имеющее не более одной клетки в каждой размерности. Отсюда и из теоремы 3.3 получаем, что

$$H^k(P_n(\mathbb{C}); G) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \text{ нечетно или } k > 2n, \\ G, & \text{если } k \text{ четно и } 0 \leq k \leq 2n, \end{cases} \\ H^k(P_n(\mathbb{H}); G) = \begin{cases} G, & \text{если } k \equiv 0 \pmod{4} \text{ и } 0 \leq k \leq 4n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

¹⁾ Например, пусть X — объединение счетного множества замкнутых шаров D_k , $k \in \mathbb{Z}$, размерности $|k|$, последовательно касающихся друг друга, и пусть K^n — объединение всех D_k , для которых $|k| \leq n$, с границами шаров D_{n+1} и D_{-n-1} . Указанное клеточное разбиение определяет на X структуру CW-комплекса, имеющего конечное число клеток в каждой размерности, поэтому клеточные когомологии этого клеточного разбиения совпадают с обычными когомологиями $H^q(X)$ (рассматриваемыми в ч. II этой книги). В частности, так как X стягиваемо, $H^1(X) = 0$. В то же время $H_c^1(X) \neq 0$ (см. теорему 2.8). — Прим. перев.

²⁾ Рассматриваемые автором когомологии Александера — Спеньера H_q^A изоморфны когомологиям с компактными носителями, определяемым в теории пучков (см. п.п. 2.5, 3.9 и § 4 гл. II в [5*]), а следовательно, и соответствующим когомологиям Александера — Чеха (§ 5 в [5*]), которые можно определять с помощью покрытий кратности $\leq \dim X + 1$. Поэтому $H_c^q(X) = 0$ при $q > \dim X$ для любого локально компактного пространства X . — Прим. ред.

Упомянутых фактов недостаточно для вычисления когомологий пространства $P_n(\mathbb{R})$, однако они накладывают ограничение на возможный вид этих групп (см. упр. 4 ниже).

Скажем, что подпространство A пространства X *совместимо с клеточным разбиением* K этого пространства, если A — объединение клеток из K . В этом случае ясно, что множества $K^q \cap A$, $q = 0, 1, 2, \dots$, определяют клеточное разбиение пространства A . Если A совместимо с K , то $X \setminus A$ также совместимо с K . Для локально компактного пространства X наибольший интерес представляет случай открытого или замкнутого A , совместимого с заданным клеточным разбиением X .

Упражнения

Эйлерова характеристика клеточного разбиения. Пусть K — конечное клеточное разбиение локально компактного хаусдорфова пространства X . Для любого целого $q \geq 0$ обозначим через α_q число q -мерных клеток разбиения K . *Эйлеровой характеристикой разбиения* K называется целое число

$$\chi(K) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q \alpha_q.$$

1. Пусть $\{C^q, \delta^q\} = C$ — коцепной комплекс конечномерных векторных пространств над полем, такой, что $C^q = 0$ для всех q , кроме конечного числа (δ^q — линейные отображения). Докажите, что

$$\sum_q (-1)^q \dim C^q = \sum_q (-1)^q \dim H^q(C).$$

Здесь $\dim$ означает размерность векторного пространства.

2. Докажите, что эйлерова характеристика $\chi(K)$ является инвариантом собственного гомотопического типа пространства X . (Указание. Рассмотрите когомологии пространства X с коэффициентами в любом поле. В соответствии с § 2.5 в этом случае группы коцепей и когомологий — векторные пространства над этим полем.)

3. Пусть K — конечное клеточное разбиение локально компактного пространства X , A — замкнутое подмножество в X , совместимое с K , и $U = X \setminus A$. Установите связь между эйлеровыми характеристиками пространств X , A и U .

4. Докажите, что $H^q(P_n(\mathbb{R}); G) = 0$ при $q > n$, а также что $H^q(P_n(\mathbb{R}); \mathbb{Z})$ при $0 \leq q \leq n$ — циклические группы¹⁾.

¹⁾ См. также упр. 9 к § 3.6. — Прим. ред.

§ 3.4. Когомологии открытых и замкнутых подмножеств евклидова пространства.

Инвариантность области

Целью настоящего параграфа является доказательство теоремы 3.5. В доказательстве используется техника предыдущего параграфа. Сама теорема будет использована для доказательства классической теоремы об инвариантности области.

3.5. Теорема. Пусть V — открытое подмножество в n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда $H_c^q(V) = 0$ при $q > n$.

В силу свойств (4) и (6) из § 1.3 эта теорема непосредственно вытекает из следующей леммы.

3.6. Лемма. Пусть V — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ и A — компактное подмножество этого множества. Тогда существует открытое в V подмножество U , такое, что U содержит A и $H_c^q(U) = 0$ при $q > n$.

Доказательство леммы. Мы построим U как пространство, допускающее n -мерное клеточное разбиение. Отсюда автоматически будет следовать, что $H_c^q(U) = 0$ при $q > n$. Клетки этого разбиения будут кубами. Описание нужного клеточного разбиения одинаково для всех n . Для лучшего понимания конструкции рекомендуем читателю сделать рисунки, отвечающие случаям $n = 2$ и $n = 3$.

Пусть d — евклидово расстояние от компактного множества A до замкнутого множества $\mathbb{R}^n \setminus V$, и пусть $s = d/10\sqrt{n}$. Для любого целого k и $i = 1, 2, \dots, n$ пусть $P(i, k)$ — гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$, определяемая уравнением $x_i = ks$. Эта гиперплоскость ортогональна i -й координатной оси. Множество всех таких гиперплоскостей разбивает $\mathbb{R}^n$ на конгруэнтные n -мерные кубы, грани которых параллельны координатным гиперплоскостям. Ребро каждого куба имеет длину s , а длина диагонали равна $s\sqrt{n} = d/10$. Пусть X — объединение всех замкнутых кубов, содержащихся в $d/2$ -окрестности пространства A . Тогда X является компактной окрестностью пространства A , совпадающей с объединением конечного числа кубов. Кроме того, X содержится в V . Пусть U — внутренность пространства X .

Ясно, что кубы размерностей $0, 1, \dots, n$ со сторонами длины s определяют клеточное разбиение X . Например, $(n-1)$ -мерный остов этого клеточного разбиения — подмножество в X , состоящее из всех точек, лежащих на гиперплоскостях $P(i, k)$. $(n-2)$ -остов состоит из всех точек в X , принадлежащих сразу двум таким гиперплоскостям, и т. д.

Мы утверждаем, что граница B множества X — подпространство, совместимое с этим клеточным разбиением. Действительно, ясно, что граница — объединение замкнутых $(n-1)$ -мерных кубов. В качестве следствия получаем, что и подпространство $U = X \setminus B$ совместимо с этим клеточным разбиением. Лемма доказана.

3.7. Следствие. Для любого открытого подмножества V n -мерной сферы S^n при $q > n$ $H_c^q(V) = 0$.

Утверждение вытекает из того, что в сфере дополнение к точке гомеоморфно $\mathbb{R}^n$.

3.8. Следствие. Для любого замкнутого собственного подмножества A n -мерной сферы S^n при $q \geq n$ $H^q(A) = 0$.

Доказательство. Пусть $i: A \rightarrow S^n$ — отображение включения. Отображение i гомотопно постоянному. В самом деле, включение i совпадает с композицией отображений $A \rightarrow S^n \setminus \{x_0\}$ и $S^n \setminus \{x_0\} \rightarrow S^n$, где $x_0 \in S^n \setminus A$. Однако $S^n \setminus \{x_0\}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^n$, т. е. является стягиваемым пространством.

Поскольку A компактно, i собственно гомотопно постоянному отображению. Следовательно, индуцированный гомоморфизм $i^*: H^q(S^n) \rightarrow H^q(A)$ тривиален при всех $q > 0$. Поэтому доказательство утверждения вытекает из рассмотрения точной когомологической последовательности пары (S^n, A) и из следствия 3.7, примененного к $S^n \setminus A$.

3.9. Следствие. $H_c^q(A) = 0$ при $q \geq n$ для любого замкнутого собственного подмножества A пространства $\mathbb{R}^n$.

Для компактного A утверждение вытекает из следствия 3.8, поскольку A содержится в одноточечной компактификации пространства $\mathbb{R}^n$, а именно в сфере S^n . Если A некомпактно, то компактным подпространством в S^n является его одноточечная компактификация. В этом случае утверждение вытекает из следствия 3.8 и теоремы 2.8.

Для сингулярной теории когомологий следствия 3.8 и 3.9 не верны. Баррат и Милнор в [2] привели простой пример такого компактного подпространства A в $\mathbb{R}^3$, что группы сингулярных когомологий с рациональными коэффициентами $H_s^q(A; \mathbb{Q})$ отличны от нуля в сколь угодно высоких размерностях q . В этом одно из наиболее поразительных различий между сингулярными гомологиями и когомологиями и теориями, рассматриваемыми в настоящей книге. В следующих главах мы продолжим обсуждение этого вопроса.

3.10. Следствие. $H_c^n(V) \neq 0$ для любого открытого подмножества V пространства S^n или $\mathbb{R}^n$.

Результат получается из следствий 3.8 и 3.9 при рассмотрении точной когомологической последовательности соответствующей пары.

Теорема 3.5 и ее следствия указывают на существенное различие между теми локально компактными пространствами, которые допускают вложение в $\mathbb{R}^n$ в качестве собственных открытых подпространств, и теми, которые допускают вложение в $\mathbb{R}^n$ в качестве собственных замкнутых подпространств. Процесс локализации дает дальнейшее усиление этих результатов.

Сначала введем некоторые обозначения. Для любой точки $a \in \mathbb{R}^n$ и любого вещественного числа $r > 0$ обозначим через $U(a, r)$ открытый шар (или диск) радиуса r с центром в точке a , т. е.

$$U(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| < r\}.$$

Заметим, что шар $U(a, r)$ гомеоморфен $\mathbb{R}^n$. Для топологического пространства X и точки $x \in X$ обозначим через $\mathcal{O}(x, X)$ множество всех открытых окрестностей точки x в X .

3.11. Лемма. Пусть X — локально компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$ и x — внутренняя точка в X . Тогда существует такое множество $U \in \mathcal{O}(x, X)$, что $H_c^n(V) \neq 0$ для всех $V \in \mathcal{O}(x, X)$, содержащихся в U .

Доказательство. Из предположений следует существование такого числа $\varepsilon > 0$, что $U(x, \varepsilon) \subset X$. Положим $U = U(x, \varepsilon)$. Если $V \in \mathcal{O}(x, X)$ и $V \subset U$, то V — открытое подмножество в $U(x, \varepsilon)$, а последнее гомеоморфно $\mathbb{R}^n$. В силу следствия 3.10 $H_c^n(V) \neq 0$.

3.12. Лемма. Пусть X — локально компактное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ и x — граничная точка пространства X . Тогда для любого $U \in \mathcal{O}(x, X)$ найдется множество $V \in \mathcal{O}(x, X)$, такое, что $V \subset U$ и $H_c^n(V) = 0$. Таким образом, существует фундаментальная система открытых окрестностей V точки x в X , для которых $H_c^n(V) = 0$.

Доказательство. В силу локальной компактности X множество $A = \{y \in X \mid |y - x| \leq \varepsilon\}$ компактно для некоторого $\varepsilon > 0$. Для данного множества $U \in \mathcal{O}(x, X)$ существует такое $\varepsilon' > 0$, что $X \cap U(x, \varepsilon') \subset U$. Пусть $\delta = \min(\varepsilon, \varepsilon')$ и $V = U(x, \delta) \cap X$. Тогда $V \in \mathcal{O}(x, X)$ и $V \subset U$. Кроме того, V является пересечением $U(x, \delta)$ с компактным множеством A . Следовательно,

V — замкнутое подмножество шара $U(x, \delta)$. Поскольку $U(x, \delta)$ гомеоморфно $\mathbb{R}^n$, утверждение вытекает из следствия 3.9.

Заметим, что леммы 3.11 и 3.12 взаимно обратны. Таким образом, они дают необходимые и достаточные условия принадлежности точки x внутренности или границе локально компактного пространства $X \subset \mathbb{R}^n$. Заметим также, что эти условия не зависят от вложения пространства X в $\mathbb{R}^n$. Поэтому можно сделать следующий вывод. Пусть X и X' — локально компактные подпространства пространства $\mathbb{R}^n$ и $f: X \rightarrow X'$ — гомеоморфизм. Тогда f отображает внутренние точки во внутренние, а граничные точки — в граничные. В частности, если X открыто, то открыто и X' .

Поскольку в доказательствах мы пользовались лишь локальной структурой пространств, можно заменить $\mathbb{R}^n$ на любое n -мерное многообразие (т. е. локально евклидово хаусдорфово пространство). Последнее заключение принадлежит Брауэру и называется теоремой об инвариантности области. В доказательстве этого утверждения мы следовали Картану [7]. В § 9.7 мы дадим другую интерпретацию лемм 3.11 и 3.12.

Упражнения

1. Пусть U — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное инъективное отображение. Докажите, что f — гомеоморфизм U на открытое в $\mathbb{R}^n$ подмножество.

2. Докажите, что теорема Брауэра об инвариантности области верна и без предположения о локальной компактности пространств X и X' (проведите доказательство, используя локально компактный случай).

3. Приведите пример двух гомеоморфных подпространств X и X' пространства $\mathbb{R}^n$, одно из которых замкнуто, а другое нет (это означает, что для замкнутых подпространств в $\mathbb{R}^n$ нет аналога теоремы об инвариантности области).

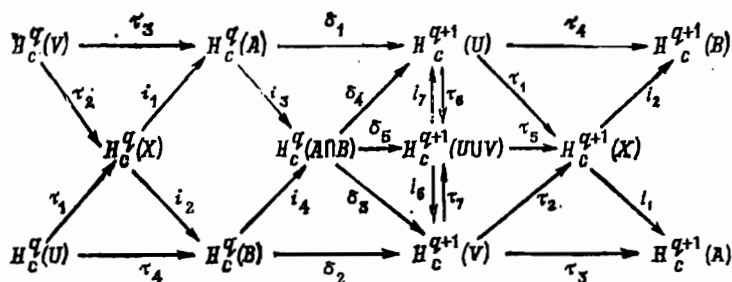
4. Докажите, что любое подпространство $X \subset \mathbb{R}^n$ и сфера S^n имеют разные гомотопические типы (без предположения о локальной компактности X).

§ 3.5. Последовательности Майера — Вьеториса

Предположим, что X является объединением подпространств A и B . Как связаны между собой когомологии пространств X , A , B и $A \cap B$? В случае когда A и B оба замкнуты (или оба открыты), ответ содержится в последовательности Майера — Вьеториса.

Рассмотрим сначала случай, когда $X = A \cup B$ — локально компактное хаусдорфово пространство, а множества A и B замкнуты. Определение последовательности Майера — Вьеториса и

доказательство ее точности основано тогда на следующей диаграмме:



Здесь $U = X \setminus A$, $V = X \setminus B$. Эта диаграмма содержит четыре точные последовательности и отрезки трех других. Каждый квадрат и треугольник коммутативны¹⁾. Определим три гомоморфизма

$$\varphi: H_c^q(X) \rightarrow H_c^q(A) \oplus H_c^q(B), \quad \varphi(u) = (i_1 u, i_2 u),$$

$$\psi: H_c^q(A) \oplus H_c^q(B) \rightarrow H_c^q(A \cap B), \quad \psi(a, b) = i_3 a - i_4 b,$$

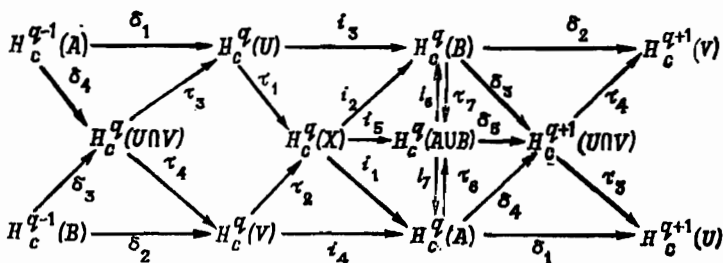
$$\Delta: H_c^q(A \cap B) \rightarrow H_c^{q+1}(X), \quad \Delta(v) = \tau_1 \delta_4(v).$$

Последовательностью Майера — Вьеториса для $X = A \cup B$ называется следующая последовательность групп и гомоморфизмов:

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\Delta} H_c^q(X) \xrightarrow{\varphi} H_c^q(A) \oplus H_c^q(B) \xrightarrow{\psi} H_c^q(A \cap B) \xrightarrow{\Delta} \\ \rightarrow H_c^{q+1}(X) \xrightarrow{\varphi} \dots \end{aligned}$$

3.13. Теорема. Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство, A и B — замкнутые в X подмножества и $X = A \cup B$. Тогда последовательность Майера — Вьеториса точна.

Обратимся теперь к двойственной ситуации. Пусть X локально компактно и хаусдорфово и $X = U \cup V$, где U и V — открытые множества в X . Последовательность Майера — Вьеториса для этого случая получается из следующей аналогичной предыдущей диаграммы:



¹⁾ В целом диаграмма не является коммутативной (например, композиции $\tau_5 \delta_6$ и $\tau_1 \delta_4$, очевидно, не совпадают). — Прим. перев.

Здесь $A = X \setminus U$ и $B = X \setminus V$. Эта диаграмма содержит несколько точных последовательностей. Все квадраты и треугольники в ней коммутативны. Определим гомоморфизмы

$$\varphi: H_c^q(U \cap V) \rightarrow H_c^q(U) \oplus H_c^q(V), \quad \varphi(u) = (\tau_3 u, \tau_4 u),$$

$$\psi: H_c^q(U) \oplus H_c^q(V) \rightarrow H_c^q(X), \quad \psi(a, b) = \tau_1 a - \tau_2 b,$$

$$\Delta: H_c^q(X) \rightarrow H_c^{q+1}(U \cap V), \quad \Delta(v) = \delta_3 i_2(v).$$

Последовательностью Майера — Вьеториса разложения $X = U \cup V$ называется последовательность

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\Delta} H_c^q(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} H_c^q(U) \oplus H_c^q(V) \xrightarrow{\psi} H_c^q(X) \xrightarrow{\Delta} \\ \rightarrow H_c^{q+1}(U \cap V) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

3.14. Теорема. Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство, U и V — открытые подмножества в X и $X = U \cup V$. Последовательность Майера — Вьеториса этого разложения точна.

Доказательства теорем 3.13 и 3.14 — хорошие упражнения в технике диаграммного поиска¹⁾. Мы оставляем их читателю.

Упражнения

1. Сформулируйте понятие «естественности» для каждой из последовательностей Майера — Вьеториса. Докажите это свойство.

¹⁾ Эти теоремы допускают также прямое доказательство. В соответствии с § 1.4 когомологии замкнутых подмножеств $A \subset X$ определяются фактор-комплексами $C_c^*(X)/Q^*(X, A)$. В условиях теоремы 1.13 $Q^*(X, A \cap B) = Q^*(X, A) \oplus Q^*(X, B)$; поэтому точна последовательность

$$0 \rightarrow C_c^*(X) \rightarrow C_c^*(X)/Q^*(X, A) \oplus C_c^*(X)/Q^*(X, B) \xrightarrow{I} C_c^*(X)/Q^*(X, A \cap B) \rightarrow 0$$

(I — разность естественных отображений каждого из прямых слагаемых в среднем члене на третий член). Соответствующая ей длинная точная последовательность когомологий, очевидно, совпадает с последовательностью, обсуждаемой в теореме 3.13. Легко видеть, что всякая коцепь из $C_c^*(X)$ может быть представлена как сумма коцепей с носителями в U и V . Это означает, что точна последовательность

$$0 \rightarrow Q^*(X, X \setminus (U \cap V)) \rightarrow Q^*(X, X \setminus U) \oplus Q^*(X, X \setminus V) \xrightarrow{I} C_c^*(X) \rightarrow 0$$

(I — разность естественных отображений в $C_c^*(X)$ прямых слагаемых среднего члена). В соответствии с § 1.4 отвечающая ей точная когомологическая последовательность совпадает с последовательностью, обсуждаемой в теореме 3.14. — Прим. ред.

2. Что изменится, если в отличие от текста $\Delta: H_c^q(A \cap B) \rightarrow H_c^{q+1}(X)$ определить соотношением $\Delta(v) = \tau_2 \delta_3(v)$?

3. Предположим, что пространство X в теореме 3.13 компактно. Постройте последовательность Майера — Вьеториса в терминах приведенных групп когомологий.

§ 3.6. Когомологии многообразий¹⁾

Под n -мерным многообразием мы понимаем хаусдорфово пространство, каждая точка которого обладает открытой окрестностью, гомеоморфной U^n (или $\mathbb{R}^n$). Многообразие локально компактно и локально связно. Оно может быть или не быть компактным или связным, иметь или не иметь счетный базис. Наша цель — дать описание когомологий n -многообразия в размерностях $\geq n$. В силу теоремы о прямой сумме достаточно ограничиться случаем связного многообразия. Многообразие не предполагается гладким или триангулируемым.

Предварительно докажем лемму о когомологиях открытых n -мерных дисков (т. е. пространств, гомеоморфных U^n или $\mathbb{R}^n$). Пусть U — открытый n -мерный диск, а V — подмножество в U , также являющееся n -мерным диском. В силу теоремы об инвариантности области V открыто в U . Скажем, что V *хорошо вложено* в U , если существует гомеоморфизм h между U и шаром U^n , при котором V отображается на открытый диск $U(a, r)$ радиуса $r > 0$ с центром в некоторой точке $a \in U^n$. Даже при $n = 2$ легко привести примеры *плохо* вложенных открытых дисков.

3.15. Лемма. Пусть U — открытый n -мерный диск и V — подмножество в U , также являющееся открытым n -мерным диском. Тогда $\tau: H_c^n(V) \rightarrow H_c^n(U)$ — изоморфизм.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай хорошего вложения V в U . Без ограничения общности можно считать, что $U = U^n$ и $V = U(a, r)$. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccc} \dots & \rightarrow & H_c^q(U(a, r)) & \rightarrow & H^q(E^n) \rightarrow H^q(E^n \setminus U(a, r)) \\ & & \downarrow \tau & & \parallel & & \downarrow i^* \\ \dots & \rightarrow & H_c^q(U^n) & \longrightarrow & H^q(E^n) \rightarrow H^q(S^{n-1}) \end{array}$$

¹⁾ Содержание этого параграфа основано на материале из § 6 гл. XI книги Эйленберга и Стиррода [14].

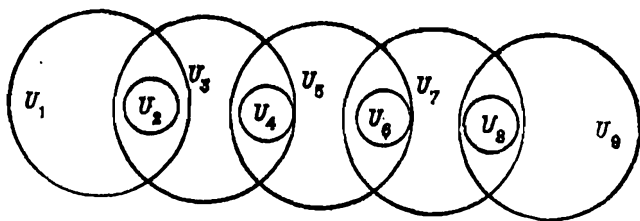
Ясно, что S^{n-1} — деформационный ретракт пространства $E^n \setminus U(a, r)$, поэтому i^* — изоморфизм при всех q . Согласно лемме о пяти гомоморфизмах (лемма 1.9), τ — изоморфизм.

Рассмотрим теперь случай плохого вложения V в U . По теореме об инвариантности области V — открытое подмножество в U . Следовательно, можно найти открытый n -диск $W \subset V$, хорошо вложенный в U (мы не утверждаем, что W хорошо вложен в V). Из теоремы об инвариантности области опять заключаем, что W открыто в V . Следовательно, найдется открытый n -диск $X \subset W$, хорошо вложенный в V . Таким образом, имеем диаграмму

$$H_c^n(X) \xrightarrow{\tau''} H_c^n(W) \xrightarrow{\tau'} H_c^n(V) \xrightarrow{\tau} H_c^n(U).$$

В силу первой части доказательства $\tau \circ \tau'$ и $\tau' \circ \tau''$ — изоморфизмы. Поэтому τ' — мономорфизм, а τ — эпиморфизм. Аналогично, τ' — эпиморфизм, а τ'' — мономорфизм. Таким образом, τ' — изоморфизм. Отсюда вытекает, что τ — изоморфизм. Лемма доказана.

3.16. Определение. Пусть M — многообразие размерности n . Упорядоченная пара открытых n -дисков (U, U') , лежащих в M , называется *звеном*, если $U \subset U'$ или $U' \subset U$. Конечная последовательность $(U_1, U_2, \dots, U_k)$ открытых n -дисков из M называется *цепью* в M , если каждая пара дисков с соседними номерами является звеном. Цепь называется *замкнутой*, если $U_1 = U_k$.



В силу леммы 3.15 для каждого звена (U_i, U_{i+1}) определен естественный изоморфизм $H_c^n(U_i) \cong H_c^n(U_{i+1})$. Композиция этих изоморфизмов дает изоморфизм $H_c^n(U_1) \cong H_c^n(U_k)$, который называется *изоморфизмом, индуцированным цепью*. Для цепи C через $C^\#$: $H_c^n(U_1) \rightarrow H_c^n(U_k)$ обозначим индуцированный этой цепью изоморфизм. Если цепь замкнута, получаем автоморфизм группы $H_c^n(U_1)$.

3.17. Определение. Многообразие M называется *ориентируемым*, если каждая замкнутая цепь индуцирует тождественный автоморфизм.

Если M — неориентируемое n -многообразие при $G = \mathbb{Z}$, то существует такая замкнутая цепь $C = (U_1, U_2, \dots, U_k, U_1)$, что $C^\#(u) = -u$ для любого $u \in H_c^n(U_1)$. Действительно, для указанных коэффициентов $H_c^n(U_1)$ — бесконечная циклическая группа, поэтому существует лишь один нетривиальный автоморфизм $u \rightarrow -u$ этой группы. В § 4.11 мы увидим, что аддитивная группа целых чисел является в некотором смысле универсальной группой коэффициентов и что в рассматриваемой ситуации $C^\#(u) = -u$ для любой другой группы коэффициентов. В этом проявляется наличие у диска и у сферы ровно двух ориентаций. Заметим, что над циклической группой второго порядка $G = \mathbb{Z}_2$ ориентируемо любое многообразие, ибо эта группа не имеет нетривиальных автоморфизмов. Таким образом, свойство ориентируемости может зависеть от выбора группы коэффициентов.

Пожалуй, уместно пояснить естественность такого определения ориентируемости многообразия. Если $G = \mathbb{Z}$ и U — открытый n -диск, то $H_c^n(U; G)$ — бесконечная циклическая группа, образующую которой можно выбрать ровно двумя способами. Наличие двух образующих соответствует тому геометрическому факту, что ориентацию n -диска U также можно задать двумя способами. Пусть V — вложенный в U диск размерности n и $\tau: H_c^n(V) \rightarrow H_c^n(U)$ — изоморфизм из леммы 3.15. При выборе коконкретных образующих в $H_c^n(V)$ и $H_c^n(U)$ гомоморфизм τ тогда и только тогда переводит образующую в образующую, когда соответствующие им ориентации геометрически согласованы.

Заметим, что открытое подмножество n -многообразия — также n -многообразие. Такое подмножество называется *открытым подмногообразием*.

3.18. Лемма. *Открытое подмногообразие ориентируемого многообразия ориентируемо.*

Утверждение очевидно.

3.19. Лемма. *Пусть $C = (U_1, U_2, \dots, U_k)$ — цепь в n -многообразии M . Тогда диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} H_c^n(U_1) & \xrightarrow{C^\#} & H_c^n(U_k) \\ & \searrow \tau & \swarrow \tau \\ & H_c^n(M) & \end{array}$$

коммутативна.

Лемма верна, очевидно, для цепи, состоящей из одного звена. Доказательство общего случая проводится индукцией по числу звеньев.

3.20. Лемма. Пусть M — связное n -многообразие, а U и U' — открытые n -диски в нем. Тогда существует такая цепь $C = (U_1, \dots, U_k)$ в M , что $U_1 = U$ и $U_k = U'$.

Доказательство — упражнение в теоретико-множественной топологии, использующее связность M .

Сформулируем основную теорему.

3.21. Теорема. Пусть M — связное n -мерное многообразие и $U \subset M$ — открытый n -диск. Справедливы такие утверждения:

- (a) $H_c^q(M) = 0$ при $q > n$.
- (b) $\tau: H_c^n(U) \rightarrow H_c^n(M)$ — эпиморфизм.
- (c) Все элементы вида $u - C^\#(u)$, где C — любая замкнутая цепь в M с началом и концом U , содержатся в $\text{Ker } \tau$.
- (d) Если M ориентируемо, то τ — изоморфизм.
- (e) Если $G = \mathbb{Z}$ и M — неориентируемое многообразие, то $H_c^n(M)$ — циклическая группа второго порядка.

Доказательство. Прежде всего заметим, что (c) — очевидное следствие леммы 3.19. Таким образом, нужно проверить (a), (b), (d) и (e).

Скажем, что n -многообразие имеет конечный тип, если оно может быть покрыто конечным числом открытых n -дисков. Например, конечный тип имеет компактное многообразие, а также $\mathbb{R}^n$. Декартово произведение многообразий конечного типа имеет конечный тип. Прежде чем рассмотреть общий случай, докажем эту теорему для многообразий конечного типа.

Пусть $M = \bigcup_{i=1}^k U_i$, где множества U_i — открытые n -диски в M . При $k = 1$ утверждения (a), (b) и (d) очевидны, а в проверке (e) нет нужды. Доказательство проведем индукцией по n . Предположим, что утверждения (a), (b), (d) и (e) справедливы для n -многообразий M конечного типа $k \leq m$. Рассмотрим случай $k = m + 1$. В силу связности M существуют m множеств U_i , объединение которых связно. Можно считать, что в подходящих обозначениях связно множество $M' = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_m$. Рассмотрим последовательность Майера — Вьеториса разложения $M = M' \cup U_{m+1}$

$$(2) \dots \xrightarrow{\Delta} H_c^q(M' \cap U_{m+1}) \xrightarrow{\Phi} H_c^q(M') \oplus H_c^q(U_{m+1}) \xrightarrow{\Psi} H_c^q(M) \xrightarrow{\Delta} \dots$$

Поскольку U_{m+1} гомеоморфно $\mathbb{R}^n$, из теоремы 3.3 вытекает, что $H_c^q(M' \cap U_{m+1}) = 0$ при $q > n$. Поэтому в силу точности послед-

довательности Майера — Вьеториса и предположения индукции имеем $H_c^q(M) = 0$ при $q > n$. Тем самым утверждение (а) для многообразий конечного типа доказано.

Докажем теперь (b). Прежде всего заметим, что гомоморфизмы

$$\tau': H_c^n(U_{m+1}) \rightarrow H_c^n(M),$$

$$\tau: H_c^n(U) \rightarrow H_c^n(M)$$

имеют одинаковый образ. Это следует из лемм 3.19 и 3.20. Таким образом, достаточно доказать эпиморфность τ' . Рассмотрим следующий отрезок последовательности Майера — Вьеториса:

$$(3) \quad \dots \xrightarrow{\Delta} H_c^n(M' \cap U_{m+1}) \xrightarrow{\Phi} H_c^n(M') \oplus H_c^n(U_{m+1}) \xrightarrow{\Psi} H_c^n(M) \rightarrow 0.$$

Пусть $\{M_i | i \in I\}$ — множество компонент пространства $M' \cap U_{m+1}$ и V_i — любой открытый n -диск, содержащийся в M_i . Для каждого i диаграмма

$$(4) \quad \begin{array}{ccccc} & & H_c^n(M') & & \\ & \nearrow \tau_{1i} & \uparrow \tau'_i & \searrow \tau'' & \\ H_c^n(V_i) & \xrightarrow{\tau_{2i}} & H_c^n(M_i) & \xrightarrow{\tau_{4i}} & H_c^n(M) \\ & \searrow \tau_{3i} & \downarrow \tau_i & \nearrow \tau' & \\ & & H_c^n(U_{m+1}) & & \end{array}$$

коммутативна. В соответствии с предположением индукции $\tau_{1i}: H_c^n(V_i) \rightarrow H_c^n(M')$ — эпиморфизм. Гомоморфизм ψ из последовательности Майера — Вьеториса определен соотношением

$$\psi(a, b) = \tau''(a) - \tau'(b).$$

Из точности последовательности (3) заключаем, что ψ — эпиморфизм. Для доказательства эпиморфности τ' достаточно установить включение $\text{Im } \psi \subset \text{Im } \tau'$. Для любого элемента $a \in H_c^n(M')$ найдется $a' \in H_c^n(V_i)$, такой, что $a = \tau_{1i}(a')$. Тогда

$$\begin{aligned} \psi(a, b) &= \tau''(a) - \tau'(b) = \tau''\tau_{1i}(a') - \tau'(b) = \\ &= \tau'\tau_{3i}(a') - \tau'(b) = \tau'[\tau_{3i}(a') - b]. \end{aligned}$$

Утверждение (b) доказано.

Докажем (d). С помощью лемм 3.19 и 3.20 заключаем, что достаточно установить мономорфность τ' в диаграмме (4). Заметим, что в силу леммы 3.18 M' ориентируемо. Из предположения об ориентируемости M вытекает также, что цепи $C = (U_1, \dots, U_k)$ и $C' = (U'_1, \dots, U'_l)$ с $U_1 = U'_1$ и $U_k = U'_l$ индуцируют одинаковый изоморфизм $C^\# = C'^\#: H_c^n(U_1) \rightarrow H_c^n(U_k)$. Таким

образом, для любых двух открытых n -дисков в связном ориентируемом n -многообразии все изоморфизмы $C^\# : H_c^n(U) \rightarrow H_c^n(V)$ совпадают. Кроме того, к этому единственному изоморфизму применима лемма 3.19.

Далее заметим, что в диаграмме (4) τ_{1i} — изоморфизм по предположению индукции, а τ_{3i} — изоморфизм по лемме 3.15. Следовательно, τ_{2i} — мономорфизм. Для многообразия M_i конечного типа эпиморфность τ_{2i} уже доказана. Во второй части доказательства теоремы мы покажем, что утверждение (b) для произвольных многообразий — следствие утверждения (b) для многообразий конечного типа. Таким образом, τ_{2i} — всегда эпиморфизм. Следовательно, в нашем случае τ_{2i} — изоморфизмы при всех i .

По теореме о прямой сумме $H_c^n(M' \cap U_{m+1}) \cong \sum_i H_c^n(M_i)$. Отсюда и из определения φ заключаем, что $\text{Im } \varphi$ состоит из конечных сумм вида $\sum_i (\tau'_{1i} u_i, \tau_{1i} u_i)$, где $u_i \in H_c^n(M_i)$. Определим $\varphi' : \sum_i H_c^n(V_i) \rightarrow H_c^n(M') \oplus H_c^n(U_{m+1})$, полагая $\varphi'(\sum_i v_i) = \sum_i (\tau_{1i} v_i, \tau_{3i} v_i)$. Тогда $\text{Ker } \psi = \text{Im } \varphi = \text{Im } \varphi'$. Если отождествить $H_c^n(U_{m+1})$ с подгруппой в $H_c^n(M') \oplus H_c^n(U_{m+1})$, то $\text{Ker } \tau' = \text{Ker } \psi \cap H_c^n(U_{m+1})$. Поэтому мы должны доказать, что

$$\text{Im } \varphi' \cap H_c^n(U_{m+1}) = 0,$$

т. е. что из $\sum_i v_i \in \sum_i H_c^n(V_i)$ и $\sum_i \tau_{1i}(v_i) = 0$ вытекает $\sum_i \tau_{3i}(v_i) = 0$.

С этой целью фиксируем некоторый индекс i_0 . Ранее было отмечено, что существует единственный изоморфизм $C_{i_0}^\# : H_c^n(V_{i_0}) \rightarrow H_c^n(V_{i_0})$, а диаграммы

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} H_c^n(V_i) & \xrightarrow{C_i^\#} & H_c^n(V_{i_0}) \\ \tau_{1i} \searrow & & \swarrow \tau_{1i_0} \\ & H_c^n(M') & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} H_c^n(V_i) & \xrightarrow{C_i^\#} & H_c^n(V_{i_0}) \\ \tau_{3i} \searrow & & \swarrow \tau_{3i_0} \\ & H_c^n(U_{m+1}) & \end{array}$$

коммутативны. Заметим, что $C_{i_0}^\#$ — тождественный изоморфизм. Имеем

$$\sum_i \tau_{1i}(v_i) = \tau_{1i_0}(\sum_i C_{i_0}^\# v_i),$$

$$\sum_i \tau_{3i}(v_i) = \tau_{3i_0}(\sum_i C_{i_0}^\# v_i).$$

Требуемое утверждение вытекает теперь из того, что τ_{1i} и τ_{3i_0} — мономорфизмы. Этим завершается доказательство утверждения (d).

Обратимся к (e). Снова используем диаграмму (4). Имеем две возможности — либо M' ориентируемо, либо нет. В случае когда M' ориентируемо, большинство предыдущих рассуждений сохраняет силу. Существуют цепи C'_i в M' и C_i в U_{m+1} , индуцирующие единственные изоморфизмы, для которых коммутативны диаграммы

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} H_c^n(V_i) & \xrightarrow{C_i^\#} & H_c^n(V_{i_0}) \\ \tau_{1i} \searrow & & \nearrow \tau_{1i_0} \\ & H_c^n(M') & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} H_c^n(V_i) & \xrightarrow{C_i^\#} & H_c^n(V_{i_0}) \\ \tau_{3i} \searrow & & \nearrow \tau_{3i_0} \\ & H_c^n(U_{m+1}) & \end{array}$$

Кроме того, если M неориентируемо, то для некоторого индекса $i \neq i_0$ имеем $C_i^\# = -C_i^\#$. Поэтому $H_c^n(M; \mathbb{Z})$ — циклическая группа порядка два (доказательство оставляем читателю). Остается рассмотреть случай неориентируемого M' . Прежде всего заметим, что в силу утверждений (b) и (c) либо $H_c^n(M) = 0$, либо $H_c^n(M)$ — циклическая группа порядка два. Чтобы показать невозможность первого случая, достаточно установить, что $\tau'': H_c^n(M') \rightarrow H_c^n(M)$ — мономорфизм. Для этого используем те же аргументы, что и при доказательстве (d). Имеем

$$\text{Ker } \tau'' = \text{Ker } \psi \cap H_c^n(M') = \text{Im } \varphi \cap H_c^n(M') = \text{Im } \varphi' \cap H_c^n(M').$$

Следовательно, мы должны доказать, что $\sum \tau_{1i}(v_i) = 0$, если $\sum v_i \in \sum H_c^n(V_i)$ и $\sum \tau_{3i}(v_i) = 0$. Снова воспользуемся диаграммами (7), в которых C'_i и C_i — цепи в M' и U_{m+1} соответственно. Справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \sum \tau_{1i}(v_i) &= \tau_{1i_0}(\sum C_i'^\# v_i), \\ \sum \tau_{3i}(v_i) &= \tau_{3i_0}(\sum C_i^\# v_i). \end{aligned}$$

Поскольку τ_{3i_0} — изоморфизм, $\sum \tau_{3i}(v_i) = 0$ тогда и только тогда, когда $\sum C_i^\# v_i = 0$. По предположению индукции τ_{1i_0} — приведение по модулю 2. Для любого индекса i имеем $C_i'^\# v_i = \pm C_i^\# v_i$. В силу этих двух фактов равенство $\sum \tau_{3i}(v_i) = 0$ влечет за собой равенство $\sum \tau_{1i}(v_i) = 0$, что и требовалось.

Перейдем к доказательству теоремы для произвольных n -многообразий (не обязательно конечного типа). Докажем

утверждения (а), (b), (d) и (е) исходя из справедливости этих утверждений для многообразий конечного типа.

Читатель, видимо, уже догадался, что доказательство основано на использовании свойств (6) и (7) из § 1.3. Прежде всего заметим, что для n -многообразия M в утверждениях (6) и (7) фразу «открытое подмножество с компактным замыканием» (всюду, где она встречается) можно заменить на «открытое множество, являющееся объединением конечного числа открытых n -дисков». Это следует из того, что компактное подмножество в M можно покрыть конечным числом открытых n -дисков.

3.22. Лемма. Пусть M — связное n -многообразие. Любое подмножество A в M , являющееся объединением конечного числа открытых n -дисков, содержится в открытом связном подмногообразии конечного типа.

Действительно, A имеет лишь конечное число компонент, а по лемме 3.20 любые две компоненты можно соединить цепью в M . Требуемое связное открытое подмногообразие конечного типа получается присоединением к A дисков из конечного набора цепей.

Отсюда вытекает, что для связного многообразия M утверждения (6) и (7) из § 1.3 останутся справедливыми, если слова «открытое подмножество с компактным замыканием» заменить на «связное открытое подмногообразие конечного типа». С этими изменениями утверждения (а) и (b) легко вытекают из утверждения (6) § 1.3, а (d) — из утверждения (7) § 1.3 и леммы 3.18. Для доказательства утверждения (е) снова заметим, что в соответствии с (b) и (с) в неориентируемом случае группа $H_c^n(M; \mathbb{Z})$ либо равна нулю, либо изоморфна циклической группе второго порядка. Предположим, что $H_c^n(M; \mathbb{Z}) = 0$. Пусть U — открытый n -диск в M и a — образующая группы $H_c^n(U; \mathbb{Z})$. Тогда $\tau_{U, M}(a) = 0$. Применяя измененное выше утверждение (7) из § 1.3, придем к противоречию.

Доказательство теоремы 3.21 завершено.

Упражнения

1. Докажите, что для замкнутого собственного подмножества A связного n -многообразия $H_c^q(A) = 0$ при $q \geq n$.

2. Пусть R — поле характеристики, отличной от 2, и M — связное неориентируемое n -многообразие. Пусть G — векторное пространство над R . Какова структура группы $H_c^n(M; G)$? (Используйте существование замкнутой цепи C , для которой $C^\#(u) = -u$. (Это будет позже доказано.))

3. Пусть R — поле произвольной характеристики и M — связное ориентируемое n -многообразие ($n > 1$), для которого

$H_c^{n-1}(M; R) = 0$ (например, M — евклидово пространство или сфера). Пусть A — замкнутое подмножество в M . Найдите соотношение между размерностью (над R) векторного пространства $H_c^{n-1}(A; R)$ и числом компонент дополнения $M \setminus A$. Докажите, что число компонент дополнения $M \setminus A$ не зависит от того, как A вложено в M в качестве замкнутого подмножества (это утверждение обобщает теорему о кривой Жордана и теорему Брауэра о разделении).

4. Пусть M^n — связное неориентируемое n -многообразие и M^{n+1} — связное ориентируемое $(n+1)$ -многообразие, для которого $H_c^n(M^{n+1}; \mathbb{Z}) = 0$. Используя целочисленные коэффициенты, докажите, что M^n нельзя вложить в качестве замкнутого подмножества в M^{n+1} (воспользуйтесь утверждением (е) теоремы 3.21). В частности, компактное неориентируемое $(n-1)$ -многообразие нельзя вложить в n -мерную сферу или в n -мерное евклидово пространство, а лист Мёбиуса (без края) — в качестве замкнутого подмножества в трехмерное евклидово пространство.

5. Докажите, что если A — замкнутое собственное подмножество n -мерного евклидова пространства, то $H_c^{n-1}(A; \mathbb{Z})$ — свободная абелева группа.

6. Пусть M — лист Мёбиуса (без края). Докажите, что $H_c^1(M; \mathbb{Z}) = 0$. (Указание. Пусть X — лист Мёбиуса с краем B , $M = X \setminus B$. Пространство X имеет гомотопический тип окружности, а M — неориентируемое 2-многообразие.)

7. Вычислите группы когомологий проективной плоскости с коэффициентами в целых числах. (Используйте то, что дополнение к точке гомеоморфно листу Мёбиуса.)

8. Пусть M_1 и M_2 — связные n -многообразия, $n > 1$. Определим связную сумму $M_1 \# M_2$ следующим образом. Выберем точки $p_i \in M_i$, $i = 1, 2$. Пусть U_i — открытый n -диск, содержащий точку p_i , и S_i — граница U_i , т. е. $(n-1)$ -мерная сфера. Выберем гомеоморфизм между S_1 и S_2 . В пространстве $(M_1 \setminus U_1) \cup (M_2 \setminus U_2)$ отождествим каждую точку из S_1 с ее образом в S_2 при выбранном гомеоморфизме. Полученное пространство и есть $M_1 \# M_2$.

(а) Если одно из многообразий M_1 и M_2 неориентируемо, то и $M_1 \# M_2$ неориентируемо.

(б) Если оба многообразия M_1 и M_2 ориентируемы, то $M_1 \# M_2$ ориентируемо.

(с) Выразите целочисленные группы когомологий многообразия $M_1 \# M_2$ через аналогичные когомологии M_1 и M_2 . (Необходимо рассмотреть несколько случаев в зависимости от ориентируемости или неориентируемости, компактности или

некомпактности многообразий M_1 и M_2 . Воспользуйтесь последовательностью Майера — Вьеториса.)

9. Пусть известны следующие факты об n -мерных вещественных проективных пространствах $P_n(\mathbb{R})$ при $n > 1$:

(a) $P_1(\mathbb{R})$ гомеоморфно S^1 .

(b) При $n > 1$ имеется вложение $P_{n-1}(\mathbb{R})$ в $P_n(\mathbb{R})$, при котором $P_n(\mathbb{R}) \setminus P_{n-1}(\mathbb{R})$ гомеоморфно $\mathbb{R}^n$.

(c) $P_n(\mathbb{R})$ — связное компактное n -многообразие.

(d) $P_n(\mathbb{R})$ ориентируемы при четных n и неориентируемы при четных.

Используя эти свойства, теорему 3.21 и индукцию по n , найдите группы когомологий пространства $P_n(\mathbb{R})$ с целочисленными коэффициентами. В случаях четного и нечетного n результаты различны.

Теория гомологий

§ 4.1. Введение

В этой главе дается описание теории гомологий, естественным образом двойственной к рассмотренной выше теории когомологий, и устанавливаются ее основные свойства. Гомологии появились раньше когомологий примерно на 40 лет, поэтому изучение теории гомологий оправдано прежде всего с исторической точки зрения. Однако для этого имеются и чисто внутренние причины: многие результаты более прозрачно формулируются в терминах гомологий, чем когомологий. Нередко классы гомологий несут в себе больше интуитивного геометрического содержания, чем классы когомологий, и их легче себе представить. Эту точку зрения можно оспаривать, но, без сомнения, в некоторых ситуациях гомологии имеют преимущества перед когомологиями.

Основные свойства излагаемой ниже теории гомологий двойственны описанным в гл. 1 свойствам групп когомологий. Большинство из них перечислено в виде аксиом в книге Стинрода и Эйленберга (§ 7 гл. X в [14]). Интересно отметить, что Стинрод и Эйленберг не дают ни одного примера теории гомологий, удовлетворяющей их аксиомам, в категории R -модулей, за исключением случая, когда R является полем¹⁾.

§ 4.2. Понятие двойственности

Смысл термина «двойственность», возможно, лучше всего пояснить на следующем хорошо известном примере. Пусть F — поле.

¹⁾ В указанном разделе книги [14] авторы объясняют, каким образом теория гомологий «одного пространства» может быть построена, исходя из обычной, определенной в компактной категории. Позже выяснилось, что в категории метризуемых компактов «обычной» является теория гомологий, определенная Стинродом [55] еще в 1940 г., а вскоре была построена и сама теория «одного пространства» (см. предисловие редактора перевода). Кроме того, в категории локально компактных полиэдров и их собственных отображений теориями «одного пространства» являются симплициальные гомологии и когомологи второго рода (изоморфизмы вырезания $H_*(X, A) = H_*(X \setminus A)$ и $H_c^*(X, A) = H_c^*(X \setminus A)$ освещены в трудах семинара Картана (1948—1949 гг.)); описание этих теорий с точки зрения аксиом дано в [11*], [7*]. — Прим. ред.

Для любого векторного пространства V над F пусть V^* — множество всех линейных форм на V , т. е. отображений $\lambda: V \rightarrow F$, линейных над F . На множестве V^* естественным образом определяется структура векторного пространства над F . Множество V^* , снабженное этой структурой, называется векторным пространством, *двойственным* (сопряженным) к пространству V . Линейное над F отображение $f: V \rightarrow W$ определяет *двойственное отображение* $f^*: W^* \rightarrow V^*$, заданное формулой

$$f^*(\lambda) = \lambda \circ f \quad \text{для любого } \lambda \in W^*.$$

Операция сопоставления каждому векторному пространству V двойственного к нему пространства V^* и каждому линейному отображению f двойственного отображения f^* обладает рядом хороших свойств. Вот некоторые из них.

(а) Если $f: V \rightarrow V$ — тождественный изоморфизм, то $f^*: V^* \rightarrow V^*$ — также тождественный изоморфизм.

(б) Если $f: V \rightarrow W$ и $g: W \rightarrow X$ — линейные над F отображения, то $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*: X^* \rightarrow V^*$. (Замечание. Свойства (а) и (б) означают, что операция, обозначаемая звездочкой, является *контравариантным функтором* на категории векторных пространств и их гомоморфизмов.)

(с) Если $f_1, f_2: V \rightarrow W$ — линейные отображения, то $f_1^* + f_2^* = (f_1 + f_2)^*$ (т. е. эта операция — *аддитивный функтор*).

(д) Если последовательность векторных пространств над F и F -гомоморфизмов

$$\dots \rightarrow V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} V_{n+1} \rightarrow \dots$$

точна, то двойственная последовательность

$$\dots \leftarrow V_{n-1}^* \xleftarrow{f_{n-1}^*} V_n^* \xleftarrow{f_n^*} V_{n+1}^* \leftarrow \dots$$

также точна (т. е. эта операция — *точный функтор*). В частности, отображение, двойственное к эпиморфизму, — мономорфизм, а двойственное к мономорфизму — эпиморфизм. Другими словами, двойственным к подпространству является факторпространство, а двойственным к факторпространству — подпространство.

(е) Для каждого векторного пространства V имеется естественный мономорфизм

$$\sigma_V: V \rightarrow V^{**};$$

σ_V — тогда и только тогда изоморфизм, когда V конечномерно над F .

σ_V определяется формулой $(\sigma_V v)(\lambda) = \lambda(v)$ при $v \in V$ и $\lambda \in V^*$. Естественность отображения σ означает, что для любого

линейного отображения $f: V \rightarrow W$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow \sigma_V & & \downarrow \sigma_W \\ V^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & W^{**} \end{array}$$

коммутативна (т. е. σ — естественное преобразование функторов).

Эти свойства, грубо говоря, означают следующее: переход к двойственной ситуации осуществляется приписыванием звездочки к каждому векторному пространству и любому линейному отображению, обращением всех стрелок и взаимной заменой терминов «эпиморфизм — мономорфизм» и «подпространство — факторпространство». Свойство (е) показывает, что при переходе к двойственной ситуации мы ничего не теряем, по крайней мере в случае конечномерных векторных пространств. Понятию двойственности, которое мы объяснили на примере, можно дать точное формальное определение. Лучше всего это сделать, введя понятие абелевой категории (ср. Маклейн [36, гл. IX]). Однако на данной стадии изложения такой формализм не является ни необходимым, ни полезным.

Читатель легко убедится в том, что большинство выписанных выше свойств перестает быть верным, если вместо векторных пространств V над полем F рассматривать модули M над произвольным кольцом R .

Однако приведенные рассуждения частично проясняют сделанное выше утверждение о том, что основные свойства гомологий двойственны свойствам когомологий из гл. I. Дальнейшее разъяснение этого утверждения дает следующий частный случай. Рассмотрим теорию когомологий (из гл. I) в ситуации, когда $G = F$ — поле. Тогда $H_c^q(X; F)$ — векторное пространство над F , а гомоморфизмы f^* , $\tau_{U, X}$ и $\delta_{X, A}$ линейны над F . Переход к двойственным пространствам и гомоморфизмам дает теорию гомологий с коэффициентами в F . Каждое из основных свойств когомологий, перечисленных в § 1.6, превратится в двойственное ему свойство теории гомологий. Читателю следует просмотреть этот список и выписать двойственные свойства ¹⁾.

Заметим, что в случае когомологий с коэффициентами в произвольном кольце R , а не в поле F , столь простой процесс

¹⁾ В рассматриваемом случае гомологии $H_q(X; F)$ определяются из цепных комплексов $\{C_i(X; F)\}$, двойственных к коцепным комплексам $\{C_c^i(X; F)\}$, и потому двойственны (как векторные пространства) к когомологиям $H_c^q(X; F)$. — Прим. ред.

получения гомологий из когомологий уже не проходит. В частности, нарушается сформулированное выше свойство (d). Это означает, что гомологическая последовательность пары (т. е. последовательность, двойственная к когомологической последовательности пары), вообще говоря, не точна¹⁾.

Тем не менее группы гомологий с произвольными коэффициентами можно определить так, что в *большинстве* своем (хотя и не все) свойства гомологий окажутся двойственными к основным свойствам когомологий. Большая часть настоящей главы посвящена построению этой общей теории гомологий и доказательству для нее всех требуемых свойств. В соответствии со сказанным выше в общем случае простой подход, использованный при описании связи гомологий и когомологий с коэффициентами в поле F , не пригоден. Таким образом, необходима более сложная конструкция. К счастью, эта конструкция использует лишь стандартные средства современной алгебры.

§ 4.3. Перечень основных свойств групп гомологий

Прежде чем перейти к построению общей теории гомологий, перечислим основные свойства, которым она должна удовлетворять.

Как и в гл. 1, пусть G — фиксированная абелева группа. Теория гомологий состоит из следующих четырех положений.

(а) Каждому локально компактному хаусдорфову пространству X и любому целому числу p сопоставлена абелева группа $H_p(X; G)$ (или для краткости $H_p(X)$).

(б) Каждому собственному отображению $f: X \rightarrow Y$ локально компактных пространств сопоставлена последовательность гомоморфизмов

$$f_*: H_p(X) \rightarrow H_p(Y), \quad p = 0, \pm 1, \dots$$

(с) Всякому открытому подмножеству U локально компактного пространства X сопоставлена последовательность гомоморфизмов

$$\rho_X, \iota: H_p(X) \rightarrow H_p(U).$$

(d) Всякому замкнутому подмножеству A локально компактного пространства X сопоставлена последовательность гомомор-

¹⁾ В общем случае гомологии $H_q(X; G)$ не совпадают с $\text{Hom}_R(H_c^q(X; R), G)$ (ни при каких подходах), поэтому ссылка автора на утверждение (d) не совсем удачна. Например, для гомологий Александрова — Чеха H_q отсутствие точности в гомологической последовательности пары (X, A) объясняется неточностью участвующей в определении групп H_q операции взятия обратного предела $\varprojlim$ (см. [14]). — *Прим. ред.*

физмов

$$\partial_{X, A}: H_{p+1}(U) \rightarrow H_p(A),$$

где $U = X \setminus A$.

При этом должны быть выполнены следующие свойства (мы перечисляем их в порядке следования в § 1.6 двойственных свойств когомологий).

(1) Если X состоит из одной точки, то

$$H_p(X; G) = 0 \quad \text{при } p \neq 0,$$

$$H_0(X; G) \cong G.$$

(2a) Если $f: X \rightarrow X$ — тождественный гомеоморфизм, то $f_*: H_p(X) \rightarrow H_p(X)$ — тождественный изоморфизм.

(2b) Если $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ — собственные отображения, то $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*: H_p(X) \rightarrow H_p(Z)$.

(3a) $\rho_{X, X}$ — тождественный изоморфизм.

(3b) Если $V \subset U \subset X$ и V, U открыты, то

$$\rho_{X, V} = \rho_{U, V} \circ \rho_{X, U}.$$

(3c) Пусть $f: X \rightarrow Y$ — такое собственное отображение, что $f(U) \subset V$ и $f(X \setminus U) \subset Y \setminus V$, где U и V — открытые подмножества в X и Y соответственно. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_p(X) & \xrightarrow{f_*} & H_p(Y) \\ \downarrow \rho_{X, U} & & \downarrow \rho_{Y, V} \\ H_p(U) & \xrightarrow{f_{0*}} & H_p(V) \end{array}$$

коммутативна.

(4a) Пусть A — замкнутое подмножество локально компактного пространства X и $U = X \setminus A$. Следующая последовательность (называемая *гомологической последовательностью пары* (X, A)) точна:

$$\dots \rightarrow H_p(A) \xrightarrow{i_*} H_p(X) \xrightarrow{\partial} H_p(U) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}(A) \rightarrow \dots$$

(4b) Пусть $V \subset U$ — открытые подмножества в X , $A = X \setminus U$ и $B = X \setminus V$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_q(V) & \xrightarrow{\rho_{U, V}} & H_q(U) \\ \downarrow \partial_{X, B} & & \downarrow \partial_{X, A} \\ H_{q-1}(B) & \xleftarrow{h_*} & H_{q-1}(A) \end{array}$$

коммутативна.

(4с) В предположениях утверждения (3с) коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_p(U) & \xrightarrow{f_{2*}} & H_p(V) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ H_{p-1}(A) & \xrightarrow{f_{1*}} & H_{p-1}(B) \end{array}$$

Здесь $f_1: A \rightarrow B$ и $f_2: U \rightarrow V$ — отражения, индуцированные f .

(4d) Пусть $U \subset V$ — открытые подмножества в X и $A = X \setminus U$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_q(V \cap A) & & \\ \uparrow \rho & \swarrow \partial_{V, V \cap A} & \\ H_q(A) & \xleftarrow{\partial_{X, A}} & H_{q+1}(V) \end{array}$$

коммутативна.

(5) Если отображения $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ собственно гомотопны, то индуцированные гомоморфизмы $f_{0*}, f_{1*}: H_p(X) \rightarrow H_p(Y)$ совпадают.

(6) Пусть X — дизъюнктное объединение открытых подпространств X_α . Тогда включения $i_\alpha: X_\alpha \rightarrow X$ индуцируют мономорфизмы $i_{\alpha*}: H_q(X_\alpha) \rightarrow H_q(X)$ и $H_q(X)$ — прямое произведение образов $i_{\alpha*}$.

Перечислены все основные свойства групп гомологий. Заметим, что в этом списке нет свойств, двойственных к (6) и (7) из § 1.3. Это не случайно. Утверждения, двойственные к (6) и (7), для теории гомологий, которая будет построена ниже, неверны¹⁾.

§ 4.4. Доказательство того, что группы целочисленных коцепей свободны

Следующая теорема играет решающую роль в определении групп гомологий и доказательстве их основных свойств.

4.1. Теорема. Для любого локально компактного хаусдорфова пространства X и любого целого n группа целочисленных коцепей $C_c^n(X; \mathbb{Z})$ — свободная абелева группа.

Доказательство этой теоремы основано на одном результате Нёбелинга. Рассмотрим сначала этот результат, а затем воспользуемся им при доказательстве теоремы.

¹⁾ См. замечание в конце § 1.3 и теорему 4.22. — Прим. ред.

Пусть I — множество произвольной мощности и F — множество всех ограниченных целочисленных функций, определенных на I . Если $f \in F$ и $f \neq 0$, то она, очевидно, единственным образом представляется в виде

$$(1) \quad f = a_1 h_{X_1} + a_2 h_{X_2} + \dots + a_k h_{X_k},$$

где $a_1, a_2, \dots, a_k$ — отличные от нуля различные целые числа, $X_1, X_2, \dots, X_k$ — непересекающиеся непустые подмножества в I , $k \geq 1$, и h_X — характеристическая функция множества X (т. е. $h_X(i) = 1$ при $i \in X$ и $h_X(i) = 0$ при $i \notin X$).

4.2. Определение. Подгруппа S группы F называется *группой Шпекера*, если из $f \in S$, $f \neq 0$ вытекает, что все $h_{X_1}, h_{X_2}, \dots, h_{X_k}$, участвующие в разложении (1) функции f , принадлежат S .

4.3. Определение. Скажем, что подгруппа S группы F имеет *характеристический базис*, если это свободная абелева группа с базисом, состоящим из некоторых характеристических функций на I .

4.4. Теорема Нёбелинга. Пусть S и T — группы Шпекера, для которых $S \subset T \subset F$. Тогда существует такая свободная подгруппа $R \subset T$, что $T = R \oplus S$ и R имеет характеристический базис.

Доказательство этой теоремы очень неконструктивно и использует трансфинитную индукцию. Мы не будем повторять его здесь. Интересующегося читателя отсылаем к первоначальному доказательству Нёбелинга [45] или к книге Фукса [16, стр. 205—209].

Из этой теоремы вытекает, в частности, что любая группа Шпекера T свободна и имеет характеристический базис (можно взять $S = 0$). Например, в качестве T можно взять всю F . Наконец, из этой теоремы вытекает, что факторгруппа T/S свободна.

Воспользуемся теперь теоремой Нёбелинга для доказательства теоремы 4.1. Пусть $I = X^{n+1}$ есть $(n+1)$ -кратное декартово произведение пространства X . Тогда $\Phi^n(X; \mathbb{Z})$ — группа всех ограниченных целочисленных функций на I , а $\Phi_c^n(X; \mathbb{Z})$ и $\Phi_0^n(X; \mathbb{Z})$ являются, очевидно, подгруппами Шпекера в $\Phi^n(X; \mathbb{Z})$. Следовательно, абелева группа

$$C_c^n(X; \mathbb{Z}) = \Phi_c^n(X; \mathbb{Z}) / \Phi_0^n(X; \mathbb{Z})$$

свободна, что и требовалось.

Далее рассмотрим следующую коммутативную диаграмму из § 1.4:

$$(2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & Q^n(X, A) & \rightarrow & C_c^n(X) & \rightarrow & C_c^n(X)/Q^n(X, A) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & C_c^n(X, A) & \rightarrow & C_c^n(X) & \rightarrow & C_c^n(A) \rightarrow 0 \end{array}$$

Здесь предполагается, что A — замкнутое подмножество в X , а группа коэффициентов есть $\mathbb{Z}$. Обе строки диаграммы точны. Группы $C_c^n(X, A)$ и $Q^n(X, A)$ свободны как подгруппы свободной абелевой группы $C_c^n(X)$. Докажем, что и факторгруппа $C_c^n(X)/Q^n(X, A)$ также свободна. Для доказательства этого утверждения напомним, что, согласно § 1.4¹⁾,

$$C_c^n(X) = \Phi_c^n(X)/\Phi_0^n(X), \quad Q^n(X, A) = R^n(X, A)/\Phi_0^n(X).$$

Поэтому $C_c^n(X)/Q^n(X, A) \cong \Phi_c^n(X)/R^n(X, A)$. Поскольку $\Phi_c^n(X; \mathbb{Z})$ и $R^n(X, A; \mathbb{Z})$, очевидно, — подгруппы Шпекера в $\Phi^n(X; \mathbb{Z})$, утверждение вытекает из теоремы Нёбелинга.

Так как группы $C_c^n(A)$ и $C_c^n(X)/Q^n(X, A)$ свободны, обе короткие точные последовательности диаграммы (2) расщепляются (т. е. $Q^n(X, A)$ и $C_c^n(X, A)$ — прямые слагаемые группы $C_c^n(X)$). Для дальнейших ссылок сформулируем эти результаты.

4.5. Предложение. *Все группы коцепей с целочисленными коэффициентами, встречающиеся в диаграмме (2), являются свободными абелевыми группами, а каждая короткая точная последовательность расщепляется.*

Упражнение

Докажите, что для любого локально компактного хаусдорфова пространства X группа $H_c^0(X; \mathbb{Z})$ свободна (воспользуйтесь теоремой Нёбелинга и результатами § 1.1).

§ 4.5. Сводка основных свойств функтора Hom

Пусть A и B — абелевы группы. В соответствии со стандартными обозначениями $\text{Hom}(A, B)$ — аддитивная группа всех гомоморфизмов $f: A \rightarrow B$. В более общей ситуации, когда A и B — левые модули над кольцом R , пусть $\text{Hom}_R(A, B)$ — аддитивная группа всех R -линейных отображений $f: A \rightarrow B$. Читатель, по-видимому, знаком с основными свойствами функтора $\text{Hom}(A, B)$. Поэтому напомним лишь некоторые необходимые нам свойства.

¹⁾ Здесь $R^n(X, A)$ — прообраз группы $Q^n(X, A)$ в $\Phi_c^n(X)$. — Прим. ред.

Пусть $\varphi: A' \rightarrow A$ и $\psi: B \rightarrow B'$ — гомоморфизмы R -модулей (т. е. R -линейные отображения). Тогда через

$$\text{Hom}_R(\varphi, \psi): \text{Hom}_R(A, B) \rightarrow \text{Hom}_R(A', B')$$

обозначается гомоморфизм, который отображает элемент $f \in \text{Hom}_R(A, B)$ в $\psi f \varphi$. Если $B = B'$ и ψ — тождественный изоморфизм, то гомоморфизм $\text{Hom}(\varphi, \psi)$ часто будет обозначаться также через $\varphi^\#$ или φ^* . Аналогично, если $A = A'$ и φ — тождественный изоморфизм, то вместо $\text{Hom}(\varphi, \psi)$ будем писать $\psi_\#$ или ψ_* . С точки зрения теории категорий это означает, что Hom — функтор двух аргументов, контравариантный по первому аргументу и ковариантный по второму. Кроме того, этот функтор *аддитивен* в том смысле, что имеют место следующие соотношения:

$$\text{Hom}(\varphi_1 + \varphi_2, \psi) = \text{Hom}(\varphi_1, \psi) + \text{Hom}(\varphi_2, \psi),$$

$$\text{Hom}(\varphi, \psi_1 + \psi_2) = \text{Hom}(\varphi, \psi_1) + \text{Hom}(\varphi, \psi_2).$$

Возможно, наиболее важным свойством функтора Hom является его поведение по отношению к точным последовательностям.

4.6. Теорема. (а) Для любой точной последовательности $A'' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} A' \rightarrow 0$ и любого R -модуля B точна следующая последовательность абелевых групп:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(A', B) \xrightarrow{j^\#} \text{Hom}_R(A, B) \xrightarrow{i^\#} \text{Hom}_R(A'', B).$$

(б) Для любой точной последовательности R -модулей $0 \rightarrow B'' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} B'$ и любого R -модуля A точна последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(A, B'') \xrightarrow{i_\#} \text{Hom}_R(A, B) \xrightarrow{j_\#} \text{Hom}_R(A, B').$$

Доказательство этой теоремы элементарно и предоставляется читателю.

Существенно, что если $i: A'' \rightarrow A$ — мономорфизм, то $i^\#: \text{Hom}_R(A, B) \rightarrow \text{Hom}_R(A'', B)$, вообще говоря, не является эпиморфизмом. Например, если $R = \mathbb{Z}$, A и A'' — бесконечные циклические группы, i переводит образующую группы A'' в удвоенную образующую группы A и B — циклическая группа второго порядка, то $i^\#$ — не эпиморфизм. Аналогично, из эпиморфности $j: B \rightarrow B'$, вообще говоря, не вытекает эпиморфность $j_\#: \text{Hom}_R(A, B) \rightarrow \text{Hom}_R(A, B')$. Построение контрпримера мы оставляем читателю.

Таким образом, функтор Hom не является точным функтором, но он точен слева. Отсутствие точности функтора Hom

приводит к определению функтора Ext , с которым мы встретимся ниже.

Нас пока удовлетворят следующие достаточные условия точности:

4.7. Теорема. (а) Пусть $0 \rightarrow A'' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} A' \rightarrow 0$ — точная расщепляющаяся последовательность R -модулей. Тогда последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(A', B) \xrightarrow{j^\#} \text{Hom}_R(A, B) \xrightarrow{i^\#} \text{Hom}_R(A'', B) \rightarrow 0$$

точна и расщепляется для любого R -модуля B .

(б) Пусть $0 \rightarrow B'' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} B' \rightarrow 0$ — точная расщепляющаяся последовательность R -модулей. Тогда последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(A, B'') \xrightarrow{i^\#} \text{Hom}_R(A, B) \xrightarrow{j^\#} \text{Hom}_R(A, B') \rightarrow 0$$

точна и расщепляется для любого R -модуля A .

Доказательство элементарно, и мы оставляем его читателю в качестве упражнения.

Упражнения

1. Докажите существование естественного изоморфизма

$$\text{Hom}_R\left(\sum_{\alpha} A_{\alpha}, R\right) \cong \prod_{\alpha} \text{Hom}_R(A_{\alpha}, B).$$

Здесь $\sum$ — прямая сумма R -модулей, а $\prod$ — прямое произведение.

2. Докажите, что существует естественный изоморфизм

$$\text{Hom}_R\left(A, \prod_{\alpha} B_{\alpha}\right) \cong \prod_{\alpha} \text{Hom}_R(A, B_{\alpha}).$$

3. Пусть $0 \rightarrow B'' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} B' \rightarrow 0$ — точная последовательность R -модулей. Докажите, что последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(F, B'') \xrightarrow{i^\#} \text{Hom}_R(F, B) \xrightarrow{j^\#} \text{Hom}_R(F, B') \rightarrow 0$$

точна для любого свободного R -модуля F .

§ 4.6. Определение групп гомологий и индуцированных гомоморфизмов

Пусть X — любое локально компактное хаусдорфово пространство и $C_c^n(X)$ — группа целочисленных n -мерных коцепей пространства X .

4.8. Определение. Группой n -мерных цепей с коэффициентами в абелевой группе G называется группа

$$C_n(X; G) = \text{Hom}(C_c^n(X), G).$$

Граничный оператор $\partial: C_n(X; G) \rightarrow C_{n-1}(X; G)$ определим как $\partial = \delta^\#$, где $\delta: C_c^{n-1}(X) \rightarrow C_c^n(X)$ — обычный кограничный оператор. Поскольку $\partial\partial = \delta^\#\delta^\# = (\delta\delta)^\# = 0$, последовательность групп $\{C_n(X; G)\}$ вместе с граничным оператором ∂ представляет собой цепной комплекс, который мы будем обозначать через $C_*(X; G)$. По определению n -мерная группа гомологий цепного комплекса $C_*(X; G)$ называется n -мерной группой гомологий пространства X с коэффициентами в G . Она обозначается через $H_n(X; G)$.

Индукцированные гомоморфизмы определяются очевидным образом.

Именно, пусть $f: X \rightarrow Y$ — собственное отображение локально компактных пространств и $f^\#: C_c^n(Y) \rightarrow C_c^n(X)$ — индуцированный этим отображением гомоморфизм целочисленных коцепей. Определим гомоморфизм

$$f_\#: C_n(X; G) \rightarrow C_n(Y; G)$$

как $f_\# = \text{Hom}(f^\#, 1)$, где $1: G \rightarrow G$ — тождественный изоморфизм. Поскольку $f^\#$ коммутирует с кограничным оператором, $f_\#$ коммутирует с граничным оператором, т. е. $f_\#$ — цепное отображение. Через

$$f_*: H_n(X; G) \rightarrow H_n(Y; G)$$

обозначим гомоморфизм, индуцированный цепным отображением $f_\#$.

Далее пусть U — открытое подмножество локально компактного пространства X . Согласно § 1.3, определено коцепное отображение

$$\sigma = \sigma_{U, X}: C_c^n(U) \rightarrow C_c^n(X).$$

Пусть $\sigma_\# = \text{Hom}(\sigma, 1)$ — индуцированный им гомоморфизм $C_n(X; G) \rightarrow C_n(U; G)$. Поскольку σ коммутирует с кограничным оператором, $\sigma_\#$ — цепное отображение. Индуцированный гомоморфизм групп гомологий будем обозначать через ρ или

$$\rho_{X, U}: H_n(X; G) \rightarrow H_n(U; G).$$

Читатель легко проверит, что индуцированные гомоморфизмы f_* и $\rho_{X, U}$ обладают свойствами (2a), (2b), (3a), (3b) и (3c), перечисленными в § 4.3. Тот факт, что группы целочисленных коцепей $C_c^n(X)$ свободны, пока нигде не использовался.

Процедура определения комплекса $C_*(X; G)$ с помощью комплекса целочисленных коцепей $C_c^*(X)$ носит общий характер. Применяя функтор $\text{Hom}(\_, G)$ к цепному комплексу $K = \{K_n, \partial_n\}$, получим коцепной комплекс $\{\text{Hom}(K_n, G), \text{Hom}(\partial_n, 1)\}$, который для краткости будем обозначать через $\text{Hom}(K, G)$. Аналогично, применяя функтор $\text{Hom}(\_, G)$ к коцепному комплексу, всегда получим цепной комплекс.

§ 4.7. Точная гомологическая последовательность пары

В этом параграфе мы докажем свойство (4) из § 4.3, т. е. точность гомологической последовательности пары. Существенную роль в доказательстве играет тот факт, что группы целочисленных коцепей свободны. Предварительно докажем одну довольно общую теорему о цепных (или коцепных) комплексах, состоящих из свободных абелевых групп.

Пусть $K = \{K_n, \partial_n\}$ и $K' = \{K'_n, \partial'_n\}$ — цепные комплексы и $f, g: K \rightarrow K'$ — цепные отображения.

4.9. Определение. Цепная гомотопия между f и g — это такая последовательность $D = \{D_n\}$ гомоморфизмов $D_n: K_n \rightarrow K'_{n+1}$, что при каждом n имеет место равенство

$$f_n - g_n = \partial'_{n+1} D_n + D_{n-1} \partial_n.$$

Отображения f и g называются *цепно гомотопными*, если существует цепная гомотопия между f и g (сокращенно $f \simeq g$).

Оставляем читателю проверить следующие два утверждения:

(а) Если f и g цепно гомотопны, то индуцированные гомоморфизмы f_* и $g_*: H_n(K) \rightarrow H_n(K')$ совпадают.

(б) Цепная гомотопия определяет на множестве цепных отображений отношение эквивалентности (классы эквивалентности называются *гомотопическими классами цепных отображений*).

4.10. Определение. Цепные комплексы K и K' называются *гомотопически эквивалентными*, если существуют такие цепные отображения $f: K \rightarrow K'$ и $g: K' \rightarrow K$, что композиции gf и fg цепно гомотопны тождественным отображениям $K \rightarrow K$ и $K' \rightarrow K'$ соответственно. Такие цепные отображения f и g называются *цепными гомотопическими эквивалентностями*.

Ясно, что если $f: K \rightarrow K'$ — цепная гомотопическая эквивалентность, то $f_*: H_n(K) \rightarrow H_n(K')$ — изоморфизм для всех n . Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Однако оно справедливо для цепных комплексов свободных абелевых групп.

4.11. Теорема. Пусть K и K' — цепные комплексы, состоящие из свободных абелевых групп, и пусть $f: K \rightarrow K'$ — такое цепное

отображение, что индуцированные гомоморфизмы $f_*: H_n(K) \rightarrow H_n(K')$ являются изоморфизмами для всех n . Тогда f — цепная гомотопическая эквивалентность.

Для доказательства этой теоремы введем одно дополнительное понятие и докажем несколько лемм.

4.12. Лемма. Пусть $K = \{K_n, \partial_n\}$ — цепной комплекс, состоящий из свободных абелевых групп K_n . В этом случае при каждом n группы циклов $Z_n(K)$ — прямые слагаемые в K_n .

Доказательство вытекает из следующих двух фактов: (а) группа границ $B_{n-1}(K)$ свободна (как подгруппа свободной абелевой группы K_{n-1}); (б) граничный оператор ∂_n отображает K_n на $B_{n-1}(K)$ и $Z_n(K) = \text{Кер } \partial_n$.

4.13. Лемма. Пусть $K = \{K_n, \partial_n\}$ — такой цепной комплекс, для которого $Z_n(K)$ — прямые слагаемые K_n и $H_n(K) = 0$ при каждом n . Тогда тождественное и нулевое отображения $K \rightarrow K$ цепно гомотопны.

Доказательство. Для каждого n выберем разложение в прямую сумму $K_n = Z_n(K) \oplus L_n$. Тогда ∂_n отображает L_n изоморфно на $B_{n-1}(K)$, и по предположению $B_{n-1}(K) = Z_{n-1}(K)$. Определим $D_n: K_n \rightarrow K_{n+1}$. Для $x \in Z_n(K)$ пусть $D_n(x)$ — элемент из L_{n+1} , соответствующий x при указанном изоморфизме, и пусть $D_n(x) = 0$ при $x \in L_n$. Для всех $x \in K_n$ справедливо равенство

$$\partial_{n+1}D_n(x) + D_{n-1}\partial_n(x) = x.$$

Достаточно проверить его для $x \in L_n$ и $x \in Z_n(K)$. Но это равенство и есть утверждение леммы.

4.14. Определение. Пусть $f: K \rightarrow K'$ — цепное отображение. Конусом отображения f называется такой цепной комплекс $M(f)$, у которого

$$M(f)_n = K_n \oplus K'_{n+1},$$

а граничный оператор $d_n: M(f)_n \rightarrow M(f)_{n-1}$ определен формулой

$$d_n(x, x') = (-\partial_n(x), \partial'_{n+1}(x') + f_n(x)),$$

где $x \in K_n$, $x' \in K'_{n+1}$.

Легко проверить, что конус отображения¹⁾ f действительно является цепным комплексом, т. е. что $d_{n-1}d_n = 0$. Кроме того, возникает короткая точная последовательность цепных комплексов $0 \rightarrow K' \xrightarrow{i} M(f) \xrightarrow{j} K \rightarrow 0$, в которой i и j — цепные

¹⁾ В другой терминологии $M(f)$ — цилиндр отображения f . — Прим. ред.

отображения¹⁾, определенные соотношениями $i(x') = (0, x')$, $j(x, x') = x$. Эта короткая точная последовательность цепных комплексов, как обычно, приводит к точной гомологической последовательности

$$\dots \xrightarrow{d_*} H_{n+1}(K') \xrightarrow{i_*} H_n(M(f)) \xrightarrow{j_*} H_n(K) \xrightarrow{d_*} H_n(K') \rightarrow \dots$$

Легко видеть, что связывающий гомоморфизм $d_*: H_n(K) \rightarrow H_n(K')$ этой последовательности совпадает с гомоморфизмом $f_*: H_n(K) \rightarrow H_n(K')$, индуцированным цепным отображением f . В этом, собственно, цель введения понятия конуса отображения — включить естественным образом гомоморфизм $f_*: H_n(K) \rightarrow H_n(K')$ в длинную точную последовательность гомологий.

Замечание. Введенные выше понятия являются алгебраическими аналогами в категории цепных комплексов и цепных отображений таких чисто топологических понятий, как гомотопия, гомотопическая эквивалентность топологических пространств, конус непрерывного отображения. Эта аналогия между двумя категориями оправдывает введение таких понятий.

Теперь мы можем доказать теорему 4.11. Пусть $M(f)$ — конус цепного отображения $f: K \rightarrow K'$. Поскольку $f_*: H_n(K) \rightarrow H_n(K')$ — изоморфизмы, из точности последовательности (см. выше) заключаем, что $H_n(M(f)) = 0$ для всех n . При каждом n группа $M(f)_n$ свободна как прямая сумма свободных абелевых групп K_n и K'_{n+1} . Поэтому по лемме 4.12 группы $Z_n(M(f))$ — прямые слагаемые в $M(f)_n$. Следовательно, по лемме 4.13 существует последовательность гомоморфизмов $D_n: M(f)_n \rightarrow M(f)_{n+1}$, для которых

$$(3) \quad d_{n+1}D_n(x, x') + D_{n-1}d_n(x, x') = (x, x')$$

при любых $(x, x') \in M(f)_n$. Гомоморфизмы D_n , очевидно, единственным образом определяют такие четыре последовательности гомоморфизмов:

$$\begin{aligned} D''_n: K_n &\rightarrow K_{n+1}, & \varphi_n: K_n &\rightarrow K'_{n+2}, \\ g_{n+1}: K'_{n+1} &\rightarrow K_{n+1}, & D'_{n+1}: K'_{n+1} &\rightarrow K'_{n+2}, \end{aligned}$$

что $D_n(x, x') = (D''_n(x) + g_{n+1}(x'), \varphi_n(x) + D'_{n+1}(x'))$ для любого элемента $(x, x') \in M(f)_n$. Подставляя это выражение для $D_n(x, x')$ в (3) и используя формулу для d_n , получим после при-

¹⁾ Отображение j , строго говоря, не является цепным, поскольку, очевидно, $\partial_n j = -j d_n$. Кроме того, i понижает степень на 1. Однако, как и в обычном случае (см. теорему 1.8), рассматриваемая короткая точная последовательность цепных комплексов обеспечивает длинную точную последовательность групп гомологий. — *Прим. перев.*

равнивания по каждой из двух компонент:

$$(4) \quad -\partial_{n+1}D''_n(x) - \partial_{n+1}g_{n+1}(x') - D''_{n-1}\partial_n(x) + \\ + g_n\partial'_{n+1}(x') + g_nf_n(x) = x,$$

$$(5) \quad \partial'_{n+2}\varphi_n(x) + \partial'_{n+2}D'_{n+1}(x') + f_{n+1}D''_n(x) + f_{n+1}g_{n+1}(x') - \\ - \varphi_n\partial_n(x) + D'_n\partial'_{n+1}(x') + D'_nf_n(x) = x'.$$

Полагая в равенстве (4) $x=0$, заключаем, что последовательность гомоморфизмов $\{g_n\}$ определяет цепное отображение $g: K' \rightarrow K$. Полагая в (4) $x'=0$, получим равенство, показывающее, что последовательность гомоморфизмов $\{D'_n\}$ есть цепная гомотопия между gf и тождественным отображением $K \rightarrow K$. Наконец, при $x=0$ равенство (5) показывает, что $\{D'_n\}$ — цепная гомотопия между fg и тождественным отображением $K' \rightarrow K'$. Теорема доказана.

4.15. Лемма. Пусть $f, g: K \rightarrow K'$ — цепно гомотопные цепные отображения. Для любой абелевой группы G рассмотрим коцепные комплексы $\text{Hom}(K, G)$ и $\text{Hom}(K', G)$. Тогда индуцированные отображения

$$\text{Hom}(f, 1), \text{Hom}(g, 1): \text{Hom}(K', G) \rightarrow \text{Hom}(K, G)$$

коцепно гомотопны.

Читатель легко проверит, что если последовательность гомоморфизмов $D_n: K_n \rightarrow K_{n+1}$ — цепная гомотопия между f и g , то последовательность

$$\text{Hom}(D_n, 1): \text{Hom}(K'_{n+1}, G) \rightarrow \text{Hom}(K_n, G)$$

является коцепной гомотопией между $\text{Hom}(f, 1)$ и $\text{Hom}(g, 1)$. В доказательстве фактически используется лишь одно свойство функтора Hom — аддитивность. Таким образом, аналогичная лемма справедлива для любого аддитивного функтора.

4.16. Следствие. Если цепное отображение $f: K \rightarrow K'$ — цепная гомотопическая эквивалентность, то отображение коцепных комплексов

$$\text{Hom}(f, 1): \text{Hom}(K', G) \rightarrow \text{Hom}(K, G)$$

является коцепной гомотопической эквивалентностью.

Применим теперь эти идеи к доказательству основных свойств групп гомологий. Пусть X — локально компактное пространство, A — замкнутое подмножество в X и $U = X \setminus A$. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму комплексов

целочисленных коцепей и коцепных отображений:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow Q^*(X, A) & \xrightarrow{1} & C_c^*(X) & \xrightarrow{5} & C_c^*(X)/Q^*(X, A) & \rightarrow & 0 \\ & \downarrow 2 & \parallel & & \downarrow 6 & & \\ 0 \rightarrow C_c^*(X, A) & \xrightarrow{3} & C_c^*(X) & \xrightarrow{t^\#} & C_c^*(A) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

В соответствии с § 4.4 каждый из этих комплексов состоит из свободных абелевых групп, а каждая строка точна и расщепляется. Кроме того, в соответствии с § 1.4 гомоморфизмы, обозначенные стрелками с номерами 2 и 6, индуцируют изоморфизмы соответствующих групп когомологий и, следовательно, по теореме 4.11 являются коцепными гомотопическими эквивалентностями. Напомним также, что коцепные комплексы $C_c^*(U)$ и $Q^*(X, A)$ естественно изоморфны.

Применим ко всей диаграмме функтор $\text{Hom}(\_, G)$ где G — произвольная абелева группа. Получим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \leftarrow Q_*(X, A; G) & \xleftarrow{1'} & C_*(X; G) & \xleftarrow{5'} & \text{Hom}\left(\frac{C_c^*(X)}{Q^*(X, A)}, G\right) & \leftarrow & 0 \\ & \uparrow 2' & \parallel & & \uparrow 6' & & \\ 0 \leftarrow C_*(X, A; G) & \xleftarrow{3'} & C_*(X; G) & \xleftarrow{t^\#} & C_*(A; G) & \leftarrow & 0 \end{array}$$

Здесь $Q_*(X, A; G)$ и $C_*(X, A; G)$ — цепные комплексы $\text{Hom}(Q^*(X, A), G)$ и $\text{Hom}(C_c^*(X, A), G)$ соответственно. В силу теоремы 4.7(а) каждая строка этой диаграммы точна и расщепляется. В соответствии со следствием 4.16 цепные отображения, обозначенные вертикальными стрелками с номерами 2' и 6', являются цепными гомотопическими эквивалентностями. Наконец, цепные комплексы $C_*(U; G)$ и $Q_*(X, A; G)$ естественно изоморфны.

Переходя к гомологиям цепных комплексов, получим две изоморфные точные гомологические последовательности. Любая из них и есть по определению гомологическая последовательность пары (X, A) . Тем самым доказано свойство (4а) из § 4.3. Одновременно определен граничный оператор $\partial_{X, A}: H_{p+1}(U) \rightarrow H_p(A)$.

Свойства (4b), (4с) и (4d) проверяются таким же образом, как соответствующие им свойства когомологий (см. доказательство теоремы 1.6). Единственное различие — применение функтора $\text{Hom}(\_, G)$ ко всем встречающимся коцепным комплексам. Оставляем читателю детали.

Докажем свойство гомотопии, т. е. (5) из § 4.3. Пусть $h_t: X \rightarrow X \times I$ определено соотношением $h_t(x) = (x, t)$ для любого $t \in I$ и $\pi: X \times I \rightarrow X$ — проекция, т. е. $\pi(x, t) = x$. Рассмотрим ин-

дуцированные гомоморфизмы групп целочисленных коцепей

$$h_t^\#: C_c^*(X \times I) \rightarrow C_c^*(X),$$

$$\pi^\#: C_c^*(X) \rightarrow C_c^*(X \times I).$$

Поскольку π и h_t — собственные гомотопические эквивалентности, индуцированные гомоморфизмы h_t^* и π^* являются изоморфизмами целочисленных когомологий. В силу теоремы 4.11 отображения $h_t^\#$ и $\pi^\#$ — коцепные гомотопические эквивалентности. Применяя функтор $\text{Hom}(\_, G)$, получаем, что гомоморфизмы

$$h_{t\#}: C_*(X; G) \rightarrow C_*(X \times I; G),$$

$$\pi_\#: C_*(X \times I; G) \rightarrow C_*(X; G)$$

являются цепными гомотопическими эквивалентностями. Следовательно, изоморфизмами являются индуцированные гомоморфизмы

$$h_{t*}: H_n(X; G) \rightarrow H_n(X \times I; G),$$

$$\pi_*: H_n(X \times I; G) \rightarrow H_n(X; G).$$

Поскольку πh_t — тождественное отображение X в себя, $\pi_* h_{t*}$ — тождественный автоморфизм группы $H_n(X; G)$. Поэтому при любом t

$$h_{t*} = (\pi_*)^{-1}.$$

В частности, $h_{0*} = h_{1*}$. Отсюда, как и в случае когомологий, вытекает свойство гомотопии.

Доказательство свойства (1) из § 4.3 проводится простым вычислением. Для пространства X , состоящего из единственной точки, группы целочисленных коцепей $C^p(X)$ при $p \geq 0$ — бесконечные циклические группы, а кограничные операторы

$$\delta: C^p(X) \rightarrow C^{p+1}(X)$$

тривиальны при четных p и являются изоморфизмами при нечетных p . Поэтому $C_p(X; G) = \text{Hom}(C^p(X), G) \cong G$ и $\partial: C_{p+1}(X; G) \rightarrow C_p(X; G)$ — нулевые отображения при четных p и изоморфизмы при нечетных p . Отсюда и вытекает свойство (1) из § 4.3.

Остается доказать свойство (6) из § 4.3. Двойственное свойство для когомологий было доказано в § 2.3 сначала для конечных дизъюнктивных объединений $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ открытых подпространств, после чего в общем случае использовалось представление группы $H_c^q(X)$ в виде предела групп $H_c^q(U)$ по всем открытым подмножествам U в X , имеющим компактные замыкания (см. (6) и (7) из § 1.3). Для пространств, представимых в виде конечных объединений непересекающихся открытых подпространств, доказательство утверждения для гомологий

получается дуализацией соответствующего доказательства для когомологий (оставляем читателю детали). В общем случае необходимо использовать другие аргументы, поскольку для гомологий двойственные к (6) и (7) из § 1.3 свойства не верны.

Пусть X — дизъюнктное объединение открытых подпространств X_α . Для каждого α имеем мономорфизм комплексов целочисленных коцепей

$$\sigma_\alpha: C_c^*(X_\alpha) \rightarrow C_c^*(X).$$

Легко видеть, что $C_c^*(X)$ — прямая сумма образов этих мономорфизмов¹⁾. (Читатель сам проверит детали.) Поэтому $C_*(X; G) = \text{Hom}(C_c^*(X), G)$ — прямое произведение подкомплексов $C_*(X_\alpha; G) = \text{Hom}(C_c^*(X_\alpha), G)$ (ср. с упр. 1 из § 4.5). Следовательно, как легко показать, $H_q(X; G) = H_q(\text{Hom}(C_c^*(X), G))$ — прямое произведение подгрупп $H_q(X_\alpha; G) = H_q(\text{Hom}(C_c^*(X_\alpha), G))$. Этим доказано утверждение (6).

§ 4.8. Теорема об универсальных коэффициентах

Поскольку цепной комплекс $C_*(X; G)$ полностью определяется целочисленными коцепями $C_c^*(X)$, естественно ожидать, что группу $H_n(X; G)$ можно полностью описать, зная группу G и группу целочисленных когомологий $H_c^n(X)$. Теорема об универсальных коэффициентах, которая будет доказана в настоящем параграфе, показывает, что это действительно так.

Для того чтобы объяснить эту теорему, введем естественный гомоморфизм

$$\alpha: H_n(X; G) \rightarrow \text{Hom}(H_c^n(X), G).$$

Здесь X — локально компактное пространство, G — абелева группа и n — любое целое число ($H_c^n(X)$ — группа целочисленных когомологий пространства X). В более общей ситуации, когда $K = \{K_n, \partial_n\}$ — любой цепной комплекс и G — абелева группа, определим естественный гомоморфизм

$$\alpha: H^n(\text{Hom}(K, G)) \rightarrow \text{Hom}(H_n(K), G)$$

следующим образом. Для $u \in H^n(\text{Hom}(K, G))$ и $x \in H_n(K)$ требуется указать $(\alpha u)(x) \in G$. Выберем коцикл $u' \in \text{Hom}(K_n, G)$, принадлежащий классу когомологий u , и элемент $x' \in K_n$, представляющий класс x . Положим

$$(\alpha u)(x) = u'(x') \in G.$$

¹⁾ Для доказательства воспользуемся тем, что $C_c^p(X)$ — группа ростков конечнозначных функций с компактными носителями, определенных в окрестностях диагонали произведения X^{p+1} (см. примечание к § 1.1). — Прим. ред.

Оставляем читателю проверить независимость этого определения от выбора представляющих u и x циклов u' и x' , а также то, что αu — гомоморфизм группы $H_n(K)$ в G и α — гомоморфизм. Заменяя в этом определении цепной комплекс K на коцепной комплекс $C_c^*(X)$, получим нужный нам гомоморфизм

$$\alpha: H_n(X; G) \rightarrow \text{Hom}(H_n^c(X), G).$$

Оставляем читателю проверить, что построенный гомоморфизм α обладает следующим важным свойством естественности: для любого цепного отображения $f: K \rightarrow K'$ одного цепного комплекса в другой диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^n(\text{Hom}(K, G)) & \xrightarrow{\alpha} & \text{Hom}(H_n(K), G) \\ \uparrow f^* & & \uparrow \text{Hom}(f_*, 1) \\ H^n(\text{Hom}(K', G)) & \xrightarrow{\alpha'} & \text{Hom}(H_n(K'), G) \end{array}$$

коммутативна. Читателю следует также выписать утверждение о естественности в следующих двух важных случаях:

(а) $\varphi: X \rightarrow Y$ — собственное отображение локально компактных пространств и $f = \varphi^\# : C_c^*(Y) \rightarrow C_c^*(X)$ — индуцированное отображение коцепей.

(б) U — открытое подмножество локально компактного пространства X и $f = \sigma : C_c^*(U) \rightarrow C_c^*(X)$.

Гомоморфизм α обладает свойством естественности и по отношению к гомоморфизмам коэффициентов. В соответствии с § 2.5 всякий гомоморфизм $G \rightarrow G'$ групп коэффициентов определяет соответствующий гомоморфизм когомологий. Аналогичный гомоморфизм может быть определен и для гомологий.

Пусть K — цепной комплекс и $\varphi: G \rightarrow G'$ — гомоморфизм абелевых групп. Ясно, что

$$\varphi_\# = \text{Hom}(1, \varphi): \text{Hom}(K, G) \rightarrow \text{Hom}(K, G')$$

является цепным отображением. Следовательно, оно индуцирует гомоморфизмы

$$\varphi_*: H^n(\text{Hom}(K, G)) \rightarrow H^n(\text{Hom}(K, G')).$$

Естественность α означает, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^n(\text{Hom}(K, G)) & \xrightarrow{\varphi_*} & H^n(\text{Hom}(K, G')) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha' \\ \text{Hom}(H_n(K), G) & \xrightarrow[\text{Hom}(1, \varphi)]{} & \text{Hom}(H_n(K), G') \end{array}$$

коммутативна. Проверка коммутативности этой диаграммы элементарна. В случае когда $K = C_c^*(X)$, возникает коммутативная

диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_n(X; G) & \xrightarrow{\varphi_*} & H_n(X; G') \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha' \\ \text{Hom}(H_c^n(X), G) & \xrightarrow{\text{Hom}(1, \varphi)} & \text{Hom}(H_c^n(X), G') \end{array}$$

В общем случае гомоморфизм $\alpha: H^n(\text{Hom}(K, G)) \rightarrow \text{Hom}(H_n(K), G)$ не является ни мономорфизмом, ни эпиморфизмом. Однако в случае когда K — цепной комплекс, состоящий из свободных абелевых групп, справедлив следующий замечательный результат.

4.17. Теорема об универсальных коэффициентах. Пусть K — цепной комплекс свободных абелевых групп и G — произвольная абелева группа.

(а) Гомоморфизм $\alpha: H^n(\text{Hom}(K, G)) \rightarrow \text{Hom}(H_n(K), G)$ — эпиморфизм. Его ядро естественно изоморфно группе $\text{Ext}(H_{n-1}(K), G)$ и выделяется в $H^n(\text{Hom}(K, G))$ прямым слагаемым. Имеется разложение такого рода этой группы в прямую сумму, естественное по отношению к гомоморфизмам коэффициентов. Эти разложения в прямую сумму не являются естественными по отношению к цепным отображениям свободных цепных комплексов.

(б) Существует такой естественный гомоморфизм

$$\beta: \text{Ext}(H_{n-1}(K), G) \rightarrow H^n(\text{Hom}(K, G)),$$

что точна и расщепляется последовательность

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(K), G) \xrightarrow{\beta} H^n(\text{Hom}(K, G)) \xrightarrow{\alpha} \text{Hom}(H_n(K), G) \rightarrow 0.$$

Имеется расщепление, естественное по отношению к гомоморфизмам коэффициентов. Эти расщепления не являются естественными относительно цепных отображений комплекса K .

Перед доказательством теоремы сделаем несколько пояснений.

(1) Утверждения (а) и (б) эквивалентны. Они — разные формы одной и той же теоремы.

(2) Мы употребляем сокращенное обозначение $\text{Ext}(H_{n-1}(K), G)$ для группы $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_{n-1}(K), G)$. Предполагается, что читатель знаком с основными свойствами функтора Ext . Необходимые сведения можно найти в любой книге по гомологической алгебре (см., например, [8], [22] или [36])¹⁾.

(3) В утверждениях (а) и (б) естественность по отношению к цепным отображениям $f: K \rightarrow K'$ и гомоморфизмам групп ко-

¹⁾ См. также [5*]. — Прим. ред.

эффициентов $\varphi: G \rightarrow G'$ означает коммутативность соответствующих диаграмм (аналогичных рассмотренным выше в связи с понятием естественности для гомоморфизма α).

Доказательство теоремы об универсальных коэффициентах. Доказательство этой теоремы можно найти во многих книгах по гомологической алгебре, см. [8], [22] или [36]. Предполагается, что читатель знаком с основными свойствами инъективных модулей, а также с определением групп $\text{Ext}^*(A, B)$ посредством инъективных резольвент модуля B . Предлагаем следующее простое и короткое, на наш взгляд, доказательство. Нам понадобится точная последовательность, отвечающая точной тройке коэффициентов, аналогичная точной когомологической последовательности из § 2.5. Пусть $0 \rightarrow G' \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} G'' \rightarrow 0$ — точная последовательность абелевых групп. Поскольку K_n — свободные абелевы группы, последовательность коцепных комплексов

$$0 \rightarrow \text{Hom}(K, G') \xrightarrow{i^\#} \text{Hom}(K, G) \xrightarrow{j^\#} \text{Hom}(K, G'') \rightarrow 0$$

точна (ср. с упр. 3 из § 4.5). Переходя к когомологиям, получим точную последовательность¹⁾

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\delta_{n-1}} H^n(\text{Hom}(K, G')) &\xrightarrow{i_n} H^n(\text{Hom}(K, G)) \xrightarrow{j_n} \\ &\rightarrow H^n(\text{Hom}(K, G'')) \xrightarrow{\delta_n} \dots \end{aligned}$$

Пусть $0 \rightarrow G \xrightarrow{e} I_0 \xrightarrow{d} I_1 \rightarrow 0$ — инъективная резольвента группы G . Это означает, что I_0 — инъективная (т. е. делимая) абелева группа, содержащая G в качестве подгруппы, и $I_1 = I_0/G$. Группа I_1 также инъективна. Инъективная резольвента группы G , как всякая короткая точная последовательность, порождает соответствующую длинную когомологическую последовательность. Возникает коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\delta_{n-1}} & H^n(\text{Hom}(K, G)) & \xrightarrow{e_n} & H^n(\text{Hom}(K, I_0)) & \xrightarrow{d_n} & H^n(\text{Hom}(K, I_1)) \xrightarrow{\delta_n} \dots \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_1 \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(H_n(K), G) & \xrightarrow{e'_n} & \text{Hom}(H_n(K), I_0) & \xrightarrow{d'_n} & \text{Hom}(H_n(K), I_1) \end{array}$$

Верхняя строка этой диаграммы — только что описанная точная когомологическая последовательность. Нижняя строка точна

¹⁾ В частности, при $K = C_c^*(X)$ возникает точная последовательность

$$\dots \rightarrow H_n(X; G') \rightarrow H_n(X; G) \rightarrow H_n(X; G'') \rightarrow H_{n-1}(X; G') \rightarrow \dots$$

Аналогичная последовательность для когомологий получена в § 2.5. — Прим. ред.

в силу точности слева функтора Hom (см. § 4.5). Поскольку I_0 и I_1 — инъективные абелевы группы, гомоморфизмы α_0 и α_1 являются изоморфизмами. Читатель, знакомый с основными свойствами инъективных модулей, без труда докажет это утверждение¹⁾ (тот факт, что цепной комплекс K состоит из свободных абелевых групп, в доказательстве не используется).

Из коммутативности диаграммы легко вытекает, что α — эпиморфизм и $\text{Ker } \alpha = \text{Ker } e_n$. Из точности верхней строки диаграммы имеем $\text{Ker } e_n = \text{Im } d_{n-1} \cong \text{Coker } d_{n-1}$. Поскольку α_0 и α_1 — изоморфизмы, а диаграмма коммутативна,

$$\text{Coker } d_{n-1} \cong \text{Coker } d'_{n-1}.$$

В соответствии с определением функтора Ext посредством инъективных резольвент

$$\text{Coker } d'_{n-1} = \text{Ext}(H_{n-1}(K), G).$$

Этим доказана первая часть утверждения теоремы. Оставшем читателю проверить естественность по отношению к цепным отображениям и гомоморфизмам групп коэффициентов. Докажем теперь, что $\text{Ker } \alpha$ — прямое слагаемое в $H^n(\text{Hom}(K, G))$. Доказательство основывается на том, что группы n -мерных циклов $Z_n(K)$ — прямые слагаемые в K_n (существенно, что цепной комплекс K состоит из свободных абелевых групп), см. лемму 4.12. Для каждого n выберем проекцию группы K_n на прямое слагаемое $Z_n(K)$. Пусть $\gamma_n: K_n \rightarrow H_n(K)$ — композиция этой проекции с естественным гомоморфизмом $Z_n(K) \rightarrow H_n(K)$. Последовательность абелевых групп $\{H_n(K)\}$ можно рассматривать как цепной комплекс с нулевым граничным оператором. Обозначим этот комплекс через $H(K)$. Легко проверить, что последовательность гомоморфизмов $\{\gamma_n\}$ определяет цепное отображение $\gamma: K \rightarrow H(K)$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_n(\text{Hom}(K, G)) & \xrightarrow{\alpha} & \text{Hom}(H_n(K), G) \\ \uparrow \gamma^* & & \uparrow \text{Hom}(\gamma_n, 1) \\ H_n(\text{Hom}(H(K), G)) & \xrightarrow{\alpha'} & \text{Hom}(H_n(H(K)), G) \end{array}$$

В силу естественности преобразования α эта диаграмма коммутативна. Поскольку граничный оператор комплекса $H(K)$ является нулевым, $H_n(H(K)) = H_n(K)$, поэтому $\text{Hom}(\gamma_n, 1)$ — тождественный изоморфизм. Легко видеть, что тождественным изоморфизмом является также и отображение α' . Таким образом, γ^* — правый обратный к α и, следовательно, $\text{Ker } \alpha$ выде-

¹⁾ Существенны два момента: точность функтора $\text{Hom}(X, I)$ по первому аргументу для любого инъективного модуля I и перестановочность операции H^n с любым точным функтором. — *Прим. ред.*

ляется прямым слагаемым (эти аргументы снова показывают, что α — эпиморфизм).

Заметим, что цепное отображение γ зависит лишь от проекций $K_n \rightarrow Z_n(K)$. Поэтому разложение группы $H_n(\text{Hom}(K, G))$ в прямую сумму естественно по отношению к гомоморфизмам групп коэффициентов, но не по отношению к цепным отображениям.

Применим теорему об универсальных коэффициентах к случаю, когда $K = C_c^*(X)$.

4.18. Следствие. Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство и G — абелева группа. Существует естественная короткая точная последовательность¹⁾

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_c^{n+1}(X), G) \xrightarrow{\beta} H_n(X; G) \xrightarrow{\alpha} \text{Hom}(H_c^n(X), G) \rightarrow 0.$$

Эта последовательность расщепляется, однако расщепление естественно лишь по отношению к гомоморфизмам групп коэффициентов.

Упражнения

1. Пусть F — поле и $K = \{K_n, \partial_n\}$ — такой цепной комплекс, что каждая группа K_n — векторное пространство над F , а ∂_n — линейное над F отображение. Пусть G — также векторное пространство над F . Докажите, что гомоморфизм $\alpha: H^n(\text{Hom}_F(K, G)) \rightarrow \text{Hom}_F(H_n(K), G)$ — изоморфизм векторных пространств.

2. В дополнение к остальным предположениям теоремы об универсальных коэффициентах пусть G — левый модуль над некоторым кольцом R . Покажите, что группы $H^n(\text{Hom}_Z(K, G))$, $\text{Hom}_Z(H_n(K), G)$ и $\text{Ext}_Z^1(H_{n-1}(K), G)$ наследуют структуру левого R -модуля, а α и β — гомоморфизмы R -модулей.

Поскольку группы гомологий с произвольными коэффициентами полностью определяются целочисленными когомологиями, естественно выяснить, определяют ли индуцированные гомоморфизмы

$$f^*: H_c^n(Y; Z) \rightarrow H_c^n(X; Z)$$

групп целочисленных когомологий гомоморфизмы гомологий

$$f_*: H_n(X; G) \rightarrow H_n(Y; G).$$

Здесь X и Y — локально компактные пространства и $f: X \rightarrow Y$ — собственное отображение. Следующий простой пример дает

¹⁾ Из этой точной последовательности вытекает, в частности (см. примечание к следствию 3.4), что $H_n(X; G) = 0$ при $n > \dim X$. Еще одно следствие: $H_0(X; Z) \neq Z$ для связного компакта, гомеоморфного 2-адическому солепонду. — Прим. ред.

отрицательный ответ на поставленный вопрос. Пусть X — окружность S^1 и Y — вещественная проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$ (см. § 3.3). Когомологии пространств S^1 и $\mathbb{R}P^2$ описаны соответственно в § 2.4 и упр. 7 из § 3.6 ($\mathbb{R}P^2$ — компактное связное неориентируемое двумерное многообразие). Из описания когомологий этих пространств вытекает, что любое непрерывное отображение $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ индуцирует нулевой гомоморфизм целочисленных когомологий

$$f^*: H^n(\mathbb{R}P^2) \rightarrow H^n(S^1)$$

при всех $n > 0$, поскольку либо $H^n(\mathbb{R}P^2) = 0$, либо $H^n(S^1) = 0$. С другой стороны, из теоремы об универсальных коэффициентах получаем, что $H_1(S^1; \mathbb{Z})$ — бесконечная циклическая группа, а $H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z})$ — циклическая группа порядка два. Существуют такие непрерывные отображения $f, g: S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^2$, что для индуцированных гомоморфизмов выполнены соотношения $f_* = 0, g_* \neq 0$ ¹⁾.

Этот пример показывает, что в некоторых случаях целочисленные гомологии могут оказаться полезнее целочисленных когомологий.

Упражнение

Приведите строгое доказательство невозможности выбора расщепления в короткой точной последовательности теоремы об универсальных коэффициентах, которое естественно по отношению к гомоморфизмам, индуцированным собственными отображениями.

§ 4.9. Дальнейшее развитие теории гомологий

После того как мы установили основные свойства групп гомологий, можно доказать для них утверждения, двойственным соответствующим теоремам и предложениям из гл. 2 и 3. Рассмотрим кратко некоторые из этих двойственных утверждений. Как правило, двойственные рассуждения воспроизводятся стандартным образом, поэтому большинство доказательств представляется читателю.

(1) *Гомотопическая эквивалентность.* Если $f: X \rightarrow Y$ — собственная гомотопическая эквивалентность, то $f_*: H_p(X) \rightarrow H_p(Y)$ — изоморфизм. Если X — стягиваемое компактное пространство, то $H_0(X; G) = G$ и $H_p(X; G) = 0$ при $p > 0$.

(2) *Приведенной группой гомологий компактного пространства X называется ядро гомоморфизма $\varphi_{X*}: H_0(X; G) \rightarrow H_0(P; G)$ (P — одноточечное пространство).* Эта группа обозначается че-

¹⁾ В качестве g можно взять вложение $S^1 = \mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2$. — Прим. перев.

рез $H_0(X; G)$. Можно определить приведенную гомологическую последовательность пары и доказать ее точность. Если X — стягиваемый компакт, то $H_q(X; G) = 0$ при всех q .

(3) *Гомологии сфер и евклидовых пространств.* При $n \geq 1$ имеем

$$H_q(\mathbb{R}^n; G) = \begin{cases} G & \text{при } q = n, \\ 0 & \text{при } q \neq n, \end{cases}$$

$$H_q(S^n; G) = \begin{cases} G & \text{при } q = 0, n, \\ 0 & \text{при } q \neq 0, n. \end{cases}$$

Для доказательства можно либо дуализировать соответствующие рассуждения из § 2.4, либо воспользоваться теоремой об универсальных коэффициентах из § 4.8. В терминах гомологий можно дать новые доказательства теорем, приведенных в § 2.4.

(4) *Гомологии клеточных разбиений.* Пусть K — клеточное разбиение локально компактного хаусдорфова пространства X (см. § 3.2). Определим *группу q -мерных цепей* разбиения K , полагая

$$C_q(K; G) = H_q(K^q \setminus K^{q-1}; G).$$

В силу свойства (6) из § 4.3 $C_q(K; G)$ — прямое произведение групп $H_q(e_i^q; G)$ по всем q -мерным клеткам e_i^q разбиения K и $H_q(e_i^q; G) \cong G$. Определим *граничный оператор*

$$\partial: C_q(K) \rightarrow C_{q-1}(K)$$

цепного комплекса $\{C_q(K)\}$ как граничный гомоморфизм в точной последовательности пары $(K^q \setminus K^{q-2}, K^{q-1} \setminus K^{q-2})$. Легко доказать, что $\partial \circ \partial = 0$. Далее рассмотрим следующую диаграмму:

$$C_q(K) = H_q(K^q \setminus K^{q-1}) \xrightarrow{i_{q*}} H_q(X \setminus K^{q-1}) \xleftarrow{p_q} H_q(X).$$

С помощью этой диаграммы для конечномерных клеточных разбиений устанавливается справедливость следующих утверждений:

(а) i_{q*} — эпиморфизм, ядро которого — подгруппа границ $B_q(K)$.

(б) p_q — мономорфизм и $\text{Im } p_q = i_{q*} [Z_q(K)]$.

Доказательство этих утверждений двойственно доказательству теоремы 3.3. Таким образом, отображение $p_q^{-1} \circ i_{q*}$ определяет изоморфизм групп $Z_q(K)/B_q(K) = H_q(K)$ и $H_q(X)$.

(5) *Гомологии открытых и замкнутых подмножеств евклидовых пространств.* Легко доказываются утверждения, двойственные к теоремам из § 3.4. В частности,

(а) Пусть A — замкнутое собственное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ или S^n . Тогда $H_q(A) = 0$ при $q \geq n$.

(б) Пусть V — непустое открытое подмножество в S^n или в $\mathbb{R}^n$. Тогда $H_n(V) \neq 0$ и $H_q(V) = 0$ при $q > n$.

Эти результаты можно использовать для доказательства инвариантности области.

(6) *Последовательности Майера — Вьеториса.* Здесь двойственные утверждения формулируются особенно просто: нужно лишь заменить каждую группу когомологий на соответствующую группу гомологий и обратить направления всех стрелок. Точные определения и доказательства оставляются читателю.

(7) *Гомологии многообразий.* Доказательство теоремы 3.21 не может быть дуализировано, поскольку содержащийся в нем переход от многообразий конечного типа к произвольным осуществлялся на основании свойств (6) и (7) из § 1.3, двойственные к которым не верны для гомологий. Кроме того, утверждение (е) этой теоремы вообще не имеет двойственного. Это можно было бы объяснить, лишь значительно формализовав понятие двойственности.

Возможно, самое простое в данной ситуации — воспользоваться формулой универсальных коэффициентов (теорема 4.17), применив ее к утверждениям теоремы 3.21. Для всякого связного n -мерного многообразия (определение см. в § 3.6) получим следующие результаты.

4.19. Теорема. $H_q(M^n; G) = 0$ при $q > n$ для любой группы коэффициентов G .

4.20. Теорема. Пусть M^n — ориентируемое многообразие и $U \subset M$ — открытый n -диск. Тогда отображение $\rho_{M,U}: H_n(M; G) \rightarrow H_n(U; G)$ — изоморфизм. В частности, $H_n(M; G) \cong G$.

4.21. Теорема. Пусть M^n — неориентируемое многообразие. Тогда $H_n(M^n; \mathbb{Z}) = 0$ и подгруппа кручения в $H_{n-1}(M; \mathbb{Z})$ — циклическая группа второго порядка.

Упражнения

1. Докажите, что если M^n ориентируемо, то группа $H_{n-1}(M^n; \mathbb{Z})$ не имеет кручения.

2. Пусть R — поле и G — векторное пространство над R . Опишите структуру векторного пространства $H_n(M^n; G)$ над R в случаях, когда M^n ориентируемо или неориентируемо. (Указание. Используйте теорему об универсальных коэффициентах из § 4.8. Случай, в которых характеристика поля равна или не равна 2, необходимо разделять.)

§ 4.10. Обратные пределы и гомологии

В соответствии со свойствами (6) и (7) из § 1.3 для любого локально компактного пространства X группа $H_c^q(X; G)$ — прямой предел групп $H_c^q(U; G)$ по всем открытым в X множествам U , имеющим компактные замыкания. Поскольку обратный предел двойствен прямому, естественно ожидать, что $H_q(X; G)$ — обратный предел групп $H_q(U; G)$. Мы приведем пример, показывающий, что это не так, а затем докажем теорему, устанавливающую некоторую связь между $H_q(X; G)$ и обратным пределом групп $H_q(U; G)$. В этом параграфе используется материал приложения, помещенного в конце книги.

Пусть Σ_p есть p -адический соленоид. Определение этого пространства и описание некоторых его свойств можно найти в книге Стиррода и Эйленберга [14, упр. F, стр. 363]. В частности, Σ_p — одномерное компактное подмножество в $\mathbb{R}^3$, являющееся пересечением вложенных друг в друга полноторий T_n , $n = 1, 2, \dots$.

Покажем, что группа $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_p; \mathbb{Z})$ не является обратным пределом групп $H_1(U; \mathbb{Z})$ по открытым подмножествам U из $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_p$ с компактным замыканием. Каждое полноторие T_n имеет гомотопический тип окружности S^1 и является замкнутой окрестностью пространства T_{n+1} . Отображение включения $i_n: T_{n+1} \rightarrow T_n$ индуцирует гомоморфизм

$$i_n^*: H^1(T_n; \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(T_{n+1}; \mathbb{Z})$$

степени p . Это означает, что полноторие T_{n+1} делает p витков внутриполнотория T_n . Легко видеть, что $\delta: H^1(T_n) \rightarrow H_c^2(\mathbb{R}^3 \setminus T_n)$ — изоморфизм, $H_c^i(\mathbb{R}^3 \setminus T_n) \cong \mathbb{Z}$ при $i = 1, 2, 3$, а остальные группы целочисленных когомологий пространства $\mathbb{R}^3 \setminus T_n$ равны нулю.

Коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^1(T_n) & \xrightarrow{\delta} & H_c^2(\mathbb{R}^3 \setminus T_n) \\ \downarrow i_n^* & & \downarrow \tau_n \\ H^1(T_{n+1}) & \xrightarrow{\delta} & H_c^2(\mathbb{R}^3 \setminus T_{n+1}) \end{array}$$

Таким образом, $\tau_n: H_c^2(\mathbb{R}^3 \setminus T_n) \rightarrow H_c^2(\mathbb{R}^3 \setminus T_{n+1})$ — отображение степени p одной бесконечной циклической группы в другую. Аналогичные рассуждения показывают, что $\tau_n: H_c^1(\mathbb{R}^3 \setminus T_n) \rightarrow H_c^1(\mathbb{R}^3 \setminus T_{n+1})$ — изоморфизм бесконечных циклических групп.

Далее заметим, что $H_c^q(\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_p)$ — прямой предел последовательности $\{H_c^q(\mathbb{R}^3 \setminus T_n), \tau_n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$. В самом деле,

это вытекает из того, что $H_c^q(\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_p)$ — прямой предел групп $H_c^q(U)$ по открытым подмножествам U из $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_p$ с компактным замыканием.

Из всего сказанного вытекает, что $H_c^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_p)$ — бесконечная циклическая группа, а группа $H_c^2(\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_p)$ изоморфна аддитивной группе рациональных чисел, знаменатели которых — степени числа p . Согласно теореме об универсальных коэффициентах (см. § 4.8),

$$H_1(\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_p; \mathbb{Z}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_c^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_p), \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_c^2(\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_p), \mathbb{Z}).$$

Ясно, что $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_c^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_p), \mathbb{Z})$ — бесконечная циклическая группа. Можно показать (мы не будем это делать здесь), что группа $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_c^2(\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_p), \mathbb{Z})$ несчетна. В частности, она отлична от нуля¹⁾.

С другой стороны, в силу теоремы об универсальных коэффициентах (см. § 4.8) отображение $\alpha: H_1(\mathbb{R}^3 \setminus T_n; \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_c^1(\mathbb{R}^3 \setminus T_n), \mathbb{Z})$ — изоморфизм. Таким образом, при каждом n группа $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus T_n; \mathbb{Z})$ — бесконечная циклическая группа, а гомоморфизмы

$$\rho_n: H_1(\mathbb{R}^3 \setminus T_{n+1}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\mathbb{R}^3 \setminus T_n; \mathbb{Z})$$

являются изоморфизмами.

Предположим, что $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_p; \mathbb{Z})$ — обратный предел групп $H_1(U; \mathbb{Z})$ по всем открытым подмножествам U пространства $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_p$, имеющим компактное замыкание. Тогда $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_p; \mathbb{Z})$ — обратный предел последовательности $\{H_1(\mathbb{R}^3 \setminus T_n), \rho_n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, откуда $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_p; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Это противоречит описанию группы $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_p; \mathbb{Z})$, данному выше.

Приведенный пример имеет принципиальное значение с точки зрения развития теории гомологий и когомологий, особенно в период 1930—1945 гг. Информацию об этом можно почерпнуть из содержащегося в § 4 гл. X книги Стинрода и Эйленберга [14] обсуждения «непрерывность против точности», а также из статей Стинрода [55] и Маклейна и Эйленберга [13]²⁾. Послед-

¹⁾ Для счетной группы A из $\text{Ext}(A, \mathbb{Z}) = 0$ вытекает, что A свободна (теорема Штейна — Серра). Несчетность указанной группы — следствие результатов работы [29*]. — *Прим. ред.*

²⁾ Подобного рода примеры стали известны лишь в 60-е годы. В книге [14] установлена «непрерывность» когомологий (т.е. перестановочность $H^p(\varprojlim X_\lambda) = \varprojlim H^p(X_\lambda)$ функторов H^p с любыми обратными пределами $\varprojlim X_\lambda$ компактных пространств X_λ). В указанном разделе книги показывается, что «непрерывная» теория гомологий $\check{H}_*$ (для которой $\check{H}_p(\varprojlim X_\lambda) =$

нюю статью можно рассматривать как начало гомологической алгебры.

Следующие теоремы можно считать ослабленным вариантом утверждения, двойственного к свойствам (6) и (7) из § 1.3¹⁾.

4.22. Теорема. Пусть X — локально компактное пространство, а $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \dots$ — возрастающая цепочка таких открытых подмножеств, что замыкания $\bar{U}_n$ компактны и $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Имеет место естественная короткая точная последовательность²⁾

$$0 \rightarrow \varprojlim^1 H_{q+1}(U_n; G) \xrightarrow{\beta} H_q(X; G) \xrightarrow{\alpha} \varprojlim H_q(U_n; G) \rightarrow 0.$$

Доказательство. Отображения $\sigma: C_c^p(U_i) \rightarrow C_c^p(X)$ являются мономорфизмами. Легко показать, немного изменяя рассуждения из доказательства свойства (6) в § 1.3, что для любой целочисленной коцепи $u \in C_c^p(X)$ найдется такой номер i , что $u \in \sigma[C_c^p(U_i)]$. Это означает, что

$$C_c^p(X) = \varinjlim C_c^p(U_i).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} C_p(X; G) &= \text{Hom}(C_c^p(X), G) = \text{Hom}(\varinjlim C_c^p(U_i), G) = \\ &= \varprojlim \text{Hom}(C_c^p(U_i), G) = \varprojlim C_p(U_i; G). \end{aligned}$$

Таким образом, $C_*(X; G) = \varprojlim C_*(U_i; G)$. Кроме того, $\sigma: C_c^p(U_i) \rightarrow C_c^p(U_{i+1})$ — мономорфизм, образ которого выделяет-

$\Rightarrow \varprojlim \check{H}_p(X_\lambda)$ не обладает свойством точности гомологических последовательностей пар. Это означает, что обычные гомологии в категории полиэдров не допускают распространения на категорию компактных пар, которое привело бы одновременно к точной и непрерывной теории. В статье Стиррода [55] для компактных метризуемых пространств дано первое определение групп гомологий, изучаемых в настоящей книге. В статье [13], в частности, для гомологий Стиррода доказана теорема об универсальных коэффициентах. — *Прим. ред.*

¹⁾ Аналог теоремы 4.22 справедлив для когомологий H^q с любыми замкнутыми носителями, рассматриваемых в гл. 8 (см. лемму 11.9). Свойства типа (6) и (7) из § 1.3 автоматически выполнены для гомологий H_p^c с компактными носителями (см. гл. 9). — *Прим. ред.*

²⁾ Этот результат получен А. Э. Харлапом (утверждение (3) теоремы 1 в [14*]) наряду с другими аналогичными соотношениями для гомологий и когомологий, использующими функторы $\varprojlim$ и $\varprojlim^1$. — *Прим. ред.*

ся прямым слагаемым (см. предложение 4.5). Поэтому отображения

$$\sigma_{\#}: C_p(U_{i+1}; G) \rightarrow C_p(U_i; G)$$

— эпиморфизмы. Следовательно, $\lim^1 C_p(U_i; G) = 0$, и требуемый результат получается из теоремы A.19 приложения.

Замечание. Эта теорема справедлива и без предположения о компактности замыканий U_i . Оно, однако, выполнено в большинстве интересных случаев.

В приведенном перед теоремой примере группа $\lim^1 H_{q+1}(U_n; \mathbb{Z})$ нетривиальна при $q = 1$.

§ 4.11. Выражение групп $H_c^q(X; G)$ через целочисленные когомологии

В § 4.8 была доказана теорема об универсальных коэффициентах, выражающая группы $H_q(X; G)$ через целочисленные когомологии. В настоящем параграфе устанавливаются аналогичные соотношения между группами когомологий $H_c^q(X; G)$ с произвольными коэффициентами G и группами целочисленных когомологий. Предполагается, что читатель знаком с основными свойствами тензорного произведения абелевых групп, а также модулей над заданным кольцом (см., например, [8], [22] или [36])¹⁾, поскольку это понятие широко используется в формулах для $H_c^q(X; G)$.

Будут использоваться следующие обозначения:

- $\otimes_R$ — тензорное произведение над произвольным кольцом R ,
- $\otimes$ — тензорное произведение над $\mathbb{Z}$.

В соответствии с § 1.1 для произвольного локально компактного пространства X и любой абелевой группы G имеем

$$C_c^p(X; G) = \Phi_c^p(X; G) / \Phi_0^p(X; G).$$

В случае когда $G = \mathbb{Z}$ — аддитивная группа целых чисел, символ G будем опускать:

$$C_c^p(X) = \Phi_c^p(X) / \Phi_0^p(X).$$

В соответствии с § 4.4 все группы, встречающиеся в последнем равенстве, свободны и Φ_0^p — прямое слагаемое в $\Phi_c^p(X)$. Основные результаты настоящего параграфа основаны на рассмотрении свойств естественного гомоморфизма

$$\eta: \Phi_c^p(X) \otimes G \rightarrow \Phi_c^p(X; G),$$

¹⁾ См. также [5*]. — Прим. ред.

который определяется следующим образом: если $\varphi \in \Phi_c^p(X)$ и $g \in G$, то $\eta(\varphi \otimes g) = \psi$, где

$$\psi(x_0, \dots, x_p) = \varphi(x_0, \dots, x_p)g$$

для любых $x_0, \dots, x_p \in X$. Это определение корректно, так как из компактности носителя функции φ следует компактность носителя ψ . Гомоморфизм η обладает следующими важными свойствами.

(а) Если носитель функции φ пуст, то ψ также имеет пустой носитель. Следовательно, η индуцирует гомоморфизм

$$\eta_0: \Phi_0^p(X) \otimes G \rightarrow \Phi_0^p(X; G).$$

Возникает гомоморфизм факторгрупп

$$\eta': C_c^p(X) \otimes G \rightarrow C_c^p(X; G).$$

Другими словами, возникает коммутативная диаграмма с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \Phi_0^p(X) \otimes G & \rightarrow & \Phi_c^p(X) \otimes G & \rightarrow & C_c^p(X) \otimes G & \rightarrow & 0 \\ \downarrow \eta_0 & & \downarrow \eta & & \downarrow \eta' & & \\ 0 \rightarrow \Phi_0^p(X; G) & \rightarrow & \Phi_c^p(X; G) & \rightarrow & C_c^p(X; G) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

(Точность верхней строки обеспечивается тем, что $\Phi_0^p(X)$ — прямое слагаемое в $\Phi_c^p(X)$.)

(б) Гомоморфизм η является эпиморфизмом. Действительно, пусть $\psi \in \Phi_c^p(X; G)$, и пусть $g_1, \dots, g_k \in G$ — все ненулевые значения, принимаемые функцией ψ . Определим функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k \in \Phi_c^p(X)$ соотношениями

$$\begin{aligned} \varphi_i(x_0, \dots, x_p) &= 1, \text{ если } \psi(x_0, \dots, x_p) = g_i, \\ \varphi_i(x_0, \dots, x_p) &= 0 \text{ в остальных случаях.} \end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$\eta(\varphi_1 \otimes g_1 + \dots + \varphi_k \otimes g_k) = \psi.$$

Если $\psi \in \Phi_0^p(X; G)$, то все функции $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ принадлежат группе $\Phi_0^p(X)$. Следовательно, η_0 — также эпиморфизм. Кроме того, из эпиморфности η вытекает эпиморфность отображения η' .

(с) Гомоморфизм η является мономорфизмом. Требуется доказать, что $\sum \varphi_i \otimes g_i = 0$, если $\eta(\sum \varphi_i \otimes g_i) = 0$. Будем рассматривать φ_i как функции со значениями в $\mathbb{Z}$, определенные на декартовом произведении X^{p+1} . Напомним, что φ_i — линейные комбинации характеристических функций подмножеств X^{p+1}

(см. § 4.4). Таким образом, имеем равенство

$$\sum \varphi_i \otimes g_i = \sum \varphi'_i \otimes g'_i,$$

где φ'_i — характеристические функции некоторых подмножеств в X^{p+1} . Эти подмножества, вообще говоря, не являются попарно непересекающимися. Разбивая каждое из них подходящим образом на конечное число меньших подмножеств, получим

$$\sum \varphi_i \otimes g_i = \sum \varphi''_k \otimes g''_k,$$

где φ''_k — характеристические функции попарно непересекающихся подмножеств. Легко видеть, что если $\eta(\sum \varphi''_k \otimes g''_k) = 0$ то $g''_k = 0$. Утверждение доказано. Из мономорфности η следует мономорфность гомоморфизма η_0 . Следовательно, η и η_0 — изоморфизмы. Поэтому η' — также изоморфизм. (В этом доказательстве мы следовали работе [29].)

(d) Гомоморфизм η коммутирует с кограничным оператором, т. е. коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Phi_c^p(X) \otimes G & \xrightarrow{\delta \otimes 1} & \Phi_c^{p+1}(X) \otimes G \\ \downarrow \eta & & \downarrow \eta \\ \Phi_c^p(X; G) & \xrightarrow{\delta} & \Phi_c^{p+1}(X; G) \end{array}$$

Здесь символом 1 обозначено тождественное преобразование группы G . Сформулированное утверждение проверяется автоматически. Гомоморфизмы η_0 и η' также коммутируют с соответствующими кограничными операторами.

(e) Пусть $f: X \rightarrow Y$ — собственное отображение локально компактных пространств. Тогда индуцированные гомоморфизмы

$$f^\#: \Phi_c^p(Y; G) \rightarrow \Phi_c^p(X; G) \text{ и } f^\# \otimes 1: \Phi_c^p(Y) \otimes G \rightarrow \Phi_c^p(X) \otimes G$$

коммутируют с η . Аналогично, η_0 и η' коммутируют с гомоморфизмами, индуцированными отображением f .

(f) Пусть U — открытое подмножество локально компактного пространства X . Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C_c^p(U) \otimes G & \xrightarrow{\sigma \otimes 1} & C_c^p(X) \otimes G \\ \downarrow \eta' & & \downarrow \eta' \\ C_c^p(U; G) & \xrightarrow{\sigma} & C_c^p(X; G) \end{array}$$

коммутативна.

(g) Пусть $\gamma: G \rightarrow G'$ — гомоморфизм абелевых групп. Тогда коцепное отображение $\gamma_\#$, индуцированное гомоморфизмом γ ,

коммутирует с η , т. е. коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Phi_c^p(X) \otimes G & \xrightarrow{1 \otimes \gamma} & \Phi_c^p(X) \otimes G' \\ \downarrow \eta & & \downarrow \eta \\ \Phi_c^p(X; G) & \xrightarrow{\gamma\#} & \Phi_c^p(X; G') \end{array}$$

Отображения, индуцированные гомоморфизмом γ , коммутируют также с η_0 и η' .

Утверждения (а) — (г) показывают, что тензорные произведения $C_c^p(X) \otimes G$ определяют коцепной комплекс, изоморфный комплексу $C_c^p(X; G)$, причем изоморфизм естествен в любом смысле. Этот процесс можно включить в общую схему.

4.23. Определение. Пусть $K = \{K^n, \delta^n\}$ — коцепной комплекс и G — произвольная абелева группа. Через $K \otimes G$ будем обозначать коцепной комплекс $\{K^n \otimes G, \delta^n \otimes 1\}$.

В этих обозначениях коцепное отображение η' является естественным изоморфизмом комплекса $C_c^p(X) \otimes G$ на $C_c^p(X; G)$. Естественно выяснить, как связаны между собой группы когомологий коцепных комплексов $K \otimes G$ и K . Аналогичный вопрос рассматривался в § 4.8, где ответом явилась теорема об универсальных коэффициентах.

Прежде всего заметим, что существует гомоморфизм

$$\alpha: H^n(K) \otimes G \rightarrow H^n(K \otimes G),$$

который определяется следующим образом: для $u \in H^n(K)$ и $g \in G$ пусть $\alpha(u \otimes g)$ — класс когомологий коцикла $u' \otimes g$, где $u' \in Z^n(K)$ — коцикл, представляющий класс когомологий u . Легко проверить, что $u' \otimes g$ — коцикл комплекса $K \otimes G$, класс когомологий которого не зависит от выбора u' .

Читателю следует убедиться в естественности гомоморфизма α по отношению к коцепным отображениям $K \rightarrow K'$ и гомоморфизмам коэффициентов $G \rightarrow G'$.

Гомоморфизм α , вообще говоря, не является ни мономорфизмом, ни эпиморфизмом. Однако для коцепного комплекса свободных абелевых групп справедлив следующий результат, в некотором смысле двойственный теореме об универсальных коэффициентах.

4.24. Теорема. Пусть K — коцепной комплекс свободных абелевых групп. Тогда гомоморфизм $\alpha: H^n(K) \otimes G \rightarrow H^n(K \otimes G)$ является мономорфизмом, а его коядро естественно изоморфно группе $\text{Тог}(H^{n+1}(K), G)$. Иначе говоря, имеет место короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow H^n(K) \otimes G \xrightarrow{\alpha} H^n(K \otimes G) \xrightarrow{\beta} \text{Тог}(H^{n+1}(K), G) \rightarrow 0,$$

Эта последовательность расщепляется, и расщепление можно выбрать естественным по отношению к гомоморфизмам групп коэффициентов, но не по отношению к коцепным отображениям.

Здесь для группы $\text{Tor}_1^Z(H^{n+1}(K), G)$ использовано сокращенное обозначение $\text{Tor}(H^{n+1}(K), G)$. Предполагается, что читателю известны определение и основные свойства функтора Tor . Необходимая информация содержится в любом учебнике по гомологической алгебре, например в [8], [22] или [36]. В этих книгах изложено и доказательство теоремы 4.24. Приводимое ниже доказательство двойственно доказательству теоремы об универсальных коэффициентах из § 4.8.

Доказательство теоремы 4.24. Пусть $0 \leftarrow G \xleftarrow{\varepsilon} F_0 \xleftarrow{d} F_1 \leftarrow 0$ — свободная резольвента группы G , т. е. ε — эпиморфизм свободной группы F_0 на G , а F_1 — ядро гомоморфизма ε . Так как для любого n группа K^n свободна, то последовательность

$$0 \leftarrow K^n \otimes G \xleftarrow{1 \otimes \varepsilon} K^n \otimes F_0 \xleftarrow{1 \otimes d} K^n \otimes F_1 \leftarrow 0$$

точна. Таким образом, имеет место короткая точная последовательность коцепных комплексов

$$0 \leftarrow K \otimes G \xleftarrow{1 \otimes \varepsilon} K \otimes F_0 \xleftarrow{1 \otimes d} K \otimes F_1 \leftarrow 0.$$

Этой последовательности, как обычно, отвечает длинная точная когомологическая последовательность. Получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} 0 \leftarrow H^n(K) \otimes G & \xleftarrow{i_n \otimes \varepsilon} & H^n(K) \otimes F_0 & \xleftarrow{i_n \otimes d} & H^n(K) \otimes F_1 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \alpha_1 \\ \dots \xleftarrow{\Delta_n} H^n(K \otimes G) & \xleftarrow{(1 \otimes \varepsilon)_n} & H^n(K \otimes F_0) & \xleftarrow{(1 \otimes d)_n} & H^n(K \otimes F_1) \xleftarrow{\Delta_{n-1}} \dots \end{array}$$

Символом i_n в этой диаграмме обозначен тождественный автоморфизм группы $H^n(K)$. Верхняя строка диаграммы точна в силу точности справа тензорного произведения. Поскольку F_0 и F_1 — свободные абелевы группы, α_0 и α_1 — изоморфизмы. (Доказательство. Очевидно, что α_0 — изоморфизм, если F_0 — свободная абелева группа ранга один. Любая свободная абелева группа есть прямая сумма свободных групп ранга один, поэтому доказываемое утверждение вытекает из совместимости гомоморфизма α_0 с разложениями в прямую сумму.) Отсюда легко заключаем, что α — мономорфизм, причем

$$\text{Im } \alpha = \text{Im } (1 \otimes \varepsilon)_n.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{Coker} \alpha &= \operatorname{Coker} (1 \otimes \varepsilon)_n \cong \operatorname{Im} \Delta_n \cong \operatorname{Ker} (1 \otimes d)_{n+1} \cong \operatorname{Ker} (l_{n+1} \otimes d) = \\ &= \operatorname{Tor} (H^{n+1}(K), G) \end{aligned}$$

Последнее равенство — следствие определения функтора Tor через свободные (проективные) резольвенты.

Оставляем читателю проверить естественность изоморфизма между $\operatorname{Coker} \alpha$ и $\operatorname{Tor} (H^{n+1}(K), G)$, а также убедиться в том, что $\operatorname{Im} \alpha$ — прямое слагаемое в $H^n(K \otimes G)$. При доказательстве этого факта используется тот же прием, что и при доказательстве расщепления короткой точной последовательности в теореме об универсальных коэффициентах (см. § 4.8).

4.25. Следствие. *Для любого локально компактного пространства X и любой абелевой группы G существует естественная короткая точная последовательность*

$$0 \rightarrow H_c^n(X) \otimes G \xrightarrow{\alpha} H_c^n(X; G) \xrightarrow{\beta} \operatorname{Tor} (H_c^{n+1}(X), G) \rightarrow 0.$$

Эта последовательность расщепляется, и расщепление можно выбрать естественным по отношению к гомоморфизмам групп коэффициентов, но не по отношению к гомоморфизмам, индуцированным собственными отображениями пространства X или включениями открытых подмножеств.

Для доказательства достаточно применить утверждение теоремы 4.24 к комплексу целочисленных коцепей $C_c^*(X)$.

Упражнения

1. Пусть F — поле, G — векторное пространство над F и K — коцепной комплекс, в котором каждая группа K^n — векторное пространство над F , а δ^n — линейное над F отображение. Докажите, что $\alpha: H^n(K) \otimes_F G \rightarrow H^n(K \otimes_F G)$ — изоморфизм векторных пространств над полем F .

2. Предположим, что в теореме 4.24 и следствии 4.25 абелева группа G является левым модулем над кольцом R . Докажите, что каждая группа из короткой точной последовательности теоремы 4.24 естественным образом наследует структуру левого R -модуля, а гомоморфизмы α и β — гомоморфизмы левых R -модулей.

3. Пусть K — коцепной комплекс и G_1 и G_2 — абелевы группы. Определите гомоморфизм

$$\alpha: H_n(\operatorname{Hom}(K, G_1)) \rightarrow \operatorname{Hom}(H^n(K \otimes G_2), G_1 \otimes G_2),$$

естественный по отношению к коцепным отображениям $K \rightarrow K'$ и гомоморфизмам абелевых групп $G_1 \rightarrow G'_1$ и $G_2 \rightarrow G'_2$ и совпадающий с гомоморфизмом α из § 4.8 в случае, когда $G_2 = \mathbb{Z}$.

(Замечание. Обычно вместо $(\alpha u)(v)$ используется обозначение $\langle u, v \rangle$.)

Обсудим теперь вопрос о замене колец. Именно, пусть R — коммутативное кольцо и G — модуль над ним. Разумеется, G — абелева группа. Для определения функтора гомологий, принимающего значения в категории R -модулей, можно использовать два пути:

(а) В соответствии с основной конструкцией настоящей главы можно положить $H_n(X; G) = H_n(C_*(X; G))$, где

$$C_*(X; G) = \text{Hom}_Z(C_*^*(X), G).$$

(б) Можно, с другой стороны, все построения осуществить в категории R -модулей. Комплекс $C_*^*(X; R) = \{C_*^n(X; R), \delta\}$ — коцепной комплекс свободных R -модулей. Следовательно, определен цепной комплекс $\text{Hom}_R(C_*^*(X; R), G)$, и можно определить группы гомологий формулой

$$H_n(X; G) = H_n(\text{Hom}_R(C_*^*(X; R), G)).$$

Легко доказать, что оба подхода приводят к одному и тому же результату. Прежде всего имеет место естественный изоморфизм

$$\eta': C_*^*(X) \otimes_Z R \rightarrow C_*^*(X; R),$$

определенный в начале настоящего параграфа. Легко проверить, что η' — изоморфизм R -модулей, поэтому он индуцирует изоморфизм

$$\text{Hom}_R(C_*^*(X; R), G) \rightarrow \text{Hom}_R(C_*^*(X) \otimes_Z R, G).$$

Далее, комплексы $\text{Hom}_R(C_*^*(X) \otimes_Z R, G)$ и $\text{Hom}_Z(C_*^*(X), G)$ естественно изоморфны, поскольку

$$\text{Hom}_R(C_*^*(X) \otimes_Z R, G) \cong \text{Hom}_Z(C_*^*(X), \text{Hom}_R(R, G))$$

в силу соотношений ассоциативности между функторами Hom и $\otimes$ (см. Маклейн [36, стр. 189]) и существует естественный изоморфизм $\text{Hom}_R(R, G) \cong G$. Композиция всех этих изоморфизмов обеспечивает требуемый изоморфизм

$$\text{Hom}_R(C_*^*(X; R), G) \cong \text{Hom}_Z(C_*^*(X), G).$$

Заметим, что изложенное доказательство опирается на существование изоморфизма η' , который в свою очередь обеспечивается определением коцепей в терминах $\Phi^p(X; G)$ — группы всех *конечнозначных* p -функций.

Достаточно подробное обсуждение данного вопроса проведено по двум причинам. Во-первых, некоторые из ранее опре-

деленных теорий гомологий подобного типа не обладают этим естественным свойством, см. Бредон ([5, стр. 173 и 237]) или Скляренко ([49], стр. 94)¹⁾. Во-вторых, другой подход к определению гомологий может иногда оказаться достаточно полезным. Например, если F — поле, то из упр. 1 в § 4.8 вытекает, что естественный гомоморфизм

$$\alpha: H_n(\operatorname{Hom}_F(C_c^n(X; F), F)) \rightarrow \operatorname{Hom}_F(H_c^n(X; F), F)$$

является изоморфизмом. Поэтому приведенные выше рассуждения обеспечивают существование изоморфизма

$$\alpha: H_n(X; F) \rightarrow \operatorname{Hom}_F(H_c^n(X; F), F)$$

векторных пространств над F^2).

Докажем теперь утверждение, приведенное (без доказательства) в § 3.6. Пусть M — многообразие размерности n и $C = (U_1, U_2, \dots, U_k, U_1)$ — замкнутая цепь в M (определение см. в § 3.6). Покажем, что для любой абелевой группы G автоморфизм $C^\# : H_c^n(U_1; G) \rightarrow H_c^n(U_1; G)$, индуцированный цепью C , обладает свойством $C^\#(u) = \pm u$ для любого элемента $u \in H_c^n(U_1; G)$. Это очевидно, если $G = \mathbb{Z}$. Для произвольной группы G утверждение вытекает из следующих двух фактов:

(а) Если U — открытый n -диск, то

$$\alpha: H_c^n(U; \mathbb{Z}) \otimes G \rightarrow H_c^n(U; G)$$

— изоморфизм.

(б) Для любой цепи $C = (V_1, \dots, V_k)$ n -многообразия M коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_c^n(V_1; \mathbb{Z}) \otimes G & \xrightarrow{\alpha} & H_c^n(V_1; G) \\ \downarrow C^\# \otimes 1 & & \downarrow C^\# \\ H_c^n(V_k; \mathbb{Z}) \otimes G & \xrightarrow{\alpha} & H_c^n(V_k; G) \end{array}$$

Доказательство утверждения (б) мы оставляем читателю в качестве упражнения.

В заключение применим гомоморфизм α для изучения когомологий клеточных разбиений. Так же как в гл. 3, пусть $K = \{K^q\}$ — клеточное разбиение локально компактного пространства X . Используя группы целочисленных когомологий пространств

¹⁾ Как в [5], так и в [49], на указанных страницах обсуждаются недостатки теории гомологий, берущей начало от статьи Бореля и Мура [16*]. Основная теория, описание которой дается в [49], изоморфна теории, рассматриваемой в настоящей книге. Даваемое в [49] определение цепей с коэффициентами в R -модуле G не зависит от того, над каким кольцом абелева группа G рассматривается в качестве модуля. — Прим. перев.

²⁾ См. добавление редактора перевода. — Прим. перев.

ства $K^q \setminus K^{q-1}$, получим, что

$$\alpha: H_c^n(K^n \setminus K^{n-1}) \otimes G \rightarrow H_c^n(K^n \setminus K^{n-1}; G)$$

— изоморфизм. Кроме того, коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_c^n(K^n \setminus K^{n-1}) \otimes G & \xrightarrow{\alpha} & H_c^n(K^n \setminus K^{n-1}; G) \\ \downarrow \delta \otimes 1 & & \downarrow \delta \\ H_c^{n+1}(K^{n+1} \setminus K^n) \otimes G & \xrightarrow{\alpha} & H_c^{n+1}(K^{n+1} \setminus K^n; G) \end{array}$$

Иначе говоря, α определяет изоморфизм коцепных комплексов

$$C_i^*(K; Z) \otimes G \cong C_i^*(K; G).$$

Таким образом, кограничный оператор комплекса $C_i^*(K; Z)$ целочисленных коцепей определяет кограничный оператор в комплексе $C_i^*(K; G)$ коцепей с коэффициентами в любой группе G .

Упражнения

1. Пусть R — коммутативное кольцо и G — модуль над R . Докажите, что существует естественный изоморфизм R -модулей

$$H^n(C_c^*(X; R) \otimes_R G) \cong H^n(C_c^*(X) \otimes_Z G).$$

2. Пусть q — любое целое положительное число. Докажите, что для любого локально компактного пространства X и целого числа n существует естественный изоморфизм

$$\alpha: H_n(X; Z_q) \rightarrow \text{Hom}_{Z_q}(H_c^n(X; Z_q), Z_q).$$

(Указание. Воспользуйтесь тем, что Z_q — инъективный объект в категории $\underline{Z}_q$ -модулей.)

Вычисление гомологий и когомологий регулярных клеточных комплексов

§ 5.1. Введение

Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство с клеточным разбиением K . Наша цель — использовать клеточное разбиение для *явного* описания групп когомологий $H_c^q(X; G)$. Это возможно, вообще говоря, лишь при дополнительных предположениях о клеточном разбиении K . В связи с этим мы рассматриваем лишь очень специальные клеточные разбиения, называемые *регулярными клеточными комплексами*, и указываем для них эффективный способ описания структуры модулей гомологий и когомологий¹⁾.

§ 5.2. Ориентации клеток и матрицы инцидентности

Пусть $K = \{K^q\}$ — клеточное разбиение локально компактного хаусдорфова пространства X и $\{e_l^q\}$ — множество всех q -мерных клеток разбиения K . По определению

$$C_l^q(K; G) = H_c^q(K^q \setminus K^{q-1}; G),$$

причем группа $H_c^q(K^q \setminus K^{q-1})$ канонически изоморфна прямой сумме $\sum_l H_c^q(e_l^q)$. Это разложение в прямую сумму определено мономорфизмами $\tau_l^q: H_c^q(e_l^q) \rightarrow H_c^q(K^q \setminus K^{q-1})$ и эпиморфизмами $h_l^q: H_c^q(K^q \setminus K^{q-1}) \rightarrow H_c^q(e_l^q)$, которые индуцированы отображениями включений $e_l^q \rightarrow K^q \setminus K^{q-1}$. В этой главе мы концентрируем внимание на случае, когда $G = \mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел. Как отмечалось в конце гл. 4, кольцо целых чисел — универсальная группа коэффициентов в том смысле, что для любой группы G комплекс $C_l^*(K; G)$ естественно изоморфен $C_l^*(K; \mathbb{Z}) \otimes G$. Поскольку $H_c^q(e_l^q; \mathbb{Z})$ — бесконечная циклическая группа,

¹⁾ Определение и основные сведения о регулярных клеточных комплексах, приводимые в настоящей главе, принадлежат Эйленбергу и Стинроду (см., например, Стинрод [57, § 19.1 и § 31], Стинрод и Эпштейн [59, гл. V], Кук и Финни [9]).

$C_q^f(K; Z)$ — свободная абелева группа, базис которой взаимно однозначно соответствует множеству q -мерных клеток $\{e_q^f\}$ ($q \geq 0$).

Для каждой q -мерной клетки e_q^f при $q > 0$ выберем образующую a_q^f бесконечной циклической группы $H_c^q(e_q^f; Z)$. Такой выбор называется *ориентацией* клетки e_q^f . Имеется ровно две возможности для указанного выбора, и это соответствует интуитивным геометрическим представлениям о возможности ориентировать q -клетку, в особенности при $q = 1, 2$ или 3 .

При $q = 0$ естественно считать, что всякая клетка e^0 имеет только *одну* ориентацию. Напомним, что 0-клетка e^0 — пространство, состоящее из единственной точки, а группу $H^0(e^0; Z)$ можно отождествить с множеством всех функций $\varphi: e^0 \rightarrow Z$. Выберем в качестве ориентации клетки e^0 такой элемент φ из $H^0(e^0; Z)$, что $\varphi(e^0) = +1$. В дальнейшем *всегда* используется именно эта ориентация 0-клетки.

Для выбранных образующих $a_q^f \in H_c^q(e_q^f; Z)$ положим

$$(1) \quad b_q^f = \tau_q(a_q^f).$$

Тогда при каждом q множество $\{b_q^f\}$ — базис группы $C_q^f(K; Z)$. Поэтому $\delta(b_q^f)$ единственным образом представляется в виде линейной комбинации элементов b_{q+1}^f с целыми коэффициентами. Эту линейную комбинацию обычно записывают следующим образом:

$$(2) \quad \delta(b_q^f) = \sum [b_q^f: b_{q+1}^f] b_{q+1}^f.$$

Числа $[b_q^f: b_{q+1}^f]$ называются *коэффициентами инцидентности* клеток e_q^f и e_{q+1}^f (по отношению к выбранным ориентациям). Коэффициент инцидентности можно определить также следующим образом. Рассмотрим последовательность гомоморфизмов

$$H_c^q(e_q^f) \xrightarrow{\tau_q} H_c^q(K^q \setminus K^{q-1}) \xrightarrow{\delta} H_c^{q+1}(K^{q+1} \setminus K^q) \xrightarrow{h_1} H_c^{q+1}(e_{q+1}^f).$$

Тогда $[b_q^f: b_{q+1}^f]$ — единственное целое число, для которого

$$(3) \quad h_1 \delta \tau_q(a_q^f) = [b_q^f: b_{q+1}^f] a_{q+1}^f.$$

5.1. Лемма. Коэффициенты инцидентности обладают следующими свойствами:

(а) Пусть e_q^f — любая q -клетка. Тогда $[b_q^f: b_{q+1}^f] = 0$ для всех $(q+1)$ -клеток e_{q+1}^f , кроме конечного числа.

(б) Для любых фиксированных клеток e_q^f и e_k^{q+2}

$$\sum [b_q^f: b_{q+1}^f] [b_{q+1}^f: b_k^{q+2}] = 0.$$

(с) Если одномерный остов K^1 компактен, то для любой 1-клетки e_j^1 справедливо равенство ¹⁾ $\sum_i [b_i^0 : b_j^1] = 0$.

(d) При смене ориентации коэффициенты инцидентности изменяются по формуле

$$[-b_i^q : b_j^{q+1}] = -[b_i^q : b_j^{q+1}] = [b_i^q : -b_j^{q+1}].$$

Доказательство. Утверждения (а), (б) и (d) очевидны. Докажем (с). Пусть P — одноточечное пространство и $f: K^1 \rightarrow P$ — единственное возможное отображение. В силу компактности пространства K^1 оно собственнo. Пусть $g = f|_{K^0}: K^0 \rightarrow P$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} H^0(K^1) & \xrightarrow{i^*} & H^0(K^0) & \xrightarrow{\delta} & H_c^1(K^1 \setminus K^0) \\ & \nwarrow i^{**} & \nearrow g^* & & \\ & H^0(P) & & & \end{array}$$

коммутативна. Пусть $a \in H^0(P; \mathbb{Z})$ — образующая, выбранная указанным выше способом, т. е. отвечающая целому числу $+1$. Тогда в соответствии с нашим соглашением об ориентации 0-клеток $g^*(a) = \sum_i b_i^0$. Поэтому

$$0 = \delta i^* f^*(a) = \delta g^*(a) = \sum_i \delta(b_i^0) = \sum_{i,j} [b_i^0 : b_j^1] b_j^1.$$

Утверждение доказано.

Упражнение

Покажите существенность предположения о компактности в утверждении (с) леммы 5.1.

На первый взгляд кажется, что коэффициенты инцидентности $[b_i^q : b_j^{q+1}]$ зависят от «глобальных» свойств пространства $K^{q+1} \setminus K^{q-1}$. Следующие две леммы показывают, что это не так: коэффициенты инцидентности имеют «локальный» характер.

5.2. Лемма. Если e_j^q не содержится в замыкании клетки e_j^{q+1} , то $[b_i^q : b_j^{q+1}] = 0$.

Доказательство. Для любой $(q+1)$ -клетки e_j^{q+1} положим $\bar{e}_j^{q+1} = \bar{e}_j^{q+1} \cap (K^q \setminus K^{q-1})$. Заметим, что $\bar{e}_j^{q+1} \cap (K^{q+1} \setminus K^q) =$

¹⁾ Достаточно предполагать компактность замыкания e_j^1 . — Прим. ред.

$= e^{q+1}$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H_c^q(e_i^q) & \xrightarrow{\tau_i} & H_c^q(K^q \setminus K^{q-1}) & \xrightarrow{\delta} & H_c^{q+1}(K^{q+1} \setminus K^q) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow h_j \\ H_c^q(e_i^q \cap \bar{e}_j^{q+1}) & \xrightarrow{\tau} & H_c^q(\bar{e}_j^{q+1}) & \xrightarrow{\delta} & H_c^{q+1}(\bar{e}_j^{q+1}) \end{array}$$

Вертикальными стрелками обозначены гомоморфизмы, индуцированные включениями. По предположению $e_i^q \cap \bar{e}_j^{q+1}$ — замкнутое собственное подмножество в e_i^q (возможно, пустое). В силу следствия 3.9 $H_c^q(e_i^q \cap \bar{e}_j^{q+1}) = 0$. Из коммутативности диаграммы вытекает, что $h_j \circ \delta \circ \tau_i = 0$. Поэтому из равенства (3) (см. выше) имеем $[b_i^q : b_j^{q+1}] = 0$.

Б.3. Лемма. Если e_i^q содержится в замыкании клетки e_j^{q+1} , то $e_i^q \cup e_j^{q+1}$ — локально компактное пространство и диаграмма (в которой δ_{ij} — кограничный оператор пары $(e_j^{q+1} \cup e_i^q, e_i^q)$)

$$\begin{array}{ccc} H_c^q(K^q \setminus K^{q-1}) & \xrightarrow{\delta} & H_c^{q+1}(K^{q+1} \setminus K^q) \\ \uparrow \tau_i & & \downarrow h_j \\ H_c^q(e_i^q) & \xrightarrow{\delta_{ij}} & H_c^{q+1}(\bar{e}_j^{q+1}) \end{array}$$

коммутативна. Следовательно, $\delta_{ij}(a_i^q) = [b_i^q : b_j^{q+1}] a_j^{q+1}$.

Доказательство. Пространство $e_i^q \cup e_j^{q+1}$ является пересечением пространств $(K^{q+1} \setminus K^q) \cup e_i^q$ и $\bar{e}_j^{q+1}$, первое из которых открыто в K^{q+1} , а второе замкнуто. Отсюда вытекает первое утверждение.

Для доказательства оставшейся части рассмотрим кограничный оператор δ пары $(K^{q+1} \setminus K^{q-1}, K^q \setminus K^{q-1})$ и кограничные операторы пар, являющихся пересечением этой пары с открытым множеством $(K^{q+1} \setminus K^q) \cup e_i^q$, с замкнутым множеством $\bar{e}_j^{q+1}$ и с их пересечением $e_j^{q+1} \cup e_i^q$. В результате получим следующую коммутативную диаграмму, изображенную в форме куба:

$$\begin{array}{ccccc} H_c^q(K^q \setminus K^{q-1}) & \xrightarrow{\delta} & H_c^{q+1}(K^{q+1} \setminus K^q) & & \\ \tau_i \nearrow & & \searrow h_j & & \\ & H_c^q(\bar{e}_j^{q+1}) & \xrightarrow{\delta'} & H_c^{q+1}(\bar{e}_j^{q+1}) & \\ \delta'' \nearrow & & \searrow h_j & & \\ H_c^q(e_i^q) & \xrightarrow{\delta''} & H_c^{q+1}(K^{q+1} \setminus K^q) & \xrightarrow{\delta_{ij}} & H_c^{q+1}(\bar{e}_j^{q+1}) \\ \tau \nearrow & & \searrow h_j & & \\ & H_c^q(e_i^q) & \xrightarrow{\delta_{ij}} & H_c^{q+1}(\bar{e}_j^{q+1}) & \end{array}$$

Требуемый результат вытекает из рассмотрения этой диаграммы.

Упражнение

Пусть в предположениях леммы 5.3 существует такое открытое в X множество U , что пара $(U \cap (e_j^{q+1} \cup e_l^q), U \cap e_l^q)$ гомеоморфна $(\mathbb{R}_+^{q+1}, \mathbb{R}^q)$, где

$$\mathbb{R}_+^{q+1} = \{(x_1, \dots, x_{q+1}) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid x_1 \geq 0\},$$

$$\mathbb{R}^q = \{(x_1, \dots, x_{q+1}) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid x_1 = 0\}.$$

Докажите, что $[b_l^q : b_j^{q+1}] = \pm 1$.

Из последних двух лемм вытекает следующее полезное утверждение: если клетки e_l^q и e_j^{q+1} содержатся в подпространстве $A \subset X$, совместимом с клеточным разбиением K , то коэффициент инцидентности $[b_l^q : b_j^{q+1}]$ не зависит от того, рассматриваются эти клетки как элементы разбиения всего пространства X или его подпространства A .

§ 5.3. Основные свойства регулярных клеточных комплексов

Пусть X — хаусдорфово пространство и K — его клеточное разбиение.

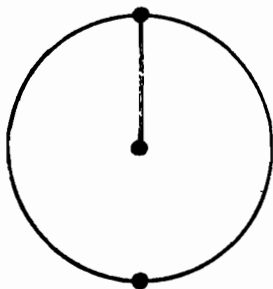
5.4. Определение. Будем говорить, что разбиение K — *регулярный клеточный комплекс на X* , если для каждой n -клетки e^n , $n > 0$, пара $(\bar{e}^n, e^n)$ гомеоморфна паре (E^n, U^n) подпространств евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ (обозначения см. в § 2.4).

Примеры. Триангуляция компактного 2-многообразия X определяет на нем структуру регулярного клеточного комплекса. Вместо триангуляции можно рассматривать подразделение X на многоугольники с любым числом сторон. Аналогичным образом структура регулярного клеточного комплекса может быть определена и на некомпактном 2-многообразии (например, на евклидовой плоскости) путем его разбиения на бесконечное число треугольников или многоугольников.

На n -мерной сфере можно определить такой регулярный клеточный комплекс, что при каждом q , $0 \leq q \leq n$, имеется ровно две q -клетки.

Замечание. Клеточное разбиение K пространства X может не быть регулярным даже в том случае, когда оно обладает свойством, что замыкание $\bar{e}^n$ каждой n -клетки e^n гомеоморфно шару E^n . Следующий рисунок дает пример такого разбиения в случае

$X = E^2$. Клеточное разбиение состоит из трех вершин, трех одномерных клеток и одной двумерной клетки.



Регулярный клеточный комплекс называется *локально конечным*, если у каждой точки существует окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом клеток. Из этого условия, очевидно, вытекает локальная компактность пространства X . Однако обратное не верно. Приведем пример локально компактного пространства X , допускающего структуру не локально конечного регулярного клеточного комплекса. В этом примере X — замкнутое подмножество трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Разбиение содержит бесконечное число 2-клеток e_n^2 , $n = 1, 2, 3, \dots$, определяемых следующим образом:

$$\dot{e}_n^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = n\}$$

(заметим, что $\dot{e}_n^2$ — окружность), в то время как $\bar{e}_n^2$ — это объединение всех отрезков, соединяющих точки окружности $\dot{e}_n^2$ с точкой $(0, 0, -1/n)$. Таким образом, $\bar{e}_n^2$ — круговой конус, и $e_n^2 = \bar{e}_n^2 \setminus \dot{e}_n^2$ (открытая 2-клетка). Выбирая по две произвольные точки в $\dot{e}_n^2$ в качестве вершин, получим клеточные разбиения пространств $\bar{e}_n^2$.

Пусть $A = \{(x, y, z) \mid x = y = 0, z \geq 0\}$, т. е. A — неотрицательная часть оси z . Разобьем A на клетки, помещая вершины в точки $(0, 0, n)$ для всех целых неотрицательных n .

Определим X как объединение всех замкнутых 2-клеток $\bar{e}_n^2$ и множества A . На пространстве X , очевидно, определена структура регулярного клеточного комплекса. Однако условие локальной конечности нарушается во всех точках множества A . (Замечание. Легко видеть, что пространство X получается в результате вращения вокруг оси z некоторого одномерного подмножества плоскости xz).

В прошлом не локально конечные регулярные клеточные комплексы обычно воспринимались как патологические и исключались из рассмотрения. Хотя практически все регулярные кле-

точные комплексы, рассматриваемые ниже, локально конечны, предположение о локальной конечности в доказательствах не используется. Разумеется, регулярные клеточные комплексы будут рассматриваться только на локально компактных пространствах.

При рассмотрении регулярных клеточных комплексов будем использовать следующую терминологию и обозначения: для любой n -клетки e^n множество $\dot{e}^n = \bar{e}^n \setminus e^n$ будем называть *границей* e^n , хотя оно, вообще говоря, может не совпадать с границей пространства e^n в смысле теоретико-множественной топологии. Заметим, что $\dot{e}^n$ содержится в $(n-1)$ -мерном остове и является $(n-1)$ -мерной сферой.

5.5. Лемма. Если пересечение $(n-1)$ -клетки e^{n-1} с замыканием $\bar{e}^n$ клетки e^n регулярного клеточного комплекса K непусто, то e^{n-1} содержится в $\dot{e}^n$.

Доказательство. Так как $\bar{e}^n$ компактно, пересечение $e^{n-1} \cap \bar{e}^n$ замкнуто в e^{n-1} . Поскольку e^{n-1} открыто в K^{n-1} , $e^{n-1} \cap \bar{e}^n = e^{n-1} \cap \dot{e}^n$ — открытое подмножество $(n-1)$ -мерной сферы $\dot{e}^n$. По теореме об инвариантности области множество $e^{n-1} \cap \bar{e}^n$ открыто в клетке e^{n-1} . Из связности e^{n-1} и из предположения леммы вытекает, что $e^{n-1} \cap \bar{e}^n = e^{n-1}$.

Это приводит к следующему определению: клетка e^m называется *гранью* клетки e^n , если $e^m \subset \bar{e}^n$ (обозначение: $e^m \leq e^n$). Ясно, что каждая клетка является своей гранью. Клетка e^m называется *собственной гранью* e^n , если включение является собственным (обозначение: $e^m < e^n$). Это отношение определяет на множестве клеток комплекса K частичную упорядоченность.

5.6. Лемма. Если в регулярном клеточном комплексе K клетка e_i^{n-1} — грань e_i^n , то соответствующий им коэффициент инцидентности $[b_i^{n-1}: b_i^n]$ равен ± 1 .

Доказательство. Воспользуемся леммой 5.3. В обозначениях этой леммы достаточно доказать, что δ_{ij} — изоморфизм. В силу точности когомологической последовательности пары $(e_j^n \cup e_i^{n-1}, e_i^{n-1})$ достаточно установить, что

$$H_c^m(e_j^n \cup e_i^{n-1}) = 0$$

при всех m . Для доказательства¹⁾ рассмотрим приведенную когомологическую последовательность пары $(\bar{e}_j^n, \bar{e}_j^n \setminus \dot{e}_i^{n-1})$. Множество $\bar{e}_j^n$, очевидно, компактно и стягиваемо. Мы утверждаем, что

¹⁾ Это вытекает также из теоремы 2.8 и того простого факта, что одноточечная компактификация $e_j^n \cup e_i^{n-1}$ гомеоморфна n -мерному шару E^n . — Прим. ред.

пространство $\dot{e}_j^n \setminus e_j^{n-1}$ также компактно и стягиваемо. Для доказательства стягиваемости этого пространства заметим, что для любой точки $x \in e_j^{n-1}$ множество $\dot{e}_j^n \setminus e_j^{n-1}$ — деформационный ретракт пространства $\dot{e}_j^n \setminus \{x\}$, а $\dot{e}_j^n \setminus \{x\}$ гомеоморфно евклидову $(n-1)$ -мерному пространству, которое, разумеется, стягиваемо.

Подведем итог полученным до сих пор результатам. Для клеток e_i^{n-1} и e_j^n регулярного клеточного комплекса имеется ровно две взаимоисключающие возможности:

(а) e_i^{n-1} — грань клетки e_j^n . Тогда $[b_i^{n-1} : b_j^n] = \pm 1$.

(б) Клетка e_i^{n-1} не является гранью клетки e_j^n . Тогда пересечение e_i^{n-1} и e_j^n пусто и $[b_i^{n-1} : b_j^n] = 0$.

5.7. Следствие. *Всякая $(n-1)$ -клетка регулярного клеточного комплекса является гранью лишь конечного числа n -клеток.*

Это вытекает из предыдущего обсуждения и утверждения (а) леммы 5.1. В силу очевидной индукции всякая $(n-1)$ -клетка может быть гранью лишь конечного числа m -клеток при любом $m \geq n$. Таким образом,

5.8. Следствие. *Если число вершин в регулярном клеточном комплексе K конечно, то он имеет конечное число клеток в каждой размерности¹⁾.*

В дальнейшем нам потребуется понятие подкомплекса регулярного клеточного комплекса. Пусть K — регулярное клеточное разбиение пространства X и A — подпространство в X , совместимое с клеточным разбиением K (в смысле гл. 3). Тогда множества $L^q = K^q \cap A$ определяют клеточное разбиение пространства A . Если это разбиение является регулярным клеточным комплексом, то $L = \{L^q\}$ называется *подкомплексом* в K ²⁾. Ясно, что это имеет место в случае, когда A замкнуто в X (для локально конечных комплексов K верно также обратное утверждение).

5.9. Лемма. *Пусть K — регулярный клеточный комплекс на пространстве X и e^n — клетка размерности $n \geq 1$ комплекса K . Тогда $\bar{e}^n$ и $\dot{e}^n$ — пространства конечных клеточных подкомплекс-*

¹⁾ Учитывая, что K — разбиение локально компактного пространства, можно показать, что в рассматриваемом случае комплекс K конечен. — *Прим. перев.*

²⁾ Для подкомплекса A регулярного клеточного комплекса K разбиение $K \setminus A$ обычно не является регулярным клеточным комплексом. В этом проявляется некоторая слабость избранной автором концепции «гомологий и когомологий одного пространства» (которая особенно заметна в категории компактных пространств). — *Прим. ред.*

сов в K , причем $\bar{e}^n$ — объединение замыканий некоторых $(n-1)$ -клеток из K .

Доказательство проводится индукцией по размерности клеток. При $n=1$ утверждение очевидно. Предположим, что оно верно для всех клеток размерности $\leq n-1$, и пусть e^n — клетка размерности $n > 1$. Обозначим через A объединение всех замкнутых $(n-1)$ -клеток $\bar{e}^{n-1}$, таких, что $e^{n-1} \subset e^n$. В силу предположения индукции на пространстве $\bar{e}^{n-1}$ определена структура клеточного подкомплекса разбиения K . Следовательно, A — также пространство клеточного подкомплекса в K .

Покажем, что A — конечный подкомплекс в K . Для доказательства заметим, что A имеет только конечное число вершин. В самом деле, $\bar{e}^n$ содержит лишь конечное число вершин, поскольку $\bar{e}^n \cap K^0$ — дискретное и замкнутое подмножество компакта $\bar{e}^n$. Заметим также, что $A \subset K^{n-1}$, так как $\bar{e}^n \subset K^{n-1}$. Поэтому наше утверждение вытекает из следствия 5.8.

Таким образом, A — объединение конечного числа замкнутых клеток $\bar{e}^{n-1}$ и, следовательно, компактно. Очевидно, что $A \subset \bar{e}^n$. Докажем обратное включение $\bar{e}^n \subset A$. Из леммы 5.5 заключаем, что $\bar{e}^n \subset A \cup K^{n-2}$. Мы утверждаем, что если $0 \leq r \leq n-2$ и $\bar{e}^n \subset A \cup K^r$, то $\bar{e}^n \subset A \cup K^{r-1}$. Пусть e^r — клетка размерности r , не содержащаяся в A , т. е. $e^r \subset K^r \setminus A$. Поскольку e^r — открытое подмножество в K^r , оно открыто также в $K^r \setminus A$. Клетка e^r открыта в $K^r \cup A$, так как $K^r \setminus A$ открыто в $K^r \cup A$. Поскольку пространство e^r открыто в $K^r \cup A$ и $\bar{e}^n \subset K^r \cup A$, множество $e^r \cap \bar{e}^n$ открыто в $\bar{e}^n$. В силу теоремы об инвариантности области это возможно лишь в случае, когда $e^r \cap \bar{e}^n$ пусто, откуда и вытекает требуемое утверждение.

Применяя это утверждение последовательно для $r=n-2, n-3, \dots, 0$, видим, что $\bar{e}^n \subset A$.

Поскольку $\bar{e}^n = e^n \cup \bar{e}^n$, пространство $\bar{e}^n$ также является клеточным подкомплексом.

5.10. Лемма. Пусть e^n и e^{n+2} — такие клетки регулярного клеточного комплекса K , что $e^n < e^{n+2}$. Тогда существуют ровно две $(n+1)$ -клетки e^{n+1} , для которых

$$e^n < e^{n+1} < e^{n+2}.$$

Доказательство. В силу леммы 5.9 существует по крайней мере одна такая $(n+1)$ -клетка. Предположим, что такая клетка *ровно* одна. Обозначим ее через e_1^{n+1} . Пусть $e_2^{n+1}, \dots, e_k^{n+1}$ — остальные $(n+1)$ -клетки, являющиеся гранями клетки e^{n+2} . Тогда пересечение e^n и $\bar{e}_i^{n+1}$ пусто при $i > 1$. Пусть

$$A = \bigcup_{i=2}^k \bar{e}_i^{n+1}.$$

Ясно, что A — собственное замкнутое подмножество пространства e^{n+2} и, следовательно, $e^{n+2} \setminus A$ — открытое подмножество в e^{n+2} . Но $e^{n+2} \setminus A$ — объединение клеток e_1^{n+1} , e^n и, возможно, некоторых других граней клетки e_1^{n+1} . Из теоремы об инвариантности области заключаем, что такое множество не может быть открытым в $(n+1)$ -мерной сфере. Мы получили противоречие.

Итак, предположим, что e^n — грань клеток e_1^{n+1} и e_2^{n+1} , каждая из которых служит гранью e^{n+2} . Зафиксируем некоторые гомеоморфизмы пар $(\bar{e}_1^{n+1}, e_1^{n+1})$ и $(\bar{e}_2^{n+1}, e_2^{n+1})$ на пару (E^{n+1}, U^{n+1}) . Эти гомеоморфизмы позволяют применять к пространствам $\bar{e}_1^{n+1}$, $\bar{e}_2^{n+1}$ все понятия евклидовой геометрии, что мы и будем делать без дальнейших пояснений.

Пусть $x_i \in e_i^{n+1}$ — центр клетки e_i^{n+1} . Для каждой замкнутой клетки $\bar{e}_i^{n+1}$ пусть C_i — конус с вершиной x_i и основанием e^n , т. е. объединение отрезков, соединяющих x_i с точками множества e^n . Пусть

$$C'_i = C_i \setminus \{x_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Легко видеть, что множество $C'_1 \cup C'_2$ гомеоморфно декартову произведению e^n на открытый интервал $(-1, +1)$. В силу теоремы об инвариантности области $C'_1 \cup C'_2$ — открытое подмножество в e^{n+2} . Поэтому e^n не может содержаться в замыкании еще какой-то $(n+1)$ -границы клетки e^{n+2} . Лемма доказана.

Упражнения

1. Пусть e^0 — вершина регулярного клеточного комплекса K на локально компактном хаусдорфовом пространстве X . Докажите, что e^0 обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом одномерных клеток разбиения K . (Замечание. Это показывает, что приведенный в тексте пример не локально конечного регулярного клеточного комплекса на локально компактном пространстве является одним из простейших.)

2. Пусть K — регулярный клеточный комплекс на n -мерной сфере S^n . Установите последовательно следующие факты о разбиении K : (a) K конечномерно; (b) K конечно; (c) при $q < n$ любая q -клетка разбиения K — грань некоторой n -клетки; (d) любая $(n-1)$ -клетка — грань ровно двух n -клеток разбиения K .

3. Докажите, что если K — конечный регулярный клеточный комплекс на пространстве X , то $H^1(X; \mathbb{Z})$ — свободная абелева группа конечного ранга. (Указание. Индукцией по числу 1-клеток докажите этот результат сначала для случая, когда K связан и одномерен. Затем рассмотрите случай связного комплекса K размерности ≥ 1 ; воспользуйтесь связностью одномерного остова. После этого докажите результат в общем случае.)

4. Пусть $n \geq 0$ — целое число. Приведите пример связного одномерного регулярного клеточного комплекса X , для которого $H_0^1(X; \mathbb{Z})$ — свободная абелева группа ранга n .

§ 5.4. Коэффициенты инцидентности в регулярных клеточных комплексах

В этом параграфе излагается способ вычисления коэффициентов инцидентности в регулярном клеточном комплексе. Предполагается, что задан перечень клеток комплекса K , в котором указаны все те пары (e^{n-1}, e^n) , для которых имеет место отношение $e^{n-1} < e^n$.

Начнем с краткого напомнимания всех доказанных до сих пор свойств коэффициентов инцидентности. Пусть K — регулярный клеточный комплекс на локально компактном хаусдорфовом пространстве X . В соответствии с § 5.2 для каждой клетки e_i^n выберем ориентацию b_i^n (напомним, что при $n=0$ ориентация единственна). Тогда коэффициенты инцидентности $[b_i^n : b_j^{n+1}]$ удовлетворяют следующим четырем условиям:

- (1) Если e_i^{n-1} не является гранью клетки e_j^n , то $[b_i^{n-1} : b_j^n] = 0$.
- (2) Если e_i^{n-1} — грань клетки e_j^n , то $[b_i^{n-1} : b_j^n] = \pm 1$.
- (3) Если e_i^0 и e_j^0 — две вершины одномерной клетки e_k^1 , то $[b_i^0 : b_k^1] + [b_j^0 : b_k^1] = 0$.
- (4) Пусть e_i^n и e_j^{n+2} — такие клетки, что $e_i^n < e_j^{n+2}$. Обозначим через e_k^{n+1} и e_r^{n+1} две единственные $(n+1)$ -клетки e^{n+1} , для которых $e_i^n < e_k^{n+1} < e_j^{n+2}$. Тогда

$$[b_i^n : b_k^{n+1}][b_k^{n+1} : b_j^{n+2}] + [b_i^n : b_r^{n+1}][b_r^{n+1} : b_j^{n+2}] = 0.$$

Пояснения требует лишь свойство (3). Оно получается применением утверждения (с) леммы 5.1 к подкомплексу $\bar{e}_k^1$.

В нашей основной теореме утверждается, что коэффициенты инцидентности регулярного клеточного комплекса полностью характеризуются этими условиями.

5.11. Теорема. Пусть K — регулярный клеточный комплекс на локально компактном хаусдорфовом пространстве X . Предположим, что каждой паре клеток (e_i^n, e_j^{n+1}) разбиения K сопоставлено целое число a_{ij}^n таким образом, что выполнены следующие условия:

- (1) Если e_i^n не является гранью клетки e_j^{n+1} , то $a_{ij}^n = 0$.
- (2) Если e_i^n — грань клетки e_j^{n+1} , то $a_{ij}^n = \pm 1$.

(3) Если e_i^0 и e_j^0 — две вершины 1-клетки e_k^1 , то $a_{ik}^0 + a_{jk}^0 = 0$.

(4) Пусть e_i^n и e_j^{n+2} — такие клетки разбиения K , что $e_i^n < e_j^{n+2}$, и пусть e_k^{n+1} и e_r^{n+1} — те две $(n+1)$ -клетки e^{n+1} , для которых $e_i^n < e_k^{n+1} < e_j^{n+2}$. Тогда $a_{ik}^n a_{kl}^{n+1} + a_{ir}^n a_{rl}^{n+1} = 0$.

В этих предположениях можно единственным образом выбрать ориентацию b_i^n каждой клетки e_i^n так, что

$$[b_i^n : b_j^{n+1}] = a_{ij}^n$$

для всех пар (e_i^n, e_j^{n+1}) .

Доказательство. Существование требуемой ориентации b_i^n клетки e_i^n будем доказывать индукцией по n . В силу нашего соглашения каждая 0-клетка e_i^0 имеет единственную ориентацию, которая была обозначена через b_i^0 .

Пусть e_i^0 и e_j^0 — вершины 1-клетки e_k^1 . Выберем сначала произвольную ориентацию c_k^1 1-клетки e_k^1 . Тогда $[b_i^0 : c_k^1]$, $[b_j^0 : c_k^1]$, a_{ik}^0 и a_{jk}^0 — числа, равные ± 1 и удовлетворяющие равенствам

$$[b_i^0 : c_k^1] + [b_j^0 : c_k^1] = 0, \quad a_{ik}^0 + a_{jk}^0 = 0.$$

Если $[b_i^0 : c_k^1] = a_{ik}^0$, то $[b_j^0 : c_k^1] = a_{jk}^0$, и можно положить $b_k^1 = c_k^1$. Если $[b_i^0 : c_k^1] = -a_{ik}^0$, то $[b_j^0 : c_k^1] = -a_{jk}^0$, и можно выбрать $b_k^1 = -c_k^1$.

Теперь приступаем к индукции. Пусть при $q < n$ уже выбраны ориентации b_i^q клеток e_i^q , удовлетворяющие требованию теоремы. Выберем произвольную ориентацию c_k^n клетки e_k^n размерности n комплекса K . Пусть e_i^{n-1} и e_j^{n-1} — две $(n-1)$ -мерные грани клетки e_k^n . Ниже будет доказано равенство

$$(4) \quad \frac{[b_i^{n-1} : c_k^n]}{a_{ik}^{n-1}} = \frac{[b_j^{n-1} : c_k^n]}{a_{jk}^{n-1}} = \pm 1.$$

Отсюда вытекает, что отношение $[b_i^{n-1} : c_k^n] / a_{ik}^{n-1}$ одинаково для всех $(n-1)$ -мерных граней e_i^{n-1} клетки e_k^n . Общее значение этого отношения обозначим через β . Тогда $\beta = \pm 1$ и можно положить

$$b_k^n = \beta c_k^n.$$

Так же, как и в случае $n = 1$, проверяется, что b_k^n — требуемая ориентация.

Для доказательства равенства (4) рассмотрим сначала случай, когда клетки e_i^{n-1} и e_j^{n-1} имеют общую грань e_r^{n-2} .

Справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} [b_r^{n-2} : b_i^{n-1}] [b_i^{n-1} : c_k^n] + [b_r^{n-2} : b_j^{n-1}] [b_j^{n-1} : c_k^n] &= 0, \\ [b_r^{n-2} : b_i^{n-1}] a_{ik}^{n-1} + [b_r^{n-2} : b_j^{n-1}] a_{jk}^{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

Так как фигурирующие здесь числа равны ± 1 , получаем

$$\frac{[b_i^{n-1} : c_k^n]}{a_{ik}^{n-1}} = \frac{[b_j^{n-1} : c_k^n]}{a_{jk}^{n-1}},$$

что и требовалось.

Предположим далее, что существует последовательность

$$(5) \quad e_{i_1}^{n-1}, \quad e_{i_2}^{n-1}, \quad \dots, \quad e_{i_s}^{n-1}$$

граней размерности $n-1$ клетки e_k^n , в которой

$$e_{i_1}^{n-1} = e_i^{n-1}, \quad e_{i_s}^{n-1} = e_j^{n-1},$$

а каждые две рядом стоящие клетки имеют общую $(n-2)$ -мерную грань. Для каждой пары клеток, стоящих рядом в последовательности (5), применимы только что изложенные рассуждения, поэтому из полученных таким образом равенств вытекает равенство (4).

В заключение мы должны показать, что для любых двух граней e_i^{n-1} и e_j^{n-1} клетки e_k^n существует последовательность (5) $(n-1)$ -мерных граней этой клетки, обладающая свойствами, перечисленными в предыдущем абзаце. В доказательстве используются когомологии подкомплекса $\bar{e}_k^n$ с коэффициентами в циклической группе Z_2 . Когомологии регулярного клеточного комплекса с коэффициентами в Z_2 вычислять особенно просто, поскольку в этом случае каждая клетка имеет единственную ориентацию, и коэффициенты инцидентности полностью определяются сформулированными в начале параграфа условиями (1) и (2). Так как ориентация каждой клетки единственна, не опасаясь путаницы, можно обозначать как клетку, так и ее ориентацию, одним и тем же символом e_i^n . В этих обозначениях рассмотрим коцепь

$$1 \cdot e_i^{n-1} + 1 \cdot e_j^{n-1} \in C_i^{n-1}(\bar{e}_k^n; Z_2).$$

Эта коцепь, очевидно, является коциклом. Поскольку $H^{n-1}(\bar{e}_k^n; Z_2) = 0$, она есть кограница некоторой $(n-2)$ -мерной коцепи. Отсюда и из того, что каждая $(n-2)$ -клетка подкомплекса — грань ровно двух $(n-1)$ -клеток, вытекает существование требуемой последовательности (5). Детали мы оставляем читателю.

Этим закончено доказательство существования нужных ориентаций. Их единственность докажем индукцией по размерности n . При $n = 0$ ориентации единственны в силу нашего соглашения. Предположим, что единственность ориентаций доказана для всех клеток размерности $< n$. Для n -клетки e_i^n выберем $(n-1)$ -мерную грань e_j^{n-1} . Утверждение (d) леммы 5.1 означает, что изменение ориентации e_i^n приводит к смене знака у числа $[b_j^{n-1} : e_i^n]$.

Этим теорема 5.11 полностью доказана.

Соглашение. Начиная с этого момента будем обычно считать, что ориентации клеток регулярного клеточного комплекса K фиксированы. Поэтому символ e_i^n будет использоваться для обозначения как самой клетки, так и ее ориентации, а символ $[e_j^{n-1} : e_i^n]$ — для коэффициента инцидентности соответствующих ориентированных клеток. Эта небрежность в обозначениях удобна для вычислений.

Замечание. Содержащееся в теореме 5.11 утверждение о единственности ориентаций важно тем, что оно позволяет указывать ориентации клеток регулярного клеточного комплекса, отвечающие заданным коэффициентам инцидентности. Ориентации клеток можно задавать многими различными способами. Однако задание ориентаций через коэффициенты инцидентности — одно из самых удобных и легко используемых. В дальнейшем мы встретимся с подтверждающими это примерами.

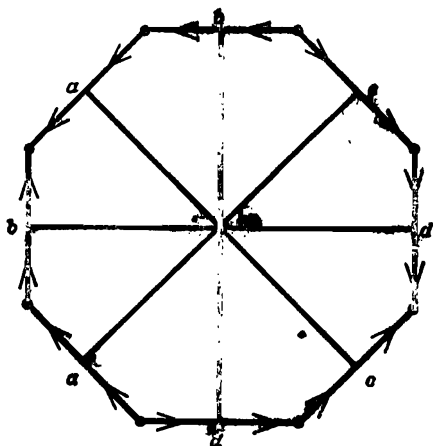
Метод использования этой теоремы очень прост. Предположим, что нам задан перечень клеток комплекса K , в котором указаны все пары (e_i^{n-1}, e_j^n) , связанные соотношением $e_i^{n-1} < e_j^n$. Для каждой 1-клетки e^1 выберем коэффициенты инцидентности между этой клеткой и двумя ее вершинами так, чтобы выполнялись условия (2) и (3). Остальные коэффициенты инцидентности между 0-клетками и 1-клетками будем считать нулевыми (условие (1)). Предположим по индукции, что коэффициенты инцидентности уже выбраны для всех клеток размерности $< n$. Пусть e^n — клетка размерности n . Для любой грани e_0^{n-1} этой клетки выберем число $[e_0^{n-1} : e^n]$ равным ± 1 . Используя условие (4), определим числа $[e_i^{n-1} : e^n]$ для всех $(n-1)$ -мерных граней e_i^{n-1} клетки e^n , имеющих с e_0^{n-1} общую $(n-2)$ -мерную грань. Продолжая этот процесс, определим все коэффициенты инцидентности в подкомплексе e^n . Теорема 5.11 гарантирует, что этот процесс не приведет к противоречию¹⁾. Проведем этот про-

¹⁾ Поскольку выбор $[e_0^{n-1} : e^n]$ равносильно заданию ориентации e^n , которая определяет все другие числа $[e^{n-1} : e^n]$. — *Прим. ред.*

цесс для каждой n -клетки разбиения K , после чего остальные коэффициенты инцидентности между $(n-1)$ -мерными и n -мерными клетками определим в соответствии с условием (1).

Читателю настоятельно рекомендуется разобрать ряд примеров. Вот несколько возможностей:

(а) Разделим ориентируемую поверхность рода n на $4n$ четырехугольников. Следующий рисунок относится к случаю $n=2$.



Здесь мы используем хорошо известный факт, что такую поверхность можно получить подходящим отождествлением пар ребер правильного $4n$ -угольника.

(b) Разделим неориентируемую поверхность рода $n > 1$ на $2n$ квадратов. Здесь мы пользуемся тем, что эта поверхность может быть получена из правильного $2n$ -угольника с помощью надлежащего отождествления пар ребер. Для получения регулярного клеточного комплекса необходимо разбить каждый квадрат диагональю на два треугольника.

(с) Рассмотрим действительную проективную плоскость, получающуюся в результате отождествления центрально-симметричных точек границы квадрата. Определим регулярный клеточный комплекс, разделив квадрат диагоналями на 4 треугольника.

(d) Рассмотрим трехмерное вещественное проективное пространство как правильный октаэдр

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| + |y| + |z| \leq 1\}$$

с отождествленными центрально-симметричными точками границы. Разделим октаэдр координатными плоскостями на восемь тетраэдров (в каждом октанте содержится один тетраэдр). Это определяет структуру регулярного клеточного комплекса на трехмерном вещественном проективном пространстве. Аналогичным образом структура регулярного клеточного комплекса может быть задана на n -мерном вещественном проективном пространстве.

В каждом случае с помощью теоремы 5.11 можно вычислить коэффициенты инцидентности. Определение посредством коэффициентов инцидентности структуры модулей гомологий и когомологий — задача, рассматриваемая в следующем параграфе.

Упражнения

Пусть K — регулярный клеточный комплекс на пространстве X . Будем называть K *почти симплициальным* комплексом, если для всех $n \geq 0$ выполнены условия

- (а) каждая n -клетка имеет ровно $n + 1$ вершин,
- (б) всякий набор из $n + 1$ вершин является множеством вершин не более одной n -клетки (такой клетки может и не быть).

1. Докажите, что n -клетка имеет ровно $n + 1$ граней размерности $n - 1$.

2. Докажите, что коэффициенты инцидентности допускают следующее явное описание. Каждая клетка единственным образом характеризуется своими вершинами. Упорядочим линейно все вершины комплекса K (произвольным образом) и согласуем перечень вершин каждой клетки с этим порядком. Если $v_0, v_1, \dots, v_n$ — вершины e^n в указанном порядке, а грань e^{n-1} содержит все вершины, кроме v_i , то $[e^{n-1} : e^n] = (-1)^i$.

Замечание. Описанной выше структурой обладают обычные симплициальные комплексы, встречающиеся в большинстве учебников по алгебраической топологии. Однако сверх этого для каждого $\bar{e}^n$ в обычном симплициальном комплексе фиксирован класс специальных гомеоморфизмов между $\bar{e}^n$ и «стандартным» n -мерным симплексом (удовлетворяющий определенным условиям). Эта дополнительная структура не играет роли при вычислении групп гомологий и когомологий. Однако в некоторых геометрических задачах она очень важна.

Привилегированность положения, занимаемого в рассматриваемой теории симплициальными комплексами, объясняется наличием явной формулы для коэффициентов инцидентности. Формула кограницы p -мерной коцепи (см. гл. I) была написана на основе формул для коэффициентов инцидентности в симплициальном комплексе.

§ 5.5. Определение структуры групп целочисленных когомологий исходя из матриц инцидентности

Для фиксированного n числа $[e_i^n : e_j^{n+1}]$ образуют целочисленную прямоугольную матрицу, которая является матрицей кограничного оператора δ в базисах групп $C_j^n(K; \mathbb{Z})$ и $C_j^{n+1}(K; \mathbb{Z})$, состоящих из ориентированных клеток разбиения K . В § 5.4 было показано, как определить матрицы инцидентности регулярного клеточного комплекса K . Осталось решить чисто алгебраическую задачу: определить по этим матрицам группы когомологий $H_c^q(X; \mathbb{Z})$. В настоящем параграфе мы покажем, как это можно сделать (по крайней мере теоретически) в случае, когда n -мерный остов K^n конечен при каждом n (т. е. когда в каждой размерности имеется лишь конечное число клеток) ¹⁾.

Напомним сначала некоторые стандартные алгебраические факты.

5.12. Лемма. *Всякая подгруппа свободной абелевой группы ранга n является свободной абелевой группой ранга $\leq n$.*

5.13. Лемма. *Пусть C — свободная абелева группа ранга n и B — подгруппа группы C . Тогда существуют такие базисы $\{c_1, \dots, c_n\}$ и $\{b_1, \dots, b_m\}$ групп C и B соответственно, что $b_i = e_i c_i$, $1 \leq i \leq m$, и e_i делит e_{i+1} , $1 \leq i < m$. Более того, целые числа $e_1, \dots, e_m$ единственны (с точностью до знака).*

Доказательства этих двух лемм можно найти в большинстве стандартных учебников по алгебре, и мы не будем повторять их. Заметим, что базисы, обладающие указанными свойствами, не являются единственными. Лемму 5.13 можно доказать следующим образом. Выберем произвольные базисы в группах C и B . Выражая базисные элементы группы B через базисные элементы группы C , получим прямоугольную целочисленную матрицу. Элементарными преобразованиями эта матрица приводится к диагональному виду. Целые числа e_i , называемые *элементарными делителями*, инвариантны относительно элементарных преобразований.

5.14. Лемма. *Пусть $f: A \rightarrow B$ — эпиморфизм абелевой группы*

¹⁾ В этом случае комплекс K конечен, см. примечание переводчика к следствию 5.8. Выводы настоящего параграфа справедливы для любых конечных клеточных разбиений (в смысле гл. 3), а также для CW -комплексов, имеющих конечное число клеток в каждой размерности. В последнем случае, однако, вместо $H_c^n(X)$ получаются когомологии $H^n(X)$, рассматриваемые во второй части книги (см. примечание переводчика к § 3.3). — *Прим. ред.*

A на свободную абелеву группу B . Тогда $\text{Ker } f$ — прямое слагаемое группы A .

Доказательство леммы оставляем читателю.

Пусть $\{C^n, \delta_n\}$ — коцепной комплекс свободных абелевых групп конечного ранга (например, коцепной комплекс регулярного клеточного комплекса K , имеющего лишь конечное число клеток в каждой размерности). Используя леммы 5.12—5.14, мы покажем, что базисы во всех группах C^n можно одновременно выбрать таким образом, что матрицы линейных отображений δ_n будут иметь особенно простой вид. Это даст нужное описание групп когомологий.

Прежде всего заметим, что в силу леммы 5.12 при каждом n подгруппа кограниц $B^n \subset C^n$ — свободная абелева группа. Отображение δ_n задает эпиморфизм группы C^n на B^{n+1} . Поэтому в соответствии с леммой 5.14 его ядро Z^n является прямым слагаемым группы C^n . Таким образом, при каждом n существует такая подгруппа D^n группы C^n , что

$$C^n = Z^n \oplus D^n \quad (\text{прямая сумма}).$$

Заметим, что δ_n изоморфно отображает D^n на $B^{n+1} \subset Z^{n+1}$ и к этому вложению группы D^n в Z^{n+1} можно применить лемму 5.13. Таким образом, существуют базисы $\{a_i^{n+1}, b_j^{n+1}, c_k^{n+1}\}$ и $\{d_i^n, e_j^n\}$ групп Z^{n+1} и D^n соответственно и числа $e_j^{n+1} > 1$, такие, что

$$\delta(d_i^n) = a_i^{n+1} \quad (\text{для всех } i), \quad \delta(e_j^n) = e_j^{n+1} b_j^{n+1} \quad (\text{для всех } j).$$

Здесь нижние индексы i, j и k пробегает значения из некоторых конечных множеств, количество элементов в которых зависит от n . Верхние индексы обозначают размерность. Кроме того, можно считать, что e_j^{n+1} делит e_{j+1}^{n+1} . Таким образом, $\{a_i^n, b_j^n, c_k^n, d_i^n, e_j^n\}$ — базис группы C^n , причем аналогичный базис имеется и в группе C^{n+1} . В этих базисах матрица оператора $\delta_n: C^n \rightarrow C^{n+1}$ состоит из 25 блоков. Как показывает диаграмма на следующей странице, все блоки, кроме двух, нулевые. Заметим, что один из ненулевых блоков — единичная матрица, а второй — диагональная матрица.

С помощью этой матрицы легко дать описание группы когомологий

$$H^{n+1} = Z^{n+1}/B^{n+1} = Z^{n+1}/\delta(D^n).$$

Класс когомологий каждого коцикла c_k^{n+1} порождает бесконечную циклическую подгруппу, класс когомологий каждого коцикла b_j^{n+1} порождает циклическую подгруппу порядка e_j^{n+1} . Груп-

	a_i^{n+1}	b_j^{n+1}	c_k^{n+1}	$d_{i''}^{n+1}$	$e_{j''}^{n+1}$
$a_i^{n'}$	0	0	0	0	0
b_j^n	0	0	0	0	0
c_k^n	0	0	0	0	0
d_i^n	1 0 0 1	0	0	0	0
e_j^n	0	e_1^{n+1} 0 0 e_q^{n+1}	0	0	0

па H^{n+1} — прямая сумма этих циклических подгрупп. Полученные результаты можно записать в следующем виде:

- (6) $\text{rank}(H^n) = \text{rank}(C^n) - \text{rank}(\delta_n) - \text{rank}(\delta_{n-1})$,
 (7) подгруппа кручения группы H^n — прямая сумма циклических групп порядков e_j^n ,

где через $\{e_j^n\}$ обозначено множество элементарных делителей матрицы оператора δ_{n-1} . В формуле (6) через $\text{rank}(\delta_n)$ обозначен ранг матрицы оператора δ_n (который можно вычислить в любых базисах групп C^n и C^{n+1}).

Доказательство соотношений (6) и (7) немедленно вытекает из рассмотрения выбранных базисов в группах C^n . Заметим, что эти соотношения сводят задачу нахождения групп когомологий к определению рангов и элементарных делителей матриц инцидентности.

Замечание. Приведенные выше рассуждения справедливы для когомологий над любым кольцом главных идеалов. Однако в топологических вопросах кольцо целых чисел — по-видимому, единственное кольцо главных идеалов, встречающееся в качестве кольца коэффициентов (помимо случая поля).

Упражнения

1. Приведите матрицы инцидентности регулярных клеточных комплексов, упомянутых в § 5.4, к стандартному виду и найдите описание групп когомологий.

2. Пусть R — поле и $C = \{C^n, \delta_n\}$ — коцепной комплекс векторных пространств над R конечного ранга. Найдите формулу для ранга (над R) векторного пространства H^n в терминах рангов пространств C^n и операторов δ_n при различных n .

§ 5.6. Гомологии регулярных клеточных комплексов

Теорема об универсальных коэффициентах из § 4.8 позволяет получить аналогичные результаты для гомологий; ср. также с п. (4) из § 4.9. Имеем

$$C_q(K; Z) = \text{Hom}(C_q^f(K; Z), Z).$$

Таким образом, $C_q(K; Z)$ — прямое произведение подгрупп $H_q(e_i^q; Z) \cong Z$ по всем q -клеткам e_i разбиения K . Если разбиение K имеет бесконечное число q -клеток, то приходится рассматривать бесконечные q -цепи, т. е. q -цепи, принимающие ненулевые значения на бесконечном числе клеток.

Матрица граничного оператора

$$\partial: C_q(K; Z) \rightarrow C_{q-1}(K; Z)$$

получается транспонированием матрицы кограничного оператора

$$\delta: C_{q-1}^f(K; Z) \rightarrow C_q^f(K; Z).$$

Это обеспечивается естественностью гомоморфизма α по отношению к операторам ∂ и δ^1 .

В случае когда число q -мерных клеток разбиения K бесконечно, группа $C_q(K; Z)$ не является свободной, и мы используем матрицы довольно необычным образом. Однако это второстепенная

¹⁾ Здесь $C_q(K; \bar{Z}) = H_q(K^q \setminus K^{q-1}; Z)$, $C_q^f(K; Z) = H_c^q(K^q \setminus K^{q-1}; Z)$ и в соответствии с § 4.8

$$H_q(K^q \setminus K^{q-1}; Z) = \text{Hom}(H_c^q(K^q \setminus K^{q-1}; Z), Z).$$

Всякая точная последовательность $0 \rightarrow K_* \rightarrow L_* \rightarrow M_* \rightarrow 0$ свободных цепных комплексов определяет преобразования

$$\partial: H_n(M_*) \rightarrow H_{n-1}(K_*) \quad \text{и} \quad \delta: H^{n-1}(\text{Hom}(K_*, Z)) \rightarrow H^n(\text{Hom}(M_*, Z)).$$

Автор имеет в виду легко устанавливаемую коммутативность следующего квадрата:

$$\begin{array}{ccc} H^{n-1}(\text{Hom}(K_*, Z)) & \xrightarrow{\alpha} & \text{Hom}(H_{n-1}(K_*), Z) \\ \downarrow \delta & & \downarrow \text{Hom}(\partial, 1) \\ H^n(\text{Hom}(M_*, Z)) & \xrightarrow{\alpha} & \text{Hom}(H_n(M_*), Z) \end{array}$$

— Прим. ред.

деталь. Важный момент состоит в том, что для регулярных клеточных комплексов рассмотренный в § 5.4 метод вычисления матриц инцидентности для когомологий дает одновременно матрицы инцидентности и для гомологий.

В наиболее простом и важном случае, когда комплекс K имеет конечное число клеток в каждой размерности¹⁾, абелева группа $C_q(K; Z)$ свободна и становится возможным вычисление $H_q(X; Z)$. Заметим, что в этом случае матрицы инцидентности для гомологий полностью определяют матрицы для когомологий: эта точка зрения противоположна той, которой мы придерживались до сих пор.

§ 5.7. Ориентации клеток и матрицы инцидентности произведения двух регулярных клеточных комплексов

Пусть X и Y — локально компактные хаусдорфовы пространства с клеточными разбиениями K и L соответственно. Для любого n положим $M^n = \bigcup_{p+q=n} K^p \times L^q$.

5.15. Предложение. $M = \{M^n\}$ — клеточное разбиение произведения $X \times Y$.

Доказательство. Каждое множество M^n замкнуто как объединение конечного числа замкнутых множеств. Ясно, что $M^n \subset M^{n+1}$. Пространство $M^0 = K^0 \times L^0$ дискретно как произведение дискретных пространств. Остается доказать, что $M^n \setminus M^{n-1}$ — дизъюнктное объединение открытых подмножеств, гомеоморфных $\mathbb{R}^n$. Прежде всего заметим, что при $p+q=n$ множество

$$A_{p,q} = (K^p \setminus K^{p-1}) \times (L^q \setminus L^{q-1})$$

— дизъюнктное объединение открытых подмножеств, гомеоморфных пространству $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^n$. Ясно, что $M^n \setminus M^{n-1}$ — дизъюнктное объединение множеств $A_{p,q}$ для $p+q=n$. Каждое $A_{p,q}$ открыто в $M^n \setminus M^{n-1}$, поскольку оно является дополнением к конечному объединению замкнутых множеств. Предложение доказано.

Вполне естественно называть разбиение M произведением разбиений K и L и писать $M = K \times L$. Таким образом,

$$(K \times L)^n = \bigcup_{p+q=n} K^p \times L^q,$$

хотя эта запись не вполне согласуется с обычными обозначениями теории множеств. Заметим, что клетки разбиения $K \times L$ —

¹⁾ См. примечание к предыдущему параграфу. — Прим. ред.

это в точности произведения клеток разбиения K на клетки разбиения L .

5.16. Предложение. Если K и L — регулярные клеточные комплексы на пространствах X и Y соответственно, то $K \times L$ — регулярный клеточный комплекс на пространстве $X \times Y$.

Доказательство вытекает из того простого факта, что пара $(E^p \times E^q, U^p \times U^q)$ гомеоморфна паре (E^{p+q}, U^{p+q}) .

Упражнение

Докажите, что если в предложении 5.16 разбиения K и L локально конечны, то разбиение $K \times L$ также локально конечно.

В предположениях предложения 5.16 ориентации клеток комплекса $K \times L$ можно выбрать многими способами (это верно для любого клеточного комплекса). Предположим, что ориентации клеток комплексов K и L заданы. Покажем, как можно определить ориентации клеток произведения $K \times L$, естественным образом ассоциированные с заданными ориентациями клеток сомножителей.

Наблюдение, что ориентации клеток e^p и e^q однозначно определяют ориентацию произведения $e^p \times e^q$, геометрически очень естественно и является одним из наиболее важных в алгебраической топологии. Для наших целей удобнее рассматривать не ориентации, а коэффициенты инцидентности. Это оправдано наличием для любого регулярного клеточного комплекса взаимно однозначного соответствия между выборами ориентаций клеток и способами задания коэффициентов инцидентности.

5.17. Теорема. Пусть K — регулярный клеточный комплекс на X с клетками e_i^m и L — регулярный клеточный комплекс на Y с клетками σ_j^n . Предположим, что в K и L выбраны коэффициенты инцидентности (и, следовательно, ориентации). Тогда в $K \times L$ коэффициенты инцидентности определяются следующими соотношениями:

$$[e^{m-1} \times \sigma^n : e^m \times \sigma^n] = [e^{m-1} : e^m],$$

$$[e^m \times \sigma^{n-1} : e^m \times \sigma^n] = (-1)^m [\sigma^{n-1} : \sigma^n],$$

$$[e_i^m \times \sigma_j^n : e_k^p \times \sigma_l^q] = 0, \text{ если } e_i^m \neq e_k^p \text{ и } \sigma_j^n \neq \sigma_l^q.$$

Доказательство. Необходимо проверить выполнение условий (1)–(4) из § 5.4. Прежде всего очевидно, что $e_i^m \times \sigma_j^n \leq e_k^p \times \sigma_l^q$ тогда и только тогда, когда $e_i^m \leq e_k^p$ и $\sigma_j^n \leq \sigma_l^q$. Кроме того, если размерности этих двух клеток отличаются только на единицу, то имеет место один из двух первых случаев, упомянутых в теореме,

Сначала проверим справедливость условия (3) для коэффициентов инцидентности между 0-клетками и 1-клетками. Все 1-клетки разбиения $K \times L$ имеют вид $e^1 \times \sigma^0$ или $e^0 \times \sigma^1$. В первом случае имеем

$$[e_1^0 \times \sigma^0 : e^1 \times \sigma^0] + [e_2^0 \times \sigma^0 : e^1 \times \sigma^0] = [e_1^0 : e^1] + [e_2^0 : e^1] = 0.$$

Во втором случае

$$[e^0 \times \sigma_1^0 : e^0 \times \sigma^1] + [e^0 \times \sigma_2^0 : e^0 \times \sigma^1] = [\sigma_1^0 : \sigma^1] + [\sigma_2^0 : \sigma^1] = 0.$$

Далее проверим условие (4). Рассмотрим клетку $e^m \times \sigma^n$ и ее $(m+n-2)$ -мерную грань. Имеется три возможных описания этой грани:

- (а) $e^{m-2} \times \sigma^n$, где $e^{m-2} < e^m$,
- (б) $e^m \times \sigma^{n-2}$, где $\sigma^{n-2} < \sigma^n$,
- (с) $e^{m-1} \times \sigma^{n-1}$, где $e^{m-1} < e^m$ и $\sigma^{n-1} < \sigma^n$.

Докажем условие (4) в каждом из этих случаев.

Случай (а). Пусть $e^{m-2} < e_i^{m-1} < e^m$ при $i=1, 2$. Тогда

$$\begin{aligned} & [e^{m-2} \times \sigma^n : e_1^{m-1} \times \sigma^n] [e_1^{m-1} \times \sigma^n : e^m \times \sigma^n] + \\ & + [e^{m-2} \times \sigma^n : e_2^{m-1} \times \sigma^n] [e_2^{m-1} \times \sigma^n : e^m \times \sigma^n] = \\ & = [e^{m-2} : e_1^{m-1}] [e_1^{m-1} : e^m] + [e^{m-2} : e_2^{m-1}] [e_2^{m-1} : e^m] = 0. \end{aligned}$$

Случай (б) аналогичен случаю (а).

Случай (с). Имеем

$$\begin{aligned} & [e^{m-1} \times \sigma^{n-1} : e^m \times \sigma^{n-1}] [e^m \times \sigma^{n-1} : e^m \times \sigma^n] + \\ & + [e^{m-1} \times \sigma^{n-1} : e^{m-1} \times \sigma^n] [e^{m-1} \times \sigma^n : e^m \times \sigma^n] = \\ & = [e^{m-1} : e^m] \cdot (-1)^m [\sigma^{n-1} : \sigma^n] + (-1)^{m-1} [\sigma^{n-1} : \sigma^n] [e^{m-1} : e^m] = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Подчеркнем, что коэффициенты инцидентности для произведения $K \times L$ можно было бы определить и иначе. Однако это один из тех редких случаев, когда все авторы придерживаются единого мнения.

Упражнения

1. Пусть K и L — конечные клеточные разбиения пространств X и Y соответственно. Какова связь между эйлеровыми характеристиками пространств X , Y и $X \times Y$?

2. Пусть K и L — регулярные клеточные комплексы на пространствах X и Y . Предположим, что на K и L выбраны ориен-

тации и коэффициенты инцидентности. Рассмотрим канонический гомеоморфизм $f: X \times Y \rightarrow Y \times X$, определенный соотношением $f(x, y) = (y, x)$. В рассматриваемом случае f отображает клетку $e^n \times \sigma^m$ гомеоморфно на $\sigma^m \times e^n$ и, следовательно индуцирует изоморфизм

$$f^*: H_c^{m+n}(\sigma^m \times e^n) \rightarrow H_c^{m+n}(e^n \times \sigma^m).$$

Докажите, что

$$f^*(\sigma^m \times e^n) = (-1)^{mn} e^n \times \sigma^m.$$

В этом равенстве через σ^m , e^n , $\sigma^m \times e^n$ и $e^n \times \sigma^m$ обозначены ориентации соответствующих клеток. (Указание. Доказательство проведите индукцией по размерности клеток.)

Естественные преобразования теорий когомологий Теоремы единственности

§ 6.1. Введение

В настоящей главе понятие теории когомологий несколько обобщается в том отношении, что мы больше *не* требуем обращения в нуль когомологий точки в размерностях, отличных от нуля. Вводится и используется понятие преобразования одной теории когомологий в другую. Доказываются также некоторые теоремы единственности.

§ 6.2. Точное определение теории когомологий. Перечень аксиом. Примеры экстраординарных теорий когомологий

Как обычно, все рассматриваемые пространства *локально компактны и хаусдорфовы*, а все отображения пространств *собственные*. Мы не будем повторять эти предположения. Пусть R — кольцо с единицей (например, кольцо целых чисел).

Теория когомологий (со значениями в категории R -модулей) состоит из четырех «функций»:

(а) функция, относящая каждому пространству X последовательность

$$h^*(X) = \{h^q(X) \mid q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

R -модулей;

(б) функция, сопоставляющая каждому отображению $f: X \rightarrow Y$ последовательность

$$f^*: h^q(Y) \rightarrow h^q(X), \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

R -гомоморфизмов;

(с) функция, относящая каждой паре пространств (X, U) , где U — открытое подпространство в X , последовательность гомоморфизмов

$$\tau_{U, X}: h^q(U) \rightarrow h^q(X), \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

(д) функция, сопоставляющая каждой паре пространств (X, A) с замкнутым в X подпространством A последовательность

гомоморфизмов

$$\delta_{X, A}: h^q(A) \rightarrow h^{q+1}(X \setminus A), \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

(Здесь нигде не предполагается, что $h^q(X) = 0$ при $q < 0$.)

Эти функции должны удовлетворять следующим аксиомам:

1(a) Если $f: X \rightarrow X$ — тождественное отображение, то f^* — тождественный изоморфизм.

1(b) Если $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ — два отображения, то $(gf)^* = f^*g^*$.

(Аксиома 1 утверждает, что первая пара функций h^* , $*$ — контравариантный функтор из категории пространств и отображений в категорию R -модулей и R -гомоморфизмов.)

2(a) $\tau_{X, X}$ — тождественный изоморфизм.

2(b) Если $U \subset V \subset X$, то $\tau_{U, X} = \tau_{V, X} \tau_{U, V}$.

(Аксиома 2 утверждает, что пара функций τ , h определяет ковариантный функтор из категории открытых подмножеств пространства X и их включений в категорию R -модулей.)

3. Если $f: X \rightarrow Y$ — отображение, B — замкнутое в Y подмножество, $V = Y \setminus B$, $A = f^{-1}(B)$ и $U = f^{-1}(V)$, то коммутативны диаграммы

$$(a) \quad \begin{array}{ccc} h^p(V) & \xrightarrow{\tau_{V, Y}} & h^p(Y) \\ \downarrow (f|_U)^* & & \downarrow f^* \\ h^p(U) & \xrightarrow{\tau_{U, X}} & h^p(X) \end{array}$$

$$(b) \quad \begin{array}{ccc} h^p(B) & \xrightarrow{\delta_{Y, B}} & h^{p+1}(V) \\ \downarrow (f|_A)^* & & \downarrow (f|_U)^* \\ h^p(A) & \xrightarrow{\delta_{X, A}} & h^{p+1}(U) \end{array}$$

4. Пусть $V \subset U$ — открытые подмножества в X , $A = X \setminus U$ и $B = X \setminus V$. Тогда коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} h^p(B) & \xrightarrow{\delta_{X, B}} & h^{p+1}(V) \\ \downarrow k^* & & \downarrow \tau_{V, U} \\ h^p(A) & \xrightarrow{\delta_{X, A}} & h^{p+1}(U) \end{array}$$

Здесь $k: A \rightarrow B$ — включение.

5. Пусть $U \subset V$ — открытые подмножества в X , $A = X \setminus U$ и $B = X \setminus V$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 h^p(A \cap V) & & \\
 \downarrow \tau_{A \cap V, A} & \searrow \delta_{V, A \cap V} & \\
 h^p(A) & \xrightarrow{\delta_{X, A}} & h^{p+1}(U)
 \end{array}$$

коммутативна.

6. (Точность.) Пусть A — замкнутое подмножество пространства X и $U = X \setminus A$. Тогда точна последовательность

$$\dots \xrightarrow{\delta_{X, A}} h^q(U) \xrightarrow{\tau_{U, X}} h^q(X) \xrightarrow{i^*} h^q(A) \xrightarrow{\delta_{X, A}} h^{q+1}(U) \rightarrow \dots$$

7. Пусть $U(X)$ означает семейство всех открытых подмножеств пространства X , имеющих компактное замыкание. Множество $U(X)$ является направленным по включению, и при каждом целом q множество модулей $\{h^q(U) \mid U \in U(X)\}$ вместе с гомоморфизмами $\tau_{U, V}$ представляет собой прямую систему модулей. Будем предполагать, что $h^q(X)$ — прямой предел этой системы (см. § A.2 приложения) с предельными гомоморфизмами $\tau_{U, X}$.

При этом мы нигде не предполагаем, что $h^q(P) = 0$ при $q \neq 0$ для одноточечного пространства P^1). Теория когомологий, удовлетворяющая также и этому предположению, называется обыкновенной, а модуль $h^0(P)$ называется модулем коэффициентов. Остальные теории когомологий называются экстраординарными или обобщенными. В последние годы такие теории представляют собой интересный объект для исследования.

6.1. Теорема. В любой теории когомологий, экстраординарной или обыкновенной, собственно гомотопные отображения индуцируют одинаковые гомоморфизмы модулей когомологий.

Сохраняет силу доказательство, данное в § 1.5.

Приведем несколько простых примеров экстраординарных теорий когомологий.

Пример 1. Пусть T — некоторое пространство. Для любого пространства X положим

$$h^q(X) = H_c^q(X \times T; R).$$

¹⁾ Это утверждение обычно называется аксиомой размерности. — Прим. перев.

Здесь модуль, стоящий справа, — обычные когомологии пространства $X \times T$. Для отображения $f: X \rightarrow Y$ положим

$$f^* = (f \times 1)^*: h^q(Y) \rightarrow h^q(X),$$

где $f \times 1$ — естественное отображение $X \times T \rightarrow Y \times T$. Если U — открытое подмножество пространства X , определим

$$\tau_{U, X} = \tau_{U \times T, X \times T}: h^q(U) \rightarrow h^q(X).$$

Для замкнутого множества $A = X \setminus U$ положим

$$\delta_{X, A} = \delta_{X \times T, A \times T}: h^q(A) \rightarrow h^{q+1}(U).$$

Проверка аксиом не представляет труда.

Пример 2. Можно определить новую теорию когомологий, изменяя на некоторое фиксированное число размерности групп в заданной теории. Имея две теории когомологий, можно определить новую, взяв прямую сумму исходных теорий. С помощью этих двух операций можно строить теории когомологий все возрастающей сложности.

Пример 3. По любой теории когомологий h^* и любому целому числу $k > 1$ можно следующим образом построить новую теорию, которая является «периодической с периодом k ». Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^0(X) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h^{nk}(X) \quad (\text{прямая сумма}) \\ \mathcal{H}^1(X) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h^{nk+1}(X) \\ &\vdots \\ \mathcal{H}^{k-1}(X) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h^{nk+k-1}(X) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Легко видеть, что $\mathcal{H}^q(X) = \mathcal{H}^{q+k}(X)$, т. е. что полученная теория когомологий периодична. Гомоморфизмы f^* , τ и δ в новой теории индуцируются соответствующими гомоморфизмами теории h^* и определяются очевидным образом.

Определим теперь понятие *естественного преобразования* одной теории когомологий в другую. Пусть h_1 и h_2 — две теории когомологий. *Естественным преобразованием* теории h_1 в теорию h_2 называется совокупность гомоморфизмов (по одному для каждого пространства X)

$$\Gamma(X): h_1^q(X) \rightarrow h_2^q(X),$$

удовлетворяющих следующим трем требованиям;

(1) Для всякого собственного отображения $f: X \rightarrow Y$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} h_1^q(X) & \xrightarrow{\Gamma(X)} & h_2^q(X) \\ \uparrow f^* & & \uparrow f^* \\ h_1^q(Y) & \xrightarrow{\Gamma(Y)} & h_2^q(Y) \end{array}$$

(2) Для любого открытого подмножества U в X коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} h_1^q(U) & \xrightarrow{\Gamma(U)} & h_2^q(U) \\ \downarrow \tau_{U, X} & & \downarrow \tau_{U, X} \\ h_1^q(X) & \xrightarrow{\Gamma(X)} & h_2^q(X) \end{array}$$

(3) Для всякого замкнутого в X подмножества A коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} h_1^q(A) & \xrightarrow{\Gamma(A)} & h_2^q(A) \\ \downarrow \delta_{X, A} & & \downarrow \delta_{X, A} \\ h_1^{q+1}(X \setminus A) & \xrightarrow{\Gamma(X \setminus A)} & h_2^{q+1}(X \setminus A) \end{array}$$

Пример. Пусть T_1 и T_2 — фиксированные пространства и $\varphi: T_2 \rightarrow T_1$ — некоторое отображение. Пусть $h_1^q(X) = H_c^q(X \times T_1; R)$ и $h_2^q(X) = H_c^q(X \times T_2; R)$ — теории когомологий из примера 1 выше. Положим

$$\Gamma(X) = (1 \times \varphi)^*: h_1^q(X) \rightarrow h_2^q(X),$$

где $1 \times \varphi: X \times T_2 \rightarrow X \times T_1$ — естественное отображение. Легко проверить, что Γ — естественное преобразование когомологий.

6.2. Определение. Естественное преобразование $\Gamma: h_1 \rightarrow h_2$ когомологических теорий называется *естественной эквивалентностью* или *естественным изоморфизмом* этих теорий, если для любого X отображение $\Gamma(X)$ — изоморфизм.

Другими словами, естественно эквивалентные теории неразличимы по своим качествам.

Основная цель этой главы — доказательство и применения следующей теоремы.

6.3. Теорема. Пусть $\Gamma: h_1 \rightarrow h_2$ — естественное преобразование теорий когомологий. Если для одноточечного пространства P гомоморфизмы

$$\Gamma(P): h_1^q(P) \rightarrow h_2^q(P)$$

являются изоморфизмами для всех q , то Γ — естественная эквивалентность теорий.

§ 6.3. Приведенные когомологии

Пусть h — обыкновенная или экстраординарная теория когомологий. Покажем, что результаты § 2.2 с небольшими изменениями остаются в силе.

Пусть P — пространство, состоящее из единственной точки. Для любого компактного пространства X единственное отображение $\varphi_X: X \rightarrow P$ существенно. Приведенным модулем когомологий $\tilde{h}^q(X)$ пространства X называется коядро гомоморфизма

$$\varphi_X^*: h^q(P) \rightarrow h^q(X).$$

Заметим, что для любого отображения $f: P \rightarrow X$ имеем $\varphi_X f = \text{id}$, $f^* \varphi_X^* = \text{id}$, поэтому модуль $h^q(X)$ изоморфен прямой сумме $\tilde{h}^q(X)$ и $h^q(P)$. Однако расщепление в прямую сумму не является естественным.

Точно так же, как в гл. 2, можно показать, что если $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение компактных пространств, то $f^*: h^q(Y) \rightarrow h^q(X)$ индуцирует гомоморфизм $\tilde{h}^q(Y) \rightarrow \tilde{h}^q(X)$, который мы также будем обозначать через f^* . Аналогично, для компактного пространства X и его замкнутого подмножества A точна приведенная когомологическая последовательность пары (X, A)

$$\dots \xrightarrow{\partial} h^q(U) \xrightarrow{\tau} \tilde{h}^q(X) \xrightarrow{i^*} \tilde{h}^q(A) \xrightarrow{\partial} h^{q+1}(U) \rightarrow \dots$$

Заметим, что в этой последовательности фигурируют неприведенные модули когомологий пространства U , даже если оно компактно.

В заключение так же, как и раньше, можно доказать, что для стягиваемого компактного пространства X все $\tilde{h}^q(X)$ равны нулю. Таким образом, справедливы все наблюдения из § 2.2. Основное различие заключается в том, что соотношение $h^q(X) \neq \tilde{h}^q(X)$ возможно и при некоторых $q \neq 0$.

Предостережение. $\tilde{h}$ не является теорией когомологий в смысле нашего строгого формального определения (для некомпактного пространства X модули $\tilde{h}^q(X)$ даже не определены).

§ 6.4. Дальнейшие свойства экстраординарных когомологий

Доказательства теорем о прямых суммах из § 2.3 проходят без изменения и для экстраординарных теорий когомологий.

Далее рассмотрим когомологии клеток, сфер и евклидовых пространств, см. § 2.4. Учитывая, что для всех q

$$\tilde{h}^q(S^0) \cong h^q(P),$$

получаем

$$h^{q+n}(R^n) \cong \tilde{h}^{q+n}(S^n) \cong h^q(P).$$

Построение и доказательство точности последовательностей Майера — Вьеториса (см. § 3.5) для экстраординарных теорий кохомологий проходят без изменений.

С другой стороны, материал гл. 3 о клеточных разбиениях и многообразиях для экстраординарных кохомологий не имеет места.

Следующая теорема будет нужна для доказательства теоремы 6.3. Однако она имеет и самостоятельный интерес, поэтому приведем ее здесь.

Пусть X — локально компактное пространство и A — замкнутое подмножество X . Для замкнутой окрестности N множества A имеем гомоморфизм $i_N: h^q(N) \rightarrow h^q(A)$. Если $N_1 \subset N_2$ — замкнутые окрестности множества A , то имеем гомоморфизм $i_{N_2, N_1}: h^q(N_2) \rightarrow h^q(N_1)$. Семейство модулей $\{h^q(N)\}$ и гомоморфизмов $\{i_{N_2, N_1}\}$ является направленной системой модулей.

6.4. Теорема. Гомоморфизмы $\{i_N\}$ определяют представление модуля $h^q(A)$ в качестве прямого предела системы $\{h^q(N), i_{N_2, N_1}\}$.

Доказательство. Для любой замкнутой окрестности N диаграмма, состоящая из двух точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & h^q(X \setminus A) & \rightarrow & h^q(X) & \rightarrow & h^q(A) \rightarrow \dots \\ & & \uparrow \tau_N & & \parallel & & \uparrow i_N \\ \dots & \rightarrow & h^q(X \setminus N) & \rightarrow & h^q(X) & \rightarrow & h^q(N) \rightarrow \dots \end{array}$$

коммутативна. Аналогично, если $N_1 \subset N_2$ — замкнутые окрестности множества A , то диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & h^q(X \setminus N_1) & \rightarrow & h^q(X) & \rightarrow & h^q(N_1) \rightarrow \dots \\ & & \uparrow \tau_{N_2, N_1} & & \parallel & & \uparrow i_{N_2, N_1} \\ \dots & \rightarrow & h^q(X \setminus N_2) & \rightarrow & h^q(X) & \rightarrow & h^q(N_2) \rightarrow \dots \end{array}$$

коммутативна. Мы утверждаем, что $h^q(X \setminus A)$ — прямой предел системы групп $\{h^q(X \setminus N), \tau_{N_2, N_1}\}$ с предельными гомоморфизмами $\{\tau_N\}$. Для доказательства необходимо установить справедливость следующих двух утверждений:

(а) Для любого $u \in h^q(X \setminus A)$ существует замкнутая окрестность N множества A и такой элемент $u' \in h^q(X \setminus N)$, что $\tau_N(u') = u$.

(b) Пусть N — замкнутая окрестность множества A и $\tau_N(u) = 0$ для элемента $u \in h^q(X \setminus N)$. Тогда существует такая замкнутая окрестность N_0 множества A , что $N_0 \subset N$ и $\tau_{N, N_0}(u) = 0$ (ср. с предложением А.4 из приложения).

Утверждение (a) легко следует из аксиомы 7 § 6.2. Действительно, выберем такое открытое множество $U \subset X \setminus A$ с компактным замыканием, содержащимся в $X \setminus A$, что существует элемент $u' \in h^q(U)$, для которого $\tau(u') = u$. Тогда $N = X \setminus U$.

Доказательство утверждения (b) сложнее. Прежде всего выберем открытое множество U , такое, что $\bar{U}$ — компактное подмножество пространства $X \setminus N$ и для некоторого элемента $u' \in h^q(U)$ имеет место $\tau(u') = u$. Непосредственно из предположений утверждения (b) следует, что $\tau_1(u') = 0$, где через τ_1 обозначен очевидный гомоморфизм $h^q(U) \rightarrow h^q(X \setminus A)$. Следовательно, в силу аксиомы 7 существует такое открытое множество $V \subset X \setminus A$, что $\bar{V}$ — компактное подмножество пространства $X \setminus A$, $V \supset U$ и $\tau_{U, V}(u') = 0$. Пусть $N' = X \setminus V$. Тогда N' — замкнутая окрестность множества A в пространстве X . Наконец, положим $N_0 = N \cap N'$. Легко проверить, что окрестность N_0 обладает требуемыми свойствами.

Теорема 6.4 следует теперь из леммы о пяти гомоморфизмах (лемма 1.9) и того факта, что прямой предел точных последовательностей — точная последовательность (см. теорему А.7 приложения).

Замечание. Используя терминологию Спеньера (см. [51, стр. 372]), эту теорему можно сформулировать так: каждое замкнутое подпространство локально компактного пространства является жестко вложенным (по отношению к теории когомологий, удовлетворяющей аксиомам из § 6.2).

§ 6.5. Доказательство теоремы 6.3

Предположим, что h_1 и h_2 — теории когомологий и $\Gamma: h_1 \rightarrow h_2$ — такое естественное преобразование, что $\Gamma(P)$ — изоморфизм для одноточечного пространства P .

Последовательными шагами мы докажем сейчас, что $\Gamma(X)$ — изоморфизм для пространств X из все более и более сложных классов. Наметим кратко эти шаги.

(1) Если X — дизъюнктивное объединение открытых подмножеств X_i и $\Gamma(X_i)$ — изоморфизм для любого индекса i , то $\Gamma(X)$ — изоморфизм.

Это следует из теоремы о прямой сумме.

(2) Если X — дискретное пространство, то $\Gamma(X)$ — изоморфизм. В частности, $\Gamma(S^0)$ — изоморфизм (S^0 — сфера размерности 0).

Это следует из (1) и из того факта, что $\Gamma(P)$ — изоморфизм.

(3) Для любого компактного пространства X преобразование $\Gamma(X)$ индуцирует гомоморфизм

$$\tilde{\Gamma}(X): \tilde{h}_1^q(X) \rightarrow \tilde{h}_2^q(X)$$

и $\Gamma(X)$ — тогда и только тогда изоморфизм, когда $\tilde{\Gamma}(X)$ — изоморфизм.

Доказательство очевидно.

(4) Если X — сфера или евклидово пространство, то $\Gamma(X)$ — изоморфизм.

Доказательство. Прежде всего из (3) и (2) следует, что $\tilde{\Gamma}(S^0)$ — изоморфизм. Доказательство проводится индукцией на основе следующих коммутативных диаграмм:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{h}_1^{q-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow[\cong]{\partial_1} & h_1^q(U^n) \\ \downarrow \tilde{\Gamma}(S^{n-1}) & & \downarrow \Gamma(U^n) \\ \tilde{h}_2^{q-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow[\cong]{\partial_2} & h_2^q(U^n) \\ h_1^q(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow[\cong]{\tau_1} & \tilde{h}_1^q(S^n) \\ \downarrow \Gamma(\mathbb{R}^n) & & \downarrow \tilde{\Gamma}(S^n) \\ h_2^q(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow[\cong]{\tau_2} & \tilde{h}_2^q(S^n) \end{array}$$

Подробности см. в § 2.4.

(5) Пусть K — клеточное разбиение пространства X . Тогда $\Gamma(K^n \setminus K^{n-1})$ — изоморфизм при любом n .

Это следует из (1) и (4), поскольку $K^n \setminus K^{n-1}$ — дизъюнктное объединение n -клеток разбиения K , каждая из которых гомеоморфна $\mathbb{R}^n$.

(6) Пусть X — пространство конечномерного клеточного разбиения K . Тогда $\Gamma(X)$ — изоморфизм.

Доказательство. Проведем индукцию по размерности клеточного разбиения. Если размерность равна 0, то X — дискретное пространство и можно применить (2). Шаг индукции от $n-1$ к n осуществляется на основе следующей коммутативной диаграммы, состоящей из двух точных последовательностей:

$$\begin{array}{ccccccc} h_1^{q-1}(K^{n-1}) & \rightarrow & h_1^q(K^n \setminus K^{n-1}) & \rightarrow & h_1^q(K^n) & \rightarrow & h_1^q(K^{n-1}) \xrightarrow{\partial} h_1^{q+1}(K^n \setminus K^{n-1}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \Gamma(K^n) & & \downarrow \\ h_2^{q-1}(K^{n-1}) & \rightarrow & h_2^q(K^n \setminus K^{n-1}) & \rightarrow & h_2^q(K^n) & \rightarrow & h_2^q(K^{n-1}) \rightarrow h_2^{q+1}(K^n \setminus K^{n-1}) \end{array}$$

В силу леммы о пяти гомоморфизмах (лемма 1.9) заключаем, что $\Gamma(K^n)$ — изоморфизм.

(7) Если X — компактное пространство, то $\Gamma(X)$ — изоморфизм.

Доказательство. Любое компактное пространство можно гомеоморфно вложить в тихоновский куб, т. е. в произведение единичных отрезков (доказательство этого утверждения несложно, см. Стинрод и Эйленберг [14, теорема X.8.6] или Келли [32, гл. 4, теорема 7, стр. 161]). Далее воспользуемся следующим утверждением.

6.5. Лемма. Пусть A — компактное подмножество конечномерного куба I^n и V — открытая окрестность множества A в I^n . Тогда существует такая замкнутая окрестность N множества A , что $N \subset V$ и N допускает конечное клеточное разбиение.

У Стинрода и Эйленберга доказан несколько более сильный результат [14, лемма X.10.3]. Можно воспользоваться также конструкцией из доказательства леммы 3.6.

6.6. Лемма. Пусть A — компактное подмножество тихоновского куба I^S и V — открытая окрестность множества A в I^S . Тогда существует такая замкнутая окрестность N множества A , что $N \subset V$ и $N = Y \times I^T$, где Y — пространство конечного клеточного разбиения, а I^T — тихоновский куб, являющийся гранью куба I^S .

Доказательство этой леммы получается расширением конструкции из леммы 6.5. При этом используется определение тихоновской топологии и компактность множества A .

Поскольку куб стягиваем, пространства $N = Y \times I^T$ и Y имеют одинаковый гомотопический тип. Следовательно, в силу (6) преобразование $\Gamma(N)$ является изоморфизмом.

Утверждение (7) теперь следует из теоремы 6.4.

(8) Для любого локально компактного пространства X преобразование $\Gamma(X)$ является изоморфизмом.

Доказательство. Пусть $Y = X \cup P$ — одноточечная компактификация Александера пространства X . Рассмотрим коммутативную диаграмму, состоящую из двух точных последовательностей,

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & h_1^q(X) & \rightarrow & h_1^q(Y) & \rightarrow & h_1^q(P) \rightarrow \dots \\ & & \downarrow \Gamma(X) & & \downarrow \Gamma(Y) & & \downarrow \Gamma(P) \\ \dots & \rightarrow & h_2^q(X) & \rightarrow & h_2^q(Y) & \rightarrow & h_2^q(P) \rightarrow \dots \end{array}$$

Требуемый результат следует из утверждения (7) и из леммы о пяти гомоморфизмах (лемма 1.9).

Доказательство теоремы 6.3 закончено.

Упражнение

Докажите, что если X — локально компактное топологическое пространство, то $H_c^1(X; \mathbb{Z})$ — абелева группа без кручения. (Указание. В случае когда X — пространство регулярного клеточного комплекса, воспользуйтесь упр. 3 из § 5.3. Для компактного пространства X можно воспользоваться техникой, применяемой на этапе (7) доказательства теоремы 6.3. Замечание: можно показать, что для любой абелевой группы A без кручения существует компактное связное хаусдорфово пространство X , для которого $H^1(X; \mathbb{Z}) \cong A$.)

§ 6.6. Примеры и применения теоремы 6.3

Следующие примеры показывают, что нами доказана довольно сильная теорема¹⁾.

Пример 1. В обозначениях гл. 1 пусть $\Phi^p(X; G)$ — множество любых (т. е. не обязательно конечнозначных) p -функций $\varphi(x_0, x_1, \dots, x_p)$ со значениями в группе G . Ясно, что $\Phi^p(X; G)$ — подгруппа группы $\Phi'^p(X; G)$. Используя во всех построениях из гл. 1 группу $\Phi^p(X; G)$ вместо $\Phi'^p(X; G)$, получим обыкновенную теорию кохомологий, определенную на основе «бесконечнозначных» коцепей с компактными носителями. Обозначим эти группы кохомологий через $H_c'^p(X; G)$. Отображение включения $\Phi^p(X; G) \rightarrow \Phi'^p(X; G)$ индуцирует гомоморфизм, являющийся, как легко проверить, естественным преобразованием $\Gamma: H_c \rightarrow H_c'$. Если X — пространство, состоящее из одной точки (или даже из конечного числа точек), то, очевидно, $\Phi^p(X; G) = \Phi'^p(X; G)$. Таким образом, выполнены предположения теоремы 6.3 и, следовательно, $\Gamma: H_c \rightarrow H_c'$ — естественная эквивалентность теорий.

Теория кохомологий H_c' была определена раньше, чем H_c . Естественная эквивалентность $\Gamma: H_c \rightarrow H_c'$ этих теорий установлена Киси [30] более прямыми, но менее общими методами. Близкая к [30] техника будет использована в § 8.3 для доказательства аналогичной теоремы.

Пример 2. Пусть $\Phi''^p(X; G)$ — подгруппа в $\Phi^p(X; G)$, состоящая из всех (конечнозначных) p -функций φ , которые являются

¹⁾ Рассматриваемые в настоящем параграфе результаты можно получить и без теоремы 6.3. Типичный способ доказательства состоит в следующем. Те или иные конкретные коцепи оказываются сечениями определяемых ими пучков, и эти пучки, оказываясь ациклическими (обычно мягкими), вместе с кограничным гомоморфизмом составляют точную последовательность — резольвенту постоянного пучка коэффициентов. Как известно (см. [5*], [5]), определяемые такими коцепями кохомологии всегда естественно изоморфны между собой. — Прим. ред.

кососимметричными, т. е. для любой перестановки $(i_0, i_1, \dots, i_p)$ множества $(0, 1, \dots, p)$

$$\varphi(x_0, x_1, \dots, x_p) = \varepsilon \cdot \varphi(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_p}),$$

где $\varepsilon = \pm 1$ — знак перестановки ($\varepsilon = -1$ для нечетной перестановки и $\varepsilon = 1$ для четной). Легко проверяется, что кососимметричность функции φ влечет кососимметричность $\delta\varphi$. В рассуждениях гл. 1 можно заменить все p -функции на кососимметричные p -функции. Единственное рассуждение, требующее изменения, — это определение гомоморфизма $D: \Phi^p(X) \rightarrow \Phi^{p-1}(X)$ в § 1.7. К сожалению, для кососимметричной функции ψ функция $D\psi$, вообще говоря, не является кососимметричной. Эту трудность можно преодолеть следующим образом. Введем произвольный линейный порядок на множестве точек пространства X . Положим $D\psi(x_0, \dots, x_{p-1}) = 0$, если среди $x_0, \dots, x_{p-1}$ встречаются совпадающие точки. Пусть

$$D(\psi)(x_0, \dots, x_{p-1}) = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \psi(x_0, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{p-1})$$

в случае, когда точки $x_0, \dots, x_{p-1}$ различны и $x_0 < x_1 < \dots < x_{p-1}$ в заданном линейном порядке. Определим $D\psi(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{p-1}})$ как $\varepsilon D\psi(x_0, \dots, x_{p-1})$, где $(i_0, i_1, \dots, i_{p-1})$ — любая перестановка чисел $(0, 1, \dots, p-1)$ и ε — знак этой перестановки. Легко проверить, что по-прежнему имеет место равенство

$$\psi - f^\#(\psi) = \delta D(\psi) + D\delta(\psi).$$

Поэтому рассуждения из § 1.7 остаются в силе.

Таким образом, можно определить обыкновенную теорию когомологий $H_c^{**}(X; G)$. Точно так же, как в предыдущем примере, теорема 6.3 применяется для доказательства естественной эквивалентности этой теории с теорией из гл. 1. Заметим, что для одноточечного пространства P

$$\Phi^{n0}(P) = \Phi^0(P), \quad \Phi^{nq}(P) = 0 \quad \text{при } q > 0.$$

Комбинируя рассмотрения примеров 1 и 2, можно определить теорию когомологий исходя из бесконечнозначных кососимметричных коцепей. Оставляем читателю проверить, что и эта теория естественно изоморфна теории из гл. 1.

Пример 3. Этот пример важен для дальнейшего. Для его построения необходимо ввести понятие *тензорного произведения* коцепных комплексов. Пусть $K = \{K^q, \delta_q\}$ и $L = \{L^q, d_q\}$ — коцепные комплексы абелевых групп. Определим новый коцепной комплекс $M = \{M^q, \Delta_q\}$. По определению группа M^n есть прямая

сумма групп $K^p \otimes L^q$ по всем таким парам (p, q) , что $p + q = n$ (обычно K и L — положительные коцепные комплексы и прямая сумма является конечной; впрочем, это несущественно). Кограничный оператор $\Delta_n: M^n \rightarrow M^{n+1}$ определяется формулой

$$\Delta_n(x \otimes y) = (\delta_p x) \otimes y + (-1)^p x \otimes (d_q y)$$

для $x \in K^p$ и $y \in L^q$, $p + q = n$. Легко проверить, что $\Delta_{n+1}\Delta_n = 0$ и, следовательно, M — коцепной комплекс. Он называется *тензорным произведением коцепных комплексов* K и L и обозначается через $K \otimes L$.

Это определение исходит из материала § 5.7. Пусть K и L — регулярные клеточные комплексы на пространствах X и Y соответственно и $K \times L$ — произведение этих комплексов. Оно является регулярным клеточным комплексом на пространстве $X \times Y$. Из формул для коэффициентов инцидентности (см. § 5.7) легко вытекает, что комплекс целочисленных коцепей $C_i^*(K \times L)$ естественно изоморфен тензорному произведению $C_i^*(K) \otimes C_i^*(L)$. Таким образом, тензорное произведение двух коцепных комплексов является алгебраическим аналогом комплекса коцепей произведения двух пространств. С этой аналогией мы снова встретимся в гл. 7.

Для двух пространств X и Y определим коцепное отображение

$$\theta = \theta(X, Y): \Phi^*(X) \otimes \Phi^*(Y) \rightarrow \Phi^*(X \times Y)$$

по правилу

$$\begin{aligned} |\theta(f \otimes g)|((x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{p+q}, y_{p+q})) = \\ = f(x_0, \dots, x_p) \cdot g(y_p, \dots, y_{p+q}), \end{aligned}$$

где $f \in \Phi^p(X)$ и $g \in \Phi^q(Y)$ (здесь и до конца настоящего параграфа предполагается, что группа коэффициентов — аддитивная группа целых чисел). Эта формула написана на основе некоторых геометрических соображений (в терминах некоторого подразделения произведения двух упорядоченных симплициальных комплексов), рассмотрение которых, однако, увело бы нас далеко в сторону.

С помощью прямой проверки убеждаемся, что θ действительно является коцепным отображением. Кроме того,

$$(1) \quad |\theta(f \otimes g)| \leq |f| \times |g|.$$

Это соотношение имеет важные следствия. Прежде всего если носители функций f и g компактны, то функция $\theta(f \otimes g)$ также имеет компактный носитель, т. е. имеем

$$\theta: \Phi_c^*(X) \otimes \Phi_c^*(Y) \rightarrow \Phi_c^*(X \times Y).$$

Далее, если носитель одной из функций f или g является пустым множеством, то носитель функции $\theta(f \otimes g)$ пуст, т. е.

возникают отображения

$$\theta: \Phi_0^*(X) \otimes \Phi^*(Y) \rightarrow \Phi_0^*(X \times Y),$$

$$\theta: \Phi^*(X) \otimes \Phi_0^*(Y) \rightarrow \Phi_0^*(X \times Y).$$

Таким образом, θ индуцирует коцепное отображение фактор-комплексов, которое мы будем обозначать тем же символом:

$$\theta(X, Y): C_c^*(X) \otimes C_c^*(Y) \rightarrow C_c^*(X \times Y).$$

Следовательно, θ индуцирует гомоморфизм

$$\theta^*(X, Y): H^n(C_c^*(X) \otimes C_c^*(Y)) \rightarrow H_c^n(X \times Y).$$

Изучим свойства естественности отображения θ . Для этого необходимо ввести понятие тензорного произведения коцепных отображений. Если K, K', L и L' — коцепные комплексы и $f: K \rightarrow K'$ и $g: L \rightarrow L'$ — коцепные отображения, то гомоморфизмы $f_m \otimes g_n: K^m \otimes L^n \rightarrow K'^m \otimes L'^n$ очевидным образом определяют отображение

$$f \otimes g: K \otimes L \rightarrow K' \otimes L'.$$

Важно отметить, что отображение $f \otimes g$ также является коцепным, т. е. коммутирует с кограничными операторами. Приведем несколько важных примеров.

(а) Пусть $f: X' \rightarrow X$ и $g: Y' \rightarrow Y$ — собственные отображения локально компактных пространств. Эти отображения индуцируют коцепные отображения $f^\#: C_c^*(X) \rightarrow C_c^*(X')$ и $g^\#: C_c^*(Y) \rightarrow C_c^*(Y')$. Тензорное произведение этих двух отображений

$$f^\# \otimes g^\#: C_c^*(X) \otimes C_c^*(Y) \rightarrow C_c^*(X') \otimes C_c^*(Y')$$

также является коцепным отображением.

(б) Пусть U и V — открытые подмножества локально компактных пространств X и Y соответственно. Определены коцепные отображения

$$\sigma_1: C_c^*(U) \rightarrow C_c^*(X) \quad \text{и} \quad \sigma_2: C_c^*(V) \rightarrow C_c^*(Y)$$

(см. § 1.3). Тогда

$$\sigma_1 \otimes \sigma_2: C_c^*(U) \otimes C_c^*(V) \rightarrow C_c^*(X) \otimes C_c^*(Y)$$

— также коцепное отображение.

Рассмотрим теперь коцепные гомотопии коцепных отображений. Если $f_0, f_1: K \rightarrow K'$ и $g: L \rightarrow L'$ — коцепные отображения и отображение f_0 коцепно гомотопно f_1 , то легко проверить, что $f_0 \otimes g$ коцепно гомотопно отображению $f_1 \otimes g$. В самом деле, если $D: K^q \rightarrow K'^{q-1}$ — коцепная гомотопия для f_0 и f_1 , то $D \otimes g: K \otimes L \rightarrow K' \otimes L'$ — коцепная гомотопия между $f_0 \otimes g$ и $f_1 \otimes g$. Аналогично, если $g_0, g_1: L \rightarrow L'$ — коцепно гомотопные коцепные

отображения, то для любого коцепного отображения $f: K \rightarrow K'$ отображение $f \otimes g_0$ коцепно гомотопно $f \otimes g_1$. Доказательство этого факта не столь очевидно. Пусть $D: L \rightarrow L'$ — коцепная гомотопия между g_0 и g_1 , т. е. $g_0 - g_1 = \delta D + D\delta'$. Тогда коцепная гомотопия $E: K \otimes L \rightarrow K' \otimes L'$ между $f \otimes g_0$ и $f \otimes g_1$ задается формулой

$$E(u \otimes v) = (-1)^p (fu) \otimes (Dv),$$

в которой p — степень элемента u .

В качестве следствия получаем, что для коцепной гомотопической эквивалентности $f: K \rightarrow K'$ отображение $f \otimes 1: K \otimes L \rightarrow K' \otimes L$ — коцепная гомотопическая эквивалентность. Здесь $1: L \rightarrow L$ — тождественное отображение. Аналогично, если $g: L \rightarrow L'$ — коцепная гомотопическая эквивалентность, то коцепной гомотопической эквивалентностью является отображение $1 \otimes g: K \otimes L \rightarrow K \otimes L'$, где $1: K \rightarrow K$ — тождественное отображение.

Сформулируем теперь в использованных выше обозначениях основную теорему настоящего параграфа.

6.7. Теорема. Для любой пары локально компактных пространств X и Y гомоморфизм

$$\theta^*(X, Y): H^n(C_c^*(X) \otimes C_c^*(Y)) \rightarrow H_c^n(X \times Y)$$

является изоморфизмом. Кроме того, коммутативны следующие диаграммы:

$$\begin{array}{ccc}
 H^n(C_c^*(X) \otimes C_c^*(Y)) & \xrightarrow{\theta^*(X, Y)} & H_c^n(X \times Y) \\
 (a) \quad \downarrow (f^\# \otimes g^\#)^* & & \downarrow (f \times g)^* \\
 H^n(C_c^*(X') \otimes C_c^*(Y')) & \xrightarrow{\theta^*(X', Y')} & H_c^n(X' \times Y') \\
 H^n(C_c^*(U) \otimes C_c^*(V)) & \xrightarrow{\theta^*(U, V)} & H_c^n(U \times V) \\
 (b) \quad \downarrow (\sigma_1 \otimes \sigma_2)^* & & \downarrow \tau \\
 H^n(C_c^*(X) \otimes C_c^*(Y)) & \xrightarrow{\theta^*(X, Y)} & H_c^n(X \times Y) \\
 H^n(C_c^*(U) \otimes C_c^*(Y)) & \xrightarrow{\theta^*(U, Y)} & H_c^n(U \times Y) \\
 (c) \quad \uparrow \delta & & \uparrow \delta \\
 H^{n-1}(C_c^*(X \setminus U) \otimes C_c^*(Y)) & \xrightarrow{\theta^*(X \setminus U, Y)} & H_c^{n-1}((X \setminus U) \times Y) \\
 H^n(C_c^*(X) \otimes C_c^*(V)) & \xrightarrow{\theta^*(X, V)} & H_c^n(X \times V) \\
 (d) \quad \uparrow \delta & & \uparrow \delta \\
 H^{n-1}(C_c^*(X) \otimes C_c^*(Y \setminus V)) & \xrightarrow{\theta^*(X, Y \setminus V)} & H_c^{n-1}(X \times (Y \setminus V))
 \end{array}$$

(Точный смысл диаграмм (а) и (d) будет объяснен в процессе доказательства теоремы.)

Доказательство основано на применении теоремы 6.3. Коммутативность диаграмм (а), (b), (с) и (d), разумеется, доказывается непосредственно. Для доказательства того, что $\theta^*(X, Y)$ — изоморфизм, мы фиксируем Y , разрешая аргументу X меняться, и покажем, что в этом случае возникает естественное преобразование одной экстраординарной теории когомологий в другую. Требуемый результат будет следовать из теоремы 6.3, если показать, что $\theta^*(P, Y)$ — изоморфизм для одноточечного пространства P .

Покажем, что для фиксированного пространства Y сопоставление $X \mapsto H^n(C_c^*(X) \otimes C_c^*(Y))$ приводит к экстраординарной теории когомологий.

Во-первых, собственное отображение $f: X' \rightarrow X$ индуцирует гомоморфизм

$$(f^\# \otimes 1)^*: H^n(C_c^*(X) \otimes C_c^*(Y)) \rightarrow H^n(C_c^*(X') \otimes C_c^*(Y)).$$

Во-вторых, для открытого подмножества U пространства X имеется гомоморфизм

$$(\sigma_U, x \otimes 1)^*: H^n(C_c^*(U) \otimes C_c^*(Y)) \rightarrow H^n(C_c^*(X) \otimes C_c^*(Y)).$$

Эти гомоморфизмы обладают необходимыми свойствами функториальности, так что справедливы аксиомы (1) и (2) из § 6.2. Можно также проверить справедливость аксиомы 3(a).

Рассмотрим в этой экстраординарной теории когомологий точную последовательность пары. Пусть U — открытое подмножество в X и $A = X \setminus U$. Следующая диаграмма, состоящая из двух расщепляющихся точных последовательностей, коммутативна:

$$(2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow C_c^*(U) & \xrightarrow{f} & C_c^*(X) & \longrightarrow & C_c^*(X)/Q^*(X, A) & \rightarrow 0 \\ & \downarrow \scriptstyle \downarrow_2 & \parallel & & \downarrow \scriptstyle \downarrow_3 & \\ 0 \rightarrow C_c^*(X, A) & \longrightarrow & C_c^*(X) & \xrightarrow{f^\#} & C_c^*(A) & \rightarrow 0 \end{array}$$

Тензорно умножая каждый коцепной комплекс на $C_c^*(Y)$, получим диаграмму

$$(3) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow C_c^*(U) \otimes C_c^*(Y) & \xrightarrow{\sigma \otimes 1} & C_c^*(X) \otimes C_c^*(Y) & \longrightarrow & \frac{C_c^*(X)}{Q^*(X, A)} \otimes C_c^*(Y) & \rightarrow 0 \\ & \downarrow \scriptstyle \downarrow_2 & \parallel & & \downarrow \scriptstyle \downarrow_3 & \\ 0 \rightarrow C_c^*(X, A) \otimes C_c^*(Y) & \longrightarrow & C_c^*(X) \otimes C_c^*(Y) & \xrightarrow{f^\# \otimes 1} & C_c^*(A) \otimes C_c^*(Y) & \rightarrow 0 \end{array}$$

Эта диаграмма также коммутативна, и обе ее строки точны. Как было установлено в § 4.7, отображения, обозначенные в диаграмме (2) вертикальными стрелками с номерами 2 и 6, являются коцепными гомотопическими эквивалентностями, поэтому отображения в диаграмме (3), обозначенные вертикальными стрелками с номерами 2' и 6', также являются коцепными гомотопическими эквивалентностями. Это следует из обсуждения, непосредственно предшествовавшего теореме 6.7.

Переходя в диаграмме (3) к когомологиям, получим требуемую точную когомологическую последовательность пары (X, A) .

Аксиомы 3, 4 и 5 проверяются непосредственно. Для проверки аксиомы 7 достаточно воспользоваться тем фактом, что тензорное произведение коммутирует с прямым пределом (ср. упр. 5 из § A.2 приложения).

Проверим коммутативность диаграмм (a), (b), (c) и (d) из утверждения теоремы. Легко видеть, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Phi^*(X) \otimes \Phi^*(Y) & \xrightarrow{\theta(X, Y)} & \Phi^*(X \times Y) \\ \downarrow f^\# \otimes g^\# & & \downarrow (f \times g)^\# \\ \Phi^*(X') \otimes \Phi^*(Y') & \xrightarrow{\theta(X', Y')} & \Phi^*(X' \times Y') \end{array}$$

коммутативна. Отсюда следует коммутативность диаграммы (a). Для доказательства коммутативности диаграммы (b) достаточно установить коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} C_c^*(U) \otimes C_c^*(V) & \xrightarrow{\theta(U, V)} & C_c^*(U \times V) \\ \downarrow \sigma_1 \otimes \sigma_2 & & \downarrow \sigma \\ C_c^*(X) \otimes C_c^*(Y) & \xrightarrow{\theta(X, Y)} & C_c^*(X \times Y) \end{array}$$

Это в свою очередь вытекает из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} C_c^*(U) \otimes C_c^*(V) & \xrightarrow{\theta} & C_c^*(U \times V) \\ \cong \uparrow i^\# \otimes j^\# & & \cong \uparrow h^\# \\ Q^*(X, A) \otimes Q^*(Y, B) & \xrightarrow{\theta} & Q^*(X \times Y, X \times B \cup A \times Y) \\ \downarrow \text{включение} & & \downarrow \text{включение} \\ C_c^*(X) \otimes C_c^*(Y) & \xrightarrow{\theta} & C_c^*(X \times Y) \end{array}$$

Докажем коммутативность диаграммы (с). Рассмотрим следующую диаграмму:

$$(4) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow C_c^*(U \times Y) & \xrightarrow{\sigma'} & C_c^*(X \times Y) & \longrightarrow & \frac{C_c^*(X \times V)}{Q^*(X \times Y, A \times Y)} & \rightarrow 0 \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \rightarrow C_c^*(X \times Y, A \times Y) & \rightarrow & C_c^*(X \times Y) & \xrightarrow{(1 \times 1)^*} & C_c^*(A \times Y) & \rightarrow 0 \end{array}$$

Естественное коцепное отображение θ переводит каждый коцепной комплекс из диаграммы (3) в соответствующий коцепной комплекс диаграммы (4) таким образом, что все возникающие квадраты коммутативны. Переходя к когомологиям, получаем коммутативность диаграммы (с). Аналогично доказывается коммутативность диаграммы (d). Рассмотренные выше соотношения коммутативности позволяют доказать, что при фиксированном Y преобразование $\theta^*(\cdot, Y)$ — естественное преобразование теорий когомологий.

Остается доказать, что для одноточечного пространства P отображение

$$\theta^*(P, Y): H^n(C^*(P) \otimes C_c^*(Y)) \rightarrow H_c^n(P \times Y)$$

— изоморфизм при всех n . Пусть $K = \{K^q\}$ — такой подкомплекс комплекса $C^*(P)$, что

$$K^q = \begin{cases} C^0(P) & \text{при } q=0, \\ 0, & \text{если } q \neq 0. \end{cases}$$

Пусть $j: K \rightarrow C^*(P)$ — включение. Легко проверить, что индуцированный гомоморфизм $j^*: H^n(K) \rightarrow H^n(P)$ — изоморфизм для всех n . В силу теоремы 4.11 j — коцепная гомотопическая эквивалентность, поэтому $j \otimes 1: K \otimes C_c^*(Y) \rightarrow C^*(P) \otimes C_c^*(Y)$ — также коцепная гомотопическая эквивалентность. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму коцепных комплексов и их коцепных отображений:

$$\begin{array}{ccc} C^*(P) \otimes C_c^*(Y) & \xrightarrow{\theta(P, Y)} & C_c^*(P \times Y) \\ \uparrow j \otimes 1 & \nearrow \varphi & \\ K \otimes C_c^*(Y) & & \end{array}$$

Здесь φ — ограничение отображения $\theta(P, Y)$ на подкомплекс $K \otimes C_c^*(Y)$. Легко проверяется, что φ — изоморфизм коцепных комплексов (напомним, что $C^0(P) \cong \mathbb{Z}$). Перейдем к когомологиям. Поскольку $(j \otimes 1)^*$ и φ^* — изоморфизмы, то $\theta^*(P, Y)$ — также изоморфизм.

Доказательство теоремы 6.7 закончено.

В следующей главе мы воспользуемся этой теоремой для получения дальнейших результатов.

§ 6.7. Другие теоремы единственности для обыкновенных теорий когомологий

Вероятно, самой первой теоремой единственности является теорема Стиррода и Эйленберга. В нашей терминологии эту теорему можно сформулировать следующим образом.

6.8. Теорема. Пусть H_1, H_2 — обыкновенные теории когомологий и $h_0: H_1^0(P) \rightarrow H_2^0(P)$ — произвольный гомоморфизм абелевых групп (P — одноточечное пространство). Тогда существует единственное естественное преобразование $\Gamma: H_1 \rightarrow H_2$, для которого $\Gamma(P) = h_0$.

Эту теорему можно доказать, основываясь на конструкциях Стиррода и Эйленберга [14, гл. III и X]. Мы не будем повторять детали. Эта теорема единственности является менее общей, чем теорема 6.3, поскольку она касается лишь обыкновенных теорий когомологий. Однако она сильнее, так как существование естественного преобразования между заданными теориями когомологий в ней не предполагается¹⁾.

6.9. Следствие. Пусть в теореме 6.8 гомоморфизм $h_0: H_1^0(P) \rightarrow H_2^0(P)$ является изоморфизмом. Тогда ассоциированное с ним естественное преобразование $\Gamma: H_1 \rightarrow H_2$ — естественный изоморфизм теорий.

Все теоремы единственности, рассмотренные нами до сих пор, относились к теориям когомологий. Естественно задать вопрос, существует ли теорема единственности для теории гомологий, развитой в гл. 4. Это безусловно так, если ограничиться рассмотрением теории на категории конечных регулярных клеточных комплексов, см. [14, гл. III]. Трудность заключается в распространении теоремы на более широкие классы пространств. Как отмечалось в гл. 4, в теории гомологий нет свойств, двойственных к свойствам (6) и (7) из § 1.3. Однако в неопубликованной рукописи [41] Милнор доказал, что перечисленные в § 4.3 свойства гомологий *полностью* характеризуют теорию гомологий на категории локально компактных хаусдорфовых пространств со второй аксиомой счетности (т. е. пространств со

¹⁾ Изоморфизм $h_1^*(P) \cong h_2^*(P)$ не обеспечивает эквивалентности теорий h_1^* и h_2^* — Прим. перев.

счетной базой)¹⁾. Такие пространства, а также их одноточечные компактификации, метризуемы. Более точно теорема Милнора формулируется следующим образом. Пусть H и $\bar{H}$ — две теории гомологий, определенные на категории локально компактных топологических пространств со второй аксиомой счетности и обладающие свойствами, перечисленными в § 4.3. Тогда любой изоморфизм коэффициентов $H_0(P) \cong \bar{H}_0(P) \cong G$ единственным образом продолжается до естественной эквивалентности этих теорий.

Мы не обсуждали понятие «естественной эквивалентности теорий гомологий», однако читатель без труда и сам сформулирует правильное определение по аналогии с теорией когомологий.

¹⁾ См. добавление к этой главе. — Прим. ред.

Умножение в теории когомологий

§ 7.1. Введение

В настоящей главе мы покажем, что модули когомологий любого пространства несут на себе важную дополнительную структуру, до сих пор нами не рассматривавшуюся. Эта дополнительная структура проявляется в форме умножения. Имеется два вида умножений: внешнее умножение и $\cup$ -умножение, или внутреннее умножение. Обе операции тесно связаны между собой, но вторая, несомненно, является более важной. Внутреннее умножение приводит к целому ряду новых инвариантов топологических пространств и их отображений, неизмеримо расширяя возможности теории когомологий. В определении $\cup$ -умножения используется операция внешнего умножения, поэтому целесообразно начать с изучения этой операции.

§ 7.2. Формула Кюннета

В теореме 6.7 был описан естественный изоморфизм

$$\theta^n(X, Y): H^n(C_c^*(X) \otimes C_c^*(Y)) \rightarrow H_c^n(X \times Y).$$

Группа $H^n(C_c^*(X) \otimes C_c^*(Y))$, очевидно, зависит лишь от комплексов $C_c^*(X)$ и $C_c^*(Y)$. Поэтому естественно ожидать наличия связи между группами $H_c^m(X)$, $H_c^n(Y)$ и $H^p(C_c^*(X) \otimes C_c^*(Y))$. Эта чисто алгебраическая задача решена много лет назад. Решение известно под названием теоремы Кюннета. Доказательство этой теоремы можно найти во многих стандартных учебниках по гомологической алгебре, поэтому мы его не приводим; см., например ¹⁾, [8, гл. VI, § 3], [22, гл. V, § 2] или [36, гл. V, § 10]. Согласно теореме Кюннета, существует расщепляющаяся короткая точная последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \sum_{p+q=n} H_c^p(X) \otimes H_c^q(Y) &\xrightarrow{\alpha} H^n(C_c^*(X) \otimes C_c^*(Y)) \xrightarrow{\beta} \\ &\rightarrow \sum_{p+q=n+1} \text{Тор}(H_c^p(X), H_c^q(Y)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

¹⁾ См. также [11, гл. VI, § 3], [51, гл. V, § 3] или [5*, гл. I, § 5.5]. — *Прим. перев.*

Гомоморфизмы α и β естественны в любом возможном смысле. Определение гомоморфизма α дается в § 7.3. Изоморфизм $\theta^*(X, Y)$ позволяет заменить $H^n(C_c^*(X) \otimes C_c^*(Y))$ в этой точной последовательности группой $H_c^n(X \times Y)$.

Возможно, стоит несколько обобщить эту формулу. Напомним, что изоморфизм $\theta^*(X, Y)$ определяется коцепным отображением

$$\theta(X, Y): C_c^*(X) \otimes C_c^*(Y) \rightarrow C_c^*(X \times Y).$$

Для любой абелевой группы G применение функтора $\otimes G$ приводит к коцепному отображению

$$\theta(X, Y; G): C_c^*(X) \otimes C_c^*(Y) \otimes G \rightarrow C_c^*(X \times Y) \otimes G.$$

Переходя к когомологиям, получим отображение

$$\theta^*(X, Y; G): H^*(C_c^*(X) \otimes C_c^*(Y) \otimes G) \rightarrow H_c^*(X \times Y; G),$$

являющееся изоморфизмом, поскольку $\theta^*(X, Y)$ — изоморфизм (см. § 4.11). Применяя теорему Кюннета к коцепному комплексу $C_c^*(X) \otimes C_c^*(Y; G) = C_c^*(X) \otimes C_c^*(Y) \otimes G$ и учитывая изоморфизм $\theta^*(X, Y; G)$ между группами $H^n(C_c^*(X) \otimes C_c^*(Y) \otimes G)$ и $H_c^n(X \times Y; G)$, получаем следующий результат.

7.1. Теорема. *Для любых двух локально компактных пространств X и Y и любой абелевой группы G существует расщепляющаяся точная последовательность*

$$0 \rightarrow \sum_{p+q=n} H_c^p(X) \otimes H_c^q(Y; G) \xrightarrow{\alpha} H_c^n(X \times Y; G) \xrightarrow{\beta} \\ \rightarrow \sum_{p+q=n+1} \text{Tor}(H_c^p(X), H_c^q(Y; G)) \rightarrow 0.$$

Эта последовательность естественна относительно гомоморфизмов, индуцированных собственными отображениями пространств и включениями открытых подмножеств.

Расщепление, однако, не является естественным.

В случае когда группа коэффициентов G в теореме 7.1 — поле, имеется более простой и полезный вариант теоремы Кюннета. Пусть F — поле (например, $F = \mathbb{Q}$ или $F = \mathbb{Z}_p$, p — простое число). Напомним, что

$$C_c^*(X; F) = C_c^*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} F,$$

$$C_c^*(Y; F) = C_c^*(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} F.$$

Легко видеть, что коцепные комплексы $C_c^*(X; F) \otimes_F C_c^*(Y; F)$ и $C_c^*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} C_c^*(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} F$ естественно изоморфны, поэтому будем ото-

жествлять их всюду, где это потребуется. Для коцепных комплексов, состоящих из векторных пространств над полем F , теорема Кюннета имеет следующий очень простой вид: гомоморфизм

$$\alpha: \sum_{p+q=n} H_c^p(X; F) \otimes_F H_c^q(Y; F) \rightarrow H^n(C_c^*(X; F) \otimes_F C_c^*(Y; F))$$

является изоморфизмом. Используя изоморфизм $\theta^*(X, Y; F)$, можно заменить $H^n(C_c^*(X; F) \otimes_F C_c^*(Y; F))$ на $H_c^n(X \times Y; F)$. Получается следующий результат:

7.2. Теорема. Для любых двух локально компактных пространств X и Y и любого поля F естественный гомоморфизм

$$\alpha: \sum_{p+q=n} H_c^p(X; F) \otimes_F H_c^q(Y; F) \rightarrow H_c^n(X \times Y; F)$$

является изоморфизмом.

Упражнения

1. Докажите, что произведение двух многообразий ориентируемо тогда и только тогда, когда ориентируемы оба многообразия.

2. Докажите, что n -мерная сфера S^n не гомеоморфна произведению двух многообразий положительной размерности.

§ 7.3. Внешнее умножение

Сначала напомним определение гомоморфизма α из теоремы Кюннета. Оно является обобщением определения из § 4.11.

Если K и L — коцепные комплексы модулей над коммутативным кольцом R , то существует естественный гомоморфизм

$$\alpha: H^p(K) \otimes H^q(L) \rightarrow H^{p+q}(K \otimes L),$$

который определяется следующим образом. Пусть $u \in H^p(K)$ и $v \in H^q(L)$. Выберем представляющие u и v коциклы u' и v' . Тогда $u' \otimes v'$ — коцикл комплекса $K \otimes L$, класс когомологий которого по определению есть $\alpha(u \otimes v)$ (все тензорные произведения берутся над кольцом R). Разумеется, необходимо проверить независимость определения от выбора u' и v' и т. п. Гомоморфизм α обладает следующим важным свойством естественности: если $f: K \rightarrow K'$ и $g: L \rightarrow L'$ — коцепные отображения, то диаграмма

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} H^p(K) \otimes H^q(L) & \xrightarrow{\alpha} & H^{p+q}(K \otimes L) \\ \downarrow f^* \otimes g^* & & \downarrow (f \otimes g)^* \\ H^p(K') \otimes H^q(L') & \xrightarrow{\alpha} & H^{p+q}(K' \otimes L') \end{array}$$

коммутативна. Преобразование α хорошо ведет себя и по отношению к связывающему гомоморфизму (т. е. кограничному оператору). Пусть

$$(2) \quad 0 \rightarrow K' \xrightarrow{\varphi} K \xrightarrow{\psi} K'' \rightarrow 0$$

— короткая точная последовательность коцепных комплексов. Предположим, что L — коцепной комплекс, для которого последовательность

$$(3) \quad 0 \rightarrow K' \otimes L \xrightarrow{\varphi \otimes 1} K \otimes L \xrightarrow{\psi \otimes 1} K'' \otimes L \rightarrow 0$$

точна. Это предположение выполняется, например, когда последовательность (2) расщепляется (как последовательность R -модулей) или когда либо K'' , либо L — комплекс плоских R -модулей (ср. [36, теорема V.8.6]; в случае когда $R = \mathbb{Z}$, плоские модули — это группы без кручения). При указанном предположении коммутативна диаграмма

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} H^p(K'') \otimes H^q(L) & \xrightarrow{\alpha} & H^{p+q}(K'' \otimes L) \\ \downarrow \partial_2 \otimes 1 & & \downarrow \partial_2 \\ H^{p+1}(K') \otimes H^q(L) & \xrightarrow{\alpha} & H^{p+q+1}(K' \otimes L) \end{array}$$

Доказательство этого утверждения оставляем читателю. Здесь ∂_2 и ∂_3 — кограничные операторы, ассоциированные соответственно с точными последовательностями (2) и (3). Справедливо также симметричное утверждение в случае, когда короткая точная последовательность $0 \rightarrow L' \rightarrow L \rightarrow L'' \rightarrow 0$ тензорно умножается слева на комплекс K (предостережение: в этом случае необходимо учитывать знак $(-1)^p$).

Именно гомоморфизм α фигурирует в теореме Кюннета из предыдущего параграфа.

Пусть X и Y — локально компактные пространства, а G_1 и G_2 — абелевы группы. Определим гомоморфизм

$$H_c^p(X; G_1) \otimes H_c^q(Y; G_2) \rightarrow H_c^{p+q}(X \times Y; G_1 \otimes G_2)$$

как композицию следующих двух отображений:

$$\alpha: H_c^p(X; G_1) \otimes H_c^q(Y; G_2) \rightarrow H^{p+q}(C_c^*(X) \otimes G_1 \otimes C_c^*(Y) \otimes G_2)$$

и

$$\begin{aligned} \theta^*(X, Y; G_1 \otimes G_2): H^{p+q}(C_c^*(X) \otimes G_1 \otimes C_c^*(Y) \otimes G_2) \rightarrow \\ \rightarrow H_c^{p+q}(X \times Y; G_1 \otimes G_2). \end{aligned}$$

Гомоморфизм $\theta^*(X, Y; G_1 \otimes G_2)$ определен в предыдущем параграфе; учитываем также естественный изоморфизм

$$C_c^*(X) \otimes G_1 \otimes C_c^*(Y) \otimes G_2 = C_c^*(X) \otimes C_c^*(Y) \otimes G_1 \otimes G_2.$$

Образ элемента $u \otimes v$ при построенном гомоморфизме обозначается через $u \times v$ и называется *декартовым* или *внешним произведением* элементов u и v . Ясно, что внешнее умножение — билинейная операция.

Перечислим некоторые *основные свойства* этой операции

(1) Пусть $f: X \rightarrow X'$ и $g: Y \rightarrow Y'$ — собственные отображения локально компактных пространств. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_c^p(X'; G_1) \otimes H_c^q(Y'; G_2) & \rightarrow & H_c^{p+q}(X' \times Y'; G_1 \otimes G_2) \\ \downarrow f^* \otimes g^* & & \downarrow (f \times g)^* \\ H_c^p(X; G_1) \otimes H_c^q(Y; G_2) & \rightarrow & H_c^{p+q}(X \times Y; G_1 \otimes G_2) \end{array}$$

коммутативна. Другими словами, если $u \in H_c^p(X'; G_1)$ и $v \in H_c^q(Y'; G_2)$, то

$$(f \times g)^*(u \times v) = (f^*u) \times (g^*v)$$

(2) Пусть $U \subseteq X$ и $V \subseteq Y$ — открытые подмножества. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_c^p(U; G_1) \otimes H_c^q(V; G_2) & \rightarrow & H_c^{p+q}(U \times V; G_1 \otimes G_2) \\ \downarrow \tau_{U, X} \otimes \tau_{V, Y} & & \downarrow \tau_{U \times V, X \times Y} \\ H_c^p(X; G_1) \otimes H_c^q(Y; G_2) & \rightarrow & H_c^{p+q}(X \times Y; G_1 \otimes G_2) \end{array}$$

коммутативна, т. е.

$$\tau_{U \times V, X \times Y}(u \times v) = \tau_{U, X}(u) \times \tau_{V, Y}(v).$$

(3) Пусть A — замкнутое подмножество пространства X и $U = X \setminus A$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_c^p(A; G_1) \otimes H_c^q(Y; G_2) & \rightarrow & H_c^{p+q}(A \times Y; G_1 \otimes G_2) \\ \downarrow \delta_{X, A} \otimes 1 & & \downarrow \delta_{X \times Y, A \times Y} \\ H_c^{p+1}(U; G_1) \otimes H_c^q(Y; G_2) & \rightarrow & H_c^{p+q+1}(U \times Y; G_1 \otimes G_2) \end{array}$$

коммутативна, т. е.

$$\delta_{X \times Y, A \times Y}(u \times v) = (\delta_{X, A}u) \times v.$$

(4) Пусть B — замкнутое подмножество пространства Y и $V = Y \setminus B$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_c^p(X; G_1) \otimes H_c^q(B; G_2) & \rightarrow & H_c^{p+q}(X \times B; G_1 \otimes G_2) \\ (-1)^p \otimes \delta_{Y, B} \downarrow & & \downarrow \delta_{X \times Y, X \times B} \\ H_c^p(X; G_1) \otimes H_c^{q+1}(V; G_2) & \rightarrow & H_c^{p+q+1}(X \times V; G_1 \otimes G_2) \end{array}$$

коммутативна, или

$$\delta_{X \times Y, X \times Z} (u \times v) = (-1)^p u \times (\delta_{Y, Z} v).$$

Эти четыре свойства вытекают из соответствующих частей теоремы 6.7 и естественности гомоморфизма α .

(Б) (Ассоциативность.) Пусть X, Y и Z — локально компактные пространства, G_1, G_2 и G_3 — абелевы группы,

$$u \in H_c^p(X; G_1), \quad v \in H_c^q(Y; G_2) \quad \text{и} \quad w \in H_c^r(Z; G_3).$$

Тогда

$$(u \times v) \times w = u \times (v \times w) \in H^{p+q+r}(X \times Y \times Z; G_1 \otimes G_2 \otimes G_3).$$

Доказательство. Сначала прямым вычислением проверяется коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Phi^p(X) \otimes \Phi^q(Y) \otimes \Phi^r(Z) & \xrightarrow{1 \otimes \theta(Y, Z)} & \Phi^p(X) \otimes \Phi^{q+r}(Y \times Z) \\ \downarrow \theta(X, Y) \otimes 1 & & \downarrow \theta(X, Y \times Z) \\ \Phi^{p+q}(X \times Y) \otimes \Phi^r(Z) & \xrightarrow{\theta(X \times Y, Z)} & \Phi^{p+q+r}(X \times Y \times Z) \end{array}$$

Это влечет за собой коммутативность аналогичной диаграммы, получаемой в результате замены символа Φ^n на C_c^n . Применяя к указанной диаграмме функтор $\otimes G_1 \otimes G_2 \otimes G_3$, учитывая ассоциативность и коммутативность тензорного умножения и переходя к когомологиям, получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^n(C_c^*(X) \otimes G_1 \otimes C_c^*(Y) \otimes G_2 \otimes C_c^*(Z) \otimes G_3) & \rightarrow & H^n(C_c^*(X) \otimes G_1 \otimes C_c^*(Y \times Z) \otimes G_2 \otimes G_3) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(C_c^*(X \times Y) \otimes G_1 \otimes G_2 \otimes C_c^*(Z) \otimes G_3) & \rightarrow & H^n(C_c^*(X \times Y \times Z) \otimes G_1 \otimes G_2 \otimes G_3) \end{array}$$

Отсюда и из очевидного свойства ассоциативности преобразования α вытекает требуемый результат.

(6) (Существование единицы.) Пусть X — компактное, а Y — локально компактное пространства. Тогда непрерывные отображения

$$\begin{aligned} \varphi_X: X &\rightarrow P, \\ \pi: X \times Y &\rightarrow Y, \quad \pi(x, y) = y, \end{aligned}$$

являются собственными (P — одноточечное пространство). Напомним, что группа $H^0(P; \mathbb{Z})$ канонически изоморфна $\mathbb{Z}$. Обозначим через $1 \in H^0(P; \mathbb{Z})$ элемент, соответствующий единице кольца $\mathbb{Z}$. Аналогично, положим $\varphi_X(1) = 1 \in H^0(X; \mathbb{Z})$. Тогда для любого $v \in H_c^q(Y; G)$

$$1 \times v = \pi^*(v).$$

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизмы

$$\theta(X, Y): \Phi^0(X) \otimes \Phi^q(Y) \rightarrow \Phi^q(X \times Y),$$

$$\pi^\#: \Phi^q(Y) \rightarrow \Phi^q(X \times Y).$$

Определим функцию $e \in \Phi^0(X)$, полагая $e(x) = 1$ для любой точки $x \in X$. Легко проверить, что для любого элемента $g \in \Phi^q(Y)$

$$\theta(e \otimes g) = \pi^\# g.$$

Требуемый результат следует из того, что $e \in \Phi^0(X) = C^0(X)$ — коцикл, представляющий класс $1 \in H^0(X)$.

Разумеется, справедлив симметричный результат, в котором X и Y меняются ролями. Заметим также, что единица имеется лишь в когомологиях компактных пространств.

Позже мы рассмотрим еще одно свойство внешнего умножения — коммутативность (или антикоммутативность). Перечисленные свойства внешнего умножения являются основными. Главное их значение — в описании естественной связи между когомологиями произведения $X \times Y$ и когомологиями множителей X и Y . Как топологический инвариант операция внешнего умножения не имеет большого значения.

Нередко бывает удобно для заданного гомоморфизма групп коэффициентов $G_1 \otimes G_2 \rightarrow G$ рассматривать композицию внешнего умножения $H_c^p(X; G_1) \otimes H_c^q(Y; G_2) \rightarrow H_c^{p+q}(X \times Y; G_1 \otimes G_2)$ с индуцированным гомоморфизмом групп когомологий $H_c^{p+q}(X \times Y; G_1 \otimes G_2) \rightarrow H_c^{p+q}(X \times Y; G)$. Полученный таким образом гомоморфизм $H_c^p(X; G_1) \otimes H_c^q(Y; G_2) \rightarrow H_c^{p+q}(X \times Y; G)$ также называется внешним умножением.

§ 7.4. $\cup$ -умножение

Пусть X — локально компактное пространство и $\Delta: X \rightarrow X \times X$ — диагональное вложение, $\Delta(x) = (x, x)$ для любой точки $x \in X$. Определим $\cup$ -произведение $u \cup v \in H_c^{p+q}(X; G_1 \otimes G_2)$ элементов $u \in H_c^p(X; G_1)$ и $v \in H_c^q(X; G_2)$ формулой

$$(5) \quad u \cup v = \Delta^*(u \times v).$$

Это умножение билинейно и имеет ряд других полезных свойств, которые будут перечислены ниже. В отличие от внешнего внутреннего умножения приводит к дополнительной структуре.

Возможности $\cup$ -умножения иллюстрирует следующий простой пример. Пусть X — обычный 2-мерный тор ($X = S^1 \times S^1$) и Y — букет 2-мерной сферы и двух окружностей (букет — это пространство, получающееся из несвязного объединения отождествлением

точек, выделенных по одной в каждом подпространстве). Легко видеть, что группы целочисленных когомологий пространств X и Y изоморфны. Следовательно, в соответствии с теоремами об универсальных коэффициентах изоморфны гомологии и когомологии этих пространств с произвольными коэффициентами. Пространства X и Y , очевидно, не гомеоморфны. Возникает вопрос, имеют ли они одинаковый гомотопический тип. Вычисление $\cup$ -произведений в гомологиях этих пространств с коэффициентами в $G_1 = G_2 = G_1 \otimes G_2 = \mathbb{Z}$ показывает, что X и Y имеют разный гомотопический тип.

Теория $\cup$ -умножения возникла в 1930—1935 гг. из предшествовавшей ей теории пересечения циклов и классов гомологий в многообразиях. Хотя казалось, что теория пересечений апеллирует к интуитивной геометрической точке зрения, очень сложно было дать ее строгое обоснование. Кроме того, эта теория менее общая, чем современная теория $\cup$ -умножения. Строгое обсуждение теории пересечений дано в работе Понтрягина и Глезермана [18].

Описание $\cup$ -умножения в когомологиях конкретного топологического пространства может оказаться довольно сложной задачей. К сожалению, в настоящей книге мы можем лишь коснуться этой проблемы, так как ее подробное рассмотрение увело бы нас слишком далеко в сторону. Сосредоточим свои усилия главным образом на основных аспектах теории $\cup$ -умножения.

Продолжим теперь более формальное обсуждение основных свойств $\cup$ -умножения. Прежде всего нередко бывает полезно иметь определение $\cup$ -умножения в несколько более общей ситуации. Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство, R и S — локально компактные подмножества в X . Для любых элементов $u \in H_c^p(R; G_1)$ и $v \in H_c^q(S; G_2)$ определим $\cup$ -произведение $u \cup v \in H_c^{p+q}(R \cap S; G_1 \otimes G_2)$ формулой $u \cup v = \Delta^*(u \times v)$, где снова $\Delta: R \cap S \rightarrow R \times S$ — диагональное вложение (заметим, что Δ — собственное отображение). Очевидно, что это умножение билинейно. Каждому из свойств внешнего умножения, перечисленных в предыдущем параграфе, отвечает аналогичное свойство $\cup$ -умножения. Перечислим эти свойства в явном виде.

(1) Пусть X , R и S такие же, как и выше, и пусть X' — локально компактное пространство с локально компактными подмножествами R' и S' . Пусть $f: X' \rightarrow X$ — такое непрерывное отображение, что индуцированные им отображения

$$\begin{aligned} f_1: R' &\rightarrow R, \\ f_2: S' &\rightarrow S, \\ f_3: R' \cap S' &\rightarrow R \cap S \end{aligned}$$

собственны. (Замечание: собственность отображений f_1 и f_2 обеспечивает собственность f_3 .) В этом случае диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_c^p(R; G_1) \otimes H_c^q(S; G_2) & \rightarrow & H_c^{p+q}(R \cap S; G_1 \otimes G_2) \\ \downarrow f_1 \otimes f_2 & & \downarrow f_3 \\ H_c^p(R'; G_1) \otimes H_c^q(S'; G_2) & \rightarrow & H_c^{p+q}(R' \cap S'; G_1 \otimes G_2) \end{array}$$

коммутативна. Другими словами,

$$(f_1^* u) \cup (f_2^* v) = f_3^* (u \cup v).$$

Это утверждение легко вытекает из свойства (1) внешнего умножения. Необходимо отметить, что $f_1 \times f_2: R' \times S' \rightarrow R \times S$ — собственное отображение.

(2) Пусть U — открытое подмножество в R и V — открытое подмножество в S . Коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_c^p(U) \otimes H_c^q(V) & \rightarrow & H_c^{p+q}(U \cap V) \\ \downarrow \tau_{U, R} \otimes \tau_{V, S} & & \downarrow \tau_{U \cap V, R \cap S} \\ H_c^p(R) \otimes H_c^q(S) & \rightarrow & H_c^{p+q}(R \cap S) \end{array}$$

(Замечание: в обозначениях опущены группы коэффициентов.) Это свойство можно переформулировать следующим образом:

$$\tau_{U, R}(u) \cup \tau_{V, S}(v) = \tau_{U \cap V, R \cap S}(u \cup v).$$

(3) Пусть A — замкнутое подмножество в R и $U = R \setminus A$ — его дополнение. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_c^p(A) \otimes H_c^q(S) & \rightarrow & H_c^{p+q}(A \cap S) \\ \downarrow \delta_{R, A} \otimes 1 & & \downarrow \delta_{R \cap S, A \cap S} \\ H_c^{p+1}(U) \otimes H_c^q(S) & \rightarrow & H_c^{p+q+1}(U \cap S) \end{array}$$

коммутативна, т. е. $(\delta u) \cup v = \delta(u \cup v)$.

(4) Пусть B — замкнутое подмножество в S и $V = S \setminus B$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_c^p(R) \otimes H_c^q(B) & \rightarrow & H_c^{p+q}(R \cap B) \\ \downarrow (-1)^p \otimes \delta_{S, B} & & \downarrow \delta_{R \cap S, R \cap B} \\ H_c^p(R) \otimes H_c^{q+1}(V) & \rightarrow & H_c^{p+q+1}(R \cap V) \end{array}$$

коммутативна, т. е.

$$\delta_{R \cap S, R \cap B}(u \cup v) = (-1)^p u \cup \delta_{S, B}(v).$$

(5) (Ассоциативность.) Пусть R, S и T — локально компактные подмножества пространства X , G_1, G_2 и G_3 — абелевы

группы, $u \in H_c^p(R; G_1)$, $v \in H_c^q(S; G_2)$ и $w \in H_c^r(T; G_3)$. Тогда

$$(u \cup v) \cup w = u \cup (v \cup w) \in H_c^{p+q+r}(R \cap S \cap T; G_1 \otimes G_2 \otimes G_3).$$

Доказательство. По определению

$$(u \cup v) \cup w = \Delta^*[\{\Delta^*(u \times v)\} \times w] = \Delta^*(\Delta \times 1)^*[(u \times v) \times w],$$

$$u \cup (v \cup w) = \Delta^*[u \times \Delta^*(v \times w)] = \Delta^*(1 \times \Delta^*)[u \times (v \times w)].$$

Требуемый результат следует из ассоциативности внешнего умножения и того факта, что

$$(\Delta \times 1) \circ \Delta = (1 \times \Delta) \circ \Delta : X \rightarrow X \times X \times X.$$

На последний факт мы будем ссылаться как на ассоциативность диагонального отображения Δ .

(6) (Существование единицы.) Пусть R — компактное множество из X , а S — локально компактное подмножество пространства X . Пусть $1 \in H^0(R; \mathbb{Z})$ — единица (определение этого элемента см. в предыдущем параграфе). Тогда для любого $v \in H_c^q(S; G)$

$$1 \cup v = i^*v,$$

где $i: R \cap S \rightarrow S$ — отображение включения (заметим, что $R \cap S$ — замкнутое подмножество S).

Справедливо аналогичное утверждение, в котором R и S меняются ролями.

После того как мы докажем закон антикоммутативности для внешнего умножения, мы сможем установить соответствующее свойство и для $\cup$ -умножения.

Как и в случае внешнего умножения, часто бывает удобно использовать композицию $\cup$ -умножения

$$H_c^p(R; G_1) \otimes H_c^q(S; G_2) \rightarrow H_c^{p+q}(R \cap S; G_1 \otimes G_2)$$

с гомоморфизмом

$$H_c^{p+q}(R \cap S; G_1 \otimes G_2) \rightarrow H_c^{p+q}(R \cap S; G),$$

индуцированным заданным гомоморфизмом групп коэффициентов. Особенно важен случай, когда $G_1 = G_2 = G$ — кольцо и $G \otimes G \rightarrow G$ — отображение, определяемое умножением в кольце G . Если $R = S = X$, то $\cup$ -умножение

$$H_c^p(X; G) \otimes H_c^q(X; G) \rightarrow H_c^{p+q}(X; G)$$

— билинейная операция. Положим $H_c^*(X; G) = \sum_{p \geq 0} H_c^p(X; G)$.

Тогда $H_c^*(X; G)$ — кольцо, называемое *кольцом когомологий пространства X с коэффициентами в кольце G* . Это кольцо ассо-

циативно, если G — ассоциативное кольцо. Если X компактно, а G — кольцо с единицей, то $H^*(X; G)$ — кольцо с единицей. Гомоморфизмы, индуцированные собственными отображениями пространств или включениями открытых подмножеств, являются гомоморфизмами колец. Такая точка зрения очень полезна.

Замечания. (1) Легко видеть, что композиция гомоморфизмов

$$\Phi^p(X) \otimes \Phi^q(X) \xrightarrow{\theta} \Phi^{p+q}(X \times X) \xrightarrow{\Delta^\#} \Phi^{p+q}(X)$$

задается формулой

$$[\Delta^\# \theta (f \otimes g)](x_0, \dots, x_{p+q}) = f(x_0, \dots, x_p) \cdot g(x_0, \dots, x_{p+q})$$

для любых $f \in \Phi^p(X)$, $g \in \Phi^q(X)$ и $x_0, \dots, x_{p+q} \in X$. Эту формулу можно переписать следующим образом:

$$(f \cup g)(x_0, \dots, x_{p+q}) = f(x_0, \dots, x_p) \cdot g(x_p, \dots, x_{p+q}).$$

В таком виде ее можно рассматривать как определение $\cup$ -произведения коцепей. Эта формула была найдена и использовалась Александером, Чехом, Уитни и Колмогоровым в 30-е годы.

(2) Пусть G — ассоциативное кольцо и R — локально компактное подмножество пространства X . Группу $H_c^*(R; G)$ можно рассматривать как модуль над кольцом $H_c^*(X; G)$, определяя на ней структуру модуля посредством операции $\cup$ -умножения. Если U — открытое подмножество R и $A = R \setminus U$, то точная последовательность

$$\dots \rightarrow H_c^*(A) \xrightarrow{\delta} H_c^*(U) \xrightarrow{\tau} H_c^*(R) \xrightarrow{i} H_c^*(A) \xrightarrow{\delta} \dots$$

является точной последовательностью $H_c^*(X)$ -модулей и $H_c^*(X)$ -гомоморфизмов¹⁾.

(3) В применениях перечисленных выше свойств $\cup$ -умножения полезно помнить, что $H_c^p(R \cap S; G) = 0$ при всех p , если $R \cap \bar{S} = \emptyset$.

Упражнения

(1) Говорят, что категория Люстерника — Шнирельмана топологического пространства X равна n , если существует покрытие пространства X , состоящее из n замкнутых множеств, каждое из которых стягивается в точку в пространстве X (т. е.

¹⁾ Из наблюдений настоящего параграфа вытекает, что для $a_1 \in H_c^p(A)$, $a_2 \in H_c^q(A)$ имеет место соотношение

$$\delta(a_1 \cup a_2) = \delta a_1 \cup a_2 + (-1)^p a_1 \cup \delta a_2.$$

Если a_i — образ $a'_i \in H_c^*(X)$, то $\delta a_i = 0$. Следовательно, δ является $H_c^*(X)$ -гомоморфизмом правых $H_c^*(X)$ -модулей. — Прим. ред.

отображение включения гомотопно постоянному), но не существует покрытия X меньшим числом таких множеств. Например, категория Люстерника — Шнирельмана тогда и только тогда равна 1, когда пространство стягиваемо. Докажите, что если категория Люстерника — Шнирельмана хаусдорфова компактного пространства X равна n , то для любых n классов когомологий $u_1, \dots, u_n$ положительной размерности (с произвольными коэффициентами) справедливо равенство

$$u_1 \cup u_2 \cup \dots \cup u_n = 0.$$

2. Пусть N — любое целое число. Докажите, что существует компактное связное многообразие, для которого категория Люстерника — Шнирельмана больше N . (Указание. Рассмотрите произведение сфер и воспользуйтесь результатами § 7.7.)

3. Надстройкой SX над пространством X называется факторпространство произведения $X \times I$, получающееся в результате отождествления каждого из множеств $X \times \{0\}$ и $X \times \{1\}$ в отдельной точке. Докажите, что категория Люстерника — Шнирельмана пространства SX не превосходит 2. Выведите отсюда, что в случае компактного X для любых $u \in H^m(SX)$ и $v \in H^n(SX)$, $m, n > 0$, справедливо равенство $u \cup v = 0$.

§ 7.5. Внешнее умножение для пространств с клеточным разбиением

В этом параграфе будет показано, что, как и следовало ожидать, в случае пространств, допускающих клеточные разбиения, описание внешнего умножения допускает упрощения. Этот факт имеет несколько важных следствий: (а) В случае регулярных клеточных комплексов внешнее умножение можно вычислять, исходя лишь из одной клеточной структуры. Это сводит вычисление $\cup$ -умножения в когомологиях регулярных клеточных комплексов к описанию гомоморфизма $\Delta^*: H_c^n(X \times X) \rightarrow H_c^n(X)$, индуцированного диагональным вложением $\Delta: X \rightarrow X \times X$. (б) В случае клеточных комплексов внешнее умножение описывается очень простыми формулами, способствующими развитию интуитивного геометрического представления об этом умножении. (с) Мы сможем показать, что в случае регулярных клеточных комплексов внешнее умножение подчиняется закону антикоммутативности. В качестве следствия это свойство будет установлено и для $\cup$ -умножения. Для любых локально компактных пространств закон антикоммутативности будет получен с помощью предельного перехода, которым мы уже пользовались (в предыдущей главе). Это обеспечит справедливость аналогич-

ного закона в общем случае для $\cup$ -умножения. Последний факт имеет большее значение.

Пусть X и Y — локально компактные пространства с клеточными разбиениями K и L соответственно. Напомним, что эти разбиения определяют естественное клеточное разбиение произведения пространств, которое обозначается через $K \times L$ (см. § 5.7) и определяется остовами

$$(K \times L)^n = \bigcup_{p+q=n} K^p \times L^q.$$

Имеем

$$\begin{aligned} (6) \quad C_i^n(K \times L) &= H_c^n((K \times L)^n \setminus (K \times L)^{n-1}) = \\ &= \sum_{p+q=n} H_c^n((K^p \setminus K^{p-1}) \times (L^q \setminus L^{q-1})). \end{aligned}$$

В этих соотношениях используются целочисленные коэффициенты. Распадение в прямую сумму группы, стоящей справа, — следствие теоремы о прямой сумме (§ 2.3). Далее заметим, что в соответствии с теоремой Кюннета (см. § 7.2) гомоморфизм

$$\begin{aligned} (7) \quad \alpha: H_c^p(K^p \setminus K^{p-1}) \otimes H_c^q(L^q \setminus L^{q-1}) &\rightarrow \\ &\rightarrow H_c^{p+q}((K^p \setminus K^{p-1}) \times (L^q \setminus L^{q-1})) \end{aligned}$$

является изоморфизмом. Сопоставление равенств (6) и (7) показывает, что гомоморфизм α определяет изоморфизм

$$(8) \quad \alpha': \sum_{p+q=n} C_i^p(K) \otimes C_i^q(L) \xrightarrow{\alpha} C_i^n(K \times L).$$

Другими словами, этот изоморфизм определен внешним умножением. Заметим теперь, что группа, стоящая слева, — не что иное, как группа n -мерных коцепей тензорного произведения $C_i^*(K) \otimes C_i^*(L)$ двух комплексов.

7.3. Лемма. *Изоморфизм α' из равенства (8) является изоморфизмом коцепных комплексов, т. е. коммутирует с кограничным оператором.*

Доказательство. Пусть $u \in C_i^p(K)$ и $v \in C_i^q(L)$. Необходимо доказать равенство

$$\delta_{K \times L} \alpha'(u \otimes v) = \alpha'(\delta_K u \otimes v + (-1)^p u \otimes \delta_L v).$$

Доказанные ранее свойства внешнего умножения обеспечивают коммутативность следующих диаграмм:

$$(9) \quad \begin{array}{ccc} H_c^p(K^p \setminus K^{p-1}) \otimes H_c^q(L^q \setminus L^{q-1}) & \xrightarrow{\times} & H_c^{p+q}((K^p \setminus K^{p-1}) \times (L^q \setminus L^{q-1})) \\ \downarrow \delta_K \otimes 1 & & \downarrow \delta_1 \\ H_c^{p+1}(K^{p+1} \setminus K^p) \otimes H_c^q(L^q \setminus L^{q-1}) & \xrightarrow{\times} & H_c^{p+q+1}((K^{p+1} \setminus K^p) \times (L^q \setminus L^{q-1})) \end{array}$$

$$(10) \quad \begin{array}{ccc} H_c^p(K^p \setminus K^{p-1}) \otimes H_c^q(L^q \setminus L^{q-1}) & \xrightarrow{\times} & H_c^{p+q}((K^p \setminus K^{p-1}) \times (L^q \setminus L^{q-1})) \\ \downarrow (-1)^p \otimes \delta_L & & \downarrow \delta_2 \\ H_c^p(K^p \setminus K^{p-1}) \otimes H_c^{q+1}(L^{q+1} \setminus L^q) & \xrightarrow{\times} & H_c^{p+q+1}((K^p \setminus K^{p-1}) \times (L^{q+1} \setminus L^q)) \end{array}$$

Упростим обозначения, полагая

$$A_{i,j} = (K^i \setminus K^{i-1}) \times (L^j \setminus L^{j-1}).$$

Тогда

$$(K \times L)^n \setminus (K \times L)^{n-1} = \bigcup_{i+j=n} A_{i,j},$$

и в этих обозначениях диаграммы (9) и (10) примут вид

$$(9') \quad \begin{array}{ccc} C_i^p(K) \otimes C_j^q(L) & \xrightarrow{\times} & H_c^{p+q}(A_{p,q}) \\ \downarrow \delta_K \otimes 1 & & \downarrow \delta_1 \\ C_i^{p+1}(K) \otimes C_j^q(L) & \xrightarrow{\times} & H_c^{p+q+1}(A_{p+1,q}) \end{array}$$

$$(10') \quad \begin{array}{ccc} C_i^p(K) \otimes C_j^q(L) & \xrightarrow{\times} & H_c^{p+q}(A_{p,q}) \\ \downarrow (-1)^p \otimes \delta_L & & \downarrow \delta_2 \\ C_i^p(K) \otimes C_j^{q+1}(L) & \xrightarrow{\times} & H_c^{p+q+1}(A_{p,q+1}) \end{array}$$

Далее, для $n = p + q$ рассмотрим коммутативную диаграмму

$$(11) \quad \begin{array}{ccccc} & & H_c^n(A_{p,q}) & & \\ & \delta_1 \swarrow & \downarrow \delta_3 & \searrow \delta_2 & \\ H_c^{n+1}(A_{p+1,q}) & \xleftarrow{i_1} & H_c^{n+1}(A_{p+1,q} \cup A_{p,q+1}) & \xrightarrow{i_2} & H_c^{n+1}(A_{p,q+1}) \end{array}$$

Поскольку i_1 и i_2 — проекции группы $H_c^{n+1}(A_{p+1,q} \cup A_{p,q+1})$ на ее прямые слагаемые, гомоморфизм δ_3 полностью определяется отображениями δ_1 и δ_2 .

Мы утверждаем, что диаграмма

$$(12) \quad \begin{array}{ccc} H_c^n(A_p, q) & \xrightarrow{\tau} & H_c^n\left(\bigcup_{i+j=n} A_{i,j}\right) = C_f^n(K \times L) \\ \downarrow \delta_3 & & \downarrow \delta_{K \times L} \\ H_c^{n+1}(A_{p+1,q} \cup A_{p,q+1}) & \xrightarrow{\tau} & H_c^{n+1}\left(\bigcup_{i+j=n+1} A_{i,j}\right) = C_f^{n+1}(K \times L) \end{array}$$

коммутативна. Действительно, это следует из того, что $A_{p,q} \cup A_{p+1,q} \cup A_{p,q+1}$ — открытое подмножество пространства $(K \times L)^{n+1} \setminus (K \times L)^{n-1}$.

Теперь лемма вытекает из диаграмм (9'), (10'), (11) и (12). Детали оставляем читателю.

Из леммы вытекает, что α' индуцирует изоморфизм

$$\alpha'^*: H^n(C_f^*(K) \otimes C_f^*(L)) \rightarrow H^n(C_f^*(K \times L)),$$

который можно использовать для определения гомоморфизма внешнего умножения

$$H_f^p(K; G_1) \otimes H_f^q(L; G_2) \rightarrow H_f^{p+q}(K \times L; G_1 \otimes G_2)$$

точно таким же образом, как в основном определении этой операции в § 7.3. Согласно гл. 3, существуют естественные изоморфизмы¹⁾

$$\theta_K: H_f^p(K; G_1) \cong H_c^p(X; G_1),$$

$$\theta_L: H_f^q(L; G_2) \cong H_c^q(Y; G_2),$$

$$\theta_{K \times L}: H_f^{p+q}(K \times L; G_1 \otimes G_2) \cong H_c^{p+q}(X \times Y; G_1 \otimes G_2).$$

Естественно ожидать, что только что определенное внешнее умножение для разбиений K и L посредством изоморфизмов θ_K , θ_L и $\theta_{K \times L}$ отождествляется с ранее определенным внешним умножением для пространств X и Y . Докажем, что это предположение действительно справедливо.

7.4. Теорема. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_f^p(K; G_1) \otimes H_f^q(L; G_2) & \rightarrow & H_f^{p+q}(K \times L; G_1 \otimes G_2) \\ \cong \downarrow \theta_K \otimes \theta_L & & \cong \downarrow \theta_{K \times L} \\ H_c^p(X; G_1) \otimes H_c^q(Y; G_2) & \rightarrow & H_c^{p+q}(X \times Y; G_1 \otimes G_2) \end{array}$$

коммутативна.

¹⁾ При одном из условий: а) разбиения K и L конечномерны (теорема 3.3); б) K и L — регулярные клеточные комплексы (добавление редактора к гл. 5). — Прим. перев.

Доказательство. Прежде всего напомним определение естественного изоморфизма θ_K . В диаграмме

$$C_i^p(K) = H_c^p(K^p \setminus K^{p-1}) \xrightarrow{i_K^*} H_c^p(X \setminus K^{p-1}) \xrightarrow{\tau_K} H_c^p(X)$$

отображение i_K^* — мономорфизм, образ которого совпадает с $Z^p(K)$, а τ_K — эпиморфизм с ядром $i_K^{-1}(B^p(K))$. Таким образом, изоморфизм θ_K определен посредством $\tau_K \circ i_K^{-1}$. Аналогично определяются θ_L и $\theta_{K \times L}$.

Теорема вытекает теперь из коммутативности следующей диаграммы (коэффициенты опущены и $n = p + q$):

$$\begin{array}{ccccc} H_c^n((K \times L)^n \setminus (K \times L)^{n-1}) & \xleftarrow{i_{K \times L}^*} & H_c^n((X \times Y) \setminus (K \times L)^{n-1}) & \xrightarrow{\tau_{K \times L}} & H_c^n(X \times Y) \\ \uparrow \tau_1 & & \uparrow \tau_2 & \nearrow \tau_3 & \uparrow \\ H_c^n((K^p \times L^q) \setminus (K^p \times L^{q-1} \cup K^{p-1} \times L^q)) & \xleftarrow{i^*} & H_c^n((X \times Y) \setminus (K^p \times L^{q-1} \cup K^{p-1} \times L^q)) & \times & \\ \uparrow \times & & \uparrow \times & & \uparrow \\ H_c^p(K^p \setminus K^{p-1}) \otimes H_c^q(L^q \setminus L^{q-1}) & \xleftarrow{i_K^* \otimes i_L^*} & H_c^p(X \setminus K^{p-1}) \otimes H_c^q(Y \setminus L^{q-1}) & \xrightarrow{\tau_K \otimes \tau_L} & H_c^p(X) \otimes H_c^q(Y) \end{array}$$

Коммутативность двух нижних квадратов следует из доказанных свойств внешнего умножения.

Эта теорема показывает, до какой степени можно вычислить внешнее умножение в случае клеточных разбиений. Пусть e^p — клетка размерности p разбиения K и e^q — клетка размерности q разбиения L ; тогда $e^p \times e^q$ — клетка размерности $p + q$ разбиения $K \times L$ и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_c^p(e^p) \otimes H_c^q(e^q) & \xrightarrow{\tau \otimes \tau} & H_c^p(K^p \setminus K^{p-1}) \otimes H_c^q(L^q \setminus L^{q-1}) \\ \cong \downarrow \times & & \cong \downarrow \times \\ H_c^{p+q}(e^p \times e^q) & \xrightarrow{\tau} & H_c^n((K^p \times L^q) \setminus (K^p \times L^{q-1} \cup K^{p-1} \times L^q)) \\ & \searrow \tau & \downarrow \tau \\ & & H_c^n((K \times L)^n \setminus (K \times L)^{n-1}) \end{array}$$

коммутативна. Из этой диаграммы видно, что ориентации клеток e^p и e^q определяют ориентацию клетки $e^p \times e^q$. В случае произвольных клеточных разбиений K и L нет удобного способа выбирать ориентации клеток. Однако в случае регулярных клеточных комплексов имеется взаимно однозначное соответствие со способами задания коэффициентов инцидентности. Легко ви-

деть, что если клетки регулярных комплексов K и L ориентированы, а клетки $K \times L$ ориентируются с помощью внешнего умножения, то коэффициенты инцидентности клеток разбиения $K \times L$ должны быть связаны с коэффициентами инцидентности разбиений K и L формулами из § 5.7. Это легко вытекает из того, что α' — изоморфизм (см. равенство (8)), а также из формулы

$$\delta(u \otimes v) = (\delta_K u) \otimes v + (-1)^p u \otimes (\delta_L v)$$

для кограничного оператора в тензорном произведении комплексов $C_i^*(K) \otimes C_j^*(L)$.

Подведем итог нашим наблюдениям. Пусть K и L — регулярные клеточные комплексы. Для вычисления изоморфизма внешнего умножения

$$\alpha': C_i^p(K) \otimes C_j^q(L) \rightarrow C_i^{p+q}(K \times L)$$

сначала выбираются ориентации (т. е. коэффициенты инцидентности) клеток в K и L . Используя эти ориентации, нужно ориентировать клетки разбиения $K \times L$ согласно правилу из § 5.7. Тогда для ориентированных клеток e^p и e^q разбиений K и L соответственно имеем

$$(13) \quad \alpha'(e^p \otimes e^q) = e^p \times e^q.$$

В связи с приведенным описанием процедуры вычисления внешнего умножения регулярных клеточных комплексов естественно выяснить этот вопрос и для $\cup$ -умножения. По определению

$$u \cup v = \Delta^*(u \times v),$$

где $\Delta: X \rightarrow X \times X$ — диагональное вложение. Таким образом, задача сводится к вычислению гомоморфизма Δ^* , индуцированного отображением Δ . Этот вопрос кратко уже обсуждался нами. Применявшиеся нами методы пока не дают эффективного способа вычисления гомоморфизма Δ^* , поскольку отображение Δ не является клеточным.

§ 7.6. Антикоммутативный закон для внешнего и внутреннего умножений

Для любых пространств X и Y пусть

$$t_{X,Y}: Y \times X \rightarrow X \times Y$$

означает гомеоморфизм, переводящий точку (y, x) в (x, y) . Основной целью настоящего параграфа является доказательство следующего утверждения.

7.5. Теорема. Для произвольных локально компактных хаусдорфовых пространств X и Y коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_c^p(X; G_1) \otimes H_c^q(Y; G_2) & \rightarrow & H_c^{p+q}(X \times Y; G_1 \otimes G_2) \\ \downarrow \tau & & \downarrow t_{X,Y}^\# \\ H_c^q(Y; G_2) \otimes H_c^p(X; G_1) & \rightarrow & H_c^{p+q}(Y \times X; G_1 \otimes G_2) \end{array}$$

Здесь $T(u \otimes v) = (-1)^{pq} v \otimes u$, $u \in H_c^p(X)$, $v \in H_c^q(Y)$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда X и Y — регулярные клеточные комплексы. В соответствии с результатами предыдущего параграфа в этом случае для проведения вычислений можно использовать клеточную структуру. В общем случае будет применен такой же предельный переход, как в теореме 6.3.

Итак, пусть X и Y — пространства с заданными на них структурами регулярных клеточных комплексов K и L . Тогда $t_{X,Y}$ — клеточный гомеоморфизм пространства $Y \times X$ на $X \times Y$. Следовательно, $t_{X,Y}$ отображает каждую клетку разбиения $L \times K$ на ее образ в $K \times L$ со степенью ± 1 в зависимости от выбранных ориентаций. Для вычисления этих степеней предположим, что все клетки из K и L ориентированы и ориентации клеток в комплексах $K \times L$ и $L \times K$ выбраны в соответствии с правилами, указанными в гл. 5. Простое вычисление показывает, что в этом случае

$$t_{X,Y}^\#(e^p \times e^q) = (-1)^{pq} e^q \times e^p$$

(ср. упражнение 2 из § 5.7). Таким образом, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C_i^p(K) \otimes C_i^q(L) & \xrightarrow{\alpha'} & C_i^{p+q}(K \times L) \\ \downarrow \tau & & \downarrow t_{X,Y}^\# \\ C_i^q(L) \otimes C_i^p(K) & \xrightarrow{\alpha'} & C_i^{p+q}(L \times K) \end{array}$$

коммутативна. Отсюда для рассматриваемых пространств X и Y легко вытекает доказываемая теорема.

Ясно также, что она справедлива для пространств X и Y , имеющих собственный гомотопический тип регулярных клеточных комплексов.

Пусть теперь X и Y — произвольные компактные хаусдорфовы пространства. Так же как в доказательстве теоремы 6.3, вложим X и Y в тихоновские кубы. Тогда каждое из пространств X и Y обладает фундаментальной системой замкнутых окрестностей, имеющих гомотопический тип конечных регулярных клеточных комплексов. Переходя к прямым пределам (ср. с дока-

зательством теоремы 6.3), получим нужное утверждение в этом случае. В этом рассуждении мы пользуемся тем, что в произведении тихоновских кубов пространство $X \times Y$ обладает фундаментальной системой окрестностей, каждая из которых — произведение окрестности из пространства X на окрестность из пространства Y .

В заключение рассмотрим общий случай. Пусть X и Y — локально компактные пространства и X' и Y' — их одноточечные компактификации Александрова,

$$X' = X \cup \{x_0\}, \quad Y' = Y \cup \{y_0\}.$$

Тогда X и Y — открытые подмножества пространств X' и Y' соответственно, а $X \times Y$ — открытое подмножество пространства $X' \times Y'$. Кроме того,

$$X' \times Y' \setminus X \times Y = X' \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y'.$$

Последнее пространство обозначается обычно через $X' \vee Y'$ (букет X' и Y'). Мы утверждаем, что

$$\tau: H_c^n(X \times Y) \rightarrow H^n(X' \times Y')$$

— мономорфизм при всех n . Из рассмотрения приведенной когомологической последовательности видно, что достаточно установить для всех n эпиморфность отображений

$$i^*: \tilde{H}^n(X' \times Y') \rightarrow \tilde{H}^n(X' \vee Y').$$

Для доказательства рассмотрим вложения

$$i_1: X' \rightarrow X' \vee Y',$$

$$i_2: Y' \rightarrow X' \vee Y',$$

для которых $i_1(x) = (x, y_0)$, $i_2(y) = (x_0, y)$. Пусть отображения

$$i'_1: X' \rightarrow X' \times Y', \quad i'_2: Y' \rightarrow X' \times Y'$$

определены теми же формулами. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{H}^n(X') \\ & \nearrow i'_1{}^* & \uparrow i_1^* \\ \tilde{H}^n(X' \times Y') & \xrightarrow{i^*} & \tilde{H}^n(X' \vee Y') \\ & \searrow i'_2{}^* & \downarrow i_2^* \\ & & \tilde{H}^n(Y') \end{array}$$

Легко проверить, что гомоморфизмы (i_1^*, i_2^*) определяют разложение группы $H^n(X' \vee Y')$ в прямую сумму¹⁾. Так как X' и Y' — ретракты пространства $X' \times Y'$, то i_1^* и i_2^* — эпиморфизмы. Поэтому i^* — эпиморфизм, а τ — мономорфизм.

Рассмотрим диаграмму, коммутативность которой необходимо установить, и диаграмму, полученную из нее заменой X и Y соответственно на X' и Y' . Поскольку X и Y — открытые подмножества в X' и Y' , имеются отображения из одной диаграммы в другую, удовлетворяющие очевидным соотношениям коммутативности. Отсюда и из того, что $\tau: H_c^n(X \times Y) \rightarrow H^n(X' \times Y')$ — мономорфизм, вытекает требуемый результат.

7.6. Следствие. Пусть R и S — локально компактные подмножества пространства X , $u \in H_c^p(R; G_1)$ и $v \in H_c^q(S; G_2)$. Тогда в группе $H_c^{p+q}(R \cap S; G_1 \otimes G_2)$

$$u \cup v = (-1)^{pq} v \cup u.$$

Это вытекает из теоремы 7.5 и коммутативности следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} & & R \times S \\ & \nearrow \alpha & \uparrow \tau_{R,S} \\ R \cap S & & \\ & \searrow \alpha & \downarrow \tau_{R,S} \\ & & S \times R \end{array}$$

В теореме 7.5 и в ее следствии 7.6 неявно использовался естественный изоморфизм групп $G_1 \otimes G_2$ и $G_2 \otimes G_1$.

Наиболее важен случай, когда $R = S = X$, $G_1 = G_2 = G$ — коммутативное кольцо и $\cup$ -умножение рассматривается вместе с гомоморфизмом, индуцированным отображением коэффициентов $G \otimes G \rightarrow G$. Тогда, как отмечалось выше, $H_c^\bullet(X; G) = \sum_{n \geq 0} H_c^n(X; G)$ — кольцо. Это кольцо удовлетворяет следующему условию: $u \cup v = (-1)^{pq} v \cup u$ для любых $u \in H_c^p(X; G)$, $v \in H_c^q(X; G)$. Отсюда вытекает много следствий. Например, если $u \in H_c^p(X; G)$ и p нечетно, то

$$2u \cup u = 0.$$

В то же время подкольцо $\sum_{n \geq 0} H_c^{2n}(X; G)$ всегда содержится в центре кольца $H_c^\bullet(X; G)$.

¹⁾ Разложение в прямую сумму $H^n(X' \vee Y') = H^n(X') \oplus H^n(Y')$ — следствие теоремы 2.8 и результатов § 2.3. Аналогичное разложение, вообще говоря, не имеет места для сингулярных когомологий. — Прим. перев.

Другим важным применением свойства антикоммутативности является формула, связывающая $\cup$ -умножение и внешнее умножение для произведения пространств. Эта формула дает важную информацию о $\cup$ -умножении в когомологиях пространства $X \times Y$ при условии, что такая информация известна для пространств X и Y .

Предположим, что R и R' — локально компактные подмножества пространства X , а S и S' — локально компактные подмножества в Y . Пусть $u \in H_c^p(R)$, $v \in H_c^q(S)$, $u' \in H_c^p(R')$ и $v' \in H_c^q(S')$.

7.7. Теорема. При сделанных предположениях

$$(u \times v) \cup (u' \times v') = (-1)^{qr} (u \cup u') \times (v \cup v').$$

Замечание. В обозначениях пропущены группы коэффициентов. Можно считать, что все четыре группы $G_1, \dots, G_4$ различны, или предполагать, что все когомологии — когомологии, рассматриваемые с коэффициентами в некотором коммутативном и ассоциативном кольце с единицей. Оставляем читателю детали.

Доказательство теоремы. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} (R \times S) \cap (R' \times S') & \xrightarrow{\Delta_{X \times Y}} & R \times S \times R' \times S' \\ \parallel & & \uparrow 1_R \times t_{S, R'} \times 1_{S'} \\ (R \cap R') \times (S \cap S') & \xrightarrow{\Delta_X \times \Delta_Y} & R \times R' \times S \times S' \end{array}$$

Здесь Δ_X , Δ_Y и $\Delta_{X \times Y}$ — диагональные вложения для пространств X , Y и $X \times Y$, ограниченные на соответствующие подпространства. Используя доказанные ранее свойства внешнего и внутреннего умножений, получаем

$$\begin{aligned} (u \times v) \cup (u' \times v') &= \Delta_{X \times Y}^* (u \times v \times u' \times v') = \\ &= (\Delta_X \times \Delta_Y)^* (1 \times t \times 1)^* (u \times v \times u' \times v') = \\ &= (\Delta_X \times \Delta_Y)^* [u \times t^* (v \times u') \times v'] = \\ &= (-1)^{qr} (\Delta_X \times \Delta_Y)^* [u \times u' \times v \times v'] = \\ &= (-1)^{qr} [\Delta_X^* (u \times u') \times \Delta_Y^* (v \times v')] = \\ &= (-1)^{qr} [(u \cup u') \times (v \cup v')]. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Разумеется, наиболее важен случай, когда $R = R' = X$, $S = S' = Y$, а все рассматриваемые когомологии имеют одно и то же коммутативное кольцо коэффициентов (например, кольцо

целых чисел). В этом случае теорема допускает более выгодную формулировку. Скажем, что кольцо Λ — *градуированное кольцо*, если в нем выделена такая последовательность подгрупп Λ^q , что

$$(a) \quad \Lambda = \sum_q \Lambda^q \text{ (прямая сумма),}$$

$$(b) \quad \Lambda^p \cdot \Lambda^q \subset \Lambda^{p+q}.$$

Например, градуированным является кольцо когомологий всякого пространства.

Если Λ и M — градуированные кольца, то структура градуированного кольца может быть определена на группе $\Lambda \otimes M$. Положим $(\Lambda \otimes M)^n = \sum_{p+q=n} \Lambda^p \otimes M^q$, и если $\lambda \in \Lambda^p$, $\mu \in M^q$, $\lambda' \in \Lambda^r$ и $\mu' \in M^s$, то

$$(\lambda \otimes \mu) \cdot (\lambda' \otimes \mu') = (-1)^{qr} (\lambda \cdot \lambda') \otimes (\mu \cdot \mu').$$

В этих терминах теорему 7.7 можно сформулировать так: *отображение*

$$\alpha: H_c^*(X) \otimes H_c^*(Y) \rightarrow H_c^*(X \times Y)$$

является гомоморфизмом градуированных колец (все фигурирующие здесь когомологии — с коэффициентами в некотором фиксированном коммутативном кольце, например в кольце целых чисел). В тех случаях, когда α — изоморфизм (например, когда кольцо коэффициентов является полем или когда для целочисленных коэффициентов $\text{Tor}_1^Z(H_c^*(X), H_c^*(Y)) = 0$), кольца $H_c^*(X \times Y)$ и $H_c^*(X) \otimes H_c^*(Y)$ изоморфны.

§ 7.7. Несколько иллюстративных примеров

Хотя нами развита довольно общая теория умножений, мы не можем использовать ее в конкретных случаях, поскольку не имеем общего метода вычисления $\cup$ -умножений даже для относительно простых пространств. Приведем тем не менее несколько примеров, иллюстрирующих некоторые возможности этой теории. Дальнейшие примеры см. в гл. 11.

Прежде всего для n -мерной сферы S^n структура градуированного кольца $H^*(S^n; Z)$ полностью определяется общими структурными теоремами о кольце $H_c^*(X; Z)$. Более точно: группа $H^0(S^n; Z)$ порождается единицей, а $H^n(S^n; Z)$ — некоторым элементом u , для которого $u \cup u = 0$.

Поскольку $H^*(S^n; Z)$ — группа без кручения, то

$$\alpha: H^*(S^n; Z) \otimes H^*(S^n; Z) \rightarrow H^*(S^n \times S^n; Z)$$

— изоморфизм градуированных колец. Итерировав этот процесс, можно найти кольцо когомологий любого произведения сфер.

Далее, пусть X — компактное пространство и A — замкнутое подмножество в X , являющееся его ретрактом. Пусть $i: A \rightarrow X$ — включение и $r: X \rightarrow A$ — ретракция. Тогда $H^*(X)$ — прямая сумма групп $\text{Ker } i^*$ и $\text{Im } r^*$, первая из которых — идеал, а вторая — подкольцо. Кроме того, $r^*: H^*(A) \rightarrow H^*(X)$ — мономорфизм.

Это тривиальное наблюдение можно использовать двумя разными способами: (а) для доказательства того, что конкретное подмножество A в X не является ретрактом X ; в этом случае нам должна быть известна структура колец $H^*(A)$ и $H^*(X)$; (б) для определения структуры кольца $H^*(X)$ в случае, когда A — ретракт пространства X (в предположении, что кольцо $H^*(A)$ известно).

Эти соображения можно использовать для вычисления кольца $H^*(S^m \vee S^n \vee S^{m+n})$ ($X \vee Y$ — это букет пространств X и Y), поскольку сферы S^m , S^n и S^{m+n} — ретракты всего пространства. Соответствующее вычисление показывает, что пространства $S^m \vee S^n \vee S^{m+n}$ и $S^m \times S^n$ имеют разный гомотопический тип, несмотря на то что

$$H^q(S^m \vee S^n \vee S^{m+n}; G) \cong H^q(S^m \times S^n; G)$$

для любой группы G и любого q .

Приведем еще один пример. Пусть M_1 и M_2 — компактные связные ориентируемые n -мерные многообразия и $M_1 \# M_2$ — их связная сумма (см. упражнение 8 из § 3.6). Мы уже знаем, что

$$H^q(M_1 \# M_2) \cong H^q(M_1) \oplus H^q(M_2)$$

при $0 < q < n$ и

$$H^q(M_1 \# M_2) \cong H^q(M_1) \cong H^q(M_2)$$

при $q = 0$ или $q = n$.

Предлагаем читателю в качестве упражнения доказать, что эти изоморфизмы сохраняют $\cup$ -умножение (в очевидном смысле), а также что $u \cup v = 0$ в $H^{p+q}(M_1 \# M_2)$ при $u \in H^p(M_1)$ и $v \in H^q(M_2)$, $p, q > 0$. Этот результат позволяет найти кольцо целочисленных когомологий для любого компактного связного ориентируемого 2-многообразия. В самом деле, всякое такое многообразие гомеоморфно S^2 или связной сумме торов $S^1 \times S^1$, а структура колец $H^*(S^2)$ и $H^*(S^1 \times S^1)$ нам известна. Оставляем читателю формулировку окончательного результата.

Упражнения

1. Пусть M_1 и M_2 — компактные связные ориентируемые 2-многообразия, ни одно из которых не гомеоморфно сфере, и пусть $f: M_2 \rightarrow M_1$ — непрерывное отображение. Покажите, что гомоморфизм $f^*: H^2(M_1) \rightarrow H^2(M_2)$ полностью определяется гомоморфизмом $f^*: H^1(M_1) \rightarrow H^1(M_2)$. Пусть M_1 — связная сумма

n торов, где $n \geq 2$. Докажите, что существует такой гомоморфизм $h: H^1(M_1) \rightarrow H^1(M_2)$, для которого $h \neq f^*$ при любом непрерывном отображении f .

2. Пусть $x_0 \in S^m$ и $y_0 \in S^n$ — произвольные точки ($n, m \geq 1$). Докажите, что подмножество

$$S^m \vee S^n = (S^m \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times S^n)$$

не является ретрактом пространства $S^m \times S^n$.

§ 7.8. Теоремы единственности для внешнего и внутреннего умножений

В этом параграфе условимся рассматривать внешнее умножение как набор гомоморфизмов

$$\times: H_c^p(X; G_1) \otimes H_c^q(Y; G_2) \rightarrow H_c^{p+q}(X \times Y; G).$$

Здесь G_1, G_2 и G — фиксированные раз и навсегда абелевы группы. Предполагается, что гомоморфизм $\times$ определен для любых пар локально компактных пространств X и Y и любых целых p и q . Будем также предполагать, что гомоморфизмы $\times$ обладают свойствами (1)–(4) из § 7.3 (относительно свойств (5) и (6) не делается никаких предположений).

7.8. Теорема. Пусть $\times$ и $\times'$ — внешние умножения, совпадающие в случае, когда $X = Y = P$ — одноточечное пространство. Тогда $\times = \times'$.

В доказательстве не используется никаких новых идей, поэтому мы приведем лишь набросок рассуждений. Доказательство проводится последовательными шагами, на каждом из которых совпадение гомоморфизмов устанавливается на все более и более широких классах пространств.

Шаг 1. Если X и Y — евклидовы пространства, то $\times$ и $\times'$ совпадают.

Доказательство. Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n . По определению $\mathbb{R}^0$ — пространство, состоящее из единственной точки. Мы должны доказать, что

$$\times = \times': H_c^m(\mathbb{R}^m; G_1) \otimes H_c^n(\mathbb{R}^n; G_2) \rightarrow H_c^{m+n}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; G).$$

Докажем это индукцией по размерности. По содержащемуся в теореме предположению утверждение верно при $m = n = 0$. Обозначим через W^n верхнее замкнутое полупространство в $\mathbb{R}^n$:

$$W^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}.$$

Отождествим $\mathbb{R}^{n-1}$ с подмножеством $x_n = 0$ в W^n . Тогда $W^n \setminus \mathbb{R}^{n-1}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^n$. Легко видеть, что $H_c^q(W^n) = 0$ при всех

$q^1)$. Из точной последовательности пары заключаем, что отображение

$$\delta_{W^n, R^{n-1}}: H_c^{n-1}(R^{n-1}) \xrightarrow{\cong} H_c^n(W^n \setminus R^{n-1})$$

есть изоморфизм. Так как $W^n \setminus R^{n-1} = R^n$, этот изоморфизм вместе со свойствами (3) и (4) из § 7.3 позволяет сделать переход от R^{n-1} к R^n . Оставляем читателю детали.

Шаг 2. Пусть X и Y — пространства с клеточными разбиениями K и L . Тогда

$$\begin{aligned} \times = \times': H_c^m(K^m \setminus K^{m-1}) \otimes H_c^n(L^n \setminus L^{n-1}) &\longrightarrow \\ &\longrightarrow H_c^{m+n}(K^m \times L^n \setminus (K^m \times L^{n-1} \cup K^{m-1} \times L^n)). \end{aligned}$$

Доказательство. Поскольку $K^m \setminus K^{m-1}$ и $L^n \setminus L^{n-1}$ — дизъюнктные объединения пространств, гомеоморфных соответственно R^m и R^n , утверждение следует из шага 1 и свойства (2).

Шаг 3. Пусть X и Y — пространства, допускающие конечномерные клеточные разбиения K и L . Тогда

$$\times = \times': H_c^m(X) \otimes H_c^n(Y) \longrightarrow H_c^{m+n}(X \times Y).$$

Доказательство вытекает из шага 2 и теоремы 7.4.

Шаг 4. Пусть X и Y — компактные пространства. Тогда

$$\times = \times': H^m(X) \otimes H^n(Y) \longrightarrow H^{m+n}(X \times Y).$$

Доказательство вытекает из шага 3 с помощью уже применявшегося ранее предельного перехода.

Шаг 5. Общий случай.

В этом случае утверждение получается из шага 4 с помощью одноточечной компактификации Александрова.

Таким образом, установлено, что внешнее умножение полностью определяется его структурой на группах коэффициентов. Перейдем теперь к $\cup$ -умножению. Мы рассмотрим этот случай, опираясь на взаимно однозначное соответствие (в смысле, который мы сейчас уточним) между внешними и внутренними умножениями.

С этой целью рассмотрим внешние умножения, обладающие лишь свойством (1) из § 7.3, и внутренние умножения, обладающие свойством (1) из § 7.4. Более точно, *внешнее умножение* — это гомоморфизм

$$\times: H_c^p(X; G_1) \otimes H_c^q(Y; G_2) \longrightarrow H_c^{p+q}(X \times Y; G).$$

¹⁾ См. доказательство теоремы 2.14. — Прим. перев.

определенный для любых двух локально компактных хаусдорфовых пространств X и Y и любых целых чисел p и q . (Группы коэффициентов G_1 , G_2 и G фиксированы.) Требуется выполнение лишь следующего условия естественности: если $f: X \rightarrow X'$ и $g: Y \rightarrow Y'$ — собственные отображения, то для любых $u \in H_c^p(X'; G_1)$ и $v \in H_c^q(Y'; G_2)$

$$(14) \quad (f^*u) \times (g^*v) = (f \times g)^*(u \times v).$$

Аналогично, *внутреннее умножение* — это гомоморфизм

$$\cup: H_c^p(R; G_1) \otimes H_c^q(S; G_2) \rightarrow H_c^{p+q}(R \cap S; G),$$

определенный для любых локально компактных подмножеств R и S локально компактного пространства X и любых целых p, q . Требуется выполнение лишь следующего условия естественности. Пусть $f: X \rightarrow X'$ — такое непрерывное отображение локально компактных пространств, что индуцированные отображения

$$f_1: R \rightarrow R', \quad f_2: S \rightarrow S', \quad f_3: R \cap S \rightarrow R' \cap S'$$

являются собственными. Тогда

$$(15) \quad (f_1^*u) \cup (f_2^*v) = f_3^*(u \cup v)$$

для любых $u \in H_c^p(R'; G_1)$ и $v \in H_c^q(S'; G_2)$.

Как уже было выяснено, всякое внешнее умножение в указанном выше смысле приводит к $\cup$ -умножению, и в этом, в сущности, заключена процедура определения $\cup$ -умножения в § 7.4. Покажем теперь, что и, наоборот, всякое $\cup$ -умножение (в указанном выше смысле) приводит к внешнему умножению. Пусть $u \in H_c^p(X; G_1)$ и $v \in H_c^q(Y; G_2)$. Пусть X' и Y' — такие компактные хаусдорфовы пространства, что $X \subset X'$ и $Y \subset Y'$, и пусть

$$\pi_1: X \times Y' \rightarrow X, \quad \pi_2: X' \times Y \rightarrow Y$$

— проекции произведений соответственно на первый и второй множители. Так как пространства X' и Y' компактны, то эти проекции — *собственные* отображения. Поскольку $X \times Y'$ и $X' \times Y$ — локально компактные подмножества в $X' \times Y'$ и

$$(X' \times Y) \cap (X \times Y') = X \times Y,$$

то определено произведение $(\pi_1^*u) \cup (\pi_2^*v)$, являющееся элементом группы $H_c^{p+q}(X \times Y; G)$. Положим

$$(16) \quad u \times v = (\pi_1^*u) \cup (\pi_2^*v).$$

Определенное таким образом внешнее умножение будем называть *ассоциированным* с заданным $\cup$ -умножением.

Необходимо проверить независимость этого определения от выбора компактов X' и Y' . Предположим, что

$$X \subset X' \subset X'', \quad Y \subset Y' \subset Y'',$$

где X', X'', Y', Y'' — компактные пространства. Пусть $\pi_1: X \times Y' \rightarrow X$, $\pi_2: X' \times Y \rightarrow Y$ — определенные выше отображения и $\pi'_1: X \times Y'' \rightarrow X$, $\pi'_2: X'' \times Y \rightarrow Y$ — проекции, определяемые аналогичным образом. Свойство естественности $\cup$ -умножения, т. е. соотношение (15), влечет за собой равенство

$$(\pi_1^* u) \cup (\pi_2^* v) = (\pi_1'^* u) \cup (\pi_2'^* v)$$

(в качестве фигурирующего в равенстве (15) отображения f берем включение). Таким образом, можно считать, что X и Y плотны в X' и Y' (в противном случае заменим X' и Y' их замыканиями $\bar{X}$ и $\bar{Y}$). Пусть $\dot{X}$ — одноточечная компактификация Александера пространства X , если X некомпактно, и $\dot{X} = X$ в противном случае. Аналогичным образом определим пространство $\dot{Y}$. Если X и Y плотны в компактных пространствах X' и Y' , то существуют единственные собственные отображения

$$f: X' \rightarrow \dot{X}, \quad g: Y' \rightarrow \dot{Y},$$

продолжающие тождественные гомеоморфизмы $X \rightarrow X$ и $Y \rightarrow Y$. Следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} X \times Y' & & X' \times Y \\ \downarrow 1 \times g & \searrow \pi_1 & \downarrow f \times 1 \\ X \times \dot{Y} & \xrightarrow{\pi_1'} & \dot{X} \times Y \\ & \nearrow \pi_2' & \uparrow \pi_2 \end{array}$$

Имеем

$$\begin{aligned} (\pi_1^* u) \cup (\pi_2^* v) &= [(1 \times g)^* \pi_1'^* (u)] \cup [(f \times 1)^* \pi_2'^* (v)] = \\ &= \pi_1'^* (u) \cup \pi_2'^* (v). \end{aligned}$$

Здесь мы снова воспользовались равенством (15), примененным к отображению

$$f \times g: X' \times Y' \rightarrow \dot{X} \times \dot{Y}.$$

Этим завершается доказательство независимости определения (16) от выбора X' и Y' .

Остается проверить естественность построенного внешнего умножения. Пусть $f: X \rightarrow X_0$ и $g: Y \rightarrow Y_0$ — собственные

отображения, $u \in H_c^p(X_0; G_1)$ и $v \in H_c^q(Y_0; G_2)$. Мы должны проверить равенство (14). Отображения f и g единственным образом продолжаются до отображений

$$\tilde{f}: \dot{X} \rightarrow \dot{X}_0, \quad \tilde{g}: \dot{Y} \rightarrow \dot{Y}_0$$

одноточечных компактификаций. Диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\pi_1} & X \\ \downarrow f \times g & & \downarrow f \\ X_0 \times \dot{Y}_0 & \xrightarrow{\pi_{01}} & X_0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \dot{X} \times Y & \xrightarrow{\pi_2} & Y \\ \downarrow \tilde{f} \times g & & \downarrow g \\ \dot{X}_0 \times Y_0 & \xrightarrow{\pi_{02}} & Y_0 \end{array}$$

коммутативны. Требуемое утверждение вытекает из следующего вычисления:

$$\begin{aligned} (f^*u) \times (g^*v) &= (\pi_1^*f^*u) \cup (\pi_2^*g^*v) = \\ &= [(f \times g)^* \pi_{01}^*u] \cup [(f \times g)^* \pi_{02}^*v] = \\ &= (f \times g)^*[(\pi_{01}^*u) \cup (\pi_{02}^*v)] = (f \times g)^*(u \times v). \end{aligned}$$

Таким образом, свойство естественности ассоциированного внешнего умножения доказано.

Предположим теперь, что задано некоторое внешнее умножение. Построим ассоциированное с ним $\cup$ -умножение, на основе которого определим новое внешнее умножение. Возникает естественный вопрос о совпадении этих двух внешних умножений. Аналогично, по заданному $\cup$ -умножению можно построить ассоциированное внешнее умножение, которое приводит к новому $\cup$ -умножению. Совпадают ли эти два $\cup$ -умножения? Покажем, что ответ на оба вопроса утвердительный. Таким образом, между внешними и внутренними умножениями имеется естественное взаимно однозначное соответствие.

Итак, пусть задано некоторое внешнее умножение $\times$. Определим для него, как в § 7.4, $\cup$ -умножение, после чего определим новое внешнее умножение $\times'$ равенством (16). Тогда

$$u \times' v = (\pi_1^*u) \cup (\pi_2^*v) = \Delta^*[(\pi_1^*u) \times (\pi_2^*v)],$$

где $\Delta: X \times Y \rightarrow (X \times Y') \times (X' \times Y)$ — диагональное вложение. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta^*[(\pi_1^*u) \times (\pi_2^*v)] &= \Delta^*(\pi_1 \times \pi_2)^*(u \times v) = \\ &= [(\pi_1 \times \pi_2) \Delta]^*(u \times v) = u \times v, \end{aligned}$$

поскольку отображение $(\pi_1 \times \pi_2) \Delta$ тождественно.

Предположим далее, что задано $\cup$ -умножение. Определим равенством (16) внешнее умножение $\times$, а затем в соответствии

с § 7.4 построим новое $\cup'$ -умножение. Пусть R и S — локально компактные подмножества пространства X и $u \in H_c^p(R; G_1)$, $v \in H_c^q(S; G_2)$. Удобно считать, что пространство X компактно. В противном случае можно перейти к одноточечной компактификации. Это не повлияет на определение $\cup$ -умножения $H_c^p(R) \otimes H_c^q(S) \rightarrow H_c^{p+q}(R \cap S)$. (Этот факт мы могли бы отметить и раньше.) Таким образом, замыкания $\bar{R}$ и $\bar{S}$ компактны. Имеем

$$\begin{aligned} u \cup' v &= \Delta^*(u \times v) = \Delta^*[(\pi_1^* u) \cup (\pi_2^* v)] = \\ &= (\Delta_1^* \pi_1^* u) \cup (\Delta_2^* \pi_2^* v) = ((\pi_1 \wedge 1)^* u) \cup ((\pi_2 \wedge 1)^* v) = \\ &= (i_1^* u) \cup (i_2^* v) = u \cup v, \end{aligned}$$

где

$$\Delta: R \cap S \rightarrow R \times S, \quad \Delta_1: R \cap \bar{S} \rightarrow R \times \bar{S}, \quad \Delta_2: \bar{R} \cap S \rightarrow \bar{R} \times S$$

— диагональные вложения,

$$\pi_1: R \times \bar{S} \rightarrow R, \quad \pi_2: \bar{R} \times S \rightarrow S$$

— проекции и

$$i_1: R \cap \bar{S} \rightarrow R, \quad i_2: \bar{R} \cap S \rightarrow S$$

— включения.

Таким образом, нами получен следующий результат

7.9. Теорема. *Существует взаимно однозначное соответствие между внешними умножениями и $\cup$ -умножениями (в указанном выше смысле).*

Мы уже видели, что свойства внешнего умножения (2), (3) и (4) из § 7.3 обеспечивают аналогичные свойства (2), (3) и (4) из § 7.4 для $\cup$ -умножения. Покажем, что обратное утверждение также верно.

Сначала покажем, что свойство (2) $\cup$ -умножения (см. § 7.4) влечет за собой свойство (2) из § 7.3 для внешнего умножения. Пусть $U \subset X$ и $V \subset Y$ — открытые подмножества, $u \in H_c^p(U; G_1)$ и $v \in H_c^q(V; G_2)$. Предположим, что X и Y содержатся в компактных пространствах X' и Y' соответственно. Тогда диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H_c^p(U \times Y') \xleftarrow{\pi_1^*} H_c^p(U) & & H_c^q(X' \times V) \xleftarrow{\pi_2^*} H_c^q(V) \\ \downarrow \tau_{U \times Y', X \times Y'} & & \downarrow \tau_{X' \times V, X' \times Y} \\ H_c^p(X \times Y') \xleftarrow{\pi_1^*} H_c^p(X) & & H_c^q(X' \times Y) \xleftarrow{\pi_2^*} H_c^q(Y) \end{array}$$

коммутативны. Требуемый результат следует из такого вычисления:

$$\begin{aligned}\tau_{U \times V, X \times Y}(u \times v) &= \tau_{U \times V, X \times Y}(\pi_1^* u \cup \pi_2^* v) = \\ &= (\tau_{U \times Y', X \times Y} \pi_1^* u) \cup (\tau_{X' \times V, X' \times Y} \pi_2^* v) = \\ &= (\pi_1^* \tau_{U, X} u) \cup (\pi_2^* \tau_{V, Y} v) = (\tau_{U, X} u) \times (\tau_{V, Y} v).\end{aligned}$$

Далее покажем, что из свойства (3) $\cup$ -умножения вытекает аналогичное свойство для внешнего умножения. Пусть X и Y — локально компактные пространства, A — замкнутое подмножество в X , $U = X \setminus A$, $u \in H_c^p(A; G_1)$ и $v \in H_c^q(Y; G_2)$. Как и раньше, можно считать, что X и Y содержатся в компактных пространствах X' и Y' соответственно. Пусть, как обычно, $\pi_2: X' \times Y' \rightarrow Y'$ — проекция. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_c^p(A \times Y') & \xleftarrow{\pi_1^*} & H_c^p(A) \\ \downarrow \delta_{X \times Y', A \times Y'} & & \downarrow \delta_{X, A} \\ H_c^{p+1}(U \times Y') & \xleftarrow{\pi_1^*} & H_c^{p+1}(U) \end{array}$$

Утверждение получается из следующего вычисления:

$$\begin{aligned}(\delta_{X, A} u) \times v &= (\pi_1^* \delta_{X, A} u) \cup (\pi_2^* v) = \\ &= (\delta_{X \times Y', A \times Y'} \pi_1^* u) \cup (\pi_2^* v) = \\ &= \delta_{X \times Y, A \times Y} [\pi_1^* u \cup \pi_2^* v] = \delta_{X \times Y, A \times Y}(u \times v).\end{aligned}$$

Доказательство того, что свойство (4) $\cup$ -умножения влечет за собой свойство (4) для внешнего умножения, проводится аналогично, и мы оставляем его читателю.

Таким образом, нами завершено доказательство существования взаимно однозначного соответствия между внешними умножениями, обладающими свойствами (1)–(4) из § 7.3, и $\cup$ -умножениями, обладающими свойствами (1)–(4) из § 7.4. Комбинация этого утверждения с теоремой 7.8 дает следующий результат.

7.10. Теорема. Пусть $\cup$ и $\cup'$ — два внутренних умножения, обладающих свойствами (1)–(4) из § 7.4 и совпадающих на одноточечном пространстве P . Тогда $\cup = \cup'$.

Обе эти теоремы единственности показывают, между прочим, что все другие свойства внешнего и внутреннего умножений (например, ассоциативность, антикоммутативность, существование единицы) — следствия свойств (1)–(4)¹⁾.

¹⁾ Материал этого параграфа принадлежит Стирроду и Эйленбергу (не опубликовано).

§ 7.9. Дополнение: $\cap$ -умножение для локально компактных пространств

Материал этого параграфа по смыслу принадлежит настоящей главе. Однако он не будет использован вплоть до гл. 9 и 10. Читателю предлагается пропустить его при первом чтении и вернуться к нему позже. $\cap$ -умножение в некотором смысле двойственно к рассмотренному в этой главе $\cup$ -умножению. В гл. 10 будут определены другие $\cap$ -умножения для локально компактных пространств, более интересные с точки зрения применений.

Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство, а R и S — локально компактные подмножества X . Обсуждаемое в § 7.4 $\cup$ -умножение можно определить в терминах целочисленных коцепей, т. е. с помощью отображения

$$C_c^p(R) \otimes C_c^q(S) \xrightarrow{\cup} C_c^{p+q}(R \cap S)$$

(ср. замечание (1) в § 7.4). Напомним также, что для $u \in C_c^p(R)$ и $v \in C_c^q(S)$ справедлива формула

$$\delta(u \cup v) = (\delta u) \cup v + (-1)^p u \cup (\delta v).$$

Используя это $\cup$ -умножение, определим $\cap$ -умножение

$$\cap: C_{p+q}(R \cap S; G_1) \otimes C_c^p(R; G_2) \rightarrow C_q(S; G_1 \otimes G_2)$$

формулой

$$\langle u \cap (v \otimes g), w \rangle = \langle u, v \cup w \rangle \otimes g$$

для любых

$$u \in C_{p+q}(R \cap S; G_1) = \text{Hom}(C_c^{p+q}(R \cap S), G_1),$$

$$v \otimes g \in C_c^p(R) \otimes G_1 = C_c^p(R; G_1)$$

и $w \in C_c^q(S)$. Здесь G_1 и G_2 — любые абелевы группы. Кроме того, мы воспользовались следующим довольно удобным обозначением: если A и B — абелевы группы, $u \in \text{Hom}(A, B)$ и $a \in A$, то $\langle u, a \rangle \in B$ — значение гомоморфизма u на элементе a . Приведенная выше формула для кограницы $\cup$ -произведения коцепей дает следующее соотношение для значения граничного оператора на $\cap$ -произведении:

$$\partial(u \cap v) = (-1)^p [(\partial u) \cap v - u \cap \partial v].$$

Здесь p — размерность элемента v . Из этой формулы следует, что если u — цикл, а v — коцикл, то $u \cap v$ — цикл, т. е. $\partial(u \cap v) = 0$, если $\partial u = 0$ и $\delta v = 0$. Более того, класс гомологий цикла $u \cap v$ зависит лишь от класса гомологий цикла u и класса

когомологий коцикла v . Таким образом, определен гомоморфизм

$$\frown: H_{p+q}(R \cap S; G_1) \otimes H_c^p(R; G_2) \rightarrow H_q(S; G_1 \otimes G_2),$$

называемый $\frown$ -умножением. Перечислим его основные свойства.

(1) *Естественность*. Для определенного выше $\frown$ -умножения имеют место два различных вида естественности.

(а) *Естественность по отношению к собственным отображениям*. Пусть X, R и S такие же, как и раньше, и X' — локально компактное хаусдорфово пространство с локально компактными подмножествами R' и S' . Пусть $f: (X; R, S) \rightarrow (X'; R', S')$ — такое непрерывное отображение, что индуцированные им отображения

$$f_1: R \rightarrow R', \quad f_2: S \rightarrow S', \quad f_3: R \cap S \rightarrow R' \cap S'$$

собственны. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} H_{p+q}(R \cap S; G_1) \otimes H_c^p(R; G_2) & \xrightarrow{\frown} & H_q(S; G_1 \otimes G_2) \\ \downarrow f_{3*} & & \uparrow f_1^* & & \downarrow f_{2*} \\ H_{p+q}(R' \cap S'; G_1) \otimes H_c^p(R'; G_2) & \xrightarrow{\frown} & H_q(S'; G_1 \otimes G_2) \end{array}$$

коммутативна, т. е. для любых элементов $u \in H_{p+q}(R \cap S; G_1)$ и $v \in H_c^p(R'; G_2)$ справедливо равенство

$$f_{3*}[u \frown f_2^*v] = (f_{1*}u) \frown v.$$

Предоставляем читателю проверить эту формулу.

(б) *Естественность относительно включений открытых подмножеств*. Пусть, как и выше, $(X; R, S)$ — триада локально компактных пространств, U и V — открытые подмножества в R и S соответственно (в топологиях, индуцированных на множествах R и S пространством X). Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} H_{p+q}(U \cap V) \otimes H_c^p(U) & \rightarrow & H_q(V) \\ \uparrow \rho & & \downarrow \tau & & \uparrow \rho \\ H_{p+q}(R \cap S) \otimes H_c^p(R) & \rightarrow & H_q(S) \end{array}$$

коммутативна. Другими словами, для любых $u \in H_{p+q}(R \cap S; G_1)$ и $v \in H_c^p(U; G_2)$ справедливо равенство

$$\rho[u \frown \tau v] = (\rho u) \frown v.$$

Стандартная проверка этой формулы оставляется читателю.

(2) *Ассоциативность*. Пусть R, S и T — локально компактные подмножества пространства X . Тогда в группе $H_r(T; G_1 \otimes G_2 \otimes G_3)$ имеет место равенство

$$u \frown (v \frown w) = (u \frown v) \frown w,$$

где $u \in H_n(R \cap S \cap T; G_1)$, $v \in H_c^p(R; G_2)$, $w \in H_c^q(S; G_3)$ и $n = p + q + r$. Эта формула — простое следствие ассоциативности $\cup$ -умножения коцепей.

(3) *Существование единицы.* Предположим, что $(X; R, S)$ — такая локально компактная триада, что R компактно. Пусть $1 \in H^0(R; \mathbb{Z})$ — единица. Тогда для любого $u \in H_p(R \cap S; G)$

$$u \cap 1 = i_*(u),$$

где $i: R \cap S \rightarrow S$ — включение. Доказательство этого свойства тривиально.

(4) *Соотношения с граничными и кограничными операторами.* Пусть $(X; R, S)$ — локально компактная триада, G_1 и G_2 — произвольные абелевы группы.

(а) Пусть V — подмножество в S , открытое как в S , так и в $R \cup S$, и $B = S \setminus V$ — его замкнутое дополнение в S . Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_{p+q}(R \cap V) \otimes H_c^p(R) & \xrightarrow{\cap} & H_q(V) \\ \downarrow \partial \otimes (-1)^p & & \downarrow \partial \\ H_{p+q-1}(R \cap B) \otimes H_c^p(R) & \xrightarrow{\cap} & H_{q-1}(B) \end{array}$$

коммутативна. Иными словами, если $u \in H_{p+q}(R \cap V; G_1)$ и $v \in H_c^p(R; G_2)$, то

$$\partial(u \cap v) = (-1)^p (\partial u) \cap v.$$

(б) Пусть U — подмножество из R , открытое как в R , так и в $R \cup S$, и $A = R \setminus U$ — его замкнутое дополнение в R . Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_{p+q}(A \cap S) \otimes H_c^p(A) & \xrightarrow{\cap} & H_q(S) \\ \uparrow \partial & & \downarrow \delta \quad \parallel \\ H_{p+q+1}(U \cap S) \otimes H_c^{p+1}(U) & \xrightarrow{\cap} & H_q(S) \end{array}$$

коммутативна, т. е.

$$(\partial u) \cap v = u \cap (\delta v)$$

для $u \in H_{p+q+1}(U \cap S; G_1)$ и $v \in H_c^p(A; G_2)$,

Приведем доказательство свойства (4б), оставляя аналогичное доказательство свойства (4а) читателю. Прежде всего напомним, что коммутативна следующая диаграмма, состоящая из двух точных последовательностей коцепных комплексов

(см. § 1.4):

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow & C_c^*(U) \otimes G_2 & \xrightarrow{\sigma} & C_c^*(R) \otimes G_2 & \xrightarrow{j} & [C_c^*(R)/Q^*(R, A)] \otimes G_2 & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow \varphi_1 & & \parallel & & \downarrow \varphi_2 & \\
 0 \rightarrow & C_c^*(R, A) \otimes G_2 & \xrightarrow{k} & C_c^*(R) \otimes G_2 & \xrightarrow{i^\#} & C_c^*(A) \otimes G_2 & \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Гомоморфизмы, обозначенные вертикальными стрелками, индуцируют изоморфизмы групп когомологий. Имеется аналогичная диаграмма цепных комплексов:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow & C_*(A \cap S; G_1) & \xrightarrow{i^\#} & C_*(R \cap S; G_1) & \xrightarrow{k^*} & C_*(R \cap S, A \cap S; G_1) & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow \varphi_2^* & & \parallel & & \downarrow \varphi_1^* & \\
 0 \rightarrow & \text{Hom} \left(\frac{C_c^*(R \cap S)}{Q^*(R \cap S, A \cap S)}, G_1 \right) & \xrightarrow{j^*} & C_*(R \cap S; G_1) & \xrightarrow{\sigma^*} & C_*(U \cap S; G_1) & \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Вертикальные стрелки индуцируют изоморфизмы групп гомологий. Поскольку

$$u \in H_{p+q+1}(U \cap S; G_1) \cong H_{p+q+1}(C_*(R \cap S, A \cap S; G_1)),$$

можно выбрать цикл $u_1 \in C_{p+q+1}(R \cap S, A \cap S; G_1)$, принадлежащий классу гомологий u . В силу того, что k^* — эпиморфизм, можно выбрать такую цепь $u_2 \in C_{p+q+1}(R \cap S; G_1)$, что $k^*(u_2) = u_1$. Наконец, пусть u_3 — тот единственный элемент группы $C_{p+q}(A \cap S; G_1)$, для которого $i_\#(u_3) = \partial u_2$. Тогда u_3 представляет класс гомологий $\partial u \in H_{p+q}(A \cap S; G_1)$. Аналогично, поскольку $v \in H_c^p(A; G_2) \cong H^p([C_c^*(R)/Q^*(R, A)] \otimes G_2)$, можно выбрать коцикл $v_1 \in [C_c^*(R)/Q^p(R, A)] \otimes G_2$, представляющий класс v . Из того, что j — эпиморфизм, следует существование такого элемента $v_2 \in C_c^p(R) \otimes G_2$, что $j(v_2) = v_1$. Пусть v_3 — единственный элемент группы $C_c^{p+1}(U) \otimes G_2$, для которого $\sigma(v_3) = \delta v_2$. Тогда v_3 — коцикл, представляющий класс δv . Для элементов группы $C_*(S; G_1 \otimes G_2)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}
 \partial(u_2 \cap v_2) &= (-1)^p [(\partial u_2) \cap v_2 - u_2 \cap (\delta v_2)] = \\
 &= (-1)^p [(i_\# u_3) \cap v_2 - u_2 \cap (\sigma v_3)].
 \end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$(i_\# u_3) \cap v_2 = u_3 \cap i^\# v_2$$

и

$$u_2 \cap (\sigma v_3) = \sigma^* u_2 \cap v_3.$$

Следовательно,

$$u_3 \cap (i^\# v_2) - (\sigma^* u_2) \cap v_3 = (-1)^p \partial(u_2 \cap v_2).$$

Утверждение доказано.

(5) *Двойственность.* Пусть $(X; R, S)$ — локально компактная триада, $u \in H_{p+q}(R \cap S; G_1)$, $v \in H_c^p(R; G_2)$ и $w \in H_c^q(S; G_3)$. Тогда в обозначениях упр. 3 из § 4.11

$$\langle u, v \cup w \rangle = \langle u \cap v, w \rangle \in G_1 \otimes G_2 \otimes G_3.$$

Проверка этого утверждения стандартна.

(6) *$\frown$ -умножение и теорема об универсальных коэффициентах.* Пусть R и S — локально компактные подмножества пространства X . Определим гомоморфизм

$$\text{Hom}(H_c^{p+q}(R \cap S), G_1) \otimes (H_c^p(R) \otimes G_2) \xrightarrow{\Lambda} \text{Hom}(H_c^q(S), G_1 \otimes G_2),$$

обозначаемый через $x \otimes y \rightarrow x \wedge y$, посредством формулы

$$\langle u \wedge (v \otimes g), w \rangle = \langle u, v \cup w \rangle \otimes g.$$

Здесь $u \in \text{Hom}(H_c^{p+q}(R \cap S), G_1)$, $v \in H_c^p(R)$, $g \in G_2$ и $w \in H_c^q(S)$ (все фигурирующие здесь когомологии — с целочисленными коэффициентами). Мы утверждаем, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_{p+q}(R \cap S; G_1) \otimes H_c^p(R; G_2) & \xrightarrow{\Lambda} & H_q(S; G_1 \otimes G_2) \\ \downarrow \alpha_1 & & \uparrow \alpha_2 \\ \text{Hom}(H_c^{p+q}(R \cap S), G_1) \otimes [H_c^p(R) \otimes G_2] & \xrightarrow{\Lambda} & \text{Hom}(H_c^q(S), G_1 \otimes G_2) \end{array}$$

$$\text{Hom}(H_c^{p+q}(R \cap S), G_1) \otimes [H_c^p(R) \otimes G_2] \xrightarrow{\Lambda} \text{Hom}(H_c^q(S), G_1 \otimes G_2)$$

коммутативна. В этой диаграмме α_1 и α_3 — гомоморфизмы из теоремы об универсальных коэффициентах, см. § 4.8. Гомоморфизм α_2 определен в § 4.11. Коммутативность диаграммы проверяется просто. Если α_1 , α_2 и α_3 — изоморфизмы, то $\frown$ -умножение в верхней строке определяется $\cup$ -умножением в целочисленных когомологиях.

Упражнение

Опишите $\frown$ -умножение

$$H_{p+q}(S^n; G_1) \otimes H^p(S^n; G_2) \rightarrow H_q(S^n; G_1 \otimes G_2)$$

для n -мерной сферы S^n . Решите ту же задачу для пространства $S^m \times S^n$.

Когомологии и гомологии пространств общего типа

Глава 8

Когомологии Александера — Спеньера пространств общего типа

§ 8.1. Введение

В предыдущих главах мы рассмотрели теорию когомологий с компактными носителями и двойственную теорию гомологий. Эти теории определены на категории локально компактных хаусдорфовых пространств и их собственных отображений.

Теперь мы рассмотрим теорию когомологий, определяемую коцепями с любыми носителями, не обязательно компактными. Эта теория определена для произвольных пространств и любых непрерывных отображений, локально компактные пространства и их собственные отображения более не занимают особого положения. За подобную общность, конечно, приходится чем-то платить. Например, для получения точной последовательности пары (X, A) , состоящей из пространства и его подпространства, необходимо ввести новый тип групп когомологий — так называемые *относительные* когомологии пары (X, A) . К сожалению, в общем случае группы когомологий пары (X, A) не совпадают с когомологиями пространства $U = X \setminus A$ ¹⁾. Это придает всей теории несколько иной оттенок.

¹⁾ В этом случае группы $H^p(X, A)$ изоморфны когомологиям $H^p_{\Phi}(U)$ множества U с носителями в семействе Φ всех замкнутых множеств пространства X , содержащихся в U . Если $Q^*(X, A)$ — подкомплекс коцепного комплекса $C^*(X)$ (см. § 8.2), состоящий из всех коцепей с носителями в Φ , то $Q^*(X, A) \subset C^*(X, A)$ (см. § 8.2) и сформулированное утверждение может быть доказано таким же образом, как теорема 1.4.

Общая точка зрения на этот счет состоит в следующем (см. [5*] или [3]). Пусть A — открытое или замкнутое подмножество пространства X и $B = X \setminus A$. Если Φ — некоторое семейство замкнутых множеств в X (семейство носителей), то под $\Phi|_B$ понимается семейство всех тех $M \in \Phi$, для которых $M \subset B$. Аналогично, $\Phi \cap A$ — семейство всех множеств вида $M \cap A$, $M \in \Phi$. Оказывается, что для когомологий H^p_{Φ} , определяемых коцепями с носителями в Φ , группы $H^p_{\Phi}(X, A)$ всегда изоморфны когомологиям, определяемым всеми теми коцепями на X , носители которых принадлежат $\Phi|_B$, а

В гл. 1 мы начали с рассмотрения группы $\Phi^p(X; G)$ всех конечнозначных p -функций на X со значениями в G . За пределами категории локально компактных пространств конечнозначные p -функции, по-видимому, больше не пригодны для построения разумной теории когомологий. Вместо этого следует рассматривать либо группы *локально конечнозначных* p -функций, либо группы *всех* p -функций. Для паракомпактных хаусдорфовых пространств оба подхода приводят к одной и той же теории когомологий. В связи с этим может показаться целесообразным выбрать наиболее простой из этих двух подходов и в дальнейшем его придерживаться.

Однако при более внимательном рассмотрении ситуации выясняется, что каждый из них имеет свои преимущества и недостатки. Например, при систематическом изложении $\cup$ - и $\cap$ -умножений для локально компактных пространств (см. часть III) намного проще использовать подход, основанный на рассмотрении локально конечнозначных коцепей. С другой стороны, этот подход имеет тот недостаток, что группы относительных когомологий и точная когомологическая последовательность пары (X, A) определены лишь в случае, когда A — замкнутое подмножество в X , в то время как при втором подходе это ограничение не является необходимым. Кроме того, использование *всех* p -функций упрощает доказательства некоторых основных свойств когомологий.

В связи с этим, по-видимому, наиболее целесообразно дать одновременное изложение обоих подходов. В прошлом, как

группы $H_p^B(A)$ — когомологиям множества A с носителями в $\Phi \cap A$. В частности, если множество A замкнуто, то когомологии подкомплекса коцепей X с носителями в $\Phi|_A$ изоморфны когомологиям открытого множества $B = X \setminus A$ с носителями в $\Phi|_B$. В случае когда Φ — семейство всех замкнутых множеств пространства X , получаются обычные когомологии H^p . Если A — замкнутое подмножество локально компактного пространства X и $\Phi = c$ — семейство всех компактных множеств, получаются когомологии H_c^p , рассмотренные в первой части книги (при этом автоматически $H_c^p(X, A) = H_c^p(X \setminus A)$).

Иная картина наблюдается в теории гомологий локально компактных пространств (и в этом — одно из проявлений двойственности Пуанкаре — Лефшца, см. добавление к гл. 11). Цепи с носителями в $\Phi|_B$ всегда определяют гомологии $H_p^\Phi(B)$ подмножества $B \subseteq X$, а гомологии пары $H_p^\Phi(X, B)$ определяются факторкомплексом комплекса цепей с носителями в Φ по подкомплексу цепей с носителями в $\Phi|_B$. В случае когда множество B замкнуто, группы $H_p^\Phi(X, B)$ изоморфны гомологиям открытого множества $A = X \setminus B$ с носителями в $\Phi \cap A$. Гомологии H_p , рассмотренные в первой части, совпадают с H_p^Φ при условии, что Φ — семейство всех замкнутых множеств. При $\Phi = c$ группы H_p^c изоморфны гомологиям, рассматриваемым в гл. 9. Естественность такого подхода стала ясна после работ [16*], [30*] и подтверждается конструкциями, содержащимися в гл. 6 и [5], а также в [12*]. — Прим. ред

правило, использовали одни лишь группы произвольных p -функций. В учебниках типа книги Спеньера [51] дано ясное изложение начала теории, основанное на этом подходе. Учитывая широкую доступность книги Спеньера, мы отсылаем к ней читателя за некоторыми из наиболее длинных доказательств, чтобы избежать ненужного повторения стандартного материала.

§ 8.2. Основные определения

Для любого топологического пространства X , любой абелевой группы G и любого целого числа $p \geq 0$ обозначим через $\Phi^p(X; G)$ и $\Phi_L^p(X; G)$ соответственно абелеву группу всех p -функций $\varphi: X^{p+1} \rightarrow G$ и ее подгруппу, состоящую из локально конечнозначных p -функций (p -функция φ локально конечнозначна, если каждая точка $x = (x_0, \dots, x_p) \in X^{p+1}$ обладает окрестностью (в топологии произведения X^{p+1}), на которой φ принимает лишь конечное число значений). Эти две группы будут использоваться как основа для определения когомологий пространства X . Хотя обозначение $\Phi^p(X; G)$ противоречит обозначениям¹⁾ из гл. 1, это не приведет к недоразумениям. Заметим, что на компактном пространстве X всякая локально конечнозначная p -функция конечнозначна.

Определим кограничный оператор и носитель p -функции так же, как в гл. 1. Если $\varphi \in \Phi^p(X; G)$, то $\delta\varphi \in \Phi^{p+1}(X; G)$ определяется формулой

$$(\delta\varphi)(x_0, \dots, x_{p+1}) = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \varphi(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{p+1}),$$

где «крышка» над x_i означает, что этот аргумент пропущен. Как и в гл. 1, $\delta\delta = 0$. Легко проверяется также, что локальная конечнозначность φ обеспечивает это свойство для $\delta\varphi$, т. е. δ отображает подгруппу $\Phi_L^p(X; G)$ в $\Phi_L^{p+1}(X; G)$. Носитель $|\varphi|$ функции $\varphi \in \Phi^p(X; G)$ определяется обычным правилом: $x \notin |\varphi|$ тогда и только тогда, когда существует такая окрестность V точки x , что $\varphi(x_0, \dots, x_p) = 0$ для любых $x_0, \dots, x_p \in V$. Нетрудно доказать, что носитель p -функции обладает следующими свойствами, которые уже перечислялись в гл. 1:

- (1) $|\varphi|$ — замкнутое подмножество пространства X ;
- (2) $|0| = \emptyset$ — пустое множество;
- (3) $|\varphi \pm \psi| \subset |\varphi| \cup |\psi|$;
- (4) $|\delta\varphi| \subset |\varphi|$.

¹⁾ Группа всех p -функций обозначалась в части I через $\Phi^p(X; G)$ (см. пример 1 в § 6.6). Символ $\Phi^p(X; G)$ использовался для обозначения группы конечнозначных p -функций (§ 1.1). — Прим. перев.

Так же как в гл. 1, определим

$$\begin{aligned}\Phi^p(X; G) &= \{\varphi \in \Phi^p(X; G) \mid |\varphi| = \emptyset\}, \\ \Phi_{0L}^p(X; G) &= \Phi_0^p(X; G) \cap \Phi_L^p(X; G), \\ C^p(X; G) &= \Phi^p(X; G) / \Phi_0^p(X; G), \\ C_L^p(X; G) &= \Phi_L^p(X; G) / \Phi_{0L}^p(X; G).\end{aligned}$$

Кограничный оператор δ индуцирует кограничные операторы на факторгруппах $C^p(X; G)$ и $C_L^p(X; G)$, которые мы продолжаем обозначать тем же символом:

$$\begin{aligned}\delta: C^p(X; G) &\longrightarrow C^{p+1}(X; G), \\ \delta: C_L^p(X; G) &\longrightarrow C_L^{p+1}(X; G).\end{aligned}$$

Таким образом, имеем два коцепных комплекса

$$\begin{aligned}C^*(X; G) &= \{C^p(X; G), \delta\}, \\ C_L^*(X; G) &= \{C_L^p(X; G), \delta\}.\end{aligned}$$

Оба комплекса будут называться *комплексами коцепей Александра — Спеньера пространства X с коэффициентами в G* . При необходимости различать их будем называть первый комплексом *всех* коцепей Александра — Спеньера, а второй — комплексом *локально конечнозначных коцепей* Александра — Спеньера; будем употреблять и некоторые другие равноценные названия. Группы когомологий этих комплексов будем обозначать соответственно через $H^p(X; G)$ и $H_L^p(X; G)$.

Заметим, что $C_L^*(X; G)$ — подкомплекс комплекса $C^*(X; G)$. В § 8.3 мы докажем, что для паракомпактного хаусдорфова пространства X отображение включения $C_L^*(X; G) \longrightarrow C^*(X; G)$ для всех p индуцирует изоморфизм $H_L^p(X; G) \cong H^p(X; G)$. Таким образом, эти коцепные комплексы по существу приводят к одному и тому же результату. Тем не менее придется использовать оба комплекса по причинам, изложенным в § 8.1.

Так же как в гл. 1, определение носителей элементов группы $\Phi^p(X; G)$ приводит к определению носителей элементов факторгрупп $C^p(X; G)$ и $C_L^p(X; G)$. Основное различие между рассматриваемой теорией и теорией, рассмотренной в предыдущих главах, в терминах носителей выражается в том, что теория, изложенная в предыдущих главах, определялась коцепями с *компактными* носителями, в то время как рассматриваемая в этой части книги теория основана на использовании коцепей, имеющих в качестве носителей *произвольные замкнутые множества*.

Рассмотрим гомоморфизмы, индуцированные непрерывными отображениями. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — произвольное отображение (не обязательно непрерывное). Оно индуцирует гомоморфизм $f^\#$: $\Phi^p(Y; G) \rightarrow \Phi^p(X; G)$, определенный формулой

$$(f^\# \varphi)(x_0, \dots, x_p) = \varphi(fx_0, \dots, fx_p)$$

для любых $x_0, \dots, x_p \in X$. Этот гомоморфизм, очевидно, коммутирует с кограничным оператором. Предположим, что отображение f непрерывно. Тогда легко проверить, что $f^\#$ отображает подгруппу $\Phi_L^p(Y; G)$ в $\Phi_L^p(X; G)$. Кроме того,

$$|f^\# \varphi| \subset f^{-1}(|\varphi|)$$

для любой функции $\varphi \in \Phi^p(Y; G)$. Следовательно, $f^\#$ отображает подгруппу $\Phi_0^p(Y; G)$ в $\Phi_0^p(X; G)$. Отсюда вытекает, что гомоморфизм $f^\#$ определяет коцепные отображения

$$f^\#: C^*(Y; G) \rightarrow C^*(X; G),$$

$$f^\#: C_L^*(Y; G) \rightarrow C_L^*(X; G)$$

и, следовательно, индуцирует (как обычно) гомоморфизмы

$$f^*: H^p(Y; G) \rightarrow H^p(X; G),$$

$$f^*: H_L^p(Y; G) \rightarrow H_L^p(X; G),$$

обладающие всеми стандартными свойствами функториальности. Заметим, что для корректного определения гомоморфизма f^* нет никакой нужды требовать *собственности* отображения f .

Теперь мы готовы к определению групп относительных когомологий и точной когомологической последовательности пары. Пусть A — произвольное подмножество пространства X . Рассмотрим коцепные отображения

$$i^\#: C^*(X; G) \rightarrow C^*(A; G),$$

$$i^\#: C_L^*(X; G) \rightarrow C_L^*(A; G),$$

индуцированные включением $i: A \rightarrow X$. Легко проверяется, что при любом p гомоморфизм $i^\#$ отображает $C^p(X; G)$ на всю группу $C^p(A; G)$. Более того, если A — *замкнутое* подмножество в X , то $i^\#$ отображает подгруппу $C_L^p(X; G)$ на $C_L^p(A; G)$. Простые примеры показывают, что для *незамкнутых* подмножеств A пространства X гомоморфизм $i^\#: C_L^p(X; G) \rightarrow C_L^p(A; G)$, вообще говоря, не является эпиморфизмом. Имея в виду эти факты, мы можем дать следующие определения:

(1) для любого пространства X и его подмножества A пусть $C^*(X, A; G)$ — ядро коцепного отображения

$$i^\#: C^*(X; G) \rightarrow C^*(A; G)$$

(2) для любого пространства X и его замкнутого подпространства A пусть $C_L^*(X, A; G)$ — ядро коцепного отображения $i^\#: C_L^*(X; G) \rightarrow C_L^*(A; G)$. Таким образом, для незамкнутых подмножеств A пространства X комплекс $C_L^*(X, A; G)$ не определен.

Обозначим p -мерные когомологии коцепных комплексов $C^*(X, A; G)$ и $C_L^*(X, A; G)$ соответственно через $H^p(X, A; G)$ и $H_L^p(X, A; G)$.

Согласно данным выше определениям, имеем короткие точные последовательности

$$0 \rightarrow C^*(X, A; G) \xrightarrow{i^\#} C^*(X; G) \xrightarrow{i^\#} C^*(A; G) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow C_L^*(X, A; G) \xrightarrow{i^\#} C_L^*(X; G) \xrightarrow{i^\#} C_L^*(A; G) \rightarrow 0.$$

Переходя к когомологиям, получим соответствующие точные когомологические последовательности пары (X, A) :

$$\dots \xrightarrow{\delta} H^p(X, A; G) \xrightarrow{i^*} H^p(X; G) \xrightarrow{i^*} H^p(A; G) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}(X, A; G) \rightarrow \dots,$$

$$\dots \xrightarrow{\delta} H_L^p(X, A; G) \xrightarrow{i^*} H_L^p(X; G) \xrightarrow{i^*} H_L^p(A; G) \xrightarrow{\delta} H_L^{p+1}(X, A; G) \rightarrow \dots$$

Отметим еще раз, что вторая из этих последовательностей определена лишь для замкнутых подмножеств A пространства X .

Очевидно, что любое непрерывное отображение пары $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ (т. е. отображение f пространства X в Y , при котором $f(A) \subset B$) индуцирует отображение точной когомологической последовательности пары (Y, B) в точную когомологическую последовательность пары (X, A) в том обычном смысле, что возникающая диаграмма, содержащая две точные последовательности (и напоминающая приставную лестницу), коммутативна.

Упражнения

1. Докажите, что для компактного хаусдорфова пространства X и его замкнутого подмножества A точная когомологическая последовательность

$$\dots \rightarrow H_L^p(X, A) \xrightarrow{i^*} H_L^p(X) \xrightarrow{i^*} H_L^p(A) \xrightarrow{\delta} \dots$$

совпадает с точной когомологической последовательностью, определенной в § 4.1. В частности, в этом случае группа $H_L^p(X, A)$ зависит лишь от пространства $X \setminus A$.

2. Установите непосредственно, что для любого пространства X и его замкнутого подмножества A гомоморфизм $H_L^0(X, A; G) \rightarrow H^0(X, A; G)$, индуцированный включением

$C_L^*(X, A; G) \rightarrow C^*(X, A; G)$, является изоморфизмом. Опишите структуру группы $H^0(X, A; G)$ (ср. § 1.1) в терминах непрерывных отображений пространства X в G , где G рассматривается в дискретной топологии.

3. Для заданного гомоморфизма $\theta: G \rightarrow G'$ абелевых групп постройте индуцированные отображения $\theta_*: H^q(X, A; G) \rightarrow H^q(X, A; G')$ и $\theta_*: H_L^q(X, A; G) \rightarrow H_L^q(X, A; G')$ групп когомологий. Аналогично определите длинные точные последовательности групп когомологий (ср. § 3.6), отвечающие данной короткой точной последовательности $0 \rightarrow G' \xrightarrow{\theta} G \xrightarrow{\eta} G'' \rightarrow 0$ абелевых групп.

4. Покажите, что если G — модуль над кольцом R , то группы $H^p(X, A; G)$ и $H_L^p(X, A; G)$ наследуют естественную структуру R -модуля. Более того, в этом случае гомоморфизм f^* , индуцированный непрерывным отображением f , и кограничные операторы

$$\delta: H^p(A; G) \rightarrow H^{p+1}(X, A; G), \quad \delta: H_L^p(A; G) \rightarrow H_L^{p+1}(X, A; G)$$

являются гомоморфизмами R -модулей.

5. Определим гомоморфизм

$$e: G \rightarrow \Phi_L^0(X; G) = C_L^0(X; G),$$

называемый *аугментацией*, сопоставляя каждому элементу $g \in G$ постоянную функцию $\varphi \in \Phi_L^0(X; G)$, принимающую значение g при любых $x \in X$. Докажите, что для любого $g \in G$ функция $e(g)$ — коцикл и, следовательно, e индуцирует естественный мономорфизм¹⁾ $G \rightarrow H_L^0(X; G)$. Покажите, что этот мономорфизм тогда и только тогда является изоморфизмом, когда пространство X связно (предполагается, что $G \neq 0$).

6. Пусть X — локально компактное пространство. Покажите, что подгруппа группы $C_L^p(X; G)$, состоящая из всех коцепей с компактными носителями, естественно изоморфна группе коцепей с компактными носителями, определенной в гл. 1 с помощью *конечнозначных* функций (другими словами, при определении коцепей с компактными носителями безразлично, используются конечнозначные или локально конечнозначные p -функции).

7. (а) Пусть X — топологическое пространство и $A \subset B \subset X$. Докажите, что следующая последовательность коцепных ком-

¹⁾ Обычно этот гомоморфизм также называют *аугментацией*. Он совпадает, очевидно, с гомоморфизмом, индуцированным отображением X в одноточечное пространство. — *Прим. перев.*

плексов точна ¹⁾):

$$0 \rightarrow C^*(X; B) \xrightarrow{j^\#} C^*(X, A) \xrightarrow{k^\#} C^*(B, A) \rightarrow 0$$

(j и k — включения соответствующих пар). Возникающую точную когомологическую последовательность сравните с описываемой в [14, гл. I, § 10] когомологической последовательностью тройки (X, B, A) , рассматриваемой для когомологий Александра — Спеньера.

(б) Предположим дополнительно, что множества A и B замкнуты в X . Докажите точность следующей последовательности коцепных комплексов:

$$0 \rightarrow C_L^*(X, B) \xrightarrow{j^\#} C_L^*(X, A) \xrightarrow{k^\#} C_L^*(B, A) \rightarrow 0.$$

Снова сравните получающуюся точную когомологическую последовательность с последовательностью, определенной Стирродом и Эйленбергом для тройки (X, B, A) .

§ 8.3. Теорема Гордона об изоморфизме

Ясно, что для замкнутого подмножества A пространства X отображение включения $C_L^*(X, A; G) \rightarrow C^*(X, A; G)$ индуцирует гомоморфизм $H_L^p(X, A; G) \rightarrow H^p(X, A; G)$, естественный в любом возможном смысле (он коммутирует с гомоморфизмами, индуцированными непрерывными отображениями, с отображениями в точных последовательностях пары (X, A) , а также с гомоморфизмом, индуцированным отображением коэффициентов, определенным в упр. 3 предыдущего параграфа).

8.1. Теорема. Если X — паракомпактное хаусдорфово пространство и A — его замкнутое подмножество, то при каждом p естественный гомоморфизм $H_L^p(X, A; G) \rightarrow H^p(X, A; G)$ является изоморфизмом.

Эта теорема доказана Гордоном [20]. Легко видеть, что для компактных X это утверждение сводится к теореме Киси, доказанной в примере 1 из § 6.6 (см. также упр. 1 и 6 предыдущего параграфа).

Доказательство. Достаточно доказать теорему для случая, когда множество A пусто; для того чтобы перейти к общему случаю, надо рассмотреть отображение одной точной когомологической последовательности пары (X, A) в другую и воспользо-

¹⁾ Рассматриваются коцепи с коэффициентами в произвольной абелевой группе. — Прим. перев.

зоваться леммой о пяти гомоморфизмах (лемма 1.9). При этом нужно отметить, что замкнутое подмножество паракомпактного пространства паракомпактно.

Итак, считаем, что $A = \emptyset$. Рассмотрим следующую короткую точную последовательность коцепных комплексов:

$$0 \rightarrow C_L^*(X) \rightarrow C^*(X) \rightarrow C^*(X)/C_L^*(X) \rightarrow 0.$$

В силу точности соответствующей когомологической последовательности достаточно для всех p доказать равенство

$$H^p(C^*(X)/C_L^*(X)) = 0.$$

Напомним, что, согласно определениям из § 8.2,

$$C^*(X; G) = \Phi^*(X; G)/\Phi_0^*(X; G),$$

$$\begin{aligned} C_L^*(X; G) &= \Phi_L^*(X; G)/\Phi_{0L}^*(X; G) = \Phi_L^*(X)/\Phi_0^*(X) \cap \Phi_L^*(X) \cong \\ &\cong [\Phi_L^*(X) + \Phi_0^*(X)]/\Phi_0^*(X). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(5) \quad C^*(X)/C_L^*(X) \cong \Phi^*(X)/(\Phi_L^*(X) + \Phi_0^*(X)).$$

Здесь мы использовали две теоремы Нётер об изоморфизме или, вернее, их очевидные обобщения на комплексы абелевых групп.

Таким образом, необходимо установить, что все группы когомологий коцепного комплекса, стоящего в правой части равенства (5), равны нулю. При доказательстве этого факта будет существенно использоваться паракомпактность пространства X . В частности, нам понадобятся следующие два свойства паракомпактных пространств:

(а) (*Наличие звездно вписанного покрытия.*) Определение звездной вписанности дано в § 1.7. Паракомпактное хаусдорфово пространство X обладает следующим свойством: для любого открытого покрытия X найдется звездно вписанное в него открытое покрытие.

(б) (*Наличие локально конечного вписанного покрытия.*) Покрытие топологического пространства X называется *локально конечным*, если каждая точка $x \in X$ обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом множеств из покрытия. В любое открытое покрытие паракомпактного пространства можно вписать локально конечное открытое покрытие¹⁾.

Более детальное обсуждение этих вопросов можно найти во многих учебниках по теоретико-множественной топологии. Комбинация этих свойств обеспечивает справедливость следующего

¹⁾ Это утверждение — определение паракомпактности пространства X . Оно эквивалентно утверждению (а) (см. примечание к § 1.7). — *Прим. ред.*

утверждения: для любого открытого покрытия паракомпактного пространства существует звездно вписанное в него локально конечное открытое покрытие.

Теперь мы можем перейти к доказательству равенства

$$H^p(\Phi^*(X)/(\Phi_L^*(X) + \Phi_0^*(X)) = 0.$$

Пусть u — любой элемент этой группы когомологий. Выберем коцикл

$$z \in \Phi^p(X)/(\Phi_L^p(X) + \Phi_0^p(X)),$$

представляющий класс когомологий u . Необходимо установить, что z — кограница. Выберем функцию $\varphi \in \Phi^p(X)$, принадлежащую смежному классу z . Поскольку z — коцикл,

$$(6) \quad \delta\varphi = \psi + \eta$$

для некоторых $(p+1)$ -функций $\psi \in \Phi_0^{p+1}(X)$ и $\eta \in \Phi_L^{p+1}(X)$. Мы докажем, что из этого равенства вытекает утверждение

$$(7) \quad \varphi \in \delta\Phi^{p-1}(X) + \Phi_0^p(X) + \Phi_L^p(X).$$

Последнее в точности означает, что z — кограница.

Поскольку носитель функции φ пуст, существует такое открытое покрытие $\mathcal{U}$ пространства X , что для любого множества $U \in \mathcal{U}$ и любых точек $x_0, \dots, x_{p+1} \in U$ имеет место равенство $\psi(x_0, \dots, x_{p+1}) = 0$. В силу того что X паракомпактно и хаусдорфово, существует открытое локально конечное покрытие $\mathcal{V}$ пространства X , звездно вписанное в $\mathcal{U}$. Элементы покрытия $\mathcal{V}$ мы вполне упорядочим. В каждом множестве $V \in \mathcal{V}$ выберем по одной точке $x_V \in V$. Определим (вообще говоря, разрывное) отображение $f: X \rightarrow X$ правилом $f(x) = x_V$, где V — первое множество из покрытия $\mathcal{V}$ (относительно введенного порядка), для которого $x \in V$. Заметим, что если $V \in \mathcal{V}$, то $f(V)$ содержится в звезде $\text{st}(V)$ множества V и, следовательно, существует такое множество $U \in \mathcal{U}$, что $f(V) \subset \text{st}(V) \subset U$. Таким образом, для каждого $V \in \mathcal{V}$ существует такое $U \in \mathcal{U}$, что

$$(8) \quad V \cup f(V) \subset U.$$

Используя отображение f , определим коцепную гомотопию

$$D: \Phi^q(X; G) \rightarrow \Phi^{q-1}(X; G)$$

следующей формулой:

$$(D\theta)(x_0, \dots, x_{q-1}) = \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j \theta(fx_0, \dots, fx_j, x_j, \dots, x_{q-1})$$

для любой q -функции $\theta \in \Phi^q(X; G)$ (именно эта коцепная гомотопия использовалась нами в § 1.7). Легко проверить, что

$$(9) \quad \theta - f^*\theta = \delta D\theta + D\delta\theta$$

для любой функции $\theta \in \Phi^q(X)$, $q > 0$ и

$$(10) \quad \theta - f^*\theta = D\delta\theta$$

для $\theta \in \Phi^0(X)$. Подставляя функцию φ в формулу (9) и пользуясь равенством (6), получаем, что при $p > 0$ имеет место равенство

$$(11) \quad \varphi = f^*\varphi + \delta D\varphi + D\psi + D\eta.$$

Рассмотрим подробнее функции, стоящие в правой части этого равенства.

Прежде всего заметим, что $f^*\varphi \in \Phi_L^p(X; G)$, т. е. функция $f^*\varphi$ локально конечнозначна. Действительно, поскольку $\mathcal{V}$ — локально конечное открытое покрытие пространства X , у каждой точки $x \in X$ существует окрестность $P(x)$, такая, что $P(x)$ пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия $\mathcal{V}$. Следовательно, если $x_0, \dots, x_p \in X$ и $y_i \in P(x_i)$, $0 \leq i \leq p$, то множество элементов группы G вида

$$(f^*\varphi)(y_0, \dots, y_p) = \varphi(fy_0, \dots, fy_p)$$

является конечным, поскольку конечен образ каждой окрестности $P(x_i)$ при отображении f .

Далее заметим, что $D\eta$ также принадлежит группе $\Phi_L^p(X; G)$. По определению

$$(D\eta)(x_0, \dots, x_p) = \sum (-1)^i \eta(fx_0, \dots, fx_i, x_i, \dots, x_p).$$

Кроме того, сама функция η локально конечнозначна. Пользуясь этим, легко показать, что ограничение каждой из функций, встречающихся в сумме, на достаточно малую окрестность точки $(x_0, \dots, x_p)$ в X^{p+1} , принимает лишь конечное число различных значений. Детали доказательства оставляем читателю.

Докажем, что $D\psi \in \Phi_0^p(X; G)$, т. е. что носитель этой функции пуст. По определению

$$(D\psi)(x_0, \dots, x_p) = \sum (-1)^i \psi(fx_0, \dots, fx_i, x_i, \dots, x_p).$$

Для всякого $V \in \mathcal{V}$ выберем $U \in \mathcal{U}$ так, чтобы выполнялось соотношение (8). Тогда при $x_0, \dots, x_p \in V$ каждый член выписанной суммы равен нулю.

Наконец, очевидно, что функция $\delta D\varphi$ принадлежит группе $\delta\Phi^{p-1}(X; G)$.

Этим завершается доказательство соотношения (7) и вместе с ним теоремы 8.1 при $p > 0$. Необходимые изменения для $p =$

$= 0$ читатель сделает сам. Заметим также, что в этом случае утверждение теоремы легко доказывается непосредственно (см. упр. 2 из § 8.2).

§ 8.4. Свойство вырезания, жесткость, относительные гомеоморфизмы

Наиболее просто доказать следующий вариант свойства вырезания.

8.2. Теорема. Пусть U и A — подмножества пространства X и $U \subset A$. Предположим, что существует такое открытое множество W , что $U \subset W$ и W содержится во внутренней части множества A . Тогда для всех p включение $j: (X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$ индуцирует изоморфизм

$$j^*: H^p(X, A) \cong H^p(X \setminus U, A \setminus U).$$

В действительности в этом случае изоморфизмом является даже отображение $j^\#: C^*(X, A) \rightarrow C^*(X \setminus U, A \setminus U)$. Несложное доказательство этого факта приведено в книге Спеньера [51, стр. 398].

Чтобы сформулировать аналогичный результат для когомологий, построенных с помощью локально конечнозначных коцепей, необходимо предполагать, что подмножество A пространства X замкнуто (в противном случае группы $H_L^p(X, A)$ даже не определены). Если множество A замкнуто в X , то $A \setminus U$ замкнуто в индуцированной топологии подпространства $X \setminus U$.

8.3. Теорема. Пусть A — замкнутое подмножество пространства X и U — такое открытое подмножество в A , что $\bar{U}$ содержится во внутренней части A . Тогда включение $j: (X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$ индуцирует для любого p изоморфизм

$$j^*: H_L^p(X \setminus U, A \setminus U) \cong H_L^p(X, A).$$

Доказательство. Если оба пространства X и $X \setminus U$ паракомпактны, то теорема 8.3 — следствие теоремы 8.2 и теоремы Гордона об изоморфизме. Однако можно обойтись без дополнительного предположения о паракомпактности пространств. Небольшая модификация доказательства теоремы 8.2, данного в книге Спеньера [51], приводит к доказательству теоремы 8.3. Оставляем читателю детали. Заметим, что и в этом случае изоморфизмом оказывается отображение $j^\#: C_L^p(X, A) \rightarrow C_L^p(X \setminus U, A \setminus U)$.

Одно из преимуществ теории когомологий Александера — Спеньера состоит в том, что свойство вырезания для нее

справедливо в усиленной форме. Для доказательства этого свойства необходимо ввести понятие жесткости, которое интересно также и по другим причинам. Пусть A — подмножество пространства X и $\{U_\alpha\}$ — система всех окрестностей¹⁾ множества A в X или любая ее конфинальная подсистема. Если $U_\alpha \subset U_\beta$, пусть $i_{\beta\alpha}: H^q(U_\beta) \rightarrow H^q(U_\alpha)$ — гомоморфизм, индуцированный отображением включения. Тогда $\{H^q(U_\alpha), i_{\beta\alpha}\}$ — прямая система абелевых групп в смысле определения, данного в приложении (см. конец книги). Для каждой окрестности U_α обозначим через $j_\alpha: H^q(U_\alpha) \rightarrow H^q(A)$ гомоморфизм, индуцированный включением множества A в U_α . Семейство гомоморфизмов $\{j_\alpha\}$, очевидно, совместимо с прямой системой. Скажем, что A жестко вложено в X или что A — жесткое подпространство в X , если для любого q группа $H^q(A)$ — прямой предел прямой системы $\{H^q(U_\alpha), i_{\beta\alpha}\}$ (по отношению к семейству гомоморфизмов $\{j_\alpha\}$). Например, в § 6.4 было установлено, что всякое замкнутое подмножество локально компактного пространства является жестким по отношению к теории когомологий с компактными носителями, фигурирующей в части I. В этом случае необходимо ограничиться рассмотрением лишь замкнутых окрестностей заданного подпространства, так как без этого гомоморфизмы $i_{\beta\alpha}$ не определены.

8.4. Теорема. *Подпространство A жестко вложено в X по отношению к когомологиям Александера — Спеньера H^p в каждом из следующих четырех случаев:*

- (1) *множество A компактно и X хаусдорфово;*
- (2) *A — замкнутое подмножество паракомпактного хаусдорфова пространства X ;*
- (3) *A — произвольное множество и каждое открытое подмножество пространства X паракомпактно и хаусдорфово²⁾;*
- (4) *A — ретракт некоторого открытого подмножества пространства X .*

В доказательстве этой теоремы будем в основном следовать статье Спеньера [52]. Прежде чем сформулировать следующую лемму, введем некоторые понятия. Пусть A — подмножество пространства X и $\mathcal{U}$ — семейство подмножеств пространства X . Через $\text{st}(A, \mathcal{U})$ будем обозначать звезду множества A относительно семейства $\mathcal{U}$, т. е. объединение всех тех множеств семейства, которые имеют непустое пересечение с A . Скажем, что семейство $\mathcal{U}$ открытых подмножеств пространства X — открытое покрытие множества A в X , если $A \subset \text{st}(A, \mathcal{U})$.

¹⁾ Напомним, что окрестность множества A в X — это любое подмножество, внутренность которого содержит A . — *Прим. перев.*

²⁾ Достаточно предполагать существование фундаментальной системы открытых паракомпактных окрестностей множества A в X . — *Прим. перев.*

8.5. Лемма. Пусть A — подмножество пространства X . Предположим, что для каждого открытого покрытия $\mathcal{U}$ множества A в X существует открытое покрытие $\mathcal{V}$ множества A в X и отображение $f: \text{st}(A, \mathcal{V}) \rightarrow A$ (вообще говоря, не непрерывное), удовлетворяющие следующим двум условиям:

- (1) $f(a) = a$ для всех $a \in A$ (т. е. f — ретракция);
 - (2) для каждого $V \in \mathcal{V}$, для которого $V \cap A \neq \emptyset$, существует такое множество $U \in \mathcal{U}$, что $V \cup f(V) \subset U$.
- Тогда A жестко вложено в X .

Доказательство леммы. Пусть $u \in H^q(A)$. Докажем, что существует такая окрестность U множества A и элемент $v \in H^q(U)$, что $i^*(v) = u$. Выберем коцикл $u' \in Z^q(A)$, представляющий класс когомологий u , и пусть функция $\varphi \in \Phi^q(A)$ принадлежит классу смежности u' . Тогда существует такое открытое покрытие $\mathcal{U}$ множества A в X , что $\delta\varphi(a_0, a_1, \dots, a_{q+1}) = 0$ всякий раз, когда набор точек $(a_0, a_1, \dots, a_{q+1})$ имеет мелкость порядка $\mathcal{U}$. Для покрытия $\mathcal{U}$ выберем $\mathcal{V}$ и f , удовлетворяющие условиям леммы. Положим $U = \text{st}(A, \mathcal{V})$. Тогда $f^*\varphi \in \Phi^q(U)$, $\delta f^*\varphi = f^*\delta\varphi$ и в силу условия (2)

$$f^*\delta\varphi(x_0, \dots, x_{q+1}) = 0$$

для любого набора точек $(x_0, \dots, x_{q+1})$ мелкости порядка $\mathcal{V}$. Если $v' \in C^q(U)$ — класс смежности функции $f^*\varphi$, то $\delta v' = 0$. Следовательно, коцикл v' представляет некоторый класс когомологий $v \in H^q(U)$ и из условия (1) вытекает, что $i^*(v) = u$, что и требовалось.

Далее, пусть U — открытая окрестность множества A и $u \in H^q(U)$ — класс когомологий, переходящий в 0 при естественном гомоморфизме $H^q(U) \rightarrow H^q(A)$. Докажем, что существует вписанная в U окрестность V множества A , для которой естественный гомоморфизм $H^q(U) \rightarrow H^q(V)$ переводит u в 0. Как и раньше, выберем коцикл $u' \in Z^q(U)$, представляющий класс когомологий u , и элемент $\varphi \in \Phi^q(U)$ из класса смежности u' . Тогда существует такое открытое покрытие $\mathcal{U}_1$ подпространства U , что $\delta\varphi(x_0, \dots, x_{q+1}) = 0$ для всякого набора точек $(x_0, \dots, x_{q+1})$ мелкости порядка $\mathcal{U}_1$. Кроме того, существует открытое покрытие $\mathcal{U}_2$ множества A в X и элемент $\varphi' \in \Phi^{q-1}(A)$, для которого

$$\varphi(a_0, \dots, a_q) = \delta\varphi'(a_0, \dots, a_q),$$

если набор точек $(a_0, \dots, a_q)$ имеет мелкость порядка $\mathcal{U}_2$. Пусть $\mathcal{U} = \{U_1 \cap U_2 \mid U_1 \in \mathcal{U}_1, U_2 \in \mathcal{U}_2\}$. Тогда $\mathcal{U}$ — открытое покрытие множества A в X и равенства $\delta\varphi(x_0, \dots, x_{q+1}) = 0$ и $\varphi(a_0, \dots, a_q) = \delta\varphi'(a_0, \dots, a_q)$ продолжают выполняться для наборов $(x_0, \dots, x_{q+1})$ и $(a_0, \dots, a_q)$ мелкости порядка $\mathcal{U}$. Для покрытия $\mathcal{U}$ выберем $\mathcal{V}$ и f так, чтобы были выполнены

условия (1) и (2) леммы. Пусть $V = \text{st}(A, \mathcal{V})$. Определим гомоморфизм

$$D: \Phi^p(V) \rightarrow \Phi^{p-1}(V)$$

формулой

$$D\psi(x_0, \dots, x_{p-1}) = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \psi(x_0, \dots, x_i, f(x_i), \dots, f(x_{p-1}))$$

для любой функции $\psi \in \Phi^p(V)$. Нетрудно проверить, что

$$\delta D\psi = f^\# \psi - \psi - D\delta\psi.$$

Применим эту формулу к функции $\psi = \varphi$. Тогда для любого набора $(x_0, \dots, x_q)$ мелкости порядка $\mathcal{V}$ имеет место равенство

$$\delta D\varphi(x_0, \dots, x_q) = f^\# \varphi(x_0, \dots, x_q) - \varphi(x_0, \dots, x_q).$$

Кроме того, для таких наборов точек справедливо равенство

$$\begin{aligned} f^\# \varphi(x_0, \dots, x_q) &= \varphi(fx_0, \dots, fx_q) = \delta\varphi'(fx_0, \dots, fx_q) = \\ &= f^\# \delta\varphi'(x_0, \dots, x_q) = \delta f^\# \varphi'(x_0, \dots, x_q). \end{aligned}$$

Эти два равенства и означают, что класс когомологий u переходит в 0 при гомоморфизме $H^q(U) \rightarrow H^q(V)$. Лемма доказана.

Для завершения доказательства теоремы достаточно проверить, что предположения леммы выполняются в каждом из четырех случаев. В первых трех случаях мы покажем, что для каждого открытого покрытия $\mathcal{U}$ множества A в X существует открытое покрытие $\mathcal{V}$ множества A в X , звездно вписанное в $\mathcal{U}$ (т. е. такое, для которого покрытие $\{\text{st}(V, \mathcal{V}) \mid V \in \mathcal{V} \text{ и } V \cap A \neq \emptyset\}$ вписано в $\mathcal{U}$). После этого можно определить отображение $f: \text{st}(A, \mathcal{V}) \rightarrow A$, полагая $f(a) = a$ для $a \in A$ и выбирая $f(x) \in A$ для $x \notin A$ таким образом, чтобы x и $f(x)$ содержались в одном и том же множестве из $\mathcal{V}$. Нетрудно проверить, что эти $\mathcal{V}$ и f удовлетворяют условиям, содержащимся в лемме.

Рассмотрим случай (1). Пусть $\mathcal{U}$ — открытое покрытие множества A в X . Поскольку A — компакт, можно считать, что покрытие $\mathcal{U}$ конечно. Из компактности A также следует, что существует конечное открытое покрытие пространства A , звездно вписанное в $\{U \cap A \mid U \in \mathcal{U}\}$. С помощью этого покрытия легко построить открытое покрытие $\mathcal{V}$ множества A в X , обладающее требуемыми свойствами.

Далее рассмотрим случай (2). Пусть $\mathcal{U}$ — открытое покрытие множества A в X . Положим $\mathcal{U}' = \mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$. Поскольку X паракомпактно, существует открытое покрытие $\mathcal{V}'$, звездно впи-

санное в покрытие $\mathcal{U}'$. Тогда $\mathcal{V} = \{V \in \mathcal{V}' \mid V \cap A \neq \emptyset\}$ обладает требуемыми свойствами.

Случай (3) — самый простой. Если $\mathcal{U}$ — открытое покрытие множества A в X , то $\text{st}(A, \mathcal{U})$ — открытое подмножество пространства X , которое по предположению паракомпактно. Существует открытое покрытие $\mathcal{V}'$ пространства $\text{st}(A, \mathcal{U})$, звездно вписанное в $\mathcal{U}$. Как и выше, пусть

$$\mathcal{V} = \{V \in \mathcal{V}' \mid V \cap A \neq \emptyset\}.$$

В заключение рассмотрим случай (4). Пусть $r: N \rightarrow A$ — непрерывная ретракция открытого множества N на A , и пусть $\mathcal{U}$ — открытое покрытие множества A в X . Положим $\mathcal{V} = \{U \cap r^{-1}(U \cap A) \mid U \in \mathcal{U}\}$. Определим $f: \text{st}(A, \mathcal{V}) \rightarrow A$ как $f = r|_{\text{st}(A, \mathcal{V})}$. Тогда $\mathcal{V}$ и f удовлетворяют условиям (1) и (2) леммы. В этом случае отображение f непрерывно.

Теорема 8.4 доказана.

8.6. Следствие. В каждом из следующих двух случаев множество A жестко вложено в X по отношению к когомологиям Александера — Спеньера H_L^* , определенным с помощью локально конечнозначных коцепей:

(1) A — замкнутое подмножество, X — паракомпактное хаусдорфово пространство;

(2) множество A произвольно и каждое открытое подмножество пространства X паракомпактно и хаусдорфово.

Это утверждение вытекает из теоремы 8.4 и теоремы Гордона об изоморфизме. Случаи (1) и (2) следствия отвечают соответственно случаям (2) и (3) предыдущей теоремы. Применяя теорему Гордона об изоморфизме, в первом случае необходимо ограничиться рассмотрением лишь замкнутых окрестностей множества A . Поскольку X паракомпактно и хаусдорфово, оно нормально, поэтому замкнутые окрестности A образуют конфинальную часть направленной системы всех окрестностей этого множества. В случае (2) следствия из сделанных предположений вытекает, что любое подмножество пространства X паракомпактно. В частности, множество A паракомпактно.

Рассмотрим теперь свойство вырезания в усиленной форме, установленной впервые в [63].

8.7. Теорема. Пусть X и Y — паракомпактные хаусдорфовы пространства, а A и B — замкнутые подмножества в X и Y соответственно. Предположим, что $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ — замкнутое непрерывное отображение, взаимно однозначно отображающее

$X \setminus A$ на $Y \setminus B$. Тогда индуцированные гомоморфизмы

$$f^*: H^q(Y, B) \rightarrow H^q(X, A),$$

$$f_*: H_L^q(Y, B) \rightarrow H_L^q(X, A)$$

являются изоморфизмами¹⁾.

Из замкнутости отображения f вытекает, что оно гомеоморфно отображает $X \setminus A$ на $Y \setminus B$; в этом случае говорят, что f — *относительный гомеоморфизм* пар (X, A) и (Y, B) . Как показано в книге Спеньера [51, стр. 410], для когомологий H^q теорема 8.7 — следствие теорем 8.2 и 8.4. Аналогичным образом, для когомологий H_L^q , построенных с помощью локально конечнозначных коцепей, утверждение вытекает из теоремы 8.3 и следствия 8.6.

Естественно надеяться усилить теорему 8.7, пытаясь заменить в ее формулировке требование замкнутости отображения f предположением о том, что f — относительный гомеоморфизм. Следующий простой пример не оставляет таких надежд. Пусть Y — единичный отрезок, $Y = [0, 1]$, $B = \{0, 1\}$ — множество, состоящее из двух граничных точек этого отрезка, $X = [0, 1)$ — полуинтервал и $A = \{0\}$. Пусть $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ — отображение включения. Так как $X \setminus A = Y \setminus B$, то f — относительный гомеоморфизм. Однако $H^1(Y, B; \mathbb{Z})$ — бесконечная циклическая группа, поскольку на категории компактных хаусдорфовых пространств теория когомологий, построенная в настоящей главе, совпадает с теорией, рассмотренной в гл. 1. В то же время $H^1(X, A; \mathbb{Z}) = 0$, поскольку A — деформационный ретракт пространства X (см. свойство гомотопии в § 8.5). Таким образом, f^* не является изоморфизмом одномерных когомологий.

Ясно, что отображение включения подпространства в объемлющее пространство тогда и только тогда является замкнутым, когда это подпространство замкнуто. Поэтому из теоремы 8.7 вытекает следующий результат.

8.8. Следствие. Пусть X — паракомпактное хаусдорфово пространство, A — замкнутое подмножество в X и U — такое открытое подмножество пространства X , что $U \subset A$. Тогда включение $j: (X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$ для всех p индуцирует изоморфизмы

$$j^*: H^p(X, A) \cong H^p(X \setminus U, A \setminus U),$$

$$j_*: H_L^p(X, A) \cong H_L^p(X \setminus U, A \setminus U).$$

¹⁾ Содержащиеся в теореме 8.7 и следствии 8.8 утверждения, очевидно, являются следствиями наблюдения, сформулированного в примечании к § 8.1. Заметим также, что в соответствии с § 8.3 в условиях теоремы имеет место изоморфизм $H^q \cong H_L^q$. — Прим. ред.

В частности, относительные когомологии не меняются при «вырезании» всей внутренней замкнутой множества A .

Упражнение

Пусть Y — топологическое пространство и X , A и U — такие подпространства в Y , что $U \subset A \subset X$. Предположим, что X , A и U удовлетворяют предположениям теоремы 8.2. Докажите точность следующей последовательности коцепных комплексов:

$$0 \longrightarrow C^*(Y, X) \xrightarrow{I^\#} C^*(Y, A) \xrightarrow{I^\#} C^*(X \setminus U, A \setminus U) \longrightarrow 0.$$

Сравните возникающую когомологическую последовательность с когомологической последовательностью триады $(Y; A, X \setminus U)$, построенной для когомологий Александра — Спеньера методом, который описан в [14, гл. I, § 14]. Предположим дополнительно, что подмножества X и A замкнуты в Y . Постройте аналогичную последовательность для когомологий Александра — Спеньера, основанных на локально конечнозначных коцепях (вместо теоремы 8.2 используйте теорему 8.3).

§ 8.5. Свойство гомотопии. Другие свойства когомологий Александра — Спеньера

Поскольку рассматриваемая нами теория когомологий определена на категории пар топологических пространств, необходимо ввести понятие гомотопии для отображений пар.

8.9. Определение. Два отображения пар $f_0, f_1: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ гомотопны, если существует такое отображение пар $F: (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$, что $F(x, 0) = f_0(x)$ и $F(x, 1) = f_1(x)$ для всех $x \in X$.

8.10. Теорема (свойство гомотопии). Если отображения $f_0, f_1: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ гомотопны, то индуцированные ими гомоморфизмы $f_0^*, f_1^*: H^p(Y, B) \rightarrow H^p(X, A)$ совпадают.

Доказательство см. в книге Спеньера [51, гл. VI, § 5] или в работе [53]. К сожалению, по-видимому, не существует очевидного способа приспособить это доказательство для когомологий H_L^* , построенных с помощью локально конечнозначных коцепей.

8.11. Теорема. Пусть (X, A) и (Y, B) — пары паракомпактных пространств и их замкнутых подмножеств. Если отображения $f_0, f_1: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ гомотопны, то индуцированные ими гомоморфизмы совпадают:

$$f_0^* = f_1^*: H_L^p(Y, B) \rightarrow H_L^p(X, A).$$

Утверждение следует из теоремы 8.10 и теоремы Гордона об изоморфизме.

8.12. Теорема. *Предположим, что X — объединение семейства попарно непересекающихся открытых подмножеств U_λ , $\lambda \in \Lambda$, и пусть $i_\lambda: U_\lambda \rightarrow X$ — отображения включения. Тогда индуцированные гомоморфизмы $i_\lambda^*: H^p(X) \rightarrow H^p(U_\lambda)$, $i_\lambda^*: H_L^p(X) \rightarrow H_L^p(U_\lambda)$ определяют изоморфизмы групп $H^p(X)$ и $H_L^p(X)$ на соответствующие прямые произведения*

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} H^p(U_\lambda) \text{ и } \prod_{\lambda \in \Lambda} H_L^p(U_\lambda).$$

Доказательство. В действительности устанавливается, что отображения

$$i_\lambda^\#: C^p(X) \rightarrow C^p(U_\lambda) \text{ и } i_\lambda^\#: C_L^p(X) \rightarrow C_L^p(U_\lambda)$$

определяют изоморфизмы ¹⁾

$$C^p(X) \cong \prod_\lambda C^p(U_\lambda) \text{ и } C_L^p(X) \cong \prod_\lambda C_L^p(U_\lambda)$$

(ср. [51, стр. 400]). Отсюда и вытекает теорема.

8.13. Следствие. *В предположениях теоремы 8.12 пусть A — подпространство X . Тогда существует естественный изоморфизм*

$$H^p(X, A) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} H^p(U_\lambda, U_\lambda \cap A).$$

Если A — замкнутое подпространство, то

$$H_L^p(X, A) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} H_L^p(U_\lambda, U_\lambda \cap A).$$

Для доказательства следует рассмотреть точную когомологическую последовательность пары (X, A) , воспользоваться теоремой 8.12 и леммой о пяти гомоморфизмах (лемма 1.9).

§ 8.6. Вырезаемые триады и последовательности Майера — Вьеториса

Напомним, что *триада* $(X; A, B)$ состоит из топологического пространства X и двух его подпространств A и B . Триада называется *вырезаемой* (для заданной теории когомологий), если каждое из включений $(A, A \cap B) \rightarrow (A \cup B, B)$ и $(B, A \cap B) \rightarrow$

¹⁾ Это утверждение — следствие того простого факта, что рассматриваемые p -функции отождествляются с ростками $W \rightarrow G$ функций соответствующего типа, определенных на окрестностях W диагонали $\Delta(X) \subset X^{p+1}$ (ср. с примечанием к § 1.1). — *Прим. ред.*

$\rightarrow (A \cup B, A)$ индуцирует изоморфизмы групп когомологий во всех размерностях. (Мы пользуемся терминологией Дольда [11, стр. 62—63], ср. [51, стр. 245]; Стинрод и Эйленберг [14, стр. 57] называют такие триады *собственными*.)

Теоремы § 8.4 обеспечивают достаточные условия для вырезаемости триад относительно когомологий Александера — Спеньера. Например, имеет место следующий результат.

8.14. Теорема. *Всякая триада $(X; A, B)$, состоящая из паракомпактного хаусдорфова пространства X и его замкнутых подмножеств A и B , вырезаема для обеих теорий когомологий Александера — Спеньера (т. е. теорий, построенных с помощью всех или только локально конечнозначных коцепей).*

Теорема непосредственно вытекает из следствия 8.8. В случае сингулярных гомотопий и когомологий картина резко меняется: легко привести пример триады с компактным хаусдорфовым пространством X и замкнутыми подмножествами A и B , которая не является вырезаемой (ср. с примером 5.5 на стр. 331 в книге Стинрода и Эйленберга [14]).

8.15. Теорема. *Если $(X; A, B)$ — триада, в которой X — нормальное пространство, $X = A \cup B$ и A и B — открытые подмножества, то $(X; A, B)$ вырезаема для теории когомологий Александера — Спеньера H^* , построенной с помощью всех коцепей.*

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 8.2. Существование множества W , фигурирующего в этой теореме, обеспечивается нормальностью пространства X .

Заметим, что вопрос о справедливости этой теоремы для когомологий H_L^* лишен смысла, поскольку соответствующие относительные группы когомологий не определены.

Обсуждение вырезаемых триад вызвано в основном следующей причиной. Если $(X; A, B)$ — вырезаемая триада для некоторой теории когомологий, то в терминах этой теории можно определить точную когомологическую последовательность триады и когомологическую последовательность Майера — Вьеториса. Точная когомологическая последовательность вырезаемой триады — это последовательность

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{i^*} H^{q-1}(A, A \cap B) \xrightarrow{\delta} H^q(X, A \cup B) \xrightarrow{j^*} H^q(X, B) \xrightarrow{i^*} \\ \rightarrow H^q(A, A \cap B). \end{aligned}$$

Гомоморфизмы i^* и j^* индуцированы соответствующими включениями. Определение кограничного оператора δ и доказательство точности см. в книге Стинрода и Эйленберга [14, гл. I,

§ 14] ¹⁾. Последовательность Майера — Вьеториса определяется для таких вырезаемых триад $(X; A, B)$, что $X = A \cup B$, и выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\psi} H^{q-1}(A \cap B) \xrightarrow{\Delta} H^q(X) \xrightarrow{\varphi} H^q(A) \oplus H^q(B) \xrightarrow{\Psi} \\ \rightarrow H^q(A \cap B) \xrightarrow{\Delta} \dots \end{aligned}$$

Определение гомоморфизмов, встречающихся в этой последовательности, и доказательство ее точности можно найти в книге Стинрода и Эйленберга [14, гл. I, § 15] (см. также последовательности Майера — Вьеториса в § 3.4 настоящей книги) ²⁾.

Цитированный выше материал из книги Стинрода и Эйленберга можно, в частности, применить к рассматриваемым нами теориям когомологий Александера — Спеньера, поэтому в дальнейшем обсуждении когомологических последовательностей триад, по-видимому, нет необходимости. Однако имеется один случай, который не охватывается этим материалом. Пусть X — нормальное пространство и A и B — такие открытые подмножества X , что $X = A \cup B$. По теореме 8.15 триада $(X; A, B)$ вырезаема. В этом случае определена и точна последовательность Майера — Вьеториса для когомологий Александера — Спеньера, построенных по всем коцепям:

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\psi} H^{q-1}(A \cap B) \xrightarrow{\Delta} H^q(X) \xrightarrow{\varphi} H^q(A) \oplus H^q(B) \xrightarrow{\Psi} \\ \rightarrow H^q(A \cap B) \xrightarrow{\Delta} \dots \end{aligned}$$

Как было отмечено выше, вопрос о вырезаемости этой триады для когомологий H_L^* лишен смысла. Тем не менее гомоморфизмы φ и ψ , очевидно, определены и для когомологий H_L^* , и если X , A , B и $A \cap B$ — паракомпактные хаусдорфовы пространства, то теорема Гордона об изоморфизме позволяет получить комму-

¹⁾ Когомологическая последовательность вырезаемой триады $(X; A, B)$ совпадает, очевидно, с когомологической последовательностью тройки $(X, A \cup B, B)$ (ср. с упр. 7 к § 8.2). — *Прим. ред.*

²⁾ Для любой вырезаемой триады $(X; A, B)$ имеет место также следующая точная последовательность:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{q-1}(X, A \cap B) \rightarrow H^q(X, A \cup B) \rightarrow H^q(X, A) \oplus H^q(X, B) \rightarrow \\ \rightarrow H^q(X, A \cap B) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

называемая относительной когомологической аддиционной последовательностью триады (см. § 15 гл. I книги [14]). В случае когда множества A и B замкнуты, обе последовательности можно отождествить с когомологическими последовательностями, отвечающими подходящим точным тройкам коцепных комплексов. С учетом наблюдения, высказанного в примечании к § 8.1, это достигается способом, указанным в примечании к § 3.5. — *Прим. ред.*

тативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{\psi} & H_L^{q-1}(A \cap B) & & H_L^q(X) & \xrightarrow{\psi} & H_L^q(A) \oplus H_L^q(B) \xrightarrow{\psi} H_L^q(A \cap B) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \xrightarrow{\psi} & H^{q-1}(A \cap B) & \xrightarrow{\Delta} & H^q(X) & \xrightarrow{\varphi} & H^q(A) \oplus H^q(B) \xrightarrow{\psi} H^q(A \cap B) \xrightarrow{\Delta} \dots
 \end{array}$$

Все вертикальные отображения — изоморфизмы. В рассматриваемой ситуации гомоморфизм Δ для когомологий H_L^* с помощью конструкций Стинрода и Эйленберга определить нельзя. Однако можно воспользоваться диаграммой для определения единственного гомоморфизма Δ' : $H_L^{q-1}(A \cap B) \rightarrow H_L^q(X)$, делающего коммутативным соответствующий квадрат. Таким образом, оказалось возможным определить еще одну последовательность Майера — Вьеториса триады $(X; A, B)$ при дополнительном предположении, что все пространства паракомпактны.

Однако существует другой способ построения последовательности Майера — Вьеториса триады $(X; A, B)$ в теории когомологий H_L^* без привлечения теоремы Гордона об изоморфизме и без дополнительного предположения о паракомпактности. Рассмотрим следующую последовательность коцепных комплексов и коцепных отображений:

$$(12) \quad 0 \rightarrow C_L^*(X) \xrightarrow{\beta} C_L^*(A) \oplus C_L^*(B) \xrightarrow{\gamma} C_L^*(A \cap B) \rightarrow 0$$

Здесь β и γ определены формулами

$$\begin{aligned}
 \beta(x) &= (i_1^*x, i_2^*x), \quad x \in C_L^*(X), \\
 \gamma(u, v) &= j^*u - k^*v, \quad u \in C_L^*(A), \quad v \in C_L^*(B).
 \end{aligned}$$

Отображения i_1, i_2, j и k — соответствующие включения. Докажем, что для нормального пространства X и таких его открытых подмножеств A и B , что $X = A \cup B$, эта последовательность точна. Легко проверить, что $\text{Ker } \beta = 0$ и $\text{Im } \beta \subset \text{Ker } \gamma$. Труднее установить включение $\text{Im } \beta \supset \text{Ker } \gamma$. Для этой цели, очевидно, достаточно доказать следующее утверждение. Предположим, что $\varphi \in \Phi_L^p(A; G)$, $\psi \in \Phi_L^p(B; G)$ и существует такое открытое покрытие $\mathcal{W}$ пространства $A \cap B$, что

$$\varphi(x_0, \dots, x_p) = \psi(x_0, \dots, x_p)$$

для любого набора точек $\{x_0, \dots, x_p\}$, имеющего мелкость порядка $\mathcal{W}$. Тогда существуют элемент $\eta \in \Phi_L^p(X; G)$, открытое покрытие $\mathcal{U}$ пространства A и открытое покрытие $\mathcal{V}$ пространства B , такие, что

$$\eta(x_0, \dots, x_p) = \varphi(x_0, \dots, x_p),$$

если набор $\{x_0, \dots, x_p\}$ имеет мелкость порядка $\mathcal{U}$, и

$$\eta(x_0, \dots, x_p) = \psi(x_0, \dots, x_p),$$

если $\{x_0, \dots, x_p\}$ имеет мелкость порядка $\mathcal{V}$. (Замечание. Выражение «набор $\{x_0, \dots, x_p\}$ имеет мелкость порядка $\mathcal{W}$ » означает, что все точки $x_0, \dots, x_p$ принадлежат некоторому множеству $W \in \mathcal{W}$.)

Доказательство утверждения. Пусть F — граница множества $A \cap B$ в X . Тогда F — замкнутое подмножество пространства X , являющееся дизъюнктивным объединением замкнутых множеств $F \cap A$ и $F \cap B$. Так как X нормально, существуют такие непересекающиеся открытые множества M и N , что

$$F \cap A \subset M \text{ и } F \cap B \subset N.$$

Можно считать, что $M \subset A$ и $N \subset B$ (в противном случае можно заменить M на $M \cap A$ и N на $N \cap B$). В силу нормальности пространства X можно выбрать такие открытые множества M_0 и N_0 , что

$$F \cap A \subset M_0 \text{ и } \bar{M}_0 \subset M,$$

$$F \cap B \subset N_0 \text{ и } \bar{N}_0 \subset N.$$

Легко показать (простое упражнение в теоретико-множественной топологии), что $(A \cap B) \cup \bar{M}_0$ — замкнутое подмножество пространства A и $(A \cap B) \cup \bar{N}_0$ — замкнутое подмножество пространства B . Определим открытое покрытие $\mathcal{U}$ пространства A , включив в него множества $A \setminus [(A \cap B) \cup \bar{M}_0]$, M и все те множества $W \in \mathcal{W}$, которые не содержатся в M . Аналогично, пусть $\mathcal{V}$ — открытое покрытие пространства B , состоящее из множеств $B \setminus [(A \cap B) \cup \bar{N}_0]$, N и всех тех множеств $W \in \mathcal{W}$, которые не содержатся в N . Определим $\eta \in \Phi_L^p(X; G)$ следующим образом:

$\eta(x_0, \dots, x_p) = \varphi(x_0, \dots, x_p)$, если набор $\{x_0, \dots, x_p\}$ содержится либо в $A \setminus [(A \cap B) \cup \bar{M}_0]$, либо в M , либо в любом таком множестве $W \in \mathcal{W}$, что $W \not\subset M$ и $W \not\subset N$;

$\eta(x_0, \dots, x_p) = \psi(x_0, \dots, x_p)$, если множество точек $\{x_0, \dots, x_p\}$ содержится либо в $B \setminus [(A \cap B) \cup \bar{N}_0]$, либо в N , либо в любом множестве $W \in \mathcal{W}$, таком, что $W \not\subset M$ и $W \not\subset N$;

$\eta(x_0, \dots, x_p) = 0$ в остальных случаях.

Разумеется, необходимо проверить, что определение функции η корректно. Корректность следует из предположений о покры-

тии $\mathcal{W}$. Нетрудно проверить, что функция η локально конечнозначна и удовлетворяет заключениям утверждения.

Остается показать, что γ — эпиморфизм. Основная трудность заключается в том, что все коцепи должны быть локально конечнозначными. Достаточно доказать следующее утверждение. Пусть $\varphi \in \Phi_L^p(A \cap B; G)$. Тогда существуют такие функции $\psi \in \Phi_L^p(A; G)$ и $\eta \in \Phi_L^p(B; G)$, что

$$\varphi(x_0, \dots, x_p) = \psi(x_0, \dots, x_p) - \eta(x_0, \dots, x_p),$$

если набор аргументов $\{x_0, \dots, x_p\}$ является достаточно малым подмножеством пространства $A \cap B$ (выражение «достаточно малый», как обычно, означает мелкость рассматриваемого объекта относительно подходящего открытого покрытия пространства $A \cap B$).

Доказательство утверждения. Пусть, как и раньше, F — граница множества $A \cap B$. В силу нормальности пространства X существует такое открытое множество W , что $F \cap A \subset W$ и $W \subset A$. Определим $\psi \in \Phi^p(A; G)$, полагая

$$\begin{aligned} \psi(x_0, \dots, x_p) &= \varphi(x_0, \dots, x_p), \text{ если } \{x_0, \dots, x_p\} \subset A \cap B, \text{ но} \\ &\quad x_i \notin W \text{ для некоторого } i, \\ \psi(x_0, \dots, x_p) &= 0 \text{ в остальных случаях.} \end{aligned}$$

Определим $\eta \in \Phi^p(B; G)$, полагая

$$\begin{aligned} \eta(x_0, \dots, x_p) &= -\varphi(x_0, \dots, x_p), \text{ если } \{x_0, \dots, x_p\} \subset W \cap B, \\ \eta(x_0, \dots, x_p) &= 0 \text{ в остальных случаях.} \end{aligned}$$

Оставляем читателю проверить, что функция η локально конечнозначна (это следует из включения $W \subset A$). Функция ψ , вообще говоря, не является локально конечнозначной. Однако она локально конечнозначна на достаточно малых наборах $\{x_0, \dots, x_p\}$ аргументов, а этого вполне достаточно.

Этим завершается доказательство точности последовательности (12). Переходя к соответствующей длинной точной последовательности когомологий, получим требуемую последовательность Майера — Вьеториса триады $(X; A, B)$ в теории когомологий.

Упражнения

1. Пусть $(X; A, B)$ — триада. Докажите, что если триада $(A \cup B; A, B)$ вырезаема, то $(X; A, B)$ — вырезаемая триада.

2. Пусть $(X; A, B)$ — такая триада, что множества A и B замкнуты и $X = \text{Int } A \cup \text{Int } B$. Докажите, что триада $(X; A, B)$ вырезаема для обеих теорий когомологий Александера — Спеньера, рассматриваемых в настоящей главе.

§ 8.7. $\cup$ -умножения в когомологиях Александера — Спеньера

Внешнее умножение

$$H^p(X; G_1) \otimes H^q(Y; G_2) \rightarrow H^{p+q}(X \times Y; G_1 \otimes G_2),$$

$$H_L^p(X; G_1) \otimes H_L^q(Y; G_2) \rightarrow H_L^{p+q}(X \times Y; G_1 \otimes G_2)$$

в когомологиях Александера — Спеньера пространств общего типа определяется теми же формулами, которые были использованы в гл. 7 для когомологий с компактными носителями. К сожалению, внешнее умножение в этом случае не столь полезно, поскольку для рассматриваемых когомологий не существует теоремы Кюннета, выражающей когомологии произведения через когомологии сомножителей. Тем не менее в случае $X = Y$ композиция внешнего умножения с гомоморфизмом, индуцированным диагональным вложением $\Delta: X \rightarrow X \times X$, приводит к определению $\cup$ -умножения

$$H^p(X; G_1) \otimes H^q(X; G_2) \rightarrow H^{p+q}(X; G_1 \otimes G_2),$$

которое дает дополнительные топологические инварианты пространства X . По-видимому, проще определить $\cup$ -умножение, начиная с коцепей (ср. замечание (1) в § 7.4), не используя внешнее умножение и его композицию с Δ^* . В настоящем параграфе мы применяем этот более простой метод при доказательстве основных свойств $\cup$ -умножения в когомологиях общих пространств. Развитие идет так же, как в гл. 7, однако некоторые детали существенно отличаются.

Для $\varphi \in \Phi^p(X; G_1)$ и $\psi \in \Phi^q(X; G_2)$ определим их $\cup$ -произведение $\varphi \cup \psi \in \Phi^{p+q}(X; G_1 \otimes G_2)$ формулой

$$(\varphi \cup \psi)(x_0, \dots, x_{p+q}) = \varphi(x_0, \dots, x_p) \otimes \psi(x_p, \dots, x_{p+q}).$$

Очевидно, возникает гомоморфизм

$$\Phi^p(X; G_1) \otimes \Phi^q(X; G_2) \rightarrow \Phi^{p+q}(X; G_1 \otimes G_2),$$

обладающий следующими свойствами.

(1) Если φ и ψ — локально конечнозначные функции, то функция $\varphi \cup \psi$ локально конечнозначна. Таким образом, определен гомоморфизм

$$\Phi_L^p(X; G_1) \otimes \Phi_L^q(X; G_2) \rightarrow \Phi_L^{p+q}(X; G_1 \otimes G_2).$$

(2) Носитель функции $\varphi \cup \psi$ удовлетворяет следующему условию:

$$|\varphi \cup \psi| \subseteq |\varphi| \cap |\psi|.$$

Таким образом, если носитель одной из функций φ или ψ пуст, то функция $\varphi \cup \psi$ имеет пустой носитель. Следовательно, определены умножения

$$\begin{aligned} C^p(X; G_1) \otimes C^q(X; G_2) &\rightarrow C^{p+q}(X; G_1 \otimes G_2), \\ C_L^p(X; G_1) \otimes C_L^q(X; G_2) &\rightarrow C_L^{p+q}(X; G_1 \otimes G_2). \end{aligned}$$

(3) Кограница $\cup$ -произведения функций выражается формулой

$$\delta(\varphi \cup \psi) = (\delta\varphi) \cup \psi + (-1)^p \varphi \cup (\delta\psi)$$

для любых $\varphi \in \Phi^p(X; G_1)$ и $\psi \in \Phi^q(X; G_2)$. Таким образом, определено коцепное отображение

$$\Phi^*(X; G_1) \otimes \Phi^*(X; G_2) \rightarrow \Phi^*(X; G_1 \otimes G_2).$$

(Определение тензорного произведения комплексов см. в § 6.4.) В качестве следствия получаем коцепные отображения

$$\begin{aligned} C^*(X; G_1) \otimes C^*(X; G_2) &\rightarrow C^*(X; G_1 \otimes G_2), \\ C_L^*(X; G_1) \otimes C_L^*(X; G_2) &\rightarrow C_L^*(X; G_1 \otimes G_2), \end{aligned}$$

индуцирующие гомоморфизмы групп когомологий

$$\begin{aligned} H^p(X; G_1) \otimes H^q(X; G_2) &\rightarrow H^{p+q}(X; G_1 \otimes G_2), \\ H_L^p(X; G_1) \otimes H_L^q(X; G_2) &\rightarrow H_L^{p+q}(X; G_1 \otimes G_2). \end{aligned}$$

Если $u \in H^p(X; G_1)$ и $v \in H^q(X; G_2)$, то их $\cup$ -произведение (т. е. образ $u \otimes v$) обозначается через

$$u \cup v \in H^{p+q}(X; G_1 \otimes G_2).$$

(4) Если $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, $\varphi \in \Phi^p(Y; G_1)$ и $\psi \in \Phi^q(Y; G_2)$, то имеет место формула

$$f^\#(\varphi \cup \psi) = (f^\#\varphi) \cup (f^\#\psi),$$

выражающая естественность умножения. В качестве следствия для $u \in H^p(Y; G_1)$ и $v \in H^q(Y; G_2)$ получаем

$$f^*(u \cup v) = (f^*u) \cup (f^*v).$$

Разумеется, аналогичная формула справедлива и для $u \in H_L^p(Y; G_1)$, $v \in H_L^q(Y; G_2)$.

(5) Определим $\cup$ -умножение в группах относительных когомологий. Естественно надеяться, что $\cup$ -умножения

$$H^p(X, A; G_1) \otimes H^q(X, B; G_2) \rightarrow H^{p+q}(X, A \cup B; G_1 \otimes G_2)$$

и

$$H_L^p(X, A; G_1) \otimes H_L^q(X, B; G_2) \rightarrow H_L^{p+q}(X, A \cup B; G_1 \otimes G_2)$$

можно определить для произвольных подмножеств A и B пространства X в первом случае и для замкнутых подмножеств A и B во втором. К сожалению, такая степень общности, по-видимому, недостижима. Однако если для пространства $A \cup B$ (в индуцированной топологии) выполнено равенство

$$(13) \quad A \cup B = (\text{Int } A) \cup (\text{Int } B),$$

то для $u \in C^p(X, A; G_1)$ и $v \in C^q(X, B; G_2)$ имеет место $u \cup v \in C^{p+q}(X, A \cup B; G_1 \otimes G_2)$. Аналогично, если выполнено условие (13) и оба множества A и B замкнуты в X , то определено $\cup$ -умножение

$$C_L^p(X, A; G_1) \otimes C_L^q(X, B; G_2) \rightarrow C_L^{p+q}(X, A \cup B; G_1 \otimes G_2).$$

Таким образом, условие (13), по-видимому, является ключевым для построения нужного $\cup$ -умножения в группах относительных когомологий. Отметим следующие три частных случая, в которых выполнено равенство (13):

- (а) одно из множеств A, B пусто,
- (б) $A \cap B = \emptyset$,
- (с) оба подмножества A и B открыты в X .

Рассмотрим свойство естественности $\cup$ -умножения в относительных когомологиях. Пусть $(X; A, B)$ и $(X'; A', B')$ — триады, удовлетворяющие условию (13), и пусть $f: (X'; A', B') \rightarrow (X; A, B)$ — непрерывное отображение триад (т. е. $f(A') \subset A$ и $f(B') \subset B$). Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^p(X, A) \otimes H^q(X, B) & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q}(X, A \cup B) \\ \downarrow f_1^* \otimes f_2^* & & \downarrow f_3^* \\ H^p(X', A') \otimes H^q(X', B') & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q}(X', A' \cup B') \end{array}$$

коммутативна. Здесь f_1^* , f_2^* и f_3^* — гомоморфизмы, индуцированные отображением f . Разумеется, теория H_L^* обладает аналогичным свойством (при дополнительном предположении, что множества A, B, A' и B' замкнуты).

(6) Естественный гомоморфизм $H_L^* \rightarrow H^*$ коммутирует с $\cup$ -умножением. Более точно, если для триады $(X; A, B)$ выполнено условие (13), а множества A и B замкнуты, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_L^p(X, A) \otimes H_L^q(X, B) & \xrightarrow{\cup} & H_L^{p+q}(X, A \cup B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^p(X, A) \otimes H^q(X, B) & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q}(X, A \cup B) \end{array}$$

коммутативна.

(7) $\cup$ -умножение ассоциативно, т. е.

$$(u \cup v) \cup w = u \cup (v \cup w)$$

для любых трех классов когомологий, для которых это произведение определено. Утверждение вытекает из того простого факта, что ассоциативно $\cup$ -умножение коцепей.

(8) Существует единица $1 \in H^0(X; Z)$, для которой $u \cup 1 = 1 \cup u = u$ для любого $u \in H^p(X, A; G)$. Единица является классом когомологий постоянной функции $1 \in \Phi^0(X; Z) = C^0(X; Z)$. Аналогичным свойством обладает и теория когомологий, основанная на локально конечнозначных коцепях.

(9) Имеется связь $\cup$ -умножения с кограничными операторами точных последовательностей пары и триады. Пусть $(X; A, B)$ — триада, удовлетворяющая условию (13), в которой множества A и B замкнуты в X . Тогда в силу теоремы 8.3 $(X; A, B)$ — вырезаемая триада (ср. упр. 1 и 2 из § 8.6). Поэтому определена точная когомологическая последовательность триады. Мы утверждаем, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_L^p(A) \otimes H_L^q(X, B) & \xrightarrow{i \otimes i^*} & H_L^p(A) \otimes H_L^q(A, A \cap B) \xrightarrow{\cup} H_L^{p+q}(A, A \cap B) \\ \downarrow \delta \otimes 1 & & \downarrow \delta' \\ H_L^{p+1}(X, A) \otimes H_L^q(X, B) & \xrightarrow{\cup} & H_L^{p+q+1}(X, A \cup B) \end{array}$$

коммутативна. Здесь δ — кограничный оператор пары (X, A) , δ' — кограничный оператор триады $(X; A, B)$, отображение $i: (A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$ — включение и символом 1 обозначен соответствующий тождественный изоморфизм.

Доказательство коммутативности. Вспомним доказательство теорем 8.2 и 8.3. Чтобы показать, что при сделанных предположениях $(X; A, B)$ — вырезаемая триада, устанавливаем, что отображение включения k индуцирует изоморфизм коцепных комплексов

$$k^\#: C_L^*(A \cup B, B) \cong C_L^*(A, A \cap B).$$

Этим обеспечивается точность короткой последовательности

$$0 \rightarrow C_L^*(X, A \cup B) \rightarrow C_L^*(X, B) \xrightarrow{i^\#} C_L^*(A, A \cap B) \rightarrow 0.$$

Соответствующая длинная точная когомологическая последовательность и есть когомологическая последовательность триады $(X; A, B)$ (ср. упражнение к § 8.4).

Мы должны доказать, что для любых $u \in H_L^p(A)$ и $v \in H_L^q(X, B)$

$$(\delta u) \cup v = \delta'(u \cup i^*v).$$

Пусть $z \in C_L^q(X, B)$ — коцикл, представляющий класс когомологий v . Рассмотрим следующую диаграмму, составленную из двух коротких точных последовательностей коцепных комплексов:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & C_L^*(X, A) & \xrightarrow{i_1^\#} & C_L^*(X) & \xrightarrow{i_1^\#} & C_L^*(A) & \rightarrow 0 \\ & \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi'' & \\ 0 \rightarrow & C_L^*(X, A \cup B) & \xrightarrow{i_2^\#} & C_L^*(X, B) & \xrightarrow{i^\#} & C_L^*(A, A \cap B) & \rightarrow 0 \end{array}$$

Гомоморфизмы φ' , φ и φ'' определены формулами

$$\begin{aligned} \varphi'(w) &= w \cup z && \text{для любого элемента } w \in C_L^n(X, A), \\ \varphi(x) &= x \cup z && \text{для любого элемента } x \in C_L^n(X), \\ \varphi''(y) &= y \cup (i^\# z) && \text{для любого элемента } y \in C_L^n(A). \end{aligned}$$

Заметим, что каждое из отображений φ' , φ и φ'' повышает размерность на q единиц. Кроме того, эти отображения коммутируют с кограничным оператором. Таким образом, φ' , φ , φ'' — коцепные отображения степени q . Коммутативность обоих квадратов диаграммы проверяется непосредственно. Переходя к когомологиям, получим коммутативную диаграмму, включающую точные когомологические последовательности пары (X, A) и триады $(X; A, B)$ и гомоморфизмы, определяющие отображение первой точной последовательности во вторую. Эти гомоморфизмы отображают заданный класс когомологий в его $\cup$ -произведение с v или i^*v . Равенство $(\delta u) \cup v = \delta'(u \cup i^*v)$ — непосредственное следствие коммутативности одного из квадратов этой диаграммы, а именно квадрата, содержащего кограничные операторы. Доказательство окончено.

Отметим важный частный случай доказанного соотношения, в котором $B = \emptyset$. В этом случае триада $(X; A, B)$ сводится к паре (X, A) .

(10) Аналогичное свойство имеет место и для второго аргумента тензорного произведения. Пусть $(X; A, B)$ — триада, удовлетворяющая предположениям, сформулированным в свойстве (9). Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_L^p(X, A) \otimes H_L^q(B) & \xrightarrow{i^* \otimes 1} & H_L^p(B, A \cap B) \otimes H_L^q(B) \xrightarrow{\cup} H_L^{p+q}(B, A \cap B) \\ \downarrow (-1)^p \otimes \delta & & \downarrow \delta' \\ H_L^p(X, A) \otimes H_L^{q+1}(X, B) & \xrightarrow{\cup} & H_L^{p+q+1}(X, A \cup B) \end{array}$$

коммутативна. Здесь δ' — кограничный оператор из второй точной последовательности триады $(X; A, B)$, δ — кограничный оператор из точной когомологической последовательности пары (X, B) и $i: (B, B \cap A) \rightarrow (X, A)$ — включение. Доказательство

почти не отличается от доказательства свойства (9). Ситуация упрощается при $A = \emptyset$.

Читатель, вероятно, уже заметил, что свойства (9) и (10) справедливы и для когомологий Александера — Спеньера, основанных на всех коцепях.

(11) Пусть $(X; A, B)$ — триада, удовлетворяющая условию (13), $u \in H^p(X, A; G_1)$ и $v \in H^q(X, B; G_2)$. Тогда

$$u \cup v = (-1)^{pq} v \cup u.$$

При этом мы отождествляем группы $G_1 \otimes G_2$ и $G_2 \otimes G_1$ с помощью существующего между ними естественного изоморфизма. При дополнительном предположении, что множества A и B замкнуты, это равенство справедливо и для когомологий Александера — Спеньера H_L^* , построенных по локально конечнозначным коцепям.

Излагаемое ниже доказательство этого свойства опирается на формулу Стиррода [56]. Работа Стиррода в свою очередь была вызвана предшествовавшими ей результатами Александера и Л. С. Понтрягина. Преимущество предлагаемого доказательства состоит в том, что оно быстро приводит к цели. Его недостаток — это то, что оно имеет чисто вычислительный характер. Читателю следует сравнить это доказательство с доказательством аналогичного утверждения для когомологий с компактными носителями (см. § 7.6).

Определим новый гомоморфизм

$$\Phi^p(X; G_1) \otimes \Phi^q(X; G_2) \rightarrow \Phi^{p+q-1}(X; G_1 \otimes G_2),$$

называемый $\cup_1$ -умножением. Если $\varphi \in \Phi^p(X; G_1)$ и $\psi \in \Phi^q(X; G_2)$, то при $p > 0$, $q > 0$ функция $\varphi \cup_1 \psi \in \Phi^{p+q-1}(X; G_1 \otimes G_2)$ определяется формулой

$$\begin{aligned} \varphi \cup_1 \psi(x_0, \dots, x_{p+q-1}) &= \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^{(p-j)(q+1)} \varphi(x_0, \dots, x_j, x_{j+q}, \dots, x_{p+q-1}) \otimes \psi(x_j, \dots, x_{j+q}). \end{aligned}$$

Пусть $\varphi \cup_1 \psi = 0$, если $p \leq 0$ или $q \leq 0$. Это умножение обладает некоторыми свойствами $\cup$ -умножения. Например, если функции φ и ψ локально конечнозначны, то $\varphi \cup_1 \psi$ — локально конечнозначная функция. Кроме того,

$$|\varphi \cup_1 \psi| \leq |\varphi| \cap |\psi|.$$

Таким образом, определены гомоморфизмы

$$C^p(X; G_1) \otimes C^q(X; G_2) \rightarrow C^{p+q-1}(X; G_1 \otimes G_2),$$

$$C_L^p(X; G_1) \otimes C_L^q(X; G_2) \rightarrow C_L^{p+q-1}(X; G_1 \otimes G_2).$$

Однако формула для кограницы сложнее, чем в случае $\cup$ -умножения. Прямое, хотя и очень утомительное, вычисление показывает, что

$$\delta(\varphi \cup_1 \psi) = (-1)^{p+q-1} \varphi \cup \psi + (-1)^{pq+p+q} \psi \cup \varphi + \\ + (\delta\varphi) \cup_1 \psi + (-1)^p \varphi \cup_1 (\delta\psi)$$

для любых $\varphi \in \Phi^p(X; G_1)$ и $\psi \in \Phi^q(X; G_2)$. Аналогичная формула справедлива, очевидно, и для $\delta(u \cup_1 v)$, где $u \in C^p(X; G_1)$ и $v \in C^q(X; G_2)$. Если u и v — коциклы, т. е. $\delta u = \delta v = 0$, то

$$u \cup v - (-1)^{pq} v \cup u = \pm \delta(u \cup_1 v).$$

При переходе к когомологиям получается требуемый закон перестановочности $\cup$ -умножения. Оставляем читателю обсуждение некоторых дополнительных деталей, необходимых в ситуации, когда $u \in C^p(X, A; G_1)$ и $v \in C^q(X, B; G_2)$.

§ 8.8. Естественное преобразование теории когомологий Александера — Спеньера в теорию сингулярных когомологий

В настоящем параграфе вводится естественное преобразование, которое играет фундаментальную роль в обсуждении соотношений между когомологиями Александера — Спеньера и сингулярными когомологиями. Предполагается, что читатель уже имеет некоторое представление о теории сингулярных гомологий и когомологий. Несколько слов о необходимых обозначениях, которые немного отличаются от обозначений Спеньера [51]. Для любого пространства X и любого целого числа $q \geq 0$ обозначим через $\Delta_q(X)$ группу сингулярных q -мерных цепей пространства X , т. е. свободную абелеву группу, порожденную множеством всех q -мерных сингулярных симплексов пространства X ; считаем, что $\Delta_q(X) = 0$ при $q < 0$. Граничный оператор, как и в книге Спеньера [51, стр. 209], обозначаем через $\partial_q: \Delta_q(X) \rightarrow \Delta_{q-1}(X)$. Через $\Delta(X) = \{\Delta_q(X), \partial_q\}$ обозначается сингулярный цепной комплекс пространства X . Если A — подпространство X , то $\Delta(A)$ — подкомплекс комплекса $\Delta(X)$. Пусть $\Delta(X, A)$ — факторкомплекс $\Delta(X)/\Delta(A)$. Его гомологии обозначаются через $H_s^q(X, A)$, причем верхний индекс s означает, что это группа сингулярных гомологий пары (X, A) . Для любой абелевой группы G обозначим через $\Delta^*(X, A; G)$ коцепной комплекс

$$\text{Hom}(\Delta(X, A), G) = \{\text{Hom}(\Delta^q(X, A), G) \delta^q\}.$$

Пусть $H_s^q(X, A; G)$ — группа q -мерных когомологий этого комплекса.

Для того чтобы выяснить связь между сингулярными когомологиями и когомологиями Александра — Спеньера, определим носители сингулярных коцепей. Коцепь $\varphi \in \Delta^q(X; G)$ можно считать функцией, принимающей на каждом q -мерном сингулярном симплексе σ значение $\varphi(\sigma) \in G$. Носитель $|\varphi|$ коцепи φ — это подмножество пространства X , определяемое следующим условием: точка x тогда и только тогда не принадлежит множеству $|\varphi|$, когда существует такая окрестность V этой точки, что $\varphi(\sigma) = 0$ для любого сингулярного q -мерного симплекса подпространства V . Это определение — естественный аналог определения носителей коцепей Александра — Спеньера. Все свойства, перечисленные в § 8.2 для носителей коцепей Александра — Спеньера, без каких-либо изменений устанавливаются и для носителей сингулярных коцепей. Обозначим через $\Delta^q(X; G)$ подгруппу q -мерных сингулярных коцепей, имеющих пустой носитель, и пусть $\Delta_0^*(X; G) = \{\Delta^q(X; G)\}$ — соответствующий коцепный комплекс. Пусть $S^*(X; G)$ — факторкомплекс $\Delta^*(X; G)/\Delta_0^*(X; G)$. Для подпространства A пространства X гомоморфизм $i^\# : S^*(X; G) \rightarrow S^*(A; G)$, индуцированный отображением включения, является, очевидно, эпиморфизмом, ядро $S^*(X, A; G)$ которого — подкомплекс комплекса $S^*(X; G)$. Таким образом, точна последовательность

$$0 \rightarrow S^*(X, A; G) \xrightarrow{i^\#} S^*(X; G) \xrightarrow{i^\#} S^*(A; G) \rightarrow 0.$$

Естественные коцепные отображения $\Delta^*(X; G) \rightarrow S^*(X; G)$ и $\Delta^*(A; G) \rightarrow S^*(A; G)$ приводят к следующей коммутативной диаграмме коротких точных последовательностей

$$(14) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Delta^*(X, A; G) & \rightarrow & \Delta^*(X; G) & \rightarrow & \Delta^*(A; G) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow 2 & & \downarrow 3 \\ 0 & \rightarrow & S^*(X, A; G) & \rightarrow & S^*(X; G) & \rightarrow & S^*(A; G) \rightarrow 0 \end{array}$$

8.16. Лемма. Для любой пары (X, A) отображения, обозначенные в диаграмме (14) вертикальными стрелками, индуцируют изоморфизмы групп когомологий.

Таким образом, коцепной комплекс $S^*(X, A; G)$ приводит к тем же когомологиям. Однако он помогает определить естественное преобразование теории когомологий Александра — Спеньера в сингулярную теорию.

Доказательство леммы. В силу леммы о пяти гомоморфизмах (лемма 1.9) достаточно установить, что коцепные отображения, обозначенные в диаграмме цифрами 2 и 3, индуцируют изоморфизмы, т. е. можно ограничиться рассмотрением лишь абсолютных групп когомологий, не рассматривая относительные.

Доказательство того, что стрелка с номером 2 индуцирует изоморфизм когомологий, опирается на следующее хорошо известное свойство сингулярных гомологий. Пусть $\mathcal{U}$ — открытое покрытие пространства X и $\Delta(X, \mathcal{U})$ — подкомплекс комплекса $\Delta(X)$, порожденный всеми сингулярными симплексами, имеющими мелкость порядка $\mathcal{U}$, т. е. сингулярными симплексами, каждый из которых содержится в некотором множестве из покрытия $\mathcal{U}$. Тогда включение $k: \Delta(X, \mathcal{U}) \rightarrow \Delta(X)$ является цепной гомотопической эквивалентностью (ср. [51, теорема 14, стр. 233]). Поэтому «двойственное» отображение

$$k^\#: \Delta^*(X; G) \rightarrow \Delta^*(X, \mathcal{U}; G)$$

— коцепная гомотопическая эквивалентность (здесь $\Delta^*(X, \mathcal{U}; G) = \text{Hom}(\Delta(X, \mathcal{U}), G)$). Поскольку k — мономорфизм, образ которого выделяется прямым слагаемым, $k^\#$ — эпиморфизм. Пусть $N^*(X, \mathcal{U}; G)$ — ядро этого эпиморфизма. Тогда короткая последовательность

$$0 \rightarrow N^*(X, \mathcal{U}; G) \rightarrow \Delta^*(X; G) \xrightarrow{k^\#} \Delta^*(X, \mathcal{U}; G) \rightarrow 0$$

точна. Поскольку $k^\#$ — коцепная гомотопическая эквивалентность,

$$H^q(N^*(X, \mathcal{U}; G)) = 0$$

для всех q . Коцепь $\varphi \in \Delta^q(X; G)$ принадлежит подгруппе $N^q(X, \mathcal{U}; G)$ тогда и только тогда, когда $\varphi(\sigma) = 0$ для всех q -мерных сингулярных симплексов σ , имеющих мелкость порядка $\mathcal{U}$. Отсюда следует, что подгруппа $\Delta_0^q(X; G)$ сингулярных коцепей с пустым носителем совпадает с объединением подгрупп $N^q(X, \mathcal{U}; G)$ по всем открытым покрытиям $\mathcal{U}$ пространства X . Поскольку $H^q(N^*(X, \mathcal{U}; G)) = 0$ для любого открытого покрытия $\mathcal{U}$, простое рассуждение показывает, что $H^q(\Delta_0^*(X; G)) = 0$. Рассматривая точную когомологическую последовательность, отвечающую короткой точной последовательности коцепных комплексов

$$0 \rightarrow \Delta_0^*(X; G) \rightarrow \Delta^*(X; G) \rightarrow S^*(X; G) \rightarrow 0,$$

получаем требуемый изоморфизм $H^q(\Delta^*(X; G)) \cong H^q(S^*(X; G))$.

Теперь мы можем определить упоминавшееся выше естественное преобразование. Для любого пространства X определим гомоморфизм

$$\mu: \Phi^q(X; G) \rightarrow \Delta^q(X; G),$$

полагая

$$(\mu\varphi)(\sigma) = \varphi(\sigma(p_0), \dots, \sigma(p_q)),$$

где $\varphi \in \Phi^q(X; G)$ — любая функция, $\sigma: \Delta_q \rightarrow X$ — любой q -мер-

ный сингулярный симплекс и Δ_q — стандартный q -мерный симплекс с вершинами $p_0, p_1, \dots, p_q$. Ясно, что μ коммутирует с кограничным оператором и, следовательно, определяет коцепное отображение

$$\mu: \Phi^*(X; G) \rightarrow \Delta^*(X; G).$$

Ясно также, что μ может лишь уменьшать носители, т. е. для любой функции $\varphi \in \Phi^q(X; G)$

$$|\mu\varphi| \subset |\varphi|.$$

Следовательно, μ отображает подкомплекс $\Phi_0^*(X; G)$ в $\Delta_0^*(X; G)$ и индуцирует коцепное отображение факторкомплексов

$$\mu: C^*(X; G) \rightarrow S^*(X; G).$$

Наконец, если $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, то отображение μ коммутирует с коцепными отображениями $f^\#$ сингулярных коцепей и коцепей Александера — Спеньера, индуцированными отображением f . В частности, если A — подпространство в X и $i: A \rightarrow X$ — включение, то комплексы $C^*(X, A; G)$ и $S^*(X, A; G)$ определяются как ядра отображений $i^\#: C^*(X; G) \rightarrow C^*(A; G)$ и $i^\#: S^*(X; G) \rightarrow S^*(A; G)$ соответственно. Поэтому $\mu: C^*(X; G) \rightarrow S^*(X; G)$ отображает $C^*(X, A; G)$ в $S^*(X, A; G)$. Индуцированный гомоморфизм

$$\mu: H^q(C^*(X, A; G)) \rightarrow H^q(S^*(X, A; G))$$

и есть нужное естественное преобразование когомологий Александера — Спеньера в сингулярные когомологии. Оно, очевидно, коммутирует с гомоморфизмами, индуцированными непрерывными отображениями, а также с кограничным оператором из точной когомологической последовательности пары¹⁾.

¹⁾ Естественное преобразование $\bar{H}^*(X, A; G) \rightarrow H_s^*(X, A; G)$ определено для любой теории когомологий H^* , удовлетворяющей обычным аксиомам Стинрода — Эйленберга [14] и являющейся Π -аддитивной (т. е. обладающей свойством, сформулированным в теореме 8.12). Его существование легко вытекает из рассмотрения геометрической реализации сингулярного комплекса, построенной в [17], и теоремы единственности Милнора [42] для когомологий CW -комплексов (см. добавление к гл. 6). Описание двойственного преобразования для гомотопий дано в работе [26*] (см. также конец обзора [49]). Эта же конструкция используется в § 9.6. Для паракомпактных пространств когомологии H^q совпадают с когомологиями Александера — Чеха (см. § 8.9). Предельный переход по покрытиям, используемый в определении когомологий Александера — Чеха, и теорема единственности Милнора [42] обеспечивают наличие естественного преобразования $H^q \rightarrow H^q$ (по крайней мере для пар (X, A) с замкнутыми множествами A). Таким образом, в категории паракомпактных пространств среди всех аксиоматических теорий H^* теории H^* и H_s^* выделяются тем, что занимают «крайние» положения. — *Прим. ред.*

Известны некоторые условия, накладываемые на пару (X, A) , при которых μ^* — изоморфизм. В [51] с помощью теории когомологий с коэффициентами в предпучках доказываются следующие две теоремы подобного рода.

(а) Если X — паракомпактное хаусдорфово пространство, каждая точка которого жестко вложена в X в размерностях $< n$ по отношению к сингулярным когомологиям с коэффициентами в G , то $\mu^*: H^q(X; G) \rightarrow H_s^q(X; G)$ — изоморфизм при $q < n$ и мономорфизм при $q = n$ [51, теорема 1, стр. 438]. При $n = \infty$ это вытекает также из основных утверждений работы [1] или [34].

(б) Если X — паракомпактное хаусдорфово пространство, гомологически локально связное в размерности n (по отношению к сингулярным гомологиям), то $\mu^*: H^q(X; G) \rightarrow H_s^q(X; G)$ является изоморфизмом при $q \leq n$ и мономорфизмом при $q = n + 1$ [51, следствие 5, стр. 440].

Теоремы такого рода содержатся во многих книгах по теории пучков¹⁾. Заметим, что в двух указанных выше теоремах основное предположение о пространстве X состоит в том, что оно обладает некоторыми локальными свойствами.

Если (X, A) — пара, состоящая из CW -комплекса X и его подкомплекса A (или, в большей общности, пара, имеющая гомотопический тип пары CW -комплексов), то из общей теоремы Милнора [42] вытекает, что $\mu^*: H^q(X, A; G) \rightarrow H_s^q(X, A; G)$ — изоморфизм. В действительности в теореме Милнора не утверждается, что именно μ^* — изоморфизм, а утверждается лишь существование *некоторого* естественного изоморфизма. Однако легко проверить, что два естественных изоморфизма совпадают, если они одинаковы для одноточечного пространства. В теореме Милнора нет необходимости налагать какие-либо условия конечности на рассматриваемые CW -комплексы. Для конечномерных CW -комплексов такая «теорема единственности» может быть получена с помощью техники Стиррода и Эйленберга [14]²⁾.

Хорошо известно, что если пара (X, A) состоит из CW -комплекса и его подкомплекса, то пространство X паракомпактно и хаусдорфово, а A — его замкнутое подпространство. Следовательно, по теореме Гордона об изоморфизме $H_L^p(X, A) \cong H^p(X, A)$. Кроме того, из теоремы Милнора вытекает, что $H^p(X, A) \cong \cong H_s^p(X, A)$. Наконец, хорошо известно (хотя, по-видимому, чет-

¹⁾ См., например, [5*] и [5]. В случае пар (X, A) локальные условия накладываются не только на X , но и на A . Этим требованиям удовлетворяют любые локально стягиваемые пространства, в частности многообразия и полиэдры. — *Прим. ред.*

²⁾ «Общая теорема Милнора» — это теорема единственности, сформулированная в добавлении к гл. 6. Применяемые автором ниже аргументы можно заменить, очевидно, ссылкой на этот результат. — *Прим. ред.*

ко не сформулировано в литературе), что группы сингулярных когомологий $H_s^p(X, A; G)$ можно вычислять с помощью коцепного комплекса, группа n -мерных коцепей которого совпадает с группой *всех* функций, определенных на множестве n -клеток пространства $X \setminus A$, со значениями в G (этот результат неявно фигурирует в книге Дольда [11, гл. VI, § 7.11] и в работе Милнора [42]). Полезно сравнить это наблюдение с результатом из гл. 3 о когомологиях $H_c^q(X; G)$ с компактными носителями локально компактного CW -комплекса X . Согласно указанному результату, группы $H_c^q(X, G)$ можно вычислить с помощью комплекса так называемых финитных коцепей, т. е. коцепей, каждая из которых принимает ненулевые значения лишь на конечном числе клеток из X .

§ 8.9. Дальнейшие свойства когомологий Александра — Спеньера пространств общего типа

В настоящем параграфе перечисляются некоторые дальнейшие результаты о когомологиях Александра — Спеньера. Доказательства не приводятся, даны лишь ссылки на литературу.

В гл. 6 были приведены некоторые теоремы единственности для когомологий с компактными носителями на категории локально компактных пространств и собственных отображений. Естественно ожидать, что аксиоматическое описание может быть дано и для когомологий Александра — Спеньера, рассмотренных в настоящей главе. Такие описания получены Лоусоном [34] и Бэконом [1]. В каждом случае когомологии Александра — Спеньера рассматриваются на категории паракомпактных хаусдорфовых пространств¹⁾.

Эти описания имеют разнообразные применения. Например, они могут быть использованы для доказательства естественного изоморфизма групп когомологий Александра — Спеньера паракомпактного хаусдорфова пространства группам когомологий Чеха, определенным с помощью нервов открытых покрытий. [Прямое доказательство этого изоморфизма дано в [51, стр. 432] или в [33]²⁾. С их помощью можно доказать также следующую

¹⁾ Формулировка теоремы Бэкона приведена в добавлении к гл. 6. Материал настоящей главы подтверждает преимущества аксиоматики Стиррода — Эйленберга (дополняемой в каждом случае подходящим требованием аддитивности Милнора, см. добавление к гл. 6) перед аксиоматикой, избранной автором для когомологий H_c^* с компактными носителями в первой части книги. — *Прим. ред.*

²⁾ См. также [5*]. — *Прим. ред.*

теорему Вьеториса — Бегла. Пусть X и Y — паракомпактные хаусдорфовы пространства и f — замкнутое непрерывное отображение пространства X на Y . Предположим, что $H^p(f^{-1}(y)) = 0$ при $p \leq n$ для любой точки $y \in Y$. Тогда индуцированный гомоморфизм $f^*: H^p(Y) \rightarrow H^p(X)$ — изоморфизм при $p \leq n$ и монотоморфизм при $p = n + 1$. Доказательство см. в [34] или в [51, стр. 445]¹⁾.

Интересно отметить, что эта теорема Вьеториса, полученная им для компактных метрических пространств, — одна из старейших теорем теории гомологий. Действительно, в 1927 г. для доказательства своего варианта этой теоремы Вьеторис [61] дал одно из первых определений теории гомологий общих пространств. Теория гомологий Вьеториса для компактных метрических пространств — предшественник современной теории когомологий Александера — Спеньера.

Еще одно важное свойство когомологий Александера — Спеньера паракомпактных хаусдорфовых пространств вскрывается теоремой Хубера [27]. Пусть $K(G, n)$ — пространство Эйленберга — Маклейна, построенное для данной абелевой группы G и целого числа $n \geq 0$. Пространство $K(G, n)$ — это CW -комплекс, для которого $\pi_n(K(G, n)) = G$ и $\pi_q(K(G, n)) = 0$, если $q \neq n$. Этим однозначно определен гомотопический тип пространства $K(G, n)$. Хорошо известно, что для любого пространства X множество гомотопических классов отображений X в $K(G, n)$ имеет естественную структуру абелевой группы. Хорошо известно также, что для любого CW -комплекса X эта группа естественно изоморфна группе когомологий $H^n(X; G)$. Теорема Хубера утверждает, что группа гомотопических классов отображений паракомпактного хаусдорфова пространства X в $K(G, n)$ совпадает с группой $H^n(X; G)$ когомологий Александера — Спеньера при условии, что либо группа G счетна, либо топология пространства X компактно порождена.

Доказательство теоремы Хубера можно найти в книге Дольда [11, стр. 450]²⁾.

В заключение следует упомянуть о связи когомологий Александера — Спеньера с теорией размерности топологических пространств. Эта связь не является неожиданной по следующим причинам.

(а) Для паракомпактных хаусдорфовых пространств кого-

¹⁾ Эта теорема — стандартное следствие спектральной последовательности Лере отображения f ([5*, стр. 228], [6*, стр. 93]). В работе [10*] дано усиление этой теоремы, а также ее обращение. — Прим. перев.

²⁾ Дольд доказывает эту теорему для любого паракомпактного пространства X и произвольной абелевой группы G . В такой форме результат получен Бартиком [3*]. Этот результат вытекает также из работы [27*]. — Прим. перев.

мологии Александера — Спеньера естественно изоморфны когомологиям Чеха (это было отмечено выше)¹⁾.

(b) Когомологии Чеха определяются посредством открытых покрытий.

(c) Одно из стандартных определений размерности топологического пространства дается в терминах открытых покрытий.

Точная связь между теорией размерности и когомологиями Александера — Спеньера может быть выражена следующим образом. Для топологического пространства X и абелевой группы G обозначим через $D(X, G)$ наибольшее целое число n (или ∞), такое, что $H^n(X, A; G) \neq 0$ для некоторого замкнутого подмножества A пространства X . Тогда, *если X — паракомпактное хаусдорфово пространство, то $D(X, \mathbb{Z})$ совпадает с $\dim X$* (т. е. с размерностью пространства X , определяемой как наименьший порядок достаточно мелких конечных открытых покрытий X)²⁾. Доказательство этой теоремы можно найти в приложении к книге Нагами [44].

¹⁾ Требование паракомпактности не существенно (см. Dower C. H., Ann. Math., 56 (1952), 84—95. — Прим. перев.

²⁾ Это утверждение — одна из основных теорем гомологической теории размерности П. С. Александрова. Утверждение установлено в предположении, что $\dim X < \infty$. Для паракомпактных пространств теорема доказана Дау-кером [19*]. — Прим. ред.

Гомологии пространств общего типа с компактными носителями

§ 9.1. Введение

Целью настоящей главы является распространение теории гомологий, определенной в гл. 4, на произвольные (некомпактные) хаусдорфовы пространства. Распространение осуществляется таким образом, что каждый класс гомологий представляется классом гомологий некоторого компактного подмножества. Этим объясняется термин «гомологии с компактными носителями». Мы изложим основные свойства этой теории гомологий, которые до сих пор не были отражены в математической литературе¹⁾.

Основная идея построения теории гомологий такого типа принадлежит Стирроду и Эйленбергу²⁾ [14, стр. 316, упр. Д]. Эти гомологии были использованы К. А. Ситниковым [48] в 1954 г. для распространения классических теорем двойственности Александера на произвольные (не обязательно замкнутые или открытые) подмножества евклидовых пространств. Обобщенную теорему двойственности Ситникова мы рассмотрим в гл. 11.

В настоящей главе предполагается, что все встречающиеся пространства удовлетворяют аксиоме отделимости Хаусдорфа.

§ 9.2. Основные понятия

В этой главе мы систематически используем следующие обозначения и терминологию. Будем говорить, что (X, A) — *хаусдор-*

¹⁾ Описание теории гомологий с компактными носителями дано в § 5, 8 работы [49] и в § 8, 9 работы [11*]. Для категории локально компактных пространств и их непрерывных отображений такое описание (в терминах гомологий Бореля — Мура) имеется в книге [5]. — *Прим. ред.*

²⁾ Эта идея возникла раньше. В терминах теории гомологий Александера — Чеха H_* определение гомологий с компактными носителями H_*^c было предложено Г. С. Чогошвили еще в 1945 г., и эти группы фигурировали в 40-е годы в работах Г. С. Чогошвили и П. С. Александрова о двойственности (см. по этому поводу [2*]). Группы H_*^c были впервые применены К. А. Ситниковым [9*] в 1951 г. Позже гомологии с компактными носителями локально компактных пространств рассматривались Борелем и Муром [16*]. Для общих пространств гомологии Бореля — Мура с компактными носителями фигурируют в статье Раймонда [30*]. — *Прим. ред.*

пара, если X хаусдорфово, а A — его произвольное подпространство. Аналогично пара (X, A) называется *компактной*, если X компактно и хаусдорфово, а A *замкнуто*. Включение пар $(X, A) \subset (Y, B)$ означает, что $X \subset Y$ и $A \subset B$. Как и в предыдущей главе, отображение пар $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ — это такое непрерывное отображение пространства X в Y , что $f(A) \subset B$.

Наша цель — определить группы гомологий $H_q^c(X, A)$ произвольной хаусдорфовой пары (X, A) . Определим $H_q^c(X, A)$ как прямой предел групп $H_q(P, Q)$ по всем компактным парам $(P, Q) \subset (X, A)$. Группы $H_q(P, Q)$ и их основные свойства для компактных пар (P, Q) неявно фигурируют в гл. 4. Напомним необходимый материал в явной форме.

По существу, имеется два способа изложения теории гомологий компактных пар в соответствии с теорией, развитой в гл. 4. Оба способа приводят к одному и тому же конечному результату. При первом способе для любой компактной пары (P, Q) и любой абелевой группы G

$$H_q(P, Q; G) = H_q(C_*(P, Q; G)),$$

где $C_*(P, Q; G)$ — цепной комплекс, определенный в § 4.7 равенством

$$C_*(P, Q; G) = \text{Hom}(C^*(P, Q), G).$$

Там же было показано, что группа $H_q(P, Q; G)$ естественно изоморфна $H_q(P \setminus Q; G)$. Отсюда следует, что непрерывное отображение $f: (P, Q) \rightarrow (P', Q')$, являющееся относительным гомеоморфизмом (т. е. гомеоморфно отображающее $P \setminus Q$ на $P' \setminus Q'$), индуцирует изоморфизмы соответствующих групп гомологий. Всякое непрерывное отображение $f: (P, Q) \rightarrow (P', Q')$ компактных пар индуцирует, очевидно, гомоморфизм точной гомологической последовательности пары (P, Q) в гомологическую последовательность пары (P', Q') . Для возникающей теории гомологий справедливы все аксиомы Стиррода — Эйленберга.

При втором способе описания гомологий компактных пар (P, Q) имеем

$$H_q(P, Q; G) = H_q(P \setminus Q; G),$$

где $H_q(P \setminus Q; G)$ — группа гомологий локально компактного пространства $P \setminus Q$, определенная в гл. 4. Для непрерывного отображения $f: (P, Q) \rightarrow (P', Q')$ компактных пар индуцированный гомоморфизм $f_*: H_q(P, Q) \rightarrow H_q(P', Q')$ определим следующим образом. Пусть $U = f^{-1}(P' \setminus Q')$ и пусть $f_1: U \rightarrow P' \setminus Q'$ — *собственное* отображение, определенное посредством f . Тогда по определению f_* является композицией гомоморфизмов

$$H_q(P \setminus Q) \xrightarrow{p} H_q(U) \xrightarrow{f_{1*}} H_q(P' \setminus Q').$$

Наконец, определим граничный оператор $\partial: H_q(P, Q) \rightarrow H_{q-1}(Q)$ компактной пары (P, Q) как граничный оператор

$$\partial_{P, Q}: H_q(P \setminus Q) \rightarrow H_{q-1}(Q),$$

определенный в гл. 4. Стандартная проверка показывает, что эти определения приводят к теории гомологий на категории компактных пар и их непрерывных отображений, удовлетворяющей всем аксиомам Стинрода — Эйленберга, и в этом фактически состоит содержание теоремы X.7.2 из книги Стинрода и Эйленберга [14].

Материал гл. 4 делает практически очевидным тот факт, что на категории компактных пар оба указанных способа приводят к одной и той же теории гомологий. Следовательно, мы можем использовать любой из них в зависимости от конкретной ситуации.

Пусть теперь (X, A) — произвольная хаусдорфова пара. Множество всех компактных пар, содержащихся в (X, A) , частично упорядочено по включению. Кроме того, это множество является *направленным* в смысле определения из § A.2 приложения. Действительно, если компактные пары (P, Q) и (P', Q') содержатся в (X, A) , то $(P \cup P', Q \cup Q')$ — компактная пара, содержащаяся в (X, A) и содержащая обе пары (P, Q) и (P', Q') .

Сопоставляя каждой компактной паре $(P, Q) \subset (X, A)$ группу гомологий $H_q(P, Q; G)$ и каждому включению $(P, Q) \subset (P', Q')$ таких пар гомоморфизм

$$H_q(P, Q; G) \rightarrow H_q(P', Q'; G),$$

индуцированный отображением включения, получаем прямую систему абелевых групп (в смысле определения из § A.2 приложения). Определим группу $H_q^c(X, A; G)$ как прямой предел этой системы и назовем ее *q-мерной группой гомологий с компактными носителями пары (X, A) с коэффициентами в G* .

Для компактной пары (X, A) это определение не дает ничего нового: в этом случае, очевидно, $H_q^c(X, A) = H_q(X, A)$. Если X локально компактно, но некомпактно, то группа $H_q^c(X)$, вообще говоря, отличается от группы гомологий $H_q(X)$, определенной в гл. 4. Ниже мы увидим подтверждающие это примеры¹⁾.

Пусть (X, A) и (Y, B) — хаусдорфовы пары и $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ — непрерывное отображение. Сопоставляя каждой компактной паре (P, Q) , содержащейся в (X, A) , компактную пару $(f(P), f(Q))$, содержащуюся в (Y, B) , получаем сохраняющее

¹⁾ Достаточно сравнить между собой гомологии евклидова пространства. — Прим. ред.

порядок отображение одного направленного множества в другое. Соответствующие гомоморфизмы

$$H_q(P, Q; G) \rightarrow H_q(f(P), f(Q); G),$$

индуцированные отображением f , определяют отображение первой прямой системы абелевых групп во вторую (в смысле определения из приложения), следовательно, возникает индуцированный гомоморфизм

$$f_*: H_q^c(X, A; G) \rightarrow H_q^c(Y, B; G)$$

предельных групп. Этот гомоморфизм, очевидно, обладает всеми свойствами функториальности, требуемыми в теории гомологий (ср. [14, гл. I]).

Точная гомологическая последовательность для гомологий с компактными носителями определяется очевидным образом. Если (X, A) — хаусдорфова пара и (P, Q) — содержащаяся в (X, A) компактная пара, то имеется точная гомологическая последовательность

$$\dots \rightarrow H_n(Q) \rightarrow H_n(P) \rightarrow H_n(P, Q) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(Q) \rightarrow \dots$$

Включение $(P, Q) \subset (P', Q')$ компактных пар, содержащихся в (X, A) , приводит к коммутативной диаграмме, состоящей из гомоморфизмов групп гомологической последовательности пары (P, Q) в соответствующие группы гомологической последовательности пары (P', Q') . Так как прямой предел сохраняет точность, получаем точную последовательность

$$\dots \rightarrow H_n^c(A) \xrightarrow{i_*} H_n^c(X) \xrightarrow{j_*} H_n^c(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}^c(A) \rightarrow \dots$$

для пары (X, A) . Гомоморфизм ∂ обладает всеми стандартными свойствами граничного оператора теории гомологий.

В предыдущей части параграфа мы определили группы гомологий $H_q^c(X, A)$ произвольной хаусдорфовой пары (X, A) . Существует важный частный случай, в котором определение может быть несколько упрощено. Именно, пусть A — замкнутое подмножество пространства X . В этом случае, очевидно, множество всех компактных пар вида $(P, P \cap A)$, где P — компактные подмножества X , составляет *конфинальную* часть множества всех компактных пар $(P, Q) \subset (X, A)$. Поэтому $H_q^c(X, A)$ — прямой предел групп гомологий $H_q(P, P \cap A)$ по всем компактным подмножествам P пространства X . Этот факт часто приводит к значительному упрощению доказательств, и в оставшейся части книги мы будем пользоваться им без дальнейших пояснений.

В действительности в этом направлении можно продвинуться даже несколько дальше. Пусть (X, A) , как и выше, — хаусдорф-

фова пара, в которой A замкнуто. Для компактного подмножества P пространства X положим $P_0 = \overline{P \setminus A}$. Тогда P_0 — компактное подмножество пространства P , причем $P_0 \setminus A = P \setminus A$. Поэтому включение $P_0 \subset P$ индуцирует изоморфизм гомологий

$$H_q(P_0, P_0 \cap A) \cong H_q(P, P \cap A).$$

Заметим, что множество $P_0 \setminus A$ плотно в P_0 . Заметим также, что множество всех компактных подмножеств Q пространства X , для которых $Q \setminus A$ плотно в Q , направлено по включению. Это приводит к следующей лемме.

9.1. Лемма. Пусть (X, A) — хаусдорфова пара, в которой множество A замкнуто. Тогда $H_q^c(X, A)$ — прямой предел групп гомологий $H_q(P, P \cap A)$ по всем тем компактным подмножествам P пространства X , для которых множество $P \setminus A$ плотно в P .

Доказательство этой леммы оставляем читателю. Оно основано на простом предположении о прямых пределах, сформулированном в упр. 6 из § A.2 приложения.

Упражнения

1. Определите отображение

$$k_*: H_n^c(X, A; G) \rightarrow H_n^c(X, A; G'),$$

индуцированное гомоморфизмом $k: G \rightarrow G'$ групп коэффициентов. Покажите, что короткой точной последовательности

$$0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 0$$

отвечает длинная точная последовательность групп гомологий.

2. Для произвольного хаусдорфова пространства X и абелевой группы G определите гомоморфизм аугментации $e: H_0^c(X; G) \rightarrow G$. Докажите его естественность по отношению к непрерывным отображениям пространств и гомоморфизмам групп коэффициентов.

3. В упр. 3 из § 4.11 для произвольного локально компактного пространства X и абелевых групп G_1 и G_2 мы определили билинейное отображение

$$H_n(X; G_1) \otimes H_n^c(X; G_2) \rightarrow G_1 \otimes G_2,$$

которое обозначалось через $u \otimes v \rightarrow \langle u, v \rangle$.

(а) Распространите это определение на компактные пары, т. е. определите билинейное отображение

$$H_n(P, Q; G_1) \otimes H^n(P, Q; G_2) \rightarrow G_1 \otimes G_2$$

для любой компактной пары (P, Q) .

(б) Распространите это определение на произвольные хаусдорфовы пары (X, A) , т. е. получите билинейное отображение

$$H_n^c(X, A; G_1) \otimes H^n(X, A; G_2) \rightarrow G_1 \otimes G_2,$$

где $H^n(X, A; G)$ — группа когомологий, определенная в гл. 8. (Замечание. Требуется, чтобы каждое из этих отображений сохраняло все свойства естественности. Это упражнение нуждается в технике, аналогичной той, которая будет использована в § 9.5.)

4. Для хаусдорфовой пары (X, A) с компактным подмножеством A докажите, что $H_n^c(X, A)$ — прямой предел групп $H_n(P, A)$ по всем компактным подмножествам P пространства X , содержащим A .

5. Пусть (X, A) — хаусдорфова пара, в которой множество A замкнуто, а замыкание $X \setminus A$ компактно. Докажите, что

$$H_n^c(X, A) = H_n(X \setminus A).$$

6. Предположим, что X — компактное хаусдорфово пространство, а A — незамкнутое подмножество в X . Докажите, что $H_n^c(X, A)$ — прямой предел групп $H_n(U)$ по всем открытым подмножествам U пространства X , содержащим $X \setminus A$.

§ 9.3. Свойства гомотопии и вырезания.

Последовательности Майера — Вьеториса

Свойство гомотопии справедливо для гомологий с компактными носителями в полной общности.

9.2. Теорема. Пусть $f_0, f_1: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ — гомотопные отображения хаусдорфовых пар. Тогда $f_{0*} = f_{1*}: H_q^c(X, A; G) \rightarrow H_q^c(Y, B; G)$ для всех q .

Доказательство. Пусть $F: (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$ — такое непрерывное отображение, что $F(x, 0) = f_0(x)$ и $F(x, 1) = f_1(x)$. Для любой компактной пары $(P, Q) \subset (X, A)$ пара $(F(P \times I), F(Q \times I))$ компактна и содержится в (Y, B) . Кроме того, отображения $(P, Q) \rightarrow (F(P \times I), F(Q \times I))$, определенные посредством f_0 и f_1 , гомотопны и, следовательно, индуцируют одинаковые гомоморфизмы гомологий. Переходя к прямым пределам, получаем требуемый результат.

Докажем несколько различных вариантов свойства вырезания. Прежде всего для общих пар справедлив следующий результат.

9.3. Теорема. Пусть (X, A) — хаусдорфова пара и U — такое открытое подмножество пространства X , что $\bar{U} \subset A$. Тогда включение $k: (X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$ индуцирует изоморфизм

$$k_*: H_q^c(X \setminus U, A \setminus U) \cong H_q^c(X, A).$$

Доказательство. Докажем сначала, что k_* — эпиморфизм. Пусть $u \in H_q^c(X, A)$. Согласно основным свойствам прямых пределов, существует компактная пара $(P, Q) \subset (X, A)$ и элемент $u' \in H_q(P, Q)$, переходящий в u при гомоморфизме, индуцированном отображением включения. Пусть $Q' = Q \cup U(P \cap U)$. Тогда пара (P, Q') компактна и

$$(P, Q) \subset (P, Q') \subset (X, A).$$

Утверждается, что $P \cap U = Q' \cap U$. Для доказательства заметим, что $Q' \cap U \subset P \cap U$, поскольку $Q' \subset P$. С другой стороны, $P \cap U \subset \subset Q' \cap U$, так как $P \cap U \subset P \cap U \subset Q'$ и $P \cap U \subset U$. Рассмотрим теперь коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_q^c(X \setminus U, A \setminus U) & \xrightarrow{k_*} & H_q^c(X, A) \\ \uparrow i_{4*} & & \uparrow i_{2*} \\ H_q(P \setminus U, Q' \setminus U) & \xrightarrow{i_{3*}} & H_q(P, Q') \\ & & \uparrow i_{1*} \\ & & H_q(P, Q) \end{array}$$

Все гомоморфизмы в этой диаграмме индуцированы включениями. Поскольку $P \cap U = Q' \cap U$, то

$$P \setminus Q' = (P \setminus U) \setminus (Q' \setminus U).$$

Поэтому i_{3*} — изоморфизм. Следовательно,

$$u = i_{2*} i_{1*}(u') = k_* i_{4*} (i_{3*})^{-1} i_{1*}(u'),$$

т. е. u принадлежит образу гомоморфизма k_* .

Далее покажем, что $\text{Ker } k_* = 0$. Пусть $u \in H_q^c(X \setminus U, A \setminus U)$ — такой элемент, что $k_* u = 0$. Существует компактная пара $(P, Q) \subset (X \setminus U, A \setminus U)$ и элемент $u' \in H_q(P, Q)$, переходящий в u при гомоморфизме, индуцированном включением. С другой стороны, гомоморфизм, индуцированный включением $(P, Q) \subset \subset (X, A)$, переводит u' в 0. Поэтому найдется такая компактная пара (P', Q') , что $(P, Q) \subset (P', Q') \subset (X, A)$ и элемент u' переходит в 0 при гомоморфизме, индуцированном включением $(P, Q) \subset (P', Q')$. Пусть $Q'' = Q' \cup (P' \cap U)$. В первой части доказательства теоремы было показано, что (P', Q'') — компактная пара, для которой $(P', Q') \subset (P', Q'') \subset (X, A)$ и $P' \cap U = Q'' \cap U$. Поскольку $(P, Q) \subset (P', Q'')$ и $(P, Q) \subset (X \setminus U, A \setminus U)$, получаем $(P, Q) \subset (P' \setminus U, Q'' \setminus U)$. Имеем следующую коммутативную

диаграмму:

$$\begin{array}{ccc}
 H_q^c(X \setminus U, A \setminus U) & \xrightarrow{k_*} & H_q^c(X, A) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 H_q(P' \setminus U, Q'' \setminus U) & \xrightarrow{i_*} & H_q(P', Q'') \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 H_q(P, Q) & \longrightarrow & H_q(P', Q')
 \end{array}$$

Каждый гомоморфизм в этой диаграмме индуцирован соответствующим отображением включения. Так как

$$(P' \setminus U) \setminus (Q'' \setminus U) = P' \setminus Q'',$$

то i_* — изоморфизм. Отсюда и из коммутативности диаграммы заключаем, что $u = 0$.

Для удобства приведем следующую формулировку теоремы 9.3.

9.4. Следствие. Пусть (X, A) — хаусдорфова пара и B — такое замкнутое подмножество пространства X , что $A \cup (\text{Int } B) = X$. Тогда включение $k: (B, A \cap B) \rightarrow (X, A)$ индуцирует изоморфизм $k_*: H_q^c(B, A \cap B) \cong H_q^c(X, A)$.

Следствие 9.4 сводится к теореме 9.3, если определить B как дополнение к множеству U в X .

9.5. Следствие. Пусть X — хаусдорфово пространство и A и B — такие замкнутые подмножества в X , что $X = A \cup B$. Тогда включение $k: (A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$ индуцирует изоморфизм $k_*: H_q^c(A, A \cap B) \cong H_q^c(X, B)$. Другими словами, $(X; A, B)$ — вырезаемая триада для теории гомологий с компактными носителями.

Это утверждение непосредственно вытекает из теоремы 9.3.

9.6. Теорема. Пусть X — хаусдорфово пространство, а U и V — такие открытые подмножества пространства X , что $X = U \cup V$. Тогда триада $(X; U, V)$ вырезаема для теории гомологий с компактными носителями.

Доказательство. Мы должны показать, что индуцированный включением гомоморфизм $k_*: H_q^c(U, U \cap V) \rightarrow H_q^c(X, V)$ является изоморфизмом. Докажем сначала, что k_* — эпиморфизм. Пусть $u \in H_q^c(X, V)$, тогда существует компактная пара $(P, Q) \subset (X, V)$ и элемент $u' \in H_q(P, Q)$, представляющий класс гомологий u . Без ограничения общности можно считать, что $Q \supset P \setminus U$ (в противном случае заменим Q на $Q \cup (P \setminus U)$). Поскольку P — нормальное пространство и $P \cap V$ — открытая

окрестность множества Q в P , существует такое компактное множество $Q' \subset P \cap V$, что Q содержится во внутренней множестве Q' (в индуцированной топологии множества P). Обозначим внутренность множества Q' в индуцированной топологии подпространства P через W . Тогда $(P \setminus W, Q' \setminus W)$ — компактная пара и $(P \setminus W, Q' \setminus W) \subset (U, U \cap V)$. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc}
 H_q^c(U, U \cap V) & \xrightarrow{k_*} & H_q^c(X, V) \\
 \uparrow i_* & & \uparrow \\
 H_q(P \setminus W, Q' \setminus W) & \xrightarrow{e_*} & H_q(P, Q') \\
 & & \nwarrow j_* \\
 & & H_q(P, Q)
 \end{array}$$

Все гомоморфизмы индуцированы включениями и e_* — изоморфизм. Пусть

$$v = i_* e_*^{-1} j_* (u').$$

Тогда $k_*(v) = u$, что и требовалось.

Далее докажем, что гомоморфизм k_* имеет нулевое ядро. Пусть $u \in H_q^c(U, U \cap V)$ и $k_*(u) = 0$. Тогда существует компактная пара $(P_0, Q_0) \subset (U, U \cap V)$ и элемент $u' \in H_q(P_0, Q_0)$, представляющий класс u . Поскольку $k_*(u) = 0$, существует компактная пара (P, Q) , для которой

$$(P_0, Q_0) \subset (P, Q) \subset (X, V)$$

и естественный гомоморфизм $H_q(P_0, Q_0) \rightarrow H_q(P, Q)$ переводит u' в 0. Так же как и в предыдущем рассуждении, без ограничения общности можно считать, что $Q \supset P \setminus U$. Было показано, что существует компактное множество Q' , для которого $Q \subset \subset W \subset Q' \subset P \cap V$, где W — внутренность множества Q' (в индуцированной топологии пространства P). Рассмотрим теперь следующую не очень приятную коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & k_* & \\
 H_q^c(U, U \cap V) & \xrightarrow{\quad} & H_q(P \setminus W, Q' \setminus W) & \xrightarrow{\quad} & H_q^c(X, V) \\
 & \searrow & \downarrow 2 & \nearrow & \uparrow \\
 & H_q(P_0 \setminus W, (P_0 \cap Q') \setminus W) & & & \\
 & \downarrow 1 & & & \\
 H_q(P_0, P_0 \cap Q') & \xrightarrow{\quad} & H_q(P, Q') & \xrightarrow{\quad} & H_q(P, Q) \\
 \uparrow & \nearrow & \nwarrow & \nearrow & \uparrow \\
 H_q(P_0, Q_0) & \xrightarrow{\quad} & & & H_q(P, Q)
 \end{array}$$

Все гомоморфизмы этой диаграммы индуцированы включениями. Гомоморфизмы, обозначенные стрелками с номерами 1 и 2, являются изоморфизмами. Читателю предлагается с помощью этой диаграммы завершить доказательство, показав, что $u = 0$.

Следствие 9.5 и теорема 9.6 влекут за собой существование точных последовательностей Майера — Вьеториса триады $(X; A, B)$ для гомологий с компактными носителями в случае, когда $X = A \cup B$ — хаусдорфово пространство, а множества A и B либо одновременно замкнуты, либо открыты в X . Эти последовательности можно получить посредством хорошо известной процедуры, описанной Стинродом и Эйленбергом [14, гл. I]¹⁾.

Рассмотрим теперь поведение гомологий с компактными носителями при относительном гомеоморфизме. Мы докажем следующий результат, аналогичный теореме 8.7, хотя и имеющий совсем другое доказательство.

9.7. Теорема. *Предположим, что X — паракомпактное хаусдорфово пространство, A — замкнутое в X подмножество, (Y, B) — хаусдорфова пара и B — замкнутое подмножество пространства Y . Пусть $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ — замкнутое непрерывное отображение, которое взаимно однозначно отображает множество $X \setminus A$ на множество $Y \setminus B$. Тогда индуцированный гомоморфизм $f_*: H_q^c(X, A) \rightarrow H_q^c(Y, B)$ является изоморфизмом при всех q .*

Доказательство основано на двух леммах из теоретико-множественной топологии.

9.8. Лемма. *Пусть E — паракомпактное хаусдорфово пространство и U — непустое подмножество в E , замыкание $\bar{U}$ которого не компактно. Тогда существует такое некомпактное подмножество S множества U , что S замкнуто в E .*

Доказательство. Мы построим S в виде счетного дискретного подмножества пространства E . Прежде всего утверждается существование локально конечного открытого покрытия $\mathcal{U}$ пространства E , никакая конечная часть которого не покрывает множество $\bar{U}$. Действительно, выберем любую систему открытых подмножеств в E , покрывающую $\bar{U}$ и такую, что никакая конечная часть этой системы не покрывает $\bar{U}$. Добавив к этой системе открытое множество $E \setminus \bar{U}$, получим открытое

¹⁾ Для любой вырезаемой триады $(X; A, B)$ имеет место также точная последовательность, содержащая относительные группы $H_q^c(X, A \cap B)$, $H_q^c(X, A) \oplus H_q^c(X, B)$, $H_q^c(X, A \cup B)$ (см. § 15 в гл. 1 книги Стинрода и Эйленберга [14]). — Прим. ред.

покрытие пространства E . Остается выбрать локально конечное открытое покрытие, вписанное в построенное покрытие.

Далее выберем бесконечную последовательность $V_1, V_2, V_3, \dots$ различных элементов покрытия $\mathcal{U}$, такую, что $V_i \cap U \neq \emptyset$ для любого i . Это можно сделать, поскольку никакое конечное объединение множеств из $\mathcal{U}$ не содержит U . Таким образом, $V_i \cap U \neq \emptyset$ для любого i . Выберем для каждого i точку $x_i \in V_i \cap U$. Точки $x_1, x_2, x_3, \dots$ не обязательно различны, однако множество $S = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ обязано содержать бесконечное число точек, поскольку покрытие $\mathcal{U}$ локально конечно и множества V_i различны. Множество S не имеет точек накопления в E . Действительно, всякая точка $x \in E$ имеет окрестность N , пересекающуюся лишь с конечным числом множеств V_i . Окрестность N может содержать лишь конечное число точек множества S . Поэтому S — замкнутое дискретное некомпактное подмножество пространства E .

Замечание. В случае метрического пространства E можно дать более простое доказательство этой леммы. Приведенное выше доказательство принадлежит Майклу Уэйджу. Он также нашел пример вполне нормального пространства E и подмножества $U \subset E$, для которых лемма не верна.

9.9. Лемма. Пусть P — паракомпактное хаусдорфово пространство и P' — такое его замкнутое подмножество, что $P \setminus P'$ плотно в P . Предположим, что (Q, Q') — компактная пара, для которой множество $Q \setminus Q'$ плотно в Q . Пусть $f: (P, P') \rightarrow (Q, Q')$ — непрерывное замкнутое отображение, индуцирующее биекцию множества $P \setminus P'$ на $Q \setminus Q'$. Тогда P компактно.

Докажем эту лемму от противного. Предположим, что P не является компактным, тогда в силу леммы 9.8 существует такое замкнутое в P подмножество $S \subset P \setminus P'$, что S некомпактно. Поскольку отображение f замкнуто, $f(S)$ — замкнутое подмножество пространства Q и, следовательно, компактно. Из сделанных предположений вытекает гомеоморфность пространств S и $f(S)$, чего не может быть, поскольку S некомпактно.

Теперь мы можем доказать теорему 9.7. Воспользуемся описанием групп $H_q^c(X, A)$ и $H_q^c(Y, B)$, данным в лемме 9.1. В силу этой леммы $H_q^c(X, A)$ — прямой предел групп $H_q(P, P \cap A)$ по всем таким компактным подмножествам P пространства X , что множество $P \setminus A$ плотно в P . Аналогичное описание допускает и группа $H_q^c(Y, B)$.

Пусть P — такое компактное подмножество пространства X , что $P \setminus A$ плотно в P , т. е. $P = \overline{P \setminus A}$. Так как f — замкнутое

непрерывное отображение, то $f(\overline{P \setminus A}) = \overline{f(P \setminus A)}$, т. е. $f(P) = \overline{f(P \setminus A)}$. Из сделанных относительно f предположений ясно, что $f(P \setminus A)$ содержится в $Y \setminus B$. Поэтому $f(P)$ — компактное подмножество пространства Y , и множество $f(P) \setminus B$ плотно в $f(P)$.

Пусть теперь Q — такое компактное подмножество пространства Y , что $Q \setminus B$ плотно в Q . Обозначим через P замыкание множества $f^{-1}(Q \setminus B)$ в X . Тогда легко проверить, что $f(P) = Q$. Положим $P' = P \cap A$ и $Q' = Q \cap B$. Применяя лемму 9.9 к отображению пар $(P, P') \rightarrow (Q, Q')$, индуцированному отображением f , заключаем, что P компактно.

Таким образом, сопоставление $P \rightarrow f(P)$ определяет биекцию между всеми теми компактными подмножествами P пространства X , для которых $P \setminus A$ плотно в P , и всеми компактными подмножествами Q пространства Y , для которых $Q \setminus B$ плотно в Q . Кроме того, для каждого такого компактного множества $P \subset X$ индуцированный гомоморфизм $f_*: H_q(P, P \cap A) \rightarrow H_q(f(P), f(P \cap A))$ является изоморфизмом, поскольку отображение $(P, P \cap A) \rightarrow (f(P), f(P \cap A))$ — относительный гомеоморфизм компактных пар. Переходя к прямому пределу, получаем, что $f_*: H_q^c(X, A) \rightarrow H_q^c(Y, B)$ — изоморфизм.

Следующая теорема — аналогичного содержания, хотя рассматриваемое отображение может не быть относительным гомеоморфизмом. Напомним, что в гл. 1 мы определили собственное отображение как такое непрерывное отображение, для которого прообраз всякого компактного множества компактен.

9.10. Теорема. *Предположим, что (X, A) и (Y, B) — хаусдорфовы пары с замкнутыми подмножествами A и B и $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ — собственное отображение, взаимно однозначно отображающее множество $X \setminus A$ на $Y \setminus B$. Тогда индуцированный гомоморфизм $f_*: H_q^c(X, A) \rightarrow H_q^c(Y, B)$ является изоморфизмом.*

Основная идея доказательства та же, что и в теореме 9.7, однако детали много проще. Сопоставление $P \rightarrow f(P)$ снова является биекцией множества всех компактных подмножеств $P \subset X$, для которых $P \setminus A$ плотно в P , на множество компактных подмножеств $Q \subset Y$, для которых $Q \setminus B$ плотно в Q . Для доказательства компактности замыкания множества $f^{-1}(Q \setminus B)$ следует воспользоваться компактностью $f^{-1}(Q)$, вытекающей из собственности отображения f . С этим указанием читатель легко завершит доказательство самостоятельно, следуя схеме доказательства теоремы 9.7.

В отличие от теоремы 9.7 эта теорема представляет некоторый интерес даже в случае, когда множества A и B пусты.

В самом деле, в этом случае из предположений, вообще говоря, не вытекает, что f — гомеоморфизм. В качестве примера рассмотрим следующую конструкцию. Пусть X — хаусдорфово пространство и $k(X)$ — ассоциированное с ним пространство с компактно порожденной топологией [14] ($k(X)$ — это множество X в следующей топологии: множество замкнуто в $k(X)$, если компактны его пересечения со всеми компактными подмножествами пространства X). Известно, что пространство $k(X)$ хаусдорфово, тождественное отображение $i: k(X) \rightarrow X$ непрерывно и системы компактных подмножеств пространств $k(X)$ и X совпадают. Из этого следует, что $i_*: H_q^c(k(X)) \rightarrow H_q^c(X)$ — изоморфизм при всех q . Однако i не является гомеоморфизмом, если топология пространства X не является компактно порожденной.

Упражнения

1. Для произвольной хаусдорфовой пары (X, A) определим цепной комплекс $C_*^c(X, A; G)$ как

$$\lim_{\rightarrow} C_*(P, Q; G),$$

где предел берется по множеству всех компактных пар (P, Q) , содержащихся в (X, A) . Докажите, что

$$H_n^c(X, A; G) \cong H_n(C_*^c(X, A; G)).$$

Докажите также, что имеется короткая точная последовательность цепных комплексов

$$0 \rightarrow C_*^c(A; G) \rightarrow C_*^c(X; G) \rightarrow C_*^c(X, A; G) \rightarrow 0.$$

2. Пусть X — произвольное хаусдорфово пространство. Докажите, что определенную выше группу $C_n^c(X; G)$ можно отождествить с множеством всех таких элементов $h \in \text{Hom}(C_L^n(X; Z), G)$, что $h|_{C_L^n(X, P; Z)} = 0$ для некоторого компактного множества $P \subset X$. (Определение группы коцепей $C_L^n(X; Z)$ см. в предыдущей главе. Разумеется, в этом утверждении множество P зависит от h .)

§ 9.4. Теорема о прямой сумме. Гомологии CW -комплексов

По аналогии с теоремой 13.2 из гл. I книги Стинрода и Эйленберга [14] мы называем теоремой о прямой сумме следующее утверждение.

9.11. Теорема. Пусть X — хаусдорфово пространство, являющееся дизъюнктивным объединением открытых подмножеств U_α ,

и $i_\alpha: U_\alpha \rightarrow X$ — включения. Тогда $i_{\alpha*}: H_q^c(U_\alpha) \rightarrow H_q^c(X)$ — морфизмы, а группа $H_q^c(X)$ — прямая сумма их образов.

В случае когда число множеств U_α конечно, можно воспользоваться указанной теоремой из книги Стиррода и Эйленберга. Отсюда вытекает и общий случай, поскольку каждое компактное подмножество пространства X содержится в конечном объединении множеств U_α .

Обобщение этой теоремы с «абсолютного» случая на «относительный» предоставляется читателю:

$$H_q^c(X, A) \cong \sum_{\alpha} H_q(U_\alpha, U_\alpha \cap A).$$

В рассуждении используется лемма о пяти гомоморфизмах (лемма 1.9).

С помощью этой теоремы можно описать процедуру вычисления групп гомологий с компактными носителями любого CW -комплекса. Пусть (K, L) — пара, состоящая из CW -комплекса K и его подкомплекса L . Тогда группу $H_q^c(K, L; \mathbb{Z})$ целочисленных гомологий ($q = 0, 1, 2, \dots$) можно вычислить как группу гомологий некоторого цепного комплекса свободных абелевых групп. Множество базисных элементов q -мерной группы цепей этого комплекса находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех q -мерных клеток пространства $K \setminus L$. Указанная процедура совершенно аналогична доказательству соответствующей теоремы для сингулярных гомологий (см. [35, гл. V], [11, гл. V], [9, гл. IX]) и не нуждается в повторении. В этой связи уместно вспомнить также работу Милнора [42].

§ 9.5. $\cap$ -умножение для пространств общего типа

В этом параграфе мы в довольно общей ситуации определим $\cap$ -умножение и докажем, что оно обладает свойствами, аналогичными свойствам $\cap$ -умножения в сингулярной теории, которые описаны, например, в [51, стр. 327—328] или в [11, гл. VII, § 12]. В следующей главе мы определим другие, не менее интересные варианты $\cap$ -умножений в категории локально компактных пространств. Однако для общих пространств рассматриваемое ниже $\cap$ -умножение, по-видимому, является единственной разумной операцией такого сорта, использующей гомологии с компактными носителями и когомологии Александра — Спенсера.

Напомним, что группы гомологий с компактными носителями хаусдорфовых пар определяются как прямой предел групп гомологий компактных пар. Поэтому $\cap$ -умножение сначала

необходимо определить для компактных пар. Это $\frown$ -умножение в свою очередь будет построено с помощью $\frown$ -умножения для локально компактных пространств. Таким образом, $\frown$ -умножение строится в три этапа.

Прежде чем пройти через эти этапы, сформулируем основные свойства $\frown$ -умножения. Пусть $(X; A_1, A_2)$ — триада, состоящая из хаусдорфова пространства X и его замкнутых подмножеств A_1 и A_2 (для краткости такая триада будет называться просто хаусдорфовой). $\frown$ -умножение — это гомоморфизм

$$H_{p+q}^c(X, A_1 \cup A_2; G_1) \otimes H^p(X, A_1; G_2) \rightarrow H_q^c(X, A_2; G_1 \otimes G_2),$$

где G_1 и G_2 — произвольные абелевы группы. Здесь $H^p(X, A_1; G_2)$ — группа когомологий Александера — Спеньера, определенная в гл. 8. Если $u \in H_{p+q}^c(X, A_1 \cup A_2)$ и $v \in H^p(X, A_1)$, то образ элемента $u \otimes v$ при этом гомоморфизме обозначается через $u \frown v$ и называется $\frown$ -произведением элементов u и v . $\frown$ -умножение обладает следующими свойствами.

(1) *Естественность.* Пусть $f: (X; A_1, A_2) \rightarrow (Y; B_1, B_2)$ — отображение хаусдорфовых триад, т. е. f — непрерывное отображение пространства X в Y и $f(A_i) \subset B_i$, $i = 1, 2$. Тогда для любых элементов $u \in H_{p+q}^c(X, A_1 \cup A_2; G_1)$ и $v \in H^p(Y, B_1; G)$ справедливо равенство

$$(f_{3*} u) \frown v = f_{2*} (u \frown f_1^* v),$$

где $f_i: (X, A_i) \rightarrow (Y, B_i)$, $i = 1, 2$, и $f_3: (X, A_1 \cup A_2) \rightarrow (Y, B_1 \cup B_2)$ — отображения пар, индуцированные отображением f . Это свойство удобно выразить в виде следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccccc} H_{p+q}^c(X, A_1 \cup A_2) \otimes H^p(X, A_1) & \xrightarrow{\frown} & H_q^c(X, A_2) \\ \downarrow f_{3*} & & \uparrow f_1^* & & \downarrow f_{2*} \\ H_{p+q}^c(Y, B_1 \cup B_2) \otimes H^p(Y, B_1) & \xrightarrow{\frown} & H_q^c(Y, B_2) \end{array}$$

Разумеется, это не есть коммутативная диаграмма в обычном смысле, однако такая диаграмма очень полезна для интерпретации требуемых фактов.

Замечание. Пусть G , H и K — произвольные абелевы группы. Хорошо известно, что существует взаимно однозначное соответствие между гомоморфизмами группы $G \otimes H$ в K и гомоморфизмами группы G в $\text{Hom}(H, K)$. Из этого общего принципа следует, что $\frown$ -умножение можно трактовать также как гомоморфизм

$$\frown: H_{p+q}^c(X, A_1 \cup A_2; G_1) \rightarrow \text{Hom}(H^p(X, A_1; G_2), H_q^c(X, A_2; G_1 \otimes G_2)).$$

Встав на эту точку зрения, можно выразить свойство естественности следующей диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} H_{p+q}^c(X, A_1 \cup A_2) & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}[H^p(X, A_1), H_q^c(X, A_2)] \\ \downarrow f_{3*} & & \downarrow \text{Hom}(f_{1*}, f_{2*}) \\ H_{p+q}^c(Y, B_1 \cup B_2) & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}[H^p(Y, B_1), H_q^c(Y, B_2)] \end{array}$$

Эта диаграмма уже коммутативна в *обычном* смысле. Таким образом, новая точка зрения в некотором отношении лучше. Однако, как правило, считается, что первая точка зрения удобнее для работы. Во всяком случае, оба подхода эквивалентны, и читатель не должен испытывать затруднений при переходе в случае необходимости от одного подхода к другому.

(2) *Ассоциативность*. Пусть X — хаусдорфово пространство и A_1, A_2 и A_3 — его замкнутые подмножества. Предположим, что $v \in H^p(X, A_1; G_2)$, $w \in H^q(X, A_2; G_3)$ и $u \in H_n^c(X, A_1 \cup A_2 \cup A_3; G_1)$. Тогда в группе $H_r^c(X, A_3; G_1 \otimes G_2 \otimes G_3)$, где $n = p + q + r$, справедливо равенство

$$u \cap (v \cup w) = (u \cap v) \cup w.$$

(Мы предоставляем читателю выразить это свойство посредством коммутативной диаграммы.) Для того чтобы определение элемента $u \cup v$ было корректно, необходимо предполагать, что $A_1 \cup A_2 = \text{Int } A_1 \cup \text{Int } A_2$ в индуцированной топологии подпространства $A_1 \cup A_2$.

(3) *Существование единицы*. Для любого элемента $u \in H_p^c(X, A; G)$

$$u \cap 1 = u,$$

где 1 — единица кольца $H^0(X; Z)$. (Здесь предполагается, что (X, A) — хаусдорфова пара, A замкнуто и группа $G \otimes Z$ отождествлена с G .)

(4) *Связь с граничным и кограничным операторами*. Предположим, что $(X; A_1, A_2)$ — хаусдорфова триада и G_1, G_2 — произвольные абелевы группы.

(а) Пусть $u \in H_{p+q}^c(X, A_1 \cup A_2; G_1)$ и $v \in H^p(X, A_1; G_2)$. Тогда

$$\partial(u \cap v) = (-1)^p (\partial_1 u) \cap (i^* v),$$

где $\partial: H_q^c(X, A_2) \rightarrow H_{q-1}^c(A_2)$ — граничный оператор пары (X, A_2) , гомоморфизм $\partial_1: H_{p+q}^c(X, A_1 \cup A_2) \rightarrow H_{p+q-1}^c(A_2, A_1 \cap A_2)$ — граничный оператор триады $(X; A_1, A_2)$ и $i: (A_2, A_1 \cap A_2) \rightarrow (X, A_1)$ — включение. Это соотношение выражается коммутативностью

следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} H_{p+q}^c(X, A_1 \cup A_2) \otimes H^p(X, A_1) & \xrightarrow{\quad} & H_q^c(X, A_2) \\ \downarrow \partial_* \otimes 1^* & & \downarrow (-1)^p \partial \end{array}$$

$$H_{p+q-1}^c(A_2, A_1 \cap A_2) \otimes H^p(A_2, A_1 \cap A_2) \xrightarrow{\quad} H_{q-1}^c(A_2)$$

(b) Пусть $u \in H_{p+q+1}^c(X, A_1 \cup A_2; G_1)$ и $v \in H^p(A_1; G_2)$. Тогда

$$u \cap \delta v = j_*[(\partial_2 u) \cap v],$$

где $\delta: H^p(A_1) \rightarrow H^{p+1}(X, A_1)$ — кограничный оператор пары (X, A_1) , гомоморфизм $\partial_2: H_{p+q+1}^c(X, A_1 \cup A_2) \rightarrow H_{p+q}^c(A_1, A_1 \cap A_2)$ — другой граничный оператор триады $(X; A_1, A_2)$ и $j: (A_1, A_1 \cap A_2) \rightarrow (X, A_2)$ — включение.

(5) Двойственность. Если $(X; A_1, A_2)$ — хаусдорфова триада, $u \in H_{p+q}^c(X, A_1 \cup A_2; G_1)$, $x \in H^p(X, A_1; G_2)$ и $y \in H^q(X, A_2; G_3)$, то

$$\langle u, x \cup y \rangle = \langle u \cap x, y \rangle \in G_1 \otimes G_2 \otimes G_3.$$

Для определения элемента $x \cup y$ мы требуем, чтобы

$$A_1 \cup A_2 = \text{Int } A_1 \cup \text{Int } A_2$$

в индуцированной топологии подпространства $A_1 \cup A_2$. В частном случае, когда $A_2 = \emptyset$, $G_3 = \mathbb{Z}$, $q = 0$ и $y = 1$, получаем

$$\langle u, x \rangle = \langle u \cap x, 1 \rangle = e(u \cap x),$$

где $e: H_0^c(X; G_1 \otimes G_2) \rightarrow G_1 \otimes G_2$ — аугментация (определение $\langle u, v \rangle$ см. в упр. 3 из § 9.2).

Первый этап построения нужного $\cap$ -умножения был осуществлен в § 7.9. Читателю предлагается освоиться с этим материалом, если он не сделал этого раньше. Перейдем ко второму этапу. Этот этап — чуть больше, чем простое перенесение результатов § 7.9 из одной категории в другую; более детально аналогичная процедура уже обсуждалась в § 9.2. Поэтому мы ограничимся формулировками результатов, оставляя, как правило, читателю их доказательство.

Пусть $(X; A_1, A_2)$ — компактная триада, т. е. пространство X компактно и хаусдорфово, а A_1 и A_2 — его замкнутые подмножества. На втором этапе мы определим $\cap$ -умножение, которое является гомоморфизмом

$$\cap: H_{p+q}(X, A_1 \cup A_2; G_1) \otimes H^p(X, A_1; G_2) \rightarrow H_q(X, A_2; G_1 \otimes G_2),$$

где G_1 и G_2 — произвольные группы коэффициентов. Требуемое определение легко получить в терминах $\cap$ -умножения из § 7.9. Пусть $R = X \setminus A_1$ и $S = X \setminus A_2$. Тогда $X \setminus (A_1 \cup A_2) = R \cap S$ и

оба пространства R и S локально компактны. Как отмечается в § 9.2, можно считать, что

$$\begin{aligned} H_q(X, A_2; G_1 \otimes G_2) &= H_q(S; G_1 \otimes G_2), \\ H_{p+q}(X, A_1 \cup A_2; G_1) &= H_{p+q}(R \cap S; G_1) \end{aligned}$$

Аналогично для когомологий компактных пар имеем

$$H^p(X, A_1; G_2) = H_c^p(R; G_2)$$

(см. также [14, гл. X, § 7]). Таким образом, $\frown$ -умножение из § 7.9 немедленно приводит к $\frown$ -умножению для компактных пар.

Перечислим основные свойства полученного $\frown$ -умножения.

(1') *Естественность*. Пусть $(X; A_1, A_2)$ и $(Y; B_1, B_2)$ — компактные триады и $f: (X; A_1, A_2) \rightarrow (Y; B_1, B_2)$ — непрерывное отображение. Тогда коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} H_{p+q}(X, A_1 \cup A_2; G_1) \otimes H^p(X, A_1; G_2) & \xrightarrow{\frown} & H_q(X, A_2; G_1 \otimes G_2) \\ \downarrow f_{3*} & & \uparrow f_1^* & & \downarrow f_{2*} \\ H_{p+q}(Y, B_1 \cup B_2; G_1) \otimes H^p(Y, B_1; G_2) & \xrightarrow{\frown} & H_q(Y, B_2; G_1 \otimes G_2) \end{array}$$

Здесь f_1, f_2 и f_3 — определяемые f отображения пар. Свойство естественности можно выразить также формулой

$$f_{2*}[u \frown f_1^* v] = (f_{3*} u) \frown v,$$

где $u \in H_{p+q}(X, A_1 \cup A_2)$ и $v \in H^p(Y; B_1)$.

Для доказательства свойства естественности положим $U_i = f^{-1}(Y \setminus B_i)$, $i = 1, 2$. Тогда U_i — открытое подмножество пространства $X \setminus A_i$, и мы имеем диаграмму, включающую $\frown$ -умножения из § 7.9,

$$\begin{array}{ccccc} H_{p+q}(X \setminus (A_1 \cup A_2)) \otimes H_c^p(X \setminus A_1) & \rightarrow & H_q(X \setminus A_2) \\ \downarrow \rho & & \uparrow \tau & & \downarrow \rho \\ H_{p+q}(U_1 \cap U_2) \otimes H_c^p(U_1) & \rightarrow & H_q(U_2) \\ \downarrow (f|_{U_1 \cap U_2})_* & & \uparrow (f|_{U_1})^* & & \downarrow (f|_{U_2})_* \\ H_{p+q}(Y \setminus (B_1 \cup B_2)) \otimes H_c^p(Y \setminus B_1) & \rightarrow & H_q(Y \setminus B_2) \end{array}$$

Верхняя и нижняя половины этой диаграммы коммутативны в силу свойств (1b) и (1a) из § 7.9 соответственно. Следовательно, вся диаграмма коммутативна, откуда и следует свойство естественности (1').

(2') *Ассоциативность*. Пусть X — компактное пространство, A_1, A_2 и A_3 — его произвольные замкнутые подмножества.

Предположим, что $u \in H_n(X, A_1 \cup A_2 \cup A_3; G_1)$, $v \in H^p(X, A_1; G_2)$ и $w \in H^q(X, A_2; G_3)$. Тогда

$$u \cap (v \cup w) = (u \cap v) \cup w$$

в группе $H_r(X, A_3; G_1 \otimes G_2 \otimes G_3)$ (здесь $n = p + q + r$).

(3') *Существование единицы.* Для любой компактной пары (X, A) и любого элемента $u \in H_p(X, A; G)$ имеет место равенство

$$u \cap 1 = u,$$

где 1 — единица в $H^0(X; Z)$.

(4') *Связь с граничным и кограничным операторами.* Пусть $(X; A_1, A_2)$ — компактная триада, G_1 и G_2 — произвольные группы коэффициентов.

(4a') Пусть $\partial: H_q(X, A_2) \rightarrow H_{q-1}(A_2)$ — граничный оператор пары (X, A_2) , $\partial_1: H_{p+q}(X, A_1 \cup A_2) \rightarrow H_{p+q-1}(A_2, A_1 \cap A_2)$ — граничный оператор триады $(X; A_1, A_2)$ и $i: (A_2, A_1 \cap A_2) \rightarrow (X, A_1)$ — включение. Тогда следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_{p+q}(X, A_1 \cup A_2) \otimes H^p(X, A_1) & \xrightarrow{\cap} & H_q(X, A_2) \\ \downarrow \partial_1 \otimes i^* & & \downarrow (-1)^p \partial \\ H_{p+q-1}(A_2, A_1 \cap A_2) \otimes H^p(A_2, A_1 \cap A_2) & \xrightarrow{\cap} & H_{q-1}(A_2) \end{array}$$

коммутативна. Другими словами,

$$\partial(u \cap v) = (-1)^p (\partial_1 u) \cap (i^* v)$$

для любых элементов $u \in H_{p+q}(X, A_1 \cup A_2; G_1)$ и $v \in H^p(X, A_1; G_2)$.

(4b') Пусть $\delta: H^p(A_1) \rightarrow H^{p+1}(X, A_1)$ — кограничный оператор пары (X, A_1) , $\partial_2: H_{p+q+1}(X, A_1 \cup A_2) \rightarrow H_{p+q}(A_1, A_1 \cap A_2)$ — граничный оператор триады $(X; A_1, A_2)$ и $j: (A_1, A_1 \cap A_2) \rightarrow (X, A_2)$ — включение. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_{p+q}(A_1, A_1 \cap A_2) \otimes H^p(A_1) & \xrightarrow{\cap} & H_q(A_1, A_1 \cap A_2) \\ \uparrow \partial_2 & & \downarrow j_* \\ H_{p+q+1}(X, A_1 \cup A_2) \otimes H^{p+1}(X, A_1) & \xrightarrow{\cap} & H_q(X, A_2) \end{array}$$

коммутативна. Другими словами, для любых элементов $u \in H_{p+q+1}(X, A_1 \cup A_2; G_1)$ и $v \in H^p(A_1; G_2)$ справедливо равенство

$$u \cap \delta v = j_* [(\partial_2 u) \cap v].$$

(5') Двойственность. Если $(X; A_1, A_2)$ — компактная триада, $u \in H_{p+q}(X, A_1 \cup A_2; G_1)$, $x \in H^p(X, A_1; G_2)$ и $y \in H^q(X, A_2; G_3)$, то

$$\langle u, x \cup y \rangle = \langle u \cap x, y \rangle \in G_1 \otimes G_2 \otimes G_3.$$

Замечание. Соотношения (2') и (5') предполагают существование $\cup$ -умножения для компактных пар:

$$\cup: H^p(X, A_1; G_1) \otimes H^q(X, A_2; G_2) \rightarrow H^{p+q}(X, A_1 \cup A_2; G_1 \otimes G_2).$$

Это умножение можно получить из $\cup$ -умножения для локально компактных пространств, описанного в гл. 7. Для этого следует использовать ту же процедуру, что и при построении $\cap$ -умножения для компактных пар. Читатель не должен испытывать затруднений при рассмотрении необходимых деталей.

Перейдем теперь к третьему этапу в нашей программе определения $\cap$ -умножения для пространств общего типа. Определение основано на следующих двух фактах:

(а) Для любой хаусдорфовой пары (X, A) , в которой A — замкнутое подмножество пространства X , группа $H_q^c(X, A)$ является прямым пределом групп $H_q(P, P \cap A)$ по всем компактным подмножествам P пространства X .

(б) Пусть (X, A) — хаусдорфова пара, A — замкнутое и P — компактное подмножества пространства X . Для пары $(P, P \cap A)$ можно рассматривать два типа когомологий $H^q(P, P \cap A; G)$: когомологии Александера — Спеньера, построенные в гл. 8 с помощью группы *всех* коцепей, и когомологии, определяемые равенством $H^q(P, P \cap A) = H_q^c(P \setminus (P \cap A))$, где $H_q^c(P \setminus (P \cap A))$ — группа когомологий, определенная на основе конечнозначных коцепей с компактными носителями (см. гл. 1). Мы утверждаем, что для любой компактной пары $(P, P \cap A)$ группы когомологий обоих типов естественно изоморфны. Этот факт уже доказан нами, причем двумя существенно разными способами (см. пример 1 в § 6.6, § 8.3 и упр. 1 и 6 из § 8.2). Поэтому нет нужды различать в обозначениях типы групп когомологий пары $(P, P \cap A)$.

Имеется (по крайней мере) два различных пути для того, чтобы дать определение $\cap$ -умножения. Чтобы сделать это определение наиболее понятным, приведем оба способа. Пусть $(X; A_1, A_2)$ — хаусдорфова триада. Пусть $u \in H_{p+q}^c(X, A_1 \cup A_2; G_1)$ и $v \in H^p(X, A_1; G_2)$. Мы хотим определить элемент

$$u \cap v \in H_q^c(X, A_2; G_1 \otimes G_2).$$

Первый способ определения. Поскольку группа $H_{p+q}^c(X, A_1 \cup A_2)$ определяется как прямой предел, мы можем найти

компактное подмножество $P \subset X$ и элемент $u' \in H_{p+q}(P, P \cap (A_1 \cup A_2))$, представляющий элемент $u \in H_{p+q}^c(X, A_1 \cup A_2)$. Пусть $i: (P, P \cap A_1) \rightarrow (X, A_1)$ — включение. Тогда $u' \cap (i^*v) \in H_q(P, P \cap A_2)$ по определению является представителем элемента $u \cap v$. Разумеется, необходимо проверить, что выбирая другой представитель элемента u , мы получим тот же самый элемент группы $H_q^c(X, A_2)$.

Второй способ определения. Для заданного элемента $v \in H^p(X, A_1)$, любого компактного множества $P \subset X$ и любого $x \in H_{p+q}(P, P \cap (A_1 \cup A_2))$ определим гомоморфизм

$$H_{p+q}(P, P \cap (A_1 \cup A_2)) \rightarrow H_q(P, P \cap A_2)$$

правилом $x \rightarrow x \cap i^*v$, где i^* — гомоморфизм, определенный выше. Далее следует проверить наличие условий совместности, необходимых для того, чтобы можно было определить отображение прямой системы групп, определяющей $H_{p+q}^c(X, A_1 \cup A_2)$, в прямую систему, определяющую группу $H_q^c(X, A_2)$. Таким образом возникает гомоморфизм предельных групп

$$H_{p+q}^c(X, A_1 \cup A_2) \rightarrow H_q^c(X, A_2),$$

который зависит лишь от элемента v . Этот гомоморфизм обозначается как

$$u \rightarrow u \cap v$$

для любого $u \in H_{p+q}^c(X, A_1 \cup A_2)$.

При любом из двух подходов получаем, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_{p+q}^c(X, A_1 \cup A_2) \otimes H^p(X, A_1) & \xrightarrow{\quad} & H_q^c(X, A_2) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_{p+q}(P, P \cap (A_1 \cup A_2)) \otimes H^p(P, P \cap A_1) & \xrightarrow{\quad} & H_q(P, P \cap A_2) \end{array}$$

коммутативна для всякого компактного подмножества $P \subset X$. Вертикальными стрелками обозначены гомоморфизмы, индуцированные отображениями включений. Коммутативность этой диаграммы для произвольного компактного $P \subset X$ фактически вытекает из определения $\cap$ -умножения для общих пространств через $\cap$ -умножение для компактных пар.

Справедливость свойств (1), (2), ..., (5) для построенного $\cap$ -умножения — следствие свойств (1'), (2'), ..., (5') $\cap$ -умножения для компактных пар. Вывод свойства (n) из (n'), $n = 1, 2, 3, 4, 5$, — упражнение по теории прямых пределов, которое мы оставляем читателю.

§ 9.6. Естественное преобразование сингулярных гомологий в гомологии с компактными носителями

Для любой пары (X, A) обозначим через $H_q^s(X, A; G)$ группу q -мерных сингулярных гомологий пары (X, A) с коэффициентами в G . Целью настоящего параграфа является определение естественного гомоморфизма

$$\mu: H_q^s(X, A; G) \rightarrow H_q^c(X, A; G)$$

и обсуждение его основных свойств. Этот гомоморфизм во многом аналогичен преобразованию, определенному в § 8.8. К сожалению, это преобразование, по-видимому, нельзя получить в качестве гомоморфизма гомологий, индуцированного некоторым отображением цепей. Поэтому для гомологий преобразование определяется менее прямым образом, чем для когомологий. Мы приведем два способа определения μ , несколько отличающихся друг от друга¹⁾.

Первый способ основан на геометрической реализации полного сингулярного комплекса топологического пространства. Пусть $S(X)$ — полный сингулярный комплекс пространства X (определение см., например, в [39, стр. 2]), и пусть $|S(X)|$ — геометрическая реализация этого комплекса [39, гл. III]. Это понятие было введено в 1950—1951 гг. независимо Гивером [17], Ху [24] и Уайтхедом [66] и усовершенствовано Милнором [40] в 1957 г. Пространство $|S(X)|$ является CW -комплексом. Перечислим его основные свойства.

(1) Если A — подпространство в X , то $|S(A)|$ — подкомплекс CW -комплекса $|S(X)|$.

(2) Это понятие функториально, т. е. непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ индуцирует отображение CW -комплексов

$$|S(f)|: |S(X)| \rightarrow |S(Y)|.$$

(3) Для любого пространства X определено непрерывное отображение $\Phi(X): |S(X)| \rightarrow X$ и всякому непрерывному

¹⁾ Преобразование $\mu: H_q^s \rightarrow \bar{H}_q^c$ определено для любой аддитивной (в смысле § 9.4) теории гомологий $\bar{H}_q^c$. Легко определяется естественное преобразование $\gamma: \bar{H}_q^c \rightarrow \check{H}_q^c$ в гомологии Александрова—Чеха с компактными носителями (ср. с примечанием к § 8.8). В некоторых естественных случаях γ представляется в виде композиции $\bar{H}_q^c \rightarrow H_q^c \rightarrow \check{H}_q^c$ (см. [11*]). — Прим. ред.

отображению $f: X \rightarrow Y$ отвечает коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} |S(X)| & \xrightarrow{|S(f)|} & |S(Y)| \\ \downarrow \Phi(X) & & \downarrow \Phi(Y) \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Кроме того, если A — подпространство в X , то $\Phi(A)$ совпадает с ограничением отображения $\Phi(X)$ на подкомплекс $|S(A)|$.

(4) Для любой пары (X, A) отображение $\Phi(X)$ индуцирует изоморфизм гомотопических групп и групп сингулярных гомологий. Если пространство X имеет гомотопический тип CW -комплекса, то $\Phi(X)$ — гомотопическая эквивалентность.

Большая часть этих свойств доказана в [39, гл. II]; читатель может обратиться также к цитированным выше работам Гивера, Ху, Уайтхеда и Милнора.

Пусть (X, A) — хаусдорфова пара. Рассмотрим гомоморфизм

$$\Phi(X)_*: H_q^c(|S(X)|, |S(A)|; G) \rightarrow H_q^c(X, A; G).$$

Так как $(|S(X)|, |S(A)|)$ — пара CW -комплексов, то имеется естественный изоморфизм

$$H_q^s(|S(X)|, |S(A)|; G) \rightarrow H_q^s(|S(X)|, |S(A)|; \mathbb{Q}),$$

продолжающий очевидный изоморфизм гомологий $H_q^s(P; G) \rightarrow H_q^s(P; \mathbb{Q})$ одноточечного пространства P (ср. Милнор [42]). Беря композицию этого изоморфизма с гомоморфизмом $\Phi(X)_*$ и пользуясь тем, что

$$\Phi(X)_*: H_q^s(|S(X)|, |S(A)|) \rightarrow H_q^s(X, A)$$

— изоморфизм, получаем требуемый гомоморфизм

$$\mu: H_q^s(X, A; \mathbb{Q}) \rightarrow H_q^c(X, A; G).$$

Свойства естественности преобразования μ вытекают из соответствующих свойств геометрической реализации полного сингулярного комплекса, упомянутых выше.

Можно дать более прямое определение естественного гомоморфизма μ , не использующее геометрическую реализацию полного сингулярного комплекса. Конструкция основана на том факте, что сингулярные гомологии любого пространства — прямой предел гомологий, полученных с помощью отображений CW -комплексов в пространство X . Приведем точную формулировку этого факта.

9.12. Лемма. Пусть (X, A) — любая пара и G — произвольная абелева группа.

(а) Для любого $u \in H_q^s(X, A; G)$ существует пара (K, L) , состоящая из конечного CW -комплекса и его подкомплекса, непрерывное отображение $f: (K, L) \rightarrow (X, A)$ и такой элемент $u' \in H_q^s(K, L)$, что $f_*(u') = u$.

(б) Для заданной пары (K, L) конечных CW -комплексов, непрерывного отображения $f: (K, L) \rightarrow (X, A)$ и такого элемента $v \in H_q^s(K, L; G)$, что $f_*(v) = 0$, существует другая пара (K', L') конечных CW -комплексов и такие непрерывные отображения $g: (K, L) \rightarrow (K', L')$ и $h: (K', L') \rightarrow (X, A)$, что отображения f и hg гомотопны и $g_*(v) = 0$.

Разумеется, проще было бы доказать эту лемму, используя свойства геометрической реализации $(|S(X)|, |S(A)|)$ полного сингулярного комплекса. Однако наша задача — дать более прямое доказательство, не опираясь на эту конструкцию. Фактически мы докажем лишь утверждение (а) в случае, когда множество A пусто. Доказательство остальных утверждений аналогично, хотя и более сложно, и мы оставляем его читателю.

Пусть $u \in H_q^s(X; G)$. Поскольку случай $q = 0$ тривиален, можно считать, что $q > 0$. Выберем цикл $z \in \Delta_q(X; G)$, представляющий класс гомологий u . Цикл z — это конечная линейная комбинация q -мерных сингулярных симплексов:

$$z = g_1\sigma_1 + g_2\sigma_2 + \dots + g_n\sigma_n,$$

где $g_i \in G$, а каждый сингулярный симплекс σ_i — непрерывное отображение стандартного q -мерного симплекса Δ_q в пространство X . Поскольку $\partial z = 0$, некоторые грани этих сингулярных симплексов совпадают, иначе при вычислении ∂z не могло бы произойти полного сокращения. Построение требуемого CW -комплекса K начнем с дизъюнктного объединения n экземпляров стандартного симплекса Δ_q , обозначив их через $\Delta_q^1, \Delta_q^2, \dots, \Delta_q^n$. Сделаем затем следующие отождествления: всякий раз, когда i -я грань сингулярного симплекса σ_i совпадает с j -й гранью симплекса σ_s , отождествим i -ю грань q -мерного симплекса Δ_q^i с j -й гранью симплекса Δ_q^s . Получающееся в результате этих отождествлений факторпространство является, очевидно, q -мерным CW -комплексом. С этими отождествлениями совместимы непрерывные отображения $\sigma_i: \Delta_q^i \rightarrow X$, $1 \leq i \leq n$. Следовательно, они определяют непрерывное отображение $f: K \rightarrow X$. Естественные отображения $T_i: \Delta_q^i \rightarrow K$, $1 \leq i \leq n$, можно рассматривать как сингулярные q -мерные симплексы пространства K . Тогда $z' = g_1T_1 + g_2T_2 + \dots + g_nT_n$ — сингулярный q -мерный цикл пространства K . Его класс гомологий $u' \in H_q(K; G)$ обладает требуемым свойством, т. е. $f_*(u') = u$.

Для того чтобы с помощью этой леммы определить гомоморфизм μ , следует воспользоваться теоремой единственности Стиррода — Эйленберга, которая утверждает, что на категории пар конечных CW -комплексов любые две теории гомологий с одной и той же группой коэффициентов G , удовлетворяющие всем аксиомам Стиррода — Эйленберга, естественно изоморфны. В действительности Стиррод и Эйленберг доказывают свою теорему [14, гл. III] лишь для триангулируемых пар. Однако каждая пара конечных CW -комплексов имеет гомотопический тип триангулируемой пары [35, предложение 7.1, стр. 139]¹⁾, поэтому теорема Стиррода — Эйленберга немедленно распространяется на рассматриваемый нами случай.

Определим теперь гомоморфизм $\mu: H_q^s(X, A; G) \rightarrow H_q^c(X, A; G)$. Пусть $u \in H_q^s(X, A; G)$. В силу утверждения (а) леммы 9.12 можно выбрать непрерывное отображение $f: (K, L) \rightarrow (X, A)$ и $u' \in H_q^s(K, L; G)$ так, что $f_*(u') = u$. Пусть $u'' \in H_q^c(K, L; G)$ — единственный элемент, отвечающий элементу u' при естественном изоморфизме $H_q^s(K, L; G) \cong H_q^c(K, L; G)$. Положим $\mu(u) = f_*(u'')$, где f_* — индуцированный гомоморфизм в гомологиях с компактными носителями. Используя п. (б) леммы 9.12, легко показать, что это определение не зависит от выбора f . Доказательство свойств естественности гомоморфизма μ не представляет труда.

Вообще говоря, гомоморфизм μ может не быть изоморфизмом. В гл. 11 мы докажем, что он является изоморфизмом для многообразий без каких-либо предположений о триангулируемости, дифференцируемости или паракомпактности последних. Кроме этого факта и того, что μ является изоморфизмом для пространств, имеющих гомотопический тип CW -комплексов, о поведении μ , по-видимому, мало что известно²⁾.

§ 9.7. Локальные группы гомологий

Для любого хаусдорфова пространства X и любой точки $x \in X$ группа $H_q^c(X, X \setminus \{x\}; G)$ называется q -мерной локальной группой гомологий пространства X в точке x с коэффициентами в группе G . Если N — замкнутая или открытая окрестность точки x в X , то в силу свойства вырезания из § 9.3 $H_q^c(N, N \setminus \{x\}) \cong$

¹⁾ См. также [8*, стр. 129—130]. — Прим. перев.

²⁾ Это преобразование является изоморфизмом для всякого локально компактного пространства, гомологически локально связного по отношению к сингулярным гомологиям, см. следствие 11.9 в гл. V из [5]. Доказательство этого утверждения, данное в терминах теории Бореля — Мура, остается справедливым и для гомологий H_q^c . Преобразование μ будет изоморфизмом также в категории паракомпактных слабо локально стягиваемых пространств (см. § 9 в [11*]). — Прим. ред.

$\cong H_q^c(X, X \setminus \{x\})$. Таким образом, эта группа определяется произвольно малыми окрестностями точки x в X , чем и оправдывается ее название.

Пример. Пусть X — многообразие размерности n и $x \in X$. Тогда в качестве окрестности N точки x можно взять замкнутый n -мерный шар. Граничная $(n-1)$ -мерная сфера является деформационным ретрактом пространства $N \setminus \{x\}$. Поэтому для локальных групп имеем

$$H_q^c(X, X \setminus \{x\}; G) = \begin{cases} G & \text{при } q = n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В случае локально компактного хаусдорфова пространства X всегда можно выбрать компактную окрестность N точки x , для которой

$$H_q^c(X, X \setminus \{x\}) \cong H_q^c(N, N \setminus \{x\}).$$

Очевидно, что множество компактных пар вида (N, C) , где $C \subset N \setminus \{x\}$, является конфинальной частью направленного множества компактных пар, содержащихся в $(N, N \setminus \{x\})$. Граница множества N (в смысле теоретико-множественной топологии) — компактное подмножество пространства $N \setminus \{x\}$. Поэтому мы получим еще меньшую конфинальную часть, рассматривая лишь те пары (N, C) , в которых компактные подмножества C пространства $N \setminus \{x\}$ содержат границу множества N . Из этого следует, что $H_q^c(N, N \setminus \{x\})$ — прямой предел групп гомологий $H_q(N, C)$ таких пар. Однако $N \setminus C$ — открытая окрестность точки x и множество открытых окрестностей такого вида — конфинальная часть в множестве всех открытых окрестностей точки x . Таким образом, мы получили следующий результат.

9.13. Теорема. Если X — локально компактное хаусдорфово пространство и $x \in X$, то локальная группа гомологий $H_q^c(X, X \setminus \{x\})$ совпадает с прямым пределом групп гомологий $H_q(U)$ по множеству всех открытых окрестностей U точки x в X^1).

В утверждении теоремы подразумевается, что $H_q(U)$ — группа гомологий, определенная в гл. 4, и что при $V \subset U$ отображения $H_q(U) \rightarrow H_q(V)$ совпадают с гомоморфизмами ρ_U, ν (см. гл. 4).

С помощью этой теоремы можно дать ясную интерпретацию результатов § 3.4 об инвариантности области. Пусть X — локально компактное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. В силу леммы 3.12 в множестве всех открытых окрестностей V граничной точки x множества X имеется конфинальная часть, состоящая

¹⁾ В общем случае $H_q^c(X, X \setminus \{x\})$ — прямой предел групп $H_q^c(X, X \setminus U)$ см. § 6 в [49]. — Прим. ред.

из таких окрестностей V , что $H_c^n(V) = 0$. По теореме об универсальных коэффициентах (следствие 4.18)

$$H_n(V; G) \cong \text{Hom}(H_c^n(V), G) \oplus \text{Ext}(H_c^{n+1}(V), G) = 0.$$

Таким образом, прямой предел групп $H_n(V; G)$ (по множеству всех открытых окрестностей V точки x в X) равен нулю. Следовательно, в этом случае $H_n^c(X, X \setminus \{x\}) = 0$. С другой стороны, если x — внутренняя точка множества X , то справедливы вычисления, сделанные выше для случая, когда X — многообразие. Из этих двух фактов мы получаем следующий результат.

9.14. Теорема. Пусть X — локально компактное подмножество n -мерного евклидова пространства и $x \in X$. Тогда n -мерная локальная группа гомологий $H_n^c(X, X \setminus \{x\}; G)$ изоморфна G для всех внутренних точек множества X и равна нулю для всех его граничных точек.

Теорема, очевидно, справедлива и для локально компактных подмножеств n -мерных многообразий, поскольку во всех рассуждениях участвуют лишь локальные свойства X .

Локальные группы гомологий имеют много других применений. Например, в гл. V книги Зейферта и Трельфалля [47] с помощью этих групп доказывается, что некоторые свойства полиэдров, определяемые в терминах заданной триангуляции, оказываются топологически инвариантными. Для читателя, немного знакомого с геометрией полиэдров, полезно в качестве упражнения переформулировать результаты гл. V из [47] в терминах локальных групп гомологий. Другой пример того же сорта — описание в гл. 11 граничных точек многообразия с краем. Наконец, локальные группы имеют некоторые применения в теории размерности, поскольку размерность — по существу локальное свойство¹⁾.

¹⁾ Например, при условии, что $\dim X < \infty$, гомологическая размерность $\dim_0 X$ метризуемого локально компактного пространства X совпадает с максимальным числом n , для которого $H_n^c(X, X \setminus x; G) \neq 0$ [12*]. А. Э. Харлап доказал, что гомологическая размерность множества таких точек $x \in X$ равна n [14*]. Он показал также, что для когомологической размерности $D(x; G)$ (см. определение в § 8.9) аналогичные результаты в такой форме не верны.

Наряду с группами $H_p^c(X, X \setminus U)$ для описания локальных гомологий можно использовать группы $H_p^c(U \setminus x)$ (U — окрестности точки $x \in X$). Для описания локальных когомологий применяются соответственно группы $H^p(U \setminus x)$ и $H^p(X, X \setminus U)$. В работе [49] рассматривается связь между двумя подходами. Окончательная форма связи получена А. Э. Харлапом [14*]. В обзоре [13*] приведена сводка основных результатов.

Одним из главных свойств локальных гомологий $H_p^c(X, X \setminus x; G)$ является то, что эти группы совпадают со слоями производных пучков дифференциального пучка цепей $\mathcal{W}_*(X; G)$ пространства X с коэффициентами в G (см. добавление к гл. 11). — *Прим. ред.*

Часть III

Использование двух типов гомологий локально компактных пространств

Глава 10

Одновременное использование гомологий и когомологий двух типов

§ 10.1. Введение

В части I (гл. 1—7) мы рассматривали когомологии и гомологии локально компактных пространств. Теория когомологий была построена с помощью коцепей с компактными носителями, а двойственная к ней в алгебраическом смысле теория гомологий получалась посредством применения к коцепям функтора $\text{Hom}(\_, G)$. После этого в части II (гл. 8 и 9) рассматривались когомологии и гомологии пространств общего типа¹⁾. Построение теории когомологий было основано на использовании коцепей с любыми замкнутыми носителями, а теория гомологий определялась как теория с компактными носителями.

В настоящей главе мы возвращаемся к рассмотрению локально компактных пространств. В дополнение к теориям гомологий и когомологий из части I в этой ситуации можно применять также и теории, развитые в части II. В действительности наибольший интерес представляет одновременное применение обоих типов гомологий и когомологий и связь между ними. Например, можно определить $\cup$ -произведение класса когомологий с компактным носителем и класса когомологий с произвольным носителем. Это новое $\cup$ -умножение, обладающее интересными свойствами. В качестве другого примера можно рассмотреть $\cap$ -произведение класса гомологий любого из двух типов на класс когомологий любого из двух типов. Таким образом, возникает четыре различных типа $\cap$ -умножений, хотя некоторые из них,

¹⁾ В этом случае связь между цепями и коцепями не может быть описана в терминах функтора Hom . Однако для всякого гомологически локально связного локально компактного пространства X имеют место точные последовательности

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{q-1}^c(X), G) \rightarrow H^q(X, G) \rightarrow \text{Hom}(H_q^c(X), G) \rightarrow 0,$$

аналогичные формулам универсальных коэффициентов следствия 4.18 (см. теорему 3' в [49] или п. 12.7 гл. 5 в [5]). — Прим. ред.

по-видимому, имеют второстепенное значение. Наконец, для локально компактного пространства X имеется естественный гомоморфизм когомологий с компактными носителями в когомологии с произвольными носителями. Этот гомоморфизм включается в точную последовательность с группами когомологий третьего типа, зависящими от «концов» пространства X . Аналогичные результаты справедливы для двух типов гомологий локально компактного пространства X .

Материал этой главы, особенно теория $\cap$ -умножений, играет центральную роль в гл. II при доказательстве теоремы двойственности Пуанкаре для многообразий.

Система обозначений. Если не оговорено противное, все рассматриваемые в этой главе пространства предполагаются локально компактными и хаусдорфовыми. Приведем сводку обозначений, употребляемых для гомологий и когомологий двух типов. Для гомологий и когомологий из части I мы используем следующие обозначения:

$C_c^*(X; G)$ — коцепной комплекс конечнозначных коцепей с компактными носителями,

$H_c^q(X; G) = H^q(C_c^*(X; G))$ — когомологии с компактными носителями,

$C_*(X; G) = \text{Hom}(C_c^*(X), G)$ — цепной комплекс бесконечных цепей,

$H_q(X; G) = H_q(C_*(X; G))$ — группа гомологий, построенная по бесконечным цепям.

Для когомологий и гомологий из части II используются следующие обозначения:

$C^*(X, A; G)$ — коцепной комплекс пары (X, A) , состоящий из локально конечнозначных коцепей Александера — Спеньера с произвольными носителями (в гл. 8 этот комплекс обозначался через $C_L^*(X, A; G)$); необходимо предполагать, что A — *замкнутое* подмножество пространства X ,

$H^p(X, A; G) = H^p(C^*(X, A; G))$ — когомологии Александера — Спеньера пары (X, A) ,

$G_*^c(X, A; G)$ — прямой предел цепных комплексов $C_*(P, Q; G)$ по множеству компактных пар $(P, Q) \subset (X, A)$ (ср. гл. 9),

$H_q^c(X, A; G) = H_q(G_*^c(X, A; G))$ — гомологии пары (X, A) с компактными носителями.

Таким образом, наличие в обозначениях верхнего или нижнего индекса «с» указывает на то, что рассматриваемые группы — это гомологии или когомологии с компактными носителями. Для компактных пространств, а также для компактных пар гомологии обоих типов одинаковы. То же самое верно и для двух типов когомологий. В этом случае индекс «с» мы будем опускать, по-

сколько это не приведет к недоразумениям. Отметим, что в настоящей главе мы не будем использовать группы когомологий Александера — Спеньера, определенные с помощью всех (а не только локально конечнозначных) коцепей¹⁾.

§ 10.2. Сравнение двух типов гомологий и когомологий

Предположим, что X — локально компактное хаусдорфово пространство, A — замкнутое подмножество пространства X и $U = X \setminus A$. Согласно гл. 8, имеется короткая точная последовательность коцепных комплексов (локально конечнозначных коцепей Александера — Спеньера)

$$0 \rightarrow C^*(X, A; G) \xrightarrow{i^\#} C^*(X; G) \xrightarrow{i^\#} C^*(A; G) \rightarrow 0.$$

Для каждого из этих трех комплексов можно рассмотреть подкомплекс, состоящий из коцепей с компактными носителями. Легко проверить, что в каждом случае этот подкомплекс совпадает с подкомплексом *конечнозначных коцепей* с компактными носителями. Таким образом, имеем следующую короткую точную последовательность подкомплексов:

$$0 \rightarrow C_c^*(X, A; G) \rightarrow C_c^*(X; G) \rightarrow C_c^*(A; G) \rightarrow 0,$$

рассматривавшуюся в гл. 1. Переходя к группам когомологий, получаем коммутативную диаграмму, содержащую две точные последовательности,

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\delta} & H^q(X, A) & \xrightarrow{j^*} & H^q(X) & \xrightarrow{i^*} & H^q(A) \xrightarrow{\delta} \dots \\ & & \uparrow \gamma & & \uparrow \gamma & & \uparrow \gamma \\ \dots & \xrightarrow{\delta} & H_c^q(X, A) & \xrightarrow{j^*} & H_c^q(X) & \xrightarrow{i^*} & H_c^q(A) \xrightarrow{\delta} \dots \\ & \searrow \delta & \uparrow \cong & \nearrow \tau & & & \\ & & H_c^q(U) & & & & \end{array}$$

Разумеется, для компактного пространства X отображение γ — изоморфизм, однако в общем случае γ не является ни мономорфизмом, ни эпиморфизмом. Отображение γ — естественное преобразование теорий когомологий, определенных на категории локально компактных пространств и их собственных отображений.

¹⁾ За исключением части § 10.2, относящейся к выводу точной последовательности (3) и диаграммы (5). — Прим. ред.

Аналогичные рассуждения справедливы и для двух типов теорий гомологий. Для пары (X, A) имеется короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow C_*(A; G) \xrightarrow{i_\#} C_*(X; G) \xrightarrow{j_\#} C_*(X, A; G) \rightarrow 0$$

цепных комплексов, описанная в гл. 4. Имеем также точную последовательность

$$0 \rightarrow C_*^c(A; G) \rightarrow C_*^c(X; G) \rightarrow C_*^c(X, A; G) \rightarrow 0,$$

определенную в гл. 9 для цепей с компактными носителями. Мы утверждаем, что комплекс $C_*^c(X; G)$ может быть естественным образом отождествлен с подкомплексом комплекса $C_*(X; G)$. Комплекс $C_*^c(X; G)$ — прямой предел комплексов $C_*(P; G)$ по множеству всех компактных подмножеств P пространства X . Включение $i: P \rightarrow X$ индуцирует мономорфизм $i_\#: C_*(P) \rightarrow C_*(X)$ и, если P' — компактное подмножество пространства X , содержащее P , то диаграмма мономорфизмов

$$\begin{array}{ccc} C_*(P) & \rightarrow & C_*(P') \\ & \searrow & \downarrow \\ & & C_*(X) \end{array}$$

коммутативна. Таким образом, прямой предел цепных комплексов $C_*(P)$ вкладывается в качестве подкомплекса в $C_*(X)$. Аналогично, комплекс $C_*^c(A)$ можно считать подкомплексом в $C_*(A)$ и комплекс $C_*^c(X, A)$ — подкомплексом в $C_*(X, A)$. Это приводит к следующей коммутативной диаграмме:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C_*^c(A) & \rightarrow & C_*^c(X) & \rightarrow & C_*^c(X, A) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & C_*(A) & \rightarrow & C_*(X) & \rightarrow & C_*(X, A) \rightarrow 0 \end{array}$$

Кроме того, комплекс $C_*(X, A)$ гомотопически эквивалентен цепному комплексу $C_*(U)$. Переходя к гомологиям, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial} & H_q^c(A) & \xrightarrow{i_*} & H_q^c(X) & \xrightarrow{j_*} & H_q^c(X, A) \xrightarrow{\partial} \dots \\ & & \downarrow \tau & & \downarrow \tau & & \downarrow \tau \\ \dots & \xrightarrow{\partial} & H_q(A) & \xrightarrow{i_*} & H_q(X) & \xrightarrow{j_*} & H_q(X, A) \xrightarrow{\partial} \dots \\ & & & & \searrow \rho & & \downarrow \omega \\ & & & & & & H_q(U) \end{array}$$

Гомоморфизм γ — естественное преобразование одной теории гомологий в другую.

Предыдущие рассуждения приводят к следующим двум коротким точным последовательностям:

$$0 \rightarrow C_c^*(X; G) \xrightarrow{\gamma} C^*(X; G) \rightarrow C^*(X; G)/C_c^*(X; G) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow C_c^c(X; G) \xrightarrow{\gamma} C_*(X; G) \rightarrow C_*(X; G)/C_c^c(X; G) \rightarrow 0.$$

Следуя Эпштейну [15] и Голдману [19], будем использовать следующие обозначения:

$$C_*^*(X; G) = C^*(X; G)/C_c^*(X; G),$$

$$H_*^q(X; G) = H^q(C_*^*(X; G)),$$

$$C_*^c(X; G) = C_*(X; G)/C_c^c(X; G),$$

$$H_*^q(X; G) = H_q(C_*^c(X; G)).$$

Только что определенные новые группы гомологий и когомологий включаются в длинные точные последовательности¹⁾

$$(1) \quad \dots \rightarrow H_c^q(X) \xrightarrow{\gamma} H^q(X) \rightarrow H_*^q(X) \xrightarrow{\delta} H_*^{q+1}(X) \rightarrow \dots,$$

$$(2) \quad \dots \rightarrow H_q^c(X) \xrightarrow{\gamma} H_q(X) \rightarrow H_*^q(X) \xrightarrow{\delta} H_{q-1}^*(X) \rightarrow \dots$$

¹⁾ Первая из этих точных последовательностей изучалась в [21*], где группы $H_*^q(X)$ определялись как прямые пределы $\varinjlim H^q(X \setminus U)$ по всем открытым множествам $U \subset X$, имеющим компактное замыкание (ср. с теоремой 10.1). При $q = 0$ группы $H^0(X)$ и $H_*^0(X)$ в последовательности (1) можно заменить на приведенные когомологи $\tilde{H}^0(X)$ и $\tilde{H}_*^0(X) = \varinjlim \tilde{H}^0(X \setminus U)$. Это оправдано тем, что в соответствии с [30*] имеет место изоморфизм $\tilde{H}_*^q(X) = H^{q+1}(\bar{X}, X)$, где $\bar{X}$ — одноточечная компактификация X . Учитывая, что $H_c^q(X) = \tilde{H}^q(\bar{X})$ (теорема 2.8), заключаем, что с указанными изменениями в размерности нуль последовательность (1) фактически совпадает с приведенной когомологической последовательностью пары (X, X) . Такая трактовка последовательности (1) дана в следствии 5 работы [49].

Аналогичное истолкование допускает и преобразование $H_q^c \rightarrow H_q$, т.е. последовательность (2), см. следствие 4 в [49]. Именно, с учетом изоморфизма $H_q(X) \cong H_q(\bar{X})$ гомологическая последовательность пары (X, X) совпадает с последовательностью (2) во всех членах, кроме $H_0(\bar{X})$ и $H_0^c(\bar{X}, X)$. Таким образом, $H_q^c(X) = H_q^c(\bar{X}, X)$ при $q \geq 1$, но $H_0^c(X) \neq H_0^c(\bar{X}, X)$. Приведенная гомологическая последовательность пары $(\bar{X}, X)$ совпадает с последовательностью (2) во всех членах, кроме $\tilde{H}_0^c(X)$ и $H_0^c(\bar{X}, X)$.

Сказанное проливает дополнительный свет на обсуждаемую в конце параграфа связь групп $H_*^q(X)$ и $H_*^q(X)$ с гомологиями и когомологиями пространства X «на бесконечности», имеющими ту же природу, что и локальные гомологии и когомологии. — *Прим. ред.*

Встречающийся в обозначениях символ « e » отражает тот факт, что соответствующие группы гомологий и когомологий тесно связаны с так называемыми «концами» локально компактного пространства X^1). Чтобы помочь читателю получить лучшее представление о природе групп $H_e^q(X)$ и $H_q^e(X)$, докажем некоторые их основные свойства.

10.1. Теорема. *Группа $H_e^q(X)$ естественно изоморфна прямому пределу когомологий $H^q(X \setminus U)$ по всем открытым подмножествам U в X , имеющим компактное замыкание²⁾.*

10.2. Теорема. *Группа $H_q^e(X)$ естественно изоморфна прямому пределу групп гомологий $H_q(X \setminus P)$ по множеству всех компактных подмножеств пространства X .*

В этих теоремах предполагается, что X — локально компактное пространство. В теореме 10.1 при $U_1 \subset U_2$ включение $i: X \setminus U_2 \rightarrow X \setminus U_1$ индуцирует гомоморфизм $i^*: H^q(X \setminus U_1) \rightarrow H^q(X \setminus U_2)$, в то время как в теореме 10.2 при $P_1 \subset P_2$ включение $X \setminus P_2 \subset X \setminus P_1$ открытых множеств определяет гомоморфизм $\rho: H_q(X \setminus P_1) \rightarrow H_q(X \setminus P_2)$. Подразумевается, что прямые пределы берутся по отношению к этим гомоморфизмам.

Доказательство теоремы 10.1. Пусть U — открытое подмножество в X , имеющее компактное замыкание. Легко видеть, что носитель $|u|$ коцепи $u \in C^n(X, X \setminus U)$ компактен. Таким образом, $C^*(X, X \setminus U)$ — подкомплекс комплекса $C_c^*(X)$. Более того, $C_c^n(X)$ — объединение и, следовательно, прямой предел подгрупп $C^n(X, X \setminus U)$ по всем открытым подмножествам U пространства X , имеющим компактное замыкание. Легко видеть, что для таких множеств U диаграмма коцепных комплексов

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C^*(X, X \setminus U) & \rightarrow & C^*(X) & \rightarrow & C^*(X \setminus U) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow 1 & & \parallel & & \downarrow 2 \\ 0 & \rightarrow & C_c^*(X) & \longrightarrow & C^*(X) & \rightarrow & C_e^*(X) \rightarrow 0 \end{array}$$

коммутативна. В диаграмме точны обе строки, стрелкой с номером 1 обозначено включение подкомплекса, а стрелкой с номером 2 — соответствующий эпиморфизм. Напомним, что прямые пределы сохраняют точность, поэтому прямые пределы ко-

¹⁾ То есть максимальными центрированными системами множеств, состоящими из открытых множеств с компактными границами. — *Прим. ред.*

²⁾ Из рассмотрения когомологических последовательностей пар $(X \setminus U, X \setminus U)$, где X — одноточечная компактификация X , с учетом равенства $\varinjlim H^q(X \setminus U) = 0$ (при $q = 0$ когомологии приведенные) заключаем, что $\varinjlim H^q(X \setminus U) = H^{q+1}(X, X)$. — *Прим. ред.*

цепных комплексов из верхней строки диаграммы совпадают с соответствующими коцепными комплексами из нижней строки. В заключение остается воспользоваться тем, что переход к прямому пределу коммутирует с взятием когомологий. Теорема 10.1 доказана.

Доказательство теоремы 10.2. Рассуждения такие же, как в теореме 10.1. Для любого компактного подмножества $P \subset X$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow C_*(P) & \rightarrow & C_*(X) & \rightarrow & C_*(X, P) & \rightarrow & 0 \\ & \downarrow 1 & & \parallel & & \downarrow 2 & \\ 0 \rightarrow C_*^c(X) & \rightarrow & C_*(X) & \rightarrow & C_*^c(X) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Эта диаграмма играет такую же роль в доказательстве теоремы 10.2, как предыдущая — в доказательстве теоремы 10.1. Следует лишь воспользоваться изоморфизмом

$$H_q(C_*(X, P)) = H_q(X \setminus P).$$

В действительности в процессе доказательства этих двух теорем мы получили несколько больше, чем утверждали. В случае теоремы 10.1 мы доказали, что точная последовательность

$$\dots \rightarrow H_c^q(X) \xrightarrow{\gamma} H^q(X)_* \xrightarrow{\delta} H_c^{q+1}(X) \rightarrow \dots$$

является прямым пределом точных последовательностей

$$\dots \xrightarrow{\delta} H^q(X, X \setminus U) \xrightarrow{i_*} H^q(X) \xrightarrow{i^*} H^q(X \setminus U) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(X, X \setminus U) \rightarrow \dots$$

по всем открытым подмножествам U пространства X , имеющим компактное замыкание. Аналогично, последовательность

$$\dots \rightarrow H_c^q(X) \xrightarrow{\gamma} H_q(X) \rightarrow H_q^c(X) \xrightarrow{\delta} H_{q-1}^c(X) \rightarrow \dots$$

есть прямой предел точных гомологических последовательностей

$$\dots \rightarrow H_q(P) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{\rho} H_q(X \setminus P) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(P) \rightarrow \dots$$

по всем компактным подмножествам P пространства X .

Эти теоремы показывают, что группы когомологий $H_c^q(X)$ и гомологий $H_q^c(X)$ не зависят от топологической структуры любой части пространства X , содержащейся в его компактном подмножестве, а зависят лишь от структуры X «на бесконечности».

Упражнение

Пользуясь теоремами 10.1 и 10.2, найдите группы $H_*^q(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z})$ и $H_q^c(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z})$. (Указание. Применяя теорему 10.1, выберите подходящую кофиниальную последовательность ограниченных откры-

тых подмножеств $U \subset \mathbb{R}^n$ и подходящую конфинальную последовательность компактных множеств $P \subset \mathbb{R}^n$ в ситуации теоремы 10.2. Случай $n = 1$ рассмотрите отдельно.)

Мы собираемся показать теперь, что группы $H_e^q(X)$ и $H_q^e(X)$ можно включить в некоторые до сих пор не рассматривавшиеся точные последовательности. Мы уже видели, что эти группы содержатся в точных последовательностях (1) и (2). Для описания новых точных последовательностей предположим, что X — компактное хаусдорфово пространство, A — его замкнутое подмножество и $U = X \setminus A$. Имеем гомоморфизмы

$$\begin{aligned} i_*: H_q(A) &\rightarrow H_q^e(X, U), \\ i^*: H^q(X, U) &\rightarrow H^q(A), \end{aligned}$$

индуцированные отображением включения $i: A \rightarrow (X, U)$. Здесь $H^q(X, U)$ — группа когомологий Александера — Спеньера, построенная по *всем* коцепям (а не только по локально конечнозначным). Поскольку U не является замкнутым подмножеством пространства X , приходится использовать эту теорию когомологий. Указанные гомоморфизмы вместе с группами $H_q^e(U)$ и $H_e^q(U)$ включаются в следующие точные последовательности:

$$(3) \quad \dots \rightarrow H^q(X, U) \xrightarrow{i^*} H^q(A) \rightarrow H_e^q(U) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(X, U) \rightarrow \dots$$

$$(4) \quad \dots \rightarrow H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q^e(X, U) \rightarrow H_e^q(U) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A) \rightarrow \dots$$

Кроме того, точная последовательность (1) (для подпространства U), точная последовательность (3) и точные когомологические последовательности пар (X, A) и (X, U) вместе включаются в одну большую коммутативную диаграмму

$$(5) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & i^* & & \\ & & & & \curvearrowright & & \\ & & & & H^{q+1}(X, U) & \xrightarrow{i^*} & H^{q+1}(A) \\ & & & & \downarrow j^* & \nearrow i^* & \\ & & & & H^{q+1}(X) & & H_e^{q+1}(U) \\ & & & & \downarrow \tau & \nearrow i^* & \\ & & & & H^{q+1}(U) & & \\ & & & & \downarrow \gamma & & \\ & & & & H^{q+1}(U) & & \end{array}$$

Диаграмма (5) представляет собой коммутативную диаграмму с группами в узлах и гомоморфизмами в стрелках. В частности, диаграмма включает в себя следующие группы и гомоморфизмы:

- Группы: $H^q(X)$, $H^q(U)$, $H^q(A)$, $H_e^q(U)$, $H^{q+1}(X, U)$, $H^{q+1}(X)$, $H^{q+1}(U)$, $H_e^{q+1}(U)$, $H^{q+1}(A)$.
- Гомоморфизмы: $\delta: H^q(U) \rightarrow H_e^q(U)$, $\partial: H_e^q(U) \rightarrow H^{q+1}(X, U)$, $i^*: H^{q+1}(X, U) \rightarrow H^{q+1}(A)$, $j^*: H^{q+1}(X, U) \rightarrow H^{q+1}(X)$, $\tau: H^{q+1}(X) \rightarrow H^{q+1}(U)$, $\gamma: H^{q+1}(U) \rightarrow H_e^{q+1}(U)$, $i^*: H^{q+1}(X) \rightarrow H_e^{q+1}(U)$, $i^*: H^{q+1}(A) \rightarrow H_e^{q+1}(U)$.

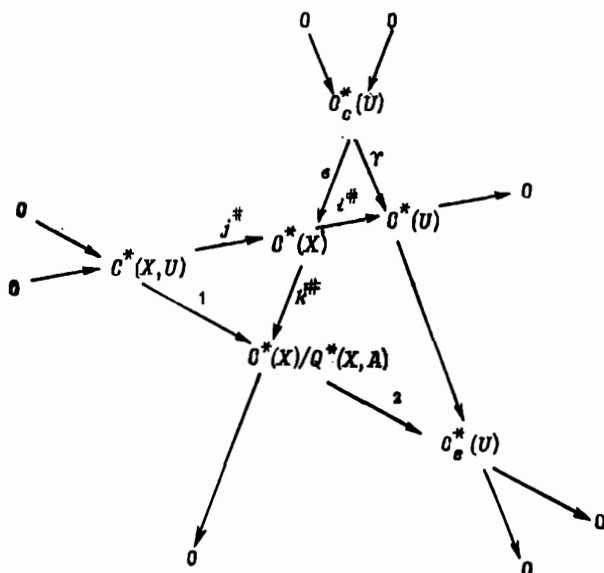
Аналогично, точная последовательность (2) (для подпространства U), точная последовательность (4) и точные гомологиче-

ские последовательности пар (X, A) и (X, U) вместе образуют следующую коммутативную диаграмму:

(6)

Объясним теперь, как получить точные последовательности (3) и (4) и коммутативные диаграммы (5) и (6).

Коммутативная диаграмма (5) возникает из следующей коммутативной диаграммы коцепных комплексов:



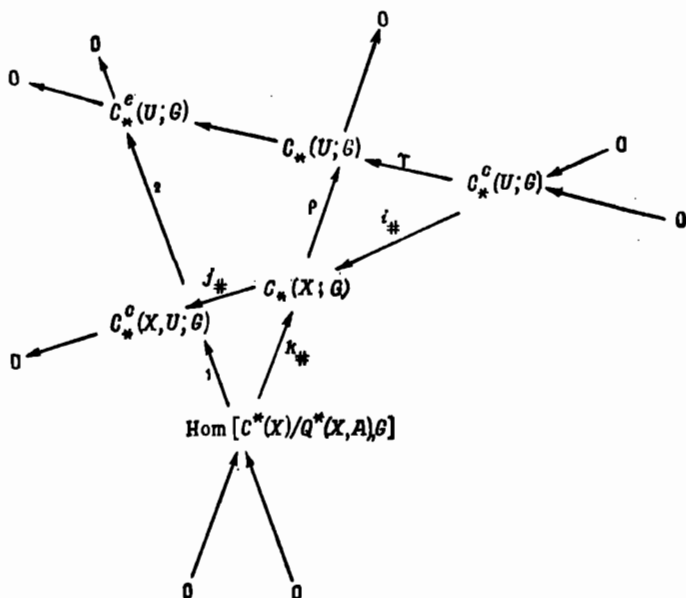
Все коцепные комплексы этой диаграммы — комплексы коцепей Александера — Спеньера, построенные по *всем* p -функциям (а не только по локально конечнозначным). Необходимость использования всех p -функций объясняется тем, что без этого коцепной комплекс $C^*(X, U)$ просто не определен. Каждый отрезок этой диаграммы — короткая точная последовательность коцепных комплексов. Три из этих точных последовательностей уже были определены ранее: (а) последовательность, содержащая

коцепное отображение σ , определена в § 1.3 гл. 1¹⁾; (b) последовательность, включающая $j^\#$ и $i^\#$, определена в гл. 8; (c) последовательность, содержащая коцепное отображение γ , определена выше в настоящем параграфе. Коцепное отображение, обозначенное стрелкой с номером 1 — композиция отображений $j^\#$ и $k^\#$, а стрелкой с номером 2 обозначен единственный гомоморфизм, делающий правый нижний четырехугольник коммутативным. Тот факт, что гомоморфизм с номером 1 является мономорфизмом, а гомоморфизм с номером 2 — эпиморфизмом, ядро которого совпадает с образом гомоморфизма с номером 1, вытекает из коммутативности всей диаграммы и точности остальных трех коротких последовательностей. Переходя к когомологиям, получаем диаграмму (5). Необходимо напомнить, что

$$H^q(C^*(X)/Q^*(X, A)) = H^q(A)$$

(это было доказано в гл. 1).

Коммутативная диаграмма (6) — следствие такой коммутативной диаграммы цепных комплексов и их цепных отображений:



¹⁾ Следует иметь в виду, что теория, развитая в гл. 1 в терминах конечнозначных коцепей, имеет эквивалентное описание в терминах произвольных коцепей, см. пример 1 в § 6.6. Это замечание применимо и к определению коцепного комплекса $C_*^G(U)$. — Прим. перев.

Эта диаграмма обладает такими же свойствами, как и предыдущая. Она содержит четыре короткие точные последовательности. Последовательность, включающая цепные отображения ρ и $k_{\#}$, обсуждалась в § 4.7. Последовательность, содержащая $i_{\#}$ и $j_{\#}$, встречалась в гл. 9, а последовательность, содержащая γ , определена выше в настоящем параграфе. Точная последовательность, включающая гомоморфизмы с номерами 1 и 2, является новой. Определение гомоморфизмов с этими номерами и доказательство точности проводится тем же способом, что и в предыдущей диаграмме коцепных комплексов. Переходя к гомологиям, получаем диаграмму (6). Напомним, что

$$H_q(\text{Hom}(C^*(X)/Q^*(X, A), G)) = H_q(A; G).$$

Рассмотрим теперь простое применение этих точных последовательностей. Пусть U — произвольное локально компактное хаусдорфово пространство и X — одноточечная компактификация Александрова пространства U . Тогда $A = X \setminus U$ — пространство, состоящее из единственной точки. Поэтому из точной последовательности (3) при $q > 0$ вытекает¹⁾

$$H_e^q(U) \cong H^{q+1}(X, U).$$

Из точной последовательности (4) при $q > 1$ получаем

$$H_e^q(U) \cong H_q^c(X, U).$$

Напомним, что, согласно § 9.7, $H_e^q(X, U)$ — локальная группа гомологий пространства X в точке ∞ . Аналогично группу $H^{q+1}(X, U)$ можно интерпретировать как локальную группу когомологий пространства X в той же точке. Таким образом, мы получили интерпретацию новых групп гомологий и когомологий

$$H_e^q(U) \text{ и } H_q^c(U).$$

Аналогичные рассуждения справедливы и в случае, когда U — связное локально компактное пространство и X — компактификация Фрейденшталя пространства U^2). В этом случае A — нульмерное пространство и, следовательно, $H^q(A) = 0 = H_q(A)$ для всех $q > 0$. Это особенно интересно, когда U — пространство с конечным множеством концов, т. е. когда A — конечное множество.

¹⁾ См. примечание к точным последовательностям (1) и (2). — *Прим. ред.*

²⁾ Для этой компактификации точки $X \setminus U$ находятся во взаимно однозначном соответствии со всеми «концами» (см. примечание перед теоремой 10.1) пространства U . — *Прим. ред.*

§ 10.3. $\cup$ -умножения в когомологиях локально компактных пространств

Мы уже рассматривали два способа определения $\cup$ -умножений, каждый из которых применим к когомологиям локально компактных пространств.

(а) *Когомологии с компактными носителями.* Если R и S — локально компактные подмножества пространства X , то определено $\cup$ -умножение

$$H_c^p(R; G_1) \otimes H_c^q(S; G_2) \rightarrow H_c^{p+q}(R \cap S; G_1 \otimes G_2)$$

(см. гл. 7).

(б) *Когомологии с произвольными носителями.* Если A и B — такие замкнутые подмножества пространства X , что $A \cup B = \text{Int } A \cup \text{Int } B$ в индуцированной топологии пространства $A \cup B$, то определено $\cup$ -умножение

$$H^p(X, A; G_1) \otimes H^q(X, B; G_2) \rightarrow H^{p+q}(X, A \cup B; G_1 \otimes G_2)$$

(см. гл. 8).

Целью настоящего параграфа является определение $\cup$ -умножения третьего типа. Мы введем «смешанное» умножение, определенное на когомологиях обоих типов.

Напомним, что если $\varphi \in \Phi^p(X; G_1)$ и $\psi \in \Phi^q(X; G_2)$, то носитель их $\cup$ -произведения $\varphi \cup \psi$ удовлетворяет следующему условию:

$$|\varphi \cup \psi| \subset |\varphi| \cap |\psi|.$$

Поэтому если носитель одной из функций φ или ψ компактен, то компактен и носитель произведения $\varphi \cup \psi$. Кроме того, при определении коцепей с компактными носителями можно с равным успехом использовать как конечнозначные, так и локально конечнозначные коцепи (ср. § 8.2, упр. 6). В качестве следствия получаем $\cup$ -умножение в коцепях

$$C^p(X; G_1) \otimes C_c^q(X; G_2) \rightarrow C_c^{p+q}(X; G_1 \otimes G_2),$$

которое, как обычно, приводит к $\cup$ -умножению

$$H^p(X; G_1) \otimes H_c^q(X; G_2) \rightarrow H_c^{p+q}(X; G_1 \otimes G_2)$$

в когомологиях произвольного локально компактного пространства X . Разумеется, определено также $\cup$ -умножение в другом порядке

$$H_c^p(X; G_1) \otimes H^q(X; G_2) \rightarrow H_c^{p+q}(X; G_1 \otimes G_2).$$

Следует расширить определение этого умножения так, чтобы оно было применимо к относительным группам когомологий, а

также к когомологиям подпространств пространства X . Существует два более или менее эквивалентных способа сделать это.

(а) *Первый способ.* Обсуждавшееся выше $\cup$ -умножение в коцепях локально компактного пространства X приводит к $\cup$ -умножению

$$C^p(X; G_1) \otimes C_c^q(X; G_2) \rightarrow C_c^{p+q}(X; G_1 \otimes G_2),$$

обозначаемому как $u \otimes v \rightarrow u \cup v$. Легко проверить, что если A — замкнутое подмножество в X и u принадлежит подгруппе $C^p(X, A; G_1)$, то $u \cup v$ принадлежит подгруппе $C_c^{p+q}(X, A; G_1 \otimes G_2)$, т. е. имеем гомоморфизм

$$C^p(X, A; G_1) \otimes C_c^q(X; G_2) \rightarrow C_c^{p+q}(X, A; G_1 \otimes G_2).$$

Переходя к когомологиям, получим отображение

$$\cup: H^p(X, A; G_1) \otimes H_c^q(X; G_2) \rightarrow H_c^{p+q}(X \setminus A; G_1 \otimes G_2)$$

(напомним, что $H_c^n(X \setminus A) \cong H^n(C_c^*(X, A))$).

(б) *Второй способ.* Предположим, что R и S — подпространства в X , A — замкнутое подмножество в R , множество S локально компактно и $R \cap S$ замкнуто в S . Тогда обычные формулы для $\cup$ -произведения коцепей приводят к гомоморфизму

$$C^p(R, A; G_1) \otimes C_c^q(S; G_2) \rightarrow C_c^{p+q}(R \cap S, A \cap S; G_1 \otimes G_2),$$

который мы обозначим через $u \otimes v \rightarrow u \vee v$, чтобы отличать этот гомоморфизм от определенного выше $\cup$ -умножения. Переходя к когомологиям, получим гомоморфизм

$$\vee: H^p(R, A; G_1) \otimes H_c^q(S; G_2) \rightarrow H_c^{p+q}((R \cap S) \setminus (A \cap S); G_1 \otimes G_2).$$

Разумеется, оба умножения можно рассматривать в противоположном порядке (см. свойство (3) ниже).

Эти умножения немного различаются. Связь между ними очень проста: коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^p(R, A) \otimes H_c^q(S) & \xrightarrow{\vee} & H_c^{p+q}((R \cap S) \setminus (A \cap S)) \\ \downarrow i^* \otimes j^* & & \nearrow \cup \\ H^p(R \cap S, A \cap S) \otimes H_c^q(R \cap S) & & \end{array}$$

где $i: (R \cap S, A \cap S) \rightarrow (R, A)$ и $j: R \cap S \rightarrow S$ — отображения включения. Очевидно, $\vee$ -умножение является более общим, оно включает $\cup$ -умножение как частный случай. С другой стороны, в силу этой коммутативной диаграммы $\cup$ -умножение определяет $\vee$ -умножение. Таким образом, можно использовать любой из двух подходов.

Теперь мы обсудим основные свойства $\cup$ -умножения, каждое из которых можно легко переформулировать в терминах $\vee$ -умножения.

(1) *Ассоциативность*. Поскольку $\cup$ -умножение коцепей ассоциативно, автоматически справедлива любая формула ассоциативности, имеющая смысл.

(2) *Существование единицы*. Существует мультипликативная единица $1 \in C^0(X; Z)$. Аналогично, если X компактно, существует единица $1 \in C_c^0(X; Z) = C^0(X; Z)$. Поэтому всегда существует единица в $H^0(X; Z)$.

(3) Если u — класс когомологий степени p и v — класс когомологий степени q , то выполняется обычный закон антикоммутативности

$$u \cup v = (-1)^{pq} v \cup u.$$

Этот результат можно доказать, вводя $\cup_1$ -умножение Стинрода (см. § 8.7).

(4) *Естественность*. Если $f: (X, A) \rightarrow (X', A')$ — собственное отображение локально компактных пар, то коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C^p(X', A') \otimes C_c^q(X') & \xrightarrow{\cup} & C_c^{p+q}(X', A') \\ \downarrow f^\# \otimes f^\# & & \downarrow f^\# \\ C^p(X, A) \otimes C_c^q(X) & \xrightarrow{\cup} & C_c^{p+q}(X, A) \end{array}$$

Это приводит к соответствующей коммутативной диаграмме для групп когомологий

$$\begin{array}{ccc} H^p(X', A') \otimes H_c^q(X') & \xrightarrow{\cup} & H_c^{p+q}(X' \setminus A') \\ \downarrow f^* \otimes f^* & & \downarrow f^* \\ H^p(X, A) \otimes H_c^q(X) & \xrightarrow{\cup} & H_c^{p+q}(X \setminus A) \end{array}$$

(5) *Естественность по отношению к включениям открытых подмножеств*. Пусть U — открытое подмножество и A — замкнутое подмножество пространства X . Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C^p(U, U \cap A) \otimes C_c^q(U) & \xrightarrow{\cup} & C_c^{p+q}(U, U \cap A) \\ \uparrow j^\# & & \downarrow \sigma \\ C^p(X, A) \otimes C_c^q(X) & \xrightarrow{\cup} & C_c^{p+q}(X, A) \end{array}$$

«коммутативна» в том смысле, что

$$u \cup \sigma v = \sigma_1[(j^\# u) \cup v]$$

для любых $u \in C^p(X, A)$ и $v \in C_c^q(U)$. Здесь $j: (U, U \cap A) \rightarrow (X, A)$ — включение и σ_1 — гомоморфизм, индуцированный гомоморфизмом σ . Для доказательства этого свойства необходимо вернуться к определению гомоморфизма σ (см. § 1.3). Детали доказательства оставляем читателю. Указанная диаграмма для коцепей приводит к следующей диаграмме для групп когомологий:

$$\begin{array}{ccccc} H^p(U, U \cap A) \otimes H_c^q(U) & \xrightarrow{\sim} & H_c^{p+q}(U \setminus A) \\ \uparrow j^* & & \downarrow \tau & & \downarrow \tau_1 \\ H^p(X, A) \otimes H_c^q(X) & \xrightarrow{\sim} & H_c^{p+q}(X \setminus A) \end{array}$$

Эта диаграмма коммутативна в том же смысле, что и предыдущая.

(6) *Связь с кограничным оператором.*

(а) Пусть A и B — замкнутые подмножества пространства X . Тогда коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} 0 & & & & 0 \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ C^p(X, A \cup B) \otimes C_c^q(X) & \xrightarrow{\sim} & C_c^{p+q}(X, A \cup B) \\ \downarrow j^\# & \parallel & & & \downarrow j^\# \\ C^p(X, A) \otimes C_c^q(X) & \xrightarrow{\sim} & C_c^{p+q}(X, A) \\ \downarrow i^\# & \downarrow i^\# & & & \downarrow i^\# \\ C^p(A \cup B, A) \otimes C_c^q(A \cup B) & \xrightarrow{\sim} & C_c^{p+q}(A \cup B, A) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

Два столбца диаграммы — короткие точные последовательности. Переходя к соответствующим длинным точным последовательностям когомологий, получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H^p(A \cup B, A) \otimes H_c^q(A \cup B) & \xrightarrow{\sim} & H_c^{p+q}(B \setminus A) \\ \downarrow \delta & \uparrow i^* & & & \downarrow \delta \\ H^{p+1}(X, A \cup B) \otimes H_c^q(X) & \xrightarrow{\sim} & H_c^{p+q+1}(X \setminus (A \cup B)) \end{array}$$

Здесь δ — кограничный оператор тройки $(X, A \cup B, A)$. Предположим дополнительно, что $(A \cup B; A, B)$ — вырезаемая триада, т. е. что включение $(B, A \cap B) \rightarrow (A \cup B, A)$ индуцирует изомор-

физм $H^p(A \cup B, A) \cong H^p(B, A \cap B)$. Тогда коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} H^p(B, A \cap B) \otimes H_c^q(B) & \xrightarrow{\cup} & H_c^{p+q}(B \setminus A) \\ \downarrow \delta' & \uparrow k^* & \downarrow \delta \\ H^{p+1}(X, A \cup B) \otimes H_c^q(X) & \xrightarrow{\cup} & H_c^{p+q+1}(X \setminus (A \cup B)) \end{array}$$

Здесь δ' — кограничный оператор триады $(X; A, B)$.

(b) Пусть B — замкнутое подмножество пространства X и $U = X \setminus B$. Тогда коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} H^p(X, A) \otimes H_c^q(B) & \xrightarrow{i^* \otimes 1} & H^p(B, A \cap B) \otimes H_c^q(B) & \xrightarrow{\cup} & H_c^{p+q}(B \setminus A) \\ \downarrow (-1)^p \otimes \delta & & & & \downarrow \delta \\ H^p(X, A) \otimes H_c^{q+1}(U) & \xrightarrow{j^* \otimes 1} & H^p(U, A \cap U) \otimes H_c^{q+1}(U) & \xrightarrow{\cup} & H_c^{p+q+1}(U \setminus A) \end{array}$$

Здесь $i: (B, A \cap B) \rightarrow (X, A)$ и $j: (U, A \cap U) \rightarrow (X, A)$ — включения (в этом свойстве, а также в свойстве (5) гомоморфизмы i^* и j^* не нужны, если вместо $\cup$ -умножения рассматривать $\vee$ -умножение).

Доказательство этого свойства немного сложнее по сравнению с остальными, поэтому наметим его основные моменты. Требуется установить, что для любых $u \in H^p(X, A)$ и $v \in H_c^q(B)$ справедливо равенство

$$\delta[(i^*u) \cup v] = (-1)^p (j^*u) \cup \delta v.$$

Выберем коцикл $u' \in C^p(X, A)$, представляющий класс когомологий u , и рассмотрим две коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow C_c^*(U) & \xrightarrow{\sigma} & C_c^*(X) & \rightarrow & C_c^*(X)/C_c^*(U) & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \\ 0 \rightarrow C_c^*(X, B) & \rightarrow & C_c^*(X) & \xrightarrow{k^\#} & C_c^*(B) & \rightarrow & 0 \\ 0 \rightarrow C_c^*(U, A \cap U) & \xrightarrow{\sigma'} & C_c^*(X, A) & \rightarrow & \frac{C_c^*(X, A)}{C_c^*(U, A \cap U)} & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \\ 0 \rightarrow C_c^*(X, A) \cap C_c^*(X, B) & \rightarrow & C_c^*(X, A) & \xrightarrow{i^\#} & C_c^*(B, A \cap B) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Эти диаграммы обладают сходными свойствами: каждая строка — короткая точная последовательность коцепных комплексов, и каждое коцепное отображение, обозначенное вертикальной стрелкой, индуцирует изоморфизм групп когомологий. Для первой диаграммы эти свойства доказаны в гл. I; для второй диаграммы мы их коротко докажем.

Имеется коцепное отображение ¹⁾ каждого комплекса первой диаграммы в соответствующий комплекс второй диаграммы, определенное соответствием $x \rightarrow u' \vee x$ (заметим, что здесь используется $\vee$ -умножение). Переходя к когомологиям, получим коммутативную диаграмму в форме приставной лестницы, получающуюся из отображения точной когомологической последовательности одной пары в аналогичную последовательность другой. Доказываемое свойство — это утверждение о коммутативности одного из квадратов этой диаграммы.

Остается показать, что вторая диаграмма обладает указанными выше свойствами. Определим сначала содержащееся в ней коцепное отображение σ' . Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow C_c^*(U, A \cap U) & \rightarrow & C_c^*(U) & \xrightarrow{i_1^\#} & C_c^*(A \cap U) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma_2 & & \\ 0 \rightarrow C_c^*(X, A) & \longrightarrow & C_c^*(X) & \xrightarrow{i_2^\#} & C_c^*(A) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Каждая строка этой диаграммы — короткая точная последовательность коцепных комплексов. Коммутативность квадрата следует из § 1.3. Кроме того, σ и σ_2 — мономорфизмы. Следовательно, имеется индуцированный мономорфизм $\sigma': C_c^*(U, A \cap U) \rightarrow C_c^*(X, A)$ коцепных комплексов. Этим дано описание короткой точной последовательности в верхней строке второй из указанных выше диаграмм.

Далее объясним короткую точную последовательность, содержащуюся в нижней строке этой диаграммы. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} & & C_c^*(X, A) & \xrightarrow{l^\#} & C_c^*(B, A \cap B) & & \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow 2 & & \\ 0 \rightarrow C_c^*(X, B) & \rightarrow & C_c^*(X) & \longrightarrow & C_c^*(B) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Нижняя строка этой диаграммы точна, а стрелками с номерами 1 и 2 обозначены мономорфизмы. Утверждается, что гомоморфизм $l^\#$, индуцированный включением $l: (B, A \cap B) \rightarrow (X, A)$, является эпиморфизмом. Для доказательства следует вернуться к определению групп коцепей $C_c^p(X, A)$ и $C_c^p(B, A \cap B)$ в терминах p -функций и т. д. Оставляем читателю детали в качестве упражнения. Легко видеть, что ядро гомоморфизма $l^\#$ совпадает

¹⁾ Степень этого отображения равна p . Оно перестановочно с кограницными отображениями с точностью до знака $(-1)^p$. — Прим. перев.

с $C_c^*(X, A) \cap C_c^*(X, B)$. Этим завершено описание нижней строки диаграммы.

Далее заметим, что $\text{Im } \sigma' \subset \text{Ker } \iota^\#$. Следовательно, обозначенные вертикальными стрелками гомоморфизмы однозначно определены.

В заключение необходимо доказать, что гомоморфизмы, обозначенные вертикальными стрелками, индуцируют изоморфизм групп когомологий. Это следует из того, что обе строки диаграммы приводят к одной и той же точной когомологической последовательности

$$\dots \xrightarrow{\delta} H_c^q((X \setminus A) \cap U) \xrightarrow{\tau} H_c^q(X \setminus A) \xrightarrow{\iota^*} H_c^q((X \setminus A) \cap B) \xrightarrow{\delta} \dots$$

Подробное доказательство снова оставляем читателю в качестве упражнения.

Этим завершается доказательство свойства (6b).

(7) Пусть $\gamma: H_c^q(X) \rightarrow H^q(X)$ — естественное преобразование, определенное включением комплекса $C_c^*(X)$ в $C^*(X)$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^p(X, A) \otimes H_c^q(X) & \xrightarrow{\cup} & H_c^{p+q}(X, A) \\ \downarrow 1 \otimes \gamma & & \downarrow \gamma \\ H^p(X, A) \otimes H^q(X) & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q}(X, A) \end{array}.$$

коммутативна.

§ 10.4. Применения к $\cap$ -умножениям для локально компактных пространств

Мы уже упоминали в § 10.1, что для локально компактных пространств можно определить четыре типа $\cap$ -умножений, отвечающие двум типам гомологий и двум типам когомологий. В настоящем параграфе дается полный обзор по этой теме.

Пусть X — локально компактное пространство. Основное $\cap$ -умножение, с помощью которого можно определить все остальные, — это гомоморфизм

$$\cap: C_{p+q}(X; G_1) \otimes C^p(X; G_2) \rightarrow C_q(X; G_1 \otimes G_2).$$

Этот гомоморфизм алгебраически двойствен к $\cup$ -умножению

$$\cup: C^p(X; G_2) \otimes C_c^q(X) \rightarrow C_c^{p+q}(X, G_2) = C_c^{p+q}(X) \otimes G_2,$$

которое рассматривалось в § 10.3 (здесь через $C_c^q(X)$ обозначена группа $C_c^q(X; \mathbb{Z})$). Точное определение аналогично определению

из § 7.9: если $f \in C_{p+q}(X; G_1) = \text{Hom}(C_c^{p+q}(X), G_1)$ и $u \in C^p(X; G_2)$, то $f \cap u \in C_q(X; G_1 \otimes G_2) = \text{Hom}(C_c^q(X), G_1 \otimes G_2)$ задается формулой

$$\langle f \cap u, v \rangle = \langle f \otimes G_2, u \cup v \rangle$$

для любого $v \in C_c^q(X)$ (через $f \otimes G_2$ обозначен гомоморфизм $f \otimes 1$, где $1: G_2 \rightarrow G_2$ — тождественный изоморфизм). Легко проверить, что определенное таким образом $\cap$ -умножение удовлетворяет обычной формуле границы

$$\partial(f \cap u) = (-1)^p [(\partial f) \cap u - f \cap \partial u].$$

Так же как в § 7.9, эта формула позволяет определить умножение в терминах гомологий — когомологий:

$$\cap: H_{p+q}(X; G_1) \otimes H^p(X; G_2) \rightarrow H_q(X; G_1 \otimes G_2).$$

Свойства этого $\cap$ -умножения будут детально рассмотрены в § 10.5. В большинстве своем они двойственны свойствам $\cup$ -умножения, перечисленным в § 10.3.

Займемся дальнейшим выяснением природы $\cap$ -умножения $f \otimes u \rightarrow f \cap u$, определенного выше для $f \in C_{p+q}(X; G_1)$ и $u \in C^p(X; G_2)$. Справедливы следующие два утверждения.

(1) Если f — цепь с компактным носителем, то $f \cap u$ — цепь с компактным носителем, т. е. если $f \in C_{p+q}^c(X; G_1)$, то $f \cap u \in C_q^c(X; G_1 \otimes G_2)$.

(2) Если u — коцепь с компактным носителем, то $f \cap u$ — цепь с компактным носителем. Другими словами, если $u \in C_c^p(X; G_2)$, то $f \cap u \in C_q^c(X; G_1 \otimes G_2)$.

Первое утверждение можно доказать следующим образом. Выберем такое компактное множество $P \subset X$, что цепь f принадлежит образу гомоморфизма $i_\# : C_{p+q}(P) \rightarrow C_{p+q}(X)$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C_{p+q}(P) \otimes C^q(P) & \xrightarrow{\cap} & C_q(P) \\ \downarrow i_\# & \uparrow i_\# & \downarrow i_\# \\ C_{p+q}(X) \otimes C^q(X) & \xrightarrow{\cap} & C_q(X) \end{array}$$

коммутативна. (Это одно из соотношений естественности, которые мы рассмотрим в § 10.5.) Из диаграммы следует, что цепь $f \cap u$ принадлежит образу гомоморфизма $i_\# : C_q(P) \rightarrow C_q(X)$, что и требовалось.

Второе утверждение будет доказано в § 10.5.

Каждое из этих утверждений влечет за собой такое следствие:

(3) Если $f \in C_{p+q}^c(X)$ и $u \in C_c^p(X)$, то $f \cap u \in C_q^c(X)$.

Все три утверждения позволяют определить дополнительно еще три типа $\frown$ -умножений цепей и коцепей.

$$\text{Тип В: } C_{p+q}(X; G_1) \otimes C_c^p(X; G_2) \rightarrow C_q^c(X; G_1 \otimes G_2).$$

$$\text{Тип С: } C_{p+q}^c(X; G_1) \otimes C^p(X; G_2) \rightarrow C_q^c(X; G_1 \otimes G_2).$$

$$\text{Тип D: } C_{p+q}^c(X; G_1) \otimes C_c^p(X; G_2) \rightarrow C_q^c(X; G_1 \otimes G_2).$$

Основное $\frown$ -умножение, определенное в начале этого параграфа, будем называть произведением типа А. Каждое из этих произведений удовлетворяет указанной выше формуле границы и, следовательно, приводит к $\frown$ -умножению соответствующих гомологий и когомологий.

$$\text{Тип А: } H_{p+q}(X) \otimes H^p(X) \rightarrow H_q(X).$$

$$\text{Тип В: } H_{p+q}(X) \otimes H_c^p(X) \rightarrow H_q^c(X).$$

$$\text{Тип С: } H_{p+q}^c(X) \otimes H^p(X) \rightarrow H_q^c(X).$$

$$\text{Тип D: } H_{p+q}^c(X) \otimes H_c^p(X) \rightarrow H_q^c(X).$$

Можно показать, что $\frown$ -умножение типа С совпадает (для локально компактных пространств) с $\frown$ -умножением, определенным в гл. 9 для пространств общего типа. Свойства $\frown$ -умножений типа А и В детально рассматриваются в § 10.5. Эти два $\frown$ -умножения играют фундаментальную роль в формулировке и доказательстве теоремы двойственности Пуанкаре для многообразий (см. гл. 11).

Поскольку нам не известны применения $\frown$ -умножения типа D, оно в дальнейшем не рассматривается.

Замечание. Для компактного пространства X все четыре умножения совпадают с умножением, определенным в § 7.9.

§ 10.5. Свойства $\frown$ -умножений типа А и В

Мы обобщим определения, данные в § 10.4, таким образом, чтобы они были применимы к относительным группам гомологий и когомологий, к гомологиям и когомологиям подпространств и т. д. Свойства рассматриваемых $\frown$ -умножений аналогичны свойствам $\frown$ -умножения типа С, перечисленным в гл. 9.

Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство и A — его замкнутое подмножество. Тогда $\frown$ -умножение типа А — это гомоморфизм

$$\frown: H_{p+q}(X \setminus A; G_1) \otimes H^p(X, A; G_2) \rightarrow H_q(X; G_1 \otimes G_2).$$

Всякий раз, когда этот гомоморфизм определен, его область определения можно расширить следующим образом.

Расширенное $\cap$ -умножение типа A . Пусть R и S — такие подмножества хаусдорфова пространства, что S локально компактно, а $R \cap S$ — замкнутое подмножество пространства S . Пусть A — замкнутое подмножество в R . Тогда можно определить расширенное $\cap$ -умножение типа A

$$\cap: H_{p+q}((R \cap S) \setminus (A \cap S)) \otimes H^p(R, A) \rightarrow H_q(S)$$

формулой

$$u \cap v = i_* (u \cap j^* v),$$

где $u \in H_{p+q}((R \cap S) \setminus (A \cap S))$, $v \in H^p(R, A)$, $i: R \cap S \rightarrow S$ и $j: (R \cap S, A \cap S) \rightarrow (R, A)$ — включения. Таким образом, определение дано так, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_{p+q}((R \cap S) \setminus (A \cap S)) \otimes H^p(R, A) & \xrightarrow{\cap} & H_q(S) \\ \downarrow i \otimes j^* & & \uparrow i_* \\ H_{p+q}((R \cap S) \setminus (A \cap S)) \otimes H^p(R \cap S, A \cap S) & \xrightarrow{\cap} & H_q(R \cap S) \end{array}$$

коммутативна. Это определение корректно, поскольку из наших предположений следует, что $R \cap S$ — локально компактное пространство и $A \cap S$ — замкнутое подмножество в $R \cap S$.

Можно надеяться еще немного расширить область определения, отбрасывая требование замкнутости подмножества $R \cap S$ пространства S . Однако вряд ли это возможно (по разным причинам).

Определение $\cap$ -умножения типа A лишь немного обобщает определение из § 10.4 для случая абсолютных групп гомологий и когомологий. Оно основано на $\cap$ -умножении цепей и коцепей

$$\cap: C_{p+q}(X, A; G_1) \otimes C^p(X, A; G_2) \rightarrow C_q(X; G_1 \otimes G_2),$$

которое алгебраически двойственно $\cup$ -умножению

$$\cup: C^p(X, A; G_2) \otimes C_c^q(X) \rightarrow C_c^{p+q}(X, A) \otimes G_2$$

(ср. § 10.3). Если $f \in C_{p+q}(X, A; G_1) = \text{Hom}(C_c^{p+q}(X, A), G_1)$ и $u \in C^p(X, A; G_2)$, то $f \cap u \in C_q(X; G_1 \otimes G_2) = \text{Hom}(C_c^q(X), G_1 \otimes G_2)$ определяется формулой

$$\langle f \cap u, v \rangle = \langle f \otimes G_2, u \cup v \rangle$$

для любого $v \in C_c^q(X)$. Это $\cap$ -умножение удовлетворяет, очевидно, обычной формуле границы

$$\partial(f \cap u) = (-1)^p [(\partial f) \cap u - f \cap \partial u]$$

и, следовательно, приводит к нужному $\cap$ -умножению в гомологиях и когомологиях (здесь необходимо учесть, что $H_{p+q}(X \setminus$

$\setminus A; G_1) = H_{p+q}(C_*(X, A; G_1))$. Это определение можно легко обобщить и получить прямое описание расширенного $\cap$ -умножения типа A , упомянутого выше.

Перечислим основные свойства определенного нами $\cap$ -умножения типа A . Из списка свойств мы умышленно исключили любое упоминание об ассоциативности. Под ассоциативностью $\cap$ -умножения понимаются соотношения вида

$$(u \cap v) \cap w = u \cap (v \cap w)$$

для классов когомологий v и w и класса гомологий u . Справедливость всякой формулы такого типа (если только она имеет смысл) легко устанавливается. В конечном счете все свойства $\cup$ - и $\cap$ -умножений вытекают из свойств $\cup$ -умножения функций, когда сомножители лежат в $\Phi^p(X; G_1)$ и $\Phi^q(X; G_2)$ соответственно, а это $\cup$ -умножение, очевидно, ассоциативно.

(A1) *Естественность по отношению к собственным отображениям.* Пусть $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ — собственное отображение одной пары локально компактных пространств в другую. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} C_{p+q}(X, A) \otimes C^p(X, A) & \xrightarrow{\cap} & C_q(X) \\ \downarrow f_{\#} & \uparrow f^{\#} & \downarrow f_{\#} \\ C_{p+q}(Y, B) \otimes C^p(Y, B) & \xrightarrow{\cap} & C_q(Y) \end{array}$$

коммутативна. Это соотношение алгебраически двойственно свойству естественности $\cup$ -умножения из § 10.3. Переходя к группам гомологий, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H_{p+q}(X \setminus A) \otimes H^p(X, A) & \xrightarrow{\cap} & H_q(X) \\ \downarrow f_* & \uparrow f^* & \downarrow f_* \\ H_{p+q}(Y \setminus B) \otimes H^p(Y, B) & \xrightarrow{\cap} & H_q(Y) \end{array}$$

(A2) *Естественность по отношению к включениям открытых подмножеств.* Пусть U — открытое подмножество и A — замкнутое подмножество пространства X . Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} C_{p+q}(X, A) \otimes C^p(X, A) & \xrightarrow{\cap} & C_q(X) \\ \downarrow \sigma_1^{\#} & \downarrow f^{\#} & \downarrow \sigma^{\#} \\ C_{p+q}(U, U \cap A) \otimes C^p(U, U \cap A) & \xrightarrow{\cap} & C_q(U) \end{array}$$

коммутативна. Здесь $\sigma_1^{\#}$ и $\sigma^{\#}$ — отображения, двойственные к гомоморфизмам σ_1 и σ , встречающимся в п. (5) из § 10.3. Ком-

мутативность этой диаграммы — следствие коммутативности соответствующей диаграммы в п. (5) из § 10.3. Переходя к гомологиям, получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} H_{p+q}(X \setminus A) \otimes H^p(X, A) & \xrightarrow{\quad} & H_q(X) \\ \downarrow \rho_* & \downarrow i^* & \downarrow \rho \\ H_{p+q}(U \setminus A) \otimes H^p(U, U \cap A) & \xrightarrow{\quad} & H_q(U) \end{array}$$

(A3) *Существование единицы.* Существует единица $1 \in C^0(X; Z)$, такая, что

$$u \cap 1 = u$$

для любого $u \in C_q(X; G)$. Переходя к когомологиям, заключаем, что имеется единица $1 \in H^0(X; Z)$.

(A4) *Связь с граничным оператором.* Пусть B — замкнутое подмножество пространства X и $U = X \setminus B$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} H_{p+q}(U \setminus A) \otimes H^p(U, U \cap A) & \xrightarrow{\quad} & H_q(U) \\ \downarrow \partial & \uparrow i^* & \downarrow (-1)^p \partial \\ & H^p(X, A) & \\ & \downarrow j^* & \\ H_{p+q-1}(B \setminus A) \otimes H^p(B, A \cap B) & \xrightarrow{\quad} & H_{q-1}(B) \end{array}$$

коммутативна. Здесь i и j — соответствующие включения. Это свойство можно выразить равенством

$$\partial(u \cap i^*v) = (-1)^p(\partial u) \cap (j^*v),$$

справедливым для любого $u \in H_{p+q}(U \setminus A)$ и любого $v \in H^p(X, A)$. Его можно сформулировать проще, если воспользоваться определением расширенного $\cap$ -умножения. В этом случае символы i^* и j^* в приведенной формуле можно опустить.

Доказательство этого свойства двойственно доказательству свойства (6b) из § 10.3. Применение функторов $\text{Hom}(\ , G_1)$ и $\text{Hom}(\ , G_1 \otimes G_2)$ к диаграммам коцепных комплексов из доказательства свойства (6b) приводит к соответствующим двойственным диаграммам цепных комплексов. Детали оставляем читателю.

(A5) *Связь с граничным и кограничным операторами.* Это свойство двойственно свойству (6a) из § 10.3. Пусть A и B —

замкнутые подмножества пространства X , тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & & 0 & & \\
 \downarrow & & \uparrow & & \\
 C_{p+q}(A \cup B, A) \otimes C^p(A \cup B, A) & \xrightarrow{\quad} & C_q(A \cup B) & & \\
 \downarrow i_{\#} & & \uparrow i_{\#} & & \downarrow i_{\#} \\
 C_{p+q}(X, A) \otimes C^p(X, A) & \xrightarrow{\quad} & C_q(X) & & \\
 \downarrow i_{\#} & & \uparrow i_{\#} & & \parallel \\
 C_{p+q}(X, A \cup B) \otimes C^p(X, A \cup B) & \xrightarrow{\quad} & C_q(X) & & \\
 \downarrow & & \uparrow & & \\
 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

коммутативна. Эта диаграмма двойственна к диаграмме, встречающейся в обсуждении свойства (6а) из § 10.3. Отсюда вытекает коммутативность следующей диаграммы, включающей соответствующие группы гомологий и когомологий:

$$\begin{array}{ccccc}
 H_{p+q}(X \setminus (A \cup B)) \otimes H^p(X, A \cup B) & \xrightarrow{\quad} & H_q(X) & & \\
 \downarrow \partial & & \uparrow \delta & & \uparrow i_* \\
 H_{p+q+1}(B \setminus A) \otimes H^{p-1}(A \cup B, A) & \xrightarrow{\quad} & H_q(A \cup B) & &
 \end{array}$$

Если $(A \cup B; A, B)$ — вырезаемая триада для когомологий Александера — Спеньера, то, как и в п. (6а) § 10.3, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 H_{p+q}(X \setminus (A \cup B)) \otimes H^p(X, A \cup B) & \xrightarrow{\quad} & H_q(X) & & \\
 \downarrow \partial & & \uparrow \delta & & \uparrow i_* \\
 H_{p+q-1}(B \setminus A) \otimes H^{p-1}(B, A \cap B) & \xrightarrow{\quad} & H_q(B) & &
 \end{array}$$

Это свойство можно сформулировать немного проще, если использовать расширенное $\frown$ -умножение типа А.

(А6) *Двойственность.* Пусть (X, A) — пара локально компактных пространств, $u \in H_{p+q}(X \setminus A_1; G_1)$, $x \in H^p(X, A; G_2)$ и $y \in H_c^q(X; G_3)$. Тогда в обозначениях упр. 3 из § 4.11 справедливо равенство

$$\langle u, x \cup y \rangle = \langle u \cap x, y \rangle \in G_1 \otimes G_2 \otimes G_3.$$

Доказательство несложно.

Теперь мы определим $\frown$ -умножение типа В и докажем его основные свойства. Прежде всего докажем утверждение, сделанное в § 10.4. Напомним, что группу $C_c^{p+q}(X; G_1)$ можно считать подгруппой в $C^{p+q}(X; G_1)$, а группу $C_q^c(X; G_1 \otimes G_2)$ подгруппой в $C_q(X; G_1 \otimes G_2)$. Рассмотрим $\frown$ -умножение типа А

$$\frown: C_{p+q}(X; G_1) \otimes C^p(X; G_2) \rightarrow C_q(X; G_1 \otimes G_2).$$

Требуется доказать, что если $u \in C_{p+q}(X; G_1)$ и $v \in C_c^p(X; G_2)$, то $u \frown v \in C_q^c(X; G_1 \otimes G_2)$.

Доказательство. Легко видеть, что v тогда и только тогда принадлежит подгруппе $C_c^p(X; G_2)$, когда существует замкнутое подмножество A пространства X , такое, что замыкание $X \setminus A$ компактно и $v \in C^p(X, A; G_2)$. Выберем указанное множество A и найдем компактное множество B , внутренность которого содержит замыкание множества $X \setminus A$. Тогда в силу теоремы 8.3 включение $k: (B, A \cap B) \rightarrow (X, A)$ индуцирует изоморфизм коцепей $k^\#: C^p(X, A) \rightarrow C^p(B, A \cap B)$. Аналогично оно индуцирует изоморфизм $k^\#: C_c^{p+q}(X, A) \rightarrow C^{p+q}(B, A \cap B)$. Следовательно, двойственный гомоморфизм $k_\#: C_{p+q}(B, A \cap B) \rightarrow C_{p+q}(X, A)$ также является изоморфизмом. Рассмотрим теперь следующую коммутативную диаграмму, содержащую $\frown$ -умножения типа А:

$$\begin{array}{ccccc} C_{p+q}(X) \otimes C^p(X) & \xrightarrow{\frown} & C_q(X) & & \\ \downarrow I_\# & \uparrow I^\# & \parallel & & \\ C_{p+q}(X, A) \otimes C^p(X, A) & \xrightarrow{\frown} & C_q(X) & & \\ \uparrow k_\# & \downarrow k^\# & \uparrow k_\# & & \\ C_{p+q}(B, B \cap A) \otimes C^p(B, B \cap A) & \xrightarrow{\frown} & C_q(B) & & \end{array}$$

Из этой диаграммы видно, что цепь $u \frown v$ принадлежит подгруппе $k_\#[C_q(B)]$ группы $C_q(X)$. Поскольку B компактно, утверждение доказано.

Таким образом, ограничение $\frown$ -умножения типа А на подгруппу $C_c^p(X)$ определяет $\frown$ -умножение типа В

$$C_{p+q}(X; G_1) \otimes C_c^p(X; G_2) \xrightarrow{\frown} C_q^c(X; G_1 \otimes G_2).$$

Поэтому $\frown$ -умножение типа В удовлетворяет той же самой формуле для границы и кограницы:

$$\partial(u \frown v) = (-1)^p [(\partial u) \frown v - u \frown \partial v].$$

Оно обладает и тем же свойством естественности по отношению к собственным отображениям $f: X \rightarrow Y$, т. е.

$$f_{\#}[u \cap f^{\#}v] = (f_{\#}u) \cap v$$

для любых $u \in C_{p+q}(X)$ и $v \in C_c^p(Y)$.

Далее распространим определение $\cap$ -умножения типа В на некоторые относительные группы цепей и факторгруппы коцепей. Мы осуществим это в два этапа.

Пусть A — замкнутое подмножество пространства X . Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$(7) \quad \begin{array}{ccccc} C_{p+q}(X) \otimes C_c^p(X) & \xrightarrow{\cap} & C_q^c(X) \\ \uparrow i_{\#} & & \downarrow i^{\#} & & \uparrow i_{\#} \\ C_{p+q}(A) \otimes C_c^p(A) & \xrightarrow{\cap} & C_q^c(A) \end{array}$$

Если $u \in C_{p+q}(A)$ и $v \in C_c^p(X)$, то

$$(i_{\#}u) \cap v = i_{\#}(u \cap i^{\#}v),$$

т. е. $(i_{\#}u) \cap v \in \text{Im } i_{\#}$. Поэтому, переходя к факторгруппам, получим $\cap$ -умножение

$$\cap: C_{p+q}(X, A) \otimes C_c^p(X) \rightarrow C_q^c(X, A).$$

Этим завершается первый этап. Чтобы можно было сделать следующий шаг, необходимо для каждого открытого подмножества U пространства X доказать коммутативность диаграммы

$$(8) \quad \begin{array}{ccccc} C_{p+q}(U) \otimes C_c^p(U) & \xrightarrow{\cap} & C_q^c(U) \\ \uparrow \sigma^{\#} & & \downarrow \sigma & & \downarrow i_{\#} \\ C_{p+q}(X) \otimes C_c^p(X) & \xrightarrow{\cap} & C_p^c(X) \end{array}$$

Другими словами, требуется показать, что для любых $u \in C_{p+q}(X)$ и $v \in C_c^p(U)$

$$u \cap \sigma v = i_{\#}[(\sigma^{\#}u) \cap v].$$

К сожалению, при доказательстве этого соотношения, по-видимому, нельзя избежать конструкций, использующих $\cap$ -умножение типа А, с помощью которого было определено $\cap$ -умножение типа В. Для заданного элемента $v \in C_c^p(U)$ выберем такое открытое множество $V \subset U$, что $\bar{V}$ компактно, $\bar{V} \subset U$ и существует элемент $v' \in C^p(U, U \setminus V)$, для которого $j^{\#}v' = v$, где $j^{\#}$ — гомоморфизм $C^p(U, U \setminus V) \rightarrow C^p(U)$. Выберем компактное подмножество $B \subset U$, внутренняя часть которого содержит $\bar{V}$. Тогда

коммутативны следующие диаграммы:

$$\begin{array}{ccc}
 C^P(X) & \xrightarrow{i^\#} & C^P(U) \\
 \uparrow k^\# & & \uparrow j^\# \\
 C^P(X, X \setminus V) & \xrightarrow{e^\#} & C^P(U, U \setminus V) \\
 \searrow m^\# & & \swarrow l^\# \\
 & C^P(B, B \setminus V) &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 C_{p+q}(X) & \xrightarrow{\sigma^\#} & C_{p+q}(U) \\
 \downarrow k_\# & & \downarrow j_\# \\
 C_{p+q}(X, X \setminus V) & \xrightarrow{\sigma_1^\#} & C_{p+q}(U, U \setminus V) \\
 \searrow m_\# & & \swarrow l_\# \\
 & C_{p+q}(B, B \setminus V) &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 C_{p+q}(U) \otimes C^P(U) & \xrightarrow{\cap} & C_q(U) \\
 \downarrow j_\# & & \uparrow j^\# \\
 C_{p+q}(U, U \setminus V) \otimes C^P(U, U \setminus V) & \xrightarrow{\cap} & C_q(U, U \setminus V) \\
 \uparrow l_\# & & \downarrow l^\# \\
 C_{p+q}(B, B \setminus V) \otimes C^P(B, B \setminus V) & \xrightarrow{\cap} & C_q(B)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 C_{p+q}(X) \otimes C^P(X) & \xrightarrow{\cap} & C_q(X) \\
 \downarrow k_\# & & \uparrow k^\# \\
 C_{p+q}(X, X \setminus V) \otimes C^P(X, X \setminus V) & \xrightarrow{\cap} & C_q(X, X \setminus V) \\
 \uparrow m_\# & & \downarrow m^\# \\
 C_{p+q}(B, B \setminus V) \otimes C^P(B, B \setminus V) & \xrightarrow{\cap} & C_q(B)
 \end{array}$$

Все гомоморфизмы в этих диаграммах — либо $\cap$ -умножения, либо отображения, индуцированные включениями. Кроме того, в силу свойства вырезания отображения l , m и e индуцируют изоморфизмы. Заметим также, что для выбранного нами элемента $v' \in C^p(U, U \setminus V)$ выполняется равенство $\sigma v = k^\# e^\#{}^{-1}(v')$. Наконец, $l_{2\#} = l_\# i_{1\#}: C_q(B) \rightarrow C_q^c(X)$. Опираясь на все эти факты, читатель без труда закончит доказательство диаграммным поиском.

Коммутативность диаграммы (8) влечет за собой коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc}
 C_{p+q}(U, U \cap A) \otimes C_c^p(U) & \xrightarrow{\cap} & C_q^c(U, U \cap A) \\
 \uparrow \sigma^\# & & \downarrow \sigma \\
 C_{p+q}(X, A) \otimes C_c^p(X) & \xrightarrow{\cap} & C_q^c(X, A)
 \end{array}
 \quad (9)$$

Действительно, $\cap$ -умножение в диаграмме (9) индуцируется умножением из диаграммы (8) при переходе к факторгруппам.

Из коммутативности диаграммы (9) следует, что $\cap$ -умножение

$$C_{p+q}(X, A) \otimes C_c^p(X) \xrightarrow{\cap} C_q^c(X, A)$$

индуцирует гомоморфизм факторгрупп

$$C_{p+q}(X, A) \otimes \left[\frac{C_c^p(X)}{C_c^p(U)} \right] \xrightarrow{\cap} \frac{C_q^c(X, A)}{C_q^c(U, U \cap A)}$$

(напомним, что отображения σ и $l_{\#}$ в диаграмме (9) являются мономорфизмами). Воспользуемся теперь очевидными включениями

$$C_q^c(U, U \cap A) \subset C_q^c(U \cup A, A) \subset C_q^c(X, A)$$

и тем, что

$$C_q^c(X, A) / C_q^c(U \cup A, A) = C_q^c(X, U \cup A).$$

В результате получаем $\cap$ -умножение

$$(10) \quad C_{p+q}(X, A) \otimes [C_c^p(X) / C_c^p(U)] \xrightarrow{\cap} C_q^c(X, U \cup A).$$

Поскольку это $\cap$ -умножение получено из умножения типа А путем перехода к подгруппам и факторгруппам, оно удовлетворяет все той же формуле для границы и кограницы. Поскольку $H^p(C_c^*(X) / C_c^*(U)) = H_c^p(X \setminus U)$, построенное умножение приводит к гомоморфизму

$$H_{p+q}(X \setminus A; G_1) \otimes H_c^p(X \setminus U; G_2) \rightarrow H_q^c(X, U \cup A; G_1 \otimes G_2).$$

Это — наиболее общая форма $\cap$ -умножения типа В, которая будет рассматриваться нами. Отметим еще раз, что в этом определении X — локально компактное пространство, A — его замкнутое подмножество и U — открытое подмножество.

Перечислим теперь главные свойства $\cap$ -умножения типа В. Как и раньше, мы не останавливаемся на всевозможных соотношениях ассоциативности вида $u \cap (v \cup w) = (u \cap v) \cap w$, поскольку доказательство всех таких соотношений достаточно просто. До конца настоящего параграфа предполагается, что A — замкнутое подмножество локально компактного пространства X и U — открытое подмножество X .

(В1) *Естественность по отношению к собственным отображениям.* Предположим, что $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ — собственное отображение локально компактных пар. Пусть V — открытое под-

множество пространства Y и $U = f^{-1}(V)$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} C_{p+q}(X, A) \otimes C_c^p(X)/C_c^p(U) & \xrightarrow{\sim} & C_q^c(X, U \cup A) \\ \downarrow f_{\#} & & \uparrow f^{\#} & & \downarrow f_{\#} \\ C_{p+q}(Y, B) \otimes C_c^p(Y)/C_c^p(V) & \xrightarrow{\sim} & C_q^c(Y, V \cup B) \end{array}$$

коммутативна. Отсюда вытекает, что коммутативна также следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccc} H_{p+q}(X \setminus A) \otimes H_c^p(X \setminus U) & \xrightarrow{\sim} & H_q^c(X, U \cup A) \\ \downarrow \cdot & & \uparrow f^* & & \downarrow f_* \\ H_{p+q}(Y \setminus B) \otimes H_c^p(Y \setminus V) & \xrightarrow{\sim} & H_q^c(Y, V \cup B) \end{array}$$

(B2) *Естественность по отношению к включениям открытых подмножеств.* Пусть V — произвольное открытое подмножество пространства X . Тогда из коммутативности диаграммы (9) следует, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} C_{p+q}(U, U \cap A) \otimes C_c^p(U)/C_c^p(U \cap V) & \xrightarrow{\sim} & C_q^c(U, U \cap (V \cup A)) \\ \uparrow \sigma^{\#} & & \downarrow \sigma & & \downarrow i_{\#} \\ C_{p+q}(X, A) \otimes C_c^p(X)/C_c^p(V) & \xrightarrow{\sim} & C_q^c(X, V \cup A) \end{array}$$

коммутативна. Переходя к гомологиям, получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} H_{p+q}(U \setminus A) \otimes H_c^p(U \setminus V) & \xrightarrow{\sim} & H_q^c(U, U \cap (V \cup A)) \\ \uparrow \rho & & \downarrow \tau & & \downarrow i_* \\ H_{p+q}(X \setminus A) \otimes H_c^p(X \setminus V) & \xrightarrow{\sim} & H_q^c(X, V \cup A) \end{array}$$

(B3) *Существование единицы.* Если X компактно, то существует единица $1 \in C^0(X; \mathbb{Z})$, такая, что

$$u \cap 1 = u$$

для любого $u \in C_q(X, A; G)$. Из этого следует, что класс когомологий этой единицы является единицей кольца $H^0(X; \mathbb{Z})$ и обладает аналогичными свойствами.

(B4) *Связь с граничным оператором.* Пусть A и B — замкнутые подмножества X и U — открытое подмножество X . Тогда

коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc}
 0 & & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C_{p+q}(A \cup B, B) \otimes \frac{C_c^p(A \cup B)}{C_c^p(U \cap (A \cup B))} & \xrightarrow{\cap} & C_q^c(A \cup B, B \cup (U \cap A)) \xrightarrow{I^\#} C_q^c(U \cup A \cup B, U \cup B) \\
 \downarrow & \uparrow i^\# & \downarrow \\
 C_{p+q}(X, B) \otimes \frac{C_c^p(X)}{C_c^p(U)} & \xrightarrow{\cap} & C_q^c(X, U \cup B) \\
 \downarrow & \parallel & \downarrow \\
 C_{p+q}(X, A \cup B) \otimes \frac{C_c^p(X)}{C_c^p(U)} & \xrightarrow{\cap} & C_q^c(X, U \cup A \cup B) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 0 & & 0
 \end{array}$$

Кроме того, два столбца этой диаграммы — короткие точные последовательности. Переходя к гомологиям, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 H_{p+q}(X \setminus (A \cup B)) \otimes H_c^p(X \setminus U) & \xrightarrow{\cap} & H_q^c(X, U \cup A \cup B) \\
 \downarrow \partial & \downarrow (-1)^p I^* & \downarrow \partial \\
 H_{p+q-1}(A \setminus B) \otimes H_c^p((A \cup B) \setminus U) & \xrightarrow{\cap} & H_{q-1}^c(A \cup B, B \cup (U \cap A)) \xrightarrow{I^\#} H_{q-1}^c(U \cup A \cup B, U \cup B)
 \end{array}$$

Если предположить, что триада $(U \cup A \cup B; A \cup B, U \cup B)$ вырезаема для гомологий с компактными носителями, то предыдущая диаграмма допускает следующее упрощение:

$$\begin{array}{ccc}
 H_{p+q}(X \setminus (A \cup B)) \otimes H_c^p(X \setminus U) & \xrightarrow{\cap} & H_q^c(X, U \cup A \cup B) \\
 \downarrow \partial & \downarrow (-1)^p I^* & \downarrow \partial' \\
 H_{p+q-1}(A \setminus B) \otimes H_c^p((A \cup B) \setminus U) & \xrightarrow{\cap} & H_{q-1}^c(A \cup B, B \cup (U \cap A))
 \end{array}$$

В этой диаграмме ∂' — граничный оператор гомологической последовательности триады $(X; A \cup B, U \cup B)$.

(B5) *Связь с граничным и кограничным операторами.* Рассмотрим диаграмму (8) (см. выше). В этой диаграмме $\sigma: C_c^p(U) \rightarrow C_c^p(X)$ — мономорфизм, коядро которого есть $C_c^p(X)/C_c^p(U)$. Аналогично, $\sigma^\#: C_{p+q}(X; G_1) \rightarrow C_{p+q}(U; G_1)$ — эпиморфизм, ядро которого можно отождествить с группой $\text{Hom}(C_c^{p+q}(X)/C_c^{p+q}(U), G_1)$. Условимся обозначать эту группу короче: $C_{p+q}(X/U; G_1)$. В принятых обозначениях диаграмму (8) можно расширить,

очевидно, до следующей коммутативной диаграммы с двумя точными столбцами:

$$(11) \quad \begin{array}{ccccc} & 0 & & 0 & \\ & \uparrow & & \downarrow & \\ C_{p+q}(U) \otimes C_c^p(U) & \xrightarrow{\quad \cap \quad} & C_q^c(U) & & \\ \uparrow \sigma^\# & & \downarrow \iota_\# & & \\ C_{p+q}(X) \otimes C_c^p(X) & \xrightarrow{\quad \cap \quad} & C_q^c(X) & & \\ \uparrow & & \downarrow & & \\ C_{p+q}(X/U) \otimes C_c^p(X)/C_c^p(U) & \xrightarrow{\quad \cap \quad} & C_q^c(X) & & \\ \uparrow & & \downarrow & & \\ & 0 & & 0 & \end{array}$$

В этой диаграмме $\cap$ -умножение в нижней строке индуцировано $\cap$ -умножением из средней строки. Переходя к гомологиям, получаем коммутативную диаграмму

$$(12) \quad \begin{array}{ccccc} H_{p+q}(U) \otimes H_c^p(U) & \xrightarrow{\quad \cap \quad} & H_q^c(U) & & \\ \downarrow \partial & & \uparrow \delta & & \downarrow \iota_* \\ H_{p+q-1}(X \setminus U) \otimes H_c^{p-1}(X \setminus U) & \xrightarrow{\quad \cap \quad} & H_q^c(X) & & \end{array}$$

$\cap$ -умножение в нижней строке диаграммы (12) индуцировано умножением в нижней строке диаграммы (11). Однако это $\cap$ -умножение не является чем-то новым; оставляем читателю проверить, что оно совпадает с композицией обычного $\cap$ -умножения типа В

$$H_{p+q-1}(X \setminus U) \otimes H_c^{p-1}(X \setminus U) \xrightarrow{\quad \cap \quad} H_q^c(X \setminus U)$$

и гомоморфизма

$$j_*: H_q^c(X \setminus U) \rightarrow H_q^c(X),$$

индуцированного включением. Объединив все эти факты вместе, получаем требуемую формулировку свойства (B5): следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} H_{p+q}(U) \otimes H_c^p(U) & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & H_q^c(U) & \xrightarrow{i_*} & H_q^c(X) \\ \downarrow \partial & & \uparrow \delta & & \\ H_{p+q-1}(X \setminus U) \otimes H_c^{p-1}(X \setminus U) & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & H_q^c(X \setminus U) & \xrightarrow{j_*} & \end{array}$$

коммутативна. Другими словами, если $u \in H_{p+q}(U)$ и $v \in H_c^{p-1}(X \setminus U)$, то

$$i_*(u \cap \delta v) = j_*(\partial u \cap v).$$

Здесь ∂ и δ — соответственно граничный и кограничный операторы пары $(X, X \setminus U)$. Оставляем читателю обобщить это утверждение на случай граничных и кограничных операторов триад и троек.

(B6) *Еще одна связь с граничным и кограничным операторами.* Если мы снова вернемся к диаграмме (9) и окончательному определению $\cap$ -умножения типа B, то увидим, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & & 0 & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ C_{p+q}(U, U \cap A) \otimes C_c^p(U) & \xrightarrow{\cap} & C_q^c(U, U \cap A) & \xrightarrow{i_\#} & C_q^c(U \cup A, A) \\ \uparrow \sigma^\# & & \delta \downarrow & & \downarrow \\ C_{p+q}(X, A) \otimes C_c^p(X) & \xrightarrow{\cap} & C_q^c(X, A) & & \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ C_{p+q}(X, A) \otimes C_c^p(X)/C_c^p(U) & \xrightarrow{\cap} & C_q^c(X, U \cup A) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 \end{array}$$

коммутативна. В ней снова точны две вертикальные последовательности. Переходя к гомологиям, получим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} H_{p+q}(X \setminus A) \otimes H_c^p(X \setminus U) & \xrightarrow{\cap} & H_q^c(X, U \cup A) \\ \downarrow \rho & & \downarrow \delta \\ H_{p+q}(U \setminus A) \otimes H_c^{p+1}(U) & \xrightarrow{\cap} & H_{q-1}^c(U, U \cap A) \xrightarrow{i_\#} H_{q-1}^c(U \cup A, A) \end{array}$$

В этом выводе предполагается, что A — замкнутое подмножество, а U — открытое подмножество локально компактного пространства X . Если, кроме этого, триада $(U \cup A; U, A)$ вырезаема для гомологий с компактными носителями, т. е. $j_*: H_n^c(U, U \cap A) \rightarrow H_n^c(U \cup A, A)$ — изоморфизм, то предыдущую диаграмму можно упростить:

$$\begin{array}{ccc} H_{p+q}(X \setminus A) \otimes H_c^p(X \setminus U) & \xrightarrow{\cap} & H_q^c(X, U \cup A) \\ \downarrow \rho & & \downarrow \delta' \\ H_{p+q}(U \setminus A) \otimes H_c^{p+1}(U) & \xrightarrow{\cap} & H_{q-1}^c(U, U \cap A) \end{array}$$

В этой диаграмме δ' — граничный оператор триады $(X; U, A)$.

(B7) *Еще одно соотношение естественности.* Из коммутативности диаграммы, использованной в доказательстве свойства (B6), вытекает коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} H_{p+q}(X, A) \otimes H_c^p(X) & \longrightarrow & H_q^c(X, A) \\ \parallel & \downarrow i^* & \downarrow j_* \\ H_{p+q}(X, A) \otimes H_c^p(X \setminus U) & \longrightarrow & H_q^c(X, U \cup A) \end{array}$$

(B8) *Двойственность.* Пусть (X, A) — локально компактная пара, $u \in H_{p+q}(X \setminus A; G_1)$, $x \in H_c^p(X; G_2)$ и $y \in H^q(X, A; G_3)$. Тогда

$$\langle u, x \cup y \rangle = \langle u \cap x, y \rangle.$$

Левая часть $\langle u, x \cup y \rangle$ этого равенства определена в упр. 3 к § 4.11, а правая $\langle u \cap x, y \rangle$ — в упр. 3 из § 9.2. Доказательство оставляем читателю.

Гомологии и когомологии многообразий

§ 11.1. Введение

Основной результат этой главы — знаменитая теорема двойственности Пуанкаре. Эта теорема утверждает, что q -мерная группа гомологий ориентируемого n -мерного многообразия изоморфна группе когомологий размерности $n - q$ (с коэффициентами в любой абелевой группе). Более точно, q -мерная группа гомологий с компактными носителями изоморфна $(n - q)$ -мерной группе когомологий с компактными носителями; аналогичное утверждение справедливо для групп гомологий и когомологий с произвольными носителями. Таким образом, в действительности будут доказаны две отдельные теоремы. В обоих случаях изоморфизм устанавливается с помощью $\cap$ -умножения на так называемый фундаментальный класс гомологий многообразия. Многообразия не предполагаются ни триангулируемыми, ни гладкими. В случае компактных многообразий обе теоремы совпадают, однако и в этом случае в доказательстве приходится рассматривать некомпактные многообразия.

Мы также рассмотрим варианты теоремы двойственности Пуанкаре для многообразий с краем; соответствующие утверждения иногда называют двойственностью Лефшеца.

В § 11.5—§ 11.7 обсуждаются различные следствия двойственности Пуанкаре. Возможно, наиболее важное из них — знаменитая теорема двойственности Александера, которая утверждает, что в n -мерном евклидовом пространстве (или в n -мерной сфере) q -мерная группа когомологий любого замкнутого подпространства изоморфна группе $(n - q - 1)$ -мерных гомологий с компактными носителями его дополнения. Мы докажем также принадлежащее К. А. Ситникову обобщение этой теоремы. Теорема двойственности Ситникова применима к произвольным подмножествам n -мерной сферы, не обязательно открытым или замкнутым.

В настоящей главе, если четко не оговорено противное, используются обозначения, введенные в § 10.1.

§ 11.2. Некоторые основные определения

Напомним, что в § 3.6 мы определили n -мерное многообразие как хаусдорфово пространство, каждая точка которого имеет открытую окрестность, гомеоморфную пространству $\mathbb{R}^n$. Аналогич-

ным образом определяется n -мерное многообразие с краем — это хаусдорфово пространство, каждая точка которого обладает открытой окрестностью, гомеоморфной либо пространству $\mathbb{R}^n$, либо замкнутому полупространству $\mathbb{R}_+^n$, где

$$\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}.$$

Легко видеть, что это определение допускает следующее усиление: каждая точка p имеет такую открытую окрестность N , что либо существует гомеоморфизм h окрестности N на $\mathbb{R}^n$, либо существует гомеоморфизм h окрестности N на $\mathbb{R}_+^n$, при котором точка $h(p)$ принадлежит подпространству в $\mathbb{R}_+^n$, определяемому условием $x_1 = 0$. Оставляем читателю проверить, что оба определения эквивалентны.

Используя определенные в § 9.7 локальные группы гомологий, читатель может убедиться в том, что два типа точек, фигурирующих в усиленной форме определения, различны. Множество точек, имеющих открытые окрестности типа $\mathbb{R}^n$, называется *внутренностью* многообразия с краем. Множество всех точек второго типа называется *краем* многообразия. Значение термина «внутренность» отличается от значения этого термина в теоретико-множественной топологии, однако это не приведет к недоразумениям. Ясно, что внутренность — это обычное n -мерное многообразие (определенное в гл. 3), в то время как край — это $(n - 1)$ -мерное многообразие (без края). Край многообразия — *замкнутое* подмножество, а внутренность — *открытое* плотное подмножество.

Простые примеры показывают, что многообразие с краем может быть компактным или некомпактным, связным или несвязным. Однако оно всегда локально компактно и локально связно. Многообразие с краем называется ориентируемым или неориентируемым в соответствии с тем, является или не является ориентированной его внутренность (см. определение в гл. 3). Заметим, что многообразие с краем тогда и только тогда связно, когда связна его внутренность.

Упражнения

1. Докажите, что любое n -мерное многообразие с краем можно вложить в качестве замкнутого подмножества в некоторое n -мерное многообразие без края. (Указание. Возьмите две копии заданного многообразия и отождествите соответствующие точки краев.)

2. Пусть M есть n -мерное многообразие с краем. Докажите, что $H_q^{\mathbb{Z}}(M) = 0$ для всех $q \geq n$. (Указание. Используйте предыдущие упр. и упр. 1 из § 3.6.)

3. Докажите, что каждая компонента края связного ориентируемого n -многообразия является *ориентируемым* $(n-1)$ -многообразием. (Указание. Сначала рассмотрите случай связного края. Воспользуйтесь кохомологической последовательностью пары для кохомологий с компактными носителями, результатами § 3.6 и упр. 2.)

4. Покажите на примерах, что край неориентируемого n -многообразия может быть как ориентируемым, так и неориентируемым.

В заключение приведем следующую теорему, связывающую свойство паракомпактности многообразия с различными другими свойствами.

11.1. Теорема. *Для всякого многообразия M (с краем или без края) следующие четыре условия эквивалентны:*

- (1) *многообразие M паракомпактно;*
- (2) *каждая компонента многообразия M имеет счетный базис открытых множеств;*
- (3) *многообразие M метризуемо;*
- (4) *каждая компонента многообразия M — объединение счетной системы компактных подмножеств.*

Доказательство этой теоремы см. в книге Спивака [54, стр. А-1]. В доказательстве используются общие теоремы ретико-множественной топологии. В действительности Спивак формулирует теорему для многообразий без края, однако его доказательство без изменений проходит и для многообразий с краем. Примеры непаракомпактных многообразий см. в [54, стр. А-3 — А-20]. Эти примеры показывают, что непаракомпактное многообразие может являться или не являться нормальным пространством.

§ 11.3. Формулировка различных вариантов теоремы двойственности Пуанкаре

Пусть M — связное ориентируемое n -мерное многообразие (без края). В § 4.9 мы выяснили, что $H_n(M; \mathbb{Z})$ — бесконечная циклическая группа. Таким образом, в этой группе имеется два образующих элемента. *Ориентированное* многообразие — это пара, состоящая из ориентируемого многообразия и выбранного образующего группы $H_n(M; \mathbb{Z})$. Выбранный образующий называется *фундаментальным классом гомологий* ориентированного многообразия M и обозначается через μ_M или просто через μ (для краткости).

Легко распространить эти понятия на несвязные многообразия. Пусть каждая компонента многообразия M ориентируема. В этом случае будем говорить, что многообразие *ориентировано*, если каждая компонента M — ориентированное многообразие. Фундаментальный класс гомологий — это элемент группы $H_n(M; \mathbb{Z})$, соответствующий сумме фундаментальных классов различных компонент (эта «сумма» может быть бесконечной).

Упражнение

Пусть m — число компонент ориентируемого n -мерного многообразия M . Сколькими способами можно выбрать фундаментальный класс многообразия M ?

Многообразие с краем ориентируемо тогда и только тогда, когда его внутренность — ориентируемое многообразие, и его фундаментальный класс (по определению) — это фундаментальный класс гомологий внутренности¹⁾.

Теперь мы можем сформулировать различные варианты теоремы двойственности Пуанкаре.

11.2. Теорема. (Двойственность Пуанкаре для многообразия без края для гомологий и когомологий с компактными носителями.) Пусть M — ориентированное n -мерное многообразие без края. Тогда для любой абелевой группы G и любого q отображение $H_c^q(M; G) \rightarrow H_{n-q}^c(M; G)$, определенное соответствием $x \rightarrow \mu_M \cap x$, является изоморфизмом.

11.3. Теорема. (Двойственность Пуанкаре для многообразия с краем; гомологии и когомологии с компактными носителями.) Пусть M — ориентированное n -мерное многообразие с краем B . Тогда гомоморфизмы $H_c^q(M; G) \rightarrow H_{n-q}^c(M, B; G)$ и $H_c^q(M \setminus B; G) \rightarrow H_{n-q}^c(M; G)$, определенные соответствиями $x \rightarrow \mu \cap x$ и $y \rightarrow i_*(\mu \cap y)$, являются изоморфизмами (здесь $i_*: H_{n-q}^c(M \setminus B) \rightarrow H_{n-q}^c(M)$ — гомоморфизм, индуцированный включением).

Заметим, что в теоремах 11.2 и 11.3 участвует $\cap$ -умножение типа B (см. § 10.5).

11.4. Теорема. (Двойственность Пуанкаре для многообразия без края; гомологии и когомологии с произвольными носителями.) Пусть M — паракомпактное ориентированное n -многообразие без края. Тогда гомоморфизм $H^q(M; G) \rightarrow H_{n-q}(M; G)$, определенный соответствием $x \rightarrow \mu \cap x$, является изоморфизмом.

¹⁾ Для любого многообразия M с краем ∂M имеет место изоморфизм $H_n(M \setminus \partial M) = H_n(M, \partial M)$, поэтому это определение совпадает с обычным. — Прим. перев.

11.5. Теорема. (Двойственность Пуанкаре для многообразия с краем; гомологии и когомологии с произвольными носителями.) Пусть M — паракомпактное ориентированное n -многообразие с краем B . Тогда гомоморфизмы $H^q(M, B; G) \rightarrow H_{n-q}(M; G)$ и $H^q(M; G) \rightarrow H_{n-q}(M \setminus B; G)$, определенные соответствиями $x \rightarrow \mu \cap x$ и $y \rightarrow \mu \cap (i^*y)$, являются изоморфизмами (здесь $i^*: H^q(M) \rightarrow H^q(M \setminus B)$ — гомоморфизм, индуцированный включением).

В теоремах 11.4 и 11.5 участвует $\cap$ -умножение типа A (см. § 10.5).

Все четыре теоремы справедливы только для ориентируемых многообразий. Как отмечалось в теореме 4.21, для неориентируемого n -многообразия $H_n(M; \mathbb{Z}) = 0$, поэтому нельзя надеяться на то, что для таких многообразий эти теоремы останутся верными¹⁾. Однако имеется слабая форма двойственности Пуанкаре для гомологий и когомологий по $\text{mod } 2$, справедливая как для ориентируемых, так и для неориентируемых многообразий. Прежде всего заметим, что для любого связного n -многообразия M (ориентируемого или нет) $H_n(M; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$. Это следует из результатов § 3.6 и теоремы об универсальных коэффициентах из § 4.8. Единственный ненулевой элемент группы $H_n(M; \mathbb{Z}_2)$ назовем *фундаментальным классом по модулю 2 многообразия M* и обозначим через μ_M или для краткости — через μ . В более общей форме если M — несвязное n -многообразие, то его фундаментальный класс по модулю 2 — это элемент группы $H_n(M; \mathbb{Z}_2)$, являющийся «суммой» фундаментальных классов по модулю 2 различных компонент. Для многообразия M с краем фундаментальный класс по модулю 2 определяется как фундаментальный класс по модулю 2 внутренности M .

Теоремы 11.2—11.5 остаются справедливыми без предположения ориентируемости, если под элементом μ понимать фундаментальный класс по модулю 2, а в качестве группы G рассматривать любое векторное пространство над полем $\mathbb{Z}_2$. В этих предположениях существует естественный изоморфизм $\mathbb{Z}_2 \otimes G \cong G$, который используется во всех $\cap$ -умножениях, встречающихся в теоремах. На деле наиболее важным является случай $G = \mathbb{Z}_2$.

§ 11.4. Доказательство различных вариантов теоремы двойственности Пуанкаре

Докажем сначала теорему 11.2. Доказательство состоит в обсуждении различных частных случаев, начиная со случая $M = S^n$ и заканчивая общим случаем. В доказательстве часто ис-

¹⁾ См. по этому поводу добавление к настоящей главе. — *Прим. ред.*

пользуются свойства $\cap$ -умножений типа А и В, перечисленные в § 10.5. Всякий раз, когда мы ссылаемся на свойство (А3) или свойство (В4), это означает, что имеются в виду свойства (А3) и (В4) из § 10.5. При доказательстве всех четырех теорем часто используется (обычно без явного упоминания) следующая лемма.

11.6. Лемма. Пусть M — ориентируемое n -многообразие и U — его непустое открытое подмножество. Тогда $\rho_{M,U}(\mu_M)$ — фундаментальный класс гомологий соответствующим образом ориентированного многообразия U .

Доказательство простое. Сначала следует рассмотреть случай, в котором оба многообразия M и U связны, и воспользоваться теоремой 4.20. Из этого частного случая легко вытекает общее утверждение.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 11.2.

Случай 1, $M = S^n$. В этом случае достаточно проверить, что гомоморфизмы $H^n(S^n; G) \rightarrow H_0(S^n; G)$ и $H^0(S^n; G) \rightarrow H_n(S^n; G)$, определенные соответствиями $x \rightarrow \mu \cap x$, являются изоморфизмами. Поскольку S^n — компактное пространство, $\cap$ -умножение типа В совпадает с $\cap$ -умножением, определенным в § 7.9. Требуемый результат — простое следствие свойства (6) из § 7.9.

Случай 2, $M = \mathbb{R}^n$. В этом случае достаточно доказать, что гомоморфизм $H_c^n(\mathbb{R}^n, G) \rightarrow H_0^n(\mathbb{R}^n; G)$, определенный соответствием $x \rightarrow \mu \cap x$, является изоморфизмом. Сферу S^n можно рассматривать как одноточечную компактификацию пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда, согласно свойству (В2), диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} H_n(\mathbb{R}^n) \otimes H_c^n(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\cap} & H_0^n(\mathbb{R}^n) \\ \uparrow \circ & & \downarrow \tau & & \downarrow \iota_* \\ H_n(S^n) \otimes H^n(S^n) & \xrightarrow{\cap} & H_0(S^n) \end{array}$$

коммутативна. Поскольку все гомоморфизмы, обозначенные вертикальными стрелками, являются изоморфизмами, требуемый результат — следствие случая 1.

Случай 3, в котором $M = U \cup V$, где U и V — открытые подмножества, и предполагается, что теорема 11.2 справедлива для U , V и $U \cap V$. Справедливость теоремы 11.2 для многообразия M доказывается с помощью последовательности Майера — Вьеториса и леммы о пяти гомоморфизмах. Рассмотрим следующую диаграмму, включающую последовательности Майера — Вьеториса для гомологий и когомологий с компактными носителями:

$$\begin{array}{ccccccc} H_c^p(U \cap V) & \rightarrow & H_c^p(U) \oplus H_c^p(V) & \xrightarrow{\quad} & H_c^p(M) & \xrightarrow{\Delta} & H_c^{p+1}(U \cap V) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{n-p}^c(U \cap V) & \rightarrow & H_{n-p}^c(U) \oplus H_{n-p}^c(V) & \rightarrow & H_{n-p}^c(M) & \xrightarrow{\Delta} & H_{n-p-1}^c(U \cap V) \end{array}$$

Гомоморфизмы, обозначенные вертикальными стрелками, — это $\cap$ -умножения на фундаментальные классы соответствующих многообразий (ср. лемму 11.6). Мы утверждаем, что *каждый квадрат этой диаграммы коммутативен*. Коммутативность квадратов с номерами 1 и 2 следует из свойства (B2) $\cap$ -умножения и определения соответствующих гомоморфизмов в последовательностях Майера — Вьеториса. Для доказательства коммутативности квадрата с номером 3 с точностью до знака расширим этот квадрат, используя определение гомоморфизмов Δ в двух последовательностях Майера — Вьеториса, до следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_c^p(M) & \xrightarrow{i_*} & H_c^p(M \setminus V) & \xleftarrow{\quad} & H_c^p(U \setminus (U \cap V)) & \xrightarrow{\delta} & H_c^{p+1}(U \cap V) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 H_{n-p}^c(M) & \xrightarrow{j_*} & H_{n-p}^c(M, V) & \xleftarrow{\varphi_*} & H_{n-p}^c(U, U \cap V) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-p-1}(U \cap V)
 \end{array}$$

Коммутативность квадратов с номерами 4, 5 и 6 следует из свойств (B7), (B2) и (B6) соответственно.

Справедливость теоремы 11.2 в рассматриваемом случае вытекает теперь из леммы о пяти гомоморфизмах (лемма 1.9).

Случай 4. Предположим, что M — объединение семейства $\{U_\alpha\}$ вложенных друг в друга открытых подмножеств U_α и теорема 11.2 справедлива для каждого U_α . Тогда теорема 11.2 справедлива для многообразия M . Доказательство: в этом случае $H_c^p(M)$ — прямой предел групп $H_c^p(U_\alpha)$ и $H_{n-p}^c(M)$ — прямой предел групп $H_{n-p}^c(U_\alpha)$. Для когомологий этот факт — простое следствие свойства (6) из § 1.3, а для гомологий — следствие определения групп гомологий с компактными носителями. Кроме того, если $U_\alpha \subset U_\beta$, то в силу свойства (B2) диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 H_c^p(U_\alpha) & \xrightarrow{\tau} & H_c^p(U_\beta) & \xrightarrow{\tau} & H_c^p(M) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 H_{n-p}^c(U_\alpha) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-p}^c(U_\beta) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-p}^c(M)
 \end{array}$$

коммутативна. Вертикальными стрелками обозначены $\cap$ -умножения на фундаментальный класс. Из этих фактов легко получить требуемое доказательство.

Случай 5. M — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Для доказательства теоремы 11.2 в этом случае рассмотрим последовательность открытых *выпуклых* множеств $U_1, U_2, U_3, \dots$, объединение которых совпадает с M . Согласно случаю 2, теорема справедлива для каждого U_i . Далее используем случай 3 и очевидную индукцию, чтобы показать справедливость теоремы для каждого конечного объединения $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$. Возможность применить индукцию обеспечивается тем, что любое пересечение выпуклых множеств — выпуклое множество. Наконец,

следует воспользоваться случаем 4 для перехода к прямому пределу при $n \rightarrow \infty$.

Случай 6, общий случай. Вместе с леммой Цорна случай 4 обеспечивает существование максимального открытого подмножества $U \subset M$, для которого справедлива теорема 11.2. Если $U \neq M$, пусть V — такое открытое подмножество многообразия M , что V гомеоморфно открытому подмножеству пространства $\mathbb{R}^n$ и не содержится в U . Используя случаи 3 и 5, можно доказать справедливость теоремы 11.2 для многообразия $U \cup V$, что противоречит максимальнойности множества U . Следовательно, $U = M$.

Этим завершается доказательство теоремы 11.2. Докажем теперь теорему 11.3. Первый шаг в доказательстве — следующая лемма, представляющая также некоторый самостоятельный интерес.

11.7. Лемма. Пусть M есть n -многообразие с краем B . Тогда гомоморфизм $i_*: H_q^c(M \setminus B) \rightarrow H_q^c(M)$, индуцированный включением, является изоморфизмом.

Доказательство этой леммы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 11.2, хотя каждый отдельный шаг проще.

Случай 1, край B пуст. В этом случае нечего доказывать.

Случай 2, $M = \mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$. В этом случае включение $M \setminus B \rightarrow M$ — гомотопическая эквивалентность.

Случай 3, в котором $M = U \cup V$, где U и V — открытые подмножества, и предполагается, что лемма справедлива для U , V и $U \cap V$. Доказательство проводится с помощью двух последовательностей Майера — Вьеториса и леммы о пяти гомоморфизмах.

Случай 4, в котором M — объединение семейства вложенных друг в друга открытых множеств U_α и лемма справедлива для каждого U_α . Доказательство следует из свойств прямого предела.

Случай 5, в котором M — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}_+^n$. Доказательство аналогично доказательству случая 5 теоремы 11.2.

Случай 6, общий случай. Этот случай аналогичен случаю 6 теоремы 11.2.

Из теоремы 11.2 и леммы 11.7 вытекает, что композиция гомоморфизмов $H_c^p(M \setminus B) \xrightarrow{\mu \cap} H_{n-p}^c(M \setminus B)$ и $i_*: H_{n-p}^c(M \setminus B) \rightarrow H_{n-p}^c(M)$ — изоморфизм. Этим доказано второе утверждение теоремы 11.3. Первое утверждение устанавливается с помощью следующей леммы.

11.8. Лемма. Пусть M — ориентированное многообразие с краем B . Тогда $\partial(\mu_M)$ — фундаментальный класс гомологий многообразия B , где $\partial: H_n(M \setminus B; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-1}(B; \mathbb{Z})$ — граничный оператор гомологической последовательности пары (M, B) .

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда оба многообразия M и B связны. Имеем отрезок когомологической последовательности пары (M, B)

$$H_c^{n-1}(B; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H_c^n(M \setminus B; \mathbb{Z}) \rightarrow H_c^n(M; \mathbb{Z}).$$

Так как $H_c^n(M; \mathbb{Z}) = 0$ (ср. упражнение 2 из § 11.2), $H_c^n(M \setminus B)$ — бесконечная циклическая группа и $H_c^{n-1}(B)$ — циклическая группа, то δ — изоморфизм. Поэтому двойственный к δ гомоморфизм $\partial: H_n(M \setminus B; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-1}(B; \mathbb{Z})$ также является изоморфизмом. Отсюда легко вытекает утверждение в общем случае.

Для завершения доказательства теоремы 11.3 рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow H_c^p(M \setminus B) & \xrightarrow{\tau} & H_c^p(M) & \xrightarrow{k_*} & H_c^p(B) & \xrightarrow{\delta} & H_c^{p+1}(M \setminus B) \rightarrow \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi & & \downarrow \eta & & \downarrow \varphi \\ \rightarrow H_{n-p}^c(M) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-p}^c(M, B) & \xrightarrow{\partial'} & H_{n-p-1}^c(B) & \xrightarrow{k_*} & H_{n-p-1}^c(M) \rightarrow \end{array}$$

Обе строки диаграммы точны. Гомоморфизмы φ , ψ и η определяются следующим образом:

$$\varphi(u) = i_*(\mu \cap u), \quad u \in H_c^p(M \setminus B),$$

$$\psi(v) = \mu \cap v, \quad v \in H_c^p(M),$$

$$\eta(w) = (\partial\mu) \cap w, \quad w \in H_c^p(B),$$

где $\mu \in H_n(M \setminus B)$, а символы δ и i_* имеют то же значение, что и выше. Левый квадрат рассматриваемой диаграммы коммутативен в силу свойства (B2), средний квадрат коммутативен (с точностью до знака) по свойству (B4). Коммутативность правого квадрата вытекает из свойства (B5). Мы уже доказали, что φ и η — изоморфизмы, поэтому в силу леммы о пяти гомоморфизмах ψ — также изоморфизм.

Доказательство теоремы 11.3 закончено. Коммутативность диаграммы, включающей изоморфизмы φ , ψ и η , представляет самостоятельный интерес, и это утверждение, возможно, заслуживает названия теоремы.

Докажем теперь теорему 11.4. Схема доказательства такая же, как в теореме 11.2, хотя и имеются отличия в деталях.

Случай 1, $M = \mathbb{R}^n$. Требуется доказать, что гомоморфизм $H^0(\mathbb{R}^n; G) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n; G)$, определенный соответствием $x \rightarrow \mu \cap x$,

является изоморфизмом. Рассматривая сферу S^n как одноточечную компактификацию пространства $\mathbb{R}^n$, получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H_n(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) \otimes H^0(\mathbb{R}^n; G) & \xrightarrow{\quad \cap \quad} & H_n(\mathbb{R}^n; G) \\ \uparrow \rho & & \uparrow \iota^* & & \uparrow \rho \\ H_n(S^n; \mathbb{Z}) \otimes H^0(S^n; G) & \xrightarrow{\quad \cap \quad} & H_n(S^n; G). \end{array}$$

Ее коммутативность обеспечивается свойством (A2). В доказательстве случая 1 теоремы 11.2 мы установили, что нижняя горизонтальная строка диаграммы — изоморфизм. Поскольку все три вертикальных отображения — изоморфизмы, верхняя горизонтальная строка диаграммы — также изоморфизм, что и требовалось.

Случай 2, в котором $M = U \cup V$, где U и V — открытые подмножества, и предполагается, что теорема 11.4 верна для U , V и $V \cup V$. В доказательстве снова используются две последовательности Майера — Вьеториса и лемма о пяти гомоморфизмах.

Рассмотрим следующую диаграмму, включающую когомологическую и гомологическую последовательности Майера — Вьеториса:

$$(1) \quad \begin{array}{ccccccc} H^q(M) & \longrightarrow & H^q(U) \oplus H^q(V) & \longrightarrow & H^q(U \cap V) & \xrightarrow{\Delta} & H^{q+1}(M) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{n-q}(M) & \longrightarrow & H_{n-q}(U) \oplus H_{n-q}(V) & \longrightarrow & H_{n-q}(U \cap V) & \xrightarrow{\Delta} & H_{n-q-1}(M) \end{array}$$

Вертикальными стрелками обозначены $\cap$ -умножения на соответствующий фундаментальный класс. Мы утверждаем, что *эта диаграмма коммутативна*. Для доказательства необходимо вернуться к определяющим последовательностям Майера — Вьеториса коротким точным последовательностям коцепей и цепей. Более точно, мы докажем коммутативность следующей диаграммы, включающей две короткие точные последовательности:

$$(2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow C^q(M) & \longrightarrow & C^q(U) \oplus C^q(V) & \longrightarrow & C^q(U \cap V) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi & & \downarrow \eta & & \\ 0 \rightarrow C_{n-q}(M) & \xrightarrow{\beta^\#} & C_{n-q}(U) \oplus C_{n-q}(V) & \xrightarrow{\alpha^\#} & C_{n-q}(U \cap V) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Короткая точная последовательность в верхней строке диаграммы обсуждалась нами в § 8.6 (заметим, что приведенные там рассуждения применимы к настоящему случаю, поскольку рассматриваемые нами паракомпактные многообразия являются *нормальными* пространствами).

Обсудим теперь последовательность в нижней строке диаграммы и докажем ее точность. Для этого рассмотрим следующую

щую коммутативную диаграмму групп целочисленных коцепей:

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} C_c^p(U \cap V) & \xrightarrow{\sigma_1} & C_c^p(U) \\ \downarrow \sigma_3 & & \downarrow \sigma_2 \\ C_c^p(V) & \xrightarrow{\sigma_4} & C_c^p(M) \end{array}$$

Все отображения в диаграмме — мономорфизмы. Это приводит к последовательности групп и гомоморфизмов

$$(4) \quad 0 \rightarrow C_c^p(U \cap V) \xrightarrow{\alpha} C_c^p(U) \oplus C_c^p(V) \xrightarrow{\beta} C_c^p(M) \rightarrow 0,$$

в которой $\alpha(u) = (\sigma_1 u, -\sigma_3 u)$ и $\beta(u, v) = \sigma_2 u + \sigma_4 v$. Мы утверждаем, что эта последовательность точна. Очевидно, что α — мономорфизм и $\beta\alpha = 0$. Легко видеть также, что $\text{Ker } \beta$ содержится в $\text{Im } \alpha$. Таким образом, единственное трудное место — доказательство эпиморфности отображения β . Для доказательства выберем такие открытые множества U_0 и V_0 , что $M = U_0 \cup V_0$, $\bar{U}_0 \subset U$ и $\bar{V}_0 \subset V$. Это возможно в силу нормальности пространства M . Выберем на многообразии M функции h_1 и h_2 , принимающие значения 0 или 1 и обладающие следующими тремя свойствами:

$$\begin{aligned} h_1 + h_2 &= 1, \\ h_1(x) &= 0, \text{ если } x \notin U_0, \\ h_2(x) &= 0, \text{ если } x \notin V_0. \end{aligned}$$

Функции h_1 и h_2 можно рассматривать как элементы группы $\Phi^0(M; \mathbb{Z})$. Для заданного элемента $u \in C_c^p(M)$ выберем представитель $\varphi \in \Phi_c^p(M)$ класса u . Пусть

$$\varphi_1 = h_1 \cup \varphi, \quad \varphi_2 = h_2 \cup \varphi.$$

Тогда $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $|\varphi_1| \subset \bar{U}_0 \subset U$, $|\varphi_2| \subset \bar{V}_0 \subset V$, причем $|\varphi_1|$ и $|\varphi_2|$ — компактные множества, поскольку множество $|\varphi|$ компактно. Пусть $u_1, u_2 \in C_c^p(M)$ — классы, содержащие соответственно φ_1 и φ_2 . Очевидно, что существуют такие коцепи $v_1 \in C_c^p(U)$ и $v_2 \in C_c^p(V)$, что $\sigma_2(v_1) = u_1$ и $\sigma_4(v_2) = u_2$. Следовательно, $\beta(v_1, v_2) = u$, что и требовалось. Таким образом, последовательность (3) точна. Эта последовательность состоит из свободных абелевых групп, поэтому она — точная расщепляющаяся последовательность. Применяя к ней функтор $\text{Hom}(\_, G)$, получим короткую точную последовательность из нижней строки диаграммы (2).

Остается объяснить гомоморфизмы, обозначенные в диаграмме (2) вертикальными стрелками. Рассмотрим следующую диа-

грамму, двойственную диаграмме (3):

$$\begin{array}{ccc} C_n(U \cap V; Z) & \xleftarrow{\sigma_1^\#} & C_n(U; Z) \\ \uparrow \sigma_3^\# & & \uparrow \sigma_2^\# \\ C_n(V; Z) & \xleftarrow{\sigma_4^\#} & C_n(M; Z) \end{array}$$

Выберем цикл $m \in C_n(M; Z)$, представляющий фундаментальный класс $\mu \in H_n(M; Z)$. Пусть $u = \sigma_2^\#(m) \in C_n(U; Z)$, $v = \sigma_4^\#m \in C_n(V; Z)$ и $w = \sigma_1^\#u = \sigma_3^\#v \in C_n(U \cap V; Z)$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= m \cap x, \quad x \in C^q(M; G), \\ \psi(x, y) &= (u \cap x, v \cap y), \quad x \in C^q(U; G), \quad y \in C^q(V; G), \\ \eta(x) &= w \cap x, \quad x \in C^q(U \cap V; G). \end{aligned}$$

Коммутативность диаграммы (2) — непосредственное следствие свойства (A2) $\cap$ -умножения. Поскольку m , u , v и w — циклы, φ , ψ и η — цепные отображения, т. е. они коммутируют с граничным и кограничным операторами¹⁾. Переходя к гомологиям и когомологиям, получаем коммутативную диаграмму (1). Таким образом, справедливость теоремы 11.4 в случае 2 вытекает теперь из леммы о пяти гомоморфизмах.

Случай 3. Предположим, что $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, где $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \dots$ — последовательность вложенных друг в друга открытых подмножеств, имеющих компактные замыкания $\bar{U}_i$. Если теорема 11.4 верна для каждого U_i , то она справедлива и для M .

Доказательство. В силу теоремы 4.22 существует естественная короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow \varprojlim^1 H_{n-q+1}(U_i) \rightarrow H_{n-q}(M) \rightarrow \varprojlim H_{n-q}(U_i) \rightarrow 0.$$

Покажем, что аналогичная короткая точная последовательность существует для когомологий Александера — Спеньера.

11.9. Лемма. Пусть $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ — объединение последовательности вложенных друг в друга открытых подмножеств U_i , таких, что для любого i существует целое число $j > i$, для которого

¹⁾ Указанные отображения коммутируют с граничным и кограничным операторами с точностью до знака. — Прим. перев.

граница множества U_i содержится в U_i . Тогда имеется естественная короткая точная последовательность¹⁾

$$0 \rightarrow \varprojlim^1 H^{q-1}(U_i) \rightarrow H^q(X) \rightarrow \varprojlim H^q(U_i) \rightarrow 0.$$

Замечание. Эти предположения автоматически выполняются, если границы множеств U_i компактны, в частности, если каждое множество U_i компактно.

Доказательство леммы 11.9. По определению $C^p(U_i) = \Phi_L^p(U_i)/\Phi_{0L}^p(U_i)$ (значение символов Φ_L^p и Φ_{0L}^p определено в § 8.2). Из предположений, сделанных относительно границы каждого множества U_i , следует, что обратная последовательность абелевых групп $\{\Phi_{0L}^p(U_i)\}$ удовлетворяет условию Миттаг-Леффлера (ср. § A.4 приложения). Поэтому точна последовательность

$$0 \rightarrow \varprojlim \Phi_{0L}^p(U_i) \rightarrow \varprojlim \Phi_L^p(U_i) \rightarrow \varprojlim C^p(U_i) \rightarrow 0.$$

Далее легко проверить, что естественные гомоморфизмы

$$\Phi_L^p(X) \rightarrow \varprojlim \Phi_L^p(U_i)$$

и

$$\Phi_{0L}^p(X) \rightarrow \varprojlim \Phi_{0L}^p(U_i)$$

являются изоморфизмами. Отсюда следует, что естественное отображение

$$C^p(X) \rightarrow \varprojlim C^p(U_i)$$

— также изоморфизм.

Заметим, что обратная система $\{\Phi_L^p(U_i)\}$ также удовлетворяет условию Миттаг-Леффлера. Это следует из предположений, сделанных относительно границ множеств U_i . Поэтому $\varprojlim^1 C^p(U_i) = 0$. Теперь мы можем закончить доказательство леммы 11.9, применив теорему A.19 приложения.

Продолжим доказательство случая 3. Согласно свойству (A2), для каждого i диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} H^q(U_i) & \xleftarrow{I^*} & H^q(U_{i+1}) & \xleftarrow{I^*} & H^q(M) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{n-q}(U_i) & \xleftarrow{p} & H_{n-q}(U_{i+1}) & \xleftarrow{p} & H_{n-q}(M) \end{array}$$

¹⁾ Такая точная последовательность существует для любой последовательности вложенных друг в друга открытых множеств U_i паракомпактного пространства $X = \bigcup_i U_i$ (А. Э. Харлап [14*], утверждение (1) теоремы 1). —

коммутативна. Вертикальными стрелками обозначены $\cap$ -умножения на соответствующий фундаментальный класс гомологий. Отсюда вытекает коммутативность следующей диаграммы, содержащей две короткие точные последовательности:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \varprojlim^1 H^{q-1}(U_i) & \rightarrow & H^q(M) & \rightarrow & \varprojlim H^q(U_i) & \rightarrow & 0 \\ & \downarrow 1 & & & \downarrow 2 & & \downarrow 3 \\ 0 \rightarrow \varprojlim^1 H_{n-q+1}(U_i) & \rightarrow & H_{n-q}(M) & \rightarrow & \varprojlim H_{n-q}(U_i) & \rightarrow & 0. \end{array}$$

Из сделанных в случае 3 предположений вытекает, что стрелки с номерами 1 и 3 — изоморфизмы. В силу леммы о пяти гомоморфизмах стрелка с номером 2 — также изоморфизм.

Случай 4, многообразие M — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Как и в доказательстве случая 5 теоремы 11.2, выберем последовательность открытых выпуклых множеств $U_1, U_2, U_3, \dots$ с компактными замыканиями, объединение которых совпадает с M . Согласно случаю 1, теорема 11.4 справедлива для каждого U_i . Используя случай 2, можно по индукции доказать справедливость теоремы 11.4 для каждого конечного объединения $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$. Наконец, в соответствии со случаем 3 можно перейти к обратному пределу при $n \rightarrow \infty$.

Случай 5, M — связное паракомпактное многообразие. В этом случае можно найти счетное покрытие $\{U_1, U_2, U_3, \dots\}$ многообразия M открытыми множествами U_i с компактными замыканиями $\bar{U}_i$, в котором каждое U_i гомеоморфно открытому подмножеству пространства $\mathbb{R}^n$ (см. теорему 11.2). Пусть $V_n = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$. Используя случаи 2 и 4, индукцией по n легко установить справедливость теоремы 11.4 для каждого многообразия V_n . Заметим, что V_n компактны и $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$. Поэтому в силу случая 3 теорема 11.4 справедлива для многообразия M .

Случай 6, общий случай. Согласно случаю 5 теорема 11.4 верна для каждой компоненты многообразия M . Отсюда легко следует справедливость теоремы для всего M .

Перейдем теперь к доказательству теоремы 11.5. Первый шаг доказательства — когомологический аналог леммы 11.7.

11.10. Лемма. Пусть M — паракомпактное n -многообразие с краем B . Тогда индуцированный включением гомоморфизм $i^*: H^q(M) \rightarrow H^q(M \setminus B)$ при всех q является изоморфизмом.

Доказательство леммы 11.10. Мы будем следовать схеме доказательства теоремы 11.4; ср. также с доказательством леммы 11.7.

Случай 1, край B пуст. В этом случае нечего доказывать.

Случай 2, $M = \mathbb{R}_+^n$. В этом случае включение $i: M \setminus B \rightarrow M$ — гомотопическая эквивалентность.

Случай 3, в котором $M = U \cup V$, где U и V — открытые подмножества, и предполагается справедливость леммы для U , V и $U \cap V$. Для доказательства следует использовать две последовательности Майера — Вьеториса и лемму о пяти гомоморфизмах.

Случай 4, в котором M — объединение последовательности $\{U_i\}$ вложенных друг в друга открытых множеств, имеющих компактные замыкания. В доказательстве используются лемма 11.9 и лемма о пяти гомоморфизмах.

Случай 5, M — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}_+^n$. Доказательство следует той же схеме, что и доказательство случая 4 теоремы 11.4.

Случай 6, M — связное паракомпактное многообразие с краем. Этот случай аналогичен случаю 5 теоремы 11.4.

Случай 7, общий случай. Согласно случаю 6, лемма 11.10 справедлива для каждой компоненты многообразия M . Отсюда немедленно следует общий случай.

Замечание. Браун [6] доказал, что край паракомпактного многообразия имеет окрестность, гомеоморфную произведению края на полуинтервал. Таким образом, включение $i: M \setminus B \rightarrow M$ — гомотопическая эквивалентность, что приводит к прямому доказательству леммы 11.10. Это дает также другое доказательство леммы 11.7 для случая, когда многообразие M паракомпактно.

Из леммы 11.10 и теоремы 11.4 следует, что композиция гомоморфизмов $i^*: H^q(M) \rightarrow H^q(M \setminus B)$ и $H^q(M \setminus B) \xrightarrow{\mu} H_{n-q}(M \setminus B)$ является изоморфизмом. Этим доказано одно из утверждений теоремы 11.5. Для доказательства оставшейся части рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} H^q(M, B) & \xrightarrow{i^*} & H^q(M) & \xrightarrow{k^*} & H^q(B) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(M, B) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi & & \downarrow \eta & & \downarrow \varphi \\ H_{n-q}(M) & \xrightarrow{\rho} & H_{n-q}(M \setminus B) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-q-1}(B) & \xrightarrow{k_*} & H_{n-q-1}(M). \end{array}$$

Верхняя и нижняя строки диаграммы — соответственно когомологическая и гомологическая последовательности пары (M, B) . Гомоморфизмы φ , ψ и η определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \mu \cap u, \quad u \in H^q(M, B), \\ \psi(v) &= \mu \cap i^*v, \quad v \in H^q(M), \\ \eta(w) &= (\partial\mu) \cap w, \quad w \in H^q(B). \end{aligned}$$

Левый, средний и правый квадраты коммутативны соответственно в силу свойств (A2), (A4) и (A5). Мы уже доказали, что отображение ψ — изоморфизм. Согласно лемме 11.8, $\partial\mu$ — фундаментальный класс гомологий многообразия B , поэтому η — изоморфизм. В силу леммы о пяти гомоморфизмах φ — также изоморфизм. Доказательство теоремы 11.5 закончено.

Те же рассуждения¹⁾ применимы для доказательства каждой из четырех теорем в случае гомологий и когомологий $\text{mod } 2$ без предположений ориентируемости (см. конец § 11.3).

Упражнения

1. Докажите, что изоморфизмы двойственности Пуанкаре из теорем 11.2—11.5 совместимы с гомоморфизмами коэффициентов. Например, докажите, что гомоморфизм абелевых групп $h: G_1 \rightarrow G_2$ приводит к коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} H_c^q(M; G_1) & \rightarrow & H_{n-q}^c(M; G_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_c^q(M; G_2) & \rightarrow & H_{n-q}^c(M; G_2). \end{array}$$

Горизонтальные стрелки диаграммы — изоморфизмы из теоремы 11.2, а вертикальные — гомоморфизмы, индуцированные отображением h .

2. Предположим, что группа коэффициентов G имеет структуру R -модуля над некоторым кольцом R . Докажите, что в этом случае изоморфизмы двойственности Пуанкаре в теоремах 11.2—11.5 являются изоморфизмами R -модулей.

3. Докажите, что для любого n -многообразия M естественное преобразование $\mu: H_q^s(M; G) \rightarrow H_q^c(M; G)$ сингулярных гомологий в гомологии с компактными носителями (ср. § 9.6) является изоморфизмом. (Предложение. Следуйте основной схеме рассуждений, применяемой в доказательстве теоремы 11.4.) Сформулируйте и докажите аналогичную теорему для паракомпактного многообразия с краем.

4. Для любого паракомпактного n -многообразия M докажите, что естественное преобразование $H^p(M; G) \rightarrow H_s^p(M; G)$ когомологий Александера — Спейера в сингулярные когомологии является изоморфизмом. (Предложение. Возьмите за основу доказательство теоремы 11.4.) Сформулируйте и докажите аналогичную теорему для паракомпактного многообразия с краем.

5. Докажите, что для любого связного неориентируемого n -многообразия $H_1^c(M; \mathbb{Z}_2) \neq 0$.

¹⁾ Наше изложение в основных чертах следует схеме Милнора [43] (более раннее ротапринтное издание лекций Милнора вышло в свет в марте 1964 г.). Похожая техника использована Кёртисом и Дугунджи [10] в доказательстве теоремы де Рама.

§ 11.5. Гомологии подмножеств многообразий.

Теоремы двойственности

Александера и Ситникова

В настоящем параграфе мы покажем, что изоморфизмы двойственности Пуанкаре приводят к совпадению точной когомологической последовательности пары (M, X) с гомологической последовательностью пары $(M, M \setminus X)$ в случае, когда M — ориентированное n -многообразие и X — открытое или замкнутое подмножество многообразия M .

Для того чтобы сформулировать первую теорему, предположим, что M — произвольное ориентированное многообразие и U — открытое подмножество многообразия M . Рассмотрим диаграмму

$$(5) \quad \begin{array}{ccccccc} \rightarrow H_c^q(M) & \xrightarrow{f_*} & H_c^q(M \setminus U) & \xrightarrow{\partial} & H_c^{q+1}(U) & \xrightarrow{\tau} & H_c^{q+1}(M) \rightarrow \\ \downarrow 1 & & \downarrow 2 & & \downarrow 3 & & \downarrow 1 \\ \rightarrow H_{n-q}^c(M) & \xrightarrow{f_*} & H_{n-q}^c(M, U) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-q-1}^c(U) & \xrightarrow{k_*} & H_{n-q-1}^c(M) \rightarrow \end{array}$$

В этой диаграмме верхняя строка — когомологическая последовательность пары $(M, M \setminus U)$, нижняя — гомологическая последовательность пары (M, U) . Вертикальными стрелками с номерами 1 и 2 обозначены $\cap$ -умножения на фундаментальный класс μ_M , в то время как стрелкой 3 — $\cap$ -умножение на μ_U .

11.11. Теорема. Все квадраты диаграммы (5) коммутативны и все гомоморфизмы, обозначенные вертикальными стрелками, являются изоморфизмами. Таким образом, когомологическая последовательность пары $(M, M \setminus U)$ (для когомологий с компактными носителями) совпадает с гомологической последовательностью пары (M, U) (для гомологий с компактными носителями).

Доказательство. Левый, средний и правый квадраты диаграммы (5) коммутативны соответственно в силу свойств (B7), (B6) и (B2). Согласно теореме 11.2, стрелки с номерами 1 и 3 — изоморфизмы, поэтому в силу леммы о пяти гомоморфизмах стрелка с номером 2 — также изоморфизм.

11.12. Следствие. (Двойственность Александера для гомологий и когомологий с компактными носителями). Предположим, что ориентируемое n -многообразие M удовлетворяет условию $H_c^q(M; G) = H_c^{q+1}(M; G) = 0$. Тогда для любого открытого подмножества U многообразия M имеется изоморфизм (двойственность Александера)

$$H_c^q(M \setminus U; G) \cong H_{n-q-1}^c(U; G).$$

Заметим, что следствие 11.13 применимо для $M = \mathbb{R}^n$ или S^n , а следствие 11.14 — для $M = S^n$.

Если мы попытаемся сформулировать аналогичные результаты для когомологий и гомологий с произвольными носителями, то придем к диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow H^q(M) & \xrightarrow{i^*} & H^q(U) & \rightarrow ? & \longrightarrow & H^{q+1}(M) \\ \downarrow 1 & & \downarrow 2 & \downarrow & & \downarrow 1 \\ \rightarrow H_{n-q}(M) & \xrightarrow{0} & H_{n-q}(U) & \rightarrow & H_{n-q-1}(M \setminus U) & \rightarrow H_{n-q-1}(M), \end{array}$$

в которой M — паракомпактное ориентируемое n -многообразие и U — открытое подмножество многообразия M . Нижняя строка — гомологическая последовательность пары $(M, M \setminus U)$. Мы собираемся заменить знак вопроса в верхней строке диаграммы некоторой группой когомологий таким образом, чтобы все квадраты диаграммы были коммутативными, а все вертикальные стрелки являлись изоморфизмами. Сложность заключается в том, что группу $H^{q+1}(M, U)$ можно определить лишь с помощью всех коцепей Александера — Спеньера, в то время как при описании $\cap$ -умножения были использованы локально конечнозначные коцепи. Хотя окончательный результат будет таким, каким его естественно ожидать, нам придется значительно удлинить изложение.

Чтобы справиться с этой ситуацией, необходимо использовать конус цепного и коцепного отображения. Конус цепного отображения $\varphi: C \rightarrow C'$ обозначается через $M(\varphi)$ (определение см. в § 4.7). Конус отображения обладает следующим важным свойством естественности. Если

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\varphi} & C' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ D & \xrightarrow{\psi} & D' \end{array}$$

— коммутативная диаграмма цепных комплексов и цепных отображений, то пара отображений (f, f') очевидным образом индуцирует цепное отображение

$$F: M(\varphi) \rightarrow M(\psi),$$

причем коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C' & \rightarrow & M(\varphi) & \rightarrow & C \rightarrow 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f \\ 0 & \rightarrow & D' & \rightarrow & M(\psi) & \rightarrow & D \rightarrow 0 \end{array}$$

Этой диаграмме отвечает коммутативная диаграмма, включающая две длинные точные гомологические последовательности.

Предположим, что $\varphi: C \rightarrow C'$ — эпиморфизм, и пусть C'' — подкомплекс комплекса C , совпадающий с ядром отображения φ . Таким образом, имеем короткую точную последовательность цепных комплексов $0 \rightarrow C'' \xrightarrow{k} C \rightarrow C' \rightarrow 0$. Легко проверить, что естественный гомоморфизм $\alpha: C'' \rightarrow M(\varphi)$, определенный формулой $\alpha(x) = (x, 0)$, является цепным отображением¹⁾. Таким образом, возникает диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_{q-1}(C'') & & \\
 & \nearrow \partial_* & \downarrow \alpha_* & \nwarrow \kappa_* & \\
 H_q(C) & \xrightarrow{\varphi_*} & H_q(C') & & H_{q-1}(C) \xrightarrow{\varphi_*} H_{q-1}(C') \\
 & \searrow i_* & \downarrow \alpha_* & \nearrow j_* & \\
 & & H_{q-1}(M(\varphi)) & &
 \end{array}$$

Нетрудно убедиться в том, что оба треугольника этой диаграммы коммутативны, поэтому в силу леммы о пяти гомоморфизмах α_* — изоморфизм. Таким образом, если φ — эпиморфизм, то группы гомологий цепных комплексов $M(\varphi)$ и $\text{Кег } \varphi$ естественно изоморфны.

Упражнение

Сформулируйте и докажите аналогичный результат в случае, когда φ — мономорфизм.

Постараемся теперь применить технику конуса отображения к нашей задаче. Пусть M — паракомпактное ориентируемое n -многообразие и U — открытое подмножество многообразия M . В обозначениях гл. 8 имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 C^*(M; G) & \xrightarrow{\tau} & C^*(U; G) \\
 \uparrow 1 & & \uparrow 2 \\
 C_L^*(M; G) & \xrightarrow{i^\#} & C_L^*(U; G) \\
 \downarrow \mu' \cap & & \downarrow (\sigma^\# \mu') \cap \\
 C_*(M; G) & \xrightarrow{\sigma^\#} & C_*(U; G)
 \end{array}$$

В этой диаграмме $C^*(M; G)$ и $C^*(U; G)$ — комплексы коцепей Александера — Спеньера, построенные на основе всех p -функ-

1) Более точно: $\alpha d = -d\alpha$, где d — граничный оператор комплекса $M(\varphi)$. — Прим. перев.

ций, в то время как $C_L^*(M; G)$ и $C_L^*(U; G)$ — коцепные комплексы локально конечнозначных коцепей. Гомоморфизмы, обозначенные стрелками с номерами 1 и 2, — включения коцепных комплексов. В силу теоремы 8.1 Гордона они индуцируют изоморфизм групп когомологий (напомним, что *любое* подмножество паракомпактного многообразия паракомпактно). Фундаментальный класс многообразия M , как обычно, обозначается через μ . Пусть $\mu' \in C_n(M; \mathbb{Z})$ — цикл, представляющий класс μ . Тогда $\sigma^\# \mu' \in C_n(U; \mathbb{Z})$ — представитель фундаментального класса многообразия U . Нижний квадрат коммутативен в силу свойства (A2). Заметим, что $\bar{i}$ и $\sigma^\#$ — эпиморфизмы, в то время как $i^\#$ эпиморфизмом, вообще говоря, не является.

Используя конусы отображений $\bar{i}$, $i^\#$ и $\sigma^\#$ и переходя к гомологиям и когомологиям, получим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & H^{q+1}(M, U) & & \\
 & & & \nearrow \delta & \downarrow \alpha_* & \searrow j_* & \\
 \rightarrow H^q(M) & \xrightarrow{\bar{i}^*} & H^q(U) & \rightarrow & H^{q+1}(M(\bar{i})) & \rightarrow & H^{q+1}(M) \rightarrow \\
 & \uparrow i^* & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow i^* \\
 \rightarrow H^q(M) & \xrightarrow{i^*} & H^q(U) & \rightarrow & H^{q+1}(M(i^\#)) & \rightarrow & H^{q+1}(M) \xrightarrow{i^*} \\
 & \downarrow \mu_* & \downarrow (\rho\mu)_* & & \downarrow & & \downarrow \mu_* \\
 \rightarrow H_{n-q}(M) & \rightarrow & H_{n-q}(U) & \rightarrow & H_{n-q-1}(M(\sigma^\#)) & \rightarrow & H_{n-q-1}(M) \rightarrow \\
 & & \searrow \partial & & \uparrow \alpha_* & \nearrow k_* & \\
 & & & & H_{n-q-1}(M \setminus U) & &
 \end{array}$$

В верхней строке диаграммы стоят когомологии Александера — Спеньера, построенные по всем коцепям. Все вертикальные стрелки — изоморфизмы, и каждая строка точна.

Двум открытым подмножествам $U_1 \subset U_2$ многообразия M отвечают две диаграммы такого вида и гомоморфизмы групп диаграммы для U_2 в соответствующие группы диаграммы для U_1 . Простое размышление убедит читателя в том, что каждый квадрат получающейся большой диаграммы коммутативен; другими словами, указанная выше диаграмма естественна по отношению к включениям открытых подмножеств многообразия M .

Мы можем резюмировать полученные результаты следующим образом.

11.15. Теорема. Пусть M — паракомпактное ориентированное n -многообразие и U — открытое подмножество многообразия M .

Тогда точная последовательность когомологий Александера — Спеньера пары (M, U) совпадает с гомологической последовательностью пары $(M, M \setminus U)$ (гомологии с произвольными носителями), т. е. диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow H^q(M) & \xrightarrow{j^*} & H^q(U) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(M, U) & \xrightarrow{j^*} & H^{q+1}(M) \rightarrow \\ \downarrow \mu_M \cap & & \downarrow \mu_U \cap & & \downarrow 1 & & \downarrow \mu_M \cap \\ \rightarrow H_{n-q}(M) & \xrightarrow{\rho} & H_{n-q}(U) & \xrightarrow{\delta} & H_{n-q-1}(M \setminus U) & \xrightarrow{k_*} & H_{n-q-1}(M) \rightarrow \end{array}$$

коммутативна и вертикальные стрелки — изоморфизмы. Кроме того, эта диаграмма естественна по отношению к вложениям открытых подмножеств.

Подчеркнем, что $H^{q+1}(M, U)$ — группа когомологий Александера — Спеньера, определенная посредством всех коцепей, и что гомоморфизм, обозначаемый стрелкой с номером 1, имеет сложное определение: он является композицией четырех других изоморфизмов.

11.16. Следствие. (Двойственность Александера для гомологий и когомологий с произвольными носителями.) ¹⁾ Пусть дополнительно к предположениям теоремы 11.5 $H^q(M; G) = H^{q+1}(M; G) = 0$. Тогда для любого открытого подмножества U многообразия M имеется изоморфизм

$$H^q(U; G) \cong H_{n-q-1}(M \setminus U; G).$$

Этот изоморфизм естествен по отношению к включениям открытых подмножеств.

При $q=0$ и $q=n-1$ двойственность Александера может быть сформулирована немного иначе.

11.17. Следствие. Пусть в предположениях теоремы 11.15 M связно и $H^1(M; G) = 0$. Тогда имеется изоморфизм двойственности Александера

$$\tilde{H}^0(U; G) \cong H_{n-1}(M \setminus U; G),$$

естественный по отношению к включениям открытых подмножеств.

¹⁾ В теореме Александера U — компактный полиэдр. Л. С. Понтрягин распространил двойственность Александера (ср. со следствием 11.12) на произвольные компактные множества $U \subset M$ (см. гл. V и VI в [1*]). Случай, когда U — открытое подмножество сферы S^n , исследован Стинродом [55]. Двойственность Ситникова (следствие 11.21) — распространение этих результатов на произвольные подмножества U и $M \setminus U$. — Прим. ред.

11.18. Следствие. Пусть дополнительно к предположениям теоремы 11.15 M компактно, связно и $H^{n-1}(M; G) = 0$. Тогда для любого собственного открытого подмножества U

$$H^{n-1}(U; G) \cong \hat{H}_0(M \setminus U; G)$$

и этот изоморфизм естествен по отношению к включениям открытых подмножеств.

Рассмотрим теперь обобщение теоремы двойственности Александера, принадлежащее Ситникову [48]. Предположим, что M — компактное связное ориентируемое n -многообразие, X — произвольное подмножество в M и $Y = M \setminus X$ — его дополнение. Наиболее интересен случай, когда X и Y не являются ни открытыми, ни замкнутыми. Поскольку компактное многообразие, очевидно, паракомпактно, можно воспользоваться теоремой 11.15 и получить для любого открытого подмножества U изоморфизм кохомологической последовательности пары (M, U) и гомологической последовательности пары $(M, M \setminus U)$. Перейдем к прямому пределу по всем открытым подмножествам U , содержащим X . Поскольку каждое подмножество многообразия M паракомпактно, подмножество X жестко вложено в M для кохомологий Александера — Спеньера (см. теорему 8.4 и ее следствие). Следовательно, прямой предел групп $H^q(U)$ есть группа $H^q(X)$. Из того что прямые пределы сохраняют точные последовательности и из леммы о пяти гомоморфизмах следует равенство

$$\varinjlim H^{q+1}(M, U) = H^{q+1}(M, X).$$

Далее заметим, что если U пробегает все открытые подмножества, содержащие X , то дополнительное множество $M \setminus U$ пробегает все компактные множества, лежащие в Y . Следовательно, согласно определению группы $H_{n-q-1}^c(Y)$, имеем

$$\varinjlim H_{n-q-1}(M \setminus U) = H_{n-q-1}^c(Y).$$

Поскольку $H_{n-q}(U) = H_{n-q}(M, M \setminus U)$, получаем

$$\varinjlim H_{n-q}(U) = H_{n-q}^c(M, Y).$$

Объединяя вместе все эти факты, получаем следующий результат.

11.19. Теорема. Предположим, что M — компактное связное ориентированное n -многообразие, X — произвольное подмножество в M и $Y = M \setminus X$. Тогда кохомологическая последовательность пары (M, X) и гомологическая последовательность пары (M, Y) для гомологий с компактными носителями естественно

изоморфны, т. е. коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow H^q(M) & \xrightarrow{i^*} & H^q(X) & \longrightarrow & H^{q+1}(M, X) & \xrightarrow{j^*} & H^{q+1}(M) \longrightarrow \\
 \downarrow \mu \cap & & \downarrow 2 & & \downarrow 1 & & \downarrow \mu \cap \\
 \rightarrow H_{n-q}(M) & \xrightarrow{j_*} & H_{n-q}^c(M, Y) & \rightarrow & H_{n-q-1}^c(Y) & \xrightarrow{k_*} & H_{n-q-1}(M) \rightarrow
 \end{array}$$

в которой вертикальные стрелки — изоморфизмы.

Подчеркнем, что хотя M компактно, множества X и Y даже не обязательно локально компактны. Заметим, что изоморфизмы, обозначенные стрелками с номерами 1 и 2, — прямые пределы изоморфизмов, обозначенных в теореме 11.15 соответственно числом 1 и знаком $\mu \cap$. Наконец, следует также отметить, что указанный изоморфизм точных последовательностей естествен по отношению к включениям $X_1 \subset X_2$ подмножеств многообразия M .

11.20. Следствие. Пусть M и X удовлетворяют предположениям теоремы 11.19. Тогда относительная группа когомологий $H^q(M, X)$ и относительная группа гомологий $H_q^c(M, X)$ зависят лишь от гомотопического типа дополнительного подпространства $M \setminus X$. Гомотопическая эквивалентность $f: (M_1 \setminus X_1) \rightarrow (M_2 \setminus X_2)$ индуцирует изоморфизмы $H^q(M_1, X_1) \cong H^q(M_2, X_2)$ и $H_q^c(M_1, X_1) \cong H_q^c(M_2, X_2)$ (M_1 и M_2 — компактные связные ориентируемые n -многообразия).

11.21. Следствие. (Теорема двойственности Ситникова.) Пусть M — такое компактное связное ориентируемое n -многообразие, что $H^q(M; G) = H^{q+1}(M; G) = 0$, и пусть X — произвольное подмножество многообразия M . Тогда имеется изоморфизм двойственности Ситникова

$$H^q(X; G) \cong H_{n-q-1}^c(M \setminus X),$$

естественный по отношению к включениям $X_1 \subset X_2$.

Так же как и в теореме двойственности Александра, следует выделить случаи $q = 0$ и $q = n - 1$.

11.22. Следствие. Пусть M — такое компактное связное ориентируемое n -многообразие, что $H^1(M; G) = 0$. Тогда для любого непустого подмножества X многообразия M имеется изоморфизм двойственности Ситникова

$$\tilde{H}^0(X; G) \cong H_{n-1}^c(M \setminus X; G),$$

естественный по отношению к включениям.

11.23. Следствие. Пусть M — такое компактное связное ориентируемое n -многообразие, что $H^{n-1}(M; G) = 0$. Тогда для любого собственного подмножества X многообразия M имеется естественный изоморфизм

$$H^{n-1}(X; G) \cong \tilde{H}_0^c(M \setminus X; G).$$

Простые примеры показывают, что предположение о компактности многообразия M в теореме двойственности Ситникова абсолютно существенно¹⁾. Пусть $M = \mathbb{R}^2$ — евклидова плоскость, X_1 — прямая и X_2 — ограниченный интервал. Тогда X_1 и X_2 гомеоморфны, в то время как $\mathbb{R}^2 \setminus X_1$ несвязно и имеет гомотопический тип двуеточия S^0 , а $\mathbb{R}^2 \setminus X_2$ связно и имеет гомотопический тип окружности S^1 .

Как и для двойственности Александера, наиболее важным для применения теоремы двойственности Ситникова является случай $M = S^n$. В качестве иллюстрации предлагаем следующий пример, принадлежащий Ситникову [48]. В этом примере многообразие $M = S^2$ рассматривается как одноточечная компактификация плоскости $\mathbb{R}^2$.

Пример. Обозначим через A следующее подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 1, \ x = 0 \text{ или } x = \pm 1/(2n + 1)\},$$

где n — любое натуральное число. Тогда A — компактное подмножество плоскости, имеющее бесконечное число компонент и не являющееся локально связным. Пусть X — пространство, полученное удалением из A точки $(0, 0)$. Последовательность точек $(1/2n, 0)$ вместе с пределом $(0, 0)$ — компактное подмножество в $S^2 \setminus X$, имеющее бесконечное число компонент и не содержащееся ни в каком связном компактном подмножестве $S^2 \setminus X$. Отсюда вытекает, что $\tilde{H}_0^c(S^2 \setminus X) \neq 0$.

Пусть X' — подмножество множества X , состоящее из тех точек $(x, y) \in X$, для которых $x \geq 0$. Читатель легко убедится в том, что X и X' гомеоморфны. Однако $S^2 \setminus X$ и $S^2 \setminus X'$ не только не гомеоморфны, но и гомотопически не эквивалентны, поскольку $S^2 \setminus X'$ линейно связно, в то время как $S^2 \setminus X$ не обладает этим свойством. Действительно, точку $(0, 0)$ нельзя соединить путем в $S^2 \setminus X$ ни с какой другой точкой. Тем не менее в силу теоремы двойственности Ситникова $H_q^c(S^2 \setminus X) \cong \cong H_q^c(S^2 \setminus X')$ для всех q , а также $\tilde{H}_0^c(S^2 \setminus X) \cong \cong \tilde{H}_0^c(S^2 \setminus X')$.

Замечание. Все теоремы этого параграфа остаются справедливыми и для неориентируемых многообразий при условии, что

¹⁾ См. также добавление к настоящей главе. — Прим. ред.

группа коэффициентов G — векторное пространство над Z_2 , а μ — фундаментальный класс гомологий по модулю 2 многообразия M (ср. § 11.4). Доказательство может быть проведено по той же самой схеме.

§ 11.6. Дополнительные применения двойственности Пуанкаре

Изоморфизм двойственности Пуанкаре определяется с помощью $\cup$ -умножения. Ввиду тесной связи между $\cup$ - и $\cap$ -умножениями естественно ожидать, что теорема двойственности Пуанкаре должна накладывать на $\cup$ -умножение в когомологиях многообразия некоторые условия. Прежде чем сформулировать основные теоремы в этом направлении, напомним, что для R -модулей A и B над коммутативным кольцом R всякая R -билинейная форма

$$\lambda: A \times B \rightarrow R$$

определяет очевидным образом гомоморфизмы

$$A \rightarrow \text{Hom}_R(B, R)$$

и

$$B \rightarrow \text{Hom}_R(A, R).$$

В случае когда R — поле, а A и B — векторные пространства над R , группы $\text{Hom}_R(A, R)$ и $\text{Hom}_R(B, R)$ будут фигурировать как соответствующие двойственные векторные пространства.

11.24. Теорема. Пусть M — паракомпактное ориентированное n -многообразие и F — поле. Тогда билинейная форма

$$H^q(M; F) \otimes H_c^{n-q}(M; F) \rightarrow F,$$

определенная соответствием

$$u \otimes v \rightarrow \langle \mu, u \cup v \rangle$$

для любых $u \in H^q(M; F)$ и $v \in H_c^{n-q}(M; F)$, дает изоморфизм между $H^q(M; F)$ и векторным пространством, двойственным к $H_c^{n-q}(M; F)^1$.

В этой теореме μ — фундаментальный класс гомологий; символ $\langle x, y \rangle$ определен в упр. 3 из § 4.11. Для того чтобы сформулировать следующую теорему, обозначим через $B^q(M)$ и $B_c^q(M)$ факторгруппы групп $H^q(M; Z)$ и $H_c^q(M; Z)$ соответственно по под-

¹⁾ При доказательстве теорем 11.24—11.27 полезно пользоваться формулами универсальных коэффициентов, дающими описание когомологий H^q в терминах гомологий с компактными носителями (см. примечание к § 10.1). — Прим. ред.

группам кручения. Для ориентируемого n -многообразия M $\cup$ -умножение

$$H^q(M; \mathbb{Z}) \otimes H_c^{n-q}(M; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup} H_c^n(M; \mathbb{Z})$$

определяет, очевидно, гомоморфизм факторгрупп

$$B^q(M) \otimes B_c^{n-q}(M) \xrightarrow{\cup} H_c^n(M; \mathbb{Z}),$$

поскольку $H_c^n(M; \mathbb{Z})$ — свободная абелева группа. Иногда группы $B^q(M)$ и $B_c^{n-q}(M)$ называют группами Бетти пространства M .

11.25. Теорема. Пусть M — такое паракомпактное ориентированное n -многообразие, что группы когомологий $H_c^{n-q}(M; \mathbb{Z})$ и $H_c^{n-q+1}(M; \mathbb{Z})$ конечно порождены. Тогда билинейная форма

$$B: B^q(M) \otimes B_c^{n-q}(M) \rightarrow \mathbb{Z},$$

для которой $B(u \otimes v) = \langle \mu, u \cup v \rangle$, определяет изоморфизм групп $B^q(M)$ и $B_c^{n-q}(M)$ соответственно на группы $\text{Hom}(B_c^{n-q}(M), \mathbb{Z})$ и $\text{Hom}(B^q(M), \mathbb{Z})$.

Следует добавить, что вследствие сделанных предположений $B^q(M)$ и $B_c^{n-q}(M)$ — конечно порожденные свободные абелевы группы одинакового ранга.

Аналогичные теоремы имеются и для многообразия с краем.

11.26. Теорема. Пусть M — паракомпактное ориентированное многообразие с краем B и F — поле. Тогда билинейные формы

$$H^q(M; F) \otimes H_c^{n-q}(M \setminus B; F) \rightarrow F,$$

$$H^q(M, B; F) \otimes H_c^{n-q}(M; F) \rightarrow F,$$

определенные соответствием

$$u \otimes v \rightarrow \langle \mu, u \cup v \rangle,$$

приводят к изоморфизмам пространств $H^q(M; F)$ и $H^q(M, B; F)$ соответственно на векторные пространства

$$\text{Hom}_F(H_c^{n-q}(M \setminus B; F), F) \text{ и } \text{Hom}_F(H_c^{n-q}(M; F), F).$$

11.27. Теорема. Пусть M — паракомпактное ориентированное n -многообразие с краем B .

(а) Предположим, что группы $H_c^i(M \setminus B; \mathbb{Z})$ конечно порождены при $i = n - q$ и $i = n - q + 1$. Тогда билинейная форма

$$B: B^q(M) \otimes B_c^{n-q}(M \setminus B) \rightarrow \mathbb{Z},$$

для которой

$$B(u \otimes v) = \langle \mu, u \cup v \rangle,$$

определяет изоморфизмы каждой из конечно порожденных свободных абелевых групп $B^q(M)$ и $B_c^{n-q}(M \setminus V)$ соответственно на группы $\text{Hom}(B_c^{n-q}(M \setminus V), \mathbb{Z})$ и $\text{Hom}(B^q(M), \mathbb{Z})$.

(b) Предположим, что группы $H_c^i(M; \mathbb{Z})$ конечно порождены при $i = n - q$ и $i = n - q + 1$. Тогда определенная выше билинейная форма

$$B: B^q(M, V) \otimes B_c^{n-q}(M) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

приводит к изоморфизмам групп $B^q(M, V)$ и $B_c^{n-q}(M)$ соответственно на группы $\text{Hom}(B_c^{n-q}(M), \mathbb{Z})$ и $\text{Hom}(B^q(M, V), \mathbb{Z})$.

Перечислим теперь основные факты, необходимые для доказательства этих четырех теорем.

(1) Важную роль в доказательствах, очевидно, играет свойство $\cap$ -умножения (A6):

$$\langle \mu, u \cup v \rangle = \langle \mu \cap u, v \rangle$$

(2) Фундаментальную роль играет изоморфизм двойственности Пуанкаре, определенный для паракомпактного ориентированного n -многообразия соответствием $u \rightarrow \mu \cap u$. Для многообразия с краем необходимы также изоморфизмы $i^*: H^q(M) \rightarrow H^q(M \setminus V)$ и $H^q(M, V) \rightarrow H_{n-q}(M)$.

(3) Для любого локально компактного пространства X и любого поля F билинейная форма

$$H_p(X; F) \otimes H_c^p(X; F) \longrightarrow F,$$

определенная соответствием $x \otimes y \rightarrow \langle x, y \rangle$, индуцирует изоморфизм $H_p(X; F) \cong \text{Hom}_F(H_c^p(X; F), F)$ (ср. упр. 1 из § 4.8).

(4) Пусть X — такое локально компактное пространство, что группы $H_c^p(X; \mathbb{Z})$ и $H_c^{p+1}(X; \mathbb{Z})$ конечно порождены. Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_c^{p+1}(X), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta} H_p(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha} \text{Hom}(H_c^p(X), \mathbb{Z}) \rightarrow 0,$$

которая является частным случаем теоремы об универсальных коэффициентах из § 4.8. Из этой последовательности следует, что $H_p(X; \mathbb{Z})$ — конечно порожденная абелева группа, подгруппа кручения которой совпадает с $\text{Im } \beta$. Гомоморфизм α индуцирован билинейной формой

$$H_p(X; \mathbb{Z}) \otimes H_c^p(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z},$$

определенной отображением $x \otimes y \rightarrow \langle x, y \rangle$. Объединяя все эти факты, заключаем, что индуцированная билинейная форма

$$B_p(X) \otimes B_c^p(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

(определенная тем же отображением $x \otimes y \rightarrow \langle x, y \rangle$) обеспечивает изоморфизм конечно порожденных свободных абелевых групп $B_p(X)$ и $B_c^p(X)$ соответственно на группы $\text{Hom}(B_c^p(X), Z)$ и $\text{Hom}(B_p(X), Z)$.

Опираясь на перечисленные факты, читатель может самостоятельно доказать теоремы 11.24—11.27.

Теоремы 11.24 и 11.26 остаются справедливыми и для неориентируемых многообразий при условии, что характеристика поля F равна 2. В этом случае μ — фундаментальный класс по модулю 2.

При применении этих теорем к компактным многообразиям необходимо использовать следующий факт.

11.28. Лемма. Пусть M — компактное многообразие (с краем или без края). Тогда группы $H^q(M; Z)$ конечно порождены.

Для триангулируемых многообразий утверждение леммы — непосредственное следствие результатов о конечных клеточных комплексах. В настоящее время неизвестно, все ли компактные многообразия триангулируемы¹⁾. Однако нам не нужно заботиться о триангулируемости, поскольку лемма легко следует из теории абсолютных окрестностных ретрактов²⁾. Компактное многообразие M , очевидно, является конечномерным локально стягиваемым метризуемым компактным пространством. Поэтому M — компактный метрический абсолютный окрестностный ретракт и, следовательно, доминируется конечным CW -комплексом. Отсюда вытекает, что группы когомологий с целочисленными коэффициентами многообразия M конечно порождены, что и требовалось. (По поводу терминологии и фактов, использованных в доказательстве, см. [3] или [26].)

Если M — компактное многообразие с краем B , то из точной когомологической последовательности пары (M, B) и леммы 11.28 вытекает, что группы $H_c^q(M \setminus B; Z)$ также конечно порождены. Теорема об универсальных коэффициентах обеспечивает конечную порожденность групп гомологий $H_q(M; Z)$ и $H_q(M \setminus B; Z)$. Из сказанного вытекает, что группы гомологий и когомологий многообразий M и $M \setminus B$ с коэффициентами в поле F являются конечномерными векторными пространствами над F .

Многие теоремы настоящей главы для компактных многообразий формулируются проще, поскольку в этом случае два типа групп гомологий и когомологий совпадают. Кроме того, теорема

¹⁾ Автор имеет в виду произвольные, не обязательно комбинаторные триангуляции. — *Прим. перев.*

²⁾ Утверждение леммы 11.28 справедливо для любого компактного гомологически локального связного пространства (см. следствие 16.5 в [5]). — *Прим. ред.*

двойственности Пуанкаре налагает на гомологии компактного многообразия более сильные ограничения. В качестве примера приведем следующий результат.

11.29. Теорема. Пусть M — компактное связное ориентируемое многообразие размерности $4k+2$. Тогда для любого поля F , характеристика которого отлична от 2, векторное пространство $H^{2k+1}(M; F)$ над полем F имеет четную размерность.

Доказательство. Рассмотрим билинейную форму

$$\lambda: H^{2k+1}(M; F) \times H^{2k+1}(M; F) \rightarrow F,$$

определенную соотношением

$$\lambda(u, v) = \langle u, u \cup v \rangle.$$

В соответствии с теоремой 11.24 билинейная форма λ невырождена, т. е. для каждого $u \neq 0$ найдется такой элемент v , что $\lambda(u, v) \neq 0$. Поскольку $\cup$ -умножение антикоммутативно, билинейная форма λ кососимметрична, т. е. $\lambda(u, v) = -\lambda(v, u)$. Согласно хорошо известной теореме из алгебры, невырожденные кососимметрические формы существуют лишь на четномерных векторных пространствах.

Аналогичная теорема для неориентируемого многообразия и поля F характеристики 2 не верна. Чтобы убедиться в этом достаточно рассмотреть вещественное проективное пространство размерности $4k+2$.

11.30. Теорема. Пусть M — компактное многообразие нечетной размерности с краем B . Тогда эйлерова характеристика многообразия B четна.

Доказательство. Рассмотрим гомологии и когомологии M с коэффициентами в некотором поле F . Если M ориентируемо, поле F произвольно, в противном случае пусть F — поле характеристики 2. Мы будем использовать следующие обозначения. Для локально компактного пространства X положим

$$b_q(X) = \dim H_c^q(X; F) = \dim H_q(X; F)$$

при условии, что эти размерности конечны. Кроме того, пусть

$$\chi(X) = \sum_q (-1)^q b_q(X)$$

— эйлерова характеристика пространства X . Из точной когомологической последовательности пары (M, B) легко вывести равенство

$$(6) \quad \chi(M) = \chi(M \setminus B) + \chi(B).$$

В силу двойственности Пуанкаре

$$H^q(M; F) \cong H_{n-q}(M \setminus B; F),$$

т. е.

$$b_q(M) = b_{n-q}(M \setminus B).$$

Из этого равенства и из того, что n нечетно, находим

$$(7) \quad \chi(M) = -\chi(M \setminus B).$$

Складывая равенства (6) и (7), получаем

$$\chi(B) = 2\chi(M),$$

что и требовалось.

Примеры. Если n четно, то эйлеровы характеристики проективных пространств $P_n(\mathbb{R})$, $P_n(\mathbb{C})$, $P_n(\mathbb{H})$ нечетны. Поэтому ни одно из этих многообразий не может служить краем некоторого многообразия.

Прежде чем сформулировать нашу следующую теорему, необходимо ввести понятие *сигнатуры* многообразия. Пусть M — компактное *ориентированное* многообразие размерности $4k$. Рассмотрим билинейную форму

$$\lambda: H^{2k}(M; \mathbb{R}) \times H^{2k}(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

определенную формулой

$$\lambda(u, v) = \langle u, u \cup v \rangle.$$

В качестве коэффициентов используем поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел.

По теореме 11.24 эта билинейная форма невырождена. В силу антикоммутативности $\cup$ -умножения она симметрична, т. е.

$$\lambda(u, v) = \lambda(v, u).$$

Как обычно, *сигнатура* симметричной билинейной формы (или квадратичной формы) на вещественном векторном пространстве $H^{2k}(M; \mathbb{R})$ — это разность между числом положительных и отрицательных собственных значений вещественной симметричной матрицы формы λ в некотором базисе пространства $H^{2k}(M; \mathbb{R})$. *Сигнатура многообразия* M определяется как сигнатура формы λ . Сигнатура — важный гомотопический инвариант компактного ориентированного многообразия (без края) размерности $4k$. Заметим, что она зависит от выбора ориентации, т. е. от выбора фундаментального класса.

11.31. Теорема. Пусть M — компактное ориентированное многообразие размерности $4k + 1$ с краем B . Тогда сигнатура многообразия B равна нулю.

Замечание. В этой теореме предполагается, что ориентация многообразия B определяется фундаментальным классом $\partial\mu$, где μ — фундаментальный класс гомологий многообразия M и $\partial: H_{4k+1}(M \setminus B) \rightarrow H_{4k}(B)$ — граничный оператор в гомологической последовательности пары (M, B) .

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned}\lambda: H^{2k}(B; \mathbb{R}) \otimes H^{2k}(B; \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ \nu: H_c^{2k+1}(M \setminus B; \mathbb{R}) \otimes H^{2k}(M; \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}\end{aligned}$$

— билинейные формы, определенные соответственно соотношениями

$$\begin{aligned}\lambda(u, v) &= \langle \partial\mu, u \cup v \rangle, \\ \nu(x, y) &= \langle \mu, x \cup y \rangle.\end{aligned}$$

Применим теорему 11.24 к форме λ и теорему 11.26 к ν . Рассмотрим гомоморфизмы

$$\begin{aligned}\delta: H^{2k}(B; \mathbb{R}) &\longrightarrow H_c^{2k+1}(M \setminus B; \mathbb{R}), \\ i^*: H^{2k}(M; \mathbb{R}) &\longrightarrow H^{2k}(B; \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Вследствие точности когомологической последовательности пары (M, B) $\text{Im } i^* = \text{Ker } \delta$. Положим $V = \text{Im } i^* \subset H^{2k}(B; \mathbb{R})$. Утверждается, что гомоморфизмы i^* и δ связаны друг с другом следующим образом: для любых $u \in H^{2k}(B; \mathbb{R})$ и $v \in H^{2k}(M; \mathbb{R})$

$$\lambda(u, i^*v) = \nu(\delta u, v).$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\nu(\delta u, v) &= \langle \mu, \delta u \cup v \rangle = \langle \mu, \delta(u \cup i^*v) \rangle = \\ &= \langle \partial\mu, u \cup i^*v \rangle = \lambda(u, i^*v).\end{aligned}$$

Поскольку линейные операторы δ и i^* связаны указанным соотношением, их ранги совпадают. Пусть $n = \dim H^{2k}(B; \mathbb{R})$ и $r = \dim V$. Тогда $\text{rank } i^* = r$ и $\text{rank } \delta = n - r$. Следовательно, $n - r = r$, т. е. $n = 2r$. Таким образом, размерность пространства $H^{2k}(B; \mathbb{R})$ равна удвоенной размерности пространства V .

Наконец, заметим, что V — «полностью изотропное» подпространство билинейной формы λ в том смысле, что $\lambda(u, v) = 0$ для любых $u, v \in V$. Действительно, если $v = i^*w$, то $\lambda(u, v) = \lambda(u, i^*w) = \nu(\delta u, w) = 0$, так как $\delta u = 0$. Из этого следует, что сигнатура формы λ равна нулю, поскольку эта форма невырождена и имеет изотропное подпространство, размерность которого равна половине размерности векторного пространства,

на котором эта форма определена ¹⁾ (см., например, [28, § 6.5, упр. 2]).

Эта теорема накладывает довольно сильное ограничение на $4k$ -мерное многообразие, являющееся краем многообразия размерности $4k+1$. Дальнейшую информацию по этому вопросу читатель найдет в книгах и статьях по теории кобордизмов.

Упражнения

1. Докажите, что эйлерова характеристика нечетномерного компактного многообразия равна нулю. (Замечание. Это верно как для ориентируемых, так и для неориентируемых многообразий.)

2. Докажите, что эйлерова характеристика компактного ориентируемого многообразия размерности $4k+2$ четна.

3. Пусть M и N — связанные ориентируемые n -мерные многообразия и $f: M \rightarrow N$ — такое собственное отображение, что $f_*: H_n(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(N; \mathbb{Z})$ — изоморфизм. Докажите, что для любого целого q и любой группы коэффициентов имеют место следующие два утверждения: (1) гомоморфизм $f_*: H_q^G(N; G) \rightarrow H_q^G(M; G)$ — мономорфизм, образ которого выделяется прямым слагаемым. (2) $f_*: H_q^G(M; G) \rightarrow H_q^G(N; G)$ — эпиморфизм, ядро которого выделяется прямым слагаемым. Докажите аналогичные утверждения для гомологий и когомологий с произвольными носителями.

4. Пусть M — компактное связное ориентируемое n -многообразие и $f: M \rightarrow M$ — такое непрерывное отображение, что $f_*: H_n(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(M; \mathbb{Z})$ — изоморфизм. Докажите, что индуцированные отображения $f_*: H_q(M; G) \rightarrow H_q(M; G)$ и $f^*: H^q(M; G) \rightarrow H^q(M; G)$ — изоморфизмы для всех q и для любой группы G . (Указание. Пользуясь предыдущим упражнением, рассмотрите сначала случай $G = \mathbb{Z}$.)

§ 11.7. $\cup$ -умножения в когомологиях проективных пространств

В настоящем параграфе, пользуясь некоторыми теоремами предыдущего параграфа, мы полностью вычислим $\cup$ -умножения в когомологиях вещественных, комплексных и кватернионных проективных пространств.

Рассмотрим сначала целочисленные когомологии комплексного проективного пространства $P_n(\mathbb{C})$ и кватернионного проективного пространства $P_n(\mathbb{H})$. Мы предполагаем известными следующие факты об этих пространствах.

¹⁾ См. Дольд [11, стр. 373—374]. — Прим. перев.

(1) $P_n(\mathbb{C})$ и $P_n(\mathbb{H})$ — компактные связные многообразия размерностей $2n$ и $4n$ соответственно.

(2) Эти пространства имеют следующие группы когомологий:

$$H^q(P_n(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } q \text{ четно и } 0 \leq q \leq 2n, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$H^q(P_n(\mathbb{H}); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } q \equiv 0 \pmod{4} \text{ и } 0 \leq q \leq 4n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Из этих формул следует, что оба многообразия $P_n(\mathbb{C})$ и $P_n(\mathbb{H})$ ориентируемы.

(3) Включения $P_{n-1}(\mathbb{C}) \rightarrow P_n(\mathbb{C})$ и $P_{n-1}(\mathbb{H}) \rightarrow P_n(\mathbb{H})$ индуцируют изоморфизмы групп гомологий и когомологий в размерностях $\leq 2(n-1)$ и $\leq 4(n-1)$ соответственно.

Обсуждение этих фактов см. в § 3.3.

Ниже будет удобно использовать следующие обозначения: $x \cup y$ для $\cup$ -произведения x и y элементов x и y и x^n для $\cup$ -произведения n множителей, каждый из которых равен x .

11.32. Теорема. Пусть x — образующий группы $H^2(P_n(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$. Тогда x^i — образующий группы $H^{2i}(P_n(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ при $1 \leq i \leq n$.

11.33. Теорема. Пусть y — образующий группы $H^4(P_n(\mathbb{H}); \mathbb{Z})$. Тогда y^i — образующий группы $H^{4i}(P_n(\mathbb{H}); \mathbb{Z})$ при $1 \leq i \leq n$.

Доказательства этих двух теорем одинаковы, поэтому мы обсудим лишь доказательство теоремы 11.32. При $n=1$ доказывать нечего. При $n=2$ с помощью теоремы 11.25 легко устанавливается, что x^2 — образующая группы $H^4(P_2(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$. Доказательство завершается индукцией по n с использованием приведенного выше свойства (3) и теоремы 11.25. Оставляем читателю детали.

Утверждение теоремы 11.32 часто формулируют следующим образом: кольцо целочисленных когомологий $H^*(P_n(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ изоморфно факторкольцу $\mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$ кольца $\mathbb{Z}[x]$ многочленов от x с целочисленными коэффициентами по идеалу (x^{n+1}) , порожденному элементом x^{n+1} . Это кольцо часто называют «среданным кольцом многочленов».

Структура $\cup$ -умножений в когомологиях комплексных и кватернионных пространств имеет интересные применения в теории гомотопий. Дальнейшую информацию по этому вопросу см. в [11, § VII.9] и [59, § 1.5].

В отличие от комплексных и кватернионных проективных пространств вещественные проективные пространства $P_n(\mathbb{R})$ не-

ориентируемы при четных n . Поэтому в том случае, когда при вычислении кольца когомологий $P_n(\mathbb{R})$ используется двойственность Пуанкаре, необходимо в качестве коэффициентов рассматривать группу Z_2 . Наше изложение будет опираться на следующие два утверждения.

(1) $P_n(\mathbb{R})$ — компактное связное n -многообразие.

(2) Для любого $n > 1$ имеется вложение $P_{n-1}(\mathbb{R})$ в $P_n(\mathbb{R})$, для которого пространство $P_n(\mathbb{R}) \setminus P_{n-1}(\mathbb{R})$ гомеоморфно $\mathbb{R}^n$.

Из утверждения (1) следует, что $H^n(P_n(\mathbb{R}); Z_2) = Z_2$. Для вычисления остальных групп когомологий с коэффициентами в Z_2 пространства $P_n(\mathbb{R})$ рассмотрим точную когомологическую последовательность пары $(P_n(\mathbb{R}), P_{n-1}(\mathbb{R}))$.

11.34. Лемма. *Отображение $i^*: H^k(P_n(\mathbb{R}); Z_2) \rightarrow H^k(P_{n-1}(\mathbb{R}); Z_2)$ является изоморфизмом при любом $k \neq n$.*

Доказательство. Поскольку $P_n(\mathbb{R}) \setminus P_{n-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$ и $H_c^k(\mathbb{R}^n) = 0$ при $k \neq n$, для всех k , кроме $k = n - 1$, утверждение леммы — прямое следствие когомологической последовательности пары. Рассмотрим оставшийся случай. Заметим, что в силу утверждения (b) теоремы 3.21 отображение $\tau: H_c^n(P_n(\mathbb{R}) \setminus P_{n-1}(\mathbb{R}); Z_2) \rightarrow H^n(P_n(\mathbb{R}); Z_2)$ — эпиморфизм. Поскольку обе группы $H_c^n(P_n(\mathbb{R}) \setminus P_{n-1}(\mathbb{R}); Z_2)$ и $H^n(P_n(\mathbb{R}); Z_2)$ — циклические группы порядка 2, τ — изоморфизм. Таким образом, лемма справедлива и при $k = n - 1$.

Используя эту лемму, легко доказать индукцией по n , что

$$H^k(P_n(\mathbb{R}); Z_2) = \begin{cases} Z_2 & \text{при } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

Следующая теорема описывает кольцо $H^*(P_n(\mathbb{R}); Z_2)$.

11.35. Теорема. *Если x — образующий группы $H^1(P_n(\mathbb{R}); Z_2)$, то x^k — образующий группы $H^k(P_n(\mathbb{R}); Z_2)$ при $1 \leq k \leq n$.*

Эта теорема доказывается по той же схеме, что и теорема 11.32. Вместо теоремы 11.25 следует использовать аналог теоремы 11.24 для неориентируемых многообразий и $F = Z_2$. Оставляем детали читателю.

Теорему можно переформулировать следующим образом: $H^*(P_n(\mathbb{R}); Z_2)$ — срезанная алгебра полиномов $Z_2[x] / (x^{n+1})$. Использование кольца когомологий $P_n(\mathbb{R})$ дает простое доказательство знаменитой теоремы Борсука — Улама, см. книгу Спеньера [51, стр. 343—344].

Упражнения

1. Докажите, что при $m < n$ многообразия $P_m(\mathbb{R})$, $P_m(\mathbb{C})$ и $P_m(\mathbb{H})$ не являются ретрактами пространств $P_n(\mathbb{R})$, $P_n(\mathbb{C})$ и $P_n(\mathbb{H})$ соответственно.

2. Покажите, что $\cup$ -умножение в когомологиях $P_n(\mathbb{R})$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$, описание которого дано в теореме 11.35, полностью определяет $\cup$ -умножение в целочисленных когомологиях $P_n(\mathbb{R})$. Используйте информацию о целочисленных когомологиях (см., например, упр. 9 из § 3.6) и гомоморфизм $H^q(P_n(\mathbb{R}); \mathbb{Z}) \rightarrow H^q(P_n(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2)$, индуцированный эпиморфизмом $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ групп коэффициентов.

Приложение

Прямые и обратные пределы

§ A.1. Введение

Понятия прямого и обратного предела абелевых групп уже давно не являются новыми, они восходят к работам Чеха, Л. С. Понтрягина и других авторов начала 30-х годов. Основные идеи фактически совсем просты и находят множество применений в различных областях математики. Несмотря на это, в математической литературе имеется очень мало источников, в которых читатель найдет простое и явное объяснение наиболее существенных идей. Не так давно эти вопросы были изучены специалистами по теории категорий, которые широко обобщили всю теорию.

Основная цель настоящего приложения — дать краткое введение в те части предмета, которые используются в различных разделах книги. Наше изложение лишено примеров, однако множество примеров встречается во всей книге. В процессе подготовки приложения были учтены многие полезные предложения У. Дуайера, и автору приятно выразить ему свою признательность.

§ A.2. Прямые пределы модулей

Направленное множество Λ — это множество с отношением порядка, обозначаемым через $\lambda < \mu$, $\lambda, \mu \in \Lambda$, которое удовлетворяет следующим трем условиям:

- (1) для любого $\lambda \in \Lambda$ имеем $\lambda < \lambda$ (т. е. отношение рефлексивно);
- (2) отношение транзитивно, т. е. если $\lambda < \mu$ и $\mu < \nu$, то $\lambda < \nu$;
- (3) для любых $\lambda, \mu \in \Lambda$ существует такой элемент $\nu \in \Lambda$, что $\lambda < \nu$ и $\mu < \nu$.

Заметим, что мы не требуем антисимметричности этого отношения, т. е. допускаем возможность $\lambda < \mu$ и $\mu < \lambda$ при $\lambda \neq \mu$. Однако во многих примерах отношение порядка оказывается антисимметричным. Возможно, наиболее важным для наших целей примером направленного множества является множество положительных целых чисел с их обычным порядком. Другой важный пример — упорядоченное по включению множество всех компактных подмножеств некоторого хаусдорфова пространства.

Пусть R — кольцо с единицей.

А.1. Определение. Прямая система левых R -модулей состоит из направленного множества Λ и функции, сопоставляющей каждому элементу $\lambda \in \Lambda$ левый R -модуль M_λ и каждой паре элементов $\lambda, \mu \in \Lambda$, для которых $\lambda < \mu$, гомоморфизм $M_{\lambda\mu}: M_\lambda \rightarrow M_\mu$, обладающий следующими двумя свойствами:

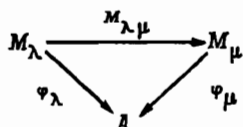
(1) для любого $\lambda \in \Lambda$ отображение $M_{\lambda\lambda}$ — тождественный изоморфизм модуля M_λ ;

(2) если $\lambda < \mu < \nu$, то $M_{\lambda\nu} = M_{\mu\nu}M_{\lambda\mu}$.

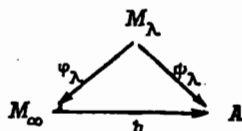
Это определение можно переформулировать в терминах теории категорий. Будем рассматривать направленное множество Λ как категорию, объектами которой являются элементы множества Λ , а множество морфизмов из λ в μ состоит из единственного элемента, если $\lambda < \mu$, и пусто в противном случае. Тогда прямая система R -модулей — это ковариантный функтор из категории Λ в категорию левых R -модулей.

Прямую систему R -модулей, в которой каждому $\lambda \in \Lambda$ соответствует модуль M_λ , будем обозначать через M .

А.2. Определение. Пусть M — прямая система модулей, определенная над направленным множеством Λ , и пусть A — левый R -модуль. Предположим, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ задан гомоморфизм $\varphi_\lambda: M_\lambda \rightarrow A$. Скажем, что семейство гомоморфизмов $\{\varphi_\lambda\}$ совместимо с прямой системой M , если всякий раз, когда $\lambda < \mu$, коммутативен следующий треугольник:



А.3. Определение. Пусть M — прямая система R -модулей, определенная над направленным множеством Λ . Прямой предел системы M состоит из левого R -модуля M_∞ и совместимого с этой системой семейства гомоморфизмов $\varphi_\lambda: M_\lambda \rightarrow M_\infty$, удовлетворяющего следующему свойству универсальности: для любого левого R -модуля A и всякого совместимого с системой семейства гомоморфизмов $\psi_\lambda: M_\lambda \rightarrow A$, $\lambda \in \Lambda$, существует единственный гомоморфизм $h: M_\infty \rightarrow A$, такой, что при каждом $\lambda \in \Lambda$ коммутативна диаграмма



Как обычно, в задачах об универсальных отображениях решение единственно, поэтому любые два прямых предела заданной пря-

мой системы R -модулей канонически изоморфны (см. [37, гл. III], где этот вопрос тщательно обсуждается в другом контексте). Таким образом, достаточно доказать существование прямого предела любой прямой системы R -модулей. Это можно сделать следующим образом. Обозначим через M' прямую сумму модулей M_λ для всех $\lambda \in \Lambda$, а для каждого $\lambda \in \Lambda$ через $\varphi_\lambda: M_\lambda \rightarrow M'$ — естественное включение модуля M_λ в эту прямую сумму. Пусть M'' — подмодуль модуля M' , порожденный элементами вида

$$\varphi'_\lambda(x) - \varphi'_\mu[M_{\lambda\mu}(x)],$$

где $\lambda < \mu$ и $x \in M_\lambda$. Определим M_∞ как фактормодуль M'/M'' . Для каждого $\lambda \in \Lambda$ гомоморфизм φ_λ индуцирует гомоморфизм $\varphi'_\lambda: M_\lambda \rightarrow M_\infty$ и, очевидно, $\{\varphi'_\lambda\}$ — совместимое с рассматриваемой системой семейство гомоморфизмов (это послужило отправной точкой нашей конструкции). Оставляем читателю проверить, что это совместимое с M семейство гомоморфизмов удовлетворяет требуемому условию универсальности.

Поскольку любые два прямых предела прямой системы модулей изоморфны, то обычно говорят просто о прямом пределе, который обозначается через $\varinjlim M_\lambda$. Часто при использовании прямых систем модулей и их пределов из контекста бывает более или менее ясно, какие гомоморфизмы $M_{\lambda\mu}$ и φ_λ имеются в виду, поэтому в описаниях различных понятий они систематически опускаются.

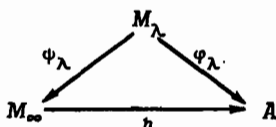
Ни в определении прямого предела, ни в доказательстве его существования пока не участвовало условие (3), фигурирующее в определении направленного множества. В следующем предложении это условие используется впервые.

А.4. Предложение. Пусть M — прямая система левых R -модулей, определенная над направленным множеством Λ , и пусть $\{\varphi_\lambda: M_\lambda \rightarrow A \mid \lambda \in \Lambda\}$ — совместимое с M семейство гомоморфизмов в R -модуль A . В этом случае модуль A тогда и только тогда является прямым пределом системы M (по отношению к гомоморфизмам φ_λ), когда выполнены следующие два условия:

- (1) для любого $a \in A$ существуют индекс $\lambda \in \Lambda$ и элемент $x \in M_\lambda$, такие, что $\varphi_\lambda(x) = a$,
- (2) пусть $x \in M_\lambda$ — такой элемент, что $\varphi_\lambda(x) = 0$. Тогда существует индекс $\mu > \lambda$, для которого $M_{\lambda\mu}(x) = 0$.

Доказательство. Предположим сначала, что A — прямой предел системы M . Тогда можно считать, что $A = M_\infty = M'/M''$ — модуль, построенный выше в доказательстве существования предела. Для модуля M_∞ проверка условий (1) и (2) не вызывает затруднений. Оставляем читателю детали.

Наоборот, предположим, что выполнены условия (1) и (2). Пусть M_∞ — прямой предел системы M по отношению к совместимой с M системе гомоморфизмов $\varphi_\lambda: M_\lambda \rightarrow M_\infty$. По определению существует единственный гомоморфизм $h: M_\infty \rightarrow A$, такой, что диаграмма



коммутативна для каждого $\lambda \in \Lambda$. Используя условие (1) предложения, легко показать, что h — эпиморфизм. Используя условие (2) вместе с аналогом условия (1) для M_∞ , легко показать, что $\text{Ker } h = 0$. Следовательно, h — изоморфизм и A — прямой предел системы M .

Это предложение — очень полезный критерий, мы неоднократно пользовались им в предыдущих главах. Приведем дополнительно следующие примеры применения этого критерия.

(1) Пусть A — левый R -модуль, не являющийся, вообще говоря, конечно порожденным, и пусть $\{M_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ — семейство всех конечно порожденных подмодулей, заиндексированное множеством Λ . По определению, $\lambda < \mu$ тогда и только тогда, когда $M_\lambda \subset M_\mu$. В этом случае определим $M_{\lambda\mu}$ как гомоморфизм включения модуля M_λ в M_μ . Тогда Λ — направленное множество и $M = \{M_\lambda\}$ — прямая система R -модулей над множеством Λ . Для любого $\lambda \in \Lambda$ пусть $\varphi_\lambda: M_\lambda \rightarrow A$ — включение подмодуля M_λ в A . Тогда $\{\varphi_\lambda\}$ — совместимое с M семейство гомоморфизмов и A — прямой предел системы M .

(2) Предположим, что M_∞ — прямой предел прямой системы R -модулей M над множеством Λ по отношению к совместимому с M семейству гомоморфизмов $\varphi_\lambda: M_\lambda \rightarrow M_\infty$. Если каждый гомоморфизм $M_{\lambda\mu}$ — мономорфизм, то все φ_λ — мономорфизмы. Аналогично, если все $M_{\lambda\mu}$ — изоморфизмы, то каждый гомоморфизм φ_λ является изоморфизмом.

Пусть M — прямая система R -модулей над множеством Λ и M' — прямая система R -модулей над множеством Λ' .

А.5. Определение. Отображение прямой системы M в прямую систему M' состоит из сохраняющего порядок отображения $f: \Lambda \rightarrow \Lambda'$ (это означает, что $\lambda < \mu$ влечет за собой $f(\lambda) < f(\mu)$) и гомоморфизмов

$$f_\lambda: M_\lambda \rightarrow M'_{f(\lambda)},$$

заданных для каждого $\lambda \in \Lambda$ и удовлетворяющих следующему условию: при $\lambda < \mu$ коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} M_\lambda & \xrightarrow{F_\lambda} & M'_f(\lambda) \\ M_{\lambda, \mu} \downarrow & & \downarrow M'_f(\lambda), f(\mu) \\ M_\mu & \xrightarrow{F_\mu} & M'_f(\mu) \end{array}$$

Один из наиболее важных частных случаев такого отображения — случай, когда $\Lambda = \Lambda'$ и f — тождественное отображение. Однако в предыдущих главах имеется большое число примеров общего типа.

Если рассматривать направленные множества Λ и Λ' как категории, то сохраняющее порядок отображение $f: \Lambda \rightarrow \Lambda'$ — ковариантный функтор, а $F = \{F_\lambda\}$ — естественное преобразование функтора M в функтор $M'f$. Однако нет никакой пользы придерживаться этой точки зрения в дальнейшем.

Используя обозначения из данного выше определения, обозначим через M_∞ и M'_∞ прямые пределы систем M и M' соответственно. Эти модули — прямые пределы по отношению к совместимым с этими системами семействам гомоморфизмов

$$\varphi_\lambda: M_\lambda \rightarrow M_\infty, \quad \lambda \in \Lambda,$$

и

$$\psi_\nu: M'_\nu \rightarrow M'_\infty, \quad \nu \in \Lambda'.$$

Рассмотрим для каждого $\lambda \in \Lambda$ композицию гомоморфизмов

$$\psi_{f\lambda} F_\lambda: M_\lambda \rightarrow M'_\infty.$$

Условия, фигурирующие в определении отображения прямых систем, показывают, что определенное таким образом семейство гомоморфизмов является совместимым с M . Следовательно, по определению прямого предела M_∞ существует *единственный* гомоморфизм $F_\infty: M_\infty \rightarrow M'_\infty$, такой, что при каждом $\lambda \in \Lambda$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & M_\lambda & \\ \varphi_\lambda \swarrow & & \searrow \psi_{f\lambda} F_\lambda \\ M_\infty & \xrightarrow{F_\infty} & M'_\infty \end{array}$$

коммутативна. Гомоморфизм F_∞ обычно называется *прямым пределом гомоморфизмов* F_λ и обозначается как

$$\lim_{\longrightarrow} F_\lambda: \lim_{\longrightarrow} M_\lambda \rightarrow \lim_{\longrightarrow} M'_\nu.$$

Предлагаем читателю сформулировать подходящее определение категории прямых систем R -модулей и их отображений.

Имея такое определение, легко проверить, что $\lim \rightarrow$ — ковариантный функтор из этой категории в категорию левых R -модулей.

А.6. Определение. Пусть Λ — направленное множество. Подмножество $\Lambda' \subset \Lambda$ называется *конфинальным*, если для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует $\mu \in \Lambda'$, для которого $\lambda < \mu$. Заметим, что конфинальное подмножество также является направленным множеством по отношению к заданному порядку.

Например, конфинальные подмножества направленного множества положительных целых чисел (с обычным порядком) — это подмножества с бесконечным числом элементов.

Пусть M — прямая система R -модулей, определенная над множеством Λ , и Λ' — конфинальное подмножество множества Λ . Будем обозначать через M' ограничение M на подмножество Λ' , т. е. пусть $M'_\lambda = M_\lambda$ для $\lambda \in \Lambda'$ и для $\lambda, \mu \in \Lambda'$ пусть $M'_{\lambda\mu} = M_{\lambda\mu}$, если $\lambda < \mu$. Включение $\Lambda' \rightarrow \Lambda$, очевидно, является отображением, сохраняющим порядок. Поэтому тождественные изоморфизмы $M_\lambda \rightarrow M_\lambda$, отвечающие каждому $\lambda \in \Lambda'$, определяют отображение прямой системы M' в прямую систему M . Оставляем читателю проверить, что *предельное отображение* $M'_\infty \rightarrow M_\infty$ — *изоморфизм*.

Это очень важное свойство прямых систем модулей. Оно показывает, что переход к конфинальным подсистемам не меняет предела, и является аналогом следующего хорошо известного в теоретико-множественной топологии свойства сходящихся последовательностей: любая подпоследовательность сходящейся последовательности точек сходится к той же самой предельной точке. Возможно, это и служит основным оправданием использования слова «предел» в термине «прямой предел».

Упражнения

1. Докажите, что любое счетное направленное множество содержит конфинальное подмножество, являющееся последовательностью, т. е. изоморфное (в категории упорядоченных множеств) последовательности целых положительных чисел (или некоторой ее подпоследовательности).

2. Пусть M — прямая система R -модулей над направленным множеством Λ и M' — прямая система над Λ' . Пусть f и g — сохраняющие порядок отображения множества Λ в Λ' , и для каждого $\lambda \in \Lambda$ пусть $F_\lambda: M_\lambda \rightarrow M'_{f\lambda}$, $G_\lambda: M_\lambda \rightarrow M'_{g\lambda}$ — такие гомоморфизмы, что пары (f, F) и (g, G) определяют отображения системы M в M' . Предположим, $f(\lambda) < g(\lambda)$ в Λ' для каждого $\lambda \in \Lambda$ и что диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 & M_\lambda & \\
 f_\lambda \swarrow & & \searrow g_\lambda \\
 M'_{f\lambda} & \xrightarrow{m'_{f\lambda, g\lambda}} & M'_{g\lambda}
 \end{array}$$

коммутативна. Докажите, что предельные гомоморфизмы $F_\infty, G_\infty: M_\infty \rightarrow M'_\infty$ совпадают.

3. Пусть (f, F) — отображение прямой системы M в прямую систему M' , в котором все гомоморфизмы F_λ — нулевые отображения. Докажите, что предельное отображение F_∞ также является нулевым.

4. Пусть Λ_1 и Λ_2 — направленные множества. Определим отношение порядка на произведении множеств $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ условием: $(\lambda_1, \lambda_2) < (\mu_1, \mu_2)$ тогда и только тогда, когда $\lambda_1 < \mu_1$ и $\lambda_2 < \mu_2$. Докажите, что относительно этого порядка $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ — направленное множество.

5. Пусть M — прямая система *правых* R -модулей, определенная над направленным множеством Λ , и M' — прямая система *левых* R -модулей над Λ' . Определим прямую систему N абелевых групп над $\Lambda \times \Lambda'$ следующим образом:

$$N_{(\lambda, \nu)} = M_\lambda \otimes_R M'_\nu,$$

$$N_{(\lambda, \nu), (\mu, \rho)} = M_{\lambda, \mu} \otimes M'_{\nu, \rho}: M_\lambda \otimes_R M'_\nu \rightarrow M_\mu \otimes_R M'_\rho.$$

Пусть M_∞ — прямой предел системы M по отношению к гомоморфизмам $\varphi_\lambda: M_\lambda \rightarrow M_\infty$ и M'_∞ — прямой предел системы M' по отношению к гомоморфизмам $\varphi'_\nu: M'_\nu \rightarrow M'_\infty$. Докажите, что абелева группа $M_\infty \otimes_R M'_\infty$ является прямым пределом системы N по отношению к гомоморфизмам $\varphi_\lambda \otimes_R \varphi'_\nu: N_{(\lambda, \nu)} \rightarrow M_\infty \otimes_R M'_\infty$. Это свойство обычно формулируют так: прямые пределы коммутируют с тензорными произведениями.

6. Пусть M — прямая система R -модулей, определенная над направленным множеством Λ , и пусть Λ' — подмножество множества Λ , удовлетворяющее следующим трем условиям: (1) для любого $\lambda \in \Lambda$ существует такое $\mu \in \Lambda'$, что $\mu < \lambda$ и $M_{\mu\lambda}$ — изоморфизм; (2) для любых $\lambda \in \Lambda'$ и $\mu \in \Lambda$, таких, что $\lambda < \mu$, существует $\nu \in \Lambda'$, для которого $\lambda < \nu < \mu$ и $M_{\nu\mu}$ — изоморфизм; (3) Λ' — направленное множество (по отношению к заданному порядку). Обозначим через M' ограничение системы M на Λ' . Докажите, что отображение системы M' в M , определенное тождественными гомоморфизмами модулей M_λ в себя, $\lambda \in \Lambda'$, индуцирует изоморфизм модуля M'_∞ на M_∞ .

Мы закончим этот параграф обсуждением прямых пределов точных последовательностей модулей. Предположим, что M, M' и M'' — прямые системы R -модулей, определенные над одним и тем же направленным множеством Λ . Предположим, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ заданы гомоморфизмы $F_\lambda: M'_\lambda \rightarrow M_\lambda$ и $G_\lambda: M_\lambda \rightarrow$

$\rightarrow M''_\lambda$, такие, что $\text{Im } F_\lambda = \text{Ker } G_\lambda$, т. е. что последовательность

$$M'_\lambda \xrightarrow{F_\lambda} M_\lambda \xrightarrow{G_\lambda} M''_\lambda$$

точна. Предположим также, что гомоморфизмы F_λ и G_λ , $\lambda \in \Lambda$, коммутируют с гомоморфизмами $M_{\lambda\mu}$, $M'_{\lambda\mu}$ и $M''_{\lambda\mu}$ всякий раз, когда $\lambda < \mu$. Таким образом, гомоморфизмы F_λ , $\lambda \in \Lambda$, вместе с тождественным отображением $\Lambda \rightarrow \Lambda$ определяют отображение $M' \rightarrow M$; аналогично, гомоморфизмы G_λ определяют отображение $M \rightarrow M''$.

А.7. Теорема. При сделанных предположениях предельная последовательность

$$M'_\infty \xrightarrow{F_\infty} M_\infty \xrightarrow{G_\infty} M''_\infty$$

также является точной. Другими словами, прямой предел прямой системы точных последовательностей — точная последовательность.

Доказательство. Из того что $G_\lambda F_\lambda = 0$ для каждого λ , легко вытекает, что $G_\infty F_\infty = 0$ (ср. упр. 3 выше). Остается доказать включение $\text{Ker } G_\infty \subset \text{Im } F_\infty$. Пусть $a \in M_\infty$ — такой элемент, что $G_\infty(a) = 0$. Существует индекс $\lambda \in \Lambda$ и элемент $a_\lambda \in M_\lambda$, такой, что $\varphi_\lambda(a_\lambda) = a$, где $\varphi_\lambda: M_\lambda \rightarrow M_\infty$, $\lambda \in \Lambda$, — отображения, определяющие модуль M_∞ как прямой предел системы M . Тогда

$$0 = G_\infty(a) = G_\infty \varphi_\lambda(a_\lambda) = \varphi''_\lambda G_\lambda(a_\lambda).$$

Поскольку $\varphi''_\lambda[G_\lambda(a_\lambda)] = 0$, существует индекс $\mu > \lambda$, такой, что $M''_{\lambda\mu}[G_\lambda(a_\lambda)] = 0$. Поэтому

$$G_\mu[M_{\lambda\mu}(a_\lambda)] = M''_{\lambda\mu}[G_\lambda(a_\lambda)] = 0.$$

Следовательно, в силу точности существует такой элемент $a'_\mu \in M'_\mu$, что

$$F_\mu(a'_\mu) = M_{\lambda\mu}(a_\lambda).$$

Тогда

$$\begin{aligned} F_\infty[\varphi'_\mu(a'_\mu)] &= \varphi_\mu[F_\mu(a'_\mu)] = \\ &= \varphi_\mu[M_{\lambda\mu}(a_\lambda)] = \varphi_\lambda(a_\lambda) = a, \end{aligned}$$

что и требовалось.

А.8. Следствие. Прямые пределы сохраняют мономорфизмы. Более точно, если G_λ — мономорфизм для каждого $\lambda \in \Lambda$, то G_∞ — также мономорфизм.

Это утверждение — частный случай теоремы А.7, в котором $M'_\lambda = 0$ для всех λ . Менее точно его можно сформулировать следующим образом: операция перехода к прямому пределу коммутирует с операцией перехода к подгруппам.

А.9. Следствие. *Прямые пределы сохраняют эпиморфизмы, т. е. если все F_λ — эпиморфизмы, то F_∞ — также эпиморфизм.*

Для доказательства достаточно в теореме А.7 положить $M''_\lambda = 0$ для всех λ . Это следствие можно сформулировать так: операции перехода к факторгруппам и перехода к прямому пределу коммутируют друг с другом. Следует также заметить, что из теоремы А.7 вытекает перестановочность с прямым пределом операций взятия ядра, образа и коядра гомоморфизмов.

Применим теперь эти идеи к прямым пределам цепных (или коцепных) комплексов и их группам гомологий (или когомологий). Пусть Λ — направленное множество. Предположим, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ задан цепной (или коцепной) комплекс (R -модулей)

$$K(\lambda) = \{K_n(\lambda), \partial_n\},$$

и предположим, что всякий раз, когда $\lambda < \mu$, задано цепное (или коцепное) отображение

$$f_{\lambda\mu}: K(\lambda) \rightarrow K(\mu).$$

При этом, как обычно, если $\lambda < \mu < \nu$, то $f_{\mu\nu}f_{\lambda\mu} = f_{\lambda\nu}$. В этих условиях будем говорить, что задана прямая система цепных комплексов (над направленным множеством Λ). Предельный комплекс

$$K(\infty) = \varinjlim K(\lambda)$$

определяется очевидным образом: для каждого целого n

$$K_n(\infty) = \varinjlim K_n(\lambda)$$

и граничный гомоморфизм $\partial_n: K_n(\infty) \rightarrow K_{n-1}(\infty)$ определяется как прямой предел гомоморфизмов $\partial_n: K_n(\lambda) \rightarrow K_{n-1}(\lambda)$.

А.10. Теорема. *Операция взятия групп гомологий цепного комплекса коммутирует с переходом к прямому пределу. Более точно, существует естественный изоморфизм*

$$\varinjlim H_n(K(\lambda)) \cong H_n(K(\infty)).$$

Эта важная теорема легко вытекает из теоремы А.7 и ее следствий. Прежде всего заметим, что

$$Z_n(K(\infty)) \cong \varinjlim Z_n(K(\lambda))$$

и

$$B_n(K(\infty)) \cong \varinjlim B_n(K(\lambda)),$$

поскольку взятие ядер и образов коммутирует с переходом к прямому пределу. Из этого следует, что

$$\begin{aligned} H_n(K(\infty)) &= Z_n(K(\infty))/B_n(K(\infty)) \cong \\ &\cong \varinjlim Z_n(K(\lambda))/\varinjlim B_n(K(\lambda)) \cong \\ &\cong \varinjlim \frac{Z_n(K(\lambda))}{B_n(K(\lambda))} = \varinjlim H_n(K(\lambda)), \end{aligned}$$

поскольку операция взятия факторгрупп перестановочна с переходом к прямому пределу. При желании читатель легко добавит необходимые детали для получения более строгого доказательства.

Этим завершается наш обзор теории прямых пределов систем модулей и цепных комплексов. Само собой разумеется, можно также рассматривать прямые пределы прямых систем колец, алгебр и других алгебраических объектов.

§ А.3. Обратные пределы модулей

Обратные пределы двойственны прямым пределам. При стандартном подходе сначала определяются обратные системы модулей над направленным множеством Λ и затем — обратные пределы таких систем. Соответствующие определения получают-ся изменением направлений всех стрелок, фигурирующих в теории прямых пределов (см. § А.2). Позже эта теория (как и теория прямых пределов) была обобщена специалистами по теории категорий. В процессе развития обобщенной теории было замечено, что условие (3) из определения направленного множества (т. е. требование, что для любых $\lambda, \mu \in \Lambda$ существует элемент $\nu \in \Lambda$, для которого $\lambda < \nu$ и $\mu < \nu$) используется редко. В этом (как, впрочем, и во многих других результатах) проявляется резкое отличие от теории прямых пределов. После того как была развита теория производных функторов функтора обратного предела, выяснилось, что случай обратных последовательностей (т. е. обратных систем над множеством целых положительных чисел с их естественным порядком) намного проще общего и оказывается очень полезным для топологических применений.

По этим причинам мы определим обратные пределы модулей в довольно общей ситуации, однако все свое основное внимание сконцентрируем на случае обратных последовательностей.

Множество индексов Λ с некоторым отношением порядка мы заменим произвольной категорией. Таким образом, Λ состоит

из множества объектов¹⁾ $\lambda, \mu, \nu, \dots$ и морфизмов $\lambda \rightarrow \mu, \mu \rightarrow \nu$ и т. д., причем выполняются обычные условия:

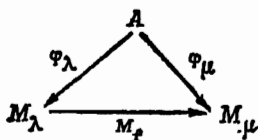
(1) Каждому объекту $\lambda \in \Lambda$ отвечает единственный тождественный морфизм $\lambda \rightarrow \lambda$, обладающий обычными свойствами.

(2) Если $\lambda \rightarrow \mu$ и $\mu \rightarrow \nu$ — морфизмы категории, то определена их композиция $\lambda \rightarrow \nu$.

(3) Композиция морфизмов ассоциативна.

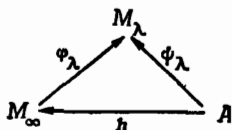
Обратная система M левых R -модулей над Λ — это *контравариантный*²⁾ функтор из категории Λ в категорию левых R -модулей. Таким образом, M сопоставляет каждому объекту $\lambda \in \Lambda$ левый R -модуль M_λ и каждому морфизму $f: \lambda \rightarrow \mu$ гомоморфизм R -модулей $M_f: M_\mu \rightarrow M_\lambda$, причем $M_{fg} = M_g M_f$, и если f — тождественный морфизм, то M_f — тождественный изоморфизм.

Предположим, что A — левый R -модуль и для каждого $\lambda \in \Lambda$ задан гомоморфизм $\varphi_\lambda: A \rightarrow M_\lambda$. Семейство этих гомоморфизмов называется *совместимым с M* , если для любого морфизма $f: \mu \rightarrow \lambda$ категории Λ диаграмма



коммутативна.

Обратный предел обратной системы M состоит из R -модуля M_∞ и совместимого с M семейства гомоморфизмов $\varphi_\lambda: M_\infty \rightarrow M_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, которое удовлетворяет следующему условию: для любого R -модуля A и совместимого с M семейства гомоморфизмов $\psi_\lambda: A \rightarrow M_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, существует *единственный* гомоморфизм $h: A \rightarrow M_\infty$, такой, что диаграмма



коммутативна для каждого λ .

Легко видеть, что это определение двойственно определению прямого предела. Нетрудно доказать, что любые два обратных предела системы M канонически изоморфны. Доказательство двойственно доказательству соответствующего результата о прямых пределах.

¹⁾ То есть Λ — малая категория. — *Прим. перев.*

²⁾ Автор собирается определить обратный предел контравариантного функтора из категории Λ . Аналогичное определение можно дать и для ковариантного функтора (см. [4*]). — *Прим. перев.*

Для доказательства существования обратного предела системы M образуем сначала прямое произведение

$$M' = \prod_{\lambda \in \Lambda} M_{\lambda}.$$

Каждый элемент $x \in M'$ — функция, сопоставляющая каждому $\lambda \in \Lambda$ элемент $x_{\lambda} \in M_{\lambda}$. Определим M_{∞} как множество всех элементов $x \in M'$, удовлетворяющих следующему условию: для каждого морфизма $f: \lambda \rightarrow \mu$ категории Λ

$$M_f(x_{\mu}) = x_{\lambda}.$$

Для каждого $\lambda \in \Lambda$ проекция $M' \rightarrow M_{\lambda}$ определяет гомоморфизм $\varphi_{\lambda}: M_{\infty} \rightarrow M_{\lambda}$, и семейство гомоморфизмов φ_{λ} очевидно, является совместимым с M . Оставляем читателю проверить последнее требование определения (условие, двойственное универсальности) и убедиться в том, что M_{∞} — действительно обратный предел системы M . Заметим, что обратный предел всегда непуст, но он может состоять лишь из одного нуля.

Далее определим отображения обратных систем и индуцированные ими отображения обратных пределов. Пусть Λ и Λ' — категории и M и M' — обратные системы R -модулей над Λ и Λ' соответственно. Отображение системы (M, Λ) в (M', Λ') состоит из ковариантного функтора α из категории Λ' в Λ (заметим, что он действует в противоположном направлении) и естественного преобразования Φ функтора $M\alpha$ в функтор M' . Это означает, что для каждого $\lambda \in \Lambda'$ задан гомоморфизм R -модулей

$$\Phi_{\lambda}: M_{\alpha(\lambda)} \rightarrow M'_{\lambda},$$

такой, что для любого морфизма $f: \lambda \rightarrow \mu$ категории Λ' диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M_{\alpha(\mu)} & \xrightarrow{\Phi_{\mu}} & M'_{\mu} \\ M_{\alpha(f)} \downarrow & & \downarrow M'_f \\ M_{\alpha(\lambda)} & \xrightarrow{\Phi_{\lambda}} & M'_{\lambda} \end{array}$$

коммутативна.

Пусть M_{∞} — обратный предел системы M по отношению к совместимому с M семейству гомоморфизмов $\varphi_{\lambda}: M_{\infty} \rightarrow M_{\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$; аналогично, пусть M'_{∞} — обратный предел системы M' по отношению к гомоморфизмам φ'_{λ} , $\lambda \in \Lambda'$. Рассмотрим гомоморфизмы

$$\Phi_{\lambda} \varphi_{\alpha(\lambda)}: M_{\infty} \rightarrow M'_{\lambda},$$

определенные для всех $\lambda \in \Lambda'$. Легко проверить, что это семейство гомоморфизмов является совместимым с M' . Согласно опре-

делению обратного предела, существует единственный гомоморфизм

$$\Phi_{\infty}: M_{\infty} \rightarrow M'_{\infty},$$

такой, что для всякого $\lambda \in \Lambda'$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & M'_{\lambda} & \\ \Phi_{\lambda} \Phi_{\alpha(\lambda)} \nearrow & & \searrow \Psi'_{\lambda} \\ M_{\infty} & \xrightarrow{\Phi_{\infty}} & M'_{\infty} \end{array}$$

коммутативна.

Гомоморфизм Φ_{∞} называется *обратным пределом отображения* (α, Φ) или, более кратко, *обратным пределом гомоморфизмов* Φ_{λ} . Для обозначения обратных пределов в книге систематически используется символ $\varprojlim$. Таким образом, мы часто пишем

$$\varprojlim \Phi_{\lambda}: M_{\infty} \rightarrow M'_{\infty}$$

или $M_{\infty} = \varprojlim M_{\lambda}$.

Как и в случае прямых систем, обратные системы R -модулей и их отображения образуют, очевидно, категорию, и операция перехода к обратному пределу — ковариантный функтор из этой категории в категорию левых R -модулей и их гомоморфизмов.

При доказательстве свойств гомоморфизмов обратных пределов полезно использовать тот факт, что для каждого $\lambda \in \Lambda'$ коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} M_{\alpha(\lambda)} & \xrightarrow{\Phi_{\lambda}} & M'_{\lambda} \\ \Phi_{\alpha(\lambda)} \uparrow & & \uparrow \Psi'_{\lambda} \\ M_{\infty} & \xrightarrow{\Phi_{\infty}} & M'_{\infty} \end{array}$$

В качестве примера рассмотрим такое утверждение:

A.11. Лемма. Если $\Phi_{\lambda} = 0$ для каждого $\lambda \in \Lambda'$, то

$$\Phi_{\infty} = 0.$$

Доказательство. Предположим противное, т. е. что существует такой элемент $x \in M_{\infty}$, что $\Phi_{\infty}(x) \neq 0$. Легко видеть, что в этом случае должен существовать объект $\lambda \in \Lambda'$, для которого $\Phi'_{\lambda}[\Phi_{\infty}(x)] \neq 0$. Однако из коммутативности приведенной выше диаграммы и из того, что $\Phi_{\lambda} = 0$, вытекает, что $\Phi'_{\lambda}\Phi_{\infty}(x) = 0$ для любого $x \in M_{\infty}$. Этим получено противоречие.

Далее рассмотрим отображения обратных систем модулей в важном частном случае, когда ковариантный функтор α

взаимно однозначен: иными словами, обе системы M и M' определены над одной и той же категорией Λ . Выясним, в какой степени обратные пределы сохраняют точность. Для того чтобы сформулировать основную теорему, сделаем следующие предположения:

- (1) Λ — некоторая категория,
- (2) M, M' и M'' — обратные системы левых R -модулей над категорией Λ ,
- (3) для каждого $\lambda \in \Lambda$ заданы такие гомоморфизмы $\Phi_\lambda: M'_\lambda \rightarrow M_\lambda$ и $\Psi_\lambda: M_\lambda \rightarrow M''_\lambda$, что последовательность

$$0 \rightarrow M'_\lambda \xrightarrow{\Phi_\lambda} M_\lambda \xrightarrow{\Psi_\lambda} M''_\lambda$$

является точной (разумеется, отображение Ψ_λ не предполагается эпиморфизмом).

- (4) Для любого морфизма $f: \lambda \rightarrow \mu$ в категории Λ диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} M'_\lambda & \rightarrow & M_\lambda & \rightarrow & M''_\lambda \\ \uparrow M'_f & & \uparrow M_f & & \uparrow M''_f \\ M'_\mu & \rightarrow & M_\mu & \rightarrow & M''_\mu \end{array}$$

коммутативна. Другими словами, гомоморфизмы Φ_λ и Ψ_λ определяют отображения обратных систем.

А.12. Теорема. При сделанных предположениях предельная последовательность

$$0 \rightarrow M'_\infty \xrightarrow{\Phi_\infty} M_\infty \xrightarrow{\Psi_\infty} M''_\infty$$

является точной.

Доказательство простое: следует воспользоваться тем фактом, что $\varprojlim M_\lambda$ можно рассматривать как подмножество прямого произведения модулей M_λ .

В соответствии с этой теоремой обратный предел мономорфизмов — мономорфизм. Однако обратный предел эпиморфизмов, вообще говоря, не является эпиморфизмом; ниже будут приведены простые примеры.

Упражнения

1. Пусть M — обратная система R -модулей над категорией Λ , и пусть M_∞ — обратный предел системы M . Докажите, что для любого левого R -модуля A существует естественный изоморфизм абелевых групп

$$\text{Hom}_R(A, M_\infty) \cong \varprojlim \text{Hom}_R(A, M_\lambda).$$

2. Пусть Λ — направленное множество (которое, как объяснялось в § А.2, можно рассматривать в качестве категории), и

пусть M — прямая система левых R -модулей над Λ . Докажите существование естественного изоморфизма

$$\operatorname{Hom}_R(M_\infty, A) \cong \varprojlim \operatorname{Hom}_R(M_\lambda, A)$$

абелевых групп, где M_∞ — прямой предел системы M , а A — произвольный левый R -модуль.

3. Пусть Λ — некоторая категория. По аналогии с определением прямой системы (см. § A.2) дайте правильное определение обратной системы цепных комплексов над Λ . Пусть эта обратная система состоит из цепных комплексов $K(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, и пусть $K(\infty)$ — предельный цепной комплекс. Докажите, что существует естественный гомоморфизм

$$H_n(K(\infty)) \rightarrow \varprojlim H_n(K(\lambda)).$$

§ A.4. Первый производный функтор функтора обратного предела

Как упоминалось в § A.3, функтор обратного предела не является точным, поскольку обратный предел эпиморфизмов, вообще говоря, не является эпиморфизмом. Отсутствие точности у функтора обратного предела приводит к производным функторам подобно тому, как отсутствие точности у тензорного произведения и у функтора Hom приводит к функторам Tor и Ext . Эти производные функторы, по-видимому, были впервые определены непосредственно перед 1960 г.; ср. ссылки в работе Милнора [42].

Производные функторы функтора обратного предела можно определить в полной общности. Однако теория много проще в частном случае обратных *последовательностей* модулей. Этого случая достаточно для всех рассматриваемых в книге применений, поэтому мы ограничимся его изложением.

Пусть Λ — направленное множество, состоящее из целых положительных чисел вместе с их обычным порядком. В § A.2 отмечалось, что Λ можно рассматривать как категорию, объекты которой — целые положительные числа и для любых двух чисел m и n множество морфизмов из m в n состоит ровно из одного элемента, если $m \leq n$, и пусто — если $n < m$. Обратную систему левых R -модулей над множеством Λ будем называть *обратной последовательностью* R -модулей. Читатель легко может убедиться в том, что обратная система R -модулей полностью определяется указанием бесконечной последовательности $M_1, M_2, M_3, \dots$ левых R -модулей и гомоморфизмов $M_{n+1} \rightarrow$

$\rightarrow M_n$ для всех $n \geq 1$. Условимся изображать такую последовательность в виде диаграммы

$$M_1 \leftarrow M_2 \leftarrow M_3 \leftarrow M_4 \leftarrow \dots$$

Некоторые авторы называют ее *башней R-модулей*.

Пример. Приведем простой пример, показывающий, что обратные пределы не сохраняют точность даже в случае обратных последовательностей. Для каждого целого положительного n пусть

$$0 \rightarrow M'_n \xrightarrow{\Phi_n} M_n \xrightarrow{\Psi_n} M''_n \rightarrow 0$$

— короткая точная последовательность абелевых групп (т. е. $\mathbb{Z}$ -модулей), в которой M'_n и M_n — бесконечные циклические группы, а M''_n — циклическая группа второго порядка. Гомоморфизм Φ_n — умножение на два. Для каждой последовательной пары целых чисел определим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & M'_{n+1} & \xrightarrow{\Phi_{n+1}} & M_{n+1} & \xrightarrow{\Psi_{n+1}} & M''_{n+1} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow 2 & & \downarrow 3 \\ 0 & \rightarrow & M'_n & \xrightarrow{\Phi_n} & M_n & \xrightarrow{\Psi_n} & M''_n \rightarrow 0 \end{array}$$

в которой стрелками с номерами 1 и 2 обозначены умножения на число 3, а гомоморфизм, обозначенный стрелкой с номером 3, является изоморфизмом. Таким образом, мы определили три обратные последовательности абелевых групп M , M' и M'' и отображения $\Phi: M' \rightarrow M$ и $\Psi: M \rightarrow M''$. Рассмотрим предельные группы и гомоморфизмы

$$0 \rightarrow M'_\infty \xrightarrow{\Phi_\infty} M_\infty \xrightarrow{\Psi_\infty} M''_\infty \rightarrow 0.$$

Легко проверить, что $M'_\infty = M_\infty = 0$, в то время как M''_∞ циклическая группа порядка два. Полученная последовательность, очевидно, не является точной. Таким образом, мы привели пример последовательности $\{\Psi_n\}$ эпиморфизмов, обратный предел Ψ_∞ которой не является эпиморфизмом.

Первый производный функтор обратного предела как раз и вводится для того, чтобы описать «меру» неточности функтора обратного предела. Дадим следующее простое определение, принадлежащее Стирроду.

A.13. Определение. Пусть

$$M_1 \xleftarrow{\Psi_1} M_2 \xleftarrow{\Psi_2} M_3 \xleftarrow{\Psi_3} M_4 \xleftarrow{\Psi_4} \dots$$

— обратная последовательность левых R -модулей. Определим эндоморфизм $d: M' \rightarrow M'$ декартова произведения $M' = \prod_{n=1}^{\infty} M_n$

формулой

$$d(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1 - \varphi_1 x_2, x_2 - \varphi_2 x_3, \dots).$$

Тогда ясно, что $\text{Ker } d$ — обратный предел этой последовательности. Определим *первый производный функтор от обратного предела* как коядро эндоморфизма d :

$$\varprojlim^1 M_n = M'/d(M').$$

Ясно, что $\varprojlim^1$ обладает следующим свойством естественности: отображение одной обратной последовательности (или башни) в другую, т. е. коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} M_1 & \leftarrow & M_2 & \leftarrow & M_3 & \leftarrow & \dots \\ \downarrow \Phi_1 & & \downarrow \Phi_2 & & \downarrow \Phi_3 & & \\ N_1 & \leftarrow & N_2 & \leftarrow & N_3 & \leftarrow & \dots \end{array}$$

индуцирует гомоморфизм

$$\varprojlim^1 \Phi_n: \varprojlim^1 M_n \rightarrow \varprojlim^1 N_n.$$

Таким образом, $\varprojlim^1$ — ковариантный функтор из категории обратных последовательностей R -модулей в категорию R -модулей.

А.14. Теорема. *Предположим, что задана короткая точная последовательность обратных последовательностей (или башен)*

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \rightarrow M'_2 & \xrightarrow{\Phi_2} & M_2 & \xrightarrow{\Psi_2} & M''_2 & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \rightarrow M'_1 & \xrightarrow{\Phi_1} & M_1 & \xrightarrow{\Psi_1} & M''_1 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Всякая такая последовательность приводит к следующей длинной точной последовательности, включающей обратные пределы и первые производные функторы:

$$0 \rightarrow \varprojlim M'_n \rightarrow \varprojlim M_n \rightarrow \varprojlim M''_n \xrightarrow{\Delta} \varprojlim^1 M'_n \rightarrow \varprojlim^1 M_n \rightarrow \varprojlim^1 M''_n \rightarrow 0.$$

Доказательство. Проще всего доказать эту теорему следующим образом. Модули $\varprojlim M_n$ и $\varprojlim^1 M_n$ определяются гомоморфизмом $d: \prod M_n \rightarrow \prod M_n$. Определим коцепный комплекс $C = \{C^n, \delta_n\}$, полагая $C^0 = C^1 = \prod M_n$, $C^n = 0$ при $n \neq 0, 1$, $\delta_0 = d$ и $\delta_n = 0$ при $n \neq 0, 1$. Тогда

$$\varprojlim M_n = H^0(C), \quad \varprojlim^1 M_n = H^1(C)$$

и $H^n(C) = 0$ при $n \neq 0, 1$. Короткая точная последовательность башен приводит к короткой точной последовательности таких коцепных комплексов. Соответствующая длинная точная последо-

вательность когомологий и есть точная последовательность, существование которой утверждается в теореме.

Эта теорема показывает, что для оценки неточности функтора обратного предела в случае обратных последовательностей (башен) достаточно иметь лишь первый производный функтор. Для более общих обратных систем модулей необходимо вводить производные функторы более высоких порядков.

Естественно, что в общем случае определения усложняются. Вообще говоря, вычисление модуля $\varprojlim M_n$ для данной башни $\{M_n\}$ — весьма сложная задача¹⁾. Однако существуют критерии, обеспечивающие в некоторых случаях обращение $\varprojlim M_n$ в нуль.

А.15. Лемма. Пусть $M_1 \leftarrow M_2 \leftarrow M_3 \leftarrow \dots$ — башня R -модулей, в которой все отображения $M_{n+1} \rightarrow M_n$ являются эпиморфизмами. Тогда $\varprojlim M_n = 0$.

Это утверждение легко следует из определения функтора $\varprojlim$.

А.16. Определение. Говорят, что обратная последовательность модулей $M_1 \leftarrow M_2 \leftarrow \dots$ удовлетворяет условию Миттаг-Леффлера (кратко ML-условию), если для каждого целого числа n существует такое целое число $m \geq n$, что для любого $i \geq m$

$$\text{Im}(M_i \rightarrow M_n) = \text{Im}(M_m \rightarrow M_n).$$

Другими словами, для любого фиксированного n образ гомоморфизма $M_i \rightarrow M_n$ не зависит от i при условии, что i достаточно велико.

Примеры. Условию Миттаг-Леффлера автоматически удовлетворяет любая башня конечных абелевых групп. Аналогично,

¹⁾ А. Э. Харлап [14*] показал, что для счетных M_n модуль $\varprojlim M_n$ либо равен нулю, либо имеет мощность континуума. Аналогичным образом можно показать, что для счетно порожденных модулей M_n над любым артиновым кольцом R (например, для счетномерных векторных пространств) модуль $\varprojlim M_n$ либо равен нулю, либо не имеет счетного множества образующих. С другой стороны, известно, что группа $\text{Ext}(A, B)$ может быть счетной для счетной группы A без кручения (см. стр. 119 в [28*]). Представляя A как $\varinjlim A_n$ для конечно порожденных свободных подгрупп A_n , нетрудно установить изоморфизм $\text{Ext}(A, B) = \varprojlim \text{Hom}(A_n, B)$ (ср. с упр. 2 в конце параграфа). Таким образом, в общем случае группа $\varprojlim M_n$ может быть счетной. Аналогично, модуль $\text{Ext}_R(A, R)$ может быть счетно порожден для счетно порожденного модуля A над несчетным кольцом главных идеалов R (см. стр. 23 в [25*]), поэтому в общем случае модуль $\varprojlim M_n$ может оказаться счетно порожденным для счетно порожденных модулей M_n (снова полагаем $M_n = \text{Hom}_R(A_n, R)$), A_n — конечно порожденные подмодули модуля A без кручения). — Прим. ред.

ML-условию удовлетворяет любая башня конечномерных векторных пространств.

Заметим, что ML-условие без изменений может быть сформулировано и для обратных систем модулей, определенных над произвольным направленным множеством. Однако мы не будем обсуждать его значение в этом случае¹⁾.

А.17. Лемма. Пусть $M_1 \leftarrow M_2 \leftarrow M_3 \leftarrow \dots$ — башня R -модулей, удовлетворяющая условию Миттаг-Леффлера. Тогда $\varprojlim M_n = 0$ ²⁾.

Доказательство. Для каждого целого n пусть M'_n — подмодуль модуля M_n , являющийся образом гомоморфизмов $M_i \rightarrow M_n$ для достаточно больших $i > n$; ML-условие обеспечивает корректность этого определения. Ясно, что гомоморфизм $M_{n+1} \rightarrow M_n$ отображает M'_{n+1} на M'_n . Таким образом, возникает башня $M'_1 \leftarrow M'_2 \leftarrow M'_3 \leftarrow \dots$, в которой все отображения — эпиморфизмы. Следовательно, в силу леммы А.15

$$\varprojlim M'_n = 0.$$

Рассмотрим также башню фактормодулей

$$M_1/M'_1 \rightarrow M_2/M'_2 \leftarrow M_3/M'_3 \leftarrow \dots$$

Эта башня «тривиальна» в том смысле, что для любого целого числа n существует такое $m > n$, что гомоморфизм $M_m/M'_m \rightarrow M_n/M'_n$ является нулевым. Отсюда, очевидно, следует, что $\varprojlim M_n/M'_n = 0$. Но более важно, что это условие обеспечивает также равенство $\varprojlim M_n/M'_n = 0$. Оставляем читателю доказать это утверждение в качестве упражнения. Доказательство этой леммы завершается применением точной последовательности из

¹⁾ Для таких обратных систем группа $\varprojlim M_n$ может быть отлична от нуля даже в том случае, когда все M_λ — свободные группы конечного ранга, а все отображения $M_\lambda \rightarrow M_\mu$, $\lambda > \mu$, — эпиморфизмы. Например, если $M_\lambda = \text{Hom}(A_\lambda, Z)$, где $\{A_\lambda\}$ — подходящая система конечно порожденных подгрупп группы $\prod_{i=1}^{\infty} Z$, для которой $\prod_{i=1}^{\infty} Z = \varinjlim A_\lambda$, то $\varprojlim M_\lambda = \text{Ext}(\prod_{i=1}^{\infty} Z,$

$Z) \neq 0$ (ср. с упр. 2 в конце параграфа). В этом случае $\varprojlim M_\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} Z$. —

Прим. ред.

²⁾ Для счетных M_n верно также обратное утверждение, см. Gray В. I., *Topology*, 5 (1966), 241—243, или [14*]. — *Прим. ред.*

теоремы А.14, соответствующей короткой точной последовательности башен

$$0 \longrightarrow \{M'_n\} \longrightarrow \{M_n\} \longrightarrow \{M_n/M'_n\} \longrightarrow 0.$$

Как показано в § А.2, прямой предел не изменяется при переходе к конфинальной подсистеме прямой системы R -модулей. Аналогичный результат справедлив и для обратных пределов обратных систем R -модулей, определенных над любым направленным множеством; доказательство практически очевидно. В частности, в любой обратной последовательности R -модулей можно переходить к произвольным (бесконечным) подпоследовательностям.

А.18. Предложение. Пусть $M_1 \xleftarrow{\varphi_1} M_2 \xleftarrow{\varphi_2} M_3 \xleftarrow{\varphi_3} \dots$ — обратная последовательность R -модулей. Значение функтора $\varprojlim^1$ не изменится, если в этой последовательности перейти к любой бесконечной подпоследовательности.

Более точная форма этого утверждения выяснится в процессе доказательства.

Доказательство. Возможно, основная трудность в доказательстве — это использование сложных обозначений, связанных с рассмотрением в последовательности целых положительных чисел произвольной подпоследовательности¹⁾. Наши обозначения не вполне формальны, но мы надеемся, что они проще для понимания, чем более формальные и логически правильные обозначения, которые можно было бы использовать.

Как и в случае теоремы А.14, доказательство использует стандартную технику теории коцепных комплексов. Мы покажем, что коцепной комплекс, определяющий обратный предел и первый производный функтор $\varprojlim^1$ для подпоследовательности, является деформационным ретрактом коцепного комплекса, определяющего обратный предел и $\varprojlim^1$ для всей последовательности. Этого, очевидно, достаточно для доказательства теоремы.

Пусть I — множество всех положительных целых чисел, и пусть $S = (i, j, k, l, \dots)$ — бесконечная подпоследовательность. Обратный предел и $\varprojlim^1$ для последовательности всех целых положительных чисел определяются как когомологии «коцепного

¹⁾ Функторы $\varprojlim^p$ не изменяются при переходе к конфинальной части и в случае обратных систем модулей над любым направленным множеством Λ . Это свойство — автоматическое следствие одного из описаний $\varprojlim^p$ как когомологий обратного предела некоторых специальных коцепных комплексов (см. [31*] или [25*]). — Прим. ред.

комплекса»

$$\alpha: \prod_{\alpha \in I} M_{\alpha} \rightarrow \prod_{\alpha \in I} M_{\alpha},$$

в котором кограничный оператор d описывается формулой

$$\alpha(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1 - \varphi x_2, x_2 - \varphi x_3, \dots)$$

(ср. доказательство теоремы А.14 и определение функтора $\lim^1$).

Аналогично, обратный предел и $\lim^1$, отвечающие подпоследовательности S , — это когомологии коцепного комплекса

$$d': \prod_{\alpha \in S} M_{\alpha} \rightarrow \prod_{\alpha \in S} M_{\alpha},$$

в котором кограничный оператор d' имеет вид

$$d'(x_i, x_j, x_k, \dots) = (x_i - \varphi^{j-i} x_j, x_j - \varphi^{k-j} x_k, \dots).$$

В этой и всех следующих формулах φ^n означает n -кратную композицию $\varphi \dots \varphi$ гомоморфизмов φ ; удобно обозначить гомоморфизмы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и т. д. одной и той же буквой φ (это не приведет к недоразумениям). Определим теперь гомоморфизмы

$$f_0, f_1: \prod_{\alpha \in S} M_{\alpha} \rightarrow \prod_{\alpha \in I} M_{\alpha}$$

формулами

$$\begin{aligned} f_0(x_i, x_j, x_k, \dots) &= \\ &= (\varphi^{i-1} x_i, \varphi^{i-2} x_i, \dots, \varphi x_i, x_i, \varphi^{j-i-1} x_j, \varphi^{j-i-2} x_j, \dots, \varphi x_j, x_j, \dots), \\ f_1(y_i, y_j, y_k, \dots) &= (0, 0, \dots, y_i, 0, \dots, 0, y_j, 0, \dots, 0, y_k, 0, \dots). \end{aligned}$$

Заметим, что f_1 — каноническое включение. Прямое вычисление показывает, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\alpha \in S} M_{\alpha} & \xrightarrow{f_1} & \prod_{\alpha \in I} M_{\alpha} \\ \downarrow d' & & \downarrow d \\ \prod_{\alpha \in S} M_{\alpha} & \xrightarrow{f_0} & \prod_{\alpha \in I} M_{\alpha} \end{array}$$

Таким образом, f_0 и f_1 определяют коцепное отображение f одного коцепного комплекса в другой. Далее определим гомоморфизмы

$$g_0, g_1: \prod_{\alpha \in I} M_{\alpha} \rightarrow \prod_{\alpha \in S} M_{\alpha}$$

(действующие в обратном направлении) формулами

$$g_0(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_i, x_j, x_k, \dots)$$

и

$$\begin{aligned} g_1(y_1, y_2, y_3, \dots) &= (y_i + \varphi y_{i+1} + \varphi^2 y_{i+2} + \dots + \\ &+ \varphi^{j-i-1} y_{j-1}, y_j + \varphi y_{j+1} + \varphi^2 y_{j+2} + \dots + \varphi^{k-j-1} y_{k-1}, \dots). \end{aligned}$$

Заметим, что g_0 — каноническая проекция. Можно проверить, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\alpha \in I} M_\alpha & \xrightarrow{g_0} & \prod_{\alpha \in S} M_\alpha \\ \downarrow d & & \downarrow d' \\ \prod_{\alpha \in I} M_\alpha & \xrightarrow{g_1} & \prod_{\alpha \in S} M_\alpha \end{array}$$

коммутативна. Таким образом, гомоморфизмы g_0 и g_1 определяют коцепное отображение g , действующее в противоположном направлении, чем отображение f . Тривиально проверяется, что $g_0 f_0 = g_1 f_1 = id$ — тождественный изоморфизм модуля $\prod_{\alpha \in S} M_\alpha$ на себя. Для завершения доказательства покажем, что коцепное отображение fg гомотопно тождественному. Для этого определим гомоморфизм

$$D: \prod_{\alpha \in I} M_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha \in I} M_\alpha$$

формулой

$$\begin{aligned} D(y_1, y_2, y_3, \dots) = & (y_1 + \varphi y_2 + \varphi^2 y_3 + \dots + \varphi^{i-2} y_{i-1}, \\ & y_2 + \varphi y_3 + \dots + \varphi^{i-3} y_{i-1}, \dots, y_{i-1}, 0, \\ & y_{i+1} + \varphi y_{i+2} + \dots + \varphi^{i-2} y_{i+1}, \\ & y_{i+2} + \varphi y_{i+3} + \dots + \varphi^{i-3} y_{i+2}, \dots, y_{i+1}, 0, \dots). \end{aligned}$$

Тогда справедливы следующие два соотношения:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, \dots) - f_0 g_0(x_1, x_2, x_3, \dots) &= Dd(x_1, x_2, x_3, \dots), \\ (y_1, y_2, y_3, \dots) - f_1 g_1(y_1, y_2, y_3, \dots) &= dD(y_1, y_2, y_3, \dots). \end{aligned}$$

Этим установлено, что D — требуемая цепная гомотопия. Доказательство закончено.

Упражнения

1. Пусть $M_1 \leftarrow M_2 \leftarrow M_3 \leftarrow \dots$ — башня, в которой для каждого целого числа n существует такое $m > n$, что гомоморфизм $M_n \leftarrow M_m$ является нулевым. Докажите, что $\lim^1 M_n = 0$ (ср. доказательство леммы А.17).

2. Для любого левого R -модуля A определим двойственный к A правый модуль A^* равенством $A^* = \text{Hom}_R(A, R)$. Аналогично, гомоморфизму $f: A \rightarrow B$ левых R -модулей отвечает двойственный гомоморфизм $f^*: B^* \rightarrow A^*$ правых R -модулей. Пусть $M_1 \xleftarrow{\varphi} M_2 \xleftarrow{\varphi} M_3 \xleftarrow{\varphi} \dots$ — обратная последовательность левых R -модулей, в которой каждый модуль M_n конечно порожден и проективен. Рассмотрим двойственную прямую последователь-

ность $M_1^* \xrightarrow{\varphi^*} M_2^* \xrightarrow{\varphi^*} M_3^* \xrightarrow{\varphi^*} \dots$, и пусть $A = \varinjlim M_n^*$. Докажите, что $\varprojlim M_n \cong \text{Hom}_R(A, R) = A^*$, $\varprojlim^1 M_n \cong \text{Ext}_R^1(A, R)$ и $\text{Ext}_R^q(A, R) = 0$ при $q > 1$. [Указание. Воспользуйтесь тем фактом, что для любого конечно порожденного проективного R -модуля M естественный гомоморфизм $M \rightarrow M^{**}$ является изоморфизмом. Используйте также указанную выше двойственную прямую последовательность для построения некоторой проективной резольвенты модуля A .]

§ А.5. Гомологии и обратные пределы

В § А.2 мы доказали, что группы гомологий прямого предела (прямой системы цепных комплексов) совпадают с прямыми пределами соответствующих систем групп гомологий. Доказательство являлось простым следствием того, что прямые пределы сохраняют точные последовательности. С другой стороны, обратные пределы не сохраняют точность, и легко привести примеры, в которых группы гомологий обратного предела цепных комплексов не изоморфны обратным пределам групп гомологий¹⁾.

В настоящем параграфе мы воспользуемся функтором $\varprojlim^1$ для доказательства довольно общей теоремы, которая в этой ситуации восстанавливает некоторый порядок. Она во многих отношениях аналогична теореме об универсальных коэффициентах из § 4.8.

Пусть

$$K(1) \xleftarrow{\varphi_1} K(2) \xleftarrow{\varphi_2} K(3) \xleftarrow{\varphi_3} \dots$$

— обратная последовательность (или башня), в которой все $K(i) = \{K_n(i), \partial_n^i\}$ — цепные комплексы (R -модулей), и φ_i — цепные отображения. Обратный предел этой башни

$$K(\infty) = \varprojlim K(i)$$

определяется очевидным образом:

$$K_n(\infty) = \varprojlim K_n(i)$$

и граничный оператор $\partial_n^\infty: K_n(\infty) \rightarrow K_{n-1}(\infty)$ — обратный предел граничных операторов $\partial_n^i: K_n(i) \rightarrow K_{n-1}(i)$.

А.19. Теорема. *Предположим, что для каждого целого n*

$$\varprojlim^1 K_n(i) = 0.$$

¹⁾ В качестве таких цепных комплексов можно взять, например, точные последовательности, фигурирующие в примере из § А.4. — *Прим. ред.*

Тогда для каждого q существует естественная короткая точная последовательность¹⁾

$$0 \longrightarrow \varprojlim^1 H_{q+1}(K(i)) \xrightarrow{\beta} H_q(K(\infty)) \xrightarrow{\alpha} \varprojlim H_q(K(i)) \longrightarrow 0.$$

Другими словами, существует естественный эпиморфизм α группы $H_q(\varprojlim K(i))$ на $\varprojlim H_q(K(i))$, ядро которого естественно изоморфно группе $\varprojlim^1 H_{q+1}(K(i))$.

Доказательство. Для целых чисел q и i следующие короткие последовательности

$$(1) \quad 0 \longrightarrow Z_q(K(i)) \longrightarrow K_q(i) \xrightarrow{f_i} B_{q-1}(K(i)) \longrightarrow 0,$$

$$(2) \quad 0 \longrightarrow B_q(K(i)) \longrightarrow Z_q(K(i)) \xrightarrow{h_i} H_q(K(i)) \longrightarrow 0$$

точны. Мы можем взять обратный предел каждой из этих последовательностей по $i \rightarrow \infty$ и применить теорему А.14. Пользуясь предположением, что $\varprojlim^1 K_q(i) = 0$, из последовательности (1) заключаем, что

$$(3) \quad \varprojlim^1 B_{q-1}(K(i)) = 0.$$

Отсюда и из (2) следует, что

$$(4) \quad \varprojlim^1 Z_q(K(i)) \cong \varprojlim^1 H_q(K(i)).$$

Получаем также следующие точные последовательности:

$$(5) \quad 0 \longrightarrow \varprojlim Z_q(K(i)) \longrightarrow K_q(\infty) \xrightarrow{f_\infty} \varprojlim B_{q-1}(K(i)) \longrightarrow \\ \longrightarrow \varprojlim^1 Z_q(K(i)) \longrightarrow 0,$$

$$(6) \quad 0 \longrightarrow \varprojlim B_q(K(i)) \longrightarrow \varprojlim Z_q(K(i)) \xrightarrow{h_\infty} \varprojlim (H_q K(i)) \longrightarrow 0.$$

Поскольку взятие ядер коммутирует с переходом к обратному пределу, то

$$(7) \quad Z_q(K(\infty)) = \varprojlim Z_q(K(i)).$$

¹⁾ Этот результат получен А. Э. Харлапом (см. лемму 7в [14*]). — Прим. ред.

Далее рассмотрим следующую коммутативную диаграмму¹⁾:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & Z_q(K(t)) & \longrightarrow & K_q(t) & \xrightarrow{\partial_q^t} & K_{q-1}(t) \longrightarrow \frac{K_{q-1}(t)}{B_{q-1}(K(t))} \longrightarrow 0 \\
 & & & & \searrow f_t & & \nearrow g_t \\
 & & & & & B_{q-1}(K(t)) & \\
 & & & & \nearrow & & \searrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Диаграмма содержит короткую точную последовательность (1). Перейдем к обратному пределу по $t \rightarrow \infty$. Получим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \varprojlim Z_q(K(t)) & \longrightarrow & K_q(\infty) & \xrightarrow{\partial_q^\infty} & K_{q-1}(\infty) \longrightarrow \frac{K_{q-1}(\infty)}{\varprojlim B_{q-1}(K(t))} \longrightarrow 0 \\
 & & & & \searrow f_\infty & & \nearrow g_\infty \\
 & & & & & \varprojlim B_{q-1}(K(t)) & \longrightarrow \varprojlim^1 Z_q(K(t)) \longrightarrow 0 \\
 & & & & \nearrow & & \\
 & & & & 0 & &
 \end{array}$$

содержащую точную последовательность (5). Из этой диаграммы вытекает, что $\text{Im } \partial_q^\infty \subset \text{Im } g_\infty$. Это означает, что

$$(9) \quad B_{q-1}(K(\infty)) \subset \varprojlim B_{q-1}(K(t))$$

и

$$(10) \quad \varprojlim B_{q-1}(K(t))/B_{q-1}(K(\infty)) \cong \varprojlim^1 Z_q(K(t)).$$

¹⁾ Оставшаяся часть доказательства может быть проведена следующим образом. При переходе к пределу отображения $K_{q+1}(t) \rightarrow B_q(K(t))$ обеспечивают включение $B_q(K(\infty)) \subset \varprojlim B_q(K(t))$, дающее эпиморфизм $\alpha: H_q(K(\infty)) \rightarrow \varprojlim H_q(K(t))$ с ядром $\varprojlim B_q(K(t))/B_q(K(\infty))$. Из точной последовательности $K_{q+1}(\infty) \rightarrow \varprojlim B_q(K(t)) \rightarrow \varprojlim^1 K_{q+1}(K(t)) \rightarrow \varprojlim^1 K_{q+1}(t) = 0$, отвечающей тройке (1), в силу изоморфизма (4) вытекает, что ядро α совпадает с

$$\varprojlim^1 Z_{q+1}(K(t)) = \varprojlim^1 H_{q+1}(K(t)).$$

Аналогичные рассуждения применимы и в других ситуациях. Замена функтора $\varprojlim$ на Hom или $\otimes$ позволяет получить наиболее простые доказательства теорем об универсальных коэффициентах. — Прим. ред.

Поскольку $B_{q-1}(K(i)) \subset Z_{q-1}(K(i))$ для всех i , при переходе к обратному пределу получим

$$(11) \quad \varprojlim B_{q-1}(K(i)) \subset \varprojlim Z_{q-1}(K(i)).$$

Далее, пользуясь включениями (9) и (11), получим следующую короткую точную последовательность фактормодулей:

$$0 \longrightarrow (\varprojlim B_{q-1}(K(i))/B_{q-1}(K(\infty))) \longrightarrow Z_{q-1}(K(\infty))/B_{q-1}(K(\infty)) \longrightarrow \\ \longrightarrow (\varprojlim Z_{q-1}(K(i))/\varprojlim B_{q-1}(K(i))) \longrightarrow 0.$$

Здесь мы воспользовались также равенством (7). Мы закончим доказательство, отождествляя каждый из этих фактормодулей с соответствующим членом последовательности, фигурирующей в теореме:

(а) В силу равенств (10) и (4) первый фактормодуль изоморфен $\varprojlim^1 H_q(K(i))$.

(b) По определению второй фактормодуль изоморфен $H_{q-1}(K(\infty))$.

(с) Из короткой точной последовательности (6) вытекает, что третий фактормодуль изоморфен $\varprojlim H_{q-1}(K(i))$.

Оставляем читателю сформулировать точное определение свойства естественности этой последовательности и проверить, что она обладает этим свойством.

При проверке основного предположения, сделанного в теореме, часто пользуются условием Миттаг-Леффлера. Выражение $\varprojlim^1 H_{q+1}(K(i))$ можно рассматривать как меру того, насколько функтор гомологий не коммутирует с переходом к обратному пределу.

Добавления редактора перевода

К главе 4

В соответствии с § 4.11 $C_c^\bullet(X; R)$ — комплекс свободных R -модулей и $C_\bullet(X; G) = \text{Hom}_R(C_c^\bullet(X; R), G)$ для любого R -модуля G . Поэтому, если R — коммутативное наследственное кольцо (например, кольцо главных идеалов), имеют место следующие точные последовательности (см. [8]):

$$0 \rightarrow \text{Ext}_R(H_c^{n+1}(X; R), G) \rightarrow H_n(X; G) \rightarrow \text{Hom}_R(H_c^n(X; R), G) \rightarrow 0.$$

Как и в следствии 4.18, эти последовательности расщепляются [11]. Далее

$$C_c^\bullet(X; G) = C_c^\bullet(X; Z) \otimes G = C_c^\bullet(X; Z) \otimes R \otimes_R G = C_c^\bullet(X; R) \otimes_R G.$$

Поэтому для любого R -модуля G имеют место точные последовательности

$$0 \rightarrow H_c^n(X; R) \otimes_R G \rightarrow H_c^n(X; G) \rightarrow \text{Tor}_R(H_c^{n+1}(X; R), G) \rightarrow 0.$$

Эти последовательности расщепляются (ср. со следствием 4.25).

При естественных ограничениях аналогичные соотношения справедливы и для групп гомологий. Заметим, что при каждом p модуль цепей $C_p(X; R) = \text{Hom}_R(C_c^\bullet(X; R), R)$ имеет вид прямого произведения $\prod_\lambda R$ кольца R . Аналогично модуль $C_p(X; G)$ изоморфен $\prod_\lambda G$. Имеется естественное преобразование $(\prod_\lambda R) \otimes_R G \rightarrow \prod_\lambda G$, которое является изоморфизмом лишь при условии (см. лемму 7 в [49]), что G — конечно представимый модуль (т. е. конечно порожденный модуль с конечным числом соотношений, или просто конечно порожденный модуль, если кольцо R нётерово). Таким образом, для конечно представимых G имеется естественный изоморфизм

$$C_\bullet(X; G) = C_\bullet(X; R) \otimes_R G.$$

В обычных ситуациях модули вида $\prod_\lambda R$ плоские (это утверждение — одна из характеристик когерентных колец), поэтому

[5*] для конечно представимых модулей G имеют место точные последовательности (см. § 4 в [49])

$$(a) \quad 0 \rightarrow H_n(X; R) \otimes_R G \rightarrow H_n(X; G) \rightarrow \text{Tor}_R(H_{n-1}(X; R), G) \rightarrow 0,$$

которые расщепляются, если $R = \mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел. При $R = \mathbb{Z}$ соотношения нарушаются для любой абелевой группы G , не имеющей конечного числа образующих (достаточно рассмотреть нульмерные гомологии счетного дискретного пространства).

Соотношения (а) отличают теорию гомологий, рассматриваемую в настоящей книге (и описанную в терминах других цепей в [49]), от теорий Бореля — Мура [16*] (развиваемой, например, в [5]), в которой группы гомологий определяются таким образом, что точные последовательности (а) имеют место без каких-либо ограничений на G . Таким образом, гомологии Бореля — Мура локально конечных полиэдров с коэффициентами в бесконечно порожденных группах отличаются от симплициальных гомологий второго рода. По той же причине гомологии Бореля — Мура с коэффициентами в G могут зависеть, вообще говоря, от того, над каким кольцом группа G рассматривается в качестве модуля (например, в случае аддитивной группы рациональных чисел гомологии зависят от того, рассматривается ли эта группа как $\mathbb{Z}$ -модуль или как модуль над кольцом рациональных чисел, см. [5]). Эти и другие недостатки теории Бореля — Мура рассмотрены в [49] (см. также [13*]).

Гомологии H_* и когомологии H_c^* локально компактных пространств допускают следующее описание. Пусть α — локально конечное покрытие пространства X компактными «каноническими» множествами (каждое $F \in \alpha$ — замыкание своей внутренней части $\text{Int } F$), в котором $\text{Int } F \cap \text{Int } F' = \emptyset$ для любых двух различных множеств $F, F' \in \alpha$. Если α и β — такие покрытия, то под $\alpha \wedge \beta$ будем подразумевать покрытие того же сорта, составленное из замыканий множеств $\text{Int } F \cap \text{Int } F'$, $F \in \alpha$, $F' \in \beta$. Если β вписано в α , то однозначно определена проекция $|\beta| \rightarrow |\alpha|$ нервов этих покрытий, обеспечивающая эпиморфизм цепей $C_*(\beta; G) \rightarrow C_*(\alpha; G)$ и мономорфизм коцепей $C_c^*(\alpha; G) \rightarrow C_c^*(\beta; G)$, каждый из которых расщепляется в любой отдельной размерности (G — любой R -модуль).

Пусть ω — любая система покрытий X указанного выше типа, удовлетворяющая следующим требованиям: а) для $\alpha, \beta \in \omega$ найдется покрытие $\gamma \in \omega$, вписанное в $\alpha \wedge \beta$; б) покрытия из ω локально измельчаются (для всякой точки $x \in X$ и любой ее окрестности U найдется такое $\alpha \in \omega$, что из $x \in F$, $F \in \alpha$ вытекает $F \subset U$). В случае когда X метризуемо, в качестве ω можно рассматривать последовательность вписанных друг в друга локально измельчающихся покрытий. Определены цепной

и коцепной комплексы $C_*^\omega(X; G) = \varprojlim_{\alpha \in \omega} C_*(\alpha; G)$, $C_{c\omega}^*(X; G) = \varprojlim_{\alpha \in \omega} C_c^*(\alpha; G)$. Оказывается, что гомологии и когомологии этих

комплексов не зависят от выбора системы покрытий ω и совпадают соответственно с $H_*(X; G)$ и $H_c^*(X; G)$. Для всякого замкнутого подмножества $A \subseteq X$ коцепи, компактные носители которых расположены в $X \setminus A$, образуют подкомплекс в $C_{c\omega}^*(X; G)$, определяющий когомологии пары $H_c^*(X, A; G)$, а вместе с факторкомплексом — всю точную когомологическую последовательность пары (X, A) . При этом возникает естественный изоморфизм $H_c^*(X, A; G) = H_c^*(X \setminus A; G)$. В соответствии с результатами из [29] каждый модуль $C_p^\omega(X; G)$ изоморфен некоторому произведению $\prod_\lambda G$, а каждый $C_{c\omega}^p(X; G)$ — прямой сумме $\sum_\lambda G$ (это очевидно в случае, когда ω — последовательность покрытий). Аналогичные утверждения справедливы для цепей и коцепей подмножеств и пар. Таким образом, при $G = R$ комплексы коцепей оказываются свободными, а комплексы цепей с коэффициентами в G получаются из них стандартным образом с помощью функтора $\text{Hom}_R(-, G)$. Эти наблюдения приводят как к одному из описаний теории гомологий H_* (возможно также описание, не зависящее от когомологий), так и к установлению всевозможных соотношений типа формул универсальных коэффициентов.

Приведенное описание теории H_* и H_c^* дано в [49] и [11*] (для неметризуемых локально компактных пространств — в § 1 из [12*]). Изоморфизм теорий, рассматриваемых в указанных работах и в настоящей книге, доказан в обзоре [13*].

Рассмотренные выше определения цепей и коцепей с коэффициентами в R -модуле G не зависят, очевидно, от основного кольца R . Цепи и коцепи обладают следующими свойствами аддитивности: если X — объединение попарно непересекающихся открыто-замкнутых подмножеств X_ν , то $C_*^\omega(X; G) = \prod_\nu C_*^\omega(X_\nu; G)$ (свойство $\prod$ -аддитивности) и $C_{c\omega}^*(X; G) = \sum_\nu C_{c\omega}^*(X_\nu; G)$ (свойство $\sum$ -аддитивности). Отсюда вытекают свойства $\prod$ -аддитивности для функторов H_p и $\sum$ -аддитивности для H_c^p .

Независимость определения цепей от коцепей позволяет рассматривать гомологии не только с постоянными, но и любыми локально постоянными коэффициентами $\mathcal{G}$ (цепной комплекс $C_*^\omega(X; \mathcal{G})$ определяется как $\varprojlim_{\alpha} C_*(\alpha; \mathcal{G}) = \varprojlim_{(\alpha, \alpha')} C_*(\alpha, \alpha'; \mathcal{G})$, где

ω — система достаточно мелких покрытий, $\alpha \in \omega$, α' — любая часть α , содержащая все множества F , кроме конечного числа, причем пара (β, β') следует за (α, α') , если покрытие β вписано в α и объединение множеств из β' содержится в объединении α' (для компактных X можно считать, что $\alpha' \neq \emptyset$). При этом имеют место следующие точные последовательности:

$$0 \rightarrow \varprojlim_{(\alpha, \alpha')} H_{n+1}(\alpha, \alpha'; \mathcal{G}) \rightarrow H_n(X; \mathcal{G}) \rightarrow \varprojlim H_n(\alpha, \alpha'; \mathcal{G}) \rightarrow 0.$$

Крайние члены этих последовательностей не зависят от выбора определяющей цепи X системы покрытий ω . Для гомотопий компактных метрических пространств с постоянными коэффициентами эти соотношения получены в [31*] (а в других терминах — даже в работе Стиррода [55]). Для компактных пространств

$$\varprojlim_{\alpha \in \omega} H_n(\alpha; \mathcal{G}) = \check{H}_n(X; \mathcal{G}).$$

К главе 5

В сущности, клеточный метод вычисления групп H_c^p и H_p — это начальная стадия доказательства единственности теорий гомотопий и когомологий, удовлетворяющих стандартным требованиям (см. § 1.6 и 4.3), в категориях клеточных разбиений или комплексов. Для окончательного вывода о единственности, однако, необходимо еще проверить совместимость этого метода с собственными непрерывными отображениями, со связывающими гомоморфизмами в точных гомотопической и когомотопической последовательностях и т. п. Проверка должна опираться на теорему о клеточных аппроксимациях собственных отображений. Стандартная информация о клеточных непрерывных отображениях (см. [51], [11]) может быть приспособлена к собственным отображениям локально конечных регулярных клеточных комплексов. Для гомотопий и когомологий локально конечных симплицальных полиэдров эти вопросы освещены в [11*] и [7*].

В связи с этим естественно обратить внимание на следующий факт, выпавший из поля зрения автора. Как отмечается в главе 3, клеточный способ вычисления когомологий H_c^p (а также гомотопий H_p) дает правильный результат лишь для конечномерных клеточных разбиений. Причина этого вскрыта в примечании переводчика к § 3.3: для всякого CW -комплекса K , имеющего конечное число клеток в каждой размерности, финитные коцепи $S^*(K)$, совпадая с обычными клеточными коцепями $S^*(K)$, приводят к обычным когомологиям H^p , рассматриваемым в части II книги. Однако оказывается, что для любого локально конечного регулярного клеточного комплекса K на простран-

стве X (как и в случае симплициальных полиэдров, см. [11*]) всегда имеет место изоморфизм $H^*(C_i^*(K)) \cong H_c^q(X)$.

В самом деле, для доказательства теоремы 3.3 без предположения о конечности достаточно установить тождество $H_c^q(X \setminus K^m) = 0$ при $m \geq q$. Для этого воспользуемся конструкцией, применяемой в лемме 4 из [11*]. В рассматриваемом комплексе K выберем систему подкомплексов K_λ таким образом, чтобы замыкания $X \setminus K_\lambda$ были компактны, чтобы для любых λ, μ существовал индекс ν , для которого $K_\nu \subset K_\lambda \cap K_\mu$, и чтобы было пустым пересечение $\bigcap_\lambda K_\lambda$. Рассмотрим отвечающую паре

$(X \setminus K^m, K_\lambda \setminus K^m)$ точную последовательность $\dots \rightarrow H_c^q(X \setminus (K^m \cup K_\lambda)) \rightarrow H_c^q(X \setminus K^m) \xrightarrow{\varphi} H_c^q(K_\lambda \setminus K^m) \rightarrow \dots$. По теореме 3.3 $H_c^q(X \setminus (K^m \cup K_\lambda)) = 0$, поэтому φ — мономорфизм. Таким же образом устанавливается мономорфность $H_c^q(K_\lambda \setminus K^m) \rightarrow H_c^q(K_\mu \setminus K^m)$ для любой пары подкомплексов $K_\mu \subset K_\lambda$. Для доказательства требуемого тождества, тем самым, достаточно установить, что $\varinjlim_\lambda H_c^q(K_\lambda \setminus K^m) = 0$. Однако когомологии

$H_c^q(K_\lambda \setminus K^m)$ совпадают с когомологиями замыкания $K_\lambda \setminus K^m$ в одноточечной компактификации $X \setminus K^m$ (теорема 2.8). По построению K_λ замыкания множеств $K_\lambda \setminus K^m$ в одноточечной компактификации $X \setminus K^m$ содержатся в сколь угодно малых окрестностях точки, присоединяемой к $X \setminus K^m$, поэтому в соответствии с п. 3.3 и 4.11 из гл. 2 в [5*] указанный предел совпадает с приведенными когомологиями точки (свойство «жесткости» когомологий), которые равны нулю.

Рассуждения остаются в силе для любого клеточного разбиения K , обладающего указанной выше системой подкомплексов K_λ . Вместо требования компактности замыканий $X \setminus K_\lambda$ можно предполагать, что для любого компактного подмножества $S \subset X$ найдется подкомплекс K_λ , для которого $K_\lambda \cap S = \emptyset$. Таким образом, в случае пары регулярных комплексов (K, A) с помощью финитных коцепей C_i^* клеточных комплексов можно вычислять не только когомологии X и A , но и когомологии разбиения $X \setminus A$, не являющегося регулярным клеточным комплексом. Аналогичные выводы справедливы и для групп гомологий H_p .

Эти факты означают, что рассматриваемые в настоящей книге гомологии H_p и когомологии H_c^p в категории локально конечных симплициальных полиэдров совпадают с симплициальными гомологиями и когомологиями второго рода, рассматривавшимися в семинаре Картана (см. [17*]). Другое доказательство этого утверждения дано С. В. Петковой [7*].

К главе 6

Набор аксиом (т. е. основных свойств), однозначно определяющих теорию гомологий или когомологий, зависит от рассматриваемой категории топологических пространств, и для разных категорий возникают по существу различные теоремы единственности. Различие проявляется не только в формулировке окончательных результатов, но и в сути применяемых для их доказательства методов (в частности, в теореме 6.8 выше фактически объединены две теоремы единственности). Сравнение между собой списков аксиом для разных категорий обычно демонстрирует сущность некоторых отдельных утверждений.

Фигурирующая в настоящей книге аксиоматика (§ 1.6 и 4.3) приспособлена к избранной автором концепции «гомологий и когомологий одного пространства». Аксиоматика, используемая в теоремах единственности, существенно от нее отличается.

Основная теорема единственности была получена Стинродом и Эйленбергом в 1945 г. [20*]. Она относится к категории $\mathcal{A}_0$ конечных полиэдров (аналогично, конечных регулярных клеточных комплексов). Используется следующий набор аксиом:

1. Каждой паре $(X, A) \in \mathcal{A}_0$ отвечает точная последовательность гомологий

$$\dots \rightarrow H_{p+1}(X, A) \rightarrow H_p(A) \rightarrow H_p(X) \rightarrow H_p(X, A) \rightarrow \dots$$

Эта последовательность — ковариантный функтор аргумента (X, A) .

2. Гомотопным отображениям $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ отвечают одинаковые отображения гомологических последовательностей (аксиома гомотопии).

3. Вложение $(X \setminus \text{Int } A, A \setminus \text{Int } A) \subset (X, A)$ индуцирует изоморфизм гомологических последовательностей (аксиома вырезания).

4. Для одноточечного пространства P $H_q(P) = 0$ при $q \neq 0$ (аксиома размерности).

Аксиомы для когомологий аналогичны (в утверждении 1 обращаются все стрелки, получающаяся когомологическая последовательность — контравариантный функтор (X, A)). Группа $G = H_0(P)$ (соответственно $H^0(P)$) называется группой коэффициентов рассматриваемой теории. Теорема Стинрода — Эйленберга состоит в том, что если группы коэффициентов двух теорий гомологий (соответственно когомологий), определенных на категории $\mathcal{A}_0$, изоморфны, то всякий изоморфизм между ними единственным образом продолжается до изоморфизма между теориями (см. [14]).

Группы $H_p(X, A)$ гомологий пары часто называются гомологиями X относительно (или по модулю) A , а нередко — относительными гомологиями X . Аналогичная терминология исполь-

зуется и для когомологий $H^p(X, A)$. Разумеется, эти группы естественно изоморфны рассматриваемым в настоящей книге гомологиям H_p (соответственно когомологиям H_c^p) одного пространства $X \setminus A$. Как раз в этом, однако, проявляется некоторое неудобство концепции гомологий и когомологий «одного пространства», например с точки зрения развития симплициальных или клеточных гомологий и когомологий (пространство $X \setminus A$ не принадлежит категории $\mathcal{B}_0$ и даже не является регулярным клеточным комплексом, см. примечание к § 5.3). В этом проявляется также различие в подходах к аксиоматике. В частности, при подходе автора отпадает необходимость в аксиоме вырезания. Отличие проявляется и в том, что аксиома гомотопии у автора — следствие остальных (см. конец § 1.5).

Хорошо известно, что за пределами категории $\mathcal{B}_0$ классическая теорема единственности Стиррода — Эйленберга уже неверна. Например [24*], в категории счетных локально конечных полиэдров существует (наряду с нулевой) нетривиальная теория гомологий (а также когомологий) с нулевыми коэффициентами, удовлетворяющая аксиомам 1—4. В связи с этим естественно встает вопрос, какие утверждения следует добавить к списку аксиом Стиррода — Эйленберга, чтобы получить единственность в более широких, чем $\mathcal{B}_0$, категориях. Ниже приводится основная информация, имеющаяся на этот счет.

Для рассматриваемых в книге когомологий H_c^p имеет место свойство жесткости вложений замкнутых множеств $A \subset X$ (теорема 6.4), которое можно рассматривать как вариант свойства непрерывности когомологий H^p в компактной категории [14]. Вместе с аксиомами 1—4 это свойство приводит к теореме единственности для когомологий H_c^p в категории локально компактных пространств и их собственных отображений (теорема 6.8). Доказательство, данное в гл. 10 книги Стиррода и Эйленберга [14], опирается на предельный переход по замкнутым окрестностям компактного пространства X , лежащего в тихоновском кубе (ср. с этапом (7) доказательства теоремы 6.3). Переход к локально компактным пространствам аналогичен заключительному этапу доказательства теоремы 6.3.

Этот путь непригоден для гомологий. Как неоднократно отмечает автор, утверждения, дуальные к предложениям (6) и (7) из § 1.3, для гомологий не верны. В частности, аналогом свойства жесткости вложений $A \subset X$ является наличие точных последовательностей (А. Э. Харлап [14*], утверждение 4 теоремы 1)

$$0 \rightarrow \varprojlim^1 H_{p+1}(N; G) \rightarrow H_p(A; G) \rightarrow \varprojlim H_p(N; G) \rightarrow 0$$

(здесь N — замкнутые окрестности компактного подмножества A в метризуемом локально компактном пространстве X). Методы,

применяемые в [22*] к некоторым специальным теориям экстраординарных когомологий, обеспечивают точность этих последовательностей в случае, когда N — замкнутые окрестности замкнутого подмножества A тихоновского куба.

Следует иметь в виду, что содержащееся в аксиоме 3 утверждение для рассматриваемых теорий гомологий и когомологий справедливо обычно в более сильной форме. Например, если X/A — факторпространство компактного пространства X по замкнутому множеству A и $a \in X/A$ — образ A , то отображение $(X, A) \rightarrow (X/A, a)$ индуцирует изоморфизм гомологий и когомологий. Условимся под аксиомой 3 подразумевать именно это утверждение всякий раз, когда вопросы единственности будут обсуждаться для компактных пространств. Далее, метризуемый

компакт $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ называется компактным букетом подпространств X_i , если X_i — замкнутые (не обязательно связные) подмножества в X , диаметры которых стремятся к нулю, и $X_i \cap X_j = x_0 \in X$ при $i \neq j$. Функтор H называется $\prod_c$ -аддитивным (соответственно $\sum_c$ -аддитивным), если значение H на всяком компактном букете естественно изоморфно прямому произведению $\prod_{i=1}^{\infty} H(X_i)$ (соответственно прямой сумме $\sum_{i=1}^{\infty} H(X_i)$).

Оказывается, что для обеспечения единственности гомологий и когомологий в категории компактных метрических пространств¹⁾ к аксиомам 1—4 достаточно добавить требование $\prod_c$ -аддитивности гомологий и соответственно требование $\sum_c$ -аддитивности когомологий (гомологии и когомологии в размерности нуль приведенные). Этот результат получен Милнором [41]. Другое доказательство дано С. В. Петковой [7*].

Утверждение аксиомы 3 уточняется и в категории локально компактных пространств и их собственных отображений: группы $H_p(X, A)$ и $H_c^p(X, A)$ естественно изоморфны $H_p(X \setminus A)$ и $H_c^p(X \setminus A)$ (см. [11*]; для симплициальных гомологий и когомологий второго рода это освещается в [17*]). Будем использовать это утверждение в качестве аксиомы 3 при рассмотрении гомологий H_* и когомологий H_c^* в категории $\mathcal{A}$ локально компактных пространств со второй аксиомой счетности и их собственных отображений, а также в ее полной подкатегории $\mathcal{A}_0$, состоящей из локально конечных полиэдров.

Добавление к аксиомам 1—4 требований $\prod$ -аддитивности гомологий и $\sum$ -аддитивности когомологий (см. добавление редак-

¹⁾ Список аксиом для гомологий в категории всех компактных пространств предложен недавно Н. А. Берикашвили. Результат публикуется.

тора к гл. 4) обеспечивает в категории $\mathcal{A}_0$ единственность симплициальных гомологий и когомологий второго рода, а в категории $\mathcal{A}$ — единственность гомологий H_* и когомологий H_c^* . Эта теорема доказана С. В. Петковой [7*]. Для категории $\mathcal{A}_0$ доказательство дано также в работе Милнора [41] (хотя результат и не сформулирован явно). В работе [41] обсуждается также аксиоматика для категории $\mathcal{A}$.

С иной точки зрения аксиоматика в категориях $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}$ рассмотрена в работе [11*]. В соответствии с леммой 8 из [49] свойство жесткости по отношению к гомологиям выполнено для всех точек $x \in X$ (т. е. $H_p(x)$ — обратный предел гомологий замкнутых окрестностей N точки x). Разумеется, для гомологий H_* этот результат — следствие приведенных выше точных последовательностей, однако он доказывается в [49] также для теории H_c^* , рассматриваемой во второй части книги. Для пространств X из категорий $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}$ свойство жесткости выполнено также на бесконечности: $\varprojlim H_p(N) = 0$, где N — замкнутые подпространства X , для которых $X \setminus N$ имеют компактное замыкание. При этом может наблюдаться следующее явление, не имеющее аналога в когомологиях: некоторые элементы $h \in H_p(X)$ могут содержаться, вообще говоря, в образах $H_p(N) \rightarrow H_p(X)$ для всех N (см. замечание в § 6 работы [49]).

Добавление к аксиомам 1—4 требования жесткости для точек $x \in X$ по отношению к гомологиям приводит в категории $\mathcal{B}$ к следующему результату: $H_0(D; G)$ — подгруппа в счетном произведении $\prod_i G$, содержащая прямую сумму $\sum_i G$. Здесь D — од-

ноточечная компактификация счетного дискретного множества D . Аналогичный вывод справедлив и для $H_0(D; G)$ в категориях $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}$ (где требование жесткости предполагается выполненным также на бесконечности). Как отмечается в добавлении к гл. 4, для бесконечно порожденных групп коэффициентов G гомологии Бореля — Мура отличаются от рассматриваемых в этой книге. Это означает, что для указанных G эти гомологии не удовлетворяют требованиям аддитивности. Оказывается, однако, что гомологии Бореля — Мура удовлетворяют сформулированным выше требованиям жесткости, но группы $H_0(D; G)$ и $H_0(D; G)$

для них отличаются от $\prod_{i=1}^{\infty} G$ (см. § 5 в [11*]). Это означает, что

аксиомы $\prod_c$ -аддитивности и $\prod$ -аддитивности в соответствующих категориях не являются следствием требований жесткости.

Как показано в [11*], единственность теории гомологий в категориях $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}$ обеспечивается добавлением к аксиомам 1—4 наряду с требованиями жесткости соответственно одного из

условий: $\hat{H}_0(\bar{D}; G) = \prod_{i=1}^{\infty} G$ или $H_0(D; G) = \prod_{i=1}^{\infty} G$. Аналогичный результат справедлив для когомологий $H_c^*(\text{при этом } \tilde{H}^0(\bar{D}; G) = \sum_{i=1}^{\infty} G, H_c^0(D; G) = \sum_{i=1}^{\infty} G)$. В этих теоремах дополнительные аксиомы можно рассматривать как усиление аксиомы 4.

В заключение сформулируем некоторые теоремы единственности, касающиеся гомологий H_c^* и когомологий H^* , которые рассматриваются во второй части книги. В категории топологических пространств, имеющих гомотопический тип CW -комплексов, единственность обеспечивается требованиями $\sum$ -аддитивности для H_c^* и $\prod$ -аддитивности для H^* , присоединенными к аксиомам 1—4 (Милнор [42]). Единственность теории H_* в категории $\mathcal{B}$ автоматически обеспечивается единственностью H_c^* в категориях таких топологических пространств, в которых каждое компактное подмножество метризуемо. Среди указанных топологических пространств — все метризуемые пространства, все CW -комплексы, многие естественные пространства отображений. Пример одной из таких категорий описан в [23*].

В категории локально компактных пространств список аксиом для когомологий H^* предложен С. В. Петковой (теорема 9 в [7*]). Бэкон [1] доказал теорему единственности для H^* в категории паракомпактных пространств: кроме аксиомы $\prod$ -аддитивности Милнора к аксиомам 1—4 он добавляет требование жесткости относительно H^* в точках $x \in X$, а также условие $H^q = 0$ при $q < 0$.

К главе 11

Подобно функторам Ext^p , Tor_p и $\lim^p$ когомологии топологического пространства — это тоже производные функторы (от функтора нульмерных когомологий). Такая точка зрения на когомологии позволяет получить совершенно иное освещение теории двойственности Пуайкаре — Лефшеца и приводит к существенно более завершенным результатам.

Пусть X — локально компактное пространство и G — некоторая абелева группа (или модуль над кольцом R). Сопоставление каждому открытому множеству $U \subset X$ цепного комплекса $C_*(U; G) = Q_*(X, X \setminus U; G)$ является предпучком, который определяет над X вялый дифференциальный пучок $\mathcal{C}_*(G)$. При этом комплекс $C_*^{\Phi}(X; G)$ цепей с носителями в любом семействе Φ замкнутых множеств пространства X — это в точности

комплекс сечений пучка $\mathcal{E}_*(G)$ с носителями в Φ . Чаще всего Φ — это либо семейство всех замкнутых подмножеств X , либо семейство c всех компактных множеств. Однако при рассмотрении гомологий пары автоматически возникают новые семейства носителей. В общем случае обычно предполагается, что Φ удовлетворяет следующим требованиям: вместе с F_1, F_2 семейству Φ принадлежит $F_1 \cup F_2$; вместе с F в Φ содержатся все замкнутые подмножества F ; вместе с F в семействе Φ содержится некоторая замкнутая окрестность F . Все множества $F \in \Phi$ предполагаются паракомпактными.

Пусть A — открытое или замкнутое подмножество пространства X , и пусть $B = X \setminus A$. Обозначим через $\Phi|_B$ семейство всех $F \in \Phi$, которые содержатся в B . Имеем (см. примечание к § 8.1): $H_p^{\Phi|B}(B; G) = H_p(C_*^{\Phi|B}(X; G))$ и $H_p^{\Phi}(X, B; G) = H_p(C_*^{\Phi}(X; G)/C_*^{\Phi|B}(X; G))$. Таким образом, возникает точная гомологическая последовательность пары (X, B) :

$$(1) \quad \dots \rightarrow H_p^{\Phi|B}(B; G) \rightarrow H_p^{\Phi}(X; G) \rightarrow H_p^{\Phi}(X, B; G) \rightarrow \\ \rightarrow H_{p-1}^{\Phi|B}(B; G) \rightarrow \dots$$

Ясно, что в случае $\Phi = c$ символ $\Phi|_B$ в этой последовательности может быть заменен на c . Если Φ — семейство всех замкнутых множеств, а множество B замкнуто, символы $\Phi, \Phi|_B$ в последовательности можно опустить. При этом $H_p(X, B; G) = H_p(A; G)$. В случае, если Φ — семейство всех замкнутых множеств, а множество B открыто, символ Φ может быть опущен только во втором и третьем членах; группы гомологий множества B зависят, очевидно, не только от топологической структуры B , но и от вложения $B \subset X$.

Как уже отмечалось в добавлении к гл. 4, гомологии локально компактных пространств определены не только для постоянных, но также и для локально постоянных коэффициентов. Пусть $\mathcal{Z}$ — локально постоянная система со слоем G . Все сделанные выше наблюдения справедливы и для гомологий с коэффициентами в $\mathcal{Z}$.

Будем обозначать символом $\Phi \cap A$ семейство всех множеств в A вида $F \cap A, F \in \Phi$. Оказывается (и это очень существенно), что комплекс цепей $C_*^{\Phi}(X; \mathcal{Z})/C_*^{\Phi|B}(X; \mathcal{Z})$ — это комплекс $\bar{C}_*^{\Phi}$ сечений с носителями в $\Phi \cap A$ ограничения $\mathcal{E}_*(\mathcal{Z})|_A$ пучка $\mathcal{E}_*(\mathcal{Z})$ на A . В самом деле, операция ограничения сечений на множество A определяет отображение $\alpha: C_*^{\Phi}(X; \mathcal{Z}) \rightarrow \bar{C}_*^{\Phi}$, ядром которого, очевидно, служит подкомплекс $C_*^{\Phi|B}(X; \mathcal{Z})$. Поэтому достаточно убедиться лишь в том, что α — эпиморфизм. Это обес-

печивается вялостью пучков $\mathcal{C}_*(\mathcal{S})$. Например, если задано сечение пучка $\mathcal{C}_*(\mathcal{S})|_A$ с носителем в $F \cap A$, $F \in \Phi$, то, полагая его нулевым на открытом множестве $X \setminus F'$, где $F' \in \Phi$ — замкнутая окрестность F , и продолжая с множества $A \cup (X \setminus F')$ на пространство X , в случае открытого A получим сечение с носителем в Φ , являющееся продолжением данного. Из свойства вялости вытекает мягкость $\mathcal{C}_*(\mathcal{S})$, поэтому аналогичные рассуждения нетрудно провести и в случае замкнутого множества A .

Последовательность пучков $\mathcal{C}_*(\mathcal{S})$ не является точной: слоями производных пучков $\mathcal{H}_p(\mathcal{S}) = H_p(\mathcal{C}_*(\mathcal{S}))$ служат, очевидно, введенные в гл. 9 группы локальных гомологий $H_p^x = \varinjlim H_p(U;$

$\mathcal{S}) = H_p^c(X, X \setminus x; \mathcal{S})$, где U — открытые окрестности точки $x \in \in X$. В случае, когда гомологическая размерность $h \dim_0 X = n$ конечна, $\mathcal{H}_p(\mathcal{S}) = 0$ при $p > n$, но $\mathcal{H}_n(\mathcal{S}) \neq 0$. Предположим, что $\mathcal{H}_p(\mathcal{S}) = 0$ также при $p < n$. В этом случае пучок $\mathcal{H}_n(\mathcal{S})$ называется «ориентирующим». Сделанным предположениям удовлетворяют обобщенные многообразия (в частности, топологические). Однако этим требованиям могут удовлетворять и некоторые другие объекты (например, объединение n -мерной сферы и ее n -мерной диаметральной плоскости).

Оказывается, что при сформулированных предположениях данное выше описание гомологической последовательности (1) пары (X, B) совпадает с описанием последовательности когомологий с коэффициентами в $\mathcal{H}_n(\mathcal{S})$ пары (X, A) . Таким образом, последовательность (1), рассматриваемая для гомологий с коэффициентами в $\mathcal{S}$, тождественно изоморфна точной последовательности

$$(2) \quad \dots \rightarrow H_{\Phi}^{n-p}(X, A; \mathcal{H}_n(\mathcal{S})) \rightarrow H_{\Phi}^{n-p}(X; \mathcal{H}_n(\mathcal{S})) \rightarrow \\ \rightarrow H_{\Phi \cap A}^{n-p}(A; \mathcal{H}_n(\mathcal{S})) \rightarrow H_{\Phi}^{n-p+1}(X, A; \mathcal{H}_n(\mathcal{S})) \rightarrow \dots$$

Это и есть двойственность Пуанкаре — Лефшеца. Доказательство очень просто. Факторпучок пучка $\mathcal{C}_n(\mathcal{S})$ по образу $\mathcal{C}_{n+1}(\mathcal{S})$ является вялым и содержит $\mathcal{H}_n(\mathcal{S})$. Замена $\mathcal{C}_n(\mathcal{S})$ указанным факторпучком, отбрасывание всех $\mathcal{C}_p(\mathcal{S})$ при $p > n$ и замена индекса p на $q = n - p$ при $p < n$ дает вялую резольвенту пучка $\mathcal{H}_n(\mathcal{S})$, в терминах которой когомологии пары (X, A) в размерности q (см. примечание к § 8.1) есть не что иное, как гомологии пары (X, B) в размерности p .

Ограничение дифференциального пучка $\mathcal{C}_*(\mathcal{S})$ на множество A является вялым или мягким, поэтому в случае, когда Φ — семейство всех замкнутых множеств, значки Φ и $\Phi \cap A$ в последовательности (2) можно опустить. При этом $H^q(X, A; \mathcal{H}_n(\mathcal{S})) = H_{\Phi \cap A}^q(B; \mathcal{H}_n(\mathcal{S}))$, если множество A замкнуто, но возникающие когомологии открытого множества B зависят не только от про-

странства B , но и от вложения $B \subset X$. Если $\Phi = c$ и A замкнуто, то $\Phi \cap A = c$; в этом случае $H_c^q(X, A; \mathcal{H}_n(\mathcal{G})) = H_c^q(B; \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))$. Если $\Phi = c$ и A открыто, то когомологии $H_{c \cap A}^q(A; \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))$ отличаются от $H_c^q(A; \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))$ и зависят не только от A , но и от вложения $A \subset X$.

Таким образом, двойственность Пуанкаре — Лефшеца всегда сохраняет носители. Следствием установленного изоморфизма последовательностей (1) и (2), очевидно, являются утверждения теорем 11.2, 11.4, 11.11 и 11.15. Пусть X — «удвоение» топологического многообразия M с краем. Теорема 11.3 — следствие установленного изоморфизма, рассматриваемого для гомологий пары (X, M) , и леммы 11.7. Аналогичным образом с помощью леммы 11.10 получается теорема 11.5.

Сопоставление последовательностей (1) и (2) в случае, когда в качестве A берутся произвольные точки $x \in X$, показывает необходимость наложенного ограничения $\mathcal{H}_p(\mathcal{G}) = 0$ при $p < n$. Существенность ограничения $h \dim_{\mathcal{G}} X < \infty$ демонстрируется в замечании, содержащемся в § 3 работы [12*].

В конкретных случаях, при дальнейших ограничениях на X , возможны некоторые уточнения полученных соотношений. Например, если все слои пучка $\mathcal{H}_n(R)$, отличные от нуля, изоморфны основному кольцу R , то $\mathcal{H}_n(\mathcal{G}) = \mathcal{H}_n(R) \otimes_R \mathcal{G}$. Если $\mathcal{H}_n(R)$ — локально постоянный пучок со слоем R , то существует единственный с точностью до изоморфизма локально постоянный пучок $\mathcal{L}(R)$, для которого $\mathcal{L}(R) \otimes_R \mathcal{H}_n(R)$ — постоянный пучок R . Таким образом, точная последовательность когомологий пары (X, A)

$$\dots \rightarrow H_{\Phi}^{n-p}(X, A; \mathcal{G}) \rightarrow H_{\Phi}^{n-p}(X; \mathcal{G}) \rightarrow H_{\Phi \cap A}^{n-p}(A; \mathcal{G}) \rightarrow \dots$$

тождественна гомологической последовательности пары (X, B)

$$\dots \rightarrow H_p^{\Phi \cap B}(B; \mathcal{L}(R) \otimes_R \mathcal{G}) \rightarrow H_p^{\Phi}(X; \mathcal{L}(R) \otimes_R \mathcal{G}) \rightarrow$$

$$H_p^{\Phi}(X, B; \mathcal{L}(R) \otimes_R \mathcal{G}) \rightarrow \dots$$

Предположим далее, что X метризуемо и $H_p(X; \mathcal{G}) = H_{p+1}(X; \mathcal{G}) = 0$. Пусть K — произвольное подмножество X , $L = X \setminus K$ и Φ — семейство всех замкнутых множеств пространства X , содержащихся в L (множества из Φ компактны, если компактно X). Для каждого $F \in \Phi$ из (1) имеем $H_p(F; \mathcal{G}) = H_{p+1}(X, F; \mathcal{G})$, и по двойственности $H_{p+1}(X, F; \mathcal{G}) = H^q(X \setminus F; \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))$, где $q = n - p - 1$. По теореме 4.11.1 гл. 2 в [5*] прямой предел $H^q(X \setminus F; \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))$, взятый по всем $F \in \Phi$, совпадает с $H^q(K; \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))$. Таким образом, возникает тождество $H_p^{\Phi}(L; \mathcal{G}) = H^q(K; \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))$ — двойственность Александера — Понтрягина — Стиррода — Ситникова,

Приведенное выше доказательство двойственности Пуанкаре — Лефшеца дано в работе [12*]. В терминах гомологий Бореля — Мура описание двойственности с помощью спектральных последовательностей дано в работах [16*], [30*] (частные случаи) и [5] (общий случай). Фигурирующие в этих работах дополнительные ограничения (формулирование условий в терминах пучков $\mathcal{H}_p(R)$, предположение об отсутствии кручения в слоях $\mathcal{H}_n(R)$, требование конечной порожденности слоев $\mathcal{S}$) связаны со спецификой основной конструкции Бореля — Мура. Для топологических многообразий двойственность Пуанкаре может быть получена с помощью спектральной последовательности, отвечающей пучкам сингулярных цепей [18*].

Список литературы

1. Bacon P., Axioms for the Čech cohomology of paracompacta, *Pacif. J. Math.*, 52 (1974), 7—9.
2. Barrat M., Milnor J., An example of anomalous singular homology, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 13 (1962), 293—297.
3. Borsuk K., *Theory of retracts*, Monografie Matematyczne, Warsaw, 1967. [Имеется перевод: Борсук К. Теория ретрактов. — М.: Мир, 1971.]
4. Bourbaki N., *General topology*, part I, Addison Wesley, Reading, Mass., 1966. [Имеется перевод с французского издания: Бурбаки Н. Общая топология, Основные структуры. — М.: Наука, 1968.]
5. Bredon G., *Sheaf theory*, McGraw-Hill, 1967.
6. Brown M., Locally flat imbeddings of topological manifolds, *Ann. Math.*, 75 (1962), 331—341.
7. Cartan H., *Méthodes Modernes en topologie algébrique*, *Comm. Math. Helv.*, 18 (1945—1946), 1—15.
8. Cartan H., Eilenberg S., *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956. [Имеется перевод: Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. — М.: ИЛ, 1960.]
9. Cooke G. E., Finney R. L., *Homology of cell complexes*, Princeton University Press, 1967.
10. Curtis M. L., Dugundji J., A proof of de Rham's theorem, *Fund. Math.*, 68 (1970), 265—268.
11. Dold A., *Lectures in algebraic topology*, Springer-Verlag, 1972. [Имеется перевод: Дольд А. Лекции по алгебраической топологии. — М.: Мир, 1976.]
12. Dugundji J., *Topology*, Allyn and Bacon, 1966.
13. Eilenberg S., MacLane S., Group extensions and homology, *Ann. Math.*, 43 (1942), 757—831.
14. Eilenberg S., Steenrod N. E., *Foundations of algebraic topology*, Princeton University Press, 1952. [Имеется перевод: Стинрод Н., Эйленберг С. Основания алгебраической топологии. — М.: ИЛ, 1958.]
15. Epstein D. B., Factorization of 3-manifolds, *Comm. Math. Helv.*, 36 (1962), 91—102.
16. Fuchs L., *Infinite Abelian groups*, Academic Press, vol. 11, 1973. [Имеется перевод: Фукс Л. Бесконечные абелевы группы, т. 2. — М.: Мир, 1977.]
17. Gleever J. B., On the equivalence of two singular homology theories, *Ann. Math.*, 51 (1950), 178—191.
18. Глезерман М. Е., Понтрягин Л. С. Пересечения в многообразиях. — *Успехи матем. наук*, т. 2, вып. 1, 1947, с. 55—158.
19. Goldman M. E., An algebraic classification of noncompact 2-manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 156 (1971), 241—258.
20. Gordon W. L., Locally-finitely-valued cohomology groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6 (1955), 656—662.
21. Hilton P. J., *Introduction to homotopy theory*, Cambridge University Press, 1953.
22. Hilton P. J., Stammbach U., *A course in homological algebra*, Springer-Verlag, 1971.

23. Hocking J. G., Young G. S., *Topology*, Addison Wesley, Reading, Mass., 1961.
24. Hu S. T., On the realizability of homotopy groups and their operations, *Pac. J. Math.*, 1 (1951), 583—602.
25. Hu S. T., *Elements of general topology*, Holden-Day, 1964.
26. Hu S. T., *Theory of retracts*, Wayne State University Press, 1965.
27. Huber P. J., Homotopical cohomology and Čech cohomology, *Math. Ann.*, 144 (1961), 73—76.
28. Jacobson N., *Basic algebra I*, W. H. Freeman and Co., 1974.
29. Kaup L., Keane M. S., Induktive Limiten endlich erzeugter freier Moduln, *Manuscripta Math.*, 1 (1969), 9—21.
30. Keesee J. W., Finitely-valued cohomology groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1 (1950), 418—422.
31. Keesee J. W., On the homotopy axiom, *Ann. Math.* 54 (1951), 247—249.
32. Kelley J. L., *General topology*, Van Nostrand, 1955. [Имеется перевод: Келли Дж. Л. *Общая топология*. — М.: Наука, 1968.]
33. Kelley J. L., Descriptions of Čech cohomology in General Topology and Its Relations to Modern Algebra (Proc. Sympos. Prague, 1961), Academic Press, 1962, 235—237.
34. Lawson J. D., Comparison of taut cohomologies, *Aequationes Math.*, 9 (1973), 201—209.
35. Lundell A., Weingram S., *The topology of CW-complexes*, Van Nostrand Reinhold, 1969.
36. MacLane S., *Homology*, Springer-Verlag, 1963. [Имеется перевод: Маклейн С. *Гомология*. — М.: Мир, 1966.]
37. Massey W. S., *Algebraic Topology: An Introduction*, Harcourt, Brace and World, 1967. [Имеется перевод: Масся У., Столлинге Дж. *Алгебраическая топология. Введение*. — М.: Мир, 1977.]
38. Massey W. S., How to give an exposition of the Čech—Alexander—Spanier type homology theory, *Amer. Math. Monthly*, 85 (1978), 75—83.
39. May J. P., Simplicial objects in algebraic topology, *Van Nostrand Mathematical Studies*, No. 11, Van Nostrand, 1967.
40. Milnor J., The geometric realization of a semi-simplicial complex, *Ann. Math.*, 65 (1957), 357—362.
41. Milnor J., On the Steenrod homology theory, Mimeographed manuscript, Berkeley, 1960.
42. Milnor J., On axiomatic homology theory, *Pacif. J. Math.*, 12 (1962), 337—341.
43. Milnor J., Stasheff J. D., *Characteristic classes*, *Annales of Mathematics Studies*, No. 76, Princeton University Press, 1974. [Имеется перевод: Милнор Дж., Сташеф Дж. *Характеристические классы*. — М.: Мир, 1979.]
44. Nagami K., *Dimension theory*, Academic Press, 1970.
45. Nöbeling G., Verallgemeinerung eines Satzes von Herrn E. Specker, *Inventiones Math.*, 6, (1968), 45—55.
46. Schubert H., *Topology*, Allyn and Bacon, 1968.
47. Seifert H., Threlfall W., *Lehrbuch der Topologie*, Chelsea Publishing Co., 1947. [Имеется перевод: Зейферт Г., Трельфалль В. *Топология*. — М.: ГОНТИ, 1938.]
48. Ситников К. А. Комбинаторная топология незамкнутых множеств. I. Первый закон двойственности; спектральная двойственность. — Матем. сб., т. 34, 1954, с. 3—54.
49. Складенко Е. Г. Теория гомологий и аксиома точности. — Успехи матем. наук, т. XXIV, вып. 5(149), 1969, с. 87—140.
50. Spanier E., Cohomology theory for general spaces, *Ann. Math.*, 49 (1948), 405—427.
51. Spanier E., *Algebraic topology*, McGraw-Hill, 1966. [Имеется перевод: Спенсер Э. *Алгебраическая топология*. — М.: Мир, 1971.]

52. Spanier E., Tautness for Alexander — Spanier cohomology, *Pacif. J. Math.*, 1978, 75, No. 2, 561—563.
53. Sperry P. L., The homotopy axiom for Alexander theory, *J. London Math. Soc.*, 41 (1966), 97—100.
54. Spivak M., A comprehensive introduction to differential geometry, Vol. I, Publish. or Perish, Inc., Waltham, Mass., 1970.
55. Steenrod N. E., Regular cycles of compact metric spaces, *Ann. Math.*, 41 (1940), 833—851.
56. Steenrod N. E., Products of cocycles and extensions of mappings, *Ann. Math.*, 48 (1947), 290—320.
57. Steenrod N. E., *Topology of fibre bundles*, Princeton University Press, 1951. [Имеется перевод: Стиррод Н. Топология косых произведений. — М.: ИЛ, 1953.]
58. Steenrod N. E., A convenient category of topological spaces, *Michigan Math. J.*, 14 (1967), 133—152.
59. Steenrod N. E., Epstein D., *Cohomology operations*, *Annals of Math. Studies*, 50, Princeton University Press, 1962. [Готовится перевод.]
60. Vick J., *Homology theory: An introduction to algebraic topology*, Academic Press, 1973.
61. Vietoris L., Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen, *Math. Ann.*, 97 (1927), 454—472.
62. Wallace A. D., Cohomology groups near a set, *Anais da Academia Brasileira de Ciencias*, 22, № 2 (1950), 217—225.
63. Wallace A. D., The map excision theorem, *Duke Math. J.*, 19 (1952), 177—182.
64. Whitehead G. W., *Homotopy theory*, M. I. T. Press, 1966.
65. Whitehead J. H. C., Combinatorial homotopy I, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55 (1949), 213—245.
66. Whitehead J. H. C., A certain exact sequence, *Ann. Math.*, 52 (1950), 51—110.

Список литературы, добавленной при переводе

- 1*. Александров П. С. Топологические теоремы двойственности. Ч. 1. Замкнутые множества. — Труды Матем. ин-та В. А. Стеклова, 1955, т. 48.
- 2*. Александров П. С. Топологические теоремы двойственности. Ч. 2. — Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1959, т. 54.
- 3*. Бартик В. Когомологии Александера — Чеха и отображения в полиэдры Эйленберга — Маклейна. — Матем. сб., т. 75 (117): 3, 1968, с. 237—244.
- 4*. Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. — М.: Мир, 1972.
- 5*. Годеман Р. Алгебраическая топология и теория пучков. — М.: ИЛ, 1961.
- 6*. Гротендик А. О некоторых вопросах гомологической алгебры. — М.: ИЛ, 1961.
- 7*. Петкова С. В. Об аксиомах теории гомологий. — Матем. сб., т. 90, 1973, № 4, с. 607—624.
- 8*. Рохлин В. А., Фукс Д. Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. — М.: Наука, 1977.
- 9*. Ситников К. А. Закон двойственности для незамкнутых множеств. — Докл. АН СССР, т. 18, 1951, с. 359—362.
- 10*. Скляренко Е. Г. О некоторых приложениях теории пучков в общей топологии. — Успехи матем. наук., т. 19, 1964, № 6, с. 47—70.
- 11*. Скляренко Е. Г. Теоремы единственности в теории гомологий. — Матем. сб., т. 85 (127), 1971, с. 201—223.
- 12*. Скляренко Е. Г. К теории обобщенных многообразий, Изв. АН СССР, серия матем., т. 35, 1971, с. 831—843.

- 13*. Скляренко Е. Г. К теории гомологий, ассоциированной с когомологиями Александрова — Чеха. — Успехи матем. наук, т. 34, 1979, № 6, с. 90—110.
- 14*. Харлап А. Э. Локальные гомологии и когомологии, гомологическая размерность и обобщенные многообразия. — Матем. сб., т. 96 (138), 1975, № 3, с. 347—373.
- 15*. Borel A., Seminar on transformation groups, Ann. of Math. Studies, 46 (1960).
- 16*. Borel A., Moore J. C., Homology theory for locally compact spaces, Mich. Math. J., 7 (1960), 137—160.
- 17*. Cartan H., Séminaire E. N. S., 1948—1949.
- 18*. Cartan H., Séminaire E. N. S., 1950—1951.
- 19*. Dowker C. H., Mapping theorems for noncompact spaces, Amer. J. Math., 69 (1947), 200—242.
- 20*. Eilenberg S., Steenrod N., Axiomatic approach to homology theory, Proc. Nat. Acad. Sci., 31 (1945), 117—120.
- 21*. Godbillon C., Cohomologie à l'infini des espaces localement compacts, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris), 264, № 9 (1967), A394—A396.
- 22*. Huber M., Meier W., Cohomology theories and infinite CW-complexes, Comment. Math. Helv., 53 (1978), № 2, 239—257.
- 23*. Hyman D. M., A category slightly larger than the metric and CW-categories, Mich. Math. Journ., 15, № 2 (1968), 193—214.
- 24*. James J., Whitehead J. H. C., Homology with zero coefficients, Quart. J. Math., 9 (1958), № 36, 317—320.
- 25*. Jensen C. U., Les foncteurs dérivés de $\varprojlim$ et leurs applications en théorie des modules, Lecture Notes in Mathematics 254, 1972.
- 26*. Lee C. N., The regular convergence theorem, Mich. Math. J., 14 (1967), 207—217.
- 27*. Lee C. N., Raymond F., Čech extensions of contravariant functors, Trans. Amer. Math. Soc., 133 (1968), 415—434.
- 28*. Meijer A. R., Viljoen G., A note on the extensions of infinite cyclic groups and realizable groups, Arch. Math., 25 (1974), № 2, 113—120.
- 29*. Nunke R. J., Modules of extensions over Dedekind rings, Ill. J. Math. 3 (1959), 22—241.
- 30*. Raymond F., Local cohomology groups with compact supports, Math. Z., 76 (1961).
- 31*. Roos J. E., Sur les foncteurs dérivés de $\varprojlim$. Applications, Compt. Rend. Acad. Sci., 252, № 24 (1961), 3702—3704.

Предметный указатель

Аддитивный функтор 88

Башня модулей 353
Брауэр 74

Вершины 64
Внутренность многообразия 303
Вырезаемая триада 222

Гомоморфизм, индуцированный не-
прерывным отображением 27
Гомотопическая эквивалентность 50
— — собственная 50
Гомотопический тип 50
— — собственный 50
Гладурованное кольцо 290
Грань 131
— собственная 131
Группа Бетти 328
— когомологий с компактными но-
сителями 23
— Шпекера 93

Деформационный ретракт 51

Естественная эквивалентность 153
Естественное преобразование 152
Естественный изоморфизм теорий
когомологий 153

Жесткое подпространство 216

Звездная вписанность 46

Инвариантность области 74

Категория Люстерника — Шнирельма-
на 179
Клетки 64
Клеточное разбиение 64
Когомологическая последовательность
пары 34
Кограницы 23
Кограничный оператор 22
Комплекс почти симплицальный 140
— регулярный клеточный 129
Конус отображения 99, 320
Конфигурационное подмножество 345
Концы пространства 274
Короткая точная последовательность
цепных комплексов 36
Коцепи клеточного разбиения 66
Коцепной комплекс 35
Коцепь с компактным носителем 23
Коцикл 23
Коэффициенты инцидентности 126
Край многообразия 303

Лемма о пяти гомоморфизмах 39
Локально конечное покрытие 212
Локально конечнозначные коцепи 207
— — p -функции 206

Многообразие 77
— конечного типа 80
— ориентированное 304
— ориентируемое 78
— паракомпактное 304
— с краем 303

Направленное множество 338
Нёбелинг 92
Носитель коцепи 23
— p -функции 22

Обратная последовательность моду-
лей 352

Обратная система модулей 348
 Обратный предел 348
 Оператор Бокштейна 62
 Ориентация клетки 126
 Ориентируемое многообразие 78
 Остов 64
 Открытое подмногообразие 79
 Относительный гомеоморфизм 220

Паракомпактные пространства 212
 Подкомплекс 36, 132
 Последовательность Майера — Вьеториса 75, 76
 Приведенная группа когомологий 52
 Проективное пространство 69, 334—337
 Произведение клеточных разбиений 145
 Прямая система модулей 339
 Прямой предел 339

Размерность клеточного разбиения 64
 Регулярный клеточный комплекс 129
 — — — локально конечный 130
 Ретракт 51

Связная сумма 85
 Связывающий гомоморфизм 36
 Сигнатура многообразия 332
 Сингулярные гомологии и когомологии 234, 263—266
 Собственная гомотопическая эквивалентность 50
 — гомотопия 40
 Собственное отображение 27
 Собственный гомотопический тип 50
 Совместимые гомоморфизмы 339, 348
 Степень отображения 58
 Стягиваемое пространство 51

Тензорное произведение коцепных комплексов 161
 Теорема Брауэра о неподвижной точке 58
 — Вьеториса — Бегла 240
 — двойственности Лефшеца 302
 — Ситникова 325
 Теория гомологий одного пространства 17
 — — Стирода 16
 — когомологий обыкновенная 151
 — — экстраординарная 151
 — размерности 240
 Точная последовательность 33
 Точный функтор 88
 Триада 222

Усеченное кольцо полиномов 335
 Условие Миттаг-Леффлера 355

Факторкомплекс 36
 Фундаментальный класс гомологий многообразия 304

Цепная гомотопия 98
 — гомотопическая эквивалентность 98
 Цепное отображение 35
 Цепной комплекс 34
 — — положительный 35
 Цепь 78

Чех 17

Эйлерова характеристика 70

CW -комплекс 65
 $\cup_1$ -умножение 233

Оглавление

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	16
Часть I. Когомологии и гомологии локально компактных пространств	21
Глава 1. Определения и основные свойства групп когомологий	21
§ 1.0. Введение	21
§ 1.1. Определения коцепей, кограничного оператора и групп когомологий	21
§ 1.2. Гомоморфизм, индуцированный непрерывным отобра- жением	26
§ 1.3. Гомоморфизм $\tau: H^p(U) \rightarrow H^p(X)$ для открытого под- множества $U \subset X$	28
§ 1.4. Кограничный оператор пары и точная последователь- ность пары	32
§ 1.5. Свойство гомотопии	40
§ 1.6. Сводка основных свойств теории когомологий	42
§ 1.7. Дополнение. Доказательство теоремы 1.4	45
Глава 2. Применения и дальнейшее развитие теории когомологий	50
§ 2.1. Гомотопическая эквивалентность. Стягиваемые про- странства	50
§ 2.2. Приведенные нульмерные группы когомологий компак- тного пространства	52
§ 2.3. Теоремы о прямых суммах	55
§ 2.4. Когомологии сфер и евклидовых пространств. Приме- нения	57
§ 2.5. Коэффициентные гомоморфизмы и коэффициентная точ- ная последовательность	60
Глава 3. Когомологии клеточных разбиений и многообразий	64
§ 3.1. Введение	64
§ 3.2. Клеточные разбиения пространств	64
§ 3.3. Коцепи и когомологии клеточного разбиения	66
§ 3.4. Когомологии открытых и замкнутых подмножеств ев- клидова пространства. Инвариантность области	71
§ 3.5. Последовательности Майера — Вьеториса	74
§ 3.6. Когомологии многообразий	77

Глава 4. Теория гомологий	86
§ 4.1. Введение	86
§ 4.2. Понятие двойственности	86
§ 4.3. Перечень основных свойств групп гомологий	90
§ 4.4. Доказательство того, что группы целочисленных коцепей свободны	92
§ 4.5. Сводка основных свойств функтора Hom	94
§ 4.6. Определение групп гомологий и индуцированных гомоморфизмов	96
§ 4.7. Точная гомологическая последовательность пары	98
§ 4.8. Теорема об универсальных коэффициентах	104
§ 4.9. Дальнейшее развитие теории гомологий	110
§ 4.10. Обратные пределы и гомологии	113
§ 4.11. Выражение групп $H_c^q(X; G)$ через целочисленные когомологии	116
Глава 5. Вычисление гомологий и когомогий регулярных клеточных комплексов	125
§ 5.1. Введение	125
§ 5.2. Ориентации клеток и матрицы инцидентности	125
§ 5.3. Основные свойства регулярных клеточных комплексов	129
§ 5.4. Коэффициенты инцидентности в регулярных клеточных комплексах	135
§ 5.5. Определение структуры групп целочисленных когомогий исходя из матриц инцидентности	141
§ 5.6. Гомологии регулярных клеточных комплексов	144
§ 5.7. Ориентации клеток и матрицы инцидентности произведения двух регулярных клеточных комплексов	145
Глава 6. Естественные преобразования теорий когомологий. Теоремы единственности	149
§ 6.1. Введение	149
§ 6.2. Точное определение теории когомологий. Перечень аксиом. Примеры экстраординарных теорий когомологий	149
§ 6.3. Приведенные когомологии	154
§ 6.4. Дальнейшие свойства экстраординарных когомологий	154
§ 6.5. Доказательство теоремы 6.3	156
§ 6.6. Примеры и применения теоремы 6.3	159
§ 6.7. Другие теоремы единственности для обыкновенных теорий когомологий	167
Глава 7. Умножение в теории когомологий	169
§ 7.1. Введение	169
§ 7.2. Формула Кюннета	169
§ 7.3. Внешнее умножение	171
§ 7.4. $\smile$ -умножение	175
§ 7.5. Внешнее умножение для пространств с клеточным разбиением	180
§ 7.6. Антикоммутативный закон для внешнего и внутреннего умножений	185
§ 7.7. Несколько иллюстративных примеров	190
§ 7.8. Теоремы единственности для внешнего и внутреннего умножений	192
§ 7.9. Дополнение: $\smile$ -умножение для локально компактных пространств	199

Часть II. Когомологии и гомологии пространств общего типа	204
Глава 8. Когомологии Александера — Спеньера пространств общего типа	204
§ 8.1. Введение	204
§ 8.2. Основные определения	206
§ 8.3. Теорема Гордона об изоморфизме	211
§ 8.4. Свойство вырезания, жесткость, относительные гомотоморфизмы	215
§ 8.5. Свойство гомотопии. Другие свойства когомологий Александера — Спеньера	221
§ 8.6. Вырезаемые триады и последовательности Майера — Вьеториса	222
§ 8.7. $\cup$ -умножения в когомологиях Александера — Спеньера	228
§ 8.8. Естественное преобразование теории когомологий Александера — Спеньера в теорию сингулярных когомологий	234
§ 8.9. Дальнейшие свойства когомологий Александера — Спеньера пространств общего типа	239
Глава 9. Гомологии с компактными носителями пространств общего типа	243
§ 9.1. Введение	243
§ 9.2. Основные понятия	243
§ 9.3. Свойства гомотопии и вырезания. Последовательности Майера — Вьеториса	247
§ 9.4. Теорема о прямой сумме. Гомологии CW -комплексов	254
§ 9.5. $\cup$ -умножение для пространств общего типа	255
§ 9.6. Естественное преобразование сингулярных гомологий в гомологии с компактными носителями	263
§ 9.7. Локальные группы гомологий	266
Часть III. Использование двух типов гомологий локально компактных пространств	269
Глава 10. Одновременное использование гомологий и когомологий двух типов	269
§ 10.1. Введение	269
§ 10.2. Сравнение двух типов гомологий и когомологий	271
§ 10.3. $\cup$ -умножения в когомологиях локально компактных пространств	280
§ 10.4. Применения к $\cup$ -умножениям для локально компактных пространств	286
§ 10.5. Свойства $\cup$ -умножений типа А и В	288
Глава 11. Гомологии и когомологии многообразий	302
§ 11.1. Введение	302
§ 11.2. Некоторые основные определения	302
§ 11.3. Формулировка различных вариантов теоремы двойственности Пуанкаре	304
§ 11.4. Доказательство различных вариантов теоремы двойственности Пуанкаре	306
§ 11.5. Гомологии подмногожеств многообразий. Теоремы двойственности Александера и Ситникова	318

§ 11.6. Дополнительные применения двойственности Пуанка- ре	327
§ 11.7. $\cup$ -умножения в когомологиях проективных про- странств	335
Приложение. Прямые и обратные пределы	339
§ А.1. Введение	338
§ А.2. Прямые пределы модулей	338
§ А.3. Обратные пределы модулей	347
§ А.4. Первый производный функтор функтора обратного пре- дела	352
§ А.5. Гомологии и обратные пределы	360
Добавления редактора перевода	464
Список литературы	378
Предметный указатель	382

Уважаемый читатель!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформление, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

У. Масси

ТЕОРИЯ ГОМОЛОГИИ И КОГОМОЛОГИИ

Научный редактор Г. М. Цукерман
Мл. науч. редактор И. В. Герасимова
Художник В. И. Шаповалов
Технический редактор Е. В. Ящук
Корректор Н. А. Гиря

ИБ № 2343

Сдано в набор 26.01.81. Подписано к печати 27.11.81. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 12,25 бум. л. Усл. печ. л. 24,50. Усл. кр.-отт. 24,50. Уч.-изд. л. 20,04. Изд. № 1/0918. Тираж 7000 экз. Зак. № 1054. Цена 2 р. 20 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2.

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29