

М. Хамермеш

ТЕОРИЯ ГРУПП

и ее применение к физическим проблемам

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Хотя физическим применениям теории групп посвящена обширная литература¹⁾, она далеко не исчерпала все те вопросы, которые привлекают физиков и математиков. В последние годы методы этой теории стали «обычным вооружением» физиков-теоретиков, а число работ, основанных на применениях теории групп, и число физиков, владеющих этими методами, неуклонно возрастает. Разные физики, однако, по-разному оценивают важность и трудность разделов теории групп, и ни одна книга не может удовлетворить всех заинтересованных лиц. Среди книг, выпущенных в последние годы за рубежом, одной из наиболее оригинальных по выбору материала и наиболее удачных по изложению является книга известного американского физика Мортон Хамермеша. Эта книга пользуется большой популярностью; сейчас она становится доступной и в русском переводе.

В основу книги положены лекции, которые автор в течение ряда лет читал для сотрудников одного из крупнейших физических научных центров США — Аргоннской национальной лаборатории.

Книга написана физиком и предназначена в первую очередь для физиков. Поэтому в ней не надо искать математической строгости, зато в ней ясно изложены основы теории и описаны многие ее приложения. Так как методы теории групп стали весьма эффективным и удобным средством решения широкого круга различных физических задач, связанных с теми или иными проявлениями симметрии, то книга будет полезна физикам почти всех направлений.

Круг рассмотренных вопросов весьма обширен: сюда входят основные понятия теории, ее элементарные теоремы, их приложения к точечным группам симметрии, теория представлений групп, особенно подробно изложена симметрическая группа (группа перестановок), основные результаты теории непрерывных групп, тензорные представления, понятия о проективных представлениях и многочисленные физические приложения (симметрия кристаллов и молекул, магнитная симметрия кристаллов, классификация уровней энергии квантовомеханических систем, правила отбора, расщепление атомных уровней

¹⁾ Довольно полный список монографий и основных обзорных и оригинальных статей как иностранных, так и советских авторов дан в конце книги.

в полях внутри кристалла, классификация состояний системы тождественных частиц в атомной физике, некоторые вопросы ядерной спектроскопии).

Читателю-физику не приходится преодолевать длинную цепь определений и теорем, оставаясь в неведении относительно того, где и каким образом можно будет воспользоваться приобретенным богатством. Каждое вводимое автором понятие и каждый получаемый или формулируемый им результат, как правило, подкрепляются многочисленными примерами. Нередко, для того чтобы подчеркнуть достоинства того или иного метода, одна и та же проблема решается разными способами. Активному усвоению излагаемого материала немало способствуют также и многочисленные задачи и упражнения.

Читателю-математику доставит удовольствие увидеть, «как работает» теория групп, и узнать в аппарате, использованном физиками для решения различного рода задач, знакомые ему теоретико-групповые методы.

В последнее время теория групп стала еще более популярной в связи с успехами в области систематизации элементарных частиц, поскольку полученные важные результаты основывались на применениях теории групп Ли. Соответствующие разделы книги Хамермеша могут служить хорошим введением для тех, кто интересуется этими вопросами.

В книге, конечно, охвачено далеко не все (именно это и делает ее удобочитаемой). В ней нет группы Лоренца, в ней нет специальных функций, придирчивый читатель найдет и другие пропуски. Некоторые из них можно восполнить по списку литературы, добавленному переводчиком.

Читатель, внимательно изучивший то, что содержится в книге Хамермеша, будет вполне подготовлен как к пониманию того, каким образом используются методы теории групп в современной физике, так и к их применению в собственных изысканиях.

*Я. Смородинский
Ю. Данилов*

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Эта книга представляет собой попытку показать, что теоретико-групповые методы могут служить не только предметом рассуждений, доступных немногим посвященным, но и удобным средством исследования. Я пытался излагать содержание статей и книг так, чтобы сделать материал как можно более доступным. Для понимания большей части текста не требуется никаких предварительных знаний теории групп, но предполагается, что читатель знает квантовую механику.

В основу этой книги положены лекции, которые в разное время читались в Аргоннской национальной лаборатории. Основная часть материала о кристаллографических группах и полях в кристаллах излагалась в курсе лекций, прочитанном в 1953 г. Некоторые из вопросов, относящиеся к ядерной физике, разбирались на лекциях в 1955 г. В лекциях 1957 г. рассматривалась группа Лоренца. В настоящей книге содержится лишь введение в круг вопросов, связанных с группой Лоренца, поскольку я почувствовал, что этот предмет нельзя излагать должным образом без подробного рассмотрения квантовой теории поля.

Большая часть окончательного варианта рукописи была написана в Цюрихе в 1958—1959 гг. Я весьма благодарен руководителям Аргоннской национальной лаборатории, предоставившим мне возможность сосредоточить все усилия на завершении работы над этой книгой. Я выражаю также свою благодарность совету Лондонского королевского общества за разрешение воспроизвести таблицы (в гл. 10 и 11), первоначально опубликованные в *Proceedings of the Royal Society*.

Эту книгу я посвящаю моей жене Маделине, которая перепечатала всю рукопись и исправила много стилистических и технических ошибок.

Мортон Хамермеш

ВВЕДЕНИЕ

Цель этой книги — изложить те аспекты теории групп, которые необходимы при рассмотрении физических задач. С самого начала следует сказать, что все излагаемые нами результаты можно получить, не используя абстрактные методы теории групп. Однако на самом деле эти иные «простые» методы, представляют собой не что иное, как некоторые из теоретико-групповых методов, заново открытые физиками. В простых задачах теоретико-групповой подход также прост; в более же сложных задачах использование его мощных средств может значительно уменьшить затраты труда. Не следует отрицательно относиться к теоретико-групповому формализму как таковому: коль скоро физические идеи не упускаются из виду, этот формализм представляет ценность. В нашем изложении «интуитивные» методы будут рассматриваться наряду с более абстрактными.

Я надеюсь, что изучение теории групп позволит читателю составить представление о том обширном круге физических задач, где важную роль играют понятия симметрии и инвариантности. Мы увидим также, что многие из понятий, которые мы считали не связанными между собой, например четность, тензорные свойства, спинор, момент количества движения и т. д., допускают единое рассмотрение с теоретико-групповых позиций.

Прежде чем приступить к изложению теории групп, рассмотрим несколько простых примеров.

Уравнение Шредингера для одномерной задачи можно записать в виде

$$u'' + [\lambda - V(x)]u = 0, \quad (1)$$

где λ — собственное значение, u — собственная функция и $V(x)$ — потенциал. В случае одномерной задачи решения должны быть невырожденными, т. е. каждому собственному значению λ должно соответствовать лишь одно решение $u(x)$. Предположим теперь, что наш потенциал $V(x)$ есть четная функция от x

$$V(x) = V(-x). \quad (2)$$

Заменяя x на $-x$, мы видим, что если $u(x)$ есть решение, соответствующее собственному значению λ , то это же справедливо и для

$u(-x)$. В таком случае отсутствие вырождения приводит к требованию

$$u(-x) = cu(x),$$

где c — некоторая константа:

$$u(x) = cu(-x) = c^2u(x), \quad c = \pm 1. \quad (3)$$

Таким образом, собственные функции $u(x)$ либо четны, либо нечетны. Формулировку наших результатов можно обобщить следующим образом.

В уравнении $Lu = 0$, где L — линейный оператор, свойства симметрии L (в нашем случае оператор L не изменялся при замене x на $-x$) приводят к классификации решений u по тем же свойствам симметрии.

Отметим также, что свойства симметрии системы (т. е. ее гамильтониана) приводят к *правилам отбора*:

$$\int u_n x u_m dx = 0,$$

если функции u_n и u_m — обе четные или обе нечетные; интеграл будет отличен от нуля лишь в том случае, если u_n и u_m — функции различной симметрии.

Этот простой пример подводит нас к общему вопросу. Какие свойства собственных функций следуют из инвариантности гамильтониана относительно различных операций симметрии?

В качестве другого примера рассмотрим движение электрона в сферически симметричном поле [потенциал $V(r)$ зависит только от r]. Инвариантность гамильтониана относительно вращений приводит к тому, что собственные функции имеют вид

$$R(r) Y_l^m(\theta, \varphi),$$

где Y_l^m — сферические функции. Каждое собственное значение энергии характеризуется азимутальным квантовым числом l и имеет $2l+1$ соответствующую ему собственную функцию ($m = l, l-1, \dots, -l$).

Классификацию собственных функций производят в соответствии с тем, как они ведут себя при вращениях. Если $V(r)$ имеет весьма специальный вид, например

$$V(r) = \frac{1}{r},$$

то может случиться так, что решения с различными значениями l совпадают. Такое усилившееся вырождение, как показал Фок, происходит из-за того, что гамильтониан оказывается инвариантным относительно более широкого класса операций симметрии, чем просто вращения в трехмерном пространстве. Аналогичный эффект, имеющий такое же объяснение, может встретиться в случае гармонического

осциллятора. Например, решения могут совпадать при специальном выборе констант в гамильтониане. В таких случаях мы говорим о «случайном» вырождении. Под этим понимают, что вырождение не является следствием свойств симметрии гамильтониана, а связано со специальным выбором гамильтониана; такое вырождение можно снять, *не* изменяя свойств симметрии гамильтониана.

Другим примером служит движение электрона в поле с периодическим потенциалом (внутри металла). Периодичность потенциала позволяет нам сделать заключения о собственных функциях, совпадающие с содержанием теоремы Блоха. Классификация уровней энергии электрона в кристалле будет отличаться от классификации их в свободном атоме из-за отсутствия сферической симметрии.

Для нахождения собственных колебаний молекулы приходится решать секулярное уравнение. За исключением простейших молекул, решение этого уравнения представляет собой весьма трудную задачу. Свойства же симметрии молекулы можно использовать для того, чтобы свести секулярное уравнение к уравнению, решить которое более просто. Точно так же свойства симметрии молекулы дают возможность произвести классификацию ее уровней энергии и вывести правила отбора для различных процессов.

Для системы тождественных частиц гамильтониан инвариантен относительно любой их перестановки. В задачах атомной физики это обстоятельство приводит к классификации уровней энергии по спину. В задачах ядерной физики, если протон и нейтрон рассматривать как различные зарядовые состояния одной и той же частицы (нуклона), мы получаем дополнительную классификацию уровней энергии по «зарядовому» квантовому числу.

Наконец, поведение волновых функций при вращениях можно использовать при рассмотрении задач о сложении моментов количества движения и об угловой корреляции между частицами, испускаемыми в последовательных процессах. Мы кратко упомянули некоторые возможные приложения соображений симметрии и теории групп. Позднее мы рассмотрим их подробно.

ГЛАВА 1

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРУПП

§ 1. Соответствия и преобразования

Мы все знакомы с понятием *соответствия*, или *отображения*. Имеется *множество объектов*, которые мы назовем *точками*. Число их может быть *конечным*. В этом случае их можно перечислить и называть, например, так: „точки a, b, c “ — для множества из трех объектов — или же: „точки $p_1, \dots, p_n$ “ (либо точки $1, 2, \dots, n$) — для множества из n объектов. Они могут образовывать *счетное множество* (например, точки, помеченные целыми числами $1, 2$ и т. д.) или же составлять континуум (все точки плоскости XY). Под *отображением* множества точек на себя мы подразумеваем, что нам задан рецепт, согласно которому мы каждой точке p этого множества ставим в соответствие ее *образ* — некоторую точку p' из того же множества. Мы говорим, что p' есть *образ* p при *отображении* M . Символически это записывается в виде

$$p \xrightarrow{M} p', \quad \text{или} \quad p' = Mp. \quad (1.1)$$

Можно сказать, что формулы (1.1) эквивалентны следующему утверждению: „Оператор M , действуя на объект p , переводит его в объект p' “. Для конечного множества точек отображение можно описать путем перечисления всех точек и их образов; например, для множества из трех точек a, b, c мы говорим: отображение M переводит точку a в ее образ b , точку b — в ее образ a и точку c — в ее образ c . Все это можно записать с помощью символов:

$$M \equiv \begin{pmatrix} a \rightarrow b \\ b \rightarrow a \\ c \rightarrow c \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Другим возможным отображением M' могло бы быть отображение

$$M' \equiv \begin{pmatrix} a \rightarrow a \\ b \rightarrow a \\ c \rightarrow a \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Для бесконечного множества точек описать отображение путем перечисления невозможно. Вместо этого мы задаем *функциональный*

закон (или рецепт) для отображения M . Например, можно рассматривать множество точек на оси X и отображение M , задав для него закон:

$$x \rightarrow x' = x + 2,$$

т. е. каждую точку, чтобы получить ее образ, следует сдвинуть на две единицы вправо.

Если $Mr = M'r$ для всех точек r , то два отображения M и M' некоторого множества точек *совпадают*. Обратно, если $M = M'$, то $Mr = M'r$ для всех точек r . Одним частным, причем важным видом отображения является *тождественное отображение* I , которое каждую точку множества переводит в себя: $Ir = r$. Отображения можно выполнять последовательно: если M переводит r в p' ($p' = Mr$) и M' переводит p' в p'' ($p'' = M'p'$), т. е.

$$p'' = M'p' = M'(Mr), \quad (1.4)$$

то мы запишем такое отображение в виде

$$p'' = M'Mr. \quad (1.4a)$$

Иначе говоря, существует одно-единственное отображение (его мы обозначаем $M'M$), которое приводит к тому же результату, что и последовательное выполнение отображений M и M' . Если при выполнении последовательности отображений M_1, M_2 и т. д. мы введем соответствия

$$p \rightarrow p' \rightarrow p'' \dots, \\ p' = M_1p, \quad p'' = M_2p', \quad p''' = M_3p'', \dots,$$

то

$$p''' = M_3(M_2p') = M_3(M_2(M_1p)) = M_3M_2(M_1p) = M_3M_2M_1p,$$

т. е. *отображения* удовлетворяют *ассоциативному закону*.

В нашем примере с тремя точками [формулы (1.2) и (1.3)] отображение $M'M$ означает

$$\left\{ \begin{array}{l} a \rightarrow b \rightarrow a \\ b \rightarrow a \rightarrow a \\ c \rightarrow c \rightarrow a \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} a \rightarrow a \\ b \rightarrow a \\ c \rightarrow a \end{array} \right\}. \quad (1.5)$$

Если бы мы выполняли отображения в обратном порядке, мы получили бы отображение MM' :

$$\left\{ \begin{array}{l} a \rightarrow b \\ b \rightarrow b \\ c \rightarrow b \end{array} \right\}, \quad (1.5a)$$

так что $MM' \neq M'M$. Таким образом, *композиция*, или *произведение, отображений* приводит к результату, который, вообще говоря,

зависит от порядка выполнения отображений. Отображения являются *некоммутативными операциями*.

Нас будут интересовать только взаимно однозначные отображения, или *преобразования*, т. е. такие отображения, при выполнении которых никакие две точки множества не имеют одинаковых образов и каждая точка p' множества служит образом одной (и *только* одной) точки p . Отображение M в (1.2) было взаимно однозначным, в то время как отображение M' в (1.3) взаимно однозначным не было.

Если задано некоторое взаимно однозначное отображение, то можно найти *обратное* отображение, которое уничтожает действие первого. Например, если преобразование M переводит p в p' ($p' = Mp$), то обратное преобразование M^{-1} переводит p' в p ($p = M^{-1}p'$). В этом случае

$$p' = Mp = MM^{-1}p',$$

откуда

$$MM^{-1} = I \quad (1.6)$$

и

$$p = M^{-1}p' = M^{-1}Mp,$$

так что

$$M^{-1}M = I.$$

Например, преобразованием, обратным преобразованию

$$M = \left\{ \begin{array}{l} a \rightarrow b \\ b \rightarrow a \\ c \rightarrow c \end{array} \right\},$$

является

$$M^{-1} = \left\{ \begin{array}{l} a \rightarrow b \\ b \rightarrow a \\ c \rightarrow c \end{array} \right\};$$

следовательно, в этом случае преобразование M совпадает со своим обратным.

Легко найти преобразование, обратное произведению преобразований. Для отображений M и M' , фигурирующих в (1.4),

$$p = M^{-1}p', \quad p' = M'^{-1}p'', \quad p = M^{-1}M'^{-1}p'',$$

так что

$$(M'M)^{-1} = M^{-1}M'^{-1}. \quad (1.7)$$

Словами это можно выразить так: *преобразование, обратное произведению преобразований*, получится, если выполнять *обратные преобразования* в *обратном* порядке. Ниже приводятся примеры преобразований.

Примеры

1. *Перестановки.* Множество из n ящиков (точек) перенумеровано числами от 1 до n . Каждый ящик содержит какой-то один предмет. Затем предметы из одних ящиков перемещают в другие так, что снова в каждом из n ящиков находится по одному предмету. Например, если предмет раньше находился в ящике 1, а теперь он находится в ящике 3, мы скажем, что 3 есть образ 1 при таком преобразовании. Рассмотрим конкретный пример множества из 4 ящиков. Предметы в этих ящиках были переставлены между собой так, что содержимое ящика 1 перешло в ящик 4, содержимое ящика 2 — в ящик 3, содержимое ящика 4 — в ящик 2 и содержимое ящика 3 — в ящик 1. Это отображение записывается в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 4 \\ 2 \rightarrow 3 \\ 4 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 1 \end{array} \right\}.$$

Можно сказать, что наше преобразование сводится к *переходу* от одного *упорядоченного расположения* чисел 1, ..., 4 к другому упорядоченному расположению. Такие преобразования называются *перестановками*. Одно из общепринятых обозначений для перестановок состоит в том, что под каждым предметом подписывают его образ при этом преобразовании. В этих обозначениях наш пример следовало бы записать так:

$$\begin{pmatrix} 1234 \\ 4312 \end{pmatrix}.$$

Числа в верхней строке мы записали в естественном порядке, но это не обязательно; ту же перестановку можно было бы записать и в виде

$$\begin{pmatrix} 1324 \\ 4132 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 4213 \\ 2341 \end{pmatrix}.$$

Поскольку соответствия между предметом и его образом сохраняются одними и теми же, эти различные способы записи представляют одну и ту же перестановку.

Нашим примером служит перестановка четырех символов, поэтому мы говорим, что она является перестановкой *степени* 4. Мы могли бы выполнить и другие перестановки четырех символов, например точка 1 могла бы иметь в качестве образа точку 1, 2, 3 или 4. Тогда для выбора образа точки 2 осталось бы только три возможности, что в свою очередь оставило бы только две возможности

для выбора образа точки 3, и, наконец, имелась бы только одна возможность для выбора образа точки 4. Таким образом, существует $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ перестановки степени 4. Аналогично, число перестановок n символов, т. е. число перестановок степени n , равно $n!$

2. *Параллельные переносы.* Точки прямой обозначены координатой x . Преобразование состоит в сдвиге каждой точки на две единицы вправо:

$$x \rightarrow x' = x + 2.$$

3. *Проективные преобразования прямой.* Проективные преобразования точек оси X определяются с помощью соотношения

$$x \rightarrow x', \quad x' = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \text{где } ad - bc \neq 0.$$

Задача. Двойное отношение четырех точек на прямой определяется как

$$\frac{(x_1 - x_2)/(x_3 - x_2)}{(x_1 - x_4)/(x_3 - x_4)},$$

где x_1, x_2, x_3, x_4 — координаты четырех точек. Покажите, что двойное отношение *инвариантно* относительно проективного преобразования, т. е. двойное отношение, вычисленное для образов точек, имеет тот же вид, что и для исходных точек.

Примеры (продолжение)

4. Перестановки степени n можно также рассматривать как специальные *линейные преобразования в n -мерном пространстве*. Точка, v -я координата которой есть x_v , отображается в точку, u которой p_v -я координата (относительно тех же координатных осей) есть x_{p_v} , где p_v — образ v при перестановке. Перестановка имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

соответствующее ей преобразование координат задается формулами

$$\begin{aligned} x'_{p_1} &= x_1, \\ x'_{p_2} &= x_2, \\ &\vdots \\ x'_{p_n} &= x_n. \end{aligned}$$

Для частного случая, рассмотренного в примере 1, соответствующее преобразование координат имело бы вид

$$\begin{aligned}x_1 &= x'_4, \\x_2 &= x'_3, \\x_3 &= x'_1, \\x_4 &= x'_2.\end{aligned}$$

5. *Линейные преобразования в n -мерном пространстве.* Преобразования, рассмотренные в примере 4, являются частными случаями линейных преобразований в n -мерном пространстве. При фиксированной системе координат линейное преобразование отображает точку с координатами $(x_1, \dots, x_n)$ в точку с координатами $(x'_1, \dots, x'_n)$, где величины x' задаются соотношениями

$$x'_l = \sum_{j=1}^n a_{lj} x_j \quad (l = 1, \dots, n). \quad (1.8)$$

В этих линейных уравнениях n^2 коэффициентов a_{lj} образуют квадратную таблицу — *матрицу* a преобразования. У преобразования (1.8) будет обратное, если *определитель* матрицы a отличен от нуля, т. е. если a — *невырожденная* матрица. Если вслед за преобразованием (1.8) мы выполним второе преобразование

$$x''_l = \sum_{j=1}^n b_{lj} x'_j \quad (l = 1, \dots, n),$$

то результирующим преобразованием (произведением преобразований) будет преобразование

$$x''_l = \sum_{j=1}^n b_{lj} x'_j = \sum_{j=1}^n b_{lj} \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n b_{lj} a_{jk} \right) x_k. \quad (1.9)$$

Из (1.9) мы видим, что одно преобразование, позволяющее совершить переход непосредственно от x и x'' , задается равенствами

$$x''_l = \sum_{k=1}^n c_{lk} x_k,$$

где

$$c_{lk} = \sum_{j=1}^n b_{lj} a_{jk} \quad (l, k = 1, \dots, n). \quad (1.10)$$

Равенство (1.10) задает правило, по которому следует комбинировать элементы матриц $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$, чтобы получить *произведение матриц* $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{c} = \mathbf{b}\mathbf{a}. \quad (1.11)$$

Последнее равенство служит символической записью n^2 равенств (1.10). Соотношение (1.8) можно также записать в символическом виде. Координаты $x_1, \dots, x_n$ можно рассматривать как элементы матрицы, имеющей n строк и *один* столбец:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

Точно так же можно записать и $\mathbf{x}'$. Тогда равенство (1.8) примет вид

$$\mathbf{x}' = \mathbf{a}\mathbf{x}, \quad (1.13)$$

а для обратного преобразования будем иметь

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{x}', \quad (1.13a)$$

где $\mathbf{a}^{-1}$ — матрица коэффициентов обратного преобразования.

§ 2. Группы. Определения и примеры

Под группой преобразований G мы понимаем совокупность преобразований заданного множества точек, которая удовлетворяет следующим условиям:

- 1) содержит тождественное преобразование;
- 2) вместе с каждым преобразованием M содержит также и обратное ему преобразование M^{-1} ;
- 3) если содержит преобразования M и M' , то содержит также и их произведение MM' .

Евклидовы движения (движения твердого тела) в обычном пространстве образуют группу; множество всех $n!$ перестановок n точек образует группу; движения равностороннего треугольника, совмещающие его с самим собой, образуют группу и т. д.

Если точкам множества и преобразованиям не придавать никакого конкретного наглядного смысла, то ~~от~~ понятия группы преобразований мы приходим к понятию абстрактной группы.

Абстрактная группа G — это множество *элементов* a, b, c и т. д., для которых закон композиции, или „умножение“, задан так,

что „произведение“ ab любых двух элементов вполне определено и удовлетворяет следующим условиям¹⁾:

1) если a и b — элементы множества, то и ab также принадлежит этому множеству;

2) умножение *ассоциативно*, т. е. $a(bc) = (ab)c$;

3) множество содержит элемент e , называемый *единицей*, такой, что $ae = ea = a$ для любого элемента a из множества;

4) если элемент a принадлежит множеству, то существует элемент b такой, что $ab = ba = e$. Элемент b называется *обратным* для элемента a и обозначается $b = a^{-1}$.

Хотя групповую операцию мы часто называем „умножением“, из этого отнюдь не следует, что эта операция является обычным умножением. Множество рациональных чисел (за исключением нуля) образует группу по обычному умножению. Совокупность целых чисел (положительных, отрицательных и нуля) образует группу, если групповой операцией служит обычное сложение. Даже в этих примерах мы пользуемся не абстрактной группой, а каким-либо конкретным примером („реализацией“) абстрактной группы. Структура абстрактной группы определяется заданием результата „умножения“ каждой упорядоченной пары элементов либо путем перечисления, либо же путем указания функционального закона без какой бы то ни было конкретизации природы элементов.

Говорят, что два элемента a и b группы *коммутируют* друг с другом, если

$$ab = ba, \quad (1.14)$$

т. е. если их произведение не зависит от порядка сомножителей. Из аксиом группы мы видим, что *единичный* элемент e *коммутирует* со всеми элементами группы. Если все элементы некоторой группы коммутируют друг с другом, то говорят, что эта группа *коммутативная*, или *абелева*. Для абелевых групп в качестве символа для обозначения групповой операции по традиции используют знак „+“. В таких группах „произведение“ элементов a и b записывается в виде $a + b$ (или $b + a$), символ 0 используется для

¹⁾ На самом деле приводимые ниже аксиомы избыточны; аксиомы 3 и 4 можно заменить более слабыми требованиями:

3') множество содержит элемент e , называемый *левой единицей*, такой, что $ea = a$ для любого элемента a из множества;

4') если a принадлежит множеству, то существует элемент b , такой, что $ba = e$, где e — левая единица, определенная в 3'. Элемент b называется *левым обратным* для элемента a относительно левой единицы e .

Читателю, для которого сказанное представляет интерес, следовало бы доказать, что левая единица e в аксиоме 3' является также и правой единицей, т. е. $ae = a$, и определяется единственным образом и что элемент b в аксиоме 4' является также и правым обратным для элемента a ($ab = e$) и по элементу a определяется однозначно. Таким образом, аксиомы 3 и 4 следуют из более слабых требований 3' и 4'.

обозначения единичного элемента, а элемент, обратный для элемента a , записывается в виде $(-a)$ и называется *противоположным*.

Число элементов в группе называется *порядком* группы.

Выбрав произвольный элемент a группы G , мы можем составить произведения a с самим собой, например произведение

$$aa,$$

которое обозначим a^2 . Точно так же под a^n мы будем понимать элемент, получившийся при перемножении n элементов, каждый из которых равен a . Вводя символ a^{-1} для элемента, обратного a , мы имели в виду именно эти обозначения. Например,

$$a^{-1} \cdot a = e = a^0.$$

Аналогично можно определить отрицательные степени a

$$a^{-m} = (a^{-1})^m = (a^m)^{-1}, \quad (1.15)$$

причем последний шаг в этих преобразованиях вытекает из (1.7). Говорят, что a — элемент *бесконечного порядка*, если все степени элемента a различны. Если же дело обстоит иначе, то, возводя элемент a последовательно в степени 1, 2, ... и т. д., мы найдем два целых числа r и s ($r > s$) таких, что

$$a^r = a^s.$$

Умножив на a^{-s} , получим

$$a^{r-s} = e, \quad r - s > 0.$$

Предположим, что n — наименьшее целое положительное число такое, что a^n равно единице, т. е.

$$a^n = e, \quad n > 0, \quad (1.16)$$

и если $a^k = e$, $k > 0$, то $k \geq n$. Мы говорим, что элемент a есть элемент *порядка* n .

Если a — элемент n -го порядка, то все элементы

$$a^0 = e, a, a^2, \dots, a^{n-1} \quad (1.17)$$

различны (ибо если $a^r = a^s$, то $a^{r-s} = e$, причем $r - s < n$). Следовательно, любая другая степень элемента a равна одному из элементов, перечисленных в (1.17). Всякое целое число k можно записать в виде

$$k = sn + t, \quad 0 \leq t < n,$$

откуда

$$a^k = a^{sn+t} = a^{sn} a^t = (a^n)^s a^t = a^t.$$

Из этого рассуждения мы видим, что если $a^k = e$, то k кратно n .

Группа порядка 1 содержит один элемент — единицу e : $ee = e$.

Группа порядка 2 содержит два различных элемента. Одним из них должна быть единица e . Второй элемент назовем a . Тогда

$aa (= a^2)$ не может совпадать с элементом a , так как из $a^2 = a$ следует, что $a = e$. Поэтому должно выполняться равенство $a^2 = e$, т. е. элемент a совпадает со своим обратным элементом $a = a^{-1}$. Ниже приводятся примеры групп второго порядка.

Примеры

1. Элементами служат целые числа 0 и 1. Групповой операцией является сложение по модулю 2, т. е. мы складываем элементы и берем остаток от деления их суммы на 2:

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 0.$$

2. Элементы группы — преобразования точек трехмерного пространства. Элемент e — тождественное преобразование, элемент a — преобразование, заменяющее каждую точку ее зеркальным отражением в некоторой данной плоскости (например, в плоскости YZ), так что a изменяет знак координаты x каждой точки.

3. То же, что и в примере 2, но теперь a — инверсия относительно начала координат (т. е. a заменяет x, y, z на $-x, -y, -z$).

4. То же самое, но на этот раз a — поворот на 180° , например вокруг оси Z .

5. То же самое, но теперь a — инверсия относительно единичной сферы: точка, сферические координаты которой равны r, θ, φ , отображается в точку $1/r, \theta, \varphi$.

6. Элементы группы — целые числа 1 и -1 , групповая операция — обычное умножение.

7. Элементы — перестановки двух символов:

$$e = \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \end{array} \right\} \quad \text{и} \quad a = \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 1 \end{array} \right\}.$$

Мы рассмотрели семь различных реализаций абстрактной группы порядка 2. Все эти группы имеют совершенно одинаковую структуру. Такие группы называются *изоморфными*.

В общем случае мы скажем, что две группы G и G' *изоморфны* ($G \approx G'$), если их элементы можно поставить во взаимно однозначное соответствие, сохраняющееся при выполнении групповой операции. Рассмотрим, например, группы 1, 6 и 7, указанные выше. Составим их элементы следующим образом:

$$\text{Группа 1:} \quad 0 \qquad 1 \qquad 1 + 1 = 0,$$

$$\text{Группа 6:} \quad 1 \qquad -1 \qquad (-1)(-1) = 1,$$

$$\text{Группа 7:} \quad \left(\begin{array}{l} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 1 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \end{array} \right).$$

Если элемент, соответствующий элементу a (a принадлежит группе G), обозначить через a' (a' принадлежит группе G'), т. е. штрих над символом элемента будет означать элемент, поставленный ему в соответствие, то группы G и G' окажутся изоморфными, если

$$a'b' = (ab)'.$$

Заметим, что $a'b'$ означает произведение a' и b' относительно групповой операции в группе G' , в то время как ab означает произведение a и b относительно групповой операции в группе G . Например, групповыми операциями в трех перечисленных выше группах были сложение, умножение и последовательное выполнение преобразований соответственно.

Если две группы изоморфны, то их структура одинакова; символы и слова могут отличаться, но как абстрактные группы они совпадают.

Рассмотрим далее абстрактную группу порядка 3. Различные элементы ее назовем a , b и e . Произведение ab не может быть равным a (или b), так как из этого следовало бы, что $b=e$ (или $a=e$). Поэтому ab должно быть равным e . Аналогично усматриваем, что $a^2=b$. Таким образом, группа порядка 3 состоит из элементов a , a^2 , $a^3=e$. Она служит примером *циклической* группы, состоящей из степеней одного элемента.

Вот некоторые реализации этой группы:

1) вращения равностороннего треугольника ABC в его плоскости, совмещающие треугольник с самим собой;

2) повороты трехмерного пространства на углы 0, 120 и 240° вокруг оси Z ;

3) кубические корни из единицы с обычным умножением в роли групповой операции.

Для групп более высокого порядка такой процесс перечисления всех элементов группы был бы чрезвычайно затруднительным. Поэтому групповую операцию удобно задавать в виде *групповой таблицы*. Обозначим все строки и столбцы квадратной таблицы так же, как и элементы группы. В этой таблице мы запишем на пересечении n -й строки и m -го столбца произведение элемента, символом которого помечена n -я строка, и элемента, символом которого помечен m -й столбец:

		.	.	.	b
.					
.					
.					
a					ab

Вот как, например, выглядит таблица для группы порядка 2:

	e	a				e	a
e	$e^2 = e$	$ea = a$	или кратко	e	e	e	a
a	$ae = a$	$a^2 = e$		a	a	e	

Для группы порядка 3 имеем

	e	a	$b (= a^2)$
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Обычно мы будем опускать первую строку и первый столбец, так как они только повторяют обозначения строк и столбцов. Заметим, что групповая таблица в наших примерах симметрична относительно главной диагонали. Так будет в том и только в том случае, если группа абелева. Кроме того, мы видим, что в каждом столбце (и в каждой строке) все элементы группы встречаются один и только один раз. Это объясняется тем, что если все элементы группы умножить слева (или справа) на некоторый фиксированный элемент a , то все получающиеся при этом произведения должны быть различными: если $ab = ac$, то $b = c$.

Для абстрактных групп порядка 4 существуют две различные структуры:

А)

e	a	b	c	
a	b	c	e	$a^2 = b, \quad ab = c = a^3,$ $a^4 = b^2 = e,$
b	c	e	a	
c	e	a	b	

т. е. мы имеем циклическую группу $a, a^2, a^3, a^4 = e$;

Б)

e	a	b	c	
a	e	c	b	$a^2 = b^2 = c^2 = e,$ $ab = c, \quad ac = b, \quad bc = a.$
b	c	e	a	
c	b	a	e	

Эту группу называют *четверной группой* Клейна и часто обозначают символом V .

Из симметрии таблиц видно, что обе группы абелевы.

Задачи. 1. Покажите, что А) и Б) образуют единственные возможные структуры для группы порядка 4.

2. Покажите непосредственными выкладками, что всякая группа порядка 4 должна быть абелевой.

3. Приведите пример реализации каждой из групп порядка 4.

Рассмотрим еще несколько примеров групп.

Примеры

1. Элементы группы — целые числа

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Групповая операция — обычное сложение. Сумма любых двух целых чисел есть снова целое число, 0 играет роль единичного элемента, а элементом, обратным n , служит элемент $-n$. Это группа *бесконечного порядка*. Единичный элемент 0 имеет порядок, равный единице; все остальные элементы — бесконечного порядка.

2. Элементы группы — рациональные числа. Групповая операция — сложение.

3. Элементы группы — комплексные числа. Групповая операция — сложение.

Заметим, что неотрицательные целые числа *не образуют* группы относительно сложения. „Произведения“ содержатся в этом множестве, множеству принадлежит и единичный элемент (0), но обратные элементы множеству не принадлежат.

4. Элементы группы — четные числа. Групповая операция — сложение. Это группа бесконечного порядка. Заметим, что группа 1 изоморфна группе 4. Каждому элементу n группы 1 можно поставить в соответствие элемент $2n$ группы 4. Этот пример показывает, что одна группа может быть изоморфна другой группе, составляющей лишь часть первой (разумеется, для групп *конечного* порядка такого положения *быть не может*).

5. Элементы группы — степени числа 2. Групповая операция — обычное умножение, т. е.

$$\dots, 2^{-2}, 2^{-1}, 2^0, 2^1, 2^2, \dots$$

Если элемент n группы 1 сопоставить элементу 2^n группы 5, то станет видно, что эти две группы изоморфны.

6. Элементы группы — все рациональные числа, за исключением нуля. Групповая операция — умножение.

7. Элементы группы — все вещественные числа, за исключением нуля. Групповая операция — умножение.

8. Элементы группы — все комплексные числа, за исключением нуля. Групповая операция — умножение.

9. Элементы группы — корни n -й степени из единицы. Групповая операция — умножение. Эти корни равны

$$e^{2\pi i m/n}, \quad m = 0, 1, \dots, n-1.$$

Это — циклическая группа, все ее элементы совпадают со степенями числа $e^{2\pi i/n}$. Очевидно, что существует только одна структура циклической группы порядка n , т. е. все циклические группы порядка n изоморфны друг другу, ибо если элементы двух циклических групп одного порядка являются степенями элементов a и b соответственно, то изоморфизм можно задать, сопоставляя элементы

$$a^r \leftrightarrow b^r.$$

Этот пример показывает также, что существуют группы *любого конечного порядка n* . Кроме того, если имеется циклическая группа бесконечного порядка, т. е. группа с элементами

$$\dots, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0 = e, a^1, a^2, \dots,$$

то она изоморфна группе 1. Отсюда следует, что существует только одна структура для циклической группы *счетного* порядка.

10. Элементы группы — перестановки степени n

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

Эту группу, называемую *симметрической группой* степени n , мы обозначим символом S_n . Легко найти число элементов в группе S_n : вместо 1 можно подставить любой из символов от 1 до n ; после того как это сделано, вместо 2 можно подставить любой из оставшихся $n-1$ символов и т. д. Таким образом, порядок симметрической группы S_n равен $n!$.

Рассмотрим перестановку степени 8

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Выбрав сначала символ 1, мы видим, что эта перестановка переводит 1 в 2. Затем мы отыскиваем число 2 в верхней строке и видим, что рассматриваемая перестановка переводит 2 в 3, а 3 — в 1, замыкая *цикл*, который мы запишем в виде (123). Выберем теперь в верхней строке какой-нибудь другой символ, например 8. Наша перестановка переводит 8 в 8, образуя цикл (8). Продолжая этот

процесс, мы найдем циклы (45) и (67). Нашу перестановку можно записать по-другому в виде

$$(123) (45) (67) (8).$$

Заметим, что циклы не имеют общих символов. Цикл (123) можно рассматривать как сокращенную запись следующей перестановки степени 8:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Наши обозначения можно еще больше сократить, если не указывать символа 8, остающегося на месте, и записывать нашу первоначальную перестановку в виде

$$(123) (45) (67), \quad (1.18)$$

но степень перестановки следует иметь в виду. Поскольку циклы не имеют общих элементов, они коммутируют друг с другом, например

$$(123) (45) = (45) (123),$$

поэтому порядок, в котором мы записываем циклы, несуществен. Кроме того, записывая отдельный цикл, мы можем начинать с любого элемента в цепочке:

$$(123) = (231) = (312).$$

Цикл длины 2 называется *транспозицией*. Всякий цикл можно записать в виде произведения транспозиций (имеющих общие элементы). Например,

$$(123) = (13) (12),$$

или в общем случае

$$(12 \dots n) = (1n) \dots (13) (12).$$

Цикл из 3 символов записывается в виде произведения 2 транспозиций, цикл из n символов — в виде произведения $n - 1$ транспозиций.

Продолжая аналогичным образом, можно разложить всякую перестановку в произведение транспозиций. В нашем примере

$$(123) (45) (67) = (13) (12) (45) (67). \quad (1.19)$$

В (1.18) число переставляемых символов равно 7, а число *независимых* циклов равно 3. Разность между этими числами $7 - 3 = 4$ называется *декрементом* перестановки. Читатель должен самостоятельно доказать, что если декремент перестановки четен (нечетен), то разложение этой перестановки в произведение транспозиций будет содержать четное (нечетное) число сомножителей. Перестановки с четным (нечетным) декрементом называются *четными* (*нечетными*) перестановками.

Покажем теперь, что, умножив данную перестановку на произвольную транспозицию, мы изменим декремент на ± 1 , т. е. перейдем от четной перестановки к нечетной или же наоборот. Рассмотрим транспозицию (ab) , на которую мы умножаем данную перестановку. Разложим эту перестановку на независимые циклы. Предположим, что a и b попали в один и тот же цикл:

$$(a \dots xb \dots y).$$

Тогда

$$(ab)(a \dots xb \dots y) = (a \dots x)(b \dots y),$$

так что декремент уменьшится на 1. Наоборот, если a и b находятся в разных независимых циклах, мы видим (проводя рассуждения в обратном порядке), что умножение на (ab) увеличивает декремент на 1. Произведение двух четных (или нечетных) перестановок дает четную перестановку. Произведение нечетной и четной перестановок дает нечетную перестановку. Перестановка, обратная четной (нечетной) перестановке, четна (нечетна). Нечетные перестановки степени n не образуют группы (так как их произведения являются четными перестановками). Четные же перестановки степени n образуют группу — *знакопеременную группу* $\mathcal{A}_n$, состоящую из $n!/2$ элементов.

11. Элементы группы — множество всех целых положительных чисел. Рассмотрим перестановки, в которых меняется местами любое *конечное* число символов. Множество перестановок, построенных таким способом, называется *счетной симметрической группой*.

12. Элементы группы — невырожденные матрицы $n \times n$. Групповая операция — матричное умножение.

13. Элементы группы — невырожденные матрицы, имеющие определитель, равный ± 1 . Групповая операция — матричное умножение. Такая группа называется *унимодулярной*.

14. То же, что в примере 13, за исключением того, что теперь определители равны $\neq 1$. Такая группа называется *специальной унимодулярной*.

§ 3. Подгруппы. Теорема Кэли

Если из элементов группы G мы выберем некоторое подмножество $\mathcal{H}$, то, чтобы показать, что $\mathcal{H}$ содержится в G , мы воспользуемся обозначением $\mathcal{H} \subset G$. Если подмножество $\mathcal{H}$ образует группу (относительно той же групповой операции, которая используется в G), то говорят, что $\mathcal{H}$ является *подгруппой* группы G . Всякая группа имеет две тривиальные подгруппы: группу, состоящую из одного лишь единичного элемента, и саму группу G в целом. Эти подгруппы называются *несобственными*. Одна из главных задач теории групп состоит в отыскании всех остальных (*собственных*) подгрупп данной группы G .

Следует особо подчеркнуть, что $\mathcal{H}$ образует группу относительно той же групповой операции, что и G . Рациональные числа образуют группу G относительно сложения. Положительные рациональные числа образуют группу G' относительно умножения, но G' не является подгруппой группы G , несмотря на то, что элементы G' образуют подмножество элементов группы G .

Чтобы удостовериться в том, что некоторое подмножество $\mathcal{H}$ элементов группы G является подгруппой, мы проверяем, выполняются ли следующие требования:

1) произведение любой пары элементов подмножества $\mathcal{H}$ принадлежит $\mathcal{H}$;

2) вместе с каждым своим элементом $\mathcal{H}$ содержит обратный ему.

Другие требования группы выполняются в силу того, что $\mathcal{H}$ содержится в группе G . Например, ассоциативный закон выполняется в G и тем самым выполняется в $\mathcal{H}$. Группа G содержит единичный элемент, а из требований 1 и 2 следует, что и $\mathcal{H}$ содержит его.

Для конечной группы (или любой группы, все элементы которой имеют конечный порядок) необходимо, чтобы выполнялось только требование 1. В этом случае для каждого элемента a из $\mathcal{H}$ найдется некоторая степень a (также принадлежащая $\mathcal{H}$), например a^{n-1} , такая, что $aa^{n-1} = a^n = e$, в результате чего требование 2 становится следствием требования 1.

В общем случае для бесконечных групп необходимо выполнение обоих требований. Например, целые положительные числа относительно сложения удовлетворяют первому, но не удовлетворяют второму требованию и поэтому не образуют подгруппы всех целых чисел по сложению.

Знакопеременная группа $\mathcal{A}_n$ является подгруппой симметрической группы S_n , действующей на те же символы ($\mathcal{A}_n \subset S_n$). При $n=3$ группа S_3 состоит из элементов e ; (123), (132); (12), (13), (23), а группа $\mathcal{A}_3$ содержит элементы e ; (123), (132).

Если $\mathcal{H}$ — подгруппа группы G и K — подгруппа группы $\mathcal{H}$, то K — подгруппа группы G . Это отношение транзитивности наводит на мысль о последовательностях подгрупп, каждая из которых содержит все подгруппы, предшествующие ей в этой последовательности. Например, в качестве G можно взять группу всех целых чисел относительно сложения, в качестве $\mathcal{H}$ — группу всех четных чисел относительно сложения, в качестве K — группу всех чисел, кратных числу $2^2=4$, относительно сложения, затем группу всех чисел, кратных 2^3 , и т. д.:

$$\begin{aligned} G: & \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots \\ \mathcal{H}: & \dots -4, -2, 0, 2, 4, \dots \\ K: & \dots -8, -4, 0, 4, 8, \dots \end{aligned}$$

и т. д.,

Каждая группа содержит все последующие подгруппы, перечисленные ниже ее, т. е.

$$G \supset \mathcal{H} \supset K \supset \dots;$$

кроме того, в рассматриваемом случае все эти группы изоморфны:

$$G \approx \mathcal{H} \approx K \approx \dots.$$

Таким образом, группа может быть изоморфной одной из своих собственных подгрупп, но для групп конечного порядка это невозможно.

В рассмотренном выше случае группы S_3

$$S_3 \supset \mathcal{A}_3 \supset e,$$

где e есть группа, состоящая из одного единичного элемента. Для всех групп конечного порядка последовательности, подобные той, которая приведена в этом частном примере, начинаются с группы G и завершаются группой, содержащей лишь элемент e . Другие последовательности в группе S_3 имели бы вид

$$S_3 \supset \mathcal{H}_1 \supset e,$$

$$S_3 \supset \mathcal{H}_2 \supset e,$$

$$S_3 \supset \mathcal{H}_3 \supset e,$$

где подгруппа $\mathcal{H}_1$ содержит два элемента: e и (23), подгруппа $\mathcal{H}_2$ содержит e и (13) и подгруппа $\mathcal{H}_3$ содержит e и (12).

Группа G' может быть изоморфной одной или более подгруппам другой группы G . Например, группа S_2 — группа перестановок двух символов — изоморфна подгруппам $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_3$ группы S_3 . Отсюда, очевидно, вытекает, что

$$\mathcal{H}_1 \approx \mathcal{H}_2 \approx \mathcal{H}_3.$$

В общем случае группа S_{n-1} изоморфна n подгруппам группы S_n , которые получаются, если фиксировать по очереди символы $1, 2, \dots, n$. Мы можем заметить, что элементы группы G , которые принадлежат одновременно двум подгруппам F_1 и F_2 группы G , образуют множество D (пересечение подгрупп F_1 и F_2), которое является подгруппой группы G , ибо если a и b принадлежат D , то a и b также принадлежат F_1 и F_2 . Поэтому элементы ab и a^{-1} принадлежат F_1 и F_2 и, следовательно, принадлежат множеству D , так что D удовлетворяет тем требованиям, которые мы предъявляем к подгруппе. Поскольку каждая подгруппа группы G содержит единицу e , пересечение любого числа подгрупп (т. е. совокупность элементов, принадлежащих всем рассматриваемым подгруппам) образует подгруппу, которая содержит по крайней мере единицу.

Симметрические группы S_n особенно важны, потому что на самом деле ими исчерпываются все возможные структуры конечных групп. Это доказывается *теоремой Кэли*.

Теорема. Всякая группа G порядка n изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы S_n .

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, мы хотим указать на некоторые следствия из нее. Из теоремы Кэли вытекает, что число возможных неизоморфных групп порядка n *конечно*, ибо эти группы изоморфны подгруппам группы S_n . Поскольку S_n — конечная группа, она имеет лишь конечное число подгрупп, чем и доказывается наше утверждение. Это важный результат, поскольку он по крайней мере ограничивает задачу нахождения независимых структур группы порядка n . Переходим к теореме Кэли. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — элементы группы G . Возьмем любой элемент b ; произведения его и каждого из элементов группы G имеют вид $ba_1, ba_2, \dots, ba_n$, причем все эти произведения различны, так как $ba_i = ba_j$ означает, что $a_i = a_j$. Таким образом, эти произведения ba_i задают элементы группы G в некотором новом порядке. Поставим в соответствие каждому элементу b перестановку π_b ,

$$b \rightarrow \pi_b = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ ba_1 & \dots & ba_n \end{pmatrix}.$$

n предметов $a_1, \dots, a_n$. Другому элементу c группы G сопоставим перестановку π_c :

$$c \rightarrow \pi_c = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ ca_1 & \dots & ca_n \end{pmatrix}.$$

По тому же правилу элементу cb ставится в соответствие перестановка

$$cb \rightarrow \pi_{cb} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ cba_1 & \dots & cba_n \end{pmatrix}.$$

Для доказательства изоморфизма требуется показать, что π_{cb} есть произведение перестановок π_c и π_b .

Как мы уже видели, при описании перестановки существенно только соответствие между предметом и его образом. Порядок же, в котором мы записываем символы, подлежащие перестановке, несуществен. Поэтому π_c можно также записать и в виде

$$\pi_c = \begin{pmatrix} ba_1 & \dots & ba_n \\ c(ba_1) & \dots & c(ba_n) \end{pmatrix}.$$

Взяв произведение образов элементов c и b

$$\pi_c \pi_b = \begin{pmatrix} ba_1 & \dots & ba_n \\ cba_1 & \dots & cba_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ ba_1 & \dots & ba_n \end{pmatrix},$$

получим

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ cba_1 & \dots & cba_n \end{pmatrix} = \pi_{cb}.$$

Перестановка π_e , сопоставленная единичному элементу e группы G , есть тождественная перестановка

$$\pi_e \pi_b = \pi_{eb=b}.$$

Точно так же

$$\pi_{a^{-1}} \pi_a = \pi_{a^{-1}a} = \pi_e,$$

так что перестановки, поставленные в соответствие элементам G , образуют некоторую подгруппу в S_n , и теорема доказана.

Перестановки, поставленные в соответствие каждому элементу группы, — это именно те перестановки, которые мы получили бы из рассмотрения групповой таблицы. Например, в случае четверной группы V структурная таблица имеет вид

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Чтобы найти перестановку, соответствующую, например, элементу a , мы запишем в верхней строке символы

$$eabc,$$

а под ними выпишем символы в том порядке, как они расположены в строке, где мы производим умножение на a слева, т. е.

$$aescb.$$

Тогда

$$a \rightarrow \pi_a = \begin{pmatrix} eabc \\ aescb \end{pmatrix}.$$

Если мы обозначим элементы e, a, b, c числами 1, 2, 3, 4, то перестановки, соответствующие элементам e, a, b, c , запишутся

в виде

$$\begin{aligned}\pi_e &= \begin{pmatrix} 1234 \\ 1234 \end{pmatrix}, \\ \pi_a &= \begin{pmatrix} 1234 \\ 2143 \end{pmatrix} = (12)(34), \\ \pi_b &= \begin{pmatrix} 1234 \\ 3412 \end{pmatrix} = (13)(24), \\ \pi_c &= \begin{pmatrix} 1234 \\ 4321 \end{pmatrix} = (14)(23).\end{aligned}$$

Построенные таким способом группы перестановок обладают некоторыми характерными особенностями:

- 1) они являются подгруппами порядка n симметрической группы S_n ;
- 2) эти перестановки, за исключением тождественной, которая не переставляет *ни один* из символов, не оставляют *ни одного* символа на его прежнем месте, ибо перестановка π_b переводит a_i в элемент ba_i , который равен a_i только в том случае, если b — единичный элемент.

Перестановки группы S_n , обладающие этими двумя свойствами, называются *правильными перестановками*. Подгруппы, содержащие только правильные перестановки, имеют и другие свойства, являющиеся следствиями первых двух. Если две перестановки π_1 и π_2 переводят один и тот же символ, например 3, в один и тот же символ, например 4, то перестановка $\pi_1\pi_2^{-1}$, которая также принадлежит этой группе, должна была бы оставлять 3 и 4 без изменений. С другой стороны, поскольку $\pi_1 \neq \pi_2$, перестановка $\pi_1\pi_2^{-1}$ не может быть тождественной перестановкой и поэтому переставляет местами какие-то символы. Но это противоречит нашему предыдущему результату о том, что все такие перестановки (за исключением тождественной) не оставляют на месте ни одного символа. Так как существует n перестановок n букв, мы приходим к выводу, что символ 1 каждой из перестановок группы переводится в некоторый другой символ (1, ..., n). (То же применимо к каждому из остальных символов.) Например, в группе V перестановка π_e переводит 1 в 1, π_a переводит 1 в 2, π_b переводит 1 в 3 и π_c переводит 1 в 4.

Другое интересное свойство подгруппы правильных перестановок состоит в следующем. Рассмотрим любую из перестановок π_b и разложим ее на независимые циклы. Мы утверждаем, что *все* циклы должны быть *одинаковой* длины. Если бы разложение π_b содержало два цикла различной длины l_1, l_2 ($l_1 < l_2$), то перестановка $\pi_b^{l_1}$, также принадлежащая группе, оставляла бы неизменными все символы в первом цикле, но *не* оставляла бы неизменными все символы

во втором цикле. Это противоречит нашему определению подгруппы правильных перестановок. В правильной подгруппе не может содержаться, например, такая перестановка:

$$(12)(345),$$

так как квадрат ее равен перестановке

$$(1)(2)(354).$$

Наше утверждение иллюстрируется на примере четверной группы Клейна. Каждая из ее перестановок есть произведение двух независимых циклов длины 2.

Циклическая группа порядка 4 дает нам правильную подгруппу группы S_4 следующего вида:

$$e; \quad (1234); \quad (13)(24); \quad (1432).$$

Первый элемент имеет 4 цикла длины 1, второй и четвертый имеют один цикл длины 4, а третий имеет два цикла длины 2.

Для нахождения возможных структур группы можно использовать теорему Кэли. Например, предположим, что n — простое число. В этом случае группа порядка n изоморфна правильной подгруппе группы S_n . Так как перестановки правильные, то в их разложении на независимые циклы все циклы должны быть равной длины. Поэтому длина цикла должна быть делителем n . Так как n — простое число, длины циклов могут быть равны только n или 1 (для тождественной перестановки). Поэтому правильная подгруппа является просто циклической группой, содержащей перестановку $(12 \dots n)$ и ее степени. Тем самым мы показали, что если порядок n группы — *простое число*, то группа — *циклическая*. Другое доказательство этого результата мы приведем в этой же главе позднее. Наш результат позволяет решить задачу об отыскании возможных структур групп *простого порядка*.

Воспользуемся теперь теоремой Кэли для отыскания возможных структур группы порядка 4. В соответствии с теоремой наша задача эквивалентна нахождению правильных подгрупп группы S_4 . Перестановки такой подгруппы должны содержать либо один цикл длины 4, либо два цикла длины 2 (разумеется, тождественная перестановка содержит 4 цикла длины 1). Предположим сначала, что одна из перестановок является циклом длины 4, например (1234) . Возведя ее в степени 1, 2, 3 и 4, получим перестановки (1234) , $(13)(24)$, (1432) , e , т. е. совокупность четырех элементов. Это — циклическая группа порядка 4. Далее предположим, что не существует циклов длины 4, а имеются только перестановки с двумя циклами

длины 2. Квадрат таких перестановок равен e , и существует ровно три такие перестановки:

$$(12)(34); \quad (13)(24); \quad (14)(23),$$

которые вместе с e и образуют четверную группу.

Задачи. 1. Укажите элементы правильной подгруппы группы S_6 , изоморфной циклической группе порядка 6.

2. Воспользуйтесь теоремой Кэли, чтобы найти возможные структуры групп порядка 6.

§ 4. Смежные классы. Теорема Лагранжа

Абстрактные группы порядков 1, 2, 3 не имеют собственных подгрупп. Циклическая группа порядка 4 имеет подгруппу порядка 2, состоящую из элементов a^2 и e , так как $(a^2)(a^2) = a^4 = e$. Четверная группа имеет три собственные подгруппы порядка 2:

$$a, e; \quad b, e; \quad c, e,$$

все эти подгруппы изоморфны. Заметим, что порядок подгруппы, равный 2, является делителем порядка группы, равного 4. Сейчас мы покажем, что этот результат (принадлежащий Лагранжу) выполняется и в общем случае.

Порядок подгруппы конечной группы есть делитель порядка группы.

Пусть группа G порядка g содержит подгруппу $\mathcal{H}$ порядка h . Если $\mathcal{H}$ исчерпывает собой группу G , то $\mathcal{H} = G$, и результат тривиален (заметим, что здесь знак равенства означает, что два множества содержат одни и те же элементы). Если же это не выполняется, то пусть a есть элемент группы G , не содержащийся в $\mathcal{H}$. Обозначив элементы $\mathcal{H}$ через

$$e, H_2, H_3, \dots, H_h,$$

образуем произведения

$$ae = a, \quad aH_2, \quad aH_3, \dots, aH_h.$$

Эту совокупность произведений обозначим символом $a\mathcal{H}$. Все произведения aH_ν различны, так как если

$$aH_\nu = aH_\mu,$$

то

$$H_\nu = H_\mu.$$

Точно так же ни одно из них не содержится в $\mathcal{H}$, так как если

$$aH_\nu = H_\mu,$$

то

$$a = H_\mu H_\nu^{-1}$$

и a принадлежало бы $\mathcal{H}$, вопреки нашему предположению. Мы получили два множества $\mathcal{H}$ и $a\mathcal{H}$, каждое из которых содержит h различных элементов, принадлежащих G . Если на этом группа G не исчерпана, мы продолжаем действовать так же, как и прежде, выбирая некоторый элемент b в G , который не содержится ни в $\mathcal{H}$, ни в $a\mathcal{H}$. Множество $b\mathcal{H}$ дает h новых элементов группы G , так как если

$$bH_\nu = aH_\mu,$$

то

$$b = aH_\mu H_\nu^{-1}$$

и b принадлежало бы $a\mathcal{H}$, что противоречит нашему предположению. Продолжая этот процесс, мы можем исчерпать группу G , представив ее в виде суммы конечного числа различных множеств, каждое из которых состоит из h элементов:

$$G = \mathcal{H} + a\mathcal{H} + b\mathcal{H} + \dots + k\mathcal{H}. \quad (1.20)^1)$$

Таким образом, порядок g группы G есть кратное порядка h ее подгруппы $\mathcal{H}$, т. е.

$$g = mh, \quad (1.21)$$

где m называется *индексом* подгруппы $\mathcal{H}$ в группе G . Множества элементов вида $a\mathcal{H}$ в (1.20) называются *левыми смежными классами* $\mathcal{H}$ в G . Они, безусловно, не являются подгруппами, так как не содержат единичного элемента. Разумеется, доказательство можно было бы проводить, умножая $\mathcal{H}$ справа. Это привело бы к разложению G на *правые смежные классы* по подгруппе $\mathcal{H}$

$$G = \mathcal{H} + \mathcal{H}a' + \mathcal{H}b' + \dots + \mathcal{H}k'. \quad (1.20a)$$

Из равенства (1.21) мы видим, что группа, порядок которой есть простое число, не может иметь собственных подгрупп.

Взяв любой элемент a (порядка h) в группе G , мы можем построить циклическую группу, образуя последовательные степени a .

¹⁾ Знак „плюс“ в равенстве (1.20) означает суммирование множеств: множество G содержит все элементы, принадлежащие $\mathcal{H}$, все элементы, принадлежащие $a\mathcal{H}$, и т. д. В рассматриваемом случае множества $\mathcal{H}$, $a\mathcal{H}$, ... не имеют общих элементов. Вообще говоря, *сумма* двух *множеств* A и B есть множество всех элементов, которые содержатся по крайней мере в одном из множеств A или B .

Циклическая группа $\{a\} : a^0 = e, a, a^2, \dots, a^{h-1}$, образованная элементом a , называется *периодом* элемента a . Это наименьшая подгруппа группы G , содержащая элемент a . Из (1.21) следует также, что h есть делитель числа g , так что *порядки всех элементов конечной группы* должны быть *делителями порядка* группы. Из этого мы заключаем, что группа простого порядка должна быть циклической и может быть образована по любому своему элементу, отличному от единицы. Это обстоятельство дает нам ответ на задачу о нахождении структуры группы порядка 5: она образуется из элемента a такого, что $a^5 = e$, и аналогичный ответ для групп порядка 7, 11, 13 и т. д.

Ниже приводятся примеры разложения группы на смежные классы.

Примеры

1. Пусть G — группа целых чисел по сложению, $\mathcal{H}$ — группа чисел, делящихся на 4, по сложению. Тогда

$$G = \mathcal{H} + (1 + \mathcal{H}) + (2 + \mathcal{H}) + (3 + \mathcal{H}),$$

так что индекс подгруппы $\mathcal{H}$ в G равен 4. Здесь смежный класс $(1 + \mathcal{H})$ представляет собой множество целых чисел вида $4n + 1$ (n — целое число). Два элемента a и b группы G принадлежат одному и тому же смежному классу, если $a - b$ делится на 4.

2. Пусть $G = S_3$ и $\mathcal{H}$ — подгруппа, содержащая e и (12). Тогда

$$S_3 = \mathcal{H} + (13)\mathcal{H} + (23)\mathcal{H} = \mathcal{H} + \mathcal{H}(13) + \mathcal{H}(23).$$

Задача. Циклические перестановки четырех символов образуют подгруппу $\mathcal{H}$ в S_4 . Разложите S_4 на левые смежные классы по $\mathcal{H}$. Сравните это разложение с разложением на правые смежные классы.

Теорему Лагранжа можно использовать для того, чтобы найти возможные структуры групп заданного порядка. Для примера найдем все структуры групп порядка 6. Так как порядок равен 6, порядок каждого из ее элементов является делителем 6, т. е. равен 1, 2, 3 или 6. Если группа содержит элемент a порядка 6, то она является циклической группой $a, a^2, \dots, a^6 = e$. Чтобы найти другие возможные структуры, предположим, что группа не содержит элемента порядка 6, но имеет элемент a порядка 3. Таким образом, эта группа содержит подгруппу $a, a^2, a^3 = e$. Если группа содержит еще и другой элемент b , то она содержит шесть различных элементов e, a, a^2, b, ba, ba^2 . Порядок элемента b равен 2 или 3. Если порядок элемента b равен 3, т. е. $b^3 = e$, то элемент b^2 должен быть одним из перечисленных выше 6 элементов. Равенство $b^2 = e$ выполняться не может (поскольку мы предположили, что порядок b равен 3),

из равенства же $b^2 = b$, ba или ba^2 следует, что $b = e$, a или a^2 соответственно, что противоречит нашим предположениям о том, что элемент b отличается от этих элементов. Кроме того, так как $b^2 = a$, то $ba = e$, а из того, что $b^2 = a^2$, следует $ba^2 = e$; и в том и в другом случае это противоречит сделанным нами предположениям. Таким образом, порядок элемента b не может быть равным 3 и мы должны иметь: $b^2 = e$. Произведение ab не может быть равным e , a , a^2 или b . Если $ab = ba$, то

$$(ab)^2 = (ab)(ab) = (ab)ba = ab^2a = a^2, \\ (ab)^3 = a^2(ab) = b; \quad (ab)^4 = a, \quad (ab)^5 = ba^2, \quad (ab)^6 = e.$$

Следовательно, группа содержала бы элемент ab порядка 6, вопреки нашему предположению. (То же можно проделать короче: порядок a равен 2, порядок b равен 3 и $ab = ba$, т. е. a и b коммутируют. Возводя ab в различные степени, мы видим, что порядок элемента ab равен наименьшему кратному порядков элементов a и b .) Остаются равенства

$$b^2 = e, \quad ab = ba^2.$$

Из $ab = ba^2$ следует, что $(ab)^2 = (ab)ba^2 = e$.

Это последнее предположение не приводит к противоречиям. Найденную таким образом группу порядка 6 можно кратко охарактеризовать так: она образована всеми возможными произведениями элементов a и b , причем

$$a^3 = b^2 = (ab)^2 = e.$$

Легко построить групповую таблицу

e	a	a^2	b	ba	ba^2
a	a^2	e	ba^2	b	ba
a^2	e	a	ba	ba^2	b
b	ba	ba^2	e	a	a^2
ba	ba^2	b	a^2	e	a
ba^2	b	ba	a	a^2	e

Эта группа изоморфна группе S_3 .

Задача. Найдите возможные структуры групп порядка 8.

§ 5. Классы сопряженных элементов

Говорят, что элемент b в группе G сопряжен элементу a , если в группе G можно найти элемент u такой, что

$$uau^{-1} = b. \quad (1.22)$$

Иногда говорят, что b есть *трансформация* элемента a элементом u . Выбрав $u = e$, мы видим, что элемент a сопряжен самому себе. Точно так же, если элемент b сопряжен a и c сопряжен b , то c сопряжен a , так как если

$$c = vbv^{-1}, \quad b = uau^{-1},$$

то

$$c = v u a u^{-1} v^{-1} = (vu) a (vu)^{-1}.$$

Далее, из (1.22) следует, что $a = u^{-1} b (u^{-1})^{-1}$, поэтому если элемент b сопряжен a , то элемент a сопряжен b . Таким образом, мы имеем отношение между элементами, которое удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к *отношению эквивалентности* (символ $\equiv$):

- 1) $a \equiv a$;
- 2) если $a \equiv b$, то $b \equiv a$;
- 3) если $a \equiv b$ и $b \equiv c$, то $a \equiv c$.

Отношением эквивалентности можно воспользоваться для того, чтобы разбить некоторое множество на непересекающиеся *классы* — в нашем случае для того, чтобы разбить группы на классы сопряженных элементов. В абелевой группе каждый элемент сам по себе образует класс, так как $bab^{-1} = a$ при любых a и b . Во всякой группе единичный элемент e образует класс. Заметим, что все элементы, принадлежащие одному и тому же классу, имеют одинаковый порядок: если $a^h = e$ и $b = uau^{-1}$, то

$$b^h = (uau^{-1})^h = uau^{-1} uau^{-1} \dots = u a^h u^{-1} = u e u^{-1} = e.$$

Сопряженные преобразования. Для группы преобразований понятие сопряженных элементов имеет простой физический смысл. Предположим, что a — отражение в плоскости P и c — вращение вокруг некоторой оси. Так как a оставляет каждую точку x плоскости P неизменной, $ax = x$. Тогда

$$(cac^{-1})(cx) = cax = cx.$$

Таким образом, преобразование cac^{-1} оставляет множество точек cx неизменным. Иначе говоря, cac^{-1} есть отражение в плоскости, которая получится из плоскости P , если последнюю подвергнуть повороту c . Аналогично, если a означает вращение вокруг некоторой оси, то cac^{-1} означает вращение на тот же угол вокруг оси, получающейся из первой при преобразовании c .

Предположим, например, что группа содержит элемент a , который представляет собой поворот на угол φ вокруг прямой l . Пусть c — некоторое другое преобразование той же группы, например параллельный перенос. Тогда c переводит прямую l в какую-то другую

прямую l' . Преобразование sac^{-1} обладает следующими свойствами: s^{-1} переводит прямую l' в прямую l ; кроме того, a есть вращение на угол φ вокруг l , оно оставляет точки прямой l неподвижными; наконец, s переводит l снова в l' . В результате точки прямой l' остаются неподвижными; следовательно, sac^{-1} есть поворот (на угол φ) вокруг прямой l' .

Сопряженные перестановки. Применим теперь понятие сопряженных элементов к перестановкам. Предположим, что a — это перестановка

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

и b — перестановка

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ a_{b_1} & \dots & a_{b_n} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$bab^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ a_{b_1} & \dots & a_{b_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \\ a_{b_1} & \dots & a_{b_n} \end{pmatrix}.$$

Сравнивая bab^{-1} с a , видим, что для того, чтобы получить bab^{-1} , мы применяем перестановку b к верхней и нижней строкам перестановки a порознь. Пусть, например,

$$a = \begin{pmatrix} 1234 \\ 4321 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2134 \end{pmatrix}.$$

Применим перестановку b к верхней строке перестановки a (при этом 1234 перейдет в 2134) и к нижней строке перестановки a (при этом 4321 перейдет в 4312); таким образом, bab^{-1} имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2134 \\ 4312 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 3412 \end{pmatrix}.$$

Этот метод равным образом применим и в том случае, если перестановки заданы в виде циклов; например, $a = (12)(345)$ и $b = (24135)$. В этом случае $bab^{-1} = (34)(512)$. Мы видим, что сопряженные перестановки имеют одинаковую структуру с точки зрения их разложений на циклы, так что перестановки, относящиеся к данному классу, либо все четны, либо все нечетны. Например, в группе S_3 элемент e образует класс, состоящий лишь из одного элемента. Кроме того, один класс образуют элементы (12), (13), (23). Элементы (123), (213) также образуют класс. Таким образом, груп-

па S_3 содержит три класса сопряженных элементов. В группе S_4 различными являются классы:

1. e ;
2. $(12), (13), (14), (23), (24), (34)$;
3. $(12)(34), (13)(24), (14)(23)$;
4. $(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)$;
5. $(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)$.

Задача. Разбейте элементы группы S_n на классы сопряженных элементов.

Общий метод должен быть ясен из процедуры, которой мы пользовались в примере с группой S_4 . Перестановки группы S_n действуют на совокупность n символов. Представим себе, что мы разложили перестановки на независимые циклы. Пусть число циклов, состоящих из 1 символа, равно v_1 , число циклов, состоящих из 2 символов, равно $v_2, \dots$, число циклов из n символов равно v_n . Поскольку полное число символов равно n , должно выполняться равенство

$$v_1 + 2v_2 + \dots + nv_n = n. \quad (1.23)$$

О перестановке, которая при разложении на независимые циклы имеет v_1 циклов длины 1, v_2 циклов длины 2, $\dots$, v_n циклов длины n , говорят, что она обладает циклической структурой $(1^{v_1}, 2^{v_2}, \dots, n^{v_n})$, или кратко (v) . Как мы уже видели, все перестановки группы S_n , обладающие одинаковой циклической структурой (v) , образуют класс сопряженных элементов в S_n . Каждое решение уравнения (1.23) в целых положительных числах $v_1, \dots, v_n$ задает в S_n некоторый класс. Следовательно, число классов в точности равно числу таких решений. Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + \dots + v_n &= \lambda_1, \\ v_2 + v_3 + \dots + v_n &= \lambda_2, \\ &\vdots \\ v_n &= \lambda_n, \end{aligned} \quad (1.24)$$

то

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = n \text{ и } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0. \quad (1.25)$$

Представление числа n в виде суммы n целых чисел такое, как в (1.25), называется *разбиением* числа n . Из (1.23)–(1.25) следует, что каждое решение уравнения (1.23) (в неотрицательных целых числах) соответствует разбиению числа n вида $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$. Обратно,

если разбиение задано, как это сделано в (1.25), то существует соответствующая ему структура разложения на циклы, а именно:

$$\begin{aligned} v_1 &= \lambda_1 - \lambda_2, \\ v_2 &= \lambda_2 - \lambda_3, \\ &\vdots \\ v_n &= \lambda_n. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Обычно у нас нет необходимости записывать те слагаемые λ в (1.25), которые равны 0. Например, разбиение числа 5

$$(22100),$$

т. е. $5 = 2 + 2 + 1 + 0 + 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_5$, записывают в виде (221), или еще более кратко в виде (2²1). Согласно равенствам (1.26), соответствующая такому разбиению структура разложения на циклы имеет вид

$$\begin{aligned} v_1 &= \lambda_1 - \lambda_2 = 2 - 2 = 0, \\ v_2 &= \lambda_2 - \lambda_3 = 2 - 1 = 1, \\ v_3 &= \lambda_3 = 1, \end{aligned}$$

т. е. состоит из одного цикла длины 2 и одного цикла длины 3.

Аналогично, в случае группы S_6 разбиению (31³) отвечает набор

$$v_1 = 2, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0, \quad v_4 = 1,$$

вследствие чего циклическая структура, соответствующая разбиению (31³), состоит из двух циклов единичной длины и одного цикла длины 4.

Транспозиция в группе S_n содержит один цикл длины 2 и $(n-2)$ цикла единичной длины, поэтому разбиение, соответствующее такой циклической структуре, имеет вид $(n-1, 1)$.

Мы видим, что задача о нахождении числа классов сопряженных элементов в группе S_n сводится к задаче о разбиении числа n . Перечислим такие разбиения и укажем полное число r всех классов для нескольких первых симметрических групп:

$$\begin{aligned} S_1: & (1); \quad r=1, \\ S_2: & (2), (1^2); \quad r=2, \\ S_3: & (3), (21), (1^3); \quad r=3, \\ S_4: & (4), (31), (2^2), (21^2), (1^4); \quad r=5. \end{aligned}$$

Обратите внимание на порядок, в котором мы записываем разбиения. Разбиение, у которого λ_1 максимально, записывается первым. Если

же два разбиения имеют одинаковые $\lambda_1, \dots, \lambda_i$, то первым записывается то из них, у которого λ_{i+1} больше.

Задача. Продолжите таблицу до $n = 5, 6$ и 7 . Для $n = 5$ укажите циклическую структуру, соответствующую каждому разбиению.

Важной характеристикой служит число перестановок группы S_n в данном классе сопряженных элементов. Это число $n_{(v)}$ легко найти следующим способом. Класс перестановок с циклической структурой (v) содержит перестановки, в которых имеется v_1 циклов из одного символа, v_2 циклов из двух символов, $\dots$, v_n циклов из n символов. Представим себе, что структура перестановки выписана, но входящие в нее символы не указаны:

$$\underbrace{(\cdot) \dots (\cdot)}_{v_1 \text{ циклов длины } 1} \quad \underbrace{(\cdot \cdot) (\cdot \cdot) \dots (\cdot \cdot)}_{v_2 \text{ циклов длины } 2} \quad \underbrace{(\cdot \cdot \cdot) \dots (\cdot \cdot \cdot) \dots}_{v_3 \text{ циклов длины } 3} \text{ и т. д.}$$

Всего имеется n мест в различных ячейках, по которым требуется разместить n символов от 1 до n . Это можно проделать $n!$ способами. Однако при этом возникнут повторения. Например, если символы 1 и 2 входят в циклы, состоящие каждый из одного символа, то (1) (2) означает то же самое, что и (2) (1). Все $v_1!$ циклов из одного символа можно переставлять между собой ($v_1!$ способами), все v_2 циклов из двух символов можно переставлять между собой $v_2!$ способами и т. д., вследствие чего данная перестановка будет повторена $v_1! v_2! \dots v_n!$ раз. Кроме того, такой цикл из двух символов, как (12), может встречаться и в виде (21), а такой цикл из трех символов, как (123), может встречаться в виде (231) или же (312) и т. д. Таким образом, каждая перестановка повторяется $1^{v_1} 2^{v_2} \dots n^{v_n}$ раз. Поэтому число различных перестановок в группе S_n , имеющих циклическую структуру (v) , равно

$$n_{(v)} = \frac{n!}{v_1! \cdot 2^{v_2} \cdot v_2! \cdot 3^{v_3} \cdot v_3! \dots n^{v_n} \cdot v_n!}. \quad (1.27)$$

Задача. Найдите число перестановок в каждом классе сопряженных элементов группы S_6 .

Важно помнить, что то, что мы делали выше, применимо *только* к полной симметрической группе S_n . Например, в группе S_4 все перестановки

$$(12) (34), (13) (24), (14) (23)$$

принадлежат одному и тому же классу, потому что группа S_4 содержит перестановку $b = (23)$ такую, что

$$b(12)(34)b^{-1} = (13)(24).$$

Если же мы рассмотрим четверную группу V , то перечисленные выше перестановки уже не будут принадлежать одному и тому же классу в V , так как группа V не содержит транспозиций. В самом деле, группа V — абелева, каждый из ее элементов образует класс.

Задача. Образую последовательные произведения перестановок $(1234)(5678)$ и $(1537)(2846)$,

покажите, что при этом порождается группа порядка 8. Разбейте элементы этой группы на классы сопряженных элементов. Покажите, что эта группа (*группа кватернионов*) изоморфна группе с элементами

$$1, -1, i, -i, j, -j, k, -k; \\ i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j.$$

§ 6. Инвариантные подгруппы. Фактор-группа. Гомоморфизм

Взяв за исходную подгруппу $\mathcal{H}$ группы G , мы можем образовать множество элементов $a\mathcal{H}a^{-1}$, где a — произвольный элемент группы G . (Под $a\mathcal{H}a^{-1}$ мы подразумеваем множество элементов aha^{-1} , где h пробегает все элементы подгруппы $\mathcal{H}$.) Эта совокупность элементов (или *комплекс*) в свою очередь является подгруппой группы G (проверка этого предоставляется читателю). Говорят, что эта *подгруппа сопряжена* подгруппе $\mathcal{H}$ в группе G . Выбирая из G различные элементы a , мы можем получать различные сопряженные подгруппы. Может случиться так, что при *всех* a

$$a\mathcal{H}a^{-1} = \mathcal{H}, \quad (1.28)$$

т. е. все подгруппы, сопряженные $\mathcal{H}$ в группе G , совпадают с подгруппой $\mathcal{H}$. В этом случае мы скажем, что $\mathcal{H}$ — *инвариантная подгруппа* (*самосопряженная подгруппа*, *нормальный делитель*) в группе G . Соотношение (1.28) означает, что при заданном элементе h_1 в подгруппе $\mathcal{H}$ мы можем при любом a найти некоторый элемент h_2 , такой, что

$$ah_1a^{-1} = h_2, \quad \text{или} \quad ah_1 = h_2a.$$

Последнее равенство можно записать в виде

$$a\mathcal{H} = \mathcal{H}a. \quad (1.29)$$

Эта запись приводит ко второму определению инвариантной подгруппы: подгруппа $\mathcal{H}$ инвариантна в группе G , если левые и правые классы смежности, образованные по любому элементу a группы G , совпадают. Пользуясь (1.29), можно сказать, что подгруппа $\mathcal{H}$, взятая в качестве единицы, коммутирует со всеми элементами группы G . Из утверждений, следующих за равенством (1.28), мы видим также, что из (1.28) вытекает следующий результат: если h_1 принадлежит $\mathcal{H}$, то и все элементы ah_1a^{-1} принадлежат $\mathcal{H}$. Иными словами, подгруппа $\mathcal{H}$ группы G инвариантна тогда и только тогда, когда она содержит элементы группы G в виде *полных классов*, т. е. для любого класса в группе G справедливо утверждение: подгруппа $\mathcal{H}$ содержит либо *все* элементы, входящие в этот класс, либо не содержит *ни одного* из них. Единичный элемент и вся группа G являются тривиальными инвариантными подгруппами группы G . Группа, которая не имеет инвариантных (собственных) подгрупп, называется *простой*. Группа называется *полупростой*, если ни одна из ее инвариантных подгрупп не является абелевой. Очевидно, что все подгруппы абелевой группы инвариантны.

Инвариантные подгруппы обладают некоторыми весьма примечательными свойствами. Если подгруппа $\mathcal{H}$ инвариантна в G , то

$$(a\mathcal{H})(b\mathcal{H}) = a(\mathcal{H}b)\mathcal{H} = a(b\mathcal{H})\mathcal{H} = ab(\mathcal{H}\mathcal{H}) = (ab)\mathcal{H}, \quad (1.30)$$

поскольку произведение $\mathcal{H}\mathcal{H}$ означает не что иное, как совокупность элементов, входящих в $\mathcal{H}$. Таким образом, произведение двух смежных классов инвариантной подгруппы снова является смежным классом. Точно так же заметим, что

$$\mathcal{H}(a\mathcal{H}) = (\mathcal{H}a)\mathcal{H} = (a\mathcal{H})\mathcal{H} = a(\mathcal{H}\mathcal{H}) = a\mathcal{H}, \quad (1.31)$$

поэтому умножение любого смежного класса подгруппы $\mathcal{H}$ на $\mathcal{H}$ дает в результате тот же самый смежный класс. В этом умножении смежных классов инвариантная подгруппа $\mathcal{H}$ играет роль единичного элемента. Далее, если у нас имеется некоторый смежный класс $a\mathcal{H}$, то мы можем найти обратный ему смежный класс (относительно нашего нового „умножения смежных классов“), а именно смежный класс $a^{-1}\mathcal{H}$, который содержит элемент a^{-1} :

$$(a^{-1}\mathcal{H})(a\mathcal{H}) = a^{-1}\mathcal{H}a\mathcal{H} = a^{-1}a\mathcal{H}\mathcal{H} = \mathcal{H}. \quad (1.32)$$

Если мы будем рассматривать смежные классы подгруппы $\mathcal{H}$ в качестве элементов, а произведение определим как результат умножения таких смежных классов, то смежные классы инвариантной подгруппы образуют группу, которая называется *фактор-группой* и обозначается $G/\mathcal{H}$. Порядок ее равен индексу подгруппы $\mathcal{H}$ в группе G .

Найдем сопряженные подгруппы для подгруппы $\mathcal{H}$ [е, (12) (34)] в группе S_4 . Подгруппа $\mathcal{H}$ не инвариантна, так как она не со-

держит всех элементов третьего класса, указанного для группы S_4 в § 5 настоящей главы. Когда мы образуем произведения $a\mathcal{H}a^{-1}$ с элементами a из группы S_4 , у нас должны получиться циклические структуры, которые должны совпадать с циклическими структурами элементов подгруппы $\mathcal{H}$. Таким образом, сопряженными подгруппами являются подгруппы:

$$\mathcal{H} : e, (12)(34),$$

$$\mathcal{H}' : e, (13)(24),$$

$$\mathcal{H}'' : e, (14)(23).$$

Каждая из них получается 8 раз:

$\mathcal{H}$ при $a = e, (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1324), (1423);$

$\mathcal{H}'$ при $a = (14), (23), (132), (124), (143), (234), (1243), (1342);$

$\mathcal{H}''$ при $a = (13), (24), (123), (142), (134), (243), (1234), (1432).$

С другой стороны, подгруппа

$$V: e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)$$

инвариантна в группе S_4 , поскольку содержит элементы из S_4 в виде полных классов.

- Задачи.* 1. Не перечисляя всех подгрупп, найдите сопряженные подгруппы для S_3 в группе S_4 ; для S_2 в группе S_4 ; для циклической группы $[e, (123), (132)]$ в группе S_4 .
2. Докажите, что подгруппа индекса 2 должна быть инвариантной.
3. Покажите, что все подгруппы группы кватернионов инвариантны.

В циклической группе G четвертого порядка $(a, a^2, a^3, a^4 = e)$ подгруппа $\mathcal{H}(e, a^2)$ инвариантна (группа G — абелева!). Факторгруппа $G/\mathcal{H}$ содержит два элемента

$$E = (e, a^2), \quad A = (a, a^3),$$

причем $A^2 = E$.

Ранее мы ввели понятие изоморфизма для групп, обладающих одинаковой структурой. Между элементами a группы G и элементами a' группы G' было установлено взаимно однозначное соответствие, такое, что $(ab)' = a'b'$. Под *гомоморфным* отображением группы G на группу G' мы понимаем аналогичное соответствие, которое сохраняет произведение, но теперь уже *несколько* элементов группы G могут иметь *один и тот же образ* в группе G' .

Пусть, например, G — циклическая группа порядка 4 и пусть группа G' состоит лишь из единичного элемента. Мы ообразим все элементы группы G в единичный элемент группы G' . Аналогично,

если G' — группа порядка 2 с элементами b и $b^2 = e$, мы получим гомоморфизм группы G в G' , если отображим

$$(a^2, e) \text{ в } b^2 = e \text{ и } (a, a^3) \text{ в } b.$$

При гомоморфном отображении группы G на группу G' образом единичного элемента e из группы G является единичный элемент e' группы G' , ибо если $ab = a$ (откуда следует, что b есть единица в группе G), то $a'b' = a'$, из чего следует, что b' есть единица в группе G' . Если совокупность элементов $a_1, a_2, \dots, a_h$ группы G отображается в e' , то, выбрав какой-нибудь другой элемент b в группе G , мы найдем h различных элементов $ba_1, ba_2, \dots, ba_h$ в группе G , которые отображаются в один и тот же элемент b' группы G' , так как $(ba)' = b'a' = b'e' = b'$. Таким образом, в каждый элемент группы G' отображается одинаковое число элементов группы G . Если элемент a отображается в e' , то это же справедливо и для a^{-1} , что можно проверить, взяв образы правой и левой частей равенства $aa^{-1} = e$. Поэтому те элементы группы G , которые отображаются в e' , образуют группу, на самом деле *инвариантную подгруппу* группы G , ибо если элемент a отображается в e' , то это же выполняется и для всех элементов, принадлежащих тому же классу, что и элемент a , так как

$$(uau^{-1})' = u'a'(u^{-1})' = u'e'(u')^{-1} = e'.$$

Обозначив эту инвариантную подгруппу символом $\mathcal{H}$, мы обнаружим, что любой класс смежности $a\mathcal{H}$ отображается в один элемент группы G' , так как

$$(a\mathcal{H})' = a'\mathcal{H}' = a'e' = a'.$$

Таким образом, мы видим, что группа G' изоморфна факторгруппе $G/\mathcal{H}$.

§ 7. Прямые произведения

Говорят, что группа G является *прямым произведением* своих подгрупп $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_n$, если

- 1) элементы различных подгрупп коммутируют;
- 2) каждый элемент g группы G можно представить одним и только одним способом в виде

$$g = h_1 h_2 \dots h_n,$$

где h_1 принадлежит $\mathcal{H}_1, \dots$, а h_n принадлежит $\mathcal{H}_n$.

Предполагается, что ни одна из подгрупп не состоит из одного лишь единичного элемента. В сокращенных обозначениях мы запишем G в виде

$$G = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \times \dots \times \mathcal{H}_n. \quad (1.33)$$

Подгруппы $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_n$ называются *прямыми сомножителями* группы G .

Из условий 1 и 2 следует, что общим элементом для подгрупп $\mathcal{H}_i$ является только единичный элемент. Точно так же из этих условий следует, что все $\mathcal{H}_i$ являются инвариантными подгруппами в группе G . Согласно условию 2, любой элемент g группы G можно записать в виде

$$g = h_1 h_2 \dots h_n,$$

где, согласно условию 1, все h_i коммутируют друг с другом. Предположим, что h'_i принадлежит подгруппе $\mathcal{H}_i$. Тогда любой элемент, сопряженный h'_i , имеет вид

$$gh'_i g = (h_1 h_2 \dots h_n) h'_i (h_1 h_2 \dots h_n)^{-1} = h_i h'_i h_i^{-1} \quad (1.34)$$

и также принадлежит $\mathcal{H}_i$. [Те сомножители в (1.34), которые принадлежат другим подгруппам, отличным от $\mathcal{H}_i$, сокращаются после коммутации.] Таким образом, подгруппа $\mathcal{H}_i$ содержит элементы группы G в виде полных классов и поэтому инвариантна в G .

В качестве примера разложения группы на прямые сомножители рассмотрим циклическую группу G порядка 6 ($a^6 = e$). Ее можно записать в виде прямого произведения подгрупп

$$A: \quad e, a^2, a^4,$$

$$B: \quad e, a^3.$$

Имеем

$$G = A \times B.$$

Каждый элемент группы G представим лишь одним способом в виде произведения элемента из A на элемент из B (проверка предоставляется читателю!).

В нашей книге нам также придется иметь дело с прямым произведением $G \times G'$ двух групп. Чтобы получить его, образуем все пары

$$(a, a'),$$

где элемент a принадлежит G , а элемент a' принадлежит G' . Произведение пар определяется соотношением

$$(a, a')(b, b') = (ab, a'b'). \quad (1.35)$$

Если e и e' — единичные элементы групп G и G' , то пары (a, e') образуют подгруппу Γ , изоморфную группе G , а пары (e, a') образуют подгруппу Γ' , изоморфную группе G' . Группа, состоящая из заданных выше пар, является прямым произведением Γ и Γ' в соответствии с определением, данным ранее. Обычно мы будем говорить просто, что эта группа есть прямое произведение групп G и G' . Очевидно, что порядок прямого произведения двух групп равен произведению их порядков.

ГЛАВА 2

ГРУППЫ СИММЕТРИИ

§ 1. Элементы симметрии. Полюсные фигуры

Обширный класс групп, играющих важную роль в физике и химии, составляют так называемые группы симметрии. В этой главе мы обсудим их несколько подробнее для того, чтобы создать необходимую основу для последующих рассмотрений и как-то конкретизировать понятия, введенные в гл. 1.

Классификация уровней энергии многоатомной молекулы связана с симметрией последней. С симметрией молекулы связана также задача о нахождении спектра колебаний молекулы. Симметрия внешних макроскопических форм кристаллов связана с лежащей в их основе симметрией микроскопической структуры. Классификация энергетических уровней электрона в кристалле оказывается связанной с симметрией поля в кристалле. Для всех этих задач представляется существенным прежде всего дать систематическое перечисление возможных типов симметрии, которыми может обладать молекула или кристалл.

Симметрию некоторого тела описывают, задавая совокупность всех тех преобразований, которые сохраняют расстояния между всеми парами точек тела и совмещают тело с самим собой. Любое такое преобразование называется *преобразованием симметрии*. Ясно, что такая совокупность преобразований образует группу — *группу симметрии* данного тела. Все преобразования, сохраняющие расстояние, можно получить из преобразований трех основных типов:

- 1) поворотов на некоторый угол вокруг какой-нибудь оси;
- 2) зеркального отражения в некоторой плоскости;
- 3) параллельного переноса (трансляции).

Последний элемент симметрии — трансляция — может встретиться *только* в том случае, если тело имеет бесконечную протяженность (например, бесконечная кристаллическая решетка). Следует отметить, что когда трансляционную симметрию используют в физических рассуждениях, то подразумевают, что удаленные точки тела не влияют на решение задачи, так как при таком подходе конечное тело с необходимостью заменяется своей бесконечной экстраполяцией. Например, в теории твердого тела следует затем отдельно рассмотреть проблему, связанную с состоянием поверхности.

Для тела конечной протяженности (молекулы или макроскопического образца какого-нибудь минерала) возможны лишь два первых

типа симметрии. В самом деле, все преобразования, принадлежащие группе симметрии конечного тела, должны оставлять неподвижной *по крайней мере одну* точку тела. Иначе говоря, все оси поворотов и все плоскости отражений должны пересекаться (по крайней мере) в одной точке. Ясно, что последовательные повороты вокруг непересекающихся осей или отражения в непересекающихся плоскостях будут приводить к переносам и непрерывному смещению тела. Группы симметрии конечных тел (которые должны оставлять по крайней мере одну точку тела неподвижной) называются *точечными группами*. В этой главе мы ограничимся рассмотрением точечных групп конечного порядка.

Прежде всего предположим, что тело совмещается с самим собой, если мы поворачиваем его на угол $\psi = 2\pi/n$ (n — целое число) вокруг некоторой оси. Такая ось называется *поворотной осью n -го порядка*. Если $n = 1$, то совмещение тела с самим собой происходит после поворота на угол 2π , что является тождественным преобразованием. Операцию поворота на угол $2\pi/n$ мы будем обозначать символом C_n . Последовательные выполнения этого преобразования C_n^2, C_n^3 и т. д. (т. е. повороты на угол $4\pi/n, 6\pi/n$ и т. д.) должны также совмещать тело с самим собой. Если число n делится на целое число l , то

$$(C_n)^l = C_{n/l}. \quad (2.1)$$

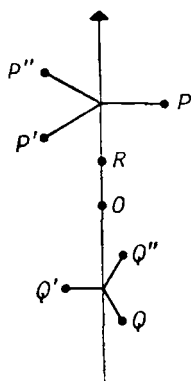
Например, ось 6-го порядка в то же время служит осью 2-го и 3-го порядков. Ось характеризуется *наибольшим числом n* (или наименьшим углом ψ). Также ясно, что n последовательных поворотов на угол $2\pi/n$ вокруг одной и той же оси возвращает нас в исходное положение и приводит к тождественному преобразованию. Таким образом,

$$C_n^n = E, \quad (2.2)$$

где для тождественного преобразования мы ввели символ E (Einheit).

Поскольку очень важно иметь наглядное представление о том, что происходит при выполнении преобразований симметрии, мы, чтобы помочь читателю, будем приводить многочисленные схемы. Один тип схем приведен на фиг. 1. Вертикальная прямая служит осью 3-го порядка, проходящей через центр (неподвижную точку) O молекулы. На то, что это ось 3-го порядка, указывает маленький треугольник $\blacktriangle$ на конце этой оси. Аналогично, на ось 2-го порядка указывал бы ромб $\blacklozenge$ на конце оси, на ось 4-го порядка — квадрат $\blacksquare$ и т. д. Если в точке P находится какой-нибудь атом молекулы, то наличие оси 3-го порядка означает, что тождественные с ним атомы располагаются в точках P', P'' , где $OP = OP' = OP''$. Аналогично, если атом находится в точке Q , то такие же атомы должны находиться в точках Q' и Q'' . Для особых положений, таких, как R на оси вращения, образ точки совпадает с точкой R .

Такой метод изображения для молекул вполне достаточен. Когда же мы занимаемся рассмотрением внешней симметрии кристаллов, возникает несколько иная задача. Площади граней кристалла данного вещества могут меняться в широком диапазоне в зависимости от условий, в которых был выращен кристалл. Главным содержанием всех исследований по морфологии кристаллов является *закон постоянства углов в кристалле*: углы, которые образуют друг с другом грани кристалла, для данного кристалла являются неизменными. Это означает, что кристалл характеризуется направлениями нормалей к граням кристалла и углами, которые эти нормали образуют друг с другом

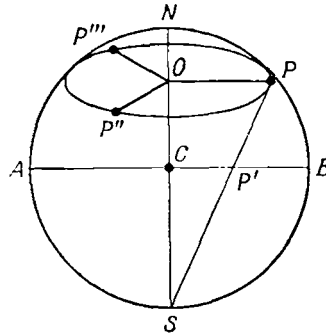


Фиг. 1.

Заметим, что расстояние от „центра“ до граней кристалла неодинаково для всех образцов. Итак, простейший метод описания кристалла состоит в том, что на поверхности единичной сферы указываются *полюсы* многогранника, т. е. точки, в которых нормали к граням кристалла пересекают поверхность сферы. Для получения формы кристалла по его полюсной диаграмме нам нужно лишь провести касательные плоскости к единичной сфере во всех полюсах и получить замкнутый многогранник.

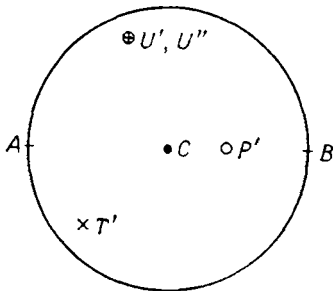
Чтобы представить *полюсную фигуру* в двух измерениях, воспользуемся *стереографической проекцией*. На фиг. 2 мы соединяем полюс P на единичной сфере с южным полюсом S . Точка пересечения P' прямой PS с плоскостью экватора является стереографической проекцией точки P . Чтобы показать полюсы на стереографической проекции, проведем окружность экватора AB и отметим проекцию полюсов незаштрихованными маленькими кружками (фиг. 3). Заметим, что все точки северной полусферы проектируются на внутренность экваториального круга, а точки, лежащие на экваторе, проектируются на границу этого круга. Если бы мы точки южной полусферы рассматривали точно таким же образом, то их проекции расположились бы

вне единичного круга, а проекция южного полюса S ушла бы в бесконечность. Чтобы избежать несимметричного подхода к рассмотрению двух половинок сферы, мы будем пользоваться полюсом S для

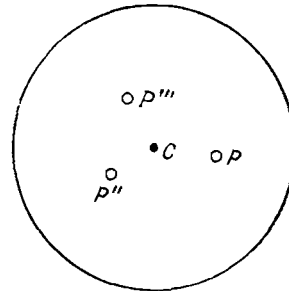


Фиг. 2.

проектирования точек верхней полусферы; точки же, лежащие на нижней полусфере, будут проектироваться из северного полюса N . Чтобы различать эти случаи, можно либо воспользоваться двумя различными кругами (по одному для каждой полусферы), либо же, как сделаем мы, отмечать проекции полюсов нижней полусферы крестиками. Например, на фиг. 3 точка T' является образом точки нижней



Фиг. 3.



Фиг. 4.

полусферы, а точка U' и U'' (кружок с крестом) означают, что имеются два полюса (по одному на каждой полусфере), каждый из которых является зеркальным отражением другого в плоскости экватора.

Из-за наличия оси 3-го порядка изображением точек P , P' и P'' на фиг. 1 служат три точки, лежащие на одной параллели так, как показано на фиг. 2. Стереографическая проекция тех же самых точек изображена на фиг. 4.

Если к сфере на фиг. 2 мы проведем касательные плоскости в точках P , P'' и P''' , то получим треугольную пирамиду с вершиной, лежащей на оси 3-го порядка. Если к указанным точкам мы добавим тройку полюсов Q , Q'' и Q''' , лежащих на экваторе, мы получим треугольную призму. Чтобы замкнуть многогранник, нам понадобится еще одна тройка точек R , R'' и R''' на нижней полусфере. Заметим, что одних только точек P и R достаточно для получения замкнутого многогранника, но для получения более сложных фигур мы можем добавлять тройки таких точек, как точки Q . Чтобы избежать таких случаев, когда фигура будет обладать симметрией более высокой, чем симметрия с осью 3-го порядка, мы должны быть уверенными в том, что между положениями точек P и R не существует никакого простого соотношения. Убедиться в этом легче, если рассматривается задача о симметрии молекулы, поскольку в этом случае, как видно из фиг. 1, мы можем изменять расстояние от атома до оси.

Следует заметить, что первая операция симметрии — *вращение* — такова, что может перемещать тело как абсолютно твердое из начального положения в конечное. Вторая основная операция — *отражение в плоскости* — носит иной характер. Она не отвечает никакому физически возможному перемещению тела как единого целого. Фигуры, которые могут быть наложены друг на друга только после зеркального отражения, называются *энантиоморфными*.

Для обозначения отражения в плоскости мы воспользуемся символом σ . Поскольку два отражения в одной и той же плоскости возвращают нас в исходное положение, имеем

$$\sigma^2 = E, \quad (2.3)$$

из чего следует, что отражение в плоскости есть элемент порядка 2. Если будет необходимо как-то выделить плоскость отражения, мы будем указывать ее с помощью индекса. В общем случае мы будем иметь одну ось вращательной симметрии, причем вращательная симметрия будет основным видом симметрии тела. Если дело обстоит именно так, мы будем обозначать отражение в плоскости, перпендикулярной этой главной оси, символом σ_h (h — горизонтальный), а символом σ_v мы будем обозначать отражение в плоскости, проходящей через эту ось (v — вертикальный).

Совместное применение рассмотренных нами двух основных операций (поворот вокруг оси и отражение в перпендикулярной ей плоскости) приводит к преобразованию симметрии, которое мы назовем *зеркально-поворотной симметрией* (Drehspiegelung). Говорят, что тело обладает зеркально-поворотной осью n -го порядка, если оно переходит в себя при операции, состоящей из поворота на угол $2\pi/n$ вокруг этой оси и отражения в перпендикулярной к ней плоскости (фиг. 5). Эту операцию мы обозначим S_n . Очевидно, что

$$S_n = C_n \sigma_h = \sigma_h C_n. \quad (2.4)$$

причем мы заметим, что поворот вокруг оси и отражение в перпендикулярной ей плоскости коммутируют друг с другом. Из соотношений (2.2) — (2.4) мы получим

$$(S_n)^n = (C_n \sigma_h)^n = (C_n)^n (\sigma_h)^n, \quad (2.5)$$

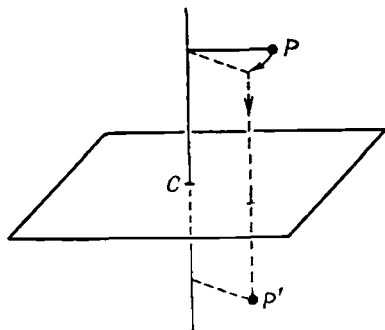
откуда при четном n следует, что

$$(S_n)^n = E,$$

однако при нечетном n

$$(S_n)^n = \sigma_h.$$

Таким образом, в случае нечетного n , если тело обладает симметрией S_n , то оно также обладает симметриями σ_h и C_n в качестве независимых элементов симметрии.



Фиг. 5.

Чрезвычайно важным представляется случай зеркально-поворотной оси 2-го порядка: S_2 есть поворот на угол π вокруг некоторой оси, после которого выполняется отражение в плоскости, перпендикулярной этой оси. Результат этой сложной операции, которую мы назовем *инверсией*, состоит в том, что каждая точка P тела переходит в точку P' , которая является ее образом при инверсии относительно фиксированной точки O : точки P и P' расположены на прямой POP' по разные стороны от точки O и на одинаковом расстоянии от этой точки. Обозначив инверсию символом I , получим

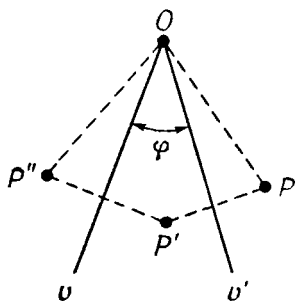
$$I = S_2 = C_2 \sigma_h. \quad (2.6)$$

Из (2.6) следует, что

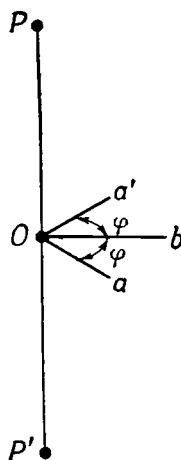
$$C_2 = I \sigma_h, \quad \sigma_h = I C_2. \quad (2.6a)$$

Все три элемента симметрии I , σ_h и C_2 коммутируют. Если любые два из этих элементов принадлежат группе симметрии, то и третий элемент также принадлежит ей.

Рассмотрим теперь несколько простых свойств последовательных отражений в различных плоскостях или поворотов вокруг различных осей. Прежде всего заметим, что произведение поворотов вокруг двух осей, проходящих через точку O , есть снова поворот вокруг некоторой оси, проходящей через O . Рассмотрим, далее, произведение отражений в двух плоскостях, пересекающихся по некоторой прямой. Пусть на фиг. 6 прямые v и v' будут следами двух плоскостей, а точка O — следом линии пересечения этих плоскостей. Пусть φ — угол между плоскостями. Отражая точку сначала в плоскости v' ,



Фиг. 6.



Фиг. 7.

а затем в плоскости v , мы видим, что точка P переходит в точку P' , а затем в точку P'' , где $OP = OP' = OP''$. По построению угол между OP и OP'' равен 2φ . Таким образом,

$$\sigma_v \sigma_{v'} = C(2\varphi), \quad (2.7)$$

где $C(2\varphi)$ — поворот на угол 2φ вокруг линии пересечения плоскостей в направлении от v' к v . Точно так же $\sigma_{v'} \sigma_v$ есть поворот на тот же самый угол вокруг той же оси, но в противоположном направлении. Из сказанного видно, что преобразования σ_v и $\sigma_{v'}$ не коммутируют, за исключением частных случаев, когда $\varphi = \pi/2$ и их произведение равно C_2 , и тривиального случая $\varphi = \pi$, когда $\sigma_v = \sigma_{v'}$. Умножая равенство (2.7) слева на σ_v , находим

$$\sigma_{v'} = \sigma_v C(2\varphi). \quad (2.7a)$$

Таким образом, произведение поворота на данный угол вокруг некоторой оси и отражения в плоскости, проходящей через эту ось, есть отражение во второй плоскости, проходящей через ту же ось

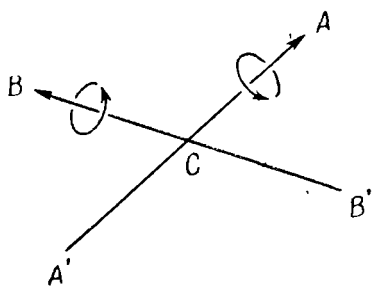
и образующей с первой плоскостью угол, равный *половине* угла поворота. Мы снова получаем три взаимно независимых элемента симметрии. Из наличия любых двух элементов симметрии $\{\sigma_v, \sigma_v'$ и $C(2\varphi)\}$ следует наличие третьего.

Другое важное свойство показано на фиг. 7: отрезок OP вертикальный, Oa и Ob лежат в горизонтальной плоскости. Рассмотрим результат последовательного выполнения поворотов на угол π сначала вокруг Oa , а затем вокруг Ob . Поворот вокруг Oa оставляет Oa на месте и перемещает точку P в положение P' ($OP = OP'$). Если затем мы совершим поворот на угол π вокруг Ob , то точка P' возвратится обратно в точку P , так что произведение этих поворотов должно быть каким-то поворотом вокруг прямой POP' . Точка a , которая оставалась неподвижной при первом повороте, теперь перейдет в положение a' на фиг. 7. Таким образом, последовательное выполнение поворотов на угол π вокруг двух осей, образующих между собой угол φ , дает в результате поворот на угол 2φ вокруг оси, перпендикулярной к первым двум. В частности, если оси X и Y являются поворотными осями 2-го порядка, то и ось Z является поворотной осью 2-го порядка.

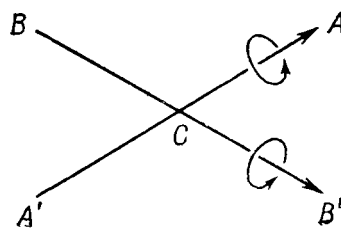
§ 2. Эквивалентные оси и плоскости. Двусторонние оси

Перечислив возможные точечные группы симметрии, мы найдем, каким образом эти группы можно разбить на классы. Один важный способ получения сопряженных преобразований уже упоминался в § 5 гл. 1. Теперь мы рассмотрим его подробно. Если, как это изображено на фиг. 2, мы имеем вертикальную ось 3-го порядка и если прямая OP есть ось n -го порядка, то OP'' и OP''' также должны быть осями n -го порядка. Все повороты на один и тот же угол вокруг этих трех осей принадлежат к одному и тому же классу. Все оси (или плоскости), которые можно совместить с помощью какой-либо операции, принадлежащей группе, называются *эквивалентными* осями (или плоскостями). Повороты на один и тот же угол вокруг эквивалентных осей принадлежат одному и тому же классу. То же правило применимо и к зеркально-поворотным операциям вокруг эквивалентных осей.

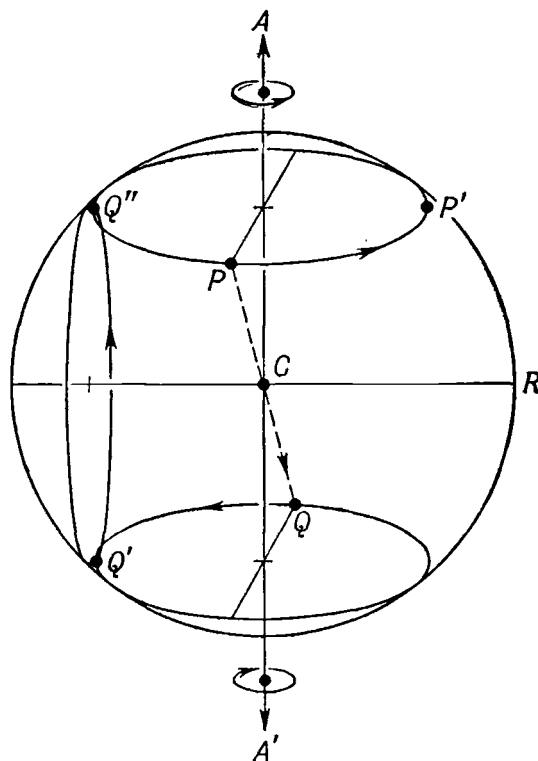
Этот результат ничего не дает нам в частном случае поворотов или зеркальных поворотов вокруг одной и той же оси. Чтобы понять, как мы действуем в этом случае, рассмотрим еще раз, что мы делали при получении эквивалентных осей. Когда мы описываем поворот вокруг некоторой оси, мы прежде всего задаем направление оси и указываем положительное направление вращения, например, с помощью правила правой руки. Если на фиг. 8 ось $A'A$ можно перевести в положение $B'B$ с помощью одного из поворотов, принадлежащих



Фиг. 8.



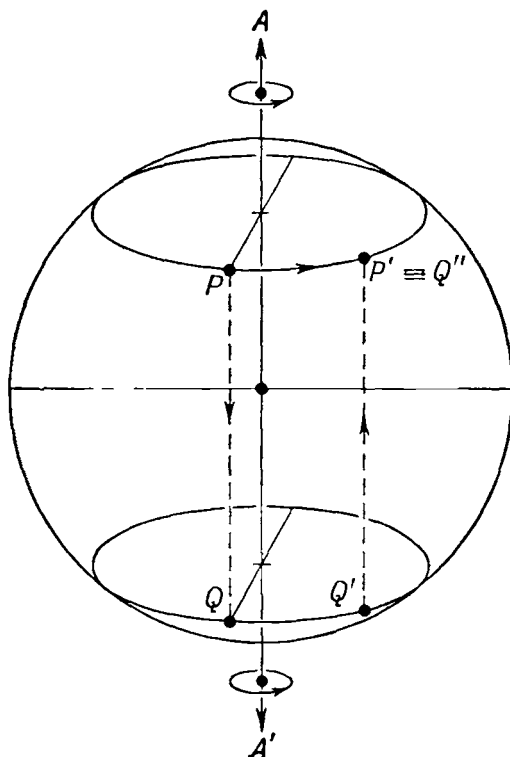
Фиг. 9.



Фиг. 10.

группе симметрии, то направления поворотов вокруг эквивалентных осей будут связаны между собой так, как показано на фигуре. С другой стороны, если при действии некоторого поворота из числа входящих в группу ось $A'A$ переходила бы не в ось $B'B$, а в ось BB' , то схема преобразования имела бы вид, приведенный на фиг. 9.

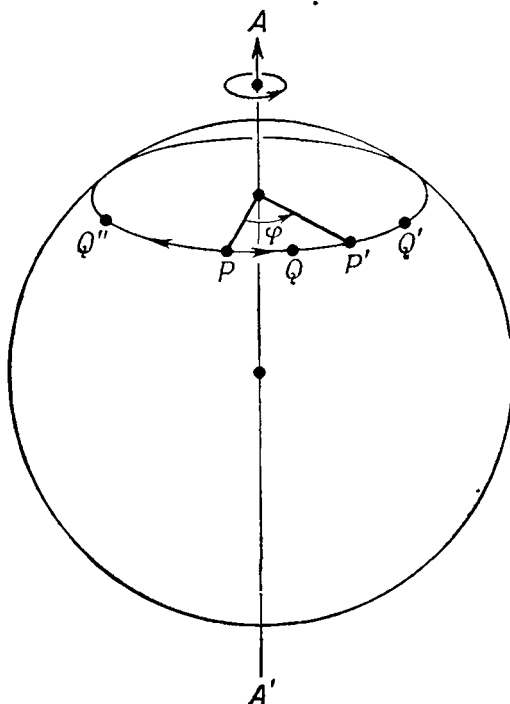
В обоих случаях поворотами вокруг оси $B'B$, сопряженными с данным поворотом вокруг оси $A'A$, служат повороты на равные углы в противоположных направлениях. Рассмотрим теперь фиг. 10. Предположим, что в группе существует какой-то поворот ρ , который переводит $A'A$ в AA' , например поворот на угол π вокруг прямой CR



Фиг. 11.

(так что $\rho^2 = E$, $\rho = \rho^{-1}$). Если поворот $C(\varphi)$ на угол φ вокруг оси $A'A$ переводит точку P в P' , то трансформация поворота $C(\varphi)$ поворотом ρ , а именно поворот $\rho C(\varphi) \rho$, переводит точку P в точку Q'' и представляет собой некоторый поворот вокруг оси $A'A$ на угол φ в обратном направлении. Чтобы увидеть это, выполним поворот $\rho C(\varphi) \rho$ постепенно: например, поворот ρ переводит точку P в точку Q , затем поворот $C(\varphi)$ переводит Q в Q' и, наконец, ρ переводит Q' в Q'' . Если скоро в группе имеется некоторый поворот, который ось $A'A$ переводит в AA' , мы говорим, что $A'A$ есть *двусторонняя ось*. Как видно из фиг. 10, повороты вокруг $A'A$ на равные углы

в противоположных направлениях сопряжены друг с другом. Если $A'A$ является осью симметрии n -го порядка, то повороты C_n^k и $C_n^{n-k} = C_n^{-k}$ сопряжены друг с другом. Итак, мы получаем результат, состоящий в том, что для двусторонней оси любое вращение и обратное ему вращение принадлежат одному и тому же классу.



Фиг. 12.

Предположим далее, что имеется плоскость симметрии, перпендикулярная AA' , а именно плоскость экватора на фиг. 11. Если поворот $C(\varphi)$ переводит точку P в P' , то трансформация этого поворота $\sigma_h C(\varphi) \sigma_h^{-1}$ отражением σ_h задает следующую последовательность операций: $\sigma_h^{-1} = \sigma_h$ переводит P в Q , затем $C(\varphi)$ переводит Q в Q' и, наконец, σ_h переводит Q' в P' , так что

$$\sigma_h C(\varphi) \sigma_h^{-1} = C(\varphi), \quad (2.8)$$

что очевидно из высказанного нами ранее утверждения о том, что σ_h коммутирует с $C(\varphi)$. Операция σ_h меняет направление оси на противоположное и в то же время изменяет направление вращения так,

как это следует из правила правой руки, в результате чего мы получаем тот же самый поворот, что и прежде, и ось $A'A$ не является двусторонней (см. фиг. 11).

С другой стороны, предположим, что существует плоскость симметрии, проходящая через ось AA' (перпендикулярно плоскости страницы) так, как это изображено на фиг. 12. Операция σ_v не меняет направления оси (она переводит $A'A$ в $A'A$), но меняет направление вращения. На фиг. 12 $C(\varphi)$ переводит P в P' , преобразование же $\sigma_v C(\varphi) \sigma_v^{-1}$ переводит P сначала в Q , затем Q в Q' и, наконец, Q' в Q'' , так что

$$\sigma_v C(\varphi) \sigma_v^{-1} = \sigma_v C(\varphi) \sigma_v = C(-\varphi). \quad (2.9)$$

В этом случае ось $A'A$ двусторонняя.

После этих предварительных замечаний мы можем перейти к нашей задаче. Наши операции симметрии можно разделить на два типа: чистые повороты и зеркальные повороты (включающие как частные случаи отражение и инверсию). Сначала мы построим точечные группы, которые содержат только повороты.

§ 3. Группы, элементами которых служат чистые повороты: группы поворотов вокруг оси, группы диэдров

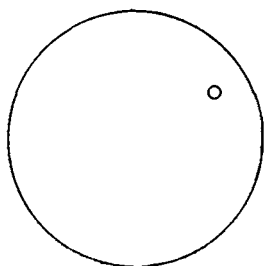
В этой категории групп прежде всего рассмотрим случай, когда у нас имеется только одна поворотная ось симметрии. За эту главную ось выберем ось Z . Число элементов в такой группе равно порядку оси. Если ось имеет порядок n , мы будем обозначать группу симметрии символом C_n .

1. Группы, имеющие только одну поворотную ось n -го порядка: C_n .

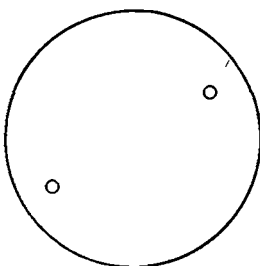
Группа C_1 содержит только тождественное преобразование E и соответствует полному отсутствию симметрии. Все группы этого типа циклические, и каждый элемент такой группы сам по себе образует класс. Чтобы представить себе наглядно этот тип симметрии, изобразим ряд эквивалентных точек на стереографической проекции. Для $n = 1, 2, 3, 4$ и 6 эти точки указаны на фиг. 13—17.

Следует особо подчеркнуть, что на фиг. 13—17 показан только один набор эквивалентных полюсов. Очевидно, что этих полюсов недостаточно для того, чтобы ограничить объем кристаллов. (Чтобы ограничить некоторый объем, необходимо по крайней мере четыре грани.) Изображение полного набора полюсов, обладающего требуемой симметрией (но не обладающего симметрией более высокого порядка) привело бы к чрезвычайному усложнению наших схем. На фиг. 18 показан полный набор полюсов для кристалла с симметрией C_1 . Строить изображения молекулярных конфигураций, обла-

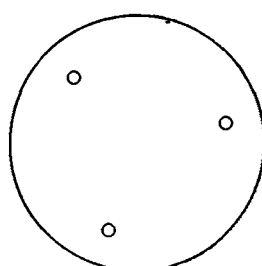
дающих нужным типом симметрии, несколько легче, так как мы можем варьировать расстояния от атомов до центра и пользоваться ядрами разных сортов. На фиг. 19 и 20 показаны молекулы, обладающие

 $C_1 \equiv (1)$

Фиг. 13.

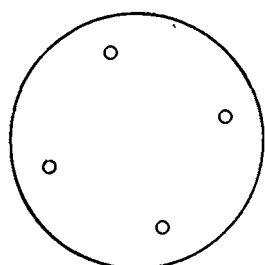
 $C_2 \equiv (2)$

Фиг. 14.

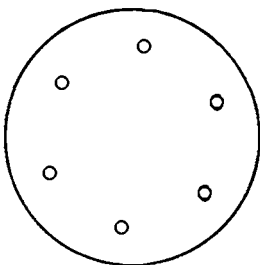
 $C_3 \equiv (3)$

Фиг. 15.

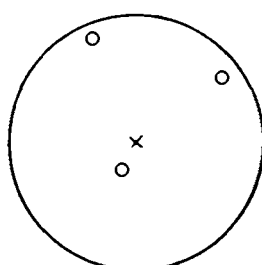
группами симметрии C_2 и C_3 . Молекула, содержащая четыре различных ядра, не лежащих в одной плоскости, „принадлежала“ бы группе C_1 (т. е. не обладала бы никакой симметрией). На фиг. 19 изображена молекула $H_2C=CCl_2$ в виде конфигурации, части которой повернуты друг относительно друга, обладающая группой симметрии C_2 . (Если бы эта молекула была плоской, она обладала бы, как мы увидим далее,

 $C_4 \equiv (4)$

Фиг. 16.

 $C_6 \equiv (6)$

Фиг. 17.

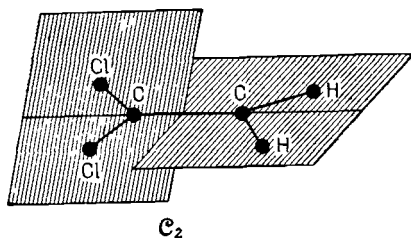
 C_1

Фиг. 18.

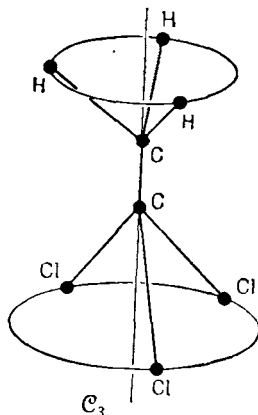
более высокой симметрией.) На фиг. 20 изображена закрученная в пространстве молекула H_3C-CCl_3 , которая „принадлежит“ группе C_3 (т. е. обладает группой симметрии C_3).

Введем теперь в рассмотрение еще и другие поворотные оси симметрии. Прежде всего мы наложим ограничение, состоящее в том, что разрешается существование не более одной поворотной оси, порядок которой больше 2. Например, если мы берем в качестве исходной группы C_n , то мы можем добавить только одну ось 2-го порядка. Кроме того, эта ось должна быть расположена под прямым

углом к оси n -го порядка, в противном случае мы могли бы получить и вторую ось n -го порядка с помощью поворота на угол π вокруг оси 2-го порядка. Итак, единственная возможность — это



Фиг. 19.



Фиг. 20.

добавить еще одну ось 2-го порядка, перпендикулярную оси n -го порядка. Если же теперь мы составим произведения этих операций симметрии, то получится совокупность, состоящая из n осей 2-го порядка, расположенных в горизонтальной плоскости, и мы получим:

II. Группы, имеющие ось n -го порядка и систему осей 2-го порядка, расположенных под прямым углом к ней: группы диэдров D_n .

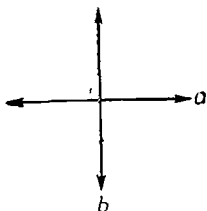
Эти группы содержат $2n$ элементов. Главная ось (n -го порядка) двусторонняя, так что повороты C_n^k и C_n^{-k} попадают в один и тот же класс. На фиг. 21 изображена горизонтальная плоскость с одной осью 2-го порядка a ; ось n -го порядка перпендикулярна плоскости страницы. Предположим сначала, что $n=2$. Применение преобразований C_2 к оси a приводит всего лишь к изменению ее направления. Но если C_a означает поворот на угол π вокруг оси a , то произведение $C_2 C_a = C_b$, где C_b — поворот на угол π вокруг оси b на фиг. 21. Таким образом, группа D_2 имеет три взаимно перпендикулярные оси 2-го порядка. Все эти оси двусторонние. Группа является абелевой группой порядка 4 и изоморфна четверной группе Клейна. Иногда для обозначения этой группы пользуются символом V .

При $n > 2$ группа диэдра D_n не является абелевой.

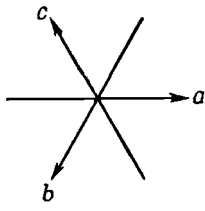
Случай $n=3$ представлен на фиг. 22. Если к оси a применяют преобразования C_3 и C_3^2 , то появляются эквивалентные оси b и c . Группа D_3 содержит 6 элементов E , C_3 , C_3^2 и 3 поворота вокруг осей 2-го порядка. Имеются три класса:

$$E; \quad C_3, C_3^2; \quad C_a, C_b, C_c.$$

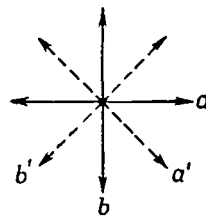
Случай $n=4$ изображен на фиг. 23. Повороты вокруг осей 4-го порядка, будучи примененными к оси a , порождают только одну новую ось b , эквивалентную оси a . Произведение C_4C_a представляет собой поворот вокруг оси a' 2-го порядка, расположенной посередине между осями a и b . Применяя к a' преобразование C_4 , мы



Фиг. 21.



Фиг. 22.



Фиг. 23.

получаем ось b' . Итак, при $n=4$ оси 2-го порядка распадаются на две системы эквивалентных осей. Группа D_4 имеет 8 элементов, принадлежащих следующим 5 классам:

$$E; \quad C_4, C_4^3; \quad C_4^2; \quad C_a, C_b; \quad C_{a'}, C_{b'}.$$

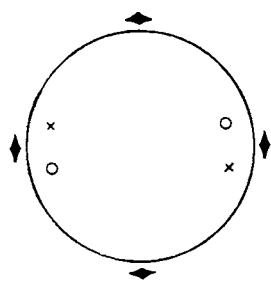
Теперь должен быть ясен и результат в общем случае. Группа D_n содержит $2n$ элементов. Если n четно ($n=2p$), то преобразование E и $C_n^p=C_2$ каждое образует класс. Это оставляет еще $(n-2)=(2p-2)$ поворотов вокруг осей n -го порядка, которые парами распадаются на классы, что дает всего $(p-1)$ классов. Повороты вокруг осей 2-го порядка распадаются на классы, в каждый из которых входит p элементов. Общее число классов равно $p+3=(n+6)/2$.

Если n нечетно ($n=2p+1$), то все оси 2-го порядка эквивалентны, так что все $(2p+1)$ поворота вокруг осей 2-го порядка попадают в один класс. Элемент E образует класс сам по себе, что же касается поворотов вокруг оси n -го порядка, то они образуют $(n-1)/2=p$ классов. Общее число классов равно $p+2=(n+3)/2$.

Задача. Покажите, что группа диэдра D_n порождается двумя элементами a и b , такими, что

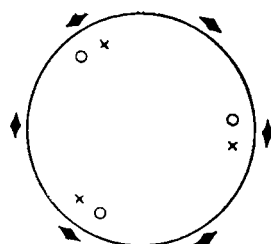
$$a^n = b^2 = (ab)^2 = e.$$

Полюсные фигуры для групп $D_2 \equiv V$, D_3 , D_4 и D_6 показаны на фиг. 24—27. Пример группы D_2 можно было бы получить, заменив атомы хлора на фиг. 19 атомами водорода (в результате чего получилась бы молекула C_2H_4) и сделав равными все расстояния между атомами углерода и водорода. Примером группы D_3 могла бы служить молекула C_2H_6 в конфигурации, изображенной на фиг. 28.



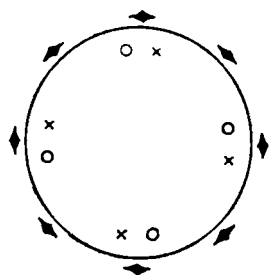
$$D_2 \cong (2:2) \cong V$$

Фиг. 24.



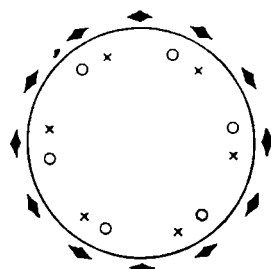
$$D_3 \cong (3:2)$$

Фиг. 25.



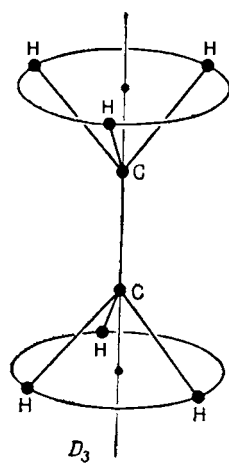
$$D_4 \cong (4:2)$$

Фиг. 26.



$$D_6 \cong (6:2)$$

Фиг. 27.



Фиг. 28.

(Угол поворота групп CH_3 относительно друг друга не должен быть равен 60° , так как возникающая при этом симметрия была бы более высокого порядка, чем симметрия группы D_3 .)

§ 4. Закон рациональных индексов

Теперь мы исчерпали все возможные точечные группы, содержащие только повороты и имеющие самое большое одну ось, порядок которой больше 2. Читатель, может быть, заметил, что мы дошли лишь до $n=6$, причем случай $n=5$ не рассматривали. Причина этого состоит в том, что для молекул случаи, которые мы опустили из рассмотрения, являются исключительными. В случае же кристаллов несуществование осей 5-, 7-, 8-го и т. д. порядков следует из эмпирического „закона рациональных индексов“. Рассмотрим различные грани и ребра кристаллического многогранника. Возьмем любые три ребра, не лежащие в одной плоскости, и выберем в качестве системы координатных осей прямые, параллельные им и проходящие через одну точку (начало координат). Любая грань многогранника будет отсекал на этих осях отрезки, равные u , v и w . Закон рациональных индексов гласит, что для любых двух граней кристалла

$$\frac{u'}{u} : \frac{v'}{v} : \frac{w'}{w} = n_1 : n_2 : n_3, \quad (2.10)$$

где n_1 , n_2 и n_3 — целые числа. Заметим, что параллельное перемещение какой-либо плоскости или использование вместо величин отрезков, отсекаемых гранью на осях, обратных величин, ничего не изменяет в соотношении (2.10). В этом законе нашли свое выражение результаты измерений, проведенных на кристаллах. Следует проверить, является ли этот закон непротиворечивым с точки зрения математики. Плоскости граней, рассмотренные в соотношении (2.10), образуют новые ребра, которые также можно использовать в качестве осей. Для этих новых осей мы можем воспользоваться плоскостями, образованными старыми осями, чтобы получить соотношение, аналогичное соотношению (2.10). Для непротиворечивости мы должны потребовать, чтобы рассматриваемые отношения снова были целыми числами. Полное доказательство в случае трех измерений весьма длинно. Вместо него мы набросаем в общих чертах, как протекает наиболее характерная часть доказательства в более простом двумерном случае. Пусть OO' и OO'' на фиг. 29 будут прямыми, параллельными ребрам кристалла, а SR и TO' — две грани кристаллической решетки. На OO' и OO'' эти плоскости отсекают отрезки, которые должны удовлетворять соотношению

$$\frac{u/u'}{v/v'} = r,$$

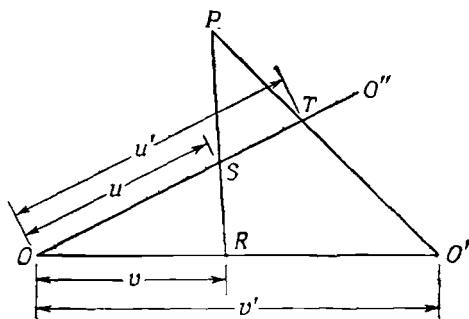
где r — рационально. Из чертежа

$$\frac{\sin OTO'}{\sin OO'T} = \frac{v'}{u'}, \quad \frac{\sin OSR}{\sin ORS} = \frac{v}{u}.$$

Если теперь мы воспользуемся осями PR и PO' и рассмотрим грани OO' и OO'' , то отношение индексов примет вид

$$\begin{aligned} \frac{PS/PR}{PT/PO'} &= \frac{PS/PT}{PR/PO'} = \frac{\sin PTO}{\sin PST} \frac{\sin PRO'}{\sin PO'R} = \\ &= \frac{\sin OTO'}{\sin OSR} \frac{\sin ORS}{\sin OO'T} = \frac{v'/u'}{v/u} = r. \end{aligned}$$

Доказательство непротиворечивости в сущности является доказательством теорем о двойном отношении в проективной геометрии.



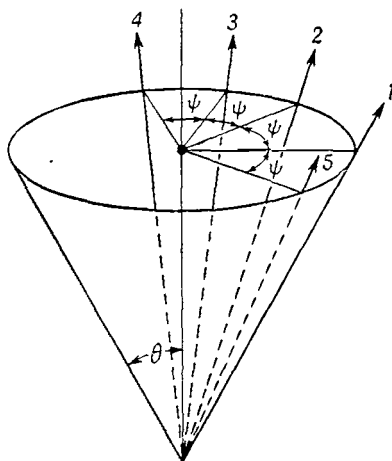
Фиг. 29.

Пользуясь законом рациональных индексов, мы докажем теперь, что при $n \geq 5$ единственно возможным порядком поворотной (или зеркально-поворотной) оси является $n=6$. Предположим, что вертикальная ось на фиг. 30 есть ось n -го порядка, причем $n \geq 5$. В этом случае, начав с полюса 1, мы можем образовать набор, состоящий самое малое из пяти полюсов. Все эти полюсы лежат на одной параллели. Радиусы, проведенные из центра сферы в полюсы, служат нормальными к граням кристалла. Все радиусы образуют с вертикалью один и тот же угол θ . Пусть $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4, \mathbf{n}_5$ — единичные векторы, направленные по этим нормальным. Проекции всех этих векторов на вертикальное направление одинаковы и равны $\cos \theta$. Их проекции на горизонтальную плоскость имеют одинаковую величину $\sin \theta$, и угол ψ между соседними проекциями равен $2\pi/n$, как это показано на фиг. 30. (Для зеркально-поворотной оси нормали, например, 1 и 3 изменяют свое направление, однако для нашего доказательства это несущественно.)

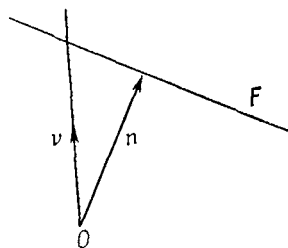
Любые две грани кристалла определяют ребро кристалла, которое лежит в плоскости как той, так и другой грани и поэтому перпендикулярно к нормальям, приведенным к каждой плоскости. Таким образом ребро, образованное гранями, проходящими через полюсы 1 и 2, имеет направление, задаваемое векторным произведением $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$. Выберем в качестве осей ребра кристалла

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2, \quad \mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3, \quad \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_3.$$

Применим теперь к граням кристалла, проходящим через полюсы 4 и 5 (или к параллельным им плоскостям), закон рациональных



Фиг. 30.



Фиг. 31.

индексов. На фиг. 31 показано, что если $\mathbf{n}$ есть единичный вектор, перпендикулярный грани кристалла F , то отрезок, отсекаемый гранью F на оси $\mathbf{v}$ равен $1/\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$. Мы будем оперировать с величинами, обратными длинам отрезков, отсекаемых гранями на осях, поэтому нам потребуются произведения

$$\mathbf{n}_4 \cdot \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2, \quad \mathbf{n}_4 \cdot \mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3, \quad \mathbf{n}_4 \cdot \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_3$$

и аналогичные произведения для вектора $\mathbf{n}_5$. Значения всех этих величин можно получить из фиг. 30. Легко видеть, что отрезки, отсекаемые на осях, имеют общий множитель $\sin^2 \theta \cos \theta$, который сокращается, когда мы переходим к отношениям. Закон рациональных индексов в этом случае означает, что

$$\frac{\sin 3\psi - \sin 2\psi - \sin \psi}{\sin 2\psi - \sin \psi - \sin \psi} : \frac{\sin 2\psi - \sin \psi - \sin \psi}{\sin 3\psi - \sin 2\psi - \sin \psi} : 1 = a : b : c,$$

где a , b и c — целые числа, или же

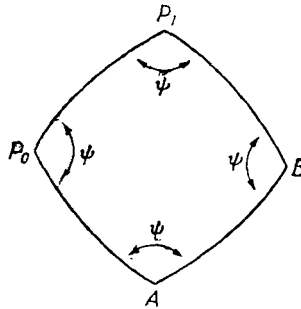
$$\begin{aligned} \frac{\sin 3\psi - \sin 2\psi - \sin \psi}{\sin 2\psi - \sin \psi - \sin \psi} &= r, \\ \frac{\sin 3\psi - \sin 2\psi - \sin \psi}{\sin 2\psi - \sin \psi - \sin \psi} &= \frac{2 \cos (5\psi/2) \sin (\psi/2) - 2 \sin (\psi/2) \cos (\psi/2)}{2 \cos (3\psi/2) \sin (\psi/2) - 2 \sin (\psi/2) \cos (\psi/2)} = \\ &= \frac{\cos (5\psi/2) - \cos (\psi/2)}{\cos (3\psi/2) - \cos (\psi/2)} = \\ &= \frac{\sin 3(\psi/2)}{\sin (\psi/2)} = 1 + 2 \cos \psi = r, \end{aligned}$$

где r — рациональное число.

Отсюда следует, что $\cos \psi = \cos (2\pi/n)$ — рациональное число. При $n \geq 5$ единственным возможным решением служит число $n = 6$ ($\cos \pi/3 = 1/2$). Тем самым наша теорема доказана.

§ 5. Группы, элементами которых служат чистые повороты. Правильные многогранники

Обратимся теперь снова к группам, содержащим только повороты. Наш следующий шаг состоит в рассмотрении групп, имеющих больше одной оси n -го порядка ($n > 2$). Среди всех этих осей n -го порядка выберем две, которые образуют друг с другом наименьший угол.



Фиг. 32.

Точки, в которых оси пересекаются с единичной сферой (полюсы), представлены на фиг. 32. Предположим, что точки P_0 и P_1 являются полюсами наиболее близких друг к другу осей. Иначе говоря, предположим, что дуга большого круга P_0P_1 — самая короткая из дуг большого круга, соединяющих любые два полюса осей n -го порядка. Если теперь мы произведем поворот вокруг оси P_0 n -го порядка, то из оси P_1 мы получим новые оси n -го порядка, число которых

равно $(n - 1)$, причем одна из них проходит через точку A и показана на фиг. 32. Сферический угол ψ между дугами P_0P_1 и P_0A равен $2\pi/n$, а $P_0P_1 = P_0A$. Совершив поворот на угол ψ вокруг оси A , мы получим из P_0 другую ось n -го порядка, проходящую через B . Все точки P_1, P_0, A, B и т. д., получающиеся при этой процедуре, лежат в одной плоскости, и поэтому фигура должна замкнуться снова в точке P_1 . (В противном случае мы получили бы ось n -го порядка, расположенную ближе к оси P_1 , чем ось P_0 .) Теперь, вращая вокруг оси P_0 , получим новую ось из оси P_1 и будем продолжать так, пока не получим второй правильный сферический многоугольник. С помощью этого процесса мы покроем всю поверхность единичной сферы одинаковыми правильными сферическими многоугольниками. Таким образом мы получим правильный сферический многогранник с F гранями, V вершинами и E ребрами. Каждая грань такого многогранника представляет собой правильный сферический многоугольник с s сторонами. Число ребер, сходящихся в одной вершине, равно n . Так как каждое ребро имеет по одной вершине на каждом из двух своих концов, число ребер $E = nV/2$. Так как каждое ребро принадлежит двум граням, имеем соотношение $E = Fs/2$. Объединяя эти результаты, получаем $Fs = nV$. Площадь многоугольника с s сторонами на единичной сфере равна сумме углов многоугольника минус $(s - 2)\pi$. Для нашего правильного многоугольника площадь равна $s(2\pi/n) - (s - 2)\pi$. Умножив эту величину на число граней F , мы получаем полную поверхность единичной сферы, равную 4π . Таким образом,

$$F \left[s \left(\frac{2\pi}{n} \right) - (s - 2)\pi \right] = 4\pi,$$

или

$$\frac{Fs}{n} - \frac{Fs}{2} + F = 2. \quad (2.11)$$

Воспользовавшись полученными ранее соотношениями, мы можем переписать (2.11) в виде

$$V - E + F = 2. \quad (2.12)$$

Это и есть теорема Эйлера, которая в форме (2.12) пригодна для любой сети на поверхности сферы. Перепишем (2.11) в виде

$$\frac{2s}{n} - (s - 2) = \frac{4}{F}. \quad (2.13)$$

Мы видим, что величина $2s/n$ должна быть больше $s - 2$ и поэтому (так как $n > 2$) допустимые значения s ограничены.

При $n = 3$, $s < 6$: $s = 3$ дает $F = 4$; $s = 4$ дает $F = 6$; $s = 5$ требует, чтобы $F = 12$.

При $n = 4$, $s < 4$: $s = 3$ приводит к $F = 8$.

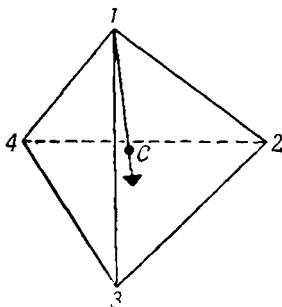
При $n = 5$ возможно лишь $s = 3$ и $F = 20$.

При $n \geq 6$ решений не существует.

Мы получаем следующие возможные случаи:

n	s	F
3	3	4 тетраэдр,
3	4	6 куб,
4	3	8 октаэдр,
3	5	12 додекаэдр,
5	3	20 икосаэдр.

Первые два многогранника имеют одинаковые элементы симметрии: четыре оси 3-го порядка, которые соединяют вершины 1, 2, 3 и 4 тетраэдра с противоположными гранями так, как это показано для вершины 1 на фиг. 33. Начав с полюса на одной из граней



Фиг. 33.

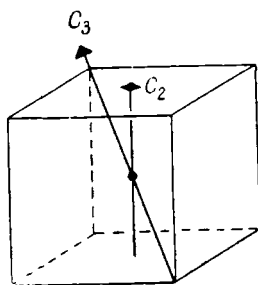
кристалла, мы обнаружим, что повороты вокруг этих осей порождают семейство из 12 полюсов, так что число элементов в этой группе равно 12. Повороты вокруг любой из этих осей переводят три остальные оси друг в друга, откуда следует, что все четыре оси эквивалентны. Оси односторонние, в силу чего мы получаем два класса по четыре элемента в каждом: $C_3(4)$; $C_3^2(4)$. Если мы совершим поворот вокруг оси 1 так, что $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 4$, $4 \rightarrow 2$, а затем произведем поворот вокруг оси 2, который приведет к отображению $3 \rightarrow 4$, $4 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 3$, то произведение этих поворотов будет осуществлять отображение $2 \rightarrow 4$, $4 \rightarrow 2$, $3 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 3$ и поэтому будет представлять собой поворот на угол π вокруг прямой, соединяющей середины противоположных ребер 24 и 13. Таким способом мы найдем три оси 2-го порядка, эквивалентные друг другу. Эти оси 2-го порядка образуют класс, состоящий из 3 эле-

ментов. Итак, группа T тетраэдра имеет 12 элементов, принадлежащих 4 классам:

$$T: E; C_2(3); C_3(4); C_3^2(4),$$

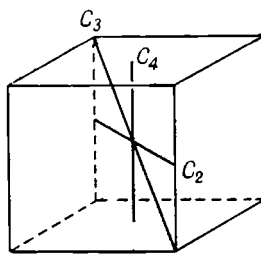
где число в скобках означает число сопряженных элементов в классе. Другой способ изображения этих осей показан на фиг. 34.

Заметим также, что группу T можно получить из группы V , присоединяя к последней ось 3-го порядка, расположенную симметрично относительно трех осей 2-го порядка группы V . По этой причине для обозначения группы T иногда пользуются символом $C_x \sim C_y \sim C_z$.



Т

Фиг. 34.



О

Фиг. 35.

Рассмотрим далее октаэдр. На этот раз мы начинаем с 3 взаимно перпендикулярных осей 4-го порядка. Взяв произведения поворотов вокруг этих осей, получим полную вращательную симметрию куба, как показано на фиг. 35. Всего имеется 4 оси 3-го порядка (пространственные диагонали), 3 оси 4-го порядка (соединяющие середины противоположных граней) и 6 осей 2-го порядка (соединяющих середины противоположных ребер).

Применив повороты 3-го и 4-го порядков к любой из осей 2-го порядка, мы можем получить все оси 2-го порядка. Поэтому все 6 осей 2-го порядка принадлежат одному и тому же классу. Легко видеть, что все оси двусторонние, кроме того, все оси 3-го порядка эквивалентны друг другу и оси 4-го порядка также эквивалентны друг другу. Итак, группа O имеет 24 элемента, распределенных по 5 классам:

$$O: E; C_2(6); C_3, C_3^2(8); C_4, C_4^{(3)}(6); C_2^2(3).$$

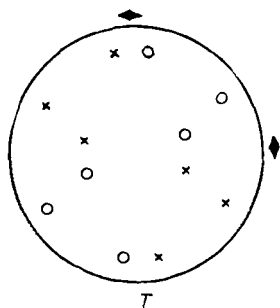
Группа икосаэдра Y , которая получается согласно составленной нами таблице возможных случаев и при максимальном n и при максимальном числе граней F , не представляет интереса с точки зрения

физики, поскольку у кристаллов не встречается осей 5-го порядка и не известны примеры молекул, обладающих такой симметрией. Группа Y есть группа, состоящая из 60 поворотов вокруг осей симметрии икосаэдра, у которого имеется 6 осей 5-го порядка, 10 осей 3-го порядка и 15 осей 2-го порядка.

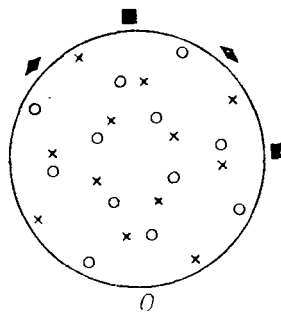
Подводя итоги, можно сказать, что, присоединяя оси высших порядков, мы получаем три новые группы поворотов:

III. T , O , Y .

Полюсные фигуры для групп T и O представлены на фиг. 36 и 37. По поводу всех этих полюсных фигур мы должны заметить,



Фиг. 36.



Фиг. 37.

что одного набора эквивалентных полюсов может оказаться недостаточно для того, чтобы замкнуть многогранник или однозначно фиксировать тип симметрии. В таких случаях следует вводить дополнительно второй набор эквивалентных полюсов.

Задачи. 1. Покажите, что все элементы группы O порождаются поворотами вокруг осей 4-го порядка.

2. Перечислите все подгруппы группы O . Какие из них инвариантны?

§ 6. Группы симметрии, содержащие зеркальные повороты. Присоединение отражений к группе C_n

Теперь, когда мы располагаем всеми возможными группами симметрии, содержащими только повороты, мы должны добавить к ним элементы второго типа, т. е. зеркальные повороты. Пусть S — зеркальный поворот, входящий в число элементов группы. Произведение S на любой поворот есть снова зеркальный поворот. Произведение двух зеркальных поворотов есть поворот. Заметим прежде всего, что чистые повороты образуют подгруппу $\mathcal{H}$ группы G .

Кроме того, эта подгруппа должна иметь индекс 2 и поэтому является инвариантной подгруппой. Иными словами, мы утверждаем, что каждый зеркальный поворот S_i , принадлежащий рассматриваемой группе, содержится в смежном классе $S\mathcal{H}$, образованном с помощью любого из зеркальных поворотов. В самом деле,

$$S_i = (SS^{-1})S_i = S(S^{-1}S_i),$$

и $S^{-1}S_i$, будучи произведением двух зеркальных поворотов, есть поворот и в силу этого принадлежит $\mathcal{H}$. Порядок фактор-группы $G/\mathcal{H}$ всегда равен 2.

Затем мы поступим следующим образом. Выберем в качестве подгруппы $\mathcal{H}$ любую из групп чистых поворотов. Вводя зеркальный поворот S , мы не допускаем возникновения новых поворотов (поскольку в силу приведенных выше рассуждений они уже должны содержаться в $\mathcal{H}$). Какие возможности имеются у нас для выбора S ? Одна возможность состоит в том, что $S^2 = E$, отсюда получим два решения: $S = \sigma$, $S = I$. Таким образом, мы можем добавить либо отражение, либо инверсию. Если же $S^2 \neq E$, то преобразование S^2 должно быть одним из элементов подгруппы $\mathcal{H}$, отличных от единичного. Ось зеркального поворота должна быть одной из осей поворотов, принадлежащих группе $\mathcal{H}$. Если элементом $\mathcal{H}$ является C_n , то единственный остающийся выбор состоит в том, чтобы $S^2 = C_n$, так как если мы возьмем

$$S^2 = C_n^{2p},$$

то

$$S^2 C_n^{-2p} = E,$$

или

$$(SC_n^{-p})^2 = E;$$

присоединяя к группе $\mathcal{H}$ вместо S преобразование

$$S' = SC_n^{-p},$$

мы получили бы

$$(S')^2 = E.$$

Если бы мы выбрали

$$S^2 = C_n^{2p+1},$$

то вместо S могли бы ввести дополнительно в $\mathcal{H}$ преобразование

$$S' = SC_n^{-p}$$

и получить

$$(S')^2 = C_n.$$

Итак, мы имеем три возможности для введения зеркального поворота: σ , I и S , причем $S^2 = C_n$.

Присоединение отражений к группе C_n

Случай 1. Присоединяем элемент $S^2 = C_n$.

При $n=1$ $S^2 = E$, и мы имеем случаи 2 и 3.

При $n=2$ $S^2 = C_2$, $S = S_4$. Мы получаем абелеву группу $\mathbb{S}_4$, содержащую 4 элемента, принадлежащих 4 классам.

При $n=3$ $S^2 = C_3$, $S = S_6$. Мы снова получаем абелеву группу $\mathbb{S}_6$ из 6 элементов, образующих 6 классов.

При $n \geq 4$ мы получили бы зеркально-поворотную ось, порядок которой больше 6, что было исключено заранее.

Случай 2. Присоединяем σ . Если мы не намереваемся вводить новые повороты, то плоскость отражения должна быть либо перпендикулярна главной оси, либо же проходить через нее.

а. Если к группе C_n мы присоединим σ_h , то получающаяся при этом группа называется группой C_{nh} . Все такие группы абелевы и содержат $2n$ элементов в $2n$ классах. Если n четно, группа содержит преобразование

$$(C_n^{n/2} \cdot \sigma_h) = C_2 \sigma_h = I,$$

вследствие чего тело, группу преобразований которого мы рассматриваем, обладает центром симметрии. При $n=1$ группа C_{1h} содержит два элемента E и σ ; эту группу обычно обозначают символом C_s . При таком подходе мы получаем новые группы

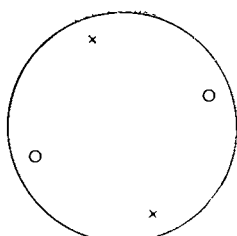
$$C_s, C_{2h}, C_{3h}, C_{4h}, C_{6h}.$$

б. Если к группе C_n мы присоединим σ_v , то, комбинируя σ_v с поворотами вокруг вертикальной оси, мы получили бы систему из n вертикальных плоскостей. Исключая из рассмотрения случай $n=1$, который приводит к группе C_s , мы получаем новые группы, которые обозначим

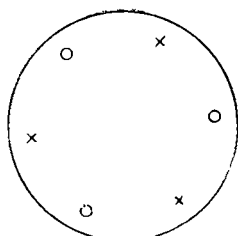
$$C_{2v}, C_{3v}, C_{4v}, C_{6v}.$$

Группа C_{nv} содержит $2n$ элементов. Как было показано ранее, наличие преобразования σ_v делает оси поворотов двусторонними. Если же n нечетно ($n=2p+1$), то все плоскости эквивалентны и все отражения попадают в один класс. В то же время повороты вокруг двусторонних главных осей приводят к $(p+1)$ классу: E ; C_{2p+1}^k , C_{2p+1}^{-k} при $k=1, 2, \dots, p$. Всего мы получаем $p+2 = (n+3)/2$ классов. Если n четно ($n=2p$), то отражения образуют два класса по p элементов в каждом. Повороты дают класс E , класс C_2 и $(p-1)$ класс C_{2p}^k , C_{2p}^{-k} при $k=1, 2, \dots, (p-1)$. Всего мы получаем $p+3 = (n+6)/2$ класса.

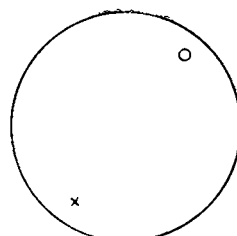
Случай 3. Присоединяя, наконец, инверсию I к группе C_n , мы получаем лишь одну новую группу, а именно группу C_i . Это—группа C_i (или $\mathbb{S}_2$), состоящая из двух элементов E и I .


 δ_4

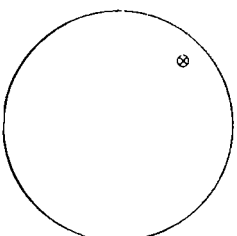
Фиг. 38.


 δ_6

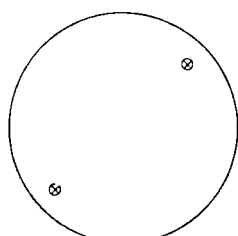
Фиг. 39.


 $\mathcal{C}_I$

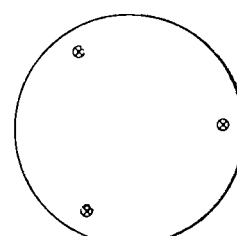
Фиг. 40.


 $\mathcal{C}_s$

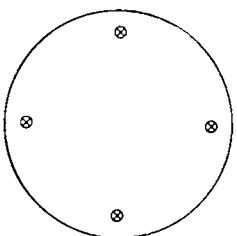
Фиг. 41.


 $\mathcal{C}_{2h}$

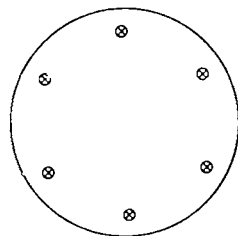
Фиг. 42.


 $\mathcal{C}_{3h}$

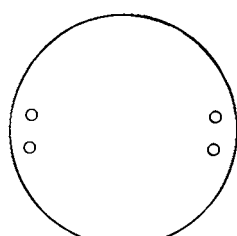
Фиг. 43.


 $\mathcal{C}_{4h}$

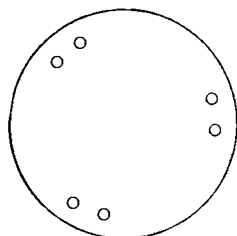
Фиг. 44.


 $\mathcal{C}_{6h}$

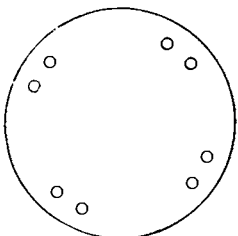
Фиг. 45.


 $\mathcal{C}_{2v}$

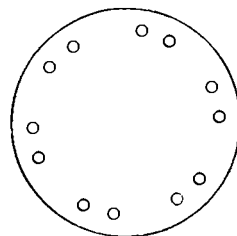
Фиг. 46.


 $\mathcal{C}_{3v}$

Фиг. 47.


 $\mathcal{C}_{4v}$

Фиг. 48.

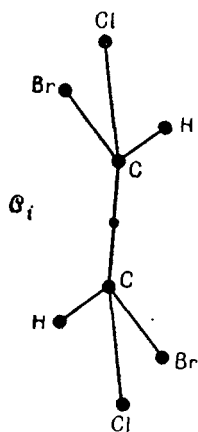

 $\mathcal{C}_{6v}$

Фиг. 49.

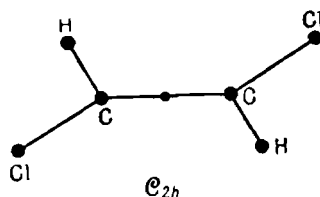
Вывод. Присоединение к группам C_n отражений приводит к группам

$$\mathbb{S}_4, \mathbb{S}_6; C_i; C_s; C_{2h}, C_{3h}, C_{4h}, C_{6h}; C_{2v}, C_{3v}, C_{4v}, C_{6v}.$$

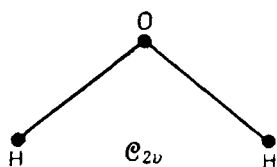
Полюсные фигуры показаны на фиг. 38—49. Примером могла бы служить молекула транс- $\text{ClBrHC}-\text{CHBrCl}$, изображенная на фиг. 50.



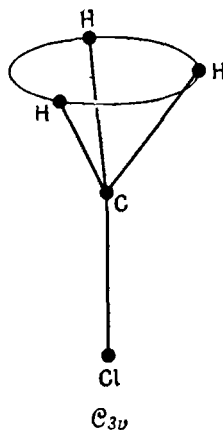
Фиг. 50.



Фиг. 51.



Фиг. 52.



Фиг. 53.

Любая плоская нелинейная молекула, все атомы которой различны (например, молекула NOCl), обладает группой симметрии C_{2h} . На фиг. 51 показана плоская молекула транс- $\text{C}_2\text{H}_2\text{Cl}_2$, обладающая группой симметрии C_{2h} . Примерами групп симметрии C_{2v} (фиг. 52) служат молекулы H_2O , SO_2 , H_2S ; примерами групп C_{3v} (фиг. 53) служат молекулы NH_3 , CH_3Cl , PCl_3 .

Задача. Какая группа получится, если к группе C_3 присоединить инверсию I ?

§ 7. Присоединение отражений к группам D_n

Аналогичным образом мы поступим и с группами D_n . Рассмотрим присоединение к такой группе плоскости отражения. Если мы включаем в группу σ_h , то произведение σ_h и поворота вокруг любой оси 2-го порядка дает отражение в вертикальной плоскости, проходящей через эту ось. Таким образом, добавление одной горизонтальной плоскости симметрии порождает n вертикальных плоскостей отражения с n соответствующими операциями σ_v . Новая группа D_{nh} содержит $4n$ элементов: $2n$ чистых вращений, принадлежащих группе D_n , n отражений σ_v в n вертикальных плоскостях и n зеркальных поворотов $C_n^k \sigma_h$. Заметим, что операции σ_h коммутируют со всеми элементами группы. Поэтому (см. § 7 гл. 1) мы можем записать группу D_{nh} в виде прямого произведения групп D_n и C_s :

$$D_{nh} = D_n \times C_s.$$

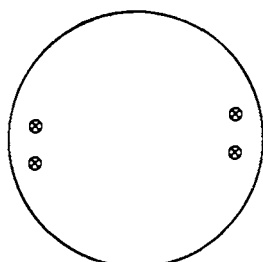
[Если n четно ($n = 2p$), то эта группа содержит инверсию, и мы можем записать также, что $D_{2p, h} = D_{2p} \times C_i$.] Число классов в группе D_{nh} ровно вдвое больше числа классов в группе D_n : сначала мы получаем все классы группы D_n , а затем те классы, которые возникают при умножении каждого элемента на σ_h . Так же как при рассмотрении группы D_n мы находим, что если n нечетно, все отражения принадлежат одному и тому же классу, если же n четно, они образуют два класса. Зеркальные повороты $C_n^k \sigma_h$ и $C_n^{-k} \sigma_h$ распадаются на классы парами. Новыми являются группы

$$D_{2h}, D_{3h}, D_{4h}, D_{6h}.$$

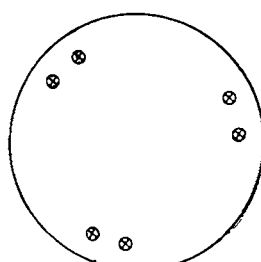
Полюсные фигуры представлены на фиг. 54—57.

Показанная на фиг. 58 плоская молекула N_2O_4 обладает группой симметрии D_{2h} , форма молекулы C_2H_6 , у которой атомы водорода находятся „в противостоянии“ и которая представлена на фиг. 59, принадлежит группе D_{3h} , молекула бензола C_6H_6 обладает симметрией D_{6h} и показана на фиг. 60.

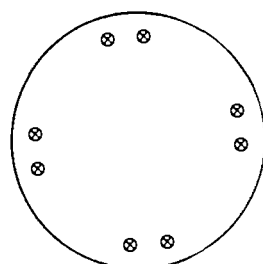
Плоскость отражения можно присоединить к группе D_n еще и другим способом: мы можем добавить вертикальную плоскость отражения, которая делит пополам угол между двумя соседними осями 2-го порядка. Коль скоро мы добавили одну вертикальную плоскость, вращения вокруг осей 2-го порядка тотчас же порождают совокупность из n вертикальных плоскостей отражения. Полученная при этом группа является группой D_{nd} (d означает диагональ) и содержит $4n$ элементов. Из этих $4n$ элементов $2n$ являются чистыми вращениями, принадлежащими группе D_n . Кроме того, мы получаем n зеркальных отражений σ_d в n вертикальных плоскостях. Остальные n элементов представляют собой зеркальные повороты вида S_{2n}^{2k+1} вокруг главных

 D_{2h}

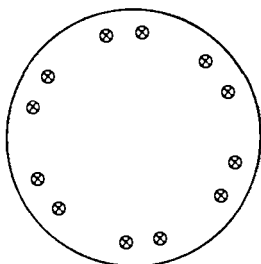
Фиг. 54.

 D_{3h}

Фиг. 55.

 D_{4h}

Фиг. 56.

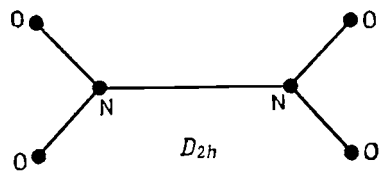
 D_{6h}

Фиг. 57.

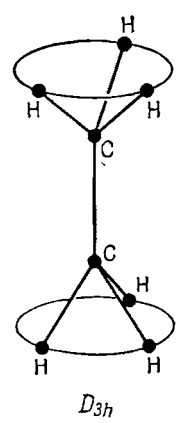
осей, где $k = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$. Простейший способ доказательства этого утверждения состоит в рассмотрении полюсных фигур (фиг. 61 и 62). Итак, главная ось является не просто осью вращения n -го порядка, а зеркально-поворотной осью $2n$ -го порядка. В результате рассматриваемые нами группы можно построить лишь при $n = 2$ или 3. (При $n > 3$ порядок зеркально-поворотной оси был бы больше 6, а этот случай был отброшен нами еще ранее). Двумя вновь полученными группами являются группы D_{2d} и D_{3d} (фиг. 61 и 62).

Задача. Покажите, взяв произведение σ_d и поворотов, что главная ось группы D_{nd} есть зеркально-поворотная ось $2n$ -го порядка.

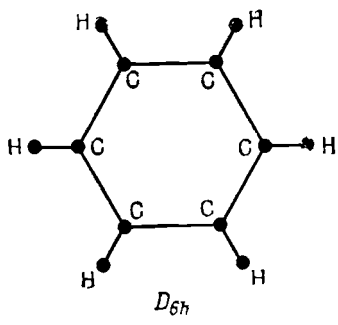
Все оси 2-го порядка эквивалентны, поскольку каждую такую ось можно совместить с соседней ей осью с помощью отражения в плоскости, проходящей посередине между ними. Точно так же эквивалентны все плоскости отражения. (Примените к ним вращения вокруг осей 2-го порядка.)



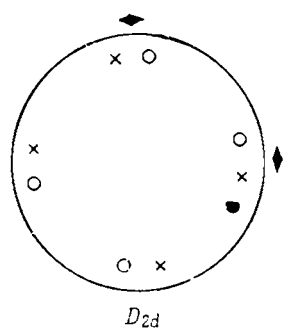
Фиг. 58.



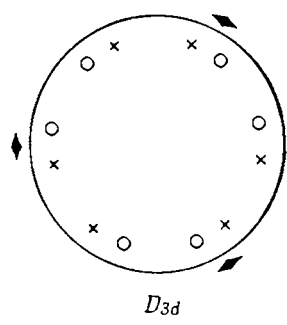
Фиг. 59.



Фиг. 60.



Фиг. 61.



Фиг. 62.

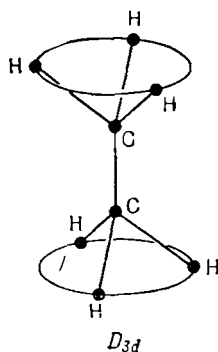
Наконец, зеркальные повороты S_{2n}^{2k+1} и $S_{2n}^{-(2k+1)}$ сопряжены, так как

$$\sigma_d S_{2n}^{2k+1} \sigma_d^{-1} = \sigma_d \sigma_h C_{2n}^{2k+1} \sigma_d = \sigma_h \sigma_d C_{2n}^{2k+1} \sigma_d = \sigma_h C_{2n}^{-(2k+1)} = S_{2n}^{-(2k+1)}.$$

Таким образом, в общем случае при четном n ($n = 2p$) группа $D_{2p,d}$ имеет $n + 3 = 2p + 3$ класса: E ; вращение $C_{2p}^p = C_2$ вокруг главной оси; $(p - 1)$ класс, состоящий из пар C_{2p}^k, C_{2p}^{-k} при $k = 1, 2, \dots, p - 1$; класс, состоящий из $2p$ вращений вокруг горизонтальных осей 2-го порядка; класс, состоящий из $2p$ отражений σ_d ; p классов, состоящих из пар зеркальных поворотов $S_{2n}^{2k+1}, S_{2n}^{-(2k+1)}$ при $k = 0, 1, 2, \dots, p - 1$. При нечетном n ($n = 2p + 1$) группа D_{nd} содержит инверсию I , и поэтому мы можем записать ее в виде прямого произведения

$$D_{2p+1,d} = D_{2p+1} \times C_i.$$

Таким образом, эта группа имеет $(2p + 4)$ класса, что ровно вдвое больше числа классов в группе D_{2p+1} . Новые классы в группе $D_{2p+1,d}$ получаются из классов группы D_{2p+1} умножением на I .



Фиг. 63.

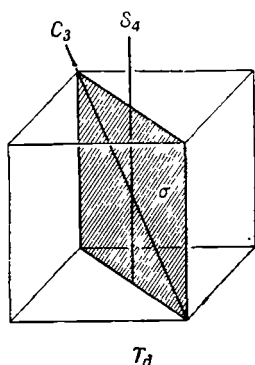
„Повернутая“ форма молекулы C_2H_6 , показанной на фиг. 63, обладает группой симметрии D_{3d} .

Теперь мы могли бы попытаться присоединить к группе D_n инверсию или зеркальный поворот. Если мы присоединим I , то получится прямое произведение $D_n \times C_i$, которое, как мы показали, совпадает с группой D_{nh} , если n четное, и с группой D_{nd} , если n нечетное. Аналогично, присоединение к группе зеркального поворота новых групп не дает.

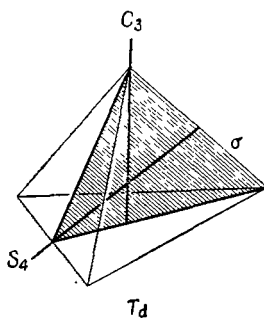
§ 8. Полные группы симметрии правильных многогранников

Последний шаг в нашем перечислении точечных групп состоит в присоединении зеркальных поворотов к группам T , O и Y .

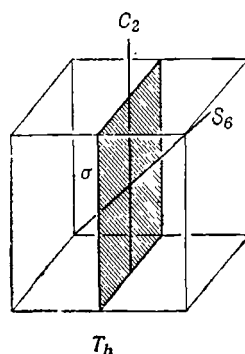
Предположим, что мы хотим присоединить к группе T какую-нибудь плоскость отражения. Поскольку отражения в этой плоскости не должны приводить к появлению новых осей вращения, эта плоскость должна либо проходить через два противоположных ребра



Фиг. 64.



Фиг. 65.



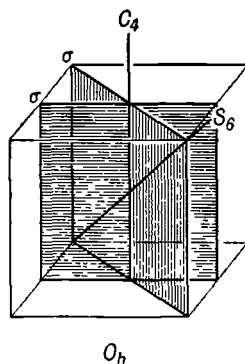
Фиг. 66.

куба (см. фиг. 34), либо быть параллельной двум его граням и проходить посередине между ними.

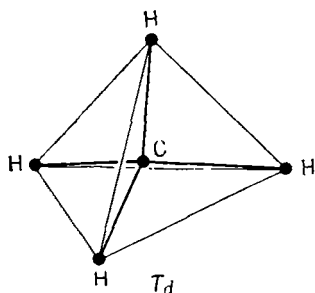
Использование первой возможности приводит к группе T_d с характерными осями и плоскостями симметрии, представленными на фиг. 64 и 65. Группа T_d обладает всеми видами симметрии, присущими тетраэдру. Причина, по которой эту группу обозначают символом T_d , состоит в том, что добавляемая нами плоскость делит пополам угол между двумя горизонтальными осями 2-го порядка. Так же как и в случае группы D_{2d} , это означает, что оси вращения 2-го порядка стали зеркально-поворотными осями 4-го порядка, как это показано на фигурах. Плоскости симметрии проходят через оси 3-го порядка, вследствие чего эти оси являются двусторонними. Все плоскости отражения эквивалентны, и все зеркально-поворотные оси 4-го порядка эквивалентны. Поэтому 24 элемента группы T_d оказываются распределенными по 5 классам:

$$T_d: E; C_3, C_3^2(8); S_4, S_4^3(6); S_4^2 = C_2(3); \sigma_d(6).$$

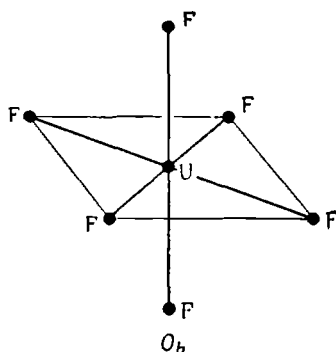
Использование второй возможности приводит к группе T_h с характерными осями, показанными на фиг. 66. Индекс h означает, что соответствующая плоскость расположена горизонтально относительно



Фиг. 67.



Фиг. 68.



Фиг. 69.

осей 2-го порядка, однако эта плоскость делит пополам угол между двумя осями 3-го порядка и тем самым превращает их в зеркально-поворотные оси 6-го порядка. Поскольку группа содержит S_6 , она содержит и I , и, следовательно, можно записать, что

$$T_h = T \times C_i.$$

Поэтому группа T_h содержит 24 элемента, принадлежащих 8 классам, которые получаются из классов группы T . Другие возможные варианты присоединения новых элементов уже включены в группу T_h и T_d .

В случае группы O положение присоединяемой плоскости отражения ограничено так же, как в случае группы T . Но на этот раз добавление одного типа плоскости тотчас же порождает другой тип. Так же как и в случае группы T_h , C_3 -оси становятся S_6 -осями, и группа включает в себя инверсию I . Следовательно, группу O_h можно представить в виде $O_h = O \times C_i$, и группа O_h становится группой

всех преобразований симметрии куба (фиг. 67). Эта группа содержит 48 элементов, распределенных по 10 классам (что вдвое превышает число классов в группе O):

$$\begin{aligned} O_h: & E; C_2(6); C_3, C_3^2(8); C_4, C_4^3(6); C_4^2(3); \\ & I; \sigma_v(6); S_6, S_6^5(8); C_4\sigma_h, C_4^3\sigma_h(6); \sigma_h(3). \end{aligned}$$

Наконец, мы можем присоединить инверсию I к группе Y , в результате чего получим

$$Y_h = Y \times C_i.$$

Эта группа является полной группой симметрии икосаэдра. Мы не будем рассматривать ее более подробно, поскольку она не представляет интереса для физики.

В силу того что группа T_d обладает полной симметрией тетраэдра, к ней относятся все тетраэдрические молекулы, такие, как CH_4 и CCl_4 . Молекула метана изображена на фиг. 68. Гексафторид урана UF_6 обладает группой симметрии O_h и представлен на фиг. 69.

§ 9. Обзор точечных групп. Другие системы обозначений

Мы нашли все возможные точечные группы. Лишь 32 из них находятся в соответствии с законом рациональных индексов. При рассмотрении различных систем мы уже приводили свойства этих групп, указывая каждый раз число элементов в группе.

I. Триклинная система

$$1. C_1(1); \quad 2. C_2(2).$$

II. Моноклинная система

$$3. C_{2h}(4); \quad 4. C_2(2); \quad 5. C_s(2).$$

III. Ромбическая система

$$6. D_{2h}(8); \quad 7. D_2 \equiv V(4); \quad 8. C_{2v}(4).$$

IV. Тригональная система

$$9. D_{3h}(12); \quad 10. D_3(6); \quad 11. C_{3v}(6); \quad 12. S_6(6); \quad 13. C_3(3).$$

V. Тетрагональная система

$$14. D_{4h}(16); \quad 15. D_4(8); \quad 16. C_{4v}(8); \quad 17. C_{4h}(8); \quad 18. C_4(4).$$

VI. Гексагональная система

$$19. D_{6h}(24); \quad 20. D_6(12); \quad 21. C_{6v}(12); \quad 22. C_{6h}(12); \\ 23. C_6(6).$$

VII. Кубическая система

$$24. O_h(48); \quad 25. O(24); \quad 26. T_d(24); \quad 27. T_h(24); \quad 28. T(12).$$

Из числа оставшихся групп группы 29 [$C_{3h}(6)$] и 30 [$D_{3d}(12)$] обычно включают в систему VI, а группы 31 [$S_4(4)$] и 32 [$D_{2d}(8)$] — в систему V.

Заметим, что в каждой системе группы, перечисленные первыми, обладают наибольшей симметрией. В системах IV—VII симметрия первой группы в системе носит название „голоэдрической“ (обладающей полным набором кристаллических граней). После этой группы идут три группы, у которых число элементов в 2 раза меньше (гемиэдриа). Что же касается пятой группы в системе, то она имеет лишь четвертую часть от числа элементов первой группы (тетартоэдриа).

Обозначения, которыми мы пользовались при рассмотрении точечных групп, принадлежат Шенфлису. Было предложено много различных обозначений. Они все обладают некоторыми преимуществами и кое-какими недостатками.

Второй системой обозначений является система, которую мы будем называть системой Шубникова. В этих обозначениях наличие поворотной оси n -го порядка указывается символом n . Так, группа C_1 обозначается 1, C_2 — 2 и т. д. Зеркально-поворотные оси обозначаются черточкой над соответствующим символом, так что группа $C_i \equiv S_2$ будет теперь обозначаться $\bar{2}$, группа S_4 будет обозначаться $\bar{4}$ и т. д. Наличие плоскости симметрии указывается буквой m , так что группа $C_s \equiv C_{1h}$ будет обозначаться просто m , поскольку ее единственным элементом симметрии является отражение.

Если точечная группа содержит более одного элемента симметрии, то каждый из них указывают с помощью специального символа, кроме того, указывают их взаимное расположение. Чтобы показать, что два элемента симметрии параллельны (например, ось вращения и плоскость симметрии, проходящая через эту ось), между их символами ставят точку. В этих обозначениях группа C_{2v} запишется в виде $2.m$.

Двоеточие используется для того, чтобы указать, что два элемента симметрии перпендикулярны. Например, $3:2$ означает, что группа содержит ось 3-го порядка и ось 2-го порядка, расположенные под прямым углом друг к другу. Эта группа в обозначениях Шенфлиса есть в точности группа D_3 . Аналогичным образом символ $3:m$ указывает на то, что имеется какая-то плоскость симметрии, перпендикулярная оси 3-го порядка, т. е. эта группа есть именно та группа, которую мы называем C_{3h} .

Наклонная черта означает, что группа содержит две оси, расположенные друг относительно друга не под прямым углом. Так, $3/2$ означает, что в группе имеется ось 3-го порядка и ось 2-го порядка, образующие друг с другом некоторый угол, отличный от 90° . Из фиг. 34 и приведенных выше соображений ясно, что это — группа T .

Чаще всего кристаллографы пользуются *интернациональной системой обозначений*. В этом случае черта над символом озна-

Таблица 1

Шенфлис	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_l$	$\mathcal{C}_{2h}$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_s$	D_{2h}	D_2	$\mathcal{C}_{2v}$
Шубников	1	$\bar{2}$	$2:m$	2	m	$m \cdot 2:m$	$2:2$	$2 \cdot m$
Интернациональные обозначения	1	$\bar{1}$	$2/m$	2	m	mmm	222	$mm2 \equiv 2mm$

Шенфлис	D_{3h}	D_3	$\mathcal{C}_{3v}$	$\mathcal{S}_6$	$\mathcal{C}_3$	D_{4h}	D_4	$\mathcal{C}_{4v}$	$\mathcal{C}_{4h}$	D_{2d}	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{C}_4$
Шубников	$m \cdot 3:m$	$3:2$	$3 \cdot m$	$\bar{6}$	3	$m \cdot 4:m$	$4:2$	$4 \cdot m$	$4:m$	$\bar{4} \cdot m$	$\bar{4}$	4
Интернациональные обозначения	$\bar{6}m2 \equiv \bar{6}2m$	32	$3m$	$\bar{3}$	3	$4/mmm \equiv 422 \equiv 42$	$4/m$	$4mm$	$4/m$	$\bar{4}2m$	$\bar{4}$	4

Шенфлис	D_{6h}	D_6	$\mathcal{C}_{6v}$	$\mathcal{C}_{6h}$	D_{3d}	$\mathcal{C}_{3h}$	$\mathcal{C}_6$	O_h	O	T_d	T_h	T
Шубников	$m \cdot 6 \cdot m$	$6:2$	$6 \cdot m$	$6:m$	$\bar{6} \cdot m$	$3 \cdot m$	6	$\bar{6}/4$	$3/4$	$3\bar{4}$	$\bar{6}/2$	$3/2$
Интернациональные обозначения	$6/mmm$	$622 \equiv 62$	$6mm$	$6/m$	$\bar{3}m$	$\bar{6}$	6	$m3m$	$432 \equiv 43$	$\bar{4}3m$	$m3$	23

чает, что берется произведение соответствующей операции и *пространственной инверсии*. Например, $\bar{1}$ означает группу C_i . Символ m используют для обозначения плоскости симметрии, так что группа C_s в этих обозначениях запишется как m . Заметим, что 2 означало бы то же, что m . Группа S_6 в этих обозначениях запишется в виде $\bar{3}$, а группа C_{3h} — в виде $\bar{6}$.

Наклонная черта между символами указывает на то, что группа содержит плоскость симметрии, перпендикулярную оси вращения. Например, группа C_{2h} записывается в виде $2/m$, группа C_{4h} — в виде $4/m$. Плоскости симметрии, не перпендикулярные оси вращения, записывают без каких бы то ни было дополнительных пометок. Группа C_{3v} обозначается через $3m$, однако группы C_{4v} и C_{6v} записываются как $4mm$ и $6mm$, ибо все вертикальные отражения в первой группе входят в один класс, в то время как в двух других группах они принадлежат *двум* различным классам.

Группы D_{4h} и D_{6h} обозначаются символами $4/mmm$ и $6/mmm$, поскольку они обладают плоскостью симметрии, перпендикулярной оси вращения, остальные отражения принадлежат *двум* классам.

Группа $D_2 \equiv V$ обозначается символом 222, поскольку она содержит одну (главную) ось 2-го порядка и два поворота на 180° , которые не принадлежат одному и тому же классу. Аналогично группы D_4 и D_6 записываются в виде 422 и 622. С другой стороны, группа D_3 имеет обозначение 32, так как все повороты на 180° принадлежат *одному и тому же* классу.

Для справок мы укажем в табл. 1 обозначения 32 точечных групп во всех трех системах обозначений.

Задача. Объясните смысл символа $m \cdot \bar{6} : m$. Почему именно эту группу мы называем группой D_{6h} ? Объясните смысл символов $\bar{3}$, 23 и $m\bar{3}m$ в интернациональной системе обозначений.

§ 10. Группы магнитной симметрии (цветные группы)

Мы рассматривали точечные группы симметрии главным образом для описания внешней симметрии кристаллов. При описании микроскопических свойств мы должны были бы рассматривать симметрию распределения атомов (или ионов) в кристалле. Когда мы поступаем именно так, симметрия, которую мы описываем, является симметрией усредненного по времени распределения вещества в кристалле. В этом случае мы уже можем считать, что точечные группы описывают возможную точечную симметрию усредненной по времени плотности заряда ρ в равновесном состоянии кристалла. В этом равновесном состоянии можно также задать и усредненную по времени плотность

тока $\mathbf{j}$. Поскольку в состоянии равновесия источники или стоки заряда должны отсутствовать, плотность тока $\mathbf{j}$ должна удовлетворять уравнению $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$. Для большинства веществ $\mathbf{j} = 0$, но в ферромагнетиках или антиферромагнетиках $\mathbf{j} \neq 0$.

Если в каждой точке мы изменим направление $\mathbf{j}$ на противоположное, то состояние равновесия остается состоянием равновесия. Рассмотрим теперь новую операцию симметрии R , которая изменяет знак $\mathbf{j}$ в каждой точке пространства, но *не действует* на пространственные координаты (R — оператор „обращения времени“). Элемент R имеет порядок 2 ($R^2 = E$) и коммутирует со всеми пространственными вращениями и отражениями.

Теперь мы можем рассмотреть возможные точечные группы симметрии кристаллов, у которых $\mathbf{j} \neq 0$. Такие группы могут содержать обычные вращения и операции зеркального поворота A , но, кроме того, они могут содержать и элементы вида RA , т. е. комбинации геометрического преобразования A и оператора R , изменяющего направление тока $\mathbf{j}$ на обратное. Все 32 найденные нами ранее группы являются допустимыми группами симметрии при $\mathbf{j} \neq 0$. Теперь же мы хотим найти новые группы симметрии, содержащие по крайней мере один элемент вида RA . Сразу видно, что простым присоединением элемента R к одной из обычных точечных групп такие группы получить нельзя. В самом деле, если группа содержит элемент R , то это означает, что $\mathbf{j} = -\mathbf{j}$, так что всюду $\mathbf{j} = 0$. Поэтому наши новые группы должны содержать один или более элементов RA , но не должны содержать элемент R .

Прежде чем приступить к нахождению всех таких новых групп, рассмотрим еще одну интерпретацию их. Предположим, что грани кристалла можно окрасить в белый (W) или черный (B) цвет и что R — операция, изменяющая цвет (W на B , а B на W). В дополнение к операциям A геометрической симметрии, которые приводят к сдвигу граней кристалла, но не меняют их цвета, рассмотрим теперь элементы RA . Например, если A — поворот, который переводит грань F в грань F' , то RA переведет F в F' и сделает цвет грани F' противоположным цвету грани F . Потребуем также, чтобы ни одна грань не была окрашена в оба цвета, так что сам элемент R не должен принадлежать группе. Такие группы мы назовем „цветными группами“.

Заметим прежде всего, что если группа G содержит элемент $M = RA$, то порядок A не должен быть нечетным, так как среди всех степеней M , которые содержит G , находился бы элемент R . Следовательно, среди элементов группы не может быть элементов вида RC_3 или RS_3 .

Группе G не могут одновременно принадлежать элементы A и $M = RA$, так как в противном случае в G содержался бы и элемент $MA^{-1} = R$. В соответствии с этим результатом мы будем обозначать элементы группы через A_k ($k = 1, 2, \dots, m$), $M_i = RA_i$

($i = m + 1, m + 2, \dots, n$), где все геометрические операции A различны. Ясно, что если заменить R единицей, то n элементов A_k ($k = 1, \dots, m$) и A_i ($i = m + 1, \dots, n$) образовали бы одну из 32 точечных групп. Следовательно, элементы A_k образуют в группе G некоторую подгруппу $\mathcal{H}$, которая является одной из 32 точечных групп.

Дальше мы могли бы поступить следующим образом. Возьмем любую из точечных групп G . Найдем подгруппу $\mathcal{H}$ с элементами A_k . Умножим все элементы A_i множества $G - \mathcal{H}$ (т. е. все элементы группы G , которые не принадлежат подгруппе $\mathcal{H}$) на R , после чего получим $M_i = RA_i$. Если элементы M_i и A_k образуют группу, то это одна из групп того типа, который мы ищем. Такой метод был бы чрезвычайно утомительным. Но проблема в целом решается, так как сейчас мы докажем следующее утверждение.

Чтобы элементы M_i и A_k образовывали группу, необходимо и достаточно, чтобы подгруппа $\mathcal{H}$ в группе G имела индекс 2.

Если подгруппа $\mathcal{H}$ имеет в группе G индекс 2, то

$$G = \mathcal{H} + A_i \mathcal{H},$$

где A_i — один из элементов множества $G - \mathcal{H}$. Наше новое множество G' записывается в виде

$$G' = \mathcal{H} + RA_i \mathcal{H}.$$

Так как

$$\mathcal{H} \cdot \mathcal{H} = \mathcal{H}, \quad RA_i \mathcal{H} \cdot \mathcal{H} = RA_i \mathcal{H}, \quad RA_i \mathcal{H} \cdot RA_i \mathcal{H} = \mathcal{H},$$

то G' — группа.

Наоборот, если элементы A_k и $M_i = RA_i$ образуют группу G' , то в результате умножения m элементов из $\mathcal{H}$ на любой из элементов M_i мы получим m различных элементов типа M_i . Если же элементы M_i мы умножим на любой из них, то получим n различных элементов типа A_k . Итак, $\mathcal{H}$ имеет в G' индекс 2, а следовательно, $\mathcal{H}$ и в G имеет индекс 2.

Наш метод нахождения новых групп сводится к следующему. Мы выделяем произвольную точечную группу G . В группе G выбираем любую подгруппу $\mathcal{H}$ индекса 2. Элементы множества $G - \mathcal{H}$ умножаем на R . Тогда группа $G' = \mathcal{H} + R(G - \mathcal{H})$ есть новая группа.

Все возможные подгруппы $\mathcal{H}$ индекса 2 для каждой из 32 точечных групп G перечислены в табл. 2. Каждая из них приводит к какой-то новой группе (магнитному классу) G' . Мы пользуемся интернациональными обозначениями, которые особенно полезны при рассмотрении магнитных классов. Черта под символом означает, что следует взять произведение соответствующего элемента и оператора обращения времени R .

Таблица 2

G	$\mathcal{G}$	G'
1	—	—
$\bar{1}$	1	$\bar{1}$
2	1	$\bar{2}$
m	1	$\bar{m}$
$2/m$	2	$\bar{2}/m$
$2/m$	m	$\bar{2}/m$
$2/m$	$\bar{1}$	$\bar{2}/m$
222	2	$\bar{2}\bar{2}\bar{2}$
$2mm$	2	$\bar{2}mm$
$2mm$	m	$\bar{2}mm$
mmm	222	$\bar{m}mm$
mmm	$2mm$	$\bar{m}mm$
mmm	$2/m$	$\bar{m}mm$
3	—	—
32	3	$\bar{3}\bar{2}$
$3m$	3	$\bar{3}m$
$\bar{6}$	3	$\bar{6}$
$\bar{6}m2$	$\bar{6}$	$\bar{6}m2$
$\bar{6}m2$	$3m$	$\bar{6}m2$
$\bar{6}m2$	32	$\bar{6}m2$
4	2	$\bar{4}$
$\bar{4}$	2	$\bar{4}$
42	4	$\bar{4}\bar{2}$
42	222	$\bar{4}\bar{2}$
$4/m$	4	$\bar{4}/m$
$4/m$	$\bar{4}$	$\bar{4}/m$
$4/m$	$2/m$	$\bar{4}/m$
$4mm$	4	$\bar{4}mm$
$4mm$	$2mm$	$\bar{4}mm$
$\bar{4}2m$	$\bar{4}$	$\bar{4}2m$
$\bar{4}2m$	222	$\bar{4}2m$

G	$\mathcal{G}$	G'
$\bar{4}2m$	$2mm$	$\bar{4}2m$
$4/mmm$	42	$\bar{4}/mmm$
$4/mmm$	$4mm$	$\bar{4}/mmm$
$4/mmm$	mmm	$\bar{4}/mmm$
$4/mmm$	$\bar{4}2m$	$\bar{4}/mmm$
$4/mmm$	$4/m$	$\bar{4}/mmm$
6	3	$\bar{6}$
$\bar{3}$	3	$\bar{3}$
$\bar{3}m$	$\bar{3}$	$\bar{3}m$
$\bar{3}m$	$3m$	$\bar{3}m$
$\bar{3}m$	32	$\bar{3}m$
62	6	$\bar{6}\bar{2}$
62	32	$\bar{6}\bar{2}$
$6/m$	6	$\bar{6}/m$
$6/m$	$\bar{3}$	$\bar{6}/m$
$6/m$	$3/m$	$\bar{6}/m$
$6mm$	6	$\bar{6}mm$
$6mm$	$3m$	$\bar{6}mm$
$6/mmm$	$\bar{6}2m$	$\bar{6}/mmm$
$6/mmm$	$\bar{3}m$	$\bar{6}/mmm$
$6/mmm$	62	$\bar{6}/mmm$
$6/mmm$	$6mm$	$\bar{6}/mmm$
$6/mmm$	$6/m$	$\bar{6}/mmm$
23	—	—
$m3$	23	$\bar{m}\bar{3}$
$\bar{4}3m$	23	$\bar{4}\bar{3}m$
43	23	$\bar{4}\bar{3}$
$m3m$	43	$\bar{m}\bar{3}m$
$m3m$	$\bar{4}3m$	$\bar{m}\bar{3}m$
$m3m$	$m\bar{3}$	$\bar{m}\bar{3}m$

Мы нашли 58 новых групп, что вместе с 32 точечными группами дает нам 90 „групп магнитной симметрии“. В основу нашего рассмотрения было положено распределение плотности тока $\mathbf{j}$, но мы могли бы с равным основанием рассматривать и распределение намагниченности $\mathbf{\mu}$. (Единственная особенность, которую следует иметь в виду, состоит в том, что $\mathbf{\mu}$ — аксиальный вектор, а $\mathbf{j}$ — полярный вектор.) Группы магнитной симметрии (и основанные на них пространственные группы) находят применение в анализе антиферромагнитных структур.

Эти группы допускают обобщения несколькими способами. Например, можно задать n различных независимых признаков, принимающих два значения, и ввести n операторов R_i , таких, что R_i изменяет значение i -го признака, причем все R_i коммутируют как друг с другом, так и со всеми геометрическими операциями. Мы можем также рассматривать и признак, принимающий n значений (многоцветные группы) и ввести оператор R , такой, что $R^n = E$ (R коммутирует со всеми геометрическими операциями), потребовав, чтобы элементы вида R^m в группу не входили. Обширную работу в этой области проделали кристаллографы русской школы.

Задачи. 1. Выведите все возможные точечные группы симметрии в двух измерениях.

2. Выведите все возможные двуцветные точечные группы в двух измерениях.

ГЛАВА 3

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП

Во введении мы кратко остановились на том, каким образом симметрия гамильтониана физической системы приводит к классификации собственных функций (собственных векторов) этой системы. В настоящей главе мы вновь обратимся к этой задаче и разовьем математический аппарат для ее полного решения.

§ 1. Линейные векторные пространства

Наше интуитивное представление о векторном пространстве основано на наглядном образе направленных прямых в плоскости или в трехмерном пространстве. Векторы в таком пространстве описывают, задавая их величину и направление. Векторы можно умножать на любое вещественное число. Проведя любые два неколлинеарных вектора на плоскости (или любые три некопланарных вектора в трехмерном пространстве), мы вводим координатные оси в таком пространстве. В этом случае векторы можно описывать с помощью координат относительно некоторых выбранных осей.

Для приложений в физике наше интуитивное представление требуется обобщить. Рассмотрим множество объектов $x, y, \dots$, элементы которого можно „умножать“ на произвольное комплексное число α или „складывать“ друг с другом, получая при этом элементы того же самого множества. Такое множество называется *линейным векторным пространством* L .

Если x и y принадлежат L , то

$$\alpha x \text{ и } x + y = y + x \quad (3.1)$$

также принадлежат L . „Умножение“ и „сложение“ должны удовлетворять следующим условиям:

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad (3.2)$$

$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \quad (3.2a)$$

$$1x = x, \quad (3.2б)$$

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y. \quad (3.2в)$$

Пространство L содержит нулевой вектор (нуль-вектор) 0 такой, что

$$x + 0 = x \quad \text{для всех } x. \quad (3.2г)$$

Таким образом линейное векторное пространство L образует абелеву группу относительно операции „сложения“, и его элементы можно умножать на комплексные числа.

Если мы ограничимся вещественными множителями, то получим вещественное пространство. Примерами таких пространств служат описанные ранее плоскость и трехмерное пространство.

Исходя из интуитивных представлений, можно говорить о векторах на комплексной плоскости, исходящих из начала координат. Умножение вектора x на комплексное число α увеличивает длину вектора x в $|\alpha|$ раз и поворачивает его на угол, равный аргументу числа α .

Множество всех матриц $n \times n$ образует линейное векторное пространство. Сумма двух матриц x и y (с матричными элементами x_{ik} и y_{ik}) есть матрица $x + y$ (с матричными элементами $x_{ik} + y_{ik}$). Матрица αx имеет матричные элементы αx_{ik} . Все элементы нулевой матрицы равны нулю.

Бесконечные последовательности

$$x = (x_1, x_2, \dots) \equiv (x_l) \quad (l = 1, \dots, \infty), \quad (3.3)$$

образуют линейное векторное пространство, причем

$$x + y = (x_l + y_l), \quad \alpha x = (\alpha x_l).$$

Множество всех многочленов относительно „переменной“ ζ вида

$$x = x_0 + x_1 \zeta, \quad (3.4)$$

где x_0, x_1 — комплексные числа, образуют линейное векторное пространство, в котором

$$\begin{aligned} \alpha x &= \alpha x_0 + \alpha x_1 \zeta, \\ x + y &= (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1) \zeta. \end{aligned}$$

Непосредственным обобщением последнего примера служит векторное пространство всех многочленов степени, меньшей или равной n относительно переменной ζ :

$$x = x_0 + x_1 \zeta + x_2 \zeta^2 + \dots + x_n \zeta^n \equiv \sum_{r=0}^n x_r \zeta^r. \quad (3.5)$$

В частности, n можно устремить к бесконечности. При этом получится векторное пространство многочленов вида

$$x = \sum_{r=0}^{\infty} x_r \zeta^r. \quad (3.6)$$

Можно также рассматривать пространства, в которых векторами являются функции вещественной (или комплексной) переменной z . Например, можно взять пространство всех функций вида

$$x = x_1 + x_2 e^z, \quad (3.7)$$

либо пространство всех функций вида

$$x = x_1 \cos z + x_2 \sin z, \quad (3.8)$$

либо же пространство

$$x = x_1 f_1(z) + x_2 f_2(z), \quad (3.9)$$

где f_1 и f_2 — заранее заданные функции от z . В качестве общего случая можно рассмотреть пространство функций

$$x = \sum_{r=1}^n x_r f_r(z), \quad (3.10)$$

где $f_1, f_2, \dots, f_n(z)$ — заданные функции от z . В соотношении (3.10) n можно снова устремить к бесконечности.

Обобщение можно продолжить и рассмотреть пространство всех функций $f(z)$ вещественной (или комплексной) переменной z , определенных в некоторой области значений переменной z и удовлетворяющих некоторым условиям непрерывности, интегрируемости и т. д. Например, можно рассмотреть пространство всех непрерывных функций вещественного переменного z в интервале от 0 до 1 или пространство всех функций с интегрируемым квадратом, т. е. функций $f(z)$, для которых

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(z)|^2 dz$$

сходится.

Задача. Покажите, что функции с интегрируемым квадратом образуют линейное векторное пространство.

§ 2. Линейная зависимость; размерность

Линейная комбинация векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$ — это вектор x вида

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n, \quad (3.11)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — комплексные числа.

Говорят, что векторы $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно зависимы, если нулевой вектор можно представить в виде линейной комбинации

$x_1, \dots, x_n$ (тривиальный случай $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ исключается)

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0. \quad (3.12)$$

Если уравнение (3.12) не имеет нетривиальных решений, мы говорим, что векторы $x_1, x_2, \dots, x_n$ *линейно независимы*.

Теперь мы хотим построить системы линейно независимых векторов в нашем пространстве. Прежде всего мы попытаемся сделать это с помощью одного вектора x . Если

$$\alpha x = 0, \quad \alpha \neq 0$$

для всех векторов пространства, то $x = 0$, и мы получаем нулевое пространство, состоящее из одного только нулевого вектора. Если же пространство содержит вектор $x_1 \neq 0$, мы пытаемся найти второй вектор x_2 такой, что

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$$

только в том случае, если

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Продолжая эту процедуру, мы приходим к определению размерности пространства L_n . В n -мерном векторном пространстве L_n можно найти n векторов $u_1, u_2, \dots, u_n$, которые будут линейно независимы, в то время как $n+1$ вектор в этом же пространстве всегда линейно зависим.

На плоскости два коллинеарных вектора линейно зависимы. Если же два вектора неколлинеарны, они линейно независимы. Но любые три вектора на плоскости линейно зависимы, поэтому плоскость является двумерным векторным пространством.

Пространство всех матриц $n \times n$ имеет размерность n^2 . Чтобы показать это, рассмотрим матрицу $e^{(jk)}$, все элементы которой равны нулю, за исключением элемента (jk) . Этот элемент положим равным произвольному, отличному от нуля, числу $\alpha^{(jk)}$. Заставляя j и k пробегать значения от 1 до n , мы получаем набор, состоящий из n^2 линейно независимых матриц. В то же время набор, состоящий из любого большего числа матриц, будет линейно зависимым.

Пространство многочленов, задаваемых соотношением (3.4), двумерно; например, многочлены 1 и ξ линейно независимы, всякие же три многочлена линейно зависимы. (Мы всегда можем найти нетривиальное решение уравнения $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, так как его можно представить в виде двух уравнений:

$$\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 = 0,$$

$$\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 = 0$$

относительно трех неизвестных α, β, γ .) Аналогично, пространство, определяемое соотношением (3.5), $(n+1)$ -мерно.

Векторное пространство, задаваемое формулой (3.6), *бесконечно-мерно*, так как бесконечный набор многочленов $1, \zeta, \zeta^2, \dots$ линейно независим.

Задачи. 1. Чему равна размерность векторных пространств, задаваемых формулами (3.7) — (3.10)?

2. Рассмотрите вопрос о размерности пространства функций с интегрируемым квадратом.

§ 3. Базисные векторы (оси координат); координаты

Говорят, что любые n линейно независимых векторов $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ в n -мерном пространстве L_n образуют систему *базисных векторов*, или *базис* (систему координат), в L_n .

Если векторы $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ образуют базис в L_n , то можно доказать, что всякий вектор $\mathbf{x}$, принадлежащий L_n , можно представить в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{u}_i$.

Уравнение

$$\beta \mathbf{x} + \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

должно иметь нетривиальное решение ($n+1$ вектор в n -мерном пространстве!). В этом уравнении $\beta \neq 0$, так как если бы $\beta = 0$, мы получили бы нетривиальное решение уравнения

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0},$$

вопреки предположению о том, что векторы $\mathbf{u}_i$ образуют базис. Так как $\beta \neq 0$, наше уравнение можно разрешить относительно $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = -\frac{1}{\beta} (\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n) = x_1 \mathbf{u}_1 + \dots + x_n \mathbf{u}_n \equiv x_i \mathbf{u}_i. \quad (3.13)$$

Таким образом, произвольный вектор $\mathbf{x}$ можно записать в виде линейной комбинации базисных векторов $\mathbf{u}_i$. Коэффициенты x_i в линейной комбинации (3.13) называются *координатами* вектора $\mathbf{x}$ относительно базиса (или системы координат) $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$.

Матрицы $\mathbf{e}^{(jk)}$, описанные выше, образуют базис в пространстве матриц $n \times n$. Матрица $\mathbf{x}$ с элементами x_{jk} выражается через эти базисные векторы в виде

$$\mathbf{x} = \sum_{jk} \frac{x_{jk}}{\alpha^{(jk)}} \mathbf{e}^{(jk)},$$

так что координатами $\mathbf{x}$ относительно этого базиса служат числа $x_{jk}/\alpha^{(jk)}$.

Многочлены 1 и ζ образуют систему базисных векторов для двумерного пространства, определяемого соотношением (3.4). Вектор $\mathbf{x}$

из этого соотношения относительно указанного базиса имеет координаты x_0, x_1 .

Координатами многочлена x в формуле (3.6) относительно базиса, образуемого линейно независимыми многочленами $1, \zeta, \zeta^2, \dots$, служат элементы бесконечной последовательности $(x_0, x_1, \dots)$.

Задача. Найдите систему базисных векторов для пространств, заданных соотношениями (3.7) — (3.10), и укажите координаты произвольного вектора относительно найденного базиса.

Следует отчетливо представлять себе, что базисные векторы задаются *неоднозначно* и на самом деле их можно выбрать бесконечным числом способов. На плоскости любые два неколлинеарных вектора образуют базис. В пространстве многочленов вида $x_0 + x_1\zeta$, кроме базиса $(1, \zeta)$, можно выбрать базис $(1 + \zeta, 1 - \zeta)$ либо $(1 + \alpha\zeta, 1 - \alpha\zeta)$, где $\alpha \neq 0$, либо же вообще $(\alpha + \beta\zeta, \gamma + \delta\zeta)$, если только $u_1 = \alpha + \beta\zeta$ и $u_2 = \gamma + \delta\zeta$ линейно независимы ($\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$).

Один и тот же вектор x будет иметь *различные* координаты относительно *различных* систем базисных векторов. Сам вектор x имеет *внутренний* смысл, в то время как описание его с помощью координат изменяется при переходе к другим осям координат. Например, многочлен

$$\begin{aligned} x = x_0 + x_1\zeta &= \frac{x_0 + x_1/\alpha}{2} (1 + \alpha\zeta) + \frac{x_0 - x_1/\alpha}{2} (1 - \alpha\zeta) = \\ &= \frac{x_0\delta - x_1\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma} (\alpha + \beta\zeta) + \frac{x_1\alpha - x_0\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma} (\gamma + \delta\zeta) \end{aligned}$$

имеет относительно трех систем координат, о которых упоминалось выше, координаты

$$(x_0, x_1), \left(\frac{x_0 + x_1/\alpha}{2}, \frac{x_0 - x_1/\alpha}{2} \right), \left(\frac{x_0\delta - x_1\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \frac{x_1\alpha - x_0\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma} \right).$$

Коль скоро найден один какой-нибудь базис $u_1, \dots, u_n$, мы легко можем получить *все* возможные системы базисных векторов. Каждый вектор выражается в виде линейной комбинации векторов $u_1, \dots, u_n$ [см. (3.13)]. Например, n векторов $u'_1, \dots, u'_n$ можно записать в виде

$$u'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \equiv a_{ij} u_j \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3.14)$$

где при выполнении последнего преобразования нами введено соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. Векторы u'_i образуют базис, если они линейно независимы, что будет в том и только в том случае, если определитель матрицы коэффициентов a_{ij} отличен

от нуля. Коэффициенты образуют матрицу $\mathbf{a}$. Новые векторы $\mathbf{u}'_i$ в равенстве (3.14) образуют базис, если матрица $\mathbf{a}$ неособенная (определитель $\neq 0$). Все возможные базисы в L_n получаются из некоторого одного базиса, если матрица $\mathbf{a}$ пробегает все множество неособенных матриц n -го порядка.

Если от базиса, построенного из векторов $\mathbf{u}_i$, перейти к базису, образованному векторами $\mathbf{u}'_i$, то координаты x_i *фиксированного* вектора $\mathbf{x}$ изменятся и станут равными x'_i :

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{u}_i = x'_i \mathbf{u}'_i. \quad (3.15)$$

Воспользовавшись равенством (3.14), получим

$$x_j \mathbf{u}_j = x'_i a_{ij} \mathbf{u}_j,$$

а так как векторы $\mathbf{u}_j$ линейно независимы, то

$$x_j = x'_i a_{ij} = \tilde{a}_{ji} x'_i, \quad (3.16)$$

где $\tilde{\mathbf{a}}$ — матрица, транспонированная по отношению к матрице $\mathbf{a}$, т. е.

$$\tilde{a}_{ji} = a_{ij}. \quad (3.17)$$

Если векторы $\mathbf{u}_i$ ($\mathbf{u}'_i$) и совокупность координат x_i (x'_i) рассматривать как матрицы с n строками и одним столбцом, соотношения (3.14) и (3.16) можно записать в матричной форме:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{a} \mathbf{u}, \quad (3.14a)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} \tilde{\mathbf{x}}'. \quad (3.16a)$$

Матрица, транспонированная по отношению к произведению матриц, задается формулой

$$\widetilde{\mathbf{a} \mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{b}} \tilde{\mathbf{a}}, \quad (3.18)$$

т. е. оказывается равной произведению транспонированных матриц, взятых в обратном порядке. Матрицей, транспонированной по отношению к матрице $\mathbf{x}$, состоящей из одного столбца, является матрица $\tilde{\mathbf{x}}$, имеющая одну строку и n столбцов:

$$\tilde{\mathbf{x}} \equiv (x_1, \dots, x_n).$$

В этих обозначениях (3.15) можно переписать в виде

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{x}}' \mathbf{u}'. \quad (3.15a)$$

Из соотношения (3.16a) получаем

$$\mathbf{x}' = \tilde{\mathbf{a}}^{-1} \mathbf{x}. \quad (3.16b)$$

Правильность формулы (3.15) можно легко проверить:

$$\tilde{x}' = \tilde{x}a^{-1}, \quad u' = au,$$

откуда

$$\tilde{x}'u' = \tilde{x}a^{-1}au = \tilde{x}u.$$

Задачи. 1. Докажите, что многочлены

$$f'_n = e^{-\zeta} \frac{d^n}{d\zeta^n} (\zeta^{2n} e^{\zeta}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

образуют базис в векторном пространстве всех многочленов [формула (3.6)]. Найдите коэффициенты разложения многочленов f'_n по базисным функциям $f_n = \zeta^n$.

2. То же проделайте для многочленов

$$f''_n = \frac{d^n}{d\zeta^n} [(\zeta^2 - 1)^n]. \quad (3.20)$$

§ 4. Отображения; линейные операторы; матричные представления; эквивалентность

Отображение векторного пространства L на себя можно определить так же, как в гл. 1. Отображение T каждому вектору x ставит в соответствие некоторый новый вектор y , принадлежащий L ,

$$y = Tx. \quad (3.21)$$

Если отображение T взаимно однозначно, то существует *обратное* отображение T^{-1} такое, что

$$x = T^{-1}y. \quad (3.22)$$

Отображение T можно рассматривать как *оператор*, который действует на векторы x пространства L и преобразует их в векторы y , также принадлежащие пространству L . Если это отображение взаимно однозначно, то существует обратный оператор T^{-1} . Для каждого вектора x пространства L

$$T^{-1}Tx = TT^{-1}x = x,$$

т. е.

$$T^{-1}T = TT^{-1} = 1, \quad (3.23)$$

где оператор 1 есть тождественный оператор, оставляющий все векторы неизменными.

Говорят, что T — *линейный оператор*, если

$$T(x + z) = Tx + Tz, \quad (3.24)$$

$$T(ax) = aTx. \quad (3.24a)$$

Следует подчеркнуть, что в определении операторов не указывается никакой системы координат. Поэтому операторы имеют *внутренний* смысл.

Если выбрать некоторый конкретный базис u_i в пространстве L , то действие оператора T в соотношении (3.21) можно описать, сказав, что координаты y_i образа являются некоторыми функциями координат x_i :

$$y_i = T_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3.25)$$

Если отображение взаимно однозначно, то эти уравнения можно разрешить относительно x_i , выразив последние через y_i :

$$x_i = T_i^{-1}(y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3.25a)$$

Необходимое и достаточное условие того, чтобы отображение было взаимно однозначным, состоит в отличии от нуля якобиана

$$J \equiv \left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j} \right). \quad (3.26)$$

Функции T_i и T_i^{-1} связывают координаты x_i и y_i относительно *заданного* базиса u_i . Если же мы переходим к новому базису u'_i , то связь между новыми координатами x'_i и y'_i можно установить, пользуясь формулами (3.16a) и (3.16b):

$$y'_i = \tilde{a}_{ij}^{-1} y_j = \tilde{a}_{ij}^{-1} T_j(x_1, \dots, x_n) = \tilde{a}_{ij}^{-1} T_j(\tilde{a}_{1k} x'_k, \dots, \tilde{a}_{nk} x'_k). \quad (3.27)$$

В случае невырожденного линейного оператора T связь между координатами x_i и y_i выражается проще. Применяя к равенству (3.13) оператор T , получаем

$$y = Tx = T(x_i u_i) = x_i T u_i. \quad (3.28)$$

Равенство (3.28) показывает, что координаты вектора y относительно базисных векторов $v_i = T u_i$ *те же*, что и координаты вектора x по отношению к базисным векторам u_i . Векторы v_i являются линейными комбинациями векторов u_i , т. е.

$$v_i = T u_i = u_j T_{ji}, \quad (3.29)$$

где T_{ji} — комплексные числа, образующие матрицу T . Подставляя в (3.28), находим, что при *фиксированном базисе*, состоящем из векторов u_i ,

$$y_j u_j = u_j T_{ji} x_i, \quad (3.30)$$

а поскольку векторы u_j линейно независимы, то

$$y_j = T_{ji} x_i, \quad (3.31)$$

или, в матричных обозначениях,

$$y = Tx. \quad (3.32)$$

Матрица T в (3.32) является *матрицей, представляющей линейный оператор T относительно базиса u_i* . Если мы перейдем к *новому* базису u'_i , заданному равенством (3.14а), то с помощью (3.16а) и (3.16б) обнаружим, что

$$y' = \tilde{a}^{-1}y = \tilde{a}^{-1}Tx = \tilde{a}^{-1}\tilde{T}ax'. \quad (3.33)$$

Таким образом, матричное представление линейного оператора T в новом базисе u'_i имеет вид

$$T' = \tilde{a}^{-1}T\tilde{a}. \quad (3.34)$$

По определению, матрица, получаемая из матрицы A *трансформацией* (неособенной) матрицей S , есть матрица

$$A' = SAS^{-1}. \quad (3.35)$$

Таким образом, (3.34) означает, что T' получено из T трансформацией матрицей $\tilde{a}^{-1}$.

Отсюда следует, что матричные представления (в различных базисах) одного и того же фиксированного линейного оператора T получаются друг из друга трансформацией некоторой матрицей. Матрицы, связанные друг с другом таким соотношением, называются *эквивалентными*. Поэтому матричные представления линейного оператора T относительно различных базисов являются *эквивалентными* матрицами.

Можно также рассматривать взаимно однозначные отображения *одного* пространства L на *другое* пространство L' . (Очевидно, что если отображение взаимно однозначно, то эти два пространства имеют одинаковую размерность.) При таких отображениях оператор S действует на векторы x пространства L и преобразует их в векторы x' пространства L' :

$$x' = Sx, \quad x = S^{-1}x'.$$

Если линейный оператор T определен в пространстве L , то отображение S *индуцирует* в L' линейный оператор T' :

$$T' = STS^{-1}. \quad (3.36)$$

Оператор T' вполне определен: S^{-1} переводит векторы x' пространства L' в векторы x пространства L , T преобразует векторы x , принадлежащие L , в векторы y , принадлежащие L , и, наконец, S переводит векторы y пространства L в векторы y' пространства L' . Таким образом, T' переводит векторы x' , принадлежащие L' , в векторы y' из того же L' . Оператор T' получается из T *трансформацией* с помощью оператора S .

Задачи. 1. Покажите, что в пространстве многочленов (3.5) $d/d\xi$ есть линейный оператор. Выберите базис и укажите матрицу, представляющую этот оператор по отношению к выбранному базису. Имеет ли эта матрица обратную?

2. Рассмотрите соответствующую задачу для оператора $d/d\xi$ в пространстве (3.6).

3. Преобразование Фурье функции $f(x)$ есть функция

$$g(k) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx; \quad f(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{ikx} dk. \quad (3.37)$$

Покажите, что оператор $(1/i)(\partial/\partial x)$, действующий в пространстве функций $f(x)$, индуцирует в пространстве функций $g(k)$ оператор умножения на k .

§ 5. Представления групп

Совокупность операторов $A, B, \dots$ в векторном пространстве L образует группу, если эти операторы удовлетворяют аксиомам, изложенным в гл. 1. В этом случае под произведением операторов A и B понимают такой оператор C , что

$$Cx = A(Bx) \quad \text{для всех } x \text{ из } L. \quad (3.38)$$

Единичным элементом группы служит тождественный оператор, оставляющий все векторы в L без изменений. Все операторы группы имеют обратные.

Если мы, пользуясь оператором S , отображим пространство L на другое пространство L' , мы получим изоморфную группу операторов, которые действуют в пространстве L' и получаются из операторов $A, B, \dots$ трансформацией с помощью оператора S :

$$A' = SAS^{-1}, \quad B' = SBS^{-1}, \dots \quad (3.39)$$

Если произвольную группу G отобразить гомоморфно в группу операторов $D(G)$, действующих в векторном пространстве L , мы скажем, что группа операторов $D(G)$ есть *представление* группы G в *пространстве представления* L . Если размерность пространства L равна n , говорят, что *размерность* представления равна n (или же что *представление n -мерно*). Оператор, соответствующий элементу R группы G , обозначим через $D(R)$. Если R и S — элементы группы G , то

$$D(RS) = D(R)D(S), \quad (3.40)$$

$$D(R^{-1}) = [D(R)]^{-1} \quad (3.40a)$$

и

$$D(E) = 1. \quad (3.40b)$$

Линейное представление — это представление *линейными операторами*. За редким исключением, мы будем ограничиваться рассмотрением только таких линейных представлений. (Предполагается, что все представления, которые будут встречаться, линейны, если только противоположное особо не оговорено.)

Если в n -мерном пространстве L выбрать базис, то линейные операторы представления можно описывать с помощью представляющих их матриц. В этом случае мы получим гомоморфное отображение группы G в группу $n \times n$ матриц $D(G)$, т. е. *матричное представление* группы G . Из (3.40), (3.40а) и (3.40б) мы видим, что эти матрицы невырождены и что

$$D_{ij}(E) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i=j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, \dots, n); \quad (3.41)$$

$$D_{ij}(RS) = \sum_k D_{ik}(R) D_{kj}(S) \equiv D_{ik}(R) D_{kj}(S). \quad (3.41a)$$

Если рассматривается несколько различных представлений, мы будем отличать их с помощью верхних индексов: $D_{ij}^{(\mu)}(R)$. Другое обозначение имеет вид $\begin{bmatrix} \mu R \\ ij \end{bmatrix}$. Размерность μ -го представления обозначим η_μ или $[\mu]$.

Если гомоморфное отображение группы G в $D(G)$ приводит к изоморфизму, говорят, что такое представление „точно“; в этом случае порядок группы матриц $D(G)$ равен порядку g группы G . В общем случае в группе G существует несколько элементов, которые отображаются в единичную матрицу $D(E) = 1$. Как мы уже видели в гл. 1, совокупность $\mathcal{H}$ элементов группы G , отображающихся в 1, образует в G инвариантную подгруппу. Группа матриц $D(R)$ образует точное представление фактор-группы $G/\mathcal{H}$. Отсюда следует, что если найдено представление для фактор-группы по некоторой инвариантной подгруппе, то мы автоматически получаем представление и для всей группы G . В этом представлении все элементы, принадлежащие одному смежному классу группы G по $\mathcal{H}$, отображаются в одну и ту же матрицу.

§ 6. Эквивалентные представления; характеры

Если мы изменим базис в n -мерном пространстве L , то матрицы $D(R)$ заменятся матрицами, которые получаются из $D(R)$ трансформацией некоторой матрицей C [см. (3.34)]. Матрицы

$$D'(R) = C D(R) C^{-1} \quad (3.42)$$

также задают представление группы G , которое эквивалентно представлению $D(R)$. Из наших предыдущих рассуждений ясно, что экви-

валентные представления имеют одинаковую структуру, несмотря на то что матрицы выглядят по-разному.

Мы хотим найти величины, которые характеризуют внутренние свойства $D(R)$, т. е. остаются инвариантными при изменении системы координат. Один такой инвариант найти легко, так как, взяв сумму диагональных элементов матрицы, мы получим

$$\sum_i (CD(R)C^{-1})_{ii} = \sum_{ikl} C_{ik} D_{kl}(R) C_{li}^{-1} = \sum_{kl} \delta_{kl} D_{kl}(R) = \sum_k D_{kk}(R). \quad (3.43)$$

Поэтому сумма диагональных элементов, или *след*, матрицы $D(R)$ инвариантна относительно преобразования осей координат. Если мы рассматриваем представления групп, то след $\sum_i D_{ii}(R)$ называется *характером элемента R в представлении D* и обозначается

$$\chi(R) = \sum_i D_{ii}(R). \quad (3.44)$$

Мы видим, что эквивалентные представления имеют один и тот же набор характеров. Чтобы как-то выделить то или иное представление, мы будем пользоваться верхними значками. Таким образом, $\chi^{(\mu)}(R)$ (или $[\mu; R]$) означает характер R в представлении μ .

Если рассмотреть два сопряженных элемента S и R группы G ($S = URU^{-1}$), то

$$D(S) = D(U) D(R) [D(U)]^{-1}.$$

Так как $D(U)$ — допустимое преобразование координатных осей в нашем пространстве, мы видим, что

$$\sum_i D_{ii}(S) = \sum_i D_{ii}(R),$$

или

$$\chi(S) = \chi(R).$$

Иначе говоря, характеры сопряженных элементов в группе G всегда одинаковы. Следовательно, если мы описываем группу, перечисляя характеры ее элементов в некотором данном представлении, то всем элементам, принадлежащим одному данному классу, приписывается одно и то же число (характер). Если для классов в группе G ввести обозначения $K_1, K_2, \dots$ и т. д., то представление можно будет описать с помощью набора характеров $\chi_1, \dots, \chi_v$, где v — число классов в группе G . Далее, если имеется несколько различных представлений, то характеры таких представлений мы будем различать по верхнему значку; например, χ_1^μ есть характер класса K_1 в представлении μ . Таким образом, каждое представление дает нам набор из v чисел, которые можно рассматривать как вектор в v -мерном пространстве, а именно: вектор χ^μ с компонентами $\chi_1^\mu, \dots, \chi_v^\mu$.

§ 7. Построение представлений. Сложение представлений

Прежде чем приступить к дальнейшему последовательному развитию теории, взглянем на рассматриваемую задачу с несколько иной точки зрения. Теория в том виде, как она излагалась до сих пор, следует с необходимостью, если исходить из теории абстрактных групп. В физических же задачах мы отправляемся не от абстрактной группы, а от группы преобразований конфигурационного пространства некоторой физической системы. Например, группы симметрии, о которых шла речь в предыдущей главе, были группами преобразований в трехмерном пространстве. Элементы такой группы *сами* образуют представление этой группы в трехмерном пространстве. Например, операцией $C(\theta)$ служило преобразование

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta, \\x'_2 &= x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta, \\x'_3 &= x_3.\end{aligned}\tag{3.45}$$

Операцией I было преобразование

$$x'_1 = -x_1, \quad x'_2 = -x_2, \quad x'_3 = -x_3.\tag{3.46}$$

Одна из наших задач состоит в том, чтобы научиться строить представления произвольно взятой группы. Другая — в том, чтобы понять, какая связь существует между теорией представлений и физикой. Предположим, что нам задана некоторая группа G преобразований (например, группы симметрии, которые мы рассматривали в предыдущей главе) или какое-то представление, вроде тех, что были рассмотрены ранее в этой главе. Имея преобразование T , принадлежащее группе преобразований G [или группе преобразований, образующих матричное представление $D(G)$], новые представления можно строить следующим образом. Преобразование T переводит x в x' :

$$x' = Tx.$$

Сопоставим преобразованию T линейный оператор O_T , действующий на функции $\psi(x)$. Если задана произвольная функция $\psi(x)$, то действие оператора O_T на ψ состоит в том, что эта функция преобразуется в функцию

$$O_T \psi \equiv \psi',$$

такую, что

$$\psi'(x') \equiv O_T \psi(x') = \psi(x), \quad \text{если } x' = Tx.\tag{3.47}$$

Иначе говоря, преобразованная функция $\psi' \equiv O_T \psi$ принимает в точке x' , являющейся образом точки x , такое же значение, какое исходная функция ψ принимала в точке x . То же можно сказать и так: точка P

(с координатами x) при преобразовании T переходит в точку P' (с координатами x'), перенося вместе с собой то численное значение, которое функция ψ имела в точке P . Например, если T есть преобразование $x' = x + a$ (одно измерение!), то $\psi'(x)$ получается из $\psi(x)$, если сдвинуть график функции $\psi(x)$ на a единиц вправо; таким образом,

$$\psi'(x) = \psi(x - a).$$

Соотношение (3.47) можно переписать в виде

$$O_T \psi(Tx) = \psi(x), \quad (3.48)$$

или

$$O_T \psi(x) = \psi(T^{-1}x). \quad (3.48a)$$

Если после преобразования T мы сделаем преобразование S такое, что

$$x'' = Sx',$$

то оператор O_S , соответствующий этому преобразованию, определяется так же, как оператор O_T в (3.48); действуя на любую функцию φ , этот оператор переводит ее в новую функцию $O_S \varphi$ такую, что

$$O_S \varphi(Sx') = \varphi(x').$$

Если φ есть функция ψ' , определенная в (3.47), то

$$\begin{aligned} O_S \psi'(Sx') &= \psi'(x'), \\ O_S O_T \psi(Sx') &= \psi(x), \\ O_S O_T \psi(STx) &= \psi(x). \end{aligned} \quad (3.49)$$

С другой стороны,

$$x'' = Sx' = STx,$$

и мы можем определить оператор O_{ST} как такой оператор, для которого

$$O_{ST} \psi(x'') = \psi(x). \quad (3.50)$$

Сравнивая с (3.49), мы видим, что

$$O_{ST} = O_S O_T, \quad (3.51)$$

откуда следует, что операторы удовлетворяют тем же соотношениям, что и элементы группы. Каждому элементу S соответствует оператор O_S , действующий на функции ψ . Элементу S^{-1} соответствует оператор

$$O_{S^{-1}} = (O_S)^{-1}. \quad (3.51a)$$

Если мы можем найти некоторое представление для операторов, то тем самым мы автоматически получаем представление группы G .

Чтобы посмотреть, как этот метод действует в простом случае, рассмотрим группу симметрии $\mathcal{O}_1$ с двумя элементами E и I ; E — тождественное преобразование $x' = Ex = x$, I — инверсия $x' = Ix = -x$ (все в трехмерном пространстве!). Выберем какую-нибудь функцию $\psi(x)$. Из (3.48) видим, что

$$\begin{aligned}\psi(x) &= O_E \psi(Ex) = O_E \psi(x), \\ \psi(-x) &= O_E \psi(-Ex) = O_E \psi(-x),\end{aligned}\quad (3.52)$$

т. е. O_E — тождественный оператор. Аналогично

$$\psi(x) = O_I \psi(Ix) = O_I \psi(-x), \quad (3.53)$$

или

$$O_I \psi(x) = \psi(-x), \quad (3.53a)$$

откуда следует, что оператор I меняет знак у аргумента x в функции ψ . Равенства (3.52), (3.53) и (3.53a) означают, что функции $O_E \psi(\pm x)$, $O_I \psi(\pm x)$ выражаются в виде линейных комбинаций функций $\psi(x)$ и $\psi(-x)$:

$$\begin{aligned}O_E \psi(x) &= \psi(x) + 0 \cdot \psi(-x), \\ O_E \psi(-x) &= 0 \cdot \psi(x) + \psi(-x); \\ O_I \psi(x) &= 0 \cdot \psi(x) + \psi(-x), \\ O_I \psi(-x) &= \psi(x) + 0 \cdot \psi(-x).\end{aligned}\quad (3.54)$$

Если ввести обозначения

$$\psi(x) = f_1, \quad \psi(-x) = f_2,$$

то равенства (3.54) запишутся в виде

$$\begin{aligned}O_E f_1 &= f_1 + 0 \cdot f_2, & O_I f_1 &= 0 \cdot f_1 + f_2, \\ O_E f_2 &= 0 \cdot f_1 + f_2, & O_I f_2 &= f_1 + 0 \cdot f_2.\end{aligned}\quad (3.54a)$$

Операторы O_E и O_I преобразуют функции f_i в те же самые функции f_i ; можно записать, что

$$O_R f_i = \sum_{j=1}^2 f_j D_{ji}(R) \quad (i=1, 2), \quad (3.55)$$

откуда, сравнивая (3.55) с (3.54a), мы видим, что

$$D(E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D(I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

Легко проверить, что матрицы (3.56) образуют двумерное представление группы:

$$I^2 = E \quad \text{и} \quad [D(I)]^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = D(E).$$

Предположим, что в качестве $\psi(x)$ выбрана *четная* функция

$$\psi(x) \equiv \psi(-x).$$

В этом случае мы получили бы только два соотношения

$$O_E \psi = \psi, \quad O_I \psi = \psi,$$

т. е. оба оператора переводят четную функцию ψ в функцию, отличающуюся от нее лишь множителем (который к тому же равен 1). Поэтому имеется только одна базисная функция $f = \psi$, и наше представление одномерно:

$$D^{(1)}(E) = (1), \quad D^{(1)}(I) = (1), \quad (3.57)$$

где (1) есть матрица 1×1 , единственный элемент которой равен единице.

Если бы в качестве ψ была выбрана *нечетная* функция

$$\psi(x) \equiv -\psi(-x),$$

мы точно так же получили бы лишь два соотношения:

$$O_E \psi = \psi, \quad O_I \psi = -\psi.$$

Здесь снова оба рассматриваемых оператора преобразуют функцию ψ в функцию, отличающуюся от нее только численным множителем, поэтому имеется только одна базисная функция $f = \psi$ и наше представление вновь одномерно:

$$D^{(2)}(E) = (1), \quad D^{(2)}(I) = (-1). \quad (3.58)$$

Предположим теперь, что в качестве исходных выбраны две функции: четная функция f_1 и нечетная функция f_2 . В этом случае

$$\begin{aligned} O_E f_1 &= f_1, & O_E f_2 &= f_2, \\ O_I f_1 &= f_1, & O_I f_2 &= -f_2. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Можно принять явно извращенную точку зрения и считать, что функции f_1 и f_2 преобразуются в линейные комбинации функций f_1 и f_2 . В этом случае мы сказали бы, что получено двумерное представление:

$$D^{(3)}(E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D^{(3)}(I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.60)$$

Сравнивая с двумя предыдущими случаями, мы видим, что на самом деле каждая из функций f_1 и f_2 в отдельности переходит в функции вида αf_1 и αf_2 (α — численный множитель) соответственно. До сих пор мы лишь рассматривали совместно две функции f_1 и f_2 , каждая

из которых преобразуется в функцию, отличающуюся от исходной лишь численным множителем. Матрицы $D^{(3)}$ можно записать в виде

$$D^{(3)}(E) = \begin{bmatrix} D^{(1)}(E) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(E) \end{bmatrix}, \quad D^{(3)}(I) = \begin{bmatrix} D^{(1)}(I) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(I) \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

Чтобы рассмотреть крайние случаи, предположим, что мы выбрали три четные функции ψ_1, ψ_2, ψ_3 , которые линейно независимы (например, x^2, y^2, z^2). В этом случае мы получили бы трехмерное представление D такое, что

$$D(E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D(I) = \begin{bmatrix} D^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & D^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & D^{(1)} \end{bmatrix}. \quad (3.62)$$

Точно так же, если бы мы выбрали в качестве ψ_2 четную функцию, а в качестве ψ_1 и ψ_3 — нечетные функции, мы получили бы представление

$$\begin{aligned} D(E) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{(2)}(E) & 0 & 0 \\ 0 & D^{(1)}(E) & 0 \\ 0 & 0 & D^{(2)}(E) \end{bmatrix}; \\ D(I) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{(2)}(I) & 0 & 0 \\ 0 & D^{(1)}(I) & 0 \\ 0 & 0 & D^{(2)}(I) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Чтобы рассмотреть последний пример, обратимся снова к (3.56). Если бы мы выбрали за исходные линейно независимые функции ψ и φ (ни одна из которых не является только четной или только нечетной), мы бы получили набор из четырех функций:

$$f_1 = \psi(x), \quad f_2 = \psi(-x), \quad f_3 = \varphi(x), \quad f_4 = \varphi(-x)$$

и, таким образом, нашли четырехмерное представление D' :

$$D'(E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D'(I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.64)$$

Процесс, которым мы пользовались в этих трех примерах, носит название сложения представлений. В каждом из рассмотренных случаев матрицы состоят из матриц меньшего порядка, расположенных

вдоль главной диагонали и окаймленных нулями, причем разбиение большой матрицы на меньшие имеет одинаковый вид для всех матриц. В общем случае, если имеется один набор функций $f_1, \dots, f_n$ таких, что

$$O_R f_l = \sum_{j=1}^n f_j D_{jl}^{(1)}(R) \quad (l=1, \dots, n) \quad (3.65)$$

(этим определяется представление $D^{(1)}(G)$), и второй набор функций $f_{n+1}, \dots, f_{n+m}$, не являющихся линейными комбинациями функций $f_1, \dots, f_n$ и таких, что

$$O_R f_l = \sum_{j=n+1}^{n+m} f_j D_{jl}^{(2)}(R) \quad (l=n+1, \dots, n+m), \quad (3.65a)$$

то (3.65) и (3.65a) можно рассматривать как линейные преобразования в объединенном наборе, состоящем из $(n+m)$ функций. Соотношение (3.65), записанное как преобразование совокупности всех функций при $l=1$, выглядело бы так:

$$O_R f_1 = D_{11}^{(1)}(R) f_1 + D_{21}^{(1)}(R) f_2 + \dots \\ \dots + D_{n1}^{(1)}(R) f_n + 0 \cdot f_{n+1} + \dots + 0 \cdot f_{n+m}.$$

Используя в качестве базиса полный набор функций, мы получили бы представление $D(R)$ размерности $(n+m)$ такое, что

$$D(R) = \left[\begin{array}{cc} \underbrace{D^{(1)}(R)}_n & 0 \\ 0 & \underbrace{D^{(2)}(R)}_m \end{array} \right] \begin{array}{l} \} n \\ \} m \end{array} \begin{array}{l} \text{строк,} \\ \text{столбцов} \end{array}$$

откуда

$$D = D^{(1)} + D^{(2)}.$$

В соответствии с такой терминологией (3.61) означает

$$D^{(3)} = D^{(1)} + D^{(2)},$$

(3.62) означает

$$D = D^{(1)} + D^{(1)} + D^{(1)} = 3D^{(1)},$$

а (3.63) означает

$$D = D^{(2)} + D^{(1)} + D^{(2)} = D^{(1)} + 2D^{(2)}.$$

Очевидно, что перестановка слагаемых в суммах представлений допустима, так как она сводится к перенумерации базисных функций.

Теперь должен быть ясен и общий метод построения представлений. Мы начинаем с того, что выбираем произвольную систему линейно независимых функций и к каждой из этих функций применяем все операторы O_R , соответствующие элементам R группы преобразований G . В результате мы получаем набор функций, которые (хотя они и могут быть линейно зависимыми) можно линейно выразить через n из них: $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$. Если теперь применить к таким функциям какой угодно оператор O_R , то получающуюся при этом функцию можно представить в виде линейной комбинации тех же самых n функций:

$$O_R \psi_\nu = \sum_{\mu=1}^n \psi_\mu D_{\mu\nu}(R) \quad (\nu = 1, \dots, n). \quad (3.66)$$

В этом представлении элементу R группы преобразований соответствует матрица $D(R)$. Нужно еще показать, что мы получили именно гомоморфизм G в $D(G)$. Из (3.51) и (3.66) имеем

$$\begin{aligned} O_{SR} \psi_\nu &= O_S O_R \psi_\nu = O_S \sum_{\mu=1}^n \psi_\mu D_{\mu\nu}(R) = \\ &= \sum_{\mu, \sigma=1}^n \psi_\sigma D_{\sigma\mu}(S) D_{\mu\nu}(R) = \\ &= \sum_{\sigma=1}^n \psi_\sigma \left[\sum_{\mu=1}^n D_{\sigma\mu}(S) D_{\mu\nu}(R) \right]. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Но

$$O_{SR} \psi_\nu = \sum_{\sigma=1}^n \psi_\sigma D_{\sigma\nu}(SR),$$

откуда

$$D_{\sigma\nu}(SR) = \sum_{\mu=1}^n D_{\sigma\mu}(S) D_{\mu\nu}(R),$$

или

$$D(SR) = D(S) D(R).$$

§ 8. Инвариантность функций и операторов. Классификация собственных функций

Изучим теперь более подробно операторы O_R , которые были введены нами ранее. Оператор O_R , будучи примененным к функции $\psi(x)$, переводит ее в функцию, названную нами $O_R \psi$, такую, что

$$O_R \psi(x') = \psi(x), \quad \text{если } x' = Rx, \quad (3.47)$$

т. е.

$$O_R \psi(Rx) = \psi(x) \quad \text{для всех } x,$$

или

$$O_R \psi(x) = \psi(R^{-1}x) \quad \text{для всех } x. \quad (3.68)$$

Последняя форма записи наиболее полезна: O_R , действуя на ψ , приводит к замене x на $R^{-1}x$. Может представиться случай, когда $O_R\psi$ совпадает с ψ , т. е.

$$O_R\psi(x) \equiv \psi(x), \quad (3.69)$$

так что

$$\psi(x) \equiv \psi(R^{-1}x), \quad \text{или} \quad \psi(Rx) \equiv \psi(x), \quad (3.69a)$$

и функция ψ в точке Rx , являющейся образом точки x при преобразовании R , принимает то же значение, что и в точке x . В этом случае мы говорим, что функция ψ *инвариантна* относительно оператора O_R или, более кратко, относительно преобразования R . Например, функция $\psi(x) = x^4 + y^2$ инвариантна относительно инверсии; функция $\psi = x^2 + y^2$ инвариантна относительно вращений. Чтобы проверить, инвариантна ли некоторая функция, мы заменяем аргументы x на их образы Rx и смотрим, получается ли при этом снова то же выражение.

Мы уже отмечали, что операторы O_R линейны:

$$O_R[\psi(x) + \varphi(x)] = O_R\psi(x) + O_R\varphi(x). \quad (3.70)$$

Из (3.68) очевидно, что

$$O_R[\psi(x) \cdot \varphi(x)] = O_R\psi(x) \cdot O_R\varphi(x). \quad (3.71)$$

Если имеется оператор $H(x)$, который, действуя на функцию $\psi(x)$, преобразует ее в функцию

$$\varphi(x) = H(x)\psi(x),$$

то

$$\begin{aligned} O_R[H(x)\psi(x)] &= O_R\varphi(x) = \varphi(R^{-1}x) = H(R^{-1}x)\psi(R^{-1}x), \\ O_RH(x)O_R^{-1}O_R\psi(x) &= H(R^{-1}x)O_R\psi(x) = H'(x)O_R\psi(x), \end{aligned} \quad (3.72)$$

где

$$H'(x) = H(R^{-1}x) = O_RH(x)O_R^{-1},$$

или

$$H'(Rx) = H(x).$$

Преобразованный оператор H' в точке Rx оказывает то же действие, что и оператор H в точке x . В общем случае операторы H и H' в наперед заданной точке x не совпадают. Если же

$$H'(x) = H(x),$$

так что

$$H(Rx) = H(x)$$

$$O_RH(x)O_R^{-1} = H(x), \quad (3.73)$$

то говорят, что оператор $H(x)$ *инвариантен* относительно преобразования R [оператор $H(x)$ коммутирует с оператором O_R].

Задачи. 1. Покажите, что оператор $\partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ инвариантен относительно преобразований (3.45) и (3.46).

2. Оператор преобразования Фурье F определяется следующим образом:

$$F\psi(x) = \bar{\psi}(y) = (2\pi)^{-3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{iy \cdot x} \psi(x).$$

Покажите, что F — линейный оператор. Покажите, что оператор

$$H(x) = \nabla^2 + x^2$$

коммутирует с F .

Теперь мы уже в состоянии рассмотреть вопрос о связи того, что мы делаем, с физикой.

Рассмотрим собственные функции задачи

$$H\psi_v = \varepsilon\psi_v. \quad (3.74)$$

Пусть данному собственному значению ε отвечает n линейно независимых собственных функций ψ_v . Если гамильтониан H инвариантен относительно преобразования симметрии R , то, применяя к (3.74) оператор O_R , мы получим

$$O_R[H\psi_v] = O_R H O_R^{-1} O_R \psi_v = H[O_R \psi_v] = \varepsilon O_R \psi_v \quad (3.75)$$

и $O_R \psi_v$ есть собственная функция, принадлежащая тому же самому собственному значению ε . Но тогда $O_R \psi_v$ можно представить в виде линейной комбинации

$$O_R \psi_v = \sum_{\mu=1}^n \psi_\mu D_{\mu v}(R). \quad (3.76)$$

Выполняя эту процедуру для всех операторов из группы симметрии гамильтониана, мы получаем n -мерное представление $D_{\mu v}(R)$. Если S — другое преобразование, принадлежащее той же группе симметрии, то

$$O_S \psi_v = \sum_{\mu=1}^n \psi_\mu D_{\mu v}(S)$$

и

$$\begin{aligned} O_S(O_R \psi_v) &= O_S \sum_{\mu} \psi_{\mu} D_{\mu v}(R) = \sum_{\lambda, \mu} \psi_{\lambda} D_{\lambda \mu}(S) D_{\mu v}(R) = \\ &= \sum_{\lambda} \psi_{\lambda} [D(S) D(R)]_{\lambda v} = \sum_{\lambda} \psi_{\lambda} D_{\lambda v}(SR), \end{aligned} \quad (3.77)$$

откуда следует, что преобразованию симметрии SR соответствует матрица

$$D(SR) = D(S)D(R).$$

Собственные функции каждого вырожденного уровня образуют базис некоторого представления группы симметрии. Если мы сможем найти какой-либо способ охарактеризовать возможные представления группы симметрии, то мы сможем классифицировать и собственные функции.

§ 9. Унитарные пространства; скалярное произведение; унитарные матрицы; эрмитовы матрицы

В квантовых теориях мы сопоставляем парам векторов („векторам состояний“) некоторые численные величины. Чтобы привести теорию представлений в более тесное соприкосновение с физикой, определим *метрику* в n -мерном пространстве L . Для этого каждой паре векторов x и y пространства L мы сопоставляем комплексное число (x, y) . Комплексное число (x, y) называется *скалярным произведением* x и y . Требуется, чтобы оно удовлетворяло следующим условиям:

$$(x, y) = (y, x)^* \quad (3.78)$$

[где $*$ означает переход к комплексно сопряженному числу],

$$(x, ay) = a(x, y), \quad (3.78a)$$

$$(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y), \quad (3.78б)$$

$$(x, x) \geq 0 \quad (3.78в)$$

и $(xx) = 0$ только в том случае, если $x = 0$. [Полагая $y = x$ в (3.78), можно показать, что (x, x) вещественно, поэтому (3.78в) имеет смысл.] Величина (x, x) есть квадрат *длины* вектора x . Пространство L , в котором определено скалярное произведение, называется *унитарным пространством*.

Скалярное произведение (x, y) есть функция, определенная для любой пары векторов x, y пространства L и принимающая комплексные значения. Вводя определение скалярного произведения, мы не упоминали ни о каком базисе в L . Поэтому скалярное произведение (x, y) является внутренним свойством векторов x и y , не зависящим от базиса.

Задачи. 1. Докажите неравенство Шварца

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}), \quad (3.79)$$

где знак равенства ставится только в том случае, если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно зависимы. Что означает неравенство (3.79) в случае обычных геометрических векторов в трехмерном пространстве?

2. Определим в пространстве функций с интегрируемым квадратом скалярное произведение функций f и g в виде

$$(f, g) = \int dz f^*(z) g(z). \quad (3.80)$$

Покажите, что скалярное произведение (3.80) конечно для всех функций f и g этого пространства.

Любую функцию, удовлетворяющую условиям (3.78) — (3.78в), можно использовать, чтобы определить в пространстве L скалярное произведение. *Различные* определения скалярного произведения в одном и том же пространстве L порождают *различные* унитарные пространства.

Векторы в унитарном пространстве можно *нормировать* (приводить к единичной длине), умножая их на некоторое комплексное число; для любого $\mathbf{x}$, если

$$\mathbf{x}' = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}} \mathbf{x}, \quad \text{то} \quad (\mathbf{x}', \mathbf{x}') = 1. \quad (3.81)$$

Один из способов задания скалярного произведения $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ состоит в том, чтобы записать его в виде функции координат x_i и y_i векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ по отношению к некоторому базису. Если базисными векторами являются векторы $\mathbf{u}_i$, то скалярное произведение определяется заданием чисел

$$m_{ij} = (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j). \quad (3.82)$$

Из (3.78) мы видим, что

$$m_{ij} = m_{ji}^*. \quad (3.83)$$

Числа m_{ij} , определяемые соотношением (3.82), образуют матрицу $\mathbf{m}$ — *метрическую матрицу*. Согласно (3.83), имеем

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}^\dagger, \quad (3.83a)$$

$$(m^\dagger)_{ij} = m_{ji}^*. \quad (3.84)$$

Матрица $\mathbf{m}^\dagger$ называется *сопряженной* с матрицей $\mathbf{m}$ (или „эрмитово сопряженной“, или „транспонированной комплексно сопряженной“). Из (3.84) мы видим, что

$$(\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger, \quad (3.85)$$

Матрица A , совпадающая со своей сопряженной матрицей, называется *самосопряженной* или *эрмитовой*. В соответствии с (3.83а) метрическая матрица m должна быть эрмитовой.

Разложим векторы x и y по базису u_i , пользуясь соотношениями (3.13), (3.78), (3.78а), (3.78б) и (3.82):

$$(x, y) = (x_i u_i, y_j u_j) = x_i^* y_j m_{ij} = x^+ m y, \quad (3.86)$$

где x и y — матрицы, состоящие из одного столбца, и x^+ — матрица, сопряженная с x . Величина $x^+ m y$, где m — эрмитова матрица, называется *эрмитовой квадратичной формой*. Условие (3.78в) требует, чтобы (при $y = x$)

$$x^+ m x \geq 0. \quad (3.87)$$

Квадратичные формы, удовлетворяющие такому условию, называются *положительно определенными*. Таким образом, скалярное произведение должно быть положительно определенной эрмитовой квадратичной формой относительно координат x_i и y_i . Говорят, что матрица m такой формы есть также *положительно определенная эрмитова матрица*.

Два вектора x и y в унитарном пространстве *ортogonalны* (или перпендикулярны), если

$$(x, y) = 0. \quad (3.88)$$

Если имеется некоторый базис v_i в унитарном пространстве L , мы всегда можем (образуя линейные комбинации векторов v_i) построить новую систему базисных векторов u_i , из которых все имеют единичную длину и взаимно перпендикулярны, т. е.

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij}. \quad (3.89)$$

Базисные векторы u_i образуют *ортонормированный базис*.

Задача. Постройте в двумерном пространстве с базисными векторами v_1 и v_2 линейные комбинации u_1 и u_2 , образующие ортонормированный базис.

Если базис ортонормирован, метрическая матрица (3.82) сводится просто к единичной матрице, и скалярное произведение (x, y) в (3.86) принимает простой вид

$$(x, y) = \sum_i x_i^* y_i = x^+ y, \quad (3.90)$$

причем

$$(x, x) = \sum_i |x_i|^2. \quad (3.91)$$

Если мы, пользуясь формулой (3.14), перейдем от одного ортонормированного базиса u_i к другому базису u'_i , то новый базис u'_i будет также ортонормированным, если

$$\delta_{ij} = (u'_i, u'_j) = (a_{ik}u_k, a_{jl}u_l) = a_{ik}^* a_{jl} (u_k, u_l) = a_{ik}^* a_{jl} \delta_{kl} = a_{ik}^* a_{jk}, \quad (3.92)$$

т. е. если

$$aa^+ = 1 = a^+a, \quad a^+ = a^{-1}, \quad (3.93)$$

так как преобразование a имеет обратное преобразование a^{-1} .

Говорят, что матрица A унитарна, если

$$A^+ = A^{-1}. \quad (3.94)$$

Таким образом, преобразование от одного ортонормированного базиса к другому совершается с помощью *унитарной матрицы*.

Задача. Докажите, что строки (столбцы) унитарной матрицы ортонормированы.

§ 10. Операторы: сопряженный, самосопряженный, унитарный

Оператор T^+ , *сопряженный* с линейным оператором T , определяется с помощью соотношения

$$(Tx, y) = (x, T^+y) \quad \text{для всех} \quad x, y. \quad (3.95)$$

Воспользовавшись (3.31) и (3.90), найдем, что в ортонормированном базисе

$$\begin{aligned} (Tx, y) &= T_{ij}^* x_j^* y_i = x_j^* \tilde{T}_{ji} y_i, \\ (x, T^+y) &= x_j^* T_{ji}^+ y_i \end{aligned}$$

и, поскольку x_j и y_i произвольны, из (3.95) следует

$$(T^+)_{ji} = \tilde{T}_{ji}^*, \quad \text{или} \quad T^+ = \tilde{T}^*, \quad (3.96)$$

т. е. матрица, представляющая сопряженный оператор T^+ в ортонормированном базисе, является комплексно сопряженной транспонированной по отношению к матрице, представляющей оператор T .

Задача. Докажите, что матрица, представляющая сопряженный оператор T^+ относительно базиса с метрической матрицей m , равна $m^{-1}Tm$.

Оператор является *самосопряженным*, или *эрмитовым*, если он совпадает со своим сопряженным

$$(Tx, y) = (x, Ty) \quad \text{для всех} \quad x, y,$$

или

$$T^{\dagger} = T. \quad (3.97)$$

В ортонормированной системе координат эрмитов оператор представляется эрмитовой матрицей.

Оператор U называется *унитарным оператором*, если

$$(Ux, Uy) = (x, y) \quad \text{для всех} \quad x, y, \quad (3.98)$$

т. е. если скалярное произведение образов векторов $x' = Ux$ и $y' = Uy$ такое же, как и скалярное произведение x и y для всех векторов x и y . Оператор U относительно ортонормированного базиса представляется унитарной матрицей

$$U^{\dagger}U = UU^{\dagger} = 1. \quad (3.99)$$

§ 11. Унитарные представления

Если операторы представления группы G унитарны (или если матрицы представления — унитарные матрицы), представление называется *унитарным представлением*.

В § 6 настоящей главы мы видели, что существует бесконечно много представлений группы G , эквивалентных любому заданному представлению $D(G)$. Поскольку унитарные матрицы обладают особенно полезными свойствами (см., например, задачу в конце § 9 настоящей главы), представляется важным выяснить, эквивалентно ли данное представление $D(G)$ некоторому унитарному представлению. В общем случае это *неверно*. Но можно доказать, что для *конечных групп* G всякое представление эквивалентно унитарному представлению.

Для произвольной пары векторов x, y можно построить выражение

$$\{x, y\} = \frac{1}{g} \sum_{R \in G} (D(R)x, D(R)y). \quad (3.100)$$

Суммирование в (3.100) проводится по всем элементам R группы G . Величина $\{x, y\}$, определенная соотношением (3.100), удовлетворяет всем требованиям для скалярного произведения. Кроме того, для любого элемента S и G

$$\begin{aligned} \{D(S)x, D(S)y\} &= \frac{1}{g} \sum_{R \in G} (D(R)D(S)x, D(R)D(S)y) = \\ &= \frac{1}{g} \sum_{R \in G} (D(RS)x, D(RS)y). \end{aligned} \quad (3.101)$$

Но при фиксированном S , если R пробегает по всем элементам G , эти же значения принимает и RS , поэтому выражения в правых частях (3.100) и (3.101) тождественны и

$$\{D(S)x, D(S)y\} = \{x, y\}. \quad (3.102)$$

Иначе говоря, операторы нашего представления унитарны относительно скалярного произведения $\{x, y\}$ [но не по отношению к (x, y)].

Рассмотрим далее систему векторов u_i , ортонормированных по отношению к исходному скалярному произведению, и вторую систему векторов v_i , ортонормированную относительно нового скалярного произведения:

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij} = (v_i, v_j). \quad (3.103)$$

Определим оператор T , который переводит векторы u_i в векторы v_i :

$$v_i = Tu_i. \quad (3.104)$$

Так как

$$Tx = Tx_i u_i = x_i Tu_i = x_i v_i,$$

то

$$(Tx, Ty) = x_i^* y_i = (x, y). \quad (3.105)$$

Рассмотрим теперь эквивалентное представление, определяемое формулой

$$D'(S) = T^{-1} D(S) T, \quad (3.106)$$

и найдем, что

$$\begin{aligned} (T^{-1} D(S) Tx, T^{-1} D(S) Ty) &= \{D(S) Tx, D(S) Ty\} \quad [\text{из (3.105)}], \\ &= \{Tx, Ty\} \quad [\text{из (3.102)}], \\ &= (x, y) \quad [\text{снова из (3.105)}]. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Последнее равенство показывает, что определенное в (3.106) эквивалентное представление $D'(G)$ унитарно. Поэтому для конечных групп *всегда* можно так выбрать представление, чтобы оно было унитарным. Для бесконечных групп мы рассмотрим позднее вопрос о том, какой смысл следует придавать суммированию по всем элементам группы, которое производится в (3.101).

§ 12. Гильбертово пространство

В § 9 настоящей главы мы определили унитарные пространства, вводя в линейном векторном пространстве скалярное произведение. После того как это сделано, можно определить *расстояние* $|x - y|$ между двумя векторами (точками, функциями) из соотношения

$$|x - y|^2 = (x - y, x - y). \quad (3.108)$$

Говорят, что последовательность векторов x_n ($n = 1, 2, \dots, \infty$) в L *сходится* к вектору x из L , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x| = 0, \quad (3.109)$$

т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ существует целое число $n(\varepsilon)$ такое, что $|x_m - x| < \varepsilon$ для $m > n(\varepsilon)$.

Говорят, что последовательность векторов x_n *сходится* или является *фундаментальной последовательностью*, если

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} |x_m - x_n| = 0. \quad (3.110)$$

Пространство L называется *полным*, если *всякая* фундаментальная последовательность сходится к некоторому вектору в L , т. е. если из (3.110) вытекает существование вектора x в L , для которого выполняется (3.109).

Полное унитарное пространство называется *гильбертовым пространством*. Унитарные пространства конечной размерности с необходимостью полны.

При рассмотрении бесконечномерных представлений мы будем ограничиваться представлениями *линейными операторами в гильбертовом пространстве*. При этом мы налагаем требование, чтобы эти линейные операторы были *непрерывными*, т. е. если

$$|x_n - x| \rightarrow 0, \quad (3.111)$$

то

$$|Ax_n - Ax| \rightarrow 0.$$

§ 13. Разложение представлений; приводимость; неприводимые представления

В § 7 настоящей главы мы обсудили вопрос о сложении представлений. Теперь же мы хотим рассмотреть обратный процесс. Если задано некоторое представление D , можно ли описать его с помощью более „простых“ представлений? Грубый критерий простоты состоит в том, что эти представления должны иметь настолько малую размерность, насколько это возможно. Например, если все матрицы трехмерного представления D имеют вид

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & e_1 \\ c_1 & d_1 & f_1 \\ \hline 0 & 0 & g_1 \end{bmatrix}, \quad (3.112)$$

то их произведения будут иметь такой же вид, а именно:

$$\begin{bmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 & a_1 e_2 + b_1 f_2 + e_1 g_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 & c_1 e_2 + d_1 f_2 + f_1 g_2 \\ \hline 0 & 0 & g_1 g_2 \end{bmatrix}. \quad (3.112a)$$

Мы видим, что матрицы в левом верхнем углу образуют двумерное представление:

$$\begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix}, \quad (3.1126)$$

матрицы же в правом нижнем углу образуют одномерное представление:

$$[g_i]. \quad (3.112в)$$

Когда так происходит, мы говорим, что первоначальное представление *приводимо*.

Вид матриц представления может быть не таким простым, как в (3.112), но если можно найти преобразование базиса, которое *все* матрицы представления приводит к виду (эквивалентному) (3.112), мы говорим, что такое представление приводимо. В общем случае, если можно найти некоторый базис, в котором *все* матрицы $D(R)$ n -мерного представления можно привести одновременно к виду

$$D(R) = \left[\begin{array}{c|c} D^{(1)}(R) & A(R) \\ \hline 0 & D^{(2)}(R) \end{array} \right], \quad (3.113)$$

где $D^{(1)}(R)$ — матрицы $m \times m$, $D^{(2)}(R)$ — матрицы $(n-m) \times (n-m)$, $A(R)$ — прямоугольная матрица с m строками и $(n-m)$ столбцами, а 0 означает матрицу, состоящую из $(n-m)$ строк и m столбцов, у которой все элементы равны 0, мы скажем, что представление $D(R)$ *приводимо*. Ясно, что произведение матриц

$$D(RS) = D(R)D(S) = \left[\begin{array}{c|c} D^{(1)}(R)D^{(1)}(S) & D^{(1)}(R)A(S) + A(R)D^{(2)}(S) \\ \hline 0 & D^{(2)}(R)D^{(2)}(S) \end{array} \right]$$

имеет тот же вид, что и (3.113), и поэтому матрицы

$$D^{(1)}(RS) = D^{(1)}(R)D^{(1)}(S)$$

образуют m -мерное представление, а матрицы

$$D^{(2)}(RS) = D^{(2)}(R)D^{(2)}(S)$$

задают $(n-m)$ -мерное представление.

Этот процесс можно продолжить следующим образом. Преобразуем базис в m -мерном пространстве $D^{(1)}$ и попытаемся привести *все* матрицы $D^{(1)}(R)$ к виду, указанному в (3.113), т. е.

$$D^{(1)}(R) = \left[\begin{array}{c|c} D^{(3)}(R) & A'(R) \\ \hline 0 & D^{(4)}(R) \end{array} \right].$$

где матрица $D^{(3)}$ p -мерна, а матрица $D^{(4)}$ $(m - p)$ -мерна, и ту же процедуру применим и к матрицам $D^{(2)}(R)$. Очевидно, что этот процесс заканчивается, после чего мы получаем все матрицы представления D в виде

$$D(R) = \begin{bmatrix} D^{(1)}(R) & & & & A^{(1)}(R) & & & \\ & D^{(2)}(R) & & & & A^{(2)}(R) & & \dots \\ & & D^{(3)}(R) & & & & A^{(3)}(R) & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & D^{(k-1)}(R) & & A^{(k-1)}(R) & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & D^{(k)}(R) \end{bmatrix}. \quad (3.114)$$

где k наборов матриц $D^{(1)}(R) \dots D^{(l)}(R) \dots D^{(k)}(R)$ образуют неприводимые представления размерностей $m_l \left(n = \sum_{l=1}^k m_l \right)$.

Внутренний критерий приводимости можно сформулировать так. В случае (3.112) рассмотрим те векторы, которые принадлежат двумерному подпространству первых двух компонент. Матрица (3.112), примененная к векторам x , у которых $x_3 = 0$, дает вектор

$$\begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

снова принадлежащий подпространству $x_3 = 0$. Иначе говоря, это двумерное подпространство инвариантно относительно всех преобразований группы. С другой стороны, векторы, у которых $x_1 = x_2 = 0$, преобразуются в векторы

$$\begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ex_3 \\ fx_3 \\ gx_3 \end{bmatrix},$$

в силу чего (дополнительное) одномерное пространство третьей компоненты *неинвариантно*.

В случае (3.113) подпространство первых m компонент инвариантно:

$$\left[\begin{array}{c|c} D^{(1)}(R) & A(R) \\ \hline 0 & D^{(2)}(R) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x \\ 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} D^{(1)}(R)x \\ 0 \end{array} \right],$$

в то время как дополнительное $(n-m)$ -мерное подпространство неинвариантно:

$$\left[\begin{array}{c|c} D^{(1)}(R) & A(R) \\ \hline 0 & D^{(2)}(R) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ x \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} A(R)x \\ D^{(2)}(R)x \end{array} \right].$$

Точно так же в случае (3.114) m_1 -мерное подпространство первых m_1 компонент инвариантно.

В общем случае, если существует некоторое подпространство размерности $m < n$, которое инвариантно относительно всех преобразований группы, представление приводимо. В этом подпространстве можно выбрать m новых базисных функций $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ и дополнить эту систему с помощью $(n-m)$ других базисных функций $\varphi_{m+1}, \dots, \varphi_n$ так, чтобы получить n базисных функций для всего n -мерного пространства. В таком базисе матрицы представления будут иметь вид матриц (3.112).

Представление *неприводимо*, если не существует собственного инвариантного подпространства.

Мы скажем, что представление *вполне приводимо*, если можно найти базис, в котором все матрицы представления имеют вид (3.113), но с $A(R) = 0$, т. е.

$$D(R) = \left[\begin{array}{c|c} D^{(1)}(R) & 0 \\ \hline 0 & D^{(2)}(R) \end{array} \right]. \quad (3.115)$$

В этом случае и m -мерное подпространство $D^{(1)}$ и $(n-m)$ -мерное подпространство $D^{(2)}$ инвариантны. Иначе говоря, базисные функции $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ преобразуются между собой, а базисные функции $\varphi_{m+1}, \dots, \varphi_n$ преобразуются между собой, так что преобразования группы не связывают между собой эти две системы функций. Пространство L *разлагается в прямую сумму* пространств $L^{(1)}$ и $L^{(2)}$

$$L = L^{(1)} + L^{(2)},$$

а представление D есть сумма представлений $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$

$$D = D^{(1)} + D^{(2)}. \quad (3.116)$$

Этот процесс в точности обратен тому процессу сложения представлений, которым мы воспользовались в § 7 настоящей главы. Представим себе на минуту, что мы рассматриваем вполне приводимые представления. В таком случае представления $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ можно

подвергнуть изучению, чтобы выяснить, не являются ли они в свою очередь приводимыми. Заметим, что $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ можно рассматривать в отдельности, поскольку соответствующие подпространства можно рассматривать независимо друг от друга. Таким образом, преобразование координат вида

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ n-m \end{matrix}$$

действует только в подпространстве представления $D^{(1)}$ и оставляет неизменными матрицы $D^{(2)}$. Продолжая эту процедуру, мы сможем в конце концов представить D в виде

$$D(R) = \begin{bmatrix} D^{(1)}(R) & 0 & & & 0 \\ & D^{(2)}(R) & & & 0 \\ & & & & 0 \\ 0 & & 0 & & 0 \\ & & & & \\ 0 & & 0 & & 0 & D^{(k)}(R) \end{bmatrix}, \quad (3.117)$$

т е

$$D = D^{(1)} + D^{(2)} + \dots + D^{(k)},$$

где все $D^{(v)}$ — неприводимые представления. В таком случае мы скажем, что D разлагается в прямую сумму

$$D^{(1)} + \dots + D^{(k)}.$$

Далее, среди неприводимых представлений $D^{(v)}$ может быть несколько представлений, эквивалентных друг другу (разумеется, для этого они должны иметь одинаковые размерности). Эквивалентные неприводимые представления различными не считаются, и для их обозначения можно использовать один и тот же символ. Таким образом, некоторое неприводимое представление $D^{(v)}$ может входить в представление D несколько раз. Символически мы выражаем это обстоятельство в виде

$$D = a_1 D^{(1)} + \dots + a_r D^{(r)} = \sum_v a_v D^{(v)}, \quad (3.118)$$

где a_v — целые положительные числа

Большой частью мы будем рассматривать вполне приводимые представления и термин *приводимое* будем использовать в смысле *разложимое в прямую сумму представлений*.

Если матрицы представления унитарны (унитарное представление), то из приводимости следует полная приводимость: если матрицы $D(R)$ в (3.113) унитарны, то $A(R) = 0$. В § 11 настоящей главы мы показали, что для конечных групп представления всегда можно выбрать так, чтобы они были унитарными, поэтому в случае конечных групп приводимые представления *всегда* разлагаются в сумму представлений.

§ 14. Леммы Шура

Теперь мы приступаем к общим теоремам. Цель этих теорем состоит в том, чтобы найти некоторые простые критерии неприводимости представления и указать некоторые ограничения, налагаемые на число неэквивалентных представлений. Мы начнем с того, что докажем две фундаментальные леммы (леммы Шура).

Предположим, что имеется набор, состоящий из n функций $\psi_\nu (\nu = 1, \dots, n)$, служащих базисом некоторого представления группы G . Тогда для всех R из G

$$O_R \psi_\nu = \sum_\mu \psi_\mu D_{\mu\nu}(R). \quad (3.119)$$

Если это представление приводимо, то, по определению, мы можем найти m функций φ_l , не обращающихся тождественно в нуль ($m < n$), которые будут линейными комбинациями функций ψ_ν ,

$$\varphi_l = \sum_\rho \psi_\rho a_{\rho l} \quad (3.120)$$

таких, что

$$O_R \varphi_l = \sum_k \varphi_k D'_{kl}(R) \quad (3.121)$$

для всех R из G . Пользуясь формулами (3.119) — (3.121), получаем

$$\begin{aligned} O_R \varphi_l &= \sum_\rho O_R \psi_\rho a_{\rho l} = \sum_{\sigma, \rho} \psi_\sigma D_{\sigma\rho}(R) a_{\rho l} = \\ &= \sum_k \varphi_k D'_{kl}(R) = \sum_{\sigma, k} \psi_\sigma a_{\sigma k} D'_{kl}(R). \end{aligned} \quad (3.122)$$

Таким образом,

$$\sum_{\sigma, \rho} \psi_\sigma D_{\sigma\rho}(R) a_{\rho l} = \sum_{\sigma, k} \psi_\sigma a_{\sigma k} D'_{kl}(R). \quad (3.123)$$

Так как ψ_σ линейно независимы,

$$\sum_\rho D_{\sigma\rho}(R) a_{\rho l} = \sum_k a_{\sigma k} D'_{kl}(R), \quad (3.124)$$

или

$$D(R) A = A D'(R) \quad (3.125)$$

для всех R из G . Таким образом, если D приводимо, мы можем найти ненулевую матрицу A такую, что равенство (3.125) будет выполняться при всех R из G .

Наоборот, если справедливо (3.125), т. е. если существует матрица A такая, что

$$D(R)A = AD'(R),$$

где $D'(R)$ — совокупность матриц порядка $m < n$, то

$$\sum_{\rho} D_{\sigma\rho}(R) a_{\rho l} = \sum_k a_{\sigma k} D'_{kl}(R).$$

Умножим на ψ_{σ} и просуммируем

$$\sum_{\rho, \sigma} \psi_{\sigma} D_{\sigma\rho}(R) a_{\rho l} = \sum_{\rho} O_R(\psi_{\rho} a_{\rho l}) = \sum_{\sigma, k} \psi_{\sigma} a_{\sigma k} D'_{kl}(R).$$

Таким образом, m функций

$$\varphi_l = \sum_{\rho} \psi_{\rho} a_{\rho l}$$

образуют базис представления D' , и D приводимо. Если предположить, что представление D неприводимо, то единственный способ избежать противоречия состоит в том, чтобы положить $A = 0$, т. е. сделать все элементы A равными нулю. Итак, наш результат можно сформулировать следующим образом:

Лемма I. Если D и D' — два неприводимых представления группы G , имеющие различные размерности, то из того, что матрица A удовлетворяет условию

$$D(R)A = AD'(R) \quad (3.125)$$

для всех R из G , следует $A = 0$.

Рассмотрим далее частный случай, когда $n = m$. Если выполняется (3.125), мы повторяем те же самые рассуждения и получаем

$$\sum_{\rho} O_R(\psi_{\rho} a_{\rho l}) = \sum_{\sigma, k} (\psi_{\sigma} a_{\sigma k}) D'_{kl}(R), \quad k = 1, \dots, n.$$

Здесь n функций $\sum_{\rho} \psi_{\rho} a_{\rho l}$ должны быть линейно независимыми, иначе D было бы приводимым. Но это означает, что определитель матрицы A не равен нулю, и матрица A имеет обратную матрицу. Поэтому из (3.125) следует, что

$$D(R) = AD'(R)A^{-1},$$

и эти два представления эквивалентны. Если же D и D' неприводимы и неэквивалентны, то единственный способ избежать против-

речия состоит в том, чтобы положить $A = 0$. Поэтому для этого частного случая наш результат можно сформулировать так:

Лемма Ia. Если D и D' — неприводимые представления группы G , имеющие одинаковую размерность, и если матрица A удовлетворяет условию

$$D(R)A = AD'(R) \quad (3.125)$$

при всех R из G , то либо D и D' эквивалентны, либо $A = 0$.

Наконец, рассмотрим какое-нибудь одно неприводимое представление группы G .

Лемма II. Если матрицы $D(R)$ образуют неприводимое представление группы G и если

$$AD(R) = D(R)A \quad (3.126)$$

для всех R из G , то $A = \text{const} \cdot 1$.

Иначе говоря, если некоторая матрица коммутирует со всеми матрицами неприводимого представления, то такая матрица должна быть кратна единичной матрице.

Рассмотрим уравнение

$$Ax = \lambda x, \quad (3.127)$$

где x — некоторый вектор в пространстве. Решения этого уравнения дают собственные значения и собственные векторы матрицы A . Если x — собственный вектор, принадлежащий собственному значению λ , то, пользуясь (3.126), мы найдем, что $D(R)x$ есть также собственный вектор, принадлежащий λ . Таким образом, подпространство собственных векторов матрицы A , принадлежащих данному λ , инвариантно относительно всех преобразований группы G . Но это означало бы, что D приводимо, если только рассматриваемое подпространство не есть все пространство или нулевой вектор. Из первой возможности следует, что A имеет только одно собственное значение λ , т. е. $A = \lambda \cdot 1$, из второй — что $A = 0$.

Эта лемма весьма удобна как критерий неприводимости. Если задано некоторое представление D , мы пытаемся найти матрицу A такую, чтобы выполнялось соотношение (3.126). Если можно показать, что A кратна единичной матрице, то D неприводимо.

Задача. Воспользуйтесь леммой II для того, чтобы доказать, что все неприводимые представления абелевой группы одномерны.

§ 15. Соотношения ортогональности

Теперь мы воспользуемся этими леммами, чтобы доказать наши общие теоремы. Предположим, что в лемме II нам задано неприводимое представление размерности n группы G , порядок которой равен g . Образует матрицу

$$A = \sum_S D(S) X D(S^{-1}), \quad (3.128)$$

где X — произвольная матрица, а сумма $\sum_S$ берется по всем элементам группы G . Мы утверждаем, что A удовлетворяет условиям леммы II, так как

$$\begin{aligned} D(R) A &= \sum_S D(R) D(S) X D(S^{-1}) = \\ &= \sum_S D(R) D(S) X D(S^{-1}) D(R^{-1}) \cdot D(R) = \\ &= \left[\sum_S D(RS) X D([RS]^{-1}) \right] D(R). \end{aligned} \quad (3.129)$$

Заметим теперь, что когда S пробегает при фиксированном R все элементы группы, произведение RS (вспомните групповую таблицу) также пробегает все элементы группы, и, следовательно,

$$\sum_S D(RS) X D([RS]^{-1}) = \sum_S D(S) X D(S^{-1}) \quad (3.130)$$

и

$$D(R) A = A D(R). \quad (3.131)$$

Но тогда, по лемме, $A = \lambda \cdot 1$. Значение постоянной λ будет зависеть от нашего выбора произвольной матрицы X . Выберем матрицу X так, чтобы все ее элементы были равны нулю, за исключением $X_{lm} = 1$. Константу λ обозначим λ_{lm} . Тогда из (3.128) получим

$$\sum_S D_{il}(S) D_{mj}(S^{-1}) = \lambda_{lm} \delta_{ij}, \quad (3.132)$$

или, если представление D унитарно,

$$\sum_S D_{il}(S) D_{jm}^*(S) = \lambda_{lm} \delta_{ij}. \quad (3.133)$$

Чтобы вычислить λ_{lm} , положим $i = j$ и просуммируем по i :

$$\begin{aligned} \sum_S \sum_i D_{il}(S) D_{ml}(S^{-1}) &= n \lambda_{lm} = \sum_S D_{ml}(SS^{-1}) = \\ &= \sum_S D_{ml}(E) = \sum_S \delta_{ml} = g \delta_{ml}. \end{aligned} \quad (3.134)$$

Таким образом,

$$\lambda_{lm} = \frac{g}{n} \delta_{lm} \quad (3.135)$$

и

$$\sum_S D_{il}(S) D_{mj}(S^{-1}) = \frac{g}{n} \delta_{lm} \delta_{ij}, \quad (3.136)$$

или, если D унитарно,

$$\sum_S D_{il}(S) D_{jm}^*(S) = \frac{g}{n} \delta_{lm} \delta_{ij}. \quad (3.137)$$

Теперь мы аналогичным образом построим матрицу A , удовлетворяющую условиям леммы I. Если заданы любые два неэквивалентные неприводимые представления $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ группы G (размерности которых равны n_1 и n_2), то положим

$$A = \sum_S D^{(2)}(S) X D^{(1)}(S^{-1}), \quad (3.138)$$

где X — произвольная матрица. Тогда

$$\begin{aligned} D^{(2)}(R) A &= \sum_S D^{(2)}(R) D^{(2)}(S) X D^{(1)}(S^{-1}) = \\ &= \sum_S D^{(2)}(R) D^{(2)}(S) X D^{(1)}(S^{-1}) D^{(1)}(R^{-1}) \cdot D^{(1)}(R) = \\ &= \sum_S D^{(2)}(RS) X D^{(1)}((RS)^{-1}) \cdot D^{(1)}(R) = A D^{(1)}(R). \end{aligned} \quad (3.139)$$

Итак, в силу леммы I, $A = 0$. Выбирая X так же, как и раньше, находим

$$\sum_S D_{il}^{(2)}(S) D_{mj}^{(1)}(S^{-1}) = 0 \quad \text{для всех } i, j, l, m; \quad (3.140)$$

или, если $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ унитарны,

$$\sum_S D_{il}^{(2)}(S) D_{jm}^{(1)*}(S) = 0. \quad (3.141)$$

Равенства (3.136) и (3.140) [или (3.137) и (3.141)] означают следующее. Если мы рассматриваем все неэквивалентные неприводимые представления группы G , то величины $D_{ij}^{(\mu)}(R)$ при *фиксированных* μ, i, j образуют вектор в g -мерном пространстве такой, что

$$\sum_R D_{il}^{(\mu)}(R) D_{mj}^{(\nu)}(R^{-1}) = \frac{g}{n_\mu} \delta_{\mu\nu} \delta_{ij} \delta_{lm}, \quad (3.142)$$

или, если представление унитарно,

$$\sum_R D_{il}^{(\mu)}(R) D_{jm}^{(\nu)*}(R) = \frac{g}{n_\mu} \delta_{\mu\nu} \delta_{ij} \delta_{lm}. \quad (3.143)$$

Итак, каждое неприводимое представление $D^{(\mu)}$ дает нам n_μ^2 векторов $D_{ij}^{(\mu)}(R)$ ($i, j = 1, \dots, n_\mu$), ортогональных друг к другу и к векторам $D_{lm}^{(\nu)}(R)$, построенным для всех неэквивалентных представлений. Поскольку число взаимно ортогональных векторов в g -мерном пространстве не может превышать g , мы получаем результат, состоящий в том, что

$$\sum_{\mu} n_{\mu}^2 \leq g. \quad (3.144)$$

Иначе говоря, число неэквивалентных неприводимых представлений конечной группы конечно. Пока у нас нет гарантии того, что полученные таким образом взаимно ортогональные векторы заполняют все g -мерное пространство, но позднее мы докажем, что дело обстоит именно так, т. е. в (3.144) стоит знак равенства.

Исходя из (3.142) или (3.143), мы можем вывести аналогичные соотношения ортогональности и для характеров. Если в (3.142) положить $i = l$ и $j = m$, то получим

$$\sum_R D_{li}^{(\mu)}(R) D_{jm}^{(\nu)}(R^{-1}) = \frac{g}{n_{\mu}} \delta_{\mu\nu} \delta_{ij} = \frac{g}{n_{\mu}} \delta_{\mu\nu} \delta_{ij}. \quad (3.145)$$

Просуммируем теперь по всем i и j :

$$\sum_R \chi^{(\mu)}(R) \chi^{(\nu)}(R^{-1}) = g \delta_{\mu\nu}, \quad (3.146)$$

или

$$\sum_R \chi^{(\mu)}(R) \chi^{(\nu)*}(R) = g \delta_{\mu\nu}, \quad (3.147)$$

если представления унитарны. С этого момента и далее мы ограничимся рассмотрением унитарных представлений.

Здесь следует быть осторожным. Вспомним, что все элементы, принадлежащие заданному классу сопряженных элементов в G , имеют один и тот же характер. Пусть $K_1, \dots, K_k$ — k классов группы G , и пусть число элементов в классе K_l равно g_l . Тогда для всех элементов класса K_l характер в μ -представлении будет один и тот же:

$$\chi^{(\mu)}(R) = \chi_l^{(\mu)}.$$

Таким образом, равенство (3.147) принимает вид

$$\sum_l \chi_l^{(\mu)} \chi_l^{(\nu)*} \cdot g_l = g \delta_{\mu\nu}. \quad (3.148)$$

При заданном μ числа $\chi_l^{(\mu)} g_l^{1/2}$ образуют вектор в k -мерном пространстве (где k — число классов в G). Векторы, построенные указанным способом из неэквивалентных неприводимых представлений, ортого-

нальны (и ни один из этих векторов не равен нулю). Поэтому число неэквивалентных неприводимых представлений группы должно быть меньше или равно числу классов сопряженных элементов в группе. Позднее мы докажем, что и здесь имеет место равенство.

Задача. Покажите, что элементы, обратные элементам, входящим в класс K_l , образуют класс K'_l . Для произвольных неприводимых представлений выведите уравнение

$$\sum_i g_i \chi_i^{(\mu)*} \chi_i^{(\nu)} = g \delta_{\mu\nu}. \quad (3.148a)$$

§ 16. Критерии неприводимости. Разложение представлений

Характеры неприводимых представлений обычно называются *примитивными характеристиками* или *простыми характеристиками*. Рассмотрим теперь произвольное представление D . Согласно (3.118), D можно выразить через неприводимые представления в виде

$$D(R) = \sum_{\nu} a_{\nu} D^{(\nu)}(R),$$

где a_{ν} — целые числа ≥ 0 . Вычислим след от правой и левой частей этого равенства для элемента R , принадлежащего классу K_l группы G :

$$\chi_l = \sum_{\nu} a_{\nu} \chi_l^{(\nu)}. \quad (3.149)$$

Характер χ_l приводимого представления D называется *составным характером*. Из (3.149) мы видим, что составной характер является линейной комбинацией простых характеров с *положительными целочисленными* коэффициентами. Умножив (3.149) на $\chi_l^{(\mu)*} g_l$ и просуммировав по l , получим

$$\sum_l \chi_l^{(\mu)*} \chi_l g_l = \sum_{\nu} a_{\nu} \sum_l g_l \chi_l^{(\mu)*} \chi_l^{(\nu)} = \sum_{\nu} a_{\nu} g \delta_{\mu\nu} = g a_{\mu},$$

или

$$a_{\mu} = \frac{1}{g} \sum_l g_l \chi_l^{(\mu)*} \chi_l. \quad (3.150)$$

Таким образом, чтобы найти, сколько раз данное неприводимое представление входит в D , мы пользуемся соотношением (3.150). Заметим, что если два представления имеют *одинаковые* совокупности *характеров*, они *эквивалентны*, так как, согласно (3.150), коэффициенты a_{μ} одинаковы для обоих представлений.

Если равенство (3 149) умножить на комплексно сопряженное равенство, взятое с коэффициентом g_l , и просуммировать по l , то получим

$$\begin{aligned}\sum_l \chi_l \chi_l^* g_l &= \sum_{\mu, \nu} a_\mu a_\nu \sum_l g_l \chi_l^{(\nu)} \chi_l^{(\mu)*} = \sum_{\mu, \nu} a_\mu a_\nu g_{\mu\nu}, \\ \sum_l \chi_l \chi_l^* g_l &= g \sum_\mu a_\mu^2.\end{aligned}\quad (3\ 151)$$

В частности, если представление неприводимо, то все коэффициенты a_μ равны нулю, за исключением одного, который равен единице; поэтому, если исходное представление неприводимо, его характеры должны удовлетворять соотношению

$$\sum_l g_l |\chi_l|^2 = g, \quad (3\ 152)$$

что дает нам очень простой критерий неприводимости.

Крайне полезными средствами при решении вопроса о неприводимости представления служит равенство (3 151) и его частный случай — равенство (3 152). Если каким-либо образом найдено некоторое представление группы G , мы вычисляем составной характер χ_l и величину

$$\frac{1}{g} \sum_l g_l |\chi_l|^2 = \sum_\mu a_\mu^2.$$

Если эта величина равна единице, то представление неприводимо. Предположим, что

$$\sum_\mu a_\mu^2 = 2.$$

Поскольку a_μ — целые числа, единственно возможное решение состоит в том, чтобы $a_\rho = a_\sigma = 1$ для двух *различных* неприводимых представлений $D^{(\rho)}$ и $D^{(\sigma)}$. Аналогично, если

$$\sum_\mu a_\mu^2 = 3,$$

то представление D есть сумма трех *различных* неприводимых представлений, каждое из которых встречается ровно один раз. На языке теории характеров мы сказали бы, что составной характер χ_l есть сумма простых характеров:

$$\chi_l = \chi_l^{(\rho)} + \chi_l^{(\sigma)} + \chi_l^{(\tau)}, \quad \rho \neq \sigma \neq \tau \quad (3.153)$$

с коэффициентами, равными единице. Если

$$\sum_\mu a_\mu^2 = 4,$$

то либо

$$\chi_i = \chi_i^{(\rho)} + \chi_i^{(\sigma)} + \chi_i^{(\tau)} + \chi_i^{(\mu)}, \quad \rho \neq \sigma \neq \tau \neq \mu, \quad (3.154)$$

либо

$$\chi_i = 2\chi_i^{(\rho)}. \quad (3.154a)$$

Очень полезно также следующее обобщение этих результатов. Если нам задано два представления D и Δ группы G с составными характерами χ_i и φ_i соответственно, то мы можем прежде всего попытаться применить к каждому характеру в отдельности соотношение (3.151), чтобы выяснить, сколько различных простых характеров он содержит. Затем мы могли бы попытаться узнать, имеют ли χ_i и φ_i какие-либо общие простые характеры. Мы отправляемся от равенств, подобных равенству (3.149):

$$\chi_i = \sum_{\nu} a_{\nu} \chi_i^{(\nu)}, \quad \varphi_i = \sum_{\mu} b_{\mu} \chi_i^{(\mu)},$$

где a_{ν} , b_{μ} — целые положительные числа. Умножим χ_i на $\varphi_i^* g_i / g$ и просуммируем по i :

$$\sum_i \frac{g_i}{g} \chi_i \varphi_i^* = \sum_{\mu, \nu} a_{\nu} b_{\mu} \sum_i \frac{g_i}{g} \chi_i^{(\nu)} \chi_i^{(\mu)*} = \sum_{\mu, \nu} a_{\nu} b_{\mu} \delta_{\mu\nu} = \sum_{\nu} a_{\nu} b_{\nu} \quad (3.155)$$

[здесь мы воспользовались равенством (3.148)]. Если сумма $\sum a_{\nu} b_{\nu}$ равна нулю, то рассматриваемые два представления *не имеют* общих неприводимых компонент. Если

$$\sum a_{\nu} b_{\nu} = 1,$$

то они имеют ровно *одну* общую неприводимую компоненту и в каждое представление эта компонента входит только *один раз*. При

$$\sum a_{\nu} b_{\nu} > 1$$

число возможных случаев быстро возрастает, но получить полезную информацию все еще представляется возможным.

Задача. Выведите для произвольных представлений соотношения:

$$a_{\mu} = \frac{1}{g} \sum_i g_i \chi_i \chi_i^{(\mu)}, \quad (3.150a)$$

$$\sum_i g_i \chi_i \chi_i = g \sum_{\mu} a_{\mu}^2, \quad (3.151a)$$

$$\sum_i \frac{g_i}{g} \chi_i \varphi_i = \sum_{\nu} a_{\nu} b_{\nu}. \quad (3.155a)$$

§ 17. Общие теоремы; групповая алгебра

Теперь мы можем вернуться назад и завершить доказательства наших теорем. Прежде всего покажем, что в (3.144) стоит знак равенства. Чтобы проделать это, рассмотрим одно специальное представление группы G — *регулярное* представление, которым мы воспользовались в гл. 1 при обсуждении теоремы Кэли. Если элементы группы мы обозначим $S_1, \dots, S_g$, то умножение их слева на некоторый элемент S_ν приводит к перестановке элементов $S_1, \dots, S_g$. Рассматривая $S_1, \dots, S_g$ как координаты в g -мерном пространстве, мы можем представить элемент S_ν с помощью некоторой перестановки g координат. Так, если $S_\nu S_i = S_{j_l}$ ($l = 1, \dots, g$), то

$$D_{il}(S_\nu) = \delta_{ij_l}.$$

В этом (регулярном) представлении диагональные элементы всех матриц равны нулю, за исключением элемента S_ν , такого, что

$$S_\nu S_l = S_l,$$

т. е. за исключением единичного элемента E . Таким образом, в случае регулярного представления

$$\chi(R) = \begin{cases} 0 & \text{при } R \neq E, \\ g & \text{при } R = E. \end{cases} \quad (3.156)$$

Выражая регулярное представление через неэквивалентные неприводимые представления, получаем

$$\chi_l = \sum_{\nu} a_{\nu} \chi_l^{(\nu)}. \quad (3.149)$$

Рассмотрим класс, содержащий единичный элемент. Для этого класса $\chi_i = \chi_1 = g$, в то время как в ν -м неприводимом представлении $\chi_1^{(\nu)} = n_{\nu}$. Таким образом,

$$g = \sum_{\nu} a_{\nu} n_{\nu}. \quad (3.157)$$

Коэффициенты a_{ν} задаются равенством (3.150), в котором вклад в сумму дает только член с $l = 1$:

$$a_{\nu} = \frac{1}{g} \sum_i g_i \chi_i \chi_l^{(\nu)*} = \frac{1}{g} \cdot g n_{\nu} = n_{\nu} = \chi_1^{(\nu)}. \quad (3.158)$$

Равенство (3.158) означает, что *число*, показывающее, сколько раз каждое неприводимое представление содержится в регулярном представлении, равно размерности представления. Подставляя в (3.157), получаем

$$g = \sum_{\nu} n_{\nu}^2. \quad (3.159)$$

что и доказывает нашу теорему. Подставляя (3.158) в (3.149), мы находим

$$\chi_l = \sum_v n_v \chi_l^{(v)} = \sum_v \chi_1^{(v)} \chi_l^{(v)}. \quad (3.160)$$

Если $l=1$ (класс, содержащий E), то $\chi_l = g$. Во всех же остальных классах $\chi_l = 0$, откуда

$$\sum_v \chi_1^{(v)} \chi_l^{(v)} = \begin{cases} 0 & \text{при } l \neq 1, \\ g & \text{при } l = 1. \end{cases} \quad (3.161)$$

Заметим, что процедура, которой мы сейчас пользуемся, является дополнением к тому, что мы делали ранее при доказательстве соотношения ортогональности [равенство (3.148)]. Тогда при фиксированном v величины $g^{1/2} \chi_l^{(v)}$ образовывали вектор в k -мерном пространстве (k равно числу классов). При различных v ($v=1, \dots, r$) векторы были ортогональны, вследствие чего $r \leq k$. Теперь же равенство (3.161) наводит на мысль о том, что при фиксированном l мы можем построить векторы $\chi_l^{(v)}$ в r -мерном пространстве (т. е. для заданного класса мы выписываем характеры r различных неприводимых представлений и образуем из них вектор). Равенство (3.161) означает, что ортогональность этих векторов имеет место только в том случае, когда один из классов состоит из единичного элемента. Если бы равенство (3.161) можно было обобщить на случай любой пары классов, мы смогли бы заключить, что $k \leq r$, и этот вывод вместе с нашим предыдущим результатом о том, что $r \leq k$, и доказывал бы, что $r = k$, т. е. что число неэквивалентных неприводимых представлений равно числу классов в группе. Приведем теперь план доказательства.

Исходя из группы G , мы можем построить систему, называемую *алгеброй*. Величины, входящие в алгебру, имеют вид

$$\sum_R a_R R, \quad (3.162)$$

где коэффициенты a_R — любые комплексные числа. Под суммой двух таких величин мы понимаем

$$\sum_R a_R R + \sum_R b_R R = \sum_R (a_R + b_R) R, \quad (3.163)$$

а под их произведением подразумеваем

$$\sum_R a_R R \cdot \sum_S b_S S = \sum_{R,S} a_R b_S RS = \sum_R \left(\sum_S a_{RS} b_{S^{-1}} \right) R. \quad (3.164)$$

Например, в группе $\mathcal{C}_2$ с элементами E и I мы вводим алгебру величин

$$a_1 E + a_2 I.$$

Тогда

$$\begin{aligned}(2E + 4I) + (E - 6I) &= (3E - 2I), \\ (2E + 4I)(E - 6I) &= 2E^2 - 12EI + 4IE - 24I^2 = \\ &= 2E - 12I + 4I - 24E = -22E - 8I.\end{aligned}$$

Пусть $A_1^{(i)}, \dots, A_{g_i}^{(i)}$ — элементы в классе K_i группы G . Построим величину

$$\mathcal{K}_i = \sum_{l=1}^{g_i} A_l^{(i)}. \quad (3.165)$$

Если перемножить величины $\mathcal{K}_i$, относящиеся к двум различным классам

$$\mathcal{K}_i \mathcal{K}_j = \sum_{l=1}^{g_i} \sum_{m=1}^{g_j} A_l^{(i)} A_m^{(j)}, \quad (3.166)$$

то сумма в правой части вновь будет состоять из полных классов, так как, трансформируя $\mathcal{K}_i \mathcal{K}_j$ с помощью любого элемента группы, мы лишь изменяем порядок слагаемых. Поэтому

$$\mathcal{K}_i \mathcal{K}_j = \sum_l c_{ijl} \mathcal{K}_l, \quad (3.167)$$

где c_{ijl} — целые положительные числа. Рассмотрим какое-нибудь неприводимое представление группы G . Если взять сумму всех матриц, соответствующих элементам i -го класса, то получится матрица, которую мы обозначим D_i . Эта матрица коммутирует со всеми матрицами выбранного представления, так как

$$D_i = \sum_{R \in K_i} D(R), \quad (3.168)$$

трансформация матрицы D_i изменяет только порядок слагаемых в этой сумме. Но это и означает, что D_i коммутирует со всеми матрицами представления и, согласно лемме II,

$$D_i = \lambda_i \cdot 1.$$

Переходя в этом равенстве к характеристам, получаем

$$g_i \chi_i = \lambda_i n = \lambda_i \chi_1, \quad (3.169)$$

где n — размерность неприводимого представления. Итак,

$$\lambda_i = \frac{g_i \chi_i}{\chi_1}. \quad (3.170)$$

Перейдем теперь к матрицам в равенстве (3.167):

$$D_i D_j = \sum_l c_{ijl} D_l, \quad (3.171)$$

или

$$\lambda_i \lambda_j = \sum_l c_{ijl} \lambda_l. \quad (3.172)$$

Пользуясь (3.170), получаем

$$\frac{g_i \chi_i}{\chi_1} \cdot \frac{g_j \chi_j}{\chi_1} = \sum_l c_{ijl} \frac{g_l \chi_l}{\chi_1},$$

или

$$g_i g_j \chi_i \chi_j = \chi_1 \sum_l c_{ijl} g_l \chi_l. \quad (3.173)$$

Все характеры относятся к данному неприводимому представлению. Что же касается коэффициентов g и c_{ijl} , то они являются свойствами группы и *не зависят* от представления. Равенство (3.173) полезно при проверке вычислений характеров.

Если два элемента группы G сопряжены друг с другом, то обратные им элементы также сопряжены друг с другом. Например, если задан класс K_i , то существует другой класс $K_{i'}$, состоящий из элементов, обратных элементам класса K_i . Заметим, что K_i и $K_{i'}$ имеют одинаковое число элементов: $g_i = g_{i'}$. Если взять произведение этих двух классов K_i и $K_{i'}$ (где $K_{i'}$ состоит из элементов, обратных элементам K_i), то мы получим единичный элемент E ровно g_i раз. При $j \neq i'$ произведение $K_i K_j$ не содержит единичного элемента группы, т. е.

$$c_{ijl} = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq i', \\ g_i & \text{при } j = i'. \end{cases} \quad (3.174)$$

Перепишем теперь (3.173). Чтобы указывать на некоторое конкретное представление, введем верхний индекс:

$$g_i g_j \chi_i^{(v)} \chi_j^{(v)} = \sum_l c_{ijl} g_l \chi_l^{(v)} \chi_l^{(v)}.$$

Просуммируем это выражение по всем v от 1 до r :

$$\begin{aligned} g_i g_j \sum_{v=1}^r \chi_i^{(v)} \chi_j^{(v)} &= \sum_l c_{ijl} g_l \sum_{v=1}^r \chi_l^{(v)} \chi_l^{(v)} = \\ &= \sum_l c_{ijl} g_l g \delta_{ll} = \text{[здесь мы воспользовались соотношением (3.161)]} \\ &= c_{ijl} g_l g = c_{ijl} g. \end{aligned} \quad (3.175)$$

Тогда из (3.174) получим

$$g_i g_j \sum_{v=1}^r \chi_i^{(v)} \chi_j^{(v)} = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq i', \\ g g_i & \text{при } j = i', \end{cases} \quad (3.176)$$

или

$$\sum_{v=1}^r \chi_i^{(v)} \chi_j^{(v)} = \frac{g}{g_j} \delta_{ji'}. \quad (3.177)$$

Для унитарного представления $\chi_{i'} = \chi_i^*$, так что (3.177) можно записать в виде

$$\sum_{v=1}^r \chi_i^{(v)} \chi_j^{(v)*} = \frac{g}{g_j} \delta_{ij}. \quad (3.178)$$

Равенство (3.178) показывает, что k r -мерных ненулевых векторов $\chi_i^{(v)}$ взаимно ортогональны, вследствие чего $k \leq r$, и мы завершили доказательство нашей теоремы:

Число неэквивалентных неприводимых представлений группы равно числу классов сопряженных элементов в этой группе.

Наши результаты можно резюмировать следующим образом. Выпишем таблицу характеров (табл. 3). Тогда из равенства (3.148) и (3.178) (для унитарных представлений) будет следовать, что скалярное произведение любых двух строк или любых двух столбцов (взятых с весами g_i) равно нулю. Кроме того, из (3.173) вытекает, что произведение любых двух чисел, стоящих в одной строке, выражается в виде линейной комбинации элементов той же строки, причем коэффициенты от строки не зависят.

Таблица 3

	K_1	K_2	...	K_i	...	K_k
$D^{(1)}$	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	...	$\chi_i^{(1)}$	...	$\chi_k^{(1)}$
$D^{(2)}$	$\chi_1^{(2)}$	...	...	...	...	...
.	.					.
.	.					.
.	.					.
$D^{(\mu)}$	$\chi_1^{(\mu)}$	...	...	$\chi_i^{(\mu)}$	...	$\chi_k^{(\mu)}$
.	.					.
.	.					.
.	.					.
$D^{(k)}$	$\chi_1^{(k)}$	$\chi_2^{(k)}$	...	$\chi_i^{(k)}$	...	$\chi_k^{(k)}$

§ 18. Разложение функций по базисным функциям неприводимых представлений

Как уже указывалось раньше в этой главе, мы можем получить некоторое представление группы G , исходя из любой функции ψ и применяя к ψ все преобразования группы G . В этом случае ψ сама будет одной из базисных функций или будет линейно выражаться через базисные функции. Это утверждение остается справедливым, если разложить полученное представление на неприводимые компоненты. Поэтому мы приходим к выводу, что любая функция ψ представима в виде суммы функций, которые могут служить базисными функциями в различных неприводимых представлениях:

$$\psi = \sum_{\nu} \sum_{l=1}^{n_{\nu}} \psi_l^{(\nu)}. \quad (3.179)$$

(Заметим, что функцией ψ наиболее общего вида будет такая функция, для которой получающиеся функции $O_R \psi$ линейно независимы. В этом случае мы получаем регулярное представление, которое мы рассматривали ранее.)

Напомним определение функций $\psi_l^{(\nu)}$, задаваемых уравнением (3.66). Базисные функции ν -го неприводимого (унитарного) представления удовлетворяют уравнениям

$$O_R \psi_l^{(\nu)} = \sum_j \psi_j^{(\nu)} D_{ji}^{(\nu)}(R). \quad (3.66)$$

Говорят, что функция $\psi_l^{(\nu)}$ принадлежит l -й строке ν -го неприводимого представления. Попробуем теперь найти условие, которому должна удовлетворять данная функция для того, чтобы она могла принадлежать i -й строке данного представления. Иначе говоря, если задана некоторая функция $\psi_k^{(\nu)}$, мы хотим сопоставить ей ($n_{\nu} - 1$) других функций таких, чтобы весь набор функций удовлетворял уравнению (3.66). Умножим (3.66) на $D_{lm}^{(\mu)*}(R)$ и просуммируем по всей группе:

$$\begin{aligned} \sum_R D_{lm}^{(\mu)*}(R) O_R \psi_l^{(\nu)} &= \sum_j \psi_j^{(\nu)} \sum_R D_{lm}^{(\mu)*}(R) D_{ji}^{(\nu)}(R) = \\ &= \frac{g}{n_{\nu}} \sum_j \psi_j^{(\nu)} \delta_{lj} \delta_{mi} \delta_{\mu\nu} = \frac{g}{n_{\nu}} \psi_l^{(\nu)} \delta_{mi} \delta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.180)$$

В частности, при $m = l$, $\mu = \nu$

$$\sum_R D_{ll}^{(\nu)*}(R) O_R \psi_l^{(\nu)} = \frac{g}{n_{\nu}} \psi_l^{(\nu)} \delta_{ll}, \quad (3.181)$$

полагая $l = l$, получаем

$$\sum_R D_{li}^{(v)*}(R) O_R \psi_l^{(v)} = \frac{g}{n_v} \psi_l^{(v)}. \quad (3.182)$$

Уравнение (3.182) является необходимым условием, которому должны удовлетворять функции $\psi_l^{(v)}$. Покажем также, что это условие достаточно, т. е. если функция $\psi_k^{(v)}$ удовлетворяет уравнению

$$\sum_R D_{kk}^{(v)*}(R) O_R \psi_k^{(v)} = \frac{g}{n_v} \psi_k^{(v)}, \quad (3.183)$$

то мы можем найти $(n_v - 1)$ «партнеров» таких, что вся совокупность функций будет удовлетворять уравнению (3.66). Чтобы определить набор функций, воспользуемся уравнением (3.180), где $\mu = v$, $m = k = l$

$$\psi_l^{(v)} = \frac{n_v}{g} \sum_R D_{lk}^{(v)*}(R) O_R \psi_k^{(v)}. \quad (3.184)$$

В частности, при $l = k$ мы вновь получаем (3.183). Таким образом, уравнение (3.184) позволяет удовлетворительным образом определить n_v функций $\psi_l^{(v)}$ через функции $\psi_k^{(v)}$, если уравнение (3.183) для функций $\psi_k^{(v)}$ выполняется. Покажем теперь, что функции $\psi_l^{(v)}$, определяемые согласно уравнению (3.184), удовлетворяют уравнению (3.66), т. е. образуют базис v -го неприводимого представления. Чтобы доказать это, подставим (3.184) в правую часть (3.66):

$$\begin{aligned} \sum_j \psi_j^{(v)} D_{jl}^{(v)}(S) &= \frac{n_v}{g} \sum_R \sum_j D_{jl}^{(v)}(S) D_{jk}^{(v)*}(R) O_R \psi_k^{(v)} = \\ &= \frac{n_v}{g} \sum_R \left(\sum_j D_{lj}^{(v)*}(S^{-1}) D_{jk}^{(v)*}(R) \right) O_R \psi_k^{(v)} = \\ &= \frac{n_v}{g} O_S \sum_R D_{lk}^{(v)*}(S^{-1}R) O_{S^{-1}} O_R \psi_k^{(v)} = \\ &= \frac{n_v}{g} O_S \sum_R D_{lk}^{(v)*}(R) O_R \psi_k^{(v)} = O_S \psi_l^{(v)}. \end{aligned} \quad (3.185)$$

Возвратимся теперь к равенству (3.179) и спросим себя, как найти $\psi_l^{(v)}$, если функция ψ нам задана. Иначе говоря, как разложить данную функцию в сумму функций, каждая из которых принадлежит определенной строке некоторого неприводимого представления? В (3.180) положим $m = l$:

$$\sum_R D_{ll}^{(\mu)*}(R) O_R \psi_l^{(v)} = \frac{g}{n_\mu} \psi_l^{(v)} \delta_{ll} \delta_{\mu v}. \quad (3.186)$$

Таким образом, оператор

$$P_l^{(\mu)} = \frac{n_\mu}{g} \sum_R D_{ll}^{(\mu)*}(R) O_R \quad (3.187)$$

есть проекционный оператор, т. е.

$$P_l^{(\mu)} \psi_j^{(\nu)} = \psi_l^{(\mu)} \delta_{\mu\nu} \delta_{lj}. \quad (3.188)$$

Итак, применяя оператор $P_l^{(\mu)}$ к равенству (3.179), получаем

$$\psi_l^{(\mu)} = \frac{n_\mu}{g} \sum_R D_{ll}^{(\mu)*}(R) O_R \psi. \quad (3.189)$$

По аналогии со сказанным выше мы утверждаем, что некоторая функция «принадлежит ν -му неприводимому представлению», если она является суммой функций, принадлежащих различным строкам этого представления, т. е.

$$\psi^{(\nu)} = \sum_{l=1}^{n_\nu} \psi_l^{(\nu)}. \quad (3.190)$$

Просуммировав по l соотношение (3.186), получим

$$\sum_R \chi^{(\mu)*}(R) O_R \psi_l^{(\nu)} = \frac{g}{n_\mu} \psi_l^{(\nu)} \delta_{\mu\nu}; \quad (3.191)$$

суммирование же по l от 1 до n_ν [с учетом (3.190)] даст нам

$$\sum_R \chi^{(\mu)*}(R) O_R \psi^{(\nu)} = \frac{g}{n_\mu} \delta_{\mu\nu} \psi^{(\mu)}. \quad (3.192)$$

Мы видим, что

$$P^{(\mu)} = \frac{n_\mu}{g} \sum_R \chi^{(\mu)*}(R) O_R \quad (3.193)$$

есть проекционный оператор, т. е.

$$P^{(\mu)} \psi^{(\nu)} = \psi^{(\mu)} \delta_{\mu\nu}. \quad (3.194)$$

Из (3.179) и (3.190) следует

$$\psi = \sum_\nu \psi^{(\nu)}, \quad (3.195)$$

где

$$\psi^{(\nu)} = P^{(\nu)} \psi. \quad (3.196)$$

§ 19. Представления прямых произведений

В § 7 гл. 1 мы ввели понятие прямого произведения. Говорят, что группа G есть прямое произведение двух своих подгрупп G_1 и G_2 ($G = G_1 \times G_2$), если все элементы G_1 коммутируют со всеми элементами G_2 , только единичный элемент принадлежит одновременно G_1 и G_2 и всякий элемент группы G выражается в виде произведения элемента подгруппы G_1 на элемент подгруппы G_2 . Несколько примеров прямых произведений было приведено в гл. 2. Если группу G можно представить в виде прямого произведения двух групп G_1 и G_2 , то характеры неприводимых представлений группы G легко находятся по характерам неприводимых представлений групп G_1 и G_2 . Пусть $\psi_i^{(\mu)}$ ($i = 1, \dots, n_\mu$) и $\varphi_j^{(\nu)}$ ($j = 1, \dots, n_\nu$) — системы функций, образующие базисы неприводимых представлений групп G_1 и G_2 соответственно. Тогда $n_\mu n_\nu$ функций $\psi_i^{(\mu)} \varphi_j^{(\nu)}$ образуют базис неприводимого представления группы G . Элементы и представления групп G_1 и G_2 мы отмечаем с помощью индексов 1 и 2. Тогда

$$O_{R_1} \psi_i^{(\mu)} = \sum_k \psi_k^{(\mu)} D_{ik}^{(\mu)}(R_1), \quad (3.197)$$

$$O_{R_2} \varphi_j^{(\nu)} = \sum_l \varphi_l^{(\nu)} D_{lj}^{(\nu)}(R_2), \quad (3.198)$$

$$O_{R_1 R_2} \psi_i^{(\mu)} \varphi_j^{(\nu)} = O_{R_1} \psi_i^{(\mu)} O_{R_2} \varphi_j^{(\nu)} = \sum_{kl} \psi_k^{(\mu)} \varphi_l^{(\nu)} D_{ik}^{(\mu)}(R_1) D_{lj}^{(\nu)}(R_2), \quad (3.199)$$

$$D_{ik; lj}^{(\mu \times \nu)}(R_1 R_2) = D_{ik}^{(\mu)}(R_1) D_{lj}^{(\nu)}(R_2), \quad (3.200)$$

или сокращенно

$$D^{(\mu \times \nu)}(R_1 R_2) = D_1^{(\mu)}(R_1) \times D_2^{(\nu)}(R_2). \quad (3.200a)$$

Чтобы найти характер $R_1 R_2$, мы должны просуммировать диагональные элементы в равенстве (3.200):

$$\chi^{(\mu \times \nu)}(R_1 R_2) = \chi_1^{(\mu)}(R_1) \chi_2^{(\nu)}(R_2). \quad (3.201)$$

Итак, чтобы найти характеры неприводимых представлений прямого произведения групп G_1 и G_2 , мы берем произведения характеров G_1 и G_2 .

ГЛАВА 4

НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ ГРУПП СИММЕТРИИ

Теперь мы применим теоремы гл. 3 к точечным группам симметрии, выведенным в гл. 2. Мы рассмотрим различные методы отыскания неприводимых представлений этих групп. Одна из наших задач состоит в том, чтобы ознакомиться с практическим применением различных теорем о представлениях.

§ 1. Абелевы группы

Задача нахождения неприводимых представлений для абелевых групп проста. Ясно, что, поскольку число классов в абелевой группе равно порядку группы, все неприводимые представления должны быть одномерными. Но в таком случае матрица и характер совпадают, и мы имеем дело просто с умножением чисел. Далее, поскольку порядок любого элемента конечен, характеры всех элементов группы являются корнями из единицы. Например, если порядок элемента A равен 2, т. е.

$$A^2 = E,$$

то

$$D(A) = \chi(A) = \pm 1.$$

Если

$$A^3 = E,$$

то

$$D(A) = \chi(A) = e^{2\pi i l/3} \quad (l = 1, 2, 3).$$

Вообще, если порядок A равен h , $A^h = E$, то

$$D(A) = \chi(A) = e^{2\pi i l/h} \quad (l = 1, \dots, h). \quad (4.1)$$

Если группа циклическая, то она порождается некоторым элементом A ($A^g = E$), так что

$$\chi(A) = e^{2\pi i l/g} \quad (l = 1, \dots, g), \quad (4.2)$$

а характеры всех элементов получаются путем возведения в степень числа $\chi(A)$. Например,

$$\chi(A^n) = e^{2\pi i n l/g}.$$

Рассмотрим сначала циклические группы.

C_1 . Это тривиальная группа, состоящая только из единичного элемента E (т. е. система несимметрична). Имеется одно неприводимое представление:

$$D(E) = \chi(E) = 1.$$

C_2 . Эта группа порождается одним элементом C_2 ; $C_2^2 = E$. В этом случае

$$D(C_2) = \chi(C_2) = e^{2\pi i l/2} \quad (l = 1, 2).$$

Характеры этих двух неприводимых представлений приведены в табл. 4.

В рассматриваемом случае (одномерное представление) характеры совпадают с матрицами.

Таблица 4

C_2 :	E	C_2
$A; z$	1	1
$B; x, y$	1	-1

Мы ввели следующее обозначение для представлений: одномерные представления обозначаются символами A или B в зависимости от того, симметрична или антисимметрична базисная функция относительно вращения вокруг главной оси. Главную ось мы выбрали вдоль оси z . В качестве базисных функций для любой из групп C_n можно взять функции

$$\psi = e^{il\varphi} \quad (l = 1, \dots, n). \quad (4.3)$$

Каждая из этих функций ψ задает одномерное представление, поскольку вращение вокруг оси z приводит просто к умножению такой функции на численный множитель. Например, для представления A группы C_2 возможными базисными функциями являются

$$1, z, f(z), f(x^2, y^2) \text{ и т. д.}$$

Для представления B можно взять

$$\psi = e^{i\varphi}.$$

Применим к базисным функциям ψ операторы O_R . (На протяжении этой главы для обозначения оператора мы часто будем пользоваться обозначением самого элемента R группы.) Тогда

$$C_2 e^{i\varphi} = e^{i(\varphi - \pi)} = -e^{i\varphi}.$$

Другая возможность состоит в том, чтобы взять нечетные степени x или y . Характеры представлены в табл. 4, где мы указали представления, которым принадлежат координаты x, y, z ; например,

z принадлежит симметричному представлению A , в то время как x и y принадлежат антисимметричному представлению B . Этой информацией мы будем пользоваться позднее при рассмотрении правил отбора. Представления, которым принадлежат x , y , z , будут определять правила отбора для электрических дипольных переходов. Мы покажем, как получать правила отбора для других мультиполей из информации, содержащейся в таблице характеров.

Нам известны две другие группы, изоморфные группе C_2 , а именно C_s и C_i . Все эти группы должны иметь одинаковые неприводимые представления. Чтобы информацию об изоморфных группах представить в компактном виде, мы объединяем их характеры так, как это показано в табл. 5. В группах, содержащих инверсию, одномерное представление, которое является симметричным (или антисимметричным) относительно инверсии, имеет индекс g (gerade — четное) или u (ungerade — нечетное), который ставится у символов A и B .

Таблица 5

C_i :	C_2 :	C_s :	E	I
			E	C_2
			E	σ_h
A_g	$A; z$	$A'; x, y$	1	1
$A_u; x, y, z$	$B; x, y$	$A''; z$	1	-1

Аналогично, в группе, содержащей σ_h , симметрия или антисимметрия относительно отражения указывается одним или двумя штрихами соответственно. В группе C_s координаты x и y симметричны относительно отражения (в плоскости XY) и поэтому принадлежат представлению A' ; в то же время координата z антисимметрична относительно отражения и принадлежит представлению A'' . В группе C_i координаты x , y и z антисимметричны относительно инверсии и принадлежат A_u .

Заметим, что соотношения ортогональности [равенства (3.147) и (3.178)] выполняются.

Представляют интерес теоремы последней главы о разложении произвольной функции по функциям, принадлежащим различным неприводимым представлениям. Например, функция $f(x, y, z)$, согласно (3.192), будет принадлежать представлению A_g группы C_i , если

$$O_E f + O_I f = \frac{g}{n_\mu} f = \frac{2}{1} f, \quad (4.4)$$

$$f(x, y, z) + f(-x, -y, -z) = 2f(x, y, z),$$

$$f(x, y, z) = f(-x, -y, -z);$$

в то же время $g(x, y, z)$ принадлежит представлению A_u , если

$$\begin{aligned} O_E g - O_I g &= 2g, \\ g(x, y, z) &= -g(-x, -y, -z). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Таким образом, для группы $\mathcal{C}_1$ теорема о разложении утверждает, что произвольную функцию можно представить в виде суммы функций, которые либо четны, либо нечетны относительно инверсии.

Аналогичные утверждения применимы и к группам $\mathcal{C}_3$ и $\mathcal{C}_2$. Для $\mathcal{C}_2$ наш результат можно сформулировать также и следующим образом. Азимут φ пробегает значения от 0 до 2π . Любую функцию $f(\varphi)$ можно продолжить периодически вне указанной области. В разложении Фурье

$$f(\varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\varphi} \quad (4.6)$$

сумму можно разбить на члены с четным и нечетным n соответственно, т. е.

$$f(\varphi) = \sum a_{2m} e^{2im\varphi} + \sum a_{2m+1} e^{i(2m+1)\varphi}. \quad (4.7)$$

Первый член в (4.7) четен относительно операции $\mathcal{C}_2$, второй член нечетен.

Рассмотрим далее группу $\mathcal{C}_3$. Имеется три одномерных представления с базисными функциями $e^{il\varphi}$ ($l=1, 2, 3$) соответственно или же с функциями l , $e^{i\varphi}$, $e^{-i\varphi}$. В этом случае

$$C_3 e^{i\varphi} = e^{i(\varphi-2\pi/3)} = e^{-2\pi i/3} e^{i\varphi}.$$

Таблица 6

$\mathcal{C}_3$:	E	C_3	C_3^2	
$A; z$	1	1	1	
$E; x \pm iy$	$\begin{cases} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{cases}$			$\varepsilon = e^{-2\pi i/3}$

Характеры представлены в табл. 6. Все соотношения ортогональности сводятся к равенству

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0.$$

Оно является частным случаем теоремы о том, что сумма корней n -й степени из единицы равна нулю.

Для обозначения двумерных представлений мы всюду будем пользоваться символом E . Фигурная скобка, стоящая перед двумя последними строками табл. 6, и то, что мы рассматриваем их так, как если бы они были одним двумерным представлением, требует пояснения. Эти два одномерные представления являются комплексно сопряженными. В квантовой механике (при отсутствии магнитных полей) гамильтониан инвариантен относительно обращения времени, и функция, комплексно сопряженная по отношению к некоторой собственной функции, является собственной функцией при той же энергии. Таким образом, несмотря на то что группа C_3 имеет только одномерные представления, симметрия относительно обращения времени означает, что мы имеем дополнительный оператор, оставляющий гамильтониан инвариантным. Этот оператор меняет местами базисные функции указанных двух представлений, вследствие чего два рассматриваемых комплексно сопряженных представления физически соответствуют двукратно вырожденному уровню.

Аналогично можно рассмотреть и циклические группы C_4 , S_4 , C_6 и S_6 .

Рассмотрим далее абелеву группу C_{2h} . Она содержит 4 элемента и поэтому имеет 4 неприводимых представления. Квадрат любого элемента равен единичному элементу E , вследствие чего все характеры равны ± 1 . Произведение любых двух отличных от единичного элементов порождает третий элемент, поэтому либо все характеры равны $+1$, либо два характера равны 1 и два равны -1 . Характеры представлены в табл. 7. Изоморфные группы C_{2v} и $D_2 \equiv V$ имеют одинаковые таблицы характеров.

Таблица 7

C_{2h} :	E	C_2	σ_h	I
A_g	1	1	1	1
$A_u; z$	1	1	-1	-1
B_g	1	-1	-1	1
$B_u; x, y$	1	-1	1	-1

Задачи. 1. Приведите примеры функций, принадлежащих представлениям A_g и B_g группы C_{2h} . Проведите классификацию сферических функций $P_l^m(\theta) e^{im\varphi}$ по представлениям группы C_{2h} .

2. Для групп C_3 и S_4 найдите неприводимые представления, которым принадлежат выражения, квадратичные относительно x , y и z .

3. Классифицируйте компоненты аксиального вектора по представлениям группы C_{2h} .

§ 2. Неабелевы группы

Перейдем теперь к неабелевым группам. Рассмотрим сначала группу C_{3v} (и изоморфную ей группу D_3). Группа C_{3v} содержит 6 элементов, принадлежащих 3 классам. Поэтому существуют 3 неприводимых представления размерности n_1, n_2, n_3 , причем

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 6.$$

Единственное решение этого уравнения имеет вид $n_1 = n_2 = 1, n_3 = 2$. Таким образом, мы имеем два одномерных представления и одно двумерное представление. Простейший метод нахождения этих представлений состоит в том, чтобы в качестве исходных взять уже найденные ранее представления группы C_3 , являющейся подгруппой группы C_{3v} . Так как $\sigma_v^2 = E$, то собственные значения σ_v равны ± 1 . Следовательно, взяв базисную функцию ψ представления A группы C_3 , мы можем получить либо

$$\sigma_v \psi = +\psi,$$

либо

$$\sigma_v \psi = -\psi.$$

Так мы получаем два одномерных представления группы C_{3v} , характеры которых приведены в табл. 8.

Таблица 8

C_{3v} :	E	$C_3, C_3^2(2)$	$\sigma_v(3)$
$A_1; z$	1	1	1
A_2	1	1	-1
$E; x, y$	2	-1	0

Равенство (3.178) выполнено:

$$\begin{aligned} \sum g_i |\chi_i|^2 &= 1 \cdot (1)^2 + 2(1)^2 + 3(\pm 1)^2 = 6 = g, \\ \sum g_i \chi_i^{(\mu)} \chi_i^{(\nu)*} &= 1(1 \cdot 1) + 2(1 \cdot 1) + 3(1)(-1) = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Характеры двумерного представления можно найти, пользуясь соотношением (3.178); для двумерного представления $\chi(E) = 2$. Применение соотношения (3.178) к первым двум классам дает

$$(1)(1) + (1)(1) + 2\chi(C_3) = 0, \quad \chi(C_3) = -1, \quad (4.9)$$

точно так же применение этого соотношения к первому и третьему классам дает

$$(1)(1) + (1)(-1) + 2\chi(\sigma_v) = 0, \quad \chi(\sigma_v) = 0. \quad (4.10)$$

Уравнение (3.178) удовлетворяется и при $i = j$:

$$\begin{aligned}(1)^2 + (1)^2 + (2)^2 &= 6 = \frac{g}{g_1}, & (1)^2 + (1)^2 + (-1)^2 &= 3 = \frac{g}{g_2}, \\ (1)^2 + (-1)^2 + (0)^2 &= 2 = \frac{g}{g_3}.\end{aligned}\quad (4.11)$$

Таким образом, в табл. 8 представлены характеры группы C_{3v} . Числа, стоящие в скобках в верхней строке, задают величины g_i — число элементов в классе K_i .

Другой метод, также позволяющий получить матрицы двумерного представления E , исходит из базисных функций $e^{\pm i\varphi}$ комплексно сопряженного представления группы C_3 . Выберем в качестве плоскости отражения для одной из операций σ_v плоскость ZX (угол φ отсчитывается от оси x). Тогда

$$\sigma_v e^{\pm i\varphi} = e^{\mp i\varphi},$$

и матрицы C_3 и C_3^2 диагональны. Матрицы остальных отражений можно получить из произведений $\sigma_v C_3$ и $\sigma_v C_3^2$. Следовательно, матрицы двумерного представления E будут иметь вид:

$$\begin{aligned}E: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; & C_3: \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{bmatrix}; & C_3^2: \begin{bmatrix} \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}; \\ \sigma_v: \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; & \sigma_{v'}: \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix}; & \sigma_{v''}: \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Для матриц трех рассматриваемых представлений можно проверить соотношение (3.143). Возьмем представление A_1 и элемент ij представления E . Тогда при всех i и j

$$\sum_R D_{ij}^{(\mu)}(R) D_{lm}^{(\nu)*}(R) = \sum_R D_{ij}^{(\mu)}(R) = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0. \quad (4.12)$$

Затем мы возьмем A_2 и E и получим тот же результат. Взяв представление E и положив $i = j = 1$ и $l = m = 2$, получим

$$\sum_R D_{11}(R) D_{22}^*(R) = 1 \cdot 1 + \varepsilon \cdot \varepsilon^{2*} + \varepsilon^2 \cdot \varepsilon^* = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0. \quad (4.13)$$

Чтобы найти функции, принадлежащие представлению A_2 , можно воспользоваться следующим методом, который хотя и приводит к длинному окольному пути, но может быть поучительным. Если разложить $f_2(\varphi)$ в ряд Фурье, то симметрия относительно C_3 и C_3^2 требует, чтобы в разложении были только те члены, аргумент которых кратен 3, т. е.

$$\begin{aligned}f(\varphi) &= a_0 + a_3 e^{3i\varphi} + a_6 e^{6i\varphi} + \dots \\ &\dots + a_{-3} e^{-3i\varphi} + a_{-6} e^{-6i\varphi} + \dots\end{aligned}\quad (4.14)$$

Ангисимметрия относительно σ_v требует, чтобы $a_0 = 0$, $a_3 = -a_3$ и т. д. Следовательно, представлению A_2 принадлежат такие функции, как $\sin 3\varphi$ [в общем случае $\sum a_n \sin(3n\varphi)$].

В гл. 2 мы обращали внимание на то, что σ_v меняет направление вращения вокруг оси z . Поэтому z -компонента *аксиального* вектора будет принадлежать представлению A_2 . Типичной функцией такого сорта, если выразить ее через координаты двух точек x, y, z и x', y', z' , была бы функция $xy' - yx'$ или $\sin(\varphi - \varphi')$. Заметим, что функция, зависящая от разности двух азимутов, инвариантна относительно вращений вокруг оси z .

Метод, примененный нами для группы C_{3v} , можно также использовать и при рассмотрении групп C_{4v} , C_{6v} .

Задача. Найдите матрицы неприводимых представлений группы C_{3v} . Найдите функции, принадлежащие каждому из этих представлений.

Существует еще один метод, который можно применять для нахождения характеров. Его мы подробно продемонстрируем для группы C_{3v} . Установим прежде всего так же, как мы делали это раньше, что размерности трех неприводимых представлений равны $n_1 = n_2 = 1$, $n_3 = 2$. Затем для нахождения соотношений между характерами данного представления воспользуемся соотношением (3.173). Коэффициенты c_{ijl} , входящие в (3.173), определяют из (3.171). Обозначим классы группы C_{3v} через

$$K_1: E; \quad K_2: C_3, C_3^2; \quad K_3: \sigma_v(3).$$

Применим к $\mathcal{X}_2^2$ соотношение (3.171):

$$\mathcal{X}_2 = C_3 + C_3^2; \quad \mathcal{X}_2^2 = (C_3 + C_3^2)^2 = 2E + C_3 + C_3^2 = 2\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2, \quad (4.15)$$

откуда $c_{221} = 2$, $c_{222} = 1$. Аналогично

$$\mathcal{X}_3^2 = (\sigma_v + \sigma_{v'} + \sigma_{v''})^2 = 3E + 3(C_3 + C_3^2) = 3\mathcal{X}_1 + 3\mathcal{X}_2, \quad (4.16)$$

так что $c_{331} = 3$, $c_{332} = 3$. Наконец,

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_2 \mathcal{X}_3 &= \mathcal{X}_3 \mathcal{X}_2 = (C_3 + C_3^2)(\sigma_v + \sigma_{v'} + \sigma_{v''}) = \\ &= 2(\sigma_v + \sigma_{v'} + \sigma_{v''}) = 2\mathcal{X}_3, \end{aligned} \quad (4.17)$$

так что $c_{233} = c_{323} = 2$.

Все остальные c_{ijl} равны нулю. Подставим теперь эти коэффициенты в (3.173).

$i = j = 2$:

$$\begin{aligned} g_2^2 \chi_2^2 &= \chi_1 \sum_l c_{22l} g_l \chi_l, \\ 4\chi_2^2 &= n(2n + 2\chi_2); \quad \chi_2 = n \quad \text{либо} \quad \chi_2 = -\frac{n}{2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

$l = j = 3$:

$$g^2 \chi_3^2 = \chi_1 \sum_l c_{33l} g_l \chi_l, \quad g \chi_3^2 = n(3n + 6\chi_2). \quad (4.19)$$

$l = 2, j = 3$:

$$g_2 g_3 \chi_2 \chi_3 = \chi_1 \sum_l c_{23l} g_l \chi_l, \quad (4.20)$$

$$6\chi_2 \chi_3 = 6n\chi_3, \quad \chi_3 = 0, \text{ либо } \chi_2 = n.$$

В случае одномерного представления характеры не могут быть равными нулю (матрицы должны быть неособенными). Поэтому при $n = 1$

$$\chi_2 = 1, \quad \chi_3^2 = \left(\frac{1}{3}\right)(1 + 2) = 1, \quad \chi_3 = \pm 1$$

и мы получаем два решения A_1 и A_2 . Если при $n = 2$ мы возьмем решение $\chi_2 = 2$, то получим, что $\chi_3 = 2$. Но для неприводимого представления

$$\sum |\chi(R)|^2 = g = 6,$$

тогда как это решение давало бы

$$\sum |\chi(R)|^2 = 24.$$

Другое решение $\chi_3 = 0, \chi_2 = -n/2 = -1$ дает

$$\sum |\chi(R)|^2 = 1(2)^2 + 2(-1)^2 + 3(0)^2 = 6 = g.$$

Этот метод нахождения характеров требует значительных затрат труда. Им широко пользовался Бете¹⁾.

Тетраэдрическая группа T содержит 12 элементов в 4 классах, так что существует 4 неприводимых представления, для которых

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 = 12.$$

Единственное решение имеет вид $n_1 = n_2 = n_3 = 1, n_4 = 3$, т. е. три представления одномерны и одно — трехмерно. (Трехмерные представления мы будем обозначать символом F . Иногда для этой цели мы будем использовать и символ T .) Напомним, что группа T получается из группы $V \equiv D_2$ за счет присоединения к последней вращений вокруг пространственных диагоналей, которые служат поворотными осями 3-го порядка (см. фиг. 34). Поэтому представления группы T можно получить, исходя из представлений группы V . При действии какого-нибудь вращения вокруг оси 3-го порядка полностью симметричная функция, образующая базис представления A_1 группы V , может умножаться на 1, ϵ или ϵ^2 . (Напомним, что мы хотим получить одномерные представления, так что базисная функция должна быть собственной функцией для C_3 .) Таким образом, мы получаем три различных одномерных представления, как показано в табл. 9.

¹⁾ Bethe H., Ann. Phys., 3, 133 (1929).

Таблица 9

$T:$		E	$C_2(3)$	$C_3(4)$	$C_3^2(4)$
A		1	1	1	1
E	{	1	1	ϵ	ϵ^2
		1	1	ϵ^2	ϵ
$F; x, y, z$		3	-1	0	0

С другой стороны, если взглянуть на те базисные функции, которые мы нашли для других трех представлений группы V , а именно x , y и z , то можно заметить, что при вращениях вокруг пространственных диагоналей они преобразуются друг в друга. Таким образом, эти три одномерные представления группы V объединяются в одно трехмерное представление группы T . Характеры представления F можно найти из соотношений ортогональности. Так как $\chi(E) = 3$, то ортогональность векторов-столбцов в табл. 9 требует, чтобы

$$\chi(C_2) = -1, \quad \chi(C_3) = 0 = \chi(C_3^2).$$

Матрицы представления F записаны с помощью базисных функций x , y , z . Эти матрицы являются всего лишь обычными трехмерными матрицами для различных вращений.

Задачи. 1. Постройте матрицы представления F группы T .

2. Найдите функции, принадлежащие представлению E группы T .

Рассмотрим, наконец, группу T_d (и изоморфную ей группу O). Эта группа содержит 24 элемента в 5 классах, поэтому существует 5 неприводимых представлений и

$$\sum_{i=1}^5 n_i^2 = 24.$$

Единственным решением служит набор чисел $n_1 = n_2 = 1$, $n_3 = 2$, $n_4 = n_5 = 3$. Группа T_d получается из группы T путем присоединения отражений в плоскостях, проходящих через противоположные ребра куба, как показано на фиг. 64. Каждая из этих плоскостей содержит две оси 3-го порядка. Базисная функция представления A группы T может быть либо симметричной, либо антисимметричной относительно σ_d , и поэтому для T_d мы получаем два одномерных представления A_1 и A_2 . Пара комплексно сопряженных представлений E группы T обладает базисными функциями, преобразующимися друг в друга при отражении в плоскости, проходящей через ось 3-го порядка, и, следовательно, мы получаем двумерное представление E группы T_d .

Рассмотрим, наконец, трехмерное представление F группы T . Если мы возьмем базисные функции x , y , z и применим к ним отражение в плоскости $x = y$, то

$$O_\sigma(z) = z, \quad O_\sigma(x) = y, \quad O_\sigma(y) = x,$$

что даст нам матрицу σ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

откуда $\chi(\sigma) = 1$. [Все отражения принадлежат одному и тому же классу, так что $\chi(\sigma_d) = 1$ для всех σ_d .] Если же теперь в качестве базисных функций представления F группы T мы возьмем компоненты аксиального вектора, то при чистых вращениях группы T они будут вести себя как компоненты полярного вектора (для чистых вращений их трансформационные свойства совпадают). Но отражение в плоскости $x = y$ меняет знак z -компоненты аксиального вектора, в то время как две другие компоненты преобразуются друг в друга, так что

$$\chi(\sigma_d) = -1.$$

Мы получаем, таким образом, два различных трехмерных представления F_1 и F_2 группы T_d . Характеры элементов S_4 можно определить из ортогональности векторов-строк в табл. 10.

Таблица 10

T_d :	E	$C_3(8)$	$C_2(3)$	$\sigma_d(8)$	$S_4(6)$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1
E	2	-1	2	0	0
$F_2; x, y, z$	3	0	-1	1	-1
F_1	3	0	-1	-1	1

Задачи. 1. Постройте матрицы для представлений E , F_1 и F_2 группы T_d .

2. Пользуясь соотношениями (3.154) и (3.156), найдите характеры представлений группы T .

В сущности мы получили простые характеры для всех кристаллографических точечных групп. Для справок все эти данные в компактном виде приведены в табл. 12—22.

С помощью наших методов можно с легкостью рассматривать и такие группы (как, например, группы C_{5v} и S_8), которые иногда встречаются в молекулярных проблемах, но не входят в число кристаллографических групп.

Мы не приводим таблицы для тех кристаллографических групп, которые можно представить в виде прямых произведений, т. е. для групп

$$\begin{aligned} C_{3h} &= C_3 \times C_s, & C_{4h} &= C_4 \times C_i, & C_{6h} &= C_6 \times C_i, \\ D_{2h} &= D_2 \times C_i, & D_{4h} &= D_4 \times C_i, & S_6 &= C_3 \times C_i, \\ D_{3d} &= D_3 \times C_i, & D_{6h} &= D_6 \times C_i, & T_h &= T \times C_i, \\ O_h &= O \times C_i, \end{aligned}$$

Причина, по которой мы не останавливаемся на рассмотрении этих групп, состоит в том, что, как это уже указывалось в предыдущей главе, характеры неприводимых представлений этих прямых произведений можно получить из представлений групп, являющихся сомножителями. Таким образом, все группы, которые получаются при образовании прямого произведения с группой C_i , имеют вдвое большее число классов. Каждое из представлений исходной группы приводит

Таблица 11

C_{3h} :	E	C_3	C_3^2	σ_h	$\sigma_h C_3$	$\sigma_h C_3^2$
A'	1	1	1	1	1	1
A''	1	1	1	-1	-1	-1
E'	1	ϵ	ϵ^2	1	ϵ	ϵ^2
	1	ϵ^2	ϵ	1	ϵ^2	ϵ
E''	1	ϵ	ϵ^2	-1	$-\epsilon$	$-\epsilon^2$
	1	ϵ^2	ϵ	-1	$-\epsilon^2$	$-\epsilon$

к двум представлениям прямого произведения, одно из которых симметрично относительно инверсии I , а другое антисимметрично. Те же замечания остаются в силе и для прямых произведений с группой C_s . Для примера мы приводим таблицу характеров для группы C_{3h} (табл. 11).

Задача. Постройте таблицу характеров для группы S_8 .

§ 3. Таблицы характеров для кристаллографических точечных групп

Таблица 12

$C_1:$	E
A	1

$C_1:$

Таблица 13

$\mathcal{C}_1:$			E	I
	$\mathcal{C}_2:$		E	C_2
		$\mathcal{C}_3:$	E	σ
A_g	$A'; z$	$A'; x, y$	1	1
$A_u; x, y, z$	$B; x, y$	$A''; z$	1	-1

Таблица 14

$C_{2h}:$	$C_{2v}:$	$V \equiv D_2$	E	C_2	σ_h	I
$C_{2h}:$	$C_{2v}:$	$V \equiv D_2$	E	C_2	σ_v	$\sigma_{v'}$
$C_{2h}:$	$C_{2v}:$	$V \equiv D_2$	E	C_2	C_y	C_x
A_g	$A_1; z$	A_1	1	1	1	1
B_g	$B_2; y$	$B_3; x$	1	-1	-1	1
$A_u; z$	A_2	$B_1; z$	1	1	-1	-1
$B_u; x, y$	$B_1; x$	$B_2; y$	1	-1	1	-1

Таблица 15

$C_4:$	$S_4:$	E	C_4	C_4^2	C_4^3
$C_4:$	$S_4:$	E	S_4	S_4^2	S_4^3
$A; z$	A	1	1	1	1
B	$B; z$	1	-1	1	-1
$E; x \pm iy$	$E; x \pm iy$	1	i	-1	$-i$
		1	$-i$	-1	i

Таблица 16

$C_3:$	E	C_3	C_3^2
$A; z$	1	1	1
$E; x \pm iy$	1	ϵ	ϵ^2
	1	ϵ^2	ϵ

$\epsilon = e^{-2\pi i/3}$

Таблица 17

$C_{3v}:$		E	$C_3(2)$	$\sigma_v(3)$
	$D_3:$	E	$C_3(2)$	$C_2(3)$
$A_1; z$	A_1	1	1	1
A_2	$A_2; z$	1	1	-1
$E; x, y$	$E; x, y$	2	-1	0

Таблица 18

$\mathcal{C}_6:$	E	C_6	C_6^2	C_6^3	C_6^4	C_6^5
$A; z$	1	1	1	1	1	1
B	1	-1	1	-1	1	-1
$E_1 \left\{ \right.$	1	ω^2	$-\omega$	1	ω^2	$-\omega$
	1	$-\omega$	ω^2	1	$-\omega$	ω^2
$E_2; x \pm iy \left\{ \right.$	1	ω	ω^2	-1	$-\omega$	$-\omega^2$
	1	$-\omega^2$	$-\omega$	-1	ω^2	ω

$\omega = e^{2\pi i/6}$

Таблица 19

$\mathcal{C}_{4v}:$			E	C_4^2	$C_4(2)$	$\sigma_v(2)$	$\sigma_{v'}(2)$
$D_4:$			E	C_4^2	$C_4(2)$	$C_2(2)$	$C_{2'}(2)$
$D_{2d}:$			E	C_2	$S_4(2)$	$C_2(2)$	$\sigma_d(2)$
$A_1; z$	A_1	A_1	1	1	1	1	1
A_2	$A_2; z$	A_2	1	1	1	-1	-1
B_1	B_1	B_1	1	1	-1	1	-1
B_2	B_2	$B_2; z$	1	1	-1	-1	1
$E; x, y$	$E; x, y$	$E; x, y$	2	-2	0	0	0

Таблица 20

$D_6:$			E	C_6^3	$C_6^2(2)$	$C_6(2)$	$C_2(3)$	$C_{2'}(3)$
$C_{6v}:$			E	C_6^3	$C_6^2(2)$	$C_6(2)$	$\sigma_v(3)$	$\sigma_{v'}(3)$
$D_{3h}:$			E	σ_h	$S_6^2(2)$	$S_6(2)$	$C_2(3)$	$\sigma_v(3)$
A_1	$A_1; z$	A_1'	1	1	1	1	1	1
$A_2; z$	A_2	A_2'	1	1	1	1	-1	-1
B_1	B_2	A_1''	1	-1	1	-1	1	-1
B_2	B_1	$A_2''; z$	1	-1	1	-1	-1	1
E_2	E_1	$E'; x, y$	2	2	-1	-1	0	0
$E_1; x, y$	$E_2; x, y$	E''	2	-2	-1	1	0	0

Таблица 21

$T:$	E	$C_2(3)$	$C_3(4)$	$C_3^2(4)$
A	1	1	1	1
E	{	1	1	ε
		1	1	ε^2
$F; x, y, z$		3	-1	0

Таблица 22

$O:$		E	$C_3(8)$	$C_4^2(3)$	$C_2(6)$	$C_4(6)$
$T_d:$		E	$C_3(8)$	$S_4^2(3)$	$\sigma_d(6)$	$S_4(6)$
A_1	A_1	1	1	1	1	1
A_2	A_2	1	1	1	-1	-1
E	E	2	-1	2	0	0
F_2	$F_2; x, y, z$	3	0	-1	1	-1
$F_1; x, y, z$	F_1	3	0	-1	-1	1

ГЛАВА 5

РАЗЛИЧНЫЕ ОПЕРАЦИИ С ПРЕДСТАВЛЕНИЯМИ ГРУПП

§ 1. Произведение представлений (кронекеровское произведение)

В гл. 3 мы рассмотрели сложение представлений группы G , позволяющее получать новые представления. Другим методом получения новых представлений, имеющим основное значение в физических приложениях, является построение *произведения представлений* (кронекеровского произведения). Этот метод схож с методом, применявшимся в § 19 гл. 3 для получения неприводимых представлений прямого произведения двух групп.

Предположим, что мы нашли все неприводимые представления группы G . Пусть $D^{(\mu)}$ — неприводимое представление в n_μ -мерном пространстве векторов x (имеющих относительно некоторого базиса компоненты $x_1, \dots, x_{n_\mu}$) и пусть $D^{(\nu)}$ — другое неприводимое представление в n_ν -мерном пространстве векторов y (с компонентами $y_1, \dots, y_{n_\nu}$):

$$x'_l = \sum_{j=1}^{n_\mu} D_{lj}^{(\mu)}(R) x_j \quad (l = 1, \dots, n_\mu), \quad (5.1)$$

$$y'_k = \sum_{l=1}^{n_\nu} D_{kl}^{(\nu)}(R) y_l \quad (k = 1, \dots, n_\nu). \quad (5.1a)$$

Перемножив эти два соотношения, получим

$$x'_l y'_k = \sum_{j=1}^{n_\mu} \sum_{l=1}^{n_\nu} D_{lj}^{(\mu)}(R) D_{kl}^{(\nu)}(R) x_j y_l \quad \left(\begin{array}{l} l = 1, \dots, n_\mu \\ k = 1, \dots, n_\nu \end{array} \right). \quad (5.2)$$

Величины $x_l y_k$ можно рассматривать как компоненты вектора в $(n_\mu \times n_\nu)$ -мерном пространстве произведений. Равенство (5.2) устанавливает соответствие между каждым элементом R группы G и некоторым преобразованием в этом пространстве:

$$x'_l y'_k = \sum_{j,l} D_{ik, jl}^{(\mu \times \nu)}(R) x_j y_l \quad \left(\begin{array}{l} l, j = 1, \dots, n_\mu \\ k, i = 1, \dots, n_\nu \end{array} \right), \quad (5.3)$$

где

$$D_{ik, jl}^{(\mu \times \nu)}(R) = (D^{(\mu)}(R) \times D^{(\nu)}(R))_{ik, jl} = D_{lj}^{(\mu)}(R) \cdot D_{ki}^{(\nu)}(R). \quad (5.4)$$

Матрицы $D_{ik, jl}^{(\mu \times \nu)}(R)$ образуют некоторое представление группы G :

$$D_{ik, jl}^{(\mu \times \nu)}(RS) = D_{ij}^{(\mu)}(RS) D_{kl}^{(\nu)}(RS) = \sum_a D_{ia}^{(\mu)}(R) D_{aj}^{(\mu)}(S) \sum_\beta D_{k\beta}^{(\nu)}(R) D_{\beta l}^{(\nu)}(S) =$$

$$= \sum_{a\beta} [D_{ia}^{(\mu)}(R) D_{k\beta}^{(\nu)}(R)] [D_{aj}^{(\mu)}(S) D_{\beta l}^{(\nu)}(S)] = \sum_{a\beta} D_{ik, a\beta}^{(\mu \times \nu)}(R) D_{a\beta, jl}^{(\mu \times \nu)}(S), \quad (5.5)$$

т. е.

$$D^{(\mu \times \nu)}(RS) = D^{(\mu \times \nu)}(R) \cdot D^{(\mu \times \nu)}(S). \quad (5.6)$$

Представление (5.4) называется *кронекеровским произведением* представлений $D^{(\mu)}$ и $D^{(\nu)}$.

Равенство (5.6) дает нам также общее правило для выписывания кронекеровских произведений матриц. Если $A_1, A_2, \dots$ — матрицы n -го порядка и $B_1, B_2, \dots$ — матрицы m -го порядка, то кронекеровскими произведениями $(A_1 \times B_1), (A_2 \times B_2), \dots$ будут матрицы порядка nm , у которых

$$(A_\nu \times B_\nu)_{ik, jl} = (A_\nu)_{ij} (B_\nu)_{kl}. \quad (5.4a)$$

Так же, как и в равенстве (5.6), имеем

$$(A_1 \times B_1) \cdot (A_2 \times B_2) = (A_1 A_2) \times (B_1 B_2), \quad (5.6a)$$

или вообще

$$(A_1 \times B_1) \cdot (A_2 \times B_2) \dots (A_s \times B_s) =$$

$$= (A_1 A_2 \dots A_s) \times (B_1 B_2 \dots B_s). \quad (5.6b)$$

Приведенное выше определение дано в терминах абстрактных векторных пространств. Мы в большей степени приблизимся к физической постановке задачи, если сформулируем наше определение еще раз, пользуясь волновыми функциями физической системы. В § 7 гл. 3 мы сопоставляли каждому преобразованию R оператор O_R (O_R есть преобразование аргументов волновой функции):

$$O_R \psi(x) = \psi(R^{-1}x). \quad (3.68)$$

Совокупность преобразований R , оставляющих инвариантным гамильтониан H , образует группу G такую, что

$$O_R H O_R^{-1} = H \quad (3.73)$$

для всех элементов R из G . Если ψ — собственная функция гамильтониана H , принадлежащая данному собственному значению λ , то $O_R \psi$ есть также собственная функция, отвечающая тому же собственному значению λ . Если нет „случайного“ вырождения, то совокупность n_μ собственных функций $\psi_i^{(\mu)}$ ($i = 1, \dots, n_\mu$), принадлежащих данному

собственному значению λ_μ , образует базис неприводимого представления группы симметрии G гамильтониана:

$$O_R \psi_j^{(\mu)} = \sum_i \psi_i^{(\mu)} D_{ij}^{(\mu)}(R). \quad (5.7)$$

Точно так же совокупность n_ν вырожденных собственных функций $\varphi_l^{(\nu)}$, принадлежащих собственному значению λ_ν , образует базис неприводимого представления $D^{(\nu)}$:

$$O_R \varphi_l^{(\nu)} = \sum_k \varphi_k^{(\nu)} D_{kl}^{(\nu)}(R). \quad (5.7a)$$

Из (5.7) и (5.7a) следует

$$O_R (\psi_j^{(\mu)} \varphi_l^{(\nu)}) = \sum_{ik} \psi_i^{(\mu)} \varphi_k^{(\nu)} D_{ij}^{(\mu)}(R) D_{kl}^{(\nu)}(R) = \sum_{ik} \psi_i^{(\mu)} \varphi_k^{(\nu)} D_{ik, jl}^{(\mu \times \nu)}(R), \quad (5.8)$$

так что произведения $\psi_i^{(\mu)} \varphi_j^{(\nu)}$ образуют базис произведения представлений $D^{(\mu)} \times D^{(\nu)}$.

Обозначения с двойными индексами весьма сложны. Чтобы избежать к ним, мы приведем в явном виде результаты для простого случая, когда $n_\mu = n_\nu = 2$. В этом случае

$$\begin{aligned} O_R \psi_1^{(\mu)} &= \psi_1^{(\mu)} D_{11}^{(\mu)}(R) + \psi_2^{(\mu)} D_{21}^{(\mu)}(R), \\ O_R \psi_2^{(\mu)} &= \psi_1^{(\mu)} D_{12}^{(\mu)}(R) + \psi_2^{(\mu)} D_{22}^{(\mu)}(R), \\ O_R \varphi_1^{(\nu)} &= \varphi_1^{(\nu)} D_{11}^{(\nu)}(R) + \varphi_2^{(\nu)} D_{21}^{(\nu)}(R), \\ O_R \varphi_2^{(\nu)} &= \varphi_1^{(\nu)} D_{12}^{(\nu)}(R) + \varphi_2^{(\nu)} D_{22}^{(\nu)}(R). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Из (5.9) получаем

$$\begin{aligned} O_R (\psi_1^{(\mu)} \varphi_1^{(\nu)}) &= [\psi_1^{(\mu)} D_{11}^{(\mu)}(R) + \psi_2^{(\mu)} D_{21}^{(\mu)}(R)] \times \\ &\times [\varphi_1^{(\nu)} D_{11}^{(\nu)}(R) + \varphi_2^{(\nu)} D_{21}^{(\nu)}(R)] = \psi_1^{(\mu)} \varphi_1^{(\nu)} D_{11}^{(\mu)}(R) D_{11}^{(\nu)}(R) + \\ &+ \psi_1^{(\mu)} \varphi_2^{(\nu)} D_{11}^{(\mu)}(R) D_{21}^{(\nu)}(R) + \psi_2^{(\mu)} \varphi_1^{(\nu)} D_{21}^{(\mu)}(R) D_{11}^{(\nu)}(R) + \\ &+ \psi_2^{(\mu)} \varphi_2^{(\nu)} D_{21}^{(\mu)}(R) D_{21}^{(\nu)}(R). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Коэффициент при $\psi_1^{(\mu)} \varphi_2^{(\nu)}$ в разложении $O_R (\psi_1^{(\mu)} \varphi_1^{(\nu)})$ равен $D_{11}^{(\mu)}(R) D_{21}^{(\nu)}(R)$, откуда

$$(D^{(\mu)} \times D^{(\nu)}(R))_{12, 11} = D_{11}^{(\mu)}(R) D_{21}^{(\nu)}(R)$$

и

$$(D^{(\mu)} \times D^{(\nu)}(R))_{22, 11} = D_{21}^{(\mu)}(R) D_{21}^{(\nu)}(R).$$

Аналогично находим

$$O_R(\psi_1^{(\mu)}\varphi_2^{(\nu)}) = \psi_1^{(\mu)}\varphi_1^{(\nu)}D_{11}^{(\mu)}(R)D_{12}^{(\nu)}(R) + \psi_1^{(\mu)}\varphi_2^{(\nu)}D_{11}^{(\mu)}(R)D_{22}^{(\nu)}(R) + \\ + \psi_2^{(\mu)}\varphi_1^{(\nu)}D_{21}^{(\mu)}(R)D_{12}^{(\nu)}(R) + \psi_2^{(\mu)}\varphi_2^{(\nu)}D_{21}^{(\mu)}(R)D_{22}^{(\nu)}(R), \quad (5.11)$$

$$O_R(\psi_2^{(\mu)}\varphi_1^{(\nu)}) = \psi_1^{(\mu)}\varphi_1^{(\nu)}D_{12}^{(\mu)}(R)D_{11}^{(\nu)}(R) + \psi_1^{(\mu)}\varphi_2^{(\nu)}D_{12}^{(\mu)}(R)D_{21}^{(\nu)}(R) + \\ + \psi_2^{(\mu)}\varphi_1^{(\nu)}D_{22}^{(\mu)}(R)D_{11}^{(\nu)}(R) + \psi_2^{(\mu)}\varphi_2^{(\nu)}D_{22}^{(\mu)}(R)D_{21}^{(\nu)}(R), \quad (5.12)$$

$$O_R(\psi_2^{(\mu)}\varphi_2^{(\nu)}) = \psi_1^{(\mu)}\varphi_1^{(\nu)}D_{12}^{(\mu)}(R)D_{12}^{(\nu)}(R) + \\ + \psi_1^{(\mu)}\varphi_2^{(\nu)}D_{12}^{(\mu)}(R)D_{22}^{(\nu)}(R) + \psi_2^{(\mu)}\varphi_1^{(\nu)}D_{22}^{(\mu)}(R)D_{12}^{(\nu)}(R) + \\ + \psi_2^{(\mu)}\varphi_2^{(\nu)}D_{22}^{(\mu)}(R)D_{22}^{(\nu)}(R) \quad (5.13)$$

Из равенств (5.10) — (5.13) следует, что матрица, соответствующая элементу R группы G , в произведении представлений имеет вид

$$D^{(\mu)} \times D^{(\nu)}(R) = \\ = \begin{bmatrix} D_{11}^{(\mu)}(R)D_{11}^{(\nu)}(R) & D_{11}^{(\mu)}(R)D_{12}^{(\nu)}(R) & D_{12}^{(\mu)}(R)D_{11}^{(\nu)}(R) & D_{12}^{(\mu)}(R)D_{12}^{(\nu)}(R) \\ D_{11}^{(\mu)}(R)D_{21}^{(\nu)}(R) & D_{11}^{(\mu)}(R)D_{22}^{(\nu)}(R) & D_{12}^{(\mu)}(R)D_{21}^{(\nu)}(R) & D_{12}^{(\mu)}(R)D_{22}^{(\nu)}(R) \\ D_{21}^{(\mu)}(R)D_{11}^{(\nu)}(R) & D_{21}^{(\mu)}(R)D_{12}^{(\nu)}(R) & D_{22}^{(\mu)}(R)D_{11}^{(\nu)}(R) & D_{22}^{(\mu)}(R)D_{12}^{(\nu)}(R) \\ D_{21}^{(\mu)}(R)D_{21}^{(\nu)}(R) & D_{21}^{(\mu)}(R)D_{22}^{(\nu)}(R) & D_{22}^{(\mu)}(R)D_{21}^{(\nu)}(R) & D_{22}^{(\mu)}(R)D_{22}^{(\nu)}(R) \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

где строки и столбцы занумерованы в лексикографическом порядке: 11, 12, 21, 22. Мы предполагали, что все произведения функций линейно независимы, ибо в противном случае мы должны были бы объединить соответствующие члены и получить представление меньшей размерности. Итак, мы предполагаем, что μ - и ν -представления имеют различную размерность или же (если $\mu = \nu$) что функции ψ и φ независимы друг от друга.

Обозначим характеры произведения представлений через

$$\chi^{(\mu)} \times \chi^{(\nu)}(R) = \chi^{(\mu \times \nu)}(R)$$

Как видно из частного случая (5.14) или из общего равенства (5.4),

$$\chi^{(\mu \times \nu)}(R) = \sum_{i,j} D_{ii}^{(\mu)}(R)D_{jj}^{(\nu)}(R) = \chi^{(\mu)}(R) \cdot \chi^{(\nu)}(R) \quad (5.15)$$

Таким образом, характер элемента в произведении представлений равен произведению характеров этого элемента в представлениях „сомножителях“

Задача Покажите, что кронекеровское произведение унитарных представлений есть унитарное представление.

§ 2. Симметризованные и антисимметризованные произведения

В предыдущем параграфе предполагалось, что $\mu \neq \nu$. Предположим теперь, что $\mu = \nu$ и $\psi_i^{(\mu)}$ и $\varphi_i^{(\nu)}$ — независимые совокупности функций. Рассмотрим сначала для простоты случай, когда $n_\mu = n_\nu = 2$. Перепишем равенства (5.10) — (5.13), опуская верхние значки $\mu = \nu$:

$$O_R(\psi_1\varphi_1) = \psi_1\varphi_1 [D_{11}(R)]^2 + \psi_1\varphi_2 D_{11}(R) D_{21}(R) + \\ + \psi_2\varphi_1 D_{21}(R) D_{11}(R) + \psi_2\varphi_2 [D_{21}(R)]^2, \quad (5.16)$$

$$O_R(\psi_1\varphi_2) = \psi_1\varphi_1 D_{11}(R) D_{12}(R) + \psi_1\varphi_2 D_{11}(R) D_{22}(R) + \\ + \psi_2\varphi_1 D_{21}(R) D_{12}(R) + \\ + \psi_2\varphi_2 D_{21}(R) D_{22}(R), \quad (5.17)$$

$$O_R(\psi_2\varphi_1) = \psi_1\varphi_1 D_{12}(R) D_{11}(R) + \psi_1\varphi_2 D_{12}(R) D_{21}(R) + \\ + \psi_2\varphi_1 D_{22}(R) D_{11}(R) + \\ + \psi_2\varphi_2 D_{22}(R) D_{21}(R), \quad (5.18)$$

$$O_R(\psi_2\varphi_2) = \psi_1\varphi_1 [D_{12}(R)]^2 + \psi_1\varphi_2 D_{12}(R) D_{22}(R) + \\ + \psi_2\varphi_1 D_{22}(R) D_{12}(R) + \\ + \psi_2\varphi_2 [D_{22}(R)]^2. \quad (5.19)$$

Если сложить и вычесть (5.17) и (5.18), то эти четыре равенства запишутся в виде

$$O_R(\psi_1\varphi_1) = \psi_1\varphi_1 [D_{11}(R)]^2 + (\psi_1\varphi_2 + \psi_2\varphi_1) D_{11}(R) D_{21}(R) + \\ + \psi_2\varphi_2 [D_{21}(R)]^2, \quad (5.20)$$

$$O_R(\psi_1\varphi_2 + \psi_2\varphi_1) = 2\psi_1\varphi_1 D_{11}(R) D_{12}(R) + \\ + (\psi_1\varphi_2 + \psi_2\varphi_1) [D_{11}(R) D_{22}(R) + D_{12}(R) D_{21}(R)] + \\ + 2\psi_2\varphi_2 D_{21}(R) D_{22}(R), \quad (5.21)$$

$$O_R(\psi_1\varphi_2 - \psi_2\varphi_1) = (\psi_1\varphi_2 - \psi_2\varphi_1) [D_{11}(R) D_{22}(R) - D_{12}(R) D_{21}(R)], \quad (5.22)$$

$$O_R(\psi_2\varphi_2) = \psi_1\varphi_1 [D_{12}(R)]^2 + (\psi_1\varphi_2 + \psi_2\varphi_1) D_{12}(R) D_{22}(R) + \\ + \psi_2\varphi_2 [D_{22}(R)]^2. \quad (5.23)$$

Заметим, что (5.22) содержит только антисимметричную комбинацию $\psi_1\varphi_2 - \psi_2\varphi_1$, в то время как соотношения (5.20), (5.21) и (5.23) связывают между собой три симметричные комбинации

$$\psi_1\varphi_1, \quad \psi_1\varphi_2 + \psi_2\varphi_1 \quad \text{и} \quad \psi_2\varphi_2.$$

Мы заключаем, что произведение представления (размерности > 1) на себя всегда разлагается в сумму симметричного и антисимметричного произведения представлений. Теперь докажем это в общем случае. В равенстве (5.8) положим $\mu = \nu$:

$$O_R(\psi_j^{(\mu)}\varphi_l^{(\mu)}) = \sum_{ik} \psi_i^{(\mu)}\varphi_k^{(\mu)} D_{ij}^{(\mu)}(R) D_{kl}^{(\mu)}(R). \quad (5.24)$$

Переставим между собой j и l :

$$O_R(\psi_l^{(\mu)}\varphi_j^{(\mu)}) = \sum_{ik} \psi_i^{(\mu)}\varphi_k^{(\mu)} D_{li}^{(\mu)}(R) D_{kj}^{(\mu)}(R). \quad (5.25)$$

Складывая и вычитая (5.24) и (5.25), получаем

$$\begin{aligned} O_R(\psi_j^{(\mu)}\varphi_l^{(\mu)} + \psi_l^{(\mu)}\varphi_j^{(\mu)}) &= \sum_{ik} \psi_i^{(\mu)}\varphi_k^{(\mu)} [D_{ij}^{(\mu)}(R) D_{kl}^{(\mu)}(R) + D_{li}^{(\mu)}(R) D_{kj}^{(\mu)}(R)] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ik} (\psi_l^{(\mu)}\varphi_k^{(\mu)} + \psi_k^{(\mu)}\varphi_l^{(\mu)}) [D_{ij}^{(\mu)}(R) D_{kl}^{(\mu)}(R) + D_{li}^{(\mu)}(R) D_{kj}^{(\mu)}(R)], \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} O_R(\psi_j^{(\mu)}\varphi_l^{(\mu)} - \psi_l^{(\mu)}\varphi_j^{(\mu)}) &= \\ &= \sum_{ik} \psi_i^{(\mu)}\varphi_k^{(\mu)} [D_{ij}^{(\mu)}(R) D_{kl}^{(\mu)}(R) - D_{li}^{(\mu)}(R) D_{kj}^{(\mu)}(R)] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ik} (\psi_l^{(\mu)}\varphi_k^{(\mu)} - \psi_k^{(\mu)}\varphi_l^{(\mu)}) [D_{ij}^{(\mu)}(R) D_{kl}^{(\mu)}(R) - D_{li}^{(\mu)}(R) D_{kj}^{(\mu)}(R)]. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Квадрат представления $D^{(\mu)}$, т. е. произведение $D^{(\mu)} \times D^{(\mu)}$, всегда (за исключением тривиального случая $n_\mu = 1$) разлагается в сумму симметричного произведения представлений $[D^{(\mu)} \times D^{(\mu)}]$, задаваемого равенством (5.26), и антисимметричного произведения представлений $\{D^{(\mu)} \times D^{(\mu)}\}$, задаваемого равенством (5.27):

$$D^{(\mu)} \times D^{(\mu)} = [D^{(\mu)} \times D^{(\mu)}] + \{D^{(\mu)} \times D^{(\mu)}\}. \quad (5.28)$$

Эти представления в свою очередь могут быть приводимыми. Матрицы симметричного и антисимметричного произведения представлений имеют следующий вид:

$$[D^{(\mu)} \times D^{(\mu)}(R)]_{kl, ij} = \frac{1}{2} [D_{ki}^{(\mu)}(R) D_{lj}^{(\mu)}(R) + D_{li}^{(\mu)}(R) D_{kj}^{(\mu)}(R)], \quad (5.29)$$

$$\{D^{(\mu)} \times D^{(\mu)}(R)\}_{kl, ij} = \frac{1}{2} [D_{ki}^{(\mu)}(R) D_{lj}^{(\mu)}(R) - D_{li}^{(\mu)}(R) D_{kj}^{(\mu)}(R)]. \quad (5.30)$$

Размерности этих представлений равны соответственно

$$\frac{1}{2} n_\mu (n_\mu + 1) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} n_\mu (n_\mu - 1).$$

Для характеров симметричного и антисимметричного произведения представлений введены соответственно обозначения

$$[\chi^{(\mu)} \times \chi^{(\mu)}(R)] \quad \text{и} \quad \{\chi^{(\mu)} \times \chi^{(\mu)}(R)\}.$$

В нашем частном случае из равенств (5.20) — (5.23) имеем

$$\begin{aligned} [\chi \times \chi(R)] &= [D_{11}(R)]^2 + D_{11}(R) D_{22}(R) + D_{12}(R) D_{21}(R) + [D_{22}(R)]^2 = \\ &= \frac{1}{2} [D_{11}(R) + D_{22}(R)]^2 + \frac{1}{2} [D_{11}(R)]^2 + D_{12}(R) D_{21}(R) + \\ &+ D_{21}(R) D_{12}(R) + [D_{22}(R)]^2 = \\ &= \frac{1}{2} [D_{11}(R) + D_{22}(R)]^2 + \frac{1}{2} [D_{11}(R^2) + D_{22}(R^2)] = \\ &= \frac{1}{2} [(\chi(R))^2 + \chi(R^2)] \end{aligned} \quad (5.31)$$

и

$$\{\chi \times \chi(R)\} = \frac{1}{2} [(\chi(R))^2 - \chi(R^2)]. \quad (5.31a)$$

Точно так же в общем случае из равенств (5.26) и (5.27) получаем

$$\begin{aligned} [\chi \times \chi(R)] &= \frac{1}{2} \sum_{ij} [D_{ii}(R) D_{jj}(R) + D_{ij}(R) D_{ji}(R)] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{ij} D_{ii}(R) D_{jj}(R) + \sum_i D_{ii}(R^2) \right] = \\ &= \frac{1}{2} [(\chi(R))^2 + \chi(R^2)] \end{aligned} \quad (5.32)$$

и

$$\{\chi \times \chi(R)\} = \frac{1}{2} [(\chi(R))^2 - \chi(R^2)]. \quad (5.33)$$

Заметим, наконец, что если $\mu = \nu$ и $\psi_l^{(\mu)} = \varphi_l^{(\mu)}$, то антисимметричные произведения (5.27) тождественно равны нулю и мы получаем лишь симметричное произведение представлений (5.29).

§ 3. Сопряженное представление. Комплексно сопряженное представление

В этом параграфе мы рассмотрим другие методы получения новых представлений. Предположим, что $D(R)$ — неприводимое представление группы G . Если каждую матрицу представления мы заменим матрицей, обратной транспонированной по отношению к ней, то снова получим некоторое представление, поскольку

$$\tilde{D}^{-1}(RS) = [\tilde{D}(RS)]^{-1} = [\tilde{D}(S) \tilde{D}(R)]^{-1} = \tilde{D}^{-1}(R) \tilde{D}^{-1}(S). \quad (5.34)$$

Это представление называется *сопряженным представлением* $\bar{D}$:

$$\bar{D}(R) \equiv \tilde{D}^{-1}(R). \quad (5.35)$$

Если перейти от матриц представления $D(R)$ к комплексно сопряженным матрицам [т. е. к матрицам, элементы которых комплексно сопряжены по отношению к элементам матриц $D(R)$], мы получим *комплексно сопряженное представление* $D^*(R)$:

$$D^*(RS) = D^*(R) D^*(S). \quad (5.36)$$

Задача. Докажите, что представления D , $\bar{D}$ и D^* либо все приводимые, либо все неприводимые.

Характеры сопряженного представления равны:

$$\bar{\chi}(R) = \chi(R^{-1}). \quad (5.37)$$

или

$$\bar{\chi}_l = \chi_{l'}, \quad (5.38)$$

где $K_{l'}$ — класс элементов, обратных элементам из класса K_l . Характеры комплексно сопряженного представления D^* комплексно сопряжены с характерами представления D . В терминах сопряженного представления соотношения ортогональности (3.146) и (3.148а) для характеров можно записать в виде

$$\sum_R \chi^{(\mu)}(R) \bar{\chi}^{(\nu)}(R) = g \delta_{\mu\nu}, \quad (5.39)$$

$$\sum_i g_i \chi_i^{(\mu)} \bar{\chi}_i^{(\nu)} = g \delta_{\mu\nu}; \quad (5.40)$$

соотношение полноты (3.177) принимает вид

$$\sum_\nu \chi_i^{(\nu)} \bar{\chi}_j^{(\nu)} = \left(\frac{g}{g_i} \right) \delta_{ij}, \quad (5.41)$$

а равенства (3.150а), (3.151а) и (3.155а), которые используются при разложении представления на неприводимые, выглядят следующим образом:

$$a_\mu = \left(\frac{1}{g} \right) \sum_i g_i \chi_i \bar{\chi}_i^{(\mu)}, \quad (5.42)$$

$$\sum_i g_i \chi_i \bar{\chi}_i = g \sum_\mu a_\mu^2, \quad (5.43)$$

$$\sum_i \left(\frac{g_i}{g} \right) \chi_i \bar{\chi}_i = \sum_\mu a_\mu b_\mu. \quad (5.44)$$

§ 4. Условия существования инвариантов

Если неприводимое представление $D(R)$ унитарно, то скалярное произведение векторов в гильбертовом пространстве представления инвариантно, так как

$$(Dy, Dx) = (y, D^+ Dx) = (y, x). \quad (5.45)$$

Кроме того, в этом случае скалярное произведение дает нам эрмитов инвариант. Для конечных групп [а также для любой группы, для которой выполняется (3.101)] мы всегда можем сделать представления унитарными.

Если сопряженное представление $\bar{D}$ и комплексно сопряженное представление D^* эквивалентны, т. е. если

$$\tilde{D}^{-1}(R) \approx D^*(R), \quad (5.46)$$

или

$$D(R) \approx D^{+1}(R), \quad (5.46a)$$

то существует матрица F такая, что

$$D^*(R) = \tilde{F}^{-1} \tilde{D}^{-1}(R) \tilde{F},$$

или

$$D^+(R) = F D^{-1}(R) F^{-1}, \quad (5.47)$$

$$D^+(R) F D(R) = F. \quad (5.48)$$

Тогда скалярное произведение

$$(y, Fx) \quad (5.49)$$

инвариантно относительно всех преобразований группы G :

$$(Dy, F Dx) = (y, D^+ F Dx) = (y, Fx). \quad (5.50)$$

Если в равенстве (5.48) перейти к сопряженным величинам, получим

$$D^+(R) F^+ D(R) = F^+, \quad (5.48a)$$

так что скалярное произведение

$$(y, F^+ x) \quad (5.49a)$$

также инвариантно. Комбинируя друг с другом инварианты (5.49) и (5.49a), находим два эрмитовых инварианта:

$$\left(y, \frac{F + F^+}{2} x\right), \quad \left(y, \frac{F - F^+}{2i} x\right). \quad (5.51)$$

Оба эти инварианта не равны тождественно нулю, так как из их равенства нулю следовало бы, что $F = 0$,

Наоборот, если существует неособенная матрица F такая, что скалярное произведение (y, Fx) инвариантно:

$$(y, Fx) = (Dy, F D x) = (y, D^+ F D x),$$

то

$$D^+ F D = F, \quad D^* = \tilde{F}^{-1} \tilde{D}^{-1} \tilde{F}$$

и сопряженное представление $\bar{D}$ и комплексно сопряженное представление D^* эквивалентны. Таким образом, *необходимым и достаточным* условием существования *эрмитова инварианта* является эквивалентность представлений $\bar{D}$ и D^* .

Для *неприводимого* представления *не может существовать более одного* инварианта вида (5.49). Если, кроме (5.49), инвариантно также и скалярное произведение (y, Hx) , то

$$\begin{aligned} D^+ H D &= H, & D^{-1} H^{-1} D^{+^{-1}} &= H^{-1}, \\ F H^{-1} &= (D^+ F D) (D^{-1} H^{-1} D^{+^{-1}}) = D^+ F H^{-1} D^{+^{-1}}, \\ (F H^{-1}) D^+ &= D^+ (F H^{-1}). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Матрица $F H^{-1}$ коммутирует со всеми матрицами неприводимого представления D^+ , откуда по лемме Шура следует, что матрица F кратна H .

В случае неприводимого представления два инварианта (5.51) не могут быть независимыми, и (с точностью до постоянного множителя) матрица F должна быть эрмитовой.

Мы показали, что если представления $\bar{D}$ и D^* неэквивалентны (они будут эквивалентными, если $D \approx D^{+^{-1}}$), то мы не можем построить эрмитов инвариант. Мы покажем, однако, что это можно сделать, взяв прямую сумму представлений D и $D^{+^{-1}}$. Пусть неприводимое представление D действует в пространстве x , неприводимое представление $D^{+^{-1}}$ — в пространстве y . (Ясно, что оба пространства имеют одинаковую размерность n .) Тогда

$$x' = D x, \quad y' = D^{+^{-1}} y, \quad (5.53)$$

и величина $y^+ x$ оказывается инвариантной относительно всех преобразований группы:

$$y'^+ x' = (D^{+^{-1}} y)^+ (D x) = y^+ D^{-1} D x = y^+ x, \quad (5.54)$$

Точно так же инвариантна и величина x^+y . Следовательно, мы нашли два эрмитовых инварианта:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} (y^+x + x^+y), \\ B &= \frac{1}{2i} (y^+x - x^+y). \end{aligned} \quad (5.55)$$

Возьмем прямую сумму пространств x и y и образуем векторы

$$\psi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (5.56)$$

имеющие $2n$ компонент. Вектор ψ при преобразовании из группы G переходит в вектор

$$\psi' = \begin{pmatrix} Dx \\ D^{+^{-1}}y \end{pmatrix}. \quad (5.57)$$

Две эрмитовы матрицы

$$f_1 = \begin{bmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 0 & -iE \\ iE & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.58)$$

где E означает единичную $(n \times n)$ -матрицу, дают нам два эрмитовых инварианта:

$$\varphi^+ f_1 \psi = (\varphi, f_1 \psi) \quad \text{и} \quad \varphi^+ f_2 \psi. \quad (5.59)$$

Этот результат не противоречит доказанной нами ранее теореме, поскольку пространство представления (5.56) приводимо.

Задача. Покажите, что для представления (5.57) сопряженное и комплексно сопряженное представления эквивалентны. Покажите, что переход от векторов ψ к векторам ψ' задается либо матрицей f_1 , либо матрицей f_2 , указанными в (5.58).

§ 5. Вещественные представления

В этом параграфе мы хотим исследовать условия, при которых неприводимые представления группы G можно привести к вещественному виду, т. е.

$$D_{ij}(R) = D_{ij}^*(R). \quad (5.60)$$

Мы будем предполагать, что все представления унитарны (для конечных групп это заведомо выполняется), так что

$$D^+(R) D(R) = 1, \quad (5.61)$$

или

$$\tilde{D}^{-1}(R) \equiv \bar{D}(R) = D^*(R), \quad (5.61a)$$

т. е. сопряженное и комплексно сопряженное представления совпадают.

Если представление D вещественно, то

$$D(R) = D^*(R)$$

и характер $\chi(R)$ веществен. Наоборот, если характер $\chi(R)$ вещественный, то, поскольку

$$\operatorname{tr}[D^*(R)] = [\operatorname{tr} D(R)]^* = [\chi(R)]^*, \quad (5.62)$$

характеры представления D^* будут совпадать с характерами представления D , и представление D будет эквивалентно своему комплексно сопряженному представлению D^* . Если характер $\chi(R)$ комплексный, то D и D^* неэквивалентны. Это единственный случай, когда имеет место неэквивалентность.

В силу сказанного неприводимые представления группы G можно подразделить на три типа:

1) D вещественно (т. е. представление D можно привести к вещественному виду),

2) D эквивалентно D^* , но представление D нельзя привести к вещественному виду,

3) D не эквивалентно D^* .

Если характер $\chi(R)$ веществен, так что мы имеем дело со случаями 1 и 2, то D эквивалентно D^* и, следовательно, из (5.61а) мы получим

$$D(R) \approx \tilde{D}^{-1}(R). \quad (5.63)$$

Взяв след от матриц, найдем

$$\chi(R) = \chi(R^{-1}). \quad (5.64)$$

Кроме того, из (5.63) вытекает, что существует такая неособенная матрица S , что

$$SD(R)S^{-1} = \tilde{D}^{-1}(R) = D^*(R), \quad (5.65)$$

$$\tilde{D}(R)SD(R) = S. \quad (5.66)$$

Поскольку предполагается, что представление унитарно, матрица S также унитарна. Таким образом, существует билинейная форма

$$\tilde{x}Sy, \quad (5.67)$$

которая инвариантна относительно всех преобразований

$$x' = D(R)x, \quad (5.68)$$

так как

$$\overline{\tilde{D}(R)x}SD(R)y = \tilde{x}\tilde{D}(R)SD(R)y = \tilde{x}Sy.$$

Наоборот, если такая билинейная форма существует, то для всех R

$$SD(R) = \tilde{D}^{-1}(R)S.$$

Так как представление D неприводимо, а матрица S не равна тождественно нулю, из леммы Шура следует, что матрица S неособенная. Поэтому равенство (5.65) выполняется, и представление D эквивалентно D^* . Мы заключаем отсюда, что в случае 3, когда характер $\chi(R)$ комплексный, *не существует* билинейной формы, инвариантной относительно преобразований (5.68).

В случаях 1 и 2 выполняется равенство (5.66). Транспонированное равенство имеет вид

$$\tilde{D}(R)\tilde{S}D(R)=\tilde{S},$$

а равенство, в котором все величины заменены на обратные, записывается в виде

$$D^{-1}(R)S^{-1}\tilde{D}^{-1}(R)=S^{-1}.$$

Перемножив эти равенства, получим

$$S^{-1}\tilde{S}=D^{-1}(R)S^{-1}\tilde{S}D(R),$$

или

$$D(R)S^{-1}\tilde{S}=S^{-1}\tilde{S}D(R). \quad (5.69)$$

Так как представление $D(R)$ неприводимо, матрица $S^{-1}\tilde{S}$ должна быть кратна единичной матрице E :

$$S^{-1}\tilde{S}=cE, \quad (5.70)$$

$$\tilde{S}=cS. \quad (5.70a)$$

Равенство, транспонированное по отношению к (5.70a), имеет вид

$$S=c\tilde{S}, \quad (5.70b)$$

откуда

$$S=c\tilde{S}=c(cS)=c^2S,$$

и

$$c^2=1, \quad c=\pm 1.$$

Мы заключаем, что если характер $\chi(R)$ — вещественный [случаи (1) и (2)], то существует инвариантная билинейная форма, у которой унитарная матрица S симметрична или кососимметрична:

$$\tilde{S}=S \quad \text{или} \quad \tilde{S}=-S. \quad (5.71)$$

Так как

$$\det \tilde{S}=\det S, \quad \det(-S)=(-1)^n \det S,$$

где n — размерность представления, мы видим, что знак минус в (5.71) может встречаться *лишь* в случае представлений *четной* размерности.

Если в (5.71) выбран знак плюс, мы имеем дело со случаем 1: матрица S унитарна и симметрична. Тогда существует унитарная симметричная матрица B такая, что

$$B^2 = S. \quad (5.72)$$

Так как

$$B^\dagger B = 1 \quad \text{и} \quad \tilde{B} = B,$$

имеем

$$B^* = B^{-1}, \quad B = B^{*-1}. \quad (5.73)$$

Подставляя (5.72) в (5.65) и используя (5.73), получаем

$$\begin{aligned} B^2 D(R) B^{-2} &= D^*(R), \\ BD(R) B^{-1} &= B^{-1} D^*(R) B = B^* D^*(R) B^{*-1} = \\ &= [BD(R) B^{-1}]^*. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Последнее равенство показывает, что представление $D(R)$ преобразуется к вещественному виду матрицей B . Поскольку матрицы B и $D(R)$ унитарны, матрицы

$$D'(R) = BD(R) B^{-1}$$

также унитарны. Поэтому они образуют *вещественное ортогональное* представление группы G :

$$\tilde{D}'(R) D'(R) = E. \quad (5.75)$$

Мы не будем останавливаться на рассмотрении более сложного случая 2. Вместо этого мы приступим к поискам простого критерия, с помощью которого мы могли бы различать три типа представлений. Этот критерий выражается формулами, содержащими суммы, взятые по характерам, поэтому мы будем предполагать, что такие суммы имеют смысл. (Это безусловно так в случае конечных групп.)

Матрица

$$S = \sum_G \tilde{D}(R) X D(R), \quad (5.76)$$

где X — произвольная матрица, удовлетворяет равенству (5.66) и дает нам инвариантную билинейную форму (5.67). В случае 3, когда инвариантной билинейной формы не существует, матрица S должна быть нулевой матрицей при любом выборе матрицы X :

$$\sum_G D_{\alpha\beta}(R) D_{\gamma\delta}(R) = 0 \quad \text{при всех } \alpha, \beta, \gamma, \delta. \quad (5.77)$$

Положив $\beta = \gamma$ и просуммировав по β , получим

$$0 = \sum_G \sum_{\beta} D_{\alpha\beta}(R) D_{\beta\delta}(R) = \sum_G D_{\alpha\delta}(R^2),$$

в силу чего в случае 3

$$\sum_G D(R^2) = 0. \quad (5.78)$$

Эти результаты для всех трех случаев можно объединить в одно утверждение:

$$S = c\tilde{S}, \quad c = \begin{cases} +1 & \text{для случая 1,} \\ -1 & \text{для случая 2,} \\ 0 & \text{для случая 3.} \end{cases} \quad (5.79)$$

Из (5.76) и (5.79) следует

$$\sum_G \sum_{\beta\gamma} D_{\beta\alpha}(R) X_{\beta\gamma} D_{\gamma\delta}(R) = c \sum_G \sum_{\beta\gamma} D_{\beta\alpha}(R) X_{\gamma\beta} D_{\gamma\delta}(R),$$

так что

$$\sum_G D_{\beta\alpha}(R) D_{\gamma\delta}(R) = c \sum_G D_{\gamma\alpha}(R) D_{\beta\delta}(R). \quad (5.80)$$

В частности, положим $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ и просуммируем по α и β :

$$\sum_G \sum_{\alpha\beta} D_{\beta\alpha}(R) D_{\alpha\beta}(R) = c \sum_G \sum_{\alpha\beta} D_{\alpha\alpha}(R) D_{\beta\beta}(R), \quad (5.81)$$

или

$$\sum_G \chi(R^2) = c \sum_G \chi(R) \chi(R). \quad (5.82)$$

В случаях 1 и 2 мы имеем соотношение (5.64):

$$\chi(R) = \chi(R^{-1}),$$

а соотношение ортогональности (3.146) дает нам

$$\sum_G \chi(R) \chi(R) = g, \quad (5.83)$$

в то время как в случае 3 представление D неэквивалентно представлению $\overline{D}$, вследствие чего

$$\sum_G \chi(R) \chi(R) = 0. \quad (5.83a)$$

Объединяя эти результаты с соотношением (5.82), получаем

$$\sum_G \chi^{(\mu)}(R^2) = c^{(\mu)} \cdot g, \quad \text{где } c^{(\mu)} = \begin{cases} +1 & \text{для случая 1,} \\ -1 & \text{для случая 2,} \\ 0 & \text{для случая 3.} \end{cases} \quad (5.84)$$

Вигнер называет представления типа 1, которые можно преобразовать к вещественному виду, *целыми представлениями*. Для таких представлений $c^{(\mu)} = 1$; для *полуцелых представлений* типа 2, которые

нельзя преобразовать к вещественному виду, но которые эквивалентны представлениям, комплексно сопряженным с ними, $c^{(\mu)} = -1$. Наконец, для представлений типа 3, которые неэквивалентны представлениям, комплексно сопряженным по отношению к ним, $c^{(\mu)} = 0$.

Равенство (5.84) дает нам простой критерий для трех типов представлений. В частности, представление можно привести к вещественному виду только в том случае, если сумма характеров квадратов элементов группы равна $+g$.

Пусть $\zeta(S)$ — число решений уравнения

$$R^2 = S. \quad (5.85)$$

Объединяя в (5.84) те члены, для которых $R^2 = S$, получаем

$$\sum_{\sigma} \zeta(S) \chi^{(\mu)}(S) = c^{(\mu)} \cdot g. \quad (5.86)$$

Воспользовавшись соотношением полноты (3.177) и заметив, что

$$\zeta(S^{-1}) = \zeta(S),$$

мы решим (5.86), откуда

$$\zeta(S) = \sum_{\mu} c^{(\mu)} \chi^{(\mu)}(S). \quad (5.87)$$

Равенство (5.87) устанавливает замечательную теорему.

ТЕОРЕМА. Число решений R уравнения $R^2 = S$ (т. е. число квадратных корней из элементов S) дается формулой (5.87), в которой $c^{(\mu)} = 0$, если характер $\chi^{(\mu)}(S)$ комплексный. Если же характер $\chi^{(\mu)}(S)$ — вещественный, то $c^{(\mu)} = +1$ либо $c^{(\mu)} = -1$ в зависимости от того, эквивалентно представление $D^{(\mu)}$ вещественному представлению или нет.

В частности, выбрав в качестве элемента S единицу E , мы найдем, что число решений уравнения $R^2 = E$ равно

$$\zeta(E) = \sum_{\mu} c^{(\mu)} n_{\mu}, \quad (5.88)$$

т. е. число таких решений получится, если взять сумму размерностей всех неприводимых представлений типа 1 и вычесть из нее сумму размерностей всех представлений типа 2.

Матрица

$$\sum_{\sigma} D(R^2)$$

коммутирует со всеми матрицами неприводимого представления $D(R)$, так как

$$\begin{aligned} D^{-1}(A) \sum_G D(R^2) D(A) &= \sum_G D^{-1}(A) D(R^2) D(A) = \\ &= \sum_G [D^{-1}(A) D(R) D(A)] [D^{-1}(A) D(R) D(A)] = \\ &= \sum_G D(R) D(R) = \sum_G D(R^2). \end{aligned} \quad (5.89)$$

[Поскольку $D(R)$ пробегает всю группу G , то и $D^{-1}(A) D(R) D(A)$ также пробегает всю группу G .] По лемме Шура

$$\sum_G D(R^2)$$

должна быть кратна единичной матрице:

$$\sum_G D(R^2) = \lambda E. \quad (5.90)$$

Взяв след правой и левой частей равенства и воспользовавшись (5.84), получим

$$c^{(\mu)} g = \lambda n_\mu,$$

где n_μ — размерность представления, так что (5.90) принимает вид

$$\sum_G D^{(\mu)}(R^2) = \frac{c^{(\mu)} g}{n_\mu} E. \quad (5.91)$$

Умножим равенство (5.91) на $D^{(\mu)}(A)$:

$$\sum_G D^{(\mu)}(AR^2) = \frac{c^{(\mu)} g}{n_\mu} D^{(\mu)}(A) \quad (5.92)$$

и вычислим след

$$\sum_G \chi^{(\mu)}(AR^2) = \frac{c^{(\mu)} g}{n_\mu} \chi^{(\mu)}(A). \quad (5.93)$$

Положим $A = S^2$ и просуммируем по S :

$$\sum_R \sum_S \chi^{(\mu)}(S^2 R^2) = \frac{c^{(\mu)} g}{n_\mu} \sum_S \chi^{(\mu)}(S^2).$$

Еще раз воспользовавшись соотношением (5.84), получим

$$\sum_R \sum_S \chi^{(\mu)}(S^2 R^2) = \frac{(c^{(\mu)} g)^2}{n_\mu}. \quad (5.94)$$

Если $\eta(T)$ — число решений уравнения

$$S^2 R^2 = T, \quad (5.95)$$

то

$$\sum_T \eta(T) \chi^{(\mu)}(T) = \frac{(c^{(\mu)} g)^2}{n_\mu}. \quad (5.96)$$

Воспользовавшись еще раз соотношением полноты, мы решим это уравнение и получим

$$\eta(T) = \sum_\mu \frac{(c^{(\mu)} g)^2}{g n_\mu} \chi^{(\mu)} T. \quad (5.97)$$

В частности, при $T = E$

$$\eta(E) = g \sum_\mu [c^{(\mu)}]^2, \quad (5.98)$$

т. е. число решений уравнения $S^2 R^2 = E$ (или $S^2 = R^2$) равно числу неприводимых представлений с вещественными характеристиками, умноженному на g .

Этот процесс можно повторить. Перемножив уравнения типа (5.91), выписанные для s элементов $R_1, R_2, \dots, R_s$, мы получим

$$\sum_{R_1, \dots, R_s} D^{(\mu)}(R_1^2 R_2^2 \dots R_s^2) = \left(\frac{c^{(\mu)} g}{n_\mu} \right)^s E. \quad (5.99)$$

Вычислив след обеих частей (5.99), найдем

$$\sum_{R_1, \dots, R_s} \chi^{(\mu)}(R_1^2 R_2^2 \dots R_s^2) = n_\mu \left(\frac{c^{(\mu)} g}{n_\mu} \right)^s. \quad (5.100)$$

Тем же самым методом, как и раньше, мы получим теперь, что число решений уравнения

$$R_1^2 R_2^2 \dots R_s^2 = E \quad (5.101)$$

равно

$$g^{s-1} \sum_\mu \frac{[c^{(\mu)}]^s}{[n_\mu]^{s-2}}.$$

Задачи. 1. Построить таблицу характеров для группы кватернионов (см. задачу на стр. 44). Покажите, что ее двумерное представление имеет тип 2. Проверьте различные теоремы этого параграфа для группы кватернионов.

2. Укажите, к какому типу (1, 2 или 3) относятся представления кристаллографических точечных групп.

Если равенство (5.87), определяющее $\zeta(S)$, возвести в квадрат, положить

$$\zeta(S^{-1}) = \zeta(S)$$

и просуммировать по S , то мы получим

$$\begin{aligned}\sum_G [\xi(S)]^2 &= \sum_{\mu, \nu} c^{(\mu)} c^{(\nu)} \sum_G \chi^{(\mu)}(S) \chi^{(\nu)}(S^{-1}) = \\ &= \sum_{\mu, \nu} c^{(\mu)} c^{(\nu)} g \delta_{\mu\nu} = g \sum_{\mu} [c^{(\mu)}]^2.\end{aligned}\quad (5.102)$$

Этот результат совпадает с (5.98). Равенство (5.102) означает, что сумма квадратов числа квадратных корней из всех элементов группы G равна числу простых вещественных характеров, умноженному на g .

Последний результат можно представить и в более удобном виде. Мы знаем, что элементы R^{-1} , обратные элементам R , принадлежащим классу K_i , образуют класс $K_{i'}$. При $i = j$ соотношение полноты (3.177) имело вид

$$\sum_{\mu} g_i \chi_i^{(\mu)} \chi_i^{(\mu)} = g \delta_{ii'}.\quad (5.103)$$

Просуммировав по i , получим

$$\sum_{\mu} \left(\sum_i g_i \chi_i^{(\mu)} \chi_i^{(\mu)} \right) = g \sum_i \delta_{ii'}.\quad (5.104)$$

В соответствии с равенствами (5.83) и (5.83а) величина, стоящая в скобках в левой части этого равенства, равна g , если характер $\chi^{(\mu)}$ вещественный, и равна нулю, если характер $\chi^{(\mu)}$ — комплексный. Таким образом, левая часть этого равенства равна числу вещественных характеров, умноженному на g . Сумма, стоящая в правой части этого равенства, равна числу классов i , совпадающих с классами i' . Такие классы называются *амбивалентными* классами. Равенство (5.104), таким образом, означает, что число вещественных характеров равно числу амбивалентных классов. Комбинируя это утверждение с (5.102), получаем следующую теорему.

Теорема. Сумма квадратов числа квадратных корней из всех элементов группы равна порядку группы, умноженному на число амбивалентных классов.

Заметим также, что если все классы группы G амбивалентны, то все характеры должны быть вещественными. Так будет в случае симметрической группы S_n , поскольку любая перестановка и ей обратная имеют одинаковую структуру разложения на циклы. Таким образом, все характеры симметрической группы вещественны.

Задача. Найдите число амбивалентных классов в каждой из кристаллографических точечных групп и сравните его с числом вещественных характеров по таблице характеров. Перечислите точечные группы, у которых все классы амбивалентны.

§ 6. Разложение кронекеровского произведения.

Ряд Клебша — Гордана

В § 1 настоящей главы мы определили кронекеровское произведение двух представлений. В теории связанных систем и при выводе правил отбора эти произведения играют основную роль. В этом параграфе мы получим математическое обоснование для таких приложений.

В общем случае произведение двух неприводимых представлений группы G приводимо. Чтобы разложить произведение представлений на неприводимые, мы воспользуемся соотношением (5.15)

$$\chi^{(\mu \times \nu)}(R) = \chi^{(\mu)}(R) \cdot \chi^{(\nu)}(R), \quad (5.15)$$

и соотношением (5.42)

$$a_\sigma = \frac{1}{g} \sum_{\sigma} \chi^{(\mu \times \nu)}(R) \bar{\chi}^{(\sigma)}(R), \quad (5.42)$$

которое показывает, с какой кратностью (a_σ) данное неприводимое представление $D^{(\sigma)}$ содержится в представлении $D^{(\mu \times \nu)}$. Из этих двух равенств мы получаем

$$a_\sigma = \frac{1}{g} \sum_{\sigma} \chi^{(\mu)}(R) \chi^{(\nu)}(R) \bar{\chi}^{(\sigma)}(R). \quad (5.105)$$

Этому соотношению можно придать различные полезные формы.

Прежде всего возьмем кронекеровское произведение представлений $D^{(\mu)}$ и $\bar{D}^{(\nu)}$ и спросим, какова кратность, с которой единичное представление содержится в $D^{(\mu)} \times \bar{D}^{(\nu)}$. Поскольку все характеры единичного представления $D^{(1)}$ равны единице, это число равно

$$a_1 = \frac{1}{g} \sum_{\sigma} \chi^{(\mu)}(R) \bar{\chi}^{(\nu)}(R) = \delta_{\mu\nu}, \quad (5.106)$$

где последнее равенство следует из соотношения ортогональности. Таким образом, произведение представлений $D^{(\mu)}$ и $\bar{D}^{(\nu)}$ содержит (с кратностью, равной единице) единичное представление в том и только том случае, если $\mu = \nu$. Этот результат можно сформулировать и в терминах базисных функций. Базисная функция (единственная) единичного представления инвариантна относительно всех преобразований группы G . Равенство (5.106) означает, что мы можем составить инвариантную линейную комбинацию произведений волновых функций тогда и только тогда, когда представления $D^{(\mu)}$ и $\bar{D}^{(\nu)}$ сопряжены ($\mu = \nu$). Если представления унитарны, то $\bar{D} = D^*$. В этом случае мы можем сказать, что их произведение содержит единичное

представление в том и только в том случае, если представления, являющиеся сомножителями, комплексно сопряжены друг с другом.

Далее, если в (5.105) D^σ заменить представлением $\bar{D}^\sigma$, мы получим

$$a_{\bar{\sigma}} = \frac{1}{g} \sum_{\sigma} \chi^{(\mu)}(R) \chi^{(\nu)}(R) \chi^{(\sigma)}(R), \quad (5.107)$$

что дает кратность, с которой $\bar{D}^{(\sigma)}$ входит в $D^{(\mu)} \times D^{(\nu)}$.

Числа a_{σ} в (5.105) служат коэффициентами в разложении произведения $D^{(\mu)} \times D^{(\nu)}$ на неприводимые представления:

$$D^{(\mu)} \times D^{(\nu)} = \sum_{\sigma} a_{\sigma} D^{(\sigma)}. \quad (5.108)$$

Разложение (5.108) называется *рядом Клебша — Гордана*.

Если представления унитарны, то $\bar{\chi} = \chi^*$, и (5.105) принимает вид

$$a_{\sigma} = \frac{1}{g} \sum_{\sigma} \chi^{(\mu)}(R) \chi^{(\nu)}(R) \chi^{*(\sigma)}(R). \quad (5.105a)$$

Обозначение

$$D^{(\mu)} \times D^{(\nu)} = \sum_{\sigma} (\mu\nu\sigma) D^{(\sigma)} \quad (5.108a)$$

является более наглядным, чем обозначения, использованные в равенствах (5.105) или (5.108); здесь $(\mu\nu\sigma)$ означает кратность, с которой представление $D^{(\sigma)}$ входит в кронекеровское произведение представлений $D^{(\mu)}$ и $D^{(\nu)}$. Ясно, что $(\mu\nu\sigma) = (\nu\mu\sigma)$.

Задачи. 1. Докажите, что кратности, с которыми

$\bar{D}^{(\sigma)}$ содержится в $D^{(\mu)} \times D^{(\nu)}$,

$\bar{D}^{(\mu)}$ содержится в $D^{(\nu)} \times D^{(\sigma)}$,

$\bar{D}^{(\nu)}$ содержится в $D^{(\sigma)} \times D^{(\mu)}$,

равны между собой. Покажите, что если все характеры группы G вещественны, то символ $(\mu\nu\sigma)$ в (5.108a) полностью симметричен.

2. Найдите условия, при которых кронекеровское произведение $D^{(\mu)} \times D^{(\nu)}$ неприводимо.

3. Докажите, что кронекеровское произведение двух неприводимых представлений размерности n_1 и n_2 ($n_1 \geq n_2$) не может содержать представлений размерности меньшей, чем n_1/n_2 .

4. Найдите коэффициенты ряда Клебша — Гордана для произведения двумерного представления группы кватернионов на себя.

5. Покажите, что если характеры представлений $D^{(\mu)}$ и $D^{(\nu)}$ вещественны, а характер представления $D^{(\sigma)}$ — комплексный, то $D^{(\mu)} \times D^{(\nu)}$ должно содержать $D^{(\sigma)}$ и $D^{*(\sigma)}$ с одинаковой кратностью.

§ 7. Коэффициенты Клебша — Гордана

В предыдущем параграфе мы рассмотрели задачу о нахождении таких неприводимых представлений, которые содержатся в кронекеровском произведении двух неприводимых представлений. В следующей главе мы покажем, каким образом ряд Клебша — Гордана позволяет нам найти правила отбора.

Для физических приложений еще большее значение имеет задача о нахождении базисных функций тех представлений, которые содержатся в кронекеровском произведении. Нам заданы n_μ базисных функций $\psi_j^{(\mu)}$ ($j = 1, \dots, n_\mu$) неприводимого представления $D^{(\mu)}(G)$ и n_ν базисных функций $\varphi_l^{(\nu)}$ ($l = 1, \dots, n_\nu$) неприводимого представления $D^{(\nu)}(G)$. Требуется найти n_λ функций $\Psi_s^{(\lambda)}$ ($s = 1, \dots, n_\lambda$), которые являются линейными комбинациями произведений $\psi_j^{(\mu)}\varphi_l^{(\nu)}$ и образуют базис неприводимого представления $D^{(\lambda)}(G)$. Функции $\Psi_s^{(\lambda)}$ представляют собой систему *партнеров*, принадлежащих представлению $D^{(\lambda)}(G)$. Из последнего параграфа мы знаем, что такая система существует *лишь* в том случае, если представление $D^{(\lambda)}$ содержится в произведении $D^{(\mu)} \times D^{(\nu)}$, т. е. если $(\mu\nu\lambda) \neq 0$. С другой стороны, если $(\mu\nu\lambda) > 1$, мы можем образовать несколько независимых систем партнеров $\Psi_s^{(\lambda)}$. [На самом деле, найдется $(\mu\nu\lambda)$ „правильных линейных комбинаций“ произведений функций.] Чтобы различать между собой эти различные системы партнеров, мы будем применять обозначение $\Psi_s^{(\lambda\tau_\lambda)}$, $s = 1, \dots, n_\lambda$, $\tau_\lambda = 1, \dots, (\mu\nu\lambda)$. Функции $\Psi_s^{(\lambda\tau_\lambda)}$ будут линейными комбинациями произведений $\psi_j^{(\mu)}\varphi_l^{(\nu)}$:

$$\Psi_s^{(\lambda\tau_\lambda)} = \psi_j^{(\mu)}\varphi_l^{(\nu)}(\mu j, \nu l | \lambda \tau_\lambda s). \quad (5.109)$$

(Условимся о суммировании по повторяющимся латинским буквам, суммирование же по греческим буквам всегда будем указывать в явном виде.) Коэффициенты $(\mu j, \nu l | \lambda \tau_\lambda s)$ в (5.109) называются *коэффициентами Клебша — Гордана*. (Другие их названия: *коэффициенты Вигнера* или *коэффициенты векторного сложения*. Поскольку эти названия используются для групп частного типа, мы предпочитаем более общее название.)

Общее число функций $\Psi_s^{(\lambda\tau_\lambda)}$ должно быть равно общему числу произведений функций $\psi_j^{(\mu)}\varphi_l^{(\nu)}$

$$\sum_{\lambda} (\mu\nu\lambda) n_{\lambda} = n_{\mu} n_{\nu}, \quad (5.110)$$

поэтому коэффициенты Клебша — Гордана $(\mu j, \nu l | \lambda \tau_\lambda s)$ образуют матрицу порядка $n_{\mu} n_{\nu}$. Равенство (5.109) является не чем иным, как

описанием связи между двумя различными базисами $\Psi_s^{(\lambda\tau\lambda)}$ и $\psi_j^{(\mu)}\varphi_l^{(\nu)}$ пространства представления кронекеровского произведения. Другой способ описания этой связи состоял бы в выражении произведений $\psi_j^{(\mu)}\varphi_l^{(\nu)}$ в виде линейных комбинаций функций $\Psi_s^{(\lambda\tau\lambda)}$

$$\psi_j^{(\mu)}\varphi_l^{(\nu)} = \sum_{\lambda\tau\lambda} \Psi_s^{(\lambda\tau\lambda)} (\lambda\tau\lambda s | \mu j, \nu l) \quad \begin{pmatrix} j=1, \dots, n_\mu \\ l=1, \dots, n_\nu \end{pmatrix}. \quad (5.109a)$$

Это соотношение является обратным по отношению к соотношению (5.109), так что

$$(\lambda'\tau'_\lambda s' | \mu j, \nu l) (\mu j, \nu l | \lambda\tau\lambda s) = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\tau'_\lambda \tau_\lambda} \delta_{ss'}, \quad (5.111)$$

$$\sum_{\lambda\tau\lambda} (\mu j', \nu l' | \lambda\tau\lambda s) (\lambda\tau\lambda s | \mu j, \nu l) = \delta_{jj'} \delta_{ll'}. \quad (5.111a)$$

Задача. Пользуясь равенствами (5.109), (5.109a) и линейной независимостью базисных функций, выведите соотношения (5.111) и (5.111a).

Чтобы упростить нашу задачу, предположим, что мы имеем дело исключительно с *унитарными* представлениями. В этом случае (5.109) означает переход от одной ортонормированной системы $\psi_j^{(\mu)}\varphi_l^{(\nu)}$ к другой $\Psi_s^{(\lambda\tau\lambda)}$ с помощью *унитарной* матрицы $(\mu j, \nu l | \lambda\tau\lambda s)$, так что

$$(\lambda\tau\lambda s | \mu j, \nu l) = (\mu j, \nu l | \lambda\tau\lambda s)^*, \quad (5.112)$$

$$(\mu j, \nu l | \lambda'\tau'_\lambda s')^* (\mu j, \nu l | \lambda\tau\lambda s) = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\tau'_\lambda \tau_\lambda} \delta_{ss'}, \quad (5.111b)$$

$$\sum_{\lambda\tau\lambda} (\mu j', \nu l' | \lambda\tau\lambda s) (\mu j, \nu l | \lambda\tau\lambda s)^* = \delta_{jj'} \delta_{ll'}. \quad (5.111b)$$

Подействуем теперь на равенство (5.109) оператором O_R , соответствующим элементу R группы G :

$$O_R \Psi_s^{(\lambda\tau\lambda)} = \Psi_{s's}^{(\lambda\tau\lambda)} D_{s's}^{(\lambda\tau\lambda)}(R),$$

где матрицы $D^{(\lambda\tau\lambda)}(R)$ должны выбираться по некоторой фиксированной схеме; в частности, мы можем (и будем) выбирать их так, чтобы при всех τ_λ они были одинаковыми, т. е.

$$D_{s's}^{(\lambda\tau\lambda)}(R) = D_{s's}^{(\lambda)}(R).$$

Воспользуемся равенствами (5.7) и (5.7a)

$$O_R \Psi_s^{(\lambda\tau\lambda)} = \Psi_{s's}^{(\lambda\tau\lambda)} D_{s's}^{(\lambda\tau\lambda)}(R) = \psi_i^{(\mu)} \varphi_k^{(\nu)} (\mu i, \nu k | \lambda\tau\lambda s') D_{s's}^{(\lambda\tau\lambda)}(R), \quad (5.113)$$

$$\begin{aligned} O_R \Psi_s^{(\lambda\tau\lambda)} &= O_R [\psi_j^{(\mu)} \varphi_l^{(\nu)}] (\mu j, \nu l | \lambda\tau\lambda s) = O_R \psi_j^{(\mu)} O_R \varphi_l^{(\nu)} (\mu j, \nu l | \lambda\tau\lambda s) = \\ &= \psi_i^{(\mu)} \varphi_k^{(\nu)} D_{ij}^{(\mu)}(R) D_{kl}^{(\nu)}(R) (\mu j, \nu l | \lambda\tau\lambda s). \end{aligned} \quad (5.113a)$$

Поскольку произведения $\psi_i^{(\mu)} \varphi_k^{(\nu)}$ образуют систему линейно независимых функций,

$$D_{ij}^{(\mu)}(R) D_{kl}^{(\nu)}(R) (\mu j, \nu l | \lambda \tau_\lambda s) = (\mu l, \nu k | \lambda \tau_\lambda s') D_{s's}^{(\lambda \tau_\lambda)}(R). \quad (5.114)$$

Равенство (5.114) можно переписать в нескольких видах, удобных для приложений. Применяя равенство (5.111), мы можем перенести коэффициенты Клебша — Гордана в левую часть, в результате чего

$$\begin{aligned} (\lambda' \tau'_\lambda t | \mu l, \nu k) D_{ij}^{(\mu)}(R) D_{kl}^{(\nu)}(R) (\mu j, \nu l | \lambda \tau_\lambda s) = \\ = D_{s's}^{(\lambda \tau_\lambda)}(R) \delta_{\lambda \lambda'} \delta_{\tau_\lambda \tau'_\lambda} \delta_{ts'}. \end{aligned} \quad (5.115)$$

Равенство (5.115) означает, что матрицы $D^{(\mu)}(R) \times D^{(\nu)}(R)$ кронекеровского произведения можно с помощью трансформирования матрицей $(\mu j, \nu l | \lambda \tau_\lambda s)$ коэффициентов Клебша — Гордана представить в клеточно-диагональном виде. Первый множитель в левой части можно также записать в виде $(\mu l, \nu k | \lambda' \tau'_\lambda t)^*$. Пользуясь соотношением (5.111a), мы можем перенести коэффициенты Клебша — Гордана в правую часть (5.114), что приведет к соотношению

$$D_{ij}^{(\mu)}(R) D_{kl}^{(\nu)}(R) = \sum_{\lambda \tau_\lambda} (\mu l, \nu k | \lambda \tau_\lambda s') D_{s's}^{(\lambda \tau_\lambda)}(R) (\lambda \tau_\lambda s | \mu j, \nu l), \quad (5.116)$$

задающему обратное преобразование от клеточно-диагонального вида к кронекеровскому произведению.

Умножив на $D_{ts}^{*(\lambda \tau_\lambda)}(R)$, мы можем перенести матрицу представления из правой части (5.114) в левую. Точно так же в равенстве (5.116) мы могли бы воспользоваться соотношениями ортогональности, чтобы перенести все матрицы в одну часть равенства. Однако мы видим, что такая операция приводит к уравнениям, несимметричным по μ, ν, λ .

§ 8. Просто приводимые группы

Мы можем получить коэффициенты сложения, обладающие более высокой симметрией, если будем выбирать группы специального вида. Прежде всего предположим, что характеры всех неприводимых представлений группы G вещественны. Отсюда следует, что каждое представление эквивалентно своему комплексно сопряженному и что представлений типа 3 (см. § 5 гл. 5) нет. Все неприводимые представления группы G — целые или полуцелые. Этому условию удовлетворяет весьма широкий класс групп: группа вращений, группа кватернионов, большинство кристаллографических точечных групп и все симметрические группы S_n . Действительно, мы увидим позднее, что все неприводимые представления симметрической группы S_n можно выбрать так, чтобы они были вещественными, в результате чего мы получим лишь целые представления.

Вторая трудность в общем случае возникает вследствие того, что коэффициент $(\mu\nu\lambda)$ может быть больше единицы. Это обстоятельство делает определение коэффициентов Клебша — Гордана неоднозначным, поскольку мы можем выбирать произвольные линейные комбинации

$$\sum_{\tau_\lambda} c_{\lambda\tau_\lambda} \Psi_s^{(\lambda\tau_\lambda)}, \quad (5.117)$$

оставляя представление по-прежнему приведенным к клеточно-диагональному виду. Если бы каждое представление $D^{(\lambda)}$ входило в кронекеровское произведение с кратностью, самое большее равной единице, то коэффициенты Клебша — Гордана были бы менее неопределенными. Из (5.117) мы видим, что в этом случае мы могли бы заменять функции $\Psi_s^{(\lambda)}$ лишь функциями $c_\lambda \Psi_s^{(\lambda)}$. Поскольку мы рассматриваем унитарные представления, это означало бы, что $|c_\lambda| = 1$. Поэтому единственным произволом в коэффициентах Клебша — Гордана был бы фазовый множитель, одинаковый для всех коэффициентов с одинаковыми μ , ν , λ .

При рассмотрении симметрической группы мы покажем, что какие результаты можно получить, несмотря на эту вторую трудность. Мы будем считать, что в этой главе действуют оба ограничения, о которых только что говорилось.

Мы скажем, что группа *просто приводима* (*SR-группа*), если:

- а) каждый элемент группы G эквивалентен обратному,
- б) кронекеровское произведение двух неприводимых представлений группы G содержит каждое неприводимое представление не более чем один раз.

Условие «а» означает, что все классы группы G амбивалентны, все характеры вещественны и все неприводимые представления группы G целые или полуцелые ($c^{(\mu)} = +1$ или $c^{(\mu)} = -1$).

Симметрические группы S_3 и S_4 , группа кватернионов, двумерная унитарная унимодулярная группа и трехмерная группа вращений являются *SR-группами*.

Условие «б» существенно для физических приложений. Из него следует, что «правильные линейные комбинации» произведений базисных функций определены с точностью до фазового множителя и что решение физической задачи однозначно определяется из соображений симметрии.

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма. Кронекеровское произведение двух целых или двух полуцелых представлений *SR-группы* содержит *лишь* целые представления; кронекеровское произведение целого и полуцелого представления содержит *лишь* полуцелые представления.

Унитарная матрица S_μ , преобразующая представление $D^{(\mu)}$ в его комплексно сопряженное

$$S_\mu D^{(\mu)} S_\mu^{-1} = D^{*(\mu)}, \quad (5.65)$$

удовлетворяет равенству

$$\tilde{S}_\mu = c^{(\mu)} S_\mu, \quad (5.79)$$

где $c^{(\mu)} = +1$, если представление $D^{(\mu)}$ целое, и $c^{(\mu)} = -1$, если $D^{(\mu)}$ полуцелое [условие «а»]. Аналогично

$$S_\nu D^{(\nu)} S_\nu^{-1} = D^{*(\nu)}, \quad \tilde{S}_\nu = c^{(\nu)} S_\nu.$$

Объединяя эти равенства и пользуясь соотношением (5.66), получаем

$$(S_\mu \times S_\nu)(D^{(\mu)} \times D^{(\nu)})(S_\mu \times S_\nu)^{-1} = (D^{*(\mu)} \times D^{*(\nu)}) = (D^{(\mu)} \times D^{(\nu)})^*, \quad (5.118)$$

$$(\overline{S_\mu \times S_\nu}) = c^{(\mu)} c^{(\nu)} (S_\mu \times S_\nu). \quad (5.119)$$

Таким образом, унитарная матрица $S = S_\mu \times S_\nu$, преобразующая кронекеровское произведение $M = D^{(\mu)} \times D^{(\nu)}$ в комплексно сопряженное, симметрична, если оба представления $D^{(\mu)}$ и $D^{(\nu)}$ целые или полуцелые, и антисимметрична, если одно из представлений целое, а другое полуцелое:

$$SMS^{-1} = M^*, \quad \tilde{S} = \pm S. \quad (5.120)$$

Обозначим символом U унитарную матрицу коэффициентов Клебша — Гордана. Тогда

$$UMU^{-1} = M_r, \quad U^* M^* U^{-1*} = M_r^*, \quad (5.121)$$

где M_r — приведенная форма кронекеровского произведения M . Из условия «б» следует, что M_r имеет вид

$$M_r = \left[\begin{array}{c|c|c|c} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_s \end{array} \right], \quad (5.122)$$

где $D_1, D_2, \dots, D_s$ — *неэквивалентные* неприводимые представления. Из (5.121) имеем

$$M = U^{-1} M_r U. \quad (5.123)$$

Объединяя этот результат с (5.120), получаем

$$\begin{aligned} SU^{-1} M_r U S^{-1} &= M^*, \\ U^* S U^{-1} M_r U S^{-1} U^{-1*} &= M_r^*, \end{aligned} \quad (5.124)$$

или

$$S_r M_r S_r^{-1} = M_r^*, \quad S_r M_r = M_r^* S_r, \quad (5.125)$$

где

$$S_r = U^* S U^{-1}. \quad (5.126)$$

Воспользуемся соотношениями (5.120), (5.126) и унитарностью матрицы U , тогда

$$\tilde{S}_r = \tilde{U}^{-1} \tilde{S} \tilde{U}^* = U^* \tilde{S} U^{-1} = \pm U^* S U^{-1} = \pm S_r. \quad (5.127)$$

Разобьем матрицу S_r так же, как матрицу M_r в (5.122), и обозначим подматрицы символом S_{ij} ($i, j = 1, \dots, s$). Равенство (5.127) означает

$$S_{ji} = \pm \tilde{S}_{ij}. \quad (5.128)$$

Из равенства (5.125) получим

$$S_{ij} D_j = D_i^* S_{ij}. \quad (5.129)$$

При $i \neq j$ представления D_i^* и D_j неэквивалентны, в силу чего из (5.129) и леммы Шура следует, что $S_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Таким образом, матрица S_r имеет тот же клеточно-диагональный вид (5.122), что и матрица M_r . Из (5.129) при $i = j$ имеем

$$S_{ii} D_i S_{ii}^{-1} = D_i^*, \quad (5.130)$$

из (5.128) получаем

$$S_{ii} = \pm \tilde{S}_{ii}. \quad (5.131)$$

Таким образом, каждая из подматриц D_i матрицы M_r преобразуется в комплексно сопряженную матрицей S_{ii} , которая симметрична, если оба представления целые или оба представления полуцелые, и антисимметрична, если одно представление целое, а другое полуцелое.

Коэффициенты $(\mu\nu\lambda)$ ряда Клебша — Гордана должны быть больше или равны 0. Для любой группы числа $c^{(\mu)}$ равны либо ± 1 , либо 0. Таким образом,

$$(\mu\nu\lambda)^2 \geq c^{(\mu)} c^{(\nu)} c^{(\lambda)} (\mu\nu\lambda). \quad (5.132)$$

Знак равенства в (5.132) выполняется лишь в том случае, когда либо $(\mu\nu\lambda) = 0$, либо $(\mu\nu\lambda) = 1$ и $c^{(\mu)} c^{(\nu)} c^{(\lambda)} = 1$. Суммируя по всем неприводимым представлениям, получаем

$$\sum_{\mu\nu\lambda} (\mu\nu\lambda)^2 \geq \sum_{\mu\nu\lambda} c^{(\mu)} c^{(\nu)} c^{(\lambda)} (\mu\nu\lambda), \quad (5.133)$$

где знак равенства имеет место лишь в том случае, если при всех μ, ν и λ либо $(\mu\nu\lambda) = 0$, либо $(\mu\nu\lambda) = 1$ и $c^{(\mu)} c^{(\nu)} c^{(\lambda)} = 1$. Но из нашей леммы следует, что именно так и происходит в случае SR -групп. Поэтому знак равенства в (5.133) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы группа была SR -группой

Для любой группы G правую часть неравенства (5.133) можно переписать с помощью (5.105а) и (5.87) в виде

$$\begin{aligned} \sum_{\mu\nu\lambda} c^{(\mu)} c^{(\nu)} c^{(\lambda)} (\mu\nu\lambda) &= \frac{1}{g} \sum_{\mu\nu\lambda} \sum_R c^{(\mu)} c^{(\nu)} c^{(\lambda)} \chi^{(\mu)}(R) \chi^{(\nu)}(R) \chi^{*(\lambda)}(R) = \\ &= \frac{1}{g} \sum_R [\xi(R)]^3. \end{aligned} \quad (5.134)$$

Еще раз воспользовавшись соотношением (5.105а), для левой части неравенства (5.133) получим

$$\sum_{\mu\nu\lambda} (\mu\nu\lambda)^2 = \frac{1}{g^2} \sum_{\mu\nu\lambda} \sum_{RR'} \chi^{(\mu)}(R) \chi^{*(\mu)}(R') \chi^{(\nu)}(R) \chi^{*(\nu)}(R') \chi^{*(\lambda)}(R) \chi^{(\lambda)}(R').$$

Суммы по μ , ν , λ можно вычислить в отдельности с помощью соотношения полноты (5.41), откуда

$$\sum_{\mu\nu\lambda} (\mu\nu\lambda)^2 = \frac{1}{g^2} \sum_R g_R \left(\frac{g}{g_R} \right)^3 = g \sum_R \frac{1}{(g_R)^2}, \quad (5.135)$$

где g_R — число элементов в классе, содержащем элемент R . Подставляя в неравенство (5.133) выражения (5.135) и (5.134), получаем

$$\sum_R [\xi(R)]^3 \leq \sum_R \left(\frac{g}{g_R} \right)^2; \quad (5.136)$$

таким образом мы доказали следующее:

Неравенство (5.136) выполняется для любой конечной группы. Знак равенства имеет место в том и только в том случае, если группа просто приводима.

Согласно нашей лемме, в случае SR -групп кронекеровское произведение $D^{(\mu)} \times D^{(\nu)}$ любого представления *на себя* содержит лишь *целые* представления. Это произведение всегда можно разложить на симметричную и антисимметричную части:

$$D^{(\mu)} \times D^{(\nu)} = [D^{(\mu)} \times D^{(\nu)}] + \{D^{(\mu)} \times D^{(\nu)}\}. \quad (5.28)$$

Если $D^{(\mu)}$ — целое представление, то неприводимые представления, содержащиеся в $[D^{(\mu)} \times D^{(\mu)}]$, называются *четными представлениями*, а неприводимые представления, содержащиеся в $\{D^{(\mu)} \times D^{(\mu)}\}$, называются *нечетными представлениями*. Наоборот, если $D^{(\mu)}$ — полуцелое представление, то представления, содержащиеся в его *симметризованном* квадрате, называются *нечетными*, а те из них,

которые содержатся в *антисимметризованном* квадрате, называются *четными*. Теперь докажем следующую теорему.

Теорема. Представление SR -группы не может быть одновременно четным и нечетным.

Для доказательства теоремы воспользуемся равенствами (5.32) и (5.33):

$$[\chi^{(\mu)} \times \chi^{(\mu)}(R)] = \frac{1}{2} [(\chi^{(\mu)}(R))^2 + \chi^{(\mu)}(R^2)], \quad (5.32)$$

$$\{\chi^{(\mu)} \times \chi^{(\mu)}(R)\} = \frac{1}{2} [(\chi^{(\mu)}(R))^2 - \chi^{(\mu)}(R^2)]. \quad (5.33)$$

Условие того, что два представления не имеют общих неприводимых частей, имеет вид

$$\sum_R \chi^{(\alpha)}(R) \bar{\chi}^{(\beta)}(R) = 0, \quad (5.44)$$

где, кроме того, сумма никогда не может быть меньше нуля. Пользуясь соотношениями (5.32), (5.33), (5.44) и определениями четных и нечетных представлений, мы обнаружим, что наша теорема эквивалентна утверждению:

$$\sum_R [(\chi^{(\mu)}(R))^2 + c^{(\mu)} \chi^{(\mu)}(R^2)] [(\chi^{(\nu)}(R))^2 - c^{(\nu)} \chi^{(\nu)}(R^2)] = 0 \quad (5.137)$$

при всех μ и ν , либо

$$\sum_{\mu\nu} \sum_R [(\chi^{(\mu)}(R))^2 + c^{(\mu)} \chi^{(\mu)}(R^2)] [(\chi^{(\nu)}(R))^2 - c^{(\nu)} \chi^{(\nu)}(R^2)] = 0. \quad (5.137a)$$

Воспользуемся формулой (5.87), в которой положим $S = R^2$:

$$\zeta(R^2) = \sum_{\mu} c^{(\mu)} \chi^{(\mu)}(R^2),$$

и преобразуем вторые члены, стоящие в сомножителях равенства (5.137a). К первым членам, стоящим в скобках, применим соотношение полноты (5.41):

$$\sum_{\mu} \chi^{(\mu)}(R) \chi^{(\mu)}(R) = \frac{g}{g_R}.$$

Тогда левая часть (5.137a) преобразуется к виду

$$\sum_R \left(\frac{g}{g_R} + \zeta(R^2) \right) \left(\frac{g}{g_R} - \zeta(R^2) \right) = \sum_R \left[\left(\frac{g}{g_R} \right)^2 - \{\zeta(R^2)\}^2 \right]. \quad (5.138)$$

Но из определения $\zeta(S)$ следует

$$\sum_S [\zeta(S)]^3 = \sum_S [\zeta(S)]^2 \zeta(S) = \sum_{S, R} [\zeta(S)]^2 \delta_{S, R^2} = \sum_R [\zeta(R^2)]^2. \quad (5.139)$$

Наша предыдущая теорема [соотношение (5.136), в котором стоит знак равенства, поскольку мы рассматриваем SR -группу] утверждает, что (5.138) обращается в нуль, а это и требовалось доказать.

Теорема *отнюдь* не утверждает (и это следует особо подчеркнуть), что всякое целое представление либо четно, либо нечетно. Может случиться, что какое-нибудь конкретное целое представление не содержится в квадрате ни одного представления. Такое представление не является ни четным, ни нечетным.

Задача. Рассмотрите группу G , состоящую из восьми элементов: $1, -1, x, -x, y, -y, z, -z$ с таблицей умножения

$$x^2 = y^2 = 1, \quad z^2 = -1, \quad xy = -yx = z,$$

$$xz = -zx = y, \quad zy = -yz = x.$$

Какая связь существует между этой группой G и группой кватернионов? Постройте таблицу характеров группы G . Покажите, что двумерное представление группы G целое, но не содержится в квадрате никакого представления.

§ 9. $3f$ -символы

В этом параграфе мы будем пользоваться обозначениями, введенными Вигнером, в основе которых лежат обозначения для трехмерной группы вращений. Неприводимые представления мы будем обозначать символами j_1, j_2 и т. д., а строки и столбцы матриц — греческими буквами. Мы будем придерживаться соглашения о суммировании по повторяющимся греческим индексам. Во всех же остальных случаях суммирование будет указываться в явном виде. Размерность представления $D^{(j)}$ будем обозначать символом $[j]$.

В § 7 настоящей главы разложение кронекеровского произведения можно было производить как по представлениям, комплексно сопряженным с неприводимыми представлениями, так и по самим неприводимым представлениям. Определим унитарную матрицу U с матричными элементами

$$U_{j_3 \kappa_3, \kappa_1 \kappa_2} = [j_3]^{1/2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{pmatrix}, \quad (5.140)$$

которая разлагает кронекеровское произведение представлений $D^{(j_1)}$ и $D^{(j_2)}$ в сумму представлений $D^{*(j_3)}$. Величина

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{pmatrix} \quad (5.141)$$

называется $3f$ -символом.

В этих обозначениях можно переписать все равенства § 7 настоящей главы. Вместо (5.111б) и (5.111в) мы получаем условия унитарности:

$$[j] \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j' \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa' \end{pmatrix}^* = (j_1 \ j_2 \ j) \delta_{jj'} \delta_{\kappa\kappa'}, \quad (5.142)$$

$$\sum_{j_3} [j_3] \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix}^* = \delta_{\kappa_1\lambda_1} \delta_{\kappa_2\lambda_2}. \quad (5.142a)$$

Равенства (5.115) и (5.116) заменяются равенствами

$$[j_3] \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{pmatrix} D_{\kappa_1\lambda_1}^{(j_1)}(R) D_{\kappa_2\lambda_2}^{(j_2)}(R) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \delta_{j_3j_3'} D_{\kappa_3\lambda_3}^{*(j_3)}(R), \quad (5.143)$$

$$D_{\kappa_1\lambda_1}^{(j_1)}(R) D_{\kappa_2\lambda_2}^{(j_2)}(R) = \sum_{j_3} [j_3] \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{pmatrix}^* D_{\kappa_3\lambda_3}^{*(j_3)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad (5.144)$$

а равенство (5.114) — равенством

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{pmatrix} D_{\kappa_1\lambda_1}^{(j_1)}(R) D_{\kappa_2\lambda_2}^{(j_2)}(R) = D_{\kappa_3\lambda_3}^{*(j_3)}(R) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (5.145)$$

Поскольку представления унитарны, мы можем, умножив (5.145) на $D_{\kappa_3\lambda_3'}^{(j_3)}(R)$, перенести все матрицы представлений в левую часть этого равенства:

$$D_{\kappa_1\lambda_1}^{(j_1)}(R) D_{\kappa_2\lambda_2}^{(j_2)}(R) D_{\kappa_3\lambda_3}^{(j_3)}(R) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (5.146)$$

Перейдя в равенстве (5.146) к сопряженным величинам, используя унитарность представлений и заменяя R^{-1} на R , получаем

$$D_{\lambda_1\kappa_1}^{(j_1)}(R) D_{\lambda_2\kappa_2}^{(j_2)}(R) D_{\lambda_3\kappa_3}^{(j_3)}(R) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix}^*; \quad (5.146a)$$

3j-символ полагается равным нулю, если $(j_1 j_2 j_3) = 0$, поэтому нет необходимости указывать пределы суммирования по j . Полагая в (5.142) $j' = j = j_3$, $\kappa' = \kappa = \kappa_3$ и суммируя по κ_3 , получаем

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{pmatrix}^* = (j_1 j_2 j_3). \quad (5.147)$$

Выберем это обозначение, специально приспособленное для трехмерной группы вращений, и положим $(-1)^{2j} = 1$, если j — целое

представление, и $(-1)^{2j} = -1$, если j — полуцелое представление. Тогда мы можем записать

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{pmatrix} = (-1)^{2j_1+2j_2+2j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{pmatrix}, \quad (5.148)$$

поскольку по лемме § 8 настоящей главы $3j$ -символ обращается в нуль, если

$$(-1)^{2j_1+2j_2+2j_3} \neq 1.$$

Можно также условиться, что $(-1)^j = 1$, если j — четное представление, и $(-1)^j = -1$, если j — нечетное представление. Если же j — представление, не являющееся ни четным, ни нечетным, то $(-1)^j$ можно произвольно положить равным 1. При полуцелом j можно произвольно положить $(-1)^j$ равным i или $-i$, но после того, как выбор произведен, значение $(-1)^j$ всюду должно быть одним и тем же.

Приведенное кронекеровское произведение коммутирует с любой диагональной матрицей, в которой все диагональные элементы, соответствующие данному неприводимому представлению, одинаковы. Поэтому $3j$ -символ можно умножать на величину $\omega(j_1, j_2, j_3)$, зависящую от j_1, j_2, j_3 , но не зависящую от $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$. Если представление должно быть унитарным, то $|\omega|^2 = 1$.

Воспользуемся соотношениями ортогональности (3.137), чтобы преобразовать (5.144) к виду

$$\sum_R D_{\kappa_1 \lambda_1}^{(j_1)}(R) D_{\kappa_2 \lambda_2}^{(j_2)}(R) D_{\kappa_3 \lambda_3}^{(j_3)}(R) = g \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (5.149)$$

Замена коэффициентов Клебша—Гордана $3j$ -символами с множителем $[j_3]^{1/2}$ позволяет нам сделать это равенство симметричным относительно матриц представлений. Полагая в (5.149) $\kappa_i = \lambda_i$, находим, что $\left| \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ \kappa_2 & \kappa_1 & \kappa_3 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \begin{pmatrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ \kappa_3 & \kappa_1 & \kappa_2 \end{pmatrix} \right|^2$ и т. д., (5.150) т. е. что абсолютное значение $3j$ -символа не изменится, если переставить столбцы.

Докажем далее, что всегда можно так выбрать фазовые множители $\omega(j_1 j_2 j_3)$, что

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{pmatrix} &= (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ \kappa_2 & \kappa_1 & \kappa_3 \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ \kappa_1 & \kappa_3 & \kappa_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.151)$$

откуда с помощью соотношения (5.148) получим

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ \kappa_2 & \kappa_3 & \kappa_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ \kappa_3 & \kappa_1 & \kappa_2 \end{pmatrix}. \quad (5.152)$$

Иначе говоря, фазовые множители всегда можно выбрать так, чтобы 3j-символы не изменялись при четной перестановке столбцов и умножались на коэффициент $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$ (равный ± 1) при нечетной перестановке.

Чтобы получить равенства (5.151) и (5.152), выберем какой-нибудь конкретный набор κ_{10} , κ_{20} , κ_{30} , для которого 3j-символ

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \kappa_{10} & \kappa_{20} & \kappa_{30} \end{pmatrix}$$

не обращается в нуль. Из (5.150) мы видим, что для этой тройки κ не будут обращаться в нуль и 3j-символы с переставленными столбцами. Выберем теперь фазовый множитель $\omega(j_1 j_2 j_3)$ так, чтобы 3j-символ

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \kappa_{10} & \kappa_{20} & \kappa_{30} \end{pmatrix}$$

был вещественным и положительным. Выберем, далее, фазовый множитель $\omega(j_2 j_1 j_3)$ так, чтобы выполнялось первое из равенств (5.151). Это всегда возможно, если $j_1 \neq j_2$, поскольку в этом случае множитель $\omega(j_2 j_1 j_3)$ не зависит от $\omega(j_1 j_2 j_3)$. Если же $j_1 = j_2$, то первое из равенств (5.151) означает просто

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_1 & j_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{pmatrix} = (-1)^{2j_1+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_1 & j_3 \\ \kappa_2 & \kappa_1 & \kappa_3 \end{pmatrix},$$

т. е. представление j_3 содержится в симметричном квадрате представления j_1 , если представление $j_3 + 2j_1$ четно, и содержится в антисимметричном квадрате j_1 , если $j_3 + 2j_1$ нечетно. Аналогично, мы можем сделать так, чтобы выполнялось второе равенство (5.151) [а следовательно, и (5.152)] при κ_{10} , κ_{20} , κ_{30} . Но в этом случае, если в (5.149) вместо κ_i подставить κ_{i0} , мы увидим из симметрии левой части равенства, что равенства (5.151) и (5.152) будут выполняться *при всех* λ_1 , λ_2 , λ_3 . Эти равенства сохраняются, если все 3j-символы умножить на фазовые множители $\omega(j_1 j_2 j_3)$, полностью симметричные по j_1 , j_2 , j_3 .

Далее мы рассмотрим (5.144) в частном случае, когда j_2 есть единичное представление. Обозначим это представление $j_2 = 0$, а его единственную строку (и столбец) обозначим индексом $\kappa_2 = 0$. Кронекеровское произведение представлений $D^{(j_1)}$ и $D^{(0)}$ содержит только представление $D^{(j_1)}$, так что в этом случае из (5.144) следует:

$$D_{\kappa_1 \lambda_1}^{(j_1)}(R) = [j_1] \begin{pmatrix} j_1 & 0 & j_1 \\ \kappa_1 & 0 & \kappa_3 \end{pmatrix}^* D_{\kappa_3 \lambda_3}^{*(j_1)}(R) \begin{pmatrix} j_1 & 0 & j_1 \\ \lambda_1 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad (5.144a)$$

т. е. унитарная матрица

$$\begin{pmatrix} j \\ \kappa\lambda \end{pmatrix} = [j]^{1/2} \begin{pmatrix} j & 0 & j \\ \kappa & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (5.153)$$

которую мы будем называть *1j-символом*, преобразует представление $D^{(j)}$ в комплексно сопряженное:

$$D_{\kappa\lambda}^{(j)}(R) = \begin{pmatrix} j \\ \kappa\mu \end{pmatrix}^* D_{\mu\nu}^{(j)}(R) \begin{pmatrix} j \\ \lambda\nu \end{pmatrix}. \quad (5.154)$$

Перейдя в (5.154) к комплексно сопряженным величинам, получим

$$D_{\kappa\lambda}^{*(j)}(R) = \begin{pmatrix} j \\ \kappa\mu \end{pmatrix} D_{\mu\nu}^{(j)}(R) \begin{pmatrix} j \\ \lambda\nu \end{pmatrix}^\dagger. \quad (5.154a)$$

Для этого частного случая условия унитарности (5.142) и (5.142a) сводятся к условиям

$$\begin{pmatrix} j \\ \kappa\lambda \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} j \\ \kappa\lambda' \end{pmatrix} = \delta_{\lambda\lambda'} \quad (5.155)$$

и

$$\begin{pmatrix} j \\ \kappa\lambda \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} j \\ \kappa'\lambda \end{pmatrix} = \delta_{\kappa\kappa'}. \quad (5.155a)$$

Равенство (5.151) сводится к равенству

$$\begin{pmatrix} j \\ \kappa\lambda \end{pmatrix} = (-1)^{2j} \begin{pmatrix} j \\ \lambda\kappa \end{pmatrix}, \quad (5.156)$$

которое является лишь иной формой утверждения (5.79): матрица, преобразующая представление в комплексно сопряженное, симметрична либо антисимметрична в зависимости от того, является ли это представление целым или полуцелым.

Фактическое вычисление $3j$ -символов (или коэффициентов Клебша—Гордана) зависит от конкретной структуры группы. Мы остановимся на этом вопросе при рассмотрении представлений отдельных групп.

ГЛАВА 6

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Классификация уровней энергии

Мы уже в некоторых случаях отмечали связь между представлениями групп и квантовомеханическими задачами. Если мы изучаем какую-нибудь атомную систему, то мы прежде всего должны найти группу симметрии ее гамильтониана, т. е. совокупность преобразований, которые оставляют этот гамильтониан инвариантным. Наличие у системы группы симметрии обуславливает возможность вырождения. Если ψ — собственная функция, соответствующая энергии ϵ , то функция $O_R\psi$ также будет принадлежать энергии ϵ (R — произвольный элемент группы симметрии G). Этот уровень энергии оказывается вырожденным, если $O_R\psi \neq C\psi$ при всех R . Собственные функции, принадлежащие данной энергии ϵ , образуют базис некоторого представления группы G . В большинстве случаев это представление будет неприводимым. Только в редких случаях при весьма специальном выборе параметров мы получим „случайное“ вырождение, при котором системы функций, принадлежащие различным неприводимым представлениям, будут отвечать одной и той же энергии. Ясно, что партнеры, образующие базис для одного из неприводимых представлений группы G , *должны* соответствовать одному и тому же значению энергии, поскольку операции группы симметрии преобразуют их друг в друга. Но каждая из двух различных систем партнеров $\psi^{(\mu)}$ и $\psi^{(\nu)}$, даже если они служат базисами *одного и того же* неприводимого представления группы G ($\mu = \nu$), в результате преобразований переходят снова только в себя, и из соображений симметрии отнюдь не следует, что они соответствуют одному и тому же значению энергии.

Поэтому мы можем предположить, что в общем случае совокупность собственных функций, принадлежащих данной энергии ϵ , является совокупностью партнеров и образует базис одного из неприводимых представлений группы симметрии. Уже одно это многое говорит нам о той степени вырождения, которую следует ожидать. Например, если мы рассматриваем систему, обладающую группой симметрии O , то из таблицы характеров (см. табл. 22) можно увидеть, что уровни энергии этой системы могут быть только одно-, дву- и трехкратно вырожденными. Однократно вырожденные уровни будут двух типов в зависимости от того, принадлежат ли они представлениям A_1 или A_2 .

Собственные функции простых уровней этих двух типов отличаются своим поведением при операциях C_4 и C_2 . Все двукратно вырожденные уровни будут одного типа и принадлежат двумерному представлению E . Наконец, трехкратно вырожденные уровни могут быть двух различных типов, соответствующих представлениям F_1 и F_2 . Если отвлечься от возможности случайного вырождения, то перечисленные типы являются единственно возможными типами уровней. Хотя обозначения, которыми мы будем пользоваться, могут показаться странными (на самом деле мы делаем в точности то же самое, что делается в обычных квантовомеханических рассмотрениях), мы будем каждой собственной функции $\psi_i^{(\mu)}$ приписывать два квантовых числа μ и l , чтобы описать ее поведение при операциях, принадлежащих точечной группе симметрии. Точно так же, как мы увидим позднее, когда группой симметрии будет служить полная группа вращений, мы будем приписывать функции $\psi_m^{(l)}$ квантовые числа l и m , чтобы охарактеризовать ее поведение при вращении и инверсии (функция считается соответствующей m -й строке l -го неприводимого представления).

Итак, для системы с симметрией O может оказаться типичной следующая схема уровней:

$$\begin{array}{ll}
 \text{=====} & E; \quad \varphi_1^{(E)}, \varphi_2^{(E)}. \\
 \text{=====} & F_1; \quad \psi_1^{(F_1)}, \psi_2^{(F_1)}, \psi_3^{(F_1)}. \\
 \text{-----} & A_2; \quad \psi_1^{(A_2)}. \\
 \text{-----} & A_1; \quad \varphi_1^{(A_1)}. \\
 \text{=====} & F_2; \quad \psi_1^{(F_2)}, \psi_2^{(F_2)}, \psi_3^{(F_2)}. \\
 \text{=====} & E; \quad \psi_1^{(E)}, \psi_2^{(E)}. \\
 \text{-----} & A_1; \quad \psi_1^{(A_1)}.
 \end{array}$$

На этой схеме мы начертили два уровня, принадлежащих A_1 -представлению. Из того, что они изображены в виде уровней с различными энергиями, следует, что функции $\psi_1^{(A_1)}$ и $\varphi_1^{(A_1)}$ линейно независимы. Если бы эти функции были линейно зависимы, им должна была бы отвечать одна и та же энергия. Аналогично для двух уровней, обозначенных буквой E , функции $\psi_1^{(E)}$ и $\psi_2^{(E)}$ являются партнерами, преобразующимися по представлению E и соответствующими, таким

образом, одной и той же энергии. Функции $\varphi_1^{(E)}$ и $\varphi_2^{(E)}$ также являются партнерами, но функции φ и ψ не связаны между собой никакой линейной зависимостью.

§ 2. Теория возмущений

Невозмущенный гамильтониан H_0 был инвариантен относительно своей группы симметрии G . Предположим теперь, что на систему наложено некоторое возмущение V . Возмущенный гамильтониан

$$H = H_0 + V$$

будет иметь группу симметрии, которая должна быть некоторой подгруппой группы G . Если возмущение V обладает симметрией, которая *по крайней мере* не ниже симметрии гамильтониана H_0 , то группа G будет *по-прежнему* группой симметрии полного гамильтониана H . В этом случае возмущение не изменит возможных типов уровней. В самом деле, расщепления вырожденных уровней произойти не может. Рассмотрим, например, какой-нибудь уровень ε и его собственные функции $\psi_l^{(\mu)}$. Поскольку возмущение V инвариантно относительно всех операций группы G , функция

$$\varphi_l^{(\mu)} = V\psi_l^{(\mu)}$$

принадлежит l -й строке μ -го неприводимого представления. Но мы можем утверждать, что недиагональные элементы

$$(\psi_l^{(\mu)}, V\psi_j^{(\nu)})$$

матрицы возмущения равны нулю, а все диагональные элементы равны между собой, из-за чего и не происходит расщепления уровней. Докажем наше утверждение в более общем случае, поскольку это понадобится нам в дальнейшем. Мы утверждаем, что скалярное произведение двух функций, не принадлежащих *одной и той же* строке *одного и того же* неприводимого представления, равно нулю. Обозначим эти функции $\psi_l^{(\mu)}$ и $\varphi_j^{(\nu)}$. Унитарные операторы группы симметрии не изменяют скалярного произведения, поэтому

$$\begin{aligned} (\psi_l^{(\mu)}, \varphi_j^{(\nu)}) &= (O_R \psi_l^{(\mu)}, O_R \varphi_j^{(\nu)}) = \frac{1}{g} \sum_R (O_R \psi_l^{(\mu)}, O_R \varphi_j^{(\nu)}) = \\ &= \frac{1}{g} \sum_{kl} \sum_R (\psi_k^{(\mu)} D_{kl}^{(\mu)}(R), \varphi_l^{(\nu)} D_{lj}^{(\nu)}(R)) = \\ &= \frac{1}{g} \sum_{kl} (\psi_k^{(\mu)}, \varphi_l^{(\nu)}) \sum_R D_{kl}^{(\mu)*}(R) D_{lj}^{(\nu)}(R) = \\ &= \frac{1}{g} \sum_{kl} (\psi_k^{(\mu)}, \varphi_l^{(\nu)}) \frac{g}{n_\mu} \delta_{\mu\nu} \delta_{kl} \delta_{ij} = \frac{1}{n_\mu} \sum_k (\psi_k^{(\mu)}, \varphi_k^{(\nu)}) \delta_{\mu\nu} \delta_{ij}. \quad (6.1) \end{aligned}$$

Положив $\mu = \nu$, $l = j$, найдем, что скалярное произведение

$$(\psi_l^{(\mu)}, \varphi_l^{(\mu)}) \quad (6.2)$$

не зависит от l . В частном случае

$$\varphi_l^{(\mu)} = V\psi_l^{(\mu)}$$

мы получим тот же результат. Следует обратить особое внимание на то, что этот уровень не может расщепиться ни в каком приближении. Ибо если бы он расщепился, то это означало бы, что исходное представление, вопреки нашему предположению, было приводимым.

Если произойдет случайное вырождение, мы будем предполагать, что r -я система партнеров (образующих базис r -го неприводимого представления) обладает энергией E_r и что энергии E_r случайно совпадают друг с другом. Если на систему наложено какое-то симметричное возмущение V , то оно в лучшем случае может уничтожить это случайное вырождение. Если представление D такого уровня является суммой неприводимых представлений, каждое из которых входит в эту сумму ровно один раз, то в этом случае теория возмущений несложна, ибо, согласно (6.1), отличными от нуля будут только диагональные элементы представления, а согласно (6.2), они будут одинаковыми для всех партнеров:

$$(\psi_l^{(\mu)}, V\psi_l^{(\mu)}) = V_\mu.$$

Если же одно и то же неприводимое представление входит в представление D несколько раз, то появляются недиагональные элементы вида

$$(\psi_l^{(\mu)}, V\varphi_l^{(\mu)}) = V'_\mu.$$

Чтобы получить собственные функции нулевого порядка в этом случае, мы должны решить секулярное уравнение для всех функций, принадлежащих одной и той же строке одного и того же неприводимого представления. Сделать это нетрудно. Например, если какое-нибудь неприводимое представление встречается дважды, нам придется найти только определитель матрицы 2×2 , так как для всех l строк представления мы получим одно и то же секулярное уравнение.

Если возмущение V обладает более низкой симметрией, чем гамильтониан H_0 , то полный гамильтониан H будет обладать группой симметрии G' , являющейся некоторой подгруппой группы G . Предположим, что нам дано некоторое представление $D(G)$ группы G . Мы тотчас же получаем некоторое представление ее подгруппы G' , выбирая среди матриц $D(G)$ те, которые соответствуют элементам G' . Даже в том случае, когда представление $D(G)$ группы G неприводимо, представление подгруппы G' , получаемое нами по этому методу [назовем его $D'(G')$], может оказаться приводимым. Иначе говоря,

несмотря на то, что мы не можем найти подсистему базисных векторов представления $D(G)$, которая бы оставалась инвариантной относительно всех преобразований группы G , может случиться так, что мы сумеем найти какое-нибудь подпространство, инвариантное относительно всех преобразований подгруппы G' . Если сказанное перевести на язык физики, то это означает, что, несмотря на то что собственные функции, принадлежащие энергии ϵ , образуют базис неприводимого представления группы G , это представление для подгруппы G' может оказаться приводимым. В этом случае возмущение V расщепит уровень. Проиллюстрируем этот метод на нескольких примерах.

Предположим, что группой симметрии невозмущенного гамильтониана служит группа C_4 . Как показано в гл. 4, все неприводимые представления этой группы одномерны, но пара комплексно сопряженных представлений E отвечает одному и тому же уровню. Если мы наложим возмущение, обладающее симметрией группы C_2 , то вырожденный E -уровень расщепится на два уровня, принадлежащих представлению B группы C_2 .

Предположим далее, что группой симметрии G является группа C_{3v} . Уровни классифицируют по представлениям A_1 , A_2 , E группы C_{3v} . Уровни последнего типа двукратно вырождены. Если группа симметрии G' полного гамильтониана есть группа C_s , то вырождение исчезает. Чтобы найти те представления группы C_s , которые содержатся в представлении E группы C_{3v} , выпишем часть таблицы характеров группы C_{3v} , соответствующую операциям подгруппы C_s :

	E	σ_v
$E; x, y$	2	0

и воспользуемся соотношением (3.150), чтобы найти, какие неприводимые представления группы C_s содержатся в E . Для представления A' группы C_s найдем:

$$a_{A'} = \frac{1}{2} [2(1) + 0(1)] = 1,$$

для представления A'' :

$$a_{A''} = \frac{1}{2} [2(1) + 0(-1)] = 1,$$

поэтому E -уровень группы C_{3v} расщепится на уровни типа A' и A'' группы C_s .

В качестве еще одного примера предположим, что группой симметрии G является группа T тетраэдра. Рассмотрим уровень,

принадлежащий представлению F . Этот уровень будет трехкратно вырожденным. Характеры равны

	E	$C_2(3)$	$C_2(4)$	$C_2^2(4)$
F	3	-1	0	0

Предположим, что возмущение таково, что полный гамильтониан обладает группой симметрии $D_2 \equiv V$. Из приведенной выше таблицы отберем характеры для элементов подгруппы V :

	E	C_{2x}	C_{2y}	C_{2z}
F	3	-1	-1	-1

Из соотношения (3.150) и таблицы характеров группы V (см. табл. 14) находим

$$a_{A_1} = \frac{1}{4} [3(1) - 1(1) - 1(1) - 1(1)] = 0,$$

$$a_{B_1} = \frac{1}{4} [3(1) - 1(-1) - 1(-1) - 1(1)] = 1,$$

$$a_{B_2} = a_{B_3} = 1.$$

Итак, представление F группы T содержит представления B_1 , B_2 и B_3 группы V .

Далее, в случае представления F группы T предположим, что полный гамильтониан обладает группой симметрии C_3 . Выпишем ту часть таблицы характеров, которая относится к подгруппе C_3 :

	E	C_3	C_3^2
F	3	0	0

Пользуясь соотношением (3.150) и таблицей характеров для группы C_3 , найдем

$$a_A = \frac{1}{3} [3(1) + 0(1) + 0(1)] = 1.$$

Таким образом, F -уровень группы T расщепляется на A - и E -уровни группы C_3 .

Наконец, предположим, что полный гамильтониан обладает симметрией C_2 :

	E	C_2
F	3	-1

Из (3.150) получим

$$a_A = \frac{1}{2} [3(1) - 1(1)] = 1,$$

$$a_B = \frac{1}{2} [3(1) - 1(-1)] = 2.$$

Итак, F -уровень расщепляется на три невырожденных уровня, один из которых принадлежит представлению A , а два других — представлению B группы C_2 .

Задача. Рассмотрим систему, обладающую симметрией группы O . Предположим, что на эту систему наложено возмущение, которое понижает ее симметрию до симметрии: а) группы T , б) группы D_3 , в) группы V с тремя осями 2-го порядка, соединяющими середины противоположных ребер (см. фиг. 35), г) группы V с двумя из трех осей 2-го порядка, соединяющими середины противоположных ребер (см. фиг. 35), д) группы C_4 .

В каждом случае найдите, как уровни, принадлежащие представлениям E , F_1 и F_2 группы O , расщепляются в результате наложенного возмущения.

§ 3. Правила отбора

В § 1 настоящей главы мы рассмотрели классификацию уровней энергии по неприводимым представлениям группы симметрии невозмущенного гамильтониана. Коль скоро схема уровней получена, мы должны задать себе вопрос, каковы правила отбора для оптических переходов между различными (вырожденными) уровнями, или, в более общем виде, мы должны задать себе вопрос, какие элементы матрицы возмущения V обращаются в нуль.

Если случайного вырождения нет, то собственные функции каждого уровня образуют базис одного из неприводимых представлений группы симметрии. Матричный элемент величины f , соответствующий переходу между состояниями, принадлежащими μ - и ν -представлениям группы симметрии, будет иметь вид

$$f_{ij}^{\mu\nu} = \int \psi_i^{(\mu)*} f \psi_j^{(\nu)} d\tau = (\psi_i^{(\mu)}, f \psi_j^{(\nu)}), \quad (6.3)$$

где $\psi_i^{(\mu)}$ принадлежит i -й строке μ -представления, а $\psi_j^{(\nu)}$ принадлежит j -й строке ν -представления. Равенство (6.1) означает

$$\int \psi_i^{(\mu)*} \psi_j^{(\nu)} d\tau = (\psi_i^{(\mu)}, \psi_j^{(\nu)}) = 0, \quad \text{если } \mu \neq \nu \text{ или } i \neq j. \quad (6.4)$$

Если в равенстве (6.4) мы выберем в качестве μ -представления единичное представление (в случае единичного представления мы должны взять $\mu = 1$), то функцию $\psi_i^{(\mu)}$ можно выбрать равной константе (константа инвариантна относительно всех преобразований

точечной группы и вследствие этого принадлежит единичному представлению). Тогда (6.4) переписывается следующим образом:

$$\int \varphi_j^{(v)} d\tau = 0, \quad \text{если только } v \neq 1. \quad (6.5)$$

Пользуясь теоремой о разложении (3.193), можно сказать, что для любой функции

$$\int \psi d\tau = \int \psi^{(1)} d\tau = \frac{1}{g} \int \sum_R O_R \psi d\tau, \quad (6.6)$$

где $\psi^{(1)}$ означает ту часть функции ψ , которая принадлежит единичному представлению.

Равенство (6.5) легко вывести независимо для случая, когда v -представление одномерно. Интеграл от функции ψ по всему пространству не изменится, если мы преобразуем функцию ψ в $O_R \psi$, где R — любое вращение или отражение. Таким образом, для всех R , принадлежащих группе G ,

$$\int \psi d\tau = \int O_R \psi d\tau.$$

Для одномерного представления $O_R \psi = r \psi$, где r — некоторый числовой множитель, откуда следует, что

$$\int \psi d\tau = r \int \psi d\tau = 0,$$

если только r не равно 1 для всех R . Следовательно,

$$\int \psi^{(v)} d\tau = 0,$$

если только $v \neq 1$. Обобщение последнего доказательства на случай представлений большей размерности утомительно, в то время как доказательство, приведенное выше, носит весьма общий характер.

Теперь мы можем результат (6.1) сформулировать еще и следующим образом: произведение $\psi_i^{(\mu)*} \varphi_j^{(v)}$ содержит часть, остающуюся инвариантной относительно всех операций группы G тогда и только тогда, когда $\mu = v$, $i = j$. Что касается интеграла (6.3), то можно сказать, что $f_{ij}^{\mu v} = 0$, если только $f \varphi_j^{(v)}$ не содержит функции, принадлежащей i -й строке μ -представления. Если функция f является скаляром, то она принадлежит единичному представлению. Если мы рассматриваем дипольный момент системы, то f имеет три компоненты и т. д. Во всяком случае, функция (или функции) f , фигурирующая

в интеграле (6.3), является базисной функцией (базисными функциями) одного или нескольких неприводимых представлений группы G . Предположим, что f пробегает систему функций $\theta_k^{(p)}$, образующих базис p -представления группы G . В этом случае переход между μ - и ν -уровнями будет запрещен лишь при условии, что ни одно из произведений $\theta_k^{(p)}\phi_j^{(\nu)}$ или ни одна линейная комбинация таких произведений не принадлежит μ -представлению. Если μ -представление не содержится в произведении представлений $D^{(p)}$ и $D^{(\nu)}$, то соответствующий переход запрещен.

Пользуясь (5.15) при вычислении характера каждого элемента в произведении представлений, разложим это произведение на неприводимые представления и подсчитаем, используя (3.150), сколько раз каждое неприводимое представление входит в него. [После выполнения этих двух этапов вычислений мы получим коэффициенты ряда Клебша — Гордана (5.108).] При построении полной таблицы правил отбора более удобно следовать именно этому методу, нежели объединять эти два этапа и пользоваться соотношением (5.105). Проиллюстрируем метод на примере группы C_{3v} . При рассмотрении этого первого примера мы перепишем еще раз таблицу характеров (см. табл. 17), но в последующих примерах приводить таблицу мы не будем. К таблице характеров присоединим характеры всех произведений представлений:

C_{3v}	E	$C_3(2)$	$\sigma_v(3)$	
$A_1; z$	1	1	1	
$R_2; A_2$	1	1	-1	
$R_x, R_y; E; x, y$	2	-1	0	
$A_1 \times A_1$	1	1	$1 = A_1$	(6.7)
$A_1 \times A_2$	1	1	$-1 = A_2$	
$A_1 \times E$	2	-1	$0 = E$	
$A_2 \times A_2$	1	1	$1 = A_1$	
$A_2 \times E$	2	-1	$0 = E$	
$E \times E$	4	1	$0 = A_1 + A_2 + E$	

Ясно, что большую часть результатов можно получить, обозревая эту таблицу. Во-первых, произведение единичного представления и любого другого представления дает только последнее представление (так как $\psi_i^{(1)}\phi_j^{(\nu)} = \phi_j^{(\nu)}$). Во-вторых, произведение двух одномерных представлений есть представление одномерное и должно быть неприводимым. Единственным приводимым произведением представлений в рассматриваемой таблице является произведение $E \times E$.

Это представление четырехмерно, сумма квадратов модулей его характеров равна $(4)^2 + 2(1)^2 = 18$. Из (3.151) имеем

$$18 = g \sum_{\mu} a_{\mu}^2, \quad \text{или} \quad \sum_{\mu} a_{\mu}^2 = 3,$$

с единственным решением

$$a_{A_1} = a_{A_2} = a_E = 1,$$

так что

$$E \times E = A_1 + A_2 + E. \quad (6.8)$$

Тот же результат можно получить и из (3.150):

$$\begin{aligned} a_{A_1} &= \frac{1}{6} [(1)(4)(1) + (2)(1)(1) + (3)(0)(1)] = 1, \\ a_{A_2} &= \frac{1}{6} [(1)(4)(1) + (2)(1)(1) + (3)(0)(1)] = 1, \\ a_E &= \frac{1}{6} [(1)(4)(2) + (2)(1)(-1) + (3)(0)(0)] = 1. \end{aligned} \quad (6.8a)$$

Равенство (6.8) означает, что если мы возьмем произведения функций одной системы партнеров, принадлежащих представлению E , и функций другой системы партнеров, принадлежащих тому же представлению E , то мы получим четыре функции, образующие базис представления $E \times E$. Можно найти такую линейную комбинацию этих произведений функций, которая принадлежит представлению A_1 ; другая линейная комбинация будет принадлежать представлению A_2 и две линейные комбинации, образующие систему партнеров, будут принадлежать представлению E . Заметим, что в таблице характеров z принадлежит представлению A_1 , а x и y , образующие систему партнеров, принадлежат представлению E . Тройка функций $\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$ называется (полярным) вектором, если эти функции преобразуются как компоненты радиуса-вектора $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Таким образом, для любого вектора $\mathbf{P}$ компонента P_z принадлежит представлению A_1 , а компоненты P_x и P_y , составляющие систему партнеров, принадлежат представлению E . Если заданы два (полярных) вектора $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, мы имеем две системы партнеров, принадлежащих представлению E : $P_x, P_y; Q_x, Q_y$. Произведение представлений $E \times E$ имеет в этом случае базисные функции

$$P_x Q_x, \quad P_x Q_y, \quad P_y Q_x, \quad P_y Q_y.$$

В этом простом примере линейные комбинации, принадлежащие представлениям A_1, A_2, E , можно найти, рассматривая таблицу. Тем не менее мы получим этот результат непосредственно, чтобы

получше ознакомиться с произведением представлений. В § 2 гл. 4 мы выписали матрицы группы C_{3v} в представлении E :

$$\begin{array}{cccccc} E & C_3 & C_3^2 & \sigma_v & \sigma_{v'} & \sigma_{v''} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & 0 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix}, \end{array} \quad (6.9)$$

где базисными функциями были функции либо $e^{i\varphi}$ и $e^{-i\varphi}$, либо $x+iy$ и $x-iy$, либо P_x+iP_y и P_x-iP_y . Воспользуемся теперь соотношением (5.4), чтобы найти матрицы произведения представлений:

$$\begin{array}{ccc} E & C_3 & C_3^2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \varepsilon^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{bmatrix}, \\ \sigma_v & \sigma_{v'} & \sigma_{v''} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \varepsilon^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \varepsilon^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{array} \quad (6.10)$$

где строки и столбцы расположены в лексикографическом порядке. Заметим, что во всех матрицах связаны только компоненты 11 и 22 и компоненты 12 и 21. В силу этого матрицы приводимы. Матрицы, связывающие компоненты 11 и 22, являются матрицами представления E , и поэтому произведения

$$(P_x + iP_y) \times (Q_x + iQ_y) \quad \text{и} \quad (P_x - iP_y) \times (Q_x - iQ_y)$$

принадлежат представлению E . Взяв их линейные комбинации, мы сможем также утверждать, что

$$P_x Q_x - P_y Q_y \quad \text{и} \quad P_x Q_y + P_y Q_x$$

принадлежат E . Если взглянуть на матрицы, связывающие компоненты 12 и 21 [базисные функции $(P_x + iP_y)(Q_x - iQ_y)$ и $(P_x - iP_y)(Q_x + iQ_y)$], то можно заметить, что для представлений E , C_3 , C_3^2 они имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

а для представлений $\sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''$ — вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Взяв в качестве новых базисных функций линейные комбинации

$$(P_x + iP_y)(Q_x - iQ_y) + (P_x - iP_y)(Q_x + iQ_y) = 2(P_x Q_x + P_y Q_y)$$

и

$$(P_x + iP_y)(Q_x - iQ_y) - (P_x - iP_y)(Q_x + iQ_y) = 2i(P_y Q_x - P_x Q_y),$$

можно разложить эти произведения на неприводимые компоненты. Таким образом,

$$P_x Q_x + P_y Q_y$$

принадлежит представлению A_1 ,

$$P_x Q_y - P_y Q_x$$

принадлежит представлению A_2 ;

$$P_x Q_x + P_y Q_y$$

есть скалярное произведение полярных векторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ (компонента z инвариантна относительно всех операций группы C_{3v}) и, следовательно, является инвариантом (скаляром). Величина $P_x Q_y - P_y Q_x$ является z -компонентой векторного произведения $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$. Векторное произведение преобразуется как радиус-вектор при вращениях, но не меняет знака при инверсии. Величины такого типа называются *аксиальными векторами*. Мы можем сказать, таким образом, что z -компонента любого аксиального вектора принадлежит представлению A_2 группы C_{3v} .

По таблице характеров мы замечаем, что z (а следовательно, и P_z) принадлежит представлению A_1 . Произведение представлений $A_1 \times E = E$, поэтому типичными партнерами, принадлежащими произведению $A_1 \times E$, будут $\pm z$ (либо $\pm P_z$, либо $\pm Q_z$), умноженные на x и y (либо на P_x, P_y , либо на Q_x, Q_y). В результате мы обнаружим, что xz, yz принадлежат представлению E , то же относится и к

$$\begin{aligned} &P_x P_z, P_y P_z, P_x Q_z, P_y Q_z; \\ &P_z Q_x - P_x Q_z, P_y Q_z - P_z Q_y. \end{aligned}$$

Следовательно, x - и y -компоненты векторного произведения $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ принадлежат представлению E так же, как и x - и y -компоненты любого аксиального вектора. Часто аксиальный вектор обозначают символом R (R — означает вращение — типичный аксиальный вектор),

В таблице характеров мы будем относить компоненту R_z к представлению A_2 , в то время как компоненты R_x и R_y будут принадлежать представлению E .

Рассмотрим теперь правила отбора в случае той же самой группы симметрии C_{3v} . Матричные элементы задаются интегралами (6.3). Если $\mathbf{f} = (x, y, z)$, мы получим правила отбора для электрического дипольного излучения. Рассмотрим интегралы

$$\int \psi_i^{(\mu)*} \mathbf{f} \varphi_j^{(\nu)} d\tau, \quad (6.11)$$

где i пробегает значения от 1 до n_μ , а j — от 1 до n_ν . Переход будет запрещен (для электрического дипольного излучения) лишь при условии, если все эти интегралы обращаются в нуль. Далее мы сделаем следующее. Из таблицы нам известно, что z принадлежит представлению A_1 группы C_{3v} . Поэтому система функций $z\varphi_j^{(\nu)} (j=1, \dots, n_\nu)$ образует базис произведения $A_1 \times D^{(\nu)}$. Если $A_1 \times D^{(\nu)}$ не содержит $D^{(\mu)}$, то все интегралы (6.11) обращаются в нуль. Аналогично, x и y принадлежат представлению E , поэтому системы функций $x\varphi_j^{(\nu)}$, $y\varphi_j^{(\nu)} (j=1, \dots, n_\nu)$ образуют базис представления $E \times D^{(\nu)}$. Если $E \times D^{(\nu)}$ не содержит $D^{(\mu)}$, то все эти интегралы (матричные элементы x и y) обращаются в нуль. Следовательно, переход между уровнем, принадлежащим представлению $D^{(\nu)}$, и уровнем, принадлежащим представлению $D^{(\mu)}$, будет запрещен (для электрического дипольного излучения), если ни $A_1 \times D^{(\nu)}$, ни $E \times D^{(\nu)}$ не содержат представления $D^{(\mu)}$. Из таблицы (6.7) найдем

$$\begin{aligned} A_1 \times A_1 = A_1, \quad A_1 \times A_2 = A_2, \quad A_1 \times E = E, \\ E \times A_1 = E, \quad E \times A_2 = E, \quad E \times E = A_1 + A_2 + E. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Переходы $A_1 \leftrightarrow A_2$ запрещены.

Магнитный дипольный момент является аксиальным вектором, поэтому магнитные дипольные переходы будут запрещены, если ни $A_2 \times D^{(\nu)}$, ни $E \times D^{(\nu)}$ не содержат представления $D^{(\mu)}$. Из (6.7) имеем

$$\begin{aligned} A_2 \times A_1 = A_2, \quad A_2 \times A_2 = A_1, \quad A_2 \times E = E, \\ E \times A_1 = E, \quad E \times A_2 = E, \quad E \times E = A_1 + A_2 + E. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Поскольку пары $A_1 \leftrightarrow A_1$, $A_2 \leftrightarrow A_2$ не встречаются, магнитные дипольные переходы между двумя состояниями, принадлежащими представлению A_1 (или A_2), запрещены.

Следует отметить, что в случае, когда группой симметрии служит группа чистых вращений, нет никакого различия между аксиальными и полярными векторами, и правила отбора для электрического и магнитного дипольных излучений совпадают.

В качестве второго примера найдем правила отбора для электрического (и магнитного) дипольного излучения для системы с симметрией T . Все компоненты вектора принадлежат представлению F (см. табл. 21). Поэтому мы составляем произведение представлений $F \times A$, $F \times E$, $F \times F$ и, пользуясь соотношением (5.15), вычисляем характеры:

T	E	$C_2(3)$	$C_3(4)$	$C_3^2(4)$
$F \times A$	3	-1	0	0
$F \times E$	$\left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 3 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -1 \\ -1 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$
$F \times F$	9	-1	0	0

С помощью этой таблицы характеров и соотношения (3.150) получим

$$F \times A = F, \quad F \times E = 2F, \quad F \times F = A + E + 2F. \quad (6.14)$$

Следовательно, запрещенными являются переходы

$$A \leftrightarrow E, \quad A \leftrightarrow A, \quad E \leftrightarrow E.$$

В качестве последнего примера рассмотрим группу симметрии D_{2d} . Из таблицы характеров мы видим, что P_x и P_y являются партнерами, принадлежащими представлению E , а P_z принадлежит представлению B_2 . Произведения компонент полярных векторов такие, как $P_x Q_z$, $P_y Q_z$, либо $P_z Q_x$, $P_z Q_y$, либо $P_z Q_x - P_x Q_z$, $P_y Q_z - P_z Q_y$, образуют пары партнеров, принадлежащих представлению $E \times B_2 = E$. Итак, для любого аксиального вектора компоненты R_x и R_y образуют пару партнеров, принадлежащих представлению E . С другой стороны, компонента R_z принадлежит представлению A_2 . (Это можно усмотреть из геометрических соображений с помощью методов гл. 2. Рассмотрим какое-нибудь вращение вокруг оси z . Что произойдет с этим вращением, если мы сначала произведем поворот на 180° вокруг некоторой горизонтальной оси или же совершим отражение в какой-нибудь вертикальной плоскости? Другой метод, который надлежит испробовать читателю, состоит в разложении матриц представления $E \times E$ на неприводимые компоненты, что было продемонстрировано нами на примере группы C_{3v} .)

Чтобы найти правила отбора для электрического дипольного излучения, мы должны определить, какие представления содержатся в произведениях представлений B_2 и E со всеми представлениями группы D_{2d} :

$$\begin{aligned} B_2 \times A_1 &= B_2, & B_2 \times A_2 &= B_1, & B_2 \times B_1 &= A_2, \\ B_2 \times B_2 &= A_1, & B_2 \times E &= E, & E \times A_1 &= E, \\ E \times A_2 &= E, & E \times B_1 &= E, & E \times B_2 &= E, \\ E \times E &= A_1 + A_2 + B_1 + B_2. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Замежим, что в таких группах, как группа D_{2d} , где имеется выделенная ось (направление оси z), матричные элементы P_z отличаются от матричных элементов P_x и P_y . Это различие напоминает различие между π - и σ -компонентами в обычной спектроскопии. Для компоненты P_z разрешенными переходами оказываются переходы

$$A_1 \leftrightarrow B_2, \quad A_2 \leftrightarrow B_1, \quad E \leftrightarrow E,$$

в то время как для P_x и P_y разрешенными оказываются переходы

$$A_1, \quad A_2, \quad B_1, \quad B_2 \leftrightarrow E.$$

В случае магнитного дипольного излучения R_z принадлежит представлению A_2 , а R_x и R_y — представлению E . Для R_z

$$\begin{aligned} A_2 \times A_1 &= A_2, & A_2 \times A_2 &= A_1, & A_2 \times B_1 &= B_2, \\ A_2 \times B_2 &= B_1, & A_2 \times E &= E, \end{aligned}$$

поэтому разрешенными переходами являются

$$A_1 \leftrightarrow A_2, \quad B_1 \leftrightarrow B_2, \quad E \leftrightarrow E.$$

Для R_x , R_y , а также для P_x и P_y разрешенными являются переходы

$$A_1, \quad A_2, \quad B_1, \quad B_2 \leftrightarrow E.$$

Задача. Найдите правила отбора для электрических и магнитных дипольных переходов, если группой симметрии является а) группа D_{3d} , б) группа O .

Пользуясь результатами, полученными в случае „б“, укажите разрешенные переходы для схемы уровней, приведенной в § 1 настоящей главы.

При вычислении матричных элементов, аналогичных матричным элементам (6.3), мы фактически имеем дело с произведением представлений, состоящим из трех сомножителей. Функция f в (6.3) может пробегать по базисным функциям $\theta_k^{(p)}$ некоторого неприводимого представления (например, p -представления). Совокупность функций $\psi_i^{(\mu)*}$ совпадает во всех рассматриваемых случаях с совокупностью функций $\psi_i^{(\mu)}$, поэтому если мы возьмем все произведения, состоящие из трех функций $\psi_i^{(\mu)*} \theta_k^{(p)} \varphi_j^{(v)}$, то получим какое-то представление, которое следует обозначить $D^{(\mu)} \times D^{(p)} \times D^{(v)}$. До сих пор наш метод сводился к тому, чтобы установить, содержит ли произведение $D^{(p)} \times D^{(v)}$ представление $D^{(\mu)}$. Но произведение трех представлений можно разлагать в любом порядке. Окончательный результат должен всегда получаться один и тот же. Иначе говоря, мы могли бы сначала взять произведение $D^{(\mu)} \times D^{(v)}$ и посмотреть, содержится ли

в нем представление $D^{(\mu)}$. (Если подынтегральное выражение состоит из нескольких сомножителей, число их может быть произвольным, то общий метод состоит в том, чтобы взять произведение представлений, отвечающих сомножителям, $D^{(1)} \times D^{(2)} \times D^{(3)} \times \dots$ и посмотреть, содержит ли оно единичное представление.) Например, в случае группы D_{2d} мы образуем произведения, перечисленные в табл. 23.

Таблица 23

$A_1 \times A_1 = A_1$	$A_1 \times A_2 = A_2$	$A_1 \times B_1 = B_1$	$A_1 \times B_2 = B_2$	$A_1 \times E = E$
$A_2 \times A_2 = A_1$	$A_2 \times B_1 = B_2$	$A_2 \times B_2 = B_1$	$A_2 \times E = E$	
	$B_1 \times B_1 = A_1$	$B_1 \times B_2 = A_2$	$B_1 \times E = E$	
		$B_2 \times B_2 = A_1$	$B_2 \times E = E$	
$E \times E = A_1 + A_2 + B_1 + B_2$				

Чтобы найти правила отбора для электрического дипольного излучения, мы отыскиваем в разложении произведений представления B_2 (матричный элемент P_z) или E (матричный элемент P_x и P_y). В табл. 23 переходы первого типа заключены в овальные рамки, а переходы второго типа — в прямоугольные рамки.

Разумеется, результаты получаются те же, что и раньше.

Задача. Примените этот метод к нахождению правил отбора для дипольного излучения в случае симметрии группы T .

До сих пор мы тщательно следили за тем, чтобы все наши функции были независимыми. Например, когда мы записывали матричные элементы

$$\int \psi_i^{(\mu)*} f \psi_j^{(\nu)} d\tau,$$

то подразумевали, что $\nu \neq \mu$, или же, если μ - и ν -представления были одинаковыми, считали, что функции ψ и ϕ образуют две независимые системы партнеров. Функции ψ и ϕ одинаковы для диаго-

Таблица 24

C_{3v}	E	$C_3(2)$	$\sigma_v(3)$
E	2	-1	0
$E \times E$	4	1	0
$[E \times E]$	3	0	1
$\{E \times E\}$	1	1	-1

нальных матричных элементов оператора f . В этом случае мы должны рассматривать симметризованные кронекеровские произведения, обсуждением которых мы занимались в § 2 гл. 5. Чтобы проиллюстрировать, чем отличаются друг от друга различные типы произведений, возьмем для примера группу C_{3v} . Характеры различных кронекеровских произведений приведены в табл. 24. Чтобы продемонстрировать, как мы получаем такую таблицу, рассмотрим элемент C_3 . Найдем

$$\chi(C_3) = -1, \quad \chi(C_3^2) = -1,$$

так что

$$[\chi \times \chi(C_3)] = \frac{1}{2} [(-1)^2 - 1] = 0.$$

Для элемента σ_v характер

$$\chi(\sigma_v) = 0,$$

но

$$\chi(\sigma_v^2) = \chi(E) = 2$$

и, следовательно,

$$[\chi \times \chi(\sigma_v)] = \frac{1}{2} [0^2 + 2] = 1.$$

Разлагая произведения на неприводимые представления, имеем $E \times E = A_1 + A_2 + E$, $[E \times E] = A_1 \times E$, $\{E \times E\} = A_2$. (6.16)

Наконец, если мы положим $\mu = \nu$, а функции ψ и ϕ будут одними и теми же функциями (что будет иметь место в случае диагональных матричных элементов), то все антисимметричные произведения будут тождественно равны нулю и мы получим только симметричные произведения представлений. Например, x и y в группе C_{3v} являются партнерами, принадлежащими представлению E . Взяв произведения x и y , мы не сможем построить базис произведения представлений $E \times E$, а вместо этого получим базис для симметричного произведения представлений $[E \times E]$. Независимыми будут только три произведения: x^2 , xy и y^2 . Ранее при рассмотрении правил отбора для магнитного дипольного излучения [см. (6.13)] мы обнаружили, что два различных состояния, принадлежащих представлению E , оказались связанными посредством компоненты R_z , принадлежащей представлению A_2 . Для матричных диагональных элементов дело обстоит иначе. Другими словами, все интегралы

$$\int \psi_i^{(E)*} f \psi_j^{(E)} d\tau$$

для функции f , принадлежащей представлению A_2 , равны нулю, ибо если мы сначала образуем произведения $\psi_i^{(E)*} \psi_j^{(E)}$, то получим симметричное произведение представлений $[E \times E]$, которое [см. ниже

(6.17)] не содержит представления A_2 . Этот результат формулируем и по-другому: единичное представление не содержится в произведении $[E \times E] \times A_2$, хотя оно и содержится в произведении $E \times E \times A_2$. Когда функции ψ и φ одинаковы, мы вынуждены пользоваться симметричным произведением $[E \times E]$. Раньше мы действовали в ином порядке: взяв сначала произведения $f\psi_j^{(E)}$, получали представление $E \times A_2 = E$. (Так как A_2 и E — различные представления, то этот наш шаг был, безусловно, верен.) Затем делалась попытка объединить $E \times A_2 = E$ с представлением, базисными функциями которого служат $\psi_i^{(E)*}$, в результате чего мы имеем $E \times E = A_1 + A_2 + E$. Но этот шаг уже неверен, ибо функции, получающиеся от произведения $E \times A_2$, связаны с базисными функциями представления E и результат должен быть симметризован. Проиллюстрируем сказанное на примере группы C_{3v} .

Для первого уровня возьмем функции

$$\psi_1^{(E)} = e^{l\varphi} \quad \text{и} \quad \psi_2^{(E)} = e^{-l\varphi},$$

для второго —

$$\varphi_1^{(E)} = e^{-2l\varphi} \quad \text{и} \quad \varphi_2^{(E)} = e^{2l\varphi}$$

и выберем функцию $f = R_z$, принадлежащую представлению A_2 . Если мы будем действовать так же, как и раньше, т. е. рассмотрим переходы между этими двумя уровнями, то подынтегральные выражения наших матричных элементов будут иметь вид

$$R_z e^{\pm 3l\varphi} \quad \text{и} \quad R_z e^{\pm l\varphi}.$$

Чтобы получить интеграл, не обращающийся в нуль, мы должны суметь найти какую-нибудь линейную комбинацию этих четырех произведений функций, которая принадлежала бы единичному представлению A_1 . Это достигается с помощью *антисимметричной* комбинации $R_z \sin 3\varphi$. Если же мы возьмем диагональные элементы для первого уровня, то подынтегральные выражения будут равны R_z и $R_z e^{\pm 2l\varphi}$, и мы не сможем составить функцию, принадлежащую единичному представлению.

Общий метод нахождения правил отбора для диагональных матричных элементов состоит в том, что строят симметричное произведение $[D^{(\mu)} \times D^{(\mu)}]$ для каждого неприводимого представления группы симметрии, после этого смотрят, какие произведения содержат то представление, которому принадлежит f .

Для группы C_{3v} мы находим следующие симметричные произведения:

$$[A_1 \times A_1] = A_1, \quad [A_2 \times A_2] = A_1, \quad [E \times E] = A_1 + E. \quad (6.17)$$

Электрический дипольный момент принадлежит представлению $A_1 + E$. Так как представление A_1 и (или) представление E входят каждый

раз в правую часть равенств (6.17), мы заключаем, что ни один из диагональных элементов электрического дипольного момента в нуль не обращается. Магнитный дипольный момент принадлежит представлению $A_2 + E$. Так как представление A_2 и (или) представление E встречаются только в произведении $[E \times E]$, мы приходим к выводу о том, что диагональные элементы магнитного дипольного момента обращаются в нуль для состояний типа A_1 и A_2 .

Пользуясь табл. 19, для группы D_{2d} находим

D_{2d}	E	C_2	$S_4(2)$	$C_2(2)$	$\sigma_d(2)$
$[E \times E]$	3	3	-1	1	1

$$[A_1 \times A_1] = [A_2 \times A_2] = [B_1 \times B_1] = [B_2 \times B_2] = A_1, \quad (6.18)$$

$$E \times E = A_1 + B_1 + B_2.$$

Электрический дипольный момент принадлежит представлению $B_2 + E$; единственным необращающимся в нуль диагональным элементом является диагональный элемент для состояния типа E . Магнитный дипольный момент принадлежит представлению $A_2 + E$; все его диагональные элементы равны нулю.

Задача. Найдите правила отбора для диагональных элементов электрического и магнитного дипольных моментов, если группой симметрии является а) группа D_{3d} ; б) группа O .

Рассмотрим далее правила отбора для электрического квадрупольного момента. Тензор второго ранга в трехмерном пространстве есть, по определению, любая совокупность девяти величин A_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), которые при вращениях и отражениях преобразуются как произведение компонент двух независимых векторов. Так, если преобразование координат имеет вид

$$x'_i = \sum_k a_{ik} x_k, \quad (6.19)$$

то

$$x'_i y'_j = \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} x_k y_l \quad (6.20)$$

и компоненты тензора второго ранга должны преобразовываться следующим образом:

$$A'_{ij} = \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} A_{kl}. \quad (6.21)$$

Говорят, что тензор симметричен, если

$$A_{ij} = A_{ji}. \quad (6.22)$$

Симметричный тензор второго ранга в трехмерном пространстве имеет шесть независимых компонент. Типичный симметричный тензор получается из произведений координат x , y , z :

$$\begin{bmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{bmatrix}.$$

Тензор квадрупольного момента симметричен, но обладает еще и дополнительным свойством, состоящим в том, что его след равен нулю, т. е.

$$A_{xx} + A_{yy} + A_{zz} = 0,$$

поэтому независимых компонент (сферических функций с $l = 2$) у него только пять. Чтобы найти правила отбора для электрических квадрупольных переходов, мы должны сначала распределить компоненты соответствующего симметричного тензора по различным неприводимым представлениям группы симметрии.

Так же как в нашем первом примере, мы вновь выберем группу $\mathcal{C}_{3v}$. Поскольку z принадлежит представлению A_1 , z^2 будет также принадлежать представлению A_1 . Произведения zx и zy являются парой партнеров, принадлежащих представлению $A_1 \times E = E$. Произведения x^2 , xy , y^2 образуют базис симметричного произведения представлений $[E \times E] = A_1 + E$. Легко видеть, что $x^2 + y^2$ принадлежит A_1 , а $x^2 - y^2$ и xy составляют пару партнеров, принадлежащих представлению E . Итак, компоненты симметричного тензора распределяются по представлениям следующим образом:

$$A_1: \begin{Bmatrix} A_{zz} \\ A_{xx} + A_{yy} \end{Bmatrix}; \quad A_2: \text{ни одной компоненты};$$

$$E: A_{yz}, A_{xz}; \quad A_{xx} - A_{yy}, \quad A_{xy}.$$

След тензора квадрупольного момента равен нулю, т. е.

$$A_{xx} + A_{yy} + A_{zz} = 0.$$

Но поскольку компоненты A_{zz} и $A_{xx} + A_{yy}$ независимо принадлежат представлению A_1 , то на результате это не скажется. Чтобы найти правила отбора для квадрупольных переходов, мы должны знать, содержатся ли представления A_1 и (или) E в произведении $D^{(\mu)} \times D^{(\nu)}$. Если речь идет о диагональных элементах, то нужно уметь отвечать на этот же вопрос и для симметричного произведения $[D^{(\mu)} \times D^{(\mu)}]$. Для группы $\mathcal{C}_{3v}$ имеем

$$\begin{aligned} A_1 \times A_1 &= A_1, & A_1 \times A_2 &= A_2, & A_1 \times E &= E, \\ A_2 \times A_2 &= A_1, & A_2 \times E &= E, & & \\ E \times E &= A_1 + A_2 + E. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Мы отыскиваем представления A_1 и (или) E в правой части равенств (6.23) и обнаруживаем, что электрические квадрупольные переходы $A_1 \leftrightarrow A_2$ запрещены. Точно так же для диагональных элементов мы образуем симметричные произведения

$$[A_1 \times A_1] = A_1, \quad [A_2 \times A_2] = A_1, \quad [E \times E] = A_1 + E \quad (6.24)$$

и обнаруживаем, что ни один из диагональных элементов в нуль не обращается.

Далее мы рассмотрим группу D_{2d} . Так как z принадлежит представлению B_2 , то z^2 принадлежит $B_2 \times B_2 = A_1$. Функции zx и zy являются партнерами, принадлежащими представлению $B_2 \times E = E$. Функции x^2 , xy и y^2 принадлежат симметричному произведению

$$[E \times E] = A_1 + B_1 + B_2.$$

Легко указать, к каким представлениям относятся те или иные функции: $x^2 + y^2$ принадлежит A_1 , xy принадлежит B_2 , $x^2 - y^2$ принадлежит B_1 . Таким образом, компоненты тензора распределяются по представлениям следующим образом:

$$A_1: \begin{Bmatrix} A_{zz} \\ A_{xx} + A_{yy} \end{Bmatrix}; \quad A_2: \text{компонент нет};$$

$$B_1: A_{xx} - A_{yy}; \quad B_2: A_{xy}; \quad E: A_{xz}, A_{yz}.$$

Условие равенства нулю следа тензора и в этом случае не влияет на наши результаты. Для переходов, которые должны происходить между уровнями, принадлежащими μ - и ν -представлениям, произведение $D^{(\mu)} \times D^{(\nu)}$ должно содержать по крайней мере одно из представлений A_1 , B_1 , B_2 или E . Из табл. 23 видно, что переходы $A_1 \leftrightarrow A_2$, $B_1 \leftrightarrow B_2$ запрещены. Из (6.18) вытекает, что вследствие симметрии диагональные элементы должны обращаться в нуль.

Большой интерес представляет группа T . Здесь x , y , z — партнеры, принадлежащие представлению F . Произведение $[F \times F]$ имеет характеры, равные 6, 2, 0, 0, так что $[F \times F] = A + E + F$. Выписывая матрицы произведения $[F \times F]$, мы могли бы найти функции, принадлежащие различным неприводимым представлениям, но эти же функции можно легко получить, заметив следующее. Мы видим, что $x^2 + y^2 + z^2$ принадлежит представлению A , $x^3 + \epsilon y^3 + \epsilon^2 z^3$ и $x^2 + \epsilon^2 y^2 + \epsilon z^2$ принадлежит E , а xy , xz и yz принадлежит F . Поэтому компоненты тензора квадрупольного момента по представлениям распределяются следующим образом:

$$A: A_{xx} + A_{yy} + A_{zz}; \quad E: \begin{Bmatrix} A_{xx} + \epsilon A_{yy} + \epsilon^2 A_{zz} \\ A_{xx} + \epsilon^2 A_{yy} + \epsilon A_{zz} \end{Bmatrix}; \quad F: A_{xy}, A_{yz}, A_{zx}.$$

След тензора квадрупольного момента равен нулю; на сей раз это обстоятельство имеет значение: функция, которую мы приписали представлению A , на самом деле равна нулю. Поэтому при нахождении правил отбора мы должны огыскивать в произведении представлений представления E и (или) F (но не A). Имеем

$$\begin{aligned} A \times A &= A, & A \times E &= E, & A \times F &= F, \\ E \times E &= E \times 2A, & E \times F &= 2F, \\ F \times F &= A + E + 2F. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Запрещены переходы $A \leftrightarrow A$.

Для диагональных элементов получаем

$$[A \times A] = A, \quad [E \times E] = A + E, \quad [F \times F] = A + E + F, \quad (6.26)$$

вследствие чего диагональный элемент для состояния типа A равен нулю.

Задача. Найдите правила отбора для квадрупольных переходов, если группой симметрии является а) группа D_{3d} ; б) группа O .

Применявшиеся нами методы можно обобщить и на случай тензоров более высокого ранга. Мы еще вернемся к этой задаче позднее, после того как рассмотрим группы вращений.

§ 4. Связанные системы

Развитые нами соображения о произведении представлений можно применять также и к связанным системам. Начнем с двух независимых систем с радиусами-векторами $\mathbf{r}$ и $\bar{\mathbf{r}}$ соответственно. Гамильтонианы обеих систем записываются в одном и том же виде и инвариантны относительно одной и той же группы. Если мы будем рассматривать какой-нибудь оператор, принадлежащий группе симметрии, и окажется, что этот оператор действует на координаты первой системы, мы будем обозначать его O_R (оператор принадлежит группе G), если же оператор действует на координаты второй системы, мы будем обозначать его $O_{\bar{R}}$ (принадлежит группе $\bar{G}$). Элементы R и $\bar{R}$ будут обозначать одно и то же геометрическое преобразование, применяемое к системам 1 и 2 соответственно. Если мы рассматриваем отдельно систему 1, то ее состояния можно классифицировать по ее группе симметрии. Ее волновые функции мы будем обозначать $\psi_i^{(\mu)}$. Аналогично волновые функции системы 2 мы обозначим $\bar{\psi}_i^{(\mu)}$. Если системы не связаны, то полная энергия равна сумме энергий отдельных систем, а гамильтониан $H = H_1 + H_2$ остается инвариантным относительно всех операций $O_R O_{\bar{S}}$. (Эти произведения элементов группы G и эле-

ментов группы $\bar{G}$ образуют группу — прямое произведение групп $G \times \bar{G}$. Следует обратить внимание на то, что оператор R действует на координаты первой системы, а оператор $\bar{S}$ действует только на координаты второй системы.) Если же теперь эти системы будут связаны друг с другом, мы добавим к гамильтониану члены, зависящие от расстояния между этими двумя системами. Такие операторы, как $O_R O_{\bar{S}}$, не оставляют этот член, учитывающий взаимодействие, инвариантным, за исключением того случая, когда $S = R$, т. е. когда обе системы подчинены одной и той же операции симметрии. Таким образом, при наличии взаимодействия группа симметрии полного гамильтониана состоит из произведений вида $O_R O_{\bar{R}}$, где R и $\bar{R}$ — одна и та же геометрическая операция, применяемая к координатам систем 1 и 2 соответственно. (Эта группа изоморфна группе G , состоящей из элементов R .) Предположим, что не связанные между собой системы находятся в состояниях с собственными функциями $\psi_i^{(\mu)}$ и $\bar{\psi}_j^{(\nu)}$. Включение взаимодействия снижает группу симметрии от совокупности всех операций $O_R O_{\bar{S}}$ до некоторой подгруппы операций $O_R O_{\bar{R}}$. Таким образом, наша задача схожа с задачами о возмущениях, рассмотренными в § 2 настоящей главы, где возмущение приводило к ограничению группы симметрии до одной из ее подгрупп. Произведения волновых функций $\psi_i^{(\mu)} \bar{\psi}_j^{(\nu)}$, образующие базис неприводимого представления группы, состоящей из всех элементов $R\bar{S}$ (поэтому эти произведения и должны принадлежать одному и тому же вырожденному состоянию), также дают нам некоторое представление подгруппы, состоящей из элементов $R\bar{R}$. Но это представление будет приводимым, и вырожденные состояния будут расщепляться за счет взаимодействия. Выберем матрицы представления одинаковыми и для группы G и для группы $\bar{G}$, так что $D_{ik}^{(\mu)}(R) = D_{ik}^{(\mu)}(\bar{R})$. Тогда

$$O_R O_{\bar{R}} \psi_i^{(\mu)} \bar{\psi}_j^{(\nu)} = (O_R \psi_i^{(\mu)}) (O_{\bar{R}} \bar{\psi}_j^{(\nu)}) = \sum_{k,l} \psi_k^{(\mu)} \bar{\psi}_l^{(\nu)} D_{ki}^{(\mu)}(R) D_{lj}^{(\nu)}(\bar{R}). \quad (6.27)$$

Мы видим, что (6.27) формально совпадает с произведением представлений, в котором функции ψ относятся к одной и той же системе. Чтобы найти те типы состояний полной системы, которые содержатся среди произведений $\psi_i^{(\mu)} \bar{\psi}_j^{(\nu)}$, мы должны (так же, как это делалось раньше) разложить произведение представлений $D^{(\mu)} \times D^{(\nu)}$ на неприводимые.

В этом случае мы применяем к конечным группам симметрии тот же метод, который обычно применяют к группе вращений. Если рассматривается группа вращений (т. е. электроны находятся в центральном поле атома, где группой симметрии является полная группа вращений), то отдельные электроны распределяются по моментам

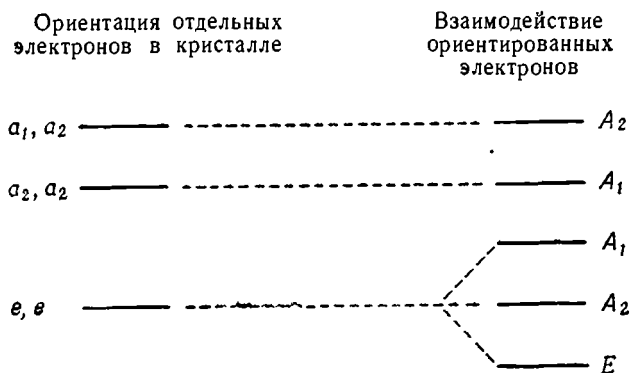
количества движения (неприводимым представлениям) l_1, l_2 и т. д. Если имеются члены, описывающие взаимодействие, нам требуется найти, как произведение функций распадается на линейные комбинации, принадлежащие различным значениям полного момента количества движения L (т. е. различным неприводимым представлениям полного гамильтониана).

Рассмотрим, например, электрон в атоме, находящемся в кристалле. Если мы пренебрежем взаимодействием между электронами в атоме и предположим, что поле, создаваемое ионами решетки, велико, то состояния отдельных электронов будут классифицироваться по представлениям группы симметрии поля внутри кристалла. Будем обозначать представления для отдельных электронов малыми буквами a, e, f , а большие сохраним за представлениями всей системы.

Предположим, что группой симметрии является группа C_{3v} . Пусть первый электрон находится в состоянии, принадлежащем представлению a , а второй — в состоянии, принадлежащем представлению e . Состояние всей системы в целом будет в этом случае принадлежать представлению $a \times e = E$. (Этот результат в какой-то мере аналогичен результату для группы вращений, когда $l_1 = 0$, так что $L = l_2$. Однако ясно, что это характерно для всех уровней, принадлежащих одномерным представлениям конечных групп симметрии.) Если оба электрона находятся в состояниях, принадлежащих представлению e , то вся система в целом будет принадлежать представлению $e \times e = A_1 + A_2 + E$. Схема уровней энергии могла бы быть такой, как показано в табл. 25.

Таблица 25

Сильное поле внутри кристалла



Здесь мы не учитываем тождественность частиц (принцип Паули). Наши результаты остаются справедливыми, если одночастичные состояния, от которых мы отталкиваемся, не одинаковы для обеих систем.

Мы могли бы также попытаться найти для взаимодействующих систем волновые функции, принадлежащие данной строке данного неприводимого представления. Иначе говоря, мы можем задать вопрос: какие линейные комбинации произведений $\psi_i^{(\mu)}\bar{\psi}_j^{(\nu)}$ определяют $\Psi_k^{(\rho)}$? (К этому сводится задача о нахождении коэффициентов Клебша — Гордана для кристаллографических точечных групп.) Для конечных групп эти вычисления просты (на самом деле мы уже проводили эти вычисления). Напомним, что мы находили произведение любых двух представлений группы симметрии. Затем мы разлагали это произведение и получали те линейные комбинации произведений функций, которые принадлежат различным неприводимым представлениям. Например, для группы C_{3v} мы получили, что $A_1 \times A_1 = A_1$. В наших последних обозначениях это произведение запишется в виде $a_1 \times a_1 = A_1$. В терминах базисных функций получим

$$\Psi_1^{(A_1)} = \psi_1^{(a_1)}\bar{\psi}_1^{(a_1)}. \quad (6.28)$$

Точно так же $a_1 \times e = E$, следовательно,

$$\Psi_1^{(E)} = \psi_1^{(a_1)}\bar{\psi}_1^{(e)} \quad \text{и} \quad \Psi_2^{(E)} = \psi_1^{(a_1)}\bar{\psi}_2^{(e)}. \quad (6.29)$$

Наконец мы получили соотношение

$$e \times e = A_1 + A_2 + E;$$

для этого мы нашли произведение представлений (6.10) и разложили его на неприводимые компоненты. В наших новых обозначениях этот результат будет выглядеть так:

$$\Psi_1^{(A_1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1^{(e)}\bar{\psi}_2^{(e)} + \psi_2^{(e)}\bar{\psi}_1^{(e)}), \quad (6.30)$$

$$\Psi_1^{(A_2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1^{(e)}\bar{\psi}_2^{(e)} - \psi_2^{(e)}\bar{\psi}_1^{(e)}), \quad (6.31)$$

$$\Psi_1^{(E)} = \psi_1^{(e)}\bar{\psi}_1^{(e)}, \quad \Psi_2^{(E)} = \psi_2^{(e)}\bar{\psi}_2^{(e)}. \quad (6.32)$$

Аналогичным образом для группы T мы находим нужные линейные комбинации произведений функций, принадлежащие представлению F (стр. 211). Так, мы находим, что

$$\psi_1^{(f)}\bar{\psi}_1^{(f)} + \psi_2^{(f)}\bar{\psi}_2^{(f)} + \psi_3^{(f)}\bar{\psi}_3^{(f)}$$

принадлежит представлению A_1 и, следовательно,

$$\Psi_1^{(A_1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\psi_1^{(f)}\bar{\psi}_1^{(f)} + \psi_2^{(f)}\bar{\psi}_2^{(f)} + \psi_3^{(f)}\bar{\psi}_3^{(f)}). \quad (6.33)$$

Кроме того, имеем

$$\Psi_1^{(E)} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\psi_1^{(f)} \bar{\psi}_1^{(f)} + \epsilon \psi_2^{(f)} \bar{\psi}_2^{(f)} + \epsilon^2 \psi_3^{(f)} \bar{\psi}_3^{(f)}) \quad (6.34)$$

и

$$\Psi_2^{(E)} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\psi_1^{(f)} \bar{\psi}_1^{(f)} + \epsilon^2 \psi_2^{(f)} \bar{\psi}_2^{(f)} + \epsilon \psi_3^{(f)} \bar{\psi}_3^{(f)}). \quad (6.35)$$

Так как

$$f \times f = A + E + 2F,$$

то существуют две системы функций (для связанных систем), принадлежащие представлению F . (Такая ситуация не встречается для двух частиц в случае центрального поля; при данных l_1 и l_2 каждое значение момента количества движения L встречается только один раз. Если же мы имеем больше двух частиц, то возникает та же проблема.) Все, что мы можем сделать, состоит в задании двух систем партнеров, принадлежащих представлению F . В этом случае собственные комбинации нулевого порядка следует находить, решая секулярное уравнение, как мы уже указывали в § 2 настоящей главы. Таким образом, получим:

$$\begin{aligned} \Psi_1^{(F)} &= \psi_2^{(f)} \bar{\psi}_3^{(f)}, & \text{или} & & \psi_3^{(f)} \bar{\psi}_2^{(f)}, \\ \bar{\Psi}_2^{(F)} &= \psi_3^{(f)} \bar{\psi}_1^{(f)}, & \text{или} & & \psi_1^{(f)} \bar{\psi}_3^{(f)}, \\ \Psi_3^{(F)} &= \psi_1^{(f)} \bar{\psi}_2^{(f)}, & \text{или} & & \psi_2^{(f)} \bar{\psi}_1^{(f)}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Задача. Рассмотрите для группы симметрии D_{2d} все комбинации индивидуальных состояний двух частиц. Выразите собственные функции состояний связанных систем через волновые функции отдельных частиц.

ГЛАВА 7

СИММЕТРИЧЕСКАЯ ГРУППА

Симметрическая группа S_n — группа всех перестановок n символов — имеет фундаментальное значение как для математики, так и для физики. Для математика решение задачи о нахождении неприводимых представлений группы S_n является одним из классических примеров использования алгебраических методов. Несмотря на все усилия, которые были затрачены на исследование групп перестановок, их и поныне можно еще использовать как средство для получения новых замечательных комбинаторных формул. Разбиение тензоров на классы неприводимых тензоров относительно любой группы линейных преобразований в случае n измерений проводится легко, коль скоро известны представления симметрических групп. В физике, если мы рассматриваем систему, состоящую из n тождественных частиц, группа симметрии гамильтониана такой системы будет содержать группу S_n . Классификация атомных и ядерных состояний существенно зависит от свойств группы S_n .

В данной главе мы найдем характеры и матрицы неприводимых представлений группы S_n . К этой задаче мы будем подходить, используя несколько различных методов. Некоторые из них отличаются чрезвычайной мощностью (и выглядят очень „учено“!), другие же изобретены физиками и используются ими вместо хорошо известных математических методов.

§ 1. Вывод характеров группы из характеров ее подгруппы

В § 5 гл. 3 мы указывали, что если нам удастся найти простые характеры для инвариантной подгруппы группы G , то мы можем сразу же вывести и некоторые простые характеры самой группы G . Однако этот результат не особенно нам полезен. При $n > 4$ симметрическая группа S_n имеет только одну инвариантную подгруппу: знакопеременную группу $\mathcal{A}_n$ индекса два. Из двух одномерных представлений фактор-группы $S_n/\mathcal{A}_n$ мы выводим два очевидных одномерных представления S_n : единичное (симметричное) представление с характером (матрицей), равным единице для всех элементов группы S_n , и антисимметричное представление с характером, равным $+1$ для

четных и -1 для нечетных перестановок. Все другие неприводимые представления являются точными. Нам требуется установить некоторую связь между простыми характерами группы G и простыми характерами *любой* из ее подгрупп. Эту цель можно достичь с помощью теоремы Фробениуса, к выводу которой мы теперь и приступаем.

Пусть группа G порядка g имеет какую-то подгруппу H порядка h . Предположим, что нам задано некоторое представление $D(G)$ группы G . Выбрав из матриц $D(G)$ те, которые соответствуют элементам подгруппы H , мы тотчас же получаем представление подгруппы H . Представление подгруппы H , которое мы получим таким способом [будем называть его $D'(H)$], может оказаться приводимым, даже если представление $D(G)$ является неприводимым представлением группы G . Иными словами, даже в том случае, когда мы не сумеем найти подмножества векторов базиса представления $D(G)$, которое оставалось бы инвариантным относительно всех преобразований $D(G)$, мы, быть может, сумеем найти такое их подмножество, которое окажется инвариантным относительно части этих преобразований $D'(H)$. (Такое превращение неприводимого представления в приводимое при понижении симметрии, т. е. при переходе к подгруппе первоначальной группы симметрии, и послужило основой для применения теории групп к задачам теории возмущений в гл. 6.)

Поставим теперь вопрос, обратный вопросу предыдущего абзаца. Может случиться так, что найти неприводимые представления для подгруппы H окажется легче, чем для группы G (поскольку порядок подгруппы H меньше порядка группы G). Можно ли вывести характеры группы G из характеров ее подгруппы H ?

Разобьем элементы группы G на классы K_i ; число элементов в классе K_i равно g_i . Обозначим простые характеры группы G через $\chi_i^{(\mu)}$, а соответствующие представления — через $D^{(\mu)}(G)$. Далее, два элемента подгруппы H , которые первоначально находились в одном и том же классе K_i в группе G , могут не принадлежать одному и тому же классу в группе H , поскольку элемент, который осуществляет преобразование, может не принадлежать подгруппе H ; следовательно, некоторые элементы в классе K_i в группе G *не принадлежат* подгруппе H . С другой стороны, два элемента, которые оказываются в одном и том же классе в подгруппе H , *непрерменно* принадлежат одному и тому же классу в группе G . При образовании подгруппы H из группы G было выбрано только h_i элементов из общего числа их g_i ; h_i из этих элементов принадлежит классу K_{i_1} , h_{i_2} — классу K_{i_2} и т. д. в подгруппе H . Обозначим простые характеры группы H символами $\phi_{i_1}^{(\mu)}$, а соответствующие представления — символами $\Delta^{(\mu)}(H)$. Ранее мы уже видели, что если исходить из $D^{(\mu)}(G)$ и рассматривать только элементы R , входящие в подгруппу H , то

получится некоторое представление (вообще говоря, приводимое) подгруппы H :

$$D^{(\mu)}(R) = \sum_{\nu} a_{\mu\nu} \Delta^{(\nu)}(R); \quad R \text{ принадлежит } H, \quad (7.1)$$

где $a_{\mu\nu}$ — целые положительные числа.

Если *по крайней мере* один элемент класса K_l группы G принадлежит подгруппе H , то из (7.1) мы получаем

$$\chi_l^{(\mu)} = \sum_{\nu} a_{\mu\nu} \varphi_{l_1}^{(\nu)} = \sum_{\nu} a_{\mu\nu} \varphi_{l_2}^{(\nu)} = \dots \quad (7.2)$$

Предположим, что *ни один* элемент класса K_j группы G не принадлежит подгруппе H . Умножая (7.2) на $\chi_j^{(\mu)*}$ и суммируя по μ , находим

$$\sum_{\mu} \chi_j^{(\mu)*} \chi_l^{(\mu)} = 0 = \sum_{\mu, \nu} a_{\mu\nu} \chi_j^{(\mu)*} \varphi_{l_1}^{(\nu)} \quad (7.3)$$

для всех классов K_l группы G , которые содержат по крайней мере один элемент, принадлежащий подгруппе H , и для всех классов K_{l_1} , на которые распадаются элементы, попадающие в подгруппу H . Но это означает, что для всех классов подгруппы H

$$\sum_{\nu} \left(\sum_{\mu} a_{\mu\nu} \chi_j^{(\mu)*} \right) \varphi_k^{(\nu)} = 0. \quad (7.3a)$$

Теперь умножим это равенство на $h_k \varphi_k^{(\rho)*} / h$ и просуммируем по k (т. е. по всем классам подгруппы H). Из соотношений ортогональности получим

$$\sum_{\mu} a_{\mu\rho} \chi_j^{(\mu)*} = 0 \quad \text{для всех } \rho, \quad (7.4)$$

или

$$\sum_{\mu} a_{\mu\rho} \chi_j^{(\mu)} = 0 \quad \text{для всех } \rho. \quad (7.4a)$$

Равенство (7.4a) применимо ко *всякому* классу в группе G , *ни один* элемент которого не принадлежит подгруппе H . Обратимся теперь к рассмотрению тех классов группы G , у которых по крайней мере один элемент принадлежит H . Умножим (7.2) на $h_{l_1} \varphi_{l_1}^{(\sigma)*}$ и просуммируем по *всем* классам подгруппы H :

$$h a_{\mu\sigma} = \sum h_{l_1} \varphi_{l_1}^{(\sigma)*} \chi_l^{(\mu)}, \quad (7.5)$$

где суммирование распространяется на все классы подгруппы H . Умножим теперь соотношение (7.5) на $g_l \chi_l^{(\mu)*}$ и просуммируем по μ :

$$\begin{aligned} h g_l \sum_{\mu} a_{\mu\sigma} \chi_l^{(\mu)*} &= \sum h_{l_1} \varphi_{l_1}^{(\sigma)*} \sum_{\mu} g_l \chi_l^{(\mu)} \chi_l^{(\mu)*} = \\ &= \sum h_{l_1} \varphi_{l_1}^{(\sigma)*} g \delta_{ll_1} = g \sum_{K_{l_1}} h_{l_1} \varphi_{l_1}^{(\sigma)*}, \end{aligned}$$

где последняя сумма берется по всем классам K_{l_τ} подгруппы H , которые возникают из классов K_l группы G . Переходя к комплексно-сопряженным величинам, получаем

$$\psi_l^{(\sigma)} = \sum_{\mu} a_{\mu\sigma} \chi_l^{(\mu)} = \sum_{K_{l_\tau}} \frac{gh_{l_\tau}}{g_l h} \varphi_{l_\tau}^{(\sigma)}. \quad (7.6)$$

Равенства (7.2), (7.4а) и (7.6) содержат полную формулировку нашей теоремы. Числа $a_{\mu\sigma}$ в (7.2) были целыми положительными числами, в силу чего левая часть равенства (7.6) есть составной характер $\psi_l^{(\sigma)}$ группы G . Если нам известен любой простой характер подгруппы H (т. е. $\varphi_{l_\tau}^{(\sigma)}$), то равенство (7.6) означает, что сумма, стоящая в его правой части, должна быть составным характером группы G . Более того, равенство (7.4а) означает, что полученный таким способом составной характер будет равен нулю для всех классов группы G , которые не содержат ни одного элемента, принадлежащего подгруппе H .

Очень важный частный случай равенства (7.6) состоит в следующем. Существует один простой характер, который мы знаем для любой группы, а именно характер единичного представления:

$$\chi_l^{(0)} = 1 \quad \text{для всех } l.$$

Полагая $\varphi_{l_\tau}^{(\sigma)} = 1$ для всех l_τ в равенстве (7.6), получаем

$$\frac{gh_l}{g_l h} = \sum_{\mu} a_{\mu 0} \chi_l^{(\mu)}, \quad (7.7)$$

т. е. величины $gh_l/g_l h$ образуют составной характер группы G .

Равенство (7.7) можно применять к любой подгруппе H группы G . Чтобы получить h_l и g_l , требуется произвести лишь несложный подсчет. Несколько позднее в этой главе мы покажем, как можно воспользоваться равенством (7.7) для получения формулы Фробениуса, которая выражает в замкнутом виде все простые характеры симметрической группы. В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением простого рекуррентного метода, основанного на соотношении (7.6). Мы найдем простые характеры группы S_n , применяя равенство (7.6) к характерам группы S_{n-1} . Так же как и в § 5 гл. 1, мы будем обозначать через $(1^a 2^b 3^c \dots)$ класс перестановок, имеющих a циклов длины 1, b циклов длины 2, c циклов длины 3 и т. д. Для любой группы S_n мы знаем два простых характера: симметричный характер, равный $+1$ для всех перестановок, и антисимметричный характер, равный $+1$ для четных и -1 для нечетных перестановок (при условии, если только $n > 1$).

При $n = 1, 2$ тривиальные результаты состоят в следующем:

$$S_1: \begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline \chi^{(1)} & 1 \end{array} \quad (1)$$

$$S_2: \begin{array}{c|cc} & 1 & 1 \\ \hline \chi^{(1)} & 1 & 1 \\ \chi^{(2)} & 1 & -1 \end{array} \quad \begin{array}{c} (1^2) \\ (2) \end{array}$$

где число элементов в классе указано рядом с символом разбиения числа. В случае группы S_3 нам известна лишь часть таблицы, изображенная здесь:

$$S_3: \begin{array}{c|ccc} & 1 & 3 & 2 \\ & (1^3) & (2, 1) & (3) \\ \hline \chi^{(1)} & 1 & 1 & 1 \\ \chi^{(2)} & 1 & -1 & 1 \\ \chi^{(3)} & & & \end{array}$$

Разумеется, последний характер легко написать, если воспользоваться соотношениями ортогональности. Воспользуемся, тем не менее, равенством (7.6). Поскольку класс (3) группы S_3 не имеет элементов, принадлежащих ее подгруппе S_2 , его составной характер равен нулю. Начнем с $\chi^{(1)}$ (т. е. с характера $\chi^{(1)}$ в группе S_2). В этом случае (7.6) дает нам следующий результат:

$$\psi_{(1^3)} = \frac{6}{2} \cdot \frac{1}{1} = 3, \quad \psi_{(2, 1)} = \frac{6}{2} \cdot \frac{1}{3} = 1.$$

Мы получаем составной характер 3, 1, 0. Далее,

$$\frac{1}{g} \sum_i g_i \psi_i \chi_i^{(1)} = \frac{1}{6} (1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = 1,$$

откуда следует, что $\chi^{(1)}$ входит в χ только один раз. Вычитая, получаем характер 2, 0, -1. Этот характер простой, поскольку

$$\frac{1}{6} [1 \cdot 2^2 + 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot (-1)^2] = 1.$$

Следовательно, наша таблица для группы S_3 имеет вид

		1	3	2
		(1 ³)	(2, 1)	(3)
$S_3:$	$\chi^{(1)}$	1	1	1
	$\chi^{(2)}$	1	-1	1
	$\chi^{(3)}$	2	0	-1

Рассмотрим теперь S_3 как подгруппу группы S_4 . Нам известна следующая часть таблицы характеров группы S_4 :

		1	6	3	8	6
		(1 ⁴)	(2, 1 ²)	(2 ²)	(3, 1)	(4)
$S_4:$	$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
	$\chi^{(2)}$	1	-1	1	1	-1

Множители gh_l/g_lh , входящие в соотношение (7.6), равны 4, 2, 0, 1, 0. Возьмем сначала $\varphi^{(1)}$ (т. е. характер $\chi^{(1)}$ для группы S_3) и получим составной характер ψ : 4, 2, 0, 1, 0. В этом случае

$$\sum \frac{g_l}{g} \psi_l^2 = \frac{1}{24} [1 \cdot 4^2 + 6 \cdot 2^2 + 3 \cdot 0^2 + 8 \cdot 1^2 + 6 \cdot 0^2] = 2,$$

и, следовательно, ψ содержит два простых характера, каждый из которых входит по одному разу. Составной характер ψ содержит характер $\chi^{(1)}$ с коэффициентом, равным 1, поскольку

$$\sum \frac{g_l}{g} \psi_l \chi_l^{(1)} = \frac{1}{24} [1 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 0] = 1.$$

Вычитая $\chi^{(1)}$, получаем характер $\chi^{(4)}$: 3, 1, -1, 0, -1. Это простой характер, так как

$$\sum \frac{g_l}{g} (\chi_l^{(4)})^2 = \frac{1}{24} [1 \cdot 3^2 + 6 \cdot 1^2 + 3 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot 0^2 + 6 \cdot (-1)^2] = 1.$$

Возьмем, далее, $\varphi^{(2)}$ (т. е. $\chi^{(2)}$ для группы S_3) и получим характер ψ : 4, -2, 0, 1, 0. В этот составной характер $\chi^{(2)}$ входит один раз, поскольку

$$\begin{aligned} \sum \frac{g_l}{g} \psi_l \chi_l^{(2)} &= \frac{1}{24} [1 \cdot 4 \cdot 1 + 6 \cdot (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \cdot 1 + \\ &\quad + 8 \cdot 1 \cdot 1 + 6 \cdot 0 \cdot (-1)] = 1. \end{aligned}$$

Вычитая $\chi^{(2)}$, получаем простой характер $\chi^{(5)}$: 3, -1, -1, 0, 1. Наконец, возьмем $\varphi^{(3)}$ (т. е. $\chi^{(3)}$ для группы S_3) и получим ψ : 8, 0, 0, -1, 0. Прodelав вычисления, найдем

$$\sum \frac{g_i}{g} \psi_i^2 = \frac{1}{24} [1 \cdot 8^2 + 8 \cdot (-1)^2] = 3,$$

в силу чего характер ψ есть сумма трех различных простых характеров. Полученный ранее характер $\chi^{(4)}$ в характер ψ входит один раз, так как

$$\sum \frac{g_i}{g} \psi_i \chi_i^{(4)} = \frac{1}{24} [1 \cdot 8 \cdot 3 + 0 + 0 + 0] = 1.$$

Аналогично, $\chi^{(5)}$ входит в ψ только один раз. Вычитая $\chi^{(4)}$ и $\chi^{(5)}$ из ψ , получаем характер $\chi^{(3)}$: 2, 0, 2, -1, 0, который является простым характером, поскольку

$$\sum \frac{g_i}{g} (\chi_i^{(3)})^2 = \frac{1}{24} [1 \cdot 2^2 + 3 \cdot (2)^2 + 8 \cdot (-1)^2] = 1.$$

Мы получили полную таблицу характеров группы S_4 (табл. 26).

Таблица 26

	1	6	3	8	6
	(1 ⁴)	(2, 1 ²)	(2 ²)	(3, 1)	(4)
S_4 :					
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1	1	1	-1
$\chi^{(3)}$	2	0	2	-1	0
$\chi^{(4)}$	3	1	-1	0	-1
$\chi^{(5)}$	3	-1	-1	0	1

Применим теперь этот же метод к группе S_5 , рассматривая группу S_4 как ее подгруппу. Относительно группы S_5 мы располагаем следующей информацией:

	1	10	15	20	20	30	24
	(1 ⁵)	(2, 1 ³)	(2 ² , 1)	(3, 1 ²)	(3, 2)	(4, 1)	(5)
S_5 :							
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1	1	1	-1	-1	1

Множители gh_i/g_ih в равенстве (7.6) равны 5, 3, 1, 2, 0, 1, 0. Характер $\varphi^{(1)}$ группы S_4 приводит к тому же набору чисел, что и составной характер ψ группы S_5 , а именно:

$$\sum \frac{g_i}{g} \psi_i^2 = \frac{1}{120} [1 \cdot 5^2 + 10 \cdot 3^2 + 15 \cdot 1^2 + 20 \cdot 2^2 + 30 \cdot 1^2] = 2;$$

и поэтому ψ содержит два различных простых характера. Характер ψ содержит $\chi^{(1)}$, поскольку

$$\sum \frac{g_i}{g} \psi_i = 1;$$

вычитая $\chi^{(1)}$, мы получаем простой характер $\chi^{(3)}$: 4, 2, 0, 1, —1, 0, —1. Аналогичным образом мы находим из $\varphi^{(2)}$ простой характер $\chi^{(4)}$: 4, —2, 0, 1, 1, 0, —1.

Исходя из $\varphi^{(3)}$, $\varphi^{(4)}$, $\varphi^{(5)}$ соответственно, мы образуем составные характеры:

$$10, 0, 2, -2, 0, 0, 0: \quad \sum \frac{g_i}{g} \psi_i^2 = 2,$$

$$15, 3, -1, 0, 0, -1, 0: \quad \sum \frac{g_i}{g} \psi_i^2 = 3,$$

$$15, -3, -1, 0, 0, 1, 0: \quad \sum \frac{g_i}{g} \psi_i^2 = 3.$$

Характер $\chi^{(3)}$ входит во второй характер только один раз; точно так же $\chi^{(4)}$ входит в третий характер только один раз. Вычитая эти характеры $\chi^{(3)}$ и $\chi^{(4)}$, получаем составные характеры:

$$\chi^{(5)} + \chi^{(6)}: \quad 10, 0, 2, -2, 0, 0, 0,$$

$$\chi^{(5)} + \chi^{(7)}: \quad 11, 1, -1, -1, 1, -1, 1,$$

$$\chi^{(6)} + \chi^{(7)}: \quad 11, -1, -1, -1, -1, 1, 1,$$

каждый из которых содержит два простых характера. Из последних двух характеров находим

$$\chi^{(5)} - \chi^{(6)}: \quad 0, 2, 0, 0, 2, -2, 0,$$

комбинируя с первым характером, получаем

$$\chi^{(5)}: \quad 5, 1, 1, -1, 1, -1, 0,$$

$$\chi^{(6)}: \quad 5, -1, 1, -1, -1, 1, 0.$$

Затем мы находим

$$\chi^{(7)}: \quad 6, 0, -2, 0, 0, 0, 1.$$

Полная таблица характеров приведена в табл. 27.

В случае S_6 решение задачи становится громоздким. Наши трудности на самом деле проистекают из того факта, что мы использовали только подгруппу S_{n-1} группы S_n . В последующих параграфах

Таблица 27

	1	10	15	20	20	30	24
	(1 ⁵)	(2, 1 ³)	(2 ² , 1)	(3, 1 ²)	(3, 2)	(4, 1)	(5)
S_5 :							
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1	1	1	-1	-1	1
$\chi^{(3)}$	4	2	0	1	-1	0	-1
$\chi^{(4)}$	4	-2	0	1	1	0	-1
$\chi^{(5)}$	5	1	1	-1	1	-1	0
$\chi^{(6)}$	5	-1	1	-1	-1	1	0
$\chi^{(7)}$	6	0	-2	0	0	0	1

мы покажем, каким образом общую задачу можно свести к задаче, решение которой осуществляется по раз и навсегда установленному алгоритму.

Задача. Воспользуйтесь методом, изложенным в этом параграфе, для получения таблицы характеров группы S_6 .

§ 2. Формула Фробениуса для характеров симметрической группы

В § 1 настоящей главы мы получили следующий результат.

Дана группа G порядка g , имеющая g_l элементов в классе K_l . Если некоторая подгруппа H группы G имеет порядок h и содержит h_l элементов из класса K_l , то совокупность чисел

$$\chi_l^{(H)} = \frac{g h_l}{g_l h} \quad (7.7a)$$

образует составной характер группы G .

В этом параграфе мы покажем, как, исходя из (7.7), можно полностью решить задачу о нахождении неприводимых представлений симметрической группы. Идея решения (также принадлежащая Фробениусу) состоит в следующем. Равенство (7.7) задает характер $\chi^{(H)}$ для каждой выбранной нами подгруппы H группы G ($\equiv S_n$). Рассмотрим любое разбиение $(\lambda) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ числа n

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = n, \quad (7.8)$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n = 0. \quad (7.8a)$$

В соответствии с разбиением (λ) можно построить некоторую подгруппу группы G . Разобьем символы $1, \dots, n$ на отдельные классы

в соответствии с указанным разбиением (λ) ; первый класс будет содержать λ_1 символов, второй класс — λ_2 символов и т. д. (выбор символов внутри каждого класса несуществен). Построим теперь симметрическую группу из символов первого класса и назовем ее G_{λ_1} . То же сделаем для каждого из остальных классов. Возьмем, далее, прямое произведение всех полученных групп (напомним, что они не имеют общих символов). Это прямое произведение имеет вид

$$G_{(\lambda)} = G_{\lambda_1} \times G_{\lambda_2} \times \dots \times G_{\lambda_n} \quad (7.9)$$

и является подгруппой группы S_n ; пользуясь равенством (7.7), мы можем получить составной характер группы S_n , который обозначим $\varphi^{(\lambda)}$. Аналогичные операции можно проделать с каждым разбиением (λ) числа n . Поскольку число разбиений числа n равно числу классов в группе S_n , мы получаем при этом составные характеры группы S_n , число которых равно числу классов в группе S_n . Мы докажем, что $\varphi^{(\lambda)}$ — линейно независимые векторы. В силу этого они должны давать все простые характеры группы S_n , если брать их соответствующие линейные комбинации. Мы также приведем окончательный результат, полученный Фробениусом, — замкнутую формулу, дающую все простые характеры группы S_n .

Чтобы воспользоваться формулой (7.7), нам необходимо вычислить величины h_i , h и g_i . Предположим, что мы хотим построить характер, соответствующий разбиению (λ) . Из (7.9) следует

$$h = \lambda_1! \cdot \lambda_2! \cdot \dots \cdot \lambda_n!. \quad (7.10)$$

Рассмотрим далее класс K_l группы S_n . Класс K_l можно описывать, задавая структуру его разложения на циклы $(1^\alpha, 2^\beta, 3^\gamma, \dots)$. Этот символ означает, что перестановки, принадлежащие классу K_l , содержат α циклов длины 1, β циклов длины 2, γ циклов длины 3 и т. д., где

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots = n. \quad (7.11)$$

Число перестановок в классе K_l было найдено в гл. 1 [формула (1.27)]:

$$g_l = \frac{n!}{1^\alpha \cdot \alpha! 2^\beta \cdot \beta! 3^\gamma \cdot \gamma! \dots}. \quad (7.12)$$

Величина h_i есть число элементов в группе $G_{(\lambda)}$, которые обладают структурой разложения на циклы $(1^\alpha, 2^\beta, 3^\gamma, \dots)$. Чтобы какой-либо элемент группы $G_{(\lambda)}$ обладал этой структурой, он должен содержать

α циклов длины 1, β циклов длины 2,
 γ циклов длины 3 и т. д.

Такой элемент можно построить согласно формуле (7.9), если множитель в прямом произведении, взятый из группы G_{λ_1} , содержит

$$\begin{aligned} \alpha_1 \text{ циклов длины } 1, \beta_1 \text{ циклов длины } 2, \\ \gamma_1 \text{ циклов длины } 3 \text{ и т. д.;} \end{aligned}$$

множитель, взятый из группы G_{λ_2} , имеет

$$\begin{aligned} \alpha_2 \text{ циклов длины } 1, \beta_2 \text{ циклов длины } 2, \\ \gamma_2 \text{ циклов длины } 3 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

и, наконец, множитель из группы G_{λ_n} имеет

$$\begin{aligned} \alpha_n \text{ циклов длины } 1, \beta_n \text{ циклов длины } 2, \\ \gamma_n \text{ циклов длины } 3 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

при условии, если

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \alpha, \quad \sum_{i=1}^n \beta_i = \beta, \quad \sum_{i=1}^n \gamma_i = \gamma \quad \text{и т. д.} \quad (7.13)$$

Так как группа G_{λ_i} состоит из перестановок λ_i символов, имеем

$$\alpha_i + 2\beta_i + 3\gamma_i + \dots = \lambda_i. \quad (7.14)$$

Число перестановок в группе G_{λ_i} , имеющих структуру разбиения на циклы вида

$$(1^{\alpha_i}, 2^{\beta_i}, 3^{\gamma_i}, \dots)$$

при фиксированных $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \dots$, равно

$$\frac{\lambda_i!}{1^{\alpha_i} \cdot \alpha_i! 2^{\beta_i} \cdot \beta_i! \dots}.$$

Выбрав любое решение уравнений (7.13) и (7.14), получим

$$\prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i!}{1^{\alpha_i} \cdot \alpha_i! 2^{\beta_i} \cdot \beta_i! \dots}$$

элементов класса $(1^\alpha, 2^\beta, 3^\gamma, \dots)$. Суммируя по всем решениям, находим

$$h_t = \sum_{\substack{\alpha_i, \beta_i, \dots \\ \alpha_i + 2\beta_i + \dots = \lambda_i}} \prod_i \frac{\lambda_i!}{1^{\alpha_i} \cdot \alpha_i! 2^{\beta_i} \cdot \beta_i! \dots}. \quad (7.15)$$

Подставляя в формулу (7.7) соотношения (7.10), (7.12) и (7.15), имеем

$$\varphi_l^{(\lambda)} = \frac{g h_l}{g_l h} = \sum_{\substack{\alpha_i, \beta_i, \dots \\ \sum \alpha_i = \alpha, \sum \beta_i = \beta, \dots \\ \alpha_i + 2\beta_i + \dots = \lambda_i}} \frac{\alpha!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots} \cdot \frac{\beta!}{\beta_1! \beta_2! \dots} \dots \quad (7.16)$$

Прежде чем переходить дальше, мы хотим проиллюстрировать наш метод на одном частном случае. Рассмотрим группу S_4 и построим подгруппу, соответствующую разбиению (2^2) . В этом случае

$$G_{(2^2)} = G_2 \times G_2.$$

Образует симметрическую группу, действующую на элементы 1 и 2, и умножим ее на симметрическую группу, действующую на элементы 3 и 4: e , (12) , (34) , $(12)(34)$. Порядок этой подгруппы группы S_4 равен $h = 2! \cdot 2! = 4$. Рассмотрим различные классы в группе S_4 . Классы (4) и (31) не содержат членов, которые входили бы в группу $G_{(2^2)}$, вследствие чего формула (7.7) для этих классов дает нуль. Класс (2^2) группы S_4 входит в группу $G_{(2^2)}$ один раз, класс (21^2) входит в эту группу дважды, класс (1^4) — один раз, в силу чего мы получаем составной характер

$$\begin{array}{ccccccc} (1^4), & (21^2), & (2^2), & (31), & (4), & & \\ 6, & 2, & 2, & 0, & 0, & & \end{array}$$

Величины $\varphi_l^{(\lambda)}$ служат коэффициентами в некотором полиноме, к построению которого мы сейчас приступим. Предположим, что мы рассматриваем класс $(1^{\alpha_1} 2^{\beta_1} 3^{\gamma_1} \dots)$ в группе S_n . Многочлен

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^{\alpha} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\beta} \times \\ \times (x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3)^{\gamma} \dots$$

относительно переменных $x_1, \dots, x_n$ можно разложить так, чтобы он имел вид

$$\left(\sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \sum \alpha_i = \alpha}} \frac{\alpha!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \right) \left(\sum_{\substack{\beta_1, \dots, \beta_n \\ \sum \beta_i = \beta}} \frac{\beta!}{\beta_1! \dots \beta_n!} x_1^{2\beta_1} \dots x_n^{2\beta_n} \right) \dots = \\ = \sum_{\substack{\alpha_i, \beta_i, \dots \\ \sum \alpha_i = \alpha, \sum \beta_i = \beta, \dots}} \frac{\alpha!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \times \frac{\beta!}{\beta_1! \dots \beta_n!} \times \dots \\ \dots \times x_1^{\alpha_1 + 2\beta_1 + 3\gamma_1 + \dots} \times \dots \times x_n^{\alpha_n + 2\beta_n + 3\gamma_n + \dots}.$$

Соберем теперь все коэффициенты, стоящие при данном одночлене

$$x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \dots x_n^{\mu_n}.$$

Тогда рассматриваемое выражение можно переписать в виде

$$\sum_{\substack{\mu_i \\ \sum \mu_i = n}} x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n} \sum_{\substack{\alpha_i, \beta_i, \dots \\ \sum \alpha_i = \alpha, \sum \beta_i = \beta, \dots \\ \alpha_i + 2\beta_i + \dots = \mu_i}} \frac{\alpha!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \times \frac{\beta!}{\beta_1! \dots \beta_n!} \times \dots$$

Все одночлены, которые получаются из одночлена

$$x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n}$$

при перестановке переменных, имеют одинаковые коэффициенты. Поэтому мы можем расположить показатели μ_i в порядке убывания их величины и отождествить их с членами разбиения (λ) . Затем, пользуясь соотношением (7.16), получаем

$$\begin{aligned} & \left(\sum x_i \right)^\alpha \left(\sum x_i^2 \right)^\beta \left(\sum x_i^3 \right)^\gamma \dots = \\ &= \sum_{\substack{(\lambda) \\ \text{По всем} \\ \text{перестановкам}}} x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} \sum_{\substack{\alpha_i, \beta_i, \dots \\ \sum \alpha_i = \alpha, \sum \beta_i = \beta, \dots \\ \alpha_i + 2\beta_i + \dots = \lambda_i}} \frac{\alpha!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \times \frac{\beta!}{\beta_1! \dots \beta_n!} \times \dots = \\ &= \sum_{(\lambda)} \varphi_{(\lambda)} \sum_{\substack{\text{По всем} \\ \text{перестановкам}}} x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}. \quad (7.17) \end{aligned}$$

Сумма берется по всем разбиениям (λ) и всем различным одночленам, получающимся при перестановке переменных $x_1, \dots, x_n$.

Введем теперь новые переменные s_r :

$$s_r = \sum_i x_i^r \quad (r = 1, \dots, n). \quad (7.18)$$

Для каждого класса l со структурой разложения на циклы $(1^\alpha, 2^\beta, 3^\gamma, \dots)$ мы зададим еще третий набор переменных, а именно левую часть равенства (7.17):

$$s_{(l)} = s_1^\alpha s_2^\beta \dots, \quad (7.19)$$

где (l) — класс вида $(1^\alpha, 2^\beta, 3^\gamma, \dots)$. Тогда (7.17) можно переписать в виде

$$s_{(l)} = \sum_{(\lambda)} \varphi_{(\lambda)} \sum_{\text{По всем перестановкам}} x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}. \quad (7.20)$$

Переменные s_r , задаваемые формулами (7.18), представляют собой n функций от n независимых переменных x_i . Переменные s_r функционально независимы; их якобианом служит определитель

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & \dots \\ 3x_1^2 & 3x_2^2 & 3x_3^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ nx_1^{n-1} & nx_2^{n-1} & nx_3^{n-1} & \dots \end{vmatrix} = n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots \end{vmatrix} = \\ = n! \prod_{i < j} (x_i - x_j). \quad (7.21)$$

Последний результат получается, если заметить, что этот определитель представляет собой полином общей степени

$$0 + 1 + 2 + \dots + (n-1) = n \frac{n-1}{2}.$$

Этот определитель обращается в нуль, если совпадают любые две переменные, и, следовательно, содержит все возможные множители $(x_i - x_j)$, у которых $i \neq j$; поскольку таких множителей имеется $n(n-1)/2$, мы получаем равенство (7.21) (знак в этом равенстве находят путем вычисления коэффициента при $x_1^{n-1} x_2^{n-2} \dots x_n^0$). Так как якобиан J не равен тождественно нулю, величины s_r можно ввести в качестве новых независимых переменных. Кроме того, величины $s_{(l)}$, задаваемые равенством (7.19), линейно независимы (ибо если бы они были линейно зависимыми, то из этого вытекала бы функциональная зависимость между величинами s_r , которые, как мы только что доказали, являются независимыми переменными). Те же рассуждения показывают, что величины

$$\sum_{\text{По всем перестановкам}} x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n},$$

соответствующие различным разбиениям (λ) , также линейно независимы. Таким образом, если (l) пробегает s классов в группе S_n , мы получаем s равенств, аналогичных равенству (7.20) и выражающих s линейно независимых величин $s_{(l)}$ через s линейно независимых величин

$$\sum_{\text{По всем перестановкам}} x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}.$$

Матрица преобразования, позволяющего перейти от одной линейно независимой системы величин к другой, невырождена. Поэтому столбцы этой матрицы, которые являются не чем иным, как характеристиками $\varphi_{(l)}^{(\lambda)}$ при фиксированном (λ) , должны быть линейно независимыми.

В силу этого с простых характеров должны выражаться в виде линейных комбинаций характеров $\varphi_{(l)}^{(\lambda)}$.

Для вывода общих утверждений мы использовали n переменных x_i . Единственное требование, которое следует соблюдать при практических расчетах, состоит в том, что число переменных x должно быть не меньше числа частей в разбиении (λ) .

Применим равенство (7.20) к группе S_4 . Тогда

$$(l) = (1^4): \quad s_{(1^4)} = (s_1)^4 = (\sum x_i)^4 = \sum x_i^4 + 4 \sum x_i^3 x_2 + \\ + 6 \sum x_i^2 x_2^2 + 12 \sum x_i^2 x_2 x_3 + 24 \sum x_i x_2 x_3 x_4,$$

где под $\sum x_i^4$ и т. д. подразумевается суммирование по всем перестановкам индексов, в результате которых получаются различные одночлены. Аналогично,

$$(l) = (21^2): \quad s_{(21^2)} = s_2 (s_1)^2 = (x_1^2 + \dots + x_n^2)(x_1 + \dots + x_n)^2 = \\ = [\sum x_i^2 + 2 \sum x_i x_2] [\sum x_i^2] = \\ = \sum x_i^4 + 2 \sum x_i^3 x_2 + 2 \sum x_i^2 x_2^2 + \\ + 2 \sum x_i^2 x_2 x_3;$$

$$(l) = (2^2): \quad s_{(2^2)} = (s_2)^2 = (\sum x_i^2)^2 = \sum x_i^4 + 2 \sum x_i^2 x_2^2;$$

$$(l) = (3, 1): \quad s_{(3, 1)} = s_3 s_1 = (\sum x_i^3)(\sum x_i) = \sum x_i^4 + \sum x_i^3 x_2;$$

$$(l) = (4): \quad s_{(4)} = s_4 = \sum x_i^4.$$

Пользуясь этими равенствами, образуем матрицу из величин $\varphi_{(l)}^{(\lambda)}$ и транспонируем ее так, чтобы разбиения (λ) означали строки, а разбиения (l) — столбцы:

$$\begin{array}{c} (l) = (1^4)^1 \quad (21^2)^6 \quad (2^2)^3 \quad (31)^8 \quad (4)^6 \\ (\lambda) = 4 \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ (31) & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ (2)^2 & 6 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ (21)^2 & 12 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ (1)^4 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{array} \quad (7.22)$$

Теперь мы могли бы так же, как в § 7 настоящей главы, найти по этой матрице простые характеры $\chi_{(l)}^{(\lambda)}$.

Задача. Примените этот метод к группе S_5 и получите характер $\varphi_{(l)}^{(\lambda)}$; воспользуйтесь табл. 27 для того, чтобы выразить $\varphi^{(\lambda)}$ в виде линейных комбинаций простых характеров группы S_5 .

Формула (7.20) позволяет нам найти полный набор составных характеров $\varphi^{(\lambda)}$ для группы S_n . Фробениус пошел дальше и получил аналогичную формулу, которая дает непосредственно все простые характеры $\chi^{(\lambda)}$. Для этой цели мы воспользуемся определителем такого типа, который уже встречался в равенстве (7.21), а именно:

$$\begin{aligned} D(x_i) \equiv D(x_1, \dots, x_m) &= \prod_{i < j} (x_i - x_j) = \\ &= \sum_P \delta_P P x_1^{m-1} x_2^{m-2} \dots x_{m-1} x_m^0, \end{aligned} \quad (7.23)$$

где P есть любая перестановка переменных x_i и $\delta_P = \pm 1$ в зависимости от того, является ли перестановка P четной или нечетной. Заметим, что $D(x_i)$ есть знакопеременная функция от x_i , меняющая знак при перемене местами любых двух переменных. Величины $s_{(l)}$ в равенстве (7.20) являются относительно x_i симметричными многочленами [см. (7.18) и (7.19)], поэтому произведение $s_{(l)} D(x_i)$ меняет знак при любой перестановке двух переменных. Если выписать разложение $s_{(l)} D(x_i)$ в виде суммы одночленов $x_1^{v_1}, \dots, x_m^{v_m}$, то окажется, что нет членов, имеющих одинаковые степени по любым двум переменным, поскольку перестановка таких переменных в выражении $s_{(l)} D(x_i)$ привела бы к перемене знака всех членов разложения, в то время как перестановка одночленов не приводит к изменению знака. Таким образом, эти одночлены должны иметь нулевые коэффициенты. В силу сказанного переменные в одночленах можно перегруппировать так, чтобы сначала шли члены наиболее высокой степени, затем члены меньшей степени и т. д. Поэтому величину $s_{(l)} D(x_i)$ можно записать в виде

$$s_{(l)} D(x_i) = \sum_{(\lambda)} \chi_{(l)}^{(\lambda)} \sum_P \delta_P P x_1^{\lambda_1 + m - 1} x_2^{\lambda_2 + m - 2} \dots x_m^{\lambda_m}. \quad (7.24)$$

Первая сумма берется по всем разбиениям (λ) числа n , вторая — по всем перестановкам переменных $x_1, \dots, x_m$. Ясно, что коэффициенты $\chi_{(l)}^{(\lambda)}$ являются линейными комбинациями функций $\varphi_{(l)}^{(\lambda)}$. Теорема Фробениуса утверждает, что величины $\chi_{(l)}^{(\lambda)}$ в (7.24) представляют собой в точности простые характеры группы S_n .

Мы приведем много примеров, поясняющих смысл соотношения (7.24), но сначала мы изложим доказательство этой теоремы.

Величины $\chi_{(l)}^{(\lambda)}$ будут простыми характерами, если [см. (3.152)]

$$\sum_{(l)} g_{(l)} |\chi_{(l)}^{(\lambda)}|^2 = g, \quad (7.25)$$

где g — порядок группы S_n , а $g_{(l)}$ — число элементов в классе (l) .

Так же как мы вводили переменные x_i , введем теперь второй набор переменных y_i и положим, по определению,

$$t_r = \sum_i y_i^r, \quad (7.18a)$$

$$t_{(l)} = t_1^\alpha t_2^\beta t_3^\gamma \dots \quad \text{для} \quad (l) = (1^\alpha, 2^\beta, 3^\gamma, \dots). \quad (7.19a)$$

Образует сумму

$$\sum_{(l)} \frac{g_{(l)}}{g} s_{(l)} t_{(l)}.$$

Пользуясь соотношениями (7.12), (7.19) и (7.19a), получаем

$$\sum_{(l)} \frac{g_{(l)}}{g} s_{(l)} t_{(l)} = \sum_{\substack{\alpha, \beta, \dots \\ \alpha + 2\beta + \dots = n}} \frac{1}{1^\alpha \alpha!} (s_1 t_1)^\alpha \frac{1}{2^\beta \beta!} (s_2 t_2)^\beta \dots \quad (7.26)$$

Просуммируем теперь по n от 0 до ∞ :

$$\sum_{\substack{\text{По всем разбиениям} \\ \text{всех } n}} \frac{g_{(l)}}{g} s_{(l)} t_{(l)} = \exp \left[s_1 t_1 + \frac{1}{2} s_2 t_2 + \frac{1}{3} s_3 t_3 + \dots \right]. \quad (7.27)$$

Подставим выражения (7.18) и (7.18a) для s_r и t_r :

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{s_r t_r}{r} &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sum_i x_i^r \sum_j y_j^r}{r} = \sum_{i,j=1}^m \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(x_i y_j)^r}{r} = \\ &= - \sum_{i,j=1}^m \ln(1 - x_i y_j) = - \ln \prod_{i,j=1}^m (1 - x_i y_j). \end{aligned} \quad (7.28)$$

Итак, правая часть равенства (7.27) равна

$$\frac{1}{\prod_{i,j=1}^m (1 - x_i y_j)}.$$

Докажем теперь, что

$$\frac{D(x_i) D(y_j)}{\prod_{i,j=1}^m (1 - x_i y_j)} = \left| \frac{1}{1 - x_r y_s} \right|, \quad (7.29)$$

где D — определитель, заданный (7.23), а $|1/(1 - x_r y_s)|$ — определитель, rs -элемент которого равен $1/(1 - x_r y_s)$. Этот определитель

имеет вид

$$\begin{vmatrix} (1-x_1y_1)^{-1} & (1-x_1y_2)^{-1} & (1-x_1y_3)^{-1} & \dots \\ (1-x_2y_1)^{-1} & (1-x_2y_2)^{-1} & (1-x_2y_3)^{-1} & \dots \\ (1-x_3y_1)^{-1} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & \vdots \end{vmatrix}. \quad (7.30)$$

Вычитая из i -й строки первую, получаем

$$(1-x_iy_j)^{-1} - (1-x_1y_j)^{-1} = \frac{x_i-x_1}{1-x_1y_j} \cdot \frac{y_j}{1-x_1y_j}.$$

Множитель (x_i-x_1) является общим для всех элементов i -й строки, множитель $(1-x_1y_j)$ — общий для всех элементов j -го столбца. Вынося эти множители, находим

$$\frac{(x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_m-x_1)}{\prod_{j=1}^m (1-x_1y_j)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots \\ \frac{y_1}{1-x_2y_1} & \frac{y_2}{1-x_2y_2} & \dots & \dots \\ \frac{y_1}{1-x_3y_1} & \frac{y_2}{1-x_3y_2} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}.$$

Вычтем теперь первый столбец из остальных:

$$\frac{y_j}{1-x_1y_j} - \frac{y_1}{1-x_1y_1} = \frac{y_j-y_1}{1-x_1y_1} \frac{1}{1-x_1y_j}.$$

Множитель (y_j-y_1) вновь оказывается общим для всех элементов j -го столбца, а множитель $(1-x_1y_1)$ — для всех элементов i -й строки, поэтому определитель можно представить в виде

$$\frac{(x_2-x_1)\dots(x_m-x_1)(y_2-y_1)\dots(y_m-y_1)}{\prod_{j=1}^m (1-x_1y_j) \prod_{i=2}^m (1-x_iy_1)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{y_1}{1-x_2y_1} & \frac{1}{1-x_2y_2} & \frac{1}{1-x_2y_3} & \dots \\ \frac{y_1}{1-x_3y_1} & \frac{1}{1-x_3y_2} & \frac{1}{1-x_3y_3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

и

$$\left| \frac{1}{1-x_i y_j} \right|_{i, j=1, \dots, m} = \frac{(x_2-x_1) \dots (x_m-x_1)(y_2-y_1) \dots (y_m-y_1)}{\prod_{j=1}^m (1-x_1 y_j) \prod_{l=2}^m (1-x_l y_1)} \left| \frac{1}{1-x_l y_j} \right|_{l, j=2, \dots, m}. \quad (7.31)$$

Повторяя этот процесс по индукции, получаем формулу (7.29). Умножив обе части равенства (7.27) на $D(x_i) D(y_j)$ и воспользовавшись соотношением (7.29), найдем

$$\sum_{(l), n=1}^{\infty} \frac{g_{(l)}}{g} s_{(l)} t_{(l)} D(x_i) D(y_j) = \left| \frac{1}{1-x_i y_j} \right|.$$

Но

$$(1-x_i y_j)^{-1} = \sum_{v=0}^{\infty} x_i^v y_j^v,$$

поэтому

$$\left| \frac{1}{1-x_i y_j} \right| = \sum_{v_1, \dots, v_m=1}^{\infty} \sum_P \delta_P x_{P_1}^{v_1} y_1^{v_1} x_{P_2}^{v_2} y_2^{v_2} \dots x_{P_m}^{v_m} y_m^{v_m}. \quad (7.32)$$

Все показатели v должны быть различными, поскольку эта функция меняет знак при любой перестановке двух переменных. Индексы можно расположить в порядке убывания; $\sum_P$ означает сумму по всем перестановкам переменных x и y , а δ_P равно $+1$, если перестановки x и y имеют одинаковую четность, и -1 в противном случае. Поскольку показатели v теперь расположены в убывающем порядке, мы можем положить $v_i = \lambda_i + m - i$ и получить следующее выражение:

$$\sum_{(l)} \frac{g_{(l)}}{g} s_{(l)} D(x_{(l)}) t_{(l)} D(y_j) = \sum_{(\lambda)} \sum_P \delta_P x_{P_1}^{\lambda_1+m-1} y_1^{\lambda_1+m-1} \dots x_{P_m}^{\lambda_m} y_m^{\lambda_m}. \quad (7.33)$$

Подставляя сюда выражение (7.24) и аналогичное выражение для y и сравнивая коэффициенты при одночленах, содержащих $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m$, находим

$$\begin{aligned} \sum_{(l)} \frac{g_{(l)}}{g} \chi_{(l)}^{(\lambda)} \chi_{(l)}^{(\mu)} &= 0 \quad \text{при} \quad (\lambda) \neq (\mu), \\ \sum_{(l)} \frac{g_{(l)}}{g} [\chi_{(l)}^{(\lambda)}]^2 &= 1; \end{aligned} \quad (7.25a)$$

это и доказывает, что формула (7.24) дает нам независимые простые характеры. Равенство (7.25) оставляет еще одну возможность: величина $\chi_{(l)}^{(\lambda)}$ может отличаться от простого характера знаком, но при использовании наших результатов мы покажем, что знак выбран правильно.

Формула (7.24) выглядит весьма сложной (такова она и на самом деле!), и поэтому мы, исходя из нее, разрабатываем методы, более удобные в работе.

§ 3. Графические методы. Решеточные перестановки. Схемы Юнга. Таблицы Юнга

Прежде всего рассмотрим единичный элемент группы S_n , т. е. класс $(1) = (1^n)$. В этом случае левая часть равенства (7.24) равна просто

$$D(x_i) \left(\sum x_i \right)^n.$$

Возьмем сначала $D(x_i)$ и умножим последовательно n раз на $\sum x_i$. Поскольку произведение на каждом этапе является знакопеременной функцией, любой одночлен, имеющий два равных показателя степени, должен входить в это произведение с нулевым коэффициентом. Таким образом, $\chi_{(1^n)}^{(\lambda)}$ будет коэффициентом в (7.24) при члене

$$x_1^{\lambda_1 + m - 1} x_2^{\lambda_2 + m - 2} \dots x_m^{\lambda_m}.$$

В качестве исходной мы выбрали функцию

$$D(x_i) = \sum_p \delta_p P x_1^{m-1} x_2^{m-2} \dots x_{m-1} x_m^0.$$

Если умножить ее на $\sum x_i$, то один из показателей степени увеличится на единицу. Но если на каком бы то ни было этапе вычислений два показателя становятся равными, соответствующий член должен обратиться в нуль. Поэтому ясно, что, поскольку на каждом этапе мы увеличиваем степень полинома на единицу, мы всегда должны увеличивать степень переменной x_1 по крайней мере столь же быстро, как и степень переменной x_2 и т. д. Наша конечная цель состоит в том, чтобы увеличить степень x_1 на λ_1 , степень x_i на λ_i . В процессе выполнения этой задачи (каждый раз мы увеличиваем показатель степени только у одной переменной) мы должны быть уверенными в том, что число операций умножения, произведенных над x_1 , больше числа операций умножения, произведенных над x_2 , или равно ему и т. д. Общее число способов, которыми можно достичь нашей цели, равно $\chi_{(1^n)}^{(\lambda)}$, т. е. размерности представления (λ) .

Предположим, например, что нам требуется найти размерность неприводимого представления группы S_4 , соответствующего разбиению

$(\lambda) = (2, 1^2)$. В этом случае мы должны увеличить показатель степени переменной x_1 на 2, а показатели степени x_2 и x_3 — на 1. Иначе говоря, мы должны прийти к выражению $x_1^2 x_2 x_3$, умножая каждый раз только на один из x -ов и следя все время за тем, чтобы величин x_1 было больше, чем x_2 и x_3 , и т. д. Это можно проделать следующими способами:

$$x_1^2 x_2 x_3 = x_1 x_1 x_2 x_3, \quad x_1 x_2 x_1 x_3, \quad x_1 x_2 x_3 x_1. \quad (7.34)$$

Эти упорядоченные расположения неизвестных носят название *решеточных перестановок* выражения $x_1^2 x_2 x_3$. Существует три таких перестановки, поэтому размерность представления, соответствующего разбиению $(2, 1^2)$, равна 3. Будем теперь вместо x_1 говорить „точки в первой строке“, вместо x_2 — „точки во второй строке“ и т. д. В результате мы хотим получить некоторый *граф* с двумя точками в первой строке (x_1^2) и одной точкой во второй и третьей строках ($x_2 x_3$), причем число точек увеличивается каждый раз на единицу и так, что на любом этапе построения в каждой строке точек не меньше, чем в последующих строках (такие графы называются *правильными графами*). Наглядно граф, который мы хотим получить, можно изобразить так:

$$\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \\ \square & \end{array} \quad (7.35)$$

Разбиение $(2, 1^2)$

(во второй схеме вместо точек использованы квадраты). Размещая объекты (точки или квадраты) *по одному* на схеме и убеждаясь каждый раз в том, что число объектов в первой строке больше числа объектов во второй строке или равно ему и т. д. (т. е. убеждаясь в том, что граф правилен на каждом этапе построения), мы получаем в результате все точки (или квадраты) графа. Такая процедура называется *правильным размещением (узлов, точек, квадратов)*. В нашем примере, если объекты нумеровать в порядке их появления на графе, мы получим следующие возможные случаи:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & & 2 & & 2 & \\ 4 & & 4 & & 3 & \end{array} \quad (7.36)$$

По сути дела, графы (7.36) означают то же, что и выражения (7.34): первый граф означает, что берется „первая строка, первая строка, вторая строка, третья строка“, т. е. $x_1 x_1 x_2 x_3$ и т. д.

С помощью той же процедуры мы можем найти размерности всех неприводимых представлений группы S_4 . Каждому разбиению числа 4 соответствует некоторый граф:

$$\begin{array}{ll}
 (4): & \square\square\square\square \\
 (3, 1): & \begin{array}{c} \square\square\square \\ \square \end{array} \\
 (2^2): & \begin{array}{c} \square\square \\ \square\square \end{array} \quad (1^4): \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \quad (7.37) \\
 (2, 1^2): & \begin{array}{c} \square\square \\ \square \\ \square \end{array}
 \end{array}$$

Возможные способы построения этих графов с помощью правильного размещения отдельных узлов сводятся к следующим:

$$\begin{array}{ll}
 (4): & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} & n = 1, \\
 (3, 1): & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} & n = 3, \\
 (2^2): & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array} & n = 2, \\
 (2, 1^2): & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} & n = 3, \quad (7.38) \\
 (1^4): & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} & n = 1.
 \end{array}$$

Результаты, приведенные в (7.38), указывают на внутреннюю связь между *сопряженными*, или *ассоциированными*, *разбиениями*, т. е. такими двумя разбиениями, которые получаются друг из друга заменой строк на столбцы: например, (4) и (1^4) , (3, 1) и $(2, 1^2)$. С другой стороны, разбиение (2^2) является *самосопряженным*, при замене строк столбцами оно преобразуется в себя. Из (7.38) мы видим, что размерности представлений, соответствующих сопряженным разбиениям, равны.

В качестве другого примера найдем размерность представления группы S_7 , соответствующего разбиению $(4, 2, 1)$:

	1234		1235		1236		1237		1236		1237
(1)	56	(3)	46	(5)	45	(7)	45	(6)	47	(8)	46
	7		7		7		6		5		5
	1234		1235		1245		1245		1246		1247
(2)	57	(4)	47	(9)	36	(10)	37	(11)	35	(13)	35
	6		6		7		6		7		6
	1246		1247		1256		1257		1267		1256
(12)	37	(14)	36	(15)	34	(17)	34	(19)	34	(16)	37
	5		5		7		6		5		4
	1257		1267		1345		1345		1346		1347
(18)	36	(20)	35	(21)	26	(22)	27	(23)	25	(25)	25
	4		4		7		6		7		6
	1346		1347		1356		1357		1367		
(24)	27	(26)	26	(27)	24	(29)	24	(31)	24		
	5		5		7		6		5		
	1356		1357		1367		1456		1457		
(28)	27	(30)	26	(32)	25	(33)	27	(34)	26		
	4		4		4		3		3		
	1467										
(35)	25										
	3										

$n = 35$ (7.39)

Задача. Постройте схемы, аналогичные схемам (7.38) и (7.39), для всех представлений группы S_5 .

Таблицы (7.39) служат примером *таблиц Юнга* — графов заданной формы (определяемой разбиением), в разных клетках которых размещены числа от 1 до n . Если клетки заполнены в соответствии с нашим правилом правильного размещения, то таблица называется *стандартной таблицей*. Число стандартных таблиц в точности равно размерности представления. Стандартные таблицы можно определенным образом упорядочить, выписывая все числа подряд, т. е. выписывая сначала первую строку, затем вторую и т. д., а потом

располагая записанные так таблицы в порядке, обратном лексикографическому: например, таблица

$$\begin{array}{c} 1367 \\ 25 \rightarrow 1367254 \\ 4 \end{array}$$

будет идти после таблицы

$$\begin{array}{c} 1367 \\ 24 \rightarrow 1367245. \\ 5 \end{array}$$

Позднее мы еще вернемся к стандартным таблицам и покажем, каким образом они позволяют нам строить базисные функции для неприводимых представлений.

§ 4. Графический метод нахождения характеров

Тот же графический метод, которым мы пользовались для нахождения размерности неприводимых представлений, можно применять и для вычисления характеров. Мы снова будем исходить из равенства (7.24). Чтобы найти характер $\chi_{(l)}^{(\lambda)}$, мы должны вычислить коэффициент при

$$x_1^{\lambda_1+m-1} x_2^{\lambda_2+m-2} \dots x_m^{\lambda_m}$$

в выражении

$$D(x_i) s_{(l)}.$$

Запишем (l) в циклической форме $(l_1, l_2, \dots)$ и будем умножать $D(x_i)$ последовательно на

$$s_{l_1} = \sum_i x_i^{l_1}, \dots, s_{l_j} = \sum_i x_i^{l_j}.$$

Мы исходим из выражения

$$D(x_i) = \sum_p \delta_p P x_1^{m-1} x_2^{m-2} \dots x_{m-1} x_m^0$$

и пытаемся вычислить коэффициент при

$$x_1^{\lambda_1+m-1} x_2^{\lambda_2+m-2} x_m^{\lambda_m}.$$

Если какие-нибудь два показателя в некотором члене равны, то коэффициент при нем (на любом этапе вычислений) равен нулю. Предположим, что l_1 — это цикл длины 1 (как это было в только что разобранном нами случае). Тогда, умножая $D(x_i)$ на $\sum x_i$, мы обнаружим, что единственный член, который не равен нулю, получается

в результате умножения на x_1 . Поэтому мы помещаем одну точку в первой строке. Представим себе, что $l_1 = 2$. В этом случае мы должны умножать на $\sum x_i^2$. Существует два отличных от нуля члена: это те, которые получаются от умножения на x_1^2 и x_2^2 . Первый из них приводит к члену $x_1^{m+1}x_2^{m-2} \dots x_{m-1}$, показатели степени которого все еще расположены в убывающем порядке. Второй приводит к члену $x_1^{m-1}x_2^m x_3^{m-3} \dots x_{m-1}$, у которого показатели степени оказываются неупорядоченными. Среди перестановок $\sum_P \delta_P P$ найдется такая перестановка, которая расположит показатели степеней в порядке их убывания, а именно транспозиция (12), изменяющая знак, в результате чего мы получим $-x_1^{m+1}x_2^{m-2}x_3^{m-3} \dots x_{m-1}$. Этот результат можно сформулировать следующим образом: мы добавим одну точку ко второй строке, затем одну точку — к первой и поменяем знак. При $l_1 = 3$ мы нашли бы

$$\begin{aligned} x_1^{m+2}x_2^{m-2} \dots x_{m-1}, & \quad x_1^{m-1}x_2^{m+1}x_3^{m-3} \dots x_{m-1}, \\ & \quad x_1^{m-1}x_2^{m-2}x_3^m x_4^{m-4} \dots x_{m-1}. \end{aligned}$$

Отбирая из перестановок $\sum_P \delta_P P$ те, которые располагают показатели степени в порядке убывания, получаем

$$\begin{aligned} x_1^{m+2}x_2^{m-2} \dots x_{m-1}, & \quad -x_1^{m+1}x_2^{m-1}x_3^{m-3} \dots x_{m-1}, \\ & \quad x_1^m x_2^{m-1}x_3^{m-2}x_4^{m-4} \dots x_{m-1}. \end{aligned}$$

Эти три результата соответствуют следующим возможностям:

- а) размещению трех точек в первой строке,
- б) размещению одной точки во второй строке и двух точек в первой строке,

- в) размещению по одной точке в каждой из первых трех строк.

Тот же метод применяют и при $l_1 > 3$. Мы видим, что если совокупность, состоящую из l_1 точек, размещают на нечетном числе строк, то знак не меняется (*четное размещение*), но если точки размещены на четном числе строк, то знак меняется (*нечетное размещение*). Этот результат становится еще более наглядным, если отбросить общий множитель $x_1^{m-1} \dots x_{m-1}$, после чего указанным нами трем возможным случаям будут соответствовать выражения x_1^3 , $-x_1^2x_2$, $x_1x_2x_3$. Можно сказать, что точки мы размещали следующим образом: добавляли точки к любой строке до тех пор, пока число точек не стало больше числа точек на предыдущей строке на единицу, затем перешли к предыдущей строке и повторили всю процедуру и т. д. После того как все точки добавлены, должен получиться граф

допустимого вида. Знак будет плюсом (минусом), если число соответствующих строк нечетное (четное).

Рассмотрим теперь любой последующий этап в процессе умножения. Предположим, что после добавления точек для $l_1, l_2, \dots$ мы пришли к характерному (допустимому) результату:

$$\pm (x_1^{m-1} x_2^{m-2} \dots x_{m-1}) x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots x_q^{v_q} \dots x_m^{v_m}.$$

Если этот результат относится к числу допустимых, то должно выполняться неравенство $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_m$. Если теперь мы будем умножать на $s_r = \sum x_r^r$, что соответствует циклу длины r , то необходимо будет учесть действие умножения на x_q^r . Если какие-нибудь два показателя становятся равными, то результат равен нулю. Предположим, что

$$v_{p-1} + (m - p + 1) > v_q + (m - q) + r > v_p + (m - p).$$

В этом случае мы получаем результат

$$\begin{aligned} & \pm x_1^{v_1+m-1} \dots x_{p-1}^{v_{p-1}+m-p+1} x_p^{v_p+m-p} \dots x_q^{v_q+m-q+r} \dots x_m^{v_m} = \\ & = \pm x_1^{v_1+m-1} \dots x_{p-1}^{v_{p-1}+m-p+1} x_q^{v_q+m-q+r} x_p^{v_p+m-p} \dots \\ & \quad \dots x_{q-1}^{v_{q-1}+m-q+1} x_{q+1}^{v_{q+1}+m-q-1} \dots x_m^{v_m} = \\ & = \pm (x_1^{m-1} \dots x_{p-1}^{m-p+1} x_q^{m-p} x_p^{m-p-1} \dots x_{m-1}) x_1^{v_1} \dots \\ & \quad \dots x_{p-1}^{v_{p-1}} x_q^{v_q+p-q+r} x_p^{v_p+1} x_{p+1}^{v_{p+1}+1} \dots x_{q-1}^{v_{q-1}+1} x_{q+1}^{v_{q+1}} \dots x_m^{v_m}. \quad (7.40) \end{aligned}$$

Найдется и соответствующий член, в котором переменные $x_1, \dots, x_m$ расположены в естественном порядке, его знак определяется числом переменных $x_p, \dots, x_q$, показатели которых изменились: плюс (минус) в том случае, если $(q - p)$ нечетно (четно). Таким членом, выписанным в новом порядке, будет член

$$\begin{aligned} & (\pm 1)^{q-p+1} (x_1^{m-1} \dots x_{p-1}^{m-p+1} x_p^{m-p} \dots x_{m-1}) x_1^{v_1} \dots \\ & \quad \dots x_{p-1}^{v_{p-1}} x_q^{v_q+p-q+r} x_{p+1}^{v_{p+1}+1} x_{p+2}^{v_{p+2}+1} \dots x_{q-1}^{v_{q-1}+1} x_{q+1}^{v_{q+1}} \dots x_m^{v_m}. \quad (7.41) \end{aligned}$$

На языке графов можно сказать, что мы добавляли точки к q -й строке до тех пор, пока число их не стало на единицу больше числа точек в предыдущей строке (т. е. $x_q^{v_q}$ перешел в $x_q^{v_q+1}$), а затем повторили ту же процедуру с предыдущей строкой и т. д., убедившись в том, что окончательным результатом размещения всех r точек является правильный граф. Этот процесс называется *правильным размещением r точек*. Общее правило состоит в следующем.

Чтобы найти характер в представлении (λ) класса (l) , имеющего циклы длины $l_1, l_2, \dots$, строим граф разбиения (λ) с помощью по-

следовательных правильных размещений точек, число которых равно l_1 , l_2 и т. д. Характер $\chi_{(l)}^{(2)}$ равен числу способов, которыми можно построить граф, содержащий четное число отрицательных размещений минус число способов, при которых граф содержит нечетное число отрицательных размещений.

В качестве первого примера найдем $\chi_{(2,1)}^{(3,1)}$. Прежде всего начертим граф разбиения (3, 1):

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \quad (7.42)$$

Выполним правильные размещения 2, 1 и 1 точек. Эти операции можно проделывать в любом порядке. Разместим, например, сначала две точки (обозначим их символом 1), затем одну точку (2) и еще одну точку (3). Две точки можно расположить двумя способами:

$$\text{а) } \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \quad \text{или} \quad \text{б) } \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \quad (7.42a)$$

Правильное размещение точки (2) приводит к следующим вариантам:

$$\text{а}_1) \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & \square \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \quad \text{а}_2) \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \quad \text{б) } \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \quad (7.42б)$$

Ясно, что точка (3) помещается в оставшееся свободное место:

$$\text{а}_1) \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \quad \text{а}_2) \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \quad \text{б) } \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \quad (7.42в)$$

В вариантах „а₁“ и „а₂“ две точки 1 расположены в одной строке, поэтому эти варианты не содержат нечетных размещений. В случае „б“ точки 1 располагаются в обеих строках, и поэтому вариант „б“ содержит одно отрицательное размещение. Таким образом, мы получаем $+1$ из „а₁“, $+1$ из „а₂“ и -1 из „б“

$$\chi_{(2,1)}^{(3,1)} = +1 + 1 - 1 = 1. \quad (7.43)$$

Порядок, в котором выполняются размещения, не существен (хотя разумный выбор его может значительно сократить вычисления). Например, предположим, что сначала размещается одна точка (1), затем две точки (2) и затем одна точка (3). Первую точку (1) надлежит поместить в левый верхний угол:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}$$

Добавим теперь две точки (2). Первую точку (2) мы не можем поместить во вторую строку, поскольку наше правило требует, чтобы мы продолжали заполнение строки до тех пор, пока не будут использованы все точки либо же число точек не станет на единицу больше, чем число точек в предыдущей строке. Следовательно, единственным правильным размещением является

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

и, помещая сюда третью точку, мы получаем

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$$

Мы имеем только один вариант без отрицательных размещений, поэтому

$$\chi_{(2, 1^2)}^{(3, 1)} = +1.$$

В качестве следующего примера найдем $\chi_{(4, 1^3)}^{(2, 1^5)}$. Граф разбиения $(2, 1^5)$ имеет вид

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$

Одно расположение состоит из одной точки (1), четырех точек (2), одной точки (3) и одной точки (4). Единица должна быть в левом верхнем углу. Тогда единственное правильное размещение четырех двоек дает нам

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 2 & \\ \hline 2 & \\ \hline 2 & \\ \hline 2 & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$

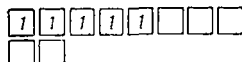
Тройку и четверку можно вписать двумя способами. В любом случае четыре двойки занимают четное число строк (нечетное размещение), так что

$$\chi_{(4, 1^3)}^{(2, 1^5)} = -2.$$

Попытаемся найти $\chi_{(5^2)}^{(8, 2)}$. Граф разбиения $(8, 2)$ имеет вид



Если разместить пять единиц в первой строке, то получится следующее:



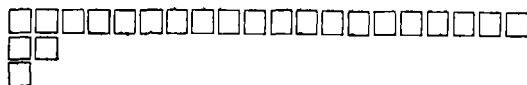
Если теперь мы будем размещать пять двоек, то мы нарушим наше правило, ибо мы должны начать со второй строки и продолжать заполнять ее до тех пор, пока число занятых клеток не станет больше числа заполненных клеток в первой строке. Следовательно, этот метод не позволяет построить граф с помощью правильных размещений. Другой способ состоит в том, чтобы поместить первую единицу во второй строке, а остальные четыре единицы — в первой:



Но и тогда мы не сможем правильно разместить пять двоек, чтобы образовать граф. Поэтому не существует способов образования графа с помощью правильных размещений, вследствие чего

$$\chi_{(5^2)}^{(8, 2)} = 0.$$

В качестве последнего примера найдем $\chi_{(14, 8, 1)}^{(20, 2, 1)}$. Граф разбиения $(20, 2, 1)$ имеет вид:



Будем производить заполнение в следующем порядке: 1 точка, 8 точек, 14 точек. Единица отправляется в левый верхний угол. Тогда, если расположить 8 двоек в первой строке, то мы не сможем правильно расположить тройки. Точно так же, если мы начнем с двоек во второй строке и поместим две из них там, а остальные шесть — в первой строке, то пустая клетка в третьей строке будет мешать правильному размещению троек. Следовательно, мы должны сначала поместить двойку в третьей строке, затем две двойки — во второй

если (I) — класс четных перестановок, и

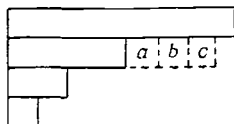
$$\chi_{(I)}^{(1^n)} = -1,$$

если (I) — класс нечетных перестановок. Доказательство этого очень схоже с доказательством приведенной выше теоремы. В данном случае существует только один столбец, и имеется лишь один способ правильного построения графа. Каждый цикл, содержащий четное число символов (нечетная перестановка), приводит к появлению множителя -1 . Утверждение теоремы вытекает из того, что четные (нечетные) перестановки содержат четное (нечетное) число циклов четной длины.

Ранее мы обращали внимание на сопряженные, или ассоциированные, разбиения. Два разбиения (λ) и $(\tilde{\lambda})$ сопряжены друг с другом, если схема одного из них получается из схемы другого заменой строк на столбцы. Представления, соответствующие сопряженным разбиениям, также называются *сопряженными представлениями*. Докажем теперь, что характеры класса в сопряженных представлениях равны, если класс четный, и имеют противоположные знаки, если класс нечетный, т. е.

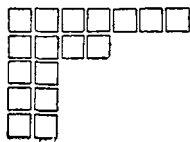
$$\chi_{(I)}^{(\lambda)} = \chi_{(\tilde{I})}^{(\tilde{\lambda})} \chi_{(I)}^{(1^n)}. \quad (7.44)$$

Существует много способов доказательства соотношения (7.44). Метод, который избираем мы, представляет ценность с той точки зрения, что приучает нас мыслить в терминах графов и схем. Предположим, что мы строим некоторый граф с помощью правильных размещений и приходим к графу:



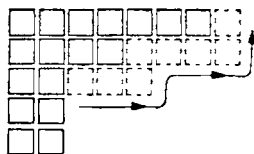
Возможные правильные размещения трех точек во второй строке указаны на схеме, клетки заполняются в следующем порядке: a, b, c . На сопряженной схеме то же расположение в порядке c, b, a будет вновь правильным.

Предположим, далее, что мы достигли следующего этапа в построении графа:



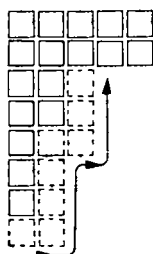
(7.45)

и правильно разместили 8 точек, как показано на схеме:



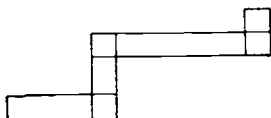
(7.45a)

На сопряженной схеме размещение тех же точек, но в обратном порядке, вновь будет правильным:

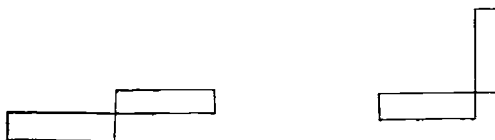


(7.45b)

Обратим внимание на форму добавки к нашей головоломке с зигзагом. Добавка всегда имеет форму



Никогда не бывает добавок таких форм:



Иначе говоря, каждая точка находится либо в той же строке, либо в том же столбце, что и предшествующая ей. Общее число различных строк и столбцов, занимаемых r точками при правильном размещении, равно $r+1$, ибо первая точка начинает заполнение и строки и столбца, а последующие точки (как мы уже указывали) располагаются либо в той же строке, либо в том же столбце, что

и предшествующие им. Но из (7.45а) и (7.45б) мы видим, что в случае сопряженных разбиений размещения означают, что строки заменяются столбцами, и наоборот. Таким образом, если r нечетно ($r+1$ четно), то общее число строк и столбцов в схеме четно, и, следовательно, размещения на сопряженных графах либо оба положительны, либо оба отрицательны. Если же r четно ($r+1$ нечетно), то размещение на графе, отвечающем разбиению $(\tilde{\lambda})$, отрицательно, если размещение на графе, отвечающем разбиению (λ) , положительно, и наоборот. Таким образом, каждому способу построения графа (λ) для класса (l) соответствует некоторый способ построения графа $(\tilde{\lambda})$. В случае четных классов число циклов с четным r четно, и поэтому оба метода приводят к одному и тому же числу, равному $+1$ или -1 . Если класс нечетный, то число циклов с четным r нечетно, поэтому мы получаем $+1$ в одном случае и -1 в другом случае.

§ 5. Рекуррентные формулы для характеров. Правила ветвления

Если требуется построить подробные таблицы характеров симметрических групп, то можно также пользоваться и рекуррентными формулами, так что характеры группы S_n можно определять по уже известным характерам для симметрических групп меньшего порядка.

Рекуррентные формулы выводятся из равенства (7.24):

$$s_{(l)} D(x_i) = \sum_{(\lambda)} \chi_{(l)}^{(\lambda)} \sum_P \delta_P P x_1^{\lambda_1+m-1} x_2^{\lambda_2+m-2} \dots x_m^{\lambda_m}, \quad (7.24)$$

где (l) — разбиение числа n .

Предположим теперь, что мы рассматриваем класс группы S_{n+r} , который получается при добавлении к разбиению (l) одного цикла длины r : $(k) = ((l), r)$. В этом случае

$$s_{(k)} D(x_i) = \sum_{(\mu)} \chi_{(k)}^{(\mu)} \sum_P \delta_P P x_1^{\mu_1+m-1} x_2^{\mu_2+m-2} \dots x_m^{\mu_m}. \quad (7.24a)$$

Но

$$s_{(k)} = s_{(l)} s_r, \quad (7.46)$$

поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{(\mu)} \chi_{(k)}^{(\mu)} \sum_P \delta_P P x_1^{\mu_1+m-1} \dots x_m^{\mu_m} &= \\ &= (x_1^r + \dots + x_m^r) \sum_{(\lambda)} \chi_{(l)}^{(\lambda)} \sum_P \delta_P P x_1^{\lambda_1+m-1} \dots x_m^{\lambda_m}. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Вычислим теперь коэффициенты при одинаковых одночленах в левой и правой частях равенства (7.47) и получим

$$\chi_{(k)}^{(\mu)} = \sum_{(\lambda)}' \pm \chi_{(l)}^{(\lambda)}, \quad \text{где } (k) = ((l), r), \quad (7.48)$$

а $\sum'$ означает суммирование по всем разбиениям (λ) , которые мы сейчас охарактеризуем. Из (7.47) ясно, что мы берем набор показателей

$$\lambda_1 + m - 1, \lambda_2 + m - 2, \dots, \lambda_m \quad (7.49)$$

и по очереди увеличиваем один из них на r . Мы хотим, чтобы возникающая при этом последовательность получалась из последовательности

$$\mu_1 + m - 1, \mu_2 + m - 2, \dots, \mu_m \quad (7.50)$$

с помощью некоторой перестановки. Если это так, то $\chi_{(l)}^{(\lambda)}$ будет входить в равенство (7.48), а знак его будет определяться тем, получаются ли последовательности (7.49) и (7.50) друг из друга четной $(+)$ или нечетной $(-)$ перестановкой. Поскольку на практике мы исходим из разбиения (μ) и последовательности (7.50), то из каждого члена последовательности (7.50) мы по очереди *вычитаем* r и то, что при этом получается, сравниваем с (7.49). Чтобы стандартизировать нашу процедуру, мы всегда будем выбирать m равным числу частей в разбиении (μ) , хотя возможны и другие выборы m .

Рассмотрим, например, характер $\chi_{(k)}^{(4, 3, 1^3)}$. Мы хотим выразить его через характеры $\chi_{(l)}^{(\lambda)}$ группы S_{10} , где класс (l) получается из (k) выбрасыванием одного цикла длины 2 ($r = 2$). Выбираем $m = 5$ и выписываем последовательность (7.50):

$$8, 6, 5, 2, 1.$$

Вычтем теперь по очереди из каждого числа по 2 и запишем получающиеся при этом последовательности. Для экономии труда заметим, что при нашем выборе m следует отбросить любую последовательность, содержащую отрицательные числа. Кроме того, если два числа в последовательности, получившейся после вычитания 2, равны, из нее уже не может получиться последовательность (7.49) и ее также следует отбросить. Наши последовательности имеют вид

$$\begin{aligned} 6, 6, 5, 2, 1; \\ 8, 4, 5; 2, 1; \\ 8, 6, 3, 2, 1; \\ 8, 6, 5, 0, 1; \\ 8, 6, 5, 2, -1; \end{aligned}$$

поэтому мы можем исключить из рассмотрения первую и последнюю последовательности. Расположим числа в оставшихся последовательностях в порядке убывания. Будем помечать последовательность зна-

ком $+$ или $-$ в зависимости от того, будет ли необходимая для этого перестановка четной или нечетной:

$$-8, 5, 4, 2, 1;$$

$$+8, 6, 3, 2, 1;$$

$$-8, 6, 5, 1, 0.$$

Поскольку эти последовательности являются последовательностями типа (7.49), мы получим значения λ , вычитая из первого числа $m-1=4$, из второго $m-2=3$ и т. д.

$$-4, 2, 2, 1, 1;$$

$$+4, 3, 1, 1, 1;$$

$$-4, 3, 3, 0, 0.$$

Окончательно наша рекуррентная формула будет иметь следующий вид:

$$\chi_{(l), 2}^{(4, 32, 12)} = -\chi_{(l)}^{(4, 22, 12)} + \chi_{(l)}^{(4, 3, 12)} - \chi_{(l)}^{(4, 32)}. \quad (7.51)$$

В качестве второго примера найдем рекуррентную формулу, позволяющую выразить $\chi_{(l), 4}^{(7, 6, 5)}$ через $\chi_{(l)}^{(\lambda)}$. Величины μ равны 7, 6 и 5, $m=3$, так что последовательность (7.50) имеет вид 9, 7, 5. Вычтем по очереди из каждого числа по 4:

$$\overline{-5, 7, 5} \quad 9, 3, 5; \quad 9, 7, 1.$$

Переставим члены последовательностей в порядке убывания: $-9, 5, 3; +9, 7, 1$ и вычтем 2, 1, 0, в результате чего получим $-7, 4, 3; +7, 6, 1$, откуда

$$\chi_{(l), 4}^{(7, 6, 5)} = \chi_{(l)}^{(7, 6, 1)} - \chi_{(l)}^{(7, 4, 3)}.$$

Чрезвычайно важен случай, когда мы отбрасываем цикл длины 1 ($r=1$). В этом случае мы должны последовательно вычитать из каждого члена последовательности (7.50) по 1 и то, что получится, отождествить с (7.49). На этот раз члены не могут располагаться в беспорядке (единственный непригодный для нас результат может заключаться в том, что два члена станут равными), и мы получаем возможность оперировать непосредственно с величинами λ и μ . В результате сравнения мы получаем *правило ветвления*

$$\chi_{(l), 1}^{(\mu)} = \sum_r \chi_{(l)}^{(\mu_1, \dots, \mu_r-1, \dots)}, \quad (7.52)$$

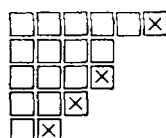
где суммирование проводится по всем получающимся разбиениям, которые правильны (т. е. таким, для которых $\mu_r-1 \geq \mu_{r+1}$).

Предположим, что мы отбрасываем второй цикл длины 1. Повторяя наши рассуждения, получаем

$$\chi_{(l), 1^2}^{(\mu)} = \sum_{\mu_r - 2 \geq \mu_{r+1}} \chi_{(l)}^{(\mu_1, \dots, \mu_r - 2, \dots)} + \sum_{\substack{\mu_r - 1 \geq \mu_{r+1} \\ \mu_s - 1 \geq \mu_{s+1}}} a_{rs} \chi_{(l)}^{(\mu_1, \dots, \mu_r - 1, \dots, \mu_s - 1, \dots)}, \quad (7.53)$$

где $a_{rs} = 2$, если только r и s не являются последовательными целыми числами и μ_r не равно μ_s , в противном случае $a_{rs} = 1$.

Последнее выражение чрезвычайно громоздко. Гораздо удобнее изображать его графически. Чтобы перевести эту рекуррентную формулу на язык графов, рассмотрим сначала случай (7.52). Предположим, что при построении графа разбиения (μ) с помощью правильного размещения узлов, соответствующего классу $((l), 1)$, мы отбрасываем при последнем правильном размещении (одного узла) цикл длины 1. Перед этим последним шагом мы уже построили разбиения (π) числа $n - 1$ с помощью правильного размещения, и теперь для того, чтобы построить разбиение (μ) , мы пытаемся разместить последний узел. Это последнее размещение положительно. Число способов, которыми можно построить разбиение (π) , равно характеру класса (l) для этого разбиения числа $n - 1$. Поэтому характер класса $((l), 1)$ в разбиении (μ) равен сумме характеров класса (l) во всех правильных графах, получаемых из (μ) (правильным) выбрасыванием одной точки. Например, из схемы



$$(7.54)$$

можно удалить любую из точек (одну), помеченных крестиком, и поэтому

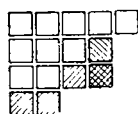
$$\chi_{(l), 1}^{(6, 4, 3, 2)} = \chi_{(l)}^{(6, 4, 3, 2)} + \chi_{(l)}^{(6, 4, 3, 2)} + \chi_{(l)}^{(6, 4, 3, 2)} + \chi_{(l)}^{(6, 4, 3, 1)}. \quad (7.54a)$$

Выбрасывание двух циклов длины 1, которое привело к выражению (7.53), графически можно описать как два последовательных правильных удаления по одному узлу. Из нашей схемы можно усмотреть и причину того, почему выражение (7.53) столь сложно. Мы удаляли по одному узлу сначала из строки 1, затем из строки 3, или наоборот, в результате чего получающееся разбиение входит в сумму дважды. Если же взять строки 2 и 3, то сначала мы должны произвести выбрасывание из строки 3, а затем из строки 2, в силу чего это разбиение войдет в сумму лишь один раз.

Выбрасывание цикла длины 2 означает правильное удаление 2 точек. Чтобы удаляемая полоска была правильной, она должна иметь вид

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \quad (7.55)$$

где первая полоска положительна, а вторая отрицательна (четное число строк). Таким образом, в разбиении



можно удалить лишь косо заштрихованные полоски из 2-х клеток, так что

$$\chi_{(l)}^{(5, 4^2, 2)} = \chi_{(l)}^{(5, 4^2)} + \chi_{(l)}^{(5, 4, 2^2)} - \chi_{(l)}^{(5, 3^2, 2)}. \quad (7.56)$$

При отбрасывании цикла длины 3 правильными полосками являются

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \quad (7.57)$$

Вообще для цикла длины r существует 2^{r-1} различных полосок.

Задача. Воспользуйтесь рекуррентными методами для вычисления

а) $\chi_{(l)}^{(6, 4, 2)}$, если известны $\chi_{(l)}^{(\lambda)}$; б) $\chi_{(l)}^{(4, 2, 1)}$, если известны $\chi_{(l)}^{(\lambda)}$.

§ 6. Вычисление характеров по формуле Фробениуса

Последний метод вычисления характеров состоит в непосредственном использовании формулы Фробениуса (7.24). Проиллюстрируем этот метод на нескольких простых примерах, которые понадобятся нам впоследствии. Согласно (7.24), $\chi_0 \equiv \chi_{(1^n)}^{(\lambda)}$ и $\chi \equiv \chi_{(2, 1^{n-2})}^{(\lambda)}$ равны соответственно коэффициентам при $x_1^{h_1} x_2^{h_2} \dots x_m^{h_m}$ в выражениях

$$D(x_1, \dots, x_m)(x_1 + \dots + x_m)^n \quad (7.58)$$

и

$$D(x_1, \dots, x_m)(x_1 + \dots + x_m)^{n-2}(x_1^2 + \dots + x_m^2), \quad (7.59)$$

где

$$h_i = \lambda_i + m - i. \quad (7.60)$$

Начнем с (7.58). Каждый член в разложении $D(x_i)$ имеет вид

$$\pm x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m}, \quad (7.61)$$

где числа k образуют некоторую перестановку целых чисел $m-1, m-2, \dots, 0$, знак члена определяется тем, будет ли эта перестановка четной или нечетной. Чтобы получить из (7.61) требуемое выражение, мы должны умножить (7.61) на

$$\frac{n!}{(h_1 - k_1)! \dots (h_m - k_m)!} x_1^{h_1 - k_1} \dots x_m^{h_m - k_m}, \quad (7.62)$$

так что искомым коэффициент равен

$$\chi_0 = n! \sum_{(k)} \pm \frac{1}{(h_1 - k_1)! \dots (h_m - k_m)!}, \quad (7.63)$$

где сумма берется по всем перестановкам чисел $m-1, \dots, 0$. Эта сумма является разложением определителя

$$\chi_0 = n! \begin{vmatrix} \frac{1}{[h_1 - (m-1)]!} & \frac{1}{[h_1 - (m-2)]!} & \dots & \frac{1}{h_1!} \\ \frac{1}{[h_2 - (m-1)]!} & \frac{1}{[h_2 - (m-2)]!} & \dots & \frac{1}{h_2!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{[h_m - (m-1)]!} & \frac{1}{[h_m - (m-2)]!} & \dots & \frac{1}{h_m!} \end{vmatrix}. \quad (7.64)$$

Вынося множитель $1/(h_1! \dots h_m!)$, получаем

$$\chi_0 = \frac{n!}{h_1! h_2! \dots h_m!} \times \begin{vmatrix} h_1(h_1-1) \dots (h_1-m+2) & h_1(h_1-1) \dots (h_1-m+3) \dots h_1 & 1 \\ h_2(h_2-1) \dots (h_2-m+2) & h_2(h_2-1) \dots (h_2-m+3) \dots h_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_m(h_m-1) \dots (h_m-m+2) & h_m(h_m-1) \dots (h_m-m+3) \dots h_m & 1 \end{vmatrix}. \quad (7.65)$$

Столбцы определителя (7.65) представляют собой многочлены степени $m-1, m-2, \dots, 0$ со старшим коэффициентом, равным еди-

нице. Следовательно, вычитая подходящим образом столбцы друг из друга, мы можем привести (7.65) к виду

$$\chi_0 = \frac{n!}{h_1! \dots h_m!} \begin{vmatrix} h_1^{m-1} & h_1^{m-2} & \dots & h_1 & 1 \\ h_2^{m-1} & h_2^{m-2} & \dots & h_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ h_m^{m-1} & h_m^{m-2} & \dots & h_m & 1 \end{vmatrix},$$

или

$$\chi_0 = \frac{n!}{h_1! \dots h_m!} D(h_1, \dots, h_m). \quad (7.66)$$

Чтобы вычислить

$$\chi \equiv \chi_{(2, 1^{n-2})}^{(\lambda)},$$

применим (7.66) к (7.59):

$$\chi = (n-2)! \sum_{i=1}^m \frac{D(h_1, h_2, \dots, h_i-2, \dots, h_m)}{h_1! h_2! \dots (h_i-2)! \dots h_m!}. \quad (7.67)$$

Нам потребуется величина

$$\xi = \frac{n(n-1)}{2} \frac{\chi}{\chi_0}. \quad (7.68)$$

Из (7.66) и (7.67) имеем

$$\xi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{h_i(h_i-1) D(h_1, h_2, \dots, h_i-2, \dots, h_m)}{D(h_1, \dots, h_m)}. \quad (7.69)$$

Знаменатель в (7.69) является знакопеременной функцией от h_i [ср. замечания, сделанные по поводу (7.23)]. Сумма в числителе также является знакопеременной функцией от h_i . [Проверка того, что числитель содержит все множители $(h_i - h_j)$, предоставляется читателю.] Следовательно, их отношение должно быть симметричным полиномом второй степени относительно h_i :

$$\begin{aligned} \sum_i h_i(h_i-1) D(h_1, h_2, \dots, h_i-2, \dots, h_m) = \\ = D(h_1, \dots, h_m) [A \sum h_i^2 + B \sum h_i h_j + C \sum h_i + F]. \end{aligned} \quad (7.70)$$

Сравнивая коэффициенты в левой и правой частях равенства (7.70), мы можем определить A, B, C, F . Прежде всего рассмотрим члены, в которые h_1 входит в степени $m+1$ или m , а степень h_2 больше

или равна $m - 2$. В левой части такие члены встречаются только при $i = 1$:

$$h_1(h_1 - 1) \begin{vmatrix} (h_1 - 2)^{m-1} & (h_1 - 2)^{m-2} \\ h_2^{m-1} & h_2^{m-2} \end{vmatrix} \cdot |h_3^{m-3} \dots h_{m-1}|, \quad (7.71)$$

где $|h_3^{m-3} \dots h_{m-1}|$ — определитель, который получается после вычеркивания из определителя $D(h)$ первых двух строк и столбцов. Разлагая (7.71), получаем

$$\begin{aligned} h_1(h_1 - 1) [h_2^{m-2} \{h_1^{m-1} - 2(m-1)h_1^{m-2} \dots\} - \\ - h_2^{m-1} \{h_1^{m-2} - 2(m-2)h_1^{m-3}\}] \cdot |h_3^{m-3} \dots h_{m-1}| = \\ = [h_1^{m+1}h_2^{m-2} - h_1^m h_2^{m-2} - 2(m-1)h_1^m h_2^{m-2} - h_1^m h_2^{m-1} \dots] \times \\ \times |h_3^{m-3} \dots h_{m-1}|. \end{aligned} \quad (7.72)$$

В правой части (7.70) эти члены входят лишь в

$$[h_1^{m-1}h_2^{m-2} - h_1^{m-2}h_2^{m-1}] [Ah_1^2 + Bh_1h_2 + Ch_1 + \dots] \times \\ \times |h_3^{m-3} \dots h_{m-1}|. \quad (7.72a)$$

Сравнивая коэффициенты, получаем

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = -(2m - 1). \quad (7.73)$$

Постоянная F есть коэффициент при $h_1^{m-1}h_2^{m-2} \dots h_{m-1}$ в правой части (7.70). Этот одночлен в левой части (7.70) получается только из главной диагонали определителя. В i -м слагаемом диагональный член равен

$$h_1^{m-1}h_2^{m-2} \dots h_i(h_i - 1)(h_i - 2)^{m-i} \dots h_{m-1},$$

так что коэффициент при $h_1^{m-1}h_2^{m-2} \dots h_{m-1}$ равен

$$2(m-i)(m-i-1) + 2(m-i) = 2(m-i)^2$$

и

$$F = 2 \sum_{i=1}^m (m-i)^2 = \frac{1}{3} m(m-1)(2m-1). \quad (7.74)$$

Пользуясь (7.69) и (7.70), находим

$$\xi = \frac{1}{2} \sum h_i^2 - \frac{2m-1}{2} \sum h_i + \frac{m(m-1)(2m-1)}{6}. \quad (7.75)$$

Подставим теперь h_i из (7.60) и получим

$$\xi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_i(\lambda_i + 1) - \sum_{i=1}^m i\lambda_i. \quad (7.76)$$

Задача. Воспользуйтесь соотношением (7.66), чтобы найти неприводимое представление группы S_{10} , соответствующее разбиению $(4, 3^2)$.

§ 7. Матрицы неприводимых представлений группы S_n . Символы Яманучи

Обратимся теперь к задаче построения матриц неприводимых представлений группы S_n . Мы будем следовать статье Яманучи¹⁾.

Рассмотрим неприводимое представление $D(R)$, характеризуемое разбиением (λ) . Будем предполагать, что нам известны неприводимые представления группы S_{n-1} — группы перестановок символов $1, 2, \dots, n-1$. Все перестановки группы S_n , которые содержатся в этой подгруппе S_{n-1} , обладают тем свойством, что они оставляют без изменений последний символ n . Поэтому всякий элемент R группы S_n , который содержится в S_{n-1} , имеет вид $((I), 1)$ и, следовательно, мы имеем право применять правило ветвления (7.52). Равенство (7.52) можно выразить на языке представлений: для элементов R , содержащихся в S_{n-1} , матрица представления $D(R)$ равна сумме матриц представлений $D_r(R)$, где D_r — неприводимое представление группы S_{n-1} , соответствующее разбиению $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r-1, \dots, \lambda_m)$. В матричных обозначениях это запишется так:

$$D(R) = \sum_{\lambda_{r-1} \geq \lambda_{r+1}} D_r(R) \quad (7.77)$$

для любой перестановки R , оставляющей без изменения последний символ n . Например, в разбиении, указанном в (7.54), любая перестановка первых 18 символов имеет матрицу представления

$$D(R) = D_1(R) + D_3(R) + D_4(R) + D_5(R), \quad (7.78)$$

где, например, D_1 есть матрица в представлении, характеризуемом разбиением $(5, 4^2, 3, 1)$. Представление можно выбрать так, чтобы матрица $D(R)$ имела клеточно-диагональный вид, причем на главной диагонали будут стоять матрицы D_r . Индекс r позволяет нумеровать набор строк (столбцов), в которых стоит матрица D_r .

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & & & & \\ & \boxed{3} & & & \\ & \boxed{3} & & & \\ & & \boxed{4} & & \\ & & \boxed{4} & & \\ & & & \boxed{5} & \\ & & & & \boxed{5} \end{bmatrix} \quad (7.79)$$

Для тех элементов R , которые оставляют без изменения *два* символа $n-1$ и n и, следовательно, принадлежат S_{n-2} , матрица D_r

¹⁾ Yamanouchi, Phys. Math. Soc. Japan, 19, 436 (1937).

распадается дальше [см. (7.53)] на сумму представлений D_{rs} , соответствующих правильным разбиениям

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_r - 2, \dots, \lambda_m), \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_r - 1, \dots, \lambda_s - 1, \dots, \lambda_m). \quad (7.80)$$

Неприводимые представления, получающиеся при этом, бывают трех типов:

- 1) $D_{rr} (\lambda_r \geq \lambda_{r+1} + 2)$ встречается один раз,
- 2) $D_{rs} = D_{sr}$ встречается дважды, если $\lambda_r - 1 \geq \lambda_{r+1}$ и $\lambda_s - 1 \geq \lambda_{s+1}$,
- 3) D_{rs} встречается, а D_{sr} нет; это происходит в том случае, если $s = r - 1$ и $\lambda_{r-1} = \lambda_r$.

Например, рассмотрим еще раз разбиение, указанное в (7.54). Для перестановок R , оставляющих на месте последние два символа, получаем

$$D = D_{11} + D_{13} + D_{14} + D_{15} + D_{31} + D_{32} + D_{34} + D_{35} + D_{41} + \\ + D_{43} + D_{45} + D_{51} + D_{53} + D_{54} + D_{55}. \quad (7.81)$$

(Заметим, что матрица D_{32} типа 2.) Для таких перестановок мы разбиваем r на rs , и матрица имеет вид

$$(7.82)$$

Матрицы любой перестановки в группе S_{n-2} имеют вид (7.82); пунктиром показаны матрицы (7.79), отвечающие элементам группы S_{n-1} . В (7.82) мы снова выбрали базис так, чтобы представить матрицу в клеточно-диагональном виде.

Теперь мы хотим построить матрицу представления тех элементов R группы S_n , которые *не содержатся* в S_{n-1} , т. е. таких элементов, которые переставляют последний символ n . Для этого нам потребуется лишь матрица транспозиции $(n-1, n)$, которую мы обозначим через U , ибо

$$(l, n) = (n-1, n)(l, n-1)(n-1, n). \quad (7.83)$$

Транспозиция $(l, n-1)$ принадлежит группе S_{n-1} , поэтому ее матрица известна. Зная матрицу U , мы можем построить матрицу для любой транспозиции (l, n) , а следовательно, и матрицу для любой перестановки. Матрица V произвольной перестановки из группы S_{n-2} имеет вид, показанный в (7.82):

$$V_{rs, pq} = V_{rs, rs} \delta_{rs, pq}. \quad (7.84)$$

Поскольку транспозиция $(n-1, n)$ коммутирует со всеми элементами группы S_{n-2} , то

$$VU = UV \quad (7.85)$$

или

$$V_{rs, rs} U_{rs, pq} = U_{rs, pq} V_{pq, pq} \quad (7.86)$$

для всех элементов группы S_{n-2} . Матрицы $V_{rs, rs}$ и $V_{pq, pq}$ служат неприводимыми представлениями группы S_{n-2} , которые эквивалентны лишь при $pq = rs$ или $pq = sr$. Следовательно, по лемме Шура, $U_{rs, pq} = 0$, за исключением случая, когда $pq = rs$ или $pq = sr$ и

$$U_{rs, rs} = \sigma_{rs, rs} E_{rs, rs}, \quad U_{rs, sr} = \sigma_{rs, sr} E_{rs, sr}, \quad (7.87)$$

где $E_{lm, pq}$ — единичная матрица, стоящая на пересечении lm -строк и pq -столбцов в (7.82), а величины σ — константы.

Если потребовать, чтобы представление было унитарным, то из вида матрицы U можно усмотреть, что если rs имеет тип 1 или 3, то

$$|\sigma_{rs, rs}|^2 = 1, \quad (7.88)$$

а если rs имеет тип 2, то

$$|\sigma_{rs, rs}|^2 + |\sigma_{rs, sr}|^2 = 1. \quad (7.89)$$

Чтобы найти матрицу U транспозиции $(n-1, n)$, нам необходимо знать лишь константы σ . Их можно найти следующим образом.

Ранее мы показали [см. (3.168) — (3.170)], что если просуммировать матрицы неприводимого представления по всем элементам класса K , то получится матрица, кратная единичной:

$$\sum_{R \in K} U(R) = \frac{n_K \chi_K^E}{\chi_0}, \quad (7.90)$$

где E — единичная матрица, n_K — число элементов в классе K , χ_K — характер этого класса и χ_0 — размерность представления. Применим этот результат к классу транспозиций. Для группы S_n

$$\sum_{i < j}^n U(ij) = \frac{n(n-1)}{2} \frac{\chi}{\chi_0} E = \xi E, \quad (7.91)$$

где ξ — величина, определенная соотношением (7.68) и вычисленная в (7.76). Точно так же, если рассмотреть неприводимые представления D_r группы S_{n-1} и D_{rs} группы S_{n-2} , то получим

$$\sum_{i < j}^{n-1} U^{(r)}(ij) = \xi_r E_r, \quad \sum_{i < j}^{n-2} U^{(rs)}(ij) = \xi_{rs} E_{rs}, \quad (7.92)$$

где E_r и E_{rs} — единичные матрицы представлений D_r и D_{rs} , а ξ_r и ξ_{rs} определяются так же, как и ξ . Из (7.91), (7.92) мы находим, что матрица

$$\sum_{i=1}^{n-1} U(in) = \sum_{i < j}^n U(ij) - \sum_{i < j}^{n-1} U(ij) = A_n \quad (7.93)$$

клеточно-диагональна, причем на ее диагонали [см. (7.79)] стоят подматрицы

$$(\xi - \xi_r) E_{rr}. \quad (7.93a)$$

Повторяя эту процедуру и используя оба выражения (7.92), получим, что матрица

$$\sum_{i=1}^{n-2} U(i, n-1) = A_{n-1} \quad (7.94)$$

также клеточно-диагональна, причем на ее диагонали [см. (7.82)] стоят подматрицы

$$(\xi_r - \xi_{rs}) E_{rs, rs}. \quad (7.94a)$$

Умножив (7.93) на $U(n-1, n)$, мы получим

$$\begin{aligned} A_n U(n-1, n) &= \sum_{i=1}^{n-1} U(i, n) U(n-1, n) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-2} U(i, n) U(n-1, n) + E. \end{aligned} \quad (7.95)$$

Но

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-2} U(i, n) U(n-1, n) &= \\ &= U(n-1, n) \left[U(n-1, n) \sum_{i=1}^{n-2} U(i, n) U(n-1, n) \right] = \\ &= U(n-1, n) \sum_{i=1}^{n-2} U(i, n-1) = U(n-1, n) A_{n-1}. \end{aligned} \quad (7.95a)$$

следовательно,

$$A_n U(n-1, n) - U(n-1, n) A_{n-1} = E. \quad (7.96)$$

Возьмем теперь из этого равенства матричный элемент (pq, rs) и воспользуемся соотношениями (7.93а) и (7.94а). Из рассмотрения элемента rs, rs мы получим

$$(\xi - \xi_r) U_{rs, rs} - U_{rs, rs} (\xi_r - \xi_{rs}) = E_{rs, rs}, \quad (7.97)$$

а из рассмотрения элемента rs, sr следует

$$(\xi - \xi_r) U_{rs, sr} - U_{rs, sr} (\xi_s - \xi_{sr}) = 0. \quad (7.98)$$

Подставляя соотношения (7.87), находим

$$\sigma_{rs, rs} = \frac{1}{\xi - 2\xi_r + \xi_{rs}}, \quad (7.99)$$

$$\sigma_{rs, sr} = 0, \text{ если } \xi - \xi_r - \xi_s + \xi_{sr} \neq 0. \quad (7.100)$$

Воспользуемся теперь соотношением (7.76). Уменьшим λ_r в D_r на 1, тогда

$$\xi - \xi_r = \lambda_r - r. \quad (7.101)$$

Для представлений типа 1 ($r=s$) нам необходимо знать $\xi_r - \xi_{rr}$. В D_{rr} величина λ_r уменьшается на 2, так что

$$\xi_r - \xi_{rr} = \lambda_r - 1 - r$$

и

$$\sigma_{rr, rr} = 1. \quad (7.102)$$

При $r \neq s$

$$\xi_r - \xi_{rs} = \lambda_s - s, \quad (7.103)$$

поэтому для представлений типа 2

$$\sigma_{rs} \equiv \sigma_{rs, rs} = \frac{1}{\lambda_r - \lambda_s + s - r} = -\sigma_{sr, sr}. \quad (7.104)$$

Заметим, что

$$\xi - \xi_r = \xi_s - \xi_{sr},$$

в результате чего условие (7.100) выполняется автоматически. Наконец, для представлений типа 3, для которых $s = r - 1$, $\lambda_{r-1} = \lambda_r$, мы находим из (7.104):

$$\sigma_{rs, rs} = -1. \quad (7.105)$$

Матрица $U(n-1, n)$ очень проста. Из (7.102) вытекает, что ее подматрица (rr, rr) — единичная; из (7.105) следует, что диагональные элементы подматриц (rs, rs) типа 3 равны -1 . Согласно (7.104), в случае подматриц (rs, rs) типа 2 диагональные элементы равны единице, деленной на целое число, а диагональные элементы подматриц (sr, sr) отличаются от диагональных элементов подматриц (rs, rs) лишь знаком. Все эти элементы стоят на диагонали матрицы (7.82). Из условия унитарности (7.89) видим, что в случае типа 2 мы получаем внедиагональную подматрицу, кратную единичной матрице,

$$U_{rs, sr} = \pm \sqrt{1 - \sigma_{rs, rs}^2} E_{rs, sr} = \sigma_{rs, sr} E_{rs, sr}, \quad (7.106)$$

число $\sigma_{rs, sr}$ вещественно, так как $|\sigma_{rs, rs}| < 1$. Выбор знака в (7.106) произволен, его можно изменить на противоположный трансформированием клеточно-диагональной матрицей, у которой диагональные элементы в подматрице (rs, rs) равны -1 , а остальные диагональные элементы равны $+1$. Мы выбираем знак $+$. Определим целое число

$$\tau_{rs, rs} = \frac{1}{\sigma_{rs, rs}} = \lambda_r - \lambda_s + s - r, \quad (7.107)$$

так что

$$\sigma_{rs, rs} = \frac{\sqrt{\tau_{rs, rs}^2 - 1}}{\tau_{rs, rs}}. \quad (7.108)$$

Матрица U содержит, таким образом, на главной диагонали лишь рациональные числа; вне диагонали могут стоять квадратные корни $\sqrt{\tau_{rs, rs}^2 - 1}$. Поскольку матрица U унитарна и вещественна, то $\tilde{U}U = E$, но для транспозиции $U^2 = E$, так что $U = \tilde{U}$, и матрица оказывается симметричной

$$\sigma_{rs, sr} = \sigma_{sr, rs}. \quad (7.109)$$

Целое число $\tau_{rs, rs} \equiv \tau_{rs} = \lambda_r - \lambda_s + s - r$ имеет простой геометрический смысл. На схеме Юнга мы движемся из квадрата r , делая шаги по горизонтали и вертикали до тех пор, пока не достигнем квадрата s ; τ_{rs} есть полное число сделанных шагов. Шаги считаются положительными, если их делают влево или вниз, и отрицательными, если их делают вправо или вверх. Величина τ_{rs} называется *аксиальным расстоянием* от r до s . При заданном n число τ_{rs} будет максимальным, если $\lambda_1 = n - 1$, $\lambda_2 = 1$ или $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = 1$. В этом случае $\tau_{rs} = n - 1$.

Пользуясь матрицей $U(n - 1, n)$ и матрицами (7.82) для элементов S_{n-1} , мы можем с помощью умножения найти матрицы, отвечающие элементам группы S_n . Весь процесс можно повторить для транспозиции $(n - 2, n - 1)$ и элементов S_{n-2} и получить по индукции следующий результат.

Все матрицы неприводимых представлений группы S_n можно построить с помощью *вещественных чисел*. Диагональные элементы рациональны, внедиагональные элементы содержат квадратные корни из целых чисел, не превышающих $n^2 - 2n$.

В этом процессе последовательной редукции матриц группы S_n мы исходим из данного разбиения и удаляем один узел. Эту процедуру мы повторяем до тех пор, пока вся схема не оказывается исчерпанной. Рассмотрим схему



(7.110)

Предположим, что мы удалили один узел из третьей строки, так что $r=3$; после этого мы получим матрицу D_r , соответствующую разбиению

□	□	□
□	□	

Если теперь мы удалим один узел из первой строки, так что $s=1$, мы получим матрицу D_{rs} , соответствующую схеме

□	□
□	□

Удаляя далее один узел из второй строки ($t=2$), мы получаем матрицу D_{rst} , соответствующую схеме

□	□
□	

Если теперь мы удалим по очереди один узел из строки 1 и строки 2, то получатся схемы

□	□
□	

Ясно, что подматрица D_{rstuv} , которую мы получаем на последнем этапе, содержит одну строку и один столбец. В силу самого метода построения базисная функция, соответствующая этой строке (столбцу), обладает тем свойством, что является базисным вектором неприводимого представления (321) группы S_6 , представления $(3, 2)$ группы S_5 , представления (2^2) группы S_4 , представления $(2, 1)$ группы S_3 , представления (1^2) группы S_2 и представления (1) группы S_1 . Эту базисную функцию ϕ можно обозначать, указывая те строки, из которых по очереди отброшены узлы. В нашем случае ее можно было бы обозначить $\phi[3, 1, 2, 1, 2, 1]$. Последовательность

[3, 1, 2, 1, 2, 1]

называется *символом Яманучи* (Y -символом). Следует заметить, что существует простая связь между символами Яманучи и стандартными таблицами Юнга. В нашем примере мы сначала удалили узел из строки 3. Был удален символ 6, после чего у нас осталась группа S_5 . Затем мы удалили один символ из строки 1 и получили группу S_4 . Ясно, что этим символом был символ 5. Таким образом, наша первоначальная таблица имела вид

1	3	5
2	4	
6		

Следует также заметить, что наш символ Яманучи состоит из трех единиц, двух двоек и одной тройки, что полностью согласуется с $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$. Кроме того, если мы прочтем числа в символе справа налево, то заметим, что они образуют решеточную перестановку цифр 1, 2 и 3. Итак, существует взаимно однозначное соответствие между символами Яманучи, решеточными перестановками и стандартными таблицами. Например,

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \rightarrow [322111]; \\ 6 & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & \rightarrow [123211]. \\ 4 & & \end{array}$$

Для каждого разбиения (λ) мы получаем набор символов Яманучи, число которых равно размерности представления $D^{(\lambda)}$. Если $(\lambda) = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $\lambda_m > 0$, то допустимыми являются Y -символы

$$[r_n, r_{n-1}, \dots, r_2, 1],$$

где r_i — целые числа от 1 до m (целое число k встречается λ_k раз). Если мы будем читать эти символы справа налево, то получим решеточную перестановку

$$1^{\lambda_1}, 2^{\lambda_2}, \dots, m^{\lambda_m}.$$

Теперь мы можем выразить результат действия перестановки $(n-1, n)$ с помощью функций φ . Получим

$$\begin{aligned} (n-1, n) \varphi[r, r, r_{n-2}, \dots, 1] &= + \varphi[r, r, r_{n-2}, \dots, 1], \\ (n-1, n) \varphi[r, r-1, r_{n-2}, \dots, 1] &= \\ &= - \varphi[r, r-1, r_{n-2}, \dots, 1], \end{aligned} \quad (7.111)$$

если символ $[r-1, r, r_{n-2}, \dots, 1]$ недопустим, и

$$\begin{aligned} (n-1, n) \varphi[r, s, r_{n-2}, \dots, 1] &= \\ &= \sigma_{rs} \varphi[r, s, r_{n-2}, \dots, 1] + \sqrt{1 - (\sigma_{rs})^2} \varphi[s, r, r_{n-2}, \dots, 1], \end{aligned}$$

если оба символа допустимы и $s \neq r$.

Наиболее удобный способ упорядочить Y -символы состоит в том, чтобы расположить их в порядке, обратном лексикографическому. Так, для схемы (7.110) допустимые Y -символы имеют вид:

$$\begin{array}{cccc} 322111, & 321211, & 321121, & 312211, \\ 312121, & 232111, & 231211, & 231121, \\ 213211, & 213121, & 211321, & 132211, \\ 132121, & 123211, & 123121, & 121321. \end{array}$$

Преимущество этого способа упорядочения состоит в том, что он помогает нам наглядно представить построение матриц при переходе от S_n к S_{n+1} . Первые пять символов служат базисными функциями неприводимого представления $(\lambda) \equiv (3, 2)$ группы S_5 , соответствующего схеме



получающейся после того, как мы отбросили символ 6 из строки 3. В этом представлении матрицы перестановок группы S_5 служат подматрицами нашего представления группы S_6 . Далее, если мы пройдем цифры 3 и 2 в первых трех символах и цифры 2 и 3 в символах с номерами 6—8, мы придем к одинаковым последовательностям, соответствующим схеме



группы S_4 . Построим матрицу для перестановки (56) в этом представлении $(\lambda) \equiv (321)$. Пользуясь соотношениями (7.102), (7.104), (7.105) или (7.111), получаем матрицу

322111	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$
321211	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$
321121	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$
312211	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$
312121	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$
232111	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
231211	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
231121	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
213211	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
213121	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
211321	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
132211	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
132121	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
123211	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
123121	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
121321	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

(7.112)

Перестановки группы S_6 (т. е. перестановки, оставляющие на месте цифру 6) будут иметь матричные элементы только внутри

пунктирных квадратов на главной диагонали. Их матрицы уже известны из рассмотрения группы S_5 . Матрицы перестановок (i6) с $i < 5$ можно получить трансформированием матрицы (i5), принадлежащей группе S_5 , матрицей (7.112) перестановки (56).

Выбрав за исходную группу S_1 , мы можем постепенно построить вещественные ортогональные матричные представления группы перестановок. Мы приводим таблицы этих представлений до группы S_5 включительно (табл. 28). Вследствие симметрии мы указываем лишь те элементы, которые расположены на главной диагонали и над ней. Кроме того, мы выписываем матрицы только для транспозиций; остальные представления можно получить перемножением этих матриц.

Задача. Пользуясь таблицами (табл. 28), постройте матрицы для перестановок (23), (45) и (56) в представлениях $(\lambda) = (4, 2)$ и (3^2) группы S_6 .

Уже сам факт, что все неприводимые представления симметрической группы можно привести к вещественному виду, позволяет нам доказать удивительную теорему. Так как все неприводимые представления группы S_n вещественны, все величины $\phi^{(\mu)}$ в (5.88) равны ± 1 , так что

$$\zeta(E) = \sum_{\mu} n_{\mu}, \quad (7.113)$$

где $\zeta(E)$ — число решений R уравнения

$$R^2 = E. \quad (7.113a)$$

Иначе говоря, для группы S_n сумма размерностей всех неприводимых представлений равна числу квадратных корней из единичного элемента. Чтобы удовлетворить уравнению (7.113a), элемент R должен содержать лишь циклы длины 1 и 2, т. е. структура разбиения на циклы элемента R должна иметь вид $(1^{\alpha} 2^{\beta})$, где $\alpha + 2\beta = n$. Число элементов в классе $(1^{\alpha} 2^{\beta})$ равно

$$g_{(1^{\alpha} 2^{\beta})} = \frac{n!}{\alpha! 2^{\beta} \beta!},$$

в силу чего общее число решений уравнения (7.113a) равно

$$\sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha + 2\beta = n}} g_{1^{\alpha} 2^{\beta}}.$$

Подставляя это выражение в (7.113), получаем соотношение

$$\sum_{\mu} n_{\mu} = \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha + 2\beta = n}} \frac{n!}{\alpha! 2^{\beta} \beta!} = \sum_{\beta=0}^{[n/2]} \frac{n!}{2^{\beta} \beta! (n - 2\beta)!}; \quad (7.114)$$

где $[n/2]$ — наибольшее целое число, не превышающее числа $n/2$.

Таблица 28

Ортогональные матрицы неприводимых представлений групп перестановок

S_1 :	$\square$	1	$[1]$	для всех элементов
S_2 :	$\square \square$	11	$[1]$	для всех элементов
	$\square \square$	21	e (if) $[1] \quad [-1]$	
S_3 :	$\square \square \square$	111	$[1]$	для всех элементов
	$\square \square \square$	321	e (if) $[1] \quad [-1]$	
	$\square \square \square$	211	e (12) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	(23) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
	$\square \square \square$	121	e (13) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$
S_4 :	$\square \square \square \square$	1111	$[1]$	для всех элементов
	$\square \square \square \square$	4321	e (if) $[1] \quad [-1]$	

	(34)	(45)	(35)	
21111	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{8}}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{15}}{4} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{15}}{12} & \frac{\sqrt{30}}{6} & 0 \\ 11 & \frac{11}{12} & \frac{\sqrt{2}}{6} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
12111				
11211				
11121				
	(25)	(15)		
21111	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{15}}{12} & -\frac{\sqrt{30}}{12} & \frac{\sqrt{10}}{4} \\ 11 & \frac{11}{12} & -\frac{\sqrt{2}}{12} & \frac{\sqrt{6}}{12} \\ 5 & \frac{5}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{15}}{12} & -\frac{\sqrt{30}}{12} & \frac{\sqrt{10}}{4} \\ 11 & \frac{11}{12} & -\frac{\sqrt{2}}{12} & \frac{\sqrt{6}}{12} \\ 5 & \frac{5}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$		
12111				
11211				
11121				

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{array} \\
 \begin{array}{l}
 22111 \\
 21211 \\
 21121 \\
 12211 \\
 12121
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 (12) \\
 \left[\begin{array}{ccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 (13) \\
 \left[\begin{array}{ccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{1}{2} & 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\
 -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\
 -1 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & \frac{1}{2}
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{l}
 22111 \\
 21211 \\
 21121 \\
 12211 \\
 12121
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 (14) \\
 \left[\begin{array}{ccccc}
 -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\
 \frac{5}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{1}{2} & 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
 -\frac{1}{2} & 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 (23) \\
 \left[\begin{array}{ccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{1}{2} & 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\
 \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\
 -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & \frac{1}{2}
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 (24) \\
 \left[\begin{array}{ccccc}
 -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\
 \frac{5}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{1}{2} & 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
 -\frac{1}{2} & 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

	(34)	(45)	(15)	
22111	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{9} & \frac{\sqrt{6}}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{4\sqrt{3}}{9} \\ \frac{19}{54} & -\frac{23\sqrt{3}}{54} & \frac{8\sqrt{2}}{27} & -\frac{4\sqrt{6}}{27} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{37}{54} & -\frac{5\sqrt{3}}{54} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	
21211				
21121				
12211				
12121				
	(35)	(25)		
22111	$\begin{bmatrix} -\frac{5}{27} & -\frac{8\sqrt{2}}{27} & 0 & \frac{8}{9} & 0 \\ \frac{23}{27} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{9} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{9} & -\frac{\sqrt{6}}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4\sqrt{3}}{9} \\ \frac{19}{54} & -\frac{23\sqrt{3}}{54} & -\frac{8\sqrt{2}}{27} & -\frac{4\sqrt{6}}{27} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{4\sqrt{6}}{27} & \frac{37}{54} & \frac{5\sqrt{3}}{54} \\ \frac{37}{54} & -\frac{5\sqrt{3}}{54} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$		
21211				
21121				
12211				
11211				

	32111	(12)	$\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	(23)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
	31211				
	31121				
	13211				
	13121				
	11321				
	32111	(34)	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{8}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{8}}{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	(45)	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{\sqrt{15}}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{\sqrt{15}}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{\sqrt{15}}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{\sqrt{15}}{4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
	31211				
	31121				
	13211				
	13121				
	11321				

Сумма, стоящая в правой части равенства (7.114), легко вычисляется при любом n . Сравнивая ее с суммой (3.159), которая в случае симметрической группы S_n имеет вид

$$\sum_{\mu} n_{\mu}^2 = n!, \quad (7.115)$$

мы получаем неравенство

$$\sum_{\beta=0}^{[n/2]} \frac{1}{2^{\beta} \beta! (n-2\beta)!} > \sqrt{\frac{1}{n!}}. \quad (7.116)$$

Величины n_{μ} задаются равенствами (7.66) и (7.60). Подставляя эти выражения в (7.114), мы получаем замечательную формулу суммирования

$$\sum_{(\lambda)} \frac{D(\lambda_1 + m - 1, \lambda_2 + m - 2, \dots, \lambda_m)}{(\lambda_1 + m - 1)! (\lambda_2 + m - 2)! \dots \lambda_m!} = \sum_{\beta=0}^{[n/2]} \frac{1}{2^{\beta} \beta! (n-2\beta)!}. \quad (7.117)$$

§ 8. Метод Хунда

Метод рассмотрения симметрической группы, предложенный Хундом¹⁾, является физическим вариантом математического метода, основанного на рассмотрении групповых алгебр.

Предположим, что мы имеем дело с некоторой системой эквивалентных частиц. (Под термином „эквивалентный“ мы подразумеваем, что гамильтониан задачи, который может по отношению ко всей задаче в целом быть некоторой аппроксимацией, инвариантен при перестановке координат таких частиц. Термин „тождественный“ означает, что мы уверены при настоящем уровне наших знаний в том, что точный гамильтониан инвариантен при перестановке частиц.) Если нам задана любая собственная функция $\psi(1, \dots, n)$, принадлежащая некоторому данному собственному значению гамильтониана, то любая из $n!$ перестановок координат частиц будет приводить к собственной функции, принадлежащей той же энергии. (В записи функции ψ символ 1 означает *все* координаты первой частицы и т. д.) Таким образом, переставив между собой координаты двух первых частиц в ψ , мы можем получить линейные комбинации

$$\begin{aligned} \psi(1, 2, \dots, n) + \psi(2, 1, \dots, n) &= (e + (12))\psi(1, 2, \dots, n), \\ \psi(1, 2, \dots, n) - \psi(2, 1, \dots, n) &= (e - (12))\psi(1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (7.118)$$

которые также являются собственными функциями и соответственно симметричны и антисимметричны по частицам 1 и 2. Оператор

¹⁾ Hund F., Zs. Phys., 43, 788 (1927).

перестановки $e + (12)$ называется *симметризатором*, а оператор $e - (12)$ — *антисимметризатором* частиц 1 и 2. Продолжая этот процесс, мы можем попытаться построить из исходных собственных функций ψ функции, симметричные (антисимметричные) относительно наборов, состоящих из большего числа частиц. Оператор, симметризирующий ψ относительно некоторого набора частиц, имеет вид

$$\sum_P P, \quad (7.119)$$

где суммирование производится по всем перестановкам частиц P , принадлежащим рассматриваемому набору. Точно так же антисимметризатор для этого набора имеет вид

$$\sum_P \delta_P P. \quad (7.119a)$$

Применяя к ψ операторы, подобные операторам (7.119) и (7.119a), мы можем попытаться построить вырожденные собственные функции, обладающие различной симметрией. Чтобы указать свойства симметрии функции, мы будем помещать частицы, относительно которых функция антисимметрична, в фигурные скобки, а частицы, по которым функция симметрична, — в квадратные скобки. Если символы, обозначающие какие-либо частицы, стоят вне этих скобок, то о симметрии по координатам этих частиц ничего не предполагается. Например, функция

$$\psi(\{1\ 2\ 3\} [4\ 5] 6\ 7) \quad (7.120)$$

антисимметрична по частицам 1, 2, 3; симметрична по частицам 4, 5; по поводу же ее симметрии либо антисимметрии по частицам 6 и 7 никаких утверждений не делается. Более того, *a priori* мы не располагаем никакими сведениями о том, симметрична или антисимметрична функция по любым частицам, которые не входят в одни и те же скобки.

Во всяком случае, исходя из нашей первоначальной собственной функции, мы можем выполнить перестановки и составить линейные комбинации, чтобы построить эквивалентные собственные функции, обладающие определенной симметрией. Например, взяв за исходную функцию $\psi(1, \dots, n)$, можно попытаться симметризовать ψ по всем частицам, применяя симметризатор (7.119) ко всем n частицам. Мы получим эквивалентную собственную функцию

$$\psi([1\ 2\ 3 \dots n]). \quad (7.121)$$

Может представиться случай, когда первоначальная функция $\psi(1, \dots, n)$, из которой мы исходили, такова, что функция (7.121) тождественно равна нулю. Так произойдет в том случае, если исходная функция ψ антисимметрична по любой паре частиц. Если $\psi([1\ 2 \dots n]) \equiv 0$,

мы попытаемся симметризовать ψ по любым $n - 1$ частицам, например применим к исходной функции ψ симметризатор по всем частицам, за исключением n -й, затем ко всем частицам, кроме $(n-1)$ -й и т. д. Если все получающиеся при этом функции обращаются тождественно в нуль, мы попытаемся симметризовать ψ по $(n-2)$ частицам и т. д. Если после этих тяжких трудов мы обнаружим, что не можем провести симметризацию ни по одной паре частиц, то это должно означать, что наша исходная функция была полностью антисимметрична по всем n частицам. Вполне аналогично мы могли бы попытаться антисимметризовать нашу исходную функцию $\psi(1, \dots, n)$ по всем частицам с помощью оператора (7.119а) для всех n частиц. Если получающаяся при этом функция $\psi(\{1, \dots, n\})$ тождественно равна нулю, мы попытаемся антисимметризовать исходную функцию по $(n-1)$ частицам. Если, продолжая этот процесс, мы обнаруживаем, что не можем антисимметризовать ψ ни по одной паре частиц, то наша исходная функция была полностью симметричной.

Для примера рассмотрим случай трех частиц. Начнем с собственной функции $\psi(1, 2, 3)$. Применим симметризатор и получим $\psi(\{1\ 2\ 3\})$. Если эта функция не равна тождественно нулю, мы скажем, что ψ обладает *симметрией типа* $S(3)$. Если $\psi(\{1\ 2\ 3\}) \equiv 0$, то мы попытаемся симметризовать исходную функцию по двум частицам и получим, например, функции

$$\psi(\{1\ 2\}3) \text{ и } \psi(\{1\ 3\}2).$$

Если обе эти функции не обращаются тождественно в нуль, мы скажем, что ψ обладает симметрией типа $S(2+1)$. Если же они обе равны тождественно нулю, то функция ψ антисимметрична по трем частицам и обладает симметрией типа $S(1+1+1)$. Точно таким же образом можно было бы попытаться антисимметризовать функцию ψ . Получились бы следующие результаты:

$$\begin{aligned} \psi(\{1\ 2\ 3\}) &— \text{антисимметрия типа } A(3), \\ \psi(\{1\ 2\}3) &— \text{антисимметрия типа } A(2+1), \\ \psi(1\ 2\ 3) &— \text{антисимметрия типа } A(1+1+1). \end{aligned}$$

В общем случае мы поступаем точно так же. Мы пытаемся симметризовать исходную функцию по возможно большему числу частиц. Если максимальное число частиц, по которым мы можем симметризовать функцию ψ (не получая при этом функцию, тождественно равную нулю), равно λ_1 , мы можем переобозначить координаты так, чтобы эти частицы имели номера $1, \dots, \lambda_1$, и получить собственную функцию $\psi(\{1\ 2 \dots \lambda_1\} \dots n)$. Оставим теперь эти частицы и попытаемся симметризовать по возможности большую группу оставшихся частиц. Продолжая этот процесс, мы, в конце концов, придем к экви-

валентной собственной функции, имеющей в *нормальной форме* (*S-форме*) вид:

$$\psi\left([1\ 2\ \dots\ \lambda_1][\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_1 + \lambda_2] \dots \left[\sum_{v=1}^{m-1} \lambda_v + 1, \dots, \sum_{v=1}^m \lambda_v\right]\right), \quad (7.122)$$

где

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \quad \text{и} \quad \sum_{v=1}^m \lambda_v = n.$$

Под нормальной формой мы подразумеваем следующее: мы не можем применять перестановки и составлять линейные комбинации для построения из ψ функции, симметричной относительно *более чем* λ_1 частиц. Если же мы занимаемся перестановкой частиц $\lambda_1 + 1, \dots, n$, то мы не можем построить функцию, симметричную относительно *более чем* λ_2 частиц и т. д. Если в (7.122) внутри круглых скобок несколько символов фигурируют в конце отдельно, например

$$\psi([1], [] \dots n-2, n-1, n),$$

то по этим отдельным символам функция должна быть антисимметричной. Говорят, что функция (7.122) принадлежит *симметрии типа*

$$S(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m). \quad (7.123)$$

Заметим, что имеется полное соответствие между типами симметрии и схемами Юнга, которыми мы пользовались ранее.

Аналогичным образом мы можем привести функцию ψ к *нормальной антисимметричной форме* (*A-форме*)

$$\psi([1 \dots \mu_1] \{\mu_1 + 1, \dots, \mu_1 + \mu_2\} \dots), \quad (7.122a)$$

принадлежащей *антисимметрии типа*

$$A(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_l). \quad (7.123a)$$

Следует подчеркнуть, что к заданной функции ψ мы можем применять любой из двух процессов. Иначе говоря, любая данная собственная функция принадлежит какому-то определенному типу симметрии $S(\lambda_1 + \dots + \lambda_m)$ и какому-то определенному типу антисимметрии $A(\mu_1 + \dots + \mu_l)$. Если мы сделаем предположения о том, что иного вырождения, кроме того, которое происходит из-за эквивалентности частиц, нет, то вырожденные (эквивалентные) собственные функции должны обладать одним и тем же *S-типом* или *A-типом*. Любую собственную функцию, принадлежащую данному собственному значению, можно представить в виде линейной комбинации базисных функций определенного *S-типа* либо *A-типа*. (В сущности, к этому сводится сделанное нами ранее утверждение о том, что вырожденные функции

образуют базис некоторого неприводимого представления группы симметрии.)

Докажем теперь несколько простых теорем о симметризации.

Лемма. Если собственная функция

$$\psi(\{1\ 2 \dots \lambda\} [\lambda+1, \dots, \lambda+\mu] \dots) \quad (7.124)$$

антисимметрична по частицам $1, 2, \dots, \lambda$ и симметрична по частицам $\lambda+1, \lambda+2, \dots, \lambda+\mu$ (характер ее зависимости от остальных частиц не принимается во внимание), то, выполнив перестановку частиц $1, 2, \dots, \lambda+\mu$ и составив линейные комбинации, мы можем построить одну из функций (*но не обе*)

$$\begin{aligned} \varphi(\{1\ 2 \dots \lambda, \lambda+1\} [\lambda+2, \dots, \lambda+\mu] \dots), \\ \chi(\{1\ 2 \dots \lambda-1\} [\lambda, \lambda+1, \dots, \lambda+\mu] \dots). \end{aligned} \quad (7.125)$$

Для построения φ нам необходимо лишь произвести перестановку частиц $1, 2, \dots, \lambda, \lambda+1$. Для построения χ нам необходимо лишь произвести перестановку частиц $\lambda, \lambda+1, \dots, \lambda+\mu$.

Доказательство. Будем вместо $1, 2, \dots, \lambda$ писать $\alpha, \beta, \dots$ и вместо $\lambda+1, \dots, \lambda+\mu$ писать $x, y, \dots$. Оператор

$$e - \sum_{\alpha=1}^{\lambda} (\alpha x), \quad (7.126)$$

будучи применен к ψ , дает нам функцию, антисимметричную по $1, 2, \dots, \lambda, x$. Чтобы доказать это, применим все транспозиции указанных символов к функции

$$\left[e - \sum_{\alpha=1}^{\lambda} (\alpha x) \right] \psi(\{1\ 2 \dots \lambda\} [\lambda+1, \dots, \lambda+\mu] \dots).$$

Тогда

$$(\beta\gamma) \left[e - \sum_{\alpha=1}^{\lambda} (\alpha x) \right] \psi = (\beta\gamma) \left[e - (\beta x) - (\gamma x) - \sum_{\alpha \neq \beta, \gamma} (\alpha x) \right] \psi.$$

Так как

$$(\beta\gamma)(\beta x) = (\gamma x)(\beta\gamma) \quad \text{и} \quad (\beta\gamma)\psi = -\psi,$$

имеем

$$\begin{aligned} (\beta\gamma) \left[e - (\beta x) - (\gamma x) - \sum_{\alpha \neq \beta, \gamma} (\alpha x) \right] \psi = \\ = \left[e - \sum_{\alpha} (\alpha x) \right] (\beta\gamma)\psi = - \left[e - \sum_{\alpha} (\alpha x) \right] \psi. \end{aligned}$$

Точно так же, поскольку

$$(\beta x)(\alpha x) = (\alpha x)(\alpha \beta),$$

получаем

$$\begin{aligned} (\beta x) \left[e - \sum_{\alpha=1}^{\lambda} (\alpha x) \right] \psi &= (\beta x) \left[e - (\beta x) - \sum_{\alpha \neq \beta} (\alpha x) \right] \psi = \\ &= \left[(\beta x) - e - \sum_{\alpha \neq \beta} (\alpha x)(\alpha \beta) \right] \psi. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} (\beta x) \left[e - \sum_{\alpha} (\alpha x) \right] \psi &= \\ &= [-e + (\beta x)] \psi - \left(\sum_{\alpha \neq \beta} (\alpha x) \right) (\alpha \beta) \psi = - \left[e - \sum_{\alpha} (\alpha x) \right] \psi. \end{aligned}$$

Может случиться, что при данном выборе x функция

$$\left[e - \sum_{\alpha} (\alpha x) \right] \psi$$

тождественно равна нулю. Покажем теперь, что если мы будем выбирать x различными способами (т. е. $x = \lambda + 1, \dots, \lambda + \mu$), то либо *все* получающиеся при этом функции обратятся в нуль, либо *ни одна* из них в нуль не обратится. Действительно, если при некотором x функция

$$\left[\sum e - \sum_{\alpha} (\alpha x) \right] \psi = 0,$$

то, применяя транспозицию (xy) , мы получим

$$\begin{aligned} 0 &= (xy) \left[e - \sum_{\alpha} (\alpha x) \right] \psi = \\ &= (xy) \left[e - \sum_{\alpha} (\alpha x) \right] (xy)(xy) \psi = \\ &= (xy) \left[e - \sum_{\alpha} (\alpha x) \right] (xy) \psi = \left[e - \sum_{\alpha} (\alpha y) \right] \psi \end{aligned}$$

при любом y .

Точно так же, применяя к ψ оператор

$$\left[e + \sum_{x=\lambda+1}^{\lambda+\mu} (\alpha x) \right], \quad (7.127)$$

мы получим функцию, симметричную по $\alpha, \lambda + 1, \dots, \lambda + \mu$. С помощью процедуры, аналогичной той, которой мы пользовались, покажем, что либо *все* функции

$$\left[e + \sum_{x=\lambda+1}^{\lambda+\mu} (\alpha x) \right] \psi$$

тождественно равны нулю, либо *ни одна* из них не равна тождественно нулю ($\alpha = 1, \dots, \lambda$).

Далее покажем, что два типа функций, получающиеся при действии на ψ операторов (7.126) и (7.127), не могут *одновременно* быть равными тождественно нулю. Действительно, если

$$\left[e - \sum_{\alpha} (\alpha x) \right] \psi = 0$$

при всех x и

$$\left[e + \sum_x (\alpha x) \right] \psi = 0$$

при всех α , то, суммируя первую функцию по x , а вторую по α и складывая, мы получили бы, что $(\lambda + \mu)\psi = 0$, откуда следовало бы, что первоначальная функция ψ была тождественно равна нулю.

Наконец, покажем, что обе формы не могут существовать одновременно — одна из них должна быть тождественно равной нулю. Действительно, в противном случае функцию

$$\chi((1\ 2 \dots \lambda - 1) [\lambda, \lambda + 1, \dots, \lambda + \mu] \dots)$$

можно представить в виде линейной комбинации функций, получающихся из

$$\varphi((1\ 2 \dots \lambda, \lambda + 1) [\lambda + 2, \dots, \lambda + \mu] \dots)$$

применением перестановок P (действующих на символы $1, \dots, \lambda + \mu$) и взятием линейных комбинаций, т. е.

$$\begin{aligned} \chi((1\ 2 \dots \lambda - 1) [\lambda, \lambda + 1, \dots, \lambda + \mu] \dots) = \\ = \sum_P a_P P\varphi((1\ 2 \dots \lambda, \lambda + 1) [\lambda + 2, \dots, \lambda + \mu] \dots). \end{aligned} \quad (7.128)$$

Но тогда ясно, что по крайней мере два символа из числа символов $\lambda, \lambda + 1, \dots, \lambda + \mu$, заключенных в квадратные скобки в левой части (7.128), должны попасть внутрь фигурных скобок в правой части того же равенства после того, как перестановку P применят к φ . Иначе говоря, каждый член в сумме $\sum_P$, стоящей в правой части, антисимметричен по крайней мере по двум символам из числа $\lambda, \lambda + 1, \dots, \lambda + \mu$. Применим теперь симметризатор, действующий на частицы $\lambda, \lambda + 1, \dots, \lambda + \mu$, к обеим частям равенства (7.128). Слева мы получим $n!\chi$, а справа — нуль.

Применяя эту лемму, мы сможем переходить от S -форм к A -формам, и наоборот. Предположим, например, что у нас имеется некая нормальная S -форма ψ ([123] [45]). Так как это нормальная S -форма, то она должна быть антисимметричной при перестановке частиц 4 (или же 5) и по крайней мере одной из частиц 1, 2, 3. Поэтому мы

можем антисимметризовать ее, например, по частицам 5 и 3, и получить $\psi([12]4\{35\})$. Поскольку наша исходная функция ψ была симметричной по частицам 1, 2, 3 и 4, 5, мы не можем проводить антисимметризацию более чем по двум частицам, по одной частице из каждой пары квадратных скобок в S -форме). По лемме мы можем получить:

$$1) \psi([124]\{35\}) \quad \text{или} \quad 2) \psi(1\{24\}\{35\}).$$

Если бы первая альтернатива была возможной, то, воспользовавшись еще раз леммой, мы смогли бы получить:

$$а) \psi([1234]5) \quad \text{или} \quad б) \psi([12]\{345\}).$$

Случай „а“ невозможен, поскольку из исходной S -формы следует, что мы не можем проводить симметризацию более чем по трем частицам, а случай „б“ невозможен, поскольку из исходной S -формы следует, что мы не можем проводить антисимметризацию более чем по двум частицам. Таким образом, из симметрии типа $S(3+2)$ мы можем образовать с помощью перестановок и линейных комбинаций только антисимметрию типа $A(2+2+1)$. Заметим, что эти разбиения сопряжены. Прежде чем применять этот результат, докажем следующую теорему:

Теорема. Нормальную S -форму типа $\psi([12 \dots r][r+1, \dots, 2r])$ можно привести к A -форме $\psi(\{1a\}\{2b\} \dots \{rs\})$, где $a, b, \dots, s$ взяты из множества $r+1, \dots, 2r$.

Так как мы исходим из S -формы, функция должна быть антисимметричной при перестановке символа 1 и какого-то символа из второй пары квадратных скобок, вследствие чего мы можем образовать функцию

$$\psi = (\{1a\}\{2 \dots r\}[r+1, \dots, 2r]).$$

Попытаемся продолжить этот процесс антисимметризации по двум частицам, беря по одному символу из первых квадратных скобок и по одному — из вторых. Предположим, что, выбрав p пар, мы обнаружили, что не можем продолжать этот процесс дальше. Это означает, что функция симметрична по $2r - 2p$ символам, остающимся в скобках. На этом этапе мы имеем

$$\psi(\{1a\}\{2b\} \dots \{pp\}[\dots]).$$

Применяя нашу лемму к члену, стоящему в квадратных скобках, и к каждому члену в фигурных скобках по очереди, мы увидим, что можем из каждой пары фигурных скобок брать по одному символу и возвращать его обратно в квадратные скобки. Но тогда мы получим

функцию ψ , симметричную по $2r - 2p + p = 2r - p$ символам. За исключением того случая, когда $p = r$, т. е. когда ψ превращается в функцию

$$\psi(\{1a\} \{2b\} \dots \{rs\}),$$

это противоречит нашему предположению о том, что мы исходим из S -формы. Заметим, что если мы переставим две группы частиц, то у ψ появится множитель $(-1)^r$.

Наш предыдущий результат о переходе от S -формы к A -форме можно обобщить. Функцию типа

$$S(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots) = S(\lambda)$$

можно с помощью перестановок и линейных комбинаций превратить в функцию типа

$$A(\mu_1 + \mu_2 + \dots) = A(\mu),$$

где разбиения (λ) и (μ) сопряжены. Суть доказательства содержится в нашем предыдущем примере. Чтобы пояснить это доказательство, приведем второй пример. Возьмем за исходную нормальную форму $\psi([1\ 2\ 3\ 4\ 5][6\ 7\ 8]9)$. Действуя на частицы справа, мы обнаружим, что наша лемма позволяет нам образовать лишь функцию $\psi([1\ 2\ 3\ 4\ 5][6\ 7][8\ 9])$. Применим теперь лемму к $[1\ 2\ 3\ 4\ 5]$ и $[8\ 9]$. Мы не можем образовать $[1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 8]9$, так как это нарушило бы нормальность формы, поэтому выводим один символ из квадратных скобок и получаем

$$\psi([1\ 2\ 3\ 4][6\ 7][5\ 8\ 9]).$$

Мы видим, что произвели антисимметризацию по множеству, состоящему из символов, взятых по одному из каждой пары квадратных скобок нашей исходной нормальной S -формы, поэтому вводить еще какие-нибудь символы в $[5\ 8\ 9]$ мы не можем. Оставив член в фигурных скобках, мы повторим весь процесс, оперируя над членами $[1\ 2\ 3\ 4][6\ 7]$. До сих пор мы переставляли лишь 5, 8, 9. Если бы мы могли образовать $[1\ 2\ 3\ 4\ 6]7$, то, применяя перестановку, обратную по отношению к нашей предыдущей операции над 5, 8, 9, мы получили бы результат, противоречащий нормальности нашей формы. Следовательно, мы снова берем по одному символу из каждой пары квадратных скобок и получаем

$$\psi([1\ 2\ 3]6[4\ 7][5\ 8\ 9]).$$

Тот же процесс мы повторяем и с членом $[1\ 2\ 3]6$ и получаем, наконец,

$$\psi(1\ 2\ [3\ 6][4\ 7][5\ 8\ 9]),$$

так что

$$S(5 + 3 + 1) \rightarrow A(3 + 2 + 2 + 1 + 1).$$

Ясно, что нормальные формы $S(\lambda)$ являются базисными функциями неприводимого представления (λ) . Тип симметрии любой заданной функции определяется заданием либо ее S -нормальной формы $S(\lambda)$, либо заданием ее A -нормальной формы $A(\mu)$, где (λ) и (μ) — сопряженные разбиения. Говорят, что функции ψ и φ имеют *взаимно обратный*, или *сопряженный*, *тип симметрии*, если их S -формы (либо A -формы) соответствуют сопряженным разбиениям.

Задача. Докажите, что члены с различными типами симметрии не комбинируются, т. е. если ψ и φ обладают различными типами симметрии и функция f симметрична по всем частицам, то

$$\int \psi f \varphi d\Omega = 0.$$

§ 9. Групповая алгебра

Несмотря на то что метод Хунда прост, он не очень эффективен при конструировании функций наперед заданного типа симметрии. Чрезвычайно мощный метод рассмотрения симметрической группы, который, как мы увидим в одной из следующих глав, позволяет нам также находить представления групп линейных преобразований в n -мерном пространстве, был разработан Юнгом и Фробениусом. Этот метод основан на общей процедуре анализа структуры конечной алгебры. Понятием групповой алгебры мы воспользовались в § 17 гл. 3, но большую часть теорем о представлениях мы доказывали другими методами. В гл. 3 мы избегали этого алгебраического метода, поскольку большинство физиков без всяких к тому оснований настороженно относятся к этому жаргону и формализму. В данном параграфе мы изложим этот метод в общих чертах. Для придания некоторым из наших утверждений большего правдоподобия мы будем ссылаться на результаты гл. 3, а для того, чтобы избежать излишней абстрактности в изложении, мы воспользуемся в качестве примера симметрической группой.

Начнем с симметрической группы и рассмотрим перестановки как операторы, действующие на функцию n переменных $\psi(1, \dots, n)$. В результате транспозиции (ij) мы получаем некоторую новую функцию $(ij)\psi(1, \dots, i, \dots, j, \dots, n) = \psi(1, \dots, j, \dots, i, \dots, n)$. (7.129)

Так как транспозиции порождают группу S_n , равенство (7.129) говорит нам о действии любого оператора перестановки на функцию ψ . Если $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — независимые функции, зависящие от одного набора переменных, то в качестве ψ мы можем выбрать произведение функций

$$\varphi_1(1) \varphi_2(2) \dots \varphi_n(n),$$

где $1, \dots, n$ означают n различных наборов переменных. Тогда

$$(ij) \varphi_1(1) \dots \varphi_i(l) \dots \varphi_j(j) \dots \varphi_n(n) = \\ = \varphi_1(1) \dots \varphi_i(j) \dots \varphi_j(l) \dots \varphi_n(n). \quad (7.129a)$$

Применяя операторы перестановки R к функции ψ общего вида, мы получим совокупность, состоящую из $n!$ линейно независимых функций $R\psi$. Если теперь мы составим линейные комбинации этих функций, то получим векторы

$$x = \sum_R x_R (R\psi) \quad (7.130)$$

в векторном пространстве, имеющем размерность $n!$. Коэффициенты x_R являются координатами функции x относительно базиса, образованного функциями $R\psi$.

Если оператор перестановки S применить к функции x в (7.130), мы получим новую функцию

$$x' = Sx = S \sum_R x_R (R\psi) = \sum_R x_R S(R\psi) = \sum_R x_R SR\psi.$$

Положив $SR = T$ и $R = S^{-1}T$, будем иметь

$$x' = \sum_T x_{S^{-1}T} (T\psi),$$

а сравнивая с

$$x' = \sum_T x'_T (T\psi),$$

найдем

$$x'_T = x_{S^{-1}T}. \quad (7.131)$$

Формула (7.131) сопоставляет каждой перестановке S некоторое линейное преобразование в $n!$ -мерном векторном пространстве. (В § 17 гл. 3 мы рассматривали только такие векторы x , которые имеют ровно одну ненулевую компоненту, и получали регулярное представление группы.) Ясно, что оператор $a_S S$ будет представлен линейным преобразованием

$$x'_T = a_S x_{S^{-1}T}, \quad (7.131a)$$

а сумма $S + U$ двух операторов перестановки — преобразованием

$$x'_T = x_{S^{-1}T} + x_{U^{-1}T}, \quad (7.131b)$$

откуда следует, что оператор общего вида

$$S = \sum_S a_S S$$

будет представлен преобразованием

$$x'_T = \sum_S \alpha_S x_{S^{-1}T} = \sum_R \alpha_{TR^{-1}} x_R. \quad (7.132)$$

Рассматривая выписанные только что соотношения, мы замечаем, что наличие функции ψ , являющейся тем объектом, на который мог бы действовать оператор, было несущественным для результатов. Из элементов R любой группы порядка g мы можем построить g -мерное линейное векторное пространство векторов

$$x = \sum_R x_R R, \quad (7.130a)$$

где x_R — координаты вектора x относительно базиса, который получается, если в качестве базисных векторов взять сами элементы группы. Вектор $z = \alpha x + \beta y$ имеет компоненты

$$z_R = \alpha x_R + \beta y_R. \quad (7.133)$$

Произведение двух векторов также принадлежит рассматриваемому векторному пространству:

$$\begin{aligned} x &= \sum_R x_R R, & y &= \sum_S y_S S, \\ z = (xy) &= \sum_{R,S} x_R y_S RS = \sum_T \left(\sum_S x_{TS^{-1}} y_S \right) T = \sum_T \left(\sum_S x_S y_{S^{-1}T} \right) T. \end{aligned}$$

так что

$$(xy)_T = \sum_S x_{TS^{-1}} y_S = \sum_S x_S y_{S^{-1}T}. \quad (7.134)$$

Линейное векторное пространство, замкнутое относительно некоторого закона умножения, называется *алгеброй*. В нашем случае, поскольку закон умножения берется из закона композиции группы, который ассоциативен, *групповая алгебра* A является *ассоциативной алгеброй*.

Линейное преобразование (7.132) дает нам некоторое представление групповой алгебры A . Это представление регулярное.

Любое представление группы G автоматически дает некоторое представление алгебры A . Если

$$s = \sum_S \alpha_S S,$$

то

$$D(s) = \sum_S \alpha_S D(S). \quad (7.135)$$

Наоборот, любое представление алгебры A задает некоторое представление группы G . Кроме того, если одно из этих представлений

приводимо (или неприводимо), то этим же свойством обладает и другое представление.

Из гл. 3 мы знаем, что регулярное представление (7.132) вполне приводимо и содержит каждое неприводимое представление с кратностью, равной размерности этого представления.

Под *подалгеброй* B алгебры A мы понимаем линейное векторное пространство, содержащееся в A и замкнутое относительно умножения, заданного в алгебре A .

Если подалгебра B обладает тем свойством, что для любого u из B и *любого* элемента s *всей* алгебры A элемент su снова принадлежит B , то B называется *левым идеалом*.

В случае регулярного представления (7.132) левый идеал $\mathcal{L}_1$ является инвариантным подпространством, поскольку $s\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1$ для любого элемента s алгебры A . Так как регулярное представление *вполне приводимо*, пространство A должно быть прямой суммой левых идеалов, т. е.

$$A = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2, \quad (7.136)$$

где

$$s\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1, \quad s\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2. \quad (7.137)$$

Всякий элемент алгебры A однозначно представляется в виде суммы элемента, принадлежащего $\mathcal{L}_1$, и элемента, принадлежащего $\mathcal{L}_2$; единственным элементом, принадлежащим одновременно $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, является 0. Матрицы $D(s)$ регулярного представления приводятся к виду

$$D(s) = D_1(s) + D_2(s), \quad (7.138)$$

где $D_i(s)$ — матрица линейного преобразования, индуцированного в $\mathcal{L}_i$ умножением слева на элемент s .

Единичный элемент e группы G принадлежит групповой алгебре A и обладает тем свойством, что

$$es = se = s \quad (7.139)$$

для всех элементов s алгебры A . Если A представляется в виде прямой суммы двух левых идеалов, как в формуле (7.136), то единичный элемент e можно единственным образом представить в виде суммы

$$e = e_1 + e_2, \quad (7.140)$$

где e_1 принадлежит $\mathcal{L}_1$, а e_2 принадлежит $\mathcal{L}_2$. Аналогично любой элемент s алгебры A однозначно представляется в виде

$$s = s_1 + s_2. \quad (7.141)$$

Подставляя (7.140) и (7.141) в (7.139), получаем

$$s = s_1 + s_2 = se = s(e_1 + e_2) = se_1 + se_2. \quad (7.142)$$

Так как $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ — левые идеалы, то se_1 принадлежит $\mathcal{L}_1$, а se_2 принадлежит $\mathcal{L}_2$, так что

$$s_1 = se_1, \quad s_2 = se_2. \quad (7.143)$$

Если s принадлежит $\mathcal{L}_1$, то $s = s_1$, $s_2 = 0$, и соотношения (7.143) означают, что для всех s из $\mathcal{L}_1$

$$s = se_1, \quad se_2 = 0. \quad (7.144)$$

В частности, для $s = e_1$

$$e_1 = e_1^2, \quad e_1 e_2 = 0. \quad (7.144a)$$

Аналогичным образом для s из $\mathcal{L}_2$ получаем

$$s = se_2, \quad se_1 = 0, \quad e_2 = e_2^2, \quad e_2 e_1 = 0. \quad (7.144b)$$

Элемент e_1 является *идемпотентом*, т. е. $e_1^2 = e_1$; кроме того, идеал $\mathcal{L}_1$ *порожден* элементом e_1 , так как при всех s из A элемент se_1 принадлежит $\mathcal{L}_1$. Если s принадлежит $\mathcal{L}_1$, то $se_1 = s$. То же замечание справедливо и для e_2 из $\mathcal{L}_2$. Кроме того,

$$e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0.$$

Разложение единичного элемента (7.140) на части, принадлежащие $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, дает нам образующие элементы левых идеалов $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ (разложение Пирса).

В свою очередь левые идеалы $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ могут содержать подалгебры, которые будут левыми идеалами. Если идеал $\mathcal{L}$ не содержит собственных подидеалов, то он является некоторым неприводимым представлением алгебры A . Такой идеал называется *минимальным*. Продолжая этот процесс, мы приходим, в конце концов, к представлению алгебры A в виде прямой суммы минимальных левых идеалов:

$$A = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \dots + \mathcal{L}_k. \quad (7.145)$$

Левый идеал $\mathcal{L}_l$ порождается идempотентом e_l , и

$$e_l^2 = e_l, \quad e_l e_j = 0 \quad \text{при} \quad l \neq j. \quad (7.146)$$

Из наших предыдущих рассуждений ясно, что образующие элементы e_l мы находим, разлагая единичный элемент e на его компоненты в пространствах $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_k$:

$$e = e_1 + e_2 + \dots + e_k. \quad (7.147)$$

Идемпотент ε называется *примитивным*, если его нельзя разложить в сумму идемпотентов, удовлетворяющих условиям (7.146). Мы предоставляем читателю простое доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. Если ε — примитивный идемпотент, то левый идеал $\mathcal{L} = A\varepsilon$ минимален. Наоборот, если $\mathcal{L}$ — минимальный левый идеал, то любой элемент, порождающий $\mathcal{L}$, примитивен.

Эти рассуждения можно продолжить и вывести все теоремы гл. 3, но вместо этого мы обратимся теперь к нашей задаче для частного случая симметрической группы.

§ 10. Операторы Юнга

Из последнего параграфа мы знаем, что всякий идемпотент e_i порождает левый идеал $\mathcal{L}_i$, задающий некоторое представление, содержащееся в регулярном представлении. Более того, поскольку (отличные от нуля) численные коэффициенты несущественны, элемент e_i , удовлетворяющий соотношению $e_i^2 = ae_i$, будет также пригоден для нашей цели, поскольку e_i/a — идемпотент.

Рассмотрим, в частности, элемент

$$P = \sum_R R, \quad (7.148)$$

где сумма берется по всем перестановкам группы S_n . Так как для любой перестановки S произведение

$$SP = \sum_R SR = P, \quad P^2 = n!P,$$

то отсюда следует, что P является образующим элементом. Если P умножить слева на величину

$$s = \sum_S a_S S,$$

то получим

$$sP = \sum_S a_S SP = \left(\sum a_S\right) P.$$

Таким образом, левый идеал AP , порожденный элементом P , состоит из кратных P . Идеал AP представляет собой одномерное векторное пространство. Умножение слева на перестановку S не изменяет элемента AP , поэтому в нашем представлении каждому элементу группы ставится в соответствие число 1; это представление является единичным представлением.

Точно так же элемент

$$Q = \sum_R \delta_R R$$

является с точностью до множителя идемпотентом, так как

$$SQ = \sum_R \delta_R SR = \delta_S Q,$$

откуда

$$Q^2 = n!Q.$$

Элемент Q порождает одномерный идеал, состоящий из кратных Q . Умножив слева на элемент группы S , получим знакопеременное представление.

Чтобы найти другие неприводимые представления, воспользуемся рассмотренными нами ранее в этой главе таблицами Юнга.

Для каждого разбиения (λ) числа n начертим схему Юнга. В клетки этой схемы впишем в произвольном порядке числа $1, 2, \dots, n$, в результате чего получим некоторую таблицу Юнга. После того как таблица фиксирована, рассмотрим два типа перестановок. *Горизонтальные перестановки* p — это перестановки, при которых меняются местами только символы, стоящие в одной строке. *Вертикальные перестановки* q меняют местами только символы, стоящие в одном столбце. Образует величины

$$P = \sum_p p \text{ — «симметризатор»,} \quad (7.149)$$

$$Q = \sum_q \delta_q q \text{ — «антисимметризатор»,} \quad (7.150)$$

где δ_q — четность перестановки q , а сумма берется по всем горизонтальным перестановкам данной таблицы в (7.149) и по всем вертикальным перестановкам в (7.150).

Оператор Юнга

$$Y = QP \quad (7.151)$$

существенно идемпотентен и порождает левый идеал, доставляющий нам некоторое неприводимое представление группы S_n . Представления, получаемые этим методом, для различных схем неэквивалентны. Различные таблицы с одной и той же схемой приводят к эквивалентным неприводимым представлениям.

Если мы всегда будем выбирать стандартные таблицы § 3 настоящей главы, то при этом мы будем получать полное разложение регулярного представления группы S_n .

Эти утверждения допускают изящное прямое доказательство, на котором мы не будем останавливаться, поскольку оно в одном и том же виде приводится во многих учебниках. Вместо этого мы покажем, к каким результатам оно приводит в нескольких простых случаях.

При $n = 2$ задача тривиальна. Величины $e + (12)$ и $e - (12)$, соответствующие схемам

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array},$$

существенно идемпотентны:

$$[e \pm (12)][e \pm (12)] = e^2 \pm 2e(12) + (12)(12) = 2[e \pm (12)].$$

Разложение единичного элемента на идемпотенты имеет вид

$$e = \frac{e + (12)}{2} + \frac{e - (12)}{2}.$$

Первый образующий элемент задает единичное представление, второй — знакопеременное представление. Каждое из них входит в регулярное представление с коэффициентом, равным единице.

Случай $n = 3$.

Таблица

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

с определяющим элементом, равным $\frac{1}{6} \sum_R R$, задает единичное представление.

Таблица

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

с определяющим элементом, равным $\frac{1}{6} \sum_R \delta_R R$, порождает знакопеременное представление.

Элемент $e + (12)$ и в этом случае существенно идемпотентен. Посмотрим, какой левый идеал он порождает. Умножим $e + (12)$ слева на каждую из перестановок:

$$\begin{aligned} e[e + (12)] &= e + (12) = (12)[e + (12)], \\ (13)[e + (12)] &= (13) + (123) = (123)[e + (12)], \\ (23)[e + (12)] &= (23) + (132) = (132)[e + (12)]. \end{aligned}$$

Мы видим, что элемент $e + (12)$ порождает трехмерный левый идеал $\mathcal{L}_1$ с базисными векторами $e + (12)$, $(13) + (123)$, $(23) + (132)$.

Так как

$$e = \frac{1}{2}[e + (12)] + \frac{1}{2}[e - (12)],$$

то величина $[e - (12)]$ порождает левый идеал $\mathcal{L}_2$, такой, что

$$A = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2.$$

Левый идеал $\mathcal{L}_2$ имеет базисные векторы $e - (12)$, $(13) - (123)$, $(23) - (132)$. Из (7.144а) следует, что

$$[e \pm (12)][e \mp (12)] = 0.$$

Идеалы $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ не минимальны, $\mathcal{L}_1$ содержит идемпотент $\frac{1}{6} \sum R$, а $\mathcal{L}_2$ содержит идемпотент $\frac{1}{6} \sum \delta_R R$. Таким образом, $\mathcal{L}_1$ задает единичное и какое-то двумерное представление, в то время как $\mathcal{L}_2$ задает знакопеременное представление и некоторое двумерное представление. Получающееся при этом разложение единичного элемента имеет вид

$$e = \frac{1}{6} \sum R + \frac{1}{6} \sum \delta_R R + \left[\frac{e + (12)}{2} - \frac{1}{6} \sum R \right] + \left[\frac{e - (12)}{2} - \frac{1}{6} \sum \delta_R R \right].$$

Если вместо получения единичного разложения мы продолжим вычисления по нашему рецепту, то получится стандартная таблица

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array},$$

для которой

$$P = e + (12), \quad Q = e - (13) \quad \text{и} \quad Y = QP = e + (12) - (13) - (123).$$

Другая стандартная таблица

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \bar{3} \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

приводит к

$$P' = e + (13), \quad Q' = e - (12) \quad \text{и} \quad Y' = Q'P' = e - (12) + (13) - (132).$$

Мы получаем следующее разложение единичного элемента:

$$e = \frac{1}{6} \sum R + \frac{1}{6} \sum \delta_R R + \frac{1}{3} Y + \frac{1}{3} Y'.$$

Задача. Проверьте, что операторы $Y/3$ и $Y'/3$ идемпотентны и что $YY' = Y'Y = 0$.

Случай $n = 4$.

Таблица

1	2	3	4

дает единичное представление.

Таблица

1
2
3
4

дает знакопеременное представление.

Для схемы

стандартная таблица

1	2	3
4		

имеет

$$P_1 = e + (12) + (23) + (13) + (123) + (132),$$

$$Q_1 = e - (14) \quad \text{и} \quad Y_1 = Q_1 P_1.$$

Стандартная таблица

1	2	4
3		

имеет

$$P_2 = e + (12) + (14) + (24) + (124) + (142),$$

$$Q_2 = e - (13) \quad \text{и} \quad Y_2 = Q_2 P_2.$$

Стандартная таблица

1	3	4
2		

имеет

$$P_3 = e + (13) + (14) + (34) + (134) + (143),$$

$$Q_3 = e - (12) \quad \text{и} \quad Y_3 = Q_3 P_3.$$

Для схемы

стандартная таблица

1	2
3	4

имеет

$$P_4 = [e + (12)][e + (34)], \quad Q_4 = [e - (13)][e - (24)] \quad \text{и} \quad Y_4 = Q_4 P_4.$$

Стандартная таблица

1	3
2	4

имеет

$$P_5 = [e + (13)][e + (24)], \quad Q_5 = [e - (12)][e - (34)] \quad \text{и} \quad Y_5 = Q_5 P_5.$$

Задача. При $n = 4$ найдите разложение единицы по операторам Юнга.

§ 11. Построение произведения волновых функций с заданной симметрией. Условия циклической симметрии Фока

Предположим, что у нас имеется система, содержащая n эквивалентных частиц, и что типичная собственная функция, принадлежащая энергии E , имеет вид

$$\psi = u(1)v(2)w(3)\dots z(n).$$

Мы предполагаем, что все одночастичные функции в произведении различны и ортонормированы (поскольку они являются решениями одного и того же уравнения Шредингера). Позднее мы изучим случай, когда число одночастичных состояний ограничено. Так как частицы эквивалентны, мы можем строить базисные собственные функции с помощью перестановок и составления линейных комбинаций. Мы хотим построить базисные функции для различных неприводимых представлений группы S_n . Решение этой задачи было дано в § 10 настоящей главы. Чтобы получить базисные функции соответствующего неприводимого представления, мы применяем к функции операторы Юнга, отвечающие всем стандартным таблицам данной схемы.

Случай $n = 2$.

Нормированная функция для таблицы

$$\boxed{1} \boxed{2}$$

имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [u(1)v(2) + u(2)v(1)],$$

а базисная функция для таблицы

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [u(1)v(2) - u(2)v(1)] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} u(1) & u(2) \\ v(1) & v(2) \end{vmatrix}.$$

Случай $n = 3$.

Полностью симметричная функция имеет вид

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} [u(1)v(2)w(3) + u(1)v(3)w(2) + u(2)v(1)w(3) + \\ + u(3)v(2)w(1) + u(2)v(3)w(1) + u(3)v(1)w(2)],$$

а полностью антисимметричной функцией является определитель

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} u(1) & u(2) & u(3) \\ v(1) & v(2) & v(3) \\ w(1) & w(2) & w(3) \end{vmatrix}.$$

Чтобы найти базисные функции двумерного представления, воспользуемся операторами Y и Y' § 10 настоящей главы и получим

$$f_3 = \frac{1}{2} [u(1)v(2)w(3) + u(2)v(1)w(3) - u(3)v(2)w(1) - u(2)v(3)w(1)] = \\ = \frac{1}{2} [v(2) \{u(1)w(3) - u(3)w(1)\} + u(2) \{v(1)w(3) - v(3)w(1)\}]; \\ f_4 = \frac{1}{2} [u(1)v(2)w(3) - u(2)v(1)w(3) + u(3)v(2)w(1) - u(3)v(1)w(2)].$$

Задача. Пользуясь операторами Юнга § 10 настоящей главы, постройте линейные комбинации произведения волновых функций четырех частиц и составьте таблицу базисных функций неприводимых представлений группы S_4 .

Мы предполагали, что все одночастичные волновые функции u , v , ... различны. В этом случае мы имели возможность, применяя подходящие операторы, получать все возможные типы симметрии. Во многих физических задачах число различных одночастичных состояний ограничено. Например, если рассматривать спиновую функцию многоэлектронной системы как составленную из произведений одночастичных функций, то возможны лишь два спиновых состояния. Точно такие же ограничения применимы и к системам тождественных частиц со спином, отличным от $1/2$. Для нуклонов возможны лишь четыре одночастичных состояния (спин и изогипический спин). Если число одночастичных состояний ограничено, могут появляться не все неприводимые представления. Мы кратко остановимся на этом здесь и вновь вернемся к этой задаче при рассмотрении физических приложений.

Предположим, что мы имеем систему из n эквивалентных частиц. Если возможно одно одночастичное состояние, то необходимо, чтобы произведение волновых функций, которое мы выбираем за исходное, имело вид

$$u(1)u(2) \dots u(n). \quad (7.152)$$

Эта волновая функция уже полностью симметрична, так что единственным представлением, которое может появиться, является представление, соответствующее разбиению (n) .

Предположим, что возможны два одночастичных состояния, u и v . Начнем с произведения функций

$$u(1) \dots u(m)v(m+1) \dots v(n), \quad (7.153)$$

или (в обозначениях метода Хунда) с

$$\psi([1 \dots m][m+1, \dots, n]). \quad (7.153a)$$

Допустимые неприводимые представления можно получить двумя способами. Мы видим, что нельзя построить таблицы, где число строк больше двух, так как любой антисимметризатор, действующий на более чем две частицы, обращает функцию (7.153) в нуль. По сути дела те же соображения применимы и к функции (7.153a) в методе Хунда.

Аналогичным образом мы не сможем получить разбиение более чем с k строками, если число различных одночастичных состояний равно k . (В ядерных задачах для зарядово-спиновой функции встречаются разбиения, у которых имеется самое большее четыре строки.)

При построении координатных волновых функций с определенной симметрией для n -электронной задачи Фок использовал метод, заключающийся в наложении на функцию ψ следующих условий:

- 1) антисимметрии по первым k аргументам ($k \geq n/2$),

- 2) антисимметрии по остальным $n - k$ аргументам,
 3) циклической симметрии:

$$\left[e - \sum_{i=1}^k (ni) \right] \psi = 0. \quad (7.154)$$

Легко показать, что функция ψ с антисимметрией в смысле Хунда типа $A(k + \{n - k\})$ удовлетворяет этим трем условиям. Соответствующая ей таблица имеет вид

1	$k + 1$
•	•
•	•
•	•
•	•
•	•
•	n
•	
•	
k	

(7.154a)

Ясно, что функция ψ , имеющая нормальную форму $A(k + \{n - k\})$, удовлетворяет условиям 1 и 2. Оператор (7.154) совпадает с оператором, который фигурировал у нас в (7.126). Как мы там показали, этот оператор, будучи применен к ψ , дает функцию, антисимметричную по $k + 1$ аргументам $1, 2, \dots, k, n$. Так как функция ψ имеет нормальную форму $A(k + \{n - k\})$, где $k \geq n/2$, то получающаяся функция должна быть тождественно равна нулю.

Условия Фока можно сформулировать и в общем случае. Функция ψ обладает определенной симметрией (т. е. является базисной функцией одного из неприводимых представлений группы S_n), если

1) она антисимметрична относительно набора, состоящего из λ_1 аргументов, антисимметрична относительно другого набора, состоящего из λ_2 аргументов, и т. д.,

2) в разбиении (λ)

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l \dots \text{ и т. д.}$$

функция ψ удовлетворяет условиям циклической симметрии

$$\left[e - \sum_{\alpha \text{ принадлежит } \lambda_i} (\alpha x) \right] \psi = 0, \quad (7.155)$$

где x принадлежит λ_j при всех комбинациях λ_i и λ_j , при которых $\lambda_i \geq \lambda_j$.

И снова соображения, вытекающие из формулы (7.126), показывают, что функция, имеющая нормальную форму $A(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots)$,

удовлетворяет условиям Фока. Операторы (7.155), будучи применены к ψ , порождают функции вида

$$A(\lambda_1 + \dots + (\lambda_i + 1) + \dots + (\lambda_j - 1) + \dots).$$

Поскольку функция ψ имела нормальную форму, все эти функции тождественно равны нулю.

Приведенные выше общие условия оказываются весьма полезными при выяснении симметрии какой-нибудь конкретно заданной функции.

Задача. Докажите, что оператор Юнга Y для табл. (7.154а) аннулируется оператором (7.154) циклической симметрии, т. е.

$$\left[e - \sum_{i=1}^k (ni) \right] Y = 0.$$

Точно так же докажите, что оператор Юнга для таблицы общего вида аннулируется операторами циклической симметрии (7.155).

§ 12. Внешние произведения представлений симметрической группы

В случае симметрической группы кронекеровские произведения представлений обычно называются *внутренними произведениями*, поскольку они являются произведениями двух представлений, каждое из которых соответствует *одним и тем же* частицам. Например, ранее мы научились для трех частиц строить такие внутренние произведения, как $D^\alpha \times D^\beta$, где в качестве α и β , например, служит разбиение (2,1) для частиц, помеченных символами 1, 2, 3. Кроме того, мы научились разлагать внутреннее произведение на неприводимые компоненты. Например, для только что упомянутого случая

$$(2,1) \times (2,1) = (3) + (2,1) + (1^3).$$

Это внутреннее произведение (ряды Клебша — Гордана) мы рассмотрим подробнее в следующем параграфе.

В случае симметрической группы для многих физических задач оказывается важным другой тип произведения. Представим себе, что у нас имеется две отделенные друг от друга системы, первая из которых состоит из частиц 1, 2, 3, а вторая содержит частицы 4, 5, 6. Считается, что все частицы эквивалентны. Предположим сначала, что наши системы не взаимодействуют друг с другом. В этом случае мы бы классифицировали состояния первой системы по неприводимым представлениям группы S_3 , действующей на частицы 1, 2, 3; точно так же состояния второй системы мы бы классифицировали по представлениям симметрической группы, действующей на частицы

4, 5, 6. Таким образом, мы могли бы получить двукратно вырожденный уровень системы 1, соответствующий схеме



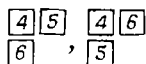
с базисными функциями



и двукратно вырожденный уровень системы 2 со схемой



и базисными функциями



Когда же две системы взаимодействуют между собой, то состояния объединенных систем надлежит классифицировать по представлениям симметрической группы, действующей на все шесть частиц. В этом случае мы скажем, что имеем дело с *внешним произведением* (обозначается $\otimes$) двух представлений

$$(2,1) \otimes (2,1),$$

которое следует разложить на неприводимые представления группы S_6 . Следует заметить, что если ограничиться перестановкой символов 1, 2, 3 между собой и перестановкой символов 4, 5, 6 между собой, то внешнее произведение будет неприводимым представлением той подгруппы группы S_6 , которая при этом получается. Но если мы будем переставлять все шесть частиц, то внешнее произведение будет разлагаться по представлениям группы S_6 . Итак, чтобы найти общее число базисных функций внешнего произведения, мы можем рассуждать следующим образом. Из шести частиц выберем три частицы, чтобы построить первую систему, а остальные три частицы объединим во вторую систему. Это можно проделать $C_6^3 = 20$ способами. При каждом выборе мы получаем две базисные функции для каждого представления, так что общее число произведений функций равно $2 \times 2 \times 20 = 80$. Результат разложения, правило которого мы сейчас дадим, выглядит так:

$$(2,1) \otimes (2,1) = (4,2) + (4,1^2) + (3^2) + 2(3, 2, 1) + \\ + (3,1^3) + (2^3) + (2^2, 1^2). \quad (7.156)$$

Подсчитав размерности представлений справа, найдем

$$9 + 10 + 5 + 2(16) + 10 + 5 + 9 = 80.$$

Такой подсчет служит полезной проверкой в разложениях подобного рода. Приведем теперь без доказательства общее правило. Чтобы найти компоненты внешнего произведения, начертим схему для одного из сомножителей. В схемы других сомножителей впишем один и тот же символ, например a , во все клетки первой строки, один и тот же символ b во все клетки второй строки и т. д. Будем теперь дописывать букву a к первой схеме. Будем расширять ее всеми возможными способами, но так, чтобы выполнялось правило: никакие две буквы a не входят в один и тот же столбец, а получающийся при этом граф должен быть правильным. То же сделаем и с символом b . Введем еще одно ограничение: после того как все символы добавлены к схеме, при чтении добавленных символов справа налево в первой строке, затем во второй строке и т. д. мы должны получить решеточную перестановку букв $a, b, \dots$ и т. д.

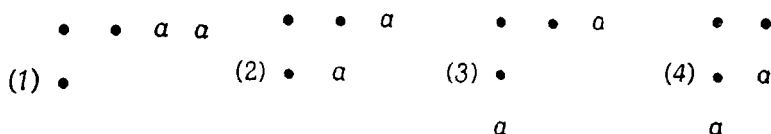
Чтобы пояснить этот метод, рассмотрим разложение (7.156). Начнем с первой схемы.



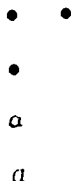
и впишем буквы в клетки второй схемы



Расширим сначала первую схему, присоединив к ней две буквы a . Возможны следующие случаи:



(заметим, что случай



не является допустимым). Теперь присоединим к схеме букву b .

Из (1) получим

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & a \ a \\ \bullet & & b \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & a \ a \\ \bullet & & \\ & & b \end{array}$$

(Заметим, что случай

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & a \ a \ b \\ \bullet & & \end{array}$$

не является допустимым, так как перестановка baa не является решеточной.)

Из (2) найдем

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & a \\ \bullet & & a \ b \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & a \\ \bullet & & a \\ & & b \end{array}$$

Из (3) будем иметь

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & a \\ \bullet & & b \\ a & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & a \\ \bullet & & \\ a & & \\ & & b \end{array}$$

Из (4) получим

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \\ \bullet & & a \\ a & & b \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \\ \bullet & & a \\ a & & \\ & & b \end{array}$$

что подтверждает формулу (7.156).

Часто равенства типа (7.156) записывают не в разбиениях, а в схемах:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \\
 + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \quad (7.156a)$$

Мы привели общее правило без доказательства, ибо в физических приложениях внешние произведения настолько просты, что результаты можно получать и с помощью элементарных методов.

Легко найти внешнее произведение любого представления (λ) с представлением, соответствующим горизонтальной полоске. Рассмотрим сначала внешнее произведение

$$\square \otimes \square$$

На функции $\psi(1)$ и $\varphi(2)$ не было наложено никаких условий симметрии, так что при перестановке частиц мы можем получить и симметричные и антисимметричные комбинации

$$\psi(1)\varphi(2) \pm \psi(2)\varphi(1).$$

Таким образом,

$$\square \otimes \square = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (7.157)$$

Рассмотрим далее внешнее произведение (λ) и (1) :

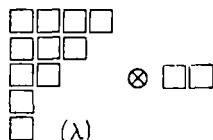
$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$

(λ)

Так как на волновую функцию одной добавленной частицы не наложено никаких условий симметрии, мы можем построить функции, антисимметричные по всем частицам любого столбца (λ) плюс добавленная частица, либо же мы можем поместить эту частицу в первую строку (λ) . Таким образом,

$$(\lambda) \otimes (1) = \sum_{\lambda_i} (\lambda_1 \dots \lambda_i + 1 \dots \lambda_n). \quad (7.158)$$

Во внешнем произведении $(\lambda) \otimes (2)$



волновая функция для двух частиц в схеме



симметрична по этим двум частицам, но никаких условий симметрии относительно перестановок этих двух частиц с частицами, входящими в (λ) , на нее не наложено. Поэтому мы можем дополнить схему (λ) двумя клетками всеми возможными способами при условии, что эти клетки не попадают в один и тот же столбец.

Аналогично мы видим, что внешнее произведение (λ) и горизонтальной полоски (m) получается присоединением клеток (m) к (λ) всеми возможными способами с тем ограничением, что никакие две клетки не должны попасть в один и тот же столбец. Если мы поменяем ролями строки и столбцы и перейдем к сопряженным представлениям (стр. 247), мы тотчас же получим правило вычисления произведения $(\lambda) \otimes (1^m)$: m клеток добавляются к (λ) всеми возможными способами, но так, чтобы никакие две клетки не попали в один и тот же столбец.

Этим способом мы вычислим следующие внешние произведения:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (7.159)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (7.160)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (7.161)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (7.162)$$

Теперь мы можем последовательно вычислять более сложные внешние произведения. Последовательные внешние произведения можно вычислять в любом порядке

$$\begin{aligned} (\lambda) \otimes (\mu) \otimes (\nu) &= [(\lambda) \otimes (\mu)] \otimes (\nu) = \\ &= [(\mu) \otimes (\nu)] \otimes (\lambda) = [(\lambda) \otimes (\nu)] \otimes (\mu); \end{aligned} \quad (7.163)$$

имеет место дистрибутивный закон

$$(\lambda) \otimes [(\mu) + (v)] = (\lambda) \otimes (\mu) + (\lambda) \otimes (v). \quad (7.164)$$

Таким образом, из (7.159) получаем

$$\begin{aligned} (\lambda) \otimes (2,1) &= (\lambda) \otimes [(2) \otimes (1)] - (\lambda) \otimes (3) = \\ &= [(\lambda) \otimes (2)] \otimes (1) - (\lambda) \otimes (3). \end{aligned} \quad (7.165)$$

Во все выражения в правой части (7.165) добавлены горизонтальные полоски. Этим приемом мы пользовались ранее, и поэтому внешнее произведение

$$(\lambda) \otimes (2,1)$$

мы можем вычислить.

Задачи. 1. Вычислите внешние произведения

$$\text{а) } \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad \text{б) } \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

2. Обобщите рекуррентный метод на случай $(\lambda) \otimes (2,2)$ и $(\lambda) \otimes (3,1)$. Попытайтесь вывести общее правило для вычисления внешних произведений.

§ 13. Внутренние произведения.

Ряд Клебша—Гордана для симметрической группы

В гл. 6 мы рассмотрели разложение произведений неприводимых представлений данной группы G . В случае симметрической группы такие кронекеровские произведения называются внутренними произведениями, чтобы их можно было отличать от рассмотренных нами в предыдущем параграфе внешних произведений. В гл. 6 мы показали, как можно производить разложение с помощью таблицы характеров группы; при этом мы получаем некоторую разновидность разложения Фурье. Хотя этот метод прямой, он не приводит к общим формулам. Мы знаем, что для группы вращений ряд Клебша—Гордана (векторная модель) дает весьма общий результат:

$$D^l \times D^{l'} = \sum_{L=|l-l'|}^{l+l'} D^L. \quad (7.166)$$

Представляет интерес вопрос о том, существуют ли аналогичные общие формулы для симметрической группы. Следует ожидать, что эти формулы будут гораздо сложнее, чем (7.166); симметрическая группа представляет собой гораздо более сложную структуру, чем группа вращений, несмотря на то (или именно вследствие того), что последняя является непрерывной группой. Следует

также отметить, что, имея в виду пример 4 в § 1 гл. 1, группу S_n можно рассматривать как подгруппу группы линейных преобразований в n -мерном пространстве.

Таблица 29

Ряд Клебша — Гордана

$n = 4$

	(4)	(3,1)	(2 ²)	(2,1 ²)	(1 ⁴)	
↑	$(3,1) \times (3,1)$	1	1	1	1	$(3,1) \times (2^2)$
	$(3,1) \times (2^2)$		1		1	$(3,1) \times (2^2)$
	$(2^2) \times (2^2)$	1		1		$(2^2) \times (2^2)$
		(1 ⁴)	(2,1 ²)	(2 ²)	(3,1)	(4)

$n = 5$

	(5)	(4,1)	(3,2)	(3,1 ²)	(2 ² ,1)	(2,1 ³)	(1 ⁵)	
↑	$(4,1) \times (4,1)$	1	1	1	1			$(4,1) \times (2,1^3)$
	$(4,1) \times (3,2)$		1	1	1	1		$(4,1) \times (2^2,1)$
	$(4,1) \times (3,1^2)$		1	1	1	1	1	$(4,1) \times (3,1^2)$
	$(3,2) \times (3,2)$	1	1	1	1	1	1	$(3,2) \times (2^2,1)$
	$(3,2) \times (3,1^2)$		1	1	2	1	1	$(3,2) \times (3,1^2)$
	$(3,1^2) \times (3,1^2)$	1	1	2	1	2	1	$(3,1^2) \times (3,1^2)$
		(1 ⁵)	(2,1 ³)	(2 ² ,1)	(3,1 ²)	(3,2)	(4,1)	(5)

Прямой метод разложения внутренних произведений (ряд Клебша — Гордана) был предложен Мурнаганом и Гамба. Мы не станем описывать их метод, а лишь укажем несколько общих формул и приведем таблицы (табл. 29) всех нетривиальных внутренних произведений вплоть до $n = 5$:

$$(n-1,1) \times (n-1,1) = (n) + (n-1,1) + (n-2,2) + (n-2,1^2), \quad (7.167)$$

$$(n-1,1) \times (n-2,2) = (n-1,1) + (n-2,2) + (n-2,1^2) + (n-3,3) + (n-3,2,1) \quad (n > 4), \quad (7.168)$$

$$(n-1,1) \times (n-2,1^2) = (n-1,1) + (n-2,2) + (n-2,1^2) + (n-3,2,1) + (n-3,1^3), \quad (7.169)$$

$$(n-2,2) \times (n-2,2) = (n) + (n-1,1) + 2(n-2,2) + (n-2,1^2) + (n-3,3) + 2(n-3,2,1) + (n-3,1^3) + (n-4,4) + (n-4,3,1) + (n-4,2^2). \quad (7.170)$$

Таблицы дают коэффициенты в разложении внутренних произведений. Для произведений, стоящих слева, коэффициенты относятся к разбиениям, выписанным над столбцами; для произведений, стоящих справа, коэффициенты относятся к разбиениям, указанным внизу под столбцами. Показаны не все возможные случаи. Не указанные случаи легко получить с помощью простых теорем о сопряженных разбиениях, которыми мы пользовались раньше и которые приводим здесь еще раз для удобства. Из (7.44) мы знаем, что

$$(\lambda) \times (1^n) = (\tilde{\lambda}), \quad (7.171)$$

где $(\tilde{\lambda})$ — разбиение, сопряженное с разбиением (λ) . Кроме того,

$$\{(\lambda) \times (\mu)\} \times (\nu) = (\lambda) \times \{(\mu) \times (\nu)\} = \{(\lambda) \times (\nu)\} \times (\mu). \quad (7.172)$$

Полагая $(\nu) = (1^n)$, получаем

$$\overline{(\lambda) \times (\mu)} = (\lambda) \times (\tilde{\mu}) = (\tilde{\lambda}) \times (\mu). \quad (7.173)$$

Из второго равенства, заменив (λ) на $(\tilde{\lambda})$, находим

$$(\tilde{\lambda}) \times (\tilde{\mu}) = (\lambda) \times (\mu). \quad (7.174)$$

В гл. 6 мы также показали, что если $(\lambda) \times (\mu)$ содержит (ν) , то $(\lambda) \times (\nu)$ содержит (μ) , и $(\mu) \times (\nu)$ содержит (λ) . В самом деле, во всех трех случаях коэффициент в разложении есть не что иное, как коэффициент единичного представления (n) в $(\lambda) \times (\mu) \times (\nu)$. Итак, мы видим, что $(\lambda) \times (\mu)$ содержит единичное представление (с коэффициентом, равным единице) в том и только в том случае, если $(\lambda) \equiv (\mu)$, а $(\lambda) \times (\mu)$ содержит знакопеременное представление (1^n) (с коэффициентом, равным единице) в том и только в том случае, если $(\lambda) = (\tilde{\mu})$.

Уже при $n = 5$ табл. 29 показывает, что задачи, возникающие в связи с рассмотрением симметрической группы, могут оказаться совсем непохожими на задачи, связанные с группой вращений; некоторые представления входят в разложение кронекеровского произведения двух представлений с коэффициентом, большим единицы. Как мы увидим позже, в случае группы вращений с таким явлением можно столкнуться лишь при рассмотрении произведений трех сомножителей (см. также § 8 гл. 5).

Внутренние произведения можно вычислять и графическими методами. Гамба и Радикати сложным путем получили графический метод для частного случая $(\lambda) \times (n-1, 1)$. Мы приведем гораздо более простой вывод этого метода и укажем, как можно его обобщить.

Из задачи 3 § 4 настоящей главы мы знаем, что

$$\chi_{(1^2 \beta \dots)}^{(n-1, 1)} = \alpha - 1. \quad (7.175)$$

Чтобы найти коэффициент $a_{(\mu)}$, с которым представление (μ) входит в $(\lambda) \times (n-1, 1)$, воспользуемся равенствами (5.107), (7.12) и (7.175):

$$\begin{aligned} a_{(\mu)} &= \sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma, \dots \\ \alpha + 2\beta + \dots = n}} \frac{1}{\alpha! 2^\beta \beta! \dots} \chi_{(1^{a_2 \beta} \dots)}^{(n-1, 1)} \chi_{(1^{a_2 \beta} \dots)}^{(\lambda)} \chi_{(1^{a_2 \beta} \dots)}^{(\mu)} = \\ &= \sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma, \dots \\ \alpha + 2\beta + \dots = n}} \frac{1}{\alpha! 2^\beta \beta! \dots} (\alpha-1) \chi_{(1^{a_2 \beta} \dots)}^{(\lambda)} \chi_{(1^{a_2 \beta} \dots)}^{(\mu)}. \end{aligned} \quad (7.176)$$

Сумма, стоящая с коэффициентом (-1) , тотчас же вычисляется с помощью соотношения ортогональности и оказывается равной $-\delta_{\lambda\mu}$. В сумме с коэффициентом α мы применяем к $\chi^{(\lambda)}$ и $\chi^{(\mu)}$ правила ветвления:

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma, \dots \\ \alpha + 2\beta + \dots = n}} \frac{\alpha}{\alpha! 2^\beta \beta! \dots} \chi_{(1^{a_2 \beta} \dots)}^{(\lambda)} \chi_{(1^{a_2 \beta} \dots)}^{(\mu)} = \\ &= \sum_{\substack{\alpha \neq 0, \beta, \gamma, \dots \\ \alpha + 2\beta + \dots = n}} \frac{1}{(\alpha-1)! 2^\beta \beta! \dots} \chi_{(1^{a_2 \beta} \dots)}^{(\lambda)} \chi_{(1^{a_2 \beta} \dots)}^{(\mu)} = \\ &= \sum_{\substack{\alpha \neq 0, \beta, \gamma, \dots \\ \alpha + 2\beta + \dots = n}} \frac{1}{(\alpha-1)! 2^\beta \beta! \dots} \sum_{(\lambda')} \chi_{(1^{a-1_2 \beta} \dots)}^{(\lambda')} \sum_{(\mu')} \chi_{(1^{a-1_2 \beta} \dots)}^{(\mu')} = \\ &= \sum_{\substack{\alpha', \beta, \gamma, \dots \\ \alpha' + 2\beta + \dots = n-1}} \frac{1}{\alpha'! 2^\beta \beta! \dots} \sum_{(\lambda')} \chi_{(1^{a' 2 \beta} \dots)}^{(\lambda')} \sum_{(\mu')} \chi_{(1^{a' 2 \beta} \dots)}^{(\mu')}, \end{aligned} \quad (7.177)$$

где мы ввели обозначение $\alpha-1 = \alpha'$. Разбиения (λ') и (μ') получаются из разбиений (λ) и (μ) правильным удалением одной клетки. Но теперь мы видим, что каждое произведение $\sum_{(\lambda')} \sum_{(\mu')}$ имеет в точности такой вид, какой необходим для того, чтобы можно было применять соотношение ортогональности для $n-1$ частицы, что и дает $\delta_{\lambda'\mu'}$. Итак, кронекеровское произведение $(\lambda) \times (n-1, 1)$ будет содержать (μ) , если удаление одной клетки из (λ) и удаление одной клетки из (μ) приводит к одному и тому же разбиению числа $n-1$. Мы можем высказать и более простое утверждение: кронекеровское произведение $(\lambda) \times (n-1, 1)$ содержит (μ) , если удаление одной клетки из (λ) и добавление одной клетки к получающемуся разбиению дает нам (μ) . Объединяя сказанное с результатом, полученным для множителя (-1) , можно утверждать: разбиение (λ) входит в $(\lambda) \times (n-1, 1)$ с коэффициентом $N-1$, где N — число различных λ_i . Все представления (μ) , графы которых получаются из графа (λ) выбрасыванием одной клетки, входят в это произведение с коэффициентом 1.

Например,

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$$

Этот графический результат содержит все формулы от (7.167) до (7.169) в качестве частных случаев.

Использованный выше метод можно обобщить на любое произведение $(\lambda) \times (\mu)$, для которого мы знаем явные выражения характеров $\chi_{(1^a 2^b)}$ одного из сомножителей через $\alpha, \beta, \dots$ (в виде полиномов). Рассмотрим, например, кронекеровские произведения $(n-2, 1^2) \times (\lambda)$ и $(n-2, 2) \times (\lambda)$. В задаче 3 § 4 настоящей главы мы нашли

$$\chi_{(1^a 2^b \dots)}^{(n-2, 1^2)} = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2} - \beta, \quad (7.178)$$

$$\chi_{(1^a 2^b \dots)}^{(n-2, 2)} = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2} + \beta - 1. \quad (7.179)$$

Перепишем эти полиномы, разложив их по полиномам системы

$$\begin{aligned} &1, \alpha, \alpha(\alpha-1), \alpha(\alpha-1)(\alpha-2), \dots, \\ &2\beta, 2^2\beta(\beta-1), 2^3\beta(\beta-1)(\beta-2), \dots, \\ &3\gamma, 3^2\gamma(\gamma-1), 3^3\gamma(\gamma-1)(\gamma-2), \dots \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Два выписанных полинома содержат $1, \alpha, \alpha(\alpha-1)$ и 2β . Вычислив (7.176) (где разность $\alpha-1$ заменена соответствующим полиномом), мы получим члены, содержащие множители 1 или α (которые мы только что вычислили), один член с множителем $\alpha(\alpha-1)$ и другой — с множителем 2β . Они вычисляются отдельно. Множитель $\alpha(\alpha-1)$ дает в $a_{(\mu)}$ вклад

$$\begin{aligned} a' &= \sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma, \dots \\ \alpha+2\beta+\dots=n}} \frac{1}{\alpha! 2^2 \beta! \dots} \alpha(\alpha-1) \chi_{(1^a 2^b \dots)}^{(\lambda)} \chi_{(1^a 2^b \dots)}^{(\mu)} = \\ &= \sum_{\substack{\alpha > 1, \beta, \gamma, \dots \\ \alpha+2\beta+\dots=n}} \frac{1}{(\alpha-2)! 2^2 \beta! \dots} \chi_{(1^{a-2} 2^b \dots)}^{(\lambda)} \chi_{(1^a 2^b \dots)}^{(\mu)}. \quad (7.180) \end{aligned}$$

Применим теперь к $\chi^{(\lambda)}$ и $\chi^{(\mu)}$ правило ветвления для двух последовательных выбрасываний одной клетки (7.53):

$$\begin{aligned} a' &= \sum_{\substack{\alpha > 1, \beta, \gamma, \dots \\ \alpha+2\beta+\dots=n}} \frac{1}{(\alpha-2)! 2^2 \beta! \dots} \sum_{(\lambda')} \chi_{(1^{a-2} 2^b \dots)}^{(\lambda')} \sum_{(\mu')} \chi_{(1^{a-2} 2^b \dots)}^{(\mu')} = \\ &= \sum_{\substack{\alpha', \beta, \gamma, \dots \\ \alpha'+2\beta+\dots=n-2}} \frac{1}{\alpha'! 2^2 \beta! \dots} \sum_{(\lambda')} \chi_{(1^{a'} 2^b \dots)}^{(\lambda')} \sum_{(\mu')} \chi_{(1^{a'} 2^b \dots)}^{(\mu')}, \quad (7.181) \end{aligned}$$

где (λ') и (μ') разбиения, получающиеся из (λ) и (μ) при двух последовательных выбрасываниях одной клетки. В произведении $\sum_{(\lambda')} \sum_{(\mu')}$ мы вновь можем применить соотношение ортогональности (для группы S_{n-2}) к каждому члену и, таким образом, вычислить a' .

Аналогично вклад множителя 2β в $a_{(\mu)}$ равен

$$\begin{aligned} a'' &= \sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma, \dots \\ \alpha + 2\beta + \dots = n}} \frac{1}{\alpha! 2^\beta \beta! \dots} (2\beta) \chi_{(1^{2\beta} \dots)}^{(\lambda)} \chi_{(1^{2\beta} \dots)}^{(\mu)} = \\ &= \sum_{\substack{\alpha, \beta > 0, \gamma, \dots \\ \alpha + 2\beta + \dots = n}} \frac{1}{\alpha! 2^{\beta-1} (\beta-1)!} \chi_{(1^{2\beta} \dots)}^{(\lambda)} \chi_{(1^{2\beta} \dots)}^{(\mu)}. \end{aligned} \quad (7.182)$$

Применим теперь к (λ) и (μ) правило ветвления для случая правильного удаления цикла длины 2 [см. обсуждение, предшествовавшее формуле (7.56)], что даст нам

$$\begin{aligned} a'' &= \sum_{\substack{\alpha, \beta > 0, \gamma, \dots \\ \alpha + 2\beta + \dots = n}} \frac{1}{\alpha! 2^{\beta-1} (\beta-1)! \dots} \sum_{(\lambda')} (\pm) \chi_{(1^{2\beta-1} \dots)}^{(\lambda')} \sum_{(\mu')} \chi_{(1^{2\beta-1} \dots)}^{(\mu')} = \\ &= \sum_{\substack{\alpha, \beta', \gamma, \dots \\ \alpha + 2\beta' + \dots = n-2}} \frac{1}{\alpha! 2^{\beta'} \beta'! \dots} \sum_{(\lambda')} (\pm) \chi_{(1^{2\beta'} \dots)}^{(\lambda')} \sum_{(\mu')} (\pm) \chi_{(1^{2\beta'} \dots)}^{(\mu')}. \end{aligned} \quad (7.183)$$

Разбиения (λ') и (μ') в (7.183) получены из (λ) и (μ) с помощью правильного выбрасывания цикла длины 2. Характер входит со знаком плюс, если удаляется положительная (горизонтальная) полоска, и со знаком минус, если удаляется отрицательная (вертикальная) полоска. Формулу (7.183) можно получить вновь, используя соотношение ортогональности для S_{n-2} .

Общий метод должен быть ясен из приведенных выше примеров.

Задачи. 1. Завершите вычисления этого параграфа и получите ряд Клебша — Гордана для произведений

$$\text{а) } (n-2, 1^2) \times (\lambda), \quad \text{б) } (n-2, 2) \times (\lambda).$$

2. Покажите, что формулы для случаев „а“ и „б“ в задаче 1 можно получить друг из друга с помощью соотношения (7.167). [Указание. Постройте тройное произведение $(\lambda) \times (n-1, 1) \times (n-1, 1)$.]

§ 14. Коэффициенты Клебша — Гордана для симметрической группы. Свойства симметрии. Рекуррентные формулы

В этом параграфе мы хотим рассмотреть две задачи:

а) вывод свойств симметрии коэффициентов Клебша — Гордана для симметрической группы,

б) вывод рекуррентных формул для коэффициентов Клебша — Гордана.

При рассмотрении первой задачи нашей целью будет получение соотношений, аналогичных тем, которые были найдены в § 9 гл. 5 [формула (5.151)] для просто приводимых групп. Воспользоваться методом § 9 гл. 5 мы не можем, поскольку при $n > 4$ симметрическая группа не является просто приводимой. Кронекеровское произведение двух неприводимых представлений в общем случае будет содержать представления с коэффициентом, большим единицы, т. е. $(\lambda\mu\nu) > 1$. Но симметрические группы являются членами одного специального класса групп: все их представления можно выразить в вещественном виде (§ 7 настоящей главы). Для таких групп различие между коэффициентами Клебша — Гордана и $(3j)$ -коэффициентами в (5.140) сводится к тривиальному множителю $[j_3]$, поскольку каждое представление совпадает со своим комплексно сопряженным. Поэтому мы будем действовать так же, как и в § 7 гл. 5.

Для любой группы, обладающей лишь *вещественными* неприводимыми представлениями, все матрицы представлений $D_{ij}^{(\lambda)}(R)$ вещественны, а матрицы $D^{(\lambda)}(R)$ вещественны и ортогональны:

$$D_{ij}^{(\lambda)}(R) D_{ij'}^{(\lambda)}(R) = \delta_{jj'}. \quad (7.184)$$

Мы будем придерживаться соглашения о суммировании по повторяющимся латинским индексам так же, как мы делали это в § 5 настоящей главы.

Запишем коэффициенты Клебша — Гордана § 5 настоящей главы в виде

$$(\mu j, \nu l | \lambda \tau_\lambda s) = S_s^{\lambda \tau_\lambda \mu \nu}{}_{j l} \quad (7.185)$$

и обозначим размерность λ -представления через n_λ . В этих обозначениях равенство (5.114) выглядит следующим образом:

$$D_{ij}^{(\mu)}(R) D_{kl}^{(\nu)}(R) S_s^{\lambda \tau_\lambda \mu \nu}{}_{j l} = D_{s' s}^{(\lambda \tau_\lambda)}(R) S_{s' s}^{\lambda \tau_\lambda \mu \nu}{}_{i k}, \quad (7.186)$$

где матрицы $D^{(\lambda \tau_\lambda)}(R)$ так же, как и в § 7 гл. 5, выбраны одинаковыми для всех эквивалентных представлений, содержащихся в $D^{(\mu)} \times D^{(\nu)}$:

$$D^{(\lambda \tau_\lambda)}(R) = D^{(\lambda)}(R). \quad (7.187)$$

Уравнения (7.186) для коэффициентов Клебша — Гордана представляют собой линейные уравнения с вещественными коэффициентами, и поэтому коэффициенты Клебша — Гордана можно выбрать

вещественными. Таким образом, матрица коэффициентов Клебша — Гордана будет вещественной ортогональной матрицей:

$$S_i^{\lambda\tau\lambda\mu\nu} S_{j'k}^{\epsilon\tau\epsilon\mu\nu} = \delta_{\lambda\epsilon} \delta_{\tau\lambda\tau\epsilon} \delta_{ll'}, \quad (7.188)$$

$$\sum_{\lambda\tau\lambda} S_i^{\lambda\tau\lambda\mu\nu} S_{j'k}^{\lambda\tau\lambda\mu\nu} = \delta_{jj'} \delta_{kk'}. \quad (7.188a)$$

Теперь мы можем переставить сомножители в (7.186) и получить (5.115) и (5.116):

$$S_i^{\lambda'\tau'\lambda'\mu\nu} D_{ij}^{(\mu)}(R) D_{kl}^{(\nu)}(R) S_s^{\lambda\tau\lambda\mu\nu} = D_{s's'}^{(\lambda\tau\lambda)}(R) \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\tau\lambda\tau\lambda'} \delta_{ls'}, \quad (7.189)$$

$$D_{ij}^{(\mu)}(R) D_{kl}^{(\nu)}(R) = \sum_{\lambda\tau\lambda} S_{s'}^{\lambda\tau\lambda\mu\nu} D_{s's'}^{(\lambda\tau\lambda)}(R) S_s^{\lambda\tau\lambda\mu\nu}. \quad (7.190)$$

Поскольку $D^{(\lambda)}(R)$ — ортогональная матрица, перенос ее в левую часть равенства (7.186) приводит к выражению

$$D_{is}^{(\lambda)}(R) D_{ij}^{(\mu)}(R) D_{kl}^{(\nu)}(R) S_s^{\lambda\tau\lambda\mu\nu} = S_i^{\lambda\tau\lambda\mu\nu} D_{ik}^{(\mu\nu)}, \quad (7.191)$$

аналогичному (5.146). Мы можем также воспользоваться соотношением ортогональности, чтобы перенести $D^{(\lambda)}$ в левую часть равенства (7.186) и получить

$$\sum_K D_{is}^{(\lambda)}(R) D_{ij}^{(\mu)}(R) D_{kl}^{(\nu)}(R) = g \sum_{\tau\lambda} S_i^{\lambda\tau\lambda\mu\nu} S_s^{\lambda\tau\lambda\mu\nu}, \quad (7.192)$$

что аналогично (5.149). Если теперь положить $s=t$, $j=i$, $l=k$ и переставить сомножители в левой части, то вместо (5.150) мы будем иметь соотношения симметрии

$$\sum_{\tau\lambda} [S_i^{\lambda\tau\lambda\mu\nu}]^2 = \sum_{\tau\mu} [S_i^{\mu\tau\mu\lambda\nu}]^2 = \sum_{\tau\nu} [S_k^{\nu\tau\nu\mu\lambda}]^2 = \text{и т. д.} \quad (7.193)$$

Наличие в соотношениях (7.193) сумм не позволяет нам продвинуться еще дальше, как мы это делали в § 9 гл. 5, (ввести фазы и наложить на коэффициенты Клебша — Гордана условия симметрии). Однако мы все же в состоянии сделать это, ибо теперь $(\lambda\mu\nu) > 1$, и мы ничем не ограничены в изменениях фазовых множителей наших базисных функций. Как мы уже указывали в § 8 гл. 5 [равенство (5.117)], мы можем оставить матрицу коэффициентов Клебша — Гордана вещественной и ортогональной, не меняя при этом матриц представления $D^{(\lambda)}(R)$, если возьмем любые линейные комбинации базисных функций $\Psi_s^{(\lambda\tau\lambda)}$,

$$\Psi_s^{(\lambda\tau\lambda)} = \sum_{\tau'\lambda'} c_{\tau'\lambda'} \Psi_s^{(\lambda'\tau'\lambda')}, \quad (7.194)$$

коэффициенты $c_{\tau_\lambda \tau_\lambda'}$, которых образуют вещественную ортогональную матрицу

$$\sum_{\tau_\lambda} c_{\tau_\lambda \tau_\lambda'} c_{\tau_\lambda \tau_\lambda''} = \delta_{\tau_\lambda' \tau_\lambda''}. \quad (7.195)$$

Покажем теперь, как этой дополнительной свободой в выборе базисных функций можно воспользоваться для того, чтобы наложить условия симметрии на коэффициенты Клебша — Гордана.

Перенеся в правую часть (7.186) множитель $D_{kl}^{(v)}(R)$, получим

$$D_{ij}^{(\mu)}(R) S_s^{\lambda \tau_\lambda \mu \nu} = S_{s'}^{\lambda \tau_\lambda \mu \nu} S_{ik}^{(\lambda)} D_{s's}^{(\lambda)}(R) D_{kl}^{(v)}(R). \quad (7.196)$$

Для разложения произведения

$$D_{s's}^{(\lambda)}(R) D_{kl}^{(v)}(R)$$

воспользуемся уравнением, аналогичным уравнению (7.190). Найдем

$$D_{ij}^{(\mu)}(R) S_s^{\lambda \tau_\lambda \mu \nu} = \sum_{e \tau_e} S_{s'}^{\lambda \tau_\lambda \mu \nu} S_{ik}^{e \tau_e \lambda \nu} S_{s'k}^{(\lambda)} D_{i't}^{(e)}(R) S_t^{e \tau_e \lambda \nu}. \quad (7.197)$$

Последний множитель в правой части можно перенести влево, в результате чего получим

$$D_{ij}^{(\mu)}(R) S_s^{\lambda \tau_\lambda \mu \nu} S_t^{e \tau_e \lambda \nu} = S_{s'}^{\lambda \tau_\lambda \mu \nu} S_{ik}^{e \tau_e \lambda \nu} S_{s'k}^{(\lambda)} D_{i't}^{(e)}(R). \quad (7.198)$$

Из (7.198) мы видим, что матрица M с элементами

$$M_{jt} = S_s^{\lambda \tau_\lambda \mu \nu} S_t^{e \tau_e \lambda \nu} \quad (7.199)$$

удовлетворяет уравнению

$$D_{ij}^{(\mu)}(R) M_{jt} = M_{it'} D_{i't}^{(e)}(R), \quad (7.200)$$

так что

$$D^{(\mu)} M = M D^{(e)}. \quad (7.200a)$$

По лемме Шура, M есть нулевая матрица, если представления $D^{(\mu)}$ и $D^{(e)}$ неэквивалентны ($\mu \neq e$), и кратна единичной матрице, если $\mu = e$. Поэтому выражение (7.199) можно переписать в виде

$$S_s^{\lambda \tau_\lambda \mu \nu} S_t^{e \tau_e \lambda \nu} = \sqrt{\frac{n_\lambda}{n_\mu}} m_{\tau_\lambda \tau_\mu}^{(\lambda \mu) \nu} \delta_{e\mu} \delta_{jt}. \quad (7.201)$$

Для упрощения последующих выкладок мы ввели в (7.201) множитель, содержащий размерности представлений. Матрица $m_{\tau_\lambda \tau_\mu}^{(\lambda \mu) \nu}$ квадратная, так как $(\mu \nu \lambda) = (\lambda \nu \mu)$. Верхние значки указывают, что матрица m зависит от λ, μ, ν и что мы переставили первый и второй столбцы в коэффициентах Клебша — Гордана.

В (7.201) перенесем в правую часть второй множитель:

$$\frac{S_s^{\lambda\tau_\lambda\mu\nu}}{\sqrt{n_\lambda}} = \sum_{\tau_\mu} m_{\tau_\lambda\tau_\mu}^{(\lambda\mu)\nu} \frac{S_j^{\mu\tau_\mu\lambda\nu}}{\sqrt{n_\mu}}. \quad (7.202)$$

Равенство (7.202) с фиксированной матрицей $m^{(\lambda\mu)\nu}$, определяемой соотношением (7.201), выполняется при всех s, j и l . Умножим (7.202) на аналогичное равенство для $S_s^{\lambda\tau'_\lambda\mu\nu}/\sqrt{n_\lambda}$ и найдем

$$\delta_{\tau_\lambda\tau'_\lambda} = \sum_{\tau_\mu} m_{\tau_\lambda\tau_\mu}^{(\lambda\mu)\nu} m_{\tau'_\lambda\tau_\mu}^{(\lambda\mu)\nu}. \quad (7.203)$$

Так как коэффициенты Клебша — Гордана вещественны, матрица $m^{(\lambda\mu)\nu}$ вещественна и ортогональна, и ее можно использовать для преобразования базиса представления [ср. (7.194)].

Весь наш вывод можно повторить, перенеся $D_{lj}^{(\mu)}(R)$ в правую часть (7.186). Прделав это, получим равенства

$$S_s^{\lambda\tau_\lambda\mu\nu} S_t^{\varepsilon\tau_\varepsilon\mu\lambda} = \sqrt{\frac{n_\lambda}{n_\nu}} m_{\tau_\lambda\tau_\nu}^{\lambda\mu\nu} \delta_{\varepsilon\nu} \delta_{jt}, \quad (7.201a)$$

$$\frac{S_s^{\lambda\tau_\lambda\mu\nu}}{\sqrt{n_\lambda}} = \sum_{\tau_\nu} m_{\tau_\lambda\tau_\nu}^{\lambda\mu\nu} \frac{S_j^{\nu\tau_\nu\mu\lambda}}{\sqrt{n_\nu}}, \quad (7.202a)$$

$$\delta_{\tau_\lambda\tau'_\lambda} = \sum_{\tau_\nu} m_{\tau_\lambda\tau_\nu}^{\lambda\mu\nu} m_{\tau'_\lambda\tau_\nu}^{\lambda\mu\nu}. \quad (7.203a)$$

Рассмотрим сначала случай, когда $\lambda \neq \mu \neq \nu$. Предположим, что коэффициенты Клебша — Гордана заданы при некотором выборе базиса. Тогда (7.201) определяет матрицу $m_{\tau_\lambda\tau_\mu}^{(\lambda\mu)\nu}$, которой мы воспользуемся для преобразования базисных функций $\Psi_j^{(\mu\tau_\mu)}$

$$\sum_{\tau_\mu} m_{\tau_\lambda\tau_\mu}^{(\lambda\mu)\nu} \Psi_j^{(\mu\tau_\mu)} \rightarrow \Psi_j^{(\mu\tau_\lambda)} \quad \text{при всех } j. \quad (7.204)$$

Это преобразование индуцирует преобразование

$$\sum_{\tau_\mu} m_{\tau_\lambda\tau_\mu}^{(\lambda\mu)\nu} S_j^{\mu\tau_\mu\lambda\nu} \rightarrow S_j^{\mu\tau_\lambda\lambda\nu} \quad \text{при всех } j, s, l, \quad (7.204a)$$

так что в новом базисе равенство (7.202) имеет вид

$$\frac{S_s^{\lambda\tau_\lambda\mu\nu}}{\sqrt{n_\lambda}} = \frac{S_j^{\mu\tau_\lambda\lambda\nu}}{\sqrt{n_\mu}}. \quad (7.205)$$

Независимо мы можем воспользоваться для преобразования базисных функций $\Psi_j^{(\nu\tau\nu)}$ матрицей $m^{\lambda\mu\nu}$, определяемой соотношением (7.201a). Новые коэффициенты Клебша — Гордана будут в этом случае удовлетворять соотношению

$$\frac{S_s^{\lambda\tau\lambda\mu\nu}}{V n_\lambda} = \frac{S_l^{\nu\tau\lambda\mu\lambda}}{V n_\nu}. \quad (7.205a)$$

Поскольку мы предположили, что $\mu \neq \nu \neq \lambda$, порядок множителей $\psi_j^{(\mu)}\psi_l^{(\nu)}$ и т. д. в произведениях функций несуществен. Поэтому можно сделать так, чтобы

$$\begin{aligned} S_s^{\lambda\tau\lambda\mu\nu} &= S_s^{\lambda\tau\lambda\nu\mu}, \\ S_j^{\mu\tau\lambda\lambda\nu} &= S_j^{\mu\tau\lambda\nu\lambda}, \\ S_l^{\nu\tau\lambda\mu\lambda} &= S_l^{\nu\tau\lambda\lambda\mu}. \end{aligned} \quad (7.205b)$$

Равенства (7.205) — (7.205b) заменяют собой равенство (5.151), выведенное для просто приводимых групп в § 9 гл. 5.

Теперь мы должны рассмотреть особые случаи. Предположим сначала, что $\lambda \neq \mu = \nu$. Мы все еще можем выполнить первое преобразование базиса (7.204a) и получить

$$\frac{S_s^{\lambda\tau\lambda\mu\mu}}{V n_\lambda} = \frac{S_j^{\mu\tau\lambda\lambda\mu}}{V n_\mu}, \quad (7.206)$$

но второе преобразование базиса не является более независимым и уничтожает действие первого преобразования. Действительно, это второе преобразование не является необходимым. Так как $\mu = \nu$, то симметрия коэффициентов Клебша — Гордана при перестановке второго и третьего столбцов определяется тем, содержится ли произведение функций $\Psi_s^{(\lambda\tau\lambda)}$ в

$$[D^{(\mu)} \times D^{(\mu)}] \quad \text{или} \quad \{D^{(\mu)} \times D^{(\mu)}\}.$$

Таким образом, наш первый шаг должен был бы состоять в том, чтобы указать, какие компоненты $\Psi_s^{(\lambda\tau\lambda)}$ входят в симметризованный, а какие в антисимметризованный квадрат представления $D^{(\mu)}$. Таким образом,

$$S_s^{\lambda\tau\lambda\mu\mu} = \delta_{\tau\lambda} S_s^{\lambda\tau\lambda\mu\mu}, \quad (7.206a)$$

где $\delta_{\tau\lambda} = +1$, если компоненты $\Psi_s^{(\lambda\tau\lambda)}$ содержатся в симметризованном произведении, и $\delta_{\tau\lambda} = -1$, если эти компоненты содержатся

в антисимметризованном произведении. Матрицу $m^{(\lambda\mu)\mu}$ следует определять *после* того, как это установлено. Так как $\lambda \neq \mu$, порядок сомножителей в произведении $\psi_s^{(\lambda)}\psi_l^{(\mu)}$ несуществен, поэтому можно положить

$$S_j^{\mu\tau_\lambda\lambda\mu} = S_j^{\mu\tau_\lambda\mu\lambda}. \quad (7.206б)$$

Комбинируя соотношения (7.206), (7.206а) и (7.206б), получаем полный набор соотношений симметрии:

$$\begin{aligned} \frac{S_s^{\lambda\tau_\lambda\mu\mu}}{\sqrt{n_\lambda}} &= \delta_{\tau_\lambda} \frac{S_s^{\lambda\tau_\lambda\mu\mu}}{\sqrt{n_\lambda}} = \frac{S_j^{\mu\tau_\lambda\lambda\mu}}{\sqrt{n_\mu}} = \frac{S_j^{\mu\tau_\lambda\mu\lambda}}{\sqrt{n_\mu}} = \\ &= \delta_{\tau_\lambda} \frac{S_l^{\mu\tau_\lambda\lambda\mu}}{\sqrt{n_\mu}} = \delta_{\tau_\lambda} \frac{S_l^{\mu\tau_\lambda\mu\lambda}}{\sqrt{n_\mu}}. \end{aligned} \quad (7.206в)$$

Рассмотрим, наконец, случай, когда $\lambda = \mu = \nu$. Имеем:

$$S_s^{\lambda\tau_\lambda\lambda\lambda} = \delta_{\tau_\lambda} S_s^{\lambda\tau_\lambda\lambda\lambda}, \quad (7.207)$$

где $\delta_{\tau_\lambda} = +1$, если произведения функций $\Psi_s^{(\lambda\tau_\lambda)}$ содержатся в симметризованном квадрате, и $\delta_{\tau_\lambda} = -1$, если они содержатся в антисимметризованном квадрате. В этом случае линейные уравнения (7.191) для коэффициентов Клебша — Гордана имеют вид

$$D_{ts}^{(\lambda)}(R) D_{lj}^{(\lambda)}(R) D_{kl}^{(\lambda)}(R) S_s^{\lambda\tau_\lambda\lambda\lambda} = S_t^{\lambda\tau_\lambda\lambda\lambda} \quad (7.191а)$$

или

$$[A_{tik, sjl}(R) - \delta_{ts}\delta_{lj}\delta_{kl}] S_s^{\lambda\tau_\lambda\lambda\lambda} = 0. \quad (7.191б)$$

Коэффициенты в уравнении (7.191б) симметричны относительно одно-временной замены $t \leftrightarrow l$, $s \leftrightarrow j$. Поэтому если $S_s^{\lambda\tau_\lambda\lambda\lambda}$ есть решение, то и $S_j^{\lambda\tau_\lambda\lambda\lambda}$ есть решение. Сумма и разность этих двух решений также являются решениями, и самое большее из них равно нулю. Поэтому ясно, что мы можем всегда сделать так, чтобы

$$S_s^{\lambda\tau_\lambda\lambda\lambda} = \varepsilon_{\tau_\lambda} S_j^{\lambda\tau_\lambda\lambda\lambda}, \quad (7.207а)$$

где $\varepsilon_{\tau_\lambda} = \pm 1$. Комбинируя равенства (7.207) и (7.207а), получаем систему соотношений симметрии

$$S_s^{\lambda\tau_\lambda\lambda\lambda} = \delta_{\tau_\lambda} S_s^{\lambda\tau_\lambda\lambda\lambda} = \varepsilon_{\tau_\lambda} S_j^{\lambda\tau_\lambda\lambda\lambda} =$$

Эти свойства симметрии коэффициентов Клебша — Гордана имеют место для *любой* группы, обладающей *только целыми (вещественными)* представлениями.

В случае симметрической группы мы воспользуемся ортогональным представлением Юнга — Яманучи, полученным в § 7 настоящей главы. Базисные функции этого представления мы обозначим $[\lambda i]$, где λ означает разбиение, а i — символ Яманучи (Y -символ), нумерующий строки представления (λ). Если в аргумент входят несколько независимых функций, принадлежащих одной и той же строке представления (λ), мы будем отличать их, ставя штрих над Y -символом.

Имеется несколько частных случаев, для которых можно легко найти коэффициенты Клебша — Гордана.

Во-первых, мы знаем, что произведение $(\lambda) \times (\mu)$ содержит единичное представление с коэффициентом, равным единице, в том и только в том случае, если $(\lambda) = (\mu)$. Разложение полностью симметричной функции по произведениям $[\lambda i][\lambda j]'$ почти очевидно. Базисные функции являются компонентами в унитарном векторном пространстве представления, а скалярное произведение вектора на себя дает инвариант, т. е. полностью симметрично. Таким образом,

$$[(n), 1] = \frac{1}{V^{n_\lambda}} \sum_i [\lambda i][\lambda i]', \quad (7.208)$$

или

$$S_{i i'}^{(\lambda)\lambda\lambda} = \frac{1}{V^{n_\lambda}} \delta_{ij}, \quad (7.209)$$

где n_λ — размерность представления (λ). То, что выражение (7.208) полностью симметрично, также легко проверить непосредственно, применив к нему произвольную перестановку R :

$$\begin{aligned} R \sum_i [\lambda i][\lambda i]' &= \sum_{i, j, k} [\lambda j][\lambda k]' D_{ji}^\lambda(R) D_{ki}^\lambda(R) = \\ &= \sum_{j, k} [\lambda j][\lambda k]' \sum_i D_{ji}^\lambda(R) D_{ki}^\lambda(R) = \\ &= \sum_{j, k} [\lambda j][\lambda k]' \delta_{jk} = \sum_j [\lambda j][\lambda j]'. \end{aligned}$$

Во-вторых, мы знаем, что произведение $(\lambda) \times (\tilde{\lambda})$ содержит антисимметричное представление (1^n) . Определим базисную функцию $[\tilde{\lambda} i]$ так, чтобы она была базисной функцией представления $(\tilde{\lambda})$, таблица которого получается из таблицы $[\lambda i]$ при перестановке столбцов и строк. Например,

$$[\lambda i] = \begin{matrix} & 124 \\ 35 \\ 6 \end{matrix} \quad [\tilde{\lambda} i] = \begin{matrix} & 136 \\ 25 \\ 4 \end{matrix}$$

Как мы указывали в § 7 настоящей главы, можно ограничиться транспозициями рядом стоящих символов. Легко видеть, что при таких перестановках

$$D_{i\tilde{j}}^{\tilde{\lambda}} = D_{ij}^{\lambda} \quad \text{при } i \neq j, \quad (7.210)$$

$$D_{i\tilde{i}}^{\tilde{\lambda}} = -D_{ii}^{\lambda}. \quad (7.210a)$$

Кроме того, заметим, что недиагональные элементы $D_{ij}^{\lambda} (i \neq j)$ отличны от нуля лишь в том случае, если Y -символы для i и j получаются друг из друга транспозицией двух соседних чисел, входящих в Y -символ. Например, транспозиция (23), примененная к функции $[\lambda i]$, выписанной выше (Y -символ $[321211]$), приводит к матричному элементу $\sqrt{3}/2$, соответствующему функции с Y -символом $[321121]$. Определим теперь некоторую диагональную матрицу с диагональными элементами Λ_i^{λ} следующим образом.

$\Lambda_i^{\lambda} = \pm 1$ в зависимости от того, получается ли Y -символ i из Y -символа, у которого все числа, означающие номера частиц, расположены в естественном порядке с помощью четного или нечетного числа транспозиций. Полностью антисимметричная функция имеет вид

$$[(1^n), 1] = \frac{1}{\sqrt{n_{\lambda}}} \sum_i \Lambda_i^{\lambda} [\lambda i] [\tilde{\lambda} \tilde{i}]', \quad (7.211)$$

или, через коэффициенты Клебша — Гордана,

$$S_1^{(1^n) \lambda \tilde{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{n_{\lambda}}} \Lambda_i^{\lambda} \delta_{ik}. \quad (7.211a)$$

Имеется несколько видов симметрии, которые являются характерной особенностью симметрической группы. Их получают с помощью рассуждений, схожих с теми, которые позволили получить (7.211) и (7.211a). Мы знаем, что

$$(\lambda) \times (1^n) = (\tilde{\lambda}), \quad [(\lambda) \neq (\tilde{\lambda})],$$

поэтому между базисными функциями (λ) и $(\tilde{\lambda})$ существует взаимно однозначное соответствие. Из (7.211a) и (7.205a) имеем

$$\frac{S_{\tilde{\lambda} i 1}^{\lambda \tilde{\lambda} (1^n)}}{\sqrt{n_{\lambda}}} = \frac{S_1^{(1^n) \lambda \tilde{\lambda}}}{\sqrt{n_{(1^n)}}} = \frac{1}{\sqrt{n_{\lambda}}} \Lambda_i^{\lambda} \delta_{ik},$$

откуда

$$S_{\tilde{\lambda} i 1}^{\lambda \tilde{\lambda} (1^n)} = \Lambda_i^{\lambda} \delta_{ik} \quad (7.212)$$

и

$$[\tilde{\lambda} \tilde{i}] = \Lambda_i^{\lambda} [\lambda i] [(1^n), 1]. \quad (7.213)$$

Выразим функцию $[\gamma i]$ через функции $(\tilde{\alpha}) \times (\tilde{\beta})$ [вспомните (7.174)]:

$$\begin{aligned} [\gamma i] &= \sum_{j,k} S_{i j k}^{\gamma \tilde{\alpha} \tilde{\beta}} [\tilde{\alpha} j] [\tilde{\beta} k]' = \\ &= \sum_{j,k} S_{i j k}^{\gamma \tilde{\alpha} \tilde{\beta}} \Lambda_k^{\beta} \Lambda_j^{\alpha} [\alpha j] [\beta k]' [(1^n), 1] [(1^n), 1]', \\ [\gamma i] &= \sum_{j,k} S_{i j k}^{\gamma \tilde{\alpha} \tilde{\beta}} \Lambda_j^{\alpha} \Lambda_k^{\beta} [\alpha j] [\beta k]', \end{aligned} \quad (7.214)$$

где мы сначала воспользовались соотношением (7.213), а затем заметили, что $[(1^n), 1] [(1^n), 1]$ — полностью симметричная функция. Коэффициенты Клебша — Гордана можно перенести в левую часть равенства, в результате чего получим

$$[\alpha j] [\beta k]' = \Lambda_j^{\alpha} \Lambda_k^{\beta} \sum_{\gamma, i} S_{i j k}^{\gamma \tilde{\alpha} \tilde{\beta}} [\gamma i]. \quad (7.215)$$

Кроме того, имеем

$$[\alpha j] [\beta k]' = \sum_{\gamma, i} S_{i j k}^{\gamma \alpha \beta} [\gamma i], \quad (7.215a)$$

так что, сравнивая коэффициенты при ортонормированных базисных функциях в двух последних равенствах, находим

$$S_{i j k}^{\gamma \tilde{\alpha} \tilde{\beta}} = \Lambda_j^{\alpha} \Lambda_k^{\beta} S_{i j k}^{\gamma \alpha \beta}. \quad (7.216)$$

Другие формы этого соотношения симметрии мы получим, заменяя представления сопряженными с ними представлениями или же повторяя все рассуждения и беря в качестве исходного соотношение вида

$$[\tilde{\gamma} i] = \sum_{j,k} S_{i j k}^{\tilde{\gamma} \tilde{\alpha} \tilde{\beta}} [\alpha j] [\tilde{\beta} k]'. \quad (7.216b)$$

Мы найдем следующие соотношения симметрии:

$$S_{i j k}^{\tilde{\gamma} \alpha \tilde{\beta}} = \Lambda_i^{\gamma} \Lambda_k^{\beta} S_{i j k}^{\gamma \alpha \beta}, \quad (7.216a)$$

$$S_{i j k}^{\tilde{\gamma} \tilde{\alpha} \beta} = \Lambda_i^{\gamma} \Lambda_j^{\alpha} S_{i j k}^{\gamma \alpha \beta}. \quad (7.216b)$$

Соотношения симметрии (7.205), (7.205a) и (7.205b) и (7.216), (7.216a) и (7.216b) позволяют нам сократить работу, связанную с нахождением коэффициентов Клебша — Гордана. Если расположить разбиения в порядке убывания от (n) до (1^n) , то нам понадобятся лишь коэффициенты для тех произведений $(\lambda) \times (\mu)$, где (μ) расположено после разбиения (λ) , но не дальше, чем самосопряженные разбиения числа n .

Теперь мы хотим убедиться в том, что этот метод заменяет хорошо известные рекуррентные формулы, существующие для группы

вращений. При рассмотрении этой задачи нет необходимости указывать в явном виде ту систему функций $\Psi_s^{(\lambda, \tau, \lambda)}$, которой мы пользуемся. Поэтому вместо того, чтобы прибегать к обозначениям (7.189), мы можем записать преобразование $D^a \times D^b$ в клеточно-диагональном виде

$$\sum_{a, e, c, g} S_{iae}^{\gamma \mu \lambda} D_{ac}^a(R) D_{eg}^b(R) S_{kcg}^{\lambda \alpha \beta} = D_{ik}^{\gamma}(R) \delta_{\gamma \lambda}. \quad (7.217)$$

Для строк различных представлений нам требуются более подробные обозначения, и поэтому мы будем при записи коэффициентов Клебша — Гордана пользоваться двойными индексами, например $S_{ijabef}^{\gamma \alpha \beta}$. Первая буква в каждой паре индексов означает первый символ из числа входящих в γ -символ, а вторая буква означает остальные символы, входящие в γ -символ. В этих обозначениях (7.217) можно записать следующим образом:

$$\sum_{\substack{ab, cd \\ ef, gh}} S_{ijabef}^{\gamma \alpha \beta} D_{ab, cd}^a D_{ef, gh}^b S_{klcdgh}^{\lambda \alpha \beta} = D_{ij, kl}^{\gamma} \delta_{\gamma \lambda}. \quad (7.217a)$$

Сначала мы ограничимся перестановками, входящими в симметрическую группу и действующими на $n - 1$ символ, т. е. перестановками, оставляющими на месте последний символ. Для таких перестановок (7.77) в наших новых обозначениях запишется в виде

$$D_{ab, cd}^a = D_{bd}^a \delta_{ac}, \quad (7.218)$$

где α_a — представление симметрической группы, действующей на $n - 1$ символ, которое получается из α выбрасыванием последнего символа из строки a схемы. (Это не что иное, как правило ветвления.) Подставляя в (7.217a) вместо величин D их выражения вида (7.218), получаем

$$\sum_{\substack{ab, cd \\ ef, gh}} S_{ijabef}^{\gamma \alpha \beta} D_{bd}^a D_{fh}^b \delta_{ac} \delta_{eg} S_{klcdgh}^{\lambda \alpha \beta} = D_{ji}^{\gamma} \delta_{ik} \delta_{\gamma \lambda} \quad (7.219)$$

либо

$$\sum_{\substack{ab, d \\ ef, h}} S_{ijabef}^{\gamma \alpha \beta} D_{bd}^a D_{fh}^b S_{kladeh}^{\lambda \alpha \beta} = D_{ji}^{\gamma} \delta_{ik} \delta_{\gamma \lambda}. \quad (7.219a)$$

Для симметрической группы степени $n - 1$ мы можем написать также уравнение вида (7.217a):

$$\sum_{ab, fh} S_{p' b' f' h}^{\gamma' \alpha' \beta'} D_{bd}^{a'} D_{fh}^{b'} S_{q' d' h}^{\lambda' \alpha' \beta'} = D_{pq}^{\gamma'} \delta_{\gamma' \lambda'}. \quad (7.220)$$

где штрихи служат напоминанием о том, что эти разбиения являются разбиениями числа $n - 1$, а нижние значки служат $(n - 1)$ -местными

Y -символами, соответствующими вторым индексам в (7.217а). Перенеся некоторые члены в (7.220) в правую часть, получим

$$D_{bd}^{\alpha'} D_{fh}^{\beta'} = \sum_{\gamma', p, q} S_{p \ b \ f}^{\gamma' \alpha' \beta'} D_{pq}^{\gamma'} S_{q \ d \ h}^{\gamma' \alpha' \beta'}. \quad (7.220a)$$

Подставим (7.220а) в (7.219а), выбрав $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, и найдем

$$\sum_{\substack{ab, d, e, f, h \\ \gamma', p, q}} S_{i \ j \ a \ b \ e \ f}^{\gamma \ \alpha \ \beta} S_{p \ b \ f}^{\gamma' \alpha \beta_e} D_{pq}^{\gamma'} S_{q \ d \ h}^{\gamma' \alpha \beta_e} S_{k \ l \ a \ d \ e \ h}^{\lambda \ \alpha \ \beta} = D_{jl}^{\gamma} \delta_{ik} \delta_{\gamma \lambda}. \quad (7.221)$$

Сначала перенесем последний множитель вправо:

$$\sum_{\substack{b, f \\ \gamma', p, q}} S_{i \ j \ a \ b \ e \ f}^{\gamma \ \alpha \ \beta} S_{p \ b \ f}^{\gamma' \alpha \beta_e} D_{pq}^{\gamma'} S_{q \ d \ h}^{\gamma' \alpha \beta_e} = \sum_l D_{jl}^{\gamma} S_{i \ l \ a \ d \ e \ h}^{\gamma \ \alpha \ \beta},$$

затем мы можем еще раз перенести вправо последний множитель:

$$\sum_{b, f, p} S_{i \ j \ a \ b \ e \ f}^{\gamma \ \alpha \ \beta} S_{p \ b \ f}^{\gamma' \alpha \beta_e} D_{pq}^{\gamma'} = \sum_{l, d, h} D_{jl}^{\gamma} S_{i \ l \ a \ d \ e \ h}^{\gamma \ \alpha \ \beta} S_{q \ d \ h}^{\gamma' \alpha \beta_e}. \quad (7.222)$$

Теперь мы можем определить матрицу

$$M_{jp} \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ & \gamma' & \\ l & a & e \end{bmatrix} = \sum_{b, f} S_{i \ j \ a \ b \ e \ f}^{\gamma \ \alpha \ \beta} S_{p \ b \ f}^{\gamma' \alpha \beta_e}. \quad (7.223)$$

Равенство (7.222) означает, что

$$\sum_p M_{jp} D_{pq}^{\gamma'} = \sum_l D_{jl}^{\gamma} M_{lq},$$

или

$$M D^{\gamma'} = D_{jl}^{\gamma} M. \quad (7.224)$$

Применяя леммы Шура, получим, что матрица $M = 0$, если $\gamma' \neq \gamma_l$, или кратна единичной матрице, если $\gamma' = \gamma_l$; следовательно,

$$\sum_{b, f} S_{i \ j \ a \ b \ e \ f}^{\gamma \ \alpha \ \beta} S_{p \ b \ f}^{\gamma' \alpha \beta_e} = \delta_{\gamma' \gamma_l} \delta_{jp} K \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ l & a & e \end{bmatrix}, \quad (7.225)$$

или же, перенося второй множитель в правую часть, получим

$$S_{i \ j \ a \ b \ e \ f}^{\gamma \ \alpha \ \beta} = K \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ l & a & e \end{bmatrix} S_{j \ b \ f}^{\gamma' \alpha \beta_e}. \quad (7.226)$$

Уравнение (2.226) означает, что матрица

$$K \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ l & a & e \end{bmatrix}$$

позволяет нам получать коэффициенты Клебша — Гордана для n , зная коэффициенты Клебша — Гордана для $n - 1$. Таким образом, (7.226) заменяет соответствующую рекуррентную формулу для группы вращений. Изучим свойства матрицы K . По аналогии с (7.226) запишем:

$$S_{i'j'abej}^{\gamma' \alpha \beta} = K \begin{bmatrix} \gamma' & \alpha & \beta \\ i' & a & e \end{bmatrix} S_{j'bf}^{\gamma' \alpha \beta}.$$

перемножим это уравнение и (7.226) и просуммируем по ab и ef :

$$\sum_{ab, ef} S_{i'j'abej}^{\gamma' \alpha \beta} S_{ijabef}^{\gamma \alpha \beta} = \sum_{a, e} K \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ i & a & e \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} \gamma' & \alpha & \beta \\ i' & a & e \end{bmatrix} \times \\ \times \sum_{b, f} S_{jbf}^{\gamma \alpha \beta} S_{j'bf}^{\gamma' \alpha \beta}. \quad (7.227)$$

Применяя к обеим частям равенства условие унитарности, получаем

$$\delta_{\gamma\gamma'} \delta_{ii'} = \sum_{a, e} K \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ i & a & e \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} \gamma' & \alpha & \beta \\ i' & a & e \end{bmatrix} \delta(\gamma_i \gamma_{i'}).$$

или же, полагая $j = j'$ и $\gamma_i = \gamma_{i'}$, находим

$$\sum_{a, e} K \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ i & a & e \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} \gamma' & \alpha & \beta \\ i' & a & e \end{bmatrix} = \delta_{\gamma\gamma'} \delta_{ii'}, \quad (7.228)$$

Важно отметить, что равенство (7.228), заключающее в себе первое условие унитарности матрицы K , относится только к тем γ , которые отщепляются от одного и того же представления γ_i , действующего на $n - 1$ символов. Чтобы доказать, что матрица K унитарна, мы должны вывести второе условие, соответствующее равенству (7.188а). Умножим теперь (7.226) на аналогичное выражение

$$S_{ija'b'e'f'}^{\gamma \alpha \beta} = K \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ i & a' & e' \end{bmatrix} S_{jba'f'}^{\gamma \alpha \beta}$$

и просуммируем по γ, i, j :

$$\sum_{\gamma, i, j} K \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ i & a & e \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ i & a' & e' \end{bmatrix} S_{jba'f'}^{\gamma \alpha \beta} S_{jbf}^{\gamma \alpha \beta} = \\ = \sum_{\gamma, i, j} S_{ijabef}^{\gamma \alpha \beta} S_{ija'b'e'f'}^{\gamma \alpha \beta} = \delta_{aa'} \delta_{bb'} \delta_{ee'} \delta_{ff'}, \quad (7.229)$$

где при выполнении последнего преобразования мы воспользовались условием унитарности (7.188а). Умножим теперь обе части равенства на

$$S_{kb'f}^{\gamma' \alpha' \beta'} S_{kb'a'f'}^{\gamma' \alpha' \beta'}$$

и просуммируем по b, f, b', f' :

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma, l, j} K \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ l & a & e \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ l & a' & e' \end{bmatrix} \sum_{b, f} S_{f b}^{\gamma \alpha \beta} S_{k b f e}^{\gamma' \alpha \beta} \sum_{b', f'} S_{k b' f' e'}^{\gamma' \alpha \beta} S_{f b' f' e'}^{\gamma \alpha \beta} = \\ = \sum_{\gamma, l, j} K \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ l & a & e \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ l & a' & e' \end{bmatrix} \delta(\gamma', \gamma_l) \delta_{jk} = \\ = \sum_{\substack{\gamma, l \\ \gamma_l = \gamma'}} K \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ l & a & e \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ l & a' & e' \end{bmatrix} = \delta_{aa'} \delta_{ee'} \sum_{b, f} S_{k b f e}^{\gamma' \alpha \beta} S_{k b f e}^{\gamma' \alpha \beta} = \\ = \delta_{aa'} \delta_{ee'} \sum_{b, f} (S_{k b f e}^{\gamma' \alpha \beta})^2 = \delta_{aa'} \delta_{ee'}. \end{aligned}$$

т. е.

$$\sum_{\substack{\gamma, l \\ \gamma_l = \gamma'}} K \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ l & a & e \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ l & a' & e' \end{bmatrix} = \delta_{aa'} \delta_{ee'}. \quad (7.230)$$

Это — в точности второе условие унитарности матрицы K . Таким образом, у нас имеются условия унитарности (7.228) и (7.230), необходимые для определения матрицы K . До сих пор мы ограничивались перестановками, не меняющими положение последнего символа. Применим (7.190) к транспозиции $(n, n-1)$. (При этом возникает необходимость введения тройных нижних значков: первые два служат первыми двумя символами в Y -символе, а третий означает остальные символы, входящие в Y -символ.) Поскольку транспозиция $(n, n-1)$ воздействует лишь на первые два символа в Y -символе, то появляются лишь матричные элементы вида $D_{abr, cdr}^a$. Кроме того, из (7.111) мы знаем, что матричные элементы для транспозиции $(n, n-1)$ имеют вид

$$D_{abr, cdr}^a = f_{ab}^a \delta_{ac} \delta_{bd} + g_{ab}^a \delta_{ad} \delta_{bc}, \quad (7.231)$$

где f_{ab}^a — величина, обратная аксиальному расстоянию $a-b$ [в (7.111) вместо f мы использовали символ σ], а

$$g_{ab}^a = \sqrt{1 - (f_{ab}^a)^2}.$$

Подставим (7.231) в уравнение

$$\sum_{ab, ef} S_{l j a b r e f s}^{\alpha \beta} D_{abr, cdr}^{\alpha} D_{efs, ghs}^{\beta} = \sum_{k, l} D_{l j t, k l r}^{\gamma} S_{k l t e d r g h s}^{\gamma \alpha \beta}. \quad (7.232)$$

получим

$$\sum_{ab,ef} S_{l jtabrefs}^{\gamma \alpha \beta} [f_{ab}^{\alpha} f_{ef}^{\beta} \delta_{ac} \delta_{bd} \delta_{eg} \delta_{fh} + f_{ab}^{\alpha} g_{ef}^{\beta} \delta_{ac} \delta_{bd} \delta_{eh} \delta_{gf} + \\ + g_{ab}^{\alpha} f_{ef}^{\beta} \delta_{ad} \delta_{bc} \delta_{eg} \delta_{fh} + g_{ab}^{\alpha} g_{ef}^{\beta} \delta_{ad} \delta_{bc} \delta_{eh} \delta_{gf}] = \\ = \sum_{k,l} [f_{lj}^{\gamma} \delta_{ik} \delta_{jl} + g_{lj}^{\gamma} \delta_{il} \delta_{jk}] S_{kltdcrghs}^{\gamma \alpha \beta} \quad (7.232a)$$

или

$$S_{i jtdcrghs}^{\gamma \alpha \beta} f_{cd}^{\alpha} f_{gh}^{\beta} + S_{l jtdcrghs}^{\gamma \alpha \beta} f_{cd}^{\alpha} g_{hg}^{\beta} + \\ + S_{l jtdcrghs}^{\gamma \alpha \beta} g_{dc}^{\alpha} f_{gh}^{\beta} + S_{l jtdcrghs}^{\gamma \alpha \beta} g_{dc}^{\alpha} g_{hg}^{\beta} = \\ = f_{lj}^{\gamma} S_{i jtdcrghs}^{\gamma \alpha \beta} + g_{lj}^{\gamma} S_{i jtdcrghs}^{\gamma \alpha \beta}. \quad (7.232b)$$

Подставляя в это соотношение матрицы K из (7.226), находим

$$K \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ i & c & g \end{bmatrix} S_{jtdrhs}^{\gamma \alpha \beta} [f_{cd}^{\alpha} f_{gh}^{\beta} - f_{lj}^{\gamma}] + K \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ i & c & h \end{bmatrix} S_{jtdrgs}^{\gamma \alpha \beta} f_{cd}^{\alpha} g_{hg}^{\beta} + \\ + K \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ i & d & g \end{bmatrix} S_{jtdcrhs}^{\gamma \alpha \beta} g_{dc}^{\alpha} f_{gh}^{\beta} + K \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ i & d & h \end{bmatrix} S_{jtdrgs}^{\gamma \alpha \beta} g_{dc}^{\alpha} g_{hg}^{\beta} = \\ = K \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ j & c & g \end{bmatrix} S_{itdrhs}^{\gamma \alpha \beta} g_{lj}^{\gamma}. \quad (7.233)$$

Поскольку коэффициенты Клебша—Гордана для $n-1$ частиц известны, равенство (7.233) и условия унитарности, наложенные на K , позволяют найти матрицу K и определить с помощью соотношения (7.226) коэффициенты Клебша—Гордана.

Фактическое вычисление рекуррентной матрицы K чрезвычайно трудоемко, но все же гораздо проще, чем непосредственное вычисление коэффициентов Клебша—Гордана. В процессе отыскания матрицы K уравнение (7.233) будет иметь $(\gamma\alpha\beta)$ решений, если мы придем к рассмотрению случая $(\gamma\alpha\beta) > 1$. Общего критерия для отбора решений не существует.

При малых значениях n коэффициенты Клебша—Гордана можно вычислять либо непосредственно, либо же, что даже еще легче, из матрицы K . Мы не станем выписывать никаких общих формул, полученных для матриц K , а вместо этого приведем один из более простых результатов. Внутреннее произведение $(n-1, 1) \times (n-1, 1)$ содержит перестановку $(n-1, 1)$ с коэффициентом единица. Если обозначить базисную функцию, имеющую символ l во второй строке схемы, через f_l (или F_l), то

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} \left[(n-2) f_n f'_n - \sum_{l=2}^{n-1} f_l f'_l \right]. \quad (7.234)$$

Таблица 31

Таблица характеров для симметрических групп

 $n = 3$

Разбиение	Класс		
	1 (1 ³)	3 (1, 2)	2 (3)
(3)	1	1	1
(2, 1)	2	0	-1
(1 ³)	1	-1	1

 $n = 4$

Разбиение	Класс				
	1 (1 ⁴)	6 (1 ² , 2)	8 (1, 3)	3 (2 ²)	6 (4)
(4)	1	1	1	1	1
(3, 1)	3	1	0	-1	-1
(2 ²)	2	0	-1	2	0
(2, 1 ²)	3	-1	0	-1	1
(1 ⁴)	1	-1	1	1	-1

 $n = 5$

Разбиение	Класс						
	1 (1 ⁵)	10 (1 ⁴ , 2)	20 (1 ² , 3)	15 (1, 2 ²)	30 (1, 4)	20 (2, 3)	24 (5)
(5)	1	1	1	1	1	1	1
(4, 1)	4	2	1	0	0	-1	-1
(3, 2)	5	1	-1	1	-1	1	0
(3, 1 ²)	6	0	0	-2	0	0	1
(2 ² , 1)	5	-1	-1	1	1	-1	0
(2, 1 ³)	4	-2	1	0	0	1	-1
(1 ⁵)	1	-1	1	1	-1	-1	1

Разбиение	Класс										
	1 (1 ⁶)	15 (1 ⁴ , 2)	40 (1 ³ , 3)	45 (1 ² , 2 ²)	90 (1 ² , 4)	120 (1, 2, 3)	144 (1, 5)	15 (2 ³)	90 (2, 4)	40 (3 ²)	120 (6)
(6)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(5, 1)	5	3	2	1	1	0	0	-1	-1	-1	-1
(4, 2)	9	3	0	1	-1	0	-1	3	1	0	0
(4, 1 ²)	10	2	1	-2	0	-1	0	-2	0	1	1
(3 ²)	5	1	-1	1	-1	1	0	-3	-1	2	0
(3, 2, 1)	16	0	-2	0	0	0	1	0	0	-2	0
(2 ³)	5	-1	-1	1	1	-1	0	3	-1	2	0
(3, 1 ³)	10	-2	1	-2	0	1	0	2	0	1	-1
(2 ² , 1 ²)	9	-3	0	1	1	0	-1	-3	1	0	0
(2, 1 ⁴)	5	-3	2	1	-1	0	0	1	-1	-1	1
(1 ⁶)	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1

Разбиение	Класс														
	1 (1 ⁷)	21 (1 ⁵ , 2)	70 (1 ⁴ , 3)	105 (1 ³ , 2 ²)	210 (1 ³ , 4)	420 (1 ² , 2, 3)	504 (1 ² , 5)	105 (1, 2 ³)	630 (1, 2, 4)	280 (1, 3 ²)	840 (1, 6)	210 (2 ² , 3)	504 (2, 5)	420 (3, 4)	720 (7)
(7)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(6, 1)	6	4	3	2	2	1	1	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1
(5, 2)	14	6	2	2	0	0	-1	2	0	-1	-1	2	1	0	0
(5, 1 ²)	15	5	3	-1	1	-1	0	-3	-1	0	0	-1	0	1	1
(4, 3)	14	4	-1	2	-2	1	-1	0	0	2	0	-1	-1	1	0
(4, 2, 1)	35	5	-1	-1	-1	-1	0	1	1	-1	1	-1	0	-1	0
(3 ² , 1)	21	1	-3	1	-1	1	1	-3	-1	0	0	1	1	-1	0
(4, 1 ³)	20	0	2	-4	0	0	0	0	0	2	0	2	0	0	-1
(3, 2 ²)	21	-1	-3	1	1	-1	1	3	-1	0	0	1	-1	1	0
(3, 2, 1 ²)	35	-5	-1	-1	1	1	0	-1	1	-1	-1	-1	0	1	0
(2 ³ , 1)	14	-4	-1	2	2	-1	-1	0	0	2	0	-1	1	-1	0
(3, 1 ⁴)	15	-5	3	-1	-1	1	0	3	-1	0	0	-1	0	-1	1
(2 ² , 1 ³)	14	-6	2	2	0	0	-1	-2	0	-1	1	2	-1	0	0
(2, 1 ⁵)	6	-4	3	2	-2	-1	1	0	0	0	0	-1	1	1	-1
(1 ⁷)	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1

При малых n таблицы коэффициентов Клебша — Гордана можно выписать в явном виде, не затрачивая при этом слишком много труда. Например, полная таблица для произведения $(2, 1) \times (2, 1) = (3) + (2, 1) + (1^3)$ выглядит так:

	$[211] \cdot [211]'$	$[211] \cdot [121]'$	$[121] \cdot [211]'$	$[121] \cdot [121]'$
$[321]$	0	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	0
$[211]$	$1/\sqrt{2}$	0	0	$-1/\sqrt{2}$
$[121]$	0	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	0
$[111]$	$1/\sqrt{2}$	0	0	$1/\sqrt{2}$

(7.235)

Как пример более сложного случая мы приведем таблицу коэффициентов Клебша — Гордана для

$$(3, 1^2) \times (3, 1^2) = (5) + (4, 1) + 2(3, 2) + (3, 1^2) + \\ + 2(2^2, 1) + (2, 1^3) + (1^5)$$

(табл. 30). В качестве двух систем функций для произведения $(3, 2)$ были выбраны частные решения рекуррентных уравнений. Вместо них можно взять любые две независимые линейные комбинации.

ГЛАВА 8

НЕПРЕРЫВНЫЕ ГРУППЫ

§ 1. Краткий обзор результатов, полученных для конечных групп

До сих пор мы ограничивались рассмотрением одних лишь конечных групп, т. е. групп, состоящих из конечного числа элементов. Рассмотренные нами точечные группы симметрии были конечными подгруппами группы зеркальных поворотов в трехмерном пространстве, а найденные нами представления были конечными подгруппами матричной группы в n -мерном пространстве. Группы симметрии многих физических систем состоят не из конечного, а из *бесконечного* числа элементов. Например, кристаллическая решетка остается неизменной при действии бесконечного (∞^3) набора трансляций. Гамильтониан электрона, находящегося в центральном поле, инвариантен относительно всех вращений. Таким образом, задачи физики приводят к необходимости изучения теории представлений групп с бесконечным числом элементов.

Для рассмотрения таких бесконечных групп имеется еще и другая причина. Отыскивая представления точечных групп, мы нашли гомоморфное отображение элементов точечной группы H в группу H' матриц n -го порядка. Но точечная группа H является подгруппой группы G зеркальных поворотов. Поэтому если мы найдем какое-нибудь представление группы G с помощью матриц G' n -го порядка, то мы тем самым получим некоторое представление ее подгруппы H в виде подгруппы H' группы G' .

Наша задача состоит в том, чтобы перенести на бесконечные группы те теоремы о представлениях конечных групп, которые были нами уже выведены. Чтобы облегчить рассмотрение возникающих при этом проблем, мы сначала дадим краткий обзор результатов по конечным группам в таком виде, в котором эти результаты легко будет обобщить и на бесконечные группы.

Конечная группа G порядка g состоит из g элементов $R_1, \dots, R_g$. Мы можем рассматривать эти g элементов группы как совокупность „точек“ — *групповое многообразие*. Кроме того, мы можем перенумеровать точки некоторого множества целыми числами от 1 до g и каждой точке в таком пространстве сопоставить некоторый элемент группы; например, точке, обозначенной числом a , мы поставим в соответствие элемент группы R_a (иначе говоря, перенумеруем элементы группы с помощью параметра, принимающего g значений). Если

в произведении $R_b R_a$ число a фиксировано, а элемент R_b пробегает всю группу G , то произведение R_c также пробегает всю группу. Суть таблицы группового умножения состоит в том, что она указывает при всех значениях a и b значение параметра c , которому соответствует произведение $R_b R_a = R_c$. Можно сказать, что групповая таблица определяет функцию

$$c = \varphi(a, b). \quad (8.1)$$

Параметр, соответствующий произведению элементов группы, есть функция параметров, соответствующих сомножителям.

На групповом многообразии мы можем задавать функции. Так, каждому элементу R_a (или каждому значению a дискретного параметра) мы можем ставить в соответствие некоторое число $f(R_a)$, или же $f(a)$. В этом случае наши функции будут определены в g точках (ранее мы называли такие функции векторами в нашем g -мерном пространстве). Например, при рассмотрении теории представлений величины

$$D_{ij}^{(\mu)}(R_a) = D_{ij}^{(\mu)}(a)$$

при фиксированных μ, i, j были функциями, заданными на групповом многообразии. Точно так же при заданном μ характеры

$$\chi^{(\mu)}(R_a) = \chi^{(\mu)}(a)$$

порождали функции класса $\chi^{(\mu)}(a)$, заданные на групповом многообразии. Характеры обладали особым свойством: определяемая ими функция принимала одно и то же значение на всех элементах, принадлежащих одному и тому же классу. Таким образом, функция $\chi^{(\mu)}(a)$ есть *функция класса*, т. е. такая функция, что

$$\chi^{(\mu)}(\varphi(a, b)) = \chi^{(\mu)}(\varphi(b, a)) \quad (8.2)$$

при всех a и b .

В § 11 гл. 3 мы доказали, что всякое представление конечной группы эквивалентно некоторому унитарному представлению. Кроме того, мы смогли показать, что любое представление конечной группы вполне приводимо и выражается через неприводимые унитарные представления. Неприводимое унитарное представление $D^{(\mu)}$ размерности n_μ задает на групповом многообразии n_μ^2 унитарно-ортогональных функций $D_{ij}^{(\mu)}(a)$ ($i, j = 1, \dots, n_\mu$). Функции, определяемые различными неэквивалентными неприводимыми представлениями, взаимно ортогональны:

$$\sum_a D_{ij}^{*(\mu)}(a) D_{kl}^{(\nu)}(a) = \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{\mu\nu} \frac{g}{n_\mu} = \frac{\delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{\mu\nu}}{n_\mu} \sum_a 1. \quad (3.143)$$

Точно так же для характеров неэквивалентных неприводимых представлений выполнялось соотношение

$$\sum_a \chi^{*(\mu)}(a) \chi^{(\nu)}(a) = \delta_{\mu\nu} \cdot g = \delta_{\mu\nu} \sum_a 1. \quad (3.147)$$

Кроме того, мы показали, что функции $D_{ij}^{(\mu)}(a)$ образуют полную систему, т. е. любую функцию $f(a)$, заданную на групповом многообразии, можно разложить по функциям $D_{ij}^{(\mu)}(a)$. Аналогично, любую функцию класса $g(a)$ можно разложить по полной системе функций класса $\chi^{(\mu)}(a)$.

При выводе соотношений, о которых шла речь выше, мы в двух местах пользовались тем, что рассматривали именно конечную группу. Во-первых, суммирование по группе означало сложение конечного числа величин. Если же мы имеем дело с бесконечной дискретной или непрерывной группой, нам еще следует понять, как заменить конечную сумму бесконечной или же интегралом. Во-вторых, при выводе соотношений ортогональности (3.139) и в § 11 гл. 3 [равенство (3.101)] мы использовали результат, состоящий в том, что если $f(R)$ — функция, определенная на групповом многообразии, то

$$\sum_R f(R) = \sum_R f(SR), \quad (8.3)$$

где S — произвольный элемент группы. Это утверждение, очевидное для конечной группы из ее групповой таблицы, требует дополнительных пояснений для того, чтобы его можно было применять к бесконечным или непрерывным группам, если нам придется доказывать соотношения ортогональности.

§ 2. Бесконечные дискретные группы

Рассмотрим прежде всего бесконечные дискретные группы. Элементы группы R_a перенумерованы с помощью индекса a , принимающего целочисленные значения, например 1, 2, ..., ∞ . Групповое многообразие представляет собой счетное множество „точек“ R_a . Наши элементы мы могли бы перенумеровать либо с помощью всех целых чисел (положительных, отрицательных и нуля), либо с помощью элементов любого счетного множества. (Под счетным множеством мы понимаем множество, которое можно поставить во взаимно однозначное соответствие с множеством положительных целых чисел.) Так, запись

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \dots & & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & & & \end{array} \quad \text{и т. д.}$$

устанавливает соответствие между множеством всех целых чисел и множеством положительных целых чисел. Закон композиции $R_b R_a = R_c$

дает нам функцию, которая позволяет найти параметр элемента группы, служащего произведением двух элементов, по значениям параметров сомножителей, т. е.

$$c = \varphi(a, b). \quad (8.1)$$

Например, совокупность преобразований координат

$$R_n: x' = x + n, \quad (8.4)$$

где n — целое число, образует группу. Преобразованием, обратным преобразованию R_n , служит $(R_n)^{-1} = R_{-n}$, единичный элемент отвечает нулевому значению параметра. Эта группа абелева:

$$c = \varphi(a, b) = \varphi(b, a) = a + b. \quad (8.5)$$

Этой группе преобразований изоморфна группа всех целых чисел с обычным сложением в качестве закона композиции.

Дискретные бесконечные группы обладают одной особенностью: чтобы перенумеровать их элементы, нам всегда достаточно одного дискретного параметра. Рассмотрим, например, группу линейных преобразований вида:

$$R_{mn}: \begin{cases} x' = x + m \\ y' = y + n \end{cases} \quad m, n — \text{целые числа.} \quad (8.6)$$

При такой записи единичный элемент имеет вид R_{00} ; элементом, обратным элементу R_{mn} , будет $(R_{mn})^{-1} = R_{-m, -n}$, а произведением $R_{mn}R_{m'n'}$ будет элемент $R_{m+m', n+n'}$. Однако ясно, что кажущуюся зависимость от двух параметров легко исключить. В рассматриваемом случае точками группового многообразия служат точки двумерной решетки:

$$\begin{array}{ccccc} -2, 1 & -1, 1 & \leftarrow 0, 1 & \leftarrow 1, 1 & 2, 1 \\ & \downarrow & & \uparrow & \uparrow \\ -2, 0 & -1, 0 & 0, 0 & \rightarrow 1, 0 & 2, 0 \\ & \downarrow & & & \uparrow \\ -2, -1 & -1, -1 & \rightarrow 0, -1 & \rightarrow 1, -1 & \rightarrow 2, -1 \end{array}$$

Но те же элементы мы можем перенумеровать с помощью целых положительных чисел следующим образом:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0, 0 & 1, 0 & 1, 1 & 0, 1 & -1, 1 & -1, 0 & -1, -1 & 0, -1 & 1, -1 & 2, -1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array}$$

и т. д.

и закон композиции задать заново уже с помощью только одного нового параметра,

Другим примером служит группа преобразований

$$R_r: x' = rx, \quad (8.7)$$

где r — некоторое положительное рациональное число. Можно установить взаимно однозначное соответствие между рациональными числами и целыми положительными числами. Запишем, например, рациональное число r в виде $r = m/n$, где m и n — взаимно простые целые положительные числа. Затем мы перечислим все r , для которых $m + n = 2$, т. е. $m = 1$, $n = 1$, $r = 1$. Условие $m + n = 3$ даст числа $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$ (сначала мы выбираем те числа, у которых m меньше), затем условие $m + n = 4$ даст числа $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{1}$ (мы опускаем из рассмотрения любую пару чисел m , n , имеющих общий делитель, поскольку соответствующее им r должно было бы встретиться раньше, когда m и n были взаимно простыми) и т. д. Аналогичным образом мы всегда можем перенумеровать произвольную дискретную бесконечную группу с помощью целых положительных чисел.

Другими примерами дискретных бесконечных групп служат группы преобразований

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + n \\ y' &= y + 2n \end{aligned} \right\} n \text{ — целое число,}$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= rx \\ y' &= ry \end{aligned} \right\} r \text{ — рациональное число, отличное от нуля.}$$

Мы должны указать еще одну особенность таких счетных групп. Рассмотрим группу преобразований

$$x' = x + n, \quad n \text{ — целое число.}$$

Если присоединить к этой группе преобразование $x' = -x$ и образовать все произведения элементов расширенной группы, мы получим группу преобразований

$$x' = \pm x + n.$$

Элементы этой новой группы можно по-прежнему нумеровать целыми положительными числами, если в процессе нумерации ставить после каждого преобразования $x' = x + n$ преобразование $x' = -x + n$. Можно сказать, что дискретное множество содержит столько дырок, что всегда есть место, куда можно добавить один, два или даже счетное множество элементов, и тем не менее множество останется счетным. Мы увидим, что в этом отношении непрерывные группы сильно отличаются от бесконечных дискретных групп.

§ 3. Непрерывные группы. Группы Ли

Говорят, что группа *непрерывна*, если на элементы группового многообразия наложено какое-либо обобщенное определение „близости“, или непрерывности. Мы требуем, чтобы „малое изменение“ одного из сомножителей в произведении приводило к малому изменению произведения. В своем наиболее общем виде, в обсуждение которого мы не будем вдаваться, это требование приводит к определению *топологической группы*, т. е. группы, групповое многообразие которой образует *топологическое пространство*. Мы ограничимся более простым случаем, когда элементы группового многообразия можно задавать либо с помощью конечного числа непрерывно изменяющихся параметров, либо с помощью некоторого набора функций. Например, совокупность преобразований

$$x' = ax + b \quad (8.8)$$

образует группу. Два параметра a и b изменяются непрерывно от $-\infty$ до $+\infty$. Мы говорим, что такая группа является *двупараметрической непрерывной группой*. В общем случае элементы *r -параметрической непрерывной группы* задаются с помощью r непрерывно изменяющихся *вещественных* параметров $a_1, \dots, a_r$, так что элементы такой группы можно представить в виде $R(a_1, \dots, a_r) = R(a)$. Группы, элементы которых можно задавать с помощью *конечного* числа непрерывно изменяющихся параметров, называются *конечными непрерывными группами*. Пределы, в которых изменяются параметры, заранее не указываются. Параметры могут изменяться от $-\infty$ до $+\infty$ или же быть ограниченными некоторой конечной областью. Если область изменения параметров конечна, то групповое многообразие называют *компактным*.

Для r -параметрической группы непрерывность выражается через расстояния в пространстве параметров. Два элемента группы $R(a)$ и $R(a')$ расположены „близко“ друг от друга, если расстояние

$$\left[\sum_{i=1}^r (a_i - a'_i)^2 \right]^{1/2}$$

мало. Если элементы группы заданы с помощью набора функций из некоторого функционального пространства, то „близость“ групповых элементов выражается с помощью расстояния в этом функциональном пространстве (см. § 1 и 12 гл. 3).

Условия того, что элементы $R(a)$ образуют непрерывную группу, такие же, как и в случае конечных групп. Во-первых, должна существовать такая совокупность значений параметров a^0 , что

$$R(a^0) R(a) = R(a) R(a^0) = R(a) \quad (8.9)$$

для всех a . Элемент $R(a^0)$ является единичным элементом группы. В общем случае мы будем в своих рассуждениях для удобства полагать $a^0 = 0$. Далее, для любого значения a мы можем найти некоторое значение $\bar{a}$, такое, что

$$R(\bar{a})R(a) = R(a)R(\bar{a}) = R(0). \quad (8.10)$$

В таком случае элемент $R(\bar{a})$ есть элемент, обратный элементу $R(a)$:

$$R(\bar{a}) = [R(a)]^{-1}. \quad (8.11)$$

Произведение двух элементов рассматриваемого множества должно также принадлежать этому множеству. Если значения параметров a и b заданы, мы можем найти совокупность значений параметров c , такую, что

$$R(c) = R(b)R(a). \quad (8.12)$$

Параметры c являются *вещественными функциями вещественных параметров a и b* :

$$c_k = \varphi_k(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_r), \quad k = 1, \dots, r, \quad (8.13)$$

или в общем виде

$$c = \varphi(a; b). \quad (8.13a)$$

До сих пор условия, налагаемые на некоторое множество для того, чтобы оно было группой, были такими же, как и для конечных или счетных групп, но теперь мы дополнительно потребуем, чтобы параметры произведения были аналитическими функциями параметров сомножителей, т. е. функция в равенстве (8.13a) должна иметь производные всех порядков по каждому из своих аргументов. Точно так же мы потребуем, чтобы параметр $\bar{a}$ в формуле (8.10) был аналитической функцией параметра a . В результате мы получим *r -параметрическую группу Ли*.

Если мы говорим, что у нас имеется r -параметрическая группа, мы подразумеваем под этим, что все r параметров *существенны*. Это означает, что нельзя найти такой набор непрерывных параметров $a_1, \dots, a_m$, удовлетворяющий условию $m < r$, который оказался бы достаточным для однозначного задания элементов группы. Если бы задание r -параметрической группы с помощью m элементов было возможным, это означало бы, что некоторый набор численных значений параметров $a_1, \dots, a_m$ однозначно определяет какой-то элемент группы, так что r параметров $a_1, \dots, a_r$, которые задают тот же элемент группы, должны быть связаны с параметрами a соотношениями вида

$$a_1 = \omega_1(a_1, \dots, a_r), \dots, a_m = \omega_m(a_1, \dots, a_r), \quad (8.14)$$

где величины ω означают некоторые функции от a . Для любого заданного набора значений a любое решение уравнений (8.14) позволяет получить совокупность величин a , которые задают тот же элемент группы. Таким образом, если параметры несущественны, мы имеем бесконечно много непрерывно изменяющихся значений параметров $a_1, \dots, a_r$, которые соответствуют одному и тому же элементу группы. В качестве тривиального примера рассмотрим преобразования $x' = x + a + b$. Два параметра a и b не являются существенными, так как мы можем найти один параметр c , который, изменяясь непрерывным образом, задает все преобразования этой группы. Так, при заданном значении c любые значения a и b , удовлетворяющие равенству $a + b = c$, приводят к одному и тому же преобразованию. Следовательно, в действительности эта группа однопараметрическая.

Нас будут интересовать в основном группы преобразований, и мы все наши результаты запишем еще раз специально для этого случая. Здесь *r-параметрическая группа Ли преобразований* — это группа преобразований

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (8.15)$$

или в векторных обозначениях

$$x' = f(x; a), \quad (8.15 \text{ а})$$

где функции f_i являются аналитическими функциями параметров a . Предполагается, что r вещественных параметров a_j существенны. Если эти параметры не являются существенными, то, как было показано ранее, в окрестности любого набора значений $a_1, \dots, a_r$ этих параметров можно найти другие наборы параметров, задающих то же самое преобразование. Иначе говоря, если параметры несущественны, то найдутся такие значения параметров $a_1 + \epsilon_1, \dots, a_r + \epsilon_r$, где ϵ_k означают произвольно малые величины, зависящие от $a_1, \dots, a_r$, что

$$f_i(x; a) = f_i(x, a + \epsilon) \quad (8.16)$$

при всех значениях x . Разлагая по малым функциям ϵ_k , получаем

$$0 = \sum_{k=1}^r \epsilon_k(a) \frac{\partial f_i(x; a)}{\partial a_k} + \text{Члены более высокого порядка по } \epsilon_k \quad (8.17)$$

$$(i = 1, \dots, n).$$

Если функции ϵ_k устремить к нулю, их отношения в пределе будут стремиться к некоторому набору функций от a , поэтому мы можем записать [поскольку члены более высокого порядка в (8.17) обратятся в нуль], что

$$\sum_{k=1}^r \chi_k(a) \frac{\partial f_i(x; a)}{\partial a_k} = 0 \quad \text{при всех } x \text{ и } a \quad (i = 1, \dots, n), \quad (8.18)$$

где $\chi_k(a)$ — совокупность r функций от a . Параметры $a_1, \dots, a_r$ существенны тогда и только тогда, когда нельзя найти r функций $\chi_k(a)$, которые удовлетворяли бы равенству (8.18) при всех значениях i, x и a .

Преобразования должны удовлетворять всем аксиомам группы. Так, если задано некоторое преобразование, отвечающее совокупности параметров a [формула (8.15a)], мы можем найти совокупность параметров $\bar{a}$ такую, что

$$x'' = f(x'; \bar{a}) = f(f(x; a); \bar{a}) = x. \quad (8.19)$$

Это означает, что уравнения (8.15) можно разрешить относительно переменных x_i , выразив последние через x'_i . Условие разрешимости состоит в том, что якобиан должен быть отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (8.20)$$

Если последовательно выполняются два преобразования из множества

$$\begin{aligned} x'_i &= f_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r), \\ x''_i &= f_i(x'_1, \dots, x'_n; b_1, \dots, b_r), \end{aligned} \quad (8.21)$$

то мы требуем, чтобы результирующее преобразование также было элементом множества. Иначе говоря, должен существовать такой набор значений параметров $c_1, \dots, c_r$, что

$$x''_i = f_i(x_1, \dots, x_n; c_1, \dots, c_r). \quad (8.22)$$

Параметры c должны быть функциями параметров a и b :

$$c_k = \varphi_k(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_r). \quad (8.23)$$

Мы предполагаем, что функции φ_k аналитические и функции $\bar{a}$ в равенстве (8.19) аналитические функции от a . Кроме того, должен существовать набор значений параметров a^0 , соответствующий тождественному преобразованию

$$x' = f(x; a^0) = x. \quad (8.24)$$

В общих рассуждениях мы будем полагать a^0 равным нулю,

Аксиомы группы налагают сильные ограничения на функции f_i . Записав подробно все утверждения, содержащиеся в соотношениях (8.21) — (8.23), получим

$$\begin{aligned} x_i'' = f_i(x'; b) &= f_i(f_1(x; a), \dots, f_n(x; a); b) = \\ &= f_i(x; c) = f_i(x; \varphi(a; b)); \end{aligned} \quad (8.25)$$

следовательно, в сокращенных обозначениях запись

$$f(f(x; a); b) = f(x; \varphi(a; b)) \quad (8.26)$$

означает тождество относительно x , a и b .

Соотношение (8.15) можно рассматривать с другой точки зрения, что позволит понять различие между конечными и бесконечными непрерывными группами. Взяв соотношения (8.15), мы можем продифференцировать функции x' по x и получить систему уравнений, из которой можно исключить конечный набор параметров a . После этого мы получим конечную систему дифференциальных уравнений с частными производными относительно x' , которая не будет уже содержать никаких произвольных элементов. Кроме того, общее решение этой системы дифференциальных уравнений с частными производными будет зависеть в точности от r произвольных постоянных, т. е. мы снова возвращаемся к (8.15). Рассмотрим, например, непрерывную группу

$$x'_l = \sum_{j=1}^n a_{lj} x_j + a_l \quad (l = 1, \dots, n).$$

Так как эти преобразования линейны, все вторые производные функций x'_l обращаются в нуль, так что наша система дифференциальных уравнений с частными производными имеет вид

$$\frac{\partial^2 x'_l}{\partial x_j \partial x_k} = 0 \quad (l, j, k = 1, \dots, n)$$

и не содержит произвольных элементов. Если решения конечной системы дифференциальных уравнений с частными производными, не содержащих произвольных элементов, зависят от конечного числа параметров и образуют группу, мы скажем, что эта группа есть конечная непрерывная группа. Случай, когда указанные условия не выполняются и мы получаем *бесконечную непрерывную группу*, состоит в следующем. Наши дифференциальные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial x'_l}{\partial x_k} = 0 \quad (l \neq k = 1, \dots, n).$$

Их решения записываются в виде

$$x'_l = F_l(x_l) \quad (l = 1, \dots, n),$$

Очевидно, что эти решения образуют группу, но функции F_i произвольны, в силу чего мы не можем задавать преобразования с помощью конечного числа параметров.

§ 4. Примеры групп Ли

Прежде чем продолжить наше рассмотрение, остановимся на нескольких примерах непрерывных групп.

Примеры

1. $x' = ax$, $a \neq 0$:

Единичный элемент: $a = 1$.

Элемент, обратный элементу a : $\bar{a} = \frac{1}{a}$.

Произведение элементов: $c = ba$.

Это однопараметрическая абелева группа, c — аналитическая функция от a и b .

2. $x' = a_1x + a_2$, $a_1 \neq 0$:

Единичный элемент: $a_1 = 1$, $a_2 = 0$.

Элемент, обратный элементу a : $\bar{a}_1 = \frac{1}{a_1}$, $\bar{a}_2 = \frac{-a_2}{a_1}$.

Произведение элементов: $c_1 = b_1a_1$, $c_2 = b_2 + b_1a_2$.

Это двупараметрическая неабелева группа.

3. *Линейная группа в случае двух измерений* $GL(2)$:

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + a_2y, \\ y' &= a_3x + a_4y, \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Все четыре параметра существенны. [Докажите это, пользуясь критерием (8.18).] Если x и y рассматривать как компоненты вектора r , то преобразования можно записать в матричных обозначениях:

$$r' = Ar, \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Линейная группа в двух измерениях изоморфна группе матриц 2×2 с матричным умножением в качестве закона композиции.

Единичный элемент: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$.

Обратный элемент: $A = A^{-1}$.

Произведение элементов: $C = BA$.

Линейная группа в случае двух измерений является четырехпараметрической неабелевой группой.

4. *Линейная группа в случае n измерений $GL(n)$:*

$$x' = \sum_j a_{ij} x_j \quad (i=1, \dots, n), \quad |a_{ij}| \neq 0,$$

или в матричных обозначениях

$$r' = Ar, \quad \det A \neq 0.$$

Здесь оказываются применимыми результаты примера 3. Линейная группа в случае n измерений неабелева ($n > 1$). Число существенных параметров равно n^2 . Параметры могут меняться неограниченно, вследствие чего группа $GL(n)$ не является компактной.

5. *Специальная линейная группа (унимодулярная группа) в случае двух измерений $SL(2)$:*

Эту группу можно получить из примера 3, если потребовать, чтобы определитель преобразования был равен единице: $a_1 a_4 - a_2 a_3 = 1$. Это ограничение приводит к одному функциональному соотношению между четырьмя параметрами. Таким образом, мы получаем трехпараметрическую группу. Групповые свойства сохраняются, поскольку преобразование с определителем, равным единице, имеет обратное преобразование с определителем, также равным единице, а произведение двух унимодулярных преобразований есть снова унимодулярное преобразование.

6. *Унимодулярная группа в случае n измерений $SL(n)$:*

Будем рассматривать лишь те из преобразований примера 4, у которых определитель равен единице. Число существенных параметров равно $n^2 - 1$.

7. *Группа одномерных проективных преобразований:*

$$x' = \frac{a_1 x + a_2}{a_3 x + a_4}.$$

Задача. Рассмотрите группу примера 7 и найдите параметры обратного элемента и произведения элементов. Сколько существенных параметров имеет эта группа?

Примеры (продолжение)

8. *Двумерная ортогональная группа $O(2)$:*

Рассмотрим только те преобразования примера 3, которые оставляют инвариантной форму $x^2 + y^2$:

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= (a_1 x + a_2 y)^2 + (a_3 x + a_4 y)^2 = x^2 + y^2, \\ a_1^2 + a_3^2 &= 1, \quad a_2^2 + a_4^2 = 1, \quad a_1 a_2 + a_3 a_4 = 0. \end{aligned}$$

На четыре параметра наложено три функциональных соотношения, вследствие чего мы имеем однопараметрическую группу. Это группа вращений вокруг оси z . Преобразования группы можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{aligned} \right\} 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

где φ — угол поворота вокруг оси z . Группа абелева; угол, соответствующий произведению двух преобразований, равен сумме углов, отвечающих каждому из сомножителей в отдельности.

9. Трехмерная ортогональная группа $O(3)$:

Рассмотрим только такие преобразования трехмерной линейной группы, которые оставляют инвариантной форму $x^2 + y^2 + z^2$. Это условие инвариантности накладывает на девять параметров шесть условий. Таким образом, мы получаем трехпараметрическую группу.

10. n -мерная ортогональная группа $O(n)$:

Из всех преобразований полной линейной группы будем рассматривать лишь те, которые оставляют инвариантной форму $\sum_{i=1}^n x_i^2$. Тем самым мы накладываем $n + (n/2)(n-1)$ условий на n^2 параметров, в результате чего получаем $n(n-1)/2$ существенных параметров.

До сих пор мы рассматривали лишь вещественные преобразования вещественных переменных. Если в примере 4 мы будем считать, что x_i — комплексные переменные, а a_{ij} — комплексные коэффициенты, то число существенных (вещественных) параметров станет равным $2n^2$ (поскольку вещественная и мнимая части коэффициентов a_{ij} являются независимыми параметрами).

11. Двумерная унитарная группа $U(2)$:

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{aligned} \quad x, a \text{ — комплексные числа, } \det A \neq 0.$$

Потребуем, чтобы выражение $|x_1|^2 + |x_2|^2$ было инвариантно относительно преобразований группы. Тогда

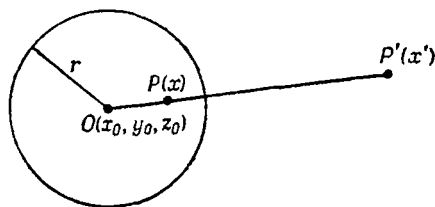
$$\begin{aligned} |x'_1|^2 + |x'_2|^2 &= |a_{11}x_1 + a_{12}x_2|^2 + |a_{21}x_1 + a_{22}x_2|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2, \\ |a_{11}|^2 + |a_{21}|^2 &= 1, \quad |a_{12}|^2 + |a_{22}|^2 = 1, \quad a_{11}a_{12}^* + a_{21}a_{22}^* = 0. \end{aligned}$$

Итак, мы имеем четыре функциональных соотношения (последнее соотношение в действительности представляет собой два соотношения) между восемью параметрами, поэтому группа зависит от четырех существенных вещественных параметров. Этот результат представляет собой просто подробно записанное условие унитарности матрицы $AA^+ = 1$.

12. n -мерная унитарная группа $U(n)$:

$$r' = Ar, \quad AA^\dagger = 1.$$

Условие унитарности налагает $n + 2n(n-1)/2$ условий на $2n^2$ вещественных параметров, в результате чего остается n^2 вещественных существенных параметров. Так как условия унитарности требуют, чтобы $\sum_j |a_{ij}|^2 = 1$, мы видим, что $|a_{ij}|^2 \leq 1$ при всех значениях i и j . Таким образом, параметры группы $U(n)$ изменяются в ограниченных пределах и унитарная группа компактна. Следовательно, все



Фиг. 70.

подгруппы унитарной группы (такие, как вещественная ортогональная группа $O(n)$ и унитарная унимодулярная группа) также компактны.

13. Группа евклидовых движений в трехмерном пространстве:

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j + a_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Здесь мы требуем, чтобы форма $\sum_{i=1}^3 (x_i^{(1)} - x_i^{(2)})^2$ оставалась инвариантной. Группа зависит от шести существенных параметров. Она представляет собой комбинацию групп вращений и трансляций в трехмерном пространстве.

14. Если группу, приведенную в примере 13, объединить с преобразованиями вида $x'_i = ax_i$ и образовать все произведения, мы получим семипараметрическую группу преобразований подобия.

15. Если объединить группу примера 13 со всеми преобразованиями обратными радиусами (см. фиг. 70), мы получим десятипараметрическую группу конформных преобразований: $P(x) \rightarrow P'(x')$, где $OP \cdot OP' = r^2$; центром сферы x_0, y_0, z_0 может быть любая точка пространства, а радиус r сферы принимает все значения, большие нуля.

§ 5. Изоморфизм. Подгруппы. Смешанные непрерывные группы

Пользуясь этими примерами, мы можем рассмотреть некоторые из понятий, обсуждавшихся ранее для конечных групп. Преобразования r -параметрической непрерывной группы являются функциями n переменных x_i и r параметров a_k . Структура такой группы не зависит от числа переменных x_i , а зависит только от числа параметров a_k и функций φ в формуле (8.23). Две группы могут быть изоморфными, несмотря на то что число переменных у них различно, если только число параметров и закон композиции параметров в обеих группах одинаковы. Тривиальным примером служит изоморфизм двух следующих групп:

$$x' = ax \quad \text{и} \quad \begin{cases} x' = ax, \\ y' = ay. \end{cases}$$

Если же мы возьмем двумерную унимодулярную группу (три параметра)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by, \\ y' &= cx + dy, \end{aligned}$$

то можно определить новую переменную $\xi = x/y$, для которой

$$\xi' = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}.$$

Мы получим при этом группу одномерных проективных преобразований.

Рассмотрим теперь понятия сопряженных элементов, классов, подгрупп и инвариантных подгрупп. Группа примера 2:

$$R_a: \quad x' = a_1x + a_2$$

— это двупараметрическая неабелева группа. Какие элементы группы сопряжены с данным элементом R_a ? Чтобы ответить на этот вопрос, мы фиксируем элемент R_a и образуем произведение $R_b R_a R_b^{-1}$, где R_b пробегает всю группу:

$$\begin{aligned} R_b: \quad x' &= b_1x + b_2, \quad R_b^{-1}: \quad x' = \frac{1}{b_1}(x - b_2), \\ x' &= \frac{1}{b_1}(x - b_2), \quad x'' = a_1x' + a_2 = \frac{a_1}{b_1}(x - b_2) + a_2, \\ x''' &= b_1x'' + b_2 = b_1 \left[\frac{a_1}{b_1}(x - b_2) + a_2 \right] + b_2 = \\ &= a_1x + b_2 + a_2b_1 - a_1b_2. \end{aligned}$$

Итак, элементом $R_b R_a R_b^{-1}$ является преобразование

$$x' = a_1 x + b_2 + a_2 b_1 - a_1 b_2.$$

Если фиксировать a_1 и a_2 и изменять b_1 и b_2 , то коэффициент при x останется равным a_1 , а свободный член будет принимать все возможные значения. Таким образом, преобразования $x' = a_1 x + a_2$ с фиксированным коэффициентом a_1 образуют класс. При каждом значении a_1 мы получаем класс сопряженных элементов. В рассматриваемой группе классы образуют множество мощности континуума.

Группа параллельных переносов $x' = x + a_2$ является однопараметрической абелевой подгруппой рассмотренной выше группы. Поскольку коэффициент при x у всех переносов одинаков, подгруппа состоит из одного класса исходной группы и в силу этого инвариантна. С другой стороны, однопараметрическая абелева подгруппа $x' = a_1 x$ не инвариантна.

Унимодулярная группа в случае n измерений оказывается инвариантной подгруппой линейной группы, так как определитель произведения матриц ASA^{-1} совпадает с определителем матрицы S .

Двумерная унимодулярная группа содержит двухпараметрическую подгруппу

$$x' = ax + by, \quad y' = \frac{1}{a} y.$$

Эта подгруппа неабелева и не инвариантна. Унимодулярная группа содержит также однопараметрическую подгруппу

$$x' = ax, \quad y' = \frac{1}{a} y,$$

которая является абелевой, но не инвариантна, и однопараметрическую группу вращений, которая также абелева, но не инвариантна.

|| *Задача.* Докажите приведенные выше утверждения о подгруппах унимодулярной группы.

Мы уже видели, что подгруппы можно получать, требуя инвариантность некоторой функции, зависящей от координат. Например, потребовав инвариантность функции $x^2 + y^2$, мы получили из двумерной линейной группы подгруппу ортогональных преобразований. Тот же результат остается в силе и в n -мерном случае. Если мы образуем из координат двух точек плоскости x, y и ξ, η выражение $x\eta - y\xi$ и потребуем, чтобы это выражение оставалось инвариантным при линейных преобразованиях, мы получим

$$\begin{aligned} x'\eta' - y'\xi' &= (ax + by)(c\xi + d\eta) - (cx + dy)(a\xi + b\eta) = \\ &= (ad - bc)(x\eta - y\xi) = (x\eta - y\xi), \quad \text{если } ad - bc = 1. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Итак, выражение $x\eta - y\xi$ инвариантно при преобразованиях, удовлетворяющих условию $ad - bc = 1$, т. е. преобразованиях унимодулярной группы.

Задача. Рассмотрите четырехмерную линейную группу. Если для любых двух точек x и ξ потребовать инвариантность билинейной формы $x_1\xi_2 - x_2\xi_1 + x_3\xi_4 - x_4\xi_3$, то мы получим некоторую подгруппу линейной группы. Сколько параметров характеризует эту подгруппу? Получите общий результат для $2n$ -мерного случая. [Этой подгруппой является симплектическая группа $Sp(2n)$.]

Часто встречаются группы, в которых, чтобы однозначно задать все элементы, кроме непрерывных параметров, требуется еще и дискретный параметр. Такие группы называются *смешанными* непрерывными группами. Например, группа G

$$x' = \pm x + a$$

(ранее мы рассматривали ее для случая, когда коэффициент a принимал целочисленные значения) является смешанной непрерывной группой с одним непрерывным параметром, если a изменяется непрерывно от $-\infty$ до $+\infty$. Групповое многообразие состоит из двух несвязных частей. Преобразования $x' = x + a$ образуют подгруппу H , любое преобразование которой можно получить непрерывным изменением параметра a от 0 (тождественное преобразование) до его конечного значения. Получить преобразования $x' = -x + a$ из тождественного преобразования путем непрерывного изменения параметра нельзя. Эти преобразования составляют ту часть преобразований группы G , которые не входят в подгруппу H и получаются, если взять произведение подгруппы и инверсии $I: x' = -x$. Итак,

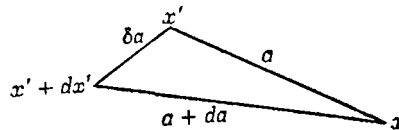
$$G = H + HI;$$

H есть инвариантная подгруппа группы G , порядок факторгруппы равен двум.

Точно так же ортогональная группа состоит из двух частей, а именно из преобразований с определителем $\Delta = 1$ и преобразований с определителем $\Delta = -1$. Совокупность первых преобразований образует подгруппу $O^+(n)$ ортогональной группы (собственные вращения). Эти преобразования можно получить, двигаясь по непрерывной траектории из единичного элемента. Эта подгруппа инвариантна относительно полной группы вращений. Обращаем внимание на то, что в случае непрерывных групп не существует способа объединения различных их частей в единое целое так, чтобы все элементы можно было задавать, пользуясь лишь одним непрерывным параметром. В континууме нет дыр, в которые мы могли бы поместить дополнительные элементы,

§ 6. Однопараметрические группы. Инфинитезимальные преобразования

В равенстве (8.23) мы выразили параметры c произведения преобразований через параметры a и b сомножителей. Из этого соотношения параметры a должны выражаться через b и c , а параметры b должны выражаться через a и c . Для этого требуется, чтобы ни один из якобианов $|\partial\varphi_k/\partial a_l|$ и $|\partial\varphi_k/\partial b_l|$ не обращался в нуль. Точно так же соотношение (8.26) выражает условия, которые следует наложить на функции f_i , задающие преобразования, если последние



Фиг. 71.

должны образовывать группу. В том виде, как оно записано, соотношение (8.26) есть тождество по x , a и b . Но его также можно выразить в виде тождества по x или x' и любых двух из трех параметров a , b , c .

Преобразование $x' = f(x; a)$ переводит все точки пространства из их начального положения x в конечное положение x' . Было бы более естественно рассматривать постепенное перемещение точек пространства по мере того, как мы изменяем непрерывным образом параметры от их начальных значений $a = 0$. Такая точка зрения приводит к понятию инфинитезимальных преобразований. Этот метод мы продемонстрируем сначала для однопараметрической группы с одной переменной x (см. фиг. 71). Предположим, что преобразование с параметром a переводит точку x в положение x' . Соседнее значение параметра $a + da$ будет переводить точки x в точки $x' + dx'$ (так как f — аналитическая функция параметра a). Но мы также можем найти значение параметра δa , очень близкое к нулю (т. е. преобразование, очень близкое к тождественному), которое переводит x' в $x' + dx'$. Итак, мы имеем на выбор два пути из x в $x' + dx'$: либо

$$x' + dx' = f(x; a + da), \quad (8.28)$$

либо

$$x' = f(x; a), \quad x' + dx' = f(x', \delta a). \quad (8.29)$$

Разлагая в ряд последнее равенство, получаем

$$dx' = \left(\frac{\partial f(x'; a)}{\partial a} \right)_{a=0} \cdot \delta a = u(x') \delta a. \quad (8.30)$$

Уравнение (8.23) означает

$$a + da = \varphi(a; \delta a), \quad (8.31)$$

так что

$$da = \left(\frac{\partial \varphi(a; b)}{\partial b} \right)_{b=0} \cdot \delta a, \quad (8.32)$$

или

$$\delta a = \psi(a) da. \quad (8.33)$$

Подставляя (8.33) в (8.30), имеем

$$dx' = u(x') \psi(a) da, \quad (8.34)$$

$$\frac{dx'}{u(x')} = \psi(a) da. \quad (8.34a)$$

Соотношение (8.34a) проинтегрируем от $a=0$ до a . Начальное значение x' есть x . Обозначив через $U(x')$ интеграл от $1/u(x')$, получим

$$U(x') - U(x) = \int_0^a \psi(a) da. \quad (8.35)$$

Если ввести новые переменные $y = U(x)$ и положить

$$\int_0^a \psi(a) da = t,$$

то соотношение (8.35) будет иметь вид:

$$y' - y = t. \quad (8.36)$$

Но, как мы уже видели в случае конечных групп, преобразование координат или введение новых переменных приводит лишь к трансформации всех элементов группы одним и тем же преобразованием. Мы показали таким образом, что однопараметрическая непрерывная группа эквивалентна группе трансляций и должна быть абелевой. Заметим, что к смешанной группе этот результат не применим, поскольку последний шаг в нашем доказательстве делался в предположении, что рассматриваемый элемент группы связан с единичным элементом непрерывной траекторией. (Мы разобрали простейший случай одной переменной, но легко дать доказательство для однопараметрической группы с любым числом переменных.)

Задача. Проведите доказательство для преобразований с двумя переменными.

Мы провели доказательство для однопараметрической группы преобразований. Результаты, относящиеся к структуре группы, не зависят от ее конкретной реализации. Таким образом, мы показали,

что для однопараметрической группы Ли всегда можно ввести *канонический параметр* t такой, что

$$\begin{aligned} R(t_1)R(t_2) &= R(t_1 + t_2), \\ [R(t)]^{-1} &= R(-t). \end{aligned} \quad (8.37)$$

Аналогичным образом разложим теперь наши функции в общем случае:

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (8.38)$$

$$x'_i + dx'_i = f_i(x'_1, \dots, x'_n; \delta a_1, \dots, \delta a_r); \quad (8.38a)$$

$$dx'_i = \sum_{k=1}^r \left[\frac{\partial f_i(x'_1, \dots, x'_n; a_1, \dots, a_r)}{\partial a_k} \right]_{a=0} \delta a_k = \sum_{k=1}^r u_{ik}(x') \delta a_k, \quad (8.39)$$

$$a_i + da_i = \varphi_i(a_1, \dots, a_r; \delta a_1, \dots, \delta a_r), \quad (8.40)$$

$$da_i = \sum_{m=1}^r \left[\frac{\partial \varphi_i(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_r)}{\partial b_m} \right]_{b=0} \delta a_m = \sum_{m=1}^r \Theta_{im}(a) \delta a_m \quad (8.41)$$

при $a = 0$, $\Theta_{im}(0) = \delta_{im}$. Выразив величины δa через da из соотношения (8.41), получим

$$\delta a_k = \sum_{l=1}^r \Psi_{kl}(a) da_l, \quad (8.42)$$

где матрицы Ψ и Θ удовлетворяют условиям

$$\Psi\Theta = 1, \quad \Psi_{kl}(0) = \delta_{kl}. \quad (8.42a)$$

Подставляя полученное выражение для δa_k в (8.39), найдем

$$dx'_i = \sum_{k,l=1}^r u_{ik}(x') \Psi_{kl}(a) da_l, \quad (8.43)$$

или

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_l} = \sum_{k=1}^r u_{ik}(x') \Psi_{kl}(a). \quad (8.44)$$

Переменные x' в (8.44) можно рассматривать как функции параметра a . Координаты x служат начальными значениями координат x' при $a = 0$.

Если изменяется только один из параметров (остальные равны нулю), возникает некоторая однопараметрическая подгруппа и какое-то инфинитезимальное преобразование. Любое инфинитезимальное преобразование представляет собой линейную комбинацию r линейно независимых инфинитезимальных преобразований. Если мы рассмотрим

изменение функции $F(x)$ при инфинитезимальном преобразовании (8.38), то обнаружим:

$$\begin{aligned} dF &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \sum_{l=1}^r u_{il}(x) \delta a_l = \\ &= \sum_{l=1}^r \delta a_l \left(\sum_{i=1}^n u_{il}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) F = \sum_{l=1}^r \delta a_l X_l F. \end{aligned} \quad (8.45)$$

Операторы

$$X_\rho = \sum_{i=1}^n u_{i\rho}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (8.46)$$

называются *инфинитезимальными операторами* группы. Операторы

$$1 + \sum_{\rho} X_{\rho} \delta a_{\rho}$$

мало отличаются от тождественного оператора. Если в качестве функции F выбрать одну из переменных x_i , то

$$x'_i = \left[1 + \sum_{\rho} X_{\rho} \delta a_{\rho} \right] x_i = x_i + \sum_{\rho} u_{i\rho}(x) \delta a_{\rho},$$

так что мы снова возвращаемся к (8.39).

Заметим, что если пренебречь членами более высокого порядка относительно бесконечно малых величин δa , то инфинитезимальные преобразования будут коммутировать друг с другом. В самом деле, результат последовательного выполнения двух инфинитезимальных преобразований просто совпадает с суммой этих двух преобразований (если мы пренебрежем членами более высокого порядка).

В качестве примера рассмотрим группу

$$x' = ax + b.$$

Параметры единичного элемента равны: $a = 1$, $b = 0$. Инфинитезимальные преобразования имеют вид:

$$x' = (1 + \delta a)x + \delta b = x + x \cdot \delta a + \delta b;$$

$$dx = x \cdot \delta a + \delta b.$$

Таким образом, инфинитезимальными операторами группы служат операторы

$$X_1 = x \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{и} \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Заметим, что *коммутатор*

$$[X_1, X_2] = X_1 X_2 - X_2 X_1 = -\frac{\partial}{\partial x} = -X_2$$

не приводит к новому оператору, а является лишь одним из инфинитезимальных преобразований группы.

В качестве другого примера рассмотрим группу

$$\begin{aligned}x' &= ax, \\ y' &= by.\end{aligned}$$

У единичного элемента $a = b = 1$. Инфинитезимальные преобразования имеют вид:

$$\begin{aligned}x' &= (1 + \delta a) x = x + x \cdot \delta a, \\ y' &= (1 + \delta b) y = y + y \cdot \delta b,\end{aligned}$$

вследствие чего инфинитезимальными операторами группы служат операторы

$$X_1 = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = y \frac{\partial}{\partial y}.$$

И в этом случае мы замечаем, что коммутатор $[X_1, X_2]$ не дает ничего нового, так как

$$[X_1, X_2] = 0.$$

В случае однопараметрической группы

$$\begin{aligned}x' &= ax, \\ y' &= \frac{1}{a} y.\end{aligned}$$

Единичный элемент имеет параметр $a = 1$; инфинитезимальное преобразование имеет вид

$$\begin{aligned}x' &= (1 + \delta a) x = x + x \cdot \delta a, \\ y' &= (1 + \delta a)^{-1} y = (1 - \delta a) y = y - y \cdot \delta a,\end{aligned}$$

а инфинитезимальным оператором служит оператор

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Рассмотрим, далее, двумерную линейную группу

$$\begin{aligned}x' &= ax + by, \\ y' &= cx + dy.\end{aligned}$$

Параметры единичного элемента принимают значения $a = d = 1$ и $b = c = 0$. Инфинитезимальные преобразования записываются в виде

$$\begin{aligned}x' &= (1 + \delta a) x + \delta b y = x + x \cdot \delta a + y \cdot \delta b, \\ y' &= \delta c x + (1 + \delta d) y = y + x \cdot \delta c + y \cdot \delta d.\end{aligned}$$

Четырьмя инфинитезимальными операторами группы служат операторы:

$$X_1 = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = y \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Если составить коммутаторы инфинитезимальных операторов, то окажется:

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= -X_2, & [X_1, X_3] &= X_3, & [X_1, X_4] &= 0, \\ [X_2, X_3] &= X_4 - X_1, & [X_2, X_4] &= -X_2, & [X_3, X_4] &= X_3. \end{aligned}$$

Мы видим, что все коммутаторы можно представить в виде линейных комбинаций самих инфинитезимальных операторов.

Для двумерной группы вращений

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\ y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{aligned}$$

мы получаем инфинитезимальные преобразования, разлагая синусы и косинусы по φ вблизи $\varphi = 0$:

$$\begin{aligned} x' &= x - y \cdot \delta\varphi, \\ y' &= x \delta\varphi + y. \end{aligned}$$

Инфинитезимальным оператором является оператор

$$X = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x},$$

т. е. оператор момента количества движения.

Ортогональные преобразования можно охарактеризовать как преобразования, у которых матрица $\tilde{A}$, транспонированная по отношению к матрице A преобразования, совпадает с обратной матрицей

$$A\tilde{A} = 1.$$

Собственные вращения имеют определитель, равный единице, вследствие чего матрица инфинитезимальных вращений имеет вид

$$A = 1 + B,$$

где 1 означает единичную матрицу, а все элементы матрицы B находятся в окрестности нуля. Условие ортогональности требует, чтобы

$$1 = A\tilde{A} = (1 + B)(1 + \tilde{B}) \approx 1 + B + \tilde{B},$$

или

$$B + \tilde{B} = 0.$$

Отсюда матрица B должна быть кососимметрической матрицей с тремя независимыми компонентами:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -\zeta & -\eta \\ -\zeta & 0 & \xi \\ \eta & -\xi & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{где } \xi, \eta, \zeta \text{ — константы.}$$

Инфинитезимальные вращения имеют вид

$$\begin{aligned} dx &= y\zeta - z\eta, \\ dy &= -x\zeta + z\xi, \\ dz &= x\eta - y\xi. \end{aligned}$$

а инфинитезимальными операторами служат

$$X_1 = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$$

— компоненты оператора момента количества движения по трем координатным осям. Коммутаторы этих инфинитезимальных операторов приводят к хорошо известным соотношениям

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2.$$

§ 7. Структурные константы

Теперь мы покажем, что свойство, обнаруженное на этих конкретных примерах, является общим: коммутаторы инфинитезимальных операторов линейно выражаются через инфинитезимальные операторы. В (8.38) мы начали с того, что потребовали, чтобы преобразования f образовывали группу с r существенными параметрами. Это означает, что u_{ik} в (8.39) линейно независимы. Затем, воспользовавшись законом композиции параметров [соотношение (8.41)], мы получили формулы (8.44), которые выпишем здесь еще раз, причем вместо x' будем использовать переменные x :

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_\lambda} = u_{i\kappa}(x) \psi_{\kappa\lambda}(a) \quad \begin{matrix} (i = 1, \dots, n), \\ (\kappa, \lambda = 1, \dots, r). \end{matrix} \quad (8.47)$$

Здесь мы ввели соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. Уравнение (8.47) описывает движение точки x из ее начального положения $x(0)$ (когда $a = 0$). Если же из уравнений (8.47) требуется получить уравнения (8.37), задающие преобразования с произвольными начальными условиями, то должны выполняться следующие соотношения:

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial a_\lambda \partial a_\mu} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial a_\mu \partial a_\lambda}, \quad (8.48)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_\lambda} [u_{ix} \psi_{xi}] - \frac{\partial}{\partial a_\mu} [u_{ix} \psi_{x\lambda}] &= 0, \\ u_{ix} \left[\frac{\partial \psi_{xi}}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial \psi_{x\lambda}}{\partial a_\mu} \right] + \psi_{xi} \frac{\partial u_{ix}}{\partial a_\lambda} - \psi_{x\lambda} \frac{\partial u_{ix}}{\partial a_\mu} &= 0. \end{aligned} \quad (8.48a)$$

Величины u_{ix} представляют собой функции от x , а через переменные x они зависят от a . Поэтому

$$\frac{\partial u_{ix}}{\partial a_\lambda} = \frac{\partial u_{ix}}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial a_\lambda} = \frac{\partial u_{ix}}{\partial x_j} u_{jv} \psi_{v\lambda}, \quad (8.49)$$

где при выполнении последнего преобразования мы воспользовались формулой (8.47). Подставляя (8.49) в (8.48a), имеем

$$u_{ix} \left[\frac{\partial \psi_{xi}}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial \psi_{x\lambda}}{\partial a_\mu} \right] + \left[u_{jv} \frac{\partial u_{ix}}{\partial x_j} - u_{jx} \frac{\partial u_{iv}}{\partial x_j} \right] \psi_{xi} \psi_{v\lambda} = 0. \quad (8.50)$$

Из (8.42a) следует, что $\psi_{xi} \Theta_{i\lambda} = \delta_{x\lambda}$, откуда

$$u_{j\sigma} \frac{\partial u_{ix}}{\partial x_j} - u_{jx} \frac{\partial u_{i\sigma}}{\partial x_j} = \left[\frac{\partial \psi_{xi}}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial \psi_{x\lambda}}{\partial a_\mu} \right] \Theta_{\mu\tau} \Theta_{\lambda\sigma} u_{ix} = c_{\tau\sigma}^x(a) u_{ix}(x), \quad (8.51)$$

где

$$c_{\tau\sigma}^x(a) = \left[\frac{\partial \psi_{xi}}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial \psi_{x\lambda}}{\partial a_\mu} \right] \Theta_{\mu\tau} \Theta_{\lambda\sigma}. \quad (8.52)$$

Если соотношение (8.51) продифференцировать по a_ρ и применить к нему оператор $(\partial x_\lambda / \partial a_\rho)(\partial / \partial x_\lambda)$, который действует только на переменные x , мы получим

$$\frac{\partial c_{\tau\sigma}^x}{\partial a_\rho} u_{ix} = 0. \quad (8.53)$$

Так как функции $u_{ix}(x)$ линейно независимы, мы заключаем, что величины $c_{\tau\sigma}^x$ не зависят от a и являются константами. В этом случае соотношения (8.51) и (8.52) принимают вид

$$u_{j\sigma} \frac{\partial u_{ix}}{\partial x_j} - u_{jx} \frac{\partial u_{i\sigma}}{\partial x_j} = c_{\tau\sigma}^x u_{ix}, \quad (8.51a)$$

$$\frac{\partial \psi_{xi}}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial \psi_{x\lambda}}{\partial a_\mu} = c_{\tau\sigma}^x \psi_{\tau\mu} \psi_{\sigma\lambda}. \quad (8.52a)$$

Эти условия вытекают из нашего требования, чтобы уравнения (8.47) были интегрируемы. Инфинитезимальные операторы, имеющие, по определению, вид

$$X_\rho = \sum_i u_{i\rho} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (8.46)$$

обладают тем свойством, что их коммутаторы

$$[X_\rho, X_\sigma] = X_\rho X_\sigma - X_\sigma X_\rho \quad (8.54)$$

удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} [X_\rho, X_\sigma] &= u_{i\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} u_{j\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} - u_{j\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} u_{i\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} = \\ &= \left[u_{i\rho} \frac{\partial u_{j\sigma}}{\partial x_i} - u_{i\sigma} \frac{\partial u_{j\rho}}{\partial x_i} \right] \frac{\partial}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой (8.51a), получим

$$[X_\rho, X_\sigma] = c_{\rho\sigma}^\kappa u_{j\kappa} \frac{\partial}{\partial x_j} = c_{\rho\sigma}^\kappa X_\kappa. \quad (8.55)$$

Соотношение (8.55) означает, что все коммутаторы линейно выражаются через инфинитезимальные операторы. Коэффициенты $c_{\rho\sigma}^\kappa$ называются *структурными константами* группы Ли. Очевидно, что

$$c_{\rho\sigma}^\kappa = -c_{\sigma\rho}^\kappa. \quad (8.56)$$

Если (8.55) подставить в тождество Якоби

$$[[X_\rho, X_\sigma], X_\tau] + [[X_\sigma, X_\tau], X_\rho] + [[X_\tau, X_\rho], X_\sigma] = 0, \quad (8.57)$$

мы найдем

$$c_{\rho\sigma}^\mu c_{\mu\tau}^\nu + c_{\sigma\tau}^\mu c_{\mu\rho}^\nu + c_{\tau\rho}^\mu c_{\mu\sigma}^\nu = 0. \quad (8.58)$$

Повторим кратко все, что мы сделали. Отправляясь от группы преобразований (8.38), мы получили уравнения (8.47), затем соотношения (8.51a), (8.52a) и, наконец, соотношения для структурных констант (8.56) и (8.58). Ли получил замечательный результат, состоящий в том, что эту процедуру можно выполнять в обратном порядке, т. е. если мы найдем константы, удовлетворяющие условиям (8.56) и (8.58), то сможем найти функции u и ψ , удовлетворяющие соотношениям (8.51a) и (8.52a), а затем сможем найти функции, которые являются интегралами уравнений (8.47) и образуют группу.

§ 8. Алгебры Ли

Воспользовавшись соотношением (8.46), можно записать уравнение (8.47) в следующем виде:

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_\lambda} = \psi_{\lambda i}(a) X_\lambda x_i, \quad \psi_{\lambda i}(0) = \delta_{\lambda i}. \quad (8.47a)$$

Любое преобразование группы можно получить, если изменять параметры a_λ вдоль некоторой прямой

$$a_\lambda = s_\lambda t \quad (\lambda = 1, \dots, r), \quad (8.59)$$

где s_λ — вещественный вектор. При $\tau = 0$ мы получаем тождественное преобразование. Разные значения τ задают различные операторы преобразования $S(\tau)$:

$$x_i(\tau) = S(\tau) x_i(0), \quad S(0) = 1. \quad (8.60)$$

Подставляя выражения для a_λ и x_i в (8.47а), получаем

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \frac{\partial x_i}{\partial a_\lambda} \frac{da_\lambda}{d\tau} = s_\lambda \psi_{\lambda i}(s_\rho \tau) X_\lambda x_i, \quad (8.61)$$

или

$$\frac{dS(\tau)}{d\tau} x_i(0) = s_\lambda \psi_{\lambda i}(s_\rho \tau) X_\lambda S(\tau) x_i(0), \quad (8.61a)$$

откуда следует, что оператор преобразования $S(\tau)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dS(\tau)}{d\tau} = s_\lambda \psi_{\lambda i}(s_\rho \tau) X_\lambda S(\tau). \quad (8.61b)$$

При $\tau = 0$

$$\left. \frac{dS}{d\tau} \right|_{\tau=0} = s_\lambda X_\lambda; \quad (8.62)$$

таким образом, разложение в ряд Тейлора оператора $S(\tau)$ имеет вид

$$S(\tau) = 1 + \tau s_\lambda X_\lambda + \dots, \quad (8.63)$$

т. е.

$$x_i(\tau) = (1 + \tau s_\lambda X_\lambda + \dots) x_i(0). \quad (8.63a)$$

Из уравнения (8.61b) мы видим, что инфинитезимальный оператор $s_\lambda X_\lambda$ однозначно определяет операторы преобразования $S(\tau)$, в то время как уравнение (8.63) показывает, что оператор $S(\tau)$ однозначно определяет инфинитезимальный оператор $s_\lambda X_\lambda$.

Если теперь мы рассмотрим второй вектор t_λ , задающий инфинитезимальный оператор $t_\lambda X_\lambda$, то соответствующие операторы преобразования $T(\tau)$ будут удовлетворять уравнениям, аналогичным уравнениям (8.61) — (8.63). Произведение $S(\tau)T(\tau)$ можно разложить в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} (1 + \tau s_\lambda X_\lambda + \dots)(1 + \tau t_\lambda X_\lambda + \dots) = \\ = 1 + \tau(s_\lambda + t_\lambda) X_\lambda + \dots \end{aligned} \quad (8.64)$$

Отсюда следует, что произведение $S(\tau)T(\tau)$ соответствует инфинитезимальному оператору

$$(s_\lambda + t_\lambda) X_\lambda,$$

т. е. сумме инфинитезимальных операторов, соответствующих $S(\tau)$ и $T(\tau)$. Коммутатор операторов $S(\tau)$ и $T(\tau)$ есть оператор преобразования

$$S^{-1}(\tau) T^{-1}(\tau) S(\tau) T(\tau),$$

который допускает разложение в ряд Тейлора

$$(1 - \tau s_{\kappa} X_{\kappa} + \dots)(1 - \tau t_{\lambda} X_{\lambda} + \dots)(1 + \tau s_{\mu} X_{\mu} + \dots) \times \\ \times (1 + \tau t_{\nu} X_{\nu} + \dots) = 1 + \tau^2 [s_{\kappa} X_{\kappa}, t_{\lambda} X_{\lambda}] + \dots; \quad (8.65)$$

таким образом, инфинитезимальный оператор коммутатора преобразований $S(\tau)$ и $T(\tau)$ является коммутатором инфинитезимальных операторов, соответствующих $S(\tau)$ и $T(\tau)$. [Из разложения (8.65) мы видим, что в дифференциальном уравнении для коммутатора следует использовать переменную τ^2 .] Если операторы $S(\tau)$ и $T(\tau)$ коммутируют, то их коммутатор обращается в тождественный оператор, а для соответствующих инфинитезимальных операторов выполняется соотношение

$$[s_{\kappa} X_{\kappa}, t_{\lambda} X_{\lambda}] = 0.$$

Эти результаты позволяют описывать различные свойства группы Ли с помощью инфинитезимальных операторов. Если группа G абелева, так что все ее элементы коммутируют друг с другом, то

$$[X_{\kappa}, X_{\lambda}] = 0 \quad (\kappa, \lambda = 1, \dots, r),$$

или же, если воспользоваться структурными константами,

$$c_{\kappa\lambda}^{\rho} = 0 \quad (\kappa, \lambda, \rho = 1, \dots, r). \quad (8.66)$$

Если H — p -параметрическая подгруппа группы G , мы можем выбрать p инфинитезимальных операторов, соответствующих элементам подгруппы H . Тогда $r - p$ остальных инфинитезимальных операторов будут отвечать элементам, входящим в $G - H$. Так как H есть группа, то коммутаторы инфинитезимальных операторов $X_1, \dots, X_p$ должны выражаться только через операторы $X_1, \dots, X_p$, так что

$$c_{\kappa\lambda}^{\rho} = 0 \quad (\kappa, \lambda = 1, \dots, p; \quad \rho = p + 1, \dots, r). \quad (8.67)$$

Если подгруппа H инвариантна и S — произвольный элемент, принадлежащий H , то элемент $T^{-1}ST$ также принадлежит H для любого элемента T всей группы G . Но тогда подгруппе H принадлежит и элемент $S^{-1}T^{-1}ST$. Из разложения (8.65) мы видим, что коммутатор $[s_{\kappa} X_{\kappa}, t_{\lambda} X_{\lambda}]$ должен выражаться в виде линейной комбинации инфинитезимальных операторов одной лишь подгруппы H . Таким образом, для инвариантной подгруппы

$$c_{\kappa\lambda}^{\rho} = 0 \quad (\kappa = 1, \dots, p; \quad \rho = p + 1, \dots, r). \quad (8.68)$$

Если группа G является прямым произведением H и $G - H$, то

$$c_{\kappa\lambda}^{\rho} = 0 \quad \text{для } \kappa = 1, \dots, p; \quad \rho = p + 1, \dots, r \\ \text{и для } \kappa = p + 1, \dots, r; \quad \rho = 1, \dots, p. \quad (8.68a)$$

Группа G будет простой (не будет иметь собственных инвариантных подгрупп), если условию (8.68) нельзя удовлетворить ни при каком выборе базиса X_ρ . Точно так же группа G будет полупростой (не будет иметь абелевых инвариантных подгрупп), если равенствам

$$c_{\kappa\lambda}^\rho = 0 \quad (\kappa, \lambda, \rho = 1, \dots, p) \quad (8.68б)$$

и равенствам (8.68) нельзя удовлетворить ни при каком выборе базиса X_ρ .

Структура абстрактной группы Ли полностью содержится в соотношении (8.23), задающем закон композиции вещественных параметров a_i и b_i сомножителей, по которому находят вещественные параметры c_i произведения. При реализации абстрактной группы Ли в виде группы преобразований переменные x_i могли бы быть вещественными или комплексными, в силу этого инфинитезимальные операторы также могли бы быть комплексными. Но любые соотношения, которые описывают структуру группы, должны содержать лишь вещественные коэффициенты. Поэтому и структурные константы $c_{\kappa\lambda}^\rho$ должны быть вещественными числами.

Мы нашли, что для r -параметрической группы преобразований существует r линейно независимых инфинитезимальных операторов X_ρ . Из этих операторов можно составить линейные комбинации и получить r -мерное векторное пространство. Если мы рассматриваем задачи, связанные со структурой группы Ли, нам следует выбирать только линейные комбинации с вещественными коэффициентами. Мы должны рассматривать, таким образом, вещественное векторное пространство величин $\sum_\rho a_\rho X_\rho$, где a_ρ — вещественные числа. Соотношение (8.55) задает в этом пространстве «произведение», так как структурные константы вещественны. Если теперь отвлечься от конкретной реализации группы Ли, то станет ясно, что r -параметрической группе Ли отвечает вещественное r -мерное векторное пространство величин $\sum_\rho a_\rho X_\rho$, замкнутое относительно умножения, определяемого с помощью соотношений (8.55) — (8.57). Это и есть *алгебра Ли* группы Ли.

Вещественная алгебра Ли состоит из величин $A, B, \dots$, из которых можно образовывать линейные комбинации $aA + bB$ с вещественными коэффициентами. Произведение элементов A и B равно $[A, B]$ и содержится в том же вещественном векторном пространстве. Произведение удовлетворяет соотношениям (8.56) — (8.57):

$$[A, B] = -[B, A], \quad (8.56a)$$

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0. \quad (8.37a)$$

Все элементы A можно выразить через систему r базисных векторов X_ρ :

$$A = \sum_{\rho} a_{\rho} X_{\rho}. \quad (8.69)$$

Если мы составим линейные комбинации величин A и B с комплексными коэффициентами и определим произведение $[A + iB, C]$ так, чтобы оно было равно $[A, C] + i[B, C]$, мы получим *комплексное расширение* вещественной алгебры Ли. Комплексное расширение может оказаться удобным в работе, однако утверждения относительно структуры группы Ли следует делать исключительно на основе вещественной алгебры Ли.

Можно также сформулировать и обратную задачу. Дана вещественная алгебра Ли с заданными структурными константами $c_{\rho\sigma}^{\chi}$ [удовлетворяющими условиям (8.59)]; построить группу Ли, которая бы имела данную алгебру своей алгеброй Ли. Если сформулировать ее в терминах преобразований, то эта задача сводится к тому, чтобы найти путем интегрирования конечные преобразования, исходя из наперед заданных соотношений коммутации для инфинитезимальных операторов. Мы сформулируем результат без доказательства. Всякой алгебре Ли соответствует некоторая группа Ли; структурными константами группа Ли определяется лишь локально (т. е. в окрестности единичного элемента).

Терминология, применяемая в теории группы, используется также и в теории алгебр Ли. Так, если выполняется условие (8.66), говорят, что алгебра Ли G абелева. Если выполняется условие (8.67), алгебра H называется подалгеброй алгебры G . Алгебра H называется инвариантной подалгеброй, если выполняется условие (8.68). Если выполняется условие (8.68a), алгебра Ли G будет прямой суммой алгебр H и $G - H$. Точно так же алгебра Ли G простая, если нельзя выполнить условий (8.68), и полупростая, если нельзя удовлетворить условиям (8.68) и (8.68b).

§ 9. Структура алгебр Ли

Вывод всех возможных структур алгебр Ли представляет собой чрезвычайно сложную математическую проблему. Укажем лишь на некоторые стороны этой процедуры.

Проблема состоит в том, чтобы при каждом значении r найти все возможные вещественные решения уравнения (8.58)

$$c_{\rho\sigma}^{\mu} c_{\mu\tau}^{\nu} + c_{\sigma\tau}^{\mu} c_{\mu\rho}^{\nu} + c_{\tau\rho}^{\mu} c_{\mu\sigma}^{\nu} = 0, \quad (8.58)$$

удовлетворяющие условию (8.56)

$$c_{\rho\sigma}^{\chi} = -c_{\sigma\rho}^{\chi}. \quad (8.56)$$

Трудность этой задачи обусловлена тем, что система уравнений (8.58) квадратична относительно неизвестных. Кроме того, многие решения будут эквивалентны друг другу, ибо если мы заменим базис X_ρ базисом

$$X'_\rho = a_{\rho\nu} X_\nu \quad (8.70)$$

(матрица $a_{\rho\nu}$ неособенная), то получим новые структурные константы $c'^{\mu}_{\rho\sigma}$, которые также будут удовлетворять условиям (8.56) и (8.58):

$$\begin{aligned} c'^{\mu}_{\rho\sigma} X'_\mu &= [X'_\rho, X'_\sigma] = [a_{\rho\nu} X_\nu, a_{\sigma\lambda} X_\lambda] = \\ &= a_{\rho\nu} a_{\sigma\lambda} [X_\nu, X_\lambda] = a_{\rho\nu} a_{\sigma\lambda} c^{\mu}_{\nu\lambda} X_\mu = \\ &= c'^{\mu}_{\rho\sigma} a_{\mu\kappa} X_\kappa, \end{aligned}$$

поэтому

$$c'^{\mu}_{\rho\sigma} a_{\mu\kappa} = a_{\rho\nu} a_{\sigma\lambda} c^{\mu}_{\nu\lambda} a_{\mu\kappa}. \quad (8.71)$$

Умножив на матрицу, обратную матрице a , получим

$$c'^{\mu}_{\rho\sigma} = a_{\rho\nu} a_{\sigma\lambda} c^{\mu}_{\nu\lambda} a^{-1}_{\mu\kappa}. \quad (8.71a)$$

Задача. Докажите, что операторы X'_ρ , заданные соотношением (8.70), удовлетворяют условиям (8.56) и (8.58).

При $r=1$ все элементы алгебры Ли кратны одному и тому же базисному вектору X , вследствие чего все коммутаторы обращаются в нуль. Соответствующая группа Ли есть однопараметрическая абелева группа.

При $r=2$ мы имеем два базисных элемента X_1, X_2 и коммутатор

$$[X_1, X_2] = aX_1 + bX_2.$$

Если $a=b=0$, то

$$[X_1, X_2] = 0.$$

В этом случае алгебра абелева и совпадает с прямой суммой алгебр, порожденных элементами X_1 и X_2 . Если же, например, $a \neq 0$, то базисные элементы можно заменить элементами

$$X'_1 = aX_1 + bX_2, \quad X'_2 = \frac{1}{a} X_2,$$

для которых

$$[X'_1, X'_2] = X'_1.$$

Мы видим, что подалгебра, порожаемая элементом X'_1 , инвариантна и абелева, и поэтому содержащая ее алгебра Ли не является полупростой. Итак, при $r=2$ мы не получаем полупростых алгебр Ли. Примером группы Ли преобразований, соответствующей алгебре Ли, у которой

$$[X_1, X_2] = 0,$$

служит группа

$$x' = x + a, \quad y' = y + b.$$

Она является прямым произведением однопараметрических групп и в соответствии с § 6 настоящей главы ее всегда можно представить в виде группы трансляций в двумерном пространстве. Ясно, что для r -мерной алгебры Ли, у которой

$$[X_i, X_j] = 0$$

при всех i и j , группа Ли (локально) изоморфна r -мерной группе трансляций. Группой преобразований, у которой алгебра Ли удовлетворяет соотношению коммутации

$$[X_1, X_2] = X_1,$$

является группа

$$x' = ax + b.$$

В этом случае

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \text{а} \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial x}.$$

Трансляции $x' = x + b$, которые порождаются оператором X_1 , образуют абелеву инвариантную подгруппу.

Задача. Проинтегрируйте уравнения (8.47а) для последнего из рассмотренных случаев и получите снова конечные преобразования группы.

Наш элементарный подход чрезвычайно осложняется уже при $r=3$, потому что уравнение (8.58) приводит к трем квадратичным соотношениям, которым должны удовлетворять структурные константы. Но этим простым методом можно еще пользоваться. В уравнении (8.71а) положим $\sigma = \mu$ и просуммируем по μ :

$$c_{\rho\mu}^{\mu} = a_{\rho\nu} a_{\mu\lambda}^{-1} a_{\mu\lambda} c_{\nu\lambda}^{\mu} = a_{\rho\nu} \delta_{\mu\lambda} c_{\nu\lambda}^{\mu} = a_{\rho\nu} c_{\nu\lambda}^{\lambda}; \quad (8.72)$$

величины $c_{\nu\lambda}^{\lambda}$ преобразуются так же, как вектор при изменении базиса. Матрица $a_{\rho\nu}$ — произвольная неособенная матрица, поэтому мы всегда можем преобразовать вектор $c_{\nu\lambda}^{\lambda}$ так, чтобы одна его компонента была равна единице, а остальные — нулю. Единственным случаем, когда такое преобразование невозможно, является случай,

когда вектор $c_{v\lambda}^\lambda$ равен нулю. Итак, мы всегда можем выбрать базис так, чтобы либо а) $c_{1\lambda}^\lambda = 1$, $c_{v\lambda}^\lambda = 0$, $v \neq 1$, либо б) $c_{v\lambda}^\lambda = 0$ при всех v .

Подставив эти значения констант в (8.71а), мы найдем, что для случая «а» квадратные уравнения сводятся к линейным, причем $c_{23}^1 = c_{31}^1 = c_{21}^1 = 0$. Учитывая эти результаты, мы из уравнений $c_{v\lambda}^\lambda = 0$ при $v = 2$ и 3 получим, что $c_{23}^3 = c_{32}^2 = 0$. Таким образом, X_3 коммутирует с X_1 и X_2 и порождает абелеву инвариантную подгруппу; отсюда следует, что в этом случае группа Ли не является полупростой. Мы получаем две возможные структуры:

$$[X_1, X_2] = [X_2, X_3] = [X_3, X_1] = 0, \quad (8.73)$$

$$[X_1, X_2] = X_1, \quad [X_2, X_3] = [X_3, X_1] = 0. \quad (8.74)$$

Для случая «б» уравнения (8.71а) вырождаются в тождества. Производя остальные вещественные линейные преобразования, найдем, помимо структур, уже полученных нами раньше, структуры только двух независимых между собой типов:

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2, \quad (8.75)$$

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = -X_1, \quad [X_3, X_1] = -X_2. \quad (8.76)$$

Обе алгебры простые.

Задачи. 1. Доведите до конца намеченный выше вывод и покажите, что при $r = 3$ существуют только четыре независимые структуры для вещественной алгебры Ли.

2. Покажите, что вещественная алгебра Ли

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = -X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2 \quad (8.76a)$$

имеет ту же структуру, что и алгебра (8.76).

3. Докажите, что алгебры (8.75) и (8.76) простые.

Группой Ли, имеющей структуру (8.75), является вещественная ортогональная группа $O(3)$ в трехмерном пространстве. Эта группа оставляет инвариантной квадратичную форму $x^2 + y^2 + z^2$. Ее инфинитезимальные операторы имеют вид

$$X_1 = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}. \quad (8.77)$$

Группа вещественных линейных преобразований, оставляющих инвариантной квадратичную форму $x^2 + y^2 - z^2$, имеет структуру (8.76).

Ее инфинитезимальные операторы записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} X_1 &= z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z}, & X_2 &= x \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_3 &= y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \quad (8.78)$$

Эта группа представляет собой двумерную „группу Лоренца“.

Особенно важно подчеркнуть, что мы рассматриваем исключительно вещественные алгебры Ли. Если же мы перейдем к комплексным расширениям, то алгебры, задаваемые соотношениями (8.75) и (8.76), будут иметь одинаковую структуру. Например, если мы заменим оператор X_2 оператором $-iX_2$, а оператор X_3 оператором $-iX_3$, то уравнения (8.76а) превратятся в уравнения (8.75). Аналогично, если в (8.78) заменить z на iz , мы получим инфинитезимальные операторы (8.77). Это подстановка приводит к замене квадратичной формы $x^2 + y^2 - z^2$ на квадратичную форму $x^2 + y^2 + z^2$. Такое введение мнимой переменной в качестве „временной координаты“ является общепринятым при рассмотрении групп Лоренца, однако оно может привести к ошибочным заключениям по поводу структуры группы. Параметры вещественной ортогональной группы $O(3)$ изменяются в ограниченной области, так что групповое многообразие в этом случае компактно, в то время как параметры „группы Лоренца“ (8.78) изменяются неограниченно.

В качестве другого примера различия между вещественной алгеброй Ли и ее комплексным расширением рассмотрим прежде всего группу $O(4)$ вещественных ортогональных преобразований в четырехмерном пространстве. Эта группа вещественных линейных преобразований оставляет инвариантной квадратичную форму $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$. Шесть инфинитезимальных операторов можно выбрать в виде

$$A_1 = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, \quad A_2 = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}, \quad A_3 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}; \quad (8.79)$$

$$B_1 = x \frac{\partial}{\partial t} - t \frac{\partial}{\partial x}, \quad B_2 = y \frac{\partial}{\partial t} - t \frac{\partial}{\partial y}, \quad B_3 = z \frac{\partial}{\partial t} - t \frac{\partial}{\partial z}.$$

Вычислив коммутаторы, получим соотношения

$$[A_1, A_2] = A_3, \quad [A_2, A_3] = A_1, \quad [A_3, A_1] = A_2, \quad (8.80)$$

$$[B_1, B_2] = A_3, \quad [B_2, B_3] = A_1, \quad [B_3, B_1] = A_2, \quad (8.80a)$$

$$[A_1, B_1] = [A_2, B_2] = [A_3, B_3] = 0, \quad (8.80б)$$

$$[A_1, B_2] = B_3, \quad [A_1, B_3] = -B_2, \quad (8.80в)$$

$$[A_2, B_1] = -B_3, \quad [A_2, B_3] = B_1, \quad (8.80г)$$

$$[A_3, B_1] = B_2, \quad [A_3, B_2] = -B_1, \quad (8.80д)$$

которые описывают структуру соответствующей этой группе алгебры Ли. Если с помощью линейного преобразования перейти к базису, состоящему из операторов

$$J_i = \frac{A_i + B_i}{2}, \quad K_i = \frac{A_i - B_i}{2}, \quad (8.81)$$

то соотношения коммутации примут вид

$$[J_1, J_2] = J_3, \quad [J_2, J_3] = J_1, \quad [J_3, J_1] = J_2, \quad (8.82)$$

$$[K_1, K_2] = K_3, \quad [K_2, K_3] = K_1, \quad [K_3, K_1] = K_2, \quad (8.82a)$$

$$[J_i, K_j] = 0. \quad (8.82б)$$

Следовательно, группа $O(4)$ локально изоморфна прямому произведению двух групп, каждая из которых изоморфна группе $O(3)$.

Рассмотрим далее группу Лоренца вещественных преобразований, оставляющих инвариантной квадратичную форму $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$. В качестве инфинитезимальных операторов можно выбрать операторы

$$\begin{aligned} A_1 &= z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, & A_2 &= x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}, & A_3 &= y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}; \\ B_1 &= x \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial x}, & B_2 &= y \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial y}, & B_3 &= z \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \quad (8.83)$$

Структура соответствующей алгебры Ли задается соотношениями

$$[A_1, A_2] = A_3, \quad [A_2, A_3] = A_1, \quad [A_3, A_1] = A_2, \quad (8.84)$$

$$[B_1, B_2] = -A_3, \quad [B_2, B_3] = -A_1, \quad [B_3, B_1] = -A_2, \quad (8.84a)$$

$$[A_1, B_1] = [A_2, B_2] = [A_3, B_3] = 0, \quad (8.84б)$$

$$[A_1, B_2] = B_3, \quad [A_1, B_3] = -B_2, \quad (8.84в)$$

$$[A_2, B_1] = -B_3, \quad [A_2, B_3] = B_1, \quad (8.84г)$$

$$[A_3, B_1] = B_2, \quad [A_3, B_2] = -B_1. \quad (8.84д)$$

Если теперь мы попытаемся воспользоваться подстановкой (8.81), то окажется, что на этот раз алгебра Ли не распадается в прямую сумму. И действительно, в последней главе при рассмотрении группы Лоренца мы дадим прямое доказательство простоты этой группы.

Задача. Рассмотрите группу Лоренца с двумя „пространственными переменными“ и двумя „временными переменными“, т. е. группу вещественных преобразований, оставляющих инвариантной форму $x^2 + y^2 - z^2 - t^2$. Найдите аналоги соотношений (8.79) и (8.80), (8.80а) — (8.80д). Покажите, что ее алгебра Ли представляет собой прямую сумму двух алгебр Ли, каждая из которых имеет структуру (8.76).

Если бы нам разрешалось делать комплексные подстановки, то подстановка $B_i \rightarrow iB_i$ привела бы к тому, что соотношения (8.84), (8.84а)—(8.84д) полностью совпали с соотношениями (8.80), (8.80а)—(8.80д). Для группы Лоренца операторы

$$J_i = \frac{A_i + iB_i}{2}, \quad K_i = \frac{A_i - iB_i}{2} \quad (8.85)$$

удовлетворяли бы соотношениям (8.82), (8.82а) и (8.82б). Ясно, что все три только что рассмотренные вещественные алгебры Ли имели бы одно и то же комплексное расширение, хотя их структуры совершенно различны.

Заметим также, что группа $O(4)$ компактна (см. пример 12 в § 4 настоящей главы), в то время как параметры группы Лоренца меняются неограниченно.

§ 10. Структура компактных полупростых групп Ли и их алгебр

В этом параграфе мы сформулируем без доказательств теоремы, которые позволяют нам найти структуру полупростых групп Ли. Мы уже использовали термин „компактная группа“ при описании групп Ли, параметры которых изменяются в ограниченных пределах. Само групповое многообразие (т. е. совокупность всех элементов группы Ли) называется в этом случае *компактным*. В общем случае множество M компактно, если всякое бесконечное подмножество в M содержит последовательность, которая сходится к некоторому элементу множества M . Например, любая область конечной протяженности в евклидовом пространстве компактна (теорема Больцано — Вейерштрасса). С другой стороны, область евклидова пространства, простирающаяся до бесконечности, не компактна, поскольку бесконечная последовательность точек $p_1, p_2, \dots$, у которой одна или более из координат p_i стремится к бесконечности, сходиться не будет.

Можно доказать, что непрерывная функция, заданная на компактном множестве, ограничена. (Этот факт можно использовать в качестве еще одного определения компактности.) После этого можно построить надлежащее определение интегрирования на множестве. Если параметры группы Ли изменяются неограниченно, легко построить пример непрерывных функций от параметров, которые не будут ограниченными.

Алгебра Ли компактной группы Ли также называется компактной. В предыдущем параграфе мы нашли, что при $r=3$ компактная группа $O(3)$ и некомпактная группа Лоренца (8.78) имеют одинаковые комплексные расширения. Далее мы обнаружили, что комплексные расширения вещественных алгебр Ли групп, оставляющих инвариантными формы $x^2+y^2+z^2+t^2$, $x^2+y^2+z^2-t^2$ и $x^2+y^2-z^2-t^2$, совпадают, но компактна лишь первая из групп. Эти примеры явля-

ются частными случаями общего результата: каждая комплексная полупростая алгебра Ли имеет ровно одну компактную вещественную форму.

Каждому элементу A алгебры Ли мы можем сопоставить некоторое линейное преобразование. Для любого элемента S коммутатор $[A, S]$ оказывается вновь элементом алгебры, в результате чего мы определяем оператор p_A , который, будучи применен к элементу S , порождает вектор

$$p_A S = [A, S]. \quad (8.86)$$

Если мы выберем некоторый базис, в котором $A = a_\mu X_\mu$, $S = s_\mu X_\mu$, то найдем матрицу оператора p_A в этом базисе:

$$\begin{aligned} (p_A S)_\alpha X_\alpha &= c_{\nu\beta}^a a_\nu s_\beta X_\alpha = (p_A)_{\alpha\beta} s_\beta X_\alpha, \\ (p_A)_{\alpha\beta} &= c_{\nu\beta}^a a_\nu. \end{aligned} \quad (8.87)$$

Если теперь мы будем применять оператор p_B , соответствующий элементу B , то получим

$$p_B p_A S = [B, [A, S]]$$

и

$$(p_B p_A)_{\nu\beta} = c_{\mu\alpha}^\gamma c_{\nu\beta}^a b_\mu a_\gamma. \quad (8.88)$$

След преобразования $p_B p_A$ равен

$$\text{tr}(p_B p_A) = c_{\mu\alpha}^\beta c_{\nu\beta}^a b_\mu a_\nu = g_{\mu\nu} b_\mu a_\nu, \quad (8.89)$$

где

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = c_{\mu\alpha}^\beta c_{\nu\beta}^a. \quad (8.90)$$

Равенство (8.89) позволяет нам сопоставить любым двум элементам алгебры некоторую симметричную билинейную форму, которую мы назовем *скалярным произведением* (A, B) элементов A и B :

$$(A, B) = g_{\mu\nu} b_\mu a_\nu. \quad (8.91)$$

Если от одного базиса мы перейдем к другому с помощью преобразования (8.70), то, пользуясь соотношениями (8.71a) и (8.90), найдем

$$g'_{\mu\nu} = a_{\mu\alpha} a_{\nu\beta} g_{\alpha\beta} = a_{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} \tilde{a}_{\beta\nu}, \quad (8.92)$$

так что $g_{\mu\nu}$ преобразуется как симметрический тензор ранга два, а скалярное произведение (8.91) остается инвариантным. Таким образом, в нашем векторном пространстве $g_{\mu\nu}$ играет роль метрической матрицы. Пользуясь (8.58), можно показать, что величины

$$c_{\lambda\mu\nu} = g_{\lambda\rho} c_{\mu\nu}^\rho \quad (8.93)$$

антисимметричны относительно любой перестановки индексов.

Задача. Докажите, что величины $c_{\lambda\mu\nu}$ антисимметричны относительно любой перестановки индексов.

Поскольку $g_{\mu\nu}$ — вещественная симметрическая матрица, ее всегда можно привести к диагональному виду с помощью вещественных преобразований, т. е. путем некоторой замены базиса [(8.70) и (8.92)]. При этом специальном выборе базиса матрица $g_{\mu\nu}$ имеет вид

$$g_{\mu\nu} = e_\mu \delta_{\mu\nu}, \quad (8.93a)$$

где

$$e_\mu = +1 \text{ при } \mu = 1, \dots, k, \quad e_\mu = -1 \text{ при } \mu = k+1, \dots, l, \\ e_\mu = 0 \text{ при } \mu = l+1, \dots, r.$$

Если матрица $g_{\mu\nu}$ неособенная ($\det g \neq 0$), ее канонический вид (8.93) не содержит нулей, и мы имеем k диагональных элементов, равных $+1$, и $r-k$ диагональных элементов, равных -1 . Теорема Картана гласит следующее.

Чтобы алгебра Ли была полупростой, необходимо и достаточно, чтобы $\det g \neq 0$.

Это условие можно сформулировать по-другому. Если $\det g = 0$, то уравнения $g_{\mu\nu} a_\nu = 0$ имеют нетривиальное решение. Для такого вектора A и любого b_μ мы получаем $g_{\mu\nu} a_\nu b_\mu = 0$, откуда следует, что $(A, B) = 0$ при всех B .

Поэтому критерий Картана можно сформулировать следующим образом.

Алгебра Ли полупроста в том и только в том случае, если не существует элемента A этой алгебры, который был бы ортогонален всей алгебре [в смысле скалярного произведения (8.91)].

Если матрица $g_{\mu\nu}$ отрицательно определена, то в ее диагональной форме (8.93) все диагональные элементы будут равны -1 . Можно доказать следующее.

Полупростая алгебра Ли компактна в том и только в том случае, если матрица $g_{\mu\nu}$ отрицательно определена [т. е. $(A, A) < 0$ для каждого элемента A алгебры].

Заметим, наконец, что для компактной полупростой алгебры Ли можно выбрать базис так, чтобы $g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}$. В этом базисе в соответствии с (8.93) структурные константы $c_{\mu\nu}^\rho$ будут антисимметричными относительно любой перестановки индексов.

Фактический анализ структуры компактных полупростых алгебр Ли выходит за рамки этой книги, однако краткий перечень результатов, приведенных здесь, должен помочь читателю проследить за подробным изложением в книгах Понтрягина и Рака.

§ 11. Линейные представления групп Ли

Линейные представления групп Ли определяются так же, как линейные представления конечных групп (см. гл. 3). Каждому элементу R группы мы ставим в соответствие некоторый линейный оператор $D(R)$. Операторы $D(R)$ действуют на векторы ψ в конечномерном евклидовом или гильбертовом пространстве, в котором задано положительно определенное скалярное произведение (ψ_1, ψ_2) . Эти операторы должны удовлетворять обычным требованиям:

$$D(R_1) D(R_2) = D(R_1 R_2), \quad (8.94)$$

$$D(E) = 1. \quad (8.94a)$$

Потребуем теперь, чтобы операторы $D(R)$ были *ограниченными операторами* [т. е. чтобы скалярное произведение $(D(R)\psi, \psi)$ было конечным для всех ψ] и чтобы скалярное произведение $(D(R)\psi, \varphi)$ было непрерывной функцией параметров элемента группы R .

К решению задачи о нахождении представлений группы Ли можно приступить либо непосредственно, либо же вместо этой задачи рассмотреть тесно связанную с ней задачу о нахождении представлений ее алгебры Ли. В последнем случае каждому элементу A алгебры мы ставим в соответствие линейный оператор $D(A)$ в гильбертовом пространстве и требуем, чтобы

$$D(A + B) = D(A) + D(B), \quad (8.95)$$

$$D(\alpha A) = \alpha D(A), \quad (8.95a)$$

$$D([A, B]) = D(A) D(B) - D(B) D(A) = [D(A), D(B)]. \quad (8.95b)$$

Но на самом деле для нас представляет интерес лишь нахождение представлений группы Ли, а представление ее алгебры мы используем как промежуточный этап. Поэтому мы должны изучить представления алгебры Ли и показать, как их можно обобщить, чтобы получить представление группы Ли, удовлетворяющее наложенным выше требованиям.

Для однопараметрической подгруппы Ли мы можем ввести канонический параметр t так, чтобы

$$R(t_1 + t_2) = R(t_1) R(t_2), \quad R(0) = E. \quad (8.37)$$

Оператор представления, соответствующий элементу $R(t)$, мы будем обозначать тем же символом, что и элемент, и уравнение (8.37) рассматривать как операторное уравнение. Если уравнение (8.37) продифференцировать по t_1 , а затем положить $t_1 = 0$, $t_2 = t$, то получим

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dt} \Big|_{t=0} \cdot R(t) = RR(t). \quad (8.96)$$

Оператор

$$R = \left. \frac{dR}{dt} \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(t) - 1}{t} \quad (8.97)$$

в пространстве представления связан с инфинитезимальным оператором группы Ли, порожденным оператором $R(t)$ [см. (8.62)]. Предположим, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(t) - 1}{t} \psi$$

существует для системы векторов ψ , которая всюду плотна в гильбертовом пространстве, так что оператор R (по непрерывности) вполне определен. Тогда уравнение (8.96) имеет смысл, и его можно использовать, чтобы выразить оператор $R(t)$ через R :

$$R(t) = e^{Rt}. \quad (8.98)$$

Если мы хотим продолжить построение представлений алгебры Ли, то должны потребовать, чтобы операторы, соответствующие элементам группы Ли [их можно находить с помощью формулы (8.98)], были ограниченными операторами.

Представление группы Ли унитарно, если операторы $R(t)$ унитарны:

$$(R(t)\psi, R(t)\varphi) = (\psi, \varphi). \quad (8.99)$$

Дифференцируя по t и полагая $t = 0$, находим

$$(R\psi, \varphi) + (\psi, R\varphi) = 0$$

при всех φ и ψ , так что

$$R + R^+ = 0. \quad (8.100)$$

Итак, унитарные операторы, служащие представлениями элементов группы, оказываются связанными с антиэрмитовыми операторами в представлении алгебры Ли. Если ввести обозначение $R = iH$, то

$$H = H^+, \quad R(t) = e^{iHt}. \quad (8.100a)$$

Например, для группы $O(3)$ — трехмерной ортогональной группы — операторы представления ее алгебры Ли должны удовлетворять соотношениям (8.75):

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2. \quad (8.75)$$

Если положить $iX_\mu = J_\mu$, то

$$[J_1, J_2] = iJ_3, \quad [J_2, J_3] = iJ_1, \quad [J_3, J_1] = iJ_2. \quad (8.101)$$

Если операторы J_μ эрмитовы, то представление группы Ли будет унитарным. Как мы увидим дальше, все представления группы $O(3)$ эквивалентны унитарным представлениям, так что в этом случае удобно перейти к эрмитовым операторам J_μ .

§ 12. Инвариантное интегрирование

Чтобы определить характеры и вывести соотношения ортогональности, мы должны получить для непрерывных групп аналог формулы (8.3). При выводе формулы (8.3) существенным было то обстоятельство, что всем элементам R конечной группы мы приписывали равные веса. В силу этого, если мы суммировали какую-нибудь функцию по некоторому подмножеству $\mathfrak{M}$, величина $\sum_{\mathfrak{M}} f(R)$ была, очевидно, равна $\sum_{S\mathfrak{M}} f(S^{-1}R)$, где $S\mathfrak{M}$ означает совокупность элементов, получающихся из подмножества $\mathfrak{M}$ при левом сдвиге с помощью элемента S . Выбрав в качестве подмножества $\mathfrak{M}$ всю группу G , получим из равенства

$$\sum_{\mathfrak{M}} f(R) = \sum_{S\mathfrak{M}} f(S^{-1}R), \quad (8.102)$$

что

$$\sum_G f(R) = \sum_G f(S^{-1}R). \quad (8.3)$$

В случае группы Ли мы должны чем-то заменить утверждение о том, что вес, приписанный элементу A , равен весу, приписанному элементу BA , получающемуся из A при левом сдвиге. Каждому набору элементов, принадлежащих окрестности A , мы хотим поставить в соответствие некоторый *объем (меру)* $d\tau_A$ так, чтобы мера $d\tau_{BA}$ совокупности элементов, которые получаются из первоначальных элементов при левом сдвиге с помощью элемента B , была равна $d\tau_A$:

$$d\tau_{BA} = d\tau_A. \quad (8.103)$$

Как только введена *лево-инвариантная мера*, из нее тотчас же следуют аналоги формул (8.102) и (8.3):

$$\int_{\mathfrak{M}} d\tau_A f(A) = \int_{B\mathfrak{M}} d\tau_{BA} f(B^{-1}A) = \int_{B\mathfrak{M}} d\tau_A f(B^{-1}A), \quad (8.104)$$

$$\int_G d\tau_A f(A) = \int_G d\tau_A f(B^{-1}A). \quad (8.104a)$$

Значения параметров множества $\mathfrak{M}$, принадлежащего окрестности элемента A , близки к значениям параметров элемента A . Если параметры элемента A мы обозначим символом $a(a_1, \dots, a_r)$, то совокупность элементов множества $\mathfrak{M}$ будет в пространстве параметров занимать объем da . Если над этим множеством мы произведем левый сдвиг с помощью элемента B , параметры которого равны b , то параметры множества $B\mathfrak{M}$, возникающего в результате этой операции, будут принадлежать окрестности величин $c_k = \varphi_k(a, b)$, задаваемых соотношением (8.23). Итак, параметры множества $B\mathfrak{M}$

будут занимать в пространстве параметров объем dc , величину которого можно вычислить с помощью соотношения (8.23). Чтобы сделать одинаковой меру элементов группы $\mathfrak{M}$ и $B\mathfrak{M}$, введем функцию плотности $\rho(a)$ такую, что

$$d\tau_{\mathfrak{M}} = \rho(a) da = \rho(c) dc = d\tau_{B\mathfrak{M}}. \quad (8.105)$$

Функцию плотности ρ найти легко. В окрестности единицы можно произвольным образом задать значение $\rho(0)$. Левым сдвигом с помощью элемента B множество, принадлежащее окрестности единицы, переводится в область пространства параметров, расположенную в окрестности значения параметра b . Из (8.23) следует

$$b_k = \varphi_k(0; b), \quad (8.106)$$

$$db_k = \sum_{l=1}^r \left[\frac{\partial \varphi_k(a; b)}{\partial a_l} \right]_{a=0} da_l. \quad (8.107)$$

Поэтому элементарные объемы db и da в пространстве параметров оказываются связанными между собой соотношением

$$db = \begin{vmatrix} \left. \frac{\partial \varphi_1(a; b)}{\partial a_1} \right|_{a=0} & \cdots & \left. \frac{\partial \varphi_r(a; b)}{\partial a_1} \right|_{a=0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial \varphi_1(a; b)}{\partial a_r} \right|_{a=0} & \cdots & \left. \frac{\partial \varphi_r(a; b)}{\partial a_r} \right|_{a=0} \end{vmatrix} da = J(b) da. \quad (8.108)$$

Обозначим

$$\rho(b) = \frac{\rho(0)}{J(b)}, \quad (8.109)$$

тогда

$$\rho(b) db = \rho(0) da. \quad (8.110)$$

Итак, значения функции плотности $\rho(b)$ для всех b получаются левым сдвигом с помощью элемента B . Наше определение непротиворечиво, ибо если мы от элементарного объема, расположенного в окрестности любого значения параметра a , переходим к другому значению параметра c с помощью преобразования с параметром b , т. е.

$$c = \varphi(a; b),$$

то эту операцию мы можем проводить в два этапа: сначала выполнить преобразование, обратное преобразованию с параметром a (что вернет нас в начало координат), а затем — преобразование с параметром c , которое и приведет нас в точку c . Так как наше определение выполняется на каждом этапе, то оно же остается непротиворечивым и для всего процесса в целом,

Приведем несколько простых примеров вычисления функции плотности $\rho(a)$. В группе $x' = x + a$

$$c = \varphi(a; b) = a + b, \quad \left. \frac{\partial \varphi(a; b)}{\partial a} \right|_{a=0} = 1,$$

так что функция плотности является константой. При интегрировании функции $f(a)$ по группе мы должны вычислять интеграл

$$\int da f(a).$$

Рассмотрим далее группу $x' = ax$:

$$c = \varphi(a; b) = ab; \quad \left. \frac{\partial \varphi(a; b)}{\partial a} \right|_{a=1} = b.$$

Функция плотности имеет вид $\rho(b) = 1/b$. Тот же результат получается и для группы

$$\begin{aligned} x' &= ax, \\ y' &= \frac{1}{a} y. \end{aligned}$$

В самом деле, из наших рассуждений видно, что функции плотности для изоморфных групп всегда совпадают.

Еще одним примером служит группа $x' = a_1 x + a_2$, для которой

$$\begin{aligned} c_1 &= \varphi_1(a; b) = b_1 a_1, \quad c_2 = \varphi_2(a; b) = b_2 + b_1 a_2, \\ \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_1} \right|_{\substack{a_1=1 \\ a_2=0}} &= b_1, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_2} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_2} \right|_{\substack{a_1=1 \\ a_2=0}} = b_1, \quad J(b) = b_1^2. \end{aligned}$$

Функция плотности имеет вид $\rho(b) = 1/b_1^2$. При интегрировании требуется вычислить

$$\int \frac{da_1 da_2}{a_1^2}.$$

В случае двумерной группы вращений $c = a + b$ (параметром служит угол поворота), вследствие чего плотность постоянна. Для интегрирования по группе нужно взять интеграл

$$\int d\varphi.$$

Задача Вычислите функцию плотности для двумерной линейной группы.

В нашем определении функции плотности для случая группы $x' = a_1 x + a_2$ имеется одна тонкость. Плотность мы определили так, что если $c = \varphi(a; b)$, то $\rho(c)dc = \rho(a)da$. В основу нашего определения, если рассматривать его с точки зрения групповых операций, были положены левые сдвиги с помощью элемента группы b . Найденная нами плотность имела вид $1/a_1^2$. Предположим теперь, что

вместо нашего первого определения мы задали функцию плотности, пользуясь правыми сдвигами, т. е. полагая $\rho(c)dc = \rho(a)da$, где на этот раз $c = \varphi(b; a)$. Прodelать это легко. Мы получим $\rho(a) = 1/a_1$. Иначе говоря, если функция плотности определена так, что мера инвариантна относительно левых сдвигов, то эта мера не будет инвариантной относительно правых сдвигов. Таким образом, в общем случае мы найдем для группы *лево-инвариантную* и *право-инвариантную меру*, причем эти две меры не совпадают друг с другом.

Для компактных групп эти две меры совпадают; и поэтому мы можем задать на группе *одну* инвариантную меру. Чтобы доказать это, рассмотрим некоторое множество $\mathcal{M}$ в окрестности единицы. Совершим левый сдвиг с помощью элемента B , в результате чего каждый элемент A множества $\mathcal{M}$ перейдет в BA , а множество $\mathcal{M}$ в целом перейдет в множество $B\mathcal{M}$ в окрестности элемента B . Произведем, далее, правый сдвиг с помощью элемента B^{-1} , в результате чего элемент BA перейдет в элемент $A' = BAB^{-1}$, а множество $B\mathcal{M}$ перейдет в множество $B\mathcal{M}B^{-1}$. Множество $B\mathcal{M}B^{-1}$ вновь расположено в окрестности единицы, и параметры элемента A' получаются из параметров элемента A линейным преобразованием $D(B)$. Таким образом, каждому элементу B группы ставится в соответствие линейное преобразование $D(B)$. Из того, что $A' = BAB^{-1}$, мы видим, что матрицы $D(B)$ образуют некоторое представление группы.

Два определения меры будут совпадать, если объемы в пространстве параметров, занимаемые множеством $B\mathcal{M}B^{-1}$ и $\mathcal{M}$, равны. Так будет только в том случае, когда абсолютное значение определителя матрицы $D(B)$ равно единице. Докажем теперь, что если группа компактна, то этот определитель равен единице. Если элемент B имеет конечный порядок, так что $B^m = E$, то

$$[D(B)]^m = D(B^m) = 1$$

и

$$|\det D(B)| = 1.$$

Если же элемент B является элементом бесконечного порядка, то рассмотрим последовательность элементов B^n ($n = 1, 2, \dots$). Если группа компактна, то эта последовательность элементов имеет предел β , принадлежащий групповому многообразию. Функция $\det D(B)$ непрерывна на компактной группе и поэтому ограничена, из чего следует, что и $\det D(\beta)$ ограничен. Кроме того, $\det D(\beta) \neq 0$, так как матрицы представления неособенные. Если

$$|\det D(B)| > 1,$$

последовательность

$$|\det D(B^n)| = |\det D(B)|^n, \quad (8.111)$$

которая должна стремиться к $\det D(\beta)$, будет на самом деле стремиться к бесконечности. Если же

$$|\det D(B)| < 1,$$

то последовательность (8.111) будет стремиться к нулю и не будет сходиться к $|\det D(\beta)|$. Следовательно, для компактной группы

$$|\det D(B)| = 1.$$

§ 13. Неприводимые представления групп Ли и алгебр Ли. Оператор Казимира

Если ограничить наше рассмотрение компактными группами Ли, то инвариантное интегрирование, введенное в предыдущем параграфе, позволит нам перенести на случай компактных групп Ли все теоремы, которые были выведены в гл. 3 для конечных групп. Интеграл от непрерывной функции по компактной группе вполне определен, и для доказательства того, что всякое представление компактной группы эквивалентно некоторому унитарному представлению, мы можем повторить доказательство, данное в § 11 гл. 3. Доказательства соотношений ортогональности и теорем о характерах проводятся так же, как и для конечных групп. Наконец, можно доказать, что всякое представление компактной группы разлагается в сумму неприводимых представлений, каждое из которых имеет конечную размерность, и что регулярное представление содержит все неприводимые представления.

Для некомпактных групп возникают различного рода трудности. Например, группа трансляций $x' = x + a$ обладает представлением

$$a \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & e^a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8.112)$$

которое, очевидно, является приводимым, но не разлагается в сумму представлений. Те же трудности будут возникать и в том случае, когда группа Ли содержит инвариантную абелеву подгруппу. Для полупростой группы Ли можно доказать, что всякое ее представление конечной размерности вполне приводимо.

В процессе нахождения неприводимых представлений полупростой алгебры Ли чрезвычайно полезной оказывается теорема Казимира. Для таких алгебр метрическая матрица $g_{\mu\nu}$ [см. (8.90)] невырождена и имеет обратную $g^{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad (8.113)$$

которая, кроме того, симметрична. Если обозначить символами X_μ операторы, соответствующие базисным элементам алгебры, то оператором Казимира, по определению, будет оператор

$$C = g^{\rho\sigma} X_\rho X_\sigma. \quad (8.114)$$

Если составить коммутатор оператора C с произвольным оператором представления, то получим

$$\begin{aligned} [C, X_\tau] &= g^{\rho\sigma} [X_\rho X_\sigma, X_\tau] = g^{\rho\sigma} X_\rho [X_\sigma, X_\tau] + g^{\rho\sigma} [X_\rho, X_\tau] X_\sigma = \\ &= g^{\rho\sigma} c_{\sigma\tau}^\lambda X_\rho X_\lambda + g^{\rho\sigma} c_{\rho\tau}^\lambda X_\lambda X_\sigma = g^{\rho\sigma} c_{\sigma\tau}^\lambda X_\rho X_\lambda + g^{\sigma\rho} c_{\sigma\tau}^\lambda X_\lambda X_\rho = \\ &= g^{\rho\sigma} c_{\sigma\tau}^\lambda [X_\rho X_\lambda + X_\lambda X_\rho]. \end{aligned}$$

Из (8.93) имеем

$$c_{\sigma\tau}^\lambda = g^{\lambda\nu} c_{\nu\sigma\tau}, \quad (8.115)$$

так что

$$[C, X_\tau] = g^{\rho\sigma} g^{\lambda\nu} c_{\nu\sigma\tau} [X_\rho X_\lambda + X_\lambda X_\rho].$$

Так как $c_{\nu\sigma\tau} = -c_{\sigma\nu\tau}$, то множитель перед скобками антисимметричен относительно любой перестановки индексов ρ и λ . Скобки симметричны по ρ и λ , так что произведение должно обращаться в нуль:

$$[C, X_\tau] = 0, \quad (8.116)$$

т. е. оператор C коммутирует со всеми операторами представления.

Если теперь мы рассмотрим какое-нибудь неприводимое представление, то оператор C будет коммутировать со всеми операторами представления и, по лемме Шура, будет кратен единичному оператору. Таким образом, для данного неприводимого представления оператор Казимира C характеризуется некоторым вполне определенным числом, которым можно пользоваться, чтобы задавать это неприводимое представление.

Для компактных групп в специально подобранном базисе $g^{\rho\sigma} = -\delta^{\rho\sigma}$, и оператор Казимира запишется в виде

$$C = \sum_{\rho} X_{\rho}^2. \quad (8.117)$$

Для группы вращений $O(3)$, если в качестве инфинитезимальных операторов выбрать операторы J_μ , определяемые соотношением (8.101), оператором Казимира будет оператор

$$C = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2, \quad (8.118)$$

т. е. квадрат „полного момента количества движения“. Он коммутирует с операторами J_1, J_2, J_3 , а его значение характеризует неприводимое представление.

В общем случае, чтобы охарактеризовать полностью неприводимое представление, требуется больше операторов. Например, для группы $O(4)$ [см. (8.82)] два оператора

$$F = \sum J_\mu^2, \quad G = \sum K_\mu^2 \quad (8.119)$$

коммутируют со всеми операторами. Через операторы A_μ и B_μ эти операторы выражаются следующим образом:

$$F = \sum A_\mu^2 + \sum B_\mu^2, \quad G = \sum A_\mu B_\mu. \quad (8.120)$$

Задачи. 1. Постройте оператор Казимира для группы, заданной уравнениями (8.76).

2. Найдите аналоги операторов F и G в соотношениях (8.120) для группы Лоренца, определенной соотношением (8.83), и для группы, оставляющей инвариантной форму $x^2 + y^2 - z^2 - t^2$.

Число операторов, необходимых для задания полной системы, равно *рангу* алгебры, который определяется следующим образом. Для произвольного элемента A находим все независимые решения уравнения

$$[A, X] = 0. \quad (8.121)$$

Это уравнение всегда имеет по крайней мере одно решение: $X = A$. После этого мы варьируем элемент A , чтобы свести до минимума число независимых решений уравнения (8.121). Это минимальное число l называется рангом алгебры, и для задания неприводимого представления требуется l операторов типа оператора Казимира.

§ 14. Многозначные представления. Универсальная накрывающая группа

При определении представлений непрерывной группы мы требовали, чтобы матричные элементы представления были непрерывными функциями на групповом многообразии. Среди непрерывных функций, заданных на группе G , могут быть и многозначные функции. При этом возникает возможность появления многозначных представлений. Представление группы G называется m -значным, если каждому элементу группы соответствует m различных операторов $D_1(R), \dots, D_m(R)$, причем для того, чтобы представление было непрерывным, необходимо рассматривать все эти операторы одновременно.

Разумеется, каждому элементу конечной или дискретной группы мы также могли бы поставить в соответствие несколько операторов, однако отсутствие каких бы то ни было требований непрерывности позволило бы нам разбить элементы группы на отдельные множества, в которых на каждый элемент группы приходится ровно один оператор.

Возьмем непрерывную группу и рассмотрим на ней непрерывную функцию $f(R)$. (В частности, такая функция $f(R)$ может быть матричным элементом какого-нибудь представления.) Будем теперь двигаться из некоторой точки R по некоторой кривой в групповом многообразии: каждому значению вещественной переменной τ мы сопоставим некоторую точку $g(\tau)$ группового многообразия, причем

$g(\tau)$ — непрерывная функция от τ . При $\tau=0$ $g(0)=R$, поэтому наша кривая начинается в точке R . Будем рассматривать замкнутые кривые, т. е. такие кривые, у которых $g(1)=R$. Нас будут интересовать значения, которые принимает функция $f[g(\tau)]$ вдоль замкнутой кривой. Может представиться случай, когда при изменении параметра τ от 0 до 1 непрерывно изменяющаяся функция f не возвращается к исходному значению. Проведем все возможные замкнутые кривые $g(\tau)$. Если, возвращаясь к элементу R , мы найдем m различных значений функции f , мы скажем, что функция f *m-значна*.

Ясно, что всегда можно выбрать функцию f так, чтобы она была однозначной, так как можно выбрать ее в виде $f(R)=1$ для всех R . Но нас интересует именно максимально возможная многозначность непрерывных функций на группе. Это число является свойством группового многообразия или (для групп Ли) пространства параметров. Если замкнутую кривую $g(\tau)$ можно непрерывной деформацией стянуть в точку R , то заданная на ней функция f должна после обхода кривой возвращаться к исходному значению. Если это происходит при любом выборе замкнутой кривой на группе, то групповое многообразие односвязно, а всякая непрерывная функция на такой группе должна быть однозначной.

Замкнутую кривую $g(\tau)$ можно непрерывным преобразованием стянуть в точку R , если существует последовательность кривых $g(\tau, \lambda)$, где g — непрерывная функция переменных τ и λ , такая, что

$$g(\tau, 0) = g(\tau) \quad \text{и} \quad g(\tau, 1) = R.$$

Точно так же две кривые $g_1(\tau)$ и $g_2(\tau)$ можно непрерывно деформировать друг в друга, если

$$g_1(\tau) = g(\tau, 0) \quad \text{и} \quad g_2(\tau) = g(\tau, 1).$$

Если имеется m замкнутых кривых, которые нельзя деформировать друг в друга, то многообразие *m-связно*, и могут существовать *m-значные* непрерывные функции.

При более подробном рассмотрении отдельных непрерывных групп нам придется рассматривать и вопрос об их связности. Пока же мы приведем несколько простых примеров, чтобы проиллюстрировать только что данные определения. Двумерная группа вращений параметризуется с помощью угла поворота φ , поэтому ее групповое многообразие состоит из точек, лежащих на окружности, т. е. является сферой в двумерном пространстве. Функция

$$f(\varphi) = e^{il\varphi},$$

где l — вещественное число, является непрерывной функцией, определенной на этой группе. Если число l целое, функция f однозначна; если l — рациональное число и равно s/t , где s и t — взаимно простые числа, функция f будет t -значна; если же l — иррациональное

число, функция f бесконечнозначна. Пространство, состоящее из точек окружности, бесконечносвязно. Такие кривые, как

$$\varphi = g(\tau) = \tau(1 - \tau),$$

замкнуты и их можно стянуть в точку. Кривая

$$\varphi = g(\tau) = 2\pi\tau$$

представляет собой однократную замкнутую петлю, и ее уже нельзя стянуть в точку непрерывной деформацией. Последовательность замкнутых кривых

$$\varphi = g_n(\tau) = 2\pi n\tau$$

представляет собой последовательность замкнутых кривых, состоящих из n петель, которые нельзя деформировать друг в друга.

В качестве другого примера мы покажем, что n -мерное евклидово пространство односвязно. Любую замкнутую кривую, проходящую через начало координат, можно записать в виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau)$, где $\mathbf{r}$ — радиус, идущий из начала координат в точку кривой, и $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(1) = 0$. Семейство кривых

$$\mathbf{r}(\tau, \lambda) = (1 - \lambda)\mathbf{r}(\tau)$$

состоит из замкнутых кривых, деформируемых непрерывно от $\mathbf{r}(\tau)$ при $\lambda = 0$ до точки $\mathbf{r} = 0$ при $\lambda = 1$. Заметим также, что выбрасывание отдельных точек из пространства не изменяет связности (если размерность пространства больше единицы).

Если между точками двух пространств можно установить взаимно однозначное соответствие, эти пространства обладают одинаковой связностью. Если точки R' выражаются через точки R с помощью функции $R' = h(R)$, то кривая $R = g(\tau)$ определяет собой соответствующую кривую $R' = h[g(\tau)]$.

Задача. Покажите, что при $n > 2$ n -мерная сфера $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ односвязна. [Указание. Воспользуйтесь стереографической проекцией для установления взаимно однозначного соответствия этой сферы с $(n - 1)$ -мерным евклидовым пространством.]

Если групповое многообразие m -связно, можно ожидать, что некоторые из неприводимых представлений будут m -значными. Соотношения ортогональности и свойства характеров были получены при неявном предположении о том, что мы имели дело с однозначными представлениями, и перестают быть верными, если некоторые из них многозначны. С другой стороны, этими многозначными представлениями нельзя просто пренебречь, поскольку они играют важную роль во многих физических задачах. Эта трудность преодолевается

за счет рассмотрения *универсальной накрывающей группы*. Можно показать, что для любой многосвязной группы G найдется односвязная группа $\tilde{G}$ (универсальная накрывающая группа группы G) такая, что $\tilde{G}$ можно гомоморфно отобразить на G . Группа $\tilde{G}$ содержит *дискретную* инвариантную подгруппу N такую, что G изоморфна $\tilde{G}/N$.

Например, если группа G — двумерная группа вращений, то $\tilde{G}$ — группа вещественных чисел x , в которой законом композиции служит обычное сложение. Все числа x сдвигают на величину, кратную 2π , чтобы привести их к интервалу $0 — 2\pi$. Гомоморфизм задается отображением

$$x \rightarrow \varphi = x - 2\pi \left[\frac{x}{2\pi} \right], \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

где $[x/2\pi]$ — наибольшее целое число, не превосходящее $x/2\pi$. Функции $e^{i\varphi}$ на $\tilde{G}$ однозначны.

Всякое неприводимое представление группы G (однозначное или многозначное) служит однозначным представлением группы $\tilde{G}$. Чтобы найти все неприводимые представления группы G , исследуем группу $\tilde{G}$. Для односвязной группы $\tilde{G}$ все представления однозначны, и поэтому соотношения ортогональности и полноты выполняются.

ГЛАВА 9

АКСИАЛЬНАЯ И СФЕРИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЯ

Два вида симметрии — аксиальная и сферическая — принадлежат к числу наиболее важных видов симметрии, встречающихся в физических задачах. Для рассмотрения таких задач мы должны найти представления двумерной и трехмерной вещественной ортогональной группы.

§ 1. Группа вращений в двумерном пространстве

Рассмотрим группу вращений вокруг некоторой фиксированной оси (оси z), т. е. двумерную группу чистых вращений C_∞ . Припишем каждому преобразованию некоторое значение одного непрерывного параметра φ — угла поворота, измеряемого, например, от оси x :

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi.\end{aligned}\tag{9.1}$$

Как было показано в гл. 8, эта группа абелева, элемент объема в этом случае равен $d\varphi$, а инфинитезимальный оператор записывается в виде

$$J_z = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Так как группа абелева, все ее неприводимые представления одномерны, и поэтому матрицы представлений и характеры совпадают. Отсюда следует, что для любых двух углов φ_1 и φ_2 характеры должны удовлетворять соотношению

$$\chi(\varphi_1 + \varphi_2) = \chi(\varphi_1) \chi(\varphi_2).\tag{9.2}$$

Если потребовать, чтобы представление было непрерывным, то решение этого функционального уравнения должно иметь вид

$$\chi^{(m)}(\varphi) = e^{im\varphi}.\tag{9.3}$$

Если же, кроме того, мы хотим, чтобы представление было однозначным, должно иметь место равенство $\chi(2\pi) = \chi(0)$, откуда вытекает, что $m = 0, 1, 2$ и т. д. [Если мы допускаем 2-, 3-, ..., -значные представления, то мы могли бы получить также и решения

$\chi(\varphi) = e^{im\varphi/2}$, $e^{im\varphi/3}$ и т. д. Для двумерной группы вращений все эти представления допустимы. Однако если исходить из некоторой трехмерной физической задачи и от нее перейти к подгруппе вращений в двумерном пространстве, мы найдем лишь однозначные и двузначные представления.] Эти же результаты получаются и с помощью обычного квантовомеханического метода, использующего инфинитезимальный оператор $\partial/\partial\varphi$. Так как представление одномерно, мы должны иметь

$$\frac{\partial\chi}{\partial\varphi} = \lambda\chi,$$

откуда и следует (9.3).

Соотношение ортогональности принимает вид

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \chi^{*(m)}(\varphi) \chi^{(m')}(\varphi) = 2\pi \delta_{mm'}. \quad (9.4)$$

Обращаясь к теории рядов Фурье, мы видим, что характеры однозначных представлений образуют полную систему; других неэквивалентных неприводимых представлений, которые были бы однозначны, не существует. Базисной функцией для представления $D^{(m)}$ служит функция

$$\psi^{(m)} = e^{-im\varphi}.$$

Всякую однозначную (периодическую) функцию можно разложить в ряд по этим базисным функциям. Заметим, что характеры представлений $D^{(m)}$ и $D^{(-m)}$ комплексно сопряженные. Поэтому мы должны объединить их в одно двумерное представление (см. стр. 146).

Если мы рассмотрим какую-нибудь линейную молекулу в том приближении, в котором ядра составляющих ее атомов считаются расположенными неподвижно на оси молекулы, то электроны будут двигаться в аксиально симметричном поле этих ядер. Электронные состояния такой молекулы классифицируют по неприводимым представлениям группы аксиальной симметрии. Состояния с квантовым числом $\Lambda = |m| = 0$ называются Σ -состояниями; состояния с $\Lambda = 1$ называются Π -состояниями; состояния с $\Lambda = 2$ — Δ -состояниями и т. д. Поле, образуемое ядрами, не только аксиально симметрично, но также и инвариантно относительно отражения (σ_v) в любой плоскости, проходящей через ось молекулы. Таким образом, группой симметрии, представляющей интерес с физической точки зрения, является группа $C_{\infty v}$. Эту группу можно получить из группы C_{∞} , присоединив к последней отражение σ_v в плоскости xz . (Обратим внимание на то, что эта процедура совпадает с процедурой, использованной нами в гл. 4.) Отражение меняет знак угла φ , так что

$$\sigma_v e^{i\Lambda\varphi} = e^{-i\Lambda\varphi}, \quad \sigma_v e^{-i\Lambda\varphi} = e^{i\Lambda\varphi}. \quad (9.5)$$

Таким образом, при $\Lambda \neq 0$ представления $D^{(\Lambda)}$ и $D^{(-\Lambda)}$ объединяются в одно двумерное неприводимое представление. Группа $\mathcal{C}_{\infty v}$ уже не будет абелевой. Повороты на углы φ и $-\varphi$ образуют класс. При $\Lambda \neq 0$ матрицы Λ -представления (если воспользоваться базисными функциями $e^{\pm i\Lambda\varphi}$) имеют вид

$$C(\varphi): \begin{bmatrix} e^{i\Lambda\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\Lambda\varphi} \end{bmatrix}, \quad \sigma_v: \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9.6)$$

Для других отражений матрицы получаются из матриц (9.6) трансформированием с помощью соответствующего вращения. Поскольку все вертикальные плоскости отражения эквивалентны (их можно совместить, повернув на подходящий угол), все отражения принадлежат одному и тому же классу и имеют один и тот же характер. Кроме того, из (9.6) мы видим, что

$$\chi^{(\Lambda)}(\varphi) = 2 \cos \Lambda\varphi.$$

При $\Lambda = 0$ отражение не меняет вида базисной функции, но, поскольку преобразование $(\sigma_v)^2$ — тождественное, отражение σ_v может привести лишь к умножению базисной функции на ± 1 . Итак, одномерное Σ -представление группы $\mathcal{C}_{\infty v}$ приводит к возникновению двух одномерных представлений группы $\mathcal{C}_{\infty v}$, а именно Σ^+ и Σ^- , которые инвариантны относительно вращения и четны и нечетны соответственно относительно отражения. Характеры представлений даны в табл. 32.

Таблица 32

$\mathcal{C}_{\infty v}$	E	$C(\varphi)$	σ_v
$A_1, \Sigma^+ : z; x^2 + y^2; z^2$	1	1	1
$A_2, \Sigma^- : R_z$	1	1	-1
$E_1, \Pi : (x, y); (xz, yz); (R_x, R_y)$	2	$2 \cos \varphi$	0
$E_2, \Delta : (x^2 - y^2, xy)$	2	$2 \cos 2\varphi$	0
$\vdots$			$\vdots$
$\vdots$			$\vdots$

Если линейная молекула симметрична относительно своего центра масс (например, в том случае, когда мы имеем двухатомную молекулу, у которой оба атома одинаковые), то потенциал, действующий на электроны, также будет инвариантным относительно отражения в плоскости, которая проходит через центр масс и перпендикулярна оси молекулы (σ_h). В этом случае мы получаем группу $D_{\infty h}$. Поскольку первоначальная группа содержит поворот на 180° вокруг

вертикальной оси, присоединение к ней отражения в горизонтальной плоскости приводит к инверсии. Мы можем записать, что

$$D_{\infty h} = C_{\infty v} \times C_i \quad \text{или} \quad D_{\infty h} = C_{\infty v} + I \cdot C_{\infty v}.$$

После этого таблица характеров для группы $D_{\infty h}$ (табл. 33) легко получается из табл. 32. В этой таблице состояния, четные относительно инверсии, обозначены символом g ; состояния, нечетные относительно инверсии, обозначены символом u . Элементы $IC(\varphi)$ представляют собой зеркальные повороты $S(\varphi)$; элементы $I\sigma_v$ — повороты на 180° вокруг горизонтальных осей.

Таблица 33

$D_{\infty h}$	E	$C(\varphi)$	σ_v	I	$IC(\varphi)$	$I\sigma_v$
Σ_g^+ : $x^2 + y^2; z^2$	1	1	1	1	1	1
Σ_u^+ : z	1	1	1	-1	-1	-1
Σ_g^- : R_z	1	1	-1	1	1	-1
Σ_u^- : zR_z	1	1	-1	-1	-1	1
Π_g : $(R_x, R_y); (xz, yz)$	2	$2 \cos \varphi$	0	2	$2 \cos \varphi$	0
Π_u : (x, y)	2	$2 \cos \varphi$	0	-2	$-2 \cos \varphi$	0
Δ_g : $(x^2 - y^2; xy)$	2	$2 \cos 2\varphi$	0	2	$2 \cos 2\varphi$	0
Δ_u :	2	$2 \cos 2\varphi$	0	-2	$-2 \cos 2\varphi$	0
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.

В табл. 32 и 33 показано распределение компонент электрического дипольного и квадрупольного моментов по различным неприводимым представлениям. Чтобы указать, к каким неприводимым представлениям относятся те или иные компоненты аксиального вектора, рассмотрим в качестве прототипа аксиального вектора векторное произведение. Его z -компонента R_z имеет вид $xu' - x'u$, или $\sin(\varphi' - \varphi)$. Из второй записи этой компоненты мы видим, что компонента R_z инвариантна относительно поворотов вокруг оси z и меняет знак при отражении в вертикальной плоскости. Из первой формы записи R_z мы видим, что эта компонента инвариантна относительно инверсии. Компоненты R_y и R_x векторного произведения по осям y и x имеют вид $xz' - zx'$ и $yz' - zy'$. Они содержат базисные функции $e^{\pm i\varphi}$ и поэтому связаны друг с другом либо поворотом вокруг оси z , либо отражением в вертикальной оси. Так как обе компоненты содержат произведения двух координат, они инвариантны относительно инверсии. Таблица характеров составлена на основании именно таких рассуждений.

Теперь с помощью метода, применявшегося в гл. 4, можно получить правила отбора для различных типов переходов.

Задача. Найдите правила отбора для электрического и магнитного дипольного и электрического квадрупольного переходов для групп симметрии $C_{\infty v}$ и $D_{\infty h}$.

§ 2. Трехмерная группа вращений

Как мы увидели в предыдущей главе, трехмерная группа $O(3)$ вещественных ортогональных преобразований является трехпараметрической группой. Это — группа всех преобразований с вещественными коэффициентами, оставляющих инвариантной форму $x^2 + y^2 + z^2$. Матрица A ортогонального преобразования должна удовлетворять условию

$$A\tilde{A} = 1, \quad (9.7)$$

где $\tilde{A}$ — матрица, транспонированная по отношению к матрице A ($\tilde{A}_{ij} = A_{ji}$). Заметим, что вещественная ортогональная матрица унитарна. Так как определитель транспонированной матрицы $\det \tilde{A}$ совпадает с определителем матрицы A , из (9.7) получаем, что

$$(\det A)^2 = 1, \quad \text{или} \quad \det A = \pm 1. \quad (9.8)$$

Мы ограничимся рассмотрением *собственных* ортогональных преобразований $O^+(3)$, для которых $\det A = +1$. (Они соответствуют чистым вращениям.) Рассмотрим задачу о нахождении собственных значений и собственных векторов матрицы A . Мы попытаемся найти вектор u и константу λ такие, чтобы действие преобразования A на вектор u ограничивалось умножением этого вектора на λ , но не изменяло его направления:

$$Au = \lambda u, \quad \sum_{j=1}^3 A_{ij}u_j = \lambda u_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (9.9)$$

Условие того, что эти уравнения имеют нетривиальное решение, дает нам уравнение для собственных значений

$$\det(A - \lambda 1) = 0.$$

Это уравнение, если записать его подробно, будет кубическим (относительно λ) с вещественными коэффициентами (так как матрица A вещественная). В силу этого его корни (собственные значения) либо вещественны, либо два из них комплексно сопряжены. Кроме того, поскольку матрица A унитарна,

$$(u, u) = (Au, Au) = (\lambda u, \lambda u) = |\lambda|^2 (u, u),$$

откуда $|\lambda| = 1$. Итак, для любого вещественного ортогонального преобразования с определителем $+1$ собственными значениями служат числа

$$\lambda^{(1)} = 1, \quad \lambda^{(2)} = e^{i\varphi}, \quad \lambda^{(3)} = e^{-i\varphi} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi). \quad (9.10)$$

Соответствующие им собственные векторы обозначим $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$. Первый из них удовлетворяет уравнению

$$Au^{(1)} = u^{(1)},$$

которое означает, что вектор совершенно не изменяется при действии преобразования A и поэтому соответствует направлению оси вращения. Собственные векторы взаимно ортогональны и нормированы:

$$(u^{(i)}, u^{(j)}) = \delta_{ij}. \quad (9.11)$$

Так как $Au^{(1)} = u^{(1)}$, то

$$\tilde{A}u^{(1)} = \tilde{A}Au^{(1)} = u^{(1)},$$

откуда

$$(A - \tilde{A})u^{(1)} = 0,$$

или

$$\begin{aligned} (A_{12} - A_{21})u_2^{(1)} + (A_{13} - A_{31})u_3^{(1)} &= 0, \\ (A_{21} - A_{12})u_1^{(1)} + (A_{23} - A_{32})u_3^{(1)} &= 0, \\ (A_{31} - A_{13})u_1^{(1)} + (A_{32} - A_{23})u_2^{(1)} &= 0. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Решая эти уравнения, получаем

$$u_1^{(1)} : u_2^{(1)} : u_3^{(1)} = (A_{23} - A_{32}) : (A_{31} - A_{13}) : (A_{12} - A_{21}). \quad (9.13)$$

Задача. Докажите, что у собственного ортогонального преобразования (вещественного или комплексного) в нечетномерном пространстве всегда имеется ось (т. е. некоторая прямая, все точки которой остаются неподвижными).

Равенство (9.13) позволяет по коэффициентам преобразования найти направление оси вращения. Собственный вектор $u^{(1)}$ всегда можно выбрать так, чтобы он был вещественным. Угол φ также можно найти, зная матрицу A , так как сумма собственных значений равна следу матрицы A :

$$A_{11} + A_{22} + A_{33} = 1 + e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 1 + 2 \cos \varphi. \quad (9.14)$$

В силу того, что

$$Au^{(2)} = e^{i\varphi} u^{(2)}, \quad A^*u^{(2)*} = Au^{(2)*} = e^{-i\varphi} u^{(2)*},$$

имеем

$$u^{(3)} = u^{(2)*}. \quad (9.15)$$

Если в качестве базисных векторов выбрать (комплексные) векторы $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$, матрица A станет диагональной матрицей:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\varphi} \end{bmatrix}. \quad (9.16)$$

Матрицу, преобразующую матрицу A к диагональному виду Λ , можно найти из следующих соображений. Будем исходить из уравнения для собственных значений

$$\sum_j A_{ij} u_j^{(k)} = \lambda^{(k)} u_i^{(k)} = \sum_j u_i^{(j)} (\lambda^{(k)} \delta_{jk}). \quad (9.17)$$

Введем матрицы U и Λ :

$$U_{jk} = u_j^{(k)}, \quad \Lambda_{jk} = \lambda^{(k)} \delta_{jk}. \quad (9.18)$$

Тогда Λ есть диагональная матрица (9.16), а матрица U есть матрица, столбцами которой служат собственные векторы. Из (9.11) мы видим, что матрица U унитарна. Подставив (9.18) в (9.17), получим

$$AU = U\Lambda,$$

а умножив это соотношение на матрицу, обратную U (так как матрица U унитарна, обратная матрица существует), найдем

$$U^{-1}AU = \Lambda.$$

Отсюда следует, что матрица U_{jk} приводит матрицу A к диагональному виду Λ . Наши новые базисные векторы $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$ комплексны. Поскольку нас интересуют преобразования вещественных координат, удобно перейти к вещественным базисным векторам. (Разумеется, это означает, что теперь наша матрица преобразования уже не будет диагональной.) Этот переход можно выполнить с помощью унитарной матрицы V

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (9.19)$$

Преобразование $V^{-1}\Lambda V$ запишется в виде

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = R. \quad (9.20)$$

В последнем преобразовании мы с легкостью узнаем поворот вокруг первой оси на угол φ . Таким образом, параметр φ , фигурирующий в собственных значениях, является углом поворота. Преобразование UV приводит матрицу A к ее окончательному виду. Из (9.19) имеем

$$UV = \begin{bmatrix} u_1^{(1)} & \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1^{(2)} + u_1^{(3)}) & \frac{i}{\sqrt{2}}(u_1^{(2)} - u_1^{(3)}) \\ u_2^{(1)} & \frac{1}{\sqrt{2}}(u_2^{(2)} + u_2^{(3)}) & \frac{i}{\sqrt{2}}(u_2^{(2)} - u_2^{(3)}) \\ u_3^{(1)} & \frac{1}{\sqrt{2}}(u_3^{(2)} + u_3^{(3)}) & \frac{i}{\sqrt{2}}(u_3^{(2)} - u_3^{(3)}) \end{bmatrix}. \quad (9.21)$$

Преобразование UV является произведением двух унитарных преобразований и поэтому унитарно. Кроме того, из (9.21) и (9.15) видно, что преобразование UV вещественно, поэтому матрица UV вещественна и ортогональна. Итак, мы показали, что любую вещественную матрицу с параметром (углом) φ можно с помощью некоторого вещественного ортогонального преобразования (т. е. поворотом) преобразовать в любую другую матрицу с тем же параметром φ . Повороты на один и тот же угол вокруг любой оси эквивалентны и принадлежат к одному и тому же классу.

Направление оси вращения и угол φ представляют собой три параметра, с помощью которых можно охарактеризовать поворот. В качестве параметров можно взять компоненты $u_1^{(1)}\varphi$, $u_2^{(1)}\varphi$, $u_3^{(1)}\varphi$ вектора, длина которого равна φ , а направление совпадает с направлением оси вращения. Параметры группы вращений являются, таким образом, точками внутри сферы радиусом π с центром в начале координат. Каждой точке внутри этой сферы соответствует поворот вокруг направления радиуса-вектора, проведенного из центра, на угол, равный расстоянию от этой точки до центра сферы. Направление вращения будем выбирать, пользуясь правилом правой руки. За исключением угла $\varphi = \pi$, эти параметры однозначно определяют вращение. Что же

касается двух диаметрально противоположных точек, то они задают одно и то же вращение. Поэтому мы должны представлять себе эту сферу так, словно ее прошли насквозь, и точки, принадлежащие противоположным концам диаметра, совпали.

Функцию плотности для интегрирования по группе можно вычислить тем способом, который рассматривался в предыдущей главе. Нашими параметрами служат три декартовых координаты точек внутри сферы радиусом π , или же сферические координаты этих точек. Область изменения параметров конечна, поэтому плотности, определяемые с помощью левых и правых сдвигов, должны совпадать. Параметры тождественного преобразования имеют значения 0, 0, 0. Если мы рассмотрим параметры ξ , η , ζ в окрестности тождественного преобразования, то матрица поворота, соответствующего этим бесконечно малым значениям параметров, будет иметь вид

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -\zeta & \eta \\ \zeta & 1 & -\xi \\ -\eta & \xi & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.22)$$

Теперь мы хотим найти параметры поворота, который получится, если после такого инфинитезимального поворота произвести поворот на какой-нибудь угол φ . В таком случае мы найдем якобиан новых параметров по параметрам ξ , η , ζ и получим функцию плотности. Поскольку все оси вращения эквивалентны, ясно, что функция плотности может зависеть только от угла φ . Поэтому наше вращение можно выбрать в виде простого вращения R , указанного в (9.20). Тогда преобразование RS запишется в виде

$$\begin{bmatrix} 1 & -\zeta & \eta \\ \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi & \cos \varphi - \xi \sin \varphi & -\xi \cos \varphi - \sin \varphi \\ \xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi & \sin \varphi + \xi \cos \varphi & -\xi \sin \varphi + \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (9.23)$$

Так как параметры ξ , η , ζ малы, будем всюду удерживать только их первые степени. Для нахождения угла φ' преобразования RS воспользуемся формулой (9.14):

$$1 + 2 \cos \varphi' = 1 + 2 \cos \varphi - 2\xi \sin \varphi, \quad \varphi' = \varphi + \xi. \quad (9.24)$$

Формула (9.13) позволит нам найти ось вращения:

$$\begin{aligned} u_1^{(1)'} &= -2\xi \cos \varphi - 2 \sin \varphi; & u_2^{(1)'} &= \zeta \sin \varphi - \eta(1 + \cos \varphi); \\ u_3^{(1)'} &= -\eta \sin \varphi - \zeta(1 + \cos \varphi). \end{aligned} \quad (9.25)$$

Вектор $u^{(1)'}$ следует нормировать на единицу. Его длина по формуле (9.25) с точностью до членов первого порядка включительно

равна $2\xi \cos \varphi + 2 \sin \varphi$, поэтому нормированный вектор $u^{(1)'}$ имеет компоненты

$$1, \quad -\frac{\xi}{2} + \frac{\eta}{2} \frac{(1 + \cos \varphi)}{\sin \varphi}, \quad \frac{\eta}{2} + \frac{\xi}{2} \frac{(1 + \cos \varphi)}{\sin \varphi}.$$

Объединяя эти результаты с (9.24), находим параметры произведения RS (с точностью до членов первого порядка):

$$\varphi + \xi, \quad \varphi \left[-\frac{\xi}{2} + \frac{\eta}{2} \frac{(1 + \cos \varphi)}{\sin \varphi} \right], \quad \varphi \left[\frac{\eta}{2} + \frac{\xi}{2} \frac{(1 + \cos \varphi)}{\sin \varphi} \right].$$

Якобиан преобразования равен

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varphi}{2} \frac{(1 + \cos \varphi)}{\sin \varphi} & -\frac{\varphi}{2} \\ 0 & \frac{\varphi}{2} & \frac{\varphi}{2} \frac{(1 + \cos \varphi)}{\sin \varphi} \end{vmatrix} = \frac{\varphi^2}{2(1 - \cos \varphi)},$$

откуда функция плотности $\rho(\varphi)$ равна

$$\rho(\varphi) = \frac{2}{\varphi^2} (1 - \cos \varphi). \quad (9.26)$$

Чтобы проинтегрировать какую-нибудь функцию по группе, мы должны составить интеграл

$$\begin{aligned} \int \varphi^2 d\varphi d\Omega \left[\frac{2}{\varphi^2} (1 - \cos \varphi) \right] f(\varphi, \Omega) = \\ = 2 \int d\varphi d\Omega f(\varphi, \Omega) (1 - \cos \varphi), \end{aligned} \quad (9.27)$$

где Ω означает направление оси вращения. Все повороты на один и тот же угол φ принадлежат одному и тому же классу. Поэтому, если мы имеем дело с функцией класса, и в частности с характером представления, наш интеграл можно записать просто в виде

$$8\pi \int_0^\pi d\varphi \chi(\varphi) (1 - \cos \varphi). \quad (9.27a)$$

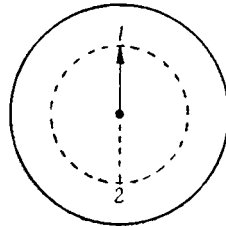
Полный «объем» группы равен

$$8\pi \int_0^\pi d\varphi (1 - \cos \varphi) = 8\pi^2.$$

Соотношение ортогональности для характеров неприводимых представлений группы вращений можно записать следующим образом:

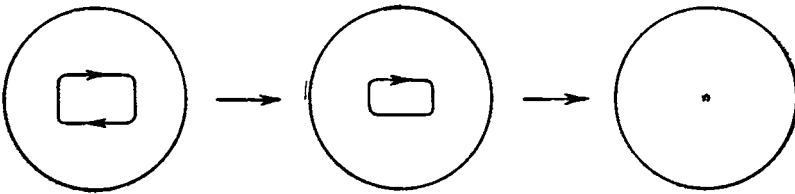
$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi (1 - \cos \varphi) \chi^{(\mu)*}(\varphi) \chi^{(\nu)}(\varphi) = \delta_{\mu\nu}. \quad (9.28)$$

В гл. 8 мы установили, что группа $O^+(3)$ простая. Этот результат можно представить себе с помощью следующего наглядного метода. Пространством параметров группы $O^+(3)$ служит внутренность сферы радиуса π . Равные и противоположно направленные векторы, исходящие из центра сферы, соответствуют поворотам на один и тот же угол в противоположных направлениях. Если группа $O^+(3)$ содержит



Фиг. 72.

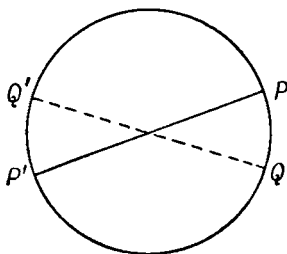
собственную инвариантную подгруппу, то эта подгруппа должна содержать какое-то вращение, отличное от тождественного, например вращение, обозначенное цифрой 1 на фиг. 72. Но если инвариантная подгруппа содержит вращение 1, то она должна также содержать и все вращения, получающиеся из 1 с помощью трансформаций, т. е. все векторы, концы которых расположены на пунктирной



Фиг. 73.

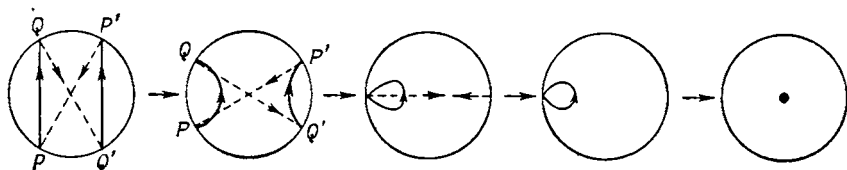
сфере. В силу сказанного инвариантная подгруппа содержит вектор 2 (обратный вектору 1), а также некоторую окрестность вектора 2. Если мы образуем произведение вектора 1 и векторов, концы которых лежат в окрестности вектора 2 на пунктирной сфере, мы получим элементы подгруппы, сколь угодно близкие к тождественному преобразованию (центру сферы). Вращения, получаемые из этих элементов с помощью трансформаций, заполняют некоторую малую сферу, центр которой совпадает с центром исходной. Образова произведение других вращений, мы заполним всю сферу, поэтому инвариантная подгруппа совпадает с $O^+(3)$.

Связность группы $O^+(3)$ также можно найти, исходя из этих наглядных представлений. Чтобы найти связность пространства параметров, мы должны найти число различных типов замкнутых путей, которые нельзя непрерывно деформировать друг в друга. Как показано на фиг. 73, замкнутые пути первого типа можно стянуть в точку.



Фиг. 74.

(Во избежание недоразумений мы изображаем все кривые в виде плоских кривых.) Второй тип замкнутых кривых представлен прямой, расположенной вдоль некоторого диаметра сферы (фиг. 74). Так как точки P и P' изображают одну и ту же точку, эта кривая замкнута. Если мы пытаемся непрерывно деформировать эту кривую, то оказывается, что любое смещение одного «конца» к точке Q приводит

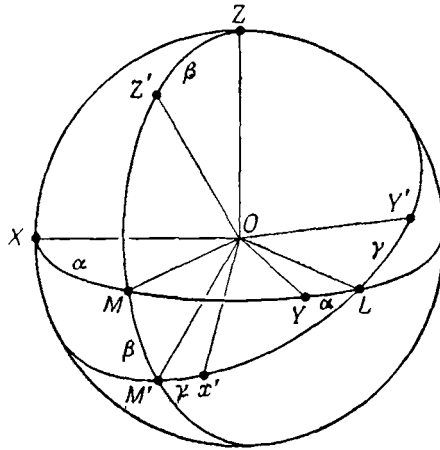


Фиг. 75.

к сдвигу «другого конца» в точку Q' , расположенную диаметрально противоположно точке Q и отождествленную с ней. Все остальные замкнутые кривые совпадают с кривыми этих двух типов (*гомотопны* им). Например, замкнутую кривую, у которой в двух местах происходит перескок в диаметрально противоположные точки, можно стянуть в точку, как показано на фиг. 75. Точно так же нетрудно видеть, что гомотопны все замкнутые кривые с нечетным числом точек перескока в диаметрально противоположные точки. Гомотопными оказываются и все замкнутые кривые с четным числом точек перескока. Таким образом, групповое многообразие двусвязно, и мы можем иметь (не более чем) двузначные представления.

До сих пор мы выбирали параметры так, чтобы они находились во взаимно однозначном соответствии с вращениями. Однако во многих

случаях это не обязательно, и более удобны другие параметры. Преобразование (вращение), которое переводит точки трехмерного пространства из некоторого начального в некоторое конечное положение, удобно описывать с помощью углов Эйлера α , β , γ . На фиг. 76 оси координат OX , OY и OZ закреплены неподвижно.



Фиг. 76.

Преобразование можно представить как результат выполнения трех последовательных простых операций:

1. Поворот на угол α вокруг оси OZ (угол α положителен, если точки положительной полуоси OX движутся к положительной полуоси OY , и изменяется в пределах от $-\pi$ до $+\pi$). В результате этого поворота точки, первоначально расположенные на оси OY , переходят в линию узлов OL .

2. Поворот на угол β вокруг прямой OL , в результате которого точки полуоси OZ будут двигаться к прямой OM , как показано на фигуре; угол β изменяется от 0 до π . После выполнения этой операции точки, лежавшие на оси OZ , перейдут в точки OZ' .

3. Поворот на угол γ вокруг прямой OZ' . Условие для выбора знака угла то же, что и в первой операции, и снова $-\pi \leq \gamma \leq \pi$.

Соответствие между этими параметрами и вращениями не является однозначным; например, при $\beta = 0$ мы получаем поворот вокруг оси Z на угол $\alpha + \gamma$.

Обозначим преобразование символом $R(\alpha, \beta, \gamma)$ и покажем, что его можно описывать, задавая повороты вокруг осей OY и OZ . Нашей первой операцией был поворот вокруг оси OZ , который мы назовем R_z . Обозначим второй поворот на угол β вокруг оси OL

символом R'_β . Этот поворот является некоторой трансформацией поворота R_β на угол β вокруг оси OY . В самом деле,

$$R'_\beta = R_\alpha R_\beta R_\alpha^{-1},$$

так что

$$R'_\beta R_\alpha = R_\alpha R_\beta.$$

Точно так же если R'_γ — поворот на угол γ вокруг оси OZ' , а R_γ — поворот на угол γ вокруг оси OZ , то

$$R'_\gamma R'_\beta R_\alpha = R_\alpha R_\beta R_\gamma.$$

Поэтому, кроме приведенного выше, можно дать еще одно описание поворота $R(\alpha, \beta, \gamma)$:

1. Поворот системы координат вокруг оси OZ на угол γ .
2. Поворот вокруг оси OY на угол β .
3. Поворот вокруг оси OZ на угол α .

Как обычно, мы сопоставляем преобразованию $R(x' = Rx)$ оператор O_R такой, что

$$O_R f(x) = f(R^{-1}x),$$

откуда

$$O_{R(\alpha, \beta, \gamma)} f(x) = f[R(-\gamma, -\beta, -\alpha)x]. \quad (9.29)$$

|| *Задача.* Найдите матрицу преобразования $R(\alpha, \beta, \gamma)$.

§ 3. Непрерывные однозначные представления трехмерной группы вращений

По сути дела непрерывные однозначные представления группы вращений хорошо нам известны под другим названием. Рассмотрим уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \psi = 0. \quad (9.30)$$

Лапласиан инвариантен относительно вращений, поэтому если ψ — решение этого уравнения, то $O_R \psi$ также будет его решением. Рассмотрим такие решения ψ , которые являются однородными полиномами степени l относительно x, y, z . Так как вращение R представляет собой линейное преобразование переменных x, y, z , $O_R \psi$ также будет однородным полиномом степени l . Итак, однородные полиномы степени l , удовлетворяющие уравнению Лапласа, при вращении преобразуются друг через друга и поэтому образуют базис некоторого представления группы вращений. Чтобы найти размерность представления, базис которого образуют однородные полиномы степени l ,

мы должны найти число независимых полиномов. В самом общем случае полином степени l по x , y , z можно записать в виде

$$P = \sum_{a,b} c_{ab} (x + iy)^a (x - iy)^b z^{l-a-b}. \quad (9.31)$$

Если этот полином должен быть решением уравнения Лапласа $\nabla^2 P = 0$, то

$$0 = \sum_{a,b} c_{ab} [4ab(x + iy)^{a-1}(x - iy)^{b-1}z^{l-a-b} + \\ + (l-a-b)(l-a-b-1)(x + iy)^a(x - iy)^b z^{l-a-b-2}],$$

и его коэффициенты должны будут удовлетворять рекуррентной формуле

$$4(a+1)(b+1)c_{a+1,b+1} + (l-a-b)(l-a-b-1)c_{ab} = 0. \quad (9.32)$$

Из формулы (9.32) мы видим, что при фиксированной разности между индексами $a - b$ коэффициенты c_{ab} оказываются связанными друг с другом. Все такие коэффициенты можно выразить через какой-нибудь один коэффициент того же типа. Так как разность $a - b$ может принимать все значения от $-l$ до $+l$, существует $2l + 1$ линейно независимых решений уравнения Лапласа, имеющих вид однородных полиномов l -й степени. Если перейти к сферическим координатам r , θ , φ , то полином степени l запишется в виде произведения r^l на функцию от θ и φ . Этими функциями, зависящими от углов, являются хорошо известные сферические функции, которые мы запишем в виде

$$Y_m^l(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} P_m^l(\theta) e^{im\varphi} \quad (m = -l, \dots, +l)$$

и при $m \geq 0$

$$P_{-m}^l(\theta) = P_m^l(\theta) = \frac{N_m^l}{2^l l!} \sin^m \theta \frac{d^{l+m} \sin^{2l} \theta}{d(\cos \theta)^{l+m}}, \quad (9.33)$$

где

$$N_m^l = \left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{2l+1}{2} \right]^{1/2}$$

— нормирующий множитель, подобранный так, чтобы

$$\int_0^\pi (P_m^l)^2 \sin \theta d\theta = 1. \quad (9.33a)$$

Ниже приводятся нормированные сферические функции $P_m^l (l=0, \dots, 4)$:

$$P_0^0 = 1;$$

$$P_0^1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \cos \theta, \quad P_1^1 = \sqrt{\frac{3}{4}} \sin \theta;$$

$$P_0^2 = \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right), \quad P_1^2 = \sqrt{\frac{15}{4}} \sin \theta \cos \theta,$$

$$P_2^2 = \frac{\sqrt{15}}{4} \sin^2 \theta;$$

$$P_0^3 = \sqrt{\frac{7}{2}} \left(\frac{5}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta \right), \quad P_1^3 = \frac{\sqrt{21}}{2} \left(\frac{5}{4} \cos^2 \theta - \frac{1}{4} \right) \sin \theta,$$

$$P_2^3 = \frac{\sqrt{105}}{4} \sin^2 \theta \cos \theta, \quad P_3^3 = \frac{\sqrt{70}}{8} \sin^3 \theta;$$

$$P_0^4 = \sqrt{\frac{9}{2}} \left(\frac{35}{8} \cos^4 \theta - \frac{15}{4} \cos^2 \theta + \frac{3}{8} \right),$$

$$P_1^4 = 3 \frac{\sqrt{10}}{8} (7 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \sin \theta,$$

$$P_2^4 = 3 \frac{\sqrt{5}}{8} (7 \cos^2 \theta - 1) \sin^2 \theta, \quad P_3^4 = 3 \frac{\sqrt{70}}{8} \cos \theta \sin^3 \theta,$$

$$P_4^4 = 3 \frac{\sqrt{35}}{16} \sin^4 \theta.$$

Из (9.33) мы видим, что

$$P_0^l = N_0^l, \quad P_m^l = 0 \quad \text{при} \quad m \neq 0. \quad (9.34)$$

При заданном l сферические функции образуют базис $(2l+1)$ -мерного представления $D^{(l)}$ группы вращений. Строки матрицы представления занумерованы индексом m , который пробегает значения от $-l$ до $+l$. В качестве параметров, позволяющих задавать вращения, будем использовать углы Эйлера и элементы группы вращений будем записывать в виде $R(\alpha, \beta, \gamma)$. Так, $R(\alpha, 0, 0)$ будет означать поворот на угол α вокруг оси Z . Вращения этого частного вида не меняют угол θ , а угол φ заменяют углом $\varphi + \alpha$. Поэтому из уравнения (9.29) имеем

$$\begin{aligned} O_{R(\alpha, 0, 0)} Y_m^l &= O_{R(\alpha, 0, 0)} \frac{P_m^l(\theta)}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} = \\ &= \frac{P_m^l(\theta)}{\sqrt{2\pi}} e^{im(\varphi + \alpha)} = e^{-im\alpha} Y_m^l. \end{aligned} \quad (9.35)$$

В общем случае

$$O_{R(\alpha, \beta, \gamma)} Y_m^l(\theta, \varphi) = \sum_{m'} Y_{m'}^l(\theta, \varphi) D_{m', m}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma), \quad (9.36)$$

где $D_{m'm}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma)$ — матрица, отвечающая вращению $R(\alpha, \beta, \gamma)$ в представлении $D^{(l)}$, базис которого образуют сферические функции порядка l . Из (9.35) и (9.36) мы видим, что матрицы представления, отвечающие вращениям вокруг оси Z , диагональны:

$$D_{m'm}^{(l)}(\alpha, 0, 0) = e^{-im\alpha} \delta_{m'm},$$

$$D^{(l)}(\alpha, 0, 0) = \begin{bmatrix} e^{-il\alpha} & & & \\ & e^{-i(l-1)\alpha} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{ila} \end{bmatrix}. \quad (9.37)$$

Мы хотим доказать, что заданные выше представления $D^{(l)}$ неприводимы. Для этого нам необходимо лишь показать, что любая матрица, коммутирующая со всеми матрицами представления, должна быть кратна единичной матрице. Это легко доказать, рассматривая диагональные матрицы (9.37) и матрицу $R(0, \beta, 0)$ поворота на угол β вокруг оси Y . Рассмотрим точки плоскости ZX . Для них азимут φ равен нулю. Поворот $R(0, \beta, 0)$ переводит точку $\theta, 0$ в точку $\theta + \beta, 0$. Поэтому, воспользовавшись еще раз формулой (9.29), получим

$$O_{R(0, \beta, 0)} P_m^l(\theta) = P_m^l(\theta - \beta) = \sum_{m'} P_{m'}^l(\theta) D_{m'm}^{(l)}(0, \beta, 0). \quad (9.38)$$

Если положить $\theta = 0$, то

$$P_m^l(-\beta) = \sum_{m'} D_{m'm}^{(l)}(0, \beta, 0) P_{m'}^l(0). \quad (9.39)$$

Воспользовавшись соотношениями (9.34), найдем

$$P_m^l(-\beta) = D_{0m}^{(l)}(0, \beta, 0) N_0^l. \quad (9.40)$$

Поскольку функция $P_m^l(-\beta)$, вообще говоря, не равна нулю, мы заключаем, что элементы, стоящие в $(m=0)$ -й строке матрицы $D^{(l)}(0, \beta, 0)$, отличны от нуля.

Если матрица A коммутирует с матрицей $D^{(l)}(\alpha, 0, 0)$, определяемой (9.37), то

$$[AD^{(l)}(\alpha, 0, 0)]_{mm'} = [D^{(l)}(\alpha, 0, 0)A]_{mm'},$$

$$A_{mm'} e^{-im'\alpha} = e^{-im\alpha} A_{mm'},$$

поэтому матрица A должна быть диагональной матрицей, т. е.

$$A_{mm'} = a_m \delta_{mm'},$$

Если A коммутирует с $D^{(l)}(0, \beta, 0)$, то

$$[AD^{(l)}(0, \beta, 0)]_{0k} = [D^{(l)}(0, \beta, 0)A]_{0k} \quad \text{при всех } k,$$

или

$$a_0 D_{0k}^{(l)}(0, \beta, 0) = D_{0k}^{(l)}(0, \beta, 0) a_k.$$

Так как

$$D_{0k}^{(l)}(0, \beta, 0) \neq 0 \quad \text{при всех } k,$$

то

$$a_k = a_0.$$

Это означает, что все диагональные элементы матрицы A равны, и матрица A кратна единичной матрице. Таким образом, всякое представление $D^{(l)}$ ($l=0, 1, 2, \dots$) неприводимо. Кроме того, размерности этих представлений различны, в силу чего они не эквивалентны.

Так как характер вращения зависит исключительно от угла поворота и не зависит от направления оси вращения, мы можем найти характеры, пользуясь простой матрицей (9.37). Из (9.37) видно, что

$$\begin{aligned} \chi^{(l)}(\varphi) &= \sum_{m=-l}^l e^{im\varphi} = 1 + 2 \cos \varphi + \dots \\ &\dots + 2 \cos l\varphi = \frac{\sin(l + 1/2)\varphi}{\sin \varphi/2}. \end{aligned} \quad (9.41)$$

Проверим, что соотношение ортогональности (9.28) выполняется:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi (1 - \cos \varphi) \frac{\sin(l + 1/2)\varphi \sin(l' + 1/2)\varphi}{\sin^2 \varphi/2} &= \\ = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\varphi \sin\left(l + \frac{1}{2}\right)\varphi \sin\left(l' + \frac{1}{2}\right)\varphi &= \delta_{ll'}. \end{aligned} \quad (9.42)$$

Покажем теперь, что представления $D^{(l)}$ образуют полную систему, т. е. не может быть никаких других независимых неприводимых представлений, которые были бы непрерывными и однозначными. В противном случае характер нового представления $\chi(\varphi)$ был бы ортогонален ко всем $\chi^{(l)}(\varphi)$:

$$\int_0^\pi d\varphi (1 - \cos \varphi) \chi^{(l)}(\varphi) \chi(\varphi) = 0 \quad \text{при всех } l,$$

или же, если взять разности для последовательных значений l ,

$$\int_0^\pi d\varphi (1 - \cos \varphi) [\chi^{(l+1)}(\varphi) - \chi^{(l)}(\varphi)] \chi(\varphi) = 0 \quad \text{при всех } l.$$

Но

$$\chi^{(0)}(\varphi) = 1 \quad \text{и} \quad \chi^{(l+1)}(\varphi) - \chi^{(l)}(\varphi) = 2 \cos l\varphi,$$

поэтому при всех значениях l мы получили бы

$$\int_0^\pi d\varphi [(1 - \cos \varphi) \chi(\varphi)] \cos l\varphi = 0.$$

Итак, коэффициенты Фурье функции $(1 - \cos \varphi) \chi(\varphi)$ должны были бы обратиться в нуль. Поскольку на отрезке от 0 до π функции $\cos l\varphi$ образуют полную систему, из этого следовало бы, что характер $\chi(\varphi)$ равен нулю. Таким образом, мы показали, что представления $D^{(0)}$, $D^{(1)}$ и т. д. образуют полную систему (однозначных) неприводимых представлений. Любое однозначное представление можно записать в виде суммы представлений $D^{(l)}$. Для дальнейшего заметим также, что

$$\begin{aligned} D^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma) &= D^{(l)}(0, 0, \gamma) D^{(l)}(0, \beta, 0) D^{(l)}(\alpha, 0, 0), \\ D_{m'm}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma) &= e^{-im'\gamma} D_{m'm}^{(l)}(0, \beta, 0) e^{-lma}, \end{aligned} \quad (9.43)$$

и для получения полной матрицы нам остается лишь найти $D_{m'm}^{(l)}(0, \beta, 0)$.

Отметим также связь сферических функций Y_m^l с коэффициентами представления:

$$O_{R(\varphi, \theta, \gamma)} Y_m^l(\theta, \varphi) = \sum_{m'} Y_{m'}^l(\theta, \varphi) D_{m'm}^{(l)}(\varphi, \theta, \gamma) = Y_m^l(0, -\gamma),$$

где первое равенство есть равенство (9.36), а второе получается с помощью (9.29). Из (9.33) и (9.34) получим

$$Y_m^l(0, -\gamma) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} e^{-lm\gamma} \delta_{0m} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{0m}.$$

Итак,

$$\sum_{m'} Y_{m'}^l(\theta, \varphi) D_{m'm}^{(l)}(\varphi, \theta, \gamma) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{0m}.$$

Умножив это равенство на $D_{km}^{(l)*}(\varphi, \theta, \gamma)$ и просуммировав по m , найдем

$$\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_k^l(\theta, \varphi) = D_{k0}^{(l)*}(\varphi, \theta, \gamma). \quad (9.44)$$

§ 4. Расщепление атомных уровней в полях внутри кристаллов (однозначные представления)

Прежде чем переходить к рассмотрению двузначных представлений группы вращений, мы хотим применить полученные нами результаты к задаче о расщеплении атомных уровней в полях внутри кристаллов. (Позднее эту же задачу мы рассмотрим и для двузначных

представлений.) Прежде всего заметим, что гамильтониан электрона в центральном поле атома инвариантен не только относительно всех вращений, но и относительно инверсии в начале координат. Иначе говоря, группой симметрии электрона в атоме служит группа $O(3)$, получающаяся за счет присоединения инверсии I к группе чистых вращений. Так как $I^2 = E$, то матрица представления, отвечающая инверсии I , может быть только единичной матрицей, умноженной на $+1$ или -1 . Так же как в гл. 4, каждое представление группы чистых вращений приводит к двум представлениям полной группы зеркальных поворотов. Вместо представления $D^{(l)}$ мы получаем теперь два представления $D^{(l+)}$ и $D^{(l-)}$:

$$\begin{aligned} D^{(l+)}(IR(\alpha, \beta, \gamma)) &= D^{(l+)}(R(\alpha, \beta, \gamma)) = \\ &= D^{(l-)}(R(\alpha, \beta, \gamma)) = -D^{(l-)}(IR(\alpha, \beta, \gamma)). \end{aligned} \quad (9.45)$$

Представления $D^{(l+)}$, в которых инверсии I соответствует матрица $+1$, называются положительными представлениями. Представления $D^{(l-)}$, в которых инверсии I соответствует матрица -1 , называются отрицательными представлениями. Аналогично, уровни, принадлежащие представлению $D^{(l+)}(D^{(l-)})$, называются положительными (отрицательными) уровнями. Итак, однозначными представлениями полной группы вращений служат представления

$$0^+, 0^-; \quad 1^+, 1^-; \quad 2^+, 2^-; \quad \text{и т. д.}$$

Каждый уровень свободного атома будет принадлежать одному из неприводимых представлений полной группы вращений (если нет случайного вырождения). Если же атом поместить в кристалл, то поле внутри кристалла, т. е. электрическое поле, которое создают в том месте, где находится атом, другие атомы в кристалле, вызовет возмущение в движении электронов. Электрическое поле будет обладать симметрией одной из кристаллографических точечных групп. В силу этого мы сталкиваемся с задачей теории возмущений, аналогичной той, которая ранее была изучена в гл. 6.

В рассматриваемом теперь случае уровни невозмущенной системы классифицируются по представлениям полной группы вращений. Например, уровень, принадлежащий l^+ -представлению, будет иметь $(2l+1)$ -кратное вырождение. Если атом поместить в кристалл, этот уровень расщепится на уровни, принадлежащие различным неприводимым представлениям кристаллографической точечной группы. Так же как в гл. 6, мы прежде всего найдем характеры элементов кристаллографической точечной группы в l^+ -представлении. Затем, пользуясь уравнением (3.150), найдем кратность, с которой каждое неприводимое представление кристаллографической точечной группы содержится

в l^+ -представлении, и тем самым определим, как расщепляется наш уровень в поле внутри кристалла.

Так как кристаллографические точечные группы могут содержать повороты только на углы π , $2\pi/3$, $\pi/2$ и $\pi/3$, сначала вычислим характер $\chi^{(l)}(\varphi)$ для этих элементов, пользуясь тождеством (9.41). Поскольку

$$\chi^{(l)}\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\sin[(l+1/2)(2\pi/n)]}{\sin(\pi/n)},$$

мы видим, что случай $l=n$ повторяет результат для $l=0$, поэтому мы должны затабулировать характеры только для $0 \leq l < n$. Эти результаты представлены в табл. 34. Заметим также, что

$$\chi^{(l)}\left(\frac{2\pi}{n}\right) = -\chi^{(n-l-1)}\left(\frac{2\pi}{n}\right) = -\chi^{(mn-l-1)}\left(\frac{2\pi}{n}\right), \quad (9.46)$$

где m — любое целое число.

Таблица 34

l	0	1	2	3	4	5
$\chi^{(l)}(C_2)$	1	-1				
$\chi^{(l)}(C_3)$	1	0	-1			
$\chi^{(l)}(C_4)$	1	1	-1	-1		
$\chi^{(l)}(C_6)$	1	2	1	-1	-2	-1

Сначала рассмотрим кристаллографическую группу, состоящую только из чистых поворотов. Для примера возьмем группу октаэдра O . Из табл. 35 видим, что группа O содержит классы

$$E; \quad C_3(8); \quad C_4^2(3); \quad C_2(6); \quad C_4(6).$$

Элементы C_4^2 и C_2 в группе O неэквивалентны, однако в полной группе вращений они эквивалентны, ибо представляют собой повороты на один и тот же угол π . Воспользуемся табл. 34 для нахождения характеров этих элементов в представлении $D^{(l)}$, а затем равенством (3.150), чтобы найти представления группы O , на которые разлагается представление $D^{(l)}$ (табл. 35). Заметим, что характеры в табл. 35 обладают целым рядом общих свойств. Поскольку группа O содержит повороты C_2 , C_3 , C_4 , а наименьшее общее кратное чисел 2, 3 и 4 равно 12, мы видим из табл. 35, что при $l=12$ характеры всех вращений равны $+1$. Кроме того, тождественному преобразованию будет отвечать характер

$$\chi^{(12)}(E) = 25.$$

Таблица 35

Характеры классов группы O в $(2l+1)$ -мерном представлении $D^{(l)}$ группы вращений						Разложение представления $D^{(l)}$ на неприводимые представления группы O	Число уровней
l	E	C_3	C_4^2	C_2	C_4		
0	1	1	1	1	1	A_1	1
1	3	0	-1	-1	1	F_1	1
2	5	-1	1	1	-1	$E + F_2$	2
3	7	1	-1	-1	-1	$A_2 + F_1 + F_2$	3
4	9	0	1	1	1	$A_1 + E + F_1 + F_2$	4
5	11	-1	-1	-1	1	$E + 2F_1 + F_2$	4
6	13	1	1	1	-1	$A_1 + A_2 + E + F_1 + 2F_2$	6
12	25	1	1	1	1	$2A_1 + A_2 + 2E + 3F_1 + 3F_2$	11

Поэтому при $l=12$ характеры оказываются суммой двух слагаемых: 1) всех характеров, равных $+1$, т. е. характеров единичного представления, и 2) характера $\chi(E)=24$ (порядок группы O); все же остальные характеры равны нулю. Это — регулярное представление, которое мы обозначали символом reg . Как было показано в § 17, гл. 3, каждое неприводимое представление содержится в регулярном представлении с кратностью, равной размерности этого неприводимого представления. Поэтому для группы O регулярное представление

$$\text{reg} = A_1 + A_2 + 2E + 3F_1 + 3F_2 \quad \text{и} \quad D^{(12)} = A_1 + \text{reg}.$$

Аналогично при $l=12m$ получаем взятое m раз регулярное представление плюс единичное представление. При $k < 12$

$$D^{(12m+k)} = m(\text{reg}) + D^{(k)}. \quad (9.47)$$

Из равенства (9.46) мы видим также, что поскольку число 12 кратно числам 2, 3 и 4, то

$$\chi^{(l)}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \chi^{(11-l)}\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 0, \quad \chi^{(l)}(E) + \chi^{(11-l)}(E) = 24,$$

следовательно,

$$D^{(l)} + D^{(11-l)} = \text{reg}. \quad (9.48)$$

По этой причине результаты в табл. 35 необходимо приводить лишь до $l=5$. Например, для $l=10$ имеем

$$D^{(10)} + D^{(1)} = \text{reg},$$

откуда

$$D^{(10)} = A_1 + A_2 + 2E + 2F_1 + 3F_2.$$

Другой интересный результат состоит в том, что ни одно представление не может входить в $D^{(l)}$ ($l < 12$) с кратностью, большей той, с которой оно входит в регулярное представление. Этот результат следует из равенства (9.48) и того факта, что сумма представлений имеет только положительные коэффициенты.

Уровни, принадлежащие различным представлениям $D^{(l)}$, обычно обозначают буквами S , P , D и т. д., для $l = 0, 1, 2$ и т. д. Из табл. 35 мы видим, что P -уровни не расщепляются при действии группы симметрии O . (Физически это очевидно, поскольку координаты x , y и z эквивалентны относительно преобразований кубической симметрии.) При $l \geq 2$ все уровни расщепляются в поле внутри кристалла.

До сих пор мы не рассматривали инверсий. Если мы возьмем полную группу зеркальных поворотов, нашими представлениями будут представления O^+ , O^- и т. д. Так как группа O не содержит инверсии I , представления $D^{(l\pm)}$ будут разлагаться таким же образом.

Предположим теперь, что мы рассматриваем группу $O_h = O \times C_i$ (кубическая голоэдрическая симметрия). В группе O_h каждое представление группы O разобьется на два представления, согласно тому, какое значение мы выберем для $\chi(I)$: $+1$ или -1 . В данном случае мы еще можем воспользоваться всеми результатами табл. 35. При этом следует лишь считать, что все положительные (отрицательные) состояния группы зеркальных поворотов отвечают положительным (отрицательным) представлениям кристаллографической точечной группы. Например, в группе O_h

$$D^{(4+)} = A_1^+ + E^+ + F_1^+ + F_2^+, \quad D^{(2-)} = E^- + F_2^-.$$

Теперь мы можем наметить ход вычислений в общем случае. Если кристаллографическая группа содержит инверсию I , нам нужно рассматривать только такую ее инвариантную подгруппу, которая не содержит инверсии I , а затем сопоставить положительные (отрицательные) состояния полной группы вращений положительным (отрицательным) представлениям кристаллографической группы. Например, если мы рассматриваем расщепление уровней в поле внутри кристалла, обладающего симметрией группы $T_h = T \times C_i$, то необходимо рассматривать только группу T . Так как в полной группе вращений все оси двусторонние, элементы C_3 и C_3^2 группы T имеют в $D^{(l)}$ один и тот же характер. Результаты для этого случая представлены в табл. 36. Заметим, что в группе T представление E в действительности оказывается суммой двух одномерных представлений и поэтому входит в регулярное представление только один раз. Далее

Таблица 35

Характеры классов группы T в $(2l+1)$ -мерном представлении $D^{(l)}$ группы вращений					Разложение представления $D^{(l)}$ на неприводимые представления группы T	Число уровней
l	E	C_2	C_3	C_3^2		
0	1	1	1	1	A	1
1	3	-1	0	0	F	1
2	5	1	-1	-1	$E + F$	2
3	7	-1	1	1	$A + 2F$	3
4	9	1	0	0	$A + E + 2F$	4
5	11	-1	-1	-1	$E + 3F$	4
6	13	1	1	1	$2A + E + 3F = A + \text{reg}$	6

мы получаем равенство, аналогичное (9.48). Для группы T это равенство имеет вид

$$D^{(l)} + D^{(5-l)} = \text{reg}. \quad (9.49)$$

Сравнивая таблицу для группы T с таблицей для группы O , мы видим, что результаты для группы T можно было бы получить из результатов для группы O , если считать, что представление A_1 совпадает с представлением A_2 , а представление F_1 совпадает с представлением F_2 .

Наконец, как указано в табл. 22, группа T_d изоморфна группе O , поэтому результаты, полученные для группы O , можно применять и к группе T_d . Мы нашли, таким образом, расщепление атомных уровней во всех кристаллах кубической системы (см. § 9 гл. 2).

Рассмотрим далее гексагональную систему (систему VI в § 9 гл. 2). Голлоэдрическая группа

$$D_{6h} = D_6 \times C_i,$$

поэтому нам необходимо затабулировать только группу D_6 . (Изоморфные группы C_{6v} и D_{3h} имеют одинаковые представления.) Элементы C_6 , C_2 , C_2' представляют собой повороты на угол π и в полной группе вращений принадлежат одному классу; C_6^2 — поворот на угол $2\pi/3$. Результаты приведены в табл. 37. Группы

$$C_{6h} = C_6 \times C_i \quad \text{и} \quad C_6$$

не нужно рассматривать специально; так как эти группы абелевы, каждое $(2l+1)$ -мерное представление группы зеркальных поворотов распадается на $2l+1$ простое одномерное представление.

Таблица 37

Характеры классов гексагональной группы D_6 в $(2l+1)$ -мерном представлении $D^{(l)}$ группы вращений							Разложение представления $D^{(l)}$ на неприводимые представления гексагональной группы	Число уровней
l	E	C_6^3	C_6^2	C_6	C_2	$C_{2'}$		
0	1	1	1	1	1	1	A_1	1
1	3	-1	0	2	-1	-1	$A_2 + E_1$	2
2	5	1	-1	1	1	1	$A_1 + E_1 + E_2$	3
3	7	-1	1	-1	-1	-1	$A_2 + B_1 + B_2 + E_1 + E_2$	5
4	9	1	0	-2	1	1	$A_1 + B_1 + B_2 + E_1 + 2E_2$	6
5	11	-1	-1	-1	-1	-1	$A_2 + B_1 + B_2 + 2E_1 + 2E_2$	7
6	13	1	1	1	1	1	$2A_1 + A_2 + B_1 + B_2 + 2E_1 + 2E_2 = A_1 + \text{reg}$	9

Далее рассмотрим тетрагональную систему (систему V в § 9 гл. 2). Голоэдрическая группа

$$D_{4h} = D_4 \times C_i.$$

Рассмотрим группу D_4 (наши результаты будут также применимы и к изоморфным ей группам C_{4v} и D_{2d}). В результате мы получим табл. 38. Группы

$$C_{4h} = C_4 \times C_i \text{ и } C_4$$

абелевы, поэтому каждый уровень расщепится на простые уровни.

Таблица 38

Характеры классов тетрагональной группы D_4 в $(2l+1)$ -мерном представлении $D^{(l)}$ группы вращений							Разложение представления $D^{(l)}$ на неприводимые представления тетрагональной группы	Число уровней
l	E	C_4^2	C_4	C_2	$C_{2'}$	$C_{2''}$		
0	1	1	1	1	1	1	A_1	1
1	3	-1	1	-1	-1	-1	$A_2 + E$	2
2	5	1	-1	1	1	1	$A_1 + B_1 + B_2 + E$	4
3	7	-1	-1	-1	-1	-1	$A_2 + B_1 + B_2 + 2E$	5
4	9	1	1	1	1	1	$2A_1 + A_2 + B_1 + B_2 + 2E = A_1 + \text{reg}$	7

Наконец, в случае ромбической системы (системы III в § 9 гл. 2) рассмотрим абелеву группу V ; каждый уровень полностью расщепляется на $2l+1$ простых уровней.

Теперь читатель уже должен суметь самостоятельно рассмотреть те или иные интересующие его группы с помощью изложенного нами метода.

Задача. Постройте таблицу, которая показывала бы, каким образом уровни полной группы зеркальных поворотов расщепляются в поле кристалла с симметрией группы D_{3d} .

§ 5. Построение собственных функций для кристаллов с различной симметрией

В гл. 6 мы уже рассмотрели задачу о нахождении собственных волновых функций в нулевом порядке теории возмущений. Та же задача возникает и теперь, и если в разложение представления $D^{(l)}$ ни одно представление не входит с кратностью, большей единицы, полное решение этой задачи можно получить, исходя из соображений симметрии. Если же одно и то же неприводимое представление кристаллографической группы входит m раз в разложение представления $D^{(l)}$, то для нахождения собственных волновых функций нулевого порядка мы должны решить секулярное уравнение порядка m . Рассмотрим на примерах метод нахождения собственных функций в нулевом порядке теории возмущений для электрона в полях внутри кристаллов с различной симметрией. (Часть этой работы в точности повторяет то, что мы делали при классификации компонент дипольного и квадрупольного моментов по представлениям кристаллографических групп.)

Выберем волновые функции свободных атомов в вещественном виде

$$\sqrt{2} P_m^l(\theta) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} m\varphi.$$

Тогда все отражения сводятся просто к умножению такой функции на ± 1 . Поворот на угол π вокруг оси X меняет φ на $-\varphi$, а угол θ — на угол $\pi - \theta$. Из определения функции $P_m^l(\theta)$ мы видим, что эта операция приводит к умножению P_m^l на $(-1)^{l-m}$

$$P_m^l(\pi - \theta) = (-1)^{l-m} P_m^l(\theta). \quad (9.50)$$

Эта операция оставляет $\cos m\varphi$ без изменения, а $\sin m\varphi$ умножает на $(-1)^m$. Во всяком случае, поворот на угол π вокруг оси X не приводит к возникновению связей между различными волновыми функциями,

Рассмотрим сначала тетрагональные группы на примере группы D_4 . Все элементы этой группы можно получить из поворота C_4 вокруг оси 4-го порядка Z и поворота C_2 вокруг оси 2-го порядка X . Как мы видели выше, C_2 не связывает различные волновые функции. Поворот C_4 не меняет угол θ , но заменяет функцию $\frac{\cos}{\sin} m\varphi$ функцией $\frac{\cos}{\sin} m(\varphi + \pi/2)$. Таким образом, при четном m это преобразование может привести самое большее к перемене знака. Если же m нечетно, то это преобразование переводит функции $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$ друг в друга.

Функция P_0^l инвариантна относительно поворота C_4 , поворот же C_2 умножает ее на $(-1)^l$. Поэтому P_0^l принадлежит представлению A_1 (см. табл. 19) при четном l и представлению A_2 при нечетном l . Тот же результат остается в силе и для

$$\sqrt{2} P_{4\mu}^l \cos 4\mu\varphi \quad (\mu = 1, 2, \dots),$$

так как

$$\cos 4\mu\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 4\mu\varphi.$$

Функция

$$\sqrt{2} P_{4\mu}^l \sin 4\mu\varphi$$

также не изменяется при преобразовании C_4 ; преобразование C_2 умножает ее на $(-1)^{l+1}$. Поэтому эта функция принадлежит представлению A_2 при четных l и представлению A_1 при нечетных l . Продолжая эти рассуждения, мы получаем табл. 39, в которой указано,

Таблица 39

Собственные функции неприводимых представлений тетрагональной группы

Представления		Собственные функции
нечетные l	четные l	
A_2	A_1	$P_0^l, \sqrt{2} P_{4\mu}^l \cos 4\mu\varphi$
A_1	A_2	$\sqrt{2} P_{4\mu}^l \sin 4\mu\varphi$
B_1	B_2	$\sqrt{2} P_{4\mu+2}^l \cos (4\mu+2)\varphi$
B_2	B_1	$\sqrt{2} P_{4\mu+2}^l \sin (4\mu+2)\varphi$
E	E	$\sqrt{2} P_{2\mu+1}^l \frac{\cos}{\sin} (2\mu+1)\varphi$

каким образом волновые функции распределяются по различным представлениям тетрагональной группы. Воспользуемся таблицей и выпишем в явном виде собственные функции для нескольких первых значений l :

$$\begin{aligned}
 l=0. \quad A_1: P_0^0 & & l=1. \quad A_2: P_0^1 & & E: \sqrt{2} P_1^1 \frac{\cos}{\sin} \varphi \\
 l=2. \quad A_1: P_0^2 & & l=3. \quad A_2: P_0^3 & & B_1: \sqrt{2} P_2^3 \cos 2\varphi \\
 B_2: \sqrt{2} P_2^2 \cos 2\varphi & & B_1: \sqrt{2} P_2^3 \cos 2\varphi & & B_2: \sqrt{2} P_2^3 \sin 2\varphi \\
 B_1: \sqrt{2} P_2^2 \sin 2\varphi & & E: \sqrt{2} P_1^3 \frac{\cos}{\sin} \varphi & & E: \sqrt{2} P_3^3 \frac{\cos}{\sin} \varphi \quad (9.51) \\
 E: \sqrt{2} P_1^2 \frac{\cos}{\sin} \varphi & & & & \\
 l=4. \quad A_1: P_0^4, \sqrt{2} P_4^4 \cos 4\varphi & & & & \\
 A_2: \sqrt{2} P_4^4 \sin 4\varphi & & & & \\
 B_2: \sqrt{2} P_2^4 \cos 2\varphi & & & & \\
 B_1: \sqrt{2} P_2^4 \sin 2\varphi & & & & \\
 E: \sqrt{2} P_1^4 \frac{\cos}{\sin} \varphi, \sqrt{2} P_3^4 \frac{\cos}{\sin} 3\varphi. & & & &
 \end{aligned}$$

При $l < 3$ каждое неприводимое представление встречается в разложении только один раз, следовательно, собственные волновые функции в нулевом порядке теории возмущений для этого случая мы уже получили. При $l=3$ представление $D^{(3)}$ содержит представление E дважды. Таким образом, собственные функции в нулевом порядке теории возмущений для представлений A_2 , B_1 и B_2 — это те функции, которые приведены в (9.51), но для представления E нам придется решать секулярное уравнение. Заметим, что только $\cos \varphi$ и $\cos 3\varphi$ ($\sin \varphi$ и $\sin 3\varphi$) оказываются связанными друг с другом, поскольку они принадлежат одной строке представления. Решение секулярного уравнения предоставляется читателю в качестве задачи.

Задача. Решите секулярное уравнение и найдите собственные функции в нулевом порядке теории возмущений для E -уровней при $l=3$.

Наш основной результат состоит в том, что собственные функции в нулевом порядке не будут более полностью определяться

соображениями симметрии. Эти функции зависят от природы возмущающего поля. При $l=4$ мы точно так же должны были бы решать секулярное уравнение для A_1 -уровня и E -уровня.

Далее, найдем собственные функции для кристалла, обладающего гексагональной симметрией, например симметрией группы D_6 . Мы рассуждаем так же, как в случае тетрагональной группы.

За исключением тех случаев, когда m кратно 3, $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$ на этот раз оказываются связанными между собой. Собственные функции различных представлений группы D_6 даны в табл. 40. Мы снова выпишем эти функции для нескольких первых значений l :

$$\begin{aligned}
 l=0. \quad A_1: \quad P_0^0 & & l=1. \quad A_2: \quad P_0^1 \\
 & & E_1: \quad \sqrt{2} P_1^1 \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \varphi \\
 l=2. \quad A_1: \quad P_0^2 & & l=3. \quad A_2: \quad P_0^3 \\
 E_2: \quad \sqrt{2} P_2^2 \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} 2\varphi & & B_1: \quad \sqrt{2} P_3^3 \cos 3\varphi \\
 E_1: \quad \sqrt{2} P_1^2 \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \varphi & & B_2: \quad \sqrt{2} P_3^3 \sin 3\varphi \\
 & & E_2: \quad \sqrt{2} P_2^3 \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} 2\varphi \\
 & & E_1: \quad \sqrt{2} P_1^3 \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \varphi \quad (9.52) \\
 l=4. \quad A_1: \quad P_0^4 & & \\
 B_2: \quad \sqrt{2} P_3^4 \cos 3\varphi & & \\
 B_1: \quad \sqrt{2} P_3^4 \sin 3\varphi & & \\
 E_2: \quad \sqrt{2} P_2^4 \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} 2\varphi, \quad \sqrt{2} P_4^4 \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} 4\varphi & & \\
 E_1: \quad \sqrt{2} P_1^4 \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \varphi & &
 \end{aligned}$$

При $l=4$ мы должны были бы решать секулярное уравнение для E_2 -уровней.

Угловое распределение плотности заряда для вырожденного состояния находят, вычисляя сумму квадратов модулей волновых функций при различных значениях m , соответствующих данному состоянию. Таким образом, плотность заряда оказывается равной сумме всех сферических функций, принадлежащих заданному значению l , и вследствие этого сферически симметрична. В поле внутри кристалла уровни, принадлежащие данному l , расщепляются, в силу чего распределение заряда перестает быть сферически симметричным. Асимметрия распределения заряда связана со структурой кристалла.

В случае тетрагональной группы симметрия кристалла сказывается прежде всего на P -состоянии. Для A_2 -уровня заряд сосредоточен вдоль оси Z (главной оси), так как плотность его изменяется как $\cos^2 \theta$; для E -уровня плотность изменяется как $\sin^2 \theta$ и заряд сосредоточен в плоскости XY . В свободном атоме оба эти состояния будут иметь одну и ту же энергию, но неэквивалентность оси Z и осей X и Y в кристалле снимает вырождение. В D -состоянии мы

Таблица 40

**Собственные функции неприводимых
представлений гексагональной группы**

Представления		Собственные функции
нечетные l	четные l	
A_2	A_1	$P_0^l \cdot \sqrt{2} P_{6\mu}^l \cos 6\mu\varphi$
A_1	A_2	$\sqrt{2} P_{6\mu}^l \sin 6\mu\varphi$
B_1	B_2	$\sqrt{2} P_{6\mu+3}^l \cos (6\mu+3)\varphi$
B_2	B_1	$\sqrt{2} P_{6\mu+3}^l \sin (6\mu+3)\varphi$
E_2	E_2	$\sqrt{2} P_{6\mu\pm 2}^l \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (6\mu\pm 2)\varphi$
E_1	E_1	$\sqrt{2} P_{6\mu\pm 1}^l \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (6\mu\pm 1)\varphi$

получим B_2 - и B_1 -уровни, для которых плотность заряда изменяется как $\sin^4 \theta \cos^2 2\varphi$ и $\sin^4 \theta \sin^2 2\varphi$ соответственно. В обоих случаях заряд сосредоточен в плоскости XY , но для B_2 -уровня плотность выше вдоль осей кристалла X и Y , а для B_1 -уровня — вдоль прямых $\varphi = 45^\circ$ и 135° . Аналогичные соображения применимы и к распределению плотности заряда в случае гексагональной симметрии кристалла. Этот вид симметрии прежде всего отчетливо проявляется в уровнях, возникающих из F -состояния свободного атома. Волновые функции для B_1 - и B_2 -уровней сосредоточены в основных гексагональных плоскостях, но в случае B_1 -уровня плотность изменяется как $\cos^2 3\varphi$ и максимальна при $\varphi = m\pi/3$, в то время как для B_2 -уровня плотность изменяется как $\sin^2 3\varphi$. Кроме того, вся картина распределения плотности для B_2 -уровня сдвинута на 30° относительно картины распределения плотности для B_1 -уровня.

Рассмотрим, наконец, случай кубической симметрии (группа O). Существенная особенность этой симметрии состоит в эквивалентности координат x , y и z . Метод нахождения функций нулевого порядка,

принадлежащих различным неприводимым представлениям, заключается в следующем. При данном l выразим функции

$$r^l P_m^l(\theta) \frac{\cos}{\sin} m\varphi$$

в виде многочленов относительно x , y и z . Произведем все возможные перестановки переменных x , y и z . Многочлены, которые при этих перестановках преобразуются друг в друга, принадлежат одному и тому же неприводимому представлению. При $l=0$ мы имеем многочлен $P_0^0=1$, принадлежащий единичному представлению A_1 . При $l=1$ (P -состояние) многочлен $rP_0^1=z$ преобразуется в многочлены x и y при перестановках координат, откуда следует, что P -уровень полем внутри кристалла не расщепляется. Чтобы решить вопрос, принадлежит ли эта система многочленов представлениям F_1 или F_2 , рассмотрим действие на нее операции C_4 (поворота на угол $\pi/2$ вокруг оси Z), которая приводит к замене x на y , y на $-x$, z на z . Характер равен 1, поэтому эти многочлены принадлежат F_1 -уровню. При $l=2$ мы начнем с многочлена

$$r^2 P_0^2(\theta) = \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{3}{2} z^2 - \frac{1}{2} \right).$$

В результате перестановок получим многочлены

$$\frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}(3y^2 - 1).$$

Оба эти многочлена можно представить в виде линейных комбинаций многочленов $r^2 P_2^2 \cos 2\varphi$ и $r^2 P_0^2$:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 1 &= 3 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - 1 = \frac{3}{2} \sin^2 \theta + \frac{3}{2} \sin^2 \theta \cos 2\varphi - 1 = \\ &= \frac{3}{2} \sin^2 \theta \cos 2\varphi - \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Точно так же, если начать с

$$r^2 P_1^2 \cos \varphi, \quad \text{или} \quad zx,$$

то в результате перестановок получаются многочлены xu и yz , которые пропорциональны соответственно

$$\sin^2 \theta \sin 2\varphi (= P_2^2 \sin 2\varphi) \quad \text{и} \quad \sin \theta \cos \theta \sin \varphi (= P_1^2 \sin \varphi).$$

Применив операцию C_4 , получим

$$C_4(xu) = -xu, \quad C_4(xz) = yz, \quad C_4(yz) = -xz,$$

откуда следует, что характер C_4 равен -1 и рассматриваемые функции принадлежат F_2 -уровню.

Таблица 41

Уровень	Представление	Собственные функции кристалла
D_γ	E	$(2\gamma)_1 = P_0^2$ $(2\gamma)_2 = \sqrt{2} P_0^2 \cos 2\varphi$
D_ε	F_2	$(2\varepsilon)_1 = \sqrt{2} P_2^2 \sin 2\varphi$ $(2\varepsilon)_2 = \sqrt{2} P_1^2 \cos \varphi$ $(2\varepsilon)_3 = \sqrt{2} P_1^2 \sin \varphi$
F_β	A_2	$(3\beta) = \sqrt{2} P_2^3 \sin 2\varphi$
F_δ	F_1	$(3\delta)_1 = P_0^3$ $(3\delta)_2 = \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{5}{8}} P_3^3 \cos 3\varphi - \sqrt{\frac{3}{8}} P_1^3 \cos \varphi \right)$ $(3\delta)_3 = \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{5}{8}} P_3^3 \sin 3\varphi + \sqrt{\frac{3}{8}} P_1^3 \sin \varphi \right)$
F_ε	F_2	$(3\varepsilon)_1 = \sqrt{2} P_2^3 \cos 2\varphi$ $(3\varepsilon)_2 = \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{3}{8}} P_3^3 \cos 3\varphi + \sqrt{\frac{5}{8}} P_1^3 \cos \varphi \right)$ $(3\varepsilon)_3 = \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{3}{8}} P_3^3 \sin 3\varphi - \sqrt{\frac{5}{8}} P_1^3 \sin \varphi \right)$
G_α	A_1	$(4\alpha) = \sqrt{\frac{7}{12}} P_0^4 + \sqrt{\frac{10}{12}} P_4^4 \cos 4\varphi$
G_γ	E	$(4\gamma)_1 = \sqrt{2} P_2^4 \cos 2\varphi$ $(4\gamma)_2 = \sqrt{\frac{5}{12}} P_0^4 - \sqrt{\frac{14}{12}} P_4^4 \cos 4\varphi$

Продолжение

Уровень	Представление	Собственные функции кристалла
G_δ	F	$(4\delta)_1 = \sqrt{2} P_4^4 \sin 4\varphi$ $(4\delta)_2 = \sqrt{\frac{7}{4}} P_1^4 \cos \varphi - \sqrt{\frac{1}{4}} P_3^4 \cos 3\varphi$ $(4\delta)_3 = \sqrt{\frac{7}{4}} P_1^4 \sin \varphi + \sqrt{\frac{1}{4}} P_3^4 \sin 3\varphi$
G_ϵ	F	$(4\epsilon)_1 = \sqrt{2} P_2^4 \sin 2\varphi$ $(4\epsilon)_2 = \sqrt{\frac{1}{4}} P_1^4 \cos \varphi + \sqrt{\frac{7}{4}} P_3^4 \cos 3\varphi$ $(4\epsilon)_3 = \sqrt{\frac{1}{4}} P_1^4 \sin \varphi - \sqrt{\frac{7}{4}} P_3^4 \sin 3\varphi$

Мы составили таблицу функций в нулевом порядке при $l=4$ (табл. 41). Обозначения уровней в кристалле и собственных функций заимствованы у Бете.

В случае кубической симметрии вновь проявляется влияние структуры кристалла на плотность заряда. Так, D -электрон атома в кристалле кубической симметрии будет находиться либо в E -состоянии, либо в F_2 -состоянии в зависимости от того, какое из этих состояний имеет меньшую энергию. Если таким состоянием окажется E -состояние, то угловое распределение плотности заряда будет иметь вид

$$(P_0^2)^2 + 2(P_2^2)^2 \cos^2 2\varphi = \frac{5}{4} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{15}{8} \sin^4 \theta \cos^2 2\varphi.$$

Эта плотность заряда достигает своего максимального значения на осях 4-го порядка. Вдоль осей 3-го порядка ($\cos \theta = 1/\sqrt{3}$, $\varphi = \pi/4$) она будет обращаться в нуль. С другой стороны, если электрон находится в F_2 -состоянии, его плотность заряда должна быть дополнением к плотности заряда для E -состояния (поскольку их сумма должна быть сферически симметричной), поэтому плотность заряда в F_2 -состоянии будет равна нулю вдоль координатных осей и достигать максимального значения вдоль осей 3-го порядка.

Задачи. 1. Найдите волновые функции в нулевом порядке при $l=3$ для кристаллов кубической симметрии.

2. Опишите плотность заряда для состояний кристалла кубической симметрии, возникающих из F -состояния свободного атома.

§ 6. Двухзначные представления группы вращений. Двумерная унитарная унимодулярная группа

Как мы показали, представления $D^{(l)}$ группы вращений образуют полную систему, если потребовать, чтобы наши матрицы были однозначными функциями параметров группы. Но мы знаем, что существуют системы функций, у которых трансформационные свойства при вращении отличаются от свойств сферических функций, образующих базисы представлений $D^{(l)}$. Наши представления были получены при рассмотрении функций от пространственных координат x, y, z . Нам часто приходится иметь дело с физическими системами, которые обладают дополнительными внутренними степенями свободы (спином). При вращении в пространстве изменяются не только пространственные, но и внутренние координаты такой физической системы. Если мы совершим поворот на угол $\delta\varphi$ вокруг оси Z , любая функция ψ , зависящая от пространственных координат и внутренних переменных, изменится на бесконечно малую величину $\delta\psi$ (пропорционально $\delta\varphi$). Таким образом,

$$\delta\psi = iJ_z\psi\delta\varphi, \quad (9.53)$$

где J_z — эрмитов инфинитезимальный оператор поворота вокруг оси Z . Точно так же мы введем инфинитезимальные операторы J_x и J_y , соответствующие вращениям вокруг других координатных осей. Соотношения коммутации для операторов J_ν задаются формулами (8.101). Как доказывается в учебниках квантовой механики, из этих соотношений коммутации следует, что собственные значения операторов J_ν образуют систему чисел, изменяющихся от $-j$ до $+j$ с шагом 1, и что j должно быть либо целым, либо полуцелым. Представления, которые мы до сих пор рассматривали, соответствуют целым j (момент количества движения равен целому числу). Теперь мы хотим рассмотреть другой случай, когда число базисных функций неприводимого представления четно. Начнем с простейшего случая $j = \frac{1}{2}$, поскольку, как мы видели при рассмотрении связанных систем, все остальные случаи можно получить, составляя произведения представлений.

Рассмотрим какое-нибудь представление, пользуясь двумя комплексными переменными u, v . При пространственных вращениях переменные u и v переходят в линейные комбинации

$$u' = au + bv, \quad v' = cu + dv. \quad (9.54)$$

Коэффициенты преобразования зависят от того конкретного вращения, которое рассматривается. С физической точки зрения мы хотим,

чтобы плотность вероятности $|u|^2 + |v|^2$ была инвариантна, вследствие чего для нас представляют интерес только унитарные преобразования. Кроме того, заметим, что если взять две пары функций u_1, v_1 и u_2, v_2 , каждая из которых преобразуется по (9.54), то в результате такого преобразования функция $u_1 v_2 - u_2 v_1$ будет просто умножаться на $(ad - bc)$. Таким образом, функция $u_1 v_2 - u_2 v_1$ образует базис одномерного представления группы вращений, которое должно совпадать с полученным нами ранее представлением $D^{(0)}$. Поскольку базисная функция представления $D^{(0)}$ инвариантна относительно пространственных вращений, мы видим, что следует наложить требование $ad - bc = 1$. После этого мы получим группу двумерных унитарных унимодулярных преобразований — группу $\mathcal{U}_2$. [Другое обозначение этой группы $SU(2)$.] Для таких преобразований

$$\begin{aligned} aa^* + bb^* &= 1, & cc^* + dd^* &= 1, \\ a^*c + b^*d &= 0, & ad - bc &= 1. \end{aligned} \quad (9.55)$$

Разрешив последнее уравнение относительно d и подставив полученное значение в остальные соотношения, найдем

$$d = -\frac{a^*c}{b^*}, \quad -\frac{aa^*c}{b^*} - bc = 1, \quad c = -b^*, \quad d = a^*.$$

Мы пришли к рассмотрению группы $\mathcal{U}_2$ преобразований

$$\begin{aligned} u' &= au + bv \\ v' &= -b^*u + a^*v \quad (aa^* + bb^* = 1), \end{aligned} \quad (9.56)$$

которая обладает тремя независимыми вещественными параметрами. Теперь мы должны найти неприводимые представления унитарной группы и затем показать, как эти представления группы $\mathcal{U}_2$ позволяют получать представления группы вращений.

Одно представление группы $\mathcal{U}_2$ дают нам матрицы (9.56), а именно представление самими матрицами группы $\mathcal{U}_2$. Образую симметричные произведения этого представления с самим собой, мы можем строить другие представления. Симметричные произведения $u^2, uv, v^2 (= x_1, x_2, x_3)$, будучи однородными многочленами относительно u и v , при преобразованиях (9.56) преобразуются друг через друга. Из (9.56), взяв произведения, находим:

$$\begin{aligned} x'_1 &= a^2 x_1 + 2ab x_2 + b^2 x_3, \\ x'_2 &= -ab^* x_1 + (aa^* - bb^*) x_2 + a^* b x_3, \\ x'_3 &= b^{*2} x_1 - 2a^* b^* x_2 + a^{*2} x_3. \end{aligned} \quad (9.57)$$

Перепишем эти равенства, выразив их через $x_1 \pm x_3$, x_2 :

$$\begin{aligned}
 x'_1 - x'_3 &= (a^2 - b^{*2})x_1 + 2(ab + a^*b^*)x_2 + (b^2 - a^{*2})x_3 = \\
 &= \frac{1}{2}(a^2 - b^{*2} + b^2 - a^{*2})(x_1 + x_3) + 2(ab + a^*b^*)x_2 + \\
 &+ \frac{1}{2}(a^2 - b^{*2} - b^2 + a^{*2})(x_1 - x_3), \\
 x'_1 + x'_3 &= \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} + b^2 + b^{*2})(x_1 + x_3) + 2(ab - a^*b^*)x_2 + \quad (9.58) \\
 &+ \frac{1}{2}(a^2 - a^{*2} + b^{*2} - b^2)(x_1 - x_3), \\
 x'_2 &= \frac{1}{2}(a^*b - ab^*)(x_1 + x_3) + (aa^* - bb^*)x_2 - \\
 &- \frac{1}{2}(a^*b + ab^*)(x_1 - x_3).
 \end{aligned}$$

Пусть теперь

$$x = \frac{1}{2}(x_1 - x_3), \quad y = \frac{1}{2i}(x_1 + x_3), \quad z = x_2,$$

тогда

$$\begin{aligned}
 x' &= \frac{1}{2}(a^2 - b^{*2} - b^2 + a^{*2})x + \\
 &+ \frac{i}{2}(a^2 - b^{*2} + b^2 - a^{*2})y + (ab + a^*b^*)z, \\
 y' &= -\frac{i}{2}(a^2 + b^{*2} - b^2 - a^{*2})x + \quad (9.59) \\
 &+ \frac{1}{2}(a^2 + b^{*2} + b^2 + a^{*2})y - i(ab - a^*b^*)z, \\
 z' &= -(a^*b + ab^*)x + i(a^*b - ab^*)y + (aa^* - bb^*)z.
 \end{aligned}$$

Нам удалось сопоставить каждой матрице группы $\mathcal{U}_2$ некоторое преобразование переменных x , y , z . Кроме того, мы видим, что все коэффициенты в (9.59) вещественны. Если обе части равенств (9.59) возвести в квадрат, почленно сложить и воспользоваться соотношениями (9.55), то получим

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

следовательно, преобразование (9.59) есть вещественное ортогональное преобразование переменных x , y и z (с определителем, равным единице) и поэтому представляет собой чистое вращение. Итак, если нам задано какое-нибудь унитарное унимодулярное преобразование (9.56), мы можем воспользоваться преобразованием (9.59), чтобы найти связанное с этим преобразованием трехмерное вращение. Теперь

покажем, что таким способом все вращения можно сопоставить каким-то унитарным преобразованиям. Вращения характеризуются углами Эйлера α, β, γ . Если мы выберем унитарное преобразование с параметрами

$$a = e^{i\alpha/2}, \quad b = 0,$$

то соотношения (9.59) сведутся к соотношениям

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha, \quad z' = z, \quad (9.60)$$

т. е. выбранное нами преобразование будет поворотом $R(\alpha, 0, 0)$ на угол α вокруг оси Z :

$$\begin{bmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.61)$$

Если выбрать параметры

$$a = \cos \frac{\beta}{2}, \quad b = \sin \frac{\beta}{2},$$

то преобразование (9.59) примет вид

$$z' = z \cos \beta - x \sin \beta, \quad x' = z \sin \beta + x \cos \beta, \quad y' = y, \quad (9.62)$$

т. е. это преобразование представляет собой поворот $R(0, \beta, 0)$ на угол β вокруг оси Y :

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & \sin \frac{\beta}{2} \\ -\sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (9.63)$$

Итак, вращению общего вида

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R(\gamma, 0, 0) R(0, \beta, 0) R(\alpha, 0, 0)$$

мы ставим в соответствие унитарное преобразование

$$\begin{bmatrix} e^{i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & \sin \frac{\beta}{2} \\ -\sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{bmatrix}, \quad (9.64)$$

или

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{\beta}{2} e^{(i/2)(\alpha+\gamma)} & \sin \frac{\beta}{2} e^{(i/2)(\gamma-\alpha)} \\ -\sin \frac{\beta}{2} e^{(i/2)(\alpha-\gamma)} & \cos \frac{\beta}{2} e^{-(i/2)(\alpha+\gamma)} \end{bmatrix} \rightarrow R(\alpha, \beta, \gamma). \quad (9.65)$$

Мы получили в результате гомоморфное отображение унитарной группы $\mathcal{U}_2$ на группу вращений. Мы должны еще ответить на вопрос, сколько элементов группы $\mathcal{U}_2$ отображается в единицу группы

вращения. Из (9.65) мы видим, что в единичный элемент группы вращений отображаются две унитарные матрицы

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и

$$-1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Поэтому эти два элемента образуют инвариантную подгруппу группы $\mathcal{U}_2$, и произведения этих элементов и любого элемента группы $\mathcal{U}_2$ отображаются в один и тот же элемент группы вращений. Таким образом, каждому элементу группы вращений соответствуют два элемента унитарной группы, которые отличаются лишь тем, что все их коэффициенты имеют противоположные знаки. Элементы группового многообразия группы $\mathcal{U}_2$ находятся во взаимно однозначном соответствии с точками поверхности сферы в четырехмерном пространстве

$$|a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (9.56)$$

Поскольку сфера односвязна (см. задачу в § 14 гл. 8), групповое многообразие группы $\mathcal{U}_2$ односвязно. $\mathcal{U}_2$ имеет только однозначные представления (см. § 14 гл. 8) и служит универсальной накрывающей группой группы $O^+(3)$.

Если мы получим какое-нибудь представление группы $\mathcal{U}_2$, то матрицы этого представления будут связаны с соответствующим элементом группы вращений. Поскольку квадрат элемента

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

унитарной группы равен

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

отвечающая ему матрица в любом представлении должна быть равна единичной матрице, взятой со знаком плюс или минус, т. е. в любом представлении унитарной группы

$$D(-1) = \pm D(1).$$

Если в рассматриваемом представлении

$$D(-1) = D(1),$$

то для любого элемента u унитарной группы

$$D(-u) = D(u),$$

поэтому каждый элемент группы вращений оказывается поставленным в соответствие единственной матрице. Такие однозначные представления группы вращений должны совпадать с найденными нами ранее представлениями $D^{(l)}$. Если же в каком-либо представлении унитарной группы

$$D(-1) = -D(1),$$

то для каждого элемента u унитарной группы

$$D(-u) = -D(u),$$

и каждому вращению оказываются поставленными в соответствие две матрицы. Эти двухзначные представления группы вращений не являются представлениями в собственном смысле и к ним неприменимы выведенные нами ранее соотношения ортогональности. Как мы увидим далее, при рассмотрении двухзначных представлений группы вращений мы на самом деле переходим к унитарной группе (для которой это представление однозначно) и изучаем ее вместо группы вращений.

Наша первая задача состоит в том, чтобы найти все неприводимые представления унитарной группы. Метод построения представлений снова заключается в том, что мы образуем симметричные произведения так же, как мы делали это в частном случае в начале этого параграфа. Взяв переменные u и v и преобразовав их по формулам (9.56), рассмотрим совокупность произведений

$$u^{2j}, u^{2j-1}v, u^{2j-2}v^2, \dots, uv^{2j-1}, v^{2j}, \quad (9.66)$$

или

$$f_m = \frac{u^{j+m}v^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \quad (m = -j, -j+1, \dots, j-1, j) \quad (9.67)$$

где j принимает целые или полуцелые значения. [Числовые множители в (9.67) подобраны так, чтобы представления были унитарными.] При фиксированном j однородные полиномы f_m преобразуются друг через друга, если переменные u и v подвергать линейным преобразованиям (9.56). Поэтому эти полиномы образуют базис $(2j+1)$ -мерного представления унитарной группы. Например, при $j = 1/2$ имеем

$$f_{1/2} = u, \quad f_{-1/2} = v,$$

и нашим двумерным представлением унитарной группы является совокупность матриц (9.56). При $j = 1$ имеем

$$f_1 = u^2, \quad f_0 = uv, \quad f_{-1} = v^2,$$

и мы получаем трехмерное представление (9.57). Представления унитарной группы будем обозначать символами $D^{(j)}(a, b)$, где a и b — коэффициенты в формуле (9.56), характеризующие элементы группы

($aa^* + bb^* = 1$). Чтобы найти матрицы этого представления, применим к f_m преобразование (9.56), которое обозначим $R(a, b)$:

$$R(a, b) f_m = \frac{1}{V(j+m)! (j-m)!} (au + bv)^{j+m} (-b^*u + a^*v)^{j-m}. \quad (9.68)$$

Воспользовавшись разложением по формуле бинома, получим

$$\begin{aligned} R(a, b) f_m &= \sum_{\mu, \nu=0} \frac{1}{V(j+m)! (j-m)!} \frac{(j+m)!}{\mu! (j+m-\mu)!} \times \\ &\times (au)^{j+m-\mu} (bv)^\mu \frac{(j-m)!}{\nu! (j-m-\nu)!} (-b^*u)^{j-m-\nu} (a^*v)^\nu = \\ &= \sum_{\mu, \nu=0} \frac{V(j+m)! (j-m)!}{(j+m-\mu)! \mu! (j-m-\nu)! \nu!} \times \\ &\times a^{j+m-\mu} a^{*\nu} b^\mu (-b^*)^{j-m-\nu} u^{2j-\mu-\nu} v^{\mu+\nu}. \end{aligned} \quad (9.69)$$

Нам нет необходимости указывать верхние пределы изменения μ и ν , поскольку факториалы в знаменателе обратят результат в нуль, если мы выйдем за надлежащие пределы. Выразим теперь правую часть этого равенства через функции f_m . Пусть

$$\nu = j - \mu - m',$$

тогда

$$2j - \mu - \nu = j + m', \quad \mu + \nu = j - m'$$

и

$$\begin{aligned} R(a, b) f_m &= \sum_{m'} f_{m'} \sum_{\mu=0} \frac{[(j+m)! (j-m)! (j+m')! (j-m')!]^{1/2}}{(j+m-\mu)! \mu! (j-m'-\mu)! (m'-m+\mu)!} \times \\ &\times a^{j+m-\mu} a^{*j-m'-\mu} b^\mu (-b^*)^{m'-m+\mu} = \sum_{m'} f_{m'} D_{m'm}^{(j)}(a, b), \end{aligned} \quad (9.70)$$

или

$$\begin{aligned} D_{m'm}^{(j)}(a, b) &= \sum_{\mu} \frac{[(j+m)! (j-m)! (j+m')! (j-m')!]^{1/2}}{(j+m-\mu)! \mu! (j-m'-\mu)! (m'-m+\mu)!} \times \\ &\times a^{j+m-\mu} a^{*j-m'-\mu} b^\mu (-b^*)^{m'-m+\mu}. \end{aligned} \quad (9.71)$$

Заметим, что базисные функции f_m независимы и

$$\sum_m |f_m|^2 = \sum_m \frac{|u^{j+m} v^{j-m}|^2}{(j+m)! (j-m)!} = \frac{1}{(2j)!} \{|u|^2 + |v|^2\}^{2j}, \quad (9.72)$$

следовательно, сумма $\sum_m |f_m|^2$ инвариантна относительно унитарных преобразований, и наши представления унитарны.

Явное выражение (9.71) для матриц $D_{m'm}^{(j)}(a, b)$ чрезвычайно сложно. В частном случае при $m' = j$ множитель $(j - m' - \mu)!$ в знаменателе обращает в нуль все члены, за исключением члена с $\mu = 0$

$$D_{jm}^{(j)}(a, b) = \sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}} a^{j+m} (-b^*)^{j-m}. \quad (9.73)$$

Из (9.73) видно, что матричные коэффициенты $D_{jm}^{(j)}(a, b)$ в общем случае отличны от нуля.

В частном случае $a = e^{i\alpha/2}$, $b = 0$, в соотношении (9.71) остается только член с $\mu = 0$, и мы получаем

$$D_{m'm}^{(j)}(e^{i\alpha/2}, 0) = \delta_{m'm} e^{im\alpha}. \quad (9.74)$$

Пользуясь матрицами частного вида (9.73) и (9.74), можно показать, что представления $D^{(j)}(a, b)$ неприводимы. Метод остается таким же, как тот, которым мы пользовались в случае представлений $D^{(l)}$ группы вращений. Если матрица A коммутирует с диагональной матрицей $D^{(j)}(e^{i\alpha/2}, 0)$, то она должна иметь только диагональные элементы:

$$A_{m'm} = a_m \delta_{m'm}.$$

Если A коммутирует с унитарной матрицей $D^{(j)}(a, b)$ общего вида, то, взяв компоненту jm произведений AD и DA , получим

$$a_j D_{jm}^{(j)} = D_{jm}^{(j)} a_m \quad \text{при всех } m.$$

Из (9.73) следует, что

$$D_{jm}^{(j)} \neq 0,$$

поэтому

$$a_m = a_j \quad \text{при всех } m.$$

Мы показали, таким образом, что матрица, коммутирующая со всеми матрицами нашего представления, кратна единичной матрице. В силу этого представления $D^{(j)}(a, b)$ неприводимы. При различных j размерности представлений $D^{(j)}$ будут различными, поэтому эти представления неэквивалентны.

Чтобы найти характеры различных представлений $D^{(j)}(a, b)$, заметим, что всякую унитарную унимодулярную матрицу можно унитарным унимодулярным преобразованием привести к диагональному виду и что собственные значения такой матрицы представляют собой пары комплексно сопряженных чисел. Таким образом, каждая унитарная унимодулярная матрица эквивалентна одной из матриц вида

$$\begin{bmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{bmatrix}$$

и в любом представлении имеет тот же характер, что и эта матрица. Из (9.74) имеем

$$\chi^{(j)}(e^{ia/2}, 0) = \sum_{m=-j}^j e^{ima} = \frac{\sin(j+1/2)\alpha}{\sin \alpha/2}, \quad (9.75)$$

где α изменяется от 0 до 2π .

Представления $D^{(j)}(a, b)$ образуют полную систему неприводимых представлений группы $\mathcal{U}_2$. Характер любого другого представления (после умножения на функцию плотности группы) должен быть ортогонален всем характерам (9.75). Взяв разности, найдем

$$\chi^{(0)}(e^{ia/2}, 0) = 1, \quad \chi^{(1/2)} = 2 \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \chi^{(1)} - \chi^{(0)} = 2 \cos \alpha,$$

$$\chi^{(3/2)} - \chi^{(1/2)} = 2 \cos \frac{3\alpha}{2} \text{ и т. д.}$$

Эти функции образуют на отрезке от 0 до 2π полную систему, поэтому никаких других независимых представлений быть не может.

Представления $D^{(j)}(a, b)$ унитарной группы дают нам представления группы вращений. Пользуясь (9.65) и (9.70), получаем

$$\begin{aligned} D_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) &= D_{m'm}^{(j)} \left(\cos \frac{\beta}{2} e^{i(\gamma/2)(\alpha+\gamma)}, \sin \frac{\beta}{2} e^{i(\gamma/2)(\gamma-\alpha)} \right) = \\ &= \sum_{\mu} (-1)^{m'-m-\mu} \times \\ &\times \frac{[(j+m)! (j-m)! (j+m')! (j-m')!]^{1/2}}{(j+m-\mu)! \mu! (j-m'-\mu)! (m'-m+\mu)!} \times \\ &\times e^{im'\alpha} e^{im\gamma} \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{2j+m-m'-2\mu} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^{m'-m+2\mu}. \end{aligned} \quad (9.76)$$

Если требуется, мы можем исключить из формулы (9.71) и (9.76) множитель $(-1)^{m'-m}$, перейдя с помощью трансформации матрицей $\delta_{m'm}(-1)^m$ к эквивалентным представлениям.

Характеры элементов группы вращений можно получить из частного их вида (9.75), где $\alpha = \varphi$, $\beta = \gamma = 0$:

$$\chi^{(j)}(\varphi) = \sum_{m=-j}^j e^{im\varphi} = \frac{\sin(j+1/2)\varphi}{\sin \varphi/2}. \quad (9.77)$$

При целом j эти характеры совпадают с характерами представлений $D^{(l)}$, полученными ранее, так что представления $D^{(j)}$ при целом j совпадают с представлениями $D^{(l)}$. При полуцелом j каждому вращению сопоставляются две матрицы представления $\pm D^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Важно иметь в виду, что представления $D^{(j)}$ всегда являются однозначными представлениями унитарной группы. Двухзначные представления группы вращений для полуцелых j возникают вследствие того, что каждому вращению соответствуют две унитарные матрицы представления, отличающиеся только знаком. Двухзначность представления обусловлена существом дела. Если R и S — два вращений, то мы можем записать лишь

$$D^{(j)}(R)D^{(j)}(S) = \pm D^{(j)}(RS) \quad \left(j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \text{ и т. д.}\right) \quad (9.78)$$

и не можем выбрать знак единственным образом. В качестве примера рассмотрим группу, состоящую из тождественного преобразования E и поворота C_2 на угол π вокруг оси Z . Тождественному преобразованию E соответствуют две унитарные матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

в то время как, согласно (9.61), повороту C_2 соответствуют матрицы

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}.$$

Если матрицы представлений выбрать в виде

$$D(E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D(C_2) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix},$$

то

$$D(E)D(C_2) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = D(EC_2) = D(C_2),$$

но

$$D(C_2)D(C_2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -D(C_2^2) = -D(E). \quad (9.78a)$$

Знак „ $\pm$ “ в (9.78) существен, и произвольным выбором исключить эту неопределенность нельзя.

Переходя к группе зеркальных поворотов, мы включаем в группу вращений инверсию I . В случае унитарной группы соответствующий процесс можно осуществить лишь при условии, что мы будем рассматривать ее как абстрактную группу и присоединять к ней элемент I такой, что I^2 равен единичному элементу унитарной группы, причем I коммутирует со всеми элементами унитарной группы. В любом представлении унитарной группы матрица, соответствующая элементу I , должна быть равна единичной матрице, взятой со знаком плюс или минус. То же справедливо и для I . Заметим, что соответствие $I \rightarrow I$ является *единственным* случаем, когда элементу группы

зеркальных поворотов сопоставлен *единственный* элемент (расширенной) унитарной группы. При целом j мы получим те же результаты, что и раньше. Вращению R соответствует матрица представления $D^{(j)}(R)$; если элементу $I(I)$ соответствует матрица (1) , то матрица $D^{(j)}(RI)$ совпадает с матрицей представления $D^{(j)}(R)$; если же элементу $I(I)$ соответствует матрица (-1) , то матрица $D^{(j)}(RI)$ совпадает с матрицей $-D^{(j)}(R)$ (в соответствии с проведенным нами рассмотрением положительных и отрицательных представлений). Однако при целом j представлением элемента R будет служить пара матриц $\pm D^{(j)}(R)$, в результате чего при любом выборе матрицы, соответствующей элементу I , мы получим

$$D^{(j)}(RI) = \pm D^{(j)}(R).$$

§ 7. Расщепление атомных уровней в полях внутри кристаллов. Двузначные представления кристаллографических точечных групп

Теперь мы должны рассмотреть ту же задачу о возмущении, которую мы изучали в случае целых представлений. Как расщепляется уровень какого-нибудь атома, когда симметрия понижается до симметрии одной из кристаллографических точечных групп? Мы не можем применять в этом случае те методы, какие мы применяли раньше, ибо соотношения ортогональности применимы только к однозначным представлениям. Прежде всего мы должны найти двузначные представления кристаллографических групп так же, как мы нашли двузначные представления полной группы вращений.

Метод, который обычно излагается для нахождения двузначных представлений кристаллографических групп, носит весьма искусственный характер. Попытаемся показать, что он правдоподобен. Когда мы хотим найти двузначные представления группы C_2 [см. (9.78)], мы рассматриваем группу C_2' , состоящую из четырех унитарных матриц, т. е.

$$\begin{array}{ccc}
 & E & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 E & & R
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & C_2 & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 C_2 & & C_2 R
 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \quad (9.79)$$

и находим ее представления. Всякое представление, в котором элемент R имеет тот же характер, что и элемент E , будет однозначным представлением группы C_2 . Если же характер элемента R равен характеру элемента E , взятому со знаком минус, то мы имеем дело

с двузначным представлением группы $\mathcal{C}_2$. Чтобы получить все представления группы $\mathcal{C}_2$, нам необходимо найти представления группы $\mathcal{C}'_2$ унитарных матриц, которые указаны в (9.79). Этот метод нахождения представлений точечной группы правилен, но обладает тем недостатком, что мы теряем интуитивное представление об элементах группы как о геометрических операциях. Поэтому мы пытаемся формально рассматривать группу, состоящую из четырех операций (9.79), как совокупность геометрических преобразований. Из (9.79) мы видим, что $\mathcal{C}_2^2 = R$; последовательные повороты на угол π вокруг заданной оси не приводят к тождественному преобразованию. К обычной группе вращений мы формально добавляем элемент R , соответствующий повороту на угол 2π вокруг оси, и образуем все возможные произведения элемента R с элементами группы вращений. При этом мы получаем то, что называется *двойной группой*, соответствующей первоначальной группе вращений.

В качестве другого примера рассмотрим группу D_2 . Эта группа абелева, она содержит четыре элемента C_x, C_y, C_z, E , принадлежащих четырем классам. Чтобы найти все представления группы D_2 (целые и полуцелые), мы должны перейти к той подгруппе группы $\mathcal{U}_2$, которая соответствует D_2 . Эту подгруппу D'_2 можно найти из (9.61) и (9.63):

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{c} \swarrow E \searrow \\ E \quad R \end{array} & \begin{array}{c} \swarrow C_z \searrow \\ C_z \quad C_z R \end{array} & \begin{array}{c} \swarrow C_y \searrow \\ C_y \quad C_y R \end{array} & \begin{array}{c} \swarrow C_x \searrow \\ C_x \quad C_x R \end{array} \\
 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}
 \end{array} \quad (9.80)$$

Заметим, что группа D'_2 неабелева:

$$C_x C_y = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = C_z R, \quad C_y C_x = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = C_z.$$

Кроме того,

$$C_x^2 = C_y^2 = C_z^2 = R,$$

поэтому последовательные повороты на угол 2π вокруг любой оси приводят к элементу R , который мы будем рассматривать как поворот на угол 2π . Из (9.80) также можно видеть, что $R^2 = E$. Таким образом, двойную группу D'_2 можно считать группой вращений, в которой мы возвращаемся к тождественному преобразованию лишь после поворота на 4π . Теперь мы получим все представления двойных групп, соответствующие различным точечным группам.

Чтобы найти все представления групп $\mathcal{C}_n$, мы перейдем к двойным группам $\mathcal{C}'_n$, содержащим $2n$ элементов

$$C_n, C_n^2, \dots, C_n^n = R, C_n R, C_n^2 R, \dots, C_n^n R = C_n^{2n} = E.$$

Двойные группы $\mathcal{C}'_n$ являются циклическими абелевыми группами, порожденными элементом C_n с периодом, теперь уже равным $2n$. Так как $\mathcal{C}'_n$ абелева группа, она имеет $2n$ одномерных представлений. Базисными функциями различных представлений группы $\mathcal{C}'_n$ служат функции

$$1, e^{i\varphi/2}, e^{i\varphi}, e^{3i\varphi/2}, \dots, e^{i(n-1/2)\varphi}. \quad (9.81)$$

Применяя C_n к любой из базисных функций, получаем

$$C_n^n e^{im\varphi} = e^{-2\pi i m/n} e^{im\varphi}. \quad (9.82)$$

При целом m

$$C_n^n e^{im\varphi} = e^{im\varphi},$$

так что мы приходим к однозначным представлениям, перечисленным в таблицах гл. 4. При полуцелом m имеем

$$C_n^n e^{im\varphi} = -e^{im\varphi},$$

что приводит к двузначным представлениям группы $\mathcal{C}_n$.

В случае группы $\mathcal{C}'_2$ базисные функции 1 и $e^{i\varphi}$ задают однозначные представления. Для функций $e^{i\varphi/2}$ и $e^{-i\varphi/2}$ находим

$$C_2 e^{\pm i\varphi/2} = e^{\pm (i/2)(\varphi-\pi)} = \mp i e^{\pm i\varphi/2}.$$

Двузначные (комплексно сопряженные) представления имеют вид

$$\begin{array}{c|cccc} \mathcal{C}'_2 & E & R & C_2 & C_2 R \\ \hline E' \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \right. & \begin{array}{cccc} 1 & -1 & i & -i \\ 1 & -1 & -i & i \end{array} \end{array} \quad (9.83)$$

Штрих означает двузначное представление. Отметим одно общее свойство: в однозначном представлении любой элемент S и элемент SR имеют одинаковые характеры, в любом же двузначном представлении характеры этих элементов имеют противоположные знаки. Таким образом, характеры двузначных представлений автоматически оказываются ортогональными характерам однозначных представлений. Точно так же можно рассмотреть группы $\mathcal{C}'_3$, $\mathcal{C}'_4$ и $\mathcal{C}'_6$.

Задача. Найдите двузначные представления группы $\mathcal{C}_3$.

При рассмотрении однозначных представлений точечных групп мы обращали внимание на двусторонность осей. Если имелась ось 2-го порядка (вращение U_2), перпендикулярная оси n -го порядка, то элементы C_n^k и C_n^{n-k} принадлежали одному и тому же классу, потому что

$$U_2 C_n^k U_2^{-1} = U_2 C_n^k U_2 = C_n^{n-k}.$$

Тот же результат мы получали и тогда, когда плоскость отражения проходила через ось n -го порядка. (Этот случай сводится к предыдущему, так как $\sigma_v = IU_2$ и $\sigma_v C_n^k \sigma_v^{-1} = IU_2 C_n^k IU_2 = C_n^{n-k}$, поскольку операция I коммутирует со всеми элементами группы.) В двойных группах элементом, обратным элементу U_2 , оказывается не U_2 , а $U_2 R$, вследствие чего элементом, эквивалентным C_n^k , является элемент

$$U_2 C_n^k U_2 R = C_n^{n-k} R.$$

В группах D_n ось Z двусторонняя, поэтому элементы C_n^k и C_n^{n-k} принадлежат одному и тому же классу. Если же мы рассмотрим двойную группу D'_n , то элементы C_n^k и $C_n^{n-k} R$ окажутся в одном классе, а элементы C_n^{n-k} и $C_n^k R$ — в другом. Итак, вообще говоря, двойная группа имеет вдвое больше элементов, принадлежащих вдвое большему числу классов. Число классов не удваивается в одном частном случае: если n четно, то $C_n^{n/2}$ (поворот на угол π) образует в группе D_n класс, состоящий только из этого элемента, и, следовательно, порождает в двойной группе D'_n единственный класс $C_n^{n/2}$, $C_n^{n/2} R$. Наличие оси 2-го порядка при четном n приводит к тому, что число классов в двойной группе оказывается меньше удвоенного числа классов в первоначальной группе.

Остановимся на группе D'_2 , которую мы уже рассматривали раньше. В этом случае все оси двусторонние, поэтому двойная группа D'_2 имеет восемь элементов, принадлежащих 5 классам:

$$E; R; C_x, C_x R; C_y, C_y R; C_z, C_z R.$$

Существует пять неприводимых представлений группы D'_2 , и

$$\sum_{i=1}^5 n_i^2 = 8.$$

Из этих представлений мы уже нашли однозначные, в которых элементам E и R ставится в соответствие одна и та же матрица. Таких представлений было четыре, причем все они были одномерными. Таким образом, остается одно новое двузначное представление, размерность которого равна 2:

$$2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 8.$$

Его матрицы указаны в (9.80). Характеры приводятся в таблице:

D'_2	E	R	C_x $C_x R$	C_y $C_y R$	C_z $C_z R$
E'	2	-2	0	0	0

(9.84)

Отметим еще одно общее свойство двузначных представлений. Так как

$$D(SR) = -D(S),$$

то

$$\chi(SR) = -\chi(S).$$

Поэтому если элементы S и SR принадлежат одному и тому же классу, характер $\chi(S)$ должен быть равен нулю. Это будет выполняться для любого поворота на угол π вокруг двусторонней оси. Базисными функциями двумерного представления E' являются функции $e^{\pm i\varphi/2}$.

Группа D_3 имеет 6 элементов, принадлежащих 3 классам. Двойная группа D'_3 имеет 12 элементов, которые принадлежат 6 классам:

$$E; R; C_3, C_3^2R; C_3^2, C_3R; C_x(3); C_xR(3).$$

Поскольку эта группа не содержит поворотов на угол π вокруг двусторонней оси Z , мы удваиваем и число элементов и число классов и получаем три новых (двузначных) представления размерности 1, 1, 2.

В одномерном представлении

$$\chi(C_3^2) = [\chi(C_3)]^2,$$

но, поскольку элементы C_3^2 и C_3R принадлежат одному и тому же классу,

$$\chi(C_3^2) = -\chi(C_3),$$

откуда

$$\chi(C_3) = -1.$$

Точно так же, поскольку

$$C_x^2 = R \quad \text{и} \quad \chi(R) = -1,$$

мы получаем

$$\chi(C_x) = \pm i,$$

что дает нам два комплексно сопряженных одномерных представления. Так как у нас имеется лишь одно двумерное представление, его характеры должны быть вещественными. Например, для элемента C_x матрица представления имеет собственные значения $\pm i$, кратность каждого из них равна 1, откуда следует, что $\chi(C_x) = 0$. Так как $C_3^3 = R$, то собственные значения C_3 равны $-1, e^{\pm i\pi/3}$. В вещественное представление должна входить пара собственных значений $e^{\pm i\pi/3}$, из чего следует, что

$$\chi(C_3) = e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3} = 1.$$

Характеры двузначных представлений группы D'_3 даны в таблице:

D'_3	$C_3 \quad C_3^2$					
	E	R	$C_3^2 R$	$C_3 R$	$C_x(3)$	$C_x R(3)$
E'_1	1	-1	-1	1	i	$-i$
E'_2	1	-1	-1	1	$-i$	i
E'_2	2	-2	1	-1	0	0

(9.85)

Другой метод состоит в использовании соотношения (3.173). Если классы группы D'_3 мы перенумеруем в том же порядке, в каком это сделано в табл. (9.85), то

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_3^2 &= (C_3 + C_3^2 R)^2 = C_3^2 + C_3^4 R^2 + 2C_3^3 R = \\ &= C_3^2 + C_3 R + 2E = \mathcal{K}_4 + 2\mathcal{K}_1.\end{aligned}$$

откуда

$$c_{334} = 1 \quad \text{и} \quad c_{331} = 2.$$

Пользуясь соотношением (3.173), находим

$$4\chi_3^2 = \chi_1(2\chi_4 + 2\chi_1).$$

Так как

$$\chi_4 = -\chi_3 \quad \text{и} \quad \chi_1 = n,$$

получаем

$$4\chi_3^2 = n(-2\chi_3 + 2n).$$

При $n = 1$ выполняются равенства

$$4\chi_3^2 + 2\chi_3 = 2 \quad \text{и} \quad \chi_3 = -1 \quad \text{или} \quad \chi_3 = \frac{1}{2}.$$

Поскольку значение $1/2$ исключается (в одномерном представлении характер χ должен быть корнем из единицы), то оба одномерных представления имеют

$$\chi_3 = -1.$$

При $n = 2$ получаем равенства

$$4\chi_3^2 + 4\chi_3 = 8,$$

так что

$$\chi_3 = 1 \quad \text{или} \quad \chi_3 = -2.$$

Значение -2 исключается, поскольку сумма квадратов характеров была бы в этом случае больше порядка группы. Таким образом, мы снова получаем те же результаты, пользуясь методом, отличным от предложенного ранее. Применим теперь этот метод к группам D'_4 и D'_6 .

Двойная группа D'_4 имеет 16 элементов, принадлежащих 7 классам:

$$E \mid R \mid C_1 \mid C_4^3 \mid C_4^2 \mid C_2(2) \mid C_2'(2) \\ C_4^3 R \mid C_4 R \mid C_4^2 R \mid C_2 R(2) \mid C_2' R(2)$$

Группа D_4 имеет 8 элементов, принадлежащих 5 классам. Мы получаем два двумерных двузначных представления. Так как все оси двусторонние, имеем

$$\chi_5 = \chi_6 = \chi_7 = 0.$$

Кроме того,

$$\mathcal{K}_3^2 = (C_4 + C_4^3 R)^2 = C_4^2 + C_4^6 R^2 + 2C_4^4 R = \mathcal{K}_5 + 2\mathcal{K}_1,$$

откуда

$$c_{335} = 1, \quad c_{331} = 2.$$

Так как $\chi_5 = 0$, при $n = 2$ мы получаем

$$\chi_3^2 = 2, \quad \chi_3 = \pm \sqrt{2},$$

что дает нам два представления.

Аналогично в случае группы D'_6 мы имеем 24 элемента, принадлежащих 9 классам:

$$E \mid R \mid C_6 \mid C_6^2 \mid C_6^5 \mid C_6^4 \mid C_6^3 \mid C_2(3) \mid C_2'(3) \\ C_6^5 R \mid C_6^4 R \mid C_6^3 R \mid C_6^2 R \mid C_6 R \mid C_2 R(3) \mid C_2' R(3)$$

Группа же D_6 имеет 12 элементов, принадлежащих 6 классам. Поскольку в этом случае имеются три двузначных представления и $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 12$, они все имеют $n = 2$. В этом случае снова

$$\chi_7 = \chi_8 = \chi_9 = 0.$$

$\mathcal{K}_4^2 = \mathcal{K}_6 + 2\mathcal{K}_1$. При $n = 2$ $\chi_4^2 = \chi_6 + 2$. Но $\chi_6 = -\chi_4$, откуда $\chi_4^2 + \chi_4 = 2$ и $\chi_4 = 1$ или $\chi_4 = -2$.

$\mathcal{K}_3 \mathcal{K}_4 = \mathcal{K}_7 + \mathcal{K}_3$. Поскольку $\chi_7 = 0$, мы получаем $\chi_3 \chi_4 = \chi_3$ при $n = 2$, откуда $\chi_4 = 1$, если только $\chi_3 \neq 0$.

$\mathcal{K}_3^2 = \mathcal{K}_4 + 2\mathcal{K}_1$. В этом случае $\chi_3^2 = \chi_4 + 2$; $\chi_3 = \pm \sqrt{3}$ при $\chi_4 = 1$; $\chi_4 = -2$ при $\chi_3 = 0$.

Таким образом, мы получим три представления, которые приведены в табл. 42.

Двойная группа T' имеет 24 элемента, принадлежащих 7 классам:

$$E \mid R \mid C_3(4) \mid C_3 R(4) \mid C_3^2(4) \mid C_3^2 R(4) \mid C_2(3), C_2 R(3).$$

В то же время группа T имеет 12 элементов, принадлежащих 4 классам, вследствие чего мы получаем три новых двузначных представления. Так как комплексные представления появляются парами, то

Таблица 42

Таблица характеров двузначных представлений кристаллографических точечных групп

а)

D'_2					
	E	R	C_x $C_x R$	C_y $C_y R$	C_z $C_z R$
E'	2	-2	0	0	0

б)

D'_3						
	E	R	C_3 $C_3^2 R$	C_3^2 $C_3 R$	$C_x(3)$	$C_x R(3)$
E'_1	1	-1	-1	1	i	$-i$
E'_2	1	-1	-1	1	$-i$	i
E'_2	2	-2	1	-1	0	0

в)

D'_4							
	E	R	C_4 $C_4^3 R$	C_4^3 $C_4 R$	$C_2(2)$ $C_2 R(2)$	$C_2'(2)$ $C_2' R(2)$	C_4^2 $C_4^2 R$
E'_1	2	-2	2	-2	0	0	0
E'_2	2	-2	-2	2	0	0	0

г)

D'_6									
	E	R	C_6 $C_6^5 R$	C_6^2 $C_6^4 R$	C_6^5 $C_6 R$	C_6^4 $C_6^2 R$	C_6^3 $C_6^3 R$	$C_2(3)$ $C_2 R(3)$	$C_2'(3)$ $C_2' R(3)$
E'_1	2	-2	$\sqrt{3}$	1	$-\sqrt{3}$	-1	0	0	0
E'_2	2	-2	$-\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-1	0	0	0
E'_3	2	-2	0	-2	0	2	0	0	0

д)

T'							
	E	R	$C_3(4)$ $C_3 R(4)$	$C_3^2(4)$ $C_3^2 R(4)$	$C_3^3(4)$ $C_3^3 R(4)$	$C_2(3)$ $C_2 R(3)$	
E'	2	-2	1	-1	-1	1	0
G'	2	-2	ϵ	$-\epsilon$	$-\epsilon^2$	ϵ^2	0
G'	2	-2	ϵ^2	$-\epsilon^2$	$-\epsilon$	ϵ	0

Продолжение

e)			$C_3(4)$	$C_3^2(4)$	$C_4(3)$	$C_4^3(3)$	$C_4^2(3)$	$C_2(6)$	
	O'	E	R	$C_3^2R(4)$	$C_3R(4)$	$C_4^3R(3)$	$C_4R(3)$	$C_4^2R(3)$	$C_2R(6)$
	E'_1	2	-2	1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	0
	E'_2	2	-2	1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	0
	G'	4	-4	-1	1	0	0	0	0

по крайней мере одно из этих представлений должно иметь вещественные характеры. Если элемент C_3 в двумерном представлении должен иметь вещественный характер, то мы должны выбрать собственные значения $e^{i\pi/3}$ и $e^{-i\pi/3}$ так, что $\chi(C_3) = 1$. (Если бы мы выбрали два раза по -1 , то сумма квадратов характеров была бы больше порядка группы.) C_3^2 приводится к диагональному виду одновременно с C_3 . Поэтому

$$\chi(C_3^2) = e^{2i\pi/3} + e^{-2i\pi/3} = -1$$

и характеры равны 2; -2; 1; -1; -1; 1; 0. Простейший способ получения остальных двух представлений состоит в том, чтобы образовать произведения только что найденного представления и одномерных представлений, характеры которых равны соответственно 1; 1; ϵ ; ϵ ; ϵ^2 ; ϵ^2 ; 1 и 1; 1; 1; ϵ^2 ; ϵ^2 ; ϵ ; ϵ ; 1. В результате мы получим совокупность характеров 2; -2; ϵ ; - ϵ ; - ϵ^2 ; ϵ^2 ; 0 и 2; -2; ϵ^2 ; - ϵ^2 ; - ϵ ; ϵ ; 0.

Задача. Пользуясь соотношением (3.173), найдите характеры двузначных представлений группы T' .

Двойная группа O' имеет 48 элементов, принадлежащих 8 классам:

E	R	$C_3(4)$	$C_3^2(4)$	$C_4(3)$	$C_4^3(3)$	$C_4^2(3)$	$C_2(6)$
		$C_3^2R(4)$	$C_3R(4)$	$C_4^3R(3)$	$C_4R(3)$	$C_4^2R(3)$	$C_2R(6)$

Группа O имеет 24 элемента, принадлежащих 5 классам, поэтому существует три двузначных представления, и

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 24.$$

Два из этих представлений двумерные, третье — четырехмерное. Поскольку существует лишь одно четырехмерное представление, его характеры должны быть вещественными. В любом представлении

$$\chi_7 = \chi_8 = 0, \quad \chi_6 = -\chi_5 \quad \text{и} \quad \chi_4 = -\chi_3.$$

Сумма квадратов характеров неприводимого представления должна быть равна порядку группы, в силу чего

$$4^2 + (-4)^2 + 16\chi_3^2 + 12\chi_5^2 = 48,$$

или

$$4\chi_3^2 + 3\chi_5^2 = 4.$$

Если матрица C_4 приведена к диагональному виду, то 4 диагональных элемента следует выбирать среди собственных значений

$$e^{\pm i\pi/4} \quad \text{и} \quad e^{\pm 3i\pi/4}.$$

Единственный способ получить вещественный характер, не нарушая последнего выписанного нами соотношения, состоит в том, чтобы взять в качестве диагональных элементов все четыре собственных значения. В этом случае $\chi(C_4) = \chi_3 = 0$, следовательно, $\chi_3^2 = 1$, $\chi_3 = \pm 1$. Но C_3 имеет собственные значения

$$-1, \quad e^{\pm i\pi/3},$$

поэтому следует так выбрать из них четыре элемента матрицы C_3 , чтобы ее след был вещественным. Если мы возьмем пару $e^{\pm i\pi/3}$ дважды, то χ_3 будет иметь слишком большую величину и не будет удовлетворять условию $\chi_3 = \pm 1$. Мы должны выбрать числа $-1, -1, e^{\pm i\pi/3}$, что даст $\chi_3 = -1$. Итак, мы получаем систему характеров: 4; -4; -1; 1; 0; 0; 0; 0. Чтобы найти двумерные представления, воспользуемся теоремой, согласно которой их характеры должны быть ортогональны характеру только что полученного четырехмерного представления. Поскольку в этих представлениях

$$\chi(E) = 2, \quad \chi(R) = -2,$$

имеем соотношение

$$4 \cdot 2 + (-4)(-2) - 16\chi_3 = 0,$$

откуда

$$\chi_3 = 1.$$

Далее, приравняем сумму квадратов характеров порядку группы, т. е.

$$4 + 4 + 16 + 12\chi_5^2 = 48,$$

откуда

$$\chi_5 = \pm \sqrt{2}.$$

Для удобства двузначные представления точечных групп даны в табл. 42.

Теперь мы можем решить задачу о расщеплении уровней в поле H внутри кристалла для случая, когда рассматриваемый уровень при-

надлежит двузначному представлению группы вращений. Прежде всего ясно, что в разложении будут присутствовать только двузначные представления кристаллографической группы, поскольку одно- и двузначные представления всегда имеют ортогональные характеры. Для нахождения характеров элементов двойной группы в полуцелых представлениях $D^{(j)}$ мы воспользуемся формулой (9.77). Для тетрагональной двойной группы D'_4 из (9.77) получим

Угол

$$\varphi = 0: \quad \chi_1 = 2j + 1, \quad \chi_2 = -\chi_1;$$

$$\varphi = \pi: \quad \chi_5 = \chi_6 = \chi_7 = 0;$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}: \quad \chi_3 = \frac{\sin(j + 1/2)\pi/2}{\sin \pi/4} = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{при } j \equiv \frac{1}{2} \pmod{4}, \\ 0 & \text{при } j \equiv \frac{3}{2}, \frac{7}{2} \pmod{4}, \\ -\sqrt{2} & \text{при } j \equiv \frac{5}{2} \pmod{4}, \end{cases}$$

$$\chi_4 = -\chi_3.$$

(9.86)

Поскольку единственными независимыми характерами являются χ_1 и χ_3 , нам необходимо при разложении записывать только их. Результаты, полученные с помощью (9.86) и табл. 42 в, представлены в табл. 43.

Таблица 43

Характеры классов группы D'_4 в $(2j+1)$ -мерном представлении группы вращений			Разложение представления $D^{(j)}$ на неприводимые представления группы D'_4	Число уровней
j	K_1	K_3		
$\frac{1}{2}$	2	$\sqrt{2}$	E'_1	1
$\frac{3}{2}$	4	0	$E'_1 + E'_2$	2
$\frac{5}{2}$	6	$-\sqrt{2}$	$E'_1 + 2E'_2$	3
$\frac{7}{2}$	8	0	$2E'_1 + 2E'_2$	4
$4\lambda + j'$	$8\lambda + 2j' + 1$	То же, что для j'	$2\lambda(E'_1 + E'_2) + \text{Члены для } j'$	$j + \frac{1}{2}$

Для гексагональной группы D'_6 характеры классов в полуцелых представлениях $D^{(j)}$ равны соответственно:

Угол

$$\varphi = 0: \quad \chi_1 = 2j + 1, \quad \chi_2 = -\chi_1;$$

$$\varphi = \pi: \quad \chi_7 = \chi_8 = \chi_9 = 0;$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3}: \quad \chi_3 = \frac{\sin(j + 1/2) \pi/3}{\sin \pi/6} = \begin{cases} \sqrt{3} & \text{при } j \equiv \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \pmod{6}, \\ 0 & \text{при } j \equiv \frac{5}{2}, \frac{11}{2} \pmod{6}, \\ -\sqrt{3} & \text{при } j \equiv \frac{7}{2}, \frac{9}{2} \pmod{6}; \end{cases} \quad (9.87)$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{3}: \quad \chi_4 = \frac{\sin(j + 1/2) 2\pi/3}{\sin \pi/3} = \begin{cases} 1 & \text{при } j \equiv \frac{1}{2} \pmod{3}, \\ -1 & \text{при } j \equiv \frac{3}{2} \pmod{3}, \\ 0 & \text{при } j \equiv \frac{5}{2} \pmod{3}; \end{cases}$$

$$\chi_5 = -\chi_3, \quad \chi_6 = -\chi_4.$$

В разложение мы должны включать только χ_1 , χ_3 и χ_4 . Воспользовавшись снова таблицей характеров для группы D'_6 (табл. 42г), мы получим результаты, перечисленные в табл. 44.

Для кубической двойной группы O' характеры имеют следующие значения:

Угол

$$\varphi = 0: \quad \chi_1 = 2j + 1, \quad \chi_2 = -\chi_1;$$

$$\varphi = \pi: \quad \chi_7 = \chi_8 = 0;$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{3}: \quad \chi_3 = \frac{\sin(j + 1/2) 2\pi/3}{\sin \pi/3} = \begin{cases} 1 & \text{при } j \equiv \frac{1}{2} \pmod{3}, \\ -1 & \text{при } j \equiv \frac{3}{2} \pmod{3}, \\ 0 & \text{при } j \equiv \frac{5}{2} \pmod{3}; \end{cases} \quad (9.88)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}: \quad \chi_5 = \frac{\sin(j + 1/2) \pi/2}{\sin \pi/4} = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{при } j \equiv \frac{1}{2} \pmod{4}, \\ 0 & \text{при } j \equiv \frac{3}{2}, \frac{7}{2} \pmod{4}, \\ -\sqrt{2} & \text{при } j \equiv \frac{5}{2} \pmod{4}; \end{cases}$$

$$\chi_4 = -\chi_3, \quad \chi_6 = -\chi_5.$$

Результаты соответствующих разложений приведены в табл. 45.

Таблица 44

Характеры классов группы D'_6 в $(2j+1)$ -мерном представлении группы вращений				Разложение представления $D(j)$ на неприводимые представления группы D'_3	Число уровней
j	K_1	K_2	K_3		
$\frac{1}{2}$	2	$\sqrt{3}$	1	E'_1	1
$\frac{3}{2}$	4	$\sqrt{3}$	-1	$E'_1 + E'_3$	2
$\frac{5}{2}$	6	0	0	$E'_1 + E'_2 + E'_3$	3
$\frac{7}{2}$	8	$-\sqrt{3}$	1	$E'_1 + 2E'_2 + E'_3$	4
$\frac{9}{2}$	10	$-\sqrt{3}$	-1	$E'_1 + 2E'_2 + 2E'_3$	5
$\frac{11}{2}$	12	0	0	$2E'_1 + 2E'_2 + 2E'_3$	6
$6\lambda + j'$	$2j+1$	То же, что для j'		$2\lambda(E'_1 + E'_2 + E'_3) +$ + Члены для j'	$j + \frac{1}{2}$

Таблица 45

Характеры классов группы O' в $(2j+1)$ -мерном представлении группы вращений				Разложение представления $D(j)$ на неприводимые представления группы O'	Число уровней
j	K_1	K_2	K_3		
$\frac{1}{2}$	2	1	$\sqrt{2}$	E'_1	1
$\frac{3}{2}$	4	-1	0	G'	1
$\frac{5}{2}$	6	0	$-\sqrt{2}$	$E'_2 + G'$	2
$\frac{7}{2}$	8	1	0	$E'_1 + E'_2 + G'$	3
$\frac{9}{2}$	10	-1	$\sqrt{2}$	$E'_1 + 2G'$	3
$\frac{11}{2}$	12	0	0	$E'_1 + E'_2 + 2G'$	4
$6 + j'$				$E'_1 + E'_2 + 2G' +$ Члены для j' , в которых E'_1 и E'_2 переставлены местами	4 + Число уровней для j'
$12\lambda + j'$				$2\lambda(E'_1 + E'_2 + 2G') +$ Члены для j'	$8\lambda +$ Число уровней для j'

Задача. Выпишите разложения двузначных представлений группы вращений для кристаллов, обладающих симметрией групп D_3 и T .

§ 8. Связанные системы. Сложение моментов количества движения. Коэффициенты Клебша — Гордана

Когда физик рассматривает задачу о связи двух подсистем, гамильтонианы которых инвариантны относительно группы вращений, он складывает „моменты количества движения“ этих подсистем, чтобы получить момент количества движения всей системы. Мы намерены прежде всего показать связь между этим методом, использующим алгебру Ли, и нашим методом, использующим группу Ли.

Так же как и в § 4 гл. 6, рассмотрим две подсистемы, обозначенные цифрами 1 и 2; у каждой из них в отдельности гамильтониан инвариантен относительно группы вращений. Каждому вращению R_1 первой системы сопоставлен некоторый оператор O_{R_1} в гильбертовом пространстве системы 1, и аналогично каждому вращению S_2 второй системы сопоставлен некоторый оператор O_{S_2} в гильбертовом пространстве системы 2. Для операторов O_{R_1} получим соответствующие им инфинитезимальные операторы $J_1 (J_{1x}, J_{1y}, J_{1z})$, действующие на векторы в гильбертовом пространстве системы 1. Точно так же для системы 2 найдем инфинитезимальные операторы $J_2 (J_{2x}, J_{2y}, J_{2z})$. Каждый набор операторов удовлетворяет правилам коммутаций

$$[J_{1x}, J_{1y}] = iJ_{1z}, \quad [J_{1y}, J_{1z}] = iJ_{1x}, \quad [J_{1z}, J_{1x}] = iJ_{1y}. \quad (9.89)$$

Кроме того, поскольку операторы J_1 и J_2 действуют на функции различных переменных,

$$[J_1, J_2] = 0. \quad (9.90)$$

Если мы рассмотрим одновременно две не связанные между собой системы, то их гамильтониан будет инвариантным при любом комбинированном вращении $R_1 S_2$, где R и S — вращения различных систем. Гильбертово пространство представления будет произведением пространств подсистем (т. е. будет состоять из произведений функций для подсистем). Операторы $O_{R_1} O_{S_2}$, действующие в этом пространстве, будут давать неприводимое представление такого прямого произведения. Положив S равным тождественному преобразованию, мы сможем получить инфинитезимальные операторы J_1 , а положив R равным тождественному преобразованию, найдем J_2 . Игак, для пря-

мого произведения имеем шесть независимых инфинитезимальных операторов $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$. Если системы связаны друг с другом (к гамильтониану добавлены члены, зависящие от расстояния между системами 1 и 2), то полный гамильтониан не будет более инвариантным при раздельных вращениях систем 1 и 2. Группа симметрии понизится и вместо прямого произведения $R_1 S_2$ будет равна произведению $R_1 R_2$ (системы 1 и 2 поворачиваются на один и тот же угол). Вместо операторов $O_{R_1} O_{S_2}$ мы должны теперь рассматривать подгруппу операторов $O_{R_1} O_{R_2}$. Для этой подгруппы прямого произведения существуют только три инфинитезимальных оператора

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2. \quad (9.91)$$

Операторы $\mathbf{J}_1$ и $\mathbf{J}_2$ удовлетворяют соотношениям (9.89) и (9.90), и поэтому операторы $\mathbf{J}$ должны удовлетворять соотношениям (9.89). Если гильбертовы пространства 1 и 2 соответствуют неприводимым представлениям, то наша задача сводится к тому, чтобы найти, какие неприводимые представления $\mathbf{J}$ содержатся в произведении этих пространств.

Аналогично, если мы связываем r систем, то тем самым совершаем переход от прямого произведения $O_{R_1} O_{S_2} \dots O_{T_r}$ к $O_{R_1} O_{R_2} \dots O_{R_r}$ и от $3r$ инфинитезимальных операторов $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \dots, \mathbf{J}_r$ к трем операторам

$$\mathbf{J} = \sum_{n=1}^r \mathbf{J}_n. \quad (9.92)$$

Как показано в § 13 гл. 8, собственные значения операторов Казимира $\mathbf{J}^2, \mathbf{J}_1^2, \dots, \mathbf{J}_r^2$ характеризуют неприводимые представления. При заданных собственных значениях операторов $\mathbf{J}_1^2, \dots, \mathbf{J}_r^2$ собственные значения оператора $\mathbf{J}^2$ вычисляют так, как это обычно делается в учебниках по квантовой механике.

Пользуясь характерами

$$\chi^{(j)}(\varphi) = \sum_{m=-j}^j e^{im\varphi}, \quad (9.77)$$

нетрудно найти ряд Клебша — Гордана для группы вращений. Характер прямого произведения $D^{(j_1)} \times D^{(j_2)}$ двух неприводимых представлений равен

$$\chi^{(j_1 \times j_2)}(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} e^{im_1\varphi_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} e^{im_2\varphi_2}.$$

В связанных системах мы должны рассматривать только те элементы, для которых $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, так что

$$\begin{aligned}\chi^{(J_1 \times J_2)}(\varphi) &= \sum_{m_1=-J_1}^{J_1} e^{i m_1 \varphi} \sum_{m_2=-J_2}^{J_2} e^{i m_2 \varphi} = \sum_{m_1=-J_1}^{J_1} \sum_{m_2=-J_2}^{J_2} e^{i (m_1 + m_2) \varphi} = \\ &= \sum_{J=|J_1-J_2|}^{J_1+J_2} \sum_{M=-J}^J e^{i M \varphi} = \sum_{J=|J_1-J_2|}^{J_1+J_2} \chi^{(J)}(\varphi).\end{aligned}\quad (9.93)$$

Ряд Клебша — Гордана поэтому имеет вид

$$D^{(J_1)} \times D^{(J_2)} = \sum_{J=|J_1-J_2|}^{J_1+J_2} D^{(J)}.\quad (9.94)$$

В произведение двух неприводимых представлений каждое неприводимое представление входит самое большее один раз. Группа вращений просто приводима (см. § 8 гл. 5)

В физических приложениях используют главным образом коэффициенты Клебша — Гордана для группы вращений. Эти коэффициенты являются коэффициентами в разложении базисных функций Ψ_M^J представления $D^{(J)}$ по произведениям $\psi_{m_1}^{J_1} \psi_{m_2}^{J_2}$ базисных функций неприводимых представлений $D^{(J_1)}$ и $D^{(J_2)}$. В § 7 и 9 гл. 5 мы рассмотрели общую задачу о симметрии коэффициентов Клебша — Гордана. Общая формула этих коэффициентов для группы вращений (коэффициенты векторного сложения) была выведена многими способами. Приводимый здесь метод является самым простым из всех методов.

Вместо того чтобы работать с группой вращений, рассмотрим ее универсальную накрывающую группу — унимодулярную унитарную группу $\mathcal{U}_2$. Из § 6 настоящей главы видно, что рассмотрение группы $\mathcal{U}_2$ дает нам всю необходимую информацию о группе вращений. Если две переменные u_1, u_2 преобразуются по формулам

$$\begin{aligned}u'_1 &= a u_1 + b u_2 \\ u'_2 &= -b^* u_1 + a^* u_2\end{aligned}\quad (a a^* + b b^* = 1),\quad (9.56)$$

или (в матричной форме)

$$u' = m u, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad m = \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix},\quad (9.95)$$

го система функций

$$f_m = \frac{u_1^{j+m} u_2^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \quad (m = -j, -j+1, \dots, j-1, j) \quad (9.67)$$

образует базис неприводимого представления $D^{(j)}$. Рассмотрим теперь две переменные x_1 и x_2 , которые преобразуются следующим образом:

$$x'_1 = a^* x_1 + b^* x_2, \quad x'_2 = -b x_1 + a x_2; \quad (9.96)$$

$$x' = m^* x. \quad (9.96a)$$

Так как

$$m^+ m = 1,$$

то

$$m^* = \tilde{m}^{-1},$$

откуда

$$x' = \tilde{m}^{-1} x. \quad (9.97)$$

Переменные x_1, x_2 преобразуются по сопряженному представлению (комплексно сопряженное представление; см. § 3 гл. 5). В некоторых учебниках говорят, что *контравариантные* переменные x преобразуются *контрагредентно* переменным u , а другие переменные, преобразующиеся так же, как переменные u [см. (9.56)], называются *когредентно* (или *ковариантно*) преобразующимися.

Из (9.56) и (9.97) мы видим, что

$$\tilde{x}' u' = \tilde{x} m^{-1} t u = \tilde{x} u, \quad (9.98)$$

следовательно,

$$\tilde{x} u = x_1 u_1 + x_2 u_2$$

инвариантно. Заметим также, что если переменные (u_1, u_2) заменить переменными $(u_2, -u_1)$, то (9.56) перейдет в преобразование (9.96). Перейдем от переменных (u_1, u_2) к контравариантным переменным $(u_2, -u_1)$ с помощью преобразования

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (9.99)$$

$$g = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9.100)$$

Если у нас имеется еще один набор ковариантных переменных (v_1, v_2) , то произведение

$$(v_1, v_2) \begin{bmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{bmatrix} = (v_1, v_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \tilde{v} g u \quad (9.101)$$

будет инвариантно относительно преобразования m . Из (9.99) и (9.100) мы видим, что матрица g играет роль метрической матрицы.

Рассмотрим теперь функции, аналогичные функциям f_m из (9.67) (для них $j = j_1$ и $j = j_2$):

$$\psi_{m_1}^{j_1} = \frac{u_1^{j_1+m_1} u_2^{j_1-m_1}}{V(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!}, \quad \psi_{m_2}^{j_2} = \frac{v_1^{j_2+m_2} v_2^{j_2-m_2}}{V(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!}. \quad (9.102)$$

Для любых значений J от $|j_1 - j_2|$ до $j_1 + j_2$ построим многочлены

$$A_J = (u_1 v_2 - u_2 v_1)^{j_1+j_2-J} (u_1 x_1 + u_2 x_2)^{j_1-j_2+J} (v_1 x_1 + v_2 x_2)^{j_2-j_1+J}, \quad (9.103)$$

где x_1 и x_2 — пара контравариантных переменных. Степень многочлена A_J равна $2j_1$ по переменным u_1 и u_2 (такая же, как и степень функции $\psi_{m_1}^{j_1}$); степень же A_J по переменным v_1 и v_2 равна $2j_2$ (такая же, как степень функций $\psi_{m_2}^{j_2}$). Степень этого многочлена по контравариантным переменным x_1 и x_2 равна $2J$. Согласно (9.98) и (9.101), величины, стоящие в (9.103) в скобках, инвариантны относительно преобразований, принадлежащих группе $\mathcal{U}_2$, в силу чего полином A_J инвариантен. Если разложить A_J по степеням x_1 и x_2 , то получим

$$A_J = \sum_{M=-J}^J W_M^J X_M^J, \quad (9.104)$$

где

$$X_M^J = \frac{x_1^{J+M} x_2^{J-M}}{V(J+M)!(J-M)!}. \quad (9.105)$$

Коэффициенты W_M^J являются полиномами по u_1, u_2, v_1, v_2 . Сравним A_J с инвариантной величиной

$$\begin{aligned} B_J &= (u_1 x_1 + u_2 x_2)^{2J} = \\ &= (2J)! \sum_{M=-J}^J \frac{1}{(J+M)!(J-M)!} u_1^{J+M} x_1^{J+M} u_2^{J-M} x_2^{J-M} = \\ &= (2J)! \sum_{M=-J}^J \Psi_M^J X_M^J. \end{aligned} \quad (9.106)$$

Поскольку и коэффициенты W_M^J в (9.104) и Ψ_M^J в (9.106) преобразуются контравариантно по отношению к X_M^J , то и те и другие преобразуются одинаковым способом, в силу чего коэффициенты W_M^J

образуют базис представления $D^{(J)}$. Чтобы вычислить W_M^J , разложим A_J , пользуясь формулой бинома:

$$\begin{aligned}
 (u_1 v_2 - u_2 v_1)^{j_1 + j_2 - J} &= \\
 &= \sum_{\lambda}^{j_1 + j_2 - J} (-1)^{\lambda} \binom{j_1 + j_2 - J}{\lambda} (u_1 v_2)^{j_1 + j_2 - J - \lambda} (u_2 u_1)^{\lambda}, \\
 (u_1 x_1 + u_2 x_2)^{j_1 - j_2 + J} &= \\
 &= \sum_{\mu}^{j_1 - j_2 + J} \binom{j_1 - j_2 + J}{\mu} (u_1 x_1)^{j_1 - j_2 + J - \mu} (u_2 x_2)^{\mu}, \\
 (v_1 x_1 + v_2 x_2)^{j_2 - j_1 + J} &= \\
 &= \sum_{\nu}^{j_2 - j_1 + J} \binom{j_2 - j_1 + J}{\nu} (v_1 x_1)^{j_2 - j_1 + J - \nu} (v_2 x_2)^{\nu}.
 \end{aligned} \tag{9.107}$$

$$\begin{aligned}
 A_J = \sum_{\lambda, \mu, \nu} (-1)^{\lambda} \binom{j_1 + j_2 - J}{\lambda} \binom{j_1 - j_2 + J}{\mu} \binom{j_2 - j_1 + J}{\nu} \times \\
 \times u_1^{2j_1 - \lambda - \mu} u_2^{\lambda + \mu} v_1^{j_2 - j_1 + J - \nu + \lambda} v_2^{j_1 + j_2 - J - \lambda + \nu} x_1^{2J - \mu - \nu} x_2^{\mu + \nu}
 \end{aligned}$$

и введем новое суммирование по переменным $m_1 = j_1 - \lambda - \mu$, $m_2 = J - j_1 + \lambda - \nu$. Тогда

$$\begin{aligned}
 A_J = \sum_{m_1, m_2, \lambda} (-1)^{\lambda} \binom{j_1 + j_2 - J}{\lambda} \binom{j_1 - j_2 + J}{j_1 - \lambda - m_1} \binom{j_2 - j_1 + J}{j_2 - \lambda + m_2} \times \\
 \times u_1^{j_1 + m_1} u_2^{j_1 - m_1} v_1^{j_2 + m_2} v_2^{j_2 - m_2} x_1^{J + m_1 + m_2} x_2^{J - m_1 - m_2}.
 \end{aligned} \tag{9.108}$$

Воспользуемся теперь соотношениями (9.102) и (9.105) и найдем

$$\begin{aligned}
 A_J = \sum_{m_1, m_2, \lambda} (-1)^{\lambda} \times \\
 \times \left[\frac{(j_1 + j_2 - J)! (j_1 - j_2 + J)! (j_2 - j_1 + J)!}{\lambda! (j_1 + j_2 - J - \lambda)! (j_1 - \lambda - m_1)!} \times \right. \\
 \times \left. \frac{\{(j_1 + m_1)! (j_1 - m_1)! (j_2 + m_2)! (j_2 - m_2)! (J + M)! (J - M)!\}^{1/2}}{(J - j_2 + \lambda + m_1)! (j_2 - \lambda + m_2)! (J - j_1 + \lambda - m_2)!} \right] \times \\
 \times \psi_{m_1}^{j_1} \psi_{m_2}^{j_2} X_{m_1 + m_2}^J.
 \end{aligned} \tag{9.109}$$

Положив $m_1 + m_2 = M$, получим коэффициент при X_M^J в (9.109)

$$\begin{aligned}
 W_M^J = (j_1 + j_2 - J)! (j_1 - j_2 + J)! (j_2 - j_1 + J)! \times \\
 \times \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1 + m_2 = M}} c_{m_1 m_2}^J \psi_{m_1}^{j_1} \psi_{m_2}^{j_2},
 \end{aligned} \tag{9.110}$$

где

$$c_{m_1 m_2}^J = \sum_{\lambda} (-1)^{\lambda} \left[\frac{\{(j_1 + m_1)!(j_1 - m_1)!(j_2 + m_2)!(j_2 - m_2)!\}^{1/2}}{\lambda! (j_1 + j_2 - J - \lambda)! (j_1 - \lambda - m_1)!} \times \right. \\ \left. \times \frac{\{(J + M)!(J - M)!\}^{1/2}}{(J - j_2 + \lambda + m_1)!(j_2 - \lambda + m_2)!(J - j_1 + \lambda - m_2)!} \right]. \quad (9.111)$$

Преобразование, позволяющее перейти от произведений $\psi_{m_1}^{j_1} \psi_{m_2}^{j_2}$ к базисным функциям Ψ_M^J , становится унитарным за счет введения в (9.110) нормирующего множителя ρ_J такого, что

$$\Psi_M^J = \rho_J \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1 + m_2 = M}} c_{m_1 m_2}^J \psi_{m_1}^{j_1} \psi_{m_2}^{j_2} \quad (9.112)$$

есть унитарное преобразование, удовлетворяющее условию

$$|\rho_J|^2 \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1 + m_2 = M}} |c_{m_1 m_2}^J|^2 = 1. \quad (9.113)$$

Поскольку число ρ_J от M не зависит, мы можем вычислять его, выбирая M в (9.113) наиболее удобным образом. Положим в (9.113) $M = J$ и воспользуемся выражением (9.111). В коэффициентах $c_{m_1 m_2}^J$ факториал

$$(j_1 - \lambda - m_1)!$$

обратит в нуль все члены, для которых $\lambda > j_1 - m_1$, а факториал

$$(J - j_1 + \lambda - m_2)! = (\lambda - \{j_1 - m_1\})!$$

обратит в нуль все члены, у которых $\lambda < (j_1 - m_1)$. В результате останется один член, у которого $\lambda = j_1 - m_1$, и коэффициент $c_{m_1 m_2}^J$ примет следующий вид:

$$c_{m_1 m_2}^J = (-1)^{j_1 - m_1} \frac{V(2J)!}{(J - j_2 + j_1)!(J - j_1 + j_2)!} \times \\ \times \left[\frac{(j_1 + m_1)!(j_2 + m_2)!}{(j_1 - m_1)!(j_2 - m_2)!} \right]^{1/2} = (-1)^{j_1 - m_1} \times \\ \times \left[\frac{(2J)!}{(J - j_2 + j_1)!(J - j_1 + j_2)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \left[\binom{j_1 + m_1}{j_2 - m_2} \binom{j_2 + m_2}{j_1 - m_1} \right]^{1/2} \quad (m_1 + m_2 = J). \quad (9.114)$$

В этом частном случае

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1+m_2=J}} |c_{m_1 m_2}^J|^2 = \\ = \frac{(2J)!}{(J-j_2+j_1)!(J-j_1+j_2)!} \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1+m_2=J}} \binom{j_1+m_1}{j_2-m_2} \binom{j_2+m_2}{j_1-m_1}. \end{aligned} \quad (9.115)$$

Пользуясь соотношением

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad (9.116)$$

эту сумму можно упростить. Будем рассматривать все факториалы как Γ -функции. Тогда

$$\begin{aligned} \binom{x}{y} &= \frac{x!}{y!(x-y)!} = \frac{\Gamma(x+1)}{y! \Gamma(x-y+1)} = \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi(x+1)} \frac{\sin \pi(x-y+1)}{\pi} \frac{\Gamma(y-x)}{y! \Gamma(-x)} = \\ &= \frac{(-1)^y \Gamma(y-x)}{y! \Gamma(-x)} = (-1)^y \binom{y-x-1}{y}. \end{aligned} \quad (9.117)$$

Воспользовавшись этим результатом, перепишем (9.115) в виде

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1+m_2=J}} |c_{m_1 m_2}^J|^2 &= \frac{(-1)^{j_1+j_2-J} (2J)!}{(J-j_2+j_1)!(J-j_1+j_2)!} \times \\ &\times \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1+m_2=J}} \binom{j_2-j_1-J-1}{j_2-m_2} \binom{j_1-j_2-J-1}{j_1-m_1}. \end{aligned} \quad (9.118)$$

Применяя формулу бинома, получаем

$$\begin{aligned} (1+x)^r (1+x)^s &= \sum_{\alpha} \binom{r}{\alpha} x^{\alpha} \sum_{\beta} \binom{s}{\beta} x^{\beta} = \sum_{\alpha, \beta} \binom{r}{\alpha} \binom{s}{\beta} x^{\alpha+\beta} = \\ &= (1+x)^{r+s} = \sum_{\gamma} \binom{r+s}{\gamma} x^{\gamma}, \end{aligned}$$

откуда

$$\binom{r+s}{\gamma} = \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha+\beta=\gamma}} \binom{r}{\alpha} \binom{s}{\beta}. \quad (9.119)$$

Применяя это соотношение к (9.118), находим

$$\sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1 + m_2 = J}} |c_{m_1 m_2}^J|^2 = \frac{(-1)^{j_1 + j_2 - J} (2J)!}{(J - j_2 + j_1)! (J - j_1 + j_2)!} \left[\begin{matrix} -2J - 2 \\ j_1 + j_2 - J \end{matrix} \right] =$$

$$= \frac{(2J)!}{(J - j_2 + j_1)! (J - j_1 + j_2)!} \left[\begin{matrix} j_1 + j_2 + J + 1 \\ j_1 + j_2 - J \end{matrix} \right], \quad (9.120)$$

где при выполнении последнего преобразования мы снова воспользовались (9.117). Из (9.113) имеем

$$\rho_J = \left[\frac{(2J + 1) (J - j_2 + j_1)! (J - j_1 + j_2)! (j_1 + j_2 - J)!}{(j_1 + j_2 + J + 1)} \right]^{1/2}. \quad (9.121)$$

Коэффициенты Клебша — Гордана равны

$$(j_1 m_1 j_2 m_2 | JM) = \rho_J c_{m_1 m_2}^J \quad (M = m_1 + m_2), \quad (9.122)$$

причем ρ_J задается формулой (9.121), а $c_{m_1 m_2}^J$ — формулой (9.111).

Выписанные только что формулы чрезвычайно сложны, но в некоторых частных случаях они значительно упрощаются.

а) $J = j_1 + j_2$. В (9.111) остается лишь член с $\lambda = 0$, и

$$c_{m_1 m_2}^J = \left[\frac{(J + M)! (J - M)!}{(j_1 + m_1)! (j_1 - m_1)! (j_2 + m_2)! (j_2 - m_2)!} \right]^{1/2},$$

$$\rho_J = \sqrt{\frac{(2j_1)! (2j_2)!}{(2J)!}},$$

$$(j_1 m_1 j_2 m_2 | J = j_1 + j_2, M) = \left[\frac{\binom{2j_1}{j_1 - m_1} \binom{2j_2}{j_2 - m_2}}{\binom{2J}{J - M}} \right]^{1/2}; \quad (9.123)$$

б) $J = j_1 - j_2$. В (9.111) остается лишь член с $\lambda = j_2 - m_2$, и

$$c_{m_1 m_2}^J = (-1)^{j_2 + m_2} \left[\frac{(j_1 + m_1)! (j_1 - m_1)!}{(j_2 + m_2)! (j_2 - m_2)! (J + M)! (J - M)!} \right]^{1/2},$$

$$\rho_J = \sqrt{\frac{(2J + 1)! (2j_2)!}{(2j_1 + 1)!}}. \quad (9.124)$$

При $j_2 = 1/2$

$$J = j_1 \pm \frac{1}{2},$$

поэтому эти два частных случая дают нам полную систему коэффициентов.

Коэффициенты Клебша — Гордана при $j_2 = 1/2$

	$m_2 = \frac{1}{2}$	$m_2 = -\frac{1}{2}$
$J = j_1 + \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{j_1 + m_1 + 1}{2j_1 + 1}}$	$\sqrt{\frac{j_1 - m_1 + 1}{2j_1 + 1}}$
$J = j_1 - \frac{1}{2}$	$-\sqrt{\frac{j_1 - m_1}{2j_1 + 1}}$	$\sqrt{\frac{j_1 + m_1}{2j_1 + 1}}$

Свойства коэффициентов Клебша — Гордана подробно изучены и составлены их таблицы.

Мы обнаружили, что к комплексно сопряженному представлению можно прийти подстановкой $u_1 \rightarrow u_2$, $u_2 \rightarrow -u_1$. При этой подстановке

$$\psi_m^j \rightarrow (-1)^{j-m} \psi_{-m}^j, \quad (9.125)$$

и функции ψ_{-m}^j преобразуются по представлению $D^{(j)*}$. Из (9.125) и (5.140) мы находим соотношение между $3j$ -коэффициентами и коэффициентами Клебша — Гордана:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_3-m_3} (2j_3 + 1)^{-1/2} (j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3, -m_3). \quad (9.126)$$

Свойства симметрии коэффициентов Клебша — Гордана можно найти из последнего равенства и результатов § 9 гл. 5.

ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ В n -МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ; НЕПРИВОДИМЫЕ ТЕНЗОРЫ

В этой главе мы введем определение тензоров, преобразующихся по любой группе G линейных преобразований в n -мерном пространстве. Тензоры ранга r образуют векторное пространство размерности n^r и являются базисом некоторого представления группы G . Пользуясь операторами перестановки (симметризаторами Юнга), мы можем разложить это представление на неприводимые представления группы G .

Для некоторых подгрупп общей линейной группы $GL(n)$ таких, как ортогональная группа $O(n)$ и симплектическая группа $Sp(n)$, можно определить процесс свертки тензора, что позволит провести дальнейшее разложение.

Методы, применяемые в этой главе, тесно связаны с рассмотрением симметрической группы в гл. 7. Во многих случаях результаты гл. 7 будут сформулированы повторно в новой терминологии.

§ 1. Тензоры, преобразующиеся по группе $GL(n)$

В § 1 гл. 5 мы рассмотрели, как строится произведение представлений. Предположим, что нам задана группа G линейных преобразований в n -мерном пространстве R_n (группа G , в частности, может быть точным представлением некоторой абстрактной группы). Вектор x в пространстве R_n имеет компоненты $x_1, \dots, x_n$. Преобразование a группы G преобразует вектор x в вектор x' :

$$x'_i = a_{ij} x_j \quad (i = 1, \dots, n). \quad (10.1)$$

Рассмотрим теперь n^2 величин $x_i y_j$ ($i, j = 1, \dots, n$), которые можно составить из произведений компонент двух векторов x и y в R_n . Если преобразование (10.1) применяется к векторам в R_n , то совокупность величин $x_i y_j$ подвергается преобразованию

$$x'_i y'_j = a_{ik} a_{jl} x_k y_l. \quad (10.2)$$

Мы видим, что n^2 величин $x_i y_j$ преобразуются в соответствии с преобразованием $a \times a$ — кронекеровским квадратом преобразования a .

Совокупность n^2 величин F_{ij} , преобразующихся по закону

$$F'_{ij} = a_{ik} a_{jl} F_{kl}, \quad (10.3)$$

образует тензор $\mathcal{F}$.. второго ранга.

Группа G преобразований в n -мерном пространстве R_n индуцирует группу преобразований $\mathbf{a} \times \mathbf{a}$ в n^2 -мерном пространстве тензоров $\mathcal{F}..$. В заданном базисе тензор $\mathcal{F}..$ описывается своими n^2 компонентами F_{ij} .

Компонентами тензора второго ранга служат n^2 величин x_{iuj} , образованных из компонент любых двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, принадлежащих R_n . В частности, в качестве вектора $\mathbf{x}$ можно выбрать вектор, μ -я компонента которого равна 1, а все остальные компоненты равны 0, и, аналогично, выбрать вектор $\mathbf{y}$, у которого ν -я компонента равна 1, а все остальные равны нулю. Тензор второго ранга ${}^{\mu\nu}(\mathbf{x}\mathbf{y})$, построенный из этих двух векторов, имеет одну ненулевую компоненту:

$${}^{\mu\nu}(\mathbf{x}\mathbf{y})_{ij} = \delta_{i\mu} \delta_{j\nu}. \quad (10.4)$$

Заставляя μ, ν пробегать значения $1, 2, \dots, n$, мы получим n^2 независимых тензоров второго ранга. Все тензоры второго ранга $\mathcal{F}..$ можно выразить в виде линейных комбинаций базисных тензоров ${}^{\mu\nu}(\mathbf{x}\mathbf{y})$.

Мы еще раз подчеркиваем, что тензоры $\mathcal{F}..$ преобразуются по группе G , так как закон преобразования (10.3) определяется соотношением (10.1). Если мы выберем другую группу линейных преобразований в n -мерном пространстве, то получим *другое* пространство тензоров второго ранга.

Точно так же можно определить тензор r -го ранга, преобразующийся по группе G . Если векторы $\mathbf{x}$ подвергать преобразованию (10.1), то n^r величин $x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \dots x_{i_r}^{(r)}$ ($i_\mu = 1, \dots, n, \mu = 1, \dots, r$), образованных из r векторов $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(r)}$, принадлежащих R_n , преобразуются следующим образом:

$$x_{i_1}^{(1)'} x_{i_2}^{(2)'} \dots x_{i_r}^{(r)'} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_r j_r} x_{j_1}^{(1)} x_{j_2}^{(2)} \dots x_{j_r}^{(r)}. \quad (10.5)$$

Тензор r -го ранга $\mathcal{F}_{i_1 i_2 \dots i_r}$ — это величина, которая в данном базисе описывается n^r компонентами $F_{i_1 i_2 \dots i_r}$ и преобразуется как произведение r векторов:

$$F'_{i_1 i_2 \dots i_r} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_r j_r} F_{j_1 j_2 \dots j_r}. \quad (10.6)$$

Иными словами, преобразование $\mathbf{a}$ в R_n индуцирует преобразование $\mathbf{a} \times \mathbf{a} \times \dots \times \mathbf{a}$ (r сомножителей) в пространстве тензоров r -го ранга.

Сначала в качестве группы G мы выберем общую линейную группу $GL(n)$ всех невырожденных линейных преобразований в n -мерном пространстве. Позднее в этой главе мы рассмотрим некоторые подгруппы $GL(n)$.

Задачи 1. Покажите, что всякий тензор r -го ранга можно линейно выразить через произведения, построенные из r векторов в R_n .

2. Покажите, что матричные элементы преобразований тензоров r -го ранга представляют собой однородные многочлены степени r относительно матричных элементов преобразований группы G .

§ 2. Конструирование неприводимых тензоров, преобразующихся по группе $GL(n)$

Начнем с тензоров второго ранга. В § 2 гл. 5 было показано, что кронекеровский квадрат $\mathbf{a} \times \mathbf{a}$ приводим. Переставляя индексы i_1, i_2 тензора $F_{i_1 i_2}$, мы получаем тензоры

$$(F_{i_1 i_2} + F_{i_2 i_1}) \quad \text{и} \quad (F_{i_1 i_2} - F_{i_2 i_1}),$$

которые образуют базис симметричного и антисимметричного произведения представлений соответственно. Таким образом, перестановка индексов и взятие линейных комбинаций разлагает пространство тензоров второго ранга на два инвариантных подпространства.

Метод, которым мы воспользовались в этом простом случае, можно описать следующим образом. Каждой перестановке p , принадлежащей симметрической группе S_2 , мы сопоставили оператор p , действующий на тензоры второго ранга $F_{i_1 i_2}$. Оператор p , примененный к тензору F , дает тензор pF , где

$$(pF)_{i_1 i_2} = F_{i_1' i_2'}, \quad \text{при} \quad p = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1' & 2' \end{pmatrix}. \quad (10.7)$$

Оператор p действует на индексы 1, 2. Рассмотрим, например, тензор $F_{i_1 i_2}$ при $n=4$. Компонента тензора F_{34} имеет индексы $i_1=3, i_2=4$. Оператор перестановки p при $p=(12)$ переводит i_1 в i_2 , а i_2 в i_1 , т. е. переводит 3 в 4, а 4 в 3:

$$(pF)_{34} = F_{43}.$$

Точно так же для компоненты F_{23} с индексами $i_1=2, i_2=3$ имеем

$$(pF)_{23} = F_{32}.$$

Для компоненты F_{33} с индексами $i_1=i_2=3$ получаем

$$(pF)_{33} = F_{33}$$

Симметрические и антисимметрические тензоры

$$F_{i_1 i_2} \pm F_{i_2 i_1}$$

можно записать в виде

$$(\mathbf{e} \pm p) F_{i_1 i_2},$$

где $\mathbf{e}$ — тождественный оператор. Применяя операторы $\mathbf{e} \pm \mathbf{p}$, мы получаем разложение пространства тензоров $F_{i_1 i_2}$ на инвариантные подпространства. Но, как мы видели в § 1, 2 гл. 7, эти операторы являются симметризаторами Юнга, порождающими неприводимые представления группы S_2 .

Оператор $\mathbf{p}$ коммутирует с преобразованиями (10.3) в пространстве тензоров:

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}F')_{i_1 i_2} &= F'_{i_1 i_2} = a_{i_2 j_1} a_{i_1 j_2} F_{j_1 j_2} = \\ &= a_{i_2 j_2} a_{i_1 j_1} F_{j_2 j_1} = \\ &= a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} (\mathbf{p}F)_{j_1 j_2}, \end{aligned} \quad (10.8)$$

или в сокращенной записи

$$\mathbf{p}(\mathbf{a} \times \mathbf{a})F = (\mathbf{a} \times \mathbf{a})\mathbf{p}F. \quad (10.8a)$$

Причина этого состоит в том, что произведение $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2}$ *бисимметрично*: если к i_1, i_2 и j_1, j_2 применяется одна и та же перестановка, то произведение не изменяется.

Закон преобразования для тензоров r -го ранга задается соотношением

$$F'_{i_1 i_2 \dots i_r} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_r j_r} F_{j_1 j_2 \dots j_r}, \quad (10.6)$$

которое мы будем сокращенно записывать в виде

$$F'_{(i)} = a_{(i)(j)} F_{(j)}. \quad (10.6a)$$

Каждой перестановке

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ 1' & 2' & \dots & r' \end{pmatrix},$$

принадлежащей симметрической группе S_r , мы ставим в соответствие оператор $\mathbf{p}$, действующий на индексы тензора $F_{i_1 i_2 \dots i_r}$:

$$(\mathbf{p}F)_{i_1 i_2 \dots i_r} = F_{i_1' i_2' \dots i_r'} \equiv F_{p(i)}, \quad (10.9)$$

или сокращенно

$$(\mathbf{p}F)_{(i)} = F_{p(i)}. \quad (10.9a)$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}F')_{(i)} &= (F')_{p(i)} = a_{p(i) p(j)} F_{p(j)} = \\ &= a_{p(i) p(j)} (\mathbf{p}F)_{(j)} = \\ &= a_{(i)(j)} (\mathbf{p}F)_{(j)}, \end{aligned} \quad (10.10)$$

где при выполнении второго преобразования мы использовали (10.9), а при выполнении последнего — тот факт, что преобразование тензора *бисимметрично*:

$$a_{p(i) p(j)} \equiv a_{i_1' j_1'} a_{i_2' j_2'} \dots a_{i_r' j_r'} \equiv a_{(i)(j)}. \quad (10.11)$$

Тензоры этого типа симметрии порождаются за счет применения к тензору общего вида r -го ранга оператора Юнга

$$Y = QP,$$

где P — оператор горизонтальных перестановок в схеме, а Q — оператор вертикальных перестановок (см. § 10 гл. 7). Следовательно, тензор F будет антисимметрическим по всем индексам, которые стоят в одном столбце. Любая компонента тензора, для которой некоторый индекс в одном столбце встречается дважды, должна быть равна нулю.

Чтобы проиллюстрировать этот метод получения тензоров заданной симметрии, мы начнем с тензора $G_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ и построим тензор

$$F \begin{array}{|c|c|} \hline i_1 & i_2 \\ \hline i_3 & i_4 \\ \hline \end{array}$$

Оператор Юнга для этой схемы имеет вид $Y = QP$, где

$$P = [e + (12)][e + (34)], \quad Q = [e - (13)][e - (24)].$$

Поэтому

$$(PG)_{i_1 i_2 i_3 i_4} = G_{i_1 i_2 i_3 i_4} + G_{i_2 i_1 i_3 i_4} + G_{i_1 i_2 i_4 i_3} + G_{i_2 i_1 i_4 i_3}$$

и

$$\begin{aligned} F \begin{array}{|c|c|} \hline i_1 & i_2 \\ \hline i_3 & i_4 \\ \hline \end{array} &= (QP G)_{i_1 i_2 i_3 i_4} = G_{i_1 i_2 i_3 i_4} - G_{i_3 i_2 i_1 i_4} - G_{i_1 i_4 i_3 i_2} + G_{i_3 i_4 i_1 i_2} + \\ &+ G_{i_2 i_1 i_3 i_4} - G_{i_1 i_3 i_2 i_4} - G_{i_4 i_1 i_3 i_2} + G_{i_4 i_2 i_1 i_3} + \\ &+ G_{i_1 i_2 i_4 i_3} - G_{i_3 i_2 i_4 i_1} - G_{i_1 i_4 i_2 i_3} + G_{i_3 i_4 i_2 i_1} + \\ &+ G_{i_2 i_1 i_4 i_3} - G_{i_2 i_3 i_4 i_1} - G_{i_4 i_1 i_2 i_3} + G_{i_4 i_3 i_2 i_1}. \end{aligned}$$

Задачи. 1. Найти тензор

$$F \begin{array}{|c|c|c|} \hline i_1 & i_2 & i_3 \\ \hline i_4 & & \\ \hline \end{array},$$

получающийся из тензора $G_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ общего вида.

2. Пользуясь результатами § 10 гл. 7, разложить тензор $G_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ общего вида в сумму тензоров с симметрией определенного типа.

В случае общей линейной группы $GL(n)$ на элементы матрицы a_{ij} не наложено никаких ограничительных условий, поэтому единственным процессом разложения пространства тензоров служит используемый нами процесс симметризации. Тензоры r -го ранга заданной симметрии образуют базис неприводимого представления группы $GL(n)$,

иначе говоря, они являются *неприводимыми тензорами, преобразующимися по группе $GL(n)$* . Позднее мы увидим, что для некоторых подгрупп группы $GL(n)$ возможно и дальнейшее разложение.

Какие типы симметрий реализуются при заданных значениях n и r ? Если схема Юнга содержит более чем n строк, то по крайней мере один индекс должен повторяться в первом столбце, так что все тензоры симметрии этого типа должны быть тождественно равны нулю. Поэтому можно ограничиться схемами, число строк в которых равно самому большому n , и записывать разбиения в виде

$$[\lambda_1 \dots \lambda_n],$$

где

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = r, \quad \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0.$$

Если схема содержит больше чем n строк, то некоторые из чисел λ равны нулю и при выписывании разбиения их можно опускать.

Кроме того, можно показать, что реализуется всякая схема, число строк которой меньше или равно n , т. е. что существуют ненулевые тензоры с симметрией всех таких типов. Рассмотрим схему Юнга T с числом строк $m \leq n$. Будем исходить из тензора G , все компоненты которого, за исключением одной, в некотором базисе равны нулю:

$$G \begin{array}{|c|} \hline 1 \quad 1 \dots 1 \\ \hline 2 \quad 2 \dots 2 \\ \hline 3 \quad \dots \\ \hline \vdots \\ \hline m \quad m \dots \\ \hline \end{array} = 1 \quad (10.12)$$

Индексы этого тензора упорядочены в соответствии со схемой Юнга T . Когда мы применяем симметризатор $Y = QR$ к схеме T , оператор R оставляет тензор (10.12) без изменений (с точностью до множителя). Оператор Q переставляет индексы в каждом столбце в отдельности. Поэтому (с точностью до числового множителя) компоненты тензора $F = YG$ равны: $+1$ для индексов, получающихся из индексов тензора (10.12) при четных перестановках, -1 , если индексы получены нечетной перестановкой, и 0 — в других случаях. Таким образом, все неприводимые подпространства для схем, у которых $m \leq n$, реализуются.

Трансформационные свойства тензора общего вида r -го ранга (10.6) были такими же, как и у произведения компонент r векторов (10.5). Для симметрических и антисимметрических тензоров r -го ранга можно построить простые тензоры из произведений компонент векторов. Чтобы получить полностью симметрический тензор r -го ранга,

выберем все векторы $x^{(i)}$ в (10.5) равными одному и тому же вектору x . В этом случае мы получим симметрический тензор с компонентами $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}$. Собирая вместе все множители с одним и тем же значением индекса, мы сможем переписать компоненты в виде $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$, где

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = r.$$

Например, при $r=2$ мы получаем компоненты x_i^2 ($i=1, \dots, n$) и $x_i x_j$ ($i < j$, $i=1, \dots, n-1$).

Антисимметрический тензор второго ранга можно построить из двух векторов $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$. Выпишем матрицу

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots \\ x_{i_1}^{(1)} & x_{i_1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots \\ x_{i_2}^{(1)} & x_{i_2}^{(2)} \\ \vdots & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (10.13)$$

Минор, содержащий две строки

$$\begin{bmatrix} x_{i_1}^{(1)} & x_{i_1}^{(2)} \\ x_{i_2}^{(1)} & x_{i_2}^{(2)} \end{bmatrix},$$

служит компонентой (i_1, i_2) антисимметрического тензора

$$F \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Аналогично, компоненты полностью антисимметрического тензора

$$F \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_r \end{bmatrix}$$

r -го ранга можно образовать из миноров порядка r матрицы

$$[\mathbf{x}^{(1)} \mathbf{x}^{(2)} \dots \mathbf{x}^{(r)}] \equiv \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(r)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(r)} \end{bmatrix}. \quad (10.14)$$

При $r = n$ мы получаем тензор с одной независимой компонентой — полностью антисимметрический тензор r -го ранга. Преобразование $\mathbf{a}$ в пространстве R_n приводит к умножению этого тензора на $\det \mathbf{a}$. Если ограничиться подгруппами, содержащими только унимодулярные матрицы, то антисимметрический тензор $[\mathbf{x}^{(1)} \dots \mathbf{x}^{(n)}]$ оказывается инвариантным при всех преобразованиях и кратным *единичному антисимметрическому тензору n -го ранга*

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} +1, & \text{если } i_1 i_2 \dots i_n \text{ — четная перестановка} \\ & \text{чисел } 1, \dots, n, \\ -1, & \text{если } i_1 i_2 \dots i_n \text{ — нечетная перестановка} \\ & \text{чисел } 1, \dots, n, \\ 0, & \text{если какой-либо индекс повторяется.} \end{cases} \quad (10.15)$$

Компоненты тензора $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ имеют *одни и те же* числовые значения в любом базисе.

Задачи. 1. Покажите, что тензоры $[\mathbf{x}^{(1)} \dots \mathbf{x}^{(r)}]$ образуют базис для антисимметрических тензоров r -го ранга.

2. Покажите, что тензоры $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}$ образуют базис для симметрических тензоров r -го ранга.

§ 3. Размерность неприводимых представлений группы $GL(n)$

В этом параграфе мы найдем число независимых компонент тензоров, обладающих симметрией определенного типа. Прежде чем приводить общую формулу, рассмотрим несколько простых примеров.

При $r = 3$ тензоры

$$F_{\boxed{i_1} \boxed{i_2} \boxed{i_3}}$$

симметричны по всем трем индексам, вследствие чего мы получаем одну независимую компоненту при любом выборе индексов i_1, i_2, i_3 независимо от их порядка. В качестве типичной независимой компоненты выберем компоненту, индексы i_1, i_2, i_3 которой отвечают

стандартной таблице (см. § 3 гл. 7), т. е. упорядочим индексы так, чтобы $i_1 \leq i_2 \leq i_3$. Например, при $n=1$ существует только одна компонента

$$F_{\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}}$$

При $n=2$ индексы i могут быть равны только 1 или 2, и четырьмя независимыми компонентами будут

$$F_{\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}}, \quad F_{\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}}, \quad F_{\boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}}, \quad F_{\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}}$$

Эту процедуру легко обобщить на случай полностью симметрического тензора r -го ранга для произвольного n . Выберем независимые компоненты так, чтобы они соответствовали стандартной таблице, т. е. чтобы $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r$. Тогда

$$i_1 < i_2 + 1 < i_3 + 2 < \dots < i_r + r - 1$$

суть *различные* целые числа из набора $1, 2, \dots, (n+r-1)$. В силу этого число независимых компонент равно числу способов, которыми можно выбрать r различных чисел из набора $1, 2, \dots, (n+r-1)$, т. е. числу сочетаний из $n+r-1$ по r :

$$\binom{n+r-1}{r}.$$

При $n=2$, $r=3$ получим число компонент, равное $\binom{4}{3}=4$, что согласуется с приведенным выше подсчетом.

При $r=3$ мы рассмотрим далее симметрию типа

$$F_{\begin{array}{cc} \boxed{i_1} & \boxed{i_2} \\ \boxed{i_3} \end{array}}$$

Для разбиения $[21]$ в симметрической группе S_3 существуют две стандартные таблицы

$$\begin{array}{cc} \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{cc} \boxed{1} & \boxed{3} \\ \boxed{2} \end{array}$$

В тензор

$$F_{\begin{array}{cc} \boxed{i_1} & \boxed{i_2} \\ \boxed{i_3} \end{array}}$$

вместо любого из индексов i_1, i_2, i_3 мы можем подставить любое из чисел $1, 2, \dots, n$. Их следует расположить в естественном порядке.

Если $i_1 = a < i_2 = b < i_3 = c$, то стандартные компоненты имеют вид

$$F \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & \\ \hline \end{array} \quad \text{и} \quad F \begin{array}{|c|c|} \hline a & c \\ \hline b & \\ \hline \end{array}$$

Аналогичным образом мы можем поступить и в том случае, если некоторые из чисел i совпадают. При стандартном расположении любого набора чисел i_1, i_2, i_3 они не должны убывать при движении по строке слева направо и должны убывать при движении по столбцу сверху вниз. (Так как тензор антисимметричен по аргументам, стоящим в одном столбце, компоненты с двумя равными индексами в одном столбце обращаются в нуль.) Если все индексы различны, то при каждом выборе трех различных чисел i_1, i_2, i_3 из набора $1, 2, \dots, n$ мы получим две стандартные таблицы, что приводит к числу независимых компонент, равному

$$2 \cdot \binom{n}{3}.$$

Если два индекса равны (например, 112 или 122), мы получим *одну* стандартную таблицу

$$\left(\begin{array}{c} 11 \\ 2 \end{array} \text{ или } \begin{array}{c} 12 \\ 2 \end{array} \right).$$

Таким образом, мы получаем $n(n-1)$ независимых компонент этого типа. Компоненты, у которых все три индекса равны, должны обратиться в нуль. Поэтому размерность пространства тензоров

$$F \begin{array}{|c|c|} \hline i_1 & i_2 \\ \hline i_3 & \\ \hline \end{array}$$

равна

$$2 \cdot \binom{n}{3} + n(n-1) = \frac{n(n^2-1)}{3}.$$

Наконец, для антисимметрических тензоров

$$F \begin{array}{|c|} \hline i_1 \\ \hline i_2 \\ \hline i_3 \\ \hline \end{array}$$

существует одна стандартная таблица при каждом выборе индексов, и в ненулевой компоненте все индексы должны быть различными.

Таким образом, размерность пространства антисимметрических тензоров третьего ранга равна $\binom{n}{3}$. Аналогичные рассуждения показывают, что размерность пространства антисимметрических тензоров r -го ранга равна $\binom{n}{r}$.

Задача. Используйте этот метод для отыскания размерности пространства тензоров

$$F \begin{array}{|c|c|} \hline \square_1 & \square_2 \\ \hline \square_3 & \square_4 \\ \hline \end{array}$$

Перечислите набор независимых компонент для случаев $n = 3$; $n = 4$.

Второй метод, который особенно полезен при малых значениях r , основан на разложении внешних произведений (см. § 12 гл. 7). Компоненты x_i вектора $\mathbf{x}$ в пространстве R_n образуют тензор первого ранга, соответствующий схеме Юнга

$$\square$$

Произведения компонент x_i и компонент y_j второго вектора образуют внешнее произведение

$$\square \otimes \square$$

которое можно разложить следующим образом:

$$\square \otimes \square = \square\square + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \quad (10.16)$$

т. е. на симметрический и антисимметрический тензоры второго ранга. Число компонент в левой части соотношения (10.16) равно n^2 , что совпадает с суммой размерностей $n(n+1)/2 + n(n-1)/2$ двух неприводимых представлений, стоящих справа от знака равенства.

Рассмотрим далее произведения компонент симметрического тензора второго ранга и компонент какого-нибудь вектора:

$$\square\square \otimes \square = \square\square\square + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (10.17)$$

Число независимых компонент в левой части этого равенства равно $n \cdot [n(n+1)/2]$. Стоящий справа симметрический тензор третьего

ранга имеет $\binom{n+2}{3}$ независимых компонент. Вычитая из первого числа второе, найдем, что пространство тензоров

$$F \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array},$$

преобразующихся по группе $GL(n)$, имеет размерность

$${}^nN_{[21]} = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n^2-1)}{3}, \quad (10.18)$$

что согласуется с нашими прямыми подсчетами. Чтобы обозначать размерность пространства тензоров с симметрией $[\lambda_1 \dots \lambda_n]$, мы пользуемся символом

$${}^nN_{[\lambda_1 \dots \lambda_n]}.$$

Аналогично из внешнего произведения

$$[p] \otimes [1] = [p+1] + [p, 1] \quad (10.19)$$

находим

$${}^nN_{[p, 1]} = n \cdot {}^nN_{[p]} - {}^nN_{[p+1]} = n \cdot \binom{n+p-1}{p} - \binom{n+p}{p+1}. \quad (10.20)$$

Наиболее мощный метод отыскания размерности ${}^nN_{[\lambda]}$ состоит в использовании правила ветвления, аналогичного правилу ветвления для симметрической группы (см. § 5 гл. 7). Мы кратко наметим ход рассуждений и сформулируем результаты.

Группа $GL(n)$ содержит много подгрупп, которые изоморфны группе $GL(n-1)$. Такие группы мы, например, получим, если ограничимся теми преобразованиями из $GL(n)$, которые оставляют компоненту x_n неизменной. Неприводимое представление группы $GL(n)$ будет разлагаться в сумму неприводимых представлений подгруппы $GL(n-1)$. Предположим, что неприводимое представление группы $GL(n)$ соответствует схеме Юнга $[\lambda_1 \dots \lambda_n]$:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \times & \times \\ \hline \square & \square & & \times & \\ \hline \square & & \times & & \\ \hline \times & & & & \\ \hline \end{array}$$

Независимые компоненты тензора — это те компоненты, которые соответствуют стандартной таблице. Если индекс n встречается в стандартной таблице, он может появиться только в последней ячейке каждого столбца схемы, как это указано на фигуре крестиками. Иначе говоря, индекс n может появиться только в тех ячейках, которые входят в „избыток“ каждой строки по сравнению с последующей. Когда мы переходим к подгруппе $GL(n-1)$, индекс n может

исчезнуть из таблицы. В этом случае мы получаем все возможные схемы с $(n-1)$ символами, которые можно получить из первоначальной схемы. Таким образом, неприводимое представление группы $GL(n)$, соответствующее схеме

$$[\lambda_1 \dots \lambda_n],$$

разлагается в сумму неприводимых представлений группы $GL(n-1)$, соответствующих схемам

$$[\lambda'_1 \dots \lambda'_{n-1}],$$

где

$$\lambda_1 \geq \lambda'_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda'_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda'_{n-1} \geq \lambda_n. \quad (10.21)$$

Приравнявая размерность представления группы $GL(n)$ сумме размерностей представлений в полученном разложении, найдем рекуррентную формулу

$${}^n N_{[\lambda_1 \dots \lambda_n]} = \sum_{\lambda'_1 \dots \lambda'_{n-1}} {}^{n-1} N_{[\lambda'_1 \dots \lambda'_{n-1}]}. \quad (10.22)$$

где сумма взята по всем наборам $\lambda'_1, \dots, \lambda'_{n-1}$, удовлетворяющим соотношениям (10.21).

Для симметрических тензоров имеем рекуррентную формулу

$${}^n N_{[r]} = {}^{n-1} N_{[r]} + {}^{n-1} N_{[r-1]} + \dots + {}^{n-1} N_{[1]}, \quad (10.23)$$

а для антисимметрических тензоров —

$${}^n N_{[1, r]} = {}^{n-1} N_{[1, r]} + {}^{n-1} N_{[1, r-1]}. \quad (10.24)$$

Для получения общего выражения для размерности ${}^n N_{[\lambda]}$ можно воспользоваться правилом ветвления. В результате получим

$${}^n N_{[\lambda]} = \frac{D(l_1, \dots, l_n)}{D(n-1, n-2, \dots, 0)}, \quad (10.25)$$

где $l_j = \lambda_j + n - j$ и D — определитель, заданный соотношением (7.23).

§ 4. Неприводимые представления подгрупп группы $GL(n)$: $SL(n)$, $U(n)$, $SU(n)$

В этом параграфе мы покажем, что неприводимые представления группы $GL(n)$ остаются неприводимыми, когда мы переходим к некоторым ее подгруппам.

Элементы матриц неприводимого представления группы $GL(n)$ тензорами r -го ранга будут однородными многочленами степени r относительно элементов a_{ij} матрицы преобразования $\mathbf{a}$ [см. (10.1)]. Если представление подгруппы H такими матрицами оказывается приводимым, то его матрицы с помощью подходящей замены базиса можно привести к виду (3.113). Это преобразование

базиса не будет приводить матрицы всех преобразований группы $GL(n)$ к такому же виду, так как мы исходим из неприводимого представления группы $GL(n)$. При преобразовании базиса матричные элементы остаются однородными многочленами степени r относительно a_{ij} . Таким образом, представление будет приводимым для подгруппы H , если некоторый набор однородных многочленов $P_\nu(\mathbf{a})$ степени r обращается в нуль при всех преобразованиях $\mathbf{a}$ из H , но не обращается в нуль при всех $\mathbf{a}$ из $GL(n)$.

Группа $GL(n)$ состоит из всех невырожденных линейных преобразований с комплексными коэффициентами. Предположим, что H — подгруппа группы $GL'(n)$ вещественных линейных преобразований. Приводимость преобразований группы $GL'(n)$ означает, что набор полиномов $P_\nu(\mathbf{a})$ обращается в нуль при всех вещественных значениях своих аргументов a_{ij} . Но из теорем, которые можно найти во всех учебниках алгебры, следует, что если набор многочленов обращается в нуль при всех вещественных значениях своих аргументов, то он должен обращаться в нуль и при *всех* значениях аргументов вообще. Поэтому если какое-то представление оказывается приводимым для $GL'(n)$, то оно должно быть приводимым и для группы $GL(n)$. Обратно, неприводимое представление группы $GL(n)$ остается неприводимым, если мы ограничимся вещественными преобразованиями.

Рассмотрим далее унимодулярную группу $SL(n)$. Любую матрицу $\mathbf{a}$ группы $GL(n)$ можно записать в виде

$$\mathbf{a} = \alpha \mathbf{b},$$

где

$$\det \mathbf{b} = 1,$$

если положить

$$\alpha = (\det \mathbf{a})^{1/n}.$$

Таким образом, каждой матрице $\mathbf{a}$ из $GL(n)$ соответствует некоторая матрица $\mathbf{b}$ из $SL(n)$. Предположим, что многочлены P_ν обращаются в нуль при преобразованиях унимодулярной группы: $P_\nu(\mathbf{b}) = 0$ при всех $\mathbf{b}$ из $SL(n)$. При любых преобразованиях $\mathbf{a}$, принадлежащих $GL(n)$,

$$P_\nu(\mathbf{a}) = \alpha^r P_\nu(\mathbf{b}),$$

где $\mathbf{b}$ принадлежит $SL(n)$. Следовательно, $P_\nu(\mathbf{a}) = 0$. Отсюда вытекает, что из приводимости представления группы $SL(n)$ следует его приводимость для $GL(n)$. Обратно, неприводимое представление группы $GL(n)$ остается неприводимым и для $SL(n)$.

Задача. Докажите, что неприводимое представление группы $GL(n)$ останется неприводимым, если мы перейдем к подгруппе вещественных унимодулярных преобразований $SL'(n)$.

Те же результаты можно получить, рассматривая представления алгебры Ли группы $GL(n)$. Инфинитезимальными матрицами $GL(n)$ являются матрицы, все элементы которых равны нулю, кроме элемента, стоящего на месте (ij) и равного единице. Базис алгебры Ли образует набор элементов X_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$), удовлетворяющих соотношениям коммутации

$$[X_{ij}, X_{kl}] = \delta_{jk} X_{il} - \delta_{il} X_{kj}. \quad (10.26)$$

Элементы X_{ij} можно представить дифференциальными операторами:

$$X_{ij} = x_i \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (10.27)$$

Алгебра Ли состоит из всех элементов

$$\sum_{ij} a_{ij} X_{ij}.$$

Для группы $GL'(n)$ коэффициенты a_{ij} должны быть вещественными. В случае группы $GL(n)$ коэффициенты a_{ij} могут принимать любые комплексные значения. Предположим, что представление

$$X_{ij} \rightarrow D^{ij}$$

есть представление, в котором базисным элементам X_{ij} соответствуют матрицы D^{ij} . Тогда общему элементу алгебры будет отвечать матрица

$$\sum a_{ij} D^{ij}.$$

Если представление приводимо для $GL'(n)$, то можно найти базис, в котором матрицы

$$\sum a_{ij} D^{ij}$$

имеют вид (3.113) при всех вещественных значениях a_{ij} . Иначе говоря, если представление приводимо для $GL'(n)$, то некоторый набор линейных форм относительно a_{ij} обращается в нуль при всех *вещественных* значениях a_{ij} . Но если это так, то эти линейные формы должны обращаться в нуль при *любых комплексных* значениях a_{ij} , и представление оказывается приводимым и для $GL(n)$. Обратно, если представление неприводимо для группы $GL(n)$, то оно должно быть неприводимым для $GL'(n)$.

Задача. Путем рассмотрения представления алгебры Ли докажите, что неприводимое представление группы $GL(n)$ остается неприводимым для групп $SL(n)$ и $SL'(n)$. (*Указание.* Покажите, что условие унитарности приводит к еще одному линейному соотношению между коэффициентами a_{ij} .)

Унитарная группа $U(n)$ определяется условием

$$UU^+ = 1.$$

Элементы ее в окрестности единицы имеют вид

$$U = 1 - iS,$$

где S — инфинитезимальная матрица. Из условия $UU^+ = 1$ находим, что $S = S^+ = 0$. Таким образом, инфинитезимальными матрицами группы $U(n)$ служат эрмитовы матрицы. Выберем в качестве базисных элементов алгебры Ли n^2 элементов:

$$\begin{aligned} k \neq j; X^{(kj)}: & \quad 1 \text{ для элементов } (kj) \text{ и } (jk); \\ & \quad \text{все остальные элементы равны } 0. \\ X^{(kj)}: & \quad i \text{ для элемента } (kj), -i \text{ для эле-} \\ & \quad \text{мента } (jk), \text{ все остальные элементы} \quad (10.28) \\ & \quad \text{равны } 0. \\ k = j; X^{(kk)}: & \quad 1 \text{ на месте } (kk), \text{ все остальные} \\ & \quad \text{элементы равны } 0. \end{aligned}$$

Элементами алгебры Ли группы $U(n)$ служат все линейные комбинации базисных элементов (10.28) с *вещественными* коэффициентами. Комплексные коэффициенты дают нам алгебру Ли для группы $GL(n)$. Повторяя рассуждения, которые проводились для $GL'(n)$, мы видим, что неприводимое представление группы $GL(n)$ остается неприводимым для $U(n)$.

Задача. Докажите, что неприводимые представления группы $GL(n)$ остаются неприводимыми при переходе к унитарной унимодулярной подгруппе $SU(n)$. [Указание. Используйте результат, состоящий в том, что из неприводимости представления группы $GL(n)$ следует его неприводимость для $SL(n)$. Затем от $SL(n)$ переходите уже к $SU(n)$.]

Из изложенных выше рассуждений мы знаем, что неприводимые представления групп $SL(n)$, $U(n)$ и $SU(n)$ — это те представления, которые были найдены в § 2 настоящей главы. Однако для указанных подгрупп группы $GL(n)$ эти представления могут и не быть *независимыми*.

Схема Юнга $[1^n]$ имеет одну стандартную таблицу, и соответствующее неприводимое представление группы $GL(n)$ одномерно. В качестве базисного вектора этого представления можно взять тензор $[x^{(1)} \dots x^{(n)}]$ из § 2 настоящей главы. Если мы совершаем преобразование с матрицей a , этот тензор умножается на $\det a$.

Задача. Докажите последнее утверждение, выписывая преобразование антисимметрического тензора $[\mathbf{x}^{(1)} \dots \mathbf{x}^{(n)}]$.

Аналогично для схемы Юнга $[2^n]$ существует одна стандартная таблица

1	1
2	2
n	n

и один независимый базисный элемент. Это представление одномерно. Если мы выполняем преобразование с матрицей $\mathbf{a}$, то тензор умножается на $(\det \mathbf{a})^2$.

В общем случае для схемы $[s^n]$ представление одномерно, и тензор умножается на $(\det \mathbf{a})^s$, если мы производим преобразование с матрицей $\mathbf{a}$.

Предположим, что имеется представление группы $GL(n)$ со схемой $[\lambda_1 \dots \lambda_n]$. Если к схеме добавить столбец из n клеток, то единственным набором индексов, расположенных в стандартном порядке, который можно вписать в этот дополнительный столбец, будет набор $1, 2, \dots, n$. Таким образом, число стандартных таблиц для нового представления

$$[\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \dots, \lambda_n + 1]$$

то же, что и для представления $[\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n]$. Единственное изменение в матрицах представления состоит в том, что они умножаются на общий множитель $\det \mathbf{a}$. Точно так же если мы добавим s столбцов длины n к схеме $[\lambda_1 \dots \lambda_n]$, то новая схема $[\lambda_1 + s, \lambda_2 + s, \dots, \lambda_n + s]$ будет иметь то же число стандартных таблиц, что и схема $[\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n]$. Матрицы этого нового представления отличаются от матриц представления $[\lambda_1 \dots \lambda_n]$ на множитель $(\det \mathbf{a})^s$.

Если мы рассматриваем унимодулярные подгруппы $GL(n)$ такие, как $SL(n)$ или $SU(n)$, то $\det \mathbf{a} = 1$ и представления, соответствующие схемам $[\lambda_1 \dots \lambda_n]$ и $[\lambda_1 + s, \lambda_2 + s, \dots, \lambda_n + s]$, эквивалентны. В случае унимодулярных групп необходимо рассматривать только такие схемы, у которых число строк **меньше** n :

$$[\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n] \equiv [\lambda_1 - \lambda_n, \lambda_2 - \lambda_n, \dots, \lambda_{n-1} - \lambda_n]. \quad (10.29)$$

Существует еще одно соотношение эквивалентности, которое встречается в случае унимодулярных групп. Схема $[1^{n-1}]$ имеет n стандартных таблиц. Число базисных функций для этого представления

в точности то же, что и для представления со схемой [1]. При унимодулярных преобразованиях эти два представления эквивалентны:

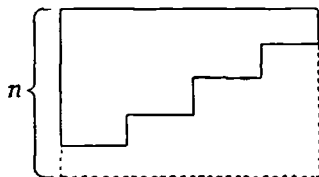
$$[1^{n-1}] \equiv [1].$$

Задача. Покажите, что для унимодулярных преобразований

$$[1^{n-1}] \equiv [1].$$

Общий результат мы сформулируем без доказательства. Для унимодулярных преобразований

$$[\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n] \equiv [\lambda_1 - \lambda_n, \lambda_1 - \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_1 - \lambda_2]. \quad (10.30)$$



Схема, показанная сплошными линиями на этой диаграмме, эквивалентна пунктирной схеме, дсполняющей ее до прямоугольника. В частности,

$$[1^{n-1}] \equiv [1] \quad \text{и} \quad [1^{n-r}] \equiv [1^r].$$

§ 5. Ортогональная группа в n -измерениях.

Свертка. Тензоры с нулевым следом

Если мы от линейной группы $GL(n)$ перейдем к ее ортогональной подгруппе $O(n)$, то представления с помощью тензоров, обладающих симметрией заданного типа, не будут более неприводимыми. Причина этого состоит в том, что, кроме операции симметризации, которой мы пользовались при построении неприводимых представлений группы $GL(n)$, появляется новая операция *свертки*, которая коммутирует с ортогональными преобразованиями.

Предположим, что рассматривается пространство тензоров r -го ранга с компонентами $F_{i_1 i_2 \dots i_r}$. В случае линейной группы $GL(n)$ единственными операциями, которые коммутируют с кронекеровской r -й степенью преобразования a , являются перестановки тензорных индексов. В § 2 настоящей главы мы воспользовались операторами перестановок для того, чтобы разложить пространство тензоров r -го ранга на подпространства тензоров заданной симметрии. В случае ортогональных преобразований

$$a_{ij} a_{ik} = a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk}. \quad (10.31)$$

Если, например, приравнять первые два индекса тензора $F_{i_1 i_2 \dots i_r}$ и просуммировать по всем значениям $i_1 = i_2$, то мы получим *след тензора по первым двум индексам*

$$F_{i_3 \dots i_r}^{(12)} = F_{i_1 i_2 \dots i_r} = \delta_{i_1 i_2} F_{i_1 i_2 i_3 \dots i_r}. \quad (10.32)$$

Процесс свертки дает новый тензор $(r-2)$ -го ранга. Операция свертки коммутирует с преобразованием тензора:

$$\begin{aligned} F'_{i_1 i_2 \dots i_r} &= a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_r j_r} F_{j_1 j_2 \dots j_r}, \\ F_{i_3 \dots i_r}^{(12)} &= F'_{i_3 \dots i_r} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} a_{i_3 j_3} \dots a_{i_r j_r} F_{j_1 j_2 j_3 \dots j_r} = \\ &= \delta_{j_1 j_2} a_{i_3 j_3} \dots a_{i_r j_r} F_{j_1 j_2 j_3 \dots j_r} = \\ &= a_{i_3 j_3} \dots a_{i_r j_r} F_{j_3 \dots j_r}^{(12)} = F_{i_3 \dots i_r}^{(12)'} \end{aligned} \quad (10.33)$$

Операцию свертки можно применять к любой паре индексов. В силу этого существует $r(r-1)/2$ следов $F_{\dots}^{(\alpha\beta)}$ ($\alpha < \beta$; $\alpha, \beta = 1, \dots, r$) тензора r -го ранга.

Выберем теперь из пространства тензоров r -го ранга подпространство тензоров, у которых *след по любым двум индексам равен нулю*. Из (10.33) мы видим, что это подпространство инвариантно; *тензоры r -го ранга, у которых след равен нулю*, переходят друг в друга при преобразованиях, индуцированных группой $O(n)$. В самом деле, можно показать, что всякий тензор $F_{i_1 \dots i_r}$ допускает однозначное разложение на тензор F^0 , у которого след равен нулю, плюс тензор вида

$$\begin{aligned} \Phi_{i_1 \dots i_r} &= \delta_{i_1 i_2} G_{i_3 \dots i_r}^{(12)} + \dots \\ &+ \delta_{i_{\alpha} i_{\beta}} G_{i_1 \dots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \dots i_{\beta-1} i_{\beta+1} \dots i_r}^{(\alpha\beta)} \quad \left(\frac{r(r-1)}{2} \text{ членов} \right). \end{aligned} \quad (10.34)$$

Чтобы показать это, рассмотрим подпространство Σ всех тензоров Φ . Условие „ортогональности“ тензора F этому подпространству,

$$(F, \Phi) \equiv F_{i_1 \dots i_r} \Phi_{i_1 \dots i_r} = 0 \quad \text{для всех } \Phi, \quad (10.35)$$

означает, что след тензора F по любым двум индексам должен быть равен нулю. [Выберем тензоры Φ так, чтобы только слагаемое $G^{(12)}$ было отлично от нуля. В этом случае условие (10.35) приводит к соотношению

$$F_{i_1 i_2 \dots i_r} G_{i_3 \dots i_r}^{(12)} = 0.$$

Поскольку компоненты тензоров $G^{(12)}$ произвольны, мы должны иметь

$$F_{i_1 i_2 \dots i_r} = 0.$$

Аналогично, выбирая Φ так, чтобы только слагаемое $G^{(\alpha\beta)}$ было от-
лично от нуля, докажем, что след тензора F по любой паре индек-
сов $(\alpha\beta)$ равен нулю.] Таким образом, совокупность тензоров F^0 ,
у которых след равен нулю, образует подпространство, ортогональ-
ное подпространству Σ , а все пространство разлагается в прямую
сумму этих двух подпространств

$$F_{i_1 \dots i_r} = \Phi_{i_1 \dots i_r} + F_{i_1 \dots i_r}^0. \quad (10.36)$$

Пространство Σ , определенное в (10.34), есть инвариантное под-
пространство. В самом деле, каждое из слагаемых в отдельности при
ортогональных преобразованиях переходит в слагаемое того же вида

$$\begin{aligned} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_r j_r} (\delta_{j_1 j_2} G_{j_3 \dots j_r}^{(12)}) = \\ = \delta_{i_1 i_2} a_{i_3 j_3} \dots a_{i_r j_r} G_{j_3 \dots j_r}^{(12)} = \delta_{i_1 i_2} G_{i_3 \dots i_r}^{(12)}. \end{aligned} \quad (10.37)$$

Таким образом, разложение (10.36) остается инвариантным при орто-
гональных преобразованиях.

Мы приведем пример разложения (10.36) при $r=2$. Для тен-
зора F_{ij} второго ранга имеем

$$F_{ij} = \frac{1}{n} F_{kk} \delta_{ij} + \left[F_{ij} - \frac{1}{n} F_{kk} \delta_{ij} \right] = \Phi_{ij} + F_{ij}^0. \quad (10.38)$$

Тензор

$$F_{ij}^0 = F_{ij} - \frac{1}{n} F_{kk} \delta_{ij}$$

имеет след, равный нулю. Ранг тензора

$$G^{(12)} = \frac{1}{n} F_{kk}$$

равен

$$r - 2 = 0.$$

При $r=3$ запишем тензор $F_{i_1 i_2 i_3}$ в виде

$$F_{i_1 i_2 i_3} = F_{i_1 i_2 i_3}^0 + H_{i_3} \delta_{i_1 i_2} + K_{i_2} \delta_{i_1 i_3} + L_{i_1} \delta_{i_2 i_3}, \quad (10.39)$$

и потребуем, чтобы тензор F^0 имел след по любой паре индексов,
равный нулю.

След по паре индексов (12): $F_{i i i_3} = n H_{i_3} + K_{i_3} + L_{i_3}.$

След по паре индексов (13): $F_{i i_2 i} = H_{i_2} + n K_{i_2} + L_{i_2}.$

След по паре индексов (23): $F_{i_1 i i} = H_{i_1} + K_{i_1} + n L_{i_1}.$

Решая эти уравнения, получаем

$$\begin{aligned} H_j &= \frac{1}{n^2 + n - 2} [(n+1) F_{..j}^{(12)} - F_{.j.}^{(13)} - F_{j..}^{(23)}], \\ K_j &= \frac{1}{n^2 + n - 2} [-F_{..j}^{(12)} + (n+1) F_{.j.}^{(13)} - F_{j..}^{(23)}], \\ L_j &= \frac{1}{n^2 + n - 2} [-F_{..j}^{(12)} - F_{.j.}^{(13)} + (n+1) F_{j..}^{(23)}]. \end{aligned} \quad (10.40)$$

Задача. Найдите выражение для составляющей F^0 тензора четвертого ранга $F_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ через компоненты этого тензора.

§ 6. Неприводимые представления группы $O(n)$

Заметим теперь, что перестановка индексов переводит один тензор, след которого равен нулю, в другой тензор, обладающий тем же свойством. Поэтому, чтобы получить тензоры с симметрией заданного типа, у которых след равен нулю, за исходное следует брать подпространство тензоров r -го ранга с нулевым следом и применять к ним симметризаторы Юнга. Действуя таким образом, мы приходим к неприводимым представлениям группы $O(n)$.

Итак, неприводимое представление группы $O(n)$ оказывается связанным со схемой Юнга $[\lambda_1 \dots \lambda_n]$, где $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = r$. Однако не все схемы Юнга являются допустимыми. Для целого класса схем тензоры, след которых равен нулю и которые имеют определенный тип симметрии, тождественно равны нулю. Общая теорема гласит следующее.

Теорема. Тензоры с нулевым следом, соответствующие схемам Юнга, имеющим сумму длин первых двух столбцов больше n , должны быть тождественно равны нулю. Иначе говоря, тензоры

$$F_{\begin{matrix} i_1 & k_1 & \dots \\ i_2 & k_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & l \\ \vdots & \vdots & \\ \vdots & k_b & \\ i_a \end{matrix}}, \quad (10.41)$$

где $a + b > n$, должны иметь вид (10.34).

Мы не будем приводить доказательства в общем случае. Вместо этого мы дадим доказательство в некоторых простых частных случаях.

Начнем с $n = 2$. Симметрический тензор

$$F \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline j \\ \hline \end{array}$$

имеет $a + b = 2$. Так как это число не превышает $n = 2$, можно построить тензор, у которого след равен нулю и который обладает такой симметрией. Независимыми будут компоненты F_{11} и F_{12} . Остальные компоненты выражаются через них:

$$F_{22} = -F_{11} \quad \text{и} \quad F_{21} = F_{12}.$$

Для схемы

$$\begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline j \\ \hline \end{array}$$

$a + b = 2$. Поэтому тензоры данного типа, у которых след равен нулю, существуют. В самом деле, так как этот тензор антисимметричен по i и j , его след должен быть равен нулю.

При $r = 3$ тензор с нулевым следом

$$F \begin{array}{|c|} \hline i_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline i_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline i_3 \\ \hline \end{array}$$

имеет независимые компоненты F_{111} , F_{112} . Другие стандартные компоненты задаются соотношениями

$$F_{111} + F_{122} = 0, \quad F_{112} + F_{222} = 0.$$

Так как $n = 2$, все тензоры, отвечающие разбиению $[111]$, равны нулю.

Тензор

$$F \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline j \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline k \\ \hline \end{array}$$

имеет только две ненулевые компоненты:

$$F_{11} \quad \text{и} \quad F_{12}.$$

Но если мы потребуем, чтобы след тензора был равен нулю, то получим уравнения

$$0 = F_{11} + F_{22} = F_{11}, \quad 0 = F_{12} + F_{11} = F_{12}.$$

Таким образом, тензоры

$$F \begin{array}{|c|c|} \hline i & j \\ \hline k \\ \hline \end{array}$$

с нулевым следом обращаются в нуль тождественно в соответствии с общей теоремой ($a + b = 3 > 2$). Мы также видим, что те же рассуждения применимы к тензорам

$$F \begin{array}{|c|c|c|} \hline i & j & \dots \\ \hline k \\ \hline \end{array}$$

с нулевым следом и с любым числом дополнительных индексов в первой строке схемы Юнга. При каждом фиксированном наборе значений дополнительных индексов приведенные выше рассуждения показывают, что тензор равен нулю, если следы по паре индексов (ij) и (jk) равны нулю.

Из общей схемы (10.41) мы видим, что число независимых тензоров, полученных с помощью свертки по паре индексов, очень мало. Так как тензор F антисимметричен по $i_1, \dots, i_a$, то след по i_v и l будет одним и тем же (за исключением, быть может, различия в знаке) для всех элементов i_v первого столбца. Таким образом, при свертке нам необходимо выбирать один произвольный индекс в каждом столбце (например, можно произвести свертку только по парам индексов в первой строке схемы).

При $n = 3$ рассмотрим тензоры [22] с нулевым следом, у которых $a + b = 4 > 3$. Условия обращения следа в нуль могут быть двух типов:

$$\sum_i F_{ii} = 0, \quad \text{где } k \neq l, \quad \text{и} \quad \sum_i F_{ii} = 0.$$

В случае условий первого типа, когда k и l заданы, i может принимать единственное значение, не равное k, l , откуда мы получаем такие уравнения, как

$$F_{11} = 0, \quad F_{22} = 0 \quad \text{и т. д.}$$

Для условий второго типа находим уравнения

$$F_{22} + F_{33} = 0, \quad F_{11} + F_{33} = 0, \quad F_{11} + F_{22} = 0.$$

Так как тензор антисимметричен по аргументам одного столбца, эти уравнения можно переписать в виде

$$F_{22} + F_{33} = 0, \quad F_{11} + F_{22} = 0, \quad F_{11} + F_{33} = 0.$$

Их единственным решением являются

$$F_{22}^{11} = F_{33}^{11} = F_{33}^{22} = 0.$$

Таким образом, мы обнаруживаем, что тензоры с нулевым следом, отвечающие схеме Юнга [22], тождественно равны нулю, что согласуется с общей теоремой.

Задача. Примените этот метод при $n=3$, чтобы показать, что тензоры с нулевым следом, отвечающие схеме Юнга [31], обращаются в нуль тождественно.

Проделайте то же для тензоров, отвечающих схеме Юнга [221], при $n=3$ и $n=4$. Что произойдет при $n=5$?

Из предыдущей общей теоремы мы заключаем, что допустимыми являются лишь те схемы, для которых сумма длин первых двух столбцов меньше или равна n . Допустимые схемы можно разбить на пары сопряженных схем T и T' следующим образом: длина первого столбца в схеме T меньше или равна $n/2$, $a \leq n/2$, длина первого столбца в схеме T' равна $n-a$, а все остальные столбцы в схемах T и T' имеют одинаковую длину. Так как для допустимой схемы

$$a + b \leq n \text{ и } a \geq b,$$

имеем

$$n - a \geq b \text{ и } (n - a) + b \leq n.$$

Отсюда следует, что схема T' допустима, если допустима схема T . Например, при $n=3$ схемы

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & & \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \\ [5] & [51]; & [1] & [11] \\ T & T' & T & T' \end{array} \quad (10.42)$$

сопряжены. (Вообще разбиения $[r]$ и $[r, 1]$ сопряжены.)

При $n=5$ сопряжены схемы

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & & & \\ \square & & & & & \\ \square & & & & & \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \square & & & \end{array} \\ [6] & [6111]; & [41] & [411] \\ T & T' & T & T' \end{array} \quad (10.43)$$

При $n = 4$ сопряжены схемы

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \\
 [5] & & [511] \\
 T & & T'
 \end{array} \quad (10.44)$$

Однако при *четных* значениях n имеем

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \dots & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} & \equiv & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \dots & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \\
 T & & T'
 \end{array} \quad (10.45)$$

Если n четно ($n = 2v$) и $a = 1/2n = v$, то схемы T и T' совпадают. Говорят, что T — *самосопряженная* схема.

Таким образом, чтобы описать схему T , можно воспользоваться символом $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_v)$, где $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_v$, причем некоторые из чисел μ могут быть нулями. Схема T содержит $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_v = r$ индексов. Схема T' содержит больше индексов, если только схема T не является самосопряженной.

Все допустимые схемы для заданного значения n можно исчерпать, полагая $r = 0, 1, 2, \dots$ и отбирая все неотрицательные числа μ , удовлетворяющие уравнению

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_v = r. \quad (10.46)$$

Здесь $n = 2v$, если n четно, и $n = 2v + 1$, если n нечетно. Для каждого решения уравнения (10.46) мы получаем схему T и строим сопряженную ей схему T' . Если n нечетно, то каждая схема получается только один раз. Если n четно и схема T содержит $v = n/2$ строк, то схема T' совпадает с T .

Инвариантное подпространство, определяемое допустимыми схемами, непусто. С помощью метода, аналогичного методу, использованному в § 2 настоящей главы [уравнение (10.12)], можно построить тензоры с нулевым следом для любой допустимой схемы.

До сих пор мы рассматривали полную ортогональную группу $O(n)$. Если мы ограничимся собственной ортогональной группой $O^+(n)$, для которой $\det a = +1$, то представления, соответствующие сопряженным схемам T и T' , становятся *эквивалентными*. При нечетном n представление, соответствующее самосопряженной схеме T , распадается на два неэквивалентных неприводимых представления.

В качестве простого примера заметим, что при $n = 3$ схема $T = [1]$ описывает векторы, а схема $T = [11]$ описывает кососимметрические

тензоры. При собственных ортогональных преобразованиях оба типа величин преобразуются одинаковым образом, так что схемы T и T' эквивалентны. При несобственных преобразованиях (инверсиях) тензоры, отвечающие схеме $T = [1]$, меняют знак (полярные векторы), в то время как для схемы $T' = [11]$ тензоры знака не меняют (аксиальные векторы).

Для физических приложений представляет интерес только случай нечетного n , когда неприводимые представления группы $O^+(n)$ можно полностью описать с помощью символа $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_v)$.

При $n = 3$ $v = 1$, поэтому неприводимые представления группы $O^+(3)$ описываются одним значком (μ_1) . Базисными функциями служат симметрические тензоры μ_1 -го ранга с нулевым следом. Если речь идет о представлениях группы $GL(3)$, то размерность пространства тензоров, отвечающих схеме $[\lambda_1]$, будет равна

$$\binom{\lambda_1 + 2}{\lambda_1} = \frac{(\lambda_1 + 1)(\lambda_1 + 2)}{2}.$$

Условие обращения в нуль следа тензора дает $\lambda_1(\lambda_1 - 1)/2$ соотношений. Из этого следует, что число независимых функций для (μ_1) равно

$$\frac{(\mu_1 + 1)(\mu_1 + 2)}{2} - \frac{\mu_1(\mu_1 - 1)}{2} = 2\mu_1 + 1.$$

Базисными функциями являются сферические функции порядка μ_1 . Поэтому величины, преобразующиеся так же, как сферические функции порядка μ_1 , будут неприводимыми тензорами [преобразующимися по группе $O^+(3)$].

Задача. Докажите, что сферические функции порядка l образуют базис представления (l) группы $O^+(3)$.

Таблица 46

Неприводимые представления группы $O^+(5)$

$(\mu_1 \mu_2)$	N	$(\mu_1 \mu_2)$	N
(00)	1	(22)	35
(10)	5	(41)	154
(20)	14	(32)	105
(11)	10	(42)	220
(30)	30	(33)	84
(21)	35	(43)	231
(40)	55	(44)	165
(31)	81		

При $n=5$ $v=2$, из чего следует, что неприводимые представления групп $O^+(5)$ (табл. 46) характеризуются двумя целыми числами μ_1 и μ_2 , причем

$$\mu_1 \geq \mu_2.$$

Размерность представления $(\mu_1\mu_2)$ задается формулой

$$N(\mu_1\mu_2) = \frac{1}{6}(\mu_1 - \mu_2 + 1)(\mu_1 + \mu_2 + 2)(2\mu_1 + 3)(2\mu_2 + 1). \quad (10.47)$$

Таблица 47

Неприводимые представления группы $O^+(7)$

$(\mu_1\mu_2\mu_3)$	N	$(\mu_1\mu_2\mu_3)$	N
(000)	1	(321)	1617
(100)	7	(222)	294
(200)	27	(430)	3003
(110)	21	(421)	4550
(300)	77	(331)	2079
(210)	105	(322)	1386
(111)	35	(440)	3003
(400)	182	(431)	7722
(310)	330	(422)	4095
(220)	168	(332)	2310
(211)	189	(441)	8008
(410)	819	(432)	9009
(320)	693	(333)	1386
(311)	616	(442)	10296
(221)	378	(433)	6006
(420)	1911	(443)	9009
(411)	1560	(444)	4719
(330)	825		

При $n=7$ $v=3$, откуда следует, что неприводимые представления группы $O^+(7)$ (табл. 47) характеризуются тремя целыми числами μ_1 , μ_2 , μ_3 , для которых выполняется неравенство

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3.$$

§ 7. Разложение неприводимых представлений группы $U(n)$ на представления группы $O^+(n)$

В § 5 настоящей главы мы разложили пространство тензоров r -го ранга в прямую сумму двух подпространств: пространства тензоров F^0 с нулевым следом и пространства Σ тензоров Φ , имеющих вид (10.34).

Оба подпространства были инвариантными относительно ортогональных преобразований. В § 6 настоящей главы мы применили симметризаторы Юнга к тензорам $F_{i_1 \dots i_r}^0$ с нулевым следом, чтобы получить неприводимые представления группы $O^+(n)$. Инвариантное же подпространство Σ тензоров Φ не является неприводимым. Применяя операцию свертки, можно разложить тензоры $\Phi_{i_1 \dots i_r}$ в прямую сумму:

$$\Phi = F^1 + \Phi', \quad (10.48)$$

где F^1 — то подпространство в Σ , у тензоров которого все „следы по двум парам индексов“ равны нулю:

$$F_{\dots i \dots i \dots k \dots k \dots}^1 = 0$$

при всех расположениях повторяющихся индексов i и k , а Φ' есть сумма членов вида

$$\delta_{i_\alpha i_\beta} \delta_{i_\mu i_\nu} H_{i_1 \dots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \dots i_{\beta-1} i_{\beta+1} \dots i_{\mu-1} i_{\mu+1} \dots i_{\nu-1} i_{\nu+1} \dots i_r}^{(\alpha\beta, \mu\nu)}. \quad (10.49)$$

С помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям, изложенным в § 5 настоящей главы, можно показать, что формула (10.48) задает разложение пространства Σ в прямую сумму инвариантных подпространств F^1 и Φ' . Следовательно, тензоры F разлагаются в прямую сумму

$$F = F^0 + F^1 + \Phi'. \quad (10.50)$$

Тензоры F^1 имеют вид

$$\delta_{i_\alpha i_\beta} Q_{i_1 \dots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \dots i_{\beta-1} i_{\beta+1} \dots i_r}^{(\alpha\beta)}, \quad (10.51)$$

где тензоры $Q^{(\alpha\beta)}$ имеют ранг $v = r - 2$ и след, равный нулю. Таким образом, неприводимые представления группы $U(n)$ тензорами r -го ранга содержат представление группы $O^+(n)$ тензорами $(r - 2)$ -го ранга с нулевым следом. Далее, применяя симметризаторы Юнга, мы можем получить неприводимые представления группы $O^+(n)$. Этот процесс свертки можно продолжить, в результате чего произвольный тензор $F_{i_1 \dots i_r}$ можно будет записать в виде суммы членов

$$\delta_{i_{\alpha_1} i_{\alpha'_1}} \dots \delta_{i_{\alpha_s} i_{\alpha'_s}} \Phi_{i_{\beta_1} \dots i_{\beta_v}} \quad (2s + v = r), \quad (10.52)$$

где тензор $\Phi_{i_1 \dots i_v}$ имеет нулевой след.

Если мы берем за исходные тензоры r -го ранга, обладающие наперед заданной симметрией, то процесс повторной свертки приводит к разложению их на тензоры с нулевым следом ранга r , $r - 2$, $r - 4$ и т. д.

Прежде чем рассматривать этот процесс разложения, покажем на примере, как используются повторные свертки. Рассмотрим полностью симметрические тензоры r -го ранга, которые можно образовывать из компонент A_i вектора $\mathbf{A}$. Пусть

$$A_i A_i \equiv \mathbf{A}^2.$$

Допустимые тензоры третьего ранга имеют вид

$$A_i A_j A_k, \quad \mathbf{A}^2 A_i \delta_{jk}, \quad (10.53)$$

где во второй член следует включить множитель $\mathbf{A}^2$, так как должны получиться однородные выражения степени 3 относительно компонент вектора $\mathbf{A}$. Кроме того, второе выражение (10.53) несимметрично, в то время как след тензора $A_i A_j A_k$ должен быть симметричен по индексам. Симметризуем второе выражение, заменив его на

$$\mathbf{A}^2 (A_i \delta_{jk} + A_j \delta_{ki} + A_k \delta_{ij}). \quad (10.54)$$

След по индексам (ij) тензора (10.54) равен $(n+2) \mathbf{A}^2 A_k$; след по индексам (ij) тензора $A_i A_j A_k$ равен $\mathbf{A}^2 A_k$. Поэтому симметрический тензор третьего ранга с нулевым следом имеет вид

$$(n+2) A_i A_j A_k - \mathbf{A}^2 (A_i \delta_{jk} + A_j \delta_{ki} + A_k \delta_{ij}). \quad (10.55)$$

При $r=4$ допустимые симметрические тензоры, образованные из компонент вектора $\mathbf{A}$, имеют вид

$$\begin{aligned} F &= A_i A_j A_k A_l, \\ \Phi &= \mathbf{A}^2 (A_i A_j \delta_{kl} + \dots), \\ \Phi' &= (\mathbf{A}^2)^2 (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \end{aligned} \quad (10.56)$$

Тензор с нулевым следом запишется в виде

$$F^0 = (n+2)(n+4)F - (n+2)\Phi + \Phi'. \quad (10.57)$$

Задача. Найдите тензор 5-го ранга с нулевым следом, образованный из компонент вектора $\mathbf{A}$. Выведите общую формулу для тензора произвольного ранга r .

Разложение представления $[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ групп $U(n)$ на представления $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ группы $O^+(n)$ означает, что тензор F с симметрией $[\lambda_1 \dots \lambda_n]$ записывается как сумма членов (10.52), где тензор Φ имеет симметрию $[\mu_1 \dots \mu_n]$. Так как каждый из множителей $\delta_{i_{a_v} i_{a_v'}}$ в (10.52) обладает симметрией схемы [2], можно сказать, что тензор F с симметрией $[\lambda_1 \dots \lambda_n]$ получается из тензора Φ

с симметрией $[\mu_1 \dots \mu_\nu]$, если взять внешнее произведение последнего тензора с тензорами, каждый из которых обладает симметрией [2]:

$$[\lambda_1 \dots \lambda_n] \text{ содержится в } [\mu_1 \dots \mu_\nu] \otimes \underbrace{[2] \otimes \dots \otimes [2]}_{s \text{ сомножителей}}. \quad (10.58)$$

Для специального случая $s=1$ [уравнение (10.34)] получаем такие схемы $(\mu_1, \dots, \mu_\nu)$, для которых произведение

$$[\mu_1 \dots \mu_\nu] \otimes [2] \quad (10.59)$$

содержит $[\lambda_1 \dots \lambda_n]$. Разложение внешних произведений было проделано нами в § 12 гл. 7. Для специального случая (10.59) схема $(\mu_1, \dots, \mu_\nu)$ получается из схемы $[\lambda_1 \dots \lambda_n]$ путем правильного удаления двух клеток. Например, при $[\lambda] = [4]$ правильное удаление двух клеток оставляет $[\mu'] = [2]$. Вторичное удаление двух клеток оставляет $[\mu''] = [0]$. Таким образом, представление группы $U(n)$, отвечающее схеме [4], разлагается на представления

$$[4] = (400\dots) + (200\dots) + (000\dots), \quad (10.60)$$

если мы переходим к группе $O^+(n)$. [Многоточие в (10.60) означает нули, так как символы $(\mu_1, \dots, \mu_\nu)$ должны содержать ν членов.]

Для представления [21] группы $U(n)$ после правильного удаления двух клеток остается [1]. Соответствующее разложение имеет вид

$$[21] = (21) + (10). \quad (10.61)$$

Для представления [22] группы $U(n)$ после правильного удаления двух клеток остается [2], а после второго правильного удаления остается [0], поэтому

$$[22] = (22) + (20) + (00). \quad (10.62)$$

Задача. Разложите тензоры с симметрией [21] так, как указано в уравнении (10.61).

То же проделайте для тензоров с симметрией [22].

Для больших схем процедура становится сложной. Схемы, у которых сумма длин первых двух строк превышает n , не имеют тензора с нулевым следом. В этом случае надо принимать во внимание эквивалентность сопряженных схем.

Вместо того чтобы попытаться дать общий вывод, мы приводим таблицы разложений при $n=5$ и $n=7$ (табл. 48 и 49). Большинство результатов можно получить с помощью простого метода, приведенного выше.

Разложение представлений группы $U(5)$
на представления группы $O^+(5)$

Таблица 48

r	$U(5)$ [λ]	$O^+(5)$ ($\mu_1 \mu_2$)	$N(\lambda)$
0	[0] (00)		1
1	[1] (10)		5
2	[2] (20) (00)		15
	[11] (11)		10
3	[3] (30) (10)		35
	[21] (21) (10)		40
4	[4] (40) (20) (00)		70
	[31] (31) (20) (11)		105
	[22] (22) (20) (00)		50
	[211] (21) (11)		45
5	[41] (41) (21) (30) (10)		224
	[32] (32) (30) (21) (10)		175
	[311] (31) (21) (11)		126
	[221] (22) (21) (10)		75
	[2111] (20) (11)		24
6	[42] (42) (40) (31) (22) (20) ² (00)		420
	[411] (41) (31) (21) (11)		280
	[33] (33) (31) (11)		175
	[321] (32) (31) (22) (21) (20) (11)		280
	[3111] (30) (21) (10)		70
7	[43] (43) (41) (32) (30) (21) (10)		560
	[421] (42) (41) (32) (31) (22) (30) (21) ² (10)		700
	[331] (33) (32) (31) (21) (11)		315
	[4111] (40) (31) (20) (11)		160
	[322] (32) (30) (22) (21) (10)		210
	[3211] (31) (22) (21) (20) (11)		175
8	[44] (44) (42) (40) (22) (20) (00)		490
	[431] (43) (42) (33) (41) (32) (31) ² (22) (21) (20) (11)		1050
	[422] (42) (32) (40) (31) (22) ² (20) ² (00)		560
	[4211] (41) (32) (31) (30) (21) ² (11)		450
9	[441] (44) (43) (42) (41) (32) (22) (30) (21) (10)		980
	[432] (43) (42) (41) (33) (32) ² (31) (30) (22) (21) ² (10)		1120
	[4311] (42) (40) (33) (32) (31) ² (22) (21) (20) (11)		720
	[4221] (41) (32) (31) (22) (30) (21) ² (10)		480
10	[442] (44) (43) (42) ² (32) (40) (31) (22) ² (20) ² (00)		1176
	[4411] (43) (33) (41) (32) (31) (21) (11)		700
	[4321] (42) (41) (33) (32) ² (31) ² (30) (22) ² (21) ² (20) (11)		1024
	[4222] (40) (31) (22) (20) ² (00)		200

Таблица 49

Разложение представлений группы $U(7)$ на представления
группы $O^+(7)$
(для $r \leq 6$)

r	$U(7)$ [λ]	$O^+(7)$ ($\mu_1\mu_2\mu_3$)	N [λ]
0	[0] (000)		1
1	[1] (100)		7
2	[2] (000) (200)		28
	[11] (110)		21
3	[3] (100) (300)		84
	[21] (100) (210)		112
	[111] (111)		35
4	[4] (000) (200) (400)		210
	[31] (110) (200) (310)		378
	[22] (000) (200) (220)		196
	[211] (110) (211)		210
5	[41] (100) (210) (300) (410)		1008
	[32] (100) (210) (300) (320)		882
	[311] (111) (210) (311)		756
	[221] (100) (210) (221)		490
	[2111] (111) (211)		224
6	[42] (000) (200) ² (220) (310) (400) (420)		2646
	[411] (110) (211) (310) (411)		2100
	[33] (110) (310) (330)		1176
	[321] (110) (200) (211) (220) (310) (321)		2352
	[222] (000) (200) (220) (222)		490
	[3111] (111) (211) (311)		840
	[2211] (110) (211) (221)		588
	[21111] (111) (210)		140

§ 8. Симплектическая группа $Sp(n)$.

Свертка. Тензоры с нулевым следом

Ортогональная группа в n -мерном пространстве $O(n)$ — это группа линейных преобразований a , оставляющих инвариантным скалярное произведение

$$(xy) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n. \quad (10.63)$$

Если рассматривать $O(n)$ с более общих позиций, то можно было бы определить ее как группу линейных преобразований, оставляющих инвариантной положительно определенную симметрическую билинейную форму. Путем подходящей замены базиса такую форму можно записать в каноническом виде (10.63).

Симплектическая группа в n измерениях $Sp(n)$ есть совокупность всех линейных преобразований $\mathbf{a}$, относительно которых инвариантна невырожденная *кососимметрическая* билинейная форма. Иначе говоря, невырожденная билинейная форма

$$\{xy\} = g_{ik}x_iy_k \quad (g_{ik} = -g_{ki}), \quad (10.64)$$

являющаяся *косым произведением* векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, остается неизменной при преобразованиях $\mathbf{a}$ группы $Sp(n)$. Матрица

$$\mathbf{G} = (g_{ik})$$

в уравнении (10.64) кососимметрична:

$$\tilde{\mathbf{G}} = -\mathbf{G}. \quad (10.64a)$$

Взяв определители матриц в соотношении (10.64a), получим

$$\det \mathbf{G} = (-1)^n \det \mathbf{G}.$$

Если n нечетно, $\det \mathbf{G} = 0$ и билинейная форма (10.64) вырождена. Поэтому симплектическую группу можно определять только для *четномерных пространств* ($n = 2\nu$, ν — целое). Условие, что форма (10.64) инвариантна относительно преобразования $\mathbf{a}$, имеет вид

$$\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{G}\mathbf{a} = \mathbf{G}. \quad (10.65)$$

Базис в n -мерном пространстве можно всегда выбрать таким образом, чтобы косое произведение (10.64) имело простой *канонический* вид. Начнем с произвольного ненулевого вектора $\mathbf{e}_1$ в n -мерном пространстве. Так как косое произведение (10.64) невырождено, можно найти вектор $\mathbf{y}$ такой, что $\{\mathbf{e}_1\mathbf{y}\} \neq 0$. Умножив $\mathbf{y}$ на некоторое число, получим вектор $\mathbf{e}_1'$, для которого $\{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1'\} = 1$. Теперь мы располагаем уже двумя векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_1'$, удовлетворяющими условиям

$$\{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\} = 0, \quad \{\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_1'\} = 0, \quad \{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1'\} = 1. \quad (10.66)$$

Векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_1'$ линейно независимы: если $\lambda\mathbf{e}_1 + \mu\mathbf{e}_1' = 0$, то, взяв косое произведение этой линейной комбинации с векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_1'$ по очереди, обнаружим, что $\lambda = \mu = 0$.

Векторы $\mathbf{z}$ пространства R_n , которые удовлетворяют двум линейным (независимым) уравнениям

$$\{\mathbf{e}_1\mathbf{z}\} = 0, \quad \{\mathbf{e}_1'\mathbf{z}\} = 0, \quad (10.67)$$

образуют $(n-2)$ -мерное линейное подпространство в R_n . Всякий вектор $\mathbf{x}$ из R_n можно записать в виде

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_1'\mathbf{e}_1' + \mathbf{z}, \quad (10.68)$$

где вектор $\mathbf{z}$ удовлетворяет (10.67). В самом деле, пользуясь (10.66) и (10.67), получаем

$$x_1 = \{\mathbf{x}\mathbf{e}_1'\}, \quad x_1' = -\{\mathbf{x}\mathbf{e}_1\}.$$

Определитель, построенный из компонент n векторов $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$, можно выразить через косые произведения. Чтобы показать это, рассмотрим величину

$$\frac{1}{2^v \cdot v!} \sum_p \delta_p \{ \mathbf{x}^{(1)} \mathbf{x}^{(2)} \} \{ \mathbf{x}^{(3)} \mathbf{x}^{(4)} \} \dots \{ \mathbf{x}^{(n-1)} \mathbf{x}^{(n)} \}, \quad (10.74)$$

где суммирование распространяется по всем перестановкам p верхних значков (т. е. по всем перестановкам векторов $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$), а δ_p — четность перестановки p . Записывая косые произведения через компоненты векторов с помощью соотношения (10.71), мы замечаем, что выражение (10.74) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^v \cdot v!} \sum_p \delta_p \sum_{i_1 \dots i_n} \epsilon_{i_1 i_2} \dots \epsilon_{i_{n-1} i_n} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \dots x_{i_{n-1}}^{(n-1)} x_{i_n}^{(n)} = \\ = \frac{1}{2^v \cdot v!} \sum_{i_1 \dots i_n} \epsilon_{i_1 i_2} \dots \epsilon_{i_{n-1} i_n} \sum_p \delta_p x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_n}^{(n)}. \end{aligned} \quad (10.75)$$

Сумма

$$\sum_p \delta_p x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_n}^{(n)}$$

отлична от нуля только в том случае, если все индексы $i_1, \dots, i_n$ различны. Для любого набора различных $i_1, \dots, i_n$ эта сумма равна

$$\delta_\pi \cdot [\mathbf{x}^{(1)} \dots \mathbf{x}^{(n)}],$$

где δ_π — четность перестановки π , которая переводит $1, 2, \dots, n$ в $i_1, \dots, i_n$, а $[\mathbf{x}^{(1)} \dots \mathbf{x}^{(n)}]$ — определитель из компонент векторов $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$. Поэтому выражение (10.75) равно

$$\frac{[\mathbf{x}^{(1)} \dots \mathbf{x}^{(n)}]}{2^v \cdot v!} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n} \delta_\pi \epsilon_{i_1 i_2} \dots \epsilon_{i_{n-1} i_n}. \quad (10.76)$$

Произведение $\epsilon_{i_1 i_2} \dots \epsilon_{i_{n-1} i_n}$ отлично от нуля только в том случае, если каждая пара индексов принимает значения α, α' или α', α . Член $\epsilon_{11} \epsilon_{22} \dots \epsilon_{vv}$, равен $+1$. Перестановка местами пар индексов дает по-прежнему $+1$. Соответствующая перестановка π четна, вследствие чего $\delta_\pi = 1$. Замена $\epsilon_{\alpha\alpha'}$ на $\epsilon_{\alpha'\alpha}$ приводит к тому, что значение произведения теперь уже равно -1 . Но такая замена соответствует нечетной перестановке π , у которой $\delta_\pi = -1$. Таким образом, каждое ненулевое слагаемое в этой сумме вносит вклад, равный 1. Число таких слагаемых равно $2^v \cdot v!$, так что выражение (10.76) равно $[\mathbf{x}^{(1)} \dots \mathbf{x}^{(n)}]$, и мы получаем следующий результат:

$$[\mathbf{x}^{(1)} \dots \mathbf{x}^{(n)}] = \frac{1}{2^v \cdot v!} \sum_p \delta_p \{ \mathbf{x}^{(1)} \mathbf{x}^{(2)} \} \dots \{ \mathbf{x}^{(n-1)} \mathbf{x}^{(n)} \}. \quad (10.77)$$

При выполнении линейного преобразования $\mathbf{a}$ в пространстве R_n определитель $[\mathbf{x}^{(1)} \dots \mathbf{x}^{(n)}]$ умножается на $\det \mathbf{a}$. Но если $\mathbf{a}$ — симплектическое преобразование, то оно оставляет косые произведения в правой части (10.77) неизменными и поэтому не должно изменять определитель $[\mathbf{x}^{(1)} \dots \mathbf{x}^{(n)}]$. Следовательно, для матрицы симплектического преобразования $\mathbf{a}$ определитель $\det \mathbf{a} = 1$ — *симплектические преобразования унимодулярны*. Здесь уже нет необходимости проводить различие между собственными и несобственными преобразованиями, как мы делали для группы $O(n)$.

Метод получения неприводимых представлений симплектической группы $Sp(n)$ очень схож с тем методом, которым мы воспользовались для получения неприводимых представлений ортогональной группы $O(n)$.

Если мы от линейной группы $GL(n)$ переходим к ее симплектической подгруппе $Sp(n)$ в четномерном пространстве ($n = 2v$), то представления группы $GL(n)$ с помощью тензоров заданной симметрии становятся приводимыми. Стало быть, кроме операции перестановки тензорных индексов, мы должны выполнять операцию *свертки*, которая коммутирует с симплектическими преобразованиями.

Рассмотрим пространство тензоров ранга r с компонентами $F_{i_1 \dots i_r}$. Для симплектических преобразований $\mathbf{a}$, пользуясь преобразованием (10.65) в каноническом базисе, получим

$$\varepsilon_{kl} a_{ki} a_{lj} = \varepsilon_{ij}. \quad (10.78)$$

Из тензора $F_{i_1 i_2 \dots i_r}$, умножая его на $\varepsilon_{i_1 i_2}$ и суммируя по i_1 и i_2 , можно построить *след по паре индексов* (12):

$$F_{i_3 \dots i_r}^{(12)} = \varepsilon_{i_1 i_2} F_{i_1 i_2 i_3 \dots i_r}. \quad (10.79)$$

В результате операции свертки получается тензор $(r-2)$ -го ранга. Свертка коммутирует с симплектическими преобразованиями. Если $\mathbf{a}$ — симплектическое преобразование, то

$$F'_{i_1 i_2 \dots i_r} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_r j_r} F_{j_1 j_2 \dots j_r}, \quad (10.6)$$

$$\begin{aligned} F_{i_3 \dots i_r}^{(12)'} &= \varepsilon_{i_1 i_2} F'_{i_1 i_2 i_3 \dots i_r} = \varepsilon_{i_1 i_2} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} a_{i_3 j_3} \dots a_{i_r j_r} F_{j_1 j_2 j_3 \dots j_r} = \\ &= \varepsilon_{j_1 j_2} a_{i_3 j_3} \dots a_{i_r j_r} F_{j_1 j_2 j_3 \dots j_r} = \\ &= a_{i_3 j_3} \dots a_{i_r j_r} F_{j_3 \dots j_r}^{(12)} = F_{i_3 \dots i_r}^{(12)'}. \end{aligned} \quad (10.80)$$

Процесс свертки (10.79) можно применять к любой паре индексов, в результате чего мы получим $r(r-1)/2$ следов $F^{(\alpha\beta)}$ тензора r -го ранга.

Выберем такие тензоры r -го ранга, у которых следы по всем парам индексов равны нулю. Равенство (10.80) показывает, что

подпространство таких тензоров с нулевым следом инвариантно относительно преобразований, индуцированных группой $Sp(n)$. Каждый тензор $F_{i_1 \dots i_r}$ можно однозначно разложить на тензор F^0 с нулевым следом плюс тензор вида

$$\Phi_{i_1 \dots i_r} = e_{i_1 i_2} G_{i_3 \dots i_r}^{(12)} + e_{i_\alpha i_\beta} G_{i_1 \dots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \dots i_{\beta-1} i_{\beta+1} \dots i_r}^{(\alpha\beta)} + \dots \left(\frac{r(r-1)}{2} \text{ членов} \right). \quad (10.81)$$

Доказательство в этом случае полностью совпадает с доказательством, приведенным в § 5 настоящей главы. Мы получаем разложение пространства тензоров в прямую сумму инвариантных подпространств:

$$F_{i_1 \dots i_r} = \Phi_{i_1 \dots i_r} + F_{i_1 \dots i_r}^0. \quad (10.82)$$

Инвариантность подпространства Σ тензоров Φ , имеющих вид (10.81), доказывается аналогично (10.37). При симплектических преобразованиях каждый член в сумме (10.81) переходит в член того же вида

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_r j_r} (e_{j_1 j_2} G_{j_3 \dots j_r}^{(12)}) = e_{i_1 i_2} a_{i_3 j_3} \dots a_{i_r j_r} G_{j_3 \dots j_r}^{(12)} = e_{i_1 i_2} G_{i_3 \dots i_r}^{(12)'}. \quad (10.83)$$

Метод отыскания тензора с нулевым следом аналогичен тому, который использовался при рассмотрении группы $O(n)$. Например, при $r=3$ запишем тензор $F_{i_1 i_2 i_3}$ в виде

$$F_{i_1 i_2 i_3} = F_{i_1 i_2 i_3}^0 + H_{i_3} e_{i_1 i_2} + K_{i_2} e_{i_3 i_1} + L_{i_1} e_{i_3 i_2}. \quad (10.84)$$

Требование обращения в нуль следа тензора F^0 приводит к уравнениям:

$$\text{След по паре индексов (12): } F_{i_3}^{(12)} = nH_{i_3} - K_{i_3} - L_{i_3}.$$

$$\text{След по паре индексов (31): } F_{i_2}^{(31)} = -H_{i_2} + nK_{i_2} - L_{i_2}.$$

$$\text{След по паре индексов (23): } F_{i_1}^{(23)} = -H_{i_1} - K_{i_1} + nL_{i_1}.$$

Решая их, найдем

$$\begin{aligned} H_i &= \frac{1}{n^2 - n - 2} [(n-1) F_{..i}^{(12)} + F_{..i}^{(31)} + F_{..i}^{(23)}], \\ K_i &= \frac{1}{n^2 - n - 2} [F_{..i}^{(12)} + (n-1) F_{..i}^{(31)} + F_{..i}^{(23)}], \\ L_i &= \frac{1}{n^2 - n - 2} [F_{..i}^{(12)} + F_{..i}^{(31)} + (n-1) F_{..i}^{(23)}]. \end{aligned} \quad (10.84a)$$

§ 9. Неприводимые представления группы $Sp(n)$.

Разложение неприводимых представлений группы $U(n)$ на представления ее симплектической подгруппы

Точно так же, как в случае ортогональной группы, перестановка индексов переводит один тензор с нулевым следом в другой тензор с нулевым следом. Если принять за исходное инвариантное подпространство тензоров F^0 r -го ранга с нулевым следом, то, применяя симметризаторы Юнга, мы сможем разложить его на подпространства тензоров с нулевым следом, обладающих симметрией определенного типа. Действуя так, мы придем к неприводимым представлениям группы $Sp(n)$.

Каждому неприводимому представлению группы $Sp(n)$ соответствует схема Юнга $[\lambda_1 \dots \lambda_n]$, где $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = r$. Однако не все схемы допустимы. Мы докажем, что тензоры с нулевым следом, соответствующие схемам Юнга, число строк в которых больше $v = n/2$, тождественно равны нулю. Чтобы доказать эту теорему, покажем, что тензоры, соответствующие схемам, содержащим больше чем $n/2$ строк, должны иметь вид (10.81). Нам необходимо рассматривать только индексы в первом столбце схемы. Поэтому мы предположим, что тензор $F_{i_1 \dots i_m}$ антисимметричен по индексам $i_1 \dots i_m$, где $m > v = n/2$. Как мы показали в § 2 настоящей главы, такой тензор является суперпозицией тензоров вида (10.14), т. е. $[x^{(1)} \dots x^{(m)}]$. Добавим к этому множеству векторные переменные $y^{(m+1)}, \dots, y^{(n)}$ и построим определитель

$$[x^{(1)} \dots x^{(m)} y^{(m+1)} \dots y^{(n)}]. \quad (10.85)$$

Компоненты тензора

$$[x^{(1)} \dots x^{(m)}]$$

будут коэффициентами при одночленах

$$y_{i_{m+1}}^{(m+1)} \dots y_{i_n}^{(n)}.$$

Из соотношения (10.77) определитель (10.85) можно записать в виде суммы членов, в которых векторы $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}, y^{(m+1)}, \dots, y^{(n)}$ взяты попарно, а в полученном тензоре произведена свертка. Поскольку $m > v$, по крайней мере одно косое произведение в каждом члене, стоящем в правой части соотношения (10.77), должно содержать только векторы x , что приводит к появлению множителя $\epsilon_{i_\alpha i_\beta} x_{i_\alpha}^{(\alpha)} x_{i_\beta}^{(\beta)}$, в результате чего такой член будет иметь вид (10.81). Следовательно, если $m > v$, то след тензора равен нулю. [На самом деле мы доказали даже нечто большее: число сомножителей в правой части (10.77), в которых векторы x входят парами, должно быть по крайней мере равно $(m - v)$, вследствие этого каждый член в правой части (10.77) имеет по крайней мере $(m - v)$ множителей ϵ_{ij} .]

Из этой теоремы следует, что мы можем ограничиваться схемами, содержащими самое большее v строк.

Тип симметрии для неприводимых представлений группы $Sp(n)$ будем обозначать символом $(\sigma_1 \dots \sigma_v)$, где $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_v \geq 0$. Базисом этого неприводимого представления служат тензоры с нулевым следом, симметрия которых задается символом $[\sigma_1 \dots \sigma_v]$. Размерность представления $(\sigma_1 \dots \sigma_v)$ группы $Sp(n)$ задается формулой

$$N(\sigma) = \prod_{i=1}^v \frac{\sigma_i + v - i + 1}{v - i + 1} \times \prod_{k > i}^v \frac{(\sigma_i - \sigma_k + k - i)(\sigma_i + \sigma_k + 2v + 2 - i - k)}{(k - i)(2v + 2 - i - k)}. \quad (10.86)$$

Некоторые наиболее простые неприводимые представления группы $Sp(n)$ при $n = 4, 6$ и 8 см. в табл. 50.

Таблица 50

Неприводимые представления группы $Sp(n)$

$n=4$			$n=6$			$n=8$		
r	$(\sigma_1 \sigma_2)$	$N(\sigma)$	r	$(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)$	$N(\sigma)$	r	$(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4)$	$N(\sigma)$
0	(00)	1	0	(000)	1	0	(0000)	1
1	(10)	4	1	(100)	6	1	(1000)	8
2	(20)	10	2	(200)	21	2	(2000)	36
	(11)	5		(110)	14		(1100)	27
3	(21)	16	3	(210)	64	3	(2100)	160
4	(22)	14		(111)	14		(1110)	48
			4	(220)	90	4	(2200)	308
				(211)	70		(2110)	315
			5	(221)	126		(1111)	42
			6	(222)	84	5	(2210)	792
							(2111)	288
						6	(2220)	825
							(2211)	792
						7	(2221)	1056
						8	(2222)	594

Подпространство Σ тензоров Φ [соотношение (10.85)] инвариантно относительно симплектических преобразований, но не является неприводимым. Так же как в § 7 настоящей главы, мы можем

Таблица 51

Разложение представлений группы $U(n)$ на представления группы $Sp(n)$

$n=4$			$n=6$		
r	$[\lambda]$	(σ)	r	$[\lambda]$	(σ)
0	[0]	(00)	0	[0]	(000)
1	[1]	(10)	1	[1]	(100)
2	[2]	(20)	2	[2]	(200)
3	[11]	(00) (11)	3	[11]	(000) (110)
	[21]	(10) (21)		[21]	(100) (210)
4	[22]	(00) (11) (22)	4	[111]	(100) (111)
	[211]	(20) (11)		[22]	(000) (110) (220)
			5	[211]	(200) (110) (211)
				[221]	(100) (210) (111) (221)
			6	[2111]	(100) (111) (210)
				[222]	(200) (211) (222)
				[2211]	(000) (110) ² (220) (211)
				[21111]	(200) (110)

$n=8$		
r	$[\lambda]$	(σ)
0	[0]	(0000)
1	[1]	(1000)
2	[2]	(2000)
3	[11]	(0000) (1100)
	[21]	(1000) (2100)
4	[111]	(1000) (1110)
	[22]	(0000) (1100) (2200)
5	[211]	(2000) (1100) (2110)
	[1111]	(0000) (1100) (1111)
6	[221]	(1000) (2100) (1110) (2210)
	[2111]	(1000) (2100) (1110) (2111)
7	[222]	(2000) (2110) (2220)
	[2211]	(0000) (1100) ² (2200) (2110) (1111) (2211)
8	[21111]	(2000) (1100) (2110) (1111)
	[2221]	(1000) (2100) (1110) (2210) (2111) (2221)
9	[22111]	(1000) (2100) (1110) ² (2210) (2111)
	[211111]	(1000) (2100) (1110)
10	[2222]	(0000) (1100) (2200) (1111) (2211) (2222)
	[22211]	(2000) (1100) (2110) ² (1111) (2220) (2211)
11	[221111]	(0000) (1100) ² (2200) (2110) (1111)
	[2111111]	(2000) (1100)

провести повторную свертку и разложить тензор в сумму членов вида

$$\varepsilon_{i_{\alpha_1} i'_{\alpha'_1}} \dots \varepsilon_{i_{\alpha_s} i'_{\alpha'_s}} \Phi_{i_{\beta_1} \dots i_{\beta_v}} \quad (2s + v = r), \quad (10.87)$$

где след тензора $\Phi_{i_1, \dots, i_v}$ равен нулю.

Если взять за исходные тензоры r -го ранга с определенной симметрией, то процесс свертки приведет к разложению пространства этих тензоров на тензоры с нулевым следом ранга r , $r - 2$, $r - 4$ и т. д., которые обладают определенной симметрией. Разложение представления $[\lambda_1 \dots \lambda_n]$ группы $U(n)$ на неприводимые представления $(\sigma_1 \dots \sigma_v)$ группы $Sp(n)$ означает, что тензор F с симметрией $[\lambda_1 \dots \lambda_n]$ записывают в виде суммы членов (10.87), где тензор Φ имеет симметрию $[\sigma_1 \dots \sigma_v]$. Так как каждый из сомножителей $\varepsilon_{i_{\alpha_v} i'_{\alpha'_v}}$ в (10.87) обладает симметрией [11], мы видим, что тензор F с симметрией $[\lambda_1 \dots \lambda_n]$ получается из тензора Φ с симметрией $[\sigma_1 \dots \sigma_v]$, если взять внешнее произведение s сомножителей, каждый из которых обладает симметрией [11]:

$$[\lambda_1 \dots \lambda_n] \text{ содержится в } [\sigma_1 \dots \sigma_v] \otimes \underbrace{[11] \otimes \dots \otimes [11]}_{s \text{ сомножителей}}. \quad (10.88)$$

Для специального случая $s = 1$ [уравнение (10.85)] мы получаем такие схемы $[\sigma_1 \dots \sigma_v]$, для которых внешнее произведение

$$[\sigma_1 \dots \sigma_v] \otimes [11] \quad (10.89)$$

содержит $[\lambda_1 \dots \lambda_n]$. Далее мы можем воспользоваться результатами § 12 гл. 7 относительно внешних произведений. Для (10.89) схема $(\sigma_1 \dots \sigma_v)$ получается из $[\lambda_1 \dots \lambda_n]$ правильным удалением антисимметричной пары [11]. После того как это сделано, проводится второе правильное удаление пары [11] и т. д.

Схема [11] разлагается на схемы $(11) + (00)$. Для схемы [22] получается разложение $(22) + (11) + (00)$. Для разложений $[\lambda_1 \dots \lambda_n]$, содержащих более $n/2$ строк, этот процесс становится сложным. Мы не будем рассматривать общий метод, а приведем таблицы разложений для простейших случаев (табл. 51).

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ГРУПП К ЗАДАЧАМ АТОМНОЙ И ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

§ 1. Классификация состояний систем тождественных частиц по группе $SU(n)$

Одна из главных задач атомной физики и физики ядра состоит в определении уровней энергии системы тождественных (эквивалентных) частиц. Поскольку точно решить эту задачу для системы взаимодействующих частиц мы не можем, приходится прибегать к методам теории возмущений. Мы предполагаем, что каждая частица системы движется в некотором усредненном потенциальном поле. Далее мы находим собственные состояния частицы в таком усредненном поле и выбираем базисные функции для всей задачи в целом в виде произведений таких одночастичных собственных функций. В этом случае возмущение будет состоять из какой-то части поля одной частицы плюс взаимодействие между частицами. Если частицы тождественны, то оператор взаимодействия будет симметричным по всем частицам. Следовательно, его матричный элемент, вычисленный с помощью базисных функций, будет сильно зависеть от симметрии этих функций относительно перестановки частиц.

Для большей общности мы начнем с предположения о том, что уже располагаем решением одночастичной задачи, гамильтониан которой инвариантен относительно группы преобразований G . Функции, соответствующие данному собственному значению $\epsilon^{(j)}$ одночастичной задачи, образуют базис некоторого представления $D^{(j)}$ группы G . Если размерность представления $D^{(j)}$ равна n , то одной и той же энергии $\epsilon^{(j)}$ будут соответствовать n базисных функций $\psi_1, \dots, \psi_n$. Предположим, что мы имеем систему, состоящую из r тождественных частиц и что в нулевом приближении каждая из частиц обладает энергией $\epsilon^{(j)}$. В нулевом приближении любое произведение волновых функций

$$\psi_{i_1}(1)\psi_{i_2}(2)\dots\psi_{i_r}(r) \quad (i_v = 1, \dots, n)$$

будет соответствовать одной и той же энергии $r \cdot \epsilon^{(j)}$. Возмущение снимет это вырождение. Поскольку полный гамильтониан задачи симметричен относительно перестановок тождественных частиц, собственными функциями в нулевом порядке теории возмущений будут те линейные комбинации произведений волновых функций, которые обладают симметрией определенного типа. Задача построения таких функций была решена в гл. 7.

Другая точка зрения состоит в следующем. Рассмотрим одночастичную волновую функцию ψ как вектор в n -мерном пространстве, натянутом на базисные векторы $\psi_1, \dots, \psi_n$:

$$\psi = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i, \quad \sum_{i=1}^n |a_i|^2 = 1. \quad (11.1)$$

Если базисные векторы ψ_i подвергнуть унитарному преобразованию, так что

$$\psi'_i = u_{ij} \psi_j, \quad (11.2)$$

мы получим другой базис того же самого векторного пространства. Кроме того, унитарные преобразования можно сделать унитарными, если вынести фазовый множитель $e^{i\delta}$. Этот фазовый множитель оказывается общим для всех функций ψ'_i , поэтому он не меняет ни одного матричного элемента. В результате мы можем считать, что пространство, натянутое на функции $\psi_1, \dots, \psi_n$, дает нам базис (точного) представления унитарной унитарной группы $SU(n)$. Если мы имеем систему, состоящую из r тождественных частиц, то произведения $\psi_{i_1}(1) \dots \psi_{i_r}(r)$ образуют базис представления группы $SU(n)$ посредством тензоров r -го ранга. В этом случае наша задача заключается в том, чтобы построить неприводимые представления группы $SU(n)$ посредством тензоров r -го ранга с определенной симметрией. Эту задачу мы решили в гл. 10.

Из приведенных выше соображений следует, что пространство тензоров r -го ранга играет две роли:

- 1) оно служит пространством представления группы $SU(n)$;
- 2) оно служит пространством представления группы G . Если пространство тензоров r -го ранга разложить на подпространства тензоров r -го ранга, обладающих определенной симметрией, то мы найдем неприводимые представления группы $SU(n)$. В то же время каждое из этих подпространств дает нам некоторое представление группы G . Одна из главных задач, стоящих перед нами, состоит в том, чтобы разложить неприводимые представления группы $SU(n)$ по неприводимым представлениям группы G .

§ 2. Разложение момента количества движения.

Разложение представлений группы $SU(n)$

на представления группы $O^+(3)$

Простейшим примером приведенных выше рассуждений является случай, когда гамильтониан отдельной частицы инвариантен относительно группы $O^+(3)$ — трехмерной группы вращений. В этом случае энергии $\epsilon^{(J)}$ отдельных частиц, соответствующие различным неприводимым представлениям $D^{(J)}$ группы $O^+(3)$, хорошо разделяются.

Волновая функция отдельной частицы представляет собой вектор в $(2j+1)$ -мерном пространстве неприводимого представления $D^{(j)}$, натянутом на базисные векторы

$$\psi_i \quad (i = -j, -j+1, \dots, j-1, j).$$

Оператор $J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ принимает на всех векторах этого пространства фиксированное значение $j(j+1)$, и мы можем, например, выбрать ψ_i так, чтобы $J_z \psi_i = i \psi_i$. Из произведений векторов ψ мы хотим построить и приводимые тензоры [относительно группы $SU(2j+1)$] и определить, какие представления $D^{(j)}$ группы $O^+(3)$ содержатся в них.

Наиболее простой метод заключается в следующем. Тензор первого ранга соответствует схеме Юнга [1]. Он дает нам неприводимое представление [1] группы $SU(2j+1)$ и неприводимое представление $D^{(j)}$ группы $O^+(3)$. При $r=2$ мы получаем неприводимые представления [2] и [11] группы $SU(2j+1)$. Разложение этих представлений на представления группы $O^+(3)$ легко проводится с помощью результатов, полученных в § 8 гл. 9 относительно коэффициентов Клебша — Гордана. Если в соотношении (9.116) положить $j_1 = j_2 = j$, то

$$A_J = (u_1 v_2 - u_2 v_1)^{2j-J} (u_1 x_1 + u_2 x_2)^J (v_1 x_1 + v_2 x_2)^J. \quad (11.3)$$

Если поменять местами переменные $u_1 \leftrightarrow v_1$, $u_2 \leftrightarrow v_2$, то A_J в результате умножится на $(-1)^{2j-J}$. Таким образом, если число $2j-J$ четно, то тензор второго ранга, образованный из произведений $\psi_{i_1} \psi_{i_2}$, симметричен, если же число $2j-J$ нечетно, то тензор антисимметричен. Следовательно, при целом j представление



содержит

$$J = 2j, 2j-2, \dots, 0, \quad (11.4)$$

в то время как представление



содержит

$$J = 2j-1, 2j-3, \dots, 1. \quad (11.4a)$$

При полуцелом j представление



имеет

$$J = 2j, 2j-2, \dots, 1, \quad (11.5)$$

а представление

$$\begin{array}{c} \square \\ \square \end{array}$$

имеет

$$J = 2j - 1, 2j - 3, \dots, 0. \quad (11.5a)$$

Заметим, в частности, что функция, имеющая $J = 0$, является симметрическим тензором при целом j и антисимметрическим тензором при нечетном j . Разложение этой функции по ψ_i получится, если в (11.3) положить $j = 0$:

$$\begin{aligned} \Psi_{J=0} &= (u_1 v_2 - u_2 v_1)^{2j} = \\ &= \sum_{m=-j}^j \frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!} (-1)^{j-m} (u_1 v_2)^{j+m} (u_2 v_1)^{j-m} = \\ &= (2j)! \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} \psi_m^j \varphi_{-m}^j, \end{aligned}$$

в силу чего нормированная функция при $J = 0$ имеет вид

$$\Psi_{J=0} = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} \psi_m^j \varphi_{-m}^j. \quad (11.6)$$

Для тензоров более высокого ранга мы продемонстрируем наш метод сначала при $j = 1/2$. Так как $n = 2j + 1 = 2$, схемы Юнга могут содержать самое большее две строки. Далее, из (10.29) следует

$$[\lambda_1 \lambda_2] \equiv [\lambda_1 - \lambda_2, 0].$$

Комбинируя этот результат с (11.5), видим, что представление [2] имеет $J = 1$, в то время как представление [11] $\equiv 0$ имеет $J = 0$. Схема [21] эквивалентна схеме [1], так что $J = 1/2$. Точно так же любая схема $[a + 1, a] \equiv [1]$ содержит $J = 1/2$. Если мы возьмем внешнее произведение

$$\begin{array}{c} \square \square \\ \square \end{array} \otimes \begin{array}{c} \square \end{array} = \begin{array}{c} \square \square \square \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \square \square \\ \square \end{array},$$

то в левой части будем иметь произведения функций с $j = 1$ и $j = 1/2$. Получающиеся при этом значения J равны $1/2$ и $3/2$. Вторая схема в правой части имеет $J = 1/2$, откуда следует, что схема [3] содержит $J = 3/2$. Повторяя эти рассуждения для произведения

$$\begin{aligned} [3] \otimes [1] &= [4] + [31] \\ j &= \frac{3}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 2 \quad 1, \end{aligned}$$

мы получаем, что схема [4] имеет $J=2$, а в общем случае схема $[\lambda_1 \lambda_2]$ содержит $J=(\lambda_1 - \lambda_2)/2$.

Мы уже знаем, что при $j=1$ ($n=2j+1=3$)

представление $\square$ ($J=1$) имеет размерность 3;

представление $\square\square$ ($J=2, 0$) имеет размерность 6;

представление $\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$ ($J=1$) имеет размерность 3;

представление $\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}$ ($J=0$) имеет размерность 1, так как $n=3$.

Затем мы образуем прямое произведение

$$\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \otimes \square = \begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix}$$

Комбинируя в левой части $j=1$ и $j'=1$, мы получаем $J=2, 1, 0$. В правой части представление [111] имеет $J=0$, так что представление [21] содержит $J=2, 1$. Кроме того, разлагая внешнее произведение

$$\square\square \otimes \square = \square\square\square + \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix},$$

$$j: \quad 2, 0 \quad 1 \quad \quad \quad J=2, 1$$

получаем $J=1, 1, 2, 3$, так что представление

$$\square\square\square = [3]$$

содержит $J=3, 1$. Взяв прямое произведение

$$\begin{aligned} \square \otimes \square\square &= \begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & & \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix} = \\ &\equiv \begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & & \end{smallmatrix} + \square, \end{aligned}$$

мы получим слева $j=1, j'=2, 0$, откуда $J=1, 1, 2, 3$, так что представление

$$\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & & \end{smallmatrix} = [31]$$

Таблица 52

 $j = 1$

Внешние произведения	Значения момента количества движения					Разложение внешнего произведения
	S $J=0$	P 1	D 2	F 3	G 4	
$[1] \otimes [11]$	1	1	1	.	.	$[21], [0]$
$[1] \otimes [2]$	.	2	1	1	.	$[3], [21]$
$[1] \otimes [21]$	1	2	2	1	.	$[31], [2], [1]$
$[1] \otimes [3]$	1	1	2	1	1	$[4], [31]$
$[1] \otimes [31]$	1	2	3	2	1	$[41], [31], [2]$
$[1] \otimes [32] (\equiv [31])$	1	2	3	2	1	$[42], [3], [21]$

Таблица 53

Конфигурация $(J)'$. Разложение
момента количества движения

 $J = 1, SU(3)$

r	$[\lambda]$	J	$N([\lambda])$
0	$[0]$	$0 = S$	1
1	$[1]$	$1 = P$	3
2	$[2]$	$0, 2 = SD$	6
	$[11] \equiv [1]$	$1 = P$	3
3	$[3]$	$1, 3 = PF$	10
	$[21]$	$1, 2 = PD$	8
	$[111] \equiv [10]$	$0 = S$	1
4	$[4]$	$0, 2, 4 = SDG$	15
	$[31]$	$1, 2, 3 = PDF$	15
	$[22] \equiv [2]$	$0, 2 = SD$	6
	$[211] \equiv [1]$	$1 = P$	3
5	$[41]$	$1, 2, 3, 4 = PDFG$	24
	$[32] \equiv [31]$	$1, 2, 3 = PDF$	15
	$[311] \equiv [2]$	$0, 2 = SD$	6
	$[221] \equiv [1]$	$1 = P$	3
6	$[42]$	$0, (2)^2, 3, 4 = SD^2FG$	27
	$[411] \equiv [3]$	$1, 3 = PF$	10
	$[33] \equiv [3]$	$1, 3 = PF$	10
	$[321] \equiv [21]$	$1, 2 = PD$	8
	$[222] \equiv [0]$	$0 = S$	1

Таблица 54

Конфигурация $(j)^r$. Разложение
момента количества движения

$$j = \frac{3}{2}, SU(4)$$

r	$[\lambda]$	J	$N([\lambda])$
0	[0]	0	1
1	[1]	$\frac{3}{2}$	4
2	[2]	1, 3	10
	[11]	0, 2	6
3	[21]	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$	20
4	[22]	0, $(2)^2, 4$	20
	[211]	1, 2, 3	15

содержит $J=3, 2, 1$. Из прямого произведения

$$\square\square\square \otimes \square = \square\square\square\square + \square\square\square$$

находим, что

$$\square\square\square\square = [4]$$

содержит $J=4, 2, 0$.

Этот рекуррентный метод, использующий равенства (11.4), (11.5) и формулы для разложения внешних произведений, позволяет нам узнать, какие значения момента количества движения J отвечают любому представлению группы $SU(n=2j+1)$. Этот метод мы проиллюстрируем на примере $j=1$. Выпишем последовательность внешних произведений в первом столбце таблицы, соответствующие им значения момента количества движения — во втором и само разложение внешнего произведения — в третьем (табл. 52). Воспользуемся соотношениями эквивалентности для схем Юнга

$$[\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n] \equiv [\lambda_1 - \lambda_n, \lambda_2 - \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_{n-1} - \lambda_n], \quad (10.29)$$

$$[\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n] \equiv [\lambda_1 - \lambda_n, \lambda_1 - \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_1 - \lambda_2] \quad (10.30)$$

при $n=2j+1=3$. Комбинируя результаты, представленные в табл. 52, мы находим, какие значения момента количества движения отвечают представлению $[\lambda]$.

Таблица 55

Конфигурация $(j)^r$. Разложение момента
количества движения

$j = 2, SU(5)$

r	$[\lambda]$	$J=0$	S 1	P 2	D 3	F 4	G 5	H 6	I 7	K 8	L 9	M 10	N 11	O 12	Q 12	$N([\lambda])$
0	[0]	1														1
1	[1]	.	.	1												5
2	[2]	1	.	1	.	1										15
	[11]	.	1	.	1											10
3	[3]	1	.	1	1	1	.	1								35
	[21]		1	2	1	1	1									40
4	[4]	1	.	2	.	2	1	1	.	1						70
	[31]	.	2	2	3	2	2	1	1							105
	[22]	2	.	2	1	2	.	1								50
	[211]	.	2	1	2	1	1									45
5	[41]	1	2	3	4	4	3	3	3	2	1	1				224
	[32]	1	2	4	3	4	3	2	1	1						175
	[311]	.	3	2	4	2	3	1	1							126
	[221]	1	1	3	2	2	1	1								75
	[2111]	.	1	1	1	1										24
6	[42]	3	2	7	5	8	5	6	3	3	1	1				420
	[411]	.	4	3	6	4	5	3	3	1	1					280
	[33]	.	3	1	5	2	3	2	2	.	1					175
	[321]	1	4	6	6	6	5	3	2	1						280
	[3111]	1	1	2	2	2	1	1								70
7	[43]	1	4	7	7	8	8	6	5	4	2	1	1			560
	[421]	3	6	10	11	12	10	9	6	4	2	1				700
	[331]	.	5	4	7	5	6	3	3	1	1					315
	[4111]	.	2	3	3	3	3	2	1	1						160
	[322]	2	2	5	4	5	3	3	1	1						210
	[3211]	1	3	4	5	4	3	2	1							175
8	[44]	4	1	6	4	8	4	7	3	4	2	2	.	1		490
	[431]	2	9	12	16	15	15	12	10	6	4	2	1			1050
	[422]	4	3	10	7	11	7	8	4	4	1	1				560
	[4211]	1	6	6	9	8	8	5	4	2	1					450
9	[441]	4	5	11	11	14	11	12	8	7	4	3	1	1		980
	[432]	3	9	14	16	17	16	13	10	7	4	2	1			1120
	[4311]	2	7	10	12	12	11	9	6	4	2	1				720
	[4221]	2	5	8	9	9	8	6	4	2	1					480
10	[442]	6	5	15	12	18	13	15	9	9	4	4	1	1		1176
	[4411]	.	7	7	11	9	11	7	7	4	3	1	1			700
	[4321]	4	10	14	18	18	15	13	9	5	3	1				1024
	[4222]	2	1	5	3	5	3	3	1	1						200

Разложения для $j = 1, 3/2, 2, 5/2, 3, 7/2$ приведены в табл. 53---58. В этих таблицах мы привели разложения лишь для разбиений с $\lambda_1 \leq 4$ при целом j и $\lambda_1 \leq 2$ при полуцелом j .

Таблица 56

Конфигурация $(j)^r$. Разложение момента количества движения

$$j = \frac{5}{2}, SU(6)$$

r	$[\lambda]$	J	$N([\lambda])$
0	[0]	0	1
1	[1]	$\frac{5}{2}$	6
2	[2]	1, 3, 5	21
	[11]	0, 2, 4	15
3	[21]	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \left(\frac{5}{2}\right)^2, \left(\frac{7}{2}\right)^2, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}$	70
	[111]	$\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}$	20
4	[22]	$(0)^2, (2)^3, 3, (4)^3, 5, (6)^2, 8$	105
	[211]	$(1)^2, (2)^2, (3)^3, (4)^2, (5)^2, 6, 7$	105
5	[221]	$\left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{3}{2}\right)^3, \left(\frac{5}{2}\right)^4, \left(\frac{7}{2}\right)^4, \left(\frac{9}{2}\right)^4, \left(\frac{11}{2}\right)^3,$ $\left(\frac{13}{2}\right)^2, \frac{15}{2}, \frac{17}{2}$	210
	[2111]	$\frac{1}{2}, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{5}{2}\right)^2, \left(\frac{7}{2}\right)^2, \left(\frac{9}{2}\right)^2, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}$	84
6	[222]	$(1)^3, 2, (3)^5, (4)^2, (5)^3, (6)^2, (7)^2, 9$	175
	[2211]	$(0)^2, 1, (2)^5, (3)^3, (4)^5, (5)^2, (6)^3, 7, 8$	189
	[21111]	1, 2, 3, 4, 5	35

При составлении таблиц для больших значений j следует использовать прямой метод разложений разбиений вида $[1^r]$, подробно описанный в § 5 настоящей главы.

Задача. Составьте таблицу разложений для $j = 3/2$.

Таблица 57

Конфигурация $(j)^r$. Разложение момента
количества движения

$j = 3, SU(7)$ для $r \leq 4$

r	$[\lambda]$	$j=0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12$	$N([\lambda])$
0	[0]	1	1
1	[1]	. . . 1	7
2	[2]	1 . 1 . 1 . 1	28
	[11]	. 1 . 1 . 1	21
3	[3]	. 1 . 2 1 1 1 1 . 1	84
	[21]	. 1 2 2 2 2 1 1 1	112
	[111]	1 . 1 1 1 . 1	35
4	[4]	2 . 2 1 3 1 3 1 2 1 1 . 1	210
	[31]	. 3 3 5 4 5 4 4 2 2 1 1	378
	[22]	2 . 4 1 4 2 3 1 2 . 1	196
	[211]	. 3 2 4 3 4 2 2 1 1	210

Таблица 58

Конфигурация $(j)^r$. Разложение момента
количества движения

$j = \frac{7}{2}, SU(8)$ для $r \leq 4$

r	$[\lambda]$	J	$N([\lambda])$
0	[0]	0	1
1	[1]	$\frac{7}{2}$	8
2	[2]	1, 3, 5, 7	36
	[11]	0, 2, 4, 6	28
3	[21]	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \left(\frac{5}{2}\right)^2, \left(\frac{7}{2}\right)^3, \left(\frac{9}{2}\right)^2, \left(\frac{11}{2}\right)^2, \left(\frac{13}{2}\right)^2, \frac{15}{2}, \frac{17}{2}, \frac{19}{2}$	168
	[111]	$\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \frac{15}{2}$	56
4	[22]	$0^3, 2^4, 3^2, 4^5, 5^2, 6^5, 7^2, 8^3, 9, 10^2, 12$	336
	[211]	$1^3, 2^3, 3^5, 4^4, 5^5, 6^4, 7^4, 8^2, 9^2, 10, 11$	378
	[1111]	0, $2^2, 4^2, 5, 6, 8$	70

§ 3. Принцип Паули. Атомные спектры в схеме связи Рассела—Саундерса

Прежде чем применять результаты предыдущего параграфа к физическим задачам, следует ввести еще одно условие. *Принцип Паули* гласит, что *полная* волновая функция системы электронов должна быть *антисимметричной* относительно любой их перестановки. То же утверждение остается в силе для любой системы тождественных частиц с полуцелым спином [т. е. частиц, у которых спиновые волновые функции образуют базис неприводимого представления $D^{(j)}$ группы $O^+(3)$ с полуцелым j]. Полная волновая функция для систем тождественных частиц с *целым* спином должна быть *симметричной* относительно любой их перестановки.

В случае многоэлектронных атомов в нулевом приближении мы рассматриваем одночастичные состояния в некотором усредненном центральном поле. Состояние одного электрона характеризуется квантовыми числами n, l, m_l, m_s . Первое квантовое число задает энергию, числа l и m_l нумеруют базисные функции представления $D^{(l)}$ группы вращений, связанной с орбитальным (внешним) движением, а число m_s нумерует базисные функции представления $D^{(1/2)}$ группы вращений, связанной с внутренним движением (спином). Возмущение состоит из кулоновского взаимодействия между электронами и членов, зависящих от спинов электронов.

Для легких атомов члены, зависящие от спинов электронов, вносят в энергию малый вклад по сравнению с вкладом от кулоновского отталкивания. Приближенный метод, в основу которого положено это предположение, носит название схемы связи Рассела—Саундерса ($L-S$ -связи). В схеме $L-S$ -связи мы рассматриваем орбитальные волновые функции и спиновые функции электронов отдельно. Если имеется r электронов в одночастичных состояниях с моментом количества движения l , то произведение орбитальных волновых функций при преобразованиях группы $SU(2l+1)$ будет вести себя как тензор r -го ранга. Так как кулоновское отталкивание симметрично относительно координат всех электронов, энергия кулоновского взаимодействия будет сильно зависеть от симметрии координатной волновой функции. Итак, соответствующие задаче линейные комбинации являются неприводимыми тензорами r -го ранга. Мы видим, что в общем случае состояния с более высокой орбитальной симметрией будут обладать большей энергией: если волновая функция симметрична относительно некоторой пары частиц, то кулоновское отталкивание между ними будет значительным; если же волновая функция антисимметрична относительно какой-нибудь пары частиц, то кулоновское отталкивание между ними будет малым.

В то же время мы должны комбинировать внутренние (спиновые) волновые функции электронов r . Для одного электрона волновые

функции образуют базис некоторого представления группы $SU(2)$, поскольку $j = 1/2$, $2j + 1 = 2$. Для r электронов мы должны составить тензоры r -го ранга определенной симметрии.

Наконец, чтобы получить полную волновую функцию, мы должны перемножить пространственные и спинные волновые функции. Но по принципу Паули полная волновая функция должна быть полностью антисимметричной. Из результатов, полученных в гл. 7, мы знаем, как образовать такие произведения: схемы Юнга для пространственной и спинной функций должны быть сопряженными [ср. выражение (7.211)].

Для спинных волновых функций мы воспользуемся результатами, полученными в § 2 настоящей главы для $j = 1/2$. Схема Юнга содержит самое большее две строки ($\lambda_1 + \lambda_2 = r$), и результирующий момент количества движения равен

$$S = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2). \quad (11.7)$$

Иначе говоря, схема Юнга для r электронов с полным спином S имеет вид

$$[\lambda_1 \lambda_2] = \left[\frac{r+2S}{2}, \frac{r-2S}{2} \right]. \quad (11.8)$$

Размерность (мультиплетность) представления равна $2S + 1$.

Поскольку пространственные волновые функции должны отвечать сопряженной схеме Юнга (с переставленными строками и столбцами), то схемы для орбитальных функций могут иметь в каждой строке самое большее по две клетки. Для орбитальных волновых функций в задачах атомной физики можно ограничиться разбиениями с $\lambda_1 \leq 2$.

Начнем с конфигурации $(p)^r$. В этом случае $l = 1$. Общее число различных орбитальных состояний, допустимых для отдельной частицы,

Таблица 59
Уровни электронной конфигурации $(p)^r$

	Орбитальный момент количества движения	Спин	Мультиплет
$r = 1$	$[1] L = 1$	$[1] S = \frac{1}{2}$	^2P
$r = 2$	$[2] L = 2, 0$ $[1^2] L = 1$	$[1^2] S = 0$ $[2] S = 1$	$^1S, ^1D$ ^3P
$r = 3$	$[21] L = 2, 1$ $[1^3] L = 0$	$[21] S = \frac{1}{2}$ $[3] S = \frac{3}{2}$	$^2P, ^2D$ ^4S

равно $2l + 1 = 3$. Внутренней волновой функции ($s = 1/2$) соответствуют два основных состояния. Таким образом, возможно всего шесть различных состояний, и p -оболочка заполнится при $r = 6$. Все эти результаты содержатся в таблицах предыдущего параграфа. Мы воспользовались соотношением (11.7) для полных спиновых функций и табл. 53 для полных орбитальных волновых функций. Результаты приведены в табл. 59.

Нам нет необходимости брать значения $r > 3$ (т. е. рассматривать больше чем половину состояний, относящихся к данной оболочке), ибо остальную часть таблицы можно получить, если воспользоваться соотношениями эквивалентности (10.29) и (10.30). Например, при $r = 4$

$$[22] \equiv [2] \quad \text{и} \quad L = 2, 0;$$

схеме [22] отвечает $S = 0$. Таким образом, мы получаем те же результаты, что и при $r = 2$

$$[2] \cdot [1]^2.$$

Для конфигурации $(d)^r$ с $l = 2$ мы воспользуемся табл. 55 для $j = 2$. Эта оболочка содержит 10 состояний. Полученные уровни приведены в табл. 60.

Таблица 60

Уровни электронной конфигурации $(d)^r$

	Орбитальный момент количества движения	Спин	Мультиплет
$r = 1$	$[1] L = 2$	$[1] S = \frac{1}{2}$	^2D
$r = 2$	$[2] L = 4, 2, 0$ $[1^2] L = 3, 1$	$[1^2] S = 0$ $[2] S = 1$	$^1S, ^1D, ^1G$ $^3P, ^3F$
$r = 3$	$[21] L = 5, 4, 3, (2)^2, 1$ $[1^3] L = 3, 1$	$[21] S = \frac{1}{2}$ $[3] S = \frac{3}{2}$	$^2P, (^2D)^2, ^2F,$ $^2G, ^2H$ $^4P, ^4F$
$r = 4$	$[1^4] L = 2$ $[21^2] L = 5, 4, (3)^2, 2, (1)^2$ $[2^2] L = 6, (4)^2, 3, (2)^2, (0)^2$	$[4] S = 2$ $[31] S = 1$ $[2^2] S = 0$	^5D
$r = 5$	$[1^5] L = 0$ $[21^3] L = 4, 3, 2, 1$ $[2^21] L = 6, 5, (4)^2, (3)^2, (2)^3, 1, 0$	$[5] S = \frac{5}{2}$ $[41] S = \frac{3}{2}$ $[32] S = \frac{1}{2}$	^6S

Задачи. 1. Пользуясь табл. 57, составьте таблицу уровней для конфигурации $(f)^r$ ($l = 3$).

2. Рассуждения, к которым мы здесь прибегали, можно применить и к классификации вращательных состояний двухатомных молекул, у которых оба атома одинаковы. Воспользуйтесь этими соображениями для классификации состояний орто- и параводорода, а также орто- и парадейтерия. Напишите функцию распределения для этих молекул в их основном электронном и колебательном состоянии.

Следующий шаг в теории возмущений состоял бы во включении в гамильтониан членов, зависящих от спина. В этом случае произведение представлений D^J и D^S распадется на представления D^J . Члены, зависящие от спина, приводят к расщеплению мультиплетов.

§ 4. Старшинство¹⁾ в атомных спектрах

Для конфигурации $(p)^r$ схема симметрии $[\lambda]$ и момент количества движения L полностью характеризуют состояние: при заданной симметрии мультиплет встречается только один раз. Иначе обстоит дело с конфигурацией $(d)^r$. Для трех частиц существуют два ${}^2D$ -состояния, обладающих одинаковой симметрией [21]. Многие мультиплеты встречаются по несколько раз при одной и той же схеме $[\lambda]$, когда $r = 4, 5$. Для классификации этих состояний было бы удобно иметь какое-нибудь дополнительное квантовое число. Мы хотели бы найти некоторую группу G , которая содержалась бы в группе $SU(2l+1)$ и включала бы группу вращений $O^+(3)$ в качестве своей подгруппы. Тогда состояние характеризовалось бы своей схемой симметрии $[\lambda]$ для группы $SU(2l+1)$, неприводимым представлением группы G , которому оно принадлежит, и своим моментом количества движения L . Такую группу G можно найти, но получающаяся при этом классификация состояний оказывается полезной только при условии, если гамильтониан возмущения коммутирует (или приближенно коммутирует) с преобразованиями группы G . Если это условие выполнено, то параметр, задающий неприводимое представление группы G , дает нам дополнительное квантовое число, имеющее физический смысл. Для спектров многоэлектронных атомов такой подгруппой группы G служит группа $O^+(2l+1)$.

Предположим, что у нас имеется система двух электронов в конфигурации $(l)^2$. Орбитальные волновые функции $\psi_i^{(1)}, \psi_j^{(2)}$ двух электронов являются векторами в $(2l+1)$ -мерном пространстве представления $D^{(l)}$ группы вращений. Произведения функций $\psi_i^{(1)}\psi_j^{(2)}$ образуют

¹⁾ Этот термин используется при переводе английского слова „seniority“. — *Прим. перев.*

базис некоторого представления унитарной группы $SU(2l+1)$ и в то же время образуют базис некоторого представления группы вращений $O^+(3)$. При $j=l$ (целое число) равенство (11.6) показывает, что симметрическая билинейная форма (скалярное произведение)

$$\Psi_{L=0} = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \sum_{m=-l}^l \psi_m^{(1)} \psi_{-m}^{(2)} \equiv \psi^{(1)} \cdot \psi^{(2)} \quad (11.9)$$

приводит к сложению моментов количества движения двух частиц и к полному моменту количества движения $L=0$. В пространстве тензоров трехмерные вращения будут индуцировать линейные преобразования, но функция $\Psi_{L=0}$, определяемая соотношением (11.9), останется неизменной. Существует, однако, гораздо более широкая группа преобразований, которые оставляют инвариантным скалярное произведение (11.9). Скалярное произведение (11.9) является симметрической билинейной формой, заданной на векторах $(2l+1)$ -мерного пространства. Поэтому оно инвариантно относительно ортогональных преобразований группы $O^+(2l+1)$, которую мы рассматривали в гл. 10. Операция (11.9), которая связывает орбитальные функции двух электронов и приводит к полному моменту количества движения $L=0$, понижает ранг тензора $\psi_i^{(1)} \psi_j^{(2)}$ на 2. Эта операция инвариантна относительно преобразований группы $O^+(2l+1)$. Операция (11.9) взятия скалярного произведения представляет собой не что иное, как операцию свертки, введенную нами в § 5 гл. 10.

Мы видим теперь, что произведения функций $\psi_i^{(1)} \psi_j^{(2)}$ служат пространством представления для трех групп:

$$SU(2l+1) \supset O^+(2l+1) \supset O^+(3).$$

Произведения $\psi_i^{(1)} \psi_j^{(2)}$ можно сначала разложить на неприводимые представления [2] и [11] группы $SU(2l+1)$. Для функций, относящихся к представлению [2], мы можем воспользоваться операцией свертки (11.9) и разложить пространство этих функций на две части: на тензоры нулевого ранга ($\psi^{(1)} \cdot \psi^{(2)}$) и тензоры второго ранга с нулевым следом. В § 5 гл. 10 эти части обозначались Φ и F^0 . Таким образом, представление [2] группы $SU(2l+1)$ разлагается на представления (00) и (20) группы $O^+(2l+1)$.

Скалярное произведение (11.9) симметрично и приводит к $L=0$. Соответствующая спиновая функция для двух электронов должна быть антисимметричной и обладать симметрией схемы [11] с $S=0$. Поэтому процесс свертки (11.9) связывает два электрона, в результате чего возникает ^1S -состояние.

Следующий этап классификации состоит в разложении представлений группы $O^+(2l+1)$ на представления группы вращений $O^+(3)$.

Разложение момента количества движения

$$SU(2l+1) \rightarrow O^+(2l+1) \rightarrow O^+(3)$$

выполняется без особого труда: представление [2] содержит $L=2l$, $2l-2, \dots, 2, 0$. Подпространство (00) содержит только $L=2$, поэтому подпространство (20) содержит $L=2l, 2l-2, \dots, 2$. Функции, принадлежащие представлению [11], при свертке обращаются в нуль. Следовательно, они принадлежат представлению (11) группы $O^+(2l+1)$. Возможными значениями для L служат

$$L=2l-1, 2l-3, \dots, 3, 1.$$

Мы получаем следующую классификацию для двух частиц:

$SU(2l+1)$	$O^+(2l+1)$	$O^+(3)$	
[2]	(20)	$L=2l, 2l-2, \dots, 2;$	(11.10)
[2]	(00)	$L=0;$	
[11]	(11)	$L=2l-1, 2l-3, \dots, 3, 1.$	

Рассмотрим далее систему четырех электронов в конфигурации $(l)^4$. Операция (11.9), будучи примененной к функциям

$$\psi_{l_1}^{(1)} \psi_{l_2}^{(2)} \psi_{l_3}^{(3)} \psi_{l_4}^{(4)},$$

порождает члены вида

$$(\psi^{(1)} \cdot \psi^{(2)}) \psi_{l_3}^{(3)} \psi_{l_4}^{(4)}. \quad (11.11)$$

Они соответствуют комбинации волновых функций двух электронов, находящихся в ${}^1S$ -состоянии, с тензором второго ранга, образованным из функций другой пары электронов. Если мы снова прибегнем к свертке, то получатся члены вида

$$(\psi^{(1)} \cdot \psi^{(2)}) (\psi^{(3)} \cdot \psi^{(4)}), \quad (11.12)$$

т. е. комбинация ${}^1S$ -состояний, представляющая собой тензор нулевого ранга и обладающая $L=0$.

Если в качестве исходного взять неприводимое представление [22] группы $SU(2l+1)$, то свертка приведет к разложению его на представления (00), (20) и (22) группы $O^+(2l+1)$. Функции, принадлежащие представлению (00), имеют вид (11.12). Функции, принадлежащие представлению (20), имеют вид (11.11) и являются произведением тензора с нулевым следом, построенным из функций двух электронов, и тензора ${}^1S$ -состояния другой пары. Разложение момента количества движения следует из этих утверждений и результатов, полученных для двух частиц. Функции представления (00) должны иметь $L=0$. Функции представления (20) имеют $L=2l, 2l-2, \dots, 2$. Чтобы найти разложение момента

Таблица 61

	Орбитальный момент количества движения $[\lambda] (l_1, l_2)$	Старшинство ν	Полный момент количества движения L	Спин $[\hat{\lambda}] S$	Мультиплет
$r = 0$	$[0] (00)$	0	0	$[0] 0$	^1S
$r = 1$	$[1] (10)$	1	2	$[1] \frac{1}{2}$	^2D
$r = 2$	$[2] (00)$	0	0	$[11] 0$	^1S
	$[20] (20)$	2	4, 2	$[11] 0$	$^1D, ^1G$
	$[11] (11)$	2	3, 1	$[2] 1$	$^3P, ^3F$
$r = 3$	$[21] (10)$	1	2	$[21] \frac{1}{2}$	^2D
	(21)	3	5, 4, 3, 2, 1	$[21] \frac{1}{2}$	$^2P, ^2D, ^2F, ^2G, ^2H$
$r = 4$	$[111] (11)$	2	3, 1	$[3] \frac{3}{2}$	$^4P, ^4F$
	$[1111] (10)$	1	2	$[4] 2$	^5D
	$[211] (11)$	2	3, 1	$[31] 1$	$^3P, ^3F$
	(21)	3	5, 4, 3, 2, 1	$[31] 1$	$^3P, ^3D, ^3F, ^3G, ^3H$
	$[22] (00)$	0	0	$[22] 0$	^1S
	(20)	2	4, 2	$[22] 0$	$^1D, ^1G$
	(22)	4	6, 4, 3, 2, 0	$[22] 0$	$^1S, ^1D, ^1F, ^1G, ^1I$
$r = 5$	$[11111] (00)$	0	0	$[5] \frac{5}{2}$	^6S
	$[2111] (11)$	2	3, 1	$[41] \frac{3}{2}$	$^4P, ^4F$
	(20)	2	4, 2	$[41] \frac{3}{2}$	$^4D, ^4G$
	$221 (10)$	1	2	$[32] \frac{1}{2}$	^2D
	(21)	3	5, 4, 3, 2, 1	$[32] \frac{1}{2}$	$^2P, ^2D, ^2F, ^2G, ^2H$
	(22)	4	6, 4, 3, 2, 0	$[32] \frac{1}{2}$	$^2S, ^2D, ^2F, ^2G, ^2I$

	Орбитальный момент количества движения [λ] ($\mu_1\mu_2\mu_3$)	Стар- шинство ν	Полный момент количества движения L	Спин [$\tilde{\lambda}$] S
$r=0$	[0] (000)	0	0	[0] 0
$r=1$	[1] (100)	1	3	[1] $\frac{1}{2}$
$r=2$	[2] (000)	0	0	[11] 0
	(200)	2	6, 4, 2	[11] 0
	[11] (110)	2	5, 3, 1	[2] 1
$r=3$	[21] (100)	1	3	[21] $\frac{1}{2}$
	(210)	3	8, 7, 6, 5 ² , 4 ² , 3, 2 ² , 1	[21] $\frac{1}{2}$
	[111] (111)	3	6, 4, 3, 2, 0	[3] $\frac{3}{2}$
$r=4$	[22] (000)	0	0	[22] 0
	(200)	2	6, 4, 2	[22] 0
	(220)	4	10, 8 ² , 7, 6 ² , 5 ² , 4 ³ , 3, 2 ³ , 0	[22] 0
	[211] (110)	2	5, 3, 1	[31] 1
	(211)	4	9, 8, 7 ² , 6 ² , 5 ³ , 4 ³ , 3 ³ , 2 ² , 1 ²	[31] 1
	[111] $\equiv$ [111] (111)	3	6, 4, 3, 2, 0	[4] 2
$r=5$	[221] (100)	1	3	[32] $\frac{1}{2}$
	(210)	3	8, 7, 6, 5 ² , 4 ² , 3, 2 ² , 1	[32] $\frac{1}{2}$
	(221)	5	11, 10, 9 ² , 8 ² , 7 ⁴ , 6 ⁴ , 5 ⁵ , 4 ⁴ , 3 ⁵ , 2 ³ , 1 ³	[32] $\frac{1}{2}$
	[2111] (111)	3	6, 4, 3, 2, 0	[41] $\frac{3}{2}$
	(211)	4	9, 8, 7 ² , 6 ² , 5 ³ , 4 ³ , 3 ³ , 2 ² , 1 ²	[41] $\frac{3}{2}$
$r=6$	[11111] $\equiv$ [11] (110)	2	5, 3, 1	[5] $\frac{5}{2}$
	[222] (000)	0	0	[33] 0
	(200)	2	6, 4, 2	[33] 0
	(220)	4	10, 8 ² , 7, 6 ² , 5 ² , 4 ³ , 3, 2 ³ , 0	[33] 0
	(222)	6	12, 10, 9 ² , 8 ² , 7 ² , 6 ⁴ , 5 ² , 4 ⁴ , 3 ³ , 2 ² , 1, 0 ²	[33] 0
	[2211] (110)	2	5, 3, 1	[42] 1
	(211)	4	9, 8, 7 ² , 6 ² , 5 ³ , 4 ³ , 3 ³ , 2 ² , 1 ²	[42] 1
	(221)	5	11, 10, 9 ² , 8 ² , 7 ⁴ , 6 ⁴ , 5 ⁵ , 4 ⁴ , 3 ⁵ , 2 ³ , 1 ³	[42] 1
	[21111] (111)	3	6, 4, 3, 2, 0	[51] 2
	(210)	3	8, 7, 6, 5 ² , 4 ² , 3, 2 ² , 1	[51] 2
	[1 ⁶] $\equiv$ [1] (100)	1	3	[6] 3
$r=7$	[2221] (100)	1	3	[43] $\frac{1}{2}$
	(210)	3	8, 7, 6, 5 ² , 4 ² , 3, 2 ² , 1	[43] $\frac{1}{2}$
	(221)	5	11, 10, 9 ² , 8 ² , 7 ⁴ , 6 ⁴ , 5 ⁵ , 4 ⁴ , 3 ⁵ , 2 ³ , 1 ³	[43] $\frac{1}{2}$
	(222)	6	12, 10, 9 ² , 8 ² , 7 ² , 6 ⁴ , 5 ² , 4 ⁴ , 3 ³ , 2 ² , 1, 0 ²	[43] $\frac{1}{2}$
	[22111] (111)	3	6, 4, 3, 2, 0	[52] $\frac{3}{2}$
	(211)	4	9, 8, 7 ² , 6 ² , 5 ³ , 4 ³ , 3 ³ , 2 ² , 1 ²	[52] $\frac{3}{2}$
	(220)	4	10, 8 ² , 7, 6 ² , 5 ² , 4 ³ , 3, 2 ³ , 0	[52] $\frac{3}{2}$
	[211111] (110)	2	5, 3, 1	[61] $\frac{5}{2}$
	(200)	2	6, 4, 2	[61] $\frac{5}{2}$
	[1 ⁷] $\equiv$ [0] (000)	0	0	[7] $\frac{7}{2}$

	Орбитальный момент количества движения [λ] ($\mu_1\mu_2\mu_3$)	Стар- шинство ν	Полный момент количества движения L	Спин [$\tilde{\lambda}$] S
$r=0$	[0] (000)	0	0	[0] 0
$r=1$	[1] (100)	1	3	[1] $\frac{1}{2}$
$r=2$	[2] (000)	0	0	[11] 0
	(200)	2	6, 4, 2	[11] 0
	[11] (110)	2	5, 3, 1	[2] 1
$r=3$	[21] (100)	1	3	[21] $\frac{1}{2}$
	(210)	3	8, 7, 6, 5 ² , 4 ² , 3, 2 ² , 1	[21] $\frac{1}{2}$
	[111] (111)	3	6, 4, 3, 2, 0	[3] $\frac{3}{2}$
$r=4$	[22] (000)	0	0	[22] 0
	(200)	2	6, 4, 2	[22] 0
	(220)	4	10, 8 ² , 7, 6 ² , 5 ² , 4 ³ , 3, 2 ³ , 0	[22] 0
	[211] (110)	2	5, 3, 1	[31] 1
	(211)	4	9, 8, 7 ² , 6 ² , 5 ³ , 4 ³ , 3 ³ , 2 ² , 1 ²	[31] 1
	[111] $\equiv$ [111] (111)	3	6, 4, 3, 2, 0	[4] 2
$r=5$	[221] (100)	1	3	[32] $\frac{1}{2}$
	(210)	3	8, 7, 6, 5 ² , 4 ² , 3, 2 ² , 1	[32] $\frac{1}{2}$
	(221)	5	11, 10, 9 ² , 8 ² , 7 ⁴ , 6 ⁴ , 5 ⁵ , 4 ⁴ , 3 ⁵ , 2 ³ , 1 ³	[32] $\frac{1}{2}$
	[2111] (111)	3	6, 4, 3, 2, 0	[41] $\frac{3}{2}$
	(211)	4	9, 8, 7 ² , 6 ² , 5 ³ , 4 ³ , 3 ³ , 2 ² , 1 ²	[41] $\frac{3}{2}$
$r=6$	[11111] $\equiv$ [11] (110)	2	5, 3, 1	[5] $\frac{5}{2}$
	[222] (000)	0	0	[33] 0
	(200)	2	6, 4, 2	[33] 0
	(220)	4	10, 8 ² , 7, 6 ² , 5 ² , 4 ³ , 3, 2 ³ , 0	[33] 0
	(222)	6	12, 10, 9 ² , 8 ² , 7 ² , 6 ⁴ , 5 ² , 4 ⁴ , 3 ³ , 2 ² , 1, 0 ²	[33] 0
	[2211] (110)	2	5, 3, 1	[42] 1
	(211)	4	9, 8, 7 ² , 6 ² , 5 ³ , 4 ³ , 3 ³ , 2 ² , 1 ²	[42] 1
	(221)	5	11, 10, 9 ² , 8 ² , 7 ⁴ , 6 ⁴ , 5 ⁵ , 4 ⁴ , 3 ⁵ , 2 ³ , 1 ³	[42] 1
	[21111] (111)	3	6, 4, 3, 2, 0	[51] 2
	(210)	3	8, 7, 6, 5 ² , 4 ² , 3, 2 ² , 1	[51] 2
	[1 ⁶] $\equiv$ [1] (100)	1	3	[6] 3
$r=7$	[2221] (100)	1	3	[43] $\frac{1}{2}$
	(210)	3	8, 7, 6, 5 ² , 4 ² , 3, 2 ² , 1	[43] $\frac{1}{2}$
	(221)	5	11, 10, 9 ² , 8 ² , 7 ⁴ , 6 ⁴ , 5 ⁵ , 4 ⁴ , 3 ⁵ , 2 ³ , 1 ³	[43] $\frac{1}{2}$
	(222)	6	12, 10, 9 ² , 8 ² , 7 ² , 6 ⁴ , 5 ² , 4 ⁴ , 3 ³ , 2 ² , 1, 0 ²	[43] $\frac{1}{2}$
	[22111] (111)	3	6, 4, 3, 2, 0	[52] $\frac{3}{2}$
	(211)	4	9, 8, 7 ² , 6 ² , 5 ³ , 4 ³ , 3 ³ , 2 ² , 1 ²	[52] $\frac{3}{2}$
	(220)	4	10, 8 ² , 7, 6 ² , 5 ² , 4 ³ , 3, 2 ³ , 0	[52] $\frac{3}{2}$
	[211111] (110)	2	5, 3, 1	[61] $\frac{5}{2}$
	(200)	2	6, 4, 2	[61] $\frac{5}{2}$
	[1 ⁷] $\equiv$ [0] (000)	0	0	[7] $\frac{7}{2}$

количества движения для представления (22), мы воспользуемся тем, что подпространства (00), (20) и (22) в совокупности образуют пространство представления [22] группы $SU(2l+1)$. Так как значения момента количества движения, содержащиеся в представлении [22], можно найти с помощью методов, изложенных в § 2 настоящей главы, значения L для представления (22) можно найти путем вычитания.

Обращаем внимание на то, что в этом примере тензоры четвертого ранга с симметрией схемы [22] были разложены по представлениям группы $O^+(2l+1)$, причем та часть разложения, которая соответствовала представлению (00), состояла из тензоров ранга $v=4-4=0$, та часть, которая соответствовала представлению (20), состояла из тензоров ранга $v=4-2=2$, а та часть разложения, которая соответствовала представлению (22), состояла из тензоров ранга $v=4$ с нулевым следом. Тензоры (00) уже встречались, когда число частиц было равно нулю (единичное представление). Тензоры (20) встречались ранее при рассмотрении конфигурации *двух* частиц. *Наименьшее число* частиц, при котором может встретиться тензор с нулевым следом, называется *старшинством* этого тензора. Тензоры (00) имеют старшинство $v=0$, тензоры (20) — старшинство $v=2$, тензоры (22) — старшинство $v=4$.

В общем случае тензоры r -го ранга, соответствующие разбиению $[\lambda_1 \dots \lambda_{2l+1}]$,

допускают разложение на тензоры типа $(\mu_1, \dots, \mu_l)$ с нулевым следом, ранг которых $v \leq r$. При четном r наименьшее возможное старшинство есть $v=0$, что соответствует неприводимому представлению (00 ...) группы $O^+(2l+1)$; при нечетном r наименьшее возможное старшинство равно $v=1$, что соответствует неприводимому представлению (10 ...) группы $O^+(2l+1)$. Разложение представлений

$$SU(2l+1) \rightarrow O^+(2l+1)$$

можно при каждом l выполнять с помощью методов, изложенных в § 7 гл. 10, и табл. 48 и 49. Для разложения

$$O^+(2l+1) \rightarrow O^+(3)$$

мы пользуемся таблицами § 2 настоящей главы.

Для конфигурации $(p)^r$ $l=1$, и группа $O^+(2l+1)$ есть просто трехмерная группа вращений. Полное разложение в этом случае представлено в табл. 59.

Для конфигурации $(d)^r$ мы комбинируем результаты, приведенные в табл. 48 и 60.

При $r=1$:

[1], $L=2 \rightarrow (10)$, таким образом, представление (10) содержит $L=2$.

При $r = 2$:

$[2], L = 4, 2, 0 \rightarrow (20) + (00)$, так что представление (20) содержит $L = 4, 2$.

$[11], L = 3, 1 \rightarrow (11)$, так что представление (11) содержит $L = 3, 1$.

При $r = 3$:

$[21], L = 5, 4, 3, 2^2, 1 \rightarrow (21) + (10)$. Так как представление (10) содержит $L = 2$, представление (21) содержит $L = 5, 4, 3, 2, 1$

$[1^3] \equiv [1^2] \rightarrow (11)$.

Этим способом мы получаем разложение представлений

$$O^+(5) \rightarrow O^+(3).$$

Результаты для конфигурации $(d)^r$, приведенные в табл. 61, показывают, что уровни конфигурации $(d)^r$ однозначно определяются схемой $[\lambda]$, старшинством v и моментом количества движения L .

Табл. 62 для конфигурации $(f)^r$ получена тем же методом.

В случае конфигурации $(f)^r$ сложения квантовых чисел, названных нами старшинством, недостаточно для однозначного определения уровней. Можно найти некоторую подгруппу группы $O^+(7)$, которая содержит трехмерную группу вращений, и, таким образом, получить дальнейшее уточнение классификации, но мы этого делать не будем.

Задачи. 1. Проведите вычисления, необходимые для заполнения табл. 62.

2. Для электронов в конфигурации $(l)^r$ символ $(\mu_1, \dots, \mu_r)$ может содержать только величины $\mu_i = 0, 1, 2$. Пусть α — число двоек в символе, а β — число единиц. Докажите, что

$$\alpha = \frac{v}{2} - S, \quad (11.13)$$

$$\beta = \min \left\{ \begin{array}{l} 2S \\ 2l + 1 - v \end{array} \right.$$

где v — старшинство, а S — спин.

§ 5. Атомные спектры в схеме jj -связи

В тяжелых атомах, когда вклад в энергию взаимодействий, зависящих от спина, становится существенным, мы можем получить лучшее описание, если вместо схемы связи Рассела — Саундерса воспользуемся схемой jj -связи.

В схеме jj -связи мы вначале комбинируем одноэлектронную орбитальную волновую функцию с внутренней (спиновой) волновой

функцией электрона. Эти функции образуют базис представлений $D^{(l)}$ и $D^{(1/2)}$ группы вращений. Разложим произведение $D^{(l)} \times D^{(1/2)}$ на неприводимые представления $D^{(j)}$ группы вращений ($j = l \pm 1/2$). Вследствие сильного спин-орбитального взаимодействия одночастичные функции с различным моментом количества движения j отвечают хорошо разделенным уровням энергии. Одночастичные волновые функции, соответствующие некоторой заданной энергии, образуют базис $\psi_j, \psi_{j-1}, \dots, \psi_{-j+1}, \psi_{-j}$ представления $D^{(j)}$ группы вращений.

Если в конфигурации $(j)^r$ находится r эквивалентных электронов, то полную волновую функцию мы должны составлять из произведений

$$\psi_{i_1}^{(1)} \dots \psi_{i_r}^{(r)} \quad (i_v = -j, \dots, j).$$

Но поскольку теперь мы рассматриваем полные волновые функции для тождественных частиц, принцип Паули требует, чтобы мы взяли только полностью антисимметрический тензор $[1^r]$.

Разложение момента количества движения для антисимметрического тензора $[1^r]$ проводится непосредственно, но вычисления чрезвычайно громоздки. Так как этот тензор антисимметричен, единственными ненулевыми компонентами будут те, для которых все $i_1, \dots, i_r$ различны. Поскольку индекс i у функции ψ_i указывает строку представления $D^{(j)}$, которой принадлежит ψ_i (т. е. значение $J_z^{(1)}$ в состоянии $\psi_i^{(1)}$), сумма (различных) индексов $i_1 + \dots + i_r$ указывает строку представления, которой принадлежит произведение $\psi_{i_1}^{(1)} \dots \psi_{i_r}^{(r)}$ (т. е. значение $J_z^{(1)} + \dots + J_z^{(r)}$ в этом состоянии). Чтобы найти значения J для конфигурации $(j)^r$, мы просто выписываем все возможные наборы индексов $i_1, \dots, i_r$, удовлетворяющих условию $i_1 > i_2 > \dots > i_r$, и берем сумму $\sum_{v=1}^r i_v$. Если наибольшая сумма есть J_1 , то разложение произведения $[D^{(j)}]^r$ должно содержать представление D^{J_1} группы вращений, причем для $2J_1 + 1$ базисных функций этого представления

$$\sum i_v = J_1, \quad J_1 - 1, \dots, -J_1.$$

Вычеркнув эти значения из таблицы сумм, мы переходим к наибольшему из оставшихся значений $\sum i_v$. Продолжая этот процесс, мы находим разложение момента количества движения. Проиллюстрируем этот метод на нескольких примерах.

При $j = 3/2$ возможны четыре состояния (четыре значения индексов). Мы должны идти лишь до $r = 2$. При $r = 1$, $J = 3/2$.

При $r = 2$ возможные значения i_1, i_2 и $i_1 + i_2$ мы сведем в табл. 63. Наибольшее значение суммы $\sum i_v$ равно 2. Вычеркиваем из таблицы

Таблица 63

t_1	t_2	$t_1 + t_2$
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-1
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-2

Таблица 64

t_1	t_2	t_3	$\sum i_v$	t_1	t_2	t_3	$\sum t_v$
$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
		$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$			$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
		$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$			$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$
		$-\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$			$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$
		$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$
		$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$
$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$			$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$
		$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$
$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{9}{2}$

значения суммы, равные 2, 1, 0, -1, -2. После этого остается единственная сумма, равная 0. Таким образом, конфигурация $(3/2)^2$ содержит $J=2, 0$.

Для конфигурации $(5/2)^f$ имеем

$$r=1, J=\frac{5}{2};$$

$$r=2, J=4, 2, 0.$$

При $r=3$ представим в виде таблицы все возможные наборы индексов l_1, l_2, l_3 и их суммы $l_1+l_2+l_3$ (табл. 64). Наибольшее значение

Таблица 65

Разложение полного момента количества движения
в конфигурации $(J)^f$

		J
$j = \frac{3}{2}$	$r=1$	$\frac{3}{2}$
	2	2, 0
$j = \frac{5}{2}$	$r=1$	$\frac{5}{2}$
	2	4, 2, 0
	3	$\frac{9}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}$
$j = \frac{7}{2}$	$r=1$	$\frac{7}{2}$
	2	6, 4, 2, 0
	3	$\frac{15}{2}, \frac{11}{2}, \frac{9}{2}, \frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}$
	4	8, 6, 5, $(4)^2, (2)^2, 0$
$j = \frac{9}{2}$	$r=1$	$\frac{9}{2}$
	2	8, 6, 4, 2, 0
	3	$\frac{21}{2}, \frac{17}{2}, \frac{15}{2}, \frac{13}{2}, \frac{11}{2}, \left(\frac{9}{2}\right)^2, \frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}$
	4	12, 10, 9, $(8)^2, 7, (6)^3, 5, (4)^3, 3, (2)^2, (0)^2$
	5	$\frac{25}{2}, \frac{21}{2}, \frac{19}{2}, \left(\frac{17}{2}\right)^2, \left(\frac{15}{2}\right)^2, \left(\frac{13}{2}\right)^2, \left(\frac{11}{2}\right)^2,$ $\left(\frac{9}{2}\right)^3, \left(\frac{7}{2}\right)^2, \left(\frac{5}{2}\right)^2, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$

ние суммы $\sum l_i$ равно $9/2$, поэтому представление содержит $J=9/2$. Вычеркиваем суммы, равные $9/2, 7/2, 5/2, \dots, -7/2, -9/2$. Наибольшее из оставшихся значений равно $5/2$, поэтому представление содержит $J=5/2$. Вычеркиваем суммы, равные $5/2, 3/2, \dots, -5/2$. Наибольшее из оставшихся значений равно $3/2$, следовательно, в представлении содержится $J=3/2$. Вычеркнув суммы, равные $3/2, 1/2, -1/2, -3/2$, мы исчерпываем таблицу. Таким образом, конфигурация $(5/2)^3$ содержит $J=9/2, 5/2, 3/2$.

Существует простой способ проверки правильности разложения момента количества движения. Тензор, обладающий симметрией схемы $[1^r]$ относительно группы $SU(2j+1)$, имеет $\binom{2j+1}{r}$ независимых компонент (столькими способами можно выбрать r индексов $i_1 > i_2 > \dots > i_r$ из $2j+1$ значений $j, j-1, \dots, -j$). Так как размерность представления $D^{(j)}$ группы вращений равна $2j+1$, мы должны иметь

$$\sum_{J \in [1^r]} (2J+1) = \binom{2j+1}{r}. \quad (11.14)$$

В рассматриваемом примере

$$\binom{2j+1}{r} = \binom{6}{3} = 20 = \left(2 \cdot \frac{9}{2} + 1\right) + \left(2 \cdot \frac{5}{2} + 1\right) + \left(2 \cdot \frac{3}{2} + 1\right).$$

Результаты вплоть до $j=9/2$ приведены в табл. 65.

Задачи. 1. Докажите, что наибольший момент количества движения в конфигурации $(j)^r$ равен

$$J_{\text{макс}} = \frac{r}{2} [2j - r + 1].$$

2. Докажите, что в конфигурации $(j)^r$ не может быть момента количества движения $J = J_{\text{макс}} - 1$, а максимальная кратность для момента количества движения

$$\begin{aligned} J = J_{\text{макс}} - 2 & \text{ равна } 1, \\ & = J_{\text{макс}} - 3 \text{ равна } 1, \\ & = J_{\text{макс}} - 4 \text{ равна } 2, \\ & = J_{\text{макс}} - 5 \text{ равна } 2, \\ & = J_{\text{макс}} - 6 \text{ равна } 4. \end{aligned}$$

§ 6. Структура ядра. Изотопический спин

При рассмотрении ядер можно применять методы теории возмущений, аналогичные тем, которые использовались в многоэлектронной задаче. Но для ядер задача осложняется, так как система состоит

из частиц двух сортов: нейтронов и протонов. (Кроме того, мы не располагаем точными сведениями о взаимодействии частиц внутри ядра. Информацию о гамильтониане для ядра получают из сравнения вычисленной и полученной экспериментально структуры ядра.) Масса протона и нейтрона (приблизительно) одинакова, они обладают одинаковым спином ($S=1/2$) и переходят друг в друга при β -распаде. Нейтрон не имеет заряда, заряд же протона равен $+e$, поэтому кулоновские силы действуют только на протоны. Однако по сравнению со специфическими ядерными силами кулоновские силы малы. Кроме того, имеющиеся в нашем распоряжении экспериментальные данные показывают, что специфические ядерные силы, действующие между двумя частицами внутри ядра, не зависят от того, являются ли эти частицы нейтронами или протонами, т. е. ядерные силы *не зависят от заряда*. Поэтому удобно рассматривать нейтроны и протоны как *состояния* некоторой одной фундаментальной частицы, которую мы назовем *нуклоном*.

Нуклон может находиться в любом из двух *зарядовых состояний*, которые мы обозначим символами $\psi_{1/2}$ и $\psi_{-1/2}$ для нейтронного и протонного состояний соответственно. Эти состояния являются собственными состояниями оператора t_z

$$\begin{aligned} t_z \psi_{1/2} &= \frac{1}{2} \psi_{1/2} \text{ (нейтрон),} \\ t_z \psi_{-1/2} &= -\frac{1}{2} \psi_{-1/2} \text{ (протон).} \end{aligned} \quad (11.15)$$

Применяя оператор t_z к зарядовой функции, мы определяем, отвечает ли это состояние протону или нейтрону. Оператор t_z можно записать в виде матрицы 2×2 :

$$t_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (11.15a)$$

Чтобы иметь возможность учитывать переходы протона и нейтрона друг в друга при β -распаде, мы должны иметь операторы вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.15b)$$

Операторы (11.15a) и (11.15b) задают алгебру, которая формально совпадает с алгеброй операторов момента количества движения J_x , J_y , J_z . Поскольку мы имеем дело с двумерным пространством, состояния $\psi_{\pm 1/2}$ образуют базис некоторого представления, аналогичного представлению $D^{(1/2)}$ группы вращений. Пространство представления,

нагнугое на функции $\psi_{\pm 1/2}$, называется *пространством изотопического спина*. Мы имеем операторы t_{ξ} , t_{η} и t_{ζ} , свойства которых аналогичны свойствам операторов момента количества движения J_x , J_y , J_z . Если у нас имеется система нескольких нуклонов, то оператор

$$T_{\zeta} = \sum_i t_{\zeta}^{(i)} \quad (11.16)$$

представляет собой инфинитезимальный оператор одновременного „поворота вокруг оси ζ в пространстве изотопического спина“ всех частиц. Аналогичным образом можно определить и операторы T_{η} и T_{ξ} .

Для системы двух нуклонов функции $\psi_{1/2}(1) \psi_{1/2}(2)$ соответствует нейтронное состояние обоих нуклонов и

$$T_{\zeta}(\psi_{1/2}(1) \psi_{1/2}(2)) = \psi_{1/2}(1) \psi_{1/2}(2).$$

Таким образом, для этого состояния $T_{\zeta} = 1$. Функция $\psi_{-1/2}(1) \psi_{-1/2}(2)$ описывает систему двух протонов, и $T_{\zeta} = -1$. Функции $\psi_{1/2}(1) \psi_{-1/2}(2)$ и $\psi_{-1/2}(1) \psi_{1/2}(2)$ описывают состояния, содержащие один протон и один нейтрон, причем $T_{\zeta} = 0$. Мы видим, что

$$T_{\zeta} = \frac{1}{2} (N - Z), \quad (11.17)$$

где N и Z — число нейтронов и протонов в системе соответственно. Общее число нуклонов в системе равно $N + Z$. Если рассматриваются ядерные силы, то значение T_{ζ} не существенно.

Для системы тождественных нуклонов мы должны построить состояния, обладающие определенной симметрией относительно перестановки тождественных частиц. Для двух частиц первые две из названных выше функций оказываются симметричными относительно перестановки нуклонов 1 и 2. Остальные две функции можно скомбинировать так, чтобы получились симметричные и антисимметричные комбинации

$$\psi_{1/2}(1) \psi_{-1/2}(2) \pm \psi_{-1/2}(1) \psi_{1/2}(2).$$

Поскольку кулоновскими силами мы пренебрегаем, на энергии системы может сказаться лишь симметрия волновых функций. Мы видим, что для двух нуклонов число симметричных состояний равно трем, в то время как число антисимметричных состояний равно одному. Первый тип симметрии соответствует разбиению [2] размерности 3, второй — разбиению [11] размерности 1.

По аналогии с полным спином S мы вводим *изотопический спин* (изобарический спин, изоспин) T такой, что число $(2T + 1)$ определяет содержание мультиплета для состояний, обладающих заданной

зарядовой симметрией. Для двух нуклонов мы имеем

$$\begin{aligned} [2]: \quad T=1, \quad T_z=1, \quad 0, \quad -1; \\ [11]: \quad T=0, \quad T_z=0. \end{aligned} \quad (11.18)$$

Симметричное состояние, у которого $T=1$, представляет собой *изобарический триплет*. Все три состояния с $T_z=1, 0, -1$ ($N-Z=2, 0, -2$) обладают одинаковой энергией. Аналогично для трех нуклонов имеем

$$\begin{aligned} [3]: \quad T=\frac{3}{2}, \quad 2T+1=4, \quad T_z=\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \\ N-Z=3, 1, -1, -3; \\ [21]: \quad T=\frac{1}{2}, \quad 2T+1=2, \quad T_z=\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \\ N-Z=1, -1. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Первый из этих зарядовых мультиплетов содержит четыре изобара, второй — два.

Результаты для любого числа нуклонов совпадают с соответствующими результатами для спина $j=1/2$. Для состояния со схемой зарядовой симметрии $[\lambda_1\lambda_2]$ изотопический спин

$$T = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2).$$

§ 7. Ядерные спектры в схеме $L-S$ -связи. Супермультиплеты

Если ядерные силы слабо зависят от спинов, то так же, как и в атомных задачах, мы можем записать волновую функцию в виде произведения орбитальной функции и функции, зависящей от спиновой и зарядовой переменных. Гамильтониан взаимодействия симметричен относительно пространственных координат нуклонов, поэтому орбитальные волновые функции надлежит комбинировать так, чтобы получить полную орбитальную волновую функцию с определенной симметрией. Энергия состояния весьма чувствительна к малейшим отклонениям от этой симметрии. Поскольку ядерные силы в основном являются силами притяжения, энергия уменьшится, если симметрия орбитальной волновой функции возрастет. Поэтому можно ожидать, что состояние, у которого орбитальная функция обладает наивысшей симметрией, будет обладать наинизшей энергией. Поскольку полная волновая функция системы тождественных нуклонов в силу принципа Паули должна быть полностью антисимметричной, мы должны строить зарядово-спиновые функции с определенной симметрией, взяв произведение орбитальной функции и зарядово-спиновой функции, схема симметрии которой сопряжена со схемой симметрии пер-

вой функции, получить полную волновую функцию. Поскольку энергия состояния определяется только орбитальной функцией, в то время как содержание мультиплета зависит от зарядово-спиновой функции, каждый уровень энергии будет *супермультиплетом*.

В случае одного нуклона возможны четыре зарядово-спиновых состояния. Если описывать состояния различными значениями величин t_z и s_z , то получатся четыре базисные функции

$$\psi_{1/2, 1/2}, \psi_{1/2, -1/2}, \psi_{-1/2, 1/2}, \psi_{-1/2, -1/2}. \quad (11.20)$$

Симметрия состояний для одного нуклона описывается разбиением [1]; для этого состояния $T = 1/2$, $S = 1/2$, поэтому для данного мультиплета $2T + 1 = 2$, $2S + 1 = 2$.

Для двух нуклонов существует шестнадцать зарядово-спиновых состояний. Если симметрия зарядово-спиновой функции определяется разбиением [2], то либо и спиновая функция и зарядовая функция симметричны, так что $2T + 1 = 3$, $2S + 1 = 3$, либо они обе антисимметричны, и $2T + 1 = 1$, $2S + 1 = 1$. Таким образом, схема Юнга [2] содержит зарядово-спиновые мультиплеты типа (11) (зарядовый синглет и спиновый синглет) и типа (33) (зарядовый триплет и спиновый триплет). Аналогичным образом, антисимметричная зарядово-спиновая функция типа [11] должна быть произведением зарядовой и спиновой функций противоположной симметрии и поэтому содержать мультиплеты типа (13) (зарядовый синглет и спиновый триплет) и (31) (зарядовый триплет и спиновый синглет).

Схеме Юнга [14] соответствуют четыре нуклона в полностью антисимметричном зарядово-спиновом состоянии. Поскольку все четыре набора индексов должны быть различными, каждая из функций (11.20) будет фигурировать только один раз, так что $T = S = 0$. Таким образом, схеме [14] $\equiv [0]$ отвечают мультиплеты (11) (зарядовый синглет и спиновый синглет). Точно так же схема [13] эквивалентна схеме [1], ей отвечает затем мультиплет (22).

Зарядово-спиновые функции для трех нуклонов мы можем найти, составляя внешнее произведение и разлагая затем его для различных S и T :

$$\square \otimes \square \square = \square \square \square + \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \end{array} \quad (11.21)$$

Разбиению [1] соответствуют мультиплеты (22), в то время как разбиение [2] содержит мультиплеты (11) и (33). Левая часть равенства (11.21) равна

$$[1](22) \otimes [2]((11) + (33)).$$

Разлагаем это произведение и находим

$$\left. \begin{array}{l} [1](22) \otimes [2](11) \rightarrow (22) \\ [1](22) \otimes [2](33) \rightarrow (22) + (24) + (42) + (44) \end{array} \right\} [3] + [21]. \quad (11.21a)$$

Аналогичным образом получим разложение

$$\square \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \equiv \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \square, \quad (11.22)$$

$$\left. \begin{array}{l} [1](22) \otimes [11](13) \rightarrow (22) + (24) \\ [1](22) \otimes [11](31) \rightarrow (22) + (42) \end{array} \right\} [21] + [1], \quad (11.23)$$

Вычитая из (11.23) произведение $[1](22)$, структура которого нам известна, найдем, что разбиение $[21]$ содержит мультиплеты (22) , (24) и (42) . Вычитая этот последний результат из (11.21а), найдем структуру разбиения $[3]$. В итоге мы получаем структуры мультиплетов для трех частиц (табл. 66)

Таблица 66

$[\lambda]$	$(2T+1, 2S+1)$				Размерность
	(22)	(24)	(42)	(44)	
$[3]$	1	0	0	1	20
$[21]$	1	1	1	0	20

С помощью такого же процесса последовательного разложения произведений мы перейдем от $r=3$ к $r=4$. При $r=4$ возможны схемы Юнга $[4]$, $[31]$, $[22]$ и $[211]$ (не считая схемы $[1^4] \equiv 0$). Чтобы воспользоваться методом последовательного разложения произведений, мы составляем внешнее произведение $[1](22)$ со всеми структурами, представленными в табл. 66, и получаем табл. 67. Поскольку разбиению $[1^4] \equiv 0$ отвечает мультиплет (11) , мы находим

Таблица 67

	$(2T+1, 2S+1)$						
	(13) (15)		(35)				
	(11)	(31)	(51)	(73)	(53)	(55)	
$[1] \quad (22) \otimes [3] \quad (22)$	1	1	0	1	0	0	} $[4] + [31]$
$[1] \quad (22) \otimes [3] \quad (44)$	0	0	0	1	1	1	
$[1] \quad (22) \otimes [21] \quad (22)$	1	1	0	1	0	0	} $[31] + [22] + [211]$
$[1] \quad (22) \otimes [21] \quad \begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix}$	0	1	1	2	1	0	
$[1] \quad (22) \otimes [1^3] \quad (22)$	1	1	0	1	0	0	} $[211] + [1^4]$

из последней строки этой таблицы мультиплетную структуру разбиения [211].

Разложение полностью симметричной структуры [4] можно получить с помощью следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. Чтобы найти полностью симметричную зарядово-спиновую функцию, следует составить прямое произведение зарядовой и спиновой функций, обладающих одинаковой симметрией. Таким образом, зарядово-спиновая функция для разбиения $[n]$ представляет собой сумму произведений

$$[n] \otimes [n], [n-1, 1] \otimes [n-1, 1] \text{ и т. д.}$$

Последовательность этих произведений заканчивается произведением

$$[v+1, v] \otimes [v+1, v],$$

если $n = 2v + 1$ нечетно, и произведением

$$[v, v] \otimes [v, v],$$

если $n = 2v$ четно.

Значения спина S (или изотопического спина T) для таких простых структур заряда и спина задаются соотношениями (11.4) и (11.5), из которых находим: при n четном ($n = 2v$) зарядово-спиновая функция типа $[n]$ содержит мультиплеты следующей структуры:

$$(2v+1, 2v+1) (2v-1, 2v-1), \dots, (55), (33), (11);$$

при n нечетном ($n = 2v + 1$) зарядово-спиновая функция типа $[n]$ содержит мультиплеты, обладающие следующей структурой: $(2v+2, 2v+2), (2v, 2v), \dots, (44), (22)$.

Итак, структура разбиения [4] имеет вид $(55) + (33) + (11)$. Комбинируя этот результат с первой строкой в табл. 67, находим, что разбиение [31] содержит

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix} + (33).$$

Используя полученные результаты, мы можем затем определить структуру разбиения [22] (табл. 68).

Таблица 68

[λ]	(2T + 1, 2S + 1)						Размерность N
	(11)	$\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix}$	(33)	$\begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}$	(55)	
[4]	1	0	0	1	0	1	35
[31]	0	1	0	1	1	0	45
[22]	1	0	1	1	0	0	20
[211]	0	1	0	1	0	0	15

Содержание всех зарядово-спиновых супермультиплетов при $r \leq 10$

$[\lambda]$	(P, P', P'')	$(2T+1, 2S+1)$	Размерность N
[0]	(000)	(11)	1
[1]	$\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}\right)$	(22)	4
[2]	(111)	(11) (33)	10
[11]	(100)	$\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix}$	6
[3]	$\left(\frac{3}{2} \frac{3}{2} \frac{3}{2}\right)$	(22) (44)	20
[21]	$\left(\frac{3}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}\right)$	(22) $\begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix}$	20
[4]	(222)	(11) (33) (55)	35
[31]	(211)	$\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix}$ (33) $\begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}$	45
[22]	(200)	(11) $\begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix}$ (33)	20
[211]	(110)	$\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix}$ (33)	15
[5]	$\left(\frac{5}{2} \frac{5}{2} \frac{5}{2}\right)$	(22) (44) (66)	56
[41]	$\left(\frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{3}{2}\right)$	(22) $\begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix}$ (44) $\begin{pmatrix} 46 \\ 64 \end{pmatrix}$	84
[32]	$\left(\frac{5}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}\right)$	(22) $\begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 26 \\ 62 \end{pmatrix}$ (44)	60
[311]	$\left(\frac{3}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2}\right)$	(22) $\begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix}$ (44)	36
[6]	(333)	(11) (33) (55) (77)	84
[51]	(322)	$\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix}$ (33) $\begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}$ (55) $\begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix}$	140
[42]	(311)	(11) $\begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix}$ (33) ² $\begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 37 \\ 73 \end{pmatrix}$ (55)	126
[411]	(221)	$\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix}$ (33) $\begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}$ (55)	70
[33]	(300)	$\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 17 \\ 71 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}$	50
[321]	(210)	$\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix}$ (33) ² $\begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}$	64
[7]	$\left(\frac{7}{2} \frac{7}{2} \frac{7}{2}\right)$	(22) (44) (66) (88)	120
[61]	$\left(\frac{7}{2} \frac{5}{2} \frac{5}{2}\right)$	(22) $\begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix}$ (44) $\begin{pmatrix} 46 \\ 64 \end{pmatrix}$ (66) $\begin{pmatrix} 68 \\ 86 \end{pmatrix}$	216
[52]	$\left(\frac{7}{2} \frac{3}{2} \frac{3}{2}\right)$	(22) $\begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 26 \\ 62 \end{pmatrix}$ (44) ² $\begin{pmatrix} 46 \\ 64 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 48 \\ 84 \end{pmatrix}$ (66)	224
[511]	$\left(\frac{5}{2} \frac{5}{2} \frac{3}{2}\right)$	(22) $\begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix}$ (44) $\begin{pmatrix} 46 \\ 64 \end{pmatrix}$ (66)	120
[43]	$\left(\frac{7}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}\right)$	(22) $\begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 46 \\ 62 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 28 \\ 82 \end{pmatrix}$ (44) $\begin{pmatrix} 46 \\ 64 \end{pmatrix}$	140
[421]	$\left(\frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2}\right)$	(22) $\begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix}$ ² $\begin{pmatrix} 26 \\ 62 \end{pmatrix}$ (44) ² $\begin{pmatrix} 46 \\ 64 \end{pmatrix}$	140
[8]	(444)	(11) (33) (55) (77) (99)	165
[71]	(433)	$\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix}$ (33) $\begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}$ (55) $\begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix}$ (77) $\begin{pmatrix} 79 \\ 97 \end{pmatrix}$	315
[62]	(422)	(11) (33) ² (55) ² (77) $\begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 37 \\ 73 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 59 \\ 95 \end{pmatrix}$	360

Содержание всех зарядово-спиновых супермультиплетов при $r \leq 10$

$[\lambda]$	(P, P', P'')	$(2T+1, 2S+1)$	Размерность N
[0]	(000)	(11)	1
[1]	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	(22)	4
[2]	(111)	(11) (33)	10
[11]	(100)	$\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix}$	6
[3]	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	(22) (44)	20
[21]	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	(22) $\begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix}$	20
[4]	(222)	(11) (33) (55)	35
[31]	(211)	$\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix}$ (33) $\begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}$	45
[22]	(200)	(11) $\begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix}$ (33)	20
[211]	(110)	$\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix}$ (33)	15
[5]	$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	(22) (44) (66)	56
[41]	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	(22) $\begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix}$ (44) $\begin{pmatrix} 46 \\ 64 \end{pmatrix}$	84
[32]	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	(22) $\begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 26 \\ 62 \end{pmatrix}$ (44)	60
[311]	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	(22) $\begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix}$ (44)	36
[6]	(333)	(11) (33) (55) (77)	84
[51]	(322)	$\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix}$ (33) $\begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}$ (55) $\begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix}$	140
[42]	(311)	(11) $\begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix}$ (33) ² $\begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 37 \\ 73 \end{pmatrix}$ (55)	126
[411]	(221)	$\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix}$ (33) $\begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}$ (55)	70
[33]	(300)	$\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 17 \\ 71 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}$	50
[321]	(210)	$\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix}$ (33) ² $\begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}$	64
[7]	$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	(22) (44) (66) (88)	120
[61]	$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	(22) $\begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix}$ (44) $\begin{pmatrix} 46 \\ 64 \end{pmatrix}$ (66) $\begin{pmatrix} 68 \\ 86 \end{pmatrix}$	216
[52]	$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	(22) $\begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 26 \\ 62 \end{pmatrix}$ (44) ² $\begin{pmatrix} 46 \\ 64 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 48 \\ 84 \end{pmatrix}$ (66)	224
[511]	$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	(22) $\begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix}$ (44) $\begin{pmatrix} 46 \\ 64 \end{pmatrix}$ (66)	120
[43]	$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	(22) $\begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 46 \\ 62 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 28 \\ 82 \end{pmatrix}$ (44) $\begin{pmatrix} 46 \\ 64 \end{pmatrix}$	140
[421]	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	(22) $\begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix}$ ² $\begin{pmatrix} 26 \\ 62 \end{pmatrix}$ (44) ² $\begin{pmatrix} 46 \\ 64 \end{pmatrix}$	140
[8]	(444)	(11) (33) (55) (77) (99)	165
[71]	(433)	$\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix}$ (33) $\begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}$ (55) $\begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix}$ (77) $\begin{pmatrix} 79 \\ 97 \end{pmatrix}$	315
[62]	(422)	(11) (33) ² (55) ² (77) $\begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 37 \\ 73 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 59 \\ 95 \end{pmatrix}$	360

$[\lambda]$	(P, P', P'')	$(2T+1, 2S+1)$	Размерность N
[611]	(332)	$(33) (55) (77) \begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix}$	189
[53]	(411)	$(33) (55) \begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 71 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 37 \\ 73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 39 \\ 93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix}$	280
[521]	(321)	$(33)^2 (55)^2 \begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 37 \\ 73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix}$	256
[44]	(400)	$(11) (33) (55) \begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 91 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 37 \\ 73 \end{pmatrix}$	105
[431]	(310)	$\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 71 \end{pmatrix} (33)^2 \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 37 \\ 73 \end{pmatrix} (55)$	175
[422]	(220)	$(11) \begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix} (33)^2 \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix} (55)$	84
[9]	$\left(\frac{9}{2} \frac{9}{2} \frac{9}{2}\right)$	$(22) (44) (66) (88) (10, 10)$	220
[81]	$\left(\frac{9}{2} \frac{7}{2} \frac{7}{2}\right)$	$(22) (44) (66) (88) \begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 \\ 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 68 \\ 86 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8, 10 \\ 10, 8 \end{pmatrix}$	440
[72]	$\left(\frac{9}{2} \frac{5}{2} \frac{5}{2}\right)$	$(22) (44)^2 (66)^2 (88) \begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 \\ 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 48 \\ 84 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 68 \\ 86 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6, 10 \\ 10, 6 \end{pmatrix}$	540
[711]	$\left(\frac{7}{2} \frac{7}{2} \frac{5}{2}\right)$	$(22) (44) (66) (88) \begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 \\ 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 68 \\ 86 \end{pmatrix}$	280
[63]	$\left(\frac{9}{2} \frac{3}{2} \frac{3}{2}\right)$	$(22) (44)^2 (66) \begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 28 \\ 82 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 \\ 64 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 48 \\ 84 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4, 10 \\ 10, 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 68 \\ 86 \end{pmatrix}$	480
[621]	$\left(\frac{7}{2} \frac{5}{2} \frac{3}{2}\right)$	$(22) (44)^2 (66)^2 \begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 26 \\ 62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 \\ 64 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 48 \\ 84 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 68 \\ 86 \end{pmatrix}$	420
[54]	$\left(\frac{9}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}\right)$	$(22) (44) (66) \begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 28 \\ 82 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2, 10 \\ 10, 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 \\ 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 48 \\ 84 \end{pmatrix}$	280
[531]	$\left(\frac{7}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2}\right)$	$(22) (44)^3 (66) \begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 26 \\ 62 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 28 \\ 82 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 \\ 64 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 48 \\ 84 \end{pmatrix}$	360
[522]	$\left(\frac{5}{2} \frac{5}{2} \frac{1}{2}\right)$	$(22) (44)^2 (66) \begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 \\ 64 \end{pmatrix}$	160
[10]	(555)	$(11) (33) (55) (77) (99) (11, 11)$	286
[91]	(544)	$(33) (55) (77) (99) \begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 79 \\ 97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9, 11 \\ 11, 9 \end{pmatrix}$	594
[82]	(533)	$(11) (33)^2 (55)^2 (77)^2 (99) \begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 37 \\ 73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 59 \\ 95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 79 \\ 97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7, 11 \\ 11, 7 \end{pmatrix}$	770
[811]	(443)	$(33) (55) (77) (99) \begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 79 \\ 97 \end{pmatrix}$	396
[73]	(522)	$(33) (55)^2 (77) \begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 71 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 37 \\ 73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 39 \\ 93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 59 \\ 95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5, 11 \\ 11, 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 79 \\ 97 \end{pmatrix}$	750
[721]	(432)	$(33)^2 (55)^2 (77)^2 \begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 37 \\ 73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 59 \\ 95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 79 \\ 97 \end{pmatrix}$	640
[64]	(511)	$(11) (33)^2 (55)^2 (77) \begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 91 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 37 \\ 73 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 39 \\ 93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3, 11 \\ 11, 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 59 \\ 95 \end{pmatrix}$	540
[631]	(421)	$(33)^2 (55)^3 (77) \begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 71 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 37 \\ 73 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 39 \\ 93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 59 \\ 95 \end{pmatrix}$	630
[622]	(331)	$(11) (33)^2 (55)^2 (77) \begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 37 \\ 73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix}$	270
[55]	(600)	$\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 71 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, 11 \\ 11, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 39 \\ 93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix}$	196
[541]	(410)	$(33)^2 (55)^2 \begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 71 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 91 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 37 \\ 73 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 39 \\ 93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix}$	384
[532]	(320)	$(33)^2 (55)^2 \begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 71 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 37 \\ 73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix}$	300

[λ]	(P, P', P'')	(2T + 1, 2S + 1)	Размерность N
[611]	(332)	(33) (55) (77) $\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix}$	189
[53]	(411)	(33) (55) $\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 71 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 37 \\ 73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 39 \\ 93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix}$	280
[521]	(321)	(33) ² (55) ² $\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 37 \\ 73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix}$	256
[44]	(400)	(11) (33) (55) $\begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 91 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 37 \\ 73 \end{pmatrix}$	105
[431]	(310)	$\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 71 \end{pmatrix} (33)^2 \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 37 \\ 73 \end{pmatrix} (55)$	175
[422]	(220)	(11) $\begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix} (33)^2 \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix} (55)$	84
[9]	$\left(\frac{9}{2} \frac{9}{2} \frac{9}{2}\right)$	(22) (44) (66) (88) (10, 10)	220
[81]	$\left(\frac{9}{2} \frac{7}{2} \frac{7}{2}\right)$	(22) (44) (66) (88) $\begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 \\ 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 68 \\ 86 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8, 10 \\ 10, 8 \end{pmatrix}$	440
[72]	$\left(\frac{9}{2} \frac{5}{2} \frac{5}{2}\right)$	(22) (44) ² (66) ² (88) $\begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 \\ 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 48 \\ 84 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 68 \\ 86 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6, 10 \\ 10, 6 \end{pmatrix}$	540
[711]	$\left(\frac{7}{2} \frac{7}{2} \frac{5}{2}\right)$	(22) (44) (66) (88) $\begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 \\ 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 68 \\ 86 \end{pmatrix}$	280
[63]	$\left(\frac{9}{2} \frac{3}{2} \frac{3}{2}\right)$	(22) (44) ² (66) $\begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 28 \\ 82 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 \\ 64 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 48 \\ 84 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4, 10 \\ 10, 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 68 \\ 86 \end{pmatrix}$	480
[621]	$\left(\frac{7}{2} \frac{5}{2} \frac{3}{2}\right)$	(22) (44) ² (66) ² $\begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 26 \\ 62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 \\ 64 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 48 \\ 84 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 68 \\ 86 \end{pmatrix}$	420
[54]	$\left(\frac{9}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}\right)$	(22) (44) (66) $\begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 28 \\ 82 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2, 10 \\ 10, 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 \\ 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 48 \\ 84 \end{pmatrix}$	280
[531]	$\left(\frac{7}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2}\right)$	(22) (44) ³ (66) $\begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 26 \\ 62 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 28 \\ 82 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 \\ 64 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 48 \\ 84 \end{pmatrix}$	360
[522]	$\left(\frac{5}{2} \frac{5}{2} \frac{1}{2}\right)$	(22) (44) ² (66) $\begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 \\ 64 \end{pmatrix}$	160
[10]	(555)	(11) (33) (55) (77) (99) (11, 11)	286
[91]	(544)	(33) (55) (77) (99) $\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 79 \\ 97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9, 11 \\ 11, 9 \end{pmatrix}$	594
[82]	(533)	(11) (33) ² (55) ² (77) ² (99) $\begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 37 \\ 73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 59 \\ 95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 79 \\ 97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7, 11 \\ 11, 7 \end{pmatrix}$	770
[811]	(443)	(33) (55) (77) (99) $\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 79 \\ 97 \end{pmatrix}$	396
[73]	(522)	(33) (55) ² (77) $\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 71 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 37 \\ 73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 39 \\ 93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 59 \\ 95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5, 11 \\ 11, 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 79 \\ 97 \end{pmatrix}$	750
[721]	(432)	(33) ² (55) ² (77) ² $\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 37 \\ 73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 59 \\ 95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 79 \\ 97 \end{pmatrix}$	640
[64]	(511)	(11) (33) ² (55) ² (77) $\begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 91 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 37 \\ 73 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 39 \\ 93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3, 11 \\ 11, 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 59 \\ 95 \end{pmatrix}$	540
[631]	(421)	(33) ² (55) ³ (77) $\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 71 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 37 \\ 73 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 39 \\ 93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 59 \\ 95 \end{pmatrix}$	630
[622]	(331)	(11) (33) ² (55) ² (77) $\begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 37 \\ 73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix}$	270
[55]	(600)	$\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 71 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, 11 \\ 11, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 39 \\ 93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix}$	196
[541]	(410)	(33) ² (55) ² $\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 71 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 91 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 37 \\ 73 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 39 \\ 93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix}$	384
[532]	(320)	(33) ² (55) ² $\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 71 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 37 \\ 73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 75 \end{pmatrix}$	300

Продолжая этот процесс, мы сможем построить зарядово-спиновые функции при $r=5$, если добавим одну частицу к структурам, полученным при $r=4$, и т. д.

В общем случае схема симметрии зарядово-спиновой функции будет содержать четыре строки $[\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4]$. Пользуясь соотношениями (10.29) и (10.30), мы обнаружим, что эта схема эквивалентна схеме $[\lambda'_1 \lambda'_2 \lambda'_3 0]$, у которой

$$\lambda'_1 = \lambda_1 - \lambda_4, \quad \lambda'_2 = \lambda_2 - \lambda_4, \quad \lambda'_3 = \lambda_3 - \lambda_4 \quad (11.24)$$

— *приведенные числа разбиения*. Величины λ' полностью характеризуют симметрию зарядово-спиновой функции. Вместо этих чисел можно использовать числа P, P', P'' , определяемые соотношением

$$(P, P', P'') = \left(\frac{\lambda'_1 + \lambda'_2 - \lambda'_3}{2}, \frac{\lambda'_1 - \lambda'_2 + \lambda'_3}{2}, \frac{\lambda'_1 - \lambda'_2 - \lambda'_3}{2} \right). \quad (11.25)$$

Так как $\lambda'_1 \geq \lambda'_2 \geq \lambda'_3$, имеем $P \geq P' \geq P''$. Числа P и P' должны быть положительными. Смысл квантовых чисел P, P', P'' заключается в следующем: P — это наибольшее значение компоненты T_z изотопического спина в супермультиплете; P' — это наибольшее значение компоненты спина S_z в состоянии, в котором $T_z = P$ (в то же время число P представляет собой наибольшее значение компоненты спина S_z в супермультиплете, а P' — наибольшее значение компоненты изотопического спина T_z в состоянии с $S_z = P$); наконец, число P'' означает наибольшее значение суммы

$$\sum_{i=1}^r s_z^{(i)} t_z^{(i)}$$

для состояния с $T_z = P$ и $S_z = P'$ (либо же $S_z = P$, а $T_z = P'$).

Задачи. 1. Докажите последние утверждения.

2. Докажите, что число $P + P' + P'' + (1/2)r$ всегда четно и положительно.

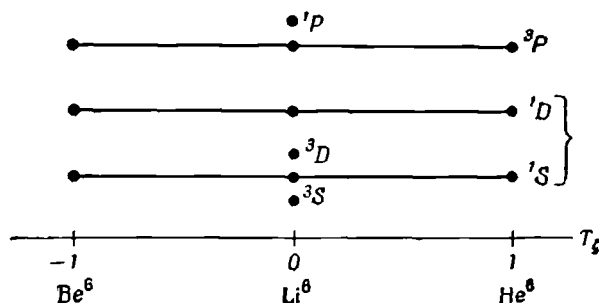
В заключение мы приводим табл. 69, в которой перечислены содержания всех зарядово-спиновых мультиплетов для $r \leq 10$.

§ 8. Модель оболочек в схеме $L-S$ -связи. Старшинство

Чтобы получить полную волновую функцию системы, зарядово-спиновые функции, полученные в предыдущем параграфе, следует комбинировать с орбитальными функциями. Чтобы удовлетворить принципу Паули, оба эти сомножителя должны иметь сопряженные схемы

симметрии. Поскольку схема Юнга для зарядово-спиновой функции имеет самое большее четыре строки, схема Юнга для орбитальной функции может иметь самое большее четыре столбца.

Модель оболочек для ядра в схеме L — S -связи весьма сходна с соответствующей моделью для атома, рассмотренной нами в § 3 настоящей главы. Одночастичные волновые функции вычисляются в некотором усредненном центральном поле и нумеруются квантовыми числами n и l . Волновая функция отдельного нуклона представляет собой вектор в $(2l+1)$ -мерном пространстве. Если в состоянии (n, l) имеется r нуклонов, то орбитальная волновая функция



Фиг. 77.

будет тензором r -го ранга. Чтобы получить функции, обладающие определенной симметрией, мы должны разбить пространство тензоров r -го ранга на его компоненты, отвечающие неприводимым представлениям группы $SU(2l+1)$. Разложение момента количества движения проводится так же, как в § 2 и 3 настоящей главы.

Проиллюстрируем этот метод для $l=1$. Максимальное число частиц в p -оболочке ядра в конфигурации $(p)^r$ равно $4(2l+1)=12$. Все результаты приведены в табл. 53 и 54. При $r=0$ или 12 мы получаем ^{11}S -уровень ($L=0, S=T=0$). При $r=1$ схема симметрии для орбитальной функции и зарядово-спиновой функции имеет вид [1], и мы получаем уровень ^{22}P .

Результаты для $r=2$ представлены в табл. 70. Вследствие того что ядерные силы являются силами притяжения, состояния с более

Таблица 70

Орбитальный момент количества движения		Зарядово-спиновый мультиплет			
$ \lambda $	L	$[\tilde{\lambda}]$	$\{P, P', P''\}$	$(2T+1, 2S+1)$	
[2]	S, D	[11]	(100)	(13)	(31)
[11] $\equiv$ [1]	P	[2]	(111)	(11)	(33)

Структура ядерной конфигурации $(p)^r$

r	Орбитальный момент количества движения			Зарядово-спиновый мультиплет	
	$[A]$	L	$[\tilde{A}]$	(P, P', P'')	$(2T + 1, 2S + 1)$
0	$[0]$	S	$[0]$	(000)	(11)
1	$[1]$	P	$[1]$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	(22)
2	$[2]$	SD	$[11]$	(100)	$(13) (31)$
	$[11] \equiv [1]$	P	$[2]$	(111)	$(11) (33)$
3	$[3]$	PF	$[111] \equiv [1]$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	(22)
	$[21]$	PD	$[21]$	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(22) (24) (42)$
4	$[111] \equiv [0]$	S	$[3]$	$(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$	$(22) (44)$
	$[4]$	SDG	$[1111] \equiv [0]$	(000)	(11)
	$[31]$	PDF	$[211]$	(110)	$(13) (31) (33)$
	$[22] \equiv [2]$	SD	$[22]$	(200)	$(11) (15) (51) (33)$
	$[211] \equiv [1]$	P	$[31]$	(211)	$(13) (31) (33) (35) (53)$
5	$[41]$	PD^2FG	$[2111] \equiv [1]$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	(22)
	$[32] \equiv [31]$	PDF	$[221] \equiv [21]$	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(22) (24) (42)$
	$[311] \equiv [2]$	SD	$[311]$	$(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$	$(22) (24) (42) (44)$
6	$[221] \equiv [1]$	P	$[32]$	$(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(22) (24) (42) (26) (62) (44)$
	$[42]$	SD^2FG	$[2211] \equiv [11]$	(100)	$(13) (31)$
	$[411] \equiv [3]$	PF	$[3111] \equiv [2]$	(111)	$(11) (33)$
	$[33] \equiv [3]$	PF	$[222] \equiv [2]$	$(11-1)$	$(11) (33)$
	$[321] \equiv [21]$	PD	$[321]$	(210)	$(13) (31) (33)^2 (15) (51) (35) (53)$
	$[222] \equiv [0]$	S	$[33]$	(300)	$(13) (31) (35) (53) (17) (71)$

Таблица 72

Состояния, возникающие при заполнении ядерной d -оболочки ($r \leq 4$)

r	Орбитальный момент количества движения			Зарядово-спиновый мультиплет		
	$[\lambda]$	$(\mu_1 \mu_2)$	$[L]$	$[\tilde{\lambda}]$	(P, P', P'')	$(2T + 1, 2S + 1)$
0	$[0]$	(00)	S	$[0]$	(000)	(11)
1	$[1]$	(10)	D	$[1]$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	(22)
2	$[2]$	(00)	S	$[11]$	(100)	$(\frac{13}{31})$
		(20)	GD			
3	$[11]$	(11)	FP	$[2]$	(111)	$(11) (33)$
	$[3]$	(10)	D	$[111] \equiv [1]$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	(22)
		(30)	$IGFS$			
	$[21]$	(10)	D	$[21]$	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(22) (\frac{24}{42})$
		(21)	$HGFDP$			
4	$[111] \equiv [11]$	(11)	FP	$[3]$	$(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$	$(22) (44)$
	$[4]$	(00)	S	$[1111] \equiv [0]$	(000)	(11)
		(20)	GD			
		(40)	$LIHGD$			
	$[31]$	(11)	FP	$[211]$	(110)	$(\frac{13}{31}) (33)$
		(20)	GD			
		(31)	KIH^2GF^2DP			
	$[22]$	(00)	S	$[22]$	(200)	$(11) (33) (\frac{15}{51})$
		(20)	GD			
		(22)	$IGFDS$			
	$[211]$	(11)	FP	$[31]$	(211)	$(\frac{13}{31}) (33) (\frac{35}{53})$
		(21)	$HGFDP$			
	$[1111] \equiv [1]$	(10)	D	$[4]$	(222)	$(11) (33) (55)$

высокой орбитальной симметрией будут обладать меньшей энергией. Кроме того, можно заметить, что энергия возрастает с увеличением L . Схема уровней ядерных p -оболочек при $r = 2$ представлена на фиг. 77. Спиновые мультиплеты выписаны в явном виде. Что же касается зарядовых мультиплетов, то они указаны точками над соответствующими значениями T_z . Например, ^{13}D -уровень табл. 70 на схеме обозначен как ^3D -уровень ядра Li^6 ; ^{33}P -уровень показан как ^3P -уровень ядер Be^6 , Li^6 и He^6 . Дальнейшее расщепление уровней мы получим, включив возмущения, обусловленные спин-орбитальными взаимодействиями. Кулоновское взаимодействие приведет к тому, что горизонтальные линии на схеме приобретут наклон вправо.

Структуры ядерных конфигураций для $r = 0, 1, \dots, 6$ приведены в табл. 71.

Задача. Начертите схему уровней для конфигураций $(p)^3$ и $(p)^4$.

Таблица 73

Состояния, возникающие при заполнении ядерной f -оболочки ($r \leq 4$)

r	Орбитальный момент количества движения		Зарядово-спиновый мультиплет		
	$[\lambda]$	$(\mu_1 \mu_2 \mu_3)$	$[\tilde{\lambda}]$	(P, P', P'')	$(2T + 1, 2S + 1)$
0	[0]	(000)	[0]	(000)	(11)
1	[1]	(100)	[1]	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	(22)
2	[2]	(000) (200)	[11]	(100)	$\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix}$
	[11]	(110)	[2]	(111)	(11) (33)
3	[3]	(100) (300)	[111] $\equiv$ [1]	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	(22)
	[21]	(100) (210)	[21]	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	(22) $\begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix}$
	[111]	(111)	[3]	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	(22) (44)
4	[4]	(000) (200) (400)	[1111] $\equiv$ [0]	(000)	(11)
	[31]	(110) (200) (310)	[211]	(110)	$\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix}$ (33)
	[22]	(000) (200) (220)	[22]	(200)	(11) $\begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix}$ (33)
	[211]	(110) (211)	[31]	(211)	$\begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix}$ (33) $\begin{pmatrix} 35 \\ 53 \end{pmatrix}$
	[1111] $\equiv$ [111]	(111)	[4]	(222)	(11) (33) (55)

Те же соображения остаются в силе и при рассмотрении конфигураций нуклонов в d -, f -, ... оболочках. Так же как и в атомных спектрах, полученную классификацию можно усовершенствовать, введя в рассмотрение группу $O^+(2l+1)$. Все рассуждения почти дословно совпадают с рассуждениями, проведенными в § 3 настоящей главы. Единственное отличие состоит в том, что в результате свертки тензоров, приводящей к общему моменту количества движения $L=0$ (моменты количества движения каждого из нуклонов равны l), их орбитальная функция приобретает симметрию схемы [2]. Соответствующая зарядово-спиновая функция обладает симметрией [11] и содержит мультиплеты (13) и (31). Результаты для d - и f -оболочек при $r \leq 4$ представлены в табл. 72 и 73. В этих таблицах объединены результаты, приведенные в табл. 61 и 62, и результаты, указанные в табл. 69.

§ 9. Модель оболочек в схеме jj -связи. Старшинство в схеме jj -связи

Схема jj -связи в теории ядра аналогична той аппроксимации, которая использовалась в § 5 настоящей главы для атомов. Отдельные нуклоны движутся в некотором усредненном поле. Предполагается, что спин-орбитальное взаимодействие велико, поэтому уровни энергии отдельного нуклона можно характеризовать с помощью квантовых чисел n, l, j, m_j , где $j=l+1/2$ или $j=l-1/2$. Если в системе имеется r нуклонов, то зарядовое состояние ядра будет описываться зарядовыми функциями, которые мы построили в § 6 настоящей главы. Эти функции нумеруют, используя для этого значения изотопического спина T . Если r нуклонов эквивалентны (т. е. если они принадлежат одной nlj -оболочке), то спин-орбитальную функцию системы получают, образуя произведения r одночастичных функций. Одночастичные функции дают базис некоторого представления группы $SU(2j+1)$. Спин-орбитальные волновые функции, обладающие симметрией какого-нибудь определенного типа, образуют базис неприводимого представления группы $SU(2j+1)$. Чтобы получить полную волновую функцию, мы должны умножить спин-орбитальную функцию на зарядовую функцию, обладающую сопряженной симметрией. Таким образом, номерами спин-орбитальных функций будут служить значения изотопического спина T . Поскольку схема Юнга для зарядовой функции имеет самое большее две строки, схема Юнга для спин-орбитальной функции не содержит разбиений, у которых $\lambda_i > 2$. Кроме того, число строк в схеме Юнга для спин-орбитальной функции не превышает $2j+1$. Например, при $r=5$ могут существовать спин-орбитальные функции, для которых схема Юнга имеет вид $[\lambda]=[221]$. В этом случае у зарядовой функции схема имеет вид $[\tilde{\lambda}]=[32]$, так что $T=1/2$.

Разложение представлений группы $Sp(2j+1)$ на представления группы $O^+(3)$

	r	(σ)	Разложение момента количества движения
а) $j = \frac{3}{2}$	0	(00)	0
	1	(10)	$\frac{3}{2}$
	2	(20)	1 3
		(11)	2
	3	(21)	$\frac{1}{2} \frac{5}{2} \frac{7}{2}$
	4	(22)	2 4
б) $j = \frac{5}{2}$	0	(000)	0
	1	(100)	$\frac{5}{2}$
	2	(200)	1 3 5
		(110)	2 4
	3	(210)	$\frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \left(\frac{7}{2}\right)^2 \frac{9}{2} \frac{11}{2} \frac{13}{2}$
		(111)	$\frac{3}{2} \frac{9}{2}$
	4	(220)	0 2 ² 3 4 ² 5 6 ² 8
		(211)	1 2 3 ² 4 5 6 7
	5	(221)	$\frac{1}{2} \frac{3}{2} \left(\frac{5}{2}\right)^2 \left(\frac{7}{2}\right)^2 \left(\frac{9}{2}\right)^2 \left(\frac{11}{2}\right)^2 \frac{13}{2} \frac{15}{2} \frac{17}{2}$
	6	(222)	1 3 ² 4 5 6 7 9
в) $j = \frac{7}{2}$	0	(0000)	0
	1	(1000)	$\frac{7}{2}$
	2	(2000)	1 3 5 7
		(1100)	2 4 6
	3	(2100)	$\frac{1}{2} \frac{3}{2} \left(\frac{5}{2}\right)^2 \left(\frac{7}{2}\right)^2 \left(\frac{9}{2}\right)^2 \left(\frac{11}{2}\right)^2 \left(\frac{13}{2}\right)^2 \frac{15}{2} \frac{17}{2} \frac{19}{2}$
		(1110)	$\frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{9}{2} \frac{11}{2} \frac{15}{2}$
	4	(2200)	0 ² 2 ³ 3 ² 4 ⁴ 5 ² 6 ⁴ 7 ² 8 ³ 9 10 ² 12
		(2110)	1 ² 2 ² 3 ⁴ 4 ³ 5 ⁴ 6 ³ 7 ³ 8 ² 9 ² 10 11
		(1111)	2 4 5 8
	5	(2210)	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^4 \left(\frac{5}{2}\right)^6 \left(\frac{7}{2}\right)^7 \left(\frac{9}{2}\right)^9 \left(\frac{11}{2}\right)^7 \left(\frac{13}{2}\right)^7 \left(\frac{15}{2}\right)^6 \left(\frac{17}{2}\right)^5 \left(\frac{19}{2}\right)^4 \left(\frac{21}{2}\right)^3 \left(\frac{23}{2}\right)^2 \frac{25}{2} \frac{27}{2}$
		(2111)	$\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{5}{2}\right)^2 \left(\frac{7}{2}\right)^3 \left(\frac{9}{2}\right)^3 \left(\frac{11}{2}\right)^3 \left(\frac{13}{2}\right)^3 \left(\frac{15}{2}\right)^2 \left(\frac{17}{2}\right)^2 \left(\frac{19}{2}\right)^2 \frac{21}{2} \frac{23}{2}$
	6	(2220)	1 ⁴ 2 ² 3 ⁷ 4 ⁵ 5 ⁷ 6 ⁶ 7 ⁷ 8 ⁴ 9 ⁶ 10 ³ 11 ³ 12 ² 13 ² 15
		(2211)	0 ² 1 ² 2 ⁵ 3 ⁵ 4 ⁷ 5 ⁶ 6 ⁷ 7 ⁶ 8 ⁶ 9 ⁴ 10 ⁴ 11 ² 12 ² 13 14
	7	(2221)	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{3}{2}\right)^3 \left(\frac{5}{2}\right)^6 \left(\frac{7}{2}\right)^7 \left(\frac{9}{2}\right)^7 \left(\frac{11}{2}\right)^8 \left(\frac{13}{2}\right)^8 \left(\frac{15}{2}\right)^7 \left(\frac{17}{2}\right)^6 \left(\frac{19}{2}\right)^6 \left(\frac{21}{2}\right)^4 \left(\frac{23}{2}\right)^3 \left(\frac{25}{2}\right)^3 \frac{27}{2} \frac{29}{2} \frac{31}{2}$
	8	(2222)	0 1 2 ³ 3 ² 4 ⁵ 5 ³ 6 ⁵ 7 ³ 8 ⁴ 9 ³ 10 ³ 11 ² 12 ² 13 14 16

Разложение представлений группы $Sp(2j+1)$ на представления группы $O^+(3)$

	r	(σ)	Разложение момента количества движения
а) $j = \frac{3}{2}$	0	(00)	0
	1	(10)	$\frac{3}{2}$
	2	(20)	1 3
		(11)	2
	3	(21)	$\frac{1}{2} \frac{5}{2} \frac{7}{2}$
	4	(22)	2 4
б) $j = \frac{5}{2}$	0	(000)	0
	1	(100)	$\frac{5}{2}$
	2	(200)	1 3 5
		(110)	2 4
	3	(210)	$\frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \left(\frac{7}{2}\right)^2 \frac{9}{2} \frac{11}{2} \frac{13}{2}$
		(111)	$\frac{3}{2} \frac{9}{2}$
	4	(220)	0 2 ² 3 4 ² 5 6 ² 8
		(211)	1 2 3 ² 4 5 6 7
	5	(221)	$\frac{1}{2} \frac{3}{2} \left(\frac{5}{2}\right)^2 \left(\frac{7}{2}\right)^2 \left(\frac{9}{2}\right)^2 \left(\frac{11}{2}\right)^2 \frac{13}{2} \frac{15}{2} \frac{17}{2}$
	6	(222)	1 3 ² 4 5 6 7 9
в) $j = \frac{7}{2}$	0	(0000)	0
	1	(1000)	$\frac{7}{2}$
	2	(2000)	1 3 5 7
		(1100)	2 4 6
	3	(2100)	$\frac{1}{2} \frac{3}{2} \left(\frac{5}{2}\right)^2 \left(\frac{7}{2}\right)^2 \left(\frac{9}{2}\right)^2 \left(\frac{11}{2}\right)^2 \left(\frac{13}{2}\right)^2 \frac{15}{2} \frac{17}{2} \frac{19}{2}$
		(1110)	$\frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{9}{2} \frac{11}{2} \frac{15}{2}$
	4	(2200)	0 ² 2 ³ 3 ² 4 ⁴ 5 ² 6 ⁴ 7 ² 8 ³ 9 10 ² 12
		(2110)	1 ² 2 ² 3 ⁴ 4 ³ 5 ⁴ 6 ³ 7 ³ 8 ² 9 ² 10 11
		(1111)	2 4 5 8
	5	(2210)	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^4 \left(\frac{5}{2}\right)^5 \left(\frac{7}{2}\right)^7 \left(\frac{9}{2}\right)^9 \left(\frac{11}{2}\right)^7 \left(\frac{13}{2}\right)^7 \left(\frac{15}{2}\right)^6 \left(\frac{17}{2}\right)^5 \left(\frac{19}{2}\right)^4 \left(\frac{21}{2}\right)^3 \left(\frac{23}{2}\right)^2 \frac{25}{2} \frac{27}{2}$
		(2111)	$\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{5}{2}\right)^2 \left(\frac{7}{2}\right)^3 \left(\frac{9}{2}\right)^3 \left(\frac{11}{2}\right)^3 \left(\frac{13}{2}\right)^3 \left(\frac{15}{2}\right)^2 \left(\frac{17}{2}\right)^2 \left(\frac{19}{2}\right)^2 \frac{21}{2} \frac{23}{2}$
	6	(2220)	1 ⁴ 2 ² 3 ⁷ 4 ⁵ 5 ⁷ 6 ⁶ 7 ⁷ 8 ⁴ 9 ⁶ 10 ³ 11 ³ 12 ² 13 ² 15
		(2211)	0 ² 1 ² 2 ⁵ 3 ⁵ 4 ⁷ 5 ⁶ 6 ⁷ 7 ⁶ 8 ⁶ 9 ⁴ 10 ⁴ 11 ² 12 ² 13 14
	7	(2221)	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{3}{2}\right)^3 \left(\frac{5}{2}\right)^6 \left(\frac{7}{2}\right)^7 \left(\frac{9}{2}\right)^7 \left(\frac{11}{2}\right)^8 \left(\frac{13}{2}\right)^8 \left(\frac{15}{2}\right)^7 \left(\frac{17}{2}\right)^6 \left(\frac{19}{2}\right)^6 \left(\frac{21}{2}\right)^4 \left(\frac{23}{2}\right)^3 \left(\frac{25}{2}\right)^3 \frac{27}{2} \frac{29}{2} \frac{31}{2}$
	8	(2222)	0 1 2 ³ 3 ² 4 ⁵ 5 ³ 6 ⁵ 7 ³ 8 ⁴ 9 ³ 10 ³ 11 ² 12 ² 13 14 16

Классификация состояний ядерной конфигурации (j)'

	r	$[\lambda]$	T	(σ)	(s, t)	Разложение момента количества движения
а) $j = \frac{3}{2}$	0	[0]	0	(00)	(0, 0)	0
	1	[1]	$\frac{1}{2}$	(10)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{3}{2}$
	2	[2]	0	(20)	(2, 0)	1 3
		[1]	1	(00)	(0, 0)	0
				(11)	(2, 1)	2
	3	[21]	$\frac{1}{2}$	(10)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{3}{2}$
					$(3, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2} \frac{5}{2} \frac{7}{2}$
		[111] $\equiv$ [1]	$\frac{3}{2}$	(10)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{3}{2}$
	4	[22]	0	(00)	(0, 0)	0
				(11)	(2, 1)	2
				(22)	(4, 0)	2 4
		[211]	1	(20)	(2, 0)	1 3
				(11)	(2, 1)	2
				(00)	(0, 0)	0
б) $j = \frac{5}{2}$	0	[0]	0	(000)	(0, 0)	0
	1	[1]	$\frac{1}{2}$	(100)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{5}{2}$
	2	[2]	0	(200)	(2, 0)	1 3 5
		[11]	1	(000)	(0, 0)	0
				(110)	(2, 1)	2 4
	3	[21]	$\frac{1}{2}$	(100)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{5}{2}$
					$(3, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} (\frac{7}{2})^2 \frac{9}{2} \frac{11}{2} \frac{13}{2}$
		[111]	$\frac{3}{2}$	(100)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{5}{2}$
	4	[22]	0	(111)	$(3, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2} \frac{9}{2}$
				(000)	(0, 0)	0
				(110)	(2, 1)	2 4
		[211]	1	(220)	(4, 0)	0 2 ² 3 4 ² 5 6 ² 8
				(200)	(2, 0)	1 3 5
				(110)	(2, 1)	2 4
		[1111] $\equiv$ [11]	2	(211)	(4, 1)	1 2 3 ² 4 5 6 7
				(000)	(0, 0)	0
				(110)	(2, 1)	2 4
	5	[221]	$\frac{1}{2}$	(100)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{5}{2}$
					$(3, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} (\frac{7}{2})^2 \frac{9}{2} \frac{11}{2} \frac{13}{2}$
					$(3, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2} \frac{9}{2}$
		[21111]	$\frac{3}{2}$	(221)	$(5, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2} \frac{3}{2} (\frac{5}{2})^2 (\frac{7}{2})^2 (\frac{9}{2})^2 (\frac{11}{2})^2 \frac{13}{2} \frac{15}{2} \frac{17}{2}$
				(100)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{5}{2}$
				(210)	$(3, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} (\frac{7}{2})^2 \frac{9}{2} \frac{11}{2} \frac{13}{2}$
		[11111] $\equiv$ [1]	$\frac{5}{2}$	(111)	$(3, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2} \frac{9}{2}$
				(100)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{5}{2}$
					$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{5}{2}$

Классификация состояний ядерной конфигурации (j)'

	r	$[\lambda]$	T	(σ)	(s, t)	Разложение момента количества движения
а) $j = \frac{3}{2}$	0	[0]	0	(00)	(0, 0)	0
	1	[1]	$\frac{1}{2}$	(10)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{3}{2}$
	2	[2]	0	(20)	(2, 0)	1 3
		[1]	1	(00)	(0, 0)	0
				(11)	(2, 1)	2
	3	[21]	$\frac{1}{2}$	(10)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{3}{2}$
					$(3, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2} \frac{5}{2} \frac{7}{2}$
		[111] $\equiv$ [1]	$\frac{3}{2}$	(10)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{3}{2}$
	4	[22]	0	(00)	(0, 0)	0
				(11)	(2, 1)	2
				(22)	(4, 0)	2 4
		[211]	1	(20)	(2, 0)	1 3
				(11)	(2, 1)	2
б) $j = \frac{5}{2}$	0	[111] $\equiv$ [0]	2	(00)	(0, 0)	0
		[0]	0	(000)	(0, 0)	0
	1	[1]	$\frac{1}{2}$	(100)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{5}{2}$
	2	[2]	0	(200)	(2, 0)	1 3 5
		[11]	1	(000)	(0, 0)	0
				(110)	(2, 1)	2 4
	3	[21]	$\frac{1}{2}$	(100)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{5}{2}$
					$(3, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} (\frac{7}{2})^2 \frac{9}{2} \frac{11}{2} \frac{13}{2}$
		[111]	$\frac{3}{2}$	(100)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{5}{2}$
	4	[22]	0	(111)	$(3, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2} \frac{9}{2}$
				(000)	(0, 0)	0
				(110)	(2, 1)	2 4
				(220)	(4, 0)	0 2 ² 3 4 ² 5 6 ² 8
		[211]	1	(200)	(2, 0)	1 3 5
				(110)	(2, 1)	2 4
				(211)	(4, 1)	1 2 3 ² 4 5 6 7
		[1111] $\equiv$ [11]	2	(000)	(0, 0)	0
	5	[221]	$\frac{1}{2}$	(110)	(2, 1)	2 4
				(100)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{5}{2}$
				(210)	$(3, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} (\frac{7}{2})^2 \frac{9}{2} \frac{11}{2} \frac{13}{2}$
				(111)	$(3, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2} \frac{9}{2}$
		[21111]	$\frac{3}{2}$	(221)	$(5, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2} \frac{3}{2} (\frac{5}{2})^2 (\frac{7}{2})^2 (\frac{9}{2})^2 (\frac{11}{2})^2 \frac{13}{2} \frac{15}{2} \frac{17}{2}$
				(100)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{5}{2}$
				(210)	$(3, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} (\frac{7}{2})^2 \frac{9}{2} \frac{11}{2} \frac{13}{2}$
				(111)	$(3, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2} \frac{9}{2}$
		[11111] $\equiv$ [1]	$\frac{5}{2}$	(100)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{5}{2}$

	r	$[\lambda]$	T	(σ)	(s, t)	Разложение момента количества движения
в) $j = \frac{7}{2}$	6	[222]	0	(200)	(2, 0)	1 3 5
				(211)	(4, 1)	1 2 3 ² 4 5 6 7
				(222)	(6, 0)	1 3 ² 4 5 6 7 9
		[2211]	1	(000)	(0, 0)	0
				(110) ²	(2, 1) ²	(2 4) ²
				(220)	(4, 0)	0 2 ² 3 4 ² 5 6 ² 8
	0	[21111]	2	(211)	(4, 1)	1 2 3 ² 4 5 6 7
				(200)	(2, 0)	1 3 5
				110	(2, 1)	2 4
		[111111] $\equiv$ [0]	3	(000)	(0, 0)	0
		[0]	0	(0000)	(0, 0)	0
			$\frac{1}{2}$	(1000)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{7}{2}$
	1	[1]	$\frac{1}{2}$	(1000)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{7}{2}$
	2	[2]	0	(2000)	(2, 0)	1 3 5 7
		[11]	1	(0000)	(0, 0)	0
				(1100)	(2, 1)	2 4 6
	3	[21]	$\frac{1}{2}$	(1000)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{7}{2}$
				(2100)	$(3, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2} \frac{3}{2} (\frac{5}{2})^2 (\frac{7}{2})^2 (\frac{9}{2})^2 (\frac{11}{2})^2 (\frac{13}{2})^2 \frac{15}{2} \frac{17}{2} \frac{19}{2}$
		[111]	$\frac{3}{2}$	(1000)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{7}{2}$
				(1110)	$(3, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{9}{2} \frac{11}{2} \frac{15}{2}$
	4	[22]	0	(0000)	(0, 0)	0
				(1100)	(2, 1)	2 4 6
	5	[211]	1	(2200)	(4, 0)	0 ² 2 ³ 3 ² 4 ⁴ 5 ² 6 ⁴ 7 ² 8 ³ 9 10 ² 12
				(2000)	(2, 0)	1 3 5 7
				(1100)	(2, 1)	2 4 6
				(2110)	(4, 1)	1 ² 2 ² 3 ⁴ 4 ³ 5 ⁴ 6 ³ 7 ³ 8 ² 9 ² 10 11
		[1111]	2	(0000)	(0, 0)	0
				(1100)	(2, 1)	2 4 6
				(1111)	(4, 2)	2 4 5 8
		[221]	$\frac{1}{2}$	(1000)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{7}{2}$
				(2100)	$(3, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2} \frac{3}{2} (\frac{5}{2})^2 (\frac{7}{2})^2 (\frac{9}{2})^2 (\frac{11}{2})^2 (\frac{13}{2})^2 \frac{15}{2} \frac{17}{2} \frac{19}{2}$
				(1110)	$(3, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{9}{2} \frac{11}{2} \frac{15}{2}$
				(2210)	$(5, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2})^2 (\frac{3}{2})^4 (\frac{5}{2})^5 (\frac{7}{2})^7 (\frac{9}{2})^7 (\frac{11}{2})^7 (\frac{13}{2})^7$ $(\frac{15}{2})^6 (\frac{17}{2})^5 (\frac{19}{2})^4 (\frac{21}{2})^3 (\frac{23}{2})^2 \frac{25}{2} \frac{27}{2}$
		[2111]	$\frac{3}{2}$	(1000)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{7}{2}$
				(2100)	$(3, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2} \frac{3}{2} (\frac{5}{2})^2 (\frac{7}{2})^2 (\frac{9}{2})^2 (\frac{11}{2})^2 (\frac{13}{2})^2 \frac{15}{2} \frac{17}{2} \frac{19}{2}$
				(1110)	$(3, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{9}{2} \frac{11}{2} \frac{15}{2}$
				(2111)	$(5, \frac{3}{2})$	$\frac{1}{2} (\frac{3}{2})^2 (\frac{5}{2})^2 (\frac{7}{2})^3 (\frac{9}{2})^3 (\frac{11}{2})^3 (\frac{13}{2})^3 (\frac{15}{2})^2$ $(\frac{17}{2})^2 (\frac{19}{2}) (\frac{21}{2}) (\frac{23}{2})$
		[11111] $\equiv$ [111]	$\frac{5}{2}$	(1000)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{7}{2}$

	r	$[\lambda]$	T	(σ)	(s, t)	Разложение момента количества движения
в) $j = \frac{7}{2}$	6	[222]	0	(200)	(2, 0)	1 3 5
				(211)	(4, 1)	1 2 3 ² 4 5 6 7
				(222)	(6, 0)	1 3 ² 4 5 6 7 9
		[2211]	1	(000)	(0, 0)	0
				(110) ²	(2, 1) ²	(2 4) ²
				(220)	(4, 0)	0 2 ² 3 4 ² 5 6 ² 8
	0	[21111]	2	(211)	(4, 1)	1 2 3 ² 4 5 6 7
				(200)	(2, 0)	1 3 5
				110	(2, 1)	2 4
		[11111] $\equiv$ [0]	3	(000)	(0, 0)	0
		[0]	0	(0000)	(0, 0)	0
			$\frac{1}{2}$	(1000)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{7}{2}$
	1	[1]	$\frac{1}{2}$	(1000)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{7}{2}$
	2	[2]	0	(2000)	(2, 0)	1 3 5 7
		[11]	1	(0000)	(0, 0)	0
				(1100)	(2, 1)	2 4 6
	3	[21]	$\frac{1}{2}$	(1000)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{7}{2}$
				(2100)	$(3, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2} \frac{3}{2} (\frac{5}{2})^2 (\frac{7}{2})^2 (\frac{9}{2})^2 (\frac{11}{2})^2 (\frac{13}{2})^2 \frac{15}{2} \frac{17}{2} \frac{19}{2}$
		[111]	$\frac{3}{2}$	(1000)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{7}{2}$
				(1110)	$(3, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{9}{2} \frac{11}{2} \frac{15}{2}$
	4	[22]	0	(0000)	(0, 0)	0
				(1100)	(2, 1)	2 4 6
	5			(2200)	(4, 0)	0 ² 2 ³ 3 ² 4 ⁴ 5 ² 6 ⁴ 7 ² 8 ³ 9 10 ² 12
		[211]	1	(2000)	(2, 0)	1 3 5 7
				(1100)	(2, 1)	2 4 6
				(2110)	(4, 1)	1 ² 2 ² 3 ⁴ 4 ³ 5 ⁴ 6 ³ 7 ³ 8 ² 9 ² 10 11
		[1111]	2	(0000)	(0, 0)	0
				(1100)	(2, 1)	2 4 6
				(1111)	(4, 2)	2 4 5 8
		[221]	$\frac{1}{2}$	(1000)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{7}{2}$
				(2100)	$(3, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2} \frac{3}{2} (\frac{5}{2})^2 (\frac{7}{2})^2 (\frac{9}{2})^2 (\frac{11}{2})^2 (\frac{13}{2})^2 \frac{15}{2} \frac{17}{2} \frac{19}{2}$
				(1110)	$(3, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{9}{2} \frac{11}{2} \frac{15}{2}$
				(2210)	$(5, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2})^2 (\frac{3}{2})^4 (\frac{5}{2})^5 (\frac{7}{2})^7 (\frac{9}{2})^7 (\frac{11}{2})^7 (\frac{13}{2})^7$ $(\frac{15}{2})^6 (\frac{17}{2})^5 (\frac{19}{2})^4 (\frac{21}{2})^3 (\frac{23}{2})^2 \frac{25}{2} \frac{27}{2}$
		[2111]	$\frac{3}{2}$	(1000)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{7}{2}$
				(2100)	$(3, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2} \frac{3}{2} (\frac{5}{2})^2 (\frac{7}{2})^2 (\frac{9}{2})^2 (\frac{11}{2})^2 (\frac{13}{2})^2 \frac{15}{2} \frac{17}{2} \frac{19}{2}$
				(1110)	$(3, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{9}{2} \frac{11}{2} \frac{15}{2}$
				(2111)	$(5, \frac{3}{2})$	$\frac{1}{2} (\frac{3}{2})^2 (\frac{5}{2})^2 (\frac{7}{2})^3 (\frac{9}{2})^3 (\frac{11}{2})^3 (\frac{13}{2})^3 (\frac{15}{2})^2$ $(\frac{17}{2})^2 (\frac{19}{2}) (\frac{21}{2}) (\frac{23}{2})$
		[1111] $\equiv$ [111]	$\frac{5}{2}$	(1000)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{7}{2}$

	r	[λ]	T	(σ)	(s, t)	Разложение момента количества движения		
	6	[222]	0	(1110)	$(3, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{9}{2} \frac{11}{2} \frac{15}{2}$		
				(2000)	(2, 0)	1 3 5 7		
				(2110)	(4, 1)	$1^2 2^2 3^4 4^3 5^4 6^3 7^3 8^2 9^2 10 11$		
				(2220)	(6, 0)	$1^4 2^2 3^7 4^5 5^7 6^6 7^7 8^4 9^6 10^3 11^3 12^2 13^2 15$		
				(0000)	(0, 0)	0		
		[2211]	1	(1100) ²	$(2, 1)^2$	$(2 \ 4 \ 6)^2$		
				(2200)	(4, 0)	$0^2 2^3 3^2 4^4 5^2 6^4 7^2 8^3 9 10^2 12$		
				(2110)	(4, 1)	$1^2 2^2 3^4 4^3 5^4 6^3 7^3 8^2 9^2 10 11$		
				(1111)	(4, 2)	2 4 5 8		
				(2211)	(6, 1)	$0^2 1^2 2^5 3^5 4^7 5^6 6^7 7^6 8^6 9^4 10^4 11^2 12^2 13 14$		
		[21111]	2	(2000)	(2, 0)	1 3 5 7		
				(1100)	(2, 1)	2 4 6		
				(2110)	(4, 1)	$1^2 2^2 3^4 4^3 5^4 6^3 7^3 8^2 9^2 10 11$		
				(1111)	(4, 2)	2 4 5 8		
				(0000)	(0, 0)	0		
	7	[111111] ≡ [11]	3	(1100)	(2, 1)	2 4 6		
				(1000)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{7}{2}$		
				(2100)	$(3, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2} \frac{3}{2} (\frac{5}{2})^2 (\frac{7}{2})^2 (\frac{9}{2})^2 (\frac{11}{2})^2 (\frac{13}{2})^2 \frac{15}{2} \frac{17}{2} \frac{19}{2}$		
				(1110)	$(3, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{9}{2} \frac{11}{2} \frac{15}{2}$		
				(2210)	$(5, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2})^2 (\frac{3}{2})^4 (\frac{5}{2})^5 (\frac{7}{2})^7 (\frac{9}{2})^7 (\frac{11}{2})^7 (\frac{13}{2})^7 (\frac{15}{2})^6$ $(\frac{17}{2})^5 (\frac{19}{2})^4 (\frac{21}{2})^3 (\frac{23}{2})^2 \frac{25}{2} \frac{27}{2}$		
						(2111)	$(5, \frac{3}{2})$	$\frac{1}{2} (\frac{3}{2})^2 (\frac{5}{2})^2 (\frac{7}{2})^3 (\frac{9}{2})^3 (\frac{11}{2})^3 (\frac{13}{2})^3 (\frac{15}{2})^2$ $(\frac{17}{2})^2 \frac{19}{2} \frac{21}{2} \frac{23}{2}$
						(2221)	$(7, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2})^3 (\frac{3}{2})^3 (\frac{5}{2})^6 (\frac{7}{2})^7 (\frac{9}{2})^7 (\frac{11}{2})^8 (\frac{13}{2})^8 (\frac{15}{2})^7$ $(\frac{17}{2})^6 (\frac{19}{2})^6 (\frac{21}{2})^4 (\frac{23}{2})^3 (\frac{25}{2})^3 \frac{27}{2} \frac{29}{2} \frac{31}{2}$
						(1000)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{7}{2}$
						(2100)	$(3, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2} \frac{3}{2} (\frac{5}{2})^2 (\frac{7}{2})^2 (\frac{9}{2})^2 (\frac{11}{2})^2 (\frac{13}{2})^2 \frac{15}{2} \frac{17}{2} \frac{19}{2}$
						(1110) ²	$(3, \frac{3}{2})^2$	$(\frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{9}{2} \frac{11}{2} \frac{15}{2})^2$
				(2210)	$(5, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2})^2 (\frac{3}{2})^4 (\frac{5}{2})^5 (\frac{7}{2})^7 (\frac{9}{2})^7 (\frac{11}{2})^7 (\frac{13}{2})^7 (\frac{15}{2})^6$ $(\frac{17}{2})^5 (\frac{19}{2})^4 (\frac{21}{2})^3 (\frac{23}{2})^2 \frac{25}{2} \frac{27}{2}$		
				(2111)	$(5, \frac{3}{2})$	$\frac{1}{2} (\frac{3}{2})^2 (\frac{5}{2})^2 (\frac{7}{2})^3 (\frac{9}{2})^3 (\frac{11}{2})^3 (\frac{13}{2})^3 (\frac{15}{2})^2$ $(\frac{17}{2})^2 \frac{19}{2} \frac{21}{2} \frac{23}{2}$		
				(1000)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{7}{2}$		
				(2100)	$(3, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2} \frac{3}{2} (\frac{5}{2})^2 (\frac{7}{2})^2 (\frac{9}{2})^2 (\frac{11}{2})^2 (\frac{13}{2})^2 \frac{15}{2} \frac{17}{2} \frac{19}{2}$		
				(1110)	$(3, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{9}{2} \frac{11}{2} \frac{15}{2}$		
		[1111111] ≡ [1]	$\frac{7}{2}$	(1000)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{7}{2}$		

	r	$[\lambda]$	T	(σ)	(s, t)	Разложение момента количества движения
6	6	[222]	0	(1110)	$(3, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{9}{2} \frac{11}{2} \frac{15}{2}$
				(2000)	(2, 0)	1 3 5 7
				(2110)	(4, 1)	$1^2 2^2 3^4 4^3 5^4 6^3 7^3 8^2 9^2 10 11$
				(2220)	(6, 0)	$1^4 2^2 3^7 4^5 5^7 6^6 7^7 8^4 9^6 10^3 11^3 12^2 13^2 15$
				(0000)	(0, 0)	0
		[2211]	1	(1100) ²	$(2, 1)^2$	$(2 \ 4 \ 6)^2$
				(2200)	(4, 0)	$0^2 2^3 3^2 4^4 5^2 6^4 7^2 8^3 9 10^2 12$
				(2110)	(4, 1)	$1^2 2^2 3^4 4^3 5^4 6^3 7^3 8^2 9^2 10 11$
				(1111)	(4, 2)	2 4 5 8
				(2211)	(6, 1)	$0^2 1^2 2^5 3^5 4^7 5^6 6^7 7^6 8^6 9^4 10^4 11^2 12^2 13 14$
		[21111]	2	(2000)	(2, 0)	1 3 5 7
				(1100)	(2, 1)	2 4 6
				(2110)	(4, 1)	$1^2 2^2 3^4 4^3 5^4 6^3 7^3 8^2 9^2 10 11$
				(1111)	(4, 2)	2 4 5 8
				(0000)	(0, 0)	0
	7	[111111] $\equiv$ [11]	3	(1100)	(2, 1)	2 4 6
				(1000)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{7}{2}$
				(2100)	$(3, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2} \frac{3}{2} (\frac{5}{2})^2 (\frac{7}{2})^2 (\frac{9}{2})^2 (\frac{11}{2})^2 (\frac{13}{2})^2 \frac{15}{2} \frac{17}{2} \frac{19}{2}$
				(1110)	$(3, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{9}{2} \frac{11}{2} \frac{15}{2}$
				(2210)	$(5, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2})^2 (\frac{3}{2})^4 (\frac{5}{2})^5 (\frac{7}{2})^7 (\frac{9}{2})^7 (\frac{11}{2})^7 (\frac{13}{2})^7 (\frac{15}{2})^6$ $(\frac{17}{2})^5 (\frac{19}{2})^4 (\frac{21}{2})^3 (\frac{23}{2})^2 \frac{25}{2} \frac{27}{2}$
		[2221]	$\frac{1}{2}$	(2111)	$(5, \frac{3}{2})$	$\frac{1}{2} (\frac{3}{2})^2 (\frac{5}{2})^2 (\frac{7}{2})^3 (\frac{9}{2})^3 (\frac{11}{2})^3 (\frac{13}{2})^3 (\frac{15}{2})^2$ $(\frac{17}{2})^2 \frac{19}{2} \frac{21}{2} \frac{23}{2}$
				(2221)	$(7, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2})^3 (\frac{3}{2})^3 (\frac{5}{2})^6 (\frac{7}{2})^7 (\frac{9}{2})^7 (\frac{11}{2})^8 (\frac{13}{2})^8 (\frac{15}{2})^7$ $(\frac{17}{2})^6 (\frac{19}{2})^6 (\frac{21}{2})^4 (\frac{23}{2})^3 (\frac{25}{2})^3 \frac{27}{2} \frac{29}{2} \frac{31}{2}$
				(1000)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{7}{2}$
				(2100)	$(3, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2} \frac{3}{2} (\frac{5}{2})^2 (\frac{7}{2})^2 (\frac{9}{2})^2 (\frac{11}{2})^2 (\frac{13}{2})^2 \frac{15}{2} \frac{17}{2} \frac{19}{2}$
				(1110) ²	$(3, \frac{3}{2})^2$	$(\frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{9}{2} \frac{11}{2} \frac{15}{2})^2$
				(2210)	$(5, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2})^2 (\frac{3}{2})^4 (\frac{5}{2})^5 (\frac{7}{2})^7 (\frac{9}{2})^7 (\frac{11}{2})^7 (\frac{13}{2})^7 (\frac{15}{2})^6$ $(\frac{17}{2})^5 (\frac{19}{2})^4 (\frac{21}{2})^3 (\frac{23}{2})^2 \frac{25}{2} \frac{27}{2}$
		[22111]	$\frac{3}{2}$	(2111)	$(5, \frac{3}{2})$	$\frac{1}{2} (\frac{3}{2})^2 (\frac{5}{2})^2 (\frac{7}{2})^3 (\frac{9}{2})^3 (\frac{11}{2})^3 (\frac{13}{2})^3 (\frac{15}{2})^2$ $(\frac{17}{2})^2 \frac{19}{2} \frac{21}{2} \frac{23}{2}$
				(1000)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{7}{2}$
				(2100)	$(3, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2} \frac{3}{2} (\frac{5}{2})^2 (\frac{7}{2})^2 (\frac{9}{2})^2 (\frac{11}{2})^2 (\frac{13}{2})^2 \frac{15}{2} \frac{17}{2} \frac{19}{2}$
				(1110)	$(3, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{9}{2} \frac{11}{2} \frac{15}{2}$
				(1000)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{7}{2}$
		[211111]	$\frac{5}{2}$	(2100)	$(3, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2} \frac{3}{2} (\frac{5}{2})^2 (\frac{7}{2})^2 (\frac{9}{2})^2 (\frac{11}{2})^2 (\frac{13}{2})^2 \frac{15}{2} \frac{17}{2} \frac{19}{2}$
				(1110)	$(3, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{9}{2} \frac{11}{2} \frac{15}{2}$
				(1000)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{7}{2}$
				(1000)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{7}{2}$
				(1000)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{7}{2}$
		[1111111] $\equiv$ [1]	$\frac{7}{2}$	(1000)	$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{7}{2}$

Продолжение

	r	$[\lambda]$	T	(σ)	(s, t)	Разложение момента количества движения
	8	$[2222]$	0	(0000)	(0, 0)	0
				(1100)	(2, 1)	2 4 6
				(2200)	(4, 0)	0 ² 2 ³ 3 ² 4 ⁴ 5 ² 6 ⁴ 7 ² 8 ³ 9 10 ² 12
				(1111)	(4, 2)	2 4 5 8
	1	$[22211]$	1	(2211)	(6, 1)	0 ² 1 ² 2 ⁵ 3 ⁵ 4 ⁷ 5 ⁶ 6 ⁷ 7 ⁶ 8 ⁶ 9 ⁴ 10 ⁴ 11 ² 12 ² 13 14
				(2222)	(8, 0)	0 1 2 ³ 3 ² 4 ⁵ 5 ³ 6 ⁵ 7 ³ 8 ⁴ 9 ³ 10 ³ 11 ² 12 ² 13 14 16
				(2000)	(2, 0)	1 3 5 7
				(1100)	(2, 1)	2 4 6
	2	$[221111]$	2	(2110) ²	(4, 1) ²	(1 ² 2 ² 3 ⁴ 4 ³ 5 ⁴ 6 ³ 7 ³ 8 ² 9 ² 10 11) ²
				(1111)	(4, 2)	2 4 5 8
				(2220)	(6, 0)	1 ⁴ 2 ² 3 ⁷ 4 ⁵ 5 ⁷ 6 ⁶ 7 ⁷ 8 ⁴ 9 ⁶ 10 ³ 11 ³ 12 ² 13 ² 15
				(2211)	(6, 1)	0 ² 1 ² 2 ⁵ 3 ⁵ 4 ⁷ 5 ⁶ 6 ⁷ 7 ⁶ 8 ⁶ 9 ⁴ 10 ⁴ 11 ² 12 ² 13 14
	3	$[211111]$	3	(0000)	(0, 0)	0
				(1100) ²	(2, 1) ²	(2 4 6) ²
				(2200)	(4, 0)	0 ² 2 ³ 3 ² 4 ⁴ 5 ² 6 ⁴ 7 ² 8 ³ 9 10 ² 12
				(2110)	(4, 1)	1 ² 2 ² 3 ⁴ 4 ³ 5 ⁴ 6 ³ 7 ³ 8 ² 9 ² 10 11
	4	$[111111] \equiv [0]$	4	(1111)	(4, 2)	2 4 5 8
				(2000)	(2, 0)	1 3 5 7
				(1100)	(2, 1)	2 4 6
				(0000)	(0, 0)	0

Разложение момента количества движения конфигурации $(j)^r$ было приведено в § 2 настоящей главы (см. табл. 54, 56 и 58).

Понятие старшинства в схему jj -связи можно ввести так же, как оно было введено в § 4 настоящей главы. Чтобы иметь возможность характеризовать уровни, возникающие в некоторой заданной конфигурации ядра, нам требуются какие-то дополнительные квантовые числа. Для этого мы пытаемся найти группу G , которая была бы подгруппой группы $SU(2j+1)$ и содержала бы в качестве подгруппы группу $O^+(3)$. После этого уровни можно было бы характеризовать, задавая разбиение $[\lambda]$, момент количества движения J и то неприводимое представление группы G , которому принадлежит рассматриваемый уровень.

Предположим, что у нас имеется два нуклона в конфигурации $(j)^2$. Спин-орбитальные функции

$$\psi_{i_1}^{(1)}\psi_{i_2}^{(2)} (i_1, i_2 = -j, -j+1, \dots, j-1, j)$$

этих двух нуклонов являются векторами в нечетномерном пространстве (размерности $2j+1$) представления $D^{(j)}$ группы вращений. Произведения функций $\psi_{i_1}^{(1)}\psi_{i_2}^{(2)}$ образуют базис некоторого представления унитарной группы $SU(2j+1)$ и в то же время образуют базис некоторого представления группы вращений $O^+(3)$. Соотношение (11.6), выписанное для полуцелого j , показывает, что *антисимметрическая* билинейная форма (косое произведение)

$$\Psi_{J=0} = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} \psi_m^{(1)}\psi_{-m}^{(2)} \equiv \{\psi^{(1)}\psi^{(2)}\} \quad (11.26)$$

приводит к сложению моментов количества движения двух частиц и результирующему моменту $J=0$. Трехмерные вращения индуцируют в пространстве этих тензоров линейное преобразование, но не изменяют функцию $\Psi_{J=0}$ в формуле (11.26). Однако существует и более широкая группа G преобразований в $(2j+1)$ -мерном пространстве, оставляющих функции (11.26) инвариантными. Косое произведение (11.26) представляет собой антисимметрическую билинейную форму, заданную на векторах нечетномерного пространства. Поэтому оно инвариантно относительно симплектических преобразований $Sp(2j+1)$, рассмотренных нами в гл. 10. Операция (11.26), служащая для получения косого произведения, есть в точности свертка, введенная нами в § 8 гл. 10.

Косое произведение (11.26) антисимметрично и имеет $J=0$. Соответствующая зарядовая функция для двух нуклонов должна быть симметричной (отвечать разбиению $[2]$), так что $T=1$.

Разложение представлений

$$SU(2j+1) \rightarrow Sp(2j+1) \rightarrow O^+(3)$$

проводится методами, аналогичными методам § 4 настоящей главы и использующими результаты гл. 10 о симплектической группе.

При $j = 3/2$ разложение момента количества движения $Sp(4) \rightarrow O^+(3)$ получают из табл. 50 и 54. При $r = 1$ схеме Юнга $[\lambda] = [1]$ отвечает $J = 3/2$ (см. табл. 54), а схема $[1]$ содержит $(\sigma_1 \sigma_2) = (10)$ (см. табл. 50), так что представление (10) группы $Sp(4)$ содержит $J = 3/2$. При $r = 2$ схема Юнга $[11]$ содержит $J = 0, 2$ (см. табл. 54) и $(\sigma_1 \sigma_2) = (00), (11)$ (см. табл. 50). Поскольку представление (00) группы $Sp(4)$ содержит $J = 0$, представление (11) содержит $J = 2$. Продолжая аналогичным образом, получаем разложение $Sp(4) \rightarrow O^+(3)$ (см. табл. 74).

Задача. Получите самостоятельно результаты, приведенные в табл. 74 для $j = 3/2$ и $j = 5/2$.

Комбинируя результаты, приведенные в табл. 74, с результатами, представленными в табл. 50, мы приходим к классификации спин-орбитальных функций. Соответствующая зарядовая функция полностью определяется заданием величины изотопического спина T . Представления группы $Sp(2j+1)$ характеризуются символами $(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_j)$, где $\sigma_i \leq 2$. Поскольку схема Юнга для такого символа содержит два столбца, ее можно описывать, задавая сумму и разность длин этих двух столбцов. Запишем длины этих двух столбцов в виде $(1/2)s \pm t$. *Старшинство* s представляет собой наименьшее число частиц, для которого может встретиться представление группы $Sp(2j+1)$; квантовое число t называется *приведенным изотопическим спином*. Результаты всех вычислений представлены в табл. 75.

Задача. Выведите результаты, содержащиеся в табл. 75 при $j = 3/2$, $j = 5/2$.

ГЛАВА 12

ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ. МАЛЫЕ ГРУППЫ

В предыдущих главах мы рассматривали представление групп линейными операторами, действующими на векторы в гильбертовом пространстве. Каждому элементу g группы G мы ставили в соответствие линейный оператор $D(g)$ и требовали, чтобы

$$D(g_1)D(g_2) = D(g_3), \quad \text{если } g_1g_2 = g_3. \quad (12.1)$$

Операторы $D(g)$ представления действуют на векторы ψ в гильбертовом пространстве. Однако в квантовой механике чистое состояние физической системы описывается не нормированным вектором ψ , а *лучом* $\epsilon\psi$, где ϵ — произвольный фазовый множитель ($|\epsilon| = 1$). Поэтому каждому элементу g группы симметрии G мы должны поставить в соответствие оператор $D(g)$, действующий на *лучи* в гильбертовом пространстве и осуществляющий отображение *одних лучей* в *другие*. Таким образом, с каждым элементом группы g мы связываем некоторый процесс „сдвига“, в результате которого каждое физическое состояние системы переходит в другое возможное физическое состояние этой же системы. В силу сказанного нам не следует *a priori* считать, что операторы представления удовлетворяют условиям (12.1). Вместо этого мы должны лишь потребовать, чтобы

$$D(g_1)D(g_2) = \epsilon D(g_3), \quad \text{если } g_1g_2 = g_3, \quad (12.2)$$

где ϵ — фазовый множитель, зависящий от g_1 и g_2 . Такие представления называются *проективными представлениями*; представления же, определяемые условием (12.1), называются *векторными представлениями*. В этой главе мы рассмотрим задачу о нахождении проективных представлений произвольной группы. Одновременно мы будем изучать условия, при которых проективное представление (12.2) можно заменить векторным представлением (12.1).

§ 1. Проективные представления конечных групп

Примечательно, что задача нахождения проективных представлений конечных групп была сформулирована и полностью решена задолго до создания квантовой механики. В серии своих статей Шур изложил общий метод нахождения неприводимых представлений конечных групп

с помощью *дробно-линейных преобразований (проективных преобразований)*.

Под *проективным представлением* мы понимаем следующее.

Каждому элементу $A, B, \dots$ конечной группы мы ставим в соответствие некоторое *дробно-линейное преобразование*

$$A \rightarrow \{A\}: \quad x'_i = \frac{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{i, n-1}x_{n-1} + a_{in}}{a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{n, n-1}x_{n-1} + a_{nn}}, \quad (12.3)$$

$$(i = 1, \dots, n-1),$$

где матрица $D(A)$ коэффициентов a_{ij} неособенная. Дробно-линейные преобразования задают представление группы H , если

$$\{A\} \{B\} = \{AB\}. \quad (12.4)$$

Размерность такого представления равна порядку n матриц $D(A)$.

Преобразования (12.3) можно рассматривать как линейные преобразования

$$y'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \quad (i = 1, \dots, n), \quad (12.5)$$

где

$$x_i = \frac{y_i}{y_n} \quad (i = 1, \dots, n-1) \quad (12.5a)$$

являются однородными координатами.

Из (12.3) или (12.5a) мы видим, что умножение элементов a_{ij} на один и тот же общий множитель не изменяет преобразования $\{A\}$. Если выписать матрицы, соответствующие соотношению (12.4), то окажется, что

$$D(A) D(B) = \omega_{A, B} D(AB), \quad (12.6)$$

где $\omega_{A, B}$ — некоторый набор множителей, зависящих от выбора матриц $D(A)$ и $D(B)$. Наоборот, если нам дана некоторая система неособенных матриц, удовлетворяющих условию (12.6), то мы можем найти соответствующее этой системе представление (12.4) посредством дробно-линейных преобразований. Таким образом, задача нахождения представлений некоторой группы с помощью дробно-линейных преобразований эквивалентна нахождению представлений этой группы с помощью линейных преобразований $D(A)$, удовлетворяющих условию (12.6).

Представление (12.6) мы будем называть *проективным представлением*, соответствующим данной *системе множителей* $\omega_{A, B}$. В частности, если все множители $\omega_{A, B}$ равны единице, то условие (12.6) будет определять обычные представления, которые мы будем называть *векторными представлениями*.

Если матрицы двух представлений отличаются друг от друга только множителем

$$D'(A) = aD(A), \quad D'(B) = bD(B), \dots, \quad (12.7)$$

то они соответствуют *одному и тому же* набору дробно-линейных преобразований $\{A\}$, $\{B\}$, ..., и называются *ассоциированными*.

Понятия эквивалентности представлений и их приводимости остаются такими же, как раньше. Проективное представление $D'(A)$ *эквивалентно* представлению $D(A)$ [формула (12.6)], если для всех A , принадлежащих H , существует неособенная матрица S такая, что

$$D'(A) = SD(A)S^{-1}.$$

В этом случае

$$D'(A)D'(B) = \omega_{A,B}D'(AB), \quad (12.8)$$

т. е. эквивалентные представления принадлежат одной и той же системе множителей. Если можно найти матрицу S , которая все матрицы представления $D'(A)$ позволяет записать в виде

$$D'(A) = \begin{bmatrix} D'_1(A) & 0 \\ 0 & D'_2(A) \end{bmatrix}, \quad (12.9)$$

то представление $D(A)$ *приводимо* и *разлагается* в прямую сумму проективных представлений $D'_1 + D'_2$. Из (12.8) и (12.9) видим, что система множителей $\omega_{A,B}$ одна и та же для $D(A)$, $D'(A)$, $D'_1(A)$ и $D'_2(A)$.

Проективное представление (12.6) *неприводимо*, если не существует эквивалентного представления вида (12.9).

Элементы $\omega_{A,B}$ системы множителей в (12.6) нельзя выбирать произвольно. Представим себе, что конечная группа H состоит из h элементов

$$H_0 = E, H_1, \dots, H_{h-1}.$$

Если матрицы $D(H_i)$ задают некоторое проективное представление группы H , соответствующее системе множителей $\omega_{A,B}$, то для любых трех элементов P, Q, R группы H

$$D(P)D(Q) = \omega_{P,Q}D(PQ), \quad (12.10)$$

$$D(P)D(Q)D(R) = \omega_{P,Q}D(PQ)D(R) = \omega_{P,Q}\omega_{PQ,R}D(PQR);$$

$$D(Q)D(R) = \omega_{Q,R}D(QR), \quad (12.10a)$$

$$D(P)D(Q)D(R) = \omega_{Q,R}D(P)D(QR) = \omega_{Q,P}\omega_{P,Q,R}D(PQR);$$

$$\omega_{P,Q}\omega_{PQ,R} = \omega_{Q,P}\omega_{P,Q,R} \quad (P, Q, R = H_0, \dots, H_{h-1}). \quad (12.11)$$

Таким образом, ассоциативный закон группового умножения приводит к тому, что h^2 множителей $\omega_{A,B}$ должны удовлетворять h^3 уравнениям (12.11).

Наоборот, покажем теперь, что для каждой системы, состоящей из h^2 отличных от нуля множителей $\omega_{A,B}$, которые удовлетворяют

условиям (12.11), найдется проективное представление группы H , принадлежащее этой системе множителей $\omega_{A,B}$. Чтобы доказать это, введем в рассмотрение h независимых переменных $x_{H_0}, x_{H_1}, \dots, x_{H_{h-1}}$ и построим матрицу X размером $h \times h$ с матричными элементами

$$X_{P,Q} = \omega_{PQ^{-1}, Q} x_{PQ^{-1}} \quad (P, Q = H_0, \dots, H_{h-1}). \quad (12.12)$$

Каждой строке и каждому столбцу матрицы X соответствует некоторый элемент группы H . Очевидно, что матрицу X можно записать в виде

$$X = \sum_{R \in H} D(R) x_R, \quad (12.13)$$

где сумма берется по всем элементам R группы H . Матрицу $D(R)$ можно найти из соотношения (12.12), полагая $x_R = 1$, а все остальные переменные — равными нулю. Покажем, что матрицы $D(R)$ удовлетворяют условию (12.6).

Пусть $y_{H_0}, y_{H_1}, \dots, y_{H_{h-1}}$ — второй набор независимых переменных. Определим h переменных $z_{H_0}, z_{H_1}, \dots, z_{H_{h-1}}$ с помощью соотношений

$$z_P = \sum_{RS=P} \omega_{R,S} x_R y_S, \quad (12.14)$$

где суммирование распространяется на все элементы R и S , для которых $RS=P$. Будем обозначать матрицу (12.12) Y или Z , если вместо переменных x_R взяты переменные y_R или z_R . Матричный элемент произведения XY , стоящий на месте (P, Q) , равен

$$(XY)_{P,Q} = \sum_R \omega_{PR^{-1}, R} \omega_{RQ^{-1}, Q} x_{PR^{-1}} y_{RQ^{-1}}. \quad (12.15)$$

Но из равенства (12.11) для элементов $(PR^{-1}), (RQ^{-1}), Q$, мы имеем

$$\omega_{PR^{-1}, R} \omega_{RQ^{-1}, Q} = \omega_{PR^{-1}, RQ^{-1}} \omega_{PQ^{-1}, Q},$$

вследствие чего формула (12.15) принимает вид

$$(XY)_{P,Q} = \omega_{PQ^{-1}, Q} \sum_R \omega_{PR^{-1}, RQ^{-1}} x_{PR^{-1}} y_{RQ^{-1}}. \quad (12.16)$$

Сравнивая сумму в формуле (12.16) с суммой, стоящей в равенстве (12.14), мы видим, что первая сумма равна $z_{PQ^{-1}}$, так что

$$(XY)_{P,Q} = \omega_{PQ^{-1}, Q} z_{PQ^{-1}} = Z_{P,Q}, \quad (12.17)$$

или же

$$XY = Z. \quad (12.17a)$$

Подставляя вместо X, Y и Z их выражения (12.13) и (12.14), получаем

$$\sum_{R,S} D(R) D(S) x_R y_S = \sum_T D(T) z_T = \sum_{R,S} \omega_{R,S} D(RS) x_R y_S. \quad (12.18)$$

Приравняв коэффициенты при произведениях независимых переменных $x_R y_S$, найдем, что матрицы $D(R)$ и $D(S)$ порядка h удовлетворяют соотношению

$$D(R)D(S) = \omega_{R,S} D(RS). \quad (12.19)$$

Из (12.12) и (12.13) следует, что матрица $D(R)$ содержит только один ненулевой элемент в каждой строке и каждом столбце и поэтому является неособенной матрицей. Итак, матрицы $D(R)$, образованные с помощью соотношений (12.12) и (12.13), определяют представление, принадлежащее данной системе множителей $\omega_{A,B}$. Таким образом, мы показали, что необходимое и достаточное условие существования представлений, принадлежащих некоторой системе множителей $\omega_{A,B}$, состоит в том, чтобы h^2 чисел $\omega_{A,B}$ удовлетворяли h^3 уравнениям (12.11).

Уравнения (12.11) имеют бесконечное множество решений. Если $\omega_{A,B}$ есть решение, а $c_{H_0}, c_{H_1}, \dots, c_{H_{h-1}}$ — любые отличные от нуля константы, то

$$\omega'_{A,B} = \frac{c_A c_B}{c_{AB}} \omega_{A,B} \quad (12.20)$$

есть также решение уравнений (12.11). Решения $\omega_{A,B}$ и $\omega'_{A,B}$, для которых можно найти константы c так, чтобы выполнялось равенство (12.20), называются *ассоциированными*, или *эквивалентными*, системами множителей. Если мы найдем представление $D(A)$, принадлежащее системе множителей $\omega_{A,B}$, то матрицы

$$D'(A) = c_A D(A) \quad (12.21)$$

будут удовлетворять соотношению

$$\begin{aligned} D'(A)D'(B) &= c_A c_B \omega_{A,B} D(AB) = \\ &= \frac{c_A c_B}{c_{AB}} \omega_{A,B} D'(AB) = \omega'_{A,B} D'(AB). \end{aligned} \quad (12.22)$$

Таким образом, если две системы множителей эквивалентны, то представления, принадлежащие одной из них, определяются непосредственно из представлений, принадлежащих другой, с помощью соотношения (12.20). Говорят, что представления, принадлежащие неэквивалентным системам множителей, являются представлениями *различного типа*.

Разобьем теперь все решения уравнений (12.11) на *классы* эквивалентных систем множителей. Число таких классов *конечно*. Взяв от правой и левой частей равенства (12.19) определители и положив

$$\det D(R) = d_R,$$

получим

$$(\omega_{R,S})^h = \frac{d_R d_S}{d_{RS}}. \quad (12.23)$$

Если константы c_A в равенстве (12.20) выбрать так, чтобы $c_A = d_A^{-1/h}$ (т. е. чтобы константа c_A была бы одним из h решений уравнения $c_A^{-h} = d_A$), то из системы множителей $\omega_{R,S}$ можно получить эквивалентную систему

$$\omega'_{R,S} = \frac{c_R c_S}{c_{RS}} \omega_{R,S},$$

для которой, согласно (12.23),

$$(\omega'_{R,S})^h = 1. \quad (12.24)$$

Таким образом, класс эквивалентных систем множителей должен содержать систему множителей, у которой h^2 величин $\omega_{A,B}$ являются корнями h -й степени из единицы. Поэтому число классов не может превышать числа h^2 , из чего следует, что число классов конечно.

Обозначим m классов через $K_0, K_1, \dots, K_{m-1}$, причем K_0 — класс, содержащий систему множителей $\omega_{A,B} \equiv 1$. Если системы множителей $\omega_{A,B}^{(\lambda)}$ и $\omega_{A,B}^{(\mu)}$ являются решениями уравнений (12.11) и принадлежат классам K_λ и K_μ , то их произведения $\omega_{A,B}^{(\lambda)} \cdot \omega_{A,B}^{(\mu)}$ также будут удовлетворять (12.11). Класс K_ν , к которому принадлежит это новое решение, не зависит от конкретного выбора решений $\omega_{A,B}^{(\lambda)}$ и $\omega_{A,B}^{(\mu)}$ в классах K_λ и K_μ , а определяется самими классами. Это обстоятельство мы записываем в виде

$$K_\lambda K_\mu = K_\nu$$

и замечаем, что

$$K_\mu K_\lambda = K_\lambda K_\mu = K_\nu.$$

Тем самым мы определили умножение классов, причем оно оказалось коммутативным. Кроме того, легко видеть, что если

$$K_\alpha K_\beta = K_\alpha K_\gamma,$$

то

$$K_\beta = K_\gamma.$$

Класс K_0 служит единичным элементом. Наконец, очевидно, что такое умножение классов ассоциативно, и поэтому классы $K_0, K_1, \dots, K_{m-1}$ образуют абелеву группу порядка m , которая называется *мультипликатором* группы H .

Шур развил общие методы нахождения мультипликатора и построения неприводимых проективных представлений обширных клас-

сов конечных групп. Доказательство Шура слишком длинно, чтобы его можно было привести здесь. Вместо этого мы проиллюстрируем его метод в некоторых простых случаях.

§ 2. Примеры проективных представлений конечных групп

Циклическую группу, порожденную элементом A порядка n ,

$$A^0 = E, A, A^2, \dots, A^{n-1},$$

можно задать с помощью определяющего отношения

$$A^n = E. \quad (12.25)$$

Для проективного представления матрица $D(A)$ должна удовлетворять условию

$$[D(A)]^n = \omega 1. \quad (12.26)$$

Если вместо матрицы $D(A)$ взять матрицу

$$D'(A) = \omega^{-1/n} D(A),$$

мы получим векторное представление

$$D'(A^n) = [D'(A)]^n.$$

Таким образом, в случае циклических групп мультипликатор состоит из единичного элемента K_0 , и все проективные представления эквивалентны обычным векторным представлениям. Все неприводимые представления одномерны.

Пусть абелева группа H есть прямое произведение двух циклических групп, порожденных элементами A порядка n и B порядка n' соответственно. Определяющие отношения, характеризующие группу, имеют вид

$$A^n = E, \quad B^{n'} = E, \quad AB = BA. \quad (12.27)$$

Матрицы представления будут удовлетворять равенствам

$$[D(A)]^n = a1, \quad [D(B)]^{n'} = b1, \quad D(A)D(B) = cD(B)D(A), \quad (12.28)$$

с константами a, b, c . Константы a и b можно включить в матрицы $D(A)$ и $D(B)$. Тогда у нас останется только последняя константа в равенствах (12.28) — константа c . Так как матрицы $D(A)$ и $D(B)$ входят в обе части последнего из уравнений (12.28), то константа c не может измениться при изменении этих матриц. Однако мы должны найти, какие ограничения накладывают на константу c условия (12.28). Умножив последнее уравнение справа на $D(B)$, получим

$$D(A)[D(B)]^2 = cD(B)[D(A)D(B)] = c^2[D(B)]^2D(A).$$

Повторяя этот процесс еще раз, находим

$$D(A)[D(B)]^3 = c^3 [D(B)]^3 D(A)$$

и, наконец,

$$D(A)[D(B)]^{n'} = c^{n'} [D(B)]^{n'} D(A),$$

или

$$c^{n'} = 1. \quad (12.29)$$

Точно так же, умножая повторно слева на $D(A)$, будем иметь

$$c^n = 1. \quad (12.29a)$$

Таким образом, константа c должна быть одновременно и корнем n -й степени из единицы и корнем n' -й степени из единицы. Если d — наибольший общий делитель чисел n и n' , то она должна удовлетворять соотношению

$$c^d = 1. \quad (12.29b)$$

Если числа n и n' взаимно простые, то $d = 1$, а в силу этого и $c = 1$. В этом случае все представления эквивалентны векторному представлению и все неприводимые представления одномерны. Так, например, происходит в случае, когда $n = 3$, а $n' = 2$.

Если $n = n' = 2$, мы получаем четверную группу Клейна

$$A^2 = E, \quad B^2 = E, \quad C = AB = BA. \quad (12.30)$$

Приведенное выше рассуждение показывает, что $c^2 = 1$, $c = \pm 1$. При $c = +1$ операторы удовлетворяют соотношениям

$$[D(A)]^2 = [D(B)]^2 = 1, \quad D(A)D(B) = D(B)D(A), \quad (12.31)$$

и мы получаем обычные одномерные неприводимые представления. Если же $c = -1$, имеем

$$[D(A)]^2 = [D(B)]^2 = 1, \quad D(A)D(B) = -D(B)D(A). \quad (12.32)$$

Если выберем

$$D(C) = iD(A)D(B),$$

то

$$\begin{aligned} [D(C)]^2 &= -[D(A)D(B)][D(A)D(B)] = \\ &= [D(A)D(B)][D(B)D(A)] = 1. \end{aligned}$$

Квадраты матриц $D(A)$, $D(B)$ и $D(C)$ равны единичной матрице, сами матрицы антикоммутируют друг с другом. Неприводимое представление задается матрицами Паули.

Задача. Докажите, что размерность неприводимого представления в случае (12.32) равна двум.

Группы диэдра D_n порождаются двумя элементами A и S , удовлетворяющими соотношениям

$$A^n = E, \quad S^2 = E, \quad SAS = A^{-1}. \quad (12.33)$$

Обозначим матрицы представления, соответствующие элементам A и S , через B и T . Эти матрицы удовлетворяют соотношениям

$$B^n = b1, \quad T^2 = t1, \quad TBT = cB^{-1}. \quad (12.34)$$

Константы b и t можно включить в матрицы B и T ($B' = b^{-1/n}B$, $T' = t^{-1/2}T$). После этого наши уравнения примут вид

$$B^n = 1, \quad T^2 = 1, \quad TBT = cB^{-1}. \quad (12.34a)$$

Возводя последнее из уравнения (12.34a) в n -ю степень и пользуясь первыми двумя, находим, что $c^n = 1$, т. е. константа c должна быть корнем n -й степени из единицы. Пусть $c = \varepsilon^m$, $\varepsilon = \exp(2\pi i/n)$. Если матрицу B умножить на $\varepsilon^{m'}$, то первые два уравнения (12.34a) останутся верными, а последнее заменится на следующее:

$$TBT = \varepsilon^{m-2m'}B^{-1}.$$

Если n нечетно, то m' всегда можно подобрать так, чтобы $m - 2m' = 0$ или $m - 2m' = n$. Тогда

$$TBT^{-1} = B,$$

и мы получим только обычные векторные представления. Когда же n четно, то мы можем вообще исключить c , если m четно, или заменить c на ε , если m нечетно. Таким образом, при четном n имеется два класса K_0 и K_1 . В классе K_0 константа $c = 1$, и соотношения между операторами представлений имеют вид

$$B^n = 1, \quad T^2 = 1, \quad TBT = B^{-1}. \quad (12.35)$$

Мы получаем обычные неприводимые векторные представления. В случае же класса K_1 константа $c = \varepsilon$, и соотношения между операторами представлений имеют вид

$$B^n = 1, \quad T^2 = 1, \quad TBT = \varepsilon B^{-1} \quad (n - \text{четное}). \quad (12.36)$$

При $n = 2$ мы получаем четверную группу, уже рассмотренную нами выше. Легко показать, что неприводимые представления (12.36) двумерны.

Задача. Покажите, что неэквивалентные неприводимые представления (12.36) имеют вид

$$B = \begin{bmatrix} \varepsilon^r & 0 \\ 0 & \varepsilon^{1-r} \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (12.37)$$

где $r = 1, 2, \dots, n/2$.

Симметрическая группа S_n порождается $(n-1)$ транспозициями

$$T_1 = (12), \quad T_2 = (23), \quad \dots, \quad T_{n-1} = (n-1, n),$$

которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} T_l^2 &= E, \quad (T_j T_{j+1})^3 = E, \quad T_r T_s = T_s T_r, \\ l &= 1, \dots, n-1, \\ j &= 1, \dots, n-2, \\ r &= 1, 2, \dots, n-3, \\ s &= r+2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (12.38)$$

Наоборот, можно показать, что абстрактная группа, определяемая соотношениями (12.38), изоморфна группе S_n .

Предположим, что у нас имеется некоторое проективное представление группы S_n , в котором элементам T_l сопоставлены матрицы A_l . Соотношения между операторами представления, соответствующие (12.38), запишутся в виде

$$A_l^2 = a_l 1, \quad (12.39)$$

$$(A_j A_{j+1})^3 = b_j 1, \quad (12.39a)$$

$$A_r A_s = c_{rs} A_s A_r, \quad (12.39b)$$

где a_l, b_j, c_{rs} — константы, отличные от нуля. Константы c_{rs} появляются только при $n \geq 4$ и не изменяются при умножении матриц A_r на число [это видно из соотношений (12.39b)]. Таким образом, константы c_{rs} определяются дробно-линейными преобразованиями.

Из (12.39b) мы получаем

$$A_r A_s A_r^{-1} = c_{rs} A_s.$$

Возводя в квадрат и пользуясь (12.39), находим

$$c_{rs}^2 = 1. \quad (12.40)$$

Индексы $r, r+1, s, s+1$, которые встречаются в перестановках T_r и T_s из равенств (12.38), все различны. Если взять другую пару перестановок $T_{r'}, T_{s'}$, у которых индексы $r', r'+1, s', s'+1$ все различны, то найдется перестановка T , переводящая индексы $r, r+1, s, s+1$ в индексы $r', r'+1, s', s'+1$, так что

$$T T_r T^{-1} = T_{r'}, \quad T T_s T^{-1} = T_{s'}. \quad (12.41)$$

Если в представлении перестановке T сопоставлен оператор A , то соответствующие соотношения для операторов представления имеют вид

$$A A_r A^{-1} = c A_{r'}, \quad A A_s A^{-1} = d A_{s'}, \quad (12.41a)$$

где $\dot{c}$ и d — константы, отличные от нуля. Из соотношения (12.396) следует

$$AA_rA^{-1}AA_sA^{-1} = c_{rs}AA_sA^{-1}AA_rA^{-1}.$$

Пользуясь равенствами (12.41a), получаем

$$cdA_r'A_s' = cd c_{rs}A_s'A_r', \quad \text{или} \quad A_r'A_s' = c_{rs}A_s'A_r'.$$

Сравнивая с (12.396), т. е. с равенством

$$A_r'A_s' = c_{r's'}A_s'A_r',$$

находим

$$c_{rs} = c_{r's'}.$$

Таким образом, согласно соотношению (12.40), все константы c_{rs} одинаковы и равны ± 1 . Полагая $j = \pm 1$, имеем $c_{rs} = j$ для всех r и s .

Из (12.39a) имеем

$$A_j A_{j+1} A_j = b_j A_{j+1}^{-1} A_j^{-1} A_{j+1}^{-1}.$$

Возводя в квадрат это равенство, получаем

$$\begin{aligned} A_j A_{j+1} A_j^2 A_{j+1} A_j &= b_j^2 A_{j+1}^{-1} A_j^{-1} A_{j+1}^{-2} A_j^{-1} A_{j+1}^{-1}, \\ a_j^2 a_{j+1} &= \frac{b_j^2}{a_j a_{j+1}^2}, \\ b_j^2 &= a_j^3 a_{j+1}^3. \end{aligned} \quad (12.42)$$

Поскольку матрицы A_i можно умножать на произвольные константы, константы a_i в (12.39) можно выбирать произвольным образом. Мы произведем выбор этих констант двумя различными, но эквивалентными способами.

Во-первых, положим

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = j. \quad (12.43)$$

Из (12.42) следует, что $b_j = \pm 1$. Матрицы $B_1, \dots, B_{n-1}$ определим с помощью выражений

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = j b_1 A_2, \quad B_3 = b_1 b_2 A_3, \quad B_4 = j b_1 b_2 b_3 A_4, \dots \quad (12.44)$$

и обнаружим, что они удовлетворяют соотношениям

$$B_j^2 = j1, \quad (B_j B_{j+1})^3 = j1, \quad B_r B_s = j B_s B_r. \quad (12.45)$$

Во-вторых, положим

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 1 \quad (12.43a)$$

и введем матрицы $C_1, \dots, C_{n-1}$:

$$C_1 = A_1, \quad C_2 = b_1 A_2, \quad C_3 = b_1 b_2 A_3, \quad C_4 = b_1 b_2 b_3 A_4, \dots, \quad (12.44a)$$

которые удовлетворяют соотношениям

$$C_i^2 = 1, \quad (C_j C_{j+1})^3 = 1, \quad C_r C_s = j C_s C_r. \quad (12.45a)$$

При $j = +1$ обе системы сводятся к системе (12.39), и мы получаем класс K_0 векторных представлений группы перестановок. При $j = -1$ мы получаем класс K_1 проективных представлений со следующими соотношениями между операторами представления:

$$B_i^2 = -1, \quad (B_j B_{j+1})^3 = -1, \quad B_r B_s = -B_s B_r, \quad (12.46)$$

или

$$C_i^2 = 1, \quad (C_j C_{j+1})^3 = 1, \quad C_r C_s = -C_s C_r. \quad (12.46a)$$

Две последние системы соотношений взаимозаменяемы. Если все матрицы B_i умножить на $\sqrt{-1}$, то получившиеся при этом матрицы будут удовлетворять соотношениям (12.46a).

При $n < 4$ константы c_{rs} в соотношения (12.38) не входят. В силу этого при $n < 4$ симметрическая группа имеет лишь обычные неприводимые векторные представления, которые мы нашли в гл. 7. При $n \geq 4$ существуют дополнительные неприводимые представления, операторы которых удовлетворяют соотношениям (12.46). Шур показал, что при $n \geq 4$ число таких неэквивалентных неприводимых представлений второго типа равно числу разбиений числа n на неравные целые числа:

$$n = v_1 + v_2 + \dots + v_m \quad (v_1 > v_2 > \dots > v_m > 0). \quad (12.47)$$

Разбиению (12.47) соответствует неприводимое представление размерности

$$f_{v_1, \dots, v_m} = 2^{[(n-m)/2]} \frac{n!}{v_1! v_2! \dots v_m!} \prod_{\alpha < \beta} \frac{v_\alpha - v_\beta}{v_\alpha + v_\beta}, \quad (12.48)$$

где $[(n-m)/2]$ означает наибольшее из целых чисел, не превышающих $(n-m)/2$ [целую часть числа $(n-m)/2$]. При $n = 4$ имеем два новых неприводимых представления размерности $f_4 = 2$ и $f_{3,1} = 4$. При $n = 4$ соотношения (12.46a) записываются в виде

$$C_1^2 = C_2^2 = C_3^2 = 1, \quad (C_1 C_2)^3 = (C_2 C_3)^3 = 1, \quad C_1 C_3 = -C_3 C_1. \quad (12.49)$$

Представление размерности 2 получится, если положить

$$C_1 = \sigma_x, \quad C_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_x, \quad C_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_z - \sqrt{\frac{1}{3}} \sigma_y, \quad (12.50)$$

где

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

-- матрицы Паули.

За полной теорией мы отсылаем читателя к третьей статье Шура, содержащей много замечательных результатов, позднее переоткрытых заново независимо от него.

Задача. Предположив при $n = 4$ существование неприводимого двумерного представления (12.46а), докажите, что оно имеет вид (12.50).

§ 3. Проективные представления групп Ли

Состояния квантовомеханической системы описываются единичными векторами ψ в гильбертовом пространстве. [Для гильбертова пространства задано скалярное произведение (φ, ψ) , причем это произведение положительно определено, т. е. $\|\varphi\|^2 = (\varphi, \varphi) > 0$ для любого ненулевого вектора в таком пространстве. В частности, $\|\psi\|^2 = 1$ для единичных векторов ψ .] Каждому единичному вектору ψ соответствует единственное физическое состояние системы. Обратное неверно. Данное физическое состояние описывается любым вектором из набора Ψ единичных векторов $\varepsilon\psi$, где ε — комплексное число и $|\varepsilon| = 1$. Взаимнооднозначное соответствие существует между физическими состояниями и *лучами* Ψ . Любой вектор, лежащий на луче Ψ , может служить представителем этого луча.

Вероятность перехода между физическими состояниями, соответствующими лучам Φ и Ψ , задается величиной $|(\varphi, \psi)|^2$, где φ — любой вектор, принадлежащий лучу Φ , а ψ — любой вектор, принадлежащий лучу Ψ . Поэтому мы можем задать скалярное произведение лучей, которое не будет зависеть от конкретного выбора векторов φ и ψ :

$$(\Phi, \Psi) = |(\varphi, \psi)|; \quad (12.51)$$

вектор φ принадлежит Φ , вектор ψ принадлежит Ψ .

Каждому преобразованию, входящему в группу симметрии физической системы, соответствует некоторое взаимно однозначное отображение множества состояний этой системы на себя. Каждый луч Ψ отображается в какой-то луч Ψ' :

$$\Psi \rightarrow \Psi'. \quad (12.52)$$

Поскольку новое описание должно приводить к тем же результатам наблюдений, что и первоначальное, при таком отображении сохраняются вероятности переходов

$$|(\Phi', \Psi')|^2 = |(\Phi, \Psi)|^2. \quad (12.53)$$

Замечательный результат, впервые полученный Вигнером, состоит в том, что соответствие между лучами (12.52) всегда можно заменить некоторым соответствием между векторами: на лучах Ψ и Ψ' можно

выбрать представляющие их векторы ψ и ψ' так, чтобы отображение, переводящее вектор ψ в ψ' ,

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi, \quad (12.54)$$

удовлетворяло условию

$$U(\varphi + \psi) = U\varphi + U\psi, \quad (12.55)$$

и, кроме того, либо условию

$$а) \quad (U\varphi, U\psi) = (\varphi, \psi), \quad (12.56a)$$

либо условию

$$б) \quad (U\varphi, U\psi) = (\psi, \varphi). \quad (12.56б)$$

Иначе говоря, отображение лучей можно заменить аддитивной операцией, определенной на векторах гильбертова пространства. Здесь могут представиться два взаимоисключающих случая. Оператор U является либо „а“ линейным и унитарным, либо „б“ — линейным и антиунитарным. Причин для выбора *a priori* одной из двух альтернатив „а“ или „б“ не существует.

Оператор U пока еще не определен однозначно, поскольку умножение на произвольный фазовый множитель ε не изменяет предыдущих результатов. Поэтому оператор U можно рассматривать как представителя луча операторов εU . Такого представителя U мы можем выбрать любым удобным для нас способом.

Если r и s — два элемента группы симметрии G квантовомеханической системы, то каждому из них мы ставим в соответствие некоторый оператор $U(r)$ и $U(s)$. Произведению этих элементов rs , которое также принадлежит группе G , будет соответствовать оператор $U(rs)$. Однако те требования, которые были наложены выше, приводят лишь к соотношению

$$U(r)U(s) = \omega(r, s)U(rs), \quad (12.57)$$

где $|\omega| = 1$ и фазовый множитель ω зависит от элементов r и s группы G . Соотношение (12.57) совпадает с (12.6), которое определяло проективные представления конечных групп.

Мы хотим теперь рассмотреть непрерывные группы и, в частности, группы Ли. В гл. 8 мы показали, что пространство параметров группы Ли в общем случае состоит из нескольких несвязных частей, одна из которых содержит единичный элемент e группы G . Можно доказать, что для элементов r группы G , принадлежащих той же части, что и единичный элемент e (т. е. для таких элементов, которых можно достичь, идя по непрерывному пути из e), имеет место лишь альтернатива „а“ в равенстве (12.56), в силу чего оператор $U(r)$ — унитарный. Элемент r , принадлежащий любой окрестности единицы e , можно

записать в виде квадрата некоторого элемента s , т. е. $r = s^2$. Из (12.57) следует

$$U(r) = \frac{1}{\omega(s, s)} U(s) U(s). \quad (12.58)$$

Поскольку квадрат унитарного или антиунитарного оператора есть унитарный оператор, мы заключаем, что оператор $U(r)$ является унитарным для любого элемента r из окрестности единицы. Наконец, всякий элемент r , принадлежащий той же части пространства параметров, что и единичный элемент, можно представить в виде произведения $r_1 r_2 \dots r_n$ элементов, принадлежащих некоторой заданной окрестности единицы. Поскольку каждый из операторов $U(r_i)$ унитарный и произведение конечного числа унитарных операторов унитарно, мы заключаем, что $U(r)$ есть унитарный оператор.

Преобразования, входящие в часть пространства параметров, содержащую единичный элемент, образуют подгруппу. Наше рассмотрение будет ограничено такой подгруппой G' . Для любых элементов r и s , принадлежащих G' , операторы $U(r)$ и $U(s)$ унитарны и удовлетворяют равенствам (12.55) и (12.56а). До сих пор мы не накладывали на оператор $U(r)$ никаких условий непрерывности, когда элемент r пробегал группу G . Можно показать, что в окрестности единицы e операторы представления $U(r)$ можно выбрать так, чтобы они были непрерывными, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ и любого вектора ψ существовала некоторая окрестность $\mathfrak{N}$ элемента r такая, что

$$\|U(r)\psi - U(s)\psi\| < \varepsilon \quad (12.59)$$

для элементов s , принадлежащих $\mathfrak{N}$. Из этого результата следует, что множитель $\omega(r, s)$ в соотношении (12.57) представляет собой непрерывную функцию элементов r и s . Для доказательства непрерывности $\omega(r, s)$ следует воспользоваться тождеством

$$\begin{aligned} \omega(r, s) [U(rs) - U(r's')] \psi + U(r') [U(s') - U(s)] \psi + \\ + [U(r') - U(r)] U(s) \psi = [\omega(r', s') - \omega(r, s)] U(r's') \psi. \end{aligned} \quad (12.60)$$

Мы заключаем, что элемент r группы G' в окрестности единицы можно представить непрерывными унитарными операторами $U(r)$ и что множитель $\omega(r, s)$ в (12.57) есть непрерывная функция. Функция $\omega(r, s)$ называется *локальным множителем*. Ее можно записать в виде

$$\omega(r, s) = e^{i\xi(r, s)}, \quad (12.61)$$

где ξ — вещественная непрерывная функция от r и s , которую мы назовем *локальным показателем*.

Операторы $U(r)$ можно умножать на любую функцию $\varphi(r)$, которая непрерывна и имеет модуль, равный единице. Операторы

$$U'(r) = \varphi(r) U(r) = e^{i\xi(r)} \cdot U(r), \quad (12.62)$$

где $\xi(r)$ — вещественная непрерывная функция, будут также непрерывными. Если соотношение (12.62) подставить в (12.57), то получим

$$U'(r)U'(s) = \varphi(r)\varphi(s)U(r)U(s) = \varphi(r)\varphi(s)\omega(r, s)U(rs) = \\ = \frac{\varphi(r)\varphi(s)}{\varphi(rs)}\omega(r, s)U'(rs),$$

так что

$$U'(r)U'(s) = \omega'(r, s)U'(rs), \quad (12.63)$$

$$\omega'(r, s) = \frac{\varphi(r)\varphi(s)}{\varphi(rs)}\omega(r, s). \quad (12.64)$$

Эта процедура вполне аналогична соответствующей процедуре для конечных групп. [Ср. с равенствами (12.21) и (12.22).] Множители $\omega(r, s)$ и $\omega'(r, s)$ являются *эквивалентными локальными множителями*. Локальные показатели $\xi(r, s)$ и $\xi'(r, s)$ связаны между собой соотношением

$$\xi'(r, s) = \xi(r, s) + \xi(r) + \xi(s) - \xi(rs). \quad (12.65)$$

Выберем оператор $U(e)$ так, чтобы он был тождественным оператором. Если в соотношении (12.57) положить $r = s = e$, то

$$U(e)U(e) = \omega(e, e)U(e),$$

откуда

$$\omega(e, e) = 1 \quad \text{и} \quad \xi(e, e) = 0.$$

Если в соотношении (12.57) положить $s = e$, то

$$U(r)U(e) = \omega(r, e)U(r),$$

откуда

$$\omega(r, e) = 1, \quad \xi(r, e) = 0. \quad (12.66)$$

Точно так же

$$\omega(e, r) = 1, \quad \xi(e, r) = 0. \quad (12.66a)$$

Пользуясь соотношением (12.57) и ассоциативным законом

$$(rs)t = r(st),$$

находим

$$\omega(r, s)\omega(rs, t) = \omega(r, st)\omega(s, t), \quad (12.67)$$

или же

$$\xi(r, s) + \xi(rs, t) = \xi(r, st) + \xi(s, t). \quad (12.67a)$$

Если гильбертово пространство представления (12.57) конечномерно, то операторы $U(r)$ будут унитарными матрицами $n \times n$. Если ввести обозначение

$$\det U(r) = D(r),$$

то определитель $D(r)$ будет непрерывным и

$$|D(r)| = 1.$$

Взяв определитель от обеих частей равенства (12.57), найдем

$$D(r) D(s) = e^{in\xi(r, s)} D(rs), \quad (12.68)$$

где n — размерность представления. Если положить

$$U'(r) = \frac{U(r)}{[D(r)]^{1/n}} \quad (12.69)$$

и разделить соотношение (12.57) на (12.68), то окажется

$$U'(r) U'(s) = U'(rs). \quad (12.70)$$

Таким образом, конечномерные проективные представления *всегда* эквивалентны векторным представлениям. При выводе этого результата мы исходили из предположения о том, что элементы r и s находятся вблизи единицы e . В выражении (12.69) мы должны выбрать какой-то вполне определенный корень n -й степени из $D(r)$. Результат (12.70) остается верным, коль скоро мы продолжаем находиться в окрестности единицы. Если пространство параметров группы односвязно, то любую замкнутую кривую в этом пространстве можно стянуть в точку. В этом случае корень $[D(r)]^{1/n}$ может быть задан однозначным образом вдоль любого пути. Если элемент r описывает замкнутый путь, то $[D(r)]^{1/n}$ возвращается к своему первоначальному значению. Для трехмерной группы вращений это рассуждение не проходит. Ее пространство параметров двусвязно, и в случае четного n мы вместо (12.70) получаем следующий результат:

$$U'(r) U'(s) = \pm U'(rs). \quad (12.70a)$$

Два локальных показателя ξ и ξ' , которые удовлетворяют соотношению (12.65), называются *эквивалентными*

$$\xi \equiv \xi'. \quad (12.71)$$

Если $\xi \equiv \xi'$, то $\xi' \equiv \xi$. Если $\xi \equiv \xi'$ и $\xi' \equiv \xi''$, так что

$$\xi'(r, s) = \xi(r, s) + \zeta_1(r) + \zeta_1(s) - \zeta_1(rs),$$

$$\xi''(r, s) = \xi'(r, s) + \zeta_2(r) + \zeta_2(s) - \zeta_2(rs),$$

то

$$\begin{aligned} \xi''(r, s) &= \xi(r, s) + \zeta_1(r) + \zeta_2(r) + \zeta_1(s) + \zeta_2(s) - \zeta_1(rs) - \zeta_2(rs) = \\ &= \xi(r, s) + \zeta(r) + \zeta(s) - \zeta(rs), \end{aligned}$$

где

$$\zeta(r) = \zeta_1(r) + \zeta_2(r),$$

следовательно,

$$\xi \equiv \xi''.$$

Таким образом мы получаем разбиение локальных показателей на классы эквивалентности.

Если ξ_1 и ξ_2 — локальные показатели, то и величина $\xi = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2$ с вещественными коэффициентами α и β есть также локальный показатель. Кроме того, очевидно, что класс, которому принадлежит локальный показатель ξ , не зависит от конкретного выбора ξ_1 и ξ_2 из тех классов, которым принадлежат эти локальные показатели. Таким образом, неэквивалентные классы локальных показателей образуют линейное векторное пространство с вещественными коэффициентами. Размерность этого векторного пространства определяет число существенно различных типов проективных представлений. Если его размерность равна нулю, то все локальные показатели эквивалентны локальному показателю $\xi = 0$, в силу чего все проективные представления сводятся к векторным представлениям.

Рассмотрим далее однопараметрическую подгруппу группы Ли G . Из § 11 гл. 8 мы знаем, что можно ввести канонический параметр θ так, чтобы

$$r(0) = e, \quad r(\theta_1)r(\theta_2) = r(\theta_1 + \theta_2). \quad (12.72)$$

Унитарный оператор $U(r)$, соответствующий элементу $r = r(\theta)$, обозначим через $U(\theta)$. Инфинитезимальным эрмитовым оператором u , порождающим оператор $U(\theta)$, является оператор

$$iu = \left. \frac{dU(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0}. \quad (12.73)$$

Если элементы r и s в соотношении (12.57) соответствуют значениям параметра θ_1 и θ_2 , то (12.57) можно записать в виде

$$U(\theta_1)U(\theta_2) = \omega(\theta_1, \theta_2)U(\theta_1 + \theta_2). \quad (12.74)$$

Продифференцировав по θ_1 и положив $\theta_1 = 0$, получим

$$\begin{aligned} iuU(\theta_2) &= \left. \frac{d\omega(\theta_1, \theta_2)}{d\theta_1} \right|_{\theta_1=0} \cdot U(\theta_2) + \omega(0, \theta_2) \frac{dU(\theta_2)}{d\theta_2} = \\ &= f(\theta_2)U(\theta_2) + \frac{dU(\theta_2)}{d\theta_2}. \end{aligned}$$

Из (12.66а) следует

$$\omega(0, \theta_2) = 1, \quad \omega(\theta_1, \theta_2) = e^{i\xi(\theta_1, \theta_2)},$$

так что

$$\frac{d\omega}{d\theta_1} = i \frac{d\xi}{d\theta_1} \omega(\theta_1, \theta_2).$$

Полагая $\theta_1 = 0$, находим

$$f(\theta_2) = i \left. \frac{d\xi}{d\theta_1} \right|_{\theta_1=0}.$$

Таким образом, f есть чисто мнимая непрерывная функция от θ , причем $f(0) = 0$. Отбрасывая индекс у величины θ_2 и полагая $f = ig$, получаем следующее дифференциальное уравнение для $U(\theta)$:

$$\frac{dU}{d\theta} + igU = iuU. \quad (12.75)$$

Вводя унитарный оператор

$$U'(\theta) = \exp \left[-i \int_0^\theta g(\theta') d\theta' \right] \cdot U(\theta), \quad (12.76)$$

находим

$$\frac{dU'}{d\theta} = iuU'. \quad (12.77)$$

Интегрирование этого уравнения приводит к оператору

$$U'(\theta) = e^{iu\theta}, \quad (12.78)$$

удовлетворяющему соотношению

$$U'(\theta_1) U'(\theta_2) = U'(\theta_1 + \theta_2). \quad (12.79)$$

Таким образом, в случае однопараметрической подгруппы проективно представление всегда можно заменить эквивалентным ему векторным представлением. Этот результат аналогичен результату, полученному нами для циклических групп в § 1 настоящей главы.

Можно показать, что построение *канонических показателей* возможно, т. е. для любого показателя $\xi'(r, s)$ мы можем найти эквивалентный показатель $\xi(r, s)$, который будет равен нулю, если элементы r и s принадлежат одной и той же однопараметрической подгруппе.

Группа Ли с n параметрами порождается инфинитезимальными операторами своих n однопараметрических подгрупп. В гл. 8 мы показали, что n инфинитезимальных операторов X_i ($i = 1, \dots, n$) образуют базис алгебры Ли этой группы. Закон умножения для этой алгебры задается соотношениями

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k, \quad (12.80)$$

где вещественные числа c_{ij}^k являются структурными константами группы. Конечными преобразованиями однопараметрической подгруппы, порожденной оператором X_i , являются преобразования $\exp(\theta X_i)$. В гл. 8 мы показали, что представления группы G можно найти из представлений ее алгебры Ли путем интегрирования. Если в векторном представлении базисным элементам X_i соответствуют эрмитовы операторы D_i , то эти операторы удовлетворяют соотношениям коммутации

$$i[D_i, D_j] = c_{ij}^k D_k. \quad (12.81)$$

В этом случае операторами конечных преобразований будут унитарные операторы $\exp(i\theta D_i)$.

Действие фазовых множителей $\omega(r, s)$, входящих в проективные представления группы, будет проявляться в добавлении констант к соотношениям коммутации (12.81). Эрмитовы операторы D_i для унитарного проективного представления будут удовлетворять соотношениям

$$i[D_i, D_j] = c_{ij}^k D_k + \beta_{ij} \cdot 1, \quad (12.82)$$

где β_{ij} суть $n(n-1)/2$ вещественных констант. Из соотношения (12.82) мы видим, что $\beta_{ij} = -\beta_{ji}$. Если операторы D_i заменим операторами

$$D'_i = D_i + \alpha_i \cdot 1 \quad (\alpha_i \text{ вещественные}), \quad (12.83)$$

то операторы конечных преобразований $\exp(i\theta D_i)$ заменятся операторами

$$e^{i\theta(D_i + \alpha_i)} = e^{i\alpha_i\theta} \cdot e^{i\theta D_i},$$

т. е. умножатся на фазовые множители. Действие на соотношение (12.82) сдвига (12.83), приводящего к переходу от одного набора фазовых множителей для конечных преобразований к другому эквивалентному набору, сводится к замене этого соотношения соотношением

$$i[D'_i, D'_j] = c_{ij}^k D'_k + \beta'_{ij} \cdot 1, \quad (12.82a)$$

где

$$\beta'_{ij} = \beta_{ij} - \alpha_i c_{jk}^k. \quad (12.84)$$

Два набора констант β_{ij} и β'_{ij} , связанных между собой равенством (12.84), эквивалентны. Соответствующие им представления переходят друг в друга при преобразовании (12.83).

Константы β_{ij} в соотношении (12.82) в общем случае не являются независимыми. Если мы запишем тождество Якоби (8.57) для операторов D_i , D_j и D_k ,

$$[D_i, [D_j, D_k]] + [D_j, [D_k, D_i]] + [D_k, [D_i, D_j]] = 0, \quad (12.85)$$

и воспользуемся соотношениями коммутации (12.82), то получим условия

$$c_{ij}^k \beta_{lk} + c_{jk}^i \beta_{lk} + c_{ki}^j \beta_{jk} = 0. \quad (12.86)$$

Если наборы констант $\beta_{ij}^{(1)}$ и $\beta_{ij}^{(2)}$ удовлетворяют условиям (12.86), то константы

$$\beta_{ij} = \alpha_1 \beta_{ij}^{(1)} + \alpha_2 \beta_{ij}^{(2)} \quad (12.87)$$

также будут удовлетворять условиям (12.86). Таким образом, допустимые наборы констант β_{ij} образуют векторы в некотором веще-

ственном векторном пространстве размерности, меньшей или равной $n(n-1)/2$. Все проективные представления (12.82) будут эквивалентны векторным представлениям, если допустимые наборы констант β_{ij} эквивалентны нулевому вектору, т. е. в том случае, если размерность векторного пространства наборов констант β_{ij} равна нулю.

Рассмотрим сначала несколько простых примеров. Все структурные константы c_{ij}^k для n -параметрической абелевой группы равны нулю. Инфинитезимальные операторы удовлетворяют соотношениям

$$[X_i, X_j] = 0 \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (12.88)$$

Соответствующие соотношения (12.82) для операторов представления имеют вид

$$i[D_i, D_j] = \beta_{ij} \cdot 1. \quad (12.89)$$

Поскольку структурные константы обратились в нуль, равенство (12.86) не налагает никаких ограничений на константы β_{ij} . Размерность векторного пространства наборов констант β_{ij} равна $n(n-1)/2$. Любой вектор β_{ij} может входить в соотношение (12.89). Константы, отличающиеся от данной константы β_{ij} множителем, равным целому положительному числу, соответствуют эквивалентным представлениям, так как

$$i[mD_i, mD_j] = m^2 \beta_{ij} \cdot 1, \quad (12.90)$$

и эрмитов оператор mD_i будет задавать конечные преобразования

$$e^{im\theta D_i},$$

откуда следует, что представления отличаются лишь изменением масштаба по переменной θ . Векторным представлениям соответствует только нулевой вектор $\beta_{ij} = 0$.

Для группы вращений в случае трех измерений эрмитов оператор момента количества движения удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} i[J_x, J_y] &= J_z + \beta_z \cdot 1, & i[J_y, J_z] &= J_x + \beta_x \cdot 1, \\ i[J_z, J_x] &= J_y + \beta_y \cdot 1. \end{aligned} \quad (12.91)$$

Величины β эквивалентны нулю, так как преобразование (12.83)

$$J'_s = J_s + \beta_s \cdot 1$$

приводит соотношения (12.91) к виду

$$i[J'_x, J'_y] = J'_z, \quad i[J'_y, J'_z] = J'_x, \quad i[J'_z, J'_x] = J'_y. \quad (12.92)$$

Таким образом, мы получаем еще одно доказательство того, что все проективные представления трехмерной группы вращения эквивалентны векторным представлениям.

Вместо того чтобы рассматривать величины β_{ij} , мы можем ввести некоторую функцию, определенную для всех элементов алгебры Ли. Элементы алгебры Ли являются линейными комбинациями с вещественными коэффициентами базисных элементов X_i

$$a = a_m X_m, \quad b = b_m X_m, \quad (12.93)$$

а операторы представления, соответствующие этим элементам, имеют вид

$$A = a_m D_m, \quad B = b_m D_m. \quad (12.94)$$

Для элементов a и b соотношение (12.80) записывается в виде

$$[a, b] = c_{lm}^k a_l b_m X_k, \quad (12.95)$$

соотношение (12.82) приводит к равенствам

$$i[A, B] = c_{lm}^k a_l b_m D_k + \beta_{lm} a_l b_m \cdot 1 = c_{lm}^k a_l b_m D_k + F(a, b) \cdot 1, \quad (12.96)$$

где

$$F(a, b) = \beta_{lm} a_l b_m = -F(b, a). \quad (12.97)$$

В частности, если

$$a = X_i \quad \text{и} \quad b = X_j,$$

то

$$F(X_i, X_j) = \beta_{ij}. \quad (12.98)$$

Если операторы D_m заменить эквивалентными операторами

$$D'_m = D_m + \alpha_m \cdot 1,$$

то операторы A и B , определяемые (12.94), изменятся соответствующим образом. Равенство (12.96) будет иметь вид

$$\begin{aligned} i[A', B'] &= c_{lm}^k a_l b_m D'_k + [F(a, b) - \alpha_k c_{lm}^k a_l b_m] \cdot 1 = \\ &= c_{lm}^k a_l b_m D'_k + F'(a, b) \cdot 1, \end{aligned} \quad (12.99)$$

где

$$F'(a, b) = F(a, b) - \alpha_k c_{lm}^k a_l b_m. \quad (12.100)$$

Переход от одного представления к другому представлению, эквивалентному ему, описывается переходом от $F(a, b)$ к $F'(a, b)$, где α_k — произвольные вещественные константы. Если эти константы α_k можно выбрать так, чтобы $F'(a, b) = 0$ для всех a и b , то представление будет эквивалентно векторному представлению.

Выражение (12.100) можно упростить следующим образом. Рассмотрим линейную функцию Λ , определенную на алгебре Ли так, что

$$\Lambda(X_i) = \alpha_i. \quad (12.101)$$

Тогда

$$\Lambda(a) = \alpha_i a_i. \quad (12.102)$$

Воспользовавшись соотношениями коммутации (12.95), получим

$$\Lambda([a, b]) = \alpha_k c_{lm}^k a_l b_m. \quad (12.103)$$

Сравнивая с (12.100), имеем

$$F'(a, b) = F(a, b) - \Lambda([a, b]). \quad (12.104)$$

Таким образом, две системы показателей будут эквивалентны, если разность между соответствующими функциями $F'(a, b)$ и $F(a, b)$ есть линейная функция от коммутатора $[a, b]$.

Условия, налагаемые на функцию F , соответствующие условиям (12.86), мы найдем, записав тождество Якоби

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

и воспользовавшись соотношениями коммутации (12.96). Результат имеет вид

$$F(a, [b, c]) + F(b, [c, a]) + F(c, [a, b]) = 0. \quad (12.105)$$

§ 4. Проективные представления псевдо-ортогональных групп

Вещественные однородные линейные преобразования, которые оставляют инвариантной вещественную невырожденную квадратичную форму относительно n вещественных переменных x_i ($i = 1, \dots, n$),

$$F(x) = g_{ik} x_i x_k \quad (g_{ik} = g_{ki}), \quad (12.106)$$

называются *псевдо-ортогональными преобразованиями*. Подходящей заменой базиса форму F можно привести к главным осям:

$$F_p(x) = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^n x_i^2 = \varepsilon_i \delta_{ik} x_i x_k, \quad (12.107)$$

$$\varepsilon_i = +1 \quad \text{при} \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\varepsilon_i = -1 \quad \text{при} \quad i = p+1, \dots, n.$$

Группа псевдо-ортогональных преобразований W

$$x' = Wx, \quad x'_i = w_{ik} x_k \quad (i = 1, \dots, n), \quad (12.108)$$

оставляющих инвариантной форму F_p , обозначается G_n^p . Из (12.107) мы видим, что группы G_n^p и G_n^{n-p} являются одной и той же группой.

Если $p = n$, то форма положительно определена, и группа G_n^n есть ортогональная группа в n -мерном пространстве — группа O_n .

В случае $p \neq n$ мы получаем группы, аналогичные группе Лоренца (для которой $n = 4$, $p = 3$).

Преобразования группы G_n^p , которые можно получить из тождественного преобразования путем непрерывного изменения, образуют подгруппу $G_n'^p$, *собственных* псевдо-ортогональных преобразований. Преобразование W принадлежит подгруппе $G_n'^p$, если определитель этого преобразования равен 1 и если минор, содержащий p первых его строк и столбцов, положителен.

|| *Задача.* Докажите предыдущее утверждение.

Мы можем также рассматривать группы I_n^p *неоднородных псевдо-ортогональных преобразований*

$$x' = Wx + u, \quad x'_i = w_{ij}x_j + u_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (12.109)$$

где u — произвольный вещественный вектор (сдвиг). Если преобразование W оставляет инвариантной форму $F_p(x)$, задаваемую равенством (12.107), то преобразование (12.109) оставляет инвариантной форму $F_p(x - u)$, где x и u — произвольные векторы. Если мы ограничим преобразования W до группы $G_n'^p$, то группа I_n^p окажется суженной до своей собственной подгруппы $I_n'^p$.

Если после преобразования (12.109) выполняется еще одно преобразование

$$x'' = W'x' + u',$$

то результирующее преобразование имеет вид

$$x'' = W'(Wx + u) + u' = W'Wx + (u' + W'u).$$

Таким образом, если обозначить через (W, u) преобразование (12.109), то групповое умножение в группе I_n^p будет задано формулами

$$(W', u')(W, u) = (W'W, W'u + u'). \quad (12.110)$$

Этот закон комбинирования элементов группы удобно интерпретировать как матричное умножение матриц $(n+1)$ -го порядка: преобразованию (W, u) мы сопоставляем матрицу

$$\begin{bmatrix} W & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (12.111)$$

где последний столбец состоит из компонент вектора u , после которых следует 1. Элемент $(1, 0)$ является единичным элементом в группе I_n^p .

Задачи. 1. Проверьте закон группового умножения (12.110) для матриц (12.111).

2. Покажите, что преобразование, обратное преобразованию (W, u) , имеет вид $(W^{-1}, -W^{-1}u)$.

3. Покажите, что сдвиги $(1, u)$ образуют в группе I_n^p инвариантную подгруппу T_n и что фактор-группа

$$\frac{I_n^p}{T_n} \approx G_n^p.$$

Мы хотим построить алгебры Ли групп G_n^p и I_n^p . Наиболее просто это делается с помощью матриц (12.111) „Вращения“ в плоскости ij образуют полный набор однопараметрических подгрупп группы G_n^p . „Вращение“ $W^{(ij)}$ в плоскости ij есть некоторое преобразование, действующее на переменные x_i и x_j

$$W^{(ij)}: \begin{aligned} x'_i &= w_{ii}x_i + w_{ij}x_j, \\ x'_j &= w_{ji}x_i + w_{jj}x_j, \end{aligned} \quad (\text{суммирования нет!}), \quad (12.112)$$

$$\begin{aligned} x'_r &= x_r \quad \text{для } r \neq i, j, \\ \varepsilon_i x_i'^2 + \varepsilon_j x_j'^2 &= \varepsilon_i x_i^2 + \varepsilon_j x_j^2. \end{aligned} \quad (12.113)$$

Если

$$\varepsilon_i = \varepsilon_j = \pm 1,$$

то преобразование $W^{(ij)}$ есть вращение:

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i \cos \theta + x_j \sin \theta, \\ x'_j &= -x_i \sin \theta + x_j \cos \theta, \\ x'_r &= x_r \quad \text{для } r \neq i, j. \end{aligned} \quad (12.114)$$

Соответствующая матрица (12.111) имеет вид

$$\begin{bmatrix} W^{(ij)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (12.115)$$

где сама матрица $W^{(ij)}$ записывается так:

$$W^{(ij)} = \begin{bmatrix} & & & l & & j \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \vdots \\ l & & & \vdots & & \vdots \\ & \dots & \cos \theta & \dots & \sin \theta & \\ & & \vdots & & \vdots & \\ j & & \dots & -\sin \theta & \dots & \cos \theta \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (12.116)$$

Чтобы найти соответствующую инфинитезимальную матрицу, вычислим $dW^{(ij)}/d\theta$ при $\theta = 0$:

$$\text{Матрица } w^{(ij)} = \left. \frac{dW^{(ij)}}{d\theta} \right|_{\theta=0} \text{ имеет } \begin{cases} +1 \text{ на месте } (lj), \\ -1 \text{ на месте } (ji), \\ 0 \text{ на всех остальных местах.} \end{cases} \quad (12.117)$$

Если

$$\varepsilon_l = -\varepsilon_j,$$

то „вращение“ $W^{(ij)}$ представляет собой преобразование Лоренца:

$$\begin{aligned} x'_l &= x_l \operatorname{ch} \theta - x_j \operatorname{sh} \theta, \\ x'_j &= -x_l \operatorname{sh} \theta + x_j \operatorname{ch} \theta, \\ x'_r &= x_r \text{ при } r \neq l, j, \end{aligned} \quad (12.118)$$

и соответствующая инфинитезимальная матрица имеет -1 на месте (lj) и (ji) ; все остальные ее элементы равны нулю.

Оба случая можно охватить, если выбрать инфинитезимальные матрицы в виде

$$(w^{(ij)})_{kl} = -\varepsilon_l \delta_{il} \delta_{jk} + \varepsilon_j \delta_{jl} \delta_{ik} = -g_{il} \delta_{jk} + g_{jl} \delta_{ik}, \quad (12.119)$$

где

$$g_{il} = \varepsilon_l \delta_{il}, \quad g_{il} g_{lm} = \delta_{lm}, \quad g_{il} g_{il} = n. \quad (12.120)$$

Обозначим элемент алгебры Ли, отвечающий матрице $w^{(ij)}$, через a_{ij} . Пользуясь соответствующими матрицами (12.119), мы можем вычислить коммутатор $[a_{ij}, a_{kl}]$

$$\begin{aligned} [a_{ij}, a_{kl}] &= g_{jk} a_{il} - g_{lk} a_{jl} + g_{il} a_{jk} - g_{jl} a_{ik}, \\ a_{jl} &= -a_{ij} \quad (l, j, k, i = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (12.121)$$

Элемент $(i, n+1)$ инфинитезимальной матрицы сдвига вдоль оси i равен единице, все остальные элементы равны нулю:

$$(t^{(i)})_{kl} = \delta_{ik} \delta_{l, n+1}. \quad (12.122)$$

Обозначим соответствующий элемент алгебры Ли через b_i . Сдвиги коммутируют друг с другом, так что

$$[b_i, b_k] = 0 \quad \text{для всех } i \text{ и } k. \quad (12.123)$$

Пользуясь формулами (12.119) и (12.122), находим

$$[a_{ij}, b_k] = g_{jk} b_i - g_{ik} b_j. \quad (12.124)$$

Равенство (12.121) полностью описывает алгебру Ли группы G_n^n . Добавляя к этому равенству условия (12.123) и (12.124), мы получаем алгебру Ли группы I_n^p .

Умножив равенство (12.121) на g_{jk} и воспользовавшись (12.120), получим

$$g_{jk} [a_{ij}, a_{kl}] = (n-2) a_{il} \quad (12.125)$$

($g_{jk} a_{jk} = 0$ в силу того, что элементы g_{jk} симметричны, а a_{jk} антисимметричны). Аналогично, из (12.124) находим

$$g_{jk} [a_{ij}, b_k] = (n-1) b_i. \quad (12.126)$$

Рассмотрим сначала однородные группы G_n^n . При $n=2$ алгебра Ли имеет единственный элемент a_{12} . Группа циклическая, и все ее представления являются векторными представлениями. При $n > 2$ воспользуемся соотношением (12.125), чтобы преобразовать функцию F , определенную формулой (12.97):

$$\begin{aligned} (n-2) F(a_{ij}, a_{kl}) &= F([g_{rh} a_{ir}, a_{hj}], a_{kl}) = \\ &= F([g_{rh} a_{ir}, a_{kl}], a_{hj}) - F([a_{hj}, a_{kl}], g_{rh} a_{ir}) = \\ &= F(g_{rh} a_{jh}, [a_{ir}, a_{kl}]) + F(g_{rh} a_{ir}, [a_{hj}, a_{kl}]) \end{aligned}$$

Подставляя вместо коммутаторов их выражения из равенств (12.121), получаем

$$\begin{aligned} (n-2) F(a_{ij}, a_{kl}) &= g_{rh} \{ g_{rk} F(a_{jh}, a_{il}) - g_{ik} F(a_{jh}, a_{rl}) + \\ &+ g_{il} F(a_{jh}, a_{rk}) - g_{rl} F(a_{jh}, a_{ik}) + \\ &+ g_{jk} F(a_{ir}, a_{hl}) - g_{hk} F(a_{ir}, a_{jl}) + \\ &+ g_{hl} F(a_{ir}, a_{jk}) - g_{jl} F(a_{ir}, a_{hk}) \}. \end{aligned}$$

Слагаемые, стоящие на первом и седьмом, а также на четвертом и шестом местах, взаимно уничтожаются, после чего остается выражение

$$\begin{aligned} (n-2) F(a_{ij}, a_{kl}) &= g_{jk} F(g_{rh} a_{ir}, a_{hl}) - g_{ik} F(g_{rh} a_{jh}, a_{rl}) + \\ &+ g_{il} F(g_{rh} a_{jh}, a_{rk}) - g_{jl} F(g_{rh} a_{ir}, a_{hk}). \quad (12.127) \end{aligned}$$

Зададим на алгебре Ли линейную функцию, полагая

$$\Lambda(a_{st}) = g_{rh} F(a_{sr}, a_{ht}). \quad (12.128)$$

Тогда, согласно равенству (12.121),

$$\begin{aligned} (n-2) F(a_{ij}, a_{kl}) &= g_{jk} \Lambda(a_{il}) - g_{ik} \Lambda(a_{jl}) + g_{il} \Lambda(a_{jk}) - g_{jl} \Lambda(a_{ik}) = \\ &= \Lambda([a_{ij}, a_{kl}]). \end{aligned} \quad (12.129)$$

Таким образом, $F(a_{ij}, a_{kl})$ есть линейная функция от коммутатора $[a_{ij}, a_{kl}]$ и поэтому тождественно равна нулю.

Далее мы рассмотрим неоднородные группы I_n^p при $n > 2$. Прежде всего воспользуемся соотношением (12.126), чтобы преобразовать выражение для функции $F(a_{ij}, b_k)$:

$$\begin{aligned} (n-1) F(a_{ij}, b_k) &= g_{hl} F(a_{ij}, [a_{kl}, b_h]) = \\ &= g_{hl} (F([a_{ij}, a_{kl}], b_h) + F(a_{kl}, [a_{ij}, b_h])) \end{aligned}$$

Затем воспользуемся равенствами (12.121) и (12.124) и представим те коммутаторы, которые встречаются в качестве аргументов функции F , в виде линейных комбинаций соответствующих элементов:

$$\begin{aligned} (n-1) F(a_{ij}, b_k) &= g_{hl} \{g_{jk} F(a_{il}, b_h) - g_{ik} F(a_{jl}, b_h) + \\ &+ g_{il} F(a_{jk}, b_h) - g_{jl} F(a_{ik}, b_h) + \\ &+ g_{jh} F(a_{kl}, b_i) - g_{ih} F(a_{kl}, b_j)\}. \end{aligned}$$

Слагаемые, стоящие на третьем и пятом, а также на четвертом и шестом местах, взаимно уничтожаются, после чего остается выражение

$$(n-1) F(a_{ij}, b_k) = g_{jk} F(g_{hl} a_{il}, b_h) - g_{ik} F(g_{hl} a_{jl}, b_h). \quad (12.130)$$

Если мы зададим линейную функцию Λ для базисных элементов b_i так, что

$$\Lambda(b_i) = g_{hl} F(a_{il}, b_h), \quad (12.131)$$

то из равенства (12.124) получим

$$(n-1) F(a_{ij}, b_k) = g_{jk} \Lambda(b_i) - g_{ik} \Lambda(b_j) = \Lambda([a_{ij}, b_k]). \quad (12.132)$$

Поскольку $F(a_{ij}, b_k)$ есть линейная функция от коммутатора $[a_{ij}, b_k]$, имеем

$$F(a_{ij}, b_k) \equiv 0.$$

Наконец, мы должны показать, что

$$F(b_i, b_j) \equiv 0.$$

Линейная функция Λ уже задана формулами (12.128) и (12.131), поэтому мы можем лишь проверить, выполняется ли соотношение

$F(b_i, b_j) \equiv 0$ или нет. Воспользуемся соотношением коммутации (12.124) и преобразуем функцию $F(b_i, b_j)$:

$$(n-1)F(b_i, b_j) = g_{hk}F([a_{ih}, b_k], b_j) = \\ = g_{hk}\{F([a_{ih}, b_j], b_k) + F([b_j, b_k], a_{ih})\}.$$

Слагаемое, стоящее на втором месте, равно нулю, так как $[b_j, b_k] = 0$. Воспользуемся соотношением коммутации (12.124) для слагаемого, стоящего на первом месте, и получим

$$(n-1)F(b_i, b_j) = g_{hk}\{g_{hj}F(b_i, b_k) - g_{ij}F(b_h, b_k)\} = \\ = F(b_i, b_j) - g_{ij}g_{hk}F(b_h, b_k) = F(b_i, b_j)$$

$[g_{hk}F(b_h, b_k) = 0$, так как этот член есть произведение симметричного множителя g_{hk} и антисимметричного множителя $F(b_h, b_k)$. Таким образом,

$$(n-2)F(b_i, b_j) = 0,$$

и при $n > 2$

$$F(b_i, b_j) = 0. \quad (12.133)$$

Мы показали, что при $n > 2$ все проективные представления группы I_n^p эквивалентны векторным представлениям. Так же как и в случае группы вращения, представления могут быть многозначными.

При $n = 2$ алгебра Ли группы I_2^p определяется соотношениями

$$\begin{aligned} [a_{12}, b_1] &= -\varepsilon_1 b_2, \\ [a_{12}, b_2] &= \varepsilon_2 b_1, \\ [b_1, b_2] &= 0. \end{aligned} \quad (12.134)$$

Тождество Якоби в этом частном случае не дает ничего нового. Если операторы представления обозначить A_{12} , B_1 и B_2 , то их коммутаторы запишутся в виде

$$\begin{aligned} i[A_{12}, B_1] &= -\varepsilon_1 B_2 + \beta' \cdot 1, \\ i[A_{12}, B_2] &= \varepsilon_2 B_1 + \beta'' \cdot 1, \\ i[B_1, B_2] &= \beta \cdot 1, \end{aligned} \quad (12.135)$$

где β , β' , β'' — вещественные константы. Воспользуемся изменением фазы (12.83) и введем операторы

$$B'_1 = B_1 + \frac{\beta''}{\varepsilon_2} \cdot 1, \quad B'_2 = B_2 - \frac{\beta'}{\varepsilon_1} \cdot 1, \quad (12.136)$$

тогда

$$i[A_{12}, B'_1] = -\varepsilon_1 B'_2, \quad i[A_{12}, B'_2] = \varepsilon_2 B'_1, \quad (12.137)$$

однако в равенстве

$$i[B'_1, B'_2] = \beta \cdot 1 \quad (12.138)$$

еще остается произвольная константа β . Итак, при $n = 2$ существует одномерное многообразие неэквивалентных проективных представлений. В случае $\beta = 0$ мы получаем векторные представления группы I_2^p .

§ 5. Проективные представления галилеевой группы

Галилеева группа G — это группа преобразований, с помощью которой осуществляется переход от одной инерциальной системы отсчета к другой. Такие системы отсчета можно получать друг из друга путем параллельного переноса, сдвига по времени, поворота в пространстве. Наконец, они могут двигаться с постоянной скоростью друг относительно друга. Таким образом, преобразования Галилея изменяют радиус-вектор $\mathbf{x}$ на радиус-вектор $\mathbf{x}'$ и время t на время t' , где

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= W\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{u}, \\ t' &= t + \tau. \end{aligned} \quad (12.139)$$

В формулах (12.139) W означает собственное ортогональное преобразование в трехмерном пространстве, $\mathbf{v}$ — вектор скорости (постоянный), $\mathbf{u}$ — вектор, описывающий параллельный перенос системы координат, и τ — сдвиг по времени. Чистыми преобразованиями Галилея называются преобразования вида

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{x} + \mathbf{v}t, \\ t' &= t. \end{aligned} \quad (12.140)$$

Поскольку вращения W описываются тремя параметрами, вектор $\mathbf{v}$ — тремя параметрами, вектор $\mathbf{u}$ — тремя параметрами и сдвиг по времени τ — одним параметром, то группа Галилея G есть 10-параметрическая группа Ли. Если обозначить элемент группы G , задаваемой (12.139), через $(W, \tau, \mathbf{v}, \mathbf{u})$, то закон группового умножения запишется в виде

$$\begin{aligned} (W', \tau', \mathbf{v}', \mathbf{u}') \cdot (W, \tau, \mathbf{v}, \mathbf{u}) &= \\ &= (W'W, \tau + \tau', W'\mathbf{v} + \mathbf{v}', W'\mathbf{u} + \mathbf{u}' + \mathbf{v}'\tau). \end{aligned} \quad (12.141)$$

Его можно представить с помощью умножения матриц 5×5 вида

$$\begin{bmatrix} W & \mathbf{v} & \mathbf{u} \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (12.142)$$

Единичным элементом группы G служит элемент $(1, 0, 0, 0)$. Элемент, обратный элементу $(W, \tau, \mathbf{v}, \mathbf{u})$, имеет вид

$$(W^{-1}, -\tau, -W^{-1}\mathbf{v}, -W^{-1}\{\mathbf{u} - \mathbf{v}\tau\}).$$

Инфинитезимальные матрицы выглядят следующим образом:

$$\begin{bmatrix} S & \mathbf{k}' & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \varphi \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (12.143)$$

где S — кососимметрическая матрица порядка 3×3 , $\mathbf{k}'$ и $\mathbf{k}$ — произвольные векторы-столбцы, φ — вещественное число. Обозначим через a_{ij} элементы базиса алгебры Ли, элементы b_i имеют тот же смысл, что и в предыдущем параграфе, d_i — чистые преобразования Галилея и f — сдвиг по времени. Соотношения между коммутаторами имеют вид

$$[a_{ij}, a_{kl}] = \delta_{jk}a_{il} - \delta_{ik}a_{jl} + \delta_{il}a_{jk} - \delta_{jl}a_{ik}; \quad (12.144)$$

$$[a_{ij}, b_k] = \delta_{jk}b_i - \delta_{ik}b_j, \quad [b_i, b_j] = 0; \quad (12.145)$$

$$[a_{ij}, d_k] = \delta_{jk}d_i - \delta_{ik}d_j, \quad [d_i, d_j] = 0; \quad [d_i, b_j] = 0; \quad (12.146)$$

$$[a_{ij}, f] = 0, \quad [b_i, f] = 0, \quad [d_i, f] = b_i. \quad (12.147)$$

Задача. Проверьте соотношения (12.144) — (12.147).

При рассмотрении проективных представлений галилеевой группы мы можем воспользоваться результатами предыдущего параграфа для случая $n = 3$. Повороты плюс параллельные переносы и повороты плюс чистые преобразования Галилея образуют подгруппы группы G , изоморфные группе G_3^3 . Из результатов последнего параграфа вытекает, что мы всегда можем подобрать функцию F , определяемую (12.97), так, чтобы

$$\begin{aligned} F(a_{ij}, a_{kl}) &= F(a_{ij}, b_k) = F(a_{ij}, d_k) = F(b_i, b_j) = \\ &= F(d_i, d_j) = 0. \end{aligned} \quad (12.148)$$

Из равенства (12.125) при $n = 3$ и $g_{jk} = \delta_{jk}$ следует

$$a_{il} = [a_{ik}, a_{kl}], \quad (12.149)$$

так что

$$\begin{aligned} F(a_{il}, f) &= F([a_{ik}, a_{kl}], f) = \\ &= F(a_{ik}, [a_{kl}, f]) + \\ &+ F([a_{ik}, f], a_{kl}) = 0, \end{aligned} \quad (12.150)$$

поскольку, согласно соотношению (12.147), аргументы функции равны нулю. Аналогичным образом из (12.126) получаем

$$2b_i = [a_{ik}, b_k], \quad (12.151)$$

следовательно,

$$F(b_i, f) = \frac{1}{2} F([a_{ik}, b_k], f).$$

И снова, воспользовавшись тождеством Якоби (12.105) для функции F и соотношением (12.147), находим

$$F(b_i, f) = 0.$$

Аналогично,

$$F(d_i, f) = 0.$$

Единственной оставшейся величиной после всех преобразований будет $F(b_i, d_k)$. Из (12.126) имеем

$$\begin{aligned} 2F(b_i, d_k) &= F([a_{ij}, b_j], d_k) = \\ &= F([a_{ij}, d_k], b_j) + F([d_k, b_j], a_{ij}). \end{aligned}$$

С помощью соотношения (12.146) получаем

$$\begin{aligned} 2F(b_i, d_k) &= \delta_{jk} F(d_i, b_j) - \delta_{ik} F(d_j, b_i) = \\ &= F(d_i, b_k) - \delta_{ik} F(d_j, b_j) = \\ &= -F(b_k, d_i) - \delta_{ik} F(d_j, b_j). \end{aligned} \quad (12.152)$$

Переставив индексы i и k , приходим к соотношению

$$2F(b_k, d_i) = -F(b_i, d_k) - \delta_{ik} F(d_j, b_j),$$

а подставляя в правую часть результат преобразований (12.152), находим

$$F(b_i, d_k) = -\frac{1}{3} \delta_{ik} F(d_j, b_j) = \gamma \delta_{ik}, \quad (12.153)$$

где

$$\gamma = -\frac{1}{3} F(d_j, b_j) \quad (12.154)$$

— константа. При $\gamma \neq 0$ мы не можем исключить эту константу из соответствующих соотношений для операторов

$$i[B_i, D_k] = \gamma \delta_{ik} \cdot 1. \quad (12.155)$$

Таким образом, совокупность классов эквивалентности для группы Галилея одномерна.

§ 6. Неприводимые представления группы параллельных переносов

Группы, которые мы рассматривали в предыдущих параграфах, включали в себя галилееву группу, группу I_3^3 евклидовых движений (поворотов и переносов) в случае трех измерений и неоднородную группу Лоренца I_4^3 . Во всех этих группах параллельные переносы образуют абелеву инвариантную подгруппу T_n , поэтому простейший метод нахождения представлений полной группы состоит в том, что сначала рассматривают представления группы T_n параллельных переносов.

T_n есть группа преобразований вида

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{x}'_v = x_v + u_v \quad (v = 1, \dots, n). \quad (12.156)$$

Мы ограничимся тем, что найдем неприводимые унитарные векторные представления группы T_n . Если оператор представления, соответствующий параллельному переносу $\mathbf{u}$, если оператор $D(\mathbf{u})$, то

$$D(\mathbf{u}) D(\mathbf{u}') = D(\mathbf{u} + \mathbf{u}'). \quad (12.157)$$

Поскольку группа параллельных переносов T_n абелева, все ее неприводимые векторные представления одномерны. Если ψ — базисная функция неприводимого унитарного представления, то

$$D(\mathbf{u}) \psi = e^{i\delta(\mathbf{u})} \psi, \quad (12.158)$$

где вещественное число δ зависит от вектора переноса $\mathbf{u}$. Если $\mathbf{n}_1$ — единичный перенос вдоль оси x_1 , то

$$D(\mathbf{n}_1) \psi = e^{ik_1} \psi, \quad k_1 = \delta(\mathbf{n}_1).$$

Если $u_1 \mathbf{n}_1$ — перенос на величину u_1 вдоль оси x_1 , то

$$D(u_1, \mathbf{n}_1) \psi = e^{ik_1 u_1} \psi.$$

Продолжая те же рассуждения для $x_2, x_3, \dots, x_n$, находим

$$D(\mathbf{u}) \psi = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}} \psi, \quad \text{причем } \mathbf{u} = \sum_{v=1}^n u_v \mathbf{n}_v, \quad (12.159)$$

где $\mathbf{k}$ — вещественный вектор.

Таким образом, неприводимое унитарное представление группы T_n характеризуется вещественным вектором $\mathbf{k}$ в n -мерном пространстве. Такое представление мы будем указывать, записывая базисную функцию в виде $\psi(\mathbf{k})$ или $\psi_{\mathbf{k}}$. Общее представление группы T_n будет прямой суммой представлений (12.159) для различных векторов $\mathbf{k}$.

В частности, мы можем реализовать представления в пространстве функций $\psi(\mathbf{r})$, задавая операторы $D(\mathbf{u})$ так, чтобы

$$D(\mathbf{u}) \psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r} + \mathbf{u}), \quad (12.160)$$

откуда при

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

получим

$$D(\mathbf{u})\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{u}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}}\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}). \quad (12.161)$$

Разложение функции $\psi(\mathbf{r})$ по базисным функциям $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ есть не что иное, как преобразование Фурье

$$\psi(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{k} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \int d\mathbf{k} a_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (12.162)$$

и

$$D(\mathbf{u})\psi(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{k} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}). \quad (12.162a)$$

Выбрав другой подход, мы можем рассмотреть эрмитовы инфинитезимальные операторы p_{ν} представления, которые удовлетворяют соотношениям $[p_{\nu}, p_{\nu'}] = 0$. Так как все операторы p_{ν} коммутируют, мы можем определить систему собственных функций $\psi_{\mathbf{k}}$ таких, что

$$\mathbf{p}\psi_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}\psi_{\mathbf{k}},$$

где $\mathbf{k}$ — любой вещественный вектор.

При рассмотрении пространственных групп в кристаллах мы обнаружили, что группа непрерывных параллельных переносов T_3 заменяется дискретной группой параллельных переносов вдоль трех направлений, не лежащих в одной плоскости. Параллельные переносы, описывающие решетку, задаются векторами

$$\mathbf{a} = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3 \quad (n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \dots), \quad (12.163)$$

где векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ некопланарны. Группа абелева и поэтому имеет только одномерные неприводимые векторные представления. Приведенное нами выше рассуждение показывает, что для каждого вещественного вектора $\mathbf{k}$ мы получаем одномерное представление

$$D(\mathbf{a})\psi_{\mathbf{k}} = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}\psi_{\mathbf{k}}.$$

Однако в рассматриваемом случае в силу дискретности группы представления, соответствующие различным векторам $\mathbf{k}$, могут оказаться эквивалентными. Два вектора $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$, которые отличаются на величину

$$\mathbf{b} = m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2 + m_3 \mathbf{b}_3 \quad (m_1, m_2, m_3 = 0, \pm 1, \dots), \quad (12.164)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= 2\pi \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}; & \mathbf{b}_2 &= 2\pi \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}; \\ \mathbf{b}_3 &= 2\pi \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}, \end{aligned} \quad (12.165)$$

приводят к эквивалентным представлениям, поскольку

$$e^{i\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}} = 1.$$

Векторы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ и $\mathbf{b}_3$ являются векторами базиса *обратной решетки*, а вектор $\mathbf{b}$ называется *вектором обратной решетки*. Чтобы найти полный набор неэквивалентных представлений, мы находим набор таких векторов $\mathbf{k}$, длина каждого из которых меньше или равна длине любого вектора $\mathbf{k} + \mathbf{b}$. Найденные таким образом векторы $\mathbf{k}$ заполняют *первую зону Бриллюэна*.

Базисные функции $\psi_{\mathbf{k}}$ можно реализовать в виде функций от координат

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad (12.166)$$

где период функции $\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ совпадает с периодом решетки

$$\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}). \quad (12.167)$$

Заставляя вектор $\mathbf{k}$ пробегать первую зону Бриллюэна, мы получаем полный набор функций.

Задача. Начертите первую зону Бриллюэна для плоской решетки, у которой угол θ между векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ равен 90° . То же сделайте для случая $|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_2|$ и $\theta = 120^\circ$.

§ 7. Малые группы

Рассмотрим группу преобразований I_n^p

$$\mathbf{x}' = W\mathbf{x} + \mathbf{u}, \quad (12.109)$$

$$(W', \mathbf{u}') (W, \mathbf{u}) = (W'W, W'\mathbf{u} + \mathbf{u}'), \quad (12.110)$$

которые оставляют инвариантной форму $F_p(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, где

$$F_p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i^2. \quad (12.107)$$

В этом случае билинейная форма („скалярное произведение“)

$$\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i y_i$$

остается инвариантной при однородных преобразованиях W :

$$\{W\mathbf{x}, W\mathbf{y}\} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}. \quad (12.168)$$

Если мы, найдя некоторое представление группы I_n^p , ограничимся затем рассмотрением подгруппы T_n , то найденное представление распадется в прямую сумму одномерных представлений группы T_n .

Рассмотрим какое-нибудь неприводимое представление группы T_n , которое содержится в представлении группы I_n^p :

$$D(u)\psi(k_0, \xi) = e^{i\{k_0, u\}}\psi(k_0, \xi), \quad (12.169)$$

где ξ — некоторый дополнительный набор индексов, которые могут понадобиться для того, чтобы как-то обозначать базисные функции представления группы I_n^p . Базисная функция $\psi(k_0, \xi)$ задает одномерное подпространство представления группы I_n^p . Применим к обеим частям равенства (12.169) оператор $D(W)$, который соответствует „повороту“ $(W, 0)$. Так как

$$(W, 0)(1, u) = (1, Wu)(W, 0),$$

то

$$\begin{aligned} D(W)D(u)\psi(k_0, \xi) &= e^{i\{k_0, u\}}[D(W)\psi(k_0, \xi)] = \\ &= D(Wu)[D(W)\psi(k_0, \xi)]. \end{aligned}$$

Положив $Wu = u'$, с учетом (12.168) получим

$$\begin{aligned} D(u')[D(W)\psi(k_0, \xi)] &= e^{i\{k_0, W^{-1}u'\}}[D(W)\psi(k_0, \xi)] = \\ &= e^{i\{Wk_0, u'\}}[D(W)\psi(k_0, \xi)]. \end{aligned} \quad (12.170)$$

Таким образом, $D(W)\psi(k_0, \xi)$ принадлежит тому подпространству представления группы T_n , которое соответствует вектору Wk_0 . Вектор Wk_0 получается из компонент вектора k_0 при преобразовании W . В соответствии с (12.168)

$$\{Wk_0, Wk_0\} = \{k_0, k_0\}.$$

Следовательно, если пространство некоторого неприводимого представления группы I_n^p содержит представление группы T_n , соответствующее вектору k_0 , то оно должно содержать также и представления группы T_n , соответствующие всем векторам k , имеющим ту же „длину“, что и вектор k_0 , т. е. всем векторам k , для которых

$$\{k, k\} = \{k_0, k_0\}$$

и которые могут быть получены из вектора k_0 при преобразованиях W .

Рассмотрим теперь подгруппу G_{k_0} , которая состоит из всех „поворотов“ W_{k_0} , оставляющих без изменения вектор k_0 :

$$W_{k_0}k_0 = k_0. \quad (12.171)$$

Группа G_{k_0} называется *группой волнового вектора k_0* , или *малой группой*.

Из (12.170) мы видим, что функции $D(W_{\mathbf{k}_0})\psi(\mathbf{k}_0, \xi)$ также принадлежат вектору $\mathbf{k}_0$. Рассмотрим это подпространство и найдем неприводимое представление малой группы $G_{\mathbf{k}_0}$:

$$D(W_{\mathbf{k}_0})\psi(\mathbf{k}_0, \xi) = \sum_{\eta} \psi(\mathbf{k}_0, \eta) [D(W_{\mathbf{k}_0})]_{\eta\xi}, \quad (12.172)$$

где индексы η нумеруют базисные функции неприводимого представления группы $G_{\mathbf{k}_0}$.

Покажем теперь, что неприводимые представления всей группы I_n^p автоматически определяются путем выбора некоторых неприводимых представлений (12.172) малой группы.

Пусть $W_{\mathbf{k}}$ — „вращение“, которое переводит вектор $\mathbf{k}_0$ в вектор $\mathbf{k}$:

$$W_{\mathbf{k}}\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}. \quad (12.173)$$

Для каждого вектора $\mathbf{k}$, который удовлетворяет условию

$$\{\mathbf{k}, \mathbf{k}\} = \{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0\},$$

мы выбираем одно преобразование $W_{\mathbf{k}}$. Любой другой поворот, переводящий вектор $\mathbf{k}_0$ в вектор $\mathbf{k}$, можно записать в виде $W_{\mathbf{k}}W_{\mathbf{k}_0}$. Определим наборы базисных функций для каждого вектора $\mathbf{k}$, соответствующие базисным функциям $\psi(\mathbf{k}_0, \xi)$:

$$\psi(\mathbf{k}, \xi) = D(W_{\mathbf{k}})\psi(\mathbf{k}_0, \xi). \quad (12.174)$$

Если поворот W переводит вектор $\mathbf{k}$ в вектор $\mathbf{k}'$, то

$$W\mathbf{k} = \mathbf{k}',$$

$$WW_{\mathbf{k}}\mathbf{k}_0 = W_{\mathbf{k}'}\mathbf{k}_0,$$

$$W_{\mathbf{k}'}^{-1}WW_{\mathbf{k}}\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_0,$$

так что преобразование $W_{\mathbf{k}'}^{-1}WW_{\mathbf{k}}$ принадлежит группе $G_{\mathbf{k}_0}$ и

$$W = W_{\mathbf{k}'}W_{\mathbf{k}_0}W_{\mathbf{k}}^{-1}, \quad (12.175)$$

где $W_{\mathbf{k}_0}$ — некоторый элемент группы $G_{\mathbf{k}_0}$.

Но теперь представление элемента W полностью определено:

$$\begin{aligned} D(W)\psi(\mathbf{k}, \xi) &= D(W_{\mathbf{k}'}^{-1})D(W_{\mathbf{k}_0})D(W_{\mathbf{k}})\psi(\mathbf{k}, \xi) = \\ &= D(W_{\mathbf{k}'}^{-1})D(W_{\mathbf{k}_0})\psi(\mathbf{k}_0, \xi) = \\ &= D(W_{\mathbf{k}'}^{-1})\sum_{\eta} \psi(\mathbf{k}_0, \eta) [D(W_{\mathbf{k}_0})]_{\eta\xi} = \\ &= \sum_{\eta} \psi(\mathbf{k}', \eta) [D(W_{\mathbf{k}_0})]_{\eta\xi}; \\ D(W)\psi(\mathbf{k}, \xi) &= \sum_{\eta} \psi(W\mathbf{k}, \eta) [D(W_{\mathbf{k}_0})]_{\eta\xi}. \end{aligned} \quad (12.176)$$

Равенства (12.176), (12.170) и

$$D(u)\psi(k, \zeta) = e^{i\{k, u\}}\psi(k, \zeta)$$

полностью определяют неприводимое представление группы I_n^p .

Задача. Докажите, что выбор вектора k_0 при вычислении малой группы несуществен. Покажите, что представления, полученные из малой группы G_k , где $k = W_k k_0$, эквивалентны представлениям, полученным из малой группы G_{k_0} .

Для евклидовой группы в случае трех измерений „скалярным произведением“ $\{x, y\}$ служит обычное скалярное произведение $x \cdot y$. Вектор k_0 может быть преобразован путем поворота W во все векторы k , имеющие ту же самую длину $k_0 \cdot k_0 = k_0^2$. Малая группа G_{k_0} есть группа поворотов вокруг направления вектора k_0 . Так как эта группа абелева, она имеет только одномерные представления. Индекс ζ принимает единственное значение j_0 . Это значение либо целое, либо полуцелое.

Для группы Лоренца имеем

$$\begin{aligned} \{x, x\} &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = g_{ij}x_i x_j, \\ g_{ij} &= e_i \delta_{ij} \quad e_i = \begin{cases} +1, & i = 1, 2, 3, \\ -1, & i = 4, \end{cases} \end{aligned} \quad (12.177)$$

где $x_4 = ct$. Преобразование $x' = Wx$ оставляет форму $\{x, x\}$ инвариантной:

$$\begin{aligned} \{Wx, Wx\} &= \{x, x\}, \\ \tilde{W}xgWx &= \tilde{x}gx, \\ \tilde{W}gW &= g. \end{aligned} \quad (12.178)$$

Взяв от обеих частей равенства (12.178) определитель, найдем, что $\det W = \pm 1$. Собственными преобразованиями Лоренца являются такие преобразования, для которых $\det W = +1$.

Выписав компоненту (4.4) равенства (12.178), получим

$$\tilde{w}_{4i}g_{ij}w_{j4} = g_{44},$$

или

$$w_{44}^2 - w_{14}^2 - w_{24}^2 - w_{34}^2 = 1. \quad (12.179)$$

Перейдя в равенстве (12.178) к обратным величинам и заменив преобразование W^{-1} на преобразование W , мы придем к соотношению

$$Wg\tilde{W} = g. \quad (12.178a)$$

Взяв компоненту (4,4), получим

$$\omega_{44}^2 - \omega_{41}^2 - \omega_{42}^2 - \omega_{43}^2 = 1. \quad (12.179a)$$

Из последнего равенства мы видим, что

$$\omega_{44}^2 \geq 1: \omega_{44} \geq +1 \quad \text{или} \quad \omega_{44} \leq -1. \quad (12.180)$$

Преобразования Лоренца, у которых $\omega_{44} \geq +1$, называются *ортохронными*. Собственные ортохронные преобразования Лоренца удовлетворяют условиям

$$\det W = +1, \quad \omega_{44} \geq +1, \quad (12.181)$$

и их можно получить из тождественного преобразования путем непрерывного изменения последнего. Такие преобразования образуют группу, которую мы обозначим $G_4'^3$.

Говорят, что вектор $\mathbf{x}$ *времени-подобный*, если

$$\{\mathbf{x}, \mathbf{x}\} < 0; \quad (12.182)$$

пространственно-подобный, если

$$\{\mathbf{x}, \mathbf{x}\} > 0; \quad (12.182a)$$

и *нулевой*, если

$$\{\mathbf{x}, \mathbf{x}\} = 0. \quad (12.182b)$$

Скорость материальной частицы должна быть меньше скорости света c , вследствие чего ее пространственные и временные смещения Δx_i и Δt должны удовлетворять условию

$$(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 < c^2 (\Delta t)^2. \quad (12.183)$$

Таким образом, пространственно-временное смещение материальной частицы есть времени-подобный вектор.

Говорят, что времени-подобный вектор *положителен* (обращен в будущее, лежит в положительной полé светового конуса), если $x_4 > 0$, и *отрицателен* (обращен в прошлое, лежит в отрицательной полé светового конуса), если $x_4 < 0$.

Говорят, что нулевой вектор лежит на *положительной полé светового конуса*, если $x_4 > 0$, и на *отрицательной полé светового конуса*, если $x_4 < 0$.

Покажем теперь, что собственные ортохронные преобразования Лоренца переводят положительные времени-подобные (или нулевые) векторы в положительные времени-подобные (или нулевые) векторы, т. е. если $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq x_4^2$ и $x_4 > 0$, то и вектор $\mathbf{x}'$, получившийся после преобразования, удовлетворяет тем же условиям.

Первая часть утверждения следует из условия $\{\mathbf{x}', \mathbf{x}'\} = \{\mathbf{x}, \mathbf{x}\}$. Четвертая компонента вектора $\mathbf{x}'$ имеет вид

$$x_4' = \omega_{41}x_1 + \omega_{42}x_2 + \omega_{43}x_3 + \omega_{44}x_4. \quad (12.184)$$

Неравенство Шварца, примененное к первым трем слагаемым в правой части (12.184), дает

$$|\omega_{41}x_1 + \omega_{42}x_2 + \omega_{43}x_3|^2 \leq (\omega_{41}^2 + \omega_{42}^2 + \omega_{43}^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \leq (\omega_{44}^2 - 1)x_4^2 < \omega_{44}^2 x_4^2. \quad (12.185)$$

Это неравенство показывает, что последнее слагаемое в (12.184) больше суммы первых трех слагаемых. Таким образом, x'_4 имеет тот же знак, что и $\omega_{44}x_4$. Если $\omega_{44} \geq 1$, то x'_4 имеет тот же знак, что и x_4 .

При отыскании неприводимых представлений собственной ортохронной группы Лоренца мы выбираем некоторый вектор $\mathbf{k}_0$ и находим неприводимые представления малой группы $G_{\mathbf{k}_0}$. Существует четыре главных типа представлений:

- 1) вектор $\mathbf{k}_0$ времени-подобный, $\{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0\} < 0$;
- 2) вектор $\mathbf{k}_0$ есть нулевой вектор, $\{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0\} = 0$, но $\mathbf{k}_0 \neq 0$;
- 3) $\mathbf{k}_0 = 0$;
- 4) вектор $\mathbf{k}_0$ пространственно-подобный, $\{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0\} > 0$.

Тип 1. Взяв вектор $\mathbf{k}_0$, мы получаем функции, соответствующие всем векторам $\mathbf{k} = W\mathbf{k}_0$. Как показано выше, если компонента k_{04} положительна (отрицательна), то компонента k_4 положительна (отрицательна). Эти два случая мы будем отличать с помощью нижних значков 1_+ и 1_- . Если $\{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0\} = -m^2$, то мы можем найти преобразование W такое, что вектор $\mathbf{k} = W\mathbf{k}_0$ будет иметь $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ и $k_4^2 = m^2$. Если $\mathbf{k}_0$ — положительный времени-подобный вектор, то $k_4 = +\sqrt{m^2}$; если же $\mathbf{k}_0$ — отрицательный времени-подобный вектор, то $k_4 = -\sqrt{m^2}$. Построим малую группу для вектора вида $(0, 0, 0, k_4)$. Эта малая группа будет группой тех преобразований Лоренца W , которые оставляют неизменной четвертую компоненту вектора, т. е. группой O_3^+ вращений в трехмерном пространстве. Неприводимые представления такой малой группы нам известны: они являются представлениями $D^{(j)}$ с целым или полуцелым j . Для каждого значения j мы получаем неприводимое представление малой группы и соответствующее неприводимое представление группы Лоренца. Константы $k_4 = \pm\sqrt{m^2}$ и j определяют массу и спин системы.

Неприводимые представления имеют *один и тот же* вид для *всех* значений $\{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0\}$. Это можно показать с помощью изоморфизма (автоморфизма)

$$\begin{aligned} W &\rightarrow W, \quad u \rightarrow \alpha u \quad (\alpha \text{ — вещественно}), \\ (W, u) &\rightarrow (W, \alpha u). \end{aligned} \quad (12.186)$$

Это преобразование есть изоморфизм, поскольку

$$\begin{aligned}(W', u')(W, u) &= (W'W, W'u + u'), \\ (W', \alpha u')(W, \alpha u) &= (W'W, \alpha W'u + \alpha u') = \\ &= (W'W, \alpha [W'u + u']).\end{aligned}$$

Итак, если нам задано любое представление $D(W)$, $D(u)$ группы, то операторы

$$D(W), D'(u) = D(\alpha u)$$

также задают некоторое представление. Но

$$D'(u) \psi(k_0, \zeta) = D(\alpha u) \psi(k_0, \zeta) = e^{i\{k_0, \alpha u\}} \psi(k_0, \zeta) = e^{i\{\alpha k_0, u\}} \psi(k_0, \zeta).$$

Таким образом, новое представление соответствует вектору αk_0 , обладающему тем свойством, что

$$\{\alpha k_0, \alpha k_0\} = \alpha^2 \{k_0, k_0\} \quad \text{и} \quad (\alpha k_0)_4 = \alpha k_{04}.$$

Тип 2. Здесь мы снова имеем два подслучая: 0_+ , когда компонента k_{04} положительна, и 0_- , когда компонента k_{04} отрицательна. Масса покоя m частицы равна нулю. Рассуждения, приведенные при рассмотрении типа 1, показывают, что представления одинаковы при всех значениях k_{04} . Мы всегда можем найти некоторое преобразование W , чтобы рассматриваемый нами типичный вектор k имел вид $(0, 0, 1, 1)$. Малая группа G_k является совокупностью преобразований W , оставляющих вектор $k = (0, 0, 1, 1)$ неизменным. Эти преобразования могут быть трех типов:

1) группа вращений в плоскости $(1, 2)$

$$R_{12}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (12.187)$$

2) преобразование

$$T_1(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 - \frac{a^2}{2} & \frac{a^2}{2} \\ a & 0 & -\frac{a^2}{2} & 1 + \frac{a^2}{2} \end{bmatrix}; \quad (12.187a)$$

3) преобразование

$$T_2(b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b & b \\ 0 & b & 1 - \frac{b^2}{2} & \frac{b^2}{2} \\ 0 & b & -\frac{b^2}{2} & 1 + \frac{b^2}{2} \end{bmatrix}, \quad (12.1876)$$

где a и b — произвольные вещественные числа. Преобразования T_1 и T_2 образуют однопараметрическую абелеву группу. $T_1(a)$ и $T_2(b)$ коммутируют, и мы получаем, что малая группа изоморфна группе евклидовых движений в двумерном пространстве.

Этот результат легко получается, если заметить, что рассматриваемая нами группа является трехпараметрической подгруппой однородной группы Лоренца. Затем мы пытаемся найти те инфинитезимальные матрицы, которые оставляют вектор $\mathbf{k}$ инвариантным, а именно матрицы:

$$a_{12}, \quad a_{14} + a_{34}, \quad a_{24} + a_{34}, \quad (12.188)$$

порождающие три описанные выше подгруппы.

Тип 3. Если $\mathbf{k}_0 = 0$, то базисные функции инвариантны относительно всех преобразований. Малая группа есть группа собственных ортохронных однородных преобразований Лоренца $G_4'^3$.

Тип 4. В качестве типичного представителя выберем вектор $\mathbf{k}_0 = (1, 0, 0, 0)$. Малой группой является группа, оставляющая неизменной первую координату. Следовательно, эта группа есть группа G_3^2 преобразований Лоренца с двумя пространственными и одной временной координатой.

Физический смысл, по-видимому, имеют только представления типа 1 и типа 2.

Задача. Покажите, что инфинитезимальные матрицы (12.188) порождают конечные преобразования (12.187).

ЛИТЕРАТУРА

1. Boerner H., Group Representations, Berlin, 1955.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, М., 1963.
3. Littlewood D. E., The Theory of Group Characters, Oxford, 1950.
4. Lomont J. S., Applications of Finite Groups, New York, 1959. (В книге приведена подробная библиография.)
5. Любарский Г. Я., Теория групп и ее применение в физике, М., 1958.
6. Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, М., 1954.
7. Van der Waerden B. L., The Group-Theoretic Method in Quantum Mechanics, Berlin, 1932. (Имеется перевод: Ван-дер-Варден Б. Л., Метод теории групп в квантовой механике, Харьков, 1938.)
8. Weyl H., Theory of Groups and Quantum Mechanics, Princeton, 1931.
9. Weyl H., The Classical Groups, Princeton, 1946. (Имеется перевод: Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, М., 1947.)
10. Wigner E. P., Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra, New York, 1959. (Имеется перевод: Вигнер Е., Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров, М., 1961.)

Глава 2

К § 10. При выводе групп магнитной симметрии мы следуем статье Б. А. Тавгера и В. Н. Зайцева [ЖЭТФ, 30, 564 (1956)]. См. также книги Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица (Статистическая физика, М., 1964; Электродинамика сплошных сред, М., 1963).

Глава 5

К § 5. В основу рассмотрения вещественных представлений положена классическая статья Шура и Фробениуса [Schur, Frobenius, Berliner Berichte, 186 (1906)].

К § 8. Wigner E. P., Amer. Journ. Math., 63, 57 (1941).

К § 9. Wigner E. P., On the Matrices which Reduce the Kronecker Products of Representations of S. R. Groups, Princeton, 1951.

Глава 7

К § 1—5. Литтлвуд [3].

К § 6—7. Yamanouchi T., Proc. Phys.-Math. Soc., Japan, 19, 436 (1937).

Формула (7.114) в литературе ранее не приводилась, хотя она непосредственно следует из цитированной выше статьи Шура и Фробениуса.

К § 8. Hund F., Zs. Phys., **43**, 788 (1927).

К § 9—10. Бернер [1], Вейль [9].

К § 11. Фок В. А., ЖЭТФ, **10**, 961 (1940). Демков Ю. Н., ЖЭТФ, **34**, 491 (1958).

К § 12. Литтлвуд [3].

К § 13. Приводимый нами графический метод вычисления внутренних произведений представляет собой обобщение и упрощение метода, предложенного в статье Гамба и Радикати [Gamba, Radicati, Rend. Acad. Lincei, VIII, **14**, 632 (1953)].

К § 14. Содержание параграфа составляет неопубликованная работа Кросби и Хамермеша [Crosbie E. A., Hamermesh M., Bull. Amer. Phys. Soc., **1**, 209 (1956)].

Глава 8

К § 1—14. Л. С. Понтрягин [6]. Racah G., Group Theory and Spectroscopy, Notes from Princeton, 1951.

К § 13. Casimir H. B. G., Proc. Roy. Acad. Amster., **34**, 844 (1931); Racah G., Rend. Acad. Lincei, VIII, **8**, 108 (1950).

Глава 9

К § 7. Bethe H. A., Ann. Phys., **3**, 133 (1929).

К § 8. Метод вычисления коэффициентов Клебша — Гордана принадлежит Ван-дер-Вардену. Метод нормировки предложен Людвигом (Ludwig G., Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin, 1954).

Глава 10

К § 1—4. Бернер [1], Вейль [9].

К § 5—10. Вейль [9].

К § 7. Таблицы заимствованы из работ Яна [Jahn H. A., Proc. Roy. Soc., A201, 516 (1950)] и Флауэрса [Flowers B. H., Proc. Roy. Soc., A210, 497 (1952)].

К § 9. Таблицы заимствованы из статьи Флауэрса [Flowers B. H., Proc. Roy. Soc., A212, 248 (1952)].

Глава 11

К § 2. См. литературу к гл. 10.

К § 4. Racah G., Phys. Rev., **76**, 1352 (1949).

К § 7. Wigner E. P., Phys. Rev., **51**, 106 (1937); Hund F., Zs. Phys., **105**, 202 (1937).

К § 7—9. Таблицы заимствованы из указанных выше работ Яна и Флауэрса.

Глава 12

К § 1 и 2. Schur I., Journ. Reine und Ang. Math., **127**, 20 (1904); **132**, 85 (1907); **139**, 155 (1911). См. Вейль [8].

К § 3. Связь, существующая между отображениями лучей и векторов, была впервые обнаружена Вигнером, но доказательство, приводимое в его книге, неполно. См. Hagedorn R., Nuovo Cimento, Suppl., **1**, 73 (1959).

К § 3—5. Bargmann V., Ann. Math., **59**, 1 (1954).

К § 5. Векторные представления галилеевой группы были рассмотрены в работе: Иппи Е., Wigner E. P., Nuovo Cimento, **9**, 705 (1952). См. также Hagemesh M., Ann. Phys., **9**, 518 (1960).

К § 6—7. Bouckaert, Smoluchowski, Wigner, Phys. Rev., **50**, 58 (1936); Seitz F., Ann. Math., **37**, 17 (1936). Вывод пространственных групп см. в статьях: Seitz F., Zs. Krist., **90**, 289 (1935); **91**, 336 (1935); **94**, 100 (1936).

К § 7. Обзор работ И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка по представлениям однородной группы Лоренца см. в работе М. А. Наймарка [Усп. мат. наук, **9**, вып. 4, 19 (1954)]. Классификация представлений неоднородной группы Лоренца была проделана Вигнером [Wigner E. P., Ann. Math., **40**, 149 (1939)].

Весьма доступный обзор, включающий рассмотрение полной группы Лоренца, см. в статьях Ю. М. Широкова [ЖЭТФ, **33**, 861, 1196, 1208 (1957); см. также журнал Nucl. Phys., **15**, 1, 13 (1960)].

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА¹⁾

1. Bargmann V., Irreducible unitary representations of the Lorentz group, Ann. of Math., **48**, 568 (1947).
2. Бейман Б. Ф., Лекции по применению теории групп в ядерной спектроскопии (перевод с английского), М., 1961.
3. Березин Ф. А., Гельфанд И. М., Граев М. И., Наймарк М. А., Представления групп, Усп. мат. наук, **11**, № 6 (72), 13 (1956).
4. Виленкин Н. Я., Смородинский Я. А., Инвариантные разложения релятивистских амплитуд, ЖЭТФ, **46**, № 5, 1793 (1964).
5. Гельфанд И. М., Наймарк М. А., Унитарные представления классических групп, Труды Математического института им. В. А. Стеклова, т. 36, М.—Л., 1950.
6. Петров А. З., Новые методы в общей теории относительности, М., 1966.
7. Желобенко Д. П., Лекции по теории групп Ли, Дубна, 1965.
8. Макки Г., Бесконечномерные представления групп (периодический сборник переводов иностранных статей), Математика, **6**, № 6, 57 (1962).
9. Наймарк М. А., Линейные представления группы Лоренца, М., 1958.
10. «Полупростые группы и систематика элементарных частиц», сборник статей, т. 1, 2, Дубна, 1965.

¹⁾ Составлена переводчиком. — *Ред.*

11. Salam, Introduction in the Group Interpretation of Particles, в книге «Theoretical Physics», Trieste, 1963.
12. Смородинский Я. А., Унитарная симметрия элементарных частиц, Усп. физич. наук, **84**, 1, 3 (1964).
13. de Swart J. J., The octet model and its Clebsch — Gordan Coefficients, Rev. Mod. Phys., **35**, № 4, 916 (1963).
14. Виленкин Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, М., 1965.
15. Мурадян Р. М., Кадышевский В. Г., Смородинский Я. А., $SU(6)$ -симметрия в сильных и электромагнитных взаимодействиях элементарных частиц, ОИЯИ, Р-2061, Дубна, 1965.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие к русскому изданию	5
Предисловие автора	7
Введение	9
Глава 1. Элементы теории групп	13
§ 1. Соответствия и преобразования	13
§ 2. Группы. Определения и примеры	19
§ 3. Подгруппы. Теорема Кэли	28
§ 4. Смежные классы. Теорема Лагранжа	35
§ 5. Классы сопряженных элементов	38
§ 6. Инвариантные подгруппы. Фактор-группа. Гомоморфизм	44
§ 7. Прямые произведения	47
Глава 2. Группы симметрии	49
§ 1. Элементы симметрии. Полюсные фигуры	49
§ 2. Эквивалентные оси и плоскости. Двусторонние оси	56
§ 3. Группы, элементами которых служат чистые повороты: группы поворотов вокруг оси, группы диэдров	60
§ 4. Закон рациональных индексов	65
§ 5. Группы, элементами которых служат чистые повороты. Правильные многогранники	68
§ 6. Группы симметрии, содержащие зеркальные повороты. Присоединение отражений к группе C_n	72
§ 7. Присоединение отражений к группам D_n	77
§ 8. Полные группы симметрии правильных многогранников	81
§ 9. Обзор точечных групп. Другие системы обозначений	83
§ 10. Группы магнитной симметрии (цветные группы)	86
Глава 3. Представления групп	91
§ 1. Линейные векторные пространства	91
§ 2. Линейная зависимость; размерность	93
§ 3. Базисные векторы (оси координат); координаты	95
§ 4. Отображения; линейные операторы; матричные представления; эквивалентность	98

§ 5. Представления групп	101
§ 6. Эквивалентные представления; характеры	102
§ 7. Построение представлений. Сложение представлений	104
§ 8. Инвариантность функций и операторов. Классификация собственных функций	110
§ 9. Унитарные пространства; скалярное произведение; унитарные матрицы; эрмитовы матрицы	113
§ 10. Операторы: сопряженный, самосопряженный, унитарный	116
§ 11. Унитарные представления	117
§ 12. Гильбертово пространство	118
§ 13. Разложение представлений; приводимость; неприводимые представления	119
§ 14. Леммы Шура	124
§ 15. Соотношения ортогональности	127
§ 16. Критерии неприводимости. Разложение представлений	130
§ 17. Общие теоремы; групповая алгебра	133
§ 18. Разложение функций по базисным функциям неприводимых представлений	138
§ 19. Представления прямых произведений	141
Глава 4. Неприводимые представления точечных групп симметрии	142
§ 1. Абелевы группы	142
§ 2. Неабелевы группы	147
§ 3. Таблицы характеров для кристаллографических точечных групп	154
Глава 5. Различные операции с представлениями групп	157
§ 1. Произведение представлений (кронекеровское произведение)	157
§ 2. Симметризованные и антисимметризованные произведения	161
§ 3. Сопряженное представление. Комплексно сопряженное представление	163
§ 4. Условия существования инвариантов	165
§ 5. Вещественные представления	167
§ 6. Разложение кронекеровского произведения. Ряд Клебша — Гордана	176
§ 7. Коэффициенты Клебша — Гордана	178
§ 8. Просто приводимые группы	180
§ 9. $3j$ -символы	186
Глава 6. Физические приложения	191
§ 1. Классификация уровней энергии	191
§ 2. Теория возмущений	193

§ 3. Правила отбора	197
§ 4. Связанные системы	212
Глава 7. Симметрическая группа	217
§ 1. Вывод характеров группы из характеров ее подгруппы .	217
§ 2. Формула Фробениуса для характеров симметрической группы	225
§ 3. Графические методы. Решеточные перестановки. Схемы Юнга. Таблицы Юнга	236
§ 4. Графический метод нахождения характеров	240
§ 5. Рекуррентные формулы для характеров. Правила ветвления	249
§ 6. Вычисление характеров по формуле Фробениуса	253
§ 7. Матрицы неприводимых представлений группы S_n . Символы Яманучи	257
§ 8. Метод Хунда	274
§ 9. Групповая алгебра	283
§ 10. Операторы Юнга	288
§ 11. Построение произведения волновых функций с заданной симметрией. Условия циклической симметрии Фока	293
§ 12. Внешние произведения представлений симметрической группы	297
§ 13. Внутренние произведения. Ряд Клебша — Гордана для симметрической группы	303
§ 14. Коэффициенты Клебша — Гордана для симметрической группы. Свойства симметрии. Рекуррентные формулы	308
Глава 8. Непрерывные группы	327
§ 1. Краткий обзор результатов, полученных для конечных групп	327
§ 2. Бесконечные дискретные группы	329
§ 3. Непрерывные группы. Группы Ли	332
§ 4. Примеры групп Ли	337
§ 5. Изоморфизм. Подгруппы. Смешанные непрерывные группы	341
§ 6. Однопараметрические группы. Инфинитезимальные преобразования	344
§ 7. Структурные константы	350
§ 8. Алгебры Ли	352
§ 9. Структура алгебр Ли	356
§ 10. Структура компактных полупростых групп Ли и их алгебр	362
§ 11. Линейные представления групп Ли	365
§ 12. Инвариантное интегрирование	367

§ 13. Неприводимые представления групп Ли и алгебр Ли. Оператор Казимира	371
§ 14. Многозначные представления. Универсальная покрывающая группа	373
Глава 9. Аксиальная и сферическая симметрия	377
§ 1. Группа вращений в двумерном пространстве	377
§ 2. Трехмерная группа вращений	381
§ 3. Непрерывные однозначные представления трехмерной группы вращений	390
§ 4. Расщепление атомных уровней в полях внутри кристаллов (однозначные представления)	395
§ 5. Построение собственных функций для кристаллов с различной симметрией	402
§ 6. Двухзначные представления группы вращений. Двумерная унитарная унимодулярная группа	410
§ 7. Расщепление атомных уровней в полях внутри кристаллов. Двухзначные представления кристаллографических точечных групп	420
§ 8. Связанные системы. Сложение моментов количества движения. Коэффициенты Клебша — Гордана	433
Глава 10. Линейные группы в n-мерном пространстве; неприводимые тензоры	443
§ 1. Тензоры, преобразующиеся по группе $GL(n)$	443
§ 2. Конструирование неприводимых тензоров, преобразующихся по группе $GL(n)$	445
§ 3. Размерность неприводимых представлений группы $GL(n)$	451
§ 4. Неприводимые представления подгрупп группы $GL(n)$: $SL(n)$, $U(n)$, $SU(n)$	456
§ 5. Ортогональная группа в n -измерениях. Свертка. Тензоры с нулевым следом	461
§ 6. Неприводимые представления группы $O(n)$	464
§ 7. Разложение неприводимых представлений группы $U(n)$ на представления группы $O^+(n)$	470
§ 8. Симплектическая группа $Sp(n)$. Свертка. Тензоры с нулевым следом	475
§ 9. Неприводимые представления группы $Sp(n)$. Разложение неприводимых представлений группы $U(n)$ на представления ее симплектической подгруппы	481
Глава 11. Применение теории групп к задачам атомной и ядерной физики	485
§ 1. Классификация состояний систем тождественных частиц по группе $SU(n)$	485

§ 2. Разложение момента количества движения. Разложение представлений группы $SU(n)$ на представления группы $O^+(3)$	486
§ 3. Принцип Паули. Атомные спектры в схеме связи Рас-села — Саундерса	495
§ 4. Старшинство в атомных спектрах	498
§ 5. Атомные спектры в схеме jj -связи	505
§ 6. Структура ядра. Изотопический спин	509
§ 7. Ядерные спектры в схеме $L-S$ -связи. Супермульти-плеты	512
§ 8. Модель оболочек в схеме $L-S$ -связи. Старшинство	520
§ 9. Модель оболочек в схеме jj -связи. Старшинство в схеме jj -связи	525
Глава 12. Проективные представления. Малые группы	537
§ 1. Проективные представления конечных групп	537
§ 2. Примеры проективных представлений конечных групп	543
§ 3. Проективные представления групп Ли	549
§ 4. Проективные представления псевдо-ортогональных групп	559
§ 5. Проективные представления галилеевой группы	566
§ 6. Неприводимые представления группы параллельных пе-реносов	569
§ 7. Малые группы	571
Литература	579