УДК 517.5+518

Теория кубатурных формул и вычислительная математика.— Новосибирск: Наука, 1980.

Материалы сборника посвящены теории кубатурных формул, теории приближения и аппроксимации, разностным методам решения краевых задач математической физики, оптимальному восстановлению линейных функционалов и др. В книге представлены работы академиков С. Л. Соболева, Н. Н. Яненко, членов-корреспондентов АН СССР С. К. Годунова, Н. П. Корнейчука и других ученых, которые анализируют современное состояние теории вычислений.
Для научных сотрудников — специалистов в области вычислительной математики и математического анализа.

ТЕОРИЯ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный редактор *Сергей Львович Соболев*

Утверждено к изданию Институтом математики СО АН СССР

Редакторы издательства *Л. И. Голышева, С. А. Садно, Н. В. Свобода, Л. Н. Спиридонова.* Художественный редактор *Т. Ф. Каминина.* Художник *Е. Ф. Зайцев.* Технический редактор *Н. М. Бурлаченко.* Корректоры *С. В. Блинова, Р. К. Червова.*

ИБ № 10723

Сдано в набор 11.07.79. Подписано в печать 27.10.80. МН-05074. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага типографская № 3. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Усл.-печ. л. 16. Уч.-изд. л. 17. Тираж 1750 экз. Заказ № 593. Цена 2 р. 80 к.

Издательство «Наука», Сибирское отделение. 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18.
4-я типография издательства «Наука». 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25

Т $\frac{20204 - 865}{055(02) - 80}$ 26.80.1702070000.

Часть 1

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСРЕДНЕНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ КОРОТКИХ ВОЛН В ПЕРИОДИЧЕСКИХ СРЕДАХ

Н. С. БАХВАЛОВ

(Москва)

В работах [1, 2] рассмотрено распространение волн в дискретных периодических средах и построены акустическая и оптическая ветви дисперсионной кривой. В [3, 4] для непрерывных периодических сред предложен аппарат для получения осредненного дифференциального уравнения бесконечного порядка точности в случае процессов с характерным размером существенного изменения решения, много большим периода структуры, что соответствует акустической ветви. В настоящей работе предлагается формализм осреднения для случая оптической ветви, когда характерный размер изменения решения много меньше периода структуры. Для одномерных волн в слоистых средах упомянутые выше вопросы обсуждались в [5, 6].

Рассмотрим скалярное уравнение

$$\rho(Z)\overline{D}Du-\overline{D}_i(a_{ij}(Z)D_ju)=0 \tag{1}$$

и систему уравнений

$$L\boldsymbol{u}=B_0(Z)\overline{D}\boldsymbol{u}+\overline{D}_j(B_j(Z)\boldsymbol{u})+B(Z)\boldsymbol{u}=0, \tag{2}$$

где $D=\frac{\partial}{\partial t}$; $D_j=\frac{\partial}{\partial x_j}$; $d_j=\frac{\partial}{\partial \zeta_j}$; $\zeta_j=\frac{x_j}{\varepsilon}$; $Z=(\zeta_1,\ldots,\zeta_s)$; $X=(x_1,\ldots,x_s)$; суммирование проводится по повторяющимся индексам в пределах $1\leqslant i,\ j\leqslant s$; $\boldsymbol{u}$ — вектор-столбец размерности p; ρ, a_{ij}, B_i, B — периодические по каждой из ζ_k с периодом 1. В реальных задачах коэффициенты уравнений (1), (2) разрывные (кусочно-постоянные), поэтому далее решения уравнений понимаются в смысле С. Л. Соболева и определяются с помощью соответствующих интегральных тождеств

$$\int\int(\rho DuD\varphi^{\circ}-a_{ij}D_juD_i\varphi^{\circ})\,dtdX=0;$$

$$\int\int ((B_0 u, D\varphi) + (B_j u, D_j\varphi) - (Bu, \varphi))\, dt\, dX = 0$$

$$\forall\varphi^\circ,\ \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(R_{s+1}).$$

Напомним, что решение, определяемое с помощью интегрального тождества, автоматически удовлетворяет условиям равенства напряжений (потоков) на поверхностях разрыва коэффициентов. В случае (1) условия на поверхность разрыва, вытекающие из интегральных тождеств, имеют вид

$$[u] = 0,\ [a_{ij}D_j\ u]\cos(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{e}_i) = 0;$$

в случае (2)

$$[B_j \boldsymbol{u}]\cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{e}_j) = 0.$$

Здесь $[g]$ — величина разрыва. Далее при $f(t, X, Z)$, периодической по всем ζ_k, $[f]$ — среднее по периоду. Уравнение (1) формально сводится к системе вида (2) относительно вектора $\boldsymbol{u} = (Du, D_1u, \ldots, D_su)$. Однако (1) и (2) рассматриваются независимо; в первом случае получен более наглядный формализм осреднения, приводящий к осредненному уравнению бесконечного порядка точности; в случае (2) получено лишь асимптотическое разложение решения. Сильноосциллирующее решение (1) отыскиваем по стандартной схеме волновой физики в виде

$$u = S\exp(i\varphi/\eta),$$

подставляем в уравнение и разделяем вещественную и мнимую части. Выпишем окончательный вид уравнений, перейдя сразу к новой неизвестной $B = \rho S^2$ и положив $\eta^2 = \varepsilon^2\mu$, $b_{ij} = a_{ij}/\rho$. Имеем

$$L_1(\varphi, B) = (D\varphi)^2 - b_{ij}D_i\varphi D_j\varphi - \varepsilon^2\mu\left(\frac{1}{\sqrt{B}}D^2\sqrt{B} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{B\rho}}D_i\left(b_{ij}\rho D_j\sqrt{\frac{B}{\rho}}\right)\right) = 0; \qquad (3)$$

$$L_2(\varphi, B) = D(BD\varphi) - D_i(b_{ij}BD\varphi) = 0. \qquad (4)$$

Решение ищем в виде асимптотического ряда

$$\varphi \sim \psi(t, X) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^n\mu^m N_{nm};\quad B \sim \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^n\mu^m Q_{nm},$$

где N_{nm}, Q_{nm} — функции от быстрых переменных ζ_k, периодические по ним, и от гладких функций $\psi(t, X)$, $q(t, X)$ и их производных; при этом $q(t, X) = [Q_{00}]$. Так же как в [4], подставим эти ряды в левые части (3), (4), разложим в ряды по степеням ε и μ и путем выбора функций N и Q будем добиваться, чтобы получившиеся выражения не зависели от быстрых переменных ζ_k. Имеем

$$L_1(\varphi, B) \sim \sum_{k,l=0}^{\infty} \varepsilon^k \mu^l H_{kl};$$

$$L_2(\varphi, B) \sim \sum_{k,l=0}^{\infty} \varepsilon^{k-1} \mu^l G_{kl};$$

$$H_{00} = (D\psi)^2 - b_{ij}(D_i\psi + d_iN_{10})(D_j\psi + d_jN_{10});$$

$$G_{00} = -d_i(b_{ij}(D_j\psi + d_jN_{10})Q_{00}).$$

Положим

$$\Phi(A_1, \ldots, A_s, Z, N) = b_{ij}(Z)(A_i + d_iN)(A_j + d_jN)$$

и рассмотрим уравнение $\operatorname{grad}_\zeta \Phi = 0$ относительно неизвестной периодической функции N, иначе говоря, потребуем, чтобы выражение Φ не зависело от переменных ζ_k. Предположим, что для некоторого множества значений $(A_1, \ldots, A_s)$ это уравнение имеет решение N, обозначим его $N_0(A_1, \ldots, A_s, Z)$. Пусть

$$\Phi_0(A_1, \ldots, A_s) = \Phi(A_1, \ldots, A_s, Z, N_0(A_1, \ldots, A_s, Z)).$$

При

$$N_{10} = N_0(D_1\psi, \ldots, D_s\psi, Z)$$

имеем

$$H_{00} = (D\psi)^2 - \Phi_0(D_1\psi, \ldots, D_s\psi) = h_{00}. \tag{5}$$

Заметим, что при умножении всех A_i и N на c величина Φ умножается на c^2, поэтому Φ_0 — однородная функция второй степени от своих аргументов.

Положим

$$b_{ij}(Z)(A_j + d_jN_0(A_1, \ldots, A_s, Z)) = b_i(A_1, \ldots, A_s, Z)$$

и рассмотрим уравнения

$$MQ = d_i(b_i(A_1, \ldots, A_s, Z)Q) = \omega(Z); \tag{6}$$

$$M^*Q = b_i(A_1, \ldots, A_s, Z)d_iQ = \omega(Z) \tag{7}$$

в классе периодических функций Q. Будем предполагать выполненными условия:

1) уравнение $MQ = 0$ имеет ненулевое решение $Q_0(A_1, \ldots$ $\ldots, A_s, Z)$, причем $[Q_0] \neq 0$;

2) уравнение (6) имеет решение при $[\omega] = 0$, а (7) — при $[\omega Q_0] = 0$. Далее нормируем Q_0 так, что $[Q_0] = 1$.

Если наложенные условия существования N и разрешимости уравнений (6), (7) выполнены лишь при $(A_1, \ldots, A_s)$, принадлежащей некоторому множеству Ω, то последующие построения имеют смысл лишь там, где

$$(D_1\psi, \ldots, D_s\psi) \in \Omega.$$

При сделанном выборе N_{10} справедливо

$$H_{kl} = b_i(D_1\psi, \ldots, D_s\psi, Z)d_iN_{k+1,l} + T_{kl},$$

где T_{kl} определяется заданием N_{ij} с $i \leqslant k$, $j \leqslant l$ и Q_{ij} с $i \leqslant k$, $j \leqslant l-1$.

Предположим, эти функции известны. Пусть

$$h_{kl} = [T_{kl}Q_0(D_1\psi, \ldots, D_s\psi, Z)].$$

Для уравнения

$$H_{kl} = h_{kl} \tag{8}$$

выполнено условие разрешимости; если $N_{k+1,l}$ — его решение, то H_{kl} не зависит от быстрых переменных ζ_j.

Положим

$$Q_{00} = Q_0(D_1\psi, \ldots, D_s\psi, Z)q(t, X),$$

тогда $G_{00} = 0$. Остальные выражения G_{kl} имеют вид

$$G_{kl} = -d_i(b_i(D_1\psi, \ldots, D_s\psi, Z)Q_{kl}) + W_{kl},$$

где W_{kl} определяется заданием N_{ij} с $i \leqslant k+1$; $j \leqslant l$ и Q_{ij} с $i \leqslant k-1$, $j \leqslant l$, причем при $0 < l$

$$[W_{0l}] = 0.$$

Пусть

$$g_{kl} = [W_{kl}]; \tag{9}$$

для уравнения

$$G_{kl} = g_{kl} \tag{10}$$

выполнено условие разрешимости, отсюда можно определить Q_{kl}.

Примем следующий порядок отыскания величин h_{kl}, N_{kl}, g_{kl} и Q_{kl} (возможны и другие упорядочивания). Пусть уже определены все Q_{kl} с $k+l < p$ и N_{kl} с $k+l \leqslant p$; тогда все величины T_{kl} с $k+l = p+1$ известны, и из уравнений (8) находим N_{kl} с $k+l = p+1$. Теперь уже известны все W_{kl} с $k+l = p$, и из уравнений (10) находим Q_{kl} с $k+l = p$. Мы перешли к $k+l$, на 1 большему p.

Вследствие условия (9) все $g_{0l} = 0$ при $l > 0$. Определим g_{10}. Имеем

$$G_{10} = D(Q_0(D_1\psi, \ldots, D_s\psi, Z)qD\psi) - (D_i(b_i D_1\psi, \ldots$$
$$\ldots, D_s\psi, Z)\ Q_0(D_1\psi, \ldots, D_s\psi, Z)q) + d_i(b_i(D_1\psi, \ldots$$
$$\ldots, D_s\psi, Z)Q_{10} + b_{ij}(Z)Q_0(D_1\psi, \ldots, D_s\psi, Z)(D_jN_{10} + d_jN_{20})q)).$$

Следовательно,

$$g_{10} = D(qD\psi) - D_i(\beta_i(D_1\psi, \ldots, D_s\psi)q); \tag{11}$$
$$\beta_i(A_1, \ldots, A_s) = [b_i(A_1, \ldots, A_s, Z)Q_0(A_1, \ldots, A_s, Z)].$$

Мы получили осреднения бесконечного порядка точности по ε:

$$\overline{L}_1(\psi, q) \sim \sum_{k,l=0}^{\infty} \varepsilon^k \mu^l h_{kl} \sim 0;$$
$$\overline{L}_2(\psi, q) \sim \sum_{k,l=0}^{\infty} \varepsilon^k \mu^l g_{k+1,l} \sim 0, \tag{12}$$

где главные члены h_{00} и g_{10} определяются соотношениями (5), (11). Остальные h_{kl} и g_{kl} вычисляются с помощью описанного рекуррентного процесса, и каждый из них оказывается дифференциальным оператором конечного порядка от функций ψ и q. Заметим, что N_{kl} и Q_{kl}, а, следовательно, и последующие h_{kl} и g_{kl} всякий раз определяются неоднозначно вследствие неоднозначной разрешимости уравнений (8), (10). Решение системы (12) можно отыскивать в виде регулярного разложения

$$\psi \sim \sum_{k,l=0}^{\infty} \varepsilon^k \mu^l \psi_{kl}(t, X);$$
$$q \sim \sum_{k,l=0}^{\infty} \varepsilon^k \mu^l p_{kl}(t, X).$$

При рассмотрении описанного формализма осреднения возникает естественный вопрос о непустоте и структуре множества Ω. Не исключена, например, такая возможность, что дополнение к нему всюду плотно.

Рассмотрим простейший пример уравнения (1), соответствующий слоистой среде:

$$\rho(\zeta_1)D^2u = D_i(a(\zeta_1)D_iu), \quad \rho, a > 0, \quad s = 3.$$

Для простоты заранее предполагаем, что все N_{nm}, Q_{nm} не зависят от быстрых переменных ζ_2, ζ_3. Уравнение относительно N_0 имеет вид

$$c^2(\zeta_1)((A_1 + d_1N_0)^2 + A_2^2 + A_3^2) = \Phi, \quad c^2 = a/\rho.$$

Отсюда

$$A_1 + d_1N_0 = \pm\sqrt{\Phi c^{-2} - A_2^2 - A_3^2}. \tag{13}$$

Пусть

$$c_1 = \sup c(\zeta_1).$$

При условии

$$\frac{\sqrt{A_2^2 + A_3^2}}{|A_1|}\left[\sqrt{\frac{c_1^2}{c^2(\zeta_1)} - 1}\right] \leqslant 1 \tag{14}$$

уравнение (14) разрешимо относительно N_0 и Φ, при этом определяется как корень уравнения

$$h(\Phi) = |A_1| - \left[\sqrt{\frac{\Phi^2}{c^2(\zeta_1)} - (A_2^2 + A_3^2)}\right] = 0. \tag{15}$$

Существование такого корня следует из перемены знака $h(\Phi)$ при изменении Φ в пределах $c_1^2(A_2^2+A_3^2)$, $c_1^2(A_1^2+A_2^2+A_3^2)$. После определения Φ функция N_0 находится непосредственно из (13). Если в (14) имеет место строгое неравенство, то процесс построения N_{nm}. Q_{nm} бесконечно продолжаем; в случае, когда пересечение множества $c^2(\zeta_1)=c_1^2$ с областью периодичности — сегмент (в частности, точка), условие (14) является необходимым для существования Φ и N_0.

Рассмотрим подробнее случай плоских волн, распространяющихся вдоль оси x_1, когда решение зависит только от ζ_1 и $A_2 = A_3 = 0$. Тогда (15) имеет вид

$$|A_1| - \sqrt{\Phi}/c_0 = 0,$$

где

$$c_0^{-1} = [c^{-1}].$$

Следовательно,

$$\Phi = c_0^2 A_1^2;$$

$$b_1 = c^2(A_1 + d_1 N_0) = A_1 c_0 c;$$

Q_0 — решение уравнения $d_1(b_1 Q) = 0$, поэтому

$$Q_0 = c_0 c^{-1};\ \beta_1(A_1) = c_0^2 A_1.$$

Таким образом, уравнения (12) принимают вид

$$\begin{aligned} \overline{L}_1(\psi, q) &= (D\psi)^2 - c_0^2(D_1\psi)^2 + \varepsilon(\ldots) + \ldots = 0; \\ \overline{L}_2(\psi, q) &= (D(qD\psi) - c_0^2 D_1(qD_1\psi) + \varepsilon(\ldots) + \ldots = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Рассмотрим волновое уравнение

$$D^2 v - c_0^2 D_1^2 v = 0. \tag{17}$$

Если отыскивать сильноосциллирующее решение в виде $v = q\exp(i\psi/\eta)$, то относительно ψ и q получатся уравнения (12) с главными членами такими же, как в (16). Следовательно, уравнение (17) соответствует процессу распространения коротких волн. Заметим, что в случае длинных волн осредненное уравнение имеет вид [3]

$$[\rho](D^2 v - \bar{c}^2 D_1^2 v) = 0;\quad \bar{c}^2 = ([\rho][a^{-1}])^{-1}.$$

Согласно неравенству Коши — Буняковского,

$$c_0^{-1} = \left[\sqrt{\rho a^{-1}}\right] \leqslant \sqrt{[\rho][a^{-1}]} = (\bar{c})^{-1}.$$

Таким образом, всегда $c_0 \geqslant \bar{c}$, причем равенство удовлетворяется лишь при $\rho a = \mathrm{const}$.

В случае системы (2) асимптотическое решение отыскиваем в виде [7]

$$\boldsymbol{u} \sim \exp(i\varphi/\eta)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(i\eta)^k \boldsymbol{u}_k\right).$$

После приведения подобных членов получаем

$$Lu \sim \left(i\eta^{-1} A u_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (i\eta)^k (L u_k - A u_{k+1}) \right) \exp(i\varphi/\eta),$$

где $A = B_0 D\varphi + B_j D_j \varphi$.

Потребуем обращения в нуль коэффициентов при степенях η:

$$A u_0 = 0; \tag{18}$$

$$L u_k - A u_{k+1} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{19}$$

Для существования ненулевого u_0 необходимо и достаточно $|A| = 0$. Пусть $\lambda(A_1, \ldots, A_s, Z)$ — один из корней уравнения

$$|B_0 \lambda + B_j(Z) A_j| = 0.$$

Если φ — решение уравнения

$$l(\varphi) = D\varphi - \lambda(D_1\varphi, \ldots, D_s\varphi, Z) = 0, \tag{20}$$

то $|A| = 0$.

Подставим в (20) асимптотический ряд $\varphi \sim \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \ldots$, где φ_0 зависит только от медленных переменных, а остальные φ_j — как от медленных, так и от быстрых переменных (периодически). Имеем

$$l(\varphi) \sim l_0 + \varepsilon l_1 + \ldots;$$

$$l_0 = D\varphi_0 - \lambda(D_1\varphi_0 + d_1\varphi_1, \ldots, D_s\varphi_0 + d_s\varphi_1, Z).$$

Условие, что выражение $\lambda(A_1 + d_1 N, \ldots, A_s + d_s N, Z)$ не зависит от быстрых переменных

$$\lambda(A_1 + d_1 N, \ldots, A_s + d_s N, Z) = \lambda_0(A_1, \ldots, A_s),$$

образует уравнение относительно

$$N(A_1, \ldots, A_s, Z) \text{ и } \lambda_0(A_1, \ldots, A_s).$$

Предположим, что все эти функции найдены. Если φ_0 — решение уравнения $D\varphi_0 - \lambda_0(D_1\varphi_0, \ldots, D_s\varphi_0) = 0$, $\varphi_1 = N(D_1\varphi_0, \ldots, D_s\varphi_0 Z) + \psi_1(t, X)$, ψ_1 не зависит от быстрых переменных, то $l_0 = 0$. Имеем

$$l_k = D\varphi_k - \beta_j(D_j\varphi_k + d_j\varphi_{k+1}) + H_k;$$

$$\beta_j = \left.\frac{\partial\lambda_0(A_1, \ldots, A_s, Z)}{\partial A_j}\right|_{A_i = D_i\varphi_0 + d_i\varphi_1}.$$

Величина H_k определяется заданием φ_i, $i < k$, и производных $d_l\varphi_k$.

Рассмотрим уравнение

$$\beta_j d_j \varphi_{k+1} = H_k - l_k - \beta_j D_j\varphi_k + D\varphi_k. \tag{21}$$

Условие его разрешимости приводит к уравнению, связывающему производные φ_k по медленным переменным, а из самого (21) определяем φ_{k+1} с точностью до функции, не зависящей от быстрых переменных. Предположим, что ранг матрицы A равен $p-1$, а $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{h}$ — правый и левый нормированные нуль-векторы матрицы A, т. е. $A\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{h}A=\boldsymbol{0}$, $\|\boldsymbol{r}\|$, $\|\boldsymbol{h}\|\neq 0$.

Элементы векторов $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{h}$ выражаются явно через миноры матрицы A и ее определитель. Подставляя разложение φ в ряд, получаем разложение $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\varepsilon\boldsymbol{r}_1+\ldots$, $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{h}_0+\varepsilon\boldsymbol{h}_1+\ldots$ Вследствие (18) имеем $\boldsymbol{u}_0=v\cdot\boldsymbol{r}$, где v — скалярная функция. Умножая скалярно (19) на $\boldsymbol{h}$, получаем уравнение относительно v

$$Pv=(\boldsymbol{h}, L(v\boldsymbol{r}))=0. \tag{22}$$

Из этого уравнения вытекает, что асимптотическое разложение v следует искать в виде $v\sim v_0+\varepsilon v_1+\ldots$, где все v_k зависят как от медленных, так и от быстрых переменных. После подстановки разложений $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{h}$ и v в (22) получаем

$$Pv\sim\varepsilon^{-1}(p_0+\varepsilon p_1+\ldots)\sim 0.$$

Рассмотрим уравнение

$$p_0=P_0v_0=(\boldsymbol{h}_0, d_j(B_j\boldsymbol{r}_0v_0))=0.$$

Сделаем естественные предположения: 1) решение этого уравнения существует и определяется с точностью до множителя, не зависящего от быстрых переменных; 2) уравнение $P_0v=g$ разрешимо при условии $[gq_0]=0$, где q_0 — ненулевое решение уравнения $P_0^*q=0$.

Последующие v_k каждый раз определяются с точностью до множителя, не зависящего от быстрых переменных, из уравнения $p_k=P_0v_k+\ldots=0$, а уравнение для этого множителя, соответствующего v_{k-1}, получается из условия разрешимости уравнения $p_k=0$ относительно v_k. После определения $\boldsymbol{u}_0$ из (19) при $k=0$ находим $\boldsymbol{u}_1$, причем с точностью до некоторого слагаемого, пропорционального вектору $\boldsymbol{r}$, так же как в случае постоянных коэффициентов [7]. Поскольку уравнение $A\boldsymbol{u}_{k+1}=L\boldsymbol{u}_k$ содержит в правой части дифференцирование по быстрым переменным, всякий раз при переходе к $\boldsymbol{u}_{k+1}$ получаем дополнительный множитель ε^{-1}.

Таким образом, $\boldsymbol{u}_k$ оказывается порядка ε^{-k}, и построенное нами асимптотическое разложение решения в действительности применимо при условии η/ε, $\varepsilon\ll 1$, а не при условии η, $\varepsilon\ll 1$, как на первый взгляд могло бы показаться. В случае, когда ранг матрицы A меньше $p-1$, процесс видоизменяется так же, как в [7].

Кроме вопросов об условиях разрешимости вспомогательных уравнений, возникающих при обсуждении формализма осреднения уравнения (1), в случае системы (2) появляется следующий дополнительный момент: может случиться, что ранг матрицы окажется непостоянным в области периодичности; тогда описанный выше формализм неприменим. Для удобства один из параметров разложения ε выбран размерным. В действительности, для применимости построенных разложений существенна малость отношения ε к среднему характерному изменению амплитуды решения ψ в случае (1) и u_0 в случае (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Борн М., Хуань Кунь.** Динамическая теория кристаллических решеток. М., ИЛ, 1958. 488 с.
2. **Бриллюэн Л., Пароди М.** Распространение волн в периодических структурах. М., ИЛ, 1959. 457 с.
3. **Бахвалов Н. С.** Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами.— Докл. АН СССР, 1975, т. 221, № 3, с. 516—519.
4. **Бахвалов Н. С.** Осреднение нелинейных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами.— Докл. АН СССР, 1975, т. 225, № 2, с. 249—252.
5. **Бреховских Л. М.** Волны в слоистых средах. М., Наука, 1973. 343 с.
6. **Ильюшина Е. А.** Вариант моментной теории упругости для одномерной сплошной среды неоднородной периодической структуры.— Прикл. мат. и мех., 1972, т. 36, № 6, с. 1086—1093.
7. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М., Мир, 1964. 830 с.

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Й. БРИЛЛА

Братислава (Чехословакия)

§ 1. Введение

Метод конечных элементов [1] был задуман для решения краевых задач эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных. Естественным обобщением является использование метода конечных элементов для решения проблем, зависящих от времени, например для решения параболических и гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных. Тогда часто используют дискретизацию конечных элементов для пространственных переменных, а также дифференциальную дискретизацию для переменной по времени [2].

Мы разработали другое обобщение метода конечных элементов с преимуществом для решения линейно-зависимых от времени проблем, используя преобразование Лапласа для переменной по времени, а метод конечных элементов — для решения проблемы после преобразования Лапласа [3—7]. Остановимся на вариационной формулировке и сходимости метода для квазигиперболических уравнений колебания вязкоупругих пластин.

§ 2. Вариационная формулировка

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\left(K^0_{ijkl} + K^1_{ijkl}\frac{\partial}{\partial t}\right)w'_{ijkl} + \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q, \tag{2.1}$$

где $K^0_{ijkl}(\cdot)$, $K^1_{ijkl}(\cdot)$ — положительно определенные операторы в области Ω. Воспользуемся принятыми обозначениями суммирования для повторных индексов. Латинские индексы принимают значения 1, 2. Индексы, следующие после запятой, обозначают дифференцирование по соответствующим декартовым координатам.

Будем рассматривать следующие граничные и начальные условия:

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0; \tag{2.2}$$

$$w(x, 0) = w_0(x), \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = w_1(x). \tag{2.3}$$

Предполагаем, что Ω — ограниченная область в E_2 с границей $\partial\Omega$, удовлетворяющей условию Липшица. Операторы $K^0_{ijkl}(\cdot)$, $K^1_{ijkl}(\cdot)$ — симметричны.

Имеет место

$$K^\nu_{ijkl} = K^\nu_{klij} = K^\nu_{jikl} = K^\nu_{ijlk}. \tag{2.4}$$

При этих предположениях уравнение (2.1) является уравнением колебания вязкоупругой пластины из материала Фоигта.

Предполагаем, что правая часть уравнения (2.1), а также решение таковы, что для данной проблемы можно использовать преобразование Лапласа.

Пользуясь преобразованием Лапласа, получим

$$\left(K^0_{ijkl} + K^1_{ijkl}p\right)\widetilde{w}'_{ijkl} + \rho p^2\widetilde{w} = \widetilde{q} + K^1_{ijkl}w'_{0\,ijkl} + \rho\left(w_0 p + w_1\right) = \widetilde{f}^*(p), \tag{2.5}$$

где тильда обозначает преобразование Лапласа.

Для теоретического анализа проблемы очень кстати разделить уравнение (2.5) на p^2. Тогда

$$\widetilde{H}_{ijkl}(p)\widetilde{w}'_{ijkl} + \rho\widetilde{w} = \widetilde{f}(p), \tag{2.6}$$

где

$$\widetilde{H}_{ijkl}(p) = \frac{1}{p^2}\left(K^0_{ijkl} + K^1_{ijkl}p\right), \widetilde{f}(p) = \frac{1}{p^2}f^*(p). \tag{2.7}$$

Уравнение (2.6) является преобразованием Лапласа интегродифференциального уравнения

$$\int_0^t \int_0^\tau \left(K^0_{ijkl} + K^1_{ijkl} \frac{\partial}{\partial \tau_1} \right) w'_{ijkl}(\tau_1)\, d\tau_1 d\tau + \rho w(t) = f(t), \quad (2.8)$$

где $f(t)$ — обратное преобразование функции $\widetilde{f}(p)$. Это уравнение эквивалентно исходному уравнению (2.1).

Ради вариационной формулировки проблемы и анализа сходимости предлагаемого обобщения метода конечных элементов введем комплексные пространства Соболева функций, параметрически зависящих от параметра преобразования p и аналитичных в правой полуплоскости $p^+_\rho = \{p \mid \operatorname{Re} p \geqslant \rho \geqslant 0\}$.

Определим в $H^2(\Omega, p^+_\rho)$ скалярное произведение

$$(\widetilde{u}, \widetilde{v})_{H^2} = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant 2} D^\alpha \widetilde{u} D^\alpha \overline{\widetilde{v}} d\Omega \quad (2.9)$$

и норму

$$\|\widetilde{u}\|_{H^2} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant 2} |D^\alpha \widetilde{u}|^2 d\Omega \right)^{1/2}. \quad (2.10)$$

Потом определим билинейную форму для $u, v \in \overset{\circ}{H}{}^2$

$$B[\widetilde{u}, \widetilde{v}] = \int_\Omega \left(\widetilde{H}_{ijkl}(p)\, \widetilde{u}'_{ijkl} \overline{\widetilde{v}} + \rho \widetilde{u} \overline{\widetilde{v}} \right) d\Omega = \int_\Omega \left(\widetilde{H}_{ijkl}(p)\, \widetilde{u}'_{ij} \overline{\widetilde{v}}_{kl} + \right.$$

$$\left. + \rho \widetilde{u} \overline{\widetilde{v}} \right) d\Omega = (\widetilde{H} \widetilde{u}, \widetilde{v}) + \rho (\widetilde{u}, \widetilde{v}). \quad (2.11)$$

Так как $K^0_{ijkl}(\cdot)$ и $K^1_{ijkl}(\cdot)$ — положительно определенные операторы, то для положительного p

$$B[\widetilde{w}, \widetilde{w}] \geqslant \left(\frac{1}{p^2} \varkappa_0 + \frac{1}{p} \varkappa_1 + \rho \right) \|\widetilde{w}\|^2, \quad (2.12)$$

где $\varkappa_0$, $\varkappa_1$ — константы положительной определенности операторов $K^0_{ijkl}(\cdot)$ и $K^1_{ijkl}(\cdot)$. Значит, $B[\widetilde{w}, \widetilde{w}]$ для положительного p — положительно определенная билинейная форма. Для вещественного p преобразованные величины принимают вещественные значения. Отсюда для положительного p можно построить функционал обобщенной (в смысле преобразования Лапласа) потенциальной энергии колебания вязкоупругой пластины

$$2V(\widetilde{w}) = B[\widetilde{w}, \overline{\widetilde{w}}] - 2(\widetilde{f}_1, \widetilde{w}). \quad (2.13)$$

Сформулируем следующую вариационную теорему.

Т е о р е м а 1. **Для положительных значений** p и $\widetilde{f}(p) \in L_2(\Omega, p^+_\rho)$ существует слабое решение (2.6), минимизирующее функционал обобщенной потенциальной энергии (2.13), и наоборот, элементом минимизирующим (2.13), является решение (2.6).

Далее можно доказать, что для $p \neq \infty$ $B[\tilde{u}, \tilde{v}]$ выполняет в p_ρ^+ условия теоремы Лакса — Милграма:

$$|B[\tilde{u}, \tilde{v}]| \leqslant M \|\tilde{u}\|_{H^2} \|\tilde{v}\|_{H^2}; \qquad (2.14)$$

$$|B[\tilde{u}, \tilde{u}]| \geqslant \gamma \|\tilde{u}\|^2_{H^2}. \qquad (2.15)$$

В самом деле, поскольку коэффициенты $B[\tilde{u}, \tilde{v}]$ для $p \in p_\rho^+$ ограничены, из неравенства Коши-Буняковского вытекает неравенство (2.14). Величину ρ можно выбрать так, что для $\operatorname{Re} p \geqslant \rho$ оценка постоянной коэрцитивности в полярных переменных принимает вид

$$\gamma(p) = \frac{1}{r}\left(\gamma_1^2 + \frac{1}{r^2}\gamma_0^2 + 2\frac{1}{r}\gamma_0\gamma_1 \cos\varphi\right)^{1/2}, \qquad (2.16)$$

где γ_0, γ_1 — постоянные коэрцитивности от операторов K_0 и K_1 соответственно. Значит, (2.15) удовлетворяет условию (2.16) для $p \in p_\rho^+$ и $p \neq \infty$. Тогда имеет место

Теорема 2. Для всякого $\tilde{f}(p) \in H^{-2}(\Omega, p_\rho^+)$ существует однозначное решение уравнения (2.6) $\tilde{w} \in H^2(\Omega, p_\rho^+)$ кроме $p = \infty$.

§ 3. Обобщение метода конечных элементов

Вариационная формулировка теоремы 1 — подходящее исходное положение обобщения метода конечных элементов для решения квазигиперболических дифференциальных уравнений в частных производных. Решение будем искать в форме

$$\tilde{w}_n(x, p) = \tilde{a}_\alpha(p)\varphi_\alpha(x), \alpha = 1, 2, \ldots, n, \qquad (3.1)$$

где $\varphi_\alpha(x)$ — базисные функции, зависящие только от пространственных переменных, и в разности от решения эллиптических уравнений коэффициенты $\tilde{a}_\alpha(p)$ являются функциями от параметра преобразования p. Для нумерического решения напишем функционал обобщенной потенциальной энергии в форме

$$2\tilde{V}(p) = ((K_1p + K_0)\tilde{w}, \tilde{w}) + \rho p^2(\tilde{w}, \tilde{w}) - 2(\tilde{f}^*, \tilde{w}). \qquad (3.2)$$

Если подставить (3.1) в (3.2) и использовать обычный вариационный процесс, получим

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{\tilde{a}}_\alpha} = a_\beta(p)[((K_1p + K_0)\varphi_\alpha, \varphi_\beta) + \rho p^2(\varphi_\alpha, \varphi_\beta)] - (\tilde{f}, \varphi_\alpha) = 0, \qquad (3.3)$$

что можно записать в виде

$$\tilde{S}_{\alpha\beta}\tilde{a}_\beta = \tilde{f}_\alpha \; (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n), \qquad (3.4)$$

откуда

$$\tilde{a}_\alpha(p) = \frac{\tilde{F}_{\alpha\beta}(p)\tilde{f}_\beta}{|\tilde{S}_{\alpha\beta}|}. \tag{3.5}$$

Так как $\tilde{S}_{\alpha\beta}$ — p-матрица, то $|\tilde{S}_{\alpha\beta}|$ — определитель матрицы — есть полином степени $2n$, и сопряженная матрица $\tilde{F}_{\alpha\beta}(p)$ имеет порядок $2(n-1)$, а правая часть (3.5) является рациональной функцпей от p. Обратное преобразование можно потом получить методом разложения по частным дробям.

Если обозначить через p_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ разные корни характеристического уравнения $|\tilde{S}_{\alpha\beta}(p)| = 0$ кратности α_i и из физического смысла предположить, что $\tilde{S}_{\alpha\beta}(p)$ имеет простую структуру, то получим

$$\tilde{a}_\alpha(p) = \sum_{i=1}^{s} \frac{A_{\alpha\beta}(p_i)}{p+p_i}\tilde{f}_\beta, \tag{3.6}$$

где

$$A_{\alpha\beta}(p_i) = \frac{\alpha_i \tilde{F}_{\alpha\beta}^{(\alpha_i-1)}(-p_i)}{\left|S_{\alpha\beta}^{(\alpha_i)}(-p_i)\right|}. \tag{3.7}$$

Тогда

$$w_n(x, t) = \sum_{i=1}^{s} \varphi_\alpha(x)\int_0^t A_{\alpha\beta}(p_i)(f, \varphi_\beta)\, e^{-p_i(t-\tau)}d\tau. \tag{3.8}$$

§ 4. Оценка ошибки

Рассмотрим глобальные базисные функции $\varphi_\alpha(x)$, которые в соответствующих элементах представляют собой полиномы пространственных переменных. Тогда интерполянт $U(x, p)$ является линейной комбинацией

$$U(x, p) = a_\alpha(p)\varphi_\alpha(x), \; (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.1}$$

где $a_\alpha(p)$ — функции от p, аналитические для $p \in p_\rho^+$.

Так как функции $\{\varphi_\alpha\}_1^n$ линейно независимы, то создается базис n-мерного подпространства $S_h(\Omega, p_\rho^+)$ пространства $H^m(\Omega, p_\rho^+)$ функций, параметрически зависящих от p и аналитических относительно $p \in p_\rho^+$. Сейчас можно ввести $S_h^{k,m}$ — классы [8, 9] подпространств конечных элементов, в которых базисные функции кусочно-полиномиальны степени $k > 0$ и образуют замкнутые подпространства $H^m(\Omega, p_\rho^+)$.

Чтобы определить ошибку метода конечных элементов, получим вначале оценку ошибки метода Ритца-Галеркина при решении нашей проблемы, которая дается следующей теоремой.

Теорема 3. Пусть $\tilde{u}$ — решение $B[\tilde{u}, \tilde{v}] = (\tilde{f}, \tilde{v})$ для всякого $\tilde{v} \in H^2(\Omega, p_\rho^+)$, что отвечает (2.9), и $\tilde{u}^h \in S_h \subset H^2$ удовлетворяет уравнению Ритца — Галеркина $B[\tilde{u}^h, \tilde{v}^h] = (\tilde{f}, v^h)$ для всякого $\tilde{v}^h \in S_h$. Тогда имеет место следующая оценка ошибки:

$$\|\tilde{e}\|_{H^2} = \|\tilde{u} - \tilde{u}^h\|_{H^2} \leqslant C\|\tilde{u}\|_{H^2}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Так как $B[\tilde{u}, \tilde{v}] = (\tilde{f}, \tilde{v})$ для всякого $\tilde{v} \in H^2(\Omega, p_\rho^+)$, получим вычитанием $B[\tilde{u} - \tilde{u}^h, \tilde{v}^h] = 0$. Отсюда

$$\begin{aligned}\gamma(p)\|\tilde{u} - \tilde{u}^h\|^2 \leqslant |B[\tilde{u} - \tilde{u}^h, \tilde{u} - \tilde{u}^h]| = |B[\tilde{u} - \tilde{u}^h, \tilde{u}]| = \\ = |B[\tilde{u} - \tilde{u}^h, \tilde{u} - \tilde{v}^h]| \leqslant M\|\tilde{u} - \tilde{u}^h\|_{H^2}\|\tilde{u} - \tilde{v}^h\|_{H^2}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Если разделить это неравенство на $\|\tilde{u} - \tilde{u}^h\|_{H^2}$ и положить $\tilde{v}^h = 0$, получим

$$\gamma(p)\|\tilde{u} - \tilde{u}^h\|_{H^2} \leqslant M\|\tilde{u}\|_{H^2}. \tag{4.4}$$

Одновременно для аппроксимации решения $\tilde{u}$ в S_h имеет место

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}^h\|_{H^2} \leqslant K\|\tilde{u}\|_{H^2}. \tag{4.5}$$

Тогда для достаточно малого h

$$(\gamma(p) + \rho)\|\tilde{u} - \tilde{u}^h\|_{H^2} \leqslant (M + K\rho)\|\tilde{u}\|_{H^2}, \tag{4.6}$$

откуда вытекает (4.2), если положить

$$C = \max_{p \in p_\rho^+} \frac{M + K\rho}{\gamma(p) + \rho}. \tag{4.7}$$

Для положительного вещественного p можно доказать более строгое неравенство.

Кроме того, необходимо обобщить интерполяционную теорему для конечных элементов. Справедлива

Теорема 4. Пусть $\tilde{u} \in H^{k+1}(\Omega, p_\rho^+)$ и пусть оператор проектирования $\Pi_h : H^{k+1}(\Omega, p_\rho^+) \to S_h(\Omega, p_\rho^+ \subset H^m(\Omega, p_\rho^+)$ можно построить так, что $\Pi_h\tilde{u} = \tilde{u}$ для всякого $\tilde{u} \in \mathscr{P}_\rho(\Omega, p_\rho^+)$, где $\mathscr{P}_\rho$ — пространство полиномов степени $\rho \leqslant K$ с коэффициентами, являющимися функциями от p. Тогда для регулярного измельчения сетки конечных элементов и Ω, удовлетворяющего свойству конуса, имеет место

$$\|\tilde{u} - \Pi_h\tilde{u}\|_{H^m} \leqslant Kh^{k+1-m}\|\tilde{u}\|_{H^{k+1}}, \tag{4.8}$$

где h — параметр сетки и K — положительная константа, не зависящая от $\tilde{u}$, h и p.

Доказательство. Неравенство (4.8) выполняется для всякого фиксированного $p \in p_\rho^+$, потому что для фиксированного

p неравенство (4.8) переходит для вещественной и мнимой частей в неравенства в вещественных пространствах Соболева [8]. Ввиду непрерывной зависимости от $p \in p_\rho^+$ существует K, не зависящее от p, и имеет место (4.8).

Из (4.7) и (4.8) получим следующую оценку ошибки:

$$\|\tilde{e}\|_{H^2} \leqslant Ch^{k-1}\|\tilde{u}\|_{H^{k+1}}. \tag{4.9}$$

Для оценки $\|\tilde{u}\|_{H^{k+1}}$ через $\|\tilde{f}\|$ нельзя использовать неравенства коэрцитивности проблемы, потому что билинейная форма $B[\tilde{u}, \tilde{v}]$ не является коэрцитивной для $p = \infty$.

На основании обобщенной положительной определенности получим

$$\|\tilde{u}\|_{H^s} \leqslant C\|\tilde{f}\|_{H^s}. \tag{4.10}$$

Тогда после подстановки (4.10) имеет следующую оценку ошибки:

$$\|\tilde{e}\|_{H^2} \leqslant Ch^{k-1}\|\tilde{f}\|_{H^{k+1}}. \tag{4.11}$$

Точно так же можно получить другие оценки ошибок. Выведем оценки ошибок в пространствах Харди функций со значениями в пространствах Соболева, параметрически зависящих от p и аналитических для $p \in p_\rho^+$. Выберем $\rho \geqslant 0$ такое, что $\tilde{f}$ представляет собой аналитическую функцию $p \in p_\rho^+$. Обозначим $p = p_1 + ip_2$ и проинтегрируем (4.11) по p_2. Получим

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\|\tilde{e}(\rho + ip_2)\|_{H_2}^2\, dp_2\right)^{1/2} \leqslant Ch^{k-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\|\tilde{f}(\rho + ip_2)\|_{H^{k+1}}^2 dp_2\right)^{1/2}. \tag{4.12}$$

Так как

$$\|\tilde{u}\|_{\varkappa_2(\rho, H^s)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty}\|\tilde{u}(\rho + ip_2)\|_{H^s}^2 dp_2\right)^{1/2} \tag{4.13}$$

представляет собой норму в пространстве Харди $\varkappa_2(\rho, H^s)$ функций со значениями в H^s, аналитичных относительно параметра $p \in p_\rho^+$, (4.12) можно выразить следующим образом:

$$\|\tilde{e}\|_{\varkappa_2(\rho, H^2)} \leqslant Ch^{k-1}\|\tilde{f}\|_{\varkappa_2(\rho, H^{k+1})}. \tag{4.14}$$

Если определить $L_2(R^+, H^s, \rho)$ — гильбертово пространство функций со значениями в $H^s(\Omega)$ и с нормой

$$\|u\|_{L_2(R^+, H^s, \rho)} = \left(\int_0^{\infty}\|u\|_{H^s}^2 e^{-2\rho t} dt\right)^{1/2}, \tag{4.15}$$

то преобразование Лапласа

$$Lf(t) = \tilde{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt} dt \tag{4.16}$$

является изоморфным и изометрическим отображением $L_2(R^+, H^s, \gamma_0)$ на $\varkappa_2(\gamma_0, H^s)$. Учитывая эквивалентность норм в этих пространствах, получим следующую теорему.

Теорема 5. Если выбрать базис, принадлежащий $S_h(\Omega, p) \subset H^{k+1}(\Omega, p)$, то существует постоянная $C > 0$, не зависящая от u, h и t такая, что при достаточно малых h предлагаемое решение данной проблемы удовлетворяет оценке

$$\|e\|_{L_2(R^+, H^2, \gamma_0)} \leqslant Ch^{k-1} \|f\|_{L_2(R^+, H^{k+1}, \gamma_0)}. \tag{4.17}$$

Аналогично можно обобщить и другие оценки ошибок. Скорость сходимости данного метода по отношению к измельчению разбиения совпадает со скоростью сходимости для решения эллиптических проблем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Babuska I., Aziz A. K. Survey lectures on mathematical foundations of the finite element method.— In: The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations. N. Y., Acad. Press, 1972, p. 5—359.
2. Zlamal M. Finite element multistep discretizasions of parabolic boundary value problems.— Math. Comput., 1975, v. 29, p. 350—359.
3. Brilla J. Finite element method in linear viscoelasticity.— Z. Angew. Math. und Mech., 1974, Bd 54, N 4, S. T47—T48.
4. Brilla J. Generalized variational methods in linear viscoelasticity.— In: Mechanics of viscoelastic media and bodies. Berlin—Heidelberg — N. Y., Springer, 1975, p. 215—228.
5. Brilla J. Finite element analysis of a system of quasiparabolic partial differential equations.— Acta Univ. Carolinae, Math. et Phys., 1974, N 1—2, p. 5—9.
6. Brilla J. A generalization of finite element method to dynamic viscoelastic analysis.— In: The Mathematics of Finite Elements and Applications. II. London — N. Y.— San Francisco, Academic Press, 1976, p. 209—216.
7. Brilla J., Némethy A. Riešenie väzkopružných anizotropických dosák metódou konečných prvkov.— Stavebnícky časopis, 1974, v. 22, N 1, p. 3—16.
8. Oden J. T., Reddy J. N. An introduction to the mathematical theory of finite elements. N. Y., John Willey and Sons, 1976, 247 c.
9. Donaldson T. A Laplace transform calculus for partial differential operators.— Memoirs of AMS. Providence, 1974, N 143.

УСТОЙЧИВОСТЬ УСТОЙЧИВЫХ МАТРИЦ

С. К. ГОДУНОВ, А. Я. БУЛГАКОВ

(*Новосибирск*)

Введение

Как известно, числовой характеристикой разрешимости системы линейных уравнений $Ax = f$ является число обусловленности матрицы A, вычисляемое как отношение $\mu(A) = \sigma_N(A)/\sigma_1(A)$ ее наибольшего (σ_N) и наименьшего (σ_1) сингулярных чисел

($\|A\| = \sigma_N(A)$). Цель настоящей работы — предложить аналогичную обусловленности числовую характеристику асимптотической устойчивости линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \tag{1}$$

Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения A имели отрицательную вещественную часть: $\max_i \{\mathrm{Re}\,\lambda_i(A)\} \leqslant -\delta \cdot \|A\| (\delta > 0)$. Коэффициент $\delta = \delta(A)$, наибольший из возможных в этом неравенстве, часто принимается за меру устойчивости. Однако оказывается, что при сколь угодно малых по норме возмущениях матрицы A устойчивость может нарушаться, если не ограничиваться рассмотрением матриц какого-либо фиксированного порядка. В самом деле, рассмотрим в качестве примера двухдиагональную матрицу A_N, у которой на главной диагонали стоят числа, равные -1, а на верхней побочной диагонали — числа, равные 10. Если в качестве возмущенной матрицы взять матрицу B_N с одним ненулевым элементом в нижнем левом углу, равным ε, тогда для всякого сколь угодно малого положительного ε существует $N(\varepsilon)$ такое, что $\delta(A_{N(\varepsilon)} + B_{N(\varepsilon)}) < 0$, хотя $\|A_{N(\varepsilon)}\| / \|B_{N(\varepsilon)}\| < \varepsilon$. Примеры такого рода хорошо известны (см., например, [1]).

В § 1 предполагается оценить качество устойчивости системы (1) величиной $\theta_{\min}(A)$, для которой доказана непрерывная зависимость от A, одинаково хорошая при любом порядке N. В § 2 выявляется связь между обусловленностью $\mu(\mathscr{L})$ матричного уравнения Ляпунова

$$\mathscr{L} H \equiv A^*H + HA = -C, \ (C = C^* > 0), \tag{2}$$

и величиной $\theta_{\min}(A)$. Выведенные в этом параграфе неравенства позволяют из анализа решений (2) получить двусторонние оценки для $\theta_{\min}(A)$. В § 3 излагается итерационный алгоритм — одна из возможных редакций метода сопряженных градиентов — специально приспособленный для решения (2). В алгоритме строится базис, в котором оператор $\mathscr{L}$ записывается в виде произведения ортогональной и двухдиагональных матриц. Это обстоятельство позволяет, вычисляя сингулярные числа двухдиагональной матрицы, получить в процессе решения системы (2) оценки ее обусловленности $\mu(\mathscr{L})$ и, если $\mu(\mathscr{L})$ очень велико, заключить, что матрица A неустойчива или «почти неустойчива» ($\theta_{\min}(A)$ велико). При не слишком больших $\mu(\mathscr{L})$ сходимость алгоритма вполне удовлетворительна, и он приводит к решению, анализ которого с помощью теорем § 2 дает возможность получить суждение об устойчивости или неустойчивости A.

Описываемое в данной статье исследование продолжает работу, которой под руководством С. К. Годунова в течение ряда лет занимался безвременно погибший Р. А. Сарыбеков, сформулировавший понятие «Экстремальные функции Ляпунова» и начавший их изучение [2]. Р. А. Сарыбеков проводил эксперименты по вычислению функций Ляпунова с помощью решения системы (2), которые были чрезвычайно существенными для формулирования излагаемой точки зрения.

§ 1. Качество устойчивости

Система порядка N

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{1}$$

асимптотически устойчива, если каждое решение системы (1) удовлетворяет неравенству

$$\|x(t)\| \leqslant \theta' \cdot \|x(0)\| \cdot \exp\left[-\delta' \cdot \|A\| \cdot t\right] \tag{2}$$

для некоторых постоянных θ' и δ' ($\theta' \geqslant 1$, $1 \geqslant \delta' > 0$). Выбрав $\theta = \max\left\{\theta', \frac{1}{\delta'}\right\}$ и несколько огрубив это неравенство, перепишем его в виде

$$\|x(t)\| \leqslant \theta \cdot \|x(0)\| \cdot \exp\left[-\|A\| t/\theta\right]. \tag{3}$$

Итак, для любой асимптотически устойчивой системы (1) существует $\theta \geqslant 1$ такое, что решения (1) удовлетворяют оценке (3). Так как при каждом фиксированном неотрицательном t функция $\varphi_t(\theta) = \exp\left[-\frac{\|A\|}{\theta} t\right]$ является непрерывной монотонно возрастающей от аргумента θ, то нетрудно установить, что множество тех θ ($\theta \geqslant 1$), для которых при всех $t \geqslant 0$ справедливо (3), замкнуто и содержит свою нижнюю грань $\theta_{\min}(A)$. Будем говорить, что $\theta_{\min}(A)$ характеризует собой качество асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1). Легко видеть, что решение системы (1) удовлетворяет неравенству

$$\|x(t)\| \leqslant \min \begin{cases} \|x(0)\| \cdot \exp\left[\|A\| \cdot t\right], \\ \|x(0)\| \cdot \theta_{\min}(A) \cdot \exp\left[-\|A\| \cdot t/\theta_{\min}(A)\right]. \end{cases} \tag{4}$$

В случае, если система (1) не является асимптотически устойчивой, т. е. если у A имеются собственные значения на мнимой оси или правее ее, положим $\theta_{\min}(A) = \infty$. Неравенство (4) остается справедливым.

Иногда удобно будет пользоваться неравенствами, которые получаются из (4) заменой $\theta_{\min}(A)$ на произвольное $\theta \geqslant \theta_{\min}(A)$. Любое такое θ может служить для оценки качества устойчивости решений (1). Удобно обозначать через $\theta(A)$ допустимые значения θ вне зависимости от того, совпадает оно с $\theta_{\min}(A)$ или больше его.

Сформулируем без доказательства три несложные леммы, использующие в своей формулировке $\theta(A)$.

Л е м м а 1. Имеют место оценки

$$\sigma_N(e^{tA}) = \|e^{tA}\| \leqslant \theta(A)\cdot\exp\left[-t\cdot\|A\|/\theta(A)\right];$$
$$\sigma_1(e^{tA}) \geqslant e^{-t\cdot\|A\|}.$$

Л е м м а 2. Справедливо неравенство

$$\|e^{t(A+B)}\| \leqslant \theta(A)\cdot\exp\left\{-t\cdot\left[\|A\|/\theta(A) - \|B\|\cdot\theta(A)\right]\right\}.$$

Л е м м а 3. Если матрица A устойчива, допускает конечную оценку $\theta(A)$ качества устойчивости и если $\|B\|/\|A\| < \theta^{-2}(A)$, то $A + B$ тоже устойчива, причем

$$\theta(A+B) \leqslant \theta(A)\left[1 + \frac{\|B\|}{\|A\|}\right]\Big/\left[1 - \frac{\|B\|}{\|A\|}\theta^2(A)\right].$$

Непосредственно из леммы 3 выводится теорема непрерывности.

Т е о р е м а 1. Если A устойчива с качеством устойчивости $\theta_{\min}(A) < \infty$ и если $\frac{\|B\|}{\|A\|} < \frac{1}{10}\theta_{\min}^{-2}(A)$, то $A + B$ также устойчива, причем

$$|\theta_{\min}(A+B) - \theta_{\min}(A)| < 4\theta_{\min}^3(A)\cdot\|B\|/\|A\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A устойчива и $\|B\|/\|A\| < \frac{1}{10} \times \theta_{\min}^{-2}(A)$.

Тогда из леммы 3 следует, что

$$\theta(A+B) = \theta_{\min}(A)\left[1 + \frac{\|B\|}{\|A\|}\right]\Big/\left[1 - \frac{\|B\|}{\|A\|}\theta_{\min}^{-2}(A)\right] \geqslant \theta_{\min}(A+B). \tag{5}$$

Предположив, что $\theta_{\min}^2(A+B)\frac{\|B\|}{\|A+B\|} < 1$, и заменив в (5) $A + B$ на A, B на $-B$, $A \equiv (A + B) - B$ на $A + B$, мы придем к неравенству

$$\theta_{\min}(A) \leqslant \theta_{\min}(A+B)\left[1 + \frac{\|B\|}{\|A+B\|}\right]\Big/\left[1 - \frac{\|B\|}{\|A+B\|}\theta_{\min}^2(A+B)\right],$$

из которого следует, что

$$\theta_{\min}(A+B) \geqslant \theta_{\min}(A)\left[1 - \frac{\|B\|}{\|A+B\|}\theta_{\min}^2(A+B)\right]\Big/\left[1 + \frac{\|B\|}{\|A+B\|}\right]. \tag{6}$$

По условию $\theta_{\min}^2(A)\frac{\|B\|}{\|A\|} < \rho = \frac{1}{10} < 1$. Тогда из (5) следует, что $\theta_{\min}(A + B) < \theta_{\min}(A)(1 + \rho)/(1 - \rho)$ и что $\theta_{\min}^2(A + B)\cdot\|B\|/\|A + B\| < \rho(1 + \rho)^2/(1 - \rho)^3 < 1$. Значит, выполнен критерий, обеспечивающий справедливость неравенства (6), которое можно несколько огрубить:

$$\theta_{\min}(A+B) > \theta_{\min}(A)\left[1 - \theta^2_{\min}(A)\frac{\|B\|}{\|A\|}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{(1+\rho)^2}{(1-\rho)^3}\right]\Big/\left[1 + \frac{\|B\|}{\|A\|}\Big/(1-\rho)\right]. \tag{7}$$

Двусторонняя оценка (5), (7) позволяет без труда заключить, что

$$\theta_{\min}(A+B) - \theta_{\min}(A) \leqslant 2(1-\rho)^{-1}\theta^3_{\min}(A)\frac{\|B\|}{\|A\|};$$

$$\theta_{\min}(A) - \theta_{\min}(A+B) \leqslant [2(1+\rho)^2/(1-\rho)^3]\,\theta^3_{\min}(A)\frac{\|B\|}{\|A\|},$$

и, как следствие, вывести неравенство

$$|\theta_{\min}(A+B) - \theta_{\min}(A)| < 4\theta^3_{\min}(A)\cdot\|B\|/\|A\|.$$

Теорема доказана.

§ 2. Уравнение Ляпунова

Рассмотрим матричное уравнение

$$\mathscr{L}H \equiv HA + A^*H = -C, \tag{1}$$

предложенное Ляпуновым для вычисления матрицы $H = H^*$ коэффициентов квадратичной формы Ляпунова (Hx, x) по заданной устойчивой матрице A. В качестве правой части C может быть взята любая симметрическая положительно определенная матрица. Хорошо известно, что если A неустойчива, то уравнение (1) либо неразрешимо, либо его решение H не является положительно определенным. Покажем, что если качество устойчивости A оценивается $\theta_{\min}(A)$, то для отношения $\frac{\lambda_N(H)}{\lambda_1(H)} = \frac{\sigma_N(H)}{\sigma_1(H)} = \mu(H)$ наибольшего и наименьшего собственных значений положительно определенной H справедлива

Теорема 2.

$$\mu(H) \leqslant \mu(C)\,\theta^3_{\min}(A). \tag{2}$$

Приступая к ее доказательству, вспомним, что решение системы (1) может быть записано в виде интеграла [3]

$$H = \int\limits_0^\infty e^{tA^*}Ce^{tA}dt = \int\limits_0^\infty [e^{tA}]^*\,Ce^{tA}dt.$$

Из этого представления вытекает оценка

$$\sigma_N(H) = \|H\| \leqslant \int_0^\infty \|[e^{tA}]^*\| \cdot \|C\| \cdot \|e^{tA}\| \, dt = \int_0^\infty \sigma_N(C) \cdot \|e^{tA}\|^2 \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_N(C)\, \theta_{\min}^2(A) \int_0^\infty \exp[-2t\|A\|/\theta_{\min}(A)]\, dt = \sigma_N(C)\, \theta_{\min}^3(A)/(2\|A\|). \tag{3}$$

С другой стороны, используя лемму 2 (§ 1) и, по существу, то же самое представление, имеем

$$(Hx_0, x_0) \geqslant \sigma_1(C) \int_0^\infty \|e^{tA}x_0\|^2\, dt \geqslant [\sigma_1(C)/(2\|A\|)] \cdot (x_0, x_0),$$

откуда

$$\inf_{x_0} \frac{(Hx_0, x_0)}{(x_0, x_0)} = \lambda_1(H) = \sigma_1(H) \geqslant \sigma_1(C)/(2\|A\|). \tag{4}$$

Из полученных для $\sigma_N(H)$, $\sigma_1(H)$ неравенств (3), (4) следует

$$\mu(H) = \sigma_N(H)/\sigma_1(H) \leqslant \mu(C)\, \theta_{\min}^3(A).$$

Теорема доказана.

Теорема 2 дает количественную оценку «степени положительности» положительно определенной матрицы H, являющейся решением уравнения Ляпунова (1). (Матрица H, если ее элементы не слишком велики, тем ближе к вырожденной, чем больше $\mu(H)$.)

Оказывается, что, решив уравнение Ляпунова и вычислив $\lambda_N(H)$, $\lambda_1(H)$, $\sigma_N(C) = \lambda_N(C)$, $\sigma_1(C) = \lambda_1(C)$, $\sigma_N(A) = \|A\|$, мы можем по этим величинам (если $\lambda_N(H) > 0$, $\lambda_1(H) > 0$, то $\sigma_N(H) = \lambda_N(H)$, $\sigma_1(H) = \lambda_1(H)$ оценить $\theta_{\min}(A)$ как сверху, так и снизу. Вычисление собственных значений симметрических матриц — это хорошо разработанная область вычислительных методов, приводящая к надежным результатам. К этим же методам приводится и вычисление $\|A\| = \sigma_N(A)$.

Оценка $\theta_{\min}(A)$ производится с помощью неравенств, составляющих содержание теоремы 3.

Т е о р е м а 3. Если $\lambda_1(H) > 0$, то $\theta_{\min}(A)$ конечно и оценивается неравенствами

$$[\mu(H)/\mu(C)]^{1/3} \leqslant \theta_{\min}(A) \leqslant 2\sigma_N(A) \cdot \sigma_N(H)/\sigma_1(C).$$

Утверждение конечности $\theta_{\min}(A)$ при положительно определенной H следует из теоремы Ляпунова о том, что A в этом случае асимптотически устойчива. Оценка для $\theta_{\min}(A)$ снизу вытекает из теоремы 2. Поэтому для доказательства теоремы 3 достаточно получить оценку $\theta_{\min}(A)$ сверху.

Для решения уравнения $\frac{dx}{dt} = Ax$ справедливо неравенство [4]

$$\|x(t)\| \leqslant \|x(0)\| [\lambda_N(H)/\lambda_1(H)]^{1/2} \cdot \exp\{-t\|A\| \cdot \sigma_1(C)/[2\lambda_N(H)\sigma_N(A)]\},$$

которое, если вспомнить определение $\theta_{\min}(A)$, приводит к следующему выводу:

$$\theta_{\min}(A) \leqslant \max\{[\lambda_N(H)/\lambda_1(H)]^{1/2},\ 2\lambda_N(H)\cdot\sigma_N(A)/\sigma_1(C)\}.$$

Для завершения доказательства нам осталось сослаться на то, что

$$[\lambda_N(H)/\lambda_1(H)]^{1/2} \leqslant \lambda_N(H)/\lambda_1(H) \leqslant 2\lambda_N(H)\cdot\sigma_N(A)/\sigma_1(C)$$

в силу неравенства (4), установленного при доказательстве теоремы 2.

Решив матричное уравнение Ляпунова (1) с какой-либо положительно определенной матрицей C в правой части и вычислив максимальное и минимальное собственные значения матриц C, H, можно решить вопрос о том, устойчива ли A, и более того, в случае устойчивости получить оценки качества устойчивости. Докажем, что если (1) приводит к плохо обусловленной системе, то даже в случае устойчивости матрицы A можно утверждать, что качество этой устойчивости плохое, т. е. $\theta_{\min}(A)$ велико.

Рассмотрим оператор $\mathscr{L}$

$$\mathscr{L}X \equiv XA + A^*X \tag{5}$$

как оператор, действующий в евклидовом пространстве симметричных $(N\times N)$ матриц X с нормой $\|X\|_E = (X,\ X)_E^{1/2}$, определенной скалярным произведением $(X,\ Y)_E = \mathrm{Spur}\ [X\cdot Y^*] = \sum\limits_j \lambda_j(X\cdot Y^*)$. Известно, что

$$\|X\| = \sigma_N(X) \leqslant \|X\|_E = \Big[\sum_j \sigma_j^2(x)\Big]^{1/2} \leqslant N^{1/2}\cdot\sigma_N(X) = N^{1/2}\cdot\|X\|. \tag{6}$$

Заметим, что оператор $\mathscr{L}^*$, сопряженный с $\mathscr{L}$, задается на этом пространстве формулой

$$\mathscr{L}^*Y = YA^* + AY. \tag{7}$$

В качестве числа обусловленности оператора $\mathscr{L}$, или, что то же самое, числа обусловленности, характеризующего разрешимость системы $\mathscr{L}H \equiv HA + A^*H = -C$, возьмем отношение

$$\mu(\mathscr{L}) = \{\max_H \|\mathscr{L}H\|_E/\|H\|_E\}/\{\min_H \|\mathscr{L}H\|_E/\|H\|_E\},$$

откуда в силу неравенства (6) получаем

$$\mu(\mathscr{L}) \leqslant N\{\max_H \|\mathscr{L}H\|/\|H\|\}/\{\min_H \|\mathscr{L}H\|/\|H\|\}. \tag{8}$$

Это неравенство позволит легко доказать следующую теорему.

Т е о р е м а 4. Для $\theta_{\min}(A)$ имеет место оценка снизу через число обусловленности $\mu(\mathscr{L})$:

$$\theta_{\min}(A) \geqslant (\mu(\mathscr{L})/N)^{1/3}.$$

Заметим, что доказывать теорему нужно лишь для устойчивых матриц, так как для неустойчивых матриц A, по определению, $\theta_{\min}(A) = \infty$ и утверждение теоремы тривиально.

Из неравенства (3), полученного при доказательстве теоремы 2, вытекает, что

$$\min_H \|\mathscr{L} H\|/\|H\| \geqslant 2\|A\|/\theta^3_{\min}(A). \tag{9}$$

С другой стороны,

$$\max_H \|\mathscr{L} H\|/\|H\| \leqslant 2\|A\|. \tag{10}$$

Подставив (9) и (10) в неравенство (8), придем к утверждению

$$\mu(\mathscr{L}) \leqslant N\theta^3_{\min}(A),$$

получение которого завершает доказательство теоремы 4.

§ 3. Метод минимальных итераций для решения уравнения Ляпунова

Опишем вариант известного метода минимальных итераций, специально приспособленный для решения уравнения Ляпунова

$$\mathscr{L} H \equiv HA + A^*H = -C \tag{1}$$

и для получения в процессе этого решения оценок сингулярных чисел оператора $\mathscr{L}$ и числа обусловленности $\mu(\mathscr{L})$.

Отправляясь от заданной C, построим с помощью операторов $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}^*$ (см. § 2) последовательность симметрических матриц H_j, G_j, F_j и числовых параметров ρ_j, s_{j+1}, φ_{j+1} $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ по следующим правилам:

$$\begin{gathered}
H_0 = F_0 = 0; \quad G_0 = \|C\|_E^{-1} \cdot C; \\
s_j = \|\mathscr{L}^* G_{j-1} - \rho_{j-1} F_{j-1}\|_E; \quad F_j = s_j^{-1}[\mathscr{L}^* G_{j-1} - \rho_{j-1} F_{j-1}]; \\
\varphi_j = s_j^{-1}(\mathscr{L} H_{j-1} + C, G_{j-1})_E; \quad H_j = H_{j-1} - \varphi_j F_j; \\
\rho_j = \|\mathscr{L} F_j - s_j G_{j-1}\|_E; \quad G_j = \rho_j^{-1}[\mathscr{L} F_j - s_j G_{j-1}].
\end{gathered} \tag{2}$$

Из этих правил можно вывести, что при $j \geqslant 1$ F_j, G_j, H_j представимы следующим образом:

$$\begin{gathered}
H_j = \mathscr{L}^* \{\alpha_1^{(j)} I + \alpha_2^{(j)} [\mathscr{L}\mathscr{L}^*] + \ldots + \alpha_j^{(j)} [\mathscr{L}\mathscr{L}^*]^{j-1}\} C; \\
F_j = \mathscr{L}^* \{\beta_1^{(j)} I + \beta_2^{(j)} [\mathscr{L}\mathscr{L}^*] + \ldots + \beta_j^{(j)} [\mathscr{L}\mathscr{L}^*]^{j-1}\} C; \\
G_j = \{\gamma_0^{(j)} I + \gamma_1^{(j)} [\mathscr{L}\mathscr{L}^*] + \ldots + \gamma_j^{(j)} [\mathscr{L}\mathscr{L}^*]^{j}\} C;
\end{gathered} \tag{3}$$

вследствие чего

$$\mathscr{L} H_j + C = \{I + \alpha_1^{(j)} [\mathscr{L}\mathscr{L}^*] + \ldots + \alpha_j^{(j)} [\mathscr{L}\mathscr{L}^*]^{j}\} C. \tag{4}$$

Более сложно, индукцией по j с использованием теоремы Ланцоша [5] об ортогонализованных итерациях самосопряженного оператора $\mathscr{L}\mathscr{L}^*$, доказывается, что каждая из последовательностей $\{G_i\}_0^j$,

$\{F_j\}_1^j$ ортонормированна $((G_i, G_j)_E = \delta_{ij}, (F_i, F_j)_E = \delta_{ij})$ и что коэффициенты $\alpha_0^{(j)} = 1$, $\alpha_1^{(j)}, \ldots, \alpha_j^{(j)}$ оказываются такими, что обеспечивают минимальное возможное значение $\|\mathscr{L} H_j + C\|_E$.

Это доказательство здесь не приводится за недостатком места. Отметим лишь, что формулы (2), описывающие предлагаемый алгоритм, получены из формул алгоритма работы [6], применяемого к самосопряженному неотрицательному оператору $\mathscr{L}\mathscr{L}^*$ после того, как действие $\mathscr{L}\mathscr{L}^*$ было разложено на последовательное действие $\mathscr{L}^*$, $\mathscr{L}$ и после использования в описании процесса ортогонализованной последовательности $\{F_j\}$ матриц вида

$$F_j = \mathscr{L}^*\{\omega_0 G_0 + \omega_1 G_1 + \ldots + \omega_{j-1} G_{j-1}\}.$$

Естественно поэтому, что доказательство, подробно проведенное в [6], может распространяться и на рассматриваемый здесь процесс (2).

Из утверждения минимальности $\|\mathscr{L} H_j + C\|_E$, обеспечиваемой выбором коэффициентов $\alpha_i^{(j)}$ полинома $a^{(j)}(\lambda) = \sum_i \alpha_i^{(j)} \lambda^i$, без труда можно заключить, что

$$\|\mathscr{L} H_j + C\|_E \leqslant \min_{(\alpha_1^{(j)}, \ldots \alpha_j^{(j)})} \max_\lambda |a^{(j)}(\lambda)| \cdot \|C\|_E, \tag{5}$$

где $\max|a^{(j)}(\lambda)|$ рассматривается при λ, лежащих на отрезке

$$\sigma_1^2(\mathscr{L}) = \sigma_1(\mathscr{L}\mathscr{L}^*) \leqslant \lambda \leqslant \sigma_{N_1}(\mathscr{L}\mathscr{L}^*) = \sigma_{N_1}^2(\mathscr{L}),$$
$$(N_1 = N(N+1)/2),$$

и выбирается наименьшее возможное значение этого минимума среди всех полиномов $a^{(j)}(\lambda)$ с равным единице коэффициентом $\alpha_0^{(j)} = 1$. Неравенства (5) позволяют, воспользовавшись известными свойствами полиномов, наименее уклоняющихся от нуля, установить неравенства

$$\|\mathscr{L}(H_j - H)\|_E = \|\mathscr{L} H_j + C\|_E \leqslant 2[\mu(\mathscr{L}) - 1]^j/[\mu(\mathscr{L}) + 1]^j \cdot \|C\|_E;$$
$$\|H_j - H\|_E \leqslant 2/\sigma_1(\mathscr{L})[\mu(\mathscr{L}) - 1]^j/[\mu(\mathscr{L}) + 1]^j \cdot \|C\|_E,$$

дающие оценку скорости сходимости H_j к H.

Заметим, что на самом деле при вычислении H_j процесс доводить до полной сходимости и не требуется. Достаточно, вычисляя время от времени минимальное собственное значение симметрической $\mathscr{L} H_j$, остановиться на таком j, при котором $(-\mathscr{L} H_j)$ окажется уже положительно определенной, и, введя новую правую часть, $\widetilde{C} = -\mathscr{L} H_j$, рассматривать решение с этой новой правой частью.

Заметим еще, что метод минимальных итераций, если не учитывать неизбежных вычислительных погрешностей, должен был бы приводить к точному решению за конечное число шагов, не превышающее в нашем случае $N_1 = N(N+1)/2$.

Из формул (2) следуют равенства

$$\mathscr{L} F_j = \rho_j G_j + s_j G_{j-1},$$

которые означают, что оператор $\mathscr{L}$ представляется в виде произведения ортогонального преобразования, переводящего ортонормированный базис $\{F_1, F_2, \ldots, F_j, \ldots\}$ в ортонормированный же базис из матриц $\{G_0, G_1, \ldots, G_{j-1}, \ldots\}$, на преобразование, записываемое в этом последнем базисе двухдиагональной матрицей

$$B_{N_1} = \begin{pmatrix} s_1 & & & & \\ \rho_1 & s_2 & & & 0 \\ & \cdot & \cdot & & \\ 0 & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & \rho_{N_1-1} & s_{N_1} \end{pmatrix}$$

Поэтому $\sigma_{N_1}(\mathscr{L}) = \sigma_{N_1}(B_{N_1})$, $\sigma_1(\mathscr{L}) = \sigma_1(B_{N_1})$, $\mu(\mathscr{L}) = \mu(B_{N_1})$. Если бы провели процесс (2) до конца, выполнив N_1 шагов, то, вычисляя сингулярные числа двухдиагональной B_{N_1}, сумели бы определить $\mu(\mathscr{L})$.

На самом же деле, сингулярные числа даже урезанных матриц $B_k (k \leqslant N_1)$, которые формируются по результатам k шагов процесса (2), позволяют получить оценки сингулярных чисел и числа обусловленности B_{N_1}, так как имеют место следующие, без труда обосновываемые неравенства $\sigma_1(B_{k-1}) \geqslant \sigma_1(B_k) \geqslant \sigma_1(B_{N_1})$, $\sigma_{N_1}(B_{N_1}) \geqslant \sigma_k(B_k) \geqslant \sigma_{k-1}(B_{k-1})$, $\mu(\mathscr{L}) = \mu(B_{N_1}) \geqslant \mu(B_k) \geqslant \mu(B_{k-1})$. Вычисление сингулярных чисел B_k совпадает, как известно, с вычислением положительных собственных значений составной матрицы

$$\widehat{B}_k = \begin{pmatrix} 0 & B_k^* \\ B_k & 0 \end{pmatrix},$$

которая одновременной и одинаковой перестановкой строк и столбцов приводится к якобиеву виду

$$\begin{pmatrix} 0 & s_1 & & & & & \\ s_1 & 0 & \rho_1 & & & 0 & \\ & \rho_1 & 0 & s_2 & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 0 & & & \rho_{k-1} & 0 & s_k \\ & & & & & s_k & 0 \end{pmatrix}$$

Это обстоятельство позволяет использовать для определения спектра $\widehat{B}_k$ хорошо известные стандартные процедуры.

При исследовании алгоритма (2) по схеме, кратко намеченной в этом параграфе, не учитывается влияние вычислительных погрешностей. Однако значительное число проведенных нами экспериментов показало его надежность, что позволяет рекомендовать этот алгоритм для использования при исследовании матриц A на устойчивость.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Уилкинсон Дж. Х.** Алгебраическая проблема собственных значений. М., Наука, 1970. 564 с.
2. **Сарыбеков Р. А.** Экстремальные функции Ляпунова систем уравнений второго порядка.— Сиб. мат. журн., 1977, т. 43, № 5, с. 1159—1167.
3. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М., Наука, 1967. 575 с.
4. **Фурасов В. Д.** Устойчивость движения. Оценки и стабилизация. М., Наука, 1977, 247 с.
5. **Хаусхолдер А. С.** Основы численного анализа. М., ИЛ, 1956. 320 с.
6. **Годунов С. К., Прокопов Г. П.** Вариационный подход к решению больших систем линейных уравнений, возникающих в сильно эллиптических задачах. Препринт Ин-та прикл. мат. АН СССР. М., 1968. 40 с.
7. **Булгаков А. Я., Годунов С. К.** Качество устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и его вычислительная оценка. Препринт № 51 ВЦ СО АН СССР, семинар Г. И. Марчука. Новосибирск, 1978. 24 с.

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. Н. ГУДОВИЧ

(*Воронеж*)

Исследуются три класса разностных методов произвольного порядка аппроксимации для обыкновенных дифференциальных уравнений. Дается приложение к теории a-устойчивости.

Условимся понимать под корректностью задачи

$$u^{(n)}(t) + \sum_{r=0}^{n-1} l_r(t)\, u^{(r)}(t) = f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad l_r, f \in C[0,1]; \tag{1}$$

$$\sum_{r=0}^{n-1} \alpha_{r,p} u^{(r)}(0) + \beta_{r,p} u^{(r)}(1) = \varphi_p, \quad p = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\varphi = \{\varphi_p\} \in R^n \tag{2}$$

ее однозначную разрешимость в $C^n[0, 1]$ при любых f, φ.

Пусть h ($1/h$ натуральное)— шаг сетки на $[0, 1]$; $t_i = ih (i = 0, 1, \ldots, 1/h)$ — ее узлы, $u^h = \{u_i^h\}_{i=0}^{1/h}$ — сеточная функция;

$$\left(\triangle^m u\right)(t) = \sum_{q=-s}^{l} a_q u(t + qh)/h^m, \quad a_q \text{ не зависят от } h; \tag{3}$$

— аппроксимация $u^{(m)}(t)$ k-го ($k \geqslant 1$) порядка точности по h;

$$\left(\overline{\triangle}^m u\right)(t) = \sum_{q=0}^{m} C_m^q (-1)^{m-q} u(t + qh)/h^m, \quad C_m^q = m!/q!(m-q)! \tag{4}$$

— аппроксимация $u^{(m)}(t)$ 1-го порядка точности по h; $(\Delta^m u^h)_i$, $(\overline{\Delta}^m u^h)_i$ — сеточные аналоги (3), (4) в узле $t = t_i$.

Условия (2) заменим системой

$$\sum_{r=0}^{n-1} \alpha_{r,p} \left(\triangle^r u^h\right)_0 + \beta_{r,p} \left(\triangle^r u^h\right)_{1/h} = \varphi_p, \quad p = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{5}$$

а уравнение (1) — системами вида

$$\left(\triangle^n u^h\right)_i + \sum_{r=0}^{n-1} l_r(t_i) \left(\triangle^r u^h\right)_i = f(t_i), \quad i = 0, 1, \ldots, 1/h - n; \tag{6}$$

$$\left(\overline{\triangle}^n u^h\right)_i + \sum_{j=-\gamma}^{\delta} b_j \sum_{r=0}^{n-1} l_r(t_{i+j}) \left(\triangle^r u^h\right)_{i+j} = \sum_{j=-\gamma}^{\delta} b_j f(t_{i+j}),$$
$$i = 0, 1, \ldots, 1/h - n. \tag{7}$$

В отличие от (6), где для замены всех производных используются аппроксимации порядка h^k, в системе (7) старшая производная заменена аппроксимациями порядка h, а порядок h^k аппроксимации уравнения (1) системой (7) на решениях класса C^{n+k} достигается подбором констант b_j (формулы для вычисления b_j по заданному k см. в [1]).

Объединение по i, h ($h \to 0$) используемых в (5)— (7) шаблонов $(s(i),\ l(i),\ \{a_q(i)\}_{q=-s(i)}^{l(i)})$ аппроксимаций (3) и шаблонов $(\gamma(i),\ \delta(i),\ \{b_j(i)\}_{j=-\gamma(i)}^{\delta(i)})$ считается конечным (конечно-порожденность).

Задачи (6), (5) и (7), (5) трактуем как уравнения $A_h u^h = F^h$ с оператором из пространства функций $v^h = \{v_i^h\}_{i=0}^{1/h}$ с нормой

$$\|v^h\| = \max_{0 \leqslant m \leqslant n} \max_{0 \leqslant i \leqslant 1/h - m} \left|\left(\overline{\triangle}^m v^h\right)_i\right| \tag{8}$$

в пространство наборов $(\psi,\ g^h) = \left(\{\psi_p\}_{p=0}^{n-1},\ \{g_i^h\}_{i=0}^{1/h-n}\right)$ с нормой

$$\|(\psi,\ g^h)\| = \max\left\{\max_p |\psi_p|,\ \max_i |g_i^h|\right\}, \tag{9}$$

а под устойчивостью этих задач понимаем существование A_h^{-1} при всех $h \leqslant h_0$ и равномерную по h ограниченность A_h^{-1}.

Т е о р е м а 1. Задача (7), (5) устойчива и только тогда, когда краевая задача (1)—(2) корректна.

Аппроксимация (3) в точке t есть линейная комбинация аппроксимаций (4) в близлежащих узлах $t+jh$ с коэффициентами d_j, зависящими лишь от a_q:

$$(\Delta^m u)(t) = \sum_{j=0}^{l+s-m} d_j (\overline{\Delta}^m u)(t-(s-j)h).$$

Эти разложения для $(\Delta^n u^h)_i$ из (6) порождают матрицу Q_h, действующую в $R^{1/h-n+1}$, согласно формуле

$$Q_h \{x_i\}_{i=0}^{1/h-n} = \{y_i\}_{i=0}^{1/h-n}, \quad y_i = \sum_{j=0}^{l(i)+s(i)-n} d_j(i)\, x_{i-s(i)+j}.$$

Теорема 2. Пусть задача (1)—(2) корректна. Задача (6)—(5) устойчива тогда и только тогда, когда первая норма матрицы Q_h^{-1} равномерно по h ограничена при всех $h \leqslant h_1$[1].

Итак, для систем (7) с канонической аппроксимацией старшей производной проблема устойчивости не возникает. В случае же неканонических аппроксимаций возникает дополнительное условие на Q_h^{-1}; способы построения систем (6), удовлетворяющих этому условию, указаны в [2, 3].

Из теорем 1, 2 и теоремы А. Ф. Филиппова вытекают соответствующие теоремы сходимости с порядком h^k.

Пусть $A_h u^h = F^h$, $F^h = \left\{\sum_{j=-\gamma}^{\delta} b_j f(t_{i+j})\right\}_{i=0}^{1/h-n}$ — задача (7), (5) k-го порядка аппроксимации, а $\overline{A}_h$ — оператор другой задачи (7), (5) более низкого порядка аппроксимации.

Теорема 3. Пусть задача (1)—(2) корректна и пусть при заданных f, φ решение $u \in C^{n+k}$. k-я итерация $u^{h,k} = \{u_i^{h,k}\}$ процесса

$$\overline{A}_h u^{h,\nu+1} = (\overline{A}_h - A_h)u^{h,\nu} + F^h, \quad \nu = 0, 1, \ldots, k-1 \tag{10}$$

(ν — номер итерации) при $h \to 0$ сходится к u в норме (8) с порядком h^k.

Разностный метод (10) позволяет находить сеточные приближения высокого порядка точности на основе алгоритмов для схем низкого порядка аппроксимации.

В случае задачи Коши для системы $u'(t) + A(t)u(t) = f(t)$, $t \geqslant 0$, в качестве A_h, F^h примем параметры задачи

$$(u_{i+1} - u_i)/h + \sum_{j=-\gamma}^{\delta} b_j A(t_{i+j})\, u_{i+j} =$$
$$= \sum_{j=-\gamma}^{\delta} b_j f(t_{i+j}), \quad i = 0, 1, \ldots, \quad u_0 = \varphi \tag{11}$$

[1] Теорема справедлива и тогда, когда не все узлы аппроксимации в (6) попарно различны.

k-го порядка аппроксимации, а в качестве $\overline{A}_h$ — оператор неявного метода Эйлера

$$(u_{i+1} - u_i)/h + A(t_{i+1})u_{i+1} = f(t_{i+1}), \; i = 0, 1, \ldots, \; u_0 = \varphi. \tag{12}$$

Теорема 4. Метод (10) с параметрами A_h, F^h, $\overline{A}_h$ задач (11), (12) a-устойчив при любом k.

В случае большой жесткости в качестве (11) рекомендуются схемы с $\gamma = -1$ (схемы «с забеганием вперед»).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гудович Н. Н.** Об одном способе построения заведомо устойчивых разностных схем любого наперед заданного порядка аппроксимации для обыкновенных дифференциальных уравнений. Деп. ВИНИТИ, № 3992-77,9 с.
2. **Гудович Н. Н.** О новом методе построения устойчивых разностных схем любого наперед заданного порядка аппроксимации для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.— Журн. вычислит. мат. и мат. физики, 1975, т. 15, вып. 4, с. 931—945.
3. **Гудович Н. Н.** Устойчивость разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений.— Дифференциальные уравнения и их применение. Вильнюс, 1975, вып. 12, с. 9—35.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ МИНИМИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПРИ РЕШЕНИИ СИЛЬНОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Е. Г. ДЬЯКОНОВ

(Москва)

Посвящается с благодарностью С. Л. Соболеву, пробудившему у автора интерес к проблемам оптимизации численных методов решения краевых задач еще в годы учебы в аспирантуре.

I. Пусть $\widehat{H}_N$ — N-мерное подпространство гильбертова пространства H с базисными функциями $\psi_1, \ldots, \psi_N$ и задача нахождения $u \in H$ такой, что для $\forall v \in H$ $b(u; v) = l(v)$

$$b(u;\ v) = l(v) \tag{1}$$

заменена с помощью проекционного метода задачей отыскания $\widehat{u}_N \in \widehat{H}_N$ такой, что для $\forall \widehat{v}_N \in \widehat{H}_N$

$$b(\widehat{u}_N;\ \widehat{v}_N) = l(\widehat{v}_N). \tag{2}$$

Здесь $b(u;\ v)$ и $l(v)$ — заданные ограниченные билинейная форма и линейный функционал над H, а

$$\widehat{u}_N = \sum_{r=1}^{N} u_r \psi_r. \tag{3}$$

Теорема 1. Пусть $b(u;\ v) = b_R(u;\ v) + b_0(u;\ v)$, где $b_R(u;\ v)$ — симметричная, ограниченная, положительная билинейная форма над H;

$$\forall\ u,\ v\,|\,b_0(u;\ v)| \leqslant K_1\|u\|_0\|v\|_R,$$

где $\|v\|_R^2 \equiv b_R(u;\ v)$, а $\|u\|_0$—норма некоторого нормированного пространства, содержащего H. Пусть (1) и (2) имеют единственные решения и

$$\|u-\widehat{u}_N\|_0 \leqslant K_2 N^{-\alpha}\|u-\widehat{u}_N\|_R,\ \alpha > 0. \tag{4}$$

Тогда при $N > (K_1K_2)^{-1/\alpha}$

$$\|u - \widehat{u}_N\|_R \leqslant (1 - K_1K_2N^{-\alpha})^{-1}\ \rho_{H_R}(u;\ \widehat{H}_N), \tag{5}$$

где $\rho_{H_R}(u;\ \widehat{H}_N)$ — расстояние в смысле $\|\ \|_R$ от u до $\widehat{H}_N$; если в (4) $\alpha = 0$, то (5) имеет место при $K_1K_2 < 1$.

Оценка (5) является уточнением оценки J. Céa и переходит в неулучшаемую оценку при $K_1 \to 0$; вывод ее во многом следует доказательству известных теорем Г. М. Вайникко и С. Г. Михлина.

II. Пусть Γ — граница ограниченной q-связной области Ω на плоскости $x \equiv (x_1,\ x_2)$ состоит из замкнутых кривых $\Gamma_r (r = 1, \ldots, q)$, не пересекающих себя и друг друга и составленных из конечного числа гладких дуг γ_l, встречающихся под углами φ_t $(0 < \varphi \leqslant \varphi_t \leqslant 2\pi-\varphi)$, причем область, ограниченная Γ_1, содержит остальные Γ_r.

Пусть $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ состоит из конечного числа замкнутых дуг и H — подпространство функций из $W_2^1(\Omega)$, равных 0 на Γ_0. Предполагаем, что конечным числом разрезов по отрезкам область Ω может быть разбита на p подобластей Ω_r (на рис. 1 эти разрезы обозначены пунктиром, $p = 9$), для каждой из которых возможно построение триангуляций типа $T(Q,\ N_1,\ N_2)$ алгоритмами из [1, 2]. При этом существует идеальная область Q на плоскости $z \equiv (z_1, z_2)$, составленная из p прямоугольников Q_r (со сторонами, параллельными координатным осям, и общими точками лишь на

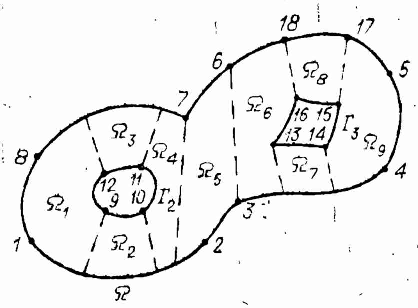


Рис. 1.

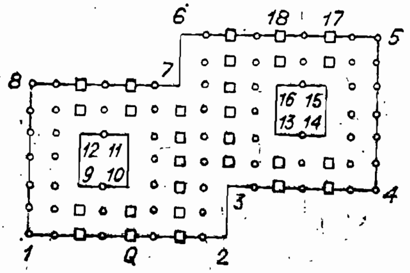


Рис. 2.

вертикальных отрезках), такая, что указанные разбиения Ω на Ω_r и Q на Q_r топологически эквивалентны при отображении

$$z = \Pi x \tag{6}$$

и все вертикальные замкнутые отрезки границы $\Gamma(Q)$, являющиеся продолжениями образов разрезов в Ω, принадлежат образу Γ_0.

На рис. 2 точки образов разрезов обозначены квадратиками. Точки A на границах указаны номерами от 1 до 18, одинаковые номера имеют точки, соответствующие друг другу при отображении (6). Вертикальные отрезки границы A_9A_{12}, $A_{10}A_{11}$, A_7A_8, A_2A_3, $A_{13}A_{16}$, $A_{14}A_{15}$, должны принадлежать образу Γ_0.

Для простоты предположим также, что если прообраз какой-нибудь горизонтальной стороны Q_r содержит дугу из Γ_0, то он целиком принадлежит Γ_0 (иначе надо было бы провести новое подразбиение Ω_r). В случае односвязной области Ω возможность нужного разбиения Ω следует из теорем о разбиениях, приведенных в [2], причем в качестве Q может быть взят прямоугольник. Построим по образцу [1, 2] триангуляции Ω_r (на обычные треугольники и криволинейные приграничные треугольники) типа $T(Q, N_{1,r}, N_{2,r})$ с $N_{2,r} = K_r 2^{p_r}$ так, что для всей области Ω получается триангуляция, отображаемая с помощью (6) на простейшую триангуляцию рассматриваемой идеальной области Q и получаемую за счет использования квадратной сетки с шагом h и последующего разбиения каждого квадратика сетки одной из его диагоналей на два треугольника. Узлы сетки для Q и Ω обозначаем через z_i и $x_i (i \equiv (i_1, i_2))$; Q_h — множество узлов сетки, принадлежащих Q, но не принадлежащих образу Γ_0 при отображении (6) (на рис. 2 точки Q_h помечены кружками и квадратиками; образу Γ_0 помимо ранее указанных отрезков принадлежит также отрезок $A_{17}A_{18}$); Ω_h — прообраз Q_h. Шаг h считаем имеющим тот же порядок, что и максимальная сторона треугольников из триангуляции Ω. Рассмотрим задачу (1) с указанным выше H и

$$b(u; v) \equiv b_L(u, v) \equiv \iint\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{r,l=1}^{2} a_{r,l}(x) \frac{\partial u}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_r} + \sum_{r=1}^{2} b_r(x) \frac{\partial u}{\partial x_r} v + c(x) uv \right\} d\Omega + \int\limits_{\Gamma \setminus \Gamma_0} \sigma(s) uv ds; \tag{7}$$

$$l(v) \equiv \iint\limits_{\Omega} \sum_{r=1}^{2} f \frac{\partial v}{\partial x_r} d\Omega + \int\limits_{\Gamma \setminus \Gamma_0} f_\Gamma(s) v ds \tag{8}$$

Предполагаем, например, что $b(u; u)$ — положительна над H и что решение $u(x)$ этой смешанной краевой задачи представимо в виде

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n_2} c_k \chi_k(x) + u_0(x),$$

где $u_0(x) W_2^{1+m}(\Omega)$, $0 < m \leqslant 1$, а $\chi_k(x) \subset W_2^1(\Omega)$ — известные функции, передающие асимптотику $u(x)$ вблизи особых точек (например, угловых точек Γ и точек перемены типа граничного условия), равные нулю на Γ_0. Точкам $z_i \in Q_h$ поставим в соответствие базисные кусочно-линейные функции $\widehat{\psi}_i(z)$, а точкам $x_i \in \Omega_h$ — функции $\psi_i(x) \equiv \widehat{\psi}_i(\Pi_x)$.

Кроме функций $\psi_i(x)$ (пусть их число n_1), включим в базис подпространства $\widehat{H}_N$ функции $\chi_k(x)$, обозначая их через $\psi_r(x)$, $r = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2$; $N = n_1 + n_2$. Тем самым за счёт указанной специальной структуры $\widehat{H}_N$ получаем необходимую модификацию метода (2) с оценкой погрешности

$$\| u - \widehat{u}_N \|_{W_2^1/(\Omega)} \leqslant K h^m. \tag{9}$$

III. Достоинство данной модификации состоит в том, что для отыскания $\widehat{u}_N$ может быть построен эффективный итерационный метод, позволяющий найти $\widehat{u}_N$ с точностью ε при затрате $0(h^{-2} \times \times |\ln h| \ln \varepsilon|)$ арифметических действий, что при $h^m \asymp \varepsilon$ приводит к получению логарифмически оптимального по трудоемкости метода решения рассматриваемой краевой задачи. Запишем задачу (2) в матричном виде

$$\widehat{L}_h u_h = f_h, \tag{10}$$

где u_h — вектор из компонент u_r [см. (3)], и рассмотрим оператор $\widehat{\Lambda}_{h,\chi}$, являющийся проекционным оператором, порожденным билинейной формой

$$b_\Lambda(u; v) \equiv \sum_{r=1}^{p} \iint_{Q_r} \bar{a}_r \operatorname{grad}_z u \operatorname{grad}_z v dQ + \int_{\Gamma^*(Q)} \bar{\sigma}(s) uv ds. \tag{11}$$

Здесь $\bar{a}_r = \mathrm{const} > 0$ на каждом Q_r, $\bar{\sigma}(s) = \mathrm{const} \geqslant 0$ на каждой стороне Q_r, являющейся частью образа $\Gamma \setminus \Gamma_0$ при отображении (6), обозначаемого через $\Gamma^*(Q)$, и при выборе подпространства $\widehat{H}_N(Q)$ из $W_2^1(Q)$, порожденного базисными кусочно-линейными функциями $\widehat{\psi}_i(z)$ $(z_i \in Q_h)$ и $\widehat{\chi}_r(z) \equiv \chi_r(\Pi_z^{-1})$; $b_\Lambda(u; u) \geqslant \geqslant \varkappa_0 \| u \|^2_{W_2^1/\Omega}$, $\varkappa_0 > 0$.

Оператор при указанной нумерации функций $\widehat{\psi}_r(z)$ примет вид

$$\widehat{\Lambda}_{h,\chi} \equiv \begin{pmatrix} \widehat{\Lambda}_h & \widehat{\Lambda}_{h,1} \\ \widehat{\Lambda}^*_{h,1} & \widehat{\Lambda}_{h,2} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где $\widehat{\Lambda}_h$ и $\widehat{\Lambda}_{h,2}$ — квадратные матрицы порядка n_1 и n_2;

$$\widehat{\Lambda}_h \equiv (b_\Lambda(\widehat{\psi}_r; \widehat{\psi}_l)), \; r = 1, \ldots, n_1, \; l = 1, \ldots, n_1. \tag{13}$$

Поскольку число функций $\widehat{\chi}_r(z)$ конечно, можно предполагать, что они ортогональны в смысле $(u, v)_\Lambda \equiv b'_\Lambda(u; v)$.

Потребуем теперь, чтобы $\overline{\sigma}(s)=0$ на всех горизонтальных сторонах границы Q, принадлежащих $\Gamma^*(Q)$.

Теорема 2. Решение системы

$$\widehat{\Lambda}_{h,\chi}u_h = \widetilde{g}_h \tag{14}$$

может быть найдено с точностью ε_1 в норме $\|u_h\|_{\widehat{\Lambda}_{h,\chi}}$ при затрате $O(h^{-2}|\ln(\varepsilon_1 h)|)$ арифметических действий. Это осуществляется с помощью метода окаймления [1] с оператором $\widehat{\Lambda}_h$ в роли $L_{1,1}$. Помимо $O(h^{-2})$ действий он требует (n_2+1)-кратного решения системы вида

$$\widehat{\Lambda}_h v_h = g_h \tag{15}$$

с квадратной матрицей $\widehat{\Lambda}_h = \widehat{\Lambda}_h^* > 0$ порядка n_1 и вектором v_h, определяемым на Q_h и Ω_h. Обозначим через R_h множество точек Q_h, лежащих на вертикальных разрезах (на рис. 2 эти точки помечены квадратиками, остальные точки Ω_h — кружками), и разобьем векторы $v_h \equiv v$ и $g_h \equiv g$ на подвекторы $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$, определенные на $Q_h \diagdown R_h$ и на R_h. Соответственно этому разобьем Λ_h на блоки $\begin{pmatrix} \Lambda_{1,1} & \Lambda_{1,2} \\ \Lambda_{2,1} & \Lambda_{2,2} \end{pmatrix}$. Тогда метод окаймления для (15) приводит к системе

$$\Lambda_2 v_2 \equiv \left(\Lambda_{2,2} - \Lambda_{2,1}\Lambda_{1,1}^{-1}\Lambda_{1,2}\right) v_2 = \widetilde{g}_2 \tag{16}$$

с $\widetilde{g}_2 \equiv g_2 - \Lambda_{1,1}^{-1} g_1$ и $\Lambda_2 = \Lambda_2^*$. Доказано, что

$$\delta_0 h \Lambda_{2,2} \leqslant \Lambda_2 \leqslant \Lambda_{2,2}, \tag{17}$$

где $\delta_0 > 0$ и не зависит от h. Поэтому итерационный метод

$$\Lambda_{2,2}\left(v_2^{n+1} - v_2^n\right) = -\gamma_n\left(\Lambda_2 v_2^n - \widetilde{g}_2\right) \tag{18}$$

для нахождения v_2 с точностью ε_2 в смысле нормы $\|\ \|_{\Lambda_{2,2}}$ требует $O(h^{-1/2}|\ln\varepsilon_2|$ итераций.

Решение же систем вида $\Lambda_{1,1}v_1 = g_1$ распадается на решение независимых подсистем в отдельных прямоугольниках Q_r и может осуществляться с помощью БДПФ по z_2, требующего $O(h^{-2}|\ln h|)$ действий для нахождения всего v_1. Если вектор g_1 отличен от нуля лишь на конечном числе вертикальных линий, то можно найти v_1 на любом конечном числе вертикальных линий при затрате только $O(h^{-1}|\ln h|)$ арифметических действий. В силу этого каждую итерацию (18) можно осуществлять с затратой только $O(h^{-1}|\ln h|)$ действий, а решение (15) с точностью ε_3 в смысле нормы $\|\ \|_{\widehat{\Lambda}_h}$ можно найти при затрате $O(h^{-2}|\ln(\varepsilon_3 h)|)$ арифметических действий (ср. с [3]). Для решения (10) применяется итерационный метод

$$\widehat{\Lambda}_{h\chi}\left(u_h^{n+1} - u_h^n\right) = -\gamma_n\left(\widehat{L}_h u_h^n - f_h\right) + r_h^n/\varepsilon_3,$$

где слагаемое $r_h^n(\varepsilon_3)$ вызвано приближенным решением систем (15) и равнялось бы нулю при $\varepsilon_3 = 0$. Анализ его сходимости проводится обычным образом и показывает, что $\widehat{u}_N$ может быть найдена с точностью ε в $W_2^1(\Omega)$ при затрате $O(h^{-2}|\ln h||\ln \varepsilon|)$ действий. Поэтому при $h^m \asymp \varepsilon$ мы и получаем оценку $O(\varepsilon^{-2/m}|\ln \varepsilon|^2)$. Эту оценку можно заменить на $O(\varepsilon^{-2/m}|\ln \varepsilon|)$ при использовании последовательности сгущающихся триангуляций [2, 4]. Обобщения для случая сильноэллиптических систем, в том числе систем теории упругости, а также для нелинейных задач с монотонными и ограниченными операторами проводятся обычным образом. На основе результатов [5] возможны обобщения для задач на собственные значения.

IV. Рассмотрим случай задачи (1), (7), (8) при условиях теоремы 1 с $b_0(u; v) \equiv -d(u, v)$. Оценки погрешности для метода (2) дают (9). В возникающей же системе (10) оператор $\widehat{L}_h = \widehat{L}_h^* \equiv L$ может иметь несколько отрицательных собственных чисел $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k < 0$, которым соответствует подпространство H_λ из собственных функций с ортонормированным базисом $u_h^{(1)}, \ldots, u_h^{(k)}$:

$$L_h u_h = \lambda_r u_h^{(r)}, \quad r = 1, \ldots, k.$$

Предполагаем, что известна ортонормированная система функций $\widetilde{u}_h^{(1)}, \ldots, \widetilde{u}_h^{(k)}$ такая, что

$$\| u_h^{(r)} - \widetilde{u}_h^{(r)} \|_{L+dE} < \varepsilon_\lambda, \quad |\lambda_r - \widetilde{\lambda}_r| < \varepsilon_\lambda, \; \widetilde{\lambda}_r \equiv (L_h \widetilde{u}_h^{(r)}, \widetilde{u}_h^{(r)}).$$

Из [5] следует, что этого можно достичь при затрате $O(h^{-2}|\ln h| \times \times |\ln \varepsilon_\lambda|)$ действий. Подпространство, натянутое на $\widetilde{u}_h^{(1)}, \ldots \ldots, \widetilde{u}_h^{(k)}$, обозначим через $\widetilde{H}_\lambda$, а ортогональное к нему дополнение — через $\widetilde{H}_\lambda^\perp$. Ортогональные проекторы на $\widetilde{H}_\lambda$ и $\widetilde{H}_\lambda^\perp$ обозначим через $\widetilde{P}$ и $\widetilde{P}^\perp = E - \widetilde{P}$. Предлагается найти $(f_h, \widetilde{u}_h^{(r)})$ и

$$v_h \equiv \sum_{r=1}^{k} \widetilde{\lambda}_r^{(-1)} (f_h \widetilde{u}_h^{(r)}) \widetilde{u}_h^{(r)}, \; F \equiv f_h - \sum_{r=1}^{k} (f_h, \widetilde{u}_h^{(r)}) \widetilde{u}_h^{(r)}$$

и для решения системы

$$Lw = F \tag{19}$$

с $w \equiv u_h - v_h$ применять итерационный метод

$$w^{n+1} = \widetilde{P}^\perp [w^n - \gamma_n \widehat{\Lambda}_{h,\chi}^{-1} (L\widetilde{P}^\perp w^n - F)], \tag{20}$$

Теорема 3. При соответствующем выборе ε_λ, ε_3 и γ_n решение системы (19), а следовательно, и (10) можно найти с точностью ε в $\| \; \|_{\widehat{\Lambda}_{h,\chi}}$ при затрате $O(h^{-2}|\ln \varepsilon||\ln h|)$ действий; при этом $\widehat{u}_N$ (см. (3)) находится с точностью ε в $W_2^1(\Omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дьяконов Е. Г. Асимптотическая минимизация вычислительной работы при применении проекционно-разностных методов.— В кн.: Вариационно-разностные методы в математической физике. Новосибирск, 1978, с. 149—164.
2. Дьяконов Е. Г. О некоторых модификациях проекционно-разностных методов.— Вестн. МГУ. Сер. вычислит. мат. и киберн., 1977, т. 1, № 2, с. 3—19.
3. Кузнецов Ю. А. Блочно-релаксационные методы в подпространстве, их оптимизация и применения.— В кн.: Вариационно-разностные методы в математической физике. Новосибирск, 1978, с. 178—212.
4. Дьяконов Е. Г. Об использовании последовательностей сеток при решении сильноэллиптических систем.— В кн.: Вычислительные методы линейной алгебры. Новосибирск, 1977, с. 146—162.
5. Дьяконов Е. Г., Орехов М. Ю. О минимизации вычислительной работы в задачах на собственные значения.— Докл. АН СССР, 1977, т. 235, № 5, с. 1005—1008; Докл. АН СССР, 1978, т. 238, № 2, с. 264.

РАВНОМЕРНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ К РЕШЕНИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

С. КАРИМОВ

(*Ош*)

Рассмотрим систему

$$\varepsilon\dot{x} = F(x, y, t);$$
$$\dot{y} = f(x, y, t) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(0) = x^0, \; y(0) = y^0, \tag{2}$$

где x, F — n-мерные, y, f — m-мерные вектор-функции, $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Пусть выполнены следующие условия:

1. Функции $F(x, y, t)$, $f(x, y, t)$ в области

$$\Delta = \{\|x - \varphi(t) - \Pi(t, \varepsilon)\| \leqslant \delta, \; \|y - \psi(t)\| \leqslant \delta, \; t \in [0, 1]\}$$

по всем аргументам имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно, где $\delta > 0$ — некоторое постоянное; $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — решение соответствующей вырожденной системы для (1); $\Pi(t, \varepsilon)$ — погранслойная функция [1] нулевого порядка.

2. Матрица $F_x(\varphi, \psi, t)$ имеет собственные числа $\lambda_k(t)$ $(k = \overline{1, n})$, причем $\operatorname{Re}\lambda_k(t) < 0$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Известно [1], имеет место оценка

$$\|\Pi(t, \varepsilon)\| \leqslant ce^{-\frac{\chi t}{\varepsilon}} \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где c, χ — некоторые положительные постоянные.

В работе [2] дан один итерационный способ построения равномерных приближений к решению задачи (1), (2). Рассмотрим другой, с нашей точки зрения, более естественный способ построения равномерных приближений к решению задачи (1), (2).

В системе (1) сделаем замену

$$x = \varphi(t) + \Pi(t, \varepsilon) + \xi;$$
$$y = \psi(t) + z,$$

где ξ, z — новые неизвестные функции.

Для $\xi(t)$, $z(t)$ имеем

$$\xi(0) = 0; \ z(0) = 0.$$

Теперь систему (1) можно представить в виде

$$\varepsilon\dot{\xi} = A(t)\xi + B(t)z + \widetilde{F}_1(\xi, z, t) + \widetilde{F}_0(t, \varepsilon);$$
$$\dot{z} = D(t)\xi + C(t)z + \widetilde{F}_2(\xi, z, t) + f_0(t), \tag{3}$$

где

$$A(t) = F_x(\varphi + \Pi, \psi, t); \ B(t) = F_y(\varphi + \Pi, \psi, t);$$
$$D(t) = f_x(\varphi + \Pi, \psi, t); \ C(t) = f_y(\varphi + \Pi, \psi, t);$$
$$f(\varphi + \Pi, \psi, t) - f(\varphi, \psi, t) \equiv f_0(t);$$
$$\widetilde{F}_0(t, \varepsilon) = F(\varphi + \Pi, \psi, t) - \varepsilon\dot{\Pi} - \varepsilon\dot{\varphi}.$$

Для функции $\widetilde{F}_k(\xi, z, t)$ $(k = 1, 2)$ в области Δ имеет место

$$\|\widetilde{F}_k(\xi, z, t) - \widetilde{F}_k(\tilde{\xi}, \tilde{z}, t)\| \leqslant M\,[\|\xi - \tilde{\xi}\| + \|z - \tilde{z}\|] \times$$
$$\times [\|\xi\| + \|\tilde{\xi}\| + \|z\| + \|\tilde{z}\|], \ k = 1, 2,$$

$M > 0$ — некоторое постоянное.

В системе (3) сделаем замену

$$\xi = v - A^{-1}Bz.$$

Тогда получим систему

$$\varepsilon\dot{v} = A(t)v + F_1(v, z, t) + \varepsilon F_0(v, z, t); \tag{4}$$
$$\dot{z} = B_0(t)z + D(t)v + F_2(v, z, t) + f_0(t),$$

с начальным условием $v(0) = 0$, $z(0) = 0$,

где $$F_k(v, z, t) = \widetilde{F}_k(v - A_0z, z, t), \ k = 1, 2;$$
$$A_0 = A^{-1}B; \ B_0 = C - DA;$$
$$F_0(v, z, t) = A_0Dv + (\dot{A}_0 + A_0B_0)z + A_0F_2(v, z, t) + \frac{1}{\varepsilon}\widetilde{F}_0(t, \varepsilon),$$

причем функция $F_0(v, z, t)$ в области Δ по аргументам v, z удовлетворяет условию Липщица, а функции $F_k(v, z, t)$ $(k = 1, 2)$ — тому же условию, что и функции $\widetilde{F}_k(\xi, z, t)$, $k = 1, 2$.

Далее, пусть $V(t, \tau, \varepsilon)$, $W(t, \tau)$ — нормированные фундаментальные матрицы, соответственно следующих однородных систем:

$$\varepsilon\dot{V} = A(t)V;\ V(\tau, \tau, \varepsilon) = E_n;$$
$$\dot{W} = B_0(t)W;\ W(\tau, \tau, \varepsilon) = E_m.$$

Условимся, что постоянные, которые встречаются в вычислениях и не зависят от ε, обозначаются одной и той же буквой c.

При выполнении условий 1, 2, как известно [1], справедливы оценки

$$\|V(t, \tau, \varepsilon)\| \leqslant ce^{-\frac{\chi(t-\tau)}{\varepsilon}};$$
$$\|W(t, \tau)\| \leqslant c,\ 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant 1,$$

$\chi > 0$ — некоторая постоянная.

Систему (4) можно заменить следующей эквивалентной интегральной:

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t V(t, \tau, \varepsilon)[F_1(v, z, \tau) + \varepsilon F_0(v, z, \tau)]\,d\tau; \\ z &= \int_0^t W(t, \tau)[D(\tau)v + F_2(v, z, \tau) + f_0(\tau)]\,d\tau. \end{aligned} \tag{5}$$

Систему (5) будем решать методом последовательных приближений. Пусть $v_0(t) \equiv 0$, $z_0(t) \equiv 0$. Последующие приближения определим формулами

$$v_{k+1}(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t V(t, \tau, \varepsilon)[F_1(v_k, z_k, \tau) + \varepsilon F_0(v_k, z_k, \tau)]\,d\tau;$$

$$z_{k+1}(t) = \int_0^t W(t, \tau)[D(\tau)v_{k+1} + F_2(v_k, z_k, \tau) + f_0(\tau)]\,d\tau.$$

Теперь нетрудно проверить справедливость оценок

$$\|v(t)\| \leqslant c\cdot\varepsilon;\ \|z(t)\| \leqslant c\cdot\varepsilon;$$
$$\|v_k(t)\| \leqslant c\cdot\varepsilon;\ \|z_k(t)\| \leqslant c\cdot\varepsilon;$$
$$\|v - v_k\| \leqslant (c\cdot\varepsilon)^k;\ \|z - z_k\| \leqslant (c\cdot\varepsilon)^k.$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема. Пусть выполнены условия 1, 2. Тогда для решения задачи (1), (2), справедливы

$$\|x - x_k\| \leqslant c(c\cdot\varepsilon)^k;$$
$$\|y - y_k\| \leqslant c(c\cdot\varepsilon)^k,$$

где постоянная c не зависит от k и ε.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных уравнений. М., Наука, 1973, 272 с.
2. Боглаев Ю. П., Жданов А. В., Стельмах В. Г. Равномерные приближения к решениям некоторых сингулярно возмущенных нелинейных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 3, с. 395—406.

МЕТОД ВНУТРЕННИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ. НОВЫЙ ПРИЕМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. С. РЯБЕНЬКИЙ

(*Москва*)

Цель статьи — изложить новый прием численного решения граничных интегральных уравнений, к которым сводятся краевые задачи для уравнений с частными производными. Этот прием основан на комбинированном использовании разностных внутренних граничных условий и некоторых свойств проекторов Кальдерона.

§ 1. Разностные внутренние граничные условия [1]

Пусть

$$L_h u_n \equiv \sum_{k\in K} A_k u_{n+k} = f_n, \tag{1}$$

где n и k — мультиндексы; A_k — квадратные матрицы; f_n — заданная и u_n — искомая вектор-функции; K — конечное множество.

Пусть G — матрица, удовлетворяющая условиям

$$\sum_{k\in K} A_k G_{n+k} \equiv \sum G_{n+k} A_k = \delta_n^0 E. \tag{2}$$

Рассмотрим уравнение

$$L_h u_n = \sum_{k\in K} A_k u_{n+k} = f_n, \quad n \in D_0, \tag{3}$$

где D_0^h — произвольная сеточная область определения правой части f_n. Тогда множество D^h, которое пробегает точка $n+k$, если n и k пробегают независимо D_0^h и K, есть область определения решения u_n. Поставим в соответствие каждому $r \in D^h$ подмножество K_r множества K, состоящее из всех тех $k \in K$, для которых $r-k \notin D_0^h$. Границей Γ_h назовем множество всех тех точек $r \in D^h$, для которых K непусто.

Теорема. Сеточную вектор-функцию $\{u_r\}$, $r \in \Gamma_h$, можно доопределить всюду на D^h до некоторого решения уравнения (3) в том и только в том случае, если выполнены равенства

$$\sum_{r \in \Gamma_h} \left(\sum_{k \in K_r} G_{n-r+k} A_k \right) u_r + \sum_{m \in D_0} G_{n-m} f_m = u_n, \tag{4}$$

называемые внутренними граничными условиями.

Обозначим через U_{Γ_h} пространство вектор-функций $v_{\Gamma_h} = \{v_r\}$, $r \in \Gamma_h$, а через U'_{Γ_h} — подпространство, состоящее из всех тех v_{Γ_h}, для которых выполнено (4). Оператор P_h, $u_{\Gamma_h} = P_h v_{\Gamma_h}$, задаваемый формулой

$$u_n = \sum_{r \in \Gamma_h} \left(\sum_{k \in K_r} G_{n-r+k} A_k \right) v_r, \quad n \in \Gamma_h,$$

есть проектор U_{Γ_h} на U'_{Γ_h}. В случае $f_n \equiv 0$ условие (4) можно записать в форме

$$u_{\Gamma_h} - P_h u_{\Gamma_h} = 0. \tag{5}$$

Для справедливости формулы (4) или (5) достаточно, чтобы G_n, удовлетворяющее условиям (2), было определено не на всей сетке, а лишь в ограниченной ее части, достаточно большой, чтобы для любых точек n, $n' \in D^h$ точка $n - n'$ принадлежала этой области.

А. Я. Белянков [2] построил фундаментальное решение, так называемое циклическое фундаментальное решение, указав экономный алгоритм его вычисления для любой системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

§ 2. Граничные интегральные уравнения, использующие проекторы Кальдерона, и их дискретизация

Пусть для системы дифференциальных уравнений $Lu = 0$ известна матрица $G(x)$

$$LG = GL = \delta(x)E,$$

называемая двусторонним фундаментальным решением. Рассмотрим $Lu = f$ в области D с границей Γ. Пусть U_D — пространство достаточно гладких функций и Γ — достаточно гладкая граница. Тогда для решения $u \in U_D$ в случае $f \equiv 0$ имеет место формула Грина

$$u(x) = K(u)_\Gamma,$$

где $K(u)_\Gamma$ — интеграл по поверхности, в который входит фундаментальное решение и который зависит от комбинации функции u и ее производных. Эта комбинация обозначена $(u)_\Gamma \equiv \gamma u$.

Рассмотрим пространство U_Γ, которое пробегает γu, когда u пробегает U_D. Обозначим через $U'_\Gamma \subset U_\Gamma$ подпространство, которое пробегает $\gamma u = (u)_\Gamma$, если u пробегает подпространство $U'_D \subset U_D$ решений однородного уравнения $Lu = 0$.

Т е о р е м а. Оператор $P_\Gamma = \gamma K$ проектирует область определения оператора K на U'_Γ; P_Γ есть проектор Кальдерона для рассматриваемого случая. Очевидно, граничная задача

$$Lu = 0; \; lu_\Gamma = \varphi_\Gamma \tag{6}$$

равносильна задаче

$$u_\Gamma - P_\Gamma u_\Gamma = 0; \; lu_\Gamma = \varphi_\Gamma, \tag{7}$$

дополненной формулой $u = Ku_\Gamma$.

Будем считать, что нормы в пространствах U_D, U_Γ, Φ_Γ согласованы с операторами γ и l так, что эти операторы ограничены.

О п р е д е л е н и е. Задачу (6) назовем корректно поставленной, если при любом $\varphi_\Gamma \in \Phi_\Gamma$ существует решение $u \in U_D$, причем

$$\|u\|_{U_D} \leqslant c \|\varphi_\Gamma\|_{\Phi_\Gamma}, \quad c = \text{const}.$$

Введем пространство $\widehat{U}_\Gamma$, вложенное в U_Γ так, что $\|u_\Gamma\|_{U_\Gamma} \leqslant A \|u_\Gamma\|_{\widehat{U}_\Gamma}$, $A = \text{const}$. Будем считать, что

$$|K| \equiv \sup_{u_\Gamma \in \widehat{U}_\Gamma} \frac{\|Ku_\Gamma\|_{U_D}}{\|u_\Gamma\|_{\widehat{U}_\Gamma}} < \infty.$$

Т е о р е м а (о дискретизации). Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_s \in \widehat{U}_\Gamma$ и решение задачи (7) тоже принадлежит $\widehat{U}_\Gamma$, $u_\Gamma \in \widehat{U}_\Gamma$. Обозначим $u_\Gamma^{(s)} = \sum c_j e_j$, где числа $\{c_j\}$ найдены из условия, чтобы число

$$\delta_s^2 = \|u_\Gamma^{(s)} - P_\Gamma u_\Gamma^{(s)}\|_{U_\Gamma}^2 + \rho^2 \|lu_\Gamma^{(s)} - \varphi_\Gamma\|_{\Phi_\Gamma}^2, \quad \rho > 0, \tag{8}$$

было наименьшим возможным. Тогда

$$\|u_\Gamma - u_\Gamma^{(s)}\|_{U_\Gamma} \leqslant \left[1 + \|\gamma\| \cdot c \left(\frac{1}{\rho} + \|l\|\right)\right] \delta_s \leqslant$$

$$\leqslant \left[1 + \|\gamma\| \cdot c \left(\frac{1}{\rho} + \|l\|\right)\right] [(A + \|\gamma\| \cdot |K|)^2 + \rho^2 A^2 \|l\|^2]^{1/2} \varepsilon_s,$$

где

$$\varepsilon_s = \min_{\{\alpha_j\}} \left\| u_\Gamma - \sum_{j=1}^{s} \alpha_j e_j \right\|_{\widehat{U}_\Gamma}.$$

Эта теорема получена совместно с А. Я. Белянковым.

Доказательство данной теоремы опирается на следующую лемму, существенно использующую запись граничного условия $u_\Gamma - P_\Gamma u_\Gamma = 0$ с помощью проектора P_Γ.

Лемма [1]. Пусть $v_\Gamma \in U_\Gamma$ и

$$v_\Gamma - P_\Gamma v_\Gamma = \psi_\Gamma, \; l v_\Gamma = \varphi_\Gamma, \tag{9}$$

причем задача (6) корректно поставлена. Тогда

$$\|v_\Gamma\|_{U_\Gamma} \leqslant \|\gamma\| \cdot c \cdot \|\varphi_\Gamma\|_{\Phi_\Gamma} + [1 + \|\gamma\| \cdot \|l\| \cdot c] \cdot \|\psi_\Gamma\|_{U_\Gamma}, \tag{10}$$

где c — постоянная, входящая в определение корректности.

Доказательство. Из (9) следует, что

$$w_\Gamma \equiv v_\Gamma - \psi_\Gamma = P_\Gamma v_\Gamma \in U'_\Gamma,$$

а потому

$$w_\Gamma - P_\Gamma w_\Gamma = 0, \; l w_\Gamma = \varphi_\Gamma - l\psi_\Gamma.$$

В силу корректности задачи (6)

$$\|w_\Gamma\|_{U_\Gamma} = \|\gamma K w_\Gamma\|_{U_\Gamma} \leqslant \|\gamma\| \cdot \|K w_\Gamma\|_{U_D} \leqslant \|\gamma\| \cdot c \cdot \|\varphi_\Gamma - l\psi_\Gamma\|_{\Phi_\Gamma} \leqslant$$
$$\leqslant \|\gamma\| \cdot c \left(\|\varphi_\Gamma\|_{\Phi_\Gamma} + \|l\| \cdot \|\psi_\Gamma\|_{U_\Gamma} \right).$$

Отсюда непосредственно следует (10). Лемма доказана.

Если нормы квадратичные, то для $\{c_j\}$ из (8) возникает линейная система метода наименьших квадратов. Для вычисления коэффициентов этой системы надо вычислять несобственные и сингулярные интегралы.

Изложенный метод сведения задачи на границу близок к так называемому методу граничных интегральных уравнений (ГИУ) [3], в котором используется интегральное соотношение, возникающее при представлении решения по формуле Грина и при стремлении точки изнутри области к ее границе.

Изложенный метод редукции на границу отличается тем, что используется граничный проектор и дается обоснование сходимости дискретных аппроксимаций.

Для вычисления коэффициентов линейной системы в ГИУ используется прямое вычисление несобственных и сингулярных интегралов, основанное на выделении особенностей и знаний удобного аналитического вида фундаментальных решений.

§ 3. Пример

Новый прием численного решения краевых задач изложим на примере задачи Дирихле для уравнения Лапласа в плоской области D с границей Γ. В этом случае задано $u|_\Gamma$ и требуется найти $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma$, которую запишем приближенно в виде суммы

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = \sum_{j=1}^{s} c_j e_j(x),$$

где $e_j(x)$ — задано. Распространим решение на приграничную полосу некоторой малой ширины h по формуле Тейлора, положив в точке x'

$$u(x') \approx u(x) + (x' - x)\frac{\partial u}{\partial n}(x), \tag{11}$$

где $x' - x$ направлен по нормали n в точке $x \in \Gamma$. Выберем на границе некоторое число N опорных точек x_j, $j = \overline{1, N}$. Для каждой точки построим квадратную сетку с шагом h, одна из линий которой совпадает с касательной к Γ в опорной точке. Воспользуемся пятиточечным разностным уравнением Лапласа на этой сетке, отнеся к D_0^h те точки сетки, которые попали внутрь D. Выпишем внутренние граничные условия (4) для точек x_j' и x_j сеточной границы Γ_h, подставив всюду вместо значений u_Γ выражения, вычисленные по формуле (11). Условия (4) не выполнятся и возникнет невязка $\psi_j = \begin{pmatrix} \psi^0(x_j) \\ \psi^1(x_j') \end{pmatrix}$, зависящая от коэффициентов $\{c_j\}$. Числа c_j выберем так, чтобы минимизировать величину $\sum |\psi_j|^2$.

В точности реализовать описанную процедуру трудно, так как для этого надо знать значения разностного фундаментального решения на большой сетке, кроме того, вычисление ψ_j требует суммирования по всей сеточной границе Γ_h. Для сокращения вычислений это суммирование распространяется только по участку сеточной границы, который примыкает к участку криволинейной границы вблизи опорной точки. Остальная часть суммы заменяется интегралом, стоящим в континуальной формуле Грина. Этот интеграл распространен на оставшуюся часть криволинейной границы. Как интеграл от гладких функций он может быть экономно вычислен по квадратурным формулам.

В описанном алгоритме фундаментальное решение дифференциальной задачи, входящее в формулу Грина вне окрестности опорной точки, и фундаментальное решение разностной задачи в окрестности опорной точки должны быть выбраны согласованно. Для согласованного выбора можно воспользоваться одним из двух подходов.

Первый состоит в следующем. Вне окрестности опорной точки берется фундаментальное решение $g(x) = \frac{1}{2\pi}\ln|x|$. Внутри сеточного квадрата с центром в опорной точке в качестве значений разностного фундаментального решения используется решение разностного уравнения Лапласа с разностной δ-функцией в правой части и с граничными значениями, совпадающими со значениями функции $g(x)$.

Второй подход не предполагает, что известно фундаментальное решение дифференциальной задачи. Берется циклическое фундаментальное решение А. Я. Белянкова, которое вне сеточного квадрата, окружающего источник, численно восполняется по значениям на крупной сетке до гладкой функции, используемой при вычислении интегралов по формуле Грина в качестве входящего в нее фундаментального решения.

Описанный алгоритм имеет только эвристическое обоснование и экспериментальную проверку для гармонического и бигармонического уравнения, причем согласованные фундаментальные решения выбираются в соответствии с изложенным выше первым подходом. Численные эксперименты по уравнению Лапласа выполнены совместно с Л. А. Резником, а по бигармоническому — с В. И. Турчаниновым.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Рябенький В. С.** Метод внутренних граничных условий в теории разностных краевых задач.— Успехи мат. наук, 1971, т. 26, № 3, с. 105—160.
2. **Белянков А. Я.** Две конструкции независимых и устойчивых внутренних граничных условий.— В кн.: Задачи механики и мат. физики. М., Наука, 1976, с. 31—42.
3. **Метод** граничных интегральных уравнений.— В кн.: Вычислительные аспекты и приложения в механике. М., Мир, 1978. 210 с.

СХОДИМОСТЬ ПРИБЛИЖЕНИЙ РЕШЕНИЯ И ОБЛАСТИ В ЗАДАЧЕ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Д. М. ФАГЕ

(*Новосибирск*)

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим однородную задачу Дирихле для эллиптического уравнения, заданного в области $D\subset R^2$, являющейся выпуклым многоугольником,

$$\begin{cases} Lu=f \text{ в } D, \\ u=0 \text{ на } \partial D \end{cases} \tag{1}$$

с дополнительным ограничением

$$F_1(x, y)\leqslant u(x, y)\leqslant F_2(x, y), \tag{2}$$

где функции F_1 и F_2 принадлежат $C^1(D)$ всюду, за исключением конечного числа точек и линий, и

$$F_1(x, y)\leqslant 0\leqslant F_2(x, y) \ \forall(x, y)\in\partial D.$$

Решение задачи (1), (2), которое мы будем считать принадлежащим пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^2(D)$, понимается в том смысле, что область

D разбивается на две подобласти — Ω и Ω_*: в первой решение u удовлетворяет дифференциальному уравнению, во второй — совпадает с одним из ограничений. Разделяющая Ω и Ω_* граница заранее неизвестна и подлежит определению в процессе решения.

Такого рода задачи, называемые задачами со свободными границами, часто возникают в механике, физике. оптимальном управлении и т. д. Например, если $f \equiv \mathrm{const}$, $F_1 \equiv 0$ и $F_2(x, y)$ есть расстояние от точки (x, y) до границы ∂D, то (1), (2) будет описывать процесс упруго-пластической деформации призматического стержня с сечением D, причем область упругой деформации Ω будет односвязной, а область пластической деформации Ω_* — многосвязной [1].

В вариационной постановке (1), (2) представляет собой задачу минимизации функционала энергии на замкнутом выпуклом множестве K функций, удовлетворяющих ограничению (2), или в эквивалентной формулировке — задачу об отыскании решения вариационного неравенства

$$a(u, v - u) \geqslant (f, v - u) \quad \forall v \in K \tag{3}$$

(см. [2]). Здесь $a(\varphi, \psi)$ — билинейная симметричная и непрерывная форма, соответствующая задаче (1), а (f, ψ) — скалярное произведение в $L_2(D)$.

§ 2. Аппроксимация

Триангулируем область D треугольниками T_i таким образом, чтобы их объединение совпадало с D, $\bigcup\limits_i T_i = D$ (относительно T_i предполагаются выполненными стандартные ограничения на длины сторон и углы [2]), и обозначим через H конечномерное подпространство пространства $\mathring{W}_2^1(D)$ с базисом, состоящим из кусочно-линейных конечных элементов. Тогда приближенная задача, соответствующая вариационному неравенству (3), приобретает вид

$$a(u^h, v^h - u^h) \geqslant (f, v^h - u^h) \quad \forall v^h \in K^h, \tag{4}$$

где относительно K^h предполагается, что $K^h \subset K \cap H$.

Обозначим через u и u^h решения задач (3) и (4) соответственно. Тогда справедлива

Лемма 1. Оценка погрешности приближенного решения в норме пространства $\mathring{W}_2^1(D)$ имеет вид

$$\|u - u^h\|_1^2 \leqslant c\,(\|\psi - u^h\|_1 \|u - v^h\|_1 + \|\psi - u\|_1 \|u^h - w^h\|_1) \quad \forall v^h,$$
$$w^h \in K^h, \tag{5}$$

где функция ψ является решением задачи (1) без ограничений

Заметим, что при выводе этой оценки в отличие от работы [3] не используется факт принадлежности решения пространству

$\overset{\circ}{W}{}_2^2$; кроме того, при решении задачи без ограничения имеем $\psi = u$, и (5) переходит в обычную оценку метода конечных элементов.

С помощью этой леммы, используя оценку для погрешности кусочно-линейной интерполяции функций из $W_2^2(D)$ [4], получаем следующую теорему.

Т е о р е м а 1. Приближенное решение u^h сходится к точному решению u при $h \to 0$, причем имеет место оценка

$$\|u - u^h\|_1 \leqslant ch^{1/2}(\|\psi - u^h\|_1 \|u\|_2)^{1/2}$$

с постоянной c, не зависящей от h и u.

§ 3. Сходимость областей

При решении задач со свободными границами обычно нас интересует не столько само решение, сколько положение свободной границы, разделяющей области Ω и Ω_*. Основную роль в получении соответствующей оценки играет следующая лемма.

Л е м м а 2. Пусть функция u принадлежит $C^1(D)$ всюду, за исключением конечного числа точек и линий. Обозначим через Ω множество

$$\Omega = \{(x, y) \in D \,|\, F_1(x, y) < u(x, y) < F_2(x, y)\}$$

(предполагается, что $\Omega \neq \varnothing$ и что число компонент связности Ω конечно) и рассмотрим равномерно сходящуюся к u последовательность функций v^h:

$$\|u - v^h\|_c < \varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\to} 0.$$

Тогда для любых двух последовательностей $\delta_1(h) \geqslant 0$ и $\delta_2(h) \geqslant 0$, удовлетворяющих соотношениям

$$\delta_i(h) \to 0, \;\; \varepsilon(h)/\delta_i(h) \to 0, \;\; h \to 0, \;\; i = 1, 2,$$

найдется $h_0 > 0$ такое, что для всех $h \leqslant h_0$ области

$$\Omega_h = \{(x, y) \in D \,|\, F_1(x, y) + \delta_1(h) < v^h(x, y) < F_2(x, y) - \delta_2(h)\}$$

будут содержаться в Ω, $\Omega_h \subset \Omega$ и $\lim\limits_{h \to 0} \Omega_h = \Omega$.

Для применения этой леммы воспользуемся оценкой [5]

$$\|\tilde{u}\|_c \leqslant c|\ln h|^{1/2}\|\tilde{u}\|_1,$$

справедливой для произвольного кусочно-линейного восполнения. Полагая $\tilde{u} = u_I - u^h$ и применяя неравенство треугольника, из теоремы 1 получаем

$$\|u_I - u^h\|_c \leqslant c|h \ln h|^{1/2}$$

(здесь u_I — интерполянт решения u исходной задачи).

Таким образом, справедлива

Теорема 2. Пусть

$$\Omega_I = \{(x, y) \in D \mid F_1(x, y) < u_I(x, y) < F_2(x, y)\}$$

и

$$\Omega_h = \{(x, y) \in D \mid F_1(x, y) + \varkappa(h) < u^h(x, y) < F_2(x, y) - \varkappa(h)\},$$

где

$$\varkappa(h) = |h^{1-\varepsilon} \ln h|^{1/2}, \varepsilon > 0.$$

Тогда существует $h_0 > 0$ такое, что для всех $h \leqslant h_0$ $\Omega_h \subset \Omega_I$ и

$$\lim_{h\to 0} \Omega_h = \Omega_I = \Omega.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ting T. W. Elastic-plastic forsion problem II.— Arch. Ration. Mech. and Anal., 1967, v. 25, N 5, p. 342—366.
2. **Марчук Г. И.** Методы вычислительной математики. М., Наука, 1977. 456 с.
3. **Falk R. S.** Error estimates for the approximation of a class of variational inequalities.— Math. of Computation, 1974, v. 28, N 128, p. 963—971.
4. **Стренг Г., Фикс Дж.** Теория метода конечных элементов. М., Мир, 1977. 349 с.
5. Дифференциальные уравнения и их применение.— Труды семинара, Вильнюс, 1973, вып. 5. 394 с. (Ин-т физики и математики АН ЛитССР).

О НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЯХ ПЕРЕМЕННОГО ТИПА

Н. Н. ЯНЕНКО

(Новосибирск)

1. Для описания нелинейной неустойчивости и автоколебательных движений сплошной среды в последнее время предложены математические модели, основу которых составляют уравнения в частных производных переменного типа.

В работе [1] проведены численные эксперименты и дан качественный анализ системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\nu(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right]; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -a^2\frac{\partial u}{\partial x}, \quad a = \text{const}, \tag{1}$$

которая представляет собой упрощенную модель баротропного газа с коэффициентом искусственной вязкости $\nu(u)$, зависящим от скорости. Решением системы (1) являются автоколебания, возникающие в областях пространства скоростей u, где коэффициент $\nu(u)$ меняет знак.

2. Система (1) не инвариантна относительно преобразования Галилея. Очевидно, что содержательные феноменологические мо-

дели механики сплошной среды должны быть инвариантны относительно основной группы преобразований. В связи с этим в работе [2] предложена математическая модель, являющаяся аналогом одномерного уравнения Бюргерса, но с коэффициентом вязкости, зависящим от градиента скорости:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\nu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right]. \tag{2}$$

Здесь коэффициент вязкости ν — асимптотически положительная функция $\frac{\partial u}{\partial x}$, принимающая отрицательные значения в некоторой конечной области изменения $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Рассмотрим сначала уравнение (2) без конвективного члена $u\frac{\partial u}{\partial x}$ с начальным условием $u(x, 0) = u_0(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, и периодическими граничными условиями. Если

$$\nu = 1 + \nu_1\frac{\partial u}{\partial x} + \nu_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \quad \nu_2 > 0,\ \nu_1^2 - 4\nu_2 = \delta > 0, \tag{3}$$

то имеет место следующая априорная оценка решения:

$$\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \leqslant C(\nu_1, \nu_2, u_0). \tag{4}$$

Если $\nu = 1 - \nu_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{2m} + \nu_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{2n}$, $m < n$, $\nu_1, \nu_2 > 0$, $\nu_1^2 - 4\nu_2 > 0$, то для достаточно больших m, n имеет место следующая априорная оценка:

$$\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^k dx \leqslant C(m, n, \nu_1, \nu_2, k, u_0).$$

Для полного уравнения (2) с начальными и граничными условиями $u(x, 0) = u_0(x)$, $u(0, t) = u(l, t) = 0$ получена оценка

$$\int u_t^2 dx dt + \int u_x^4 dx \leqslant C(\nu_1, \nu_2, u_0, t).$$

Для задачи (2), (3) установлен разностный аналог оценки

$$\int_0^t\int_0^1 u_t^2 dx dt + \int_0^1 u_x^4 dx \leqslant \text{const},$$

гарантирующий слабую компактность в соответствующих пространствах решений разностных уравнений.

Оценим теперь отклонение решения уравнения (2) с коэффициентом вязкости (3) от решения уравнения Бюргерса. Начально-краевые условия выберем в виде $u|_{t=0} = u(x)$, $u(1, t) = u(0, t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Предполагаем, что ν_1, ν_2 — малые параметры и что коэффициент $\nu(p) = \nu_0 + \nu_1 p + \nu_2 p^2$ положителен, а коэффициент $\nu'(p) = \nu_0 + 2\nu_1 p + 3\nu_2 p^2$ при второй производной в уравнении (2) знакопеременен. Из этих требований вытекают следующие условия на коэффициенты:

$$\nu_1 > 0, \ \nu_1^2 - 4\nu_0\nu_2 < 0, \ \nu_1^2 - 3\nu_0\nu_2 > 0. \tag{5}$$

Из предположения малости ν_1, ν_2 следует, что для выполнения соотношения (5) при фиксированном ν_0 и при изменяющихся малых ν_1, ν_2 достаточно, чтобы $\nu_2 = k\nu_1^2$ с некоторой фиксированной постоянной k.

Итак, рассматривается уравнение

$$u_t + uu_x = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\nu_0 + \nu_1 u_x + k\nu_1^2 u_x^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

с условиями на коэффициенты

$$1 - 4k\nu_0 < 0, \ 1 - 3k\nu_0 > 0;$$

и константа k выбирается по ν_0.

Пусть $u^0(x, t)$ — решение уравнения Бюргерса

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}$$

с указанными выше начально-краевыми условиями. Запишем решение задачи в виде $u(x, t) = u^0(x, t) + R(x, t)$. Тогда справедлива оценка

$$\|R\|^2 \leqslant k(T, u^0)\nu_1.$$

3. В работе [3] рассмотрено уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\mu u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right], \tag{6}$$

где $\omega(\xi)$ — гладкая функция, для которой $\omega'(\xi) \geqslant \delta > 0$ $|\xi| \geqslant N > 0$, и $\omega'(\xi)$ может принимать отрицательные значени для $|\xi| < N$.

В случае начальных и граничных условий $u(x, 0) = u_0(x)$, $u(0, t) = u(1, t) = 0$ априорная оценка в норме $C(0, 1)$ имеет следующий вид:

$$\|u\|_{C(0,1)} + \|u_x\|_{C(0,1)} \leqslant C(N, u_0, t, K(T)), \tag{7}$$

где $K(T) = \sup\limits_{x,t} |u(x, t)|$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Если $\mu = 0$, то величина C в (7) не зависит от K.

В работе [3] получены также теоремы существования обобщенного и гладкого решений для задач

$$\left(1 + \varepsilon\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\,\omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\mu u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\,\omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \varepsilon\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

с условиями $u(x, 0) = u_0(x)$, $u(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = u(1, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0$ и со знакопеременным коэффициентом $\omega'(\xi)$.

Для задачи (6) в работе [4] установлена более сильная оценка типа (7) с константой C в правой части, не зависящей от $K(T)$, и оценка

$$\int \left(\omega' \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dxdt + \int u_t^2 dxdt \leqslant C(N, u_0, t).$$

Для гладких решений уравнения (6) с краевыми условиями вида

$$\alpha u_x - \varphi(u)|_{x=0} = \beta u_x - \psi(u)|_{x=1} = 0 \tag{8}$$

получена оценка $|u_x|$ через $|u|$ и $\sup\{|u_0| + |u_0'|\}$, а также априорная оценка $|u|$ для третьей краевой задачи при дополнительных условиях на рост $\varphi(u)$, $\psi(u)$, $\omega(u_x)$.

Для обобщенных решений задачи (6), (8) получена оценка $|u|$ в классе обобщенных решений, допускающих аппроксимацию в определенном смысле гладкими функциями.

Если коэффициент $\omega'(\xi) \geqslant 0$ вырождается, то методом конечных разностей для первой и третьей краевых задач при дополнительных ограничениях на рост функций $\varphi(u)$, $\psi(u)$, $\omega(u_x)$ доказана теорема существования решения задачи (6), (8) из класса функций, для которых конечно выражение

$$\int_0^t \int_0^1 [u_t^2 + (\omega'(u_x) u_{xx})^2]\, dxdt + \int_0^1 \omega(u_x)\, dx + \sup |u|.$$

В случае знакопеременной величины $\omega'(u_x)$ показана слабая компактность приближенных решений в соответствующих пространствах.

Методом Галеркина доказана теорема существования и единственности обобщенного решения рассматриваемой задачи из класса $W^{1,1}_{2+2\nu}$ в случае вырождающегося коэффициента $\omega'(\xi) \geqslant 0$ $(-c_0 + c_1|\xi|^{2\nu} \leqslant \omega'(\xi) \leqslant c_2|\xi|^{2\nu} + c_3)$ и слабая компактность приближенных решений в случае знакопеременной функции $\omega'(\xi)$.

В [6] получены априорные оценки $|u_x|$ через $|u|$ и $\|u_0\|_{C^1}$ для квазилинейных уравнений с одной пространственной переменной

$$u_t = a(x, u, u_x)u_{xx} + b(x, u, u_x) + f(x, u, u_x, u_{xx}),$$

где $a \geqslant a_0 > 0$, f — финитная функция, а также оценка $|u_x|$ через $|u|$ и $\|u_0\|_{C^1}$ при $f = f_1(t, x, u, u_x)u_{xx} + f_2(t, x, u, u_x, u_{xx})$, где f_1, f_2 финитны по u_x, u_{xx}.

4. Следуя работе [4], рассмотрим систему уравнений типа Навье — Стокса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\, u + \nabla p = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\nu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial x_i}\right]; \quad \operatorname{div} u = 0, \tag{9}$$

где $x \in \Omega \subset R^3$, Ω — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $u = (u_1, u_2, u_3)$, $0 \leqslant t < \infty$,

$$\nu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \nu_0 + \nu_1 \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{2m} + \nu_2 \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{4m}, \quad \nu_2 > 0,\ m \geqslant \frac{1}{2},$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| = \left(\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Условие $\nu_2 > 0$ означает, что рассматриваются только асимптотически положительные полиномы $\nu(p)$.

Для уравнения (9) рассмотрим следующие начально-краевые условия:

$$u|_{\partial\Omega} = 0;\ u|_{t=0} = u_0(x). \tag{10}$$

Пусть V—замыкание множества $\mathscr{V} = \{v \mid v \in C_0^\infty(\Omega),\ \operatorname{div} v = 0\}$ в норме $W^1_{2+4m}(\Omega)$, где $W^1_{4m+2}(\Omega)$ — пространство Соболева. Пусть $\{\omega_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ — некоторая полная в банаховом пространстве V система функций. Будем искать приближенное решение задачи (9) — (10) с помощью метода Галеркина, т. е. в виде

$$u^n(t, x) = \sum_{i=1}^{n} c_i^n(t)\,\omega_i(x),$$

где коэффициенты $c_i^n(t)$ находятся из уравнения

$$(u_t^n, \omega_j) + ((u^n\nabla)\,u^n, \omega_j) + \sum_{i=1}^{3}\left(\nu\left(\frac{\partial u^n}{\partial x}\right)\frac{\partial u^n}{\partial x_i}, \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}\right) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{11}$$

а $(,)$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Начальные условия для системы (11) найдем из соотношений $c_i^n(0) = \alpha_i^n$, где α_i^n определяются из условий

$$u^n(0, x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^n \omega_i(x),\ u^n(0, x) \to u_0(x) \tag{12}$$

при $n \to \infty$ в норме пространства V. Справедлива следующая

Теорема. Пусть $u^1(t, x) = c_1^1(t)\,\omega_1(x)$— первое галеркинское приближение задачи (9), (10), $\omega_1(x) \in V$, $\int \omega_1^2 dx = 1$, $u^1(0,x) = \alpha_1^1 \omega_1(x)$. Обозначим $|c_1^1|^{2m} = y(t)$, $a_0 = 2m\nu_0 \int \left|\frac{\partial \omega_1}{\partial x}\right|^2 dx$, $a_1 = -2m\nu_1 \int \left|\frac{\partial \omega_1}{\partial x}\right|^{2m+2} dx$, $a_2 = -2m\nu_2 \int \left|\frac{\partial \omega_1}{\partial x}\right|^{4m+2} dx$. Тогда функция $y(t)$ удовлетворяет уравнению Абеля первого рода

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a_0 y + a_1 y^2 + a_2 y^3 \tag{13}$$

и имеют место следующие утверждения:

1) если $\nu_0 > 0$, то нулевое решение асимптотически устойчиво по Ляпунову при $t \to \infty$; при $\nu_1^2 - 4\nu_0\nu_2 < 0$ не существует других стационарных решений уравнения (13); при $\nu_1^2 - 4\nu_0\nu_2 > 0$, $\nu_1 < 0$ существует еще одно асимптотически устойчивое по Ляпунову при $t \to \infty$ положительное решение для некоторых $\omega_1(x)$;

2) если $\nu_0 < 0$, то для некоторых $\omega_1(x)$ существует только одно положительное асимптотически устойчивое решение уравнения (13).

5. Для выяснения свойств модельного уравнения (2) со знакопеременным коэффициентом вязкости (3) было проведено численное решение этого уравнения конечно-разностным методом [5]. Когда коэффициент вязкости ν отрицателен, то задача становится некорректной и решение может возрастать. Поскольку ожидалось появление колебаний, связанных с изменением знака коэффициента вязкости, то была выработана схема, которая на решениях уравнения Бюргерса ($\nu_1 = \nu_2 = 0$, $\nu_0 = \mathrm{const} > 0$) давала заведомо монотонный профиль. Была изучена эволюция начального распределения в виде ступеньки. Расчеты позволили установить нестационарные колебания при стационарном осредненном течении, обнаружить свойство перемежаемости, т. е. чередование сильных и слабых осцилляций.

6. Рассмотрим задачу о газовом шаре, находящемся под действием сил гравитации и газокинетического давления. В предположении сферической симметрии исходные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -G\frac{M(r)}{r^2} - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial r};$$

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r')\,dr'; \tag{14}$$

$$p = p(\rho, T),$$

где u — радиальная скорость; ρ — плотность; p — давление газа; G — гравитационная постоянная.

В случае политропной зависимости давления газа от плотности $p = c\rho^2$ система уравнений (14) имеет стационарное решение: $\rho(r) = \rho_0 \sin \pi r/\pi r$ (ρ_0—плотность в центре шара, радиус которого равен $R_0 = \sqrt{\pi/2G} \simeq 48{,}5$ м).

Большой интерес представляет решение системы (14) в случае немонотонной зависимости $p(\rho)$, например типа зависимости Ван-дер-Ваальса, поскольку области, где $dp/d\rho < 0$, являются неустойчивыми. Численное решение исходной системы уравнений с немонотонной связью между давлением и плотностью показало, что в зависимости от глубины «ямы» на графике $p(\rho)$ получаются существенно различные распределения плотности по радиусу шара: либо происходит разделение шара на две области с заметно различающейся плотностью и резкой границей между этими областями — режим I, либо имеет место непрерывное изменение плотности — режим II [7].

В режиме I плотности газа справа и слева от разрыва находятся в области, где $dp/d\rho < 0$. Шар делится на две части потому, что область с $dp/d\rho < 0$ неустойчива. С течением времени плотности и радиус шара испытывают колебания, причем колебания плотности во внешней части шара существенно меньше, чем во внутренней.

В режиме II также наблюдаются колебания плотности, совпадающие по порядку величины с колебаниями плотности в режиме I в области, внешней по отношению к разрыву.

Таким образом, немонотонные уравнения состояния типа Ван-дер-Ваальса могут определять гидродинамические автоколебательные процессы. Эти особенности физически связаны с фазовыми переходами и источниками энергии, а математически находят свое выражение в переменности типа исходных уравнений (гиперболический — эллиптический).

7. Интересная система уравнений переменного типа описывает нелинейные альфвеновские волны, распространяющиеся в разреженной анизотропной плазме вдоль магнитного поля [8—10]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left[(1 - H^2 - B^2)\,H - \frac{\partial v}{\partial z}\right] = 0;$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left[(1 - H^2 - B^2)\,B + \frac{\partial u}{\partial z}\right] = 0; \qquad (15)$$
$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial z},\ \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Здесь H, $B(u, v)$— компоненты магнитного поля (скорости) в плоскости, перпендикулярной основному магнитному полю $\vec{H}_0$, направленному по оси z.

Система (15) записана в безразмерном виде. Все коэффициенты, характеризующие среду, устранены с помощью преобразования масштабов. После линеаризации этой системы относительно малых возмущений состояния покоя, пропорциональных $\exp i(kz - \omega_k t)$, получается дисперсионное уравнение

$$\omega_k = k^2/2 + i\gamma_k,\ \gamma_k = k(1 - k^2/4)^{1/2}, \qquad (16)$$

где k — волновое число малых возмущений; γ_k — инкремент их роста.

Из формулы (16) следует, что возмущения с волновыми числами $k < 2$ неустойчивы. Гармоники с волновыми числами $k \geqslant 2$ устойчивы, что связано с эффектом «магнитной вязкости» (математически — с членами $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$ в первых двух уравнениях системы (15)). В нелинейном случае рост амплитуды волн ограничивается членами $(H^2 + B^2)H$, $(H^2 + B^2)B$.

Система уравнений (15) допускает частное решение следующего вида:

$$H(z, t) = A(t) \sin (kz + \varphi(t));$$
$$B(z, t) = A(t) \cos (kz + \varphi(t)),$$

где амплитуда волны $A(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2A}{dt^2} - \gamma_k^2 A + k^2A^3 - cA^{-3} = 0, \quad c = \text{const},$$

допускающему несложный качественный анализ и запись решения в квадратурах. Амплитуда волны испытывает с течением времени автоколебания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Daly J. B.** The stability properties of a coupled pair of non-linear partical difference eguations.— Math. Comp., 1963, v. 84, p. 346—360.
2. **Яненко Н. Н., Новиков В. А.** Об одной модели жидкости со знакопеременным коэффициентом вязкости.— Численные методы механики сплошной среды, 1973, т. 4, № 2, с. 142—147.
3. **Зеленяк Т. И., Новиков В. А., Яненко Н. Н.** О свойствах решения нелинейных уравнений переменного типа.— Численные методы механики сплошной среды, 1974, т. 5, № 4, с. 35—47.
4. **Зеленяк Т. И.** Об одном уравнении со знакопеременным коэффициентом диффузии.— В кн.: Математические проблемы химии. Ч. 1. Новосибирск, 1975.
5. **Berezin Yu. A., Dudnikova G. I., Novikov V. A., Yanenko N. N.** Analytical and numerical studies of equations with sign changing viscosity coefficient.— Lecture Notes in Math., 1976, N 594, p. 30—38.
6. **Белоносов В. С., Зеленяк Т. И.** Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. Новосибирск, 1975. 155 с.
7. **Яненко Н. Н., Березин Ю. А., Криволуцкий В. С.** Гравитирующий газовый шар.— Численные методы механики сплошной среды, 1978, т. 9, № 4, с. 139—145.
8. **Березин Ю. А., Сагдеев Р. З.** Одномерная нелинейная модель неустойчивости анизотропной плазмы.— Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 3, с. 570—573.
9. **Березин Ю. А.** Нелинейные движения в анизотропной плазме.— ЖЭТФ, 1971, т. 61, вып. 5(11), с. 1877—1881.
10. **Berezin Yu. A., Vshivkov V. A.** On the firehose instability of alfven waves.— J. Comp. Phys., 1976, v. 20, N 1, p. 81—96.

Часть 2

ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМОВ

ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ С ПРИМЕНЕНИЕМ ОСРЕДНЕНИЙ, СОХРАНЯЮЩИХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ, ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ИЛИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

В. А. ВАСИЛЕНКО, М. В. ЗЮЗИН

(*Новосибирск*)

При обработке экспериментальных кривых типа осциллограмм, которые, как правило, «зашумлены» некоторой ошибкой измерения, весьма эффективен способ осреднения информации на некотором интервале. При таком осреднении на экспериментальной кривой подавляются преимущественно высокочастотные колебания, вызванные ошибками измерения. Очень часто на практике бывает известен характер гладкого фона функции, который следует выделять в процессе обработки и который не должен страдать в процессе осреднения. Именно с этой целью мы предлагаем явную конструкцию простейших локальных кусочно-постоянных осреднений, сохраняющих полиномы любой наперед заданной степени, тригонометрические функции, отвечающие наперед заданным информативным частотам, или экспоненциальные функции с заданными показателями роста или убывания.

Без ограничения общности рассмотрим вещественную ось с нанесенной на нее целочисленной решеткой $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \pm N, \ldots$ В общем случае следует рассмотреть сетку с шагом h. Пусть $K(t)$ — функция с локальным носителем. Зададим операцию $\hat{*}$ осреднения функции $f(t)$ с помощью функции $K(t)$ формулой

$$(K \hat{*} f)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(y - x) f(y)\, dy.$$

Операция $\hat{*}$ связана с операцией свертки соотношением $K(t) \hat{*} f(t) = K(-t) * f(t)$.

О п р е д е л е н и е. Осреднение, порожденное $K(t)$, сохраняет $f(t)$, если $K \hat{*} f = f$.

Легко видеть, что в этом случае $K(t)$ сохраняет $f(t-A)$ $\forall A \in R^1$, и если $f \in C^1$, то $K(t)$ сохраняет $f'(t)$.

Будем далее искать осредняющую функцию $K(t)$ в виде

$$K_p(t) = \begin{cases} \alpha_k, & -\frac{p+1}{2} + k \leqslant t \leqslant -\frac{p+1}{2} + k + 1, \quad k = 0, 1, \ldots, p \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\alpha_k = \mathrm{const}$.

Теорема 1. Для любого натурального p существует единственное симметрическое ($\alpha_i = \alpha_{p-i}$, $i = \overline{0, p}$) осреднение вида (1), сохраняющее многочлены степени $\leqslant p$. При четном p коэффициенты α_k находятся из системы

$$2 \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} a_{ik}^{(p)} \alpha_k + a_{i,p/2}^{(p)} \alpha_{p/2} = 0, \quad i = 0, 2, \ldots, p;$$

$$2 \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} \alpha_k + \alpha_{p/2} = 1,$$

при нечетном p — из системы

$$\sum_{k=0}^{\frac{p+1}{2}} a_{ik}^{(p)} \alpha_k = 0, \quad i = 1, 3, \ldots, p-2;$$

$$\sum_{k=0}^{\frac{p+1}{2}} \alpha_k = 1.$$

При этом $a_{ik}^{(p)} = \left(\frac{p+1}{2} - k\right)^{p+1-i} - \left(\frac{p+1}{2} - k - 1\right)^{p+1-i}$, $i, k = \overline{0, p}$.

Пусть теперь $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — набор несовпадающих чисел.

Теорема 2. Для любого натурального n при условии, что $\xi_i \in (0, \pi)$, $i = \overline{1, n}$, существует единственное симметрическое осреднение $K_{2n}(t)$ вида (1), сохраняющее функции $\{\sin \xi_i t\}_{i=1}^{n}$. Коэффициенты α_k находятся из системы

$$2 \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k + \alpha_n = 1;$$

$$2 \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cos \xi_i (n-k) + \alpha_n = \frac{\xi_i/2}{\sin(\xi_i/2)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Теорема 3. Для любого натурального n при условии, что $\xi_i \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, существует единственное (но уже не симметрическое!) осреднение $K_n(t)$ вида (1), сохраняющее функции $e^{\xi_i t}$, $i=\overline{1, n}$. Коэффициенты α_k находятся из системы

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 1;$$

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k e^{\xi_i k} = \frac{\xi_i}{e^{\xi_i}-1} e^{\xi_i \frac{n+1}{2}}, \quad i=\overline{1, n}.$$

В теоремах 1—3 осреднения всегда строятся так, чтобы они сохраняли константу (другими словами, интеграл от $K_p(t)$ всегда равен единице).

Теорема 1 доказывается с помощью довольно простых преобразований системы. Доказательство теорем 2, 3 требует применения принципа Хаара [2].

В заключение приведем некоторые примеры.

А. Функция $K_3(t)$, сохраняющая при осреднении кубические многочлены, имеет вид

$$K_3(t) = \begin{cases} 0, & t < -2 \\ -1/12, & -2 < t < -1 \\ 7/12, & -1 < t < 1 \\ -1/12, & 1 < t < 2 \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$

Б. Функция $K_2(t)$, сохраняющая функцию $\sin t$, имеет вид

$$K_2(t) = \begin{cases} 0, & t < -1.5 \\ -0.046677220712, & -1.5 < t < -0.5 \\ 1.09335444142, & -0.5 < t < 0.5 \\ -0.046677220712, & 0.5 < t < 1.5 \\ 0, & t > 1.5. \end{cases}$$

В. Функция $K_2(t)$, сохраняющая функцию e^t, имеет вид

$$K_2(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ 0.6613031126615 & -1 < t < 0 \\ 0.3386968873385 & 0 < t < 1 \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Василенко В. А., Зюзин М. В. О применении осредняющих функций в задачах обработки экспериментальных данных. Новосибирск, 1979. (Препринт ВЦ СО АН СССР).
2. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. М., Мир. 1975.

О ПРЯМОМ МЕТОДЕ ВАРИАЦИИ ПАРАМЕТРА НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ ОБРАЩЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ

Д. Ф. ДАВИДЕНКО

(*Москва*)

§ 1. Об одном варианте прямого метода вариации параметра на бесконечном промежутке

В нормированном кольце линейных операций $[Y \to Y]$, переводящих пространство Y типа B в себя, рассмотрим уравнение

$$Ax - I = 0, \tag{1.1}$$

где $A, I \in [Y \to Y]$ (A — обратимая, I — тождественная операция). Будем предполагать, что спектр $\sigma(A)$ операции A расположен внутри правой полуплоскости (аналогично — внутри левой полуплоскости).

Точное решение уравнения (1.1) обозначим через x^*, а некоторое приближенное — через x_0. Предположим, что требуется получить приближенное решение уравнения (1.1) с желаемой степенью точности. С этой целью применим один вариант прямого метода вариации параметра на бесконечном промежутке [1], суть которого в данном случае состоит в следующем [2].

Вместо уравнения (1.1) рассмотрим следующее уравнение с параметром $\lambda (0 \leqslant \lambda \leqslant \infty)$:

$$F(x; \lambda) = I - Ax - e^{-A\lambda}(I - Ax_0) = 0, \tag{1.2}$$

где $F(x; \lambda)$ $(x \in [Y \to Y],\ 0 \leqslant \lambda \leqslant \infty)$ такая, очевидно, операция со значениями в $[Y \to Y]$, что уравнение (1.2) при $\lambda = \infty$ переходит в уравнение (1.1), а при $\lambda = 0$ имеет решение x_0.

Продифференцируем уравнение (1.2) по λ. В результате получим следующее дифференциальное уравнение для $x(\lambda)$ с начальными условиями

$$\frac{dx(\lambda)}{d\lambda} = e^{-A\lambda}(I - Ax_0) = I - Ax(\lambda), \quad x(0) = x_0. \tag{1.3}$$

Лемма 1.1. Если $x(\lambda)$ — решение задачи Коши (1.3) на интервале $0 \leqslant \lambda \leqslant \infty$, то $x(\lambda)$ будет также решением и уравнения (1.2) на том же интервале, причем $x(\lambda)|_{\lambda=\infty} = x^*$, т. е. является решением уравнения (1.1): $Ax(\infty) - 1 = 0$.

Задача Коши (1.3) имеет, очевидно, на всем интервале $0 \leqslant \lambda \leqslant \infty$ единственное непрерывно дифференцируемое решение $x(\lambda)$, $x(0) = x_0$.

Чтобы построить приближенное значение решения $x(\lambda)$ дифференциальной задачи (1.3) при $\lambda = \infty$ или, что одно и то же, приближенное решение уравнения (1.1) с заданной степенью точности, к дифференциальному уравнению (1.3) применяем на достаточно большом интервале $[0, \lambda^*]$ $(0 < \lambda^* < \infty)$ один из методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, разбив при этом интервал $[0, \lambda^*]$ на некоторое число n неравномерных, вообще говоря, подынтервалов длины h_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, точками $\lambda_0 = 0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; $\lambda_{k+1} = \lambda_k + h_k$. Различные методы численного интегрирования, а также различные способы выбора шагов h_k дают и различные прямые методы вариации параметра для решения уравнений вида (1.1), т. е. для обращения линейных операций A.

При применении к задаче Коши (1.3), например, метода Рунге-Кутта s-го порядка точности ($s = 2, 3, \ldots$) приближенные значения $x(\lambda_{k+1})$, $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$, решения уравнения (1.3) определяются последовательно одно за другим следующими равенствами:

$$x(\lambda_{k+1}) = x(\lambda_k) + H_{k+1}^{(s-2)}(I - Ax(\lambda_k)), \quad k = 0, 1, \ldots, (n-1), \tag{1.4}$$

где операция $H_{k+1}^{(s-2)} \in [Y \to Y]$ имеет вид

$$H_{k+1}^{(s-2)} = H_{k+1}^{(s-2)}(h_{k+1}) = \sum_{i=1}^{s-1} \frac{(-1)^{i-1}}{i!} h_{k+1}^i A^{i-1}, \quad s = 2, 3, \ldots \tag{1.5}$$

Элемент $x(\lambda_n)$ будет искомым приближенным решением уравнения (1.1). Класс методов (1.4), (1.5) будем называть прямым методом вариации параметра типа метода Рунге — Кутта s-го порядка точности на бесконечном промежутке для обращения линейных операций. Шаги h_{k+1} в (1.4), (1.5) можно выбирать различными способами, например: из условия приближенного минимума нормы невязки $\|I - Ax_{k+1}\|$ как функции многих, вообще говоря, переменных или путем минимизации какого-либо функционала, связанного с решением линейного функционального уравнения с операцией A; через корни полиномов Чебышева и близких к ним (аналогично тому, как это сделано в работах [2]—[11] при решении линейных функциональных уравнений), а также через значения этих полиномов в некоторой фиксированной точке [2]; аналогично тому, как это предложено ниже, и другими способами. Вместе с h_{k+1} можно выбирать также и свободные параметры метода Рунге—Кутта, что существенно повышает эффективность методов вариации параметра [2, 3]. В случае свободных параметров $\beta_{ij}^{(k+1)}$ формула (1.5) принимает вид

$$H_{k+1}^{(s-2)} = \sum_{\nu=1}^{s-1} (-1)^{\nu-1} \beta_\nu^{(k+1)} A^{\nu-1}, \quad \beta_\nu = \frac{h_{k+1}^\nu}{\nu!} \bar{\beta}_\nu^{(k+1)}, \quad s = 2, 3, \ldots, \tag{1.6}$$

где $\bar{\beta}_\nu^{(k+1)}$ — некоторые комбинации параметров $\beta_{ij}^{(k+1)}$, $\beta_1^{(k+1)} = h_{k+1}$.

При $s = \infty$ формула (1.4) переходит в следующую:

$$x(\lambda_{k+1}) = x(\lambda_k) + \omega(h_{k+1})(I - Ax(\lambda_k)),$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1), \tag{1.7}$$
$$\omega(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i!} \lambda^i A^{i-1} = \int_0^{\lambda} e^{-A(\lambda-s)} ds.$$

Построение операции $\omega(\lambda)$ при любом заданном значении $\lambda = h_{k+1} < \infty$ можно осуществлять опять-таки путем применения прямого метода вариации параметра на бесконечном промежутке. В этом случае можно решать ту же задачу, что и выше, полагая при этом $x_0 = 0$.

§ 2. Прямой метод вариации параметра на бесконечном промежутке обращения линейных операций в случае $x_0 = 0$

Положим $x_0 = 0$ и обозначим $x(\lambda) = \omega(\lambda)$. Дифференциальная задача (1.3) при этом принимает вид

$$\frac{d\omega(\lambda)}{d\lambda} = I - A\omega(\lambda), \quad \omega(0) = 0, \tag{2.1}$$

а уравнение (1.2) —

$$F(x; \lambda) = I - A\omega(\lambda) - e^{-A\lambda} = 0. \tag{2.2}$$

Заметим, что операция $\omega(\lambda) \in [Y \to Y]$ обладает замечательным свойством: она удовлетворяет следующему соотношению, которое легко доказать (r — любое целое число > 0):

$$\omega(r\lambda) = \omega(\lambda) \sum_{i=0}^{r-1} [I - A\omega(\lambda)]^i. \tag{2.3}$$

Предположим, что требуется построить $\omega(\lambda)$ при заданном $\lambda = h < \infty$. С этой целью задаемся целыми числами r и $\nu > 0$, делим интервал $0 \leqslant \lambda \leqslant h$ на r^ν равных подынтервалов длины h/r^ν узловыми точками $\lambda_0 = 0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r^\nu} = h$, , где $\lambda_k = kh/r^\nu$, $k = 0, 1, 2, \ldots, r^\nu$. К дифференциальной задаче (2.1) применяем на интервале $0 \leqslant \lambda \leqslant h$ метод Рунге—Кутта s-го порядка точности (или другой) с шагом h/r^ν. Это приводит к следующим формулам ($\omega_k = \omega(\lambda_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, r^\nu$):

$$\omega_k = (I - \omega_1 A)\omega_{k-1} + \omega_1, \; k = 1, 2, \ldots, r^\nu; \tag{2.4}$$

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^{s-1} \frac{(-1)^{i-1}}{i!} \left(\frac{h}{r^\nu}\right)^i A^{i-1}. \tag{2.5}$$

Отсюда последовательно находим все приближенные значения ω_k, $k = 1, 2, \ldots, r^\nu$, операции $\omega(\lambda)$ в точках деления интервала

$0 \leqslant \lambda \leqslant h$, в том числе и приближенное значение $\omega_{r\nu}$ в точке $\lambda = \lambda_{r\nu} = h$. При этом следует заметить, что для построения $\omega_{r}\nu$ все вычисления по формулам (2.4) при больших ν можно, очевидно, не проводить. Достаточно воспользоваться следующими формулами [2]:

$$\omega_{ri} = \omega_{ri-1} \sum_{\nu=0}^{r-1} (I - A\omega_{ri-1})^{\nu}, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu.$$

Другими словами, определяем $\omega_1 = \omega(h/r^{\nu})$ прямым методом вариации параметра, т. е. применяем к задаче (2.1) метод Рунге—Кутта s-го порядка точности с шагом h/r^{ν}, а затем по формуле

$$\omega(rH) = \omega(H) \sum_{\nu=0}^{r-1} (I - A\omega(H))^{\nu}$$

последовательно находим

$$\omega\left(\frac{h}{r^{\nu-1}}\right), \ldots, \omega\left(\frac{h}{r}\right), \quad \omega(h).$$

При желании этот ряд можно продолжить дальше: $\omega(rh)$, $\omega(r^2h), \ldots$

§ 3. Оценка погрешности

Рассмотрим прямой метод вариации параметра типа метода Рунге—Кутта s-го порядка точности обращения линейных операций (1.4), (1.5), в котором операции $H_{k+1}^{(s_{k-1}-2)}$ не зависят от номера k $\left(H_{k+1}^{(s_{k+1}-2)} = H\right)$:

$$x_{k+1} = x_k + H(I - Ax_k), \; k = 0, 1, \ldots, (n-1), \tag{3.1}$$

причем будем предполагать, что h и s таковы, что операция H удовлетворяет условию

$$\|\Delta\tau_0\| = \|I - AH\| \leqslant \rho_0 < 1. \tag{3.2}$$

Пусть n — любое натуральное число [2].

Теорема 3.1. При выполнении условия (3.2) для любого целого $n \geqslant 1$ погрешность каждого приближенного решения x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, уравнения (1.1), полученного прямым методом вариации параметра (3.1), можно оценить через любое x_j, $j = 0, 1, \ldots, (k-1)$, следующей формулой:

$$\|x^* - x_k\| \leqslant \frac{\|H\|}{1-\rho_0} \rho_0^{k-j} \|I - Ax_j\|,$$
$$k = 1, 2, \ldots, n; \; j = 0, 1, 2, \ldots, (k-1).$$

Из теоремы 3.1 следует, что

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{\|H\|}{1-\rho_0} \rho_0^{n} \|I - Ax_0\|.$$

Теперь нетрудно определить число шагов n в методе (3.1), чтобы погрешность полученного решения x_n уравнения (1.1) не превышала ε:

$$n \geqslant n(\varepsilon), \quad n(\varepsilon) = \frac{\ln(\gamma/\varepsilon)}{\ln(1/\rho_0)}, \quad \gamma = \frac{\|H\|}{1-\rho_0}\|I - Ax_0\|.$$

Пусть теперь $n = 2^\nu$, где ν — некоторое целое число > 0.

Определим операции $Y_k \in [Y \to Y]$, $k = 1, 2, \ldots, \nu$:

$$Y_k = Y_{k-1}(2I - AY_{k-1}) = Y_{k-1}(I + \Delta\tau_{k-1}),$$
$$Y_0 = H, \; k = 1, 2, \ldots, \nu.$$

Л е м м а 3.1. При $n = 2^\nu$, где ν — любое целое число > 0, каждое значение x_{2^k}, $k = 1, 2, \ldots, \nu$, определяемое методом (3.1), можно записать через $x_{2^{k-1}}$ следующей формулой:

$$x_{2^k} = x_{2^{k-1}} + Y_{k-1}\left(I - Ax_{2^{k-1}}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, \nu. \tag{3.3}$$

Т е о р е м а 3.2. При выполнении условия (3.2) для любого целого $\nu \geqslant 1$ погрешность каждого приближенного решения x_{2^k}, $k = 1, 2, \ldots, \nu$, уравнения (1.1), полученного методом (3.1) или, что одно и то же, по формуле (3.3), можно оценить формулой

$$\left\|x^* - x_{2^k}\right\| \leqslant \frac{\|H\|}{1-\rho_0}\rho_0^{2^k}\|\Delta\tau_0\|, \quad k = 1, 2, \ldots, \nu. \tag{3.4}$$

Из (3.4) при $k = \nu$ ($2^\nu = n$) имеем

$$\|x^* - x_{2^\nu}\| = \|x^* - x_n\| \leqslant \frac{\|H\|}{1-\rho_0}\rho_0^{2^\nu}\|\Delta\tau_0\|.$$

Чтобы погрешность построенного решения x_n уравнения (1.1) не превышала ε, число шагов ν в (3.3) следует выбрать, очевидно, равным

$$\nu \geqslant \ln\frac{\ln(\gamma/\varepsilon)}{\ln(1/\rho_0)}\Big/\ln 2, \quad \gamma = \frac{\|H\|}{1-\rho_0}\|\Delta\tau_0\|.$$

Полученные выше теоремы дают возможность построить оценки погрешности метода (1.4), (1.5) и для случая неравномерного оператора-шага $H_{k+1}^{(s_{k+1}-2)}$. Аналогичным образом можно рассмотреть случай, когда $n = r^\nu$, где r и ν — любые целые числа > 0. Можно ставить также задачи о выборе оптимальных процессов. Например, в тех случаях, когда β_ν в (1.6) определяются через корни полиномов Чебышева или близких к ним [2, 3], можно решить простые задачи о построении оптимального по числу умножений операции на операцию (или по числу арифметических действий) прямого метода вариации параметра (1.4), (1.6). Искомыми величинами в таких задачах являются параметры s, r, ν.

Заметим также, что если точка $p = 0$ принадлежит спектру $\sigma(A)$ операции A, то рассмотренным прямым методом вариации параметра мы получаем, очевидно, псевдообратную операцию x^+ такую (см. (2.2) и [2]), что $I - Ax^+ = P(A)$, $P(A) = e^{-A\lambda}|_{\lambda=\infty}$. При этом количество вычислительных средств такое же.

Другие способы введения параметра $\lambda (0 \leqslant \lambda \leqslant \infty)$ дают возможность записать псевдообратную операцию в явном виде: $x^+ = (P(A)L + A)^{-1} \times (I - P(A))$ или $x^+ = (P(A)L + A)^{-1}$, где $L \in [Y \to Y]$ — некоторая линейная операция такая, что операция $e^{-A\lambda}L + A$ обратимая при всех $0 \leqslant \lambda \leqslant \infty$. Для построения в этих случаях операции x^+ записываем соответствующую задачу Коши и поступаем аналогично изложенному выше. Можно поступить иначе: построить прямым методом вариации параметра операции $P(A)$ и $(P(A)L + A)^{-1}$, а затем по явной формуле построить псевдообратную операцию x^+. При этом можно записать соответствующие оценки погрешности и выбрать оптимальный вариант.

Вместо операции $P(A)$ можно рассматривать также операции $P(kA^\nu)$, $P(AA^*)$, $P(A^*A)$, $P(A + A^*)$ и многие другие. Очевидным образом можно записать псевдообратные операции и через x_0.

Если оператор $P \in [Y \to Y]$ такой, что $P^2 = P$, то P — проектор.

При желании операцию P можно построить независимо прямым методом вариации параметра на бесконечном промежутке, определяя при этом шаги h_{k+1} и свободные параметры метода Рунге—Кутта s-го порядка точности через корни полиномов Чебышева и др. или определяя шаги h_{k+1} в случае $s = 2$ как обратные величины к собственным значениям операции A. В последнем случае получим точное значение операции P за n шагов [2], где n — число всех, не равных нулю, собственных значений операции A.

Рассмотренный прямой метод вариации параметра дает возможность получать также решения операторных уравнений вида $Ax = 0$ (или $xA = 0$), если выполняется условие $e^{-A\lambda}Ax_0 \to 0$ при $\lambda \to \infty$ $(x_0 \neq 0)$ или другие условия. Он в одинаковой мере применим и к решению линейных функциональных уравнений $Ay = b$ $(y, b \in Y)$ [2]. В последнем случае если шаги h_{k+1} и свободные параметры метода Рунге—Кутта определять, например, через корни полиномов Чебышева и др., то получим, как частный случай, чебышевские методы и им подобные [2, 3]. Если же шаги h_{k+1} и свободные параметры метода определять из условия минимума некоторого функционала, связанного с решением уравнения $Ay = b$, то получим, как частный случай, методы типа градиентных и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Давиденко Д. Ф.** Об итерационном методе вариации параметра для обращения линейных операций.— Журн. вычислит. мат. и мат. физ., 1975, т. 15, № 1, с. 30—47.
2. **Давиденко Д. Ф.** К вопросу о применении прямого метода вариации параметра на бесконечном промежутке к обращению линейных операций и

решению линейных функциональных уравнений. М., 1978. (Препринт ИАЭ № 3061).
3. **Давиденко Д. Ф.** Применение метода вариации параметра на бесконечном промежутке к решению линейных функциональных уравнений. М., Б. и., 1978. (Препринт ИАЭ № 2969).
4. **Лебедев В. И., Финогенов С. А.** О порядке выбора итерационных параметров в чебышевском циклическом итерационном методе.— Журн. вычислит. мат. и мат. физ., 1971, т. 11, № 2, с. 425—438.
5. **Самарский А. А.** Введение в теорию разностных схем. М., Наука, 1971.
6. **Марчук Г. И., Кузнецов Ю. А.** Итерационные методы и квадратурные функционалы.— В кн.: Методы вычислительной математики. Новосибирск, Наука, 1975, с. 4—143.
7. **Марчук Г. И.** Методы вычислительной математики. М., Наука, 1977.
8. **Бахвалов Н. С.** Численные методы. Т. 1. М., Наука, 1973.
9. **Годунов С. К., Рябенький В. С.** Разностные схемы. М., Наука, 1973.
10. **Николаев Е. С., Самарский А. А.** Выбор итерационных параметров в методе Ричардсона.— Журн. вычислит. мат. и мат. физ., 1972, т. 12, № 4, с. 960—973.
11. **Марчук Г. И., Лебедев В. И.** Численные методы в теории переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1971.

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО ЧИСЛУ ОПЕРАЦИЙ АЛГОРИТМАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ НА ЭВМ

В. В. ИВАНОВ

(*Киев*)

Более полные обзоры по данной теме подготовлены ранее С. Л. Соболевым (1965), Н. С. Бахваловым (1968) и В. В. Ивановым (1969).

§ 1. Общая теория

Приложение функционального анализа в вычислительной математике в последние годы характеризуется привлечением самых новейших его глав, пограничных с топологией, абстрактной алгеброй и алгебраической геометрией (см., например, [1]). Основы общей теории оптимизации алгоритмов, в том числе алгоритмов вычислений, разработаны на базе алгебры алгоритмов, предложенной В. М. Глушковым (1965) и развитой в последующие годы им и его учениками и последователями [2—5].

Отметим здесь работу А. А. Летичевского (1976), в которой предложена схема ускорения итерации монотонных операторов весьма общего вида, и работы В. М. Глушкова, Ю. В. Капитоновой, А. А. Летичевского (1976—1978) по теории структур данных и синхронных параллельных вычислений, имеющих важное прикладное значение для решения нескольких задач оптимизации одновременно и алгоритмов и структур многопроцессорных ЭВМ.

Говоря об оценках снизу для числа операций, следует подчеркнуть, что при любом конечном фиксированном универсальном наборе базисных операций операционного устройства с конечным числом состояний найдется такая задача, т. е. такая подстановка или такое отображение множества всех состояний в себя, что любой алгоритм ее решения будет требовать практически неосуществимого числа операций (экспоненциального закона роста от числа состояний). Более того, таких задач будет подавляющее большинство. Остается открытым вопрос о способах проверки принадлежности данной задачи к этому классу. Ясно, что преодоление указанной трудности возможно лишь при изменяющемся наборе базисных операций ЭВМ.

Остановимся еще на ряде важных результатов, полученных применительно к некоторым менее общим формам представления исходных данных и алгоритмов.

Форма алгоритма для решения задач математической физики, наиболее близкая к традиционным представлениям специалистов по численным методам, дана Н. С. Бахваловым (1970). Задан алгоритм $A(l, \tau, p, n_1, n_2, n_3)$, если задана совокупность скобок $[A_j, B_j]$, $j = \overline{1, l}$; A_j — или некоторое целое $k > 0$, или z_k, B_j — одна из следующих операций: $z_k := y_{z_l}$, $z_l = \overline{1, n_1}$; $\omega_{z_k} := z_l$, $z_k = \overline{1, n_2}$; $v_{z_k} := z_l$, $z_k = \overline{1, n_3}$; $z_k := v_{z_l}$, $z_l = \overline{1, n_3}$; $z_k := z_l$, $l, k = 1, 2, 3, 5$; $z_3 := z_1 * z_2$, $* = \pm, ., :$; $z_3 := \mathrm{sign}\ z_1$; $z_3 := [z_1]$; $z_5 := f(v_1, \ldots, v_s)$, $s \leqslant n_3$. Кроме того, задана совокупность величин y_j, $j = \overline{1, n_1}$, начиная с B_1, после выполнения B_j переходим к B_{A_j}; если $A_j > l$, то останов. Неформально: l — длина программы, τ — время работы, p — число значений функции f, n_1, n_2, n_3 — объемы памяти ЭВМ. Для класса задач математической физики Н. С. Бахвалов сформулировал следующую гипотезу (формулировка взята в ослабленной и не совсем строгой форме): максимальное количество арифметических операций N, достаточное для решения задачи, логарифмически эквивалентно объему исходной информации M, т. е. $\ln N \sim \ln M$. В частности, для задачи решения линейных алгебраических систем n-го порядка получается $\ln N \sim 2 \ln n$.

Указанная и ряд других гипотез Н. С. Бахвалова в настоящее время подтверждены на задачах численного интегрирования, решения интегральных и дифференциальных уравнений в работах самого автора гипотез, а также в работах Н. М. Коробова, В. И. Лебедева, Е. Г. Дьяконова и др.

В трудных многомерных задачах математической физики полезными оказываются методы, которые дают наилучшие характеристики по числу операций и памяти ЭВМ на определенных классах методов. К таким методам относятся экономичные разностные схемы А. А. Самарского (см. [6]), метод дробных шагов Н. Н. Яненко [7], итеративные процессы Г. И. Марчука и Ю. А. Кузнецова (см. [8]) и др.

Многие результаты для алгоритмов над алгебраическими структурами $A = (X, \Omega)$, где X — носитель алгебры, $\Omega = \{\omega_i, i \in I\}$ — набор операций, представленными в виде отображений

$$\{1, 2, \ldots, N\} \to XV\left(\bigcup_{i \in I}\{\omega_i\} \times (1, 2, \ldots, N)^{n_i}\right) \equiv \{\alpha(k)\},$$

$$\alpha(k) = (\omega_i; j_1, \ldots, j_{n_i}), \quad j_l < k, \quad l = \overline{1, n_i}, \quad k = \overline{1, N},$$

подытожены в монографиях A. Borodin, I. Munro [9] и J. Miklosko [10].

Многочисленные исследования и результаты по теории сложности алгоритмов в виде машин Тьюринга и по многим комбинаторным проблемам опубликованы в [11].

§ 2. Оптимальные алгоритмы в алгебре многочленов и линейной алгебре

Укажем некоторые идеи и результаты, содержащиеся в [9]. Главная цель книги — демонстрация имеющегося аппарата получения нижних оценок числа необходимых арифметических операций при вычислении заданных множеств алгебраических объектов. Здесь представлены оценки снизу как для широких классов объектов, так и для ряда конкретных многочленов с рациональными коэффициентами. Имеются оценки снизу порядка $n \cdot \ln n$ для дискретного преобразования Фурье размерности n и для одновременного вычисления алгебраического многочлена n-й степени и всех его производных. Содержится ряд интересных оценок снизу для распараллеленных алгоритмов. Наиболее глубокие нелинейные оценки, причем для многомерных объектов, получаются на базе аппарата алгебраической геометрии. В этой части главный вклад сделан работами V. Strassen'а. После выхода книги [9] за рубежом продолжают довольно интенсивно работать в том же направлении. Отметим лишь работы V. Strassen'а (1976), где имеющиеся результаты развиты применительно к конечным полям; W. Miller'а (1975), который показал, что при ограничении весьма сильной устойчивостью алгоритма произведение двух матриц n-го порядка требует порядка n^3 операций; Ch. M. Fiduccia (1978), где построено n билинейных форм от одних и тех же $2h$ переменных, требующих для своего вычисления порядка n^2 умножений между ее переменными.

Работы советских математиков-вычислителей, к сожалению, слабо представлены в рассматриваемой области, особенно за последние годы. Активно работают здесь А. А. Скрипий и О. М. Макаров. Конечно, имеются важные результаты многих других математиков (см., например, [12, 13]), но они обычно не содержат нижних оценок числа операций.

§ 3. Оптимальные алгоритмы аппроксимации, решения уравнений и минимизации функций

Широко известны оптимальные по точности (при данной информации) методы решения различных классов задач. Разработчиками таких методов являются А. Н. Колмогоров, С. Л. Соболев, С. М. Никольский, А. Г. Витушкин, Н. С. Бахвалов, В. В. Иванов и многие другие математики. Для доведения такого рода методов до числа во многих случаях не хватает конструктивного и наилучшего по числу операций способа вычисления заданных классов функций и отдельных конкретных функций. До последнего времени остается перешенным вопрос об оптимальных по числу операций алгоритмах вычисления основных элементарных функций. Для этих функций в книге Н. С. Бахвалова [15] указаны алгоритмы, дающие τ верных цифр за $\sqrt{\tau}$ арифметических операций с использованием порядка $\tau^{3/2}$ бит памяти.

Известный результат К. В. Емельянова и А. М. Ильина (1967) об оптимальных по порядку числа операций алгоритмах решения интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода был недавно обобщен на сингулярные интегральные уравнения (В. В. Иванов, Г. Н. Котенкова, 1977) и на линейные некорректные уравнения (В. В. Иванов, 1978) [14]. Аналогичные вопросы применительно к нелинейным уравнениям остаются открытыми.

Для повышения эффективности минимизации многоэкстремальных функций и решения задач невыпуклого математического программирования для многих классов данных важнейшее значение имеет построение оптимальных по числу операций алгоритмов минимизации многочленов от n переменных (с наперед заданной точностью). Как показал В. А. Трубин (1977), эта задача даже в простейшем случае минимизации квадратичной функции вида $f(X) = -\sum\limits_{\substack{i=1\\ j>i}}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $a_{ij}=0,1$, по вершинам n-мерного куба является универсальной. В связи с этим следует отметить новые результаты R. Karp'а (1976) по быстрому приближенному решению трудных комбинаторных проблем. Под быстрым подразумевается решение за $P(n)$ шагов, где P — полином, n — размерность задачи. Приближенное решение в пределах n, $r \geqslant 1$, означает, что полученное значение целевой функции $F \leqslant rF^*$, где F^* — оптимальное, наибольшее значение. Оказалось, например, что известная задача коммивояжера при $r < 2$ также универсальна, а при $r \geqslant 2$ может быть решена быстро, в то же время имеются универсальные задачи, которые могут быть решены быстро при $r = 1 + \varepsilon$ с любым $\varepsilon > 0$. Необходимое число операций может быть значительно сокращено за счет введения вероятностного распределения над возможными входными данными заданного класса универсальных задач и требования решения в пределах r с заданной вероятностью.

Следует отметить, что все же настоятельным остается решение до сих пор открытого вопроса о том, требует ли универсальная задача экспоненциального числа арифметических операций.

Представляет значительный интерес также построение оптимальных по числу операций алгоритмов минимизации унимодальных, двумодальных и полимодальных функций от n переменных. В случае $n = 1$ такие алгоритмы для двумодальных функций построены в работах В. А. Кононова и Т. Л. Бирюковой (1975).

ЛИТЕРАТУРА

1. Gill A. Applied algebra for the computer schiences. New Tersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1962.
2. Вычислительные машины с развитыми системами интерпретации/Глушков В. М., Барабанов А. А., Калиниченко Л. А. и др. Киев, Наукова думка, 1970.
3. Резервы оптимизации вычислений/Глушков В. М., Иванов В. В., Михалевич В. С. и др. Киев, 1977.
4. Глушков В. М., Капитонова Ю. В., Летичевский А. А. Автоматизация проектирования вычислительных машин. Киев, Наукова думка, 1975.
5. Глушков В. М., Цейтлин Г. Е., Юценко Е. Л. Алгебра. Языки. Программирование. Киев, Наукова думка, 1974.
6. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., Наука, 1971.
7. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, Наука, 1967.
8. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. Новосибирск, Наука, 1973.
9. Borodin A., Munro I. The computational complexity of algebraic and numeric problems. N. Y., American Elsevier. Publ. Comp., 1975.
10. Miklosko J. Synteza a analyza numerickych algoritmov. Bratislavo, 1977.
11. Algorithms and Complexity. New directions and recent results. N. Y.—L., Acad. Press, Inc., 1976.
12. Оптимизация вычислений/Отв. ред. В. В. Иванов. Вып. 1—3. Киев, 1977.
13. Численный анализ на ФОРТРАНЕ/ Под ред. В. В. Воеводина. Вып. 1—20. М., 1973—1978.
14. Вариационно-разностные методы в математической физике. (Матер. Всесоюз. конф. Под. ред. Г. И. Марчука): Новосибирск, 1978.
15. Бахвалов Н. С. Численные методы. Т. 1. М., Наука, 1973.

БЛОЧНО-РЕЛАКСАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

Ю. А. КУЗНЕЦОВ

(*Новосибирск*)

Работа посвящена новому подходу к алгоритмической реализации и оптимизации одного класса блочно-релаксационных методов решения задачи Дирихле для уравнений эллиптического типа и является логическим продолжением и развитием работы

[1]. При этом мы не будем стремиться к получению как можно более полных результатов, поскольку возможные обобщения достаточно очевидны и их обоснование требует лишь несколько более сложных математических выкладок.

1. Рассмотрим сначала задачу

$$\mathscr{L}u = f \text{ в } \Omega, \qquad u = 0 \text{ на } \partial\Omega \tag{1}$$

с сильно эллиптическим оператором $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2$, где

$$\mathscr{L}_1 = -\frac{\partial}{\partial x} P \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{и} \quad \mathscr{L}_2 = -\frac{\partial}{\partial y} Q \frac{\partial}{\partial y}, \tag{2}$$

в некоторой двумерной связной области Ω с границей $\partial\Omega$, такой, что $\overline{\Omega}$ является объединением конечного числа прямоугольников $\overline{\Omega}_i$, $i = \overline{1, p}$. Предположим, что пересечением двух любых прямоугольников $\overline{\Omega}_i$ и $\overline{\Omega}_j$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, p}$, может быть только отрезок прямой, параллельный оси y, а коэффициенты P и Q являются положительными константами в каждом из прямоугольников Ω_i, $i = \overline{1, p}$.

Построим в области Ω стандартным образом (см. [2, 3]) прямоугольную сетку и триангулируем ее. Затем, исходя из интегрального тождества

$$[u, v]_{\mathscr{L}} = (f, v), \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \tag{3}$$

где $(,)$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, а $[,]$ — скалярное произведение в энергетическом пространстве, порождаемом оператором $\mathscr{L}$, аппроксимируем задачу (1) в соответствующем пространстве кусочно-линейных функций, обращающихся в ноль на $\partial\Omega$ (см. [2]). В результате получим систему линейных алгебраических уравнений

$$Au = f \tag{4}$$

с симметричной положительно определенной матрицей A порядка N (N — число узлов сетки, принадлежащих Ω) и вектором $f \in E_N$ (E_N — пространство N-мерных вещественных векторов).

Все компоненты вектора u системы (4) разобьем на две группы. В первую группу отнесем компоненты u, соответствующие внутренним узлам прямоугольников Ω_i, $i = \overline{1, p}$, а во вторую — все остальные компоненты. Тогда матрица A системы (4) может быть представлена в виде

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \tag{5}$$

с блочно-диагональными подматрицами A_{11} и A_{22} на диагонали. При этом матрица A_{11} имеет на диагонали p подматриц $A_{11}^{(i)}$ порядка $N_i = n_i \cdot m_i$, т. е.

$$A_{11} = A_{11}^{(1)} \oplus \ldots \oplus A_{11}^{(p)}, \tag{6}$$

которые соответствуют аппроксимации задачи (1) для прямоугольников Ω_i (здесь n_i — число внутренних узлов сетки в прямоугольнике Ω_i по переменной x, а m_i — по переменной y, $i = \overline{1, p}$, и $\oplus$ — знак тензорной суммы матриц), а диагональные блоки A_{22} являются трехдиагональными матрицами.

2. Используя разложение

$$A = B - C, \tag{7}$$

где

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

применим для решения системы (4) блочно-релаксационный метод Гайусса—Зейделя в подпространстве CE_N с привлечением обобщенных формул метода сопряженных градиентов (см. [1, 4]) для его ускорения:

$$\begin{aligned}
&Bu^0 = C\varphi + f;\ \xi^0 = Au^0 - f = C(\varphi - u^0);\\
&R_i p_k = \begin{cases} R_i B^{-1}\xi^0, & k = 1,\\ R_i B^{-1}\xi^{k-1} - a_k R_i p_{k-1}, & k > 1; \end{cases}\\
&a_k = \frac{\left(R_3 B^{-1}\xi^{k-1},\ Ap_{k-1}\right)}{\left(R_3 p_{k-1},\ Ap_{k-1}\right)}, \quad i = \overline{1, 3};\\
&Cu^k = Cu^{k-1} - b_k C p_k;\\
&\xi^k = \xi^{k-1} - b_k A p_k;\\
&b_k = \frac{\left(\xi^{k-1},\ R_3 p_k\right)}{\left(Ap_k,\ R_3 p_k\right)}, \quad k = 1, 2, \ldots
\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь ψ — некоторый, вообще говоря, произвольный вектор из E_N; $R_1 = C$; $R_2 = A$ и R_3 — диагональная матрица с диагональными элементами, равными единице в тех строках, в которых матрица C имеет ненулевые элементы, и остальными нулевыми диагональными элементами. Очевидно, что векторы $R_1 p_k$, $R_2 p_k$, $R_2 B^{-1}\xi^k = (I - CB^{-1})\xi^k$, Cu^k и ξ^k принадлежат пространству $R_3 E_N$ и, следовательно, число их ненулевых компонент не превосходит числа ненулевых строк матрицы C.

Дальнейший анализ метода (9) будем проводить в предположении, что в каждом из прямоугольников Ω_i сетка по переменной x равномерна, т. е. если $\overline{\Omega}_i = \left[X_1^{(i)},\ X_2^{(i)}\right] \times \left[Y_1^{(i)},\ Y_1^{(i)},\ Y_2^{(i)}\right]$, то шагом сетки по переменной x в этом прямоугольнике является величина $h_i = \left(X_2^{(i)} - X_1^{(i)}\right)/(n_i + 1)$, $i = \overline{1, p}$. Кроме того, будем разделять два случая: ОС — общий случай, когда сетка по переменной y предполагается произвольной, и ЧС — частный случай, когда сетка по y предполагается равномерной для всех прямоугольников Ω_i, $i = \overline{1, p}$, одновременно. Очевидно, что ЧС возможен только в том случае, если величины $Y_2^{(i)} - Y_1^{(i)}$, $i = \overline{1, p}$, являются целыми кратными какой-либо одной величины (подобная ситуация возникает искусственно в рассматриваемом ниже двухступенчатом методе).

При сделанных предположениях из [1] следует

Теорема 1. Для решения системы (4) за t_ε итераций метода (9) требуется: в ситуации ОС

$$0\left(\max_{1\leqslant i\leqslant p}[N_i \ln N_i]\right) + 0\left(\max_{1\leqslant i\leqslant p} N_i\right) t_\varepsilon \tag{10}$$

арифметических действий, а в ситуации ЧС

$$\max_{1\leqslant i\leqslant p} N_i + 0\left(\max_{1\leqslant i\leqslant p}[m_i \ln m_i]\right) t_\varepsilon \tag{11}$$

арифметических действий при затрате

$$\max_{1\leqslant i\leqslant p} N + 0\left(\max_{1\leqslant i\leqslant p} m_i\right) \tag{12}$$

ячеек памяти вычислительной машины.

3. Оценку величины t_ε — количества итераций метода (9), требуемых для минимизации A — нормы начальной ошибки $\varphi^0 = u^0 - A^{-1}f$ в $1/\varepsilon$ раз ($\varepsilon < 1$), проведем при типичном предположении близости к единице величины $\rho(B^{-1}C)$. В этом случае (см. [4])

$$t_\varepsilon \sim \frac{|\ln \varepsilon|}{|1 - \rho(B^{-1}C)|^{1/2}}, \tag{13}$$

где $\rho(B^{-1}C)$ — спектральный радиус матрицы $B^{-1}C$.

Введем разложение, которое соответствует блочному методу Якоби (см. [5]),

$$A = \hat{B} - \hat{C}, \tag{14}$$

где

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Нетрудно видеть, что

$$\rho(B^{-1}C) = \hat{\rho}^2(\hat{B}^{-1}C), \tag{16}$$

и, следовательно, нам достаточно оценить сверху спектральный радиус матрицы $\hat{B}^{-1}\hat{C}$. Так как эта матрица является циклической индекса два (см., например, [5]), то

$$\rho\left(\hat{B}^{-1}\hat{C}\right) = \sup_{v\in E_N}\frac{(\hat{C}v, v)}{(\hat{B}v, v)} < \sup_{v\in E_N}\frac{(\hat{C}v, v)}{\left(\left(\hat{B} - A_2\right)v, v\right)} = \rho\left(\left(\hat{B} - A_2\right)^{-1}\hat{C}\right), \tag{17}$$

где A_2 — матрица, возникающая при аппроксимации слагаемого $[u, v]_{\varkappa_2}$ в левой части интегрального тождества (3). Иначе говоря, если вместо интегрального тождества (3) мы тем же способом аппроксимируем интегральное тождество

$$[u, v]_{\mathscr{H}_1} = (f, v), \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \tag{18}$$

и в результате придем к системе

$$A_1 u = f, \tag{19}$$

то аналогичный (9) метод решений этой системы будет сходиться медленнее, чем для системы (4).

После преобразования подобия с помощью соответствующей матрицы перестановок матрица A_1 становится прямой суммой трехдиагональных матриц, описывающих обычную трехточечную разностную аппроксимацию оператора $\mathscr{L}_1$ на линиях сетки. Поэтому наша задача сводится к оценке спектрального радиуса блочного метода Якоби для таких трехдиагональных матриц.

Предположим (без потери общности), что величина $\rho((\widehat{B}-A_2)^{-1}\widehat{C})$ достигается для блока матрицы A_1, соответствующего линии сетки, пересекающей последовательно прямоугольники $\Omega_1, \ldots, \Omega_{l+1}$, где $1 \leqslant l < p$. Тогда после ряда преобразований, аналогичных преобразованиям § 4 из [1], получим

$$\rho\left((\widehat{B}-A_2)^{-1}\widehat{C}\right) = \rho(I_l - R_l D_l) \leqslant 1 - 4d\sin^2\frac{\pi}{2(l+1)}. \tag{20}$$

Здесь I_l — единичная матрица порядка l,

$$R_l = \begin{bmatrix} \tilde{P}_1+\tilde{P} & -\tilde{P}_2 & & 0 \\ -\tilde{P}_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\tilde{P}_l \\ 0 & & -\tilde{P}_l & \tilde{P}_l+\tilde{P}_{l+1} \end{bmatrix},$$

$D_l = \operatorname{diag}\{d_1, \ldots, d_l\}$, $d_i = \dfrac{h_i h_{i+1}}{h_i P_{i+1} + h_{i+1} P_i}$, где P_i — значение коэффициента P в прямоугольнике Ω_i, $\tilde{P}_i = \dfrac{P_i}{X_2^{(i)} - X_1^{(i)}}$, $i = \overline{1, p}$, и

$$d = \min_{1 \leqslant i \leqslant l} d_i \times \min_{1 \leqslant i \leqslant l+1} \tilde{P}_i. \tag{21}$$

Теорема 2. Пусть выполнены сделанные выше предположения. Тогда справедлива оценка

$$t_\varepsilon \leqslant \frac{|\ln \varepsilon|}{2d^{1/2}\sin\dfrac{\pi}{2(l+1)}}. \tag{22}$$

Следствие. Если при измельчении сетки величина

$\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant p}\left\{\frac{n_i}{n_j}, \frac{m_i}{m_j}\right\}$ остается ограниченной, то в ситуации ЧС для решения системы (4) с точностью ε методом (9) требуется

$$0(N \ln N) + 0(N^{3/4} \ln N \ln 1/\varepsilon) \tag{23}$$

арифметических действий.

4. Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered}\widetilde{\mathscr{L}} v = F \text{ в } \widetilde{\Omega},\\ v = 0 \text{ на } \partial\Omega\end{gathered} \tag{24}$$

с симметричным сильноэллиптическим оператором

$$\widetilde{\mathscr{L}} = -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{25}$$

в двумерной области $\widetilde{\Omega}$ с кусочно-линейной границей $\partial\widetilde{\Omega}$. Триангулируем область $\widetilde{\Omega}$ так, чтобы она допускала кусочно-линейное отображение на треугольную сетку области Ω (см. п. 1) с постоянными шагами по переменным x и y в каждом из прямоугольников Ω_i, $i = \overline{1, p}$, и якобиан преобразования $S : \widetilde{\Omega} \to \Omega$ был ограничен снизу и сверху константами, не зависящими от этих шагов (см. например, [6, 7]).

На построенной сетке, исходя из интегрального тождества

$$[v, \varphi]_{\widetilde{\mathscr{L}}} = (F, \varphi), \ \ \forall\varphi \in \mathring{W}_2^1(\widetilde{\Omega}), \tag{26}$$

аппроксимируем исходную задачу в классе кусочно-линейных функций, в результате чего придем к системе линейных алгебраических уравнений

$$\widetilde{A} v = F \tag{27}$$

с матрицей $\widetilde{A}$ порядка N и $F \in E_N$. Матрице $\widetilde{A}$ поставим в соответствие матрицу A системы (4) с такими значениями коэффициентов P и Q, чтобы отношение β/α констант

$$\beta = \sup_{u\in\mathring{W}_2^1(\Omega)} \frac{[u, u]_{\breve{\mathscr{L}}}}{[u, u]_{\mathscr{L}}} \text{ и } \alpha = \inf_{u\in\mathring{W}_2^1(\Omega)} \frac{[u, u]_{\breve{\mathscr{L}}}}{[u, u]_{\mathscr{L}}}, \tag{28}$$

где $\breve{\mathscr{L}}$ — преобразованный оператор $\widetilde{\mathscr{L}}$ в переменных x и y, было как можно меньше. Тогда при выполнении сделанных предположений справедлива

Теорема 3. Двухступенчатый итерационный метод (см., например, [7]) с использованием метода (9) для внутренних итераций требует для решения системы (27) с точностью $\varepsilon < 1$

$$0(N \ln N \ln 1/\varepsilon) \tag{29}$$

арифметических действий при

$$\max_{1\leqslant i\leqslant p} N_i + 0\left(\max_{1\leqslant i\leqslant p} m_i\right) \tag{30}$$

ячейках памяти вычислительной машины.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кузнецов Ю. А.** Блочно-релаксационные методы в подпространстве, их оптимизация и применение.— В кн.: Вариационно-разностные методы в математической физике. Новосибирск, 1978, с. 178—212.
2. **Марчук Г. И.** Методы вычислительной математики. М., Наука, 1977.
3. **Самарский А. А.** Теория разностных схем. М., Наука, 1977.
4. **Марчук Г. И., Кузнецов Ю. А.** Итерационные методы и квадратичные функционалы.— В кн.: Методы вычислительной математики. Новосибирск, Наука, 1975, с. 4—143.
5. **Мацокин А. М.** Вариационно-разностный метод решения эллиптических уравнений в круге. Новосибирск, 1975. (Препринт ВЦ СО АН СССР).
6. **Дьяконов Е. Г.** Некоторые классы операторов, эквивалентных по спектру, и их применения.— В кн.: Вариационно-разностные методы в математической физике. Новосибирск, 1976, с. 49—61.
7. **Varga R. S.** Matrix iterative analysis. New Tersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1962

ТЕОРИЯ ИГР И ОПТИМАЛЬНОСТЬ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

В. И. ЛЕБЕДЕВ

(*Москва*)

Для оценки эффективности итерационных методов используем критерий оптимальной стратегии теории игр [1]. Определим игру как тройку (Σ, Ω, K), где Σ, Ω — компактные выпуклые множества, а $K = K(\sigma, \omega)$ — непрерывная функция, определенная на $\Sigma \times \Omega$ $(\sigma \in \Sigma,\ \omega \in \Omega)$, выпуклая вверх по σ при фиксированном $\omega \in \Omega$ и выпуклая вниз по ω при фиксированном $\sigma \in \Sigma$. Будем считать Σ, Ω пространствами стратегий для игроков I и II соответственно.

Основная теорема теории игр утверждает, что

$$\max_{\sigma\in\Sigma}\min_{\omega\in\Omega} K(\sigma, \omega) = v = \min_{\omega\in\Omega}\max_{\sigma\in\Sigma} K(\sigma, \omega). \tag{1}$$

Причем существуют $\sigma_0 \in \Sigma$ и $\omega_0 \in \Omega$ такие, что $K(\sigma_0, \omega) \geqslant v$ для всех $\omega \in \Omega$ и $K(\sigma, \omega_0) \leqslant v$ для всех $\sigma \in \Sigma$. Величины σ_0 и ω_0 называются оптимальными стратегиями.

Эффективность итерационных методов с точки зрения оптимальных стратегий изучалась в работах [2, 3]. В данной статье мы обобщим некоторые результаты § 7 гл. X работы [1] на случай распределения масс с весом.

Пусть $L_k(x)$, $k = 0,1, \ldots, n$ — интерполяционные многочлены Лагранжа, ассоциированные с точками x_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, т. е. $L_k(x_j) = \delta_{kj}$. Тогда любой многочлен n-й степени представим в виде

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} P_n(x_k) L_k(x). \tag{2}$$

При $\gamma_k > 0$ имеем

$$|P_n(x)|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n} \gamma_k P_n^2(x_k) \sum_{k=0}^{n} \gamma_k^{-1} L_k^2(x). \tag{3}$$

Пусть $p(x) > 0$ — непрерывная на $[-1, 1]$ функция, а $T_n(x, p)$ — многочлен n-й степени с единичным коэффициентом при x^n, наименее отклоняющийся от нуля на $[-1, 1]$ с весом $p(x)$ [4 — 6]. Если $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |T_n(x, p)\, p(x)| = \mu_n$, то через $s_0 > s_1 > \ldots > s_n$ обозначим $n + 1$ точек отрезка $[-1, 1]$, в которых $T_n(x, p)p(x)$ принимает значения $\pm\mu_n$.

Пусть Σ — класс распределений масс $\sigma(x)$ на $[-1, 1]$ таких, что

$$0 \leqslant \int_{-1}^{1} d\sigma(x) \leqslant C; \quad \int_{-1}^{1} f(x)\, d\sigma(x) \geqslant 0 \tag{4}$$

при $f(x) \geqslant 0$. Здесь $C > 0$.

Рассмотрим игру (Σ, Ω, K), где Σ — класс распределений масс (4), Ω — класс неотрицательных многочленов $P_{2n}(x)$ степени $2n$, нормированных условием $P_{2n}(\Theta) = 1$, где $\Theta > 1$, а ядро K определено на $\Sigma \times \Omega$ посредством формулы

$$K(\sigma, P_{2n}) = \int_{-1}^{1} P_{2n}(x)\, p^2(x)\, d\sigma(x). \tag{5}$$

Для нее

$$v = \min_{P_{2n}} \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} P_{2n}(x)\, p^2(x)\, C = \max_{\sigma} \min_{P_{2n}} \int_{-1}^{1} P_{2n}(x)\, p^2(x)\, d\sigma(x). \tag{6}$$

Справедлива

Лемма. Пусть $\sigma(x)$ — распределение масс (4) на $[-1, 1]$, $p(x) > 0$ — непрерывная на $[-1, 1]$ функция, а $P_n(x)$ — многочлен степени не более n и такой, что $P_n(\Theta) = 1$, где $\Theta > 1$. Тогда

$$\sup_{\sigma} \inf_{P_n} \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, p^2(x)\, d\sigma(x) = \frac{C\mu_n^2}{T_n^2(\Theta, p)}; \tag{7}$$

кроме того,

$$\inf_{P_n} \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, p^2(x)\, d\sigma(x) = \frac{C\mu_n^2}{T_n^2(\theta,\ p)} \tag{8}$$

в том и только в том случае, когда $\sigma(x)$ сосредоточивает массы

$$\lambda_i^0 = \frac{C\,|\,L_i(\theta)\,|}{p(s_i) \sum\limits_{k=0}^{n} |\,L_k(\theta)\,|/p(s_k)} \tag{9}$$

в точках s_i, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для игры $(\Sigma,\ \Omega,\ K)$ справедливо равенство (6), из которого следует, что единственный оптимальный минимизирующий многочлен есть $T_n^2(x,\ p)/T_n^2(\theta,\ p)$, так как в противном случае многочлен $P_{2n}(x) - T_n^2(x,\ p)/T_n^2(\theta,\ p)$ будет иметь нуль в точке Θ и $2n$ нулей в $[-1,\ 1]$, что невозможно.

Итак

$$v = \min_{P_{2n}} \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} P_{2n}(x)\, p^2(x)\, C = \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \frac{T_n^2(x,\ p)}{T_n^2(\Theta, p)}\, C p^2(x) = \frac{C\mu_n^2}{T_n^2(\Theta, p)}$$

и $T_n^2(x,\ p)/T_n^2(\Theta,\ p)$ — единственная оптимальная для игрока II стратегия. В частности,

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n^2(x,\ p)}{T_n^2(\Theta, p)}\, p^2(x)\, d\sigma(x) \leqslant \frac{C\mu_n^2}{T_n^2(\Theta, p)} = v$$

для всех $\sigma \in \Sigma$.

Очевидно, что оптимальная стратегия σ_0 для игрока I представляет массу C, сосредоточенную в $n + 1$ точках s_k, где $T_n^2(x,\ p)\, p^2(x) = \mu_n^2$. Если λ_k, $k = 0, \ldots, n$, обозначают соответствующие веса в точках s_k, то оптимальность $\sigma_0(x)$ означает, что

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_n^2(s_k)\, p^2(s_k) \geqslant \frac{C\mu_n^2}{T_n^2(\Theta, p)}. \tag{10}$$

Тогда из (3) при $\gamma_k = \lambda_k p^2(s_k)$ получим

$$1 = P_n^2(\Theta) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_n^2(s_k)\, p^2(s_k) \sum_{k=0}^{n} \frac{L_k^2(\Theta)}{\lambda_k p^2(s_k)},$$

т. е.

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_n^2(s_k)\, p^2(s_k) \geqslant \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{L_k(\Theta)}{\lambda_k p^2(s_k)} \right)^{-1}. \tag{11}$$

Максимум по $\lambda_k \left(\lambda_k \geqslant 0,\ \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k \leqslant C\right)$ правой части (11) вычисляется с помощью множителей Лагранжа, он достигается в единственном случае при $\lambda_k = \lambda_k^0$ (см. (9)) в точках s_k, $k = 0, \ldots, n$. В этом случае

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{L_k^2(\theta)}{\lambda_k^0 p^2(s_k)} = T_n^2(\Theta, p)/(C\mu_n^2).$$

Следовательно, множество $\{\lambda_k^0\}_0^n$ образует оптимальное множество весов для игрока I.

При любом другом наборе λ_k имеем

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{L_k^2(\Theta)}{\lambda_k p^2(s_k)}\right)^{-1} < \frac{C\mu_n^2}{T_n^2(\Theta, p)}.$$

Следовательно, оптимальные веса определены единственным образом.

Отметим, что согласно лемме оптимальная стратегия сосредоточена на фиксированном множестве $n+1$ точек s_k независимо от выбора $\Theta > 1$.

Очевидно, что если мы рассмотрим новую игру (Σ', Ω', K), где $\sigma_0 \in \Sigma' \leqslant \Sigma$, $\omega_0 \in \Omega' \leqslant \Omega$, то стратегии σ_0, ω_0 будут оптимальными и в игре (Σ', Ω', K). Поэтому если считать, что Σ' — класс распределений масс, сосредоточенных на множествах с числом точек, не превышающих $n+1$, а Ω' — класс многочленов вида $P_n^2(x)\left(P_n^2(\Theta) = 1\right)$, то оптимальные стратегии для игроков I, II в игре (Σ', Ω', K) останутся прежними. Пусть $\widetilde{A}$ — класс симметричных положительно определенных матриц A порядка N, $\mathrm{Sp}(A) \in [m, M]$, где $0 < m < M$. Собственные значения и нормированные собственные функции A обозначим через $\lambda_i = \lambda_i(A)$, $\varphi_i = \varphi_i(A)$.

Пусть нам предстоит решить серию задач

$$Au = f, \tag{12}$$

где $A \in \widetilde{A}$, а $f \in F$, итерационным методом типа

$$u^{k+1} = u^k - \alpha_{k+1}(Au^k - f) \tag{13}$$

или

$$u^{k+1} = u^k - \alpha_{k+1}(Au^k - f) - \\ - \beta_{k+1}(u^k - u^{k-1}), \tag{14}$$

начиная с некоторого начального приближения $u^0 \in U$. На классы F, U наложим следующие ограничения: если

$$A^{-1}f - u^0 = \varepsilon^0 = \sum_i \varepsilon_i^0 \varphi_i, \tag{15}$$

то потребуем, чтобы $\varepsilon^0 \in l_2(\psi(t), C_1)$, где $C_1 > 0$, а $\psi(t) > 0$ — непрерывная на $[m, M]$ функция. Это означает, что

$$\sum_i |\overline{\varepsilon}_i^0|^2 \leqslant C_1, \text{ где}$$

$$\varepsilon_i^0 = \psi(\lambda_i)\, \overline{\varepsilon}_i^0. \tag{16}$$

Пусть стратегия игрока I состоит из множества

$$\widetilde{\Sigma} = \{A \in \widetilde{A},\ \varepsilon^0 \in l_2(\psi(t), C_1)\}. \qquad (17)$$

Пусть игрок II делает для решения задачи (12) заданное число s итераций по методу (13) или (14). Тогда если $\varepsilon^s = u - u^s$, то

$$\varepsilon^s = P_s(A)\varepsilon^0, \qquad (18)$$

где

$$P_s(t) = \prod_{i=1}^{s} (1 - \gamma_i t) \qquad (19)$$

— многочлен, коэффициенты γ_i которого определяются параметрами методов (13) или (14) [5]. Пусть $\widetilde{\Omega} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_s\}$ — множество стратегий игрока II, а $B(t) > 0$ — непрерывная на $[m, M]$ функция.

Качество итерационного метода будем оценивать по назначению функционала от ошибки:

$$\widetilde{K} = (B(A)\varepsilon^s, \varepsilon^s). \qquad (20)$$

Рассмотрим игру $(\widetilde{\Sigma}, \widetilde{\Omega}, \widetilde{K})$. Для нее на классе $l_2(\psi(t), C_1)$

$$\widetilde{K} = \sum_{i=1}^{N} P_s^2(\lambda_i)\, p^2(\lambda_i)\, (\bar{\varepsilon}_i^0)^2 = \int_m^M P_s^2(t)\, p^2(t)\, d\sigma(t),$$

где $p^2(t) = B(t)\psi^2(t)$, а $\sigma(t)$ — кусочно-постоянная функция типа (4), имеющая скачки $(\bar{\varepsilon}_i^0)^2$ в точках λ_i. Нетрудно видеть, что игра $(\widetilde{\Sigma}, \widetilde{\Omega}, \widetilde{K})$ эквивалентна при $N = n + 1$ игре (Σ', Ω', K), а поэтому оптимальной стратегией для игрока II будет выбор значений $\{\gamma_1^0, \ldots, \gamma_s^0\}$, которые равны обратным значениям корней многочлена (19), наименее с весом $p(t)$ отклоняющегося от нуля на $[m, M]$, т. е. оптимальным будет линейный чебышевский с весом итерационный метод [4, 5].

Рассмотрим методы сопряженных градиентов (МСГ) типа (14). Для них обычно в функционале $B(t) = t^j$, где j — заданное число. Так, при $j = 1$ имеем

$$\alpha_1 = \mu_0^{-1};\ \alpha_{k+1} = (\mu_k - \gamma_k)^{-1};\ \beta_{k+1} = -\gamma_k \alpha_{k+1},\ k = 0, 1, \ldots, \qquad (21)$$

где

$$\gamma_0 = 0;\ \gamma_k = \delta_k/(\alpha_k \sigma_{k-1});\ \sigma_k = (r^k, r^k);$$
$$\mu_k = (Ar^k, r^k)/\sigma_k;\ r^k = Au^k - f. \qquad (22)$$

В игре $(\widetilde{\Sigma}, \widetilde{\Omega}, \widetilde{K})$ для каждой стратегии $\sigma \in \widetilde{\Sigma}$ выбор параметров $\omega = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_s\}$ в МГС в соответствии с формулами (21), (22) оптимален, а при оптимальной стратегии $\sigma_0 \in \widetilde{\Sigma}$ эти параметры по лемме 1 совпадают с параметрами оптимального чебышевского метода, т. е. $\omega = \omega_0$.

Может сложиться впечатление, что при $\sigma \neq \sigma_0$ МСГ предпочтительнее чебышевских методов. Однако это не очевидно, поскольку: 1) в формулах (22) приходится подсчитывать скалярные произведения — это увеличивает цену одной итерации; 2) МСГ может быть столь неустойчив по отношению к ошибкам округления, что порождаемые им ошибки заметно изменят величины в формулах (21), (22).

Неустойчивость метода (14) возникает, если $\|P_k(A)\| \gg 1$ в (18) при некоторых $1 \leqslant k < N$. Известно, что

$$\| P_k (A) \| = \sup_{t \in \mathrm{Sp}(A)} | P_k (t) |. \tag{23}$$

В МСГ малость величины $\|P_k(A)\|$ не является необходимым условием его сходимости. Справедлива

Теорема. Пусть все вычисления в методе сопряженных градиентов (14), (21), (22) выполняются точно. Тогда для $\forall R > 1$ существует такое $\varepsilon > 0$, что, как только $m/M < \varepsilon$, находится такая стратегия $\sigma \in \tilde{\Sigma}$, что $\|P_s(A)\| > R^s$ при $1 \leqslant s < N$.

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что $M = 1$. Пусть $\Delta = \left[\frac{1}{4(R+1)}, \frac{1}{2(R+1)}\right]$, тогда возьмем $\varepsilon = \frac{1}{4(R+1)}$, а в качестве $\sigma \in \tilde{\Sigma}$ — стратегию (17), характеризуемую для некоторой функции $\psi(t) > 0$ следующими свойствами: $\lambda_i(A) \geqslant \Delta$ и $\varepsilon_i^0 \neq 0$ при $i = 1, \ldots, N - 1$ и $\lambda_N (A) = 1$, $\varepsilon_N^0 = 0$. Тогда все корни $P_s(t)$, $1 \leqslant s \leqslant N - 1$, будут принадлежать отрезку Δ, и поэтому, согласно (23), $\|P_s(A)\| = |P_s(1)| \geqslant (1 + 2R)^s > R^s$ при $1 \leqslant s \leqslant N - 1$.

При численной реализации методом (14), (21), (22) стратегии σ типа описанной в теореме сначала происходят сильный рост и накопление ошибок округления. В разложении по собственным функциям эти ошибки имеют большие по модулю коэффициенты Фурье при тех $\varphi_n(A)$, которые соответствуют λ_n, близким к M. Вследствие этого изменяются значения коэффициентов α_k, β_k в (14), т. е. метод перестает быть оптимальным; он начинает «бороться» с порожденными им же самим ошибками, распределенными уже по всему спектру. Описанная потеря эффективности численно проверялась автором и Ю. А. Власовым на примере задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Что касается оптимальной стратегии $\omega_0 \in \tilde{\Omega}$ — чебышевского с весом метода, то численная реализация его устойчива при $p(t) \geqslant \beta > 0$ [5]. Для нахождения функции $p(t)$ в этом методе предложен алгоритм [5], основанный на применении на первых итерациях МСГ и решении неполной проблемы моментов. Численные эксперименты, проведенные Ю. А. Власовым для уравнения Пуассона, показали хорошую эффективность этого алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Карлин С., Стадден В.** Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М., Наука, 1976.
2. **Итеративные** методы в теории игр и программировании /Под ред. **В. З. Беленького** и В. А. Волконского. М., Наука, 1974.
3. Kaniel S. Estimates for Some Computational Techniques in Linear Algebra.— Math. Comput., 1966, v. 20, N 95, p. 309—378.
4. Лебедев В. И. Оптимальные с весом итерационные методы.— В кн.: Вычислительные методы линейной алгебры. Новосибирск, 1977, с. 31—39.
5. **Лебедев В. И.** Итерационные методы решения линейных операторных уравнений и многочлены, наименее отклоняющиеся от нуля.— Труды Ин-та математики СО АН СССР. Новосибирск, 1978 (в печати).
6. **Лебедев В. И., Власов Ю. А., Финогенов С. А.** Об асимптотически оптимальных итерационных методах, учитывающих информацию о спектре оператора, и определении начальной ошибки.— В кн.: Вычислительные методы линейной алгебры. Новосибирск, 1977, с. 61—78.

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. А. МОРОЗОВ

(Москва)

§ 1. Постановка задачи

Пусть E, F, G и V суть банаховы пространства, A, L и B суть линейные (возможно, неограниченные) операторы, заданные на линейном множестве $D \subset E$ и действующие соответственно в F, G и V. Вычисляется значение оператора B на некотором элементе $u \in D$, информация о котором характеризуется [1, 2]:

а) точным или приближенным значением оператора A на этом элементе: $f = Au$ или $\tilde{f} \approx Au$;

б) принадлежностью элемента u некоторому допустимому множеству элементов $M_R = \{u \in D : \| L u\|_G \leqslant R < +\infty\}$.

Если T — любой (возможно, нелинейный) алгоритм (оператор), действующий из F в V, то погрешность приближения B оператором T характеризуем величиной

$$\omega_B(\delta_\delta, R : T) = \sup_{u \in M; \xi : \|\xi\|_F \leqslant \delta} \| Bu - T\tilde{f}\|_V, \; f = Au, \; \tilde{f} = f + \xi.$$

Требуется найти *оптимальный* оператор T_{opt}

$$\omega_B(\delta, R; T_{\text{opt}}) = \min_T \tag{1}$$

или *квазиоптимальный* оператор $T_{q_{\text{opt}}}$

$$\omega_B(\delta, R; T_{q_{\text{opt}}}) \asymp \inf_T \omega_B(\delta, R; T). \tag{2}$$

Возможны другие постановки задач оптимизации, учитывающие «локальность» в задании правой части или другие формы меры погрешности (см. далее) [3, 4].

§ 2. Основные результаты

Пусть оценочная функция

$$\omega_B(\delta, R) = \sup_n \| Bu \|_V, \quad u \in M_{\delta,R} = \{u \in D : \| Au \|_F \leqslant \delta, \| Lu \|_G \leqslant R\}.$$

Теорема 1. Для любого допустимого алгоритма T справедлива оценка $\omega_B(\delta, R; T) \geqslant \omega_B(\delta, R)$.

Оператор B называется *равномерно оцениваемым*, если $\omega_B(\delta, R) \to 0$, когда $\delta \to 0$.

Теорема 2. Для того чтобы оператор B был равномерно оцениваемым, необходимо и достаточно выполнение условия: для всякой последовательности $u_n \in D$, $\|Lu_n\| \leqslant K$, $\| Au_n\| \to 0$ имеет место соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} \| Bu_n \|_V = 0$.

Случай $\delta = 0$. Рассмотрим задачу: найти элемент $u_f \in D$ такой, что

$$\inf_{u\in D:Au=f} \| Lu \| = \| Lu_f \|. \tag{3}$$

Такой элемент называется *псевдорешением*, а оператор $f \to u_f$ — *псевдообратным* и обозначается A^+[1].

Теорема 3. Пусть $u_f - u \in M_R$ для любого $u \in M_R : Au = f$. Тогда $T_{\text{opt}} = BA^+$[5].

Случай $\delta > 0$. Можно указать ряд квазиоптимальных алгоритмов [1, 6].

В частности, таковым является алгоритм нахождения элемента $u_{\delta,R} \in D$, доставляющего минимум функционалу

$$\| Au - \tilde{f} \|^2 + \frac{\delta^2}{R^2} \| Lu \|^2, \quad u \in D.$$

При этом требуется знание как δ, так и R, но не возникает проблем выбора параметра регуляризации.

Далее изучается влияние погрешности в задании оператора A. Пусть вместо A известен оператор $\tilde{A} : \| Au - \tilde{A}u \| \leqslant h \| Lu \|$, $\forall u \in D$. В качестве допустимых алгоритмов рассмотрим отображения $T_\sigma = T_\sigma(\tilde{f}, \tilde{A})$, $\sigma = (h, \delta)$, действующие из пространства данных в V. Погрешность приближения значений Bu характеризуем величиной

$$\omega_B(\sigma, R; T) = \sup_{u\in M_R; \delta A; \|\xi\|<\delta} \| Bu - T_\sigma(\tilde{f}, \tilde{A}) \|_V, \quad f = Au, \ \tilde{f} = f + \xi.$$

Очевидно, что

$$\omega_B(\sigma, R; T) \geqslant \omega_B(\delta, R; T), \forall T.$$

Определим приближенные решения как элементы $\tilde{u} \in D$:

$$\|\tilde{A}\tilde{u} - \tilde{f}\| \leqslant h \|L\tilde{u}\| + \delta + \varepsilon_1,$$

$$\|L\tilde{u}\| \leqslant \tilde{\nu} + \varepsilon_2,$$

где $\tilde{\nu} = \inf\limits_{u \in \tilde{U}} \|Lu\|$, а множество $\tilde{U} = \{u \in D : \|\tilde{A}u - \tilde{f}\| \leqslant \leqslant h \|Lu\| + \delta\}$.

Теорема 4. Пусть $h \leqslant \delta$, $\varepsilon_1 \leqslant \delta$, $\varepsilon_2 \leqslant R$. Тогда

$$\|B\tilde{u} - Bu\|_V \leqslant \omega_B(\delta, R),$$

т. е. алгоритм $T_\sigma = B\tilde{u}$ является квазиоптимальным. Элементы $\tilde{u}$ построены в соответствии с методом оптимальной невязки [1].

Далее определим тихоновский функционал, $0 < \lambda < \infty$,

$$\Phi_\lambda[u; v] = \lambda \|Au - v\|^2 + \|Lu\|^2, u \in D.$$

Предполагаем, что задача нахождения $u_\lambda \in D$ такой, что

$$\Phi_\lambda[u_\lambda; v] = \inf_{u \in D} \Phi_\lambda[u; v], \tag{4}$$

однозначно разрешима при всех $v \in F$ и любых допустимых λ.

Определим меру погрешности приближения [7, 8]

$$\omega_B(\lambda; v; T) = \sup_{u \in D} \{\|Bu - Tv\|_V / \Phi_\lambda^{1/2}[u; v]\}$$

и потребуем, чтобы оператор T_λ был таким, что

$$\omega_B(\lambda, \tilde{f}; T_\lambda) = \inf_T.$$

Теорема 5. Оператор $T_\lambda = BA_\lambda$, где A_λ определяется как оператор $v \to u_\lambda$, задаваемый (4). При этом

$$\inf_T \omega_B(\lambda; \tilde{f}; T) = \sup_{u \in D} \{\|Bu - B\tilde{u}_\lambda\|_V / \Phi_\lambda^{1/2}[\tilde{u}_\lambda; \tilde{f}]\},$$

где $\tilde{u}_\lambda$ — решение задачи (4).

Важной проблемой является вычисление погрешности регуляризации [2]

$$\omega_B(\lambda, \delta, R) = \sup_{u \in M_R; \|\xi\| \leqslant \delta} \|Bu - B\tilde{u}_\lambda\|, \quad \tilde{u}_\lambda = A_\lambda \tilde{f}.$$

Определим величину (считается, что $E = H$, F и G гильбертовы)

$$\Omega_B(\lambda, \delta, R) = \|B(\lambda A^*A + L^*L)^{-1}L^*\|R + \\ + \lambda\|B(\lambda A^*A + L^*L)^{-1}A^*\|\delta.$$

Теорема 6. Имеют место оценки $\omega_B(\delta, R) \leqslant \rho_B(\lambda, \delta, R) \leqslant \Omega_B(\lambda, \delta, R)$.

Выберем λ_{opt} такое, что $\Omega_B(\lambda_{opt}, \delta, R) = \inf\limits_{\lambda}\Omega_B(\lambda, \delta, R)$.

В некоторых частных случаях доказана следующая

Гипотеза. Оператор $T_{\lambda_{opt}}$ оптимален в смысле критерия (1).

Регуляризованные решения обладают также следующим свойством оптимальности в смысле Голомба — Вайнбергера.

Пусть множество $M_{R,\lambda} = \{u \in D : \lambda \| Au - \tilde{f}\|^2 + \|Lu\|^2 \leqslant R^2\} \neq \varnothing$ и $N_{R,\lambda} = BM_{R,\lambda}$ — образ этого множества. Нетрудно видеть, что множество $M_{R,\lambda}$, а следовательно, и $N_{R,\lambda}$ — выпукло. Если ввести норму $(\cdot) = (\|A\cdot\|^2 + \|L\cdot\|^2)^{1/2}$ на D, то множество $N_{R,\lambda}$ ограничено по этой норме. Если выполнено условие подчиненности $\|B\cdot\|_V \leqslant \gamma\|\cdot\|$ на D, то множество $N_{R,\lambda}$ также будет ограниченным. В качестве наилучшей аппроксимации значений оператора B предлагается взять центр симметрии множества $N_{R,\lambda}$.

Теорема 7. При указанных предположениях множество $M_{R,\lambda}$ является центрально-симметричным с центром симметрии в точке $\tilde{u}_\lambda$, удовлетворяющей (4). Таким образом, решением поставленной задачи будет элемент $B\tilde{u}_\lambda$.

Отметим, что аналогичный результат справедлив и в случае $\delta = 0$.

Сплайны. Важный частный случай — это ситуация, когда $Au = A_n u = (l_1(u), \ldots, l_n(u))$, а $l_i = l_i^n(u)$ суть линейные функционалы. Тогда решение (3) определяет сплайн $s_n = A_n^+ f_n$, $f_n = A_n u$, а оператор $A_n^+ = S_n$ называется оператором сплайн-интерполяции. Из предыдущего вытекает, что наилучшим приближением к Bu является значение B на сплайне, определенном этим элементом [9].

Пусть существуют $r_n \to 0$, $n \to \infty$, такие, что

$$\|u - S_n u\|_H \leqslant r_n \|Lu\|_G, \ \forall u \in D.$$

Теорема 8. Если оператор B таков, что $\|Bu\|_V \leqslant \gamma(\|u\|_H + \|Lu\|_G)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \|Bu - Bs_n\|_V = 0$, $\forall u \in D$, т. е. имеет место поточечная сходимость операторов $B_n = BS_n$ к B на D.

Теорема 9. Если B — образ всякого ограниченного по норме $\|\cdot\|_L = (\|\cdot\|_H^2 + \|L\cdot\|_G^2)^{1/2}$ множества компактен в V, то $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_B^n(R) = 0$, где $\omega_B^n(R) = \omega_B(0, R)$ для $A = A_n$, т. е. имеет место равномерная сходимость семейства B_n к B.

Полагая $\omega_B^n(1) = h_n(B)$, получаем неулучшаемую оценку точности для аппроксимации оператора B

$$\|Bu - B_n u\|_V \leqslant h_n(B)\|Lu\|_G, \ \forall u \in D.$$

Заметим, что $h_n(B)$ зависит от функционалов l_i. Поэтому возможна дальнейшая оптимизация за счет их более рационального выбора.

Полученные результаты имеют важное значение при обосновании прямых методов решения операторных уравнений первого рода [9].

Отметим, что некоторые из изложенных результатов получены автором совместно с А. И. Гребенниковым.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Морозов В. А.** Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М., Изд-во МГУ, 1974.
2. **Морозов В. А.** Об оценках погрешности решения некорректно поставленных задач с линейными неограниченными операторами.— Журн. вычислит. мат. и мат. физ., 1970, т. 10, № 5, с. 1081—1091.
3. **Морозов В. А., Гребенников А. И.** О некоторых оптимальных методах приближения операторов.— В кн.: Вариационно-разностные методы в математической физике. Новосибирск, 1976, с. 158—168.
4. **Морозов В. А.** Об оптимальной регуляризации операторных уравнений.— Журн. вычислит. мат. и мат. физ., 1970, т. 10, № 4, с. 818—829.
5. **Морозов В. А.** Оценивание точности решения некорректных задач и решение систем линейных алгебраических уравнений.— Журн. вычислит. мат. и мат. физ., 1977, т. 17, № 6, с. 1341—1349.
6. **Морозов В. А.** Об оптимальности критерия невязки в задаче вычисления значений неограниченного оператора.— Журн. вычислит. мат. и мат. физ. 1971, т. 11, № 4, с. 1019—1024.
7. **Морозов В. А., Гребенников А. И.** Об оптимальном приближении операторов.— Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 6, с. 1307—1310.
8. **Морозов В. А., Гребенников А. И.** Об оптимальных методах решения некоторых задач.— Семинар Ин-та прикл. мат. Тбилисск. ун-та. (Аннотации докл.). Тбилиси, 1976, № 11, с. 51—55.
9. **Морозов В. А.** О некоторых применениях метода сплайнов к решению операторных уравнений первого рода.— Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 2, с. 300—303.

Часть 3

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

ОЦЕНКА ОШИБОК КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ С. Л. СОБОЛЕВА НА ОБЛАСТЯХ С ВЫРОЖДЕННЫМИ УГЛАМИ

Г. Г. АКОПЯН

(Москва)

В работах [1—3] определены последовательности функционалов ошибок кубатурных формул с пограничным слоем в $L_p^m(\Omega)$ ($1 < p < \infty$, m — натуральное число, $\Omega \subset E^n$ — ограниченная область со слабым условием конуса или с резкой границей). При стремлении шага h кубической решетки к нулю нормы функционалов ошибок таких формул стремятся к нулю, как $Bh^m + o(h^m)$, где B — некоторая постоянная, не зависящая от h.

В [4] рассматривались последовательности функционалов ошибок с анизотропным пограничным слоем и узлами кубической решетки, причем область интегрирования содержала вырожденные углы. Для некоторого класса областей с вырожденными углами (с условием r-пика) там получены неулучшаемые оценки норм таких последовательностей через шаг h кубической сетки.

Здесь для областей с нулевыми углами строятся последовательности формул с узлами кубической решетки и некоторыми добавленными к ним узлами из приграничной полосы области Ω. Показывается, что при таком построении кубатурных формул улучшаются оценки норм функционалов ошибок через шаг сетки и через общее число узлов.

Назовем r-конусом множество

$$V(r, b) = \left\{x : \frac{x_i}{a_i} > 0\,(i = 1, \ldots, n); \left(\frac{x_j}{a_j}\right)^{r_j} < \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{r_1} < b\,(j = 2, \ldots, n)\right\}, \tag{1}$$

$$r = (r_1, \ldots, r_n),\ r_1 \geqslant \ldots \geqslant r_n > 0,$$
$$a_i \neq 0\ (i = 1, \ldots, n),\ b > 0.$$

Область Ω называется областью с условием r-конуса, если существуют измеримые, попарно непересекающиеся множества G_k и r-конусы V_k ($k = 1, \ldots, K$) такие, что

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{K} G_k = \bigcup_{k=1}^{K} (G_k + V_k). \tag{2}$$

Заметим, что область Ω с условием r-конуса удовлетворяет и условию (σr)-конуса ($\sigma r = (\sigma r_1, \ldots, \sigma r_n)$). Будем также говорить, что область Ω удовлетворяет (слабому) условию конуса, если она представима в виде (2), где V_k — обычные ограниченные конусы (см. [5], с. 118). Приведем некоторые примеры областей с условием r-конуса.

Пример 1. $\Omega = \bigcup_{j=1}^{J} (x^{(j)} + V'(r))$, где $V'(r) = V(r) \cup Q'$, $Q' = \{x : 1 \leqslant x_1 < 2,\ 0 \leqslant x_j < 1 (j = 2, \ldots, n)\}$, а $V(r)$ задается с помощью (1) при $a_1 = \ldots = a_n = b = 1$; $0 \leqslant x_i^{(j)} \leqslant \frac{1}{2}$ ($i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, J$).

Пример 2. $\Omega = \{x : \varphi_1(x') < x_1 < \varphi_2(x'),\ a_i < x_i < b_i\ (i = 2, \ldots, n),\ x' = (x_2, \ldots, x_n); |\varphi_j(x') - \varphi_j(y')| \leqslant M \sum_{i=2}^{n} |x_i - y_i|^{\frac{r_i}{r_1}}$

$$(j = 1,\ 2),\ a_1 = \sup \varphi_1 < \inf \varphi_2 = b_1\},\quad 0 < \delta < \min\left\{1, \frac{b_1 - a_1}{2}, \ldots, \frac{b_n - a_n}{2}\right\},$$

$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$, $\theta_i = \{-1, 1\}$ с r-конусами

$$V_\theta(r) = \left\{x : \theta_i x_i > 0\ (i = 1, \ldots, n);\ Mn\,(\theta_j x_j)^{\frac{r_j}{r_1}} < \right.$$
$$\left. < \theta_1 x_1 < \delta\ (j = 2, \ldots, n)\right\}.$$

Пример 3. $\Omega = \bigcup_{x \in X} (x + V'(r))$, где $X = \left\{x : x_1 = 0,\ x_i = \frac{1}{k_i^s},\quad k_i = 1, 2, \ldots\ (i = 2, \ldots, n)\right\}$, $1 < s$ — действительное число.

Как видно из приведенных примеров, рассматриваемые области содержат вырожденные (нулевые) углы. Так, область Ω из примера 1 при $r_1 > r_n$ в окрестности точки $x^{(j)}$ ($j = 1, \ldots, J$) имеет вид вырожденного угла с вершиной в $x^{(j)}$.

Будем применять следующие обозначения:

$$\|f\|_{m,\Omega} = \|f\|_{L_p^m(\Omega)},\quad \|f\|_{0,\Omega} = \|f\|_{L_p(\Omega)},\quad \|l\|_{m,\Omega}^{*} = \|l\|_{L_p^{m*}(\Omega)}.$$

I. Рассмотрим сначала случай, когда область Ω содержит лишь конечное число вырожденных углов, т. е. представима в виде $\Omega = \Omega' \bigcup_{j=1}^{J} (x^{(j)} + V_j(r, \delta_j))$, где область Ω' удовлетворяет условию конуса. Без ограничения общности можно считать, что имеется лишь один такой угол ($J = 1$).

Пусть $\Omega = V'(r)$ и для простоты выкладок все коэффициенты $a_i = 1 \quad (i = 1, \ldots, n)$, $r_n = 1$. Пусть далее $0 < h < h_0$, $\Omega_1 = \Omega_1(h) = \Omega \cap \{x : x_1 < (Lh)^{\frac{1}{r_1}}\}$; $\Omega_2 = \Omega_2(h) = \Omega \setminus \overline{\Omega}_1$; $\Pi_k^* = \Pi_k^*(h) = \{x : kh < x_1 \leqslant (k+1)h\} \cap \Omega$; $\Pi_k'' = \Pi_k''(h) = \{x : kh < x_1 < (k+1)h,\ 0 < x_i < (kh)^{\frac{r_1}{r_i}}\ (i = 2, \ldots, n)\}$; $\Pi_k = \Pi_k(h) = \Pi_k^* \cup \Pi_{k+1}''$; $\Pi_k' = \Pi_k'(h) = \left\{x : (k+1)h < x_1 < (k+2)h,\ 0 < x_i < (kh)^{\frac{r_1}{r_i}}\ (i = 2, \ldots, n)\right\}$, $k = 0, 1, \ldots, \left[L^{\frac{1}{r_1}} h^{\frac{1}{r_1}-1}\right] + 1$;

L — достаточно большое натуральное число. Положим $k_1 = 0$, $k_s = h^{\frac{r_s}{r_1}-1} \qquad (s = 2, \ldots, n-1)$. Пусть целое $k \in (k_s, k_{s+1}]$. Среди полуинтервалов $(k_s, k_{s+1}]$ могут быть и пустые. Обозначим через $\Pi_{k,j_2,\ldots,j_s}$, $\Pi'_{k,j_2,\ldots,j_s}$ множества: $\Pi_{k,j_2,\ldots,j_s} = \{x : (j_i - 1)h \leqslant x_i < j_i h$ при $j_i < J_i = \left[k^{\frac{r_1}{r_i}} h^{\frac{r_1}{r_i}-1}\right]$, $x_i > (J_i - 1)h$ при $j_i = J_i (i = 2, \ldots, s)\} \cap \Pi_k$; $\Pi'_{k,j_2,\ldots,j_s} = \Pi_{k,j_2,\ldots,j_s} \cap \Pi_k'$. Переобозначим $\Pi_{k,j_2,\ldots,j_s}$, $\Pi'_{k,j_2,\ldots,j_s}$ соответственно через $\Pi_{k,j}$, $\Pi'_{k,j}\left(j = 1, 2, \ldots, \prod_{i=2}^{n} J_i = \beta_s\right)$. Очевидно, что множество $\Pi_{k,j}$ звёздно относительно $\Pi'_{k,j}$. Пусть $Q_L = [-L+1, L)^n$, $Q_1 = Q$, вектор $h^{(s)} = \left(h, \ldots, h, (kh)^{\frac{r_1}{r_{s+1}}}, \ldots, (kh)^{\frac{r_1}{r_n}}\right)$. Как видно из построений, $\Pi_{k,j} \subset z^{(k,j)} + h^{(s)} Q_4$, где $z^{(k,j)} \in \Pi_{k,j}$. Применим преобразование $x = z^{(k,j)} + h^{(s)} \tilde{x}$. В дальнейшем при заданном преобразовании переменных под символом $\tilde{M}$ будем понимать образ множества M. Как следует из результатов работ [1—3], в $\tilde{\Pi}'_{k,j}$ можно выбрать L новых узлов таким образом (например, взять узлы некоторой кубической решетки), что по ним можно построить кубатурную формулу, точную для многочленов степени ниже m, с функционалом ошибок

$$(\tilde{l}_{k,j}, f) = \int\limits_{\tilde{\Pi}_{k,j} \cap \tilde{\Pi}_k^*} f(\tilde{x})\, d\tilde{x} - \sum_{i=1}^{L} \tilde{a}_i f(\tilde{x}^{(i)}),$$

где узлы $\tilde{x}^{(i)} \in \tilde{\Pi}'_{k,j}$. Здесь L — достаточно большое натуральное число, зависящее только от m и n, $\sum_{i=1}^{L} |\tilde{a}_i| < A$ и A не зависит от h, k, j, s.

Для проекционного многочлена $P_{m-1}^{(k,j)}(f)$ (см. [6]) при $m > \frac{n}{p}$ в силу результатов [6] имеем

$$\|f - P_{m-1}^{(k,j)}(f)\|_{C(\widetilde{\Pi}_{k,j})} \leqslant c_1 \|f\|_{m,\widetilde{\Pi}_{k,j}}. \tag{3}$$

При возвращении к переменным x получаем кубатурную формулу для интегрирования по $\Pi_{k,j} \cap \Pi_k^*$ с узлами из $\Pi'_{k,j}$, точную для многочленов степени ниже m, с функционалом ошибок

$$(l_{k,j}, f) = \int\limits_{\Pi_{k,j} \cap \Pi_k^*} f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{L} a_i f(x^{(i)}),$$

причем

$$\sum_{i=1}^{L} |a_i| < A h^s (kh)^{\sum\limits_{j=s+1}^{n} \frac{r_1}{r_j}}. \tag{4}$$

Из (3), учитывая, что $(kh)^{\frac{r_1}{r_i}} \leqslant h$ при $k \in (k_s, k_{s+1}]$, $i \geqslant s+1$, получаем

$$\|f - P_{m-1}^{(k,j)}(f)\|_{C(\Pi_{k,j})} \leqslant c_1 \sum_{|\alpha|=m} h^{\alpha_1+\ldots+\alpha_s} \times$$

$$\times (kh)^{\sum\limits_{s+1}^{n} \frac{r_1}{r_i}\left(\alpha_i - \frac{1}{p}\right)} h^{-\frac{s}{p}} \|f^{(\alpha)}\|_{0,\Pi_{k,j}} \leqslant c_2 h^{m - \frac{s}{p} - \frac{1}{p}\sum\limits_{s+1}^{n} \frac{r_1}{r_i}} \times$$

$$\times k^{-\frac{1}{p}\sum\limits_{s+1}^{n} \frac{r_1}{r_i}} \|f\|_{m,\Pi_{k,j}}. \tag{5}$$

Оценим норму функционала ошибок $l_{k,j}$. Положим $\varphi = f - P_{m-1}^{(k,j)}(f)$. С помощью (4) и (5) получаем

$$\|l_{k,j}\|_{m,\Pi_{k,j}}^* = \sup_f \frac{|(l_{k,j}, f)|}{\|f\|_{m,\Pi_{k,j}}} = \sup_f \frac{|(l_{k,j}, \varphi)|}{\|f\|_{m,\Pi_{k,j}}} =$$

$$= \sup_f \frac{\left| \int\limits_{\Pi_{k,j} \cap \Pi_k^*} \varphi(x)\,dx - \sum\limits_{i=1}^{L} a_i \varphi(x^{(i)}) \right|}{\|f\|_{m,\Pi_{k,j}}} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_f \frac{\|\varphi\|_{C(\Pi_{k,j})} \left(\operatorname{mes} \Pi_{k,j} + \sum\limits_{i=1}^{L} |a_i| \right)}{\|f\|_{m,\Pi_{k,j}}} \leqslant$$

$$\leqslant c_3 h^{s + \sum\limits_{s+1}^{n} \frac{r_1}{r_i}} k^{\sum\limits_{s+1}^{n} \frac{r_1}{r_i}} \sup_f \frac{\|\varphi\|_{C(\Pi_{k,j})}}{\|f\|_{m,\Pi_{k,j}}} \leqslant$$

$$\leqslant c_4 h^{m + s\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum\limits_{s+1}^{n} \frac{r_1}{r_i}} k^{\left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum\limits_{s+1}^{n} \frac{r_1}{r_i}}. \tag{6}$$

Аналогичные выкладки проведем для всех $s = 1, \ldots, n-1$ таких, что $(k_s, k_{s+1}] \neq \varnothing$. Для $k \in (k_s, k_{s+1}]$ оценим норму функционала ошибок $l_k = \sum_{j=1}^{\beta_s} l_{k,j}$:

$$\| l_k \|^*_{m,\Pi_k} = \sup_f \frac{|(l_k, f)|}{\| f \|_{m,\Pi_k}} \leqslant \sup_f \frac{\sum_{j=1}^{\beta_s} \| l_{k,j} \|^*_{m,\Pi_{k,j}} \| f \|_{m,\Pi_{k,j}}}{\| f \|_{m,\Pi_k}} \leqslant$$

$$\leqslant c_4 h^{m+s\left(1-\frac{1}{p}\right)+\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum\limits_{s+1}^{n}\frac{r_1}{r_i}} k^{\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum\limits_{s+1}^{n}\frac{r_1}{r_i}} \sup_f \frac{\sum_{j=1}^{\beta_s} \| f \|_{m,\Pi_{k,j}}}{\| f \|_{m,\Pi_k}}.$$

Применяя неравенство Гёльдера для сумм с учетом конечности кратности пересечений $\Pi_{k,j}$, получаем отсюда

$$\| l_k \|^*_{m,\Pi_k} \leqslant c_5 h^{m+s\left(1-\frac{1}{p}\right)+\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum\limits_{s+1}^{n}\frac{r_1}{r_i}} k^{\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum\limits_{s+1}^{n}\frac{r_1}{r_i}} \beta_s^{1-\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant c_6 h^{m+\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{r_1}{r_i}} k^{\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{r_1}{r_i}}. \tag{7}$$

Оценим теперь норму функционала ошибок $l^{h,s} = \sum_{k\in(k_s,k_{s+1}]} l_k$ с носителем в замыкании $\Pi^{(s)} = \bigcup_{k\in(k_s,k_{s+1}]} \Pi_k$:

$$\| l^{h,s} \|^*_{m,\Pi^{(s)}} = \sup_f \frac{\left|\sum_k (l_k, f)\right|}{\| f \|_{m,\Pi^{(s)}}} \leqslant \sup_f \frac{\sum_k \| l_k \|^*_{m,\Pi_k} \| f \|_{m,\Pi_k}}{\| f \|_{m,\Pi^{(s)}}} \leqslant$$

$$\leqslant c_6 h^{m+\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{r_1}{r_i}} \sup_f \frac{\sum_k k^{\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{r_1}{r_i}} \| f \|_{m,\Pi_k}}{\| f \|_{m,\Pi^{(s)}}}. \tag{8}$$

Применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$\sum_{k\in(k_s,k_{s+1}]} k^{\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{r_1}{r_i}} \| f \|_{m,\Pi_k} \leqslant 2 \| f \|_{m,\Pi^{(s)}} \left(\sum_k k^{\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{r_1}{r_i}} \right)^{1-\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant c_7 h^{\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{r_{s+1}-r_1}{r_i}},$$

откуда с помощью (8) получаем

$$\| l^{h,s} \|^*_{m,\Pi^{(s)}} \leqslant c_8 h^{m+\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{r_{s+1}}{r_i}}. \tag{9}$$

Построим теперь кубатурную формулу для интегрирования по Π_k^* при $k=0$. Введем вспомогательные множества $T_k = \left\{x : h < x_1 < 2h,\ 0 < x_i < (2^{-k}h)^{\frac{r_1}{r_i}}\ (i=2, \ldots, n)\right\}$; $V_k = \{x : 2^{-k} \times h < x_1 \leqslant 2^{-k+1}h\} \cap \Pi_0^*$; $V^k = \left\{x : x_1 > 2^{-k}h,\ x_i < (2^{-k+1}h)^{\frac{r_1}{r_i}}\ (i=2, \ldots, n)\right\} \cap \Pi_0$ $(k=1, 2, \ldots)$. Очевидно, что $\Pi_0^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k$.

Применим преобразование $\widetilde{x}_1 = h^{-1}x_1$, $\widetilde{x}_i = (2^{-k}h)^{-\frac{r_1}{r_i}} x_i$ $(i = 2, \ldots, n)$. Легко видеть, что множество $\widetilde{V}^k \subset 2Q$ звездно относительно $\widetilde{T}_k$. При $mp > n$ имеем

$$\|f\|_{C(\widetilde{V}^k)} \leqslant c_9 \left(\|f\|_{m, \widetilde{V}^k} + \|f\|_{C(\widetilde{T}^k)}\right),$$

где c_9 не зависит от k, h, f. При возвращении к переменным x получаем

$$\|f\|_{C(V_k)} \leqslant c_9 \left(\sum_{|\alpha|=m} h^{\alpha_1 - \frac{1}{p}} (2^{-k}h)^{\sum_{i=2}^{n} \frac{r_1}{r_i}\left(\alpha_i - \frac{1}{p}\right)} \|f^{(\alpha)}\|_{0, V^k} + \right.$$
$$\left. + \|f\|_{C(T_k)} \right) \leqslant c_{10} \left(h^{m - \frac{1}{p}} (2^{-k}h)^{-\frac{1}{p} \sum_{i=2}^{n} \frac{r_1}{r_i}} \|f\|_{m, V^k} + \|f\|_{C(T_k)} \right) \leqslant$$
$$\leqslant c_{10} \left(h^{m - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} \frac{r_1}{r_i}}\, 2^{\frac{k}{p} \sum_{i=2}^{n} \frac{r_1}{r_i}} \|f\|_{m, \Pi_0} + \|f\|_{C(\Pi_0')} \right). \quad (10)$$

Для $\int\limits_{\Pi_0^*} f(x)\,dx$ имеем следующую оценку:

$$\left| \int\limits_{\Pi_0^*} f(x)\,dx \right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{V^k} |f(x)|\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|f\|_{C(V_k)} \operatorname{mes} V_k \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} (2^{-k}h)^{\sum_{i=1}^{n} \frac{r_1}{r_i}} \|f\|_{C(V_k)},$$

откуда с помощью (10) получаем

$$\left| \int\limits_{\Pi_0^*} f(x)\,dx \right| \leqslant c_{10} \left(h^{m - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} \frac{r_1}{r_i}} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\frac{k}{p} \sum_{i=2}^{n} \frac{r_1}{r_i}} (2^{-k}h)^{\sum_{i=1}^{n} \frac{r_1}{r_i}} \|f\|_{m, \Pi_0} + \right.$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(2^{-k}h)^{\sum_{i=1}^{n}\frac{r_1}{r_i}}\|f\|_{C(\Pi_0')}\Bigg)\leqslant c_{11}\left(h^{m+\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{r_1}{r_i}}\|f\|_{m,\Pi_0}+\right.$$

$$\left.+h^{\sum_{i=1}^{n}\frac{r_1}{r_i}}\|f\|_{C(\Pi_0')}\right). \tag{11}$$

Для проекционного многочлена $P_{m-1}(f)$ при $mp > n$ имеем

$$\|f-P_{m-1}(f)\|_{C(\Pi_0')}\leqslant c_{12}\sum_{|\alpha|=m}h^{\alpha_1-\frac{1}{p}}h^{\sum_{i=2}^{n}\frac{r_1}{r_i}\left(\alpha_i-\frac{1}{p}\right)}\|f^{(\alpha)}\|_{m,\Pi_0'}\leqslant$$

$$\leqslant c_{13}h^{m-\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\frac{r_1}{r_i}}\|f\|_{m,\Pi_0'}. \tag{12}$$

Из (11) и (12) получаем

$$\left|\int_{\Pi_0^*}(f-P_{m-1}(f))\,dx\right|\leqslant c_{14}h^{m+\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{r_1}{r_i}}\|f\|_{m,\Pi_0}. \tag{13}$$

Построим функционал ошибок l_0 точной для многочленов степени ниже m кубатурной формулы для интегрирования по Π_0^* с узлами из Π_0' (аналогично тому, как это делалось выше для интегрирования по Π_1^*). Оценим его норму:

$$\|l_0\|_{m,\Pi_0}^*=\sup_f\frac{|(l_0,f)|}{\|f\|_{m,\Pi_0}}=$$

$$=\sup_f\frac{\left|\int_{\Pi_0^*}(f-P_{m-1}(f))\,dx-\sum_{i=1}^{L}a_i\,(f-P_{m-1}(f))\,(x^{(i)})\right|}{\|f\|_{m,\Pi_0}}\leqslant$$

$$\leqslant\sup_f\left(c_{14}h^{m+\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{r_1}{r_i}}+\right.$$

$$\left.+c_{15}h^{\sum_{i=1}^{n}\frac{r_1}{r_i}}\frac{\|f-P_{m-1}(f)\|_{C(\Pi_0')}}{\|f\|_{m,\Pi_0}}\right)\leqslant c_{16}h^{m+\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{r_1}{r_i}}. \tag{14}$$

Следуя [1—3], можно построить кубатурную формулу $\Omega_2(h)$ с узлами из кубической решетки с шагом h, для нормы функционала ошибок l_h^2 которой справедливо равенство

$$\|l_h^2\|_{m,\Omega_2}^*=Bh^m+o(h^m), \tag{15}$$

причем постоянная B — наилучшая.

Рассмотрим теперь кубатурную формулу для интегрирования по области Ω с функционалом ошибок $l^h = l_0 + \sum_{s=1}^{n-1} l^{h,s} + l_h^2$. Из (9) и (14) следует, что

$$\left\| l_0 + \sum_{s=1}^{n-1} l^{h,s} \right\|_{m,\Omega_1}^* \leqslant c_{17} h^{m+\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}} = o\left(h^m\right). \tag{16}$$

Из (15) и (16) находим, что

$$\left\| l^h \right\|_{m,\Omega}^* = Bh^m + o\left(h^m\right). \tag{17}$$

Таким образом, за счет добавления к узлам кубической решетки новых узлов вблизи вершины нулевого угла получена кубатурная формула, норма функционала ошибок которой убывает так же быстро, как и в случае области, не содержащей нулевых углов (точнее говоря, удовлетворяющей (слабому) условию конуса). Заметим, что число N_0 узлов, добавленных нами к N_1 узлам кубической сетки с шагом h, не превосходит $c_{18} h^{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}-n} = o\left(h^{-n}\right)$.

С помощью аналогичных построений и выкладок устанавливается оценка (16) и для $V(r, b)$ с произвольными параметрами $b > 0$, $a_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Мы пришли к следующей теореме.

Теорема 1. Пусть ограниченная область $\Omega \subset E^n$ с условием r-конуса содержит лишь конечное число вырожденных углов и $mp > n$. Тогда для всех достаточно больших $N = N(m, n)$ можно построить кубатурную формулу с N узлами, точную для многочленов степени ниже m, такую, что для функционала ошибок этой формулы имеет место равенство

$$\left\| l_N \right\|_{m,\Omega}^* = B_1 N^{-\frac{m}{n}} + o\left(N^{-\frac{m}{n}}\right), \quad N \to \infty, \tag{18}$$

где коэффициент B_1 тот же, что и в случае, когда Ω — куб.

II. Пусть Ω удовлетворяет условию r-конуса и $\Omega = \Omega_1(h) \cup \Omega_2(h)$. Пусть для $\Omega_2(h)$ можно построить кубатурную формулу с оценкой нормы ее функционала ошибок l_2^h

$$\left\| l_2^h \right\|_{m,\Omega_2}^* \leqslant Bh^m + o\left(h^m\right), \tag{19}$$

а $\Omega_1(h)$ можно представить в виде $\Omega_1 = \Omega_1(h) = \bigcup_{i=1}^{\Psi(h)} T_i$, где r-конусы $T_i = x^{(i)} + V_{k_i}(r_i, \delta_i)$ $(\delta_i \leqslant h,\ 1 \leqslant k_i \leqslant K,\ i = 1, \ldots, \Psi(h))$ имеют конечную кратность пересечений, не зависящую от h, $\Psi(h)$ — возрастающая при $h \to 0$ целочисленная функция. Примером такой области может служить область примера 3 при достаточно больших s.

Для каждого T_i ($i = 1, \ldots, \Psi(h)$) построим кубатурную формулу по способу, указанному в п. I, и пусть $l^{h,i}$ — функционалы ошибок этих формул. Оценим норму функционала ошибок $l_1^h = \sum_{i=1}^{\Psi(h)} l^{h,i}$:

$$\| l_1^h \|_{m,\Omega_1}^* = \sup_f \frac{\left| \sum_{i=1}^{\Psi(h)} (l^{h,i}, f) \right|}{\| f \|_{m,\Omega_1}} \leqslant \sup_f \frac{\sum_{i=1}^{\Psi(h)} \| l^{h,i} \|_{m,T_i}^* \| f \|_{m,T_i}}{\| f \|_{m,\Omega_1}}.$$

При $mp > n$ с помощью (16) находим отсюда

$$\| l_1^h \|_{m,\Omega_1}^* \leqslant c_{19} h^{m+\left(1-\frac{1}{p}\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}} \sup \frac{\sum_{i=1}^{\Psi(h)} \| f \|_{m,T_i}}{\| f \|_{m,\Omega_1}},$$

откуда в силу конечности кратности пересечений T_i с помощью неравенства Гёльдера получаем

$$\| l_1^h \|_{m,\Omega_1}^* \leqslant c_{20} h^{m+\left(1-\frac{1}{p}\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}} \Psi(h)^{1-\frac{1}{p}}. \tag{20}$$

Число узлов N_Ψ, добавленных нами к N_1 узлам из Ω_2, оценивается неравенством

$$N_\Psi \leqslant c_{21} \Psi(h) h^{-n+\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}}. \tag{21}$$

При $\Psi(h) = o\left(h^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}}\right)$, как видно из (20) и (21), $N_\psi = o(N_1)$ и $\| l_1^h \|_{m,\Omega_1}^* = o(h^m)$ и ввиду (19) получаем (18).

III. Пусть Ω — произвольная ограниченная область с условием r-конуса (1), (2) (примеры 2, 3).

Т е о р е м а 2. Пусть ограниченная область $\Omega \subset E^n$ удовлетворяет условию r-конуса, $r_* = \sum_{i=2}^{n} \frac{r_1}{r_i} \leqslant n$ и $mp > n$. Тогда для всех достаточно больших $N = N(m, n)$ можно построить кубатурную формулу, точную для многочленов степени ниже m, такую, что для функционала ошибок l_N этой формулы справедливо равенство (18).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности $r_n = 1$. Зафиксируем $k = k_0$, $1 \leqslant k_0 \leqslant K$. Будем строить кубатурную формулу для интегрирования по части $G_{k_0} \cap (\Omega \setminus \Omega_h)$, где $\Omega_h = \bigcup_\gamma h(\gamma + Q)$, а объединение берется по всем $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in R^n$ — векторам с целочисленными компонентами, для которых

$h(\gamma+Q_L)\subset\Omega$. Для простоты записи будем считать, что все коэффициенты a_i r-конуса V_{k_0} равны единице. В общем случае выкладки аналогичны. Далее вместо G_{k_0}, V_{k_0} будем писать просто G, V. Итак, пусть

$$V=\left\{x: x_i>0\ (i=1,\ldots,n);\ x_j^{r_j}<x_1^{r_1}<b\ (j=2,\ldots,n)\right\}.$$

В работе [4] получена оценка числа $S(h)$ $(Lh)^{\frac{1}{r}}$-параллелепипедов, покрывающих $\Omega\setminus\Omega_h$:

$$S(h)\leqslant Sh^{-\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{r_i}}. \tag{22}$$

Занумеруем эти параллелепипеды $\Pi_j=(Lh)^{\frac{1}{r}}(\beta^{(j)}+Q)$ ($j=1,\ldots,S(h)$) и положим $\Pi^{(j)}=\Pi_j-(Lh)^{\frac{1}{r}}Q_3$. Обозначим через V_k усеченный r-конус:

$$V_k=\{x: x_1>0\}\cap\{V-(kh,0,\ldots,0)\}.$$

Пусть далее $A=\left[L^{\frac{1}{r_1}}h^{\frac{1}{r_1}-1}\right]$, $\Omega'_{k,j}=\{x: x\in G\cap\Pi_j;\ (x+V_k)\cap\cap\Pi^{(j)}\subset\Omega\}$ ($k=0,1,\ldots,A+1$) (например, если $x\in G\cap\Pi_j$ и $x-(kh,0,\ldots,0)\in G$, то $x\in\Omega'_{k,j}$). Очевидно, что при $0<h\leqslant h_0$ $\Omega'_{0,j}\supset\ldots\supset\Omega'_{A+1,j}$. Введем еще $\Omega_{k,j}=\Omega'_{k,j}\setminus\Omega'_{k+1,j}$, $k=0,1,\ldots,A$; $\Omega_{A+1,j}=\Omega'_{A+1,j}$. Пусть $h^{(k)}=\left(h_1^{(k)},\ldots,h_n^{(k)}\right)$, $h_i^{(k)}=k^{\frac{r_1}{r_i}-1}h^{\frac{r_1}{r_i}}$ ($i=1,\ldots,n$). Оценим число $S_{k,j}$ $h^{(k)}$-параллелепипедов $h^{(k)}(\gamma+Q)$ таких, что $\Omega_{k,j}\cap h^{(k)}(\gamma+Q)\neq\varnothing$. Пусть $T(t)=\{x: x_1=3t,\ x_i=t\ (i=2,\ldots,n)\}$, $B_{k,j}^{(i)}=\Bigg\{\beta:\beta\in R^n,\ \beta_i=\left[\frac{1}{h_i^{(k)}}(Lh)^{\frac{1}{r_i}}\beta_i^{(j)}\right];\ \beta_s=\left[\frac{1}{h_s^{(k)}}(Lh)^{\frac{1}{r_s}}B_s^{(j)}\right],\left[\frac{1}{h_s^{(k)}}(Lh)^{\frac{1}{r_s}}\beta_s^{(j)}\right]+1,\ldots$
$\ldots,\left[\frac{1}{h_s^{(k)}}(Lh)^{\frac{1}{r_s}}\beta_s^{(j)}\right]+\left[\frac{1}{h_s^{(k)}}Lh^{\frac{1}{r_s}-\frac{r_1}{r_s}}k^{1-\frac{r_1}{r_s}}\right],\ s\neq i,\ s=1,\ldots,n\Bigg\}$ ($i=1,\ldots n$), $B_{k,j}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_{k,j}^{(i)}$.

Для $\beta\in B_{k,j}$ обозначим:

$$\Gamma(\beta,s)=\{\gamma:\gamma\in R^n,\ \exists t\geqslant s,\ h^{(k)}(\gamma+Q)\cap h^{(k)}(\beta+T(t))\neq\varnothing\}.$$

Очевидно, что $\Pi_j\subset\bigcup\limits_{\beta\in B_{k,j}}\ \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma(\beta,0)}h^{(k)}(\gamma+Q)$. Пусть $\beta\in B_{k,j}$,

$\Omega_{k,j} \cap h^{(k)}(\gamma + Q) \neq \varnothing$ хотя бы для одного $\gamma \in \Gamma(\beta, 0)$ и $t_0 = \inf\{t : \Omega_{k,j} \cap h^{(k)}(\beta + T(t) + Q) \neq \varnothing\}$. Тогда при некотором $\varepsilon > 0$ $x^{(0)} = h^{(k)}(\beta + T(t_0 + \varepsilon) + \lambda) \in \Omega_{k,j}$ так, что $(x^{(0)} + V_k) \cap \Pi^{(j)} \subset \Omega$. Покажем, что для любого $\gamma \in \Gamma(\beta,\ t_0 + 2)$ $\Pi_j \cap h^{(k)}(\gamma + Q) \subset \Omega'_{k+1,j}$ так, что $\Omega_{k,j} \cap h^{(k)}(\gamma + Q) = \varnothing$. Пусть $s \geqslant 2$ и γ таковы, что $(\gamma + Q) \cap (\beta + T(t_0 + s)) \neq \varnothing$, и $x \in h^{(k)}(\gamma + Q)$. Тогда $(x + V_{k+1}) \cap \Pi^{(j)} \subset (x^{(0)} + V_k) \cap \Pi^{(j)} \subset \Omega$. Действительно, так как $x^{(0)} \in \Omega_{k,j}$, то $x^{(0)} + (3sh, 0, \ldots, 0) \in \Omega'_{k+3s,j}$. Но $|x_i - x_i^{(0)}| \leqslant (s + 2) k^{\frac{r_1}{r_s} - 1} h^{\frac{r_1}{r_s}}$ $(i = 2, \ldots, n)$ и, так как $(k + 3s)^{\alpha} - (s + 2)k^{\alpha - 1} \geqslant (k + 1)^{\alpha}$ при $\alpha \geqslant 1$ и $s \geqslant 2$, получаем, что $x \in \Omega'_{k+1,j}$, что и требовалось. Отсюда следует, что непустое пересечение $\Omega_{k,j} \cap h^{(k)}(\gamma + Q)$ возможно разве лишь при $\gamma \in \Gamma(\beta, t_0) \setminus \Gamma(\beta,\ t_0 + 2)$. Таким образом, получаем, что

$$S_{k,j} \leqslant c_{22}\,|\mathrm{B}_{k,j}| \leqslant c_{23} \sum_{i=1}^{n} h^{\sum\limits_{s \neq i} \frac{1 - r_1}{r_s}} k^{\sum\limits_{s \neq i}\left(1 - \frac{r_1}{r_s}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant c_{24} h^{\sum\limits_{i=2}^{n} \frac{1 - r_1}{r_i}} k^{\sum\limits_{i=2}^{n}\left(1 - \frac{r_1}{r_i}\right)}. \tag{23}$$

Пусть $1 \leqslant k \leqslant A + 1$. и $F_{k,j,s} = \Omega_{k,j} \cap h^{(k)}(\gamma^{(k,j,s)} + Q)$, где $h^{(k)}(\gamma^{(k,j,s)} + Q)$ — $h^{(k)}$-параллелепипеды $(s = 1, \ldots, S_{k,j})$, покрывающие $\Omega_{k,j}$. Для каждой точки $x \in F_{k,j,s}$ верно включение $(x + V_k) \cap \Pi^{(j)} \subset \Omega$, откуда следует, что $F'_{k,j,s} = h^{(k)}(\gamma^{(k,j,s)} + (4, 2, \ldots, 2) + Q) \subset \bigcap\limits_{x \in F_{k,j,s}} (x + V_k) \cap \Pi^{(j)}$.

Рассмотрим звездное относительно $F'_{k,j,s}$ множество

$U_{k,j,s} = \{x : x = \theta y + (1 - \theta) z,\ y \in F_{k,j,s},\ z \in F'_{k,j,s},\ 0 \leqslant \theta \leqslant 1\} \subset \Omega$.

Применим преобразование переменных $x = h^{(k)} \tilde{x}$. Тогда $\tilde{U}_{k,j,s} \subset \gamma^{(k,j,s)} + Q_5$. Из [1—3] следует, что можно указать такие L узлов из $\tilde{F}'_{k,j,s}$ (например, из числа узлов кубической решетки с шагом $\left(L^{\frac{1}{n}} + 1\right)^{-1}$) и коэффициенты $\tilde{a}_i$ $(i = 1, \ldots, L)$, что функционал ошибок

$$(\tilde{l}_{k,j,s}, f) = \int\limits_{\tilde{F}_{k,j,s}} f(\tilde{x})\, d\tilde{x} - \sum_{i=1}^{L} \tilde{a}_i f(\tilde{x}^{(i)})$$

является точным для многочленов степени ниже m и $\sum\limits_{i=1}^{L} |\tilde{a}_i| < c_{25}$, где c_{25} не зависит от k, j, s, h. В силу теоремы вложения С. Л. Соболева [6] при $mp > n$ имеем

$$\|f\|_{C(\tilde{U}_{k,j,s})} \leqslant c_{26}\left(\|f\|_{m, \tilde{U}_{k,j,s}} + \|f\|_{C(\tilde{F}'_{k,j,s})}\right).$$

Применяя эту оценку к функции $f - P_{m-1}(f)$, где $P_{m-1}(f)$ — проекционный многочлен степени $m-1$, и учитывая, что в силу результатов [6]

$$\|f - P_{m-1}(f)\|_{C\left(\widetilde{F}'_{k,j,s}\right)} \leqslant c_{2;} \|f\|_{m,\widetilde{F}'_{k,j,s}},$$

находим оценку

$$\|f - P_{m-1}(f)\|_{C(\widetilde{U}_{k,j,s})} \leqslant c_{28} \|f\|_{m,\widetilde{U}_{k,j,s}}. \tag{24}$$

Возвращаясь к переменным x, получаем, что функционал ошибок

$$(l_{k,j,s}, f) = \int\limits_{F_{k,j,s}} f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{L} a_i f(x^{(i)})$$

с коэффициентами $a_i = h^{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{r_1}{r_i}} k^{\sum\limits_{i=2}^{n}\left(\frac{r_1}{r_i}-1\right)} \tilde{a}_i$ является точным для многочленов степени $m-1$, причем

$$\sum_{i=1}^{L} |a_i| \leqslant c_{28} h^{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{r_1}{r_i}} k^{\sum\limits_{i=2}^{n}\left(\frac{r_1}{r_i}-1\right)}. \tag{25}$$

Из (24) получаем оценку

$$\|f - P_{m-1}(f)\|_{C(U_{k,j,s})} \leqslant c_{29} \sum_{|\alpha|=m} h^{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{r_1}{r_i}\left(\alpha_i - \frac{1}{p}\right)} k^{\sum\limits_{i=2}^{n}\left(\frac{r_1}{r_i}-1\right)\left(\alpha_i - \frac{1}{p}\right)} \times$$

$$\times \|f^{(\alpha)}\|_{0,U_{k,j,s}} \leqslant c_{30} h^{m - \frac{1}{p}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{r_1}{r_i}} k^{-\frac{1}{p}\sum\limits_{i=2}^{n}\left(\frac{r_1}{r_i}-1\right)} \|f\|_{m,U_{k,j,s}}. \tag{26}$$

Оценим норму функционала ошибок $l_{k,j,s}$:

$$\|l_{k,j,s}\|^*_{m,U_{k,j,s}} = \sup_f \frac{|(l_{k,j,s}, f - P_{m-1}(f))|}{\|f\|_{m,U_{k,j,s}}} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_f \frac{\|f - P_{m-1}(f)\|_{C(F_{k,j,s})} \operatorname{mes} F_{k,j,s} + \|f - P_{m-1}(f)\|_{C\left(F'_{k,j,s}\right)} \sum\limits_{i=1}^{L} |a_i|}{\|f\|_{m,U_{k,j,s}}}.$$

С помощью (25) и (26) получаем отсюда

$$\|l_{k,j,s}\|^*_{m,U_{k,j,s}} \leqslant c_{31} h^{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{r_1}{r_i}} k^{\sum\limits_{i=2}^{n}\left(\frac{r_1}{r_i}-1\right)} h^{m - \frac{1}{p}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{r_1}{r_i}} k^{-\frac{1}{p}\sum\limits_{i=2}^{n}\left(\frac{r_1}{r_i}-1\right)} =$$

$$= c_{31} h^{m + \left(1 - \frac{1}{p}\right)\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{r_1}{r_i}} k^{\left(1 - \frac{1}{p}\right)\sum\limits_{i=2}^{n}\left(\frac{r_1}{r_i}-1\right)}.$$

Заметим, что $U_{k,j,s}$ имеют конечную кратность пересечений. Действительно, если $h^{(k)}(\gamma + Q)$ — один из $h^{(k)}$-параллелепипедов, покрывающих $\Omega_{k,j}$, и точка $x \in h^{(k)}(\gamma + Q)$ такая, что $x \in h^{(k+s_0)}(\beta + Q)$ (где $h^{(k+s_0)}(\beta + Q)$ — один из параллелепипедов покрытия $\Omega_{k+s_0,j}$) при достаточно большом s_0, то для всех точек $z \in \Omega'_{k,j} \cap h^{(k)}(\gamma + Q)$ таких, что $z_i > x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, имеем $z \in h^{(k+s_0-1)}(\beta' + Q)$, т. е. $z \notin \Omega_{k,j}$. Пусть

$$l_k = \sum_{j=1}^{S(h)} \sum_{s=1}^{S_{k,j}} l_{k,j,s}, \ \operatorname{supp} l_k \subset \bigcup_{k,j} \overline{U}_{k,j,s} = \widehat{\Omega}_k.$$

Оценим норму l_k:

$$\| l_k \|^*_{m,\widehat{\Omega}_k} = \sup_f \frac{|(l_k, f)|}{\| f \|_{m,\widehat{\Omega}_k}} = \sup_f \frac{\left| \sum_{j,s} (l_{k,j,s}, f) \right|}{\| f \|_{m,\widehat{\Omega}_k}} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_f \frac{\sum_{j,s} \| l_{k,j,s} \|^*_{m,U_{k,j,s}} \| f \|_{m,U_{k,j,s}}}{\| f \|_{m,\widehat{\Omega}_k}} \leqslant$$

$$\leqslant h^{m + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{r_1}{r_i}} k^{\left(1-\frac{1}{p}\right) \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{r_1}{r_i} - 1\right)} \sup_f \frac{\sum_{j,s} \| f \|_{m,U_{k,j,s}}}{\| f \|_{m,\widehat{\Omega}_k}}.$$

С помощью оценок (22), (23) чисел $S(h)$, $S_{k,j}$ получаем отсюда, что

$$\| l_k \|^*_{m,\widehat{\Omega}_k} \leqslant c_{32} h^{m + \left(1-\frac{1}{p}\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{r_1}{r_i}} k^{\left(1-\frac{1}{p}\right) \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{r_1}{r_i} - 1\right)} \times$$

$$\times \left(h^{\sum_{i=2}^{n} \frac{1-r_1}{r_i}} k^{\sum_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{r_1}{r_i}\right)} h^{-\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{r_i}} \right)^{1-\frac{1}{p}} = c_{32} h^{m+1-\frac{1}{p}}.$$

Пусть $l^{h,1} = \sum_{k=1}^{A+1} l_k$, $\operatorname{supp} l^{h,1} \subset \bigcup_{k=1}^{A+1} \widehat{\Omega}_k = \Omega_1$. Оценим норму $l^{h,1}$:

$$\| l^{h,1} \|^*_{m,\Omega_1} = \sup_f \frac{\left| \sum_{k=1}^{A+1} (l_k, f) \right|}{\| f \|_{m,\Omega_1}} \leqslant c_{32} h^{m+1-\frac{1}{p}} \sup_f \frac{\sum_{k=1}^{A+1} \| f \|_{m,\widehat{\Omega}_k}}{\| f \|_{m,\Omega_1}} \leqslant$$

$$\leqslant c_{33} h^{m+1-\frac{1}{p}} h^{\left(\frac{1}{r_1} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)} = c_{33} h^{m + \frac{1}{r_1}\left(1 - \frac{1}{p}\right)}. \tag{27}$$

Построим теперь кубатурную формулу для интегрирования по $\Omega_0 = \bigcup_{j=1}^{S(h)} \Omega_{0,j}$. Из [4] следует, что число $S_0(h)$ $h^{\frac{r_1}{r}}$-параллелепипедов, покрывающих Ω_0, оценивается неравенством

$$S_0(h) \leqslant c_{34} h^{-\sum_{i=2}^{n} \frac{r_1}{r_i}}. \tag{28}$$

Пусть $\Pi_0 = \Pi_0(j) = z^{(j)} + h^{\frac{r_1}{r}} Q$ — один из этих параллелепипедов. Для $k = 0, 1, 2, \ldots$ рассмотрим усеченный r-конус

$$V_{2^{-k}} = \{x : x_1 > 2^{-k} h\} \cap V - (2^{-k} h, 0, \ldots, 0).$$

Обозначим через $'\Omega_0^k$, Ω_0^k множества

$$'\Omega_0^k = {}'\Omega_0^k(j) = \left\{x : x \in G \cap \Pi_0(j), (x + V_{2^{-k}}) \cap \left(\Pi_0(j) + L^{\frac{1}{r}} h^{\frac{1}{r}} Q_3\right) \subset \Omega\right\},$$

$$\Omega_0^k = \Omega_0^k(j) = {}'\Omega_0^k \setminus {}'\Omega_0^{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Аналогично выводу оценки (23) можно показать, что число $S_{0,k}$ $(2^{-k}h)^{\frac{r_1}{r}}$-параллелепипедов, покрывающих Ω_0^k, оценивается неравенством

$$S_{0,k} \leqslant c_{35} 2^{k \sum\limits_{i=2}^{n} \frac{r_1}{r_i}}. \tag{29}$$

Пусть (обычный) конус $R_{0,k}$ определяется следующим образом:

$$R_{0,k} = \left\{x : 0 < x_1 < 4h,\ 0 < x_i < (2^{-k}h)^{\frac{r_1}{r_i} - 1} x_1 \quad (i = 2, \ldots, n)\right\}.$$

Из геометрических свойств области Ω следует, что для любой точки $x \in \Omega_0^k$, $x + R_{0,k} \subset \Omega$. Пусть далее

$$T_k(x) = \{y : x_1 + 2h < y_1 < x_1 + 3h\} \cap (x + R_{0,k}).$$

Заметим, что $T_k(x) \subset \Omega_1'$. Применим преобразование $\widetilde{x}_i = 2^{k\left(\frac{r_1}{r_i} - 1\right)} h^{-\frac{r_1}{r_i}} x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Из результатов (6) следует, что при $m > \frac{n}{p}$

$$|f(\widetilde{x})| \leqslant c_{36} \left(\|f\|_{m, \widetilde{x} + \widetilde{R}_{0,k}} + \|f\|_{C(\widetilde{T}_k(\widetilde{x}))}\right).$$

Возвращаясь к переменным x, получаем отсюда оценку

$$|f(x)| \leqslant c_{36} \left(\sum_{|\alpha| = m} h^{\alpha_1 - \frac{1}{p}} \prod_{i=2}^{n} \left(2^{-k\left(\frac{r_1}{r_i} - 1\right)} h^{\frac{r_1}{r_i}}\right)^{\alpha_i - \frac{1}{p}} \|f^{(\alpha)}\|_{0, x + R_{0,k}} + \right.$$

$$\left. + \|f\|_{C(T_k(x))}\right) \leqslant c_{37} \left(h^{m - \frac{1}{p} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{r_1}{r_i}} 2^{\frac{k}{p} \sum\limits_{i=2}^{n} \left(\frac{r_1}{r_i} - 1\right)} \|f\|_{m, x + R_{0,k}} + \|f\|_{C(T_k(x))}\right). \tag{30}$$

Заметим, что $x + R_{0,k} \subset z^{(j)} + h^{\frac{r_1}{r}} Q_4$ для любой точки $x \in \Omega_0^k(j)$. В $\Omega_1' \cap \left(z^{(j)} + h^{\frac{r_1}{r}} Q_4\right)$ выберем L узлов и по ним построим кубатурную формулу, как это делалось выше, так, что для коэффициентов a_i этой формулы будет иметь место оценка

$$\sum_{i=1}^{L} |a_i| \leqslant c_{38} h^{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{r_1}{r_j}}. \tag{31}$$

Оценим теперь норму функционала ошибок $l_0^{(j)}$ этой формулы с носителем $\operatorname{supp} l_0^{(j)} \subset \left(z^{(j)} + h^{\frac{r_1}{r}} Q_6\right) \cap \Omega = \widehat{\Omega}_0^{(j)}$:

$$\| l_0^{(j)} \|^*_{m, \widehat{\Omega}_0^{(j)}} = \sup_f \frac{\left| \left(l_0^{(j)}, f \right) \right|}{\| f \|_{m, \widehat{\Omega}_0^{(j)}}} = \sup_f \frac{\left| \int\limits_{\Omega_{0,j}} (f - P_{m-1}(f))\, dx - \sum\limits_{i=1}^{L} a_i f(x^{(i)}) \right|}{\| f \|_{m, \widehat{\Omega}_0^{(i)}}} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_f \frac{\int\limits_{\Omega_{0,j}} | f - P_{m-1}(f) |\, dx + \sum\limits_{i=1}^{L} | a_i | \| f - P_{m-1}(f) \|_{C(T)}}{\| f \|_{m, \widehat{\Omega}_0^{(j)}}} = \frac{I_1 + I_2}{\| f \|_{m, \widehat{\Omega}_0^{(j)}}},$$

где $T = \{x^{(1)}, \ldots, x^{(L)}\} \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{x \in \Omega_0^k} T_k(x) \subset \Omega_1'$. Аналогично выводу оценки (13) находим, что

$$\| f - P_{m-1}(f) \|_{C(T)} \leqslant c_{39} h^{m - \frac{1}{p} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{r_1}{r_i}} \| f \|_{m, \widehat{T}}, \tag{32}$$

где $\widehat{T} = T + 2h^{\frac{r_1}{r}} Q$. С помощью (29) получаем, что

$$\operatorname{mes} \Omega_0^k \leqslant c_{40} 2^{k \sum\limits_{i=2}^{n} \frac{r_1}{r_i}} \left(2^{-k} h\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{r_1}{r_i}} = c_{40} 2^{-k} h^{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{r_1}{r_i}}. \tag{33}$$

Из (30)—(33) следует, что при $r_* \leqslant n$

$$I_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\Omega_0^k} | f - P_{m-1}(f) |\, dx \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \| f - P_{m-1}(f) \|_{C\left(\Omega_0^k\right)} \operatorname{mes} \Omega_0^k \leqslant$$

$$\leqslant c_{41} \sum_{k=0}^{\infty} \left(h^{m - \frac{1}{p} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{r_1}{r_i}} 2^{\frac{k}{p} \sum\limits_{i=2}^{n} \left(\frac{r_1}{r_i} - 1 \right)} 2^{-k} h^{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{r_1}{r_i}} \| f \|_{m, \widehat{T}} + \right.$$

$$\left. + 2^{-k} h^{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{r_1}{r_i}} h^{m - \frac{1}{p} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{r_1}{r_i}} \| f \|_{m, \widehat{T}} \right) \leqslant$$

$$\leqslant c_{41} h^{m + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{r_1}{r_i}} \| f \|_{m, \widehat{T}} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k - k \frac{n-1}{p} + \frac{k}{p} \sum\limits_{i=2}^{n} \frac{r_1}{r_i}} +$$

$$+c_{41}h^{m+\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{r_1}{r_i}}\|f\|_{m,\widehat{T}}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\leqslant c_{42}h^{m+\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{r_1}{r_i}}\|f\|_{m,\widehat{T}}. \qquad (34)$$

Аналогично

$$I_2\leqslant c_{43}h^{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{r_1}{r_i}}h^{m-\frac{1}{p}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{r_1}{r_i}}\|f\|_{m,\widehat{T}}=c_{43}h^{m+\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{r_1}{r_i}}\|f\|_{m,\widehat{T}},$$

откуда с помощью (34) получаем, что

$$\|l_0^{(j)}\|^*_{m,\widehat{\Omega}_0^{(j)}}\leqslant c_{44}h^{m+\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{r_1}{r_i}}.$$

Пусть теперь $l_0=\sum\limits_{j=1}^{S_0(h)}l_0^{(j)}$. Оценим его норму, учитывая конечную кратность пересечения $\widehat{\Omega}_0^{(j)}$. Пусть $\widehat{\Omega}_0=\bigcup\limits_{j=1}^{S_0(h)}\widehat{\Omega}_0^{(j)}$. Тогда

$$\|l_0\|^*_{m,\widehat{\Omega}_0}\leqslant\sup_f\frac{\sum\limits_{j=1}^{S_0(h)}\|l_0^{(j)}\|^*_{m,\widehat{\Omega}_0^{(j)}}\|f\|_{m,\widehat{\Omega}_0^{(j)}}}{\|f\|_{m,\widehat{\Omega}_0}}\leqslant$$

$$\leqslant c_{45}h^{m+\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{r_1}{r_i}}h^{-\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{r_1}{r_i}}=c_{45}h^{m+1-\frac{1}{p}}. \qquad (35)$$

До сих пор мы занимались построением кубатурных формул для интегрирования по части $G_k\cap(\Omega\setminus\Omega_h)$ при фиксированном $k=k_0$. Аналогичные выкладки проводим для всех G_k ($k=1,\ldots,K$). Следуя [1—3], можно построить кубатурную формулу для Ω_h таким образом, что

$$\|l_2\|^*_{m,\Omega}=Bh^m+o\left(h^m\right). \qquad (36)$$

Пусть $l^h=\sum\limits_{k=1}^{K}\left(l_0^k+l_1^k\right)+l_2$. Из (27), (35), (36) получаем равенство

$$\|l^h\|^*_{m,\Omega}=Bh^m+o\left(h^m\right). \qquad (37)$$

Пусть N_1 — число узлов кубической решетки с шагом h, попавших в Ω. При построении кубатурной формулы мы добавили новые узлы, число N_0 которых оценивается при $r_*<n$ так:

$$N_0\leqslant c_{46}h^{-\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{r_1}{r_i}}\sum_{k=1}^{A+1}k^{\sum\limits_{i=2}^{n}\left(1-\frac{r_1}{r_i}\right)}\leqslant c_{47}\left(h^{-\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{r_1}{r_i}}+\right.$$

$$\left.+h^{\frac{n}{r_1}-\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{r_i}-n}\right)=o\left(h^{-n}\right).$$

Таким образом, если l_N — функционал ошибок этой формулы и $N = N_0 + N_1$, то

$$\| l_N \|_{m,\Omega}^{*} = B_1 N^{-\frac{m}{n}} + o\left(N^{-\frac{m}{n}}\right),$$

где коэффициент B_1 тот же, что и в случае, когда Ω — куб. Тем самым теорема 2 установлена для $r_* < n$.

В случае $r_* = n$ кубатурную формулу будем строить с шагом h в Ω_h и с параметром $\eta = h^{1-\varepsilon}$ (вместо параметра h из случая $r_* < n$) в приграничной полосе $\Omega \diagdown \Omega_h$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало (ε взято из условия $\varepsilon\left(m + \frac{r_n}{r_1}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right) < \frac{r_n}{r_1}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\Big)$. После подсчетов, аналогичных случаю $r_* < n$, приходим к (18). Теорема доказана.

IV. Пусть $r_* > n$ и для определенности $r_n = 1$. Будем строить кубатурную формулу в Ω_h с шагом h, а в приграничной полосе $\Omega \diagdown \Omega_h$—с параметром $\eta = \eta(h)$ подобно тому, как это сделано в п. III. Пусть Π_j — $(Lh)^{\frac{1}{r}}$-параллелепипеды из [4], покрывающие $\Omega \diagdown \Omega_h$, число $S(h)$ которых оценивается с помощью (22). Пусть далее

$$V_k^{\eta} = \{x : x_1 > k\eta\} \cap V - (k\eta, 0, \ldots, 0);\ \Omega'_{k,j} = \{x : x \in G,$$

$$(x + V_k^{\eta}) \cap \Pi^{(j)} \subset \Omega\} \left(k = 0, 1, \ldots, \left[(Lh)^{\frac{1}{r_1}} \eta^{-1}\right] + 1 = A + 1\right];$$

$$\Omega_{k,j} = \Omega'_{k,j} \diagdown \Omega'_{k+1,j}\ (k = 0, 1, \ldots, A);\quad \Omega_{A+1,j} = \Omega'_{A+1,j};$$

$$\eta^{(k)} = \left(\eta_1^{(k)}, \ldots, \eta_n^{(k)}\right),\quad \eta_i^{(k)} = k^{\frac{r_1}{r_i} - 1} \eta^{\frac{r_1}{r_i}}\ (i = 1, \ldots, n).$$

Покроем $\Omega_{k,j}$ $\eta^{(k)}$-параллелепипедами $\Pi_{k,j,s} = \eta^{(k)}(\gamma^{k,j,s}) + Q)(s = 1, \ldots, S_{k,j})$, как это делалось в п. III. Для $S_{k,j}$ аналогично (23) будем иметь следующую оценку:

$$S_{k,j} \leqslant c_{47} h^{\sum\limits_{i=2}^{n} \frac{1}{r_i}} \eta^{-\sum\limits_{i=2}^{n} \frac{r_1}{r_i}} k^{\sum\limits_{i=2}^{n}\left(1 - \frac{r_1}{r_i}\right)}. \tag{38}$$

Для каждых s, k, j построим кубатурную формулу, как это делалось выше, и пусть $l_{k,j,s}$ — функционал ошибок этой формулы, сосредоточенный в $\Omega_{k,j,s}$. Для его нормы будем иметь

$$\| l_{k,j,s} \|_{m,\Omega_{k,j,s}}^{*} \leqslant c_{48} \eta^{m + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{r_1}{r_i}} k^{\left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum\limits_{i=2}^{n}\left(\frac{r_1}{r_i} - 1\right)}. \tag{39}$$

Пусть функционал ошибок $l_1 = \sum\limits_{k=1}^{A+1} \sum\limits_{j=1}^{S(h)} \sum\limits_{s=1}^{S_{k,j}} l_{k,j,s}$; носитель его обозначим через $\widehat{\Omega}_1$. При $mp > n$, применяя последовательно неравенство Гёльдера, получаем из (22), (38), (39), что

$$\|l_1\|^*_{m,\widehat{\Omega}_1} \leqslant c_{49}\eta^m h^{\frac{1}{r_1}\left(1-\frac{1}{p}\right)}. \tag{40}$$

При $m > \frac{r_1}{p}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}$, следуя [4], можно построить кубатурную формулу для интегрирования по Ω_0 со следующей оценкой ее функционала погрешности $l_0(\operatorname{supp} l_0 = \widehat{\Omega}_0)$:

$$\|l_0\|^*_{m,\widehat{\Omega}_0} \leqslant c_{50}\eta^{m+1-\frac{1}{p}}. \tag{41}$$

Для Ω_h кубатурную формулу построим, как и выше; ее функционал ошибок l_2 удовлетворяет (36). Пусть $l^h = l_0 + l_1 + l_2$. Из (36), (40), (41) получаем оценку

$$\|l^h\|^*_{m,\Omega} \leqslant Bh^m + c_{49}\eta^m h^{\frac{1}{r_1}\left(1-\frac{1}{p}\right)} + c_{50}\eta^{m+1-\frac{1}{p}} + o\left(h^m\right). \tag{42}$$

Число N_0 добавленных нами узлов в приграничной полосе $\Omega\setminus\Omega_h$ к N_1 узлам из кубической сетки с шагом h, попавших в Ω, оценивается следующим образом:

$$N_0 = \sum_{k=0}^{A+1} S(h)\, S_{k,j} \leqslant c_{51}\eta^{-\sum_{i=2}^{n}\frac{r_1}{r_i}} \sum_{k=0}^{A+1} k^{\sum_{i=2}^{n}\left(1-\frac{r_1}{r_i}\right)}.$$

Так как $r_* > n$, получаем отсюда, что

$$N_0 \leqslant c_{52}\eta^{-\sum_{i=2}^{n}\frac{r_1}{r_i}}. \tag{43}$$

Из (42) и (43) следует, что при $\eta = h^{\frac{n}{r_*}}$ $N_0 = O(h^{-n})$ и

$$\|l^h\|^*_{m,\Omega} \leqslant Bh^m + c_{53}h^{\frac{mn}{r_*}+\frac{1}{r_1}\left(1-\frac{1}{p}\right)} + o\left(h^m\right). \tag{44}$$

Пусть $N = N_0 + N_1$ — общее число узлов. При условии

$$m \leqslant \frac{p-1}{r_1 p}\cdot\frac{1}{r_* - n} \tag{45}$$

из (43) и (44) следует, что

$$\|l_N\|^*_{m,\Omega} \leqslant c_{54}N^{-\frac{m}{n}} + o\left(N^{-\frac{m}{n}}\right),\quad N\to\infty.$$

Если же в (45) имеет место строгое неравенство, то, повторяя рассуждения при $\eta = h^{\frac{n}{r_*}-\varepsilon}$ (с достаточно малым $\varepsilon > 0$), мы приходим к равенству (18).

Выражаю глубокую признательность своему научному руководителю О. В. Бесову за постоянное внимание к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М., Наука, 1974.
2. **Половинкин В. И.** Последовательности функционалов с пограничным слоем.— Сиб. мат. журн., 1974, т. 15, № 2, с. 413—429.
3. **Бесов О. В.** Межъячеечные усреднения и оценки ошибок кубатурных формул в пространствах С. Л. Соболева и их обобщениях.— Труды МИАН СССР, 1977, т. 143, с. 42—56.
4. **Акопян Г. Г.** Последовательности кубатурных формул с кубической решеткой для областей с вырожденными углами.— В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. (Труды семинара С. Л. Соболева). Новосибирск, 1978, № 1, с. 27—35.
5. **Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.** Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., Наука, 1975.
6. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ МЕТОДАХ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛА

А. А. ЖЕНСЫКБАЕВ

(Алма-Ата)

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторый класс интегрируемых на $[0, 1]$ с весом $w(x)$ функций и $l_i(f)$ $(i = 1, \ldots, k)$ — определенные на $\mathfrak{M}$ линейные функционалы, совокупность которых задает на $\mathfrak{M}$ оператор информации $I = (l_1, \ldots, l_k)$. Для $f \in \mathfrak{M}$ по информации $I(f) = (l_1(f), \ldots, l_k(f))$ зададим некоторый метод S восстановления интеграла (т. е. функцию k переменных, определенную на множестве значений оператора I) и рассмотрим формулу

$$\int\limits_0^1 w(x) f(x)\, dx = S(I(f)) + R_S(I, f), \tag{1}$$

где R_S — функционал погрешности метода S.

Через $\mathfrak{J}$ обозначим некоторое семейство операторов информации $\{I\}$. Задача о наилучшем для класса $\mathfrak{M}$ методе восстановления интеграла по семейству $\mathfrak{J}$ заключается в нахождении величины

$$\mathscr{E}(\mathfrak{J}, \mathfrak{M}) = \inf_{I \in \mathfrak{J}} \inf_S \sup_{f \in \mathfrak{M}} |R_S(I, f)|,$$

а также оператора $\overline{I}$ и метода $\overline{S}$, для которых достигается величина $\mathscr{E}(\mathfrak{J}, \mathfrak{M})$. Функция $\overline{S}(\overline{I}(f))$ называется наилучшим для $\mathfrak{M}$ методом восстановления интеграла на базе семейства $\mathfrak{J}$.

Если $\mathfrak{M}$ — выпуклое, центрально симметричное с центром в нуле множество, то, согласно лемме С. А. Смоляка [1], существуют такие линейные функционалы $a_i = a_i(I)$, что

$$\inf_S \sup_{f \in \mathfrak{M}} |R_S(I, f)| = \sup_{f \in \mathfrak{M}} |R(I, f)|, \tag{2}$$

где

$$R(I, f) = \int_0^1 w(x) f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{k} a_i l_i(f).$$

Ниже мы будем рассматривать задачу оптимального восстановления интеграла на классах W_p^r $(r = 1, 2, \ldots;\ 1 \leqslant p \leqslant \infty)$ функций f, имеющих $(r-1)$-ю абсолютно непрерывную производную, у которых $\|f^{(r)}\|_p \leqslant 1$, где

$$\|g\|_p = \left\{\int_0^1 |g(x)|^p dx\right\}^{1/p} \quad (1 \leqslant p < \infty), \qquad \|g\|_\infty = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} \operatorname{vrai} |g(x)|.$$

В качестве семейства $\mathfrak{I}$ операторов информации будем использовать значения функции и ее производных различных порядков в точках x_i всевозможных разбиений типа

$$0 = x_0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqslant x_{n+1} = 1.$$

Так что с учетом (2) задача сводится к нахождению наилучшей квадратурной формулы вида

$$\int_0^1 w(x) f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{\gamma_i} a_{ij} f^{(j)}(x_i) + \sum_{k=1}^{u} b_k f^{(\alpha_k)}(0) + \sum_{m=1}^{v} c_m f^{(\beta_m)}(1) + R(f), \tag{3}$$

где $\gamma_i\,(0 \leqslant \gamma_i \leqslant r-1)$ — произвольные целые числа, $A_u = \{\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_u\}$ и $B_v = \{\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_v\}$ — фиксированные целые числа из отрезка $[0,\ r-1]$, $0 \leqslant u,\ v \leqslant r$ (при этом, например, $u = 0$ означает, что $A_u = \varnothing$, а вторая сумма в (3) равна нулю).

Теорема 1. Среди наилучших методов восстановления (1) интеграла с положительным весом $(w(x) > 0)$ на классе W_p^r $(r = 1, 2, \ldots;\ 1 < p \leqslant \infty)$ по семейству

$$\mathfrak{I}_N(A_u, B_v; f) = \Big\{f^{(\alpha_k)}(0),\ f^{(\beta_m)}(1),\ f^{(j_i)}(x_i)$$
$$(k = 1, \ldots, u;\ m = 1, \ldots, v;\ 0 \leqslant u,\ v \leqslant r;$$
$$j_i = 0, \ldots, \gamma_i;\ i = 1, \ldots, n;\ \sum_{i=1}^{n} (2[\gamma_i/2] + 2) \leqslant N)\Big\}$$

($[a]$ — целая часть числа a) существует линейный вида (3) и он обязательно такой, что $n = N$, $\gamma_i = 0$ $(i = 1, \ldots, N)$, коэффициенты при $f(x_i)$ положительны, $\operatorname{sgn} b_k = (-1)^{\alpha_k + k + 1}$ $(k = 1, \ldots, u)$, $\operatorname{sgn} c_m = (-1)^{m+1}$ $(m = 1, \ldots, v)$.

Если вес $w(x) = x^\mu$ или $w(x) = (1-x)^\mu$ $(\mu \geqslant 0)$, то оптимальный линейный метод единствен.

Отметим, что при $w(x) \equiv 1$, $1 < p \leqslant \infty$ существование и общий вид оптимального линейного метода восстановления получены в [2] для $u = v = 0$, а в [3] — для $u = v = r$. Единственность же анонсирована в [4] при $w(x) \equiv 1$, $p = 2$, $u, v \geqslant 1$, а доказана до сих пор была только для $u = v = r$, $p = 2$, $w(x) \equiv \equiv 1$ в [5] и для $u = v = 0$, $1 < p \leqslant \infty$ $w(x) \equiv 1$ в [6].

Теорема 2. Среди методов восстановления интеграла (1) при $w(x) \equiv 1$ оптимальным для класса W_p^r $(r = 1, 2, \ldots; 1 \leqslant \leqslant p \leqslant \infty)$ по семейству

$$\mathfrak{I}_{Nr}(f) = \{f(x_i), f^{(k)}(1) - f^{(k)}(0) \ (i = 1, \ldots, N; k = 0, \ldots, r-1)\}$$

является

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f\left(\frac{i}{N} - y\right) + \sum_{k=0}^{r-1} b_k(y)\left(f^{(k)}(1) - f^{(k)}(0)\right) + R_y(f),$$

где y — произвольное фиксированное число из $\left[0, \frac{1}{N}\right]$,

$$b_{k-1}(y) = N^{-k}B_k(1 - ny) \quad (k = 1, \ldots, r-1),$$

$$b_{r-1}(y) = N^{-r}(D_r(1 - ny) - d_{rq}),$$

$B_k(x)$ — многочлен Бернулли, т. е. полином, совпадающий на $(0, 1)$ с функцией

$$D_k(x) = \frac{1}{2^{k-1}\pi^k}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^k}\cos\left(2\pi m x - \frac{\pi k}{2}\right),$$

а d_{rq} — константа наилучшего приближения функции $D_r(x)$ на $[0,1]$ в метрике L_q $(1/p + 1/q = 1)$. При этом $\mathscr{E}\left(\mathfrak{I}_{Nr}, W_p^r\right) = H_{rq}/N^r$, где $H_{rq} = \|D_r(\cdot) - d_{rq}\|_q$.

Теорема 3. Среди методов восстановления (1) при $w(x) \equiv \equiv 1$ по семейству

$$\mathfrak{I}_N^0(M_s, f) = \left\{f(0), f(x_i), f(1), f^{(m_j)}(1) - f^{(m_j)}(0) \ (i = 1, \ldots, N; \ j = 1, \ldots, s)\right\},$$

где $M_s = \{m_1 < m_2 < \ldots < m_s\}$ — произвольный фиксированный набор целых чисел из $[0, r-1]$, содержащий все нечетные, наилучшим для W_p^r $(r = 1, 2, \ldots; 1 \leqslant p \leqslant \infty)$ является

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2N}f(0) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1} f\left(\frac{i}{N}\right) + \frac{1}{2N}f(1) + \sum_{j=1}^{[r/2]} b_j^{(0)}\left(f^{(2j-1)}(1) - f^{(2j-1)}(0)\right) + R(f), \quad (4)$$

где $b_j^{(0)} = b_{2j-1}(0)$. При этом $\mathscr{E}\left(\mathfrak{I}_N^0(M_s), W_p^r\right) = H_{rq}/N^r$.

Отметим некоторые следствия из теорем 1—3.

Следствие 1. Среди методов восстановления (1) при $w(x) \equiv 1$ по семейству

$$\mathfrak{I}_N(M_s, f) = \{f(x_i), f^{(m_j)}(1) - f^{(m_j)}(0) \quad (i = 1, \ldots, N; \quad j = 1, \ldots, s)\},$$

где множество M_s определено в теореме 3, наилучшим для класса W_p^r $(r = 1, 2, \ldots; 1 \leqslant p \leqslant \infty)$ будет

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f\left(\frac{2i-1}{N}\right) + \sum_{j=1}^{[r/2]} \bar{b}_j \left(f^{(2j-1)}(1) - f^{(2j-1)}(0)\right) + R(f), \tag{5}$$

где $b_j = b_{2j-1}\left(\frac{1}{2N}\right)$. При этом $\mathscr{E}\left(\mathfrak{I}_N(M_s), W_p^r\right) = H_{rq}/N^r$.

Следствие 2. Формула (4) (соответственно (5)) представляет собой наилучший для W_p^r $(r = 1, 2, \ldots; 1 \leqslant p \leqslant \infty)$ метод восстановления (1) интеграла с единичным весом по семейству

$$\mathfrak{I}_N^0 \{f(0), f^{(2j-1)}(0), f^{(2j-1)}(1), f(1), f(x_i) \quad (i = 1, \ldots, N; \quad j = 1, \ldots, [r/2])\}$$

(соответственно по семейству

$$\mathfrak{I}_N = \{f^{(2j-1)}(0), \ f^{(2j-1)}(1), \ f(x_i) \quad (i = 1, \ldots, N; \quad j = 1, \ldots, [r/2])\}).$$

При этом $\mathscr{E}\left(\mathfrak{I}_N^0, W_p^r\right) = \mathscr{E}\left(\mathfrak{I}_N, W_p^r\right) = H_{rq}/N^r$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бахвалов Н. С.** Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций.— Журн. вычислит. мат. и мат. физ., 1971, т. 11, № 4, с. 1014—1018.
2. **Боянов Б. Д.** Существование оптимальных квадратурных формул с заданными кратностями узлов.— Мат. сб., 1978, т. 105 (147), № 3, с. 342—370.
3. **Barrar R. B., Loeb H. L.** Nonlinear characterization problem for monosplines.— J. of Approx. theory, 1976, т. 18, с. 220—240.
4. **Karlin S.** The fundamental theorem of algebra for monosplines satisfying certain boundary conditions and applications to optimal quadrature formulas.— In: Approximation with special emphasis on spline functions. N. Y., Acad. Press, 1969, p. 467—484.
5. **Jetter K., Lange G.** Die Eindeutigkeit L_2-optimaler polynomialer Monosplines.— Math. Z., 1978, 158, p. 23—34.
6. **Женсыкбаев А. А.** Характеристические свойства наилучших квадратурных формул.— Сиб. мат. журн., 1979, т. 20, № 1, с. 49—68.

НАХОЖДЕНИЕ ЧИСЛА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

М. И. ИСРАИЛОВ

(*Ташкент*)

Число решений $P(n)$ линейных диофантовых уравнений вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k = n \tag{1}$$

в целых неотрицательных $x_1, x_2, \ldots, x_k$ при конкретных $a_1, a_2, \ldots, a_k$ равно числу инвариантных (относительно некоторых групп преобразований) многочленов степени n, что имеет важное значение для построения инвариантных кубатурных формул, алгебраическая степень точности которых равна n [1, 2]. В связи с этим С. Л. Соболевым в 1977 г. была поставлена задача нахождения точной формулы для вычисления величины $P(n)$ уравнения (1) с произвольными целыми положительными коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Отметим, что частные случаи уравнения (1) рассматривались еще Эйлером [3].

Пусть $j_1, \ldots, j_m, j_{m+1}, \ldots, j_k$ — некоторая перестановка чисел $1, 2, \ldots, k$ и $d_{j_1 \ldots j_m} = (a_{j_{m+1}}, \ldots, a_{j_k})$ — наибольший общий делитель $a_{j_{m+1}}, \ldots, a_{j_k}$. Не умаляя общности, можно считать, что $j_1 < j_2 < \ldots < j_m$. Введем множества натуральных чисел $D_1^{(i)}, D_2^{(i)}, \ldots, D_\nu^{(i)}, D_\nu$ следующим образом:

$$D_1^{(i)} = \{1, d_{j_1};\ j_1 = \overline{1, k},\ j_1 \neq i\},$$

$$D_2^{(i)} = D_1^{(i)} \cup \{d_{j_1 j_2};\ 1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant k,\ j_1, j_2 \neq i\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D_\nu^{(i)} = D_{\nu-1}^{(i)} \cup \{d_{j_1 \ldots j_\nu};\ 1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_\nu \leqslant k,\ j_1, \ldots, j_\nu \neq i\},$$

$$D_\nu = \bigcup_{i=1}^{k} D_\nu^{(i)}.$$

Далее обозначим $x^{[m]} = x(x-1)\ldots(x-m+1)$ — обобщенная степень, $\omega_m = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ — примитивный корень m-й степени из единицы,

$$\psi^{(\alpha)} \sum_{\substack{0 \leqslant \nu_1, \ldots, \nu_k \leqslant \alpha \\ \nu_1 + \ldots + \nu_k = \alpha}} \frac{\alpha!}{(\nu_1+1)! \ldots (\nu_k+1)!} a_1^{[\nu_1+1]} \ldots a_k^{[\nu_k+1]} \quad (\alpha \geqslant 0),$$

$$A_{p+1} = (-1)^p \sum_{\Omega(p)} \frac{(-1)^r r!}{\psi^{r+1}} \prod_{\alpha=1}^{p} \frac{1}{r_\alpha!} \left[\frac{\psi^{(\alpha)}}{\alpha!}\right]^{r_\alpha},$$

$$\varphi^{\alpha}_{vis_{j_1\ldots j_q}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha+1} a_i^{[\alpha+1]} & \text{при } i \neq j_1, \ldots, j_q, \\ 1 - \omega_{s_{j_1\ldots j_q}}^{-va_i} & \text{при } \alpha = 0 \text{ и } i = j_1, \ldots, j_q, \\ -a_i^{[\alpha]} \omega_{s_{j_1\ldots j_q}}^{-va_i} & \text{при } \alpha > 0 \text{ и } i = j_1, \ldots, j_q, \end{cases}$$

$$\psi^{(\alpha)}_{vs_{j_1\ldots j_q}} = \sum_{\substack{0 \leqslant v_1, \ldots, v_k \leqslant \alpha \\ v_1 + \ldots + v_k = \alpha}} \frac{\alpha!}{v_1! \ldots v_k!} \prod_{i=1}^{k} \varphi^{(v_i)}_{vis_{j_1\ldots j_q}} \; (\alpha \geqslant 0),$$

$$B^{(k-q)}_{v(p+1)s_{j_1\ldots j_q}} = (-1)^p \sum_{\Omega(p)} \frac{(-1)^r r!}{\left[\psi_{vs_{j_1\ldots j_q}}\right]^{r+1}} \prod_{\alpha=1}^{p} \frac{1}{r_\alpha!} \left[\frac{1}{\alpha!} \psi^{(\alpha)}_{vs_{j_1\ldots j_q}}\right]^{r_\alpha},$$

$\Omega(p)$ означает, что суммирование распространено на все целые неотрицательные решения уравнения $p = r_1 + 2r_2 + \ldots + pr_p$ и $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_p$.

Теорема. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — взаимно-простые натуральные числа. Тогда для числа решений $P(n)$ диофантова уравнения (1) имеем точную формулу

$$P(n) = \sum_{i=1}^{k} A_i \frac{(n+k-i)^{[k-i]}}{(k-i)!} + \sum_{q=2}^{k-1} \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_q \leqslant k} \times$$

$$\times \sum_{\substack{s_{j_1\ldots j_q} | d_{j_1\ldots j_q} \\ s_{j_1\ldots j_q} \perp D_{q-1}}} \sum_{v=1}^{s_{j_1\ldots j_q}}{}^{*} \sum_{p=1}^{k-q} B^{(k-q)}_{vps_{j_1\ldots j_q}} \frac{(n+k-q-p)^{[k-p-q]}}{(k-p-q)!} \omega^{vn}_{s_{j_1\ldots j_q}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{s_i | a_i \\ s_i \perp D^{(i)}_{k-2}}} \sum_{v_i=1}^{s_i}{}^{*} \frac{\omega^{v_i n}_{s_i}}{a_i \prod\limits_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^{k} \left(1 - \omega^{-v_i a_i}_{s_i}\right)}, \qquad (2)$$

где $d \perp D^{(i)}_v$ означает, что d не делит элементов множества $D^{(i)}_v$, а звездочка при сумме показывает, что суммирование ведется по всем v_i, взаимно простым с s_i.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = n.$$

Так как в этом случае $d_1 \equiv (a_2, a_3) = 1$, $d_2 \equiv (a_1, a_3) = 2$, $d_3 \equiv \equiv (a_1, a_2) = 1$, $D^{(1)}_1 = D^{(3)}_1 = \{1, 2\}$, $D^{(2)}_1 = \{1\}$, то формула (2) принимает вид

$$P(n) = \frac{(n+2)(n+1)}{48} + \frac{n+1}{8} + \frac{59}{288} + \sum_{v=1}^{2} B^{(2)}_{2v1} \frac{(n+2-v)^{[2-v]}}{(2-v)!} \times$$

$$\times (-1)^n + \sum_{j=1}^{3}{}^{*} \frac{\omega_3^{jn}}{3\left(1-\omega_3^{-2j}\right)\left(1-\omega_3^{-4j}\right)} + \sum_{j=1}^{4}{}^{*} \frac{\omega_4^{jn}}{4\left(1-\omega_4^{-2j}\right)\left(1-\omega_4^{-3j}\right)}.$$

Подставляя $B^{(2)}_{1,2,1} = \frac{1}{16}$, $B^{(2)}_{2,2,1} = \frac{7}{32}$ и упрощая, имеем

$$P(n) = \left\| \frac{1}{48} [(n+1)(n+8) + 3(-1)^n (n+4) + 10] \right\|,$$

где $\|x\|$ означает ближайшее целое к x.

Отметим, что другой алгоритм для вычисления $P(n)$ был опубликован Эрхартом [4]. Однако сравнить наши результаты с его не удалось ввиду отсутствия необходимой для этого работы [5], в которой имеются понятия и обозначения, используемые в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. О формулах механических кубатур на поверхности сферы.— Сиб. мат. журн., 1962, т. 3, № 5, с. 769—796.
2. Мысовских И. П. Об инвариантных кубатурных формулах. Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. (Труды семинара С. Л. Соболева), Новосибирск, 1978, № 1, с. 69—78.
3. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа, I/2-е изд. М., Гостехиздат, 1956, с. 396.
4. Ehrhart E. Nombre de solutions d'un systéme diophantien eulérien. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1977, t. 285, A 317-A 320.
5. Ehrhart E. Polynômes arithmégues et methode des polyédres en combinatoire, 35, Ser. ISNM. Baîe, Birkhäuser Verlag, 1977, 165 p.

КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА 35-ГО ПОРЯДКА ДЛЯ СФЕРЫ

В. И. ЛЕБЕДЕВ

(*Москва*)

Посвящается моему учителю — С. Л. Соболеву

1. С. Л. Соболев в работе [1] заложил основы нового подхода в построении квадратур для сферы, инвариантных относительно групп вращения. В работах [2—4] этот метод был развит для построения инвариантных относительно группы октаэдра с инверсией G_8^* квадратур наивысшей алгебраической степени точности n с помощью использования четных симметрических многочленов, образующих алгебры инвариантных относительно G_8^* многочленов, и элементарных симметрических функций от значений симметрических многочленов. В работах [5, 6] проведены аналогичные исследования для групп икосаэдра и симплекса. На этом пути удалось значительно понизить алгебраический порядок сис-

тем уравнений, определяющих параметры квадратуры, в результате чего были получены квадратуры до 20—29-го порядка. Главной трудностью в алгоритме определения параметров квадратур для группы G_8^* при $n > 29$ является то, что система нелинейных уравнений содержит подсистемы, являющиеся моментными системами от двух переменных. Для $n = 35,37$ удалось найти метод решения таких систем. В настоящей статье приведена квадратура 35-го порядка. При описании способа получения ее мы будем использовать методы и обозначения работ [3, 4].

2. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве $R_3(x, y, z)$ задана сфера $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и вписанный в S октаэдр Ω с вершинами на осях координат. Пусть

$$\mathcal{J}(f) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S f(s) p(s)\, ds, \tag{1}$$

где $s \in S$, $p(s) \geqslant 0$ — интегрируемая весовая функция, инвариантная относительно G_8^*. Квадратуру 35-го порядка, согласно [2, 3], ищем в виде

$$I(f) = A_1 \sum_{i=1}^{6} f(a_i^1) + A_2 \sum_{i=1}^{12} f(a_i^2) + A_3 \sum_{i=1}^{8} f(a_i^3) + \\ + \sum_{k=1}^{7} B_k \sum_{i=1}^{24} f(b_i^k) + \sum_{k=1}^{2} C_k \sum_{i=1}^{24} f(c_i^k) + \sum_{k=1}^{4} D_k \sum_{i=1}^{48} f(d_i^k), \tag{2}$$

где координаты на S характерных точек квадратуры каждого типа имеют вид

$$a_1^1 = (1, 0, 0), \quad a_1^2 = (2^{-1/2}, 2^{-1/2}, 0), \quad a_1^3 = (3^{-1/2}, 3^{-1/2}, 3^{-1/2}),$$
$$b_1^k = (l_k, l_k, m_k), \quad c_1^k = (p_k, q_k, 0), \quad d_1^k = (r_k, s_k, w_k),$$

остальные точки каждого типа получаются из приведенных перестановкой координат или изменением у них знака. Квадратура (2) содержит 434 узла и будет правильно интегрировать первые 1296 сферических гармоник.

Пусть $\sigma_2 = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2$, $\sigma_3 = x^2y^2z^2$ — образующие алгебры инвариантных относительно группы G_8^* многочленов.

Вид системы уравнений для определения весов и узлов квадратуры (2) приведен в [2, 3]; там же указан алгоритм ее решения, согласно которому сначала следует определить неизвестные групп C и D, после чего сравнительно легко находятся неизвестные группы B, а вес A_i определяется по явным формулам. Поэтому выпишем систему уравнений, соответствующую неизвестным групп C и D:

$$\sum_{k=1}^{2} \widetilde{C}_k v_k^i + \sum_{k=1}^{4} \widetilde{D}_k \sigma_{2k}^i = \gamma_i, \qquad i = 0, \ldots, 5; \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{4} \widetilde{D}_k \sigma_{3k} \sigma_{2k}^i = \mu_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, 4; \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{4} \widetilde{D}_k \sigma_{3k}^2 \sigma_{2k}^i = \nu_i, \qquad i = 0, 1, 2; \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{4} \widetilde{D}_k \sigma_{3k}^3 \sigma_{2k}^i = \omega_i, \qquad i = 0, 1. \tag{6}$$

Здесь σ_{ik} — значения функций σ_i в точках (s_k, r_k, w_k), $v_k = p_k^2(1 - p_k^2)$, $\widetilde{C}_k = 24C_k\psi(v_k)v_k$, $\widetilde{D}_k = 48D_k c_{12}(\sigma_{2k}, \sigma_{3k})$, где

$$\psi(v) = v(1 - 4v), \; c_{12} = \sigma_2^2(1 - 4\sigma_2) - \sigma_3(4 + 27\sigma_3 - 18\sigma_2),$$

$$\gamma_i = \mathcal{J}\left(\sigma_2^i c_{12}\right), \quad \mu_i = \mathcal{J}\left(\sigma_2^i \sigma_3 c_{12}\right), \quad \nu_i = \mathcal{J}\left(\sigma_2^i \sigma_3^2 c_{12}\right),$$

$$\omega_i = \mathcal{J}\left(\sigma_2^i \sigma_3^3 c_{12}\right).$$

Пусть

$$F_4(\sigma) = \prod_{i=1}^{4} (\sigma - \sigma_{2i}),$$

$\overline{p}_1 = v_1 + v_2$, $\overline{p}_2 = v_1 v_2$, τ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ — элементарные симметрические многочлены от σ_{2i}: $\tau_1 = \sum_{i=1}^{4} \sigma_{2i}, \ldots, \tau_4 = \prod_{i=1}^{4} \sigma_{2i}$;

$$\varphi_{3i} = \tau_1 - \sigma_{2i}, \quad \varphi_{2i} = \tau_2 - \sigma_{2i}\tau_1 + \sigma_{2i}^2, \quad \varphi_{1i} = \tau_3 - \sigma_{2i}\tau_2 + \sigma_{2i}^2\tau_1 - \sigma_{2i}^3, \; \Phi_i(f) = f_3 - f_2\varphi_{3i} + f_1\varphi_{2i} - f_0\varphi_{1i},$$

где $f = (f_0, f_1, f_2, f_3)$.

Для решения системы (3)—(6) предложим следующий метод. Введем новые неизвестные ν_3, ω_2, ω_3, дополнив систему (5) уравнением при $i = 3$, а систему (6) — двумя уравнениями при $i = 2, 3$. Тогда из (3) следует, что

$$\widetilde{D}_i = \frac{\Phi_i(t)}{F_4'(\sigma_{2i})\left(\sigma_{2i}^2 - \overline{p}_1\sigma_{2i} + \overline{p}_2\right)}, \tag{7}$$

где

$$t_j = \gamma_{j+2} - \gamma_{j+1}\overline{p}_1 + \gamma_j\overline{p}_2, \; j = 1, 2, 3, 4;$$

аналогичные формулы получаются для $\widetilde{C}_k$.

Из (4) вытекает, что

$$\widetilde{D}_i\sigma_{3i} = \Phi_i(\mu)/F_4'(\sigma_{2i}) \tag{8}$$

и

$$-\mu_0\tau_4 + \mu_1\tau_3 - \mu_2\tau_2 + \mu_3\tau_1 = \mu_4; \tag{9}$$

из (5) и (6) —

$$\widetilde{D}_i\sigma_{3i}^2 = \Phi_i(\nu)/F_4'(\sigma_{2i}), \tag{10}$$

$$\widetilde{D}_i\sigma_{3i}^3 = \Phi_i(\omega)/F_4'(\sigma_{2i}). \tag{11}$$

Из соотношений (8)—(10) получаем

$$\Phi_i(\omega)\,\Phi_i(\mu) = \Phi_i^2(\nu), \tag{12}$$

$$\Phi_i(t)\,\Phi_i(\nu) = \Phi_i^2(\mu)\left(\sigma_{2i}^2 - \overline{p}_1\sigma_{2i} + \overline{p}_2\right), \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{13}$$

Умножая i-е уравнение (12) на $\sigma_{2i}^k / F_4'(\sigma_{2i})$ и складывая при каждом $k = 0, 1, 2, 3$, получим четыре уравнения, которые после несложных преобразований примут вид

$$\omega_2 = L_1(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4), \tag{14}$$

$$\omega_3 = L_2(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4), \tag{15}$$

$$\tau_4 = L_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \nu_3), \tag{16}$$

$$Q_1(\nu_3) = L_4(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4). \tag{17}$$

Здесь и далее L_j обозначают линейные, а Q_j — квадратичные функции от соответствующих переменных. Из уравнений (9), (16), (17), исключая τ_2, τ_3, τ_4, получим

$$\begin{aligned} \tau_2 &= L_4(\tau_1) + Q_2(\nu_3), \\ \tau_3 &= L_5(\tau_1) + Q_3(\nu_3), \\ \tau_4 &= L_6(\tau_1) + Q_4(\nu_3). \end{aligned} \tag{18}$$

Проделывая аналогичные преобразования с системой (13), замечая при этом, что

$$\Phi_i^2(\mu)\left(\sigma_{2i}^2 - \overline{p}_1\sigma_{2i} + \overline{p}_2\right) = \overline{p}_2\Phi_i^2(\mu) - \overline{p}_1\Phi_i(\mu)\,\Phi_i(\overline{\mu}) + \Phi_i^2(\overline{\mu}),$$

где $\overline{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$, и исключая с помощью (4), (5), (18) неизвестные ω_2, ω_3, τ_2, τ_3, τ_4, получим четыре уравнения вида

$$l_{1i}\overline{p}_1 + l_{2i}\overline{p}_2 = h_i, \; i = 1, 2, 3, 4, \tag{19}$$

где l_{ji}, h_i — функции вида $a + b\tau_1 + c\nu_3 + d\nu_3^2$. Преобразованием системы (19) можно добиться, чтобы коэффициенты l_{ji} ($i = 3$, 4) и h_4 не зависели от τ_1. Выражая $\overline{p}_1$, $\overline{p}_2$ из последних двух уравнений (19) и подставляя эти значения в первые два уравнения, переходим к системе двух уравнений относительно неизвестных τ_1, ν_3, решая которую находим τ_1, ν_3 и, следовательно, все остальные параметры квадратуры (2). В результате получим, что

$$\begin{aligned}
A_1 &= 5.26607119170\cdot 10^{-4}; & A_2 &= 2.54822067342\cdot 10^{-3}; \\
A_3 &= 2.51231747026\cdot 10^{-3}; & B_1 &= 2.53040228828\cdot 10^{-3}; \\
B_2 &= 2.51326717721\cdot 10^{-3}; & B_3 &= 2.50172540316\cdot 10^{-3}; \\
B_4 &= 2.44537392125\cdot 10^{-3}; & B_5 &= 2.30269459658\cdot 10^{-3}; \\
B_6 &= 2.01427834049\cdot 10^{-3}; & B_7 &= 1.46249191186\cdot 10^{-3}; \\
C_1 &= 1.91095193375\cdot 10^{-3}; & C_2 &= 2.41744213033\cdot 10^{-3}; \\
D_1 &= 2.23660776044\cdot 10^{-3}; & D_2 &= 2.41693004432\cdot 10^{-3}; \\
D_3 &= 2.51223685455\cdot 10^{-3}; & D_4 &= 2.49664418594\cdot 10^{-3}; \\
l_1 &= 6.90934630477\cdot 10^{-1}; & m_1 &= 2.12646826487\cdot 10^{-1};
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
l_2 &= 6.45666470687\cdot 10^{-1}; & m_2 &= 4.07712665072\cdot 10^{-1};\\
l_3 &= 4.91434260701\cdot 10^{-1}; & m_3 &= 7.19016505247\cdot 10^{-1};\\
l_4 &= 3.92725992478\cdot 10^{-1}; & m_4 &= 8.31584385173\cdot 10^{-1};\\
l_5 &= 2.86128918282\cdot 10^{-1}; & m_5 &= 9.14472790326\cdot 10^{-1};\\
l_6 &= 1.77483645532\cdot 10^{-1}; & m_6 &= 9.67987144099\cdot 10^{-1};\\
l_7 &= 7.56809954734\cdot 10^{-1}; & m_7 &= 9.94255889522\cdot 10^{-1};\\
p_1 &= 9.77642811118\cdot 10^{-1}; & q_1 &= 2.10272522857\cdot 10^{-1};\\
p_2 &= 8.81813287779\cdot 10^{-1}; & q_2 &= 4.71598691151\cdot 10^{-1};\\
r_1 &= 9.92176963644\cdot 10^{-2}; & r_2 &= 2.05482369640\cdot 10^{-1};\\
s_1 &= 3.84436314534\cdot 10^{-1}; & s_2 &= 4.50233038258\cdot 10^{-1};\\
w_1 &= 9.37180985855\cdot 10^{-1}; & w_2 &= 8.68946032287\cdot 10^{-1};\\
r_3 &= 1.06801826076\cdot 10^{-1}; & r_4 &= 3.10428365683\cdot 10^{-1};\\
s_3 &= 5.90515704892\cdot 10^{-1}; & s_4 &= 5.55015272846\cdot 10^{-1};\\
w_3 &= 7.99927854386\cdot 10^{-1}; & w_4 &= 7.71746251489\cdot 10^{-1}.
\end{aligned}
$$

Узлы этой квадратуры достаточно правильно триангулируют поверхность сферы S.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. О формулах механических квадратур на поверхности сферы.— Сиб. мат. журн., 1962, т. 3, № 5, с. 469—796.
2. Лебедев В. И. О квадратурных формулах для сферы повышенной алгебраической степени точности.— В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики. Новосибирск, 1973, с. 31—35.
3. Лебедев В. И. О квадратурах на сфере.— Журн. вычислит. мат. и мат. физ., 1976, т. 16, № 2, с. 293—306.
4. Лебедев В. И. Квадратурные формулы для сферы 25—29-го ряда порядка точности.— Сиб. мат. журн., 1977, т. XVIII, № 1, с. 132—142.
5. Коняев С. И. Квадратурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы икосаэдра.— В кн.: Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, 1975, вып. 32, с. 69—76.
6. Мысовских И. П. О вычислении интегралов по поверхности сферы.— Докл. АН СССР, 1977, т. 235, № 2, с. 269—272.

О ДЕКАРТОВЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ

М. В. НОСКОВ

(*Красноярск*)

Декартовы произведения формул приближенного интегрирования часто применяются при построении кубатурных формул (см., например, [1—3]). Ниже приводятся две теоремы об условиях разложимости кубатурных формул, вообще говоря эрмитовых, в декартовы произведения формул меньшей размерности и об алгебраической точности сомножителей декартовых произведений.

Пусть E^s — s-мерное евклидово пространство, R^s — множество целочисленных векторов из E^s. Определим следующие векторы и множества: x^i, x, P_i, $i = 1, \ldots, d$; $x^i = \left(x_1^i, \ldots, x_{s_i}^i\right)$; $x = (x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{2k})$; $P_i \subset E^{s_i}$. Обозначим: $\left\langle x^1, \ldots, x^d\right\rangle = \left(x_1^1, \ldots, x_{s_1}^1, x_1^2, \ldots, x_{s_2}^2, \ldots, x_{s_d}^d\right)$; $x = \langle \overline{x}, \widetilde{x} \rangle$, где $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_k)$; $\widetilde{x} = (x_{k+1}, \ldots, x_{2k})$; $\bigotimes_{i=1}^{d} P_i = \{p = \langle p^1, \ldots, p^d\rangle : p^i \in P_i, \quad i = 1, \ldots, d\}$.

Далее считаем, что натуральные числа s_i $(i = 1, \ldots, d)$ таковы, что $\sum_{i=1}^{d} s_i = n$; μ_i — ограниченные множества из E^{s_i}, $\mu = \bigotimes_{i=1}^{d} \mu_i$; ξ_i — ограниченные множества из R^{s_i}, содержащие нулевой вектор, $\xi = \bigotimes_{i=1}^{d} \xi_i$; Ω_i — области в E^{s_i}, $\Omega = \bigotimes_{i=1}^{d} \Omega_i$; $T_i = \{\alpha^i = \langle \overline{\alpha}^i, \widetilde{\alpha}^i \rangle; \quad \overline{\alpha}^i \in \mu_i, \widetilde{\alpha}^i \in \xi_i\}$; $T = \{\alpha = \langle \overline{\alpha}, \widetilde{\alpha} \rangle, \overline{\alpha} \in \mu, \widetilde{\alpha} \in \xi\}$. Если β, γ — векторы из E^{s_i} при некотором $i \in \{1, \ldots, d\}$, то ${}_iT(\alpha, \beta) = \{\alpha \in T; \overline{\alpha}^i = \beta; \widetilde{\alpha}^i = \gamma; \overline{\gamma}^j \in \mu_j, \widetilde{\alpha}^j = 0$ при $j \neq i\}$.

Определение. Если заданы кубатурные формулы

$$\int_{\Omega_i} f(x_1, \ldots, x_{s_i})\, dx_1, \ldots, dx_{s_i} \approx \sum_{\alpha^i \in T_i} c_i(\alpha^i)\, f^{(\widetilde{\alpha}^i)}(\overline{\alpha}^i),$$

$$i = 1, \ldots, d, \tag{1}$$

где $c_i(\alpha^i)$ — постоянные, то декартовым произведением d формул (1), соответствующих $i = 1, \ldots, d$, называется кубатурная формула

$$\int_{\Omega} f(x)\, dx \approx \sum_{\alpha \in T} \prod_{i=1}^{d} c_i(\alpha^i)\, f^{(\widetilde{\alpha})}(\overline{\alpha}).$$

Предполагаем, что формулы (1) точны на константах.

Теорема 1. Если кубатурная формула

$$\int_{\Omega} f(x)\, dx \approx \sum_{\alpha \in T} c(\alpha)\, f^{(\widetilde{\alpha})}(\overline{\alpha}) \tag{2}$$

является декартовым произведением формул (1) при $i = 1, \ldots, d$, то коэффициенты $c_j(\alpha^j)$ формул (1) удовлетворяют следующим равенствам:

$$c_j(\alpha^j) = \frac{\operatorname{mes} \Omega_j}{\operatorname{mes} \Omega} \sum_{\alpha \in {}_jT(\overline{\alpha}^j, \widetilde{\alpha}^j)} c(\alpha),$$

где $j = 1, \ldots, d$, $\alpha^j \in T_j$.

Пусть $P(x^{\hat{s}})$ — многочлен из $E^{s\hat{j}}$.

Теорема 2. Если формула (2) есть декартово произведение формул (1) и точна на многочлене $P(x^j)$, то и формула (1) при $i = j$ также точна на $P(x^j)$. Теорема 2 позволяет определить точность сомножителей, исходя из точности самого декартового произведения.

Автор благодарит научного руководителя В. И. Половинкина за внимание к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Крылов В. И., Шульгина Л. Т.** Справочная книга по численному интегрированию. М., Наука, 1966. 372 с.
2. **Никольский С. М.** Квадратурные формулы/2-е изд., перераб. М., Наука, 1974. 224 с.
3. **Половинкин В. И.** Декартовы произведения формул прямоугольников и с регулярным пограничным слоем. (Пятое советско-чехословацкое совещание по применению методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики). Новосибирск, 1978, с. 248—250.

АСИМПТОТИЧЕСКИ НАИЛУЧШИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КУБАТУРНЫХ И КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

В. И. ПОЛОВИНКИН

(*Красноярск*)

Рядом авторов (см. [1,2]) рассматривалась поставленная А. Н. Колмогоровым задача о минимизации норм функционалов ошибок квадратурных формул при условии, что у формул меняются узлы и коэффициенты, но число узлов фиксировано. В [3] исследовалась задача о построении асимптотически наилучших последовательностей кубатурных формул в пространствах $L_p^m(\Omega)$, обобщающая упомянутую выше задачу А. Н. Колмогорова, подобно тому, как задача о построении асимптотически оптимальных последовательностей кубатурных формул, рассмотренная С. Л. Соболевым в работе [4], обобщает задачу о построении оптимальных кубатурных формул.

Приведем главный результат [3] и его обобщения на последовательности кубатурных формул с произвольным количеством узлов на квадратурные формулы. Для краткости будем вести речь не о формулах приближенного интегрирования, а об их функционалах ошибок.

Положим $L(N)$ — множество функционалов l

$$(l, f) = \int_{\Omega} f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{N} c_i f(x_i), \qquad \left(l(x), x^{\alpha}\right) = 0 \text{ при } |\alpha| < m,$$

где Ω — ограниченная область в n-мерном пространстве с кусочно-гладкой границей, c_i — постоянные, $x_i \in \overline{\Omega}$, $i = 1, \ldots, N$.

Определение. Последовательность $\{l^i\}$, $l^i \in L(N(i))$, $N(i) \to \infty$ при $i \to \infty$ называется асимптотически наилучшей в $L_p^m(\Omega)$, если

$$\lim_{i \to \infty} \left\{ \| l^i \|_{L_p^{m*}(\Omega)} \Big/ \inf_{l \in L(N(i))} \left\{ \| l \|_{L_p^{m*}(\Omega)} \right\} \right\} = 1.$$

Теорема 1 [3]. $\forall p \in (mn^{-1}, \infty)$ $\exists \{N(i)\}_{i=1}^{\infty} \to \infty$, $\{l^i\}_{i=1}^{\infty}$, $l^i \in L(N(i))$ и постоянная $A > 0$ такие, что

$$\| l^i \|_{L_p^{m*}(\Omega)} = (N(i))^{mn^{-1}} (\operatorname{mes} \Omega)^{mn^{-1} + (p-1)p^{-1}} A (1 + o(1))$$
$$\text{при } i \to \infty. \tag{1}$$

Этот результат допускает следующее обобщение, которое может быть получено, если при доказательстве теоремы 1 воспользоваться не теоремой 2 из [5], а теоремой из [6].

Теорема 2. $\forall p \in (mn^{-1}, \infty)$ $\exists$ число $A > 0$ такое, что $\forall \{N(i)\}_{i=1}^{\infty} \to \infty$ и асимптотически наилучшей в $L_p^m(\Omega)$ $\{l^i\}_{i=1}^{\infty}$, $l^i \in L(N(i))$, выполняется (1).

Лемма [7]. Если $a, b, \alpha_0, \ldots, \alpha_t, \beta_0, \ldots, \beta_t, N, h$ — числа, $a < b$, N — натуральные, $h = (b-a)N^{-1}$, $\{l^N\}$—последовательность функционалов

$$(l^N, f) = \int_a^b f(x)\,dx - h \left\{ \sum_{i=0}^{t} (\alpha_i f(a + hi) + \beta_i f(b - hi)) + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=t+1}^{N-t-1} f(a + hi) \right\}, \quad (l^N(x), x^k) = 0 \text{ при } k = 0, \ldots, m-1, \tag{2}$$

то $\exists$ число $\varkappa = \lim_{N \to \infty} \{(l^N(x), x^m)\} (m!)^{-1} (b-a)^{-1}$.

Теорема 3 [7]. При $p \in (1, \infty]$ асимптотически наилучшие в $L_p^m[a, b]$ $\{l^N\}$ вида (2) всегда существуют. Для таких $\{l^N\}$ и пределов $\varkappa$, существование которых утверждает лемма, всегда выполняется

$$\| B_m(x) + \varkappa \|_{L_q(0,1)} = \inf_{\lambda \in (-\infty, \infty)} \{ \| B_m(x) + \lambda \|_{L_q(0,1)} \},$$

где $q = p(p-1)^{-1}$ при $p > 1$, $q = 1$ при $p = \infty$, B_m — многочлены Бернулли номера m.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Никольский С. М.** Квадратурные формулы / 2-е изд., перераб. М., Наука, 1974. 224 с.
2. **Женсыкбаев А. А.** Наилучшая квадратурная формула для некоторых классов периодических дифференцируемых функций.— Изв. АН СССР, 1977, т. 19, Сер. мат., № 5, с. 1110—1124.

3. **Половинкин В. И.** Асимптотически наилучшие последовательности кубатурных формул.— Сиб. мат. журн., 1975, т. 16, № 6, с. 1255—1262.
4. **Соболев С. Л.** Введение в теорию кубатурных формул. М., Наука, 1974. 808 с.
5. **Половинкин В. И.** Последовательности функционалов с пограничным слоем.— Сиб. мат. журн., 1974, т. 15, № 2, с. 413—429.
6. **Бесов О. В.** Межъячеечные усреднения и оценка ошибок кубатурных формул в пространствах С. Л. Соболева и их обобщениях.— Труды Мат. ин-та АН СССР, 1977, т. 143, с. 42—56.
7. **Половинкин В. И.** Последовательности квадратурных формул с пограничным слоем. Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. (Труды семинара С. Л. Соболева). Новосибирск, 1977, № 1, с. 149—158.

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ СОБОЛЕВА

М. Д. РАМАЗАНОВ, Н. И. БЛИНОВ, Л. В. ВОЙТИШЕК,
З. Ж. ЖАМАЛОВ, Ф. Я. ЗАГИРОВА, В. И. ПОЛОВИНКИН,
Г. Н. САЛИХОВ, Т. Х. ШАРИПОВ, Ц. Б. ШОЙНЖУРОВ

Многомерные *кубатурные* формулы отличаются от одномерных двумя особенностями: 1) бесконечно разнообразны формы многомерных областей интегрирования; 2) быстро растет число узлов интегрирования с увеличением размерности пространства. Проблема 2) требует особого внимания к построению наиболее экономных формул. Формулы алгебраической точности на сфере $S^{n-1}\subset R^n$, точно интегрирующие некоторое число сферических гармоник, построили С. Л. Соболев ($n = 3$) и Г. Н. Салихов ($n = 4,5$). Они основывались на следующем утверждении.

Теорема 1 (С. Л. Соболев). Кубатурная формула, инвариантная относительно конечной группы изометрических преобразований сферы, тогда и только тогда точна на всех гармониках заданного порядка, когда она точна на инвариантных относительно группы гармониках.

Г. Н. Салихов предложил общий подход для подсчета числа линейно независимых гармоник данного порядка, инвариантных относительно конечных групп преобразований сферы.

Современная постановка проблемы оптимизации формул приближенного интегрирования заключается в минимизации нормы функционала погрешности формулы на выбранных нормированных пространствах. С. Л. Соболев объединил идеи теорий формул алгебраической точности и минимальности нормы функционала погрешности в следующем определении.

Определение 1. Решетчатая кубатурная формула

$$K_h^{\Omega} f = h^n \sum_{hHk\in\Omega} c_k(h)\, f(hHk)_{,} \qquad (1)$$

где H — матрица $n \times n$, $\Omega \subset R^n$, $k \in Z^n$, $h > 0$ — малый параметр, называется формулой с регулярным пограничным слоем (РПС), если ее функционал погрешности

$$\langle l_h^\Omega(x), f(x)\rangle = \int_\Omega f(x)\,dx - K_h^\Omega f \tag{2}$$

допускает разложение $l_h^\Omega(x) = \sum_\gamma l_{h,\gamma}(x)$,

$$l_{h\gamma}(x) = \chi_{\omega(h,\gamma)}(x) - h^n \sum_{\substack{hHk\in\Omega \\ \rho(hHk,\,\omega(h,\gamma))\leqslant L_1 h}} a_{k\gamma}(h)\,\delta(x - hHk)$$

(χ_ω — характеристическая функция множества $\omega(h, \gamma) = \Omega \cap \cap \{x | x = hH(y + \gamma),\ y_j \in [0, 1),\ j = \overline{1, n}\} \neq \varnothing$, δ — функция Дирака); $|a_{k\gamma}(h)| \leqslant L_2$; $\rho(hH\gamma, R^n \setminus \Omega) \geqslant L_3 h \Rightarrow l_{h\gamma}(x) = l\left(\frac{x - hH\gamma}{h}\right)$;

$$\begin{gathered}\langle l_{h\gamma}(x),\ x^\alpha\rangle = 0,\ |\alpha|_* < m; \\ \langle l(x), x^\alpha\rangle = 0,\ |\alpha| \leqslant m.\end{gathered} \tag{3}$$

Функционал $l_h^\Omega(x)$ обладает регулярным пограничным слоем в следующем смысле:

$$\begin{gathered}\exists c\ \forall h, k, \quad |c_k(h)| \leqslant c, \\ (\rho(hHk, R^n \setminus \Omega) \geqslant (L_1 + L_3)h) \Rightarrow c_k(h) = 1.\end{gathered} \tag{4}$$

Примером формул с регулярным пограничным слоем могут служить известные квадратурные формулы Грегори.

Определение 2. Кубатурная формула и ее функционал погрешности (1), (2) называются оптимальными (асимптотически) над банаховым пространством B, если в норме сопряженного пространства B^* для каждого $h > 0$

$$\| l_h^\Omega | B^* \| \big/ \inf_{\{a_k\}} \| \chi_\Omega(x) - \sum_{hHk} a_k \delta(x - hHk) | B^* \| = 1 \tag{5}$$

$$(\to 1 \text{ при } h \to 0).$$

Основные достоинства формул РПС в уменьшении объема работы при вычислении их весов (см. (4)) и асимптотической оптимальности.

Теорема 2 (С. Л. Соболев). Если Ω ограничена и обладает кусочно-гладкой границей, m — целое, $m > \frac{n}{2}$, то формула РПС имеет оценку

$$\| l_h^\Omega | [L_2^m(R^n)]^* \| = (\operatorname{mes} \Omega)^{1/2} \left(\frac{h}{2\pi}\right)^m \left(\sum_{k \neq 0} \frac{1}{|H^{-1*}k|^{2m}}\right)^{1/2} (1 + O(h)). \tag{6}$$

Здесь

$$\| f | L_2^m(R^n) \| = \left(\int_{R^n} \sum_{|\alpha| = m} \frac{m!}{\alpha!} |D^\alpha f(x)|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{7}$$

Как видно, постановка задачи о минимизации нормы функционала погрешности кубатурной формулы ставит результат в зависимость от выбранного нормированного пространства интегрируемых функций. Этот выбор в некоторой степени определяется предшествующим опытом, но все-таки остается довольно произвольным. Поэтому естественным было стремление добиться инвариантности результата об асимптотической оптимальности одной и той же последовательности кубатурных формул над целым рядом функциональных пространств.

Оценки формул РПС на пространствах W_2^m дал Ц. Б. Шойнжуров. Т. Х. Шарипов показал, что в случае периодических функций формула прямоугольников универсально асимптотически оптимальна над классом гильбертовых пространств, компактно вложенных в пространство непрерывных функций. В. И. Половинкин распространил теорему 1 на пространство $L_2^m(\Omega)$ (норма в нем получается из (7) заменой R^n на Ω). Для формул РПС в дополнение к оценке (6), выделяющей главный член функционала погрешности, Ф. Я. Загировой была получена оценка остаточного члена.

Возможность распространения теоремы С. Л. Соболева на различные гильбертовы пространства показала правильность идеи построения теории интегрирования на основе понятия асимптотической оптимальности как более устойчивым относительно выбора пространств по сравнению с оптимальностью. Тем более интересным стало распространение теории на негильбертовы пространства. Существенное отличие гильбертова случая заключалось в том, что он приводил к минимизации квадратичного функционала с линейным уравнением Эйлера — неоднородным полигармоническим уравнением $\Delta^m u(x) = l_h(x)$ (для пространств L_2^m). В случае же пространства типа L_p^m с $p \neq 2$, например, соответствующее уравнение Эйлера получалось нелинейным. Первым в этом направлении продвинулся Ц. Б. Шойнжуров, сумевший редуцировать задачу с нелинейным уравнением Эйлера (для W_p^m) к линейной и благодаря этому явно выписать экстремальную функцию периодического функционала погрешности. Ц. Б. Шойнжуров распространил теорему 2 и на неизотропные $W_p^{m_1,\ldots,m_n}(R^n)$ пространства. Т. Х. Шарипов получил точную оценку сверху нормы функционалов с регулярным пограничным слоем над пространствами с нормой

$$\| f | H_p^\mu(R^n) \| = \left(\int\limits_{R^n} | F^{-1} [\mu(\xi)(Ff)(\xi)](x) |^p \, dx \right)^{1/p}$$

при некоторых ограничениях на функцию μ (здесь F — оператор преобразования Фурье). Для периодических функций, образующих произвольное банахово пространство $\widetilde{B}$, компактно вложенное в $C(R^n)$, с нормой, инвариантной по сдвигам аргументов, М. Д. Рамазанов установил существование такой эквивалентной перенормировки, после которой формула прямоугольников становится оптимальной. Но затем В. И. Половинкин показал, что формулы с регулярным пограничным слоем могут не быть асимптотически оптимальными над пространством $L_p^m(\Omega)$ при четном m, $p \neq 2$ и полунорме

$$\| f \mid L_p^m(\Omega) \| = \left(\int\limits_{\Omega} \left[\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} | D^\alpha f(x) |^2 \right]^{p/2} \right)^{1/p}.$$

Вывод В. И. Половинкина проявил границу возможного распространения теоремы Соболева на различные нормированные пространства. Стало ясно, что для построения асимптотически оптимальных кубатурных формул на более широком множестве пространств необходимо расширить сам класс рассматриваемых формул, не ограничиваясь только формулами с регулярным пограничным слоем. Для пространств интегрируемых функций $L_p^m(\Omega)$ это сделал В. И. Половинкин. Для интегралов с весом $\int g(x) f(x)\, dx$, где $g(x)$ — фиксированная функция, он вычислил норму функционала погрешности оптимальной решетчатой кубатурной формулы (для простоты с единичной матрицей H)

$$\| l_h^{\Omega,0} \mid [L_p^m(\Omega)]^* \| = \| g \mid L_q(\Omega) \| \cdot \| (1 - \delta) \mid [\widetilde{L}_p^m]^* \| \cdot h^m + o(h^m), \quad (8)$$

где $q = p/(p-1)$, δ — функция Дирака, $\widetilde{L}_p^m$ — пространство периодических функций с полунормой

$$\| f \mid \widetilde{L}_p^m \| = \left(\int\limits_{\substack{0<x_j<1 \\ j=1,\ldots,n}} \left[\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (D^\alpha f(x))^2 \right]^{p/2} dx \right)^{1/p}.$$

Убрав в определении 1 условие (3), он получил в более широком множестве — ПС-формул теорему 3.

Теорема 3 (В. И. Половинкин). При любых $p \in (1, \infty)$ и m целых, $m > \frac{n}{2}$, существует такая последовательность ПС-формул $\{l_h^\Omega\}$, которая асимптотически оптимальна над L_p^m (Ω) и норма l_h^Ω вычисляется по формуле (8) (с $g(x) \equiv 1$). Если m нечетно или $p = 2$ за $\{l_h^\Omega\}$, можно взять произвольную последовательность кубатурных формул с регулярным пограничным слоем.

Некоторые результаты этой теоремы в одномерном случае были ранее получены В. Д. Калмыковым.

При исследовании минимума $[L_p^m(\Omega)]^*$-норм среди всех функционалов (обозначим его $I(N, \Omega)$)

$$\langle l^N, f \rangle = \int\limits_{\Omega} f(x)\, dx - \sum_{k=1}^{N} c_{k,N} f(x^{k,N})$$

с произвольным расположением узлов $x^{k,N} \in \Omega$ В. И. Половинкин установил существование последовательности $N_j \to \infty$ такой, что

$$I(N_j, \Omega) = N_j^{-\frac{m}{n}} |\Omega|^{\frac{m}{n}+\frac{1}{q}} \cdot B(1 + o(1))$$

с постоянной B, не зависящей от Ω, N_j. Выяснилось, что в одномерном случае минимум достигается либо на формулах Грегори, либо на некоторых других, родственных формулам Грегори.

Естественным было стремление уменьшить точную константу в оценке нормы (6) за счет выбора матрицы решетки H. Матрица H входит в оценку через аргумент в функции Эпштейна

$$\zeta(H^{-1*} \mid 2m) = \sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{|H^{-1*}\beta|^{2m}}.$$

Для $n = 2, \ldots, 8$ С. С. Рышковым доказано, что при достаточно больших m минимум ξ-функции Эпштейна достигается на решетках H^{-1*}, дающих наиплотнейшие решетчатые упаковки равных n-мерных шаров. Наилучшими для интегрирования являются решетки, взаимные с решетками наиплотнейших упаковок. Строение этих решеток для $n = 3, \ldots, 8$ было исследовано Л. В. Войтишек. Оказалось, что при $n = 3, 4, 5$ это центрированные кубические решетки, представляющие собой объединение двух кубических решеток, сдвинутых относительно друг друга на половину шага по всем координатам. При $n = 6, 7, 8$ строение наилучших для интегрирования решеток довольно сложно, но центрированные кубические решетки остаются достаточно хорошими.

Имея РПС-формулы, рассчитанные на интегрирование функций различной гладкости, С. Л. Соболев выяснил связь между точностью приближения и наилучшим порядком применяемых формул. Если

$$\forall \alpha, \ |D^\alpha f(x)| \leqslant K\alpha! \, |\alpha|^{(\lambda-1)|\alpha|} A^{|\alpha|}, \ \lambda > 0,$$

то при применении РПС-формул порядка m (см. определение 1) — $l^{\Omega}_{h,m}$

$$\inf_{m=1,2,\ldots} |\langle l^{\Omega}_{h,m}, f\rangle| \leqslant K h^{-1/2} \exp\left[-\frac{\lambda}{e}\left(\frac{Ah}{2\pi r_{\min}}\right)^{-1/\lambda}\right],$$

где $r_{\min}$ — радиус шаров наиплотнейшей решетчатой упаковки при единичном объеме ячейки решетки. С. Л. Соболев установил также точную оценку скорости сходимости РПС-формул на индивидуальной функции

$$|\langle l^{\Omega}_h, f\rangle| \leqslant \| f \mid L_2^m(R^n)\| \cdot \varphi(h, f),$$

где $\varphi(h, f) = o(h^m)$, а точнее, $N^m \varphi\left(\frac{1}{N}, f\right) \in l_{q^*}$, $q^* = 2$ при $m \geqslant n$ и $q^* > 2n/(2m - n)$ при $n/2 < m < n$.

Решая проблему эффективного вычисления весов для областей различной формы, С. Л. Соболев предложил специальный способ, позволяющий за конечное, не зависящее от h число действий вычислить все веса кубатурной формулы для области, являющейся многогранником с вершинами в рациональных точках. Разработку алгоритмов и построение кубатурных формул для некоторых многогранников по предложенному способу выполнили Л. В. Войтишек и Н. И. Блинов.

Первые работы по программированию формул Соболева выполнила Л. В. Войтишек. Были составлены программы вычисления ζ-функции Эпштейна и весов формул Соболева для некоторых многогранников. Формулы с регулярным пограничным слоем для произвольных плоских областей с гладкими границами запрограммировал Н. И. Блинов.

Стремление разрешить трудности проблемы 1) и дать конструктивные способы вычисления весов кубатурных формул для произвольных областей привело к расширению постановки задачи о поиске асимптотически оптимальных формул. Это было сделано в работах М. Д. Рамазанова. Отмеченное выше свойство (4) формул Соболева было взято за исходное и поставлена задача рассмотреть все формулы со свойством (4) и указать в них характеристические свойства асимптотически оптимальных. На основе полученных достаточных условий асимптотической оптимальности были описаны те формулы, веса которых конструктивно вычисляются при произвольной формы областях интегрирования.

Для функций из пространств $H_2^{\mu}(\Omega)$ и $C^m(\Omega)$, взятых в одной конкретно указанной из эквивалентных нормировок, установлена

Теорема 4 (М. Д. Рамазанов). Над пространствами $\widetilde{H}_2^{\mu}$ при $c_1(1+|\xi|)^{M_1} < |\mu(\xi)| < c_2(1+|\xi|)^{M_2}$, $M_1 > \frac{n}{2}$ (и некоторых других естественных ограничениях на μ) и $\widetilde{C}_m$ с $m \in [M_1, M_2]$ асимптотически оптимальной является любая кубатурная формула (4), оптимальная по порядку над W_p^s ($\| l_h^{\Omega} \mid [W_p^s]^* \| < Ch^s$) при некоторых $p < 2$, $M_3 > M_2$ и всех $s \in [M_2, M_3]$.

Были вычислены и нормы оптимальных функционалов погрешностей в приведенных классах пространств. Например, для оптимальных формул в пространствах $\widetilde{C}^m$

$$\| l_h^{\Omega,0} | [\widetilde{C}^m]^* \| = |\Omega| \cdot \| l_h^1 | [\widetilde{C}^m]^* \| \cdot (1 + o(1)),$$

где l_h^1 — формула прямоугольников для единичного куба Q.

Полученные в теореме условия дали возможность привести алгоритм конструктивного задания весов $c_k(h)$ асимптотически оптимальных формул (4) для ограниченных областей с гладкими границами. Суть появления этой возможности состоит в том, что изучаемый класс РПС-функционалов и достаточные условия в нем стали инвариантными относительно основных операций анализа —

замены переменных и умножения на функции. Благодаря этому удалось применить построения, уже известные в анализе, в теории краевых задач уравнений с частными производными,— метод локального анализа с распрямлением малых участков границы. Например, в окрестности гладкого куска границы $x_n = \varphi(x)'$, $x' \in R^{n-1}$ области $\Omega = \{x | x_n < \varphi(x')\}$ веса $c_k(h)$ можно вычислить по формуле

$$c_k(h) = \sum_{p=1}^{M} \frac{1}{p} \sum_{q=1}^{M} \eta^{q-1} \sum_{r=1}^{\min(M,\xi-1)} a_{rq} \sum_{s=1}^{\min(M,\xi-r)} a_{sp}.$$

Здесь $M - 1 = M_3$ (из теоремы) указывает на гладкость интегрируемых функций и границы области; $\xi = k_n - [\varphi(hk')/h]$; $\eta = \{\varphi(hk')/h\}$, где $[\lambda]$, $\{\lambda\}$ — целая и дробная часть числа λ; a_{ij} — элементы матрицы, обратной к матрице Вандермонда $(a_{ij})^{-1} = ((j-1)^i)_{i,\ j=1}^{M}$.

Создание основ теории асимптотически оптимальных кубатурных формул обусловило возможность создавать программы для счета по таким формулам. По асимптотически оптимальным решетчатым формулам (4) несколько программ вычисления интегралов составил И. Умарханов. В частности, составлена универсальная программа для интегрирования по n-мерным областям с гладкими границами для $n = 2, 3, 4$.

С. Л. Соболев рассмотрел проблему построения оптимальных решетчатых формул над пространством $L_2^m(R^n)$ и нахождение оптимальных весов свел к решению дискретной задачи типа Винера — Хопфа. Для решения этой задачи С. Л. Соболеву пришлось привлечь мощный математический аппарат, решить ряд проблем, представляющих и большой самостоятельный интерес. Это были такие вопросы, как двойственность задач оптимизации решетчатых кубатурных формул и продолжения функции из области с минимальной нормой; асимптотика полигармонических функций на бесконечности; дискретные аналоги краевых задач для полигармонического оператора; локальная представимость вещественной аналитической функции нескольких переменных конечной суммой квадратов аналитических функций.

Эти исследования дали возможность доказать существование единственного решения дискретной задачи типа Винера — Хопфа и тем самым дать алгоритм для нахождения оптимальных весов кубатурных формул $c[\beta] = D_m[\beta] * u[\beta]$, где $D_m[\beta]$ — дискретный аналог полигармонического оператора, $u[\beta]$ — известная функция в области Ω, а вне ее является решением дискретных краевых задач для полигармонического оператора.

В одномерном случае З. Ж. Жамалову удалось решить до конца задачу нахождения оптимальных коэффициентов и вычислить веса оптимальных формул для $m \leqslant 3$.

Большинство приведенных в докладе результатов и подробные библиографии можно найти в работах [1]—[3].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Соболев С. Л.** Введение в теорию кубатурных формул (1974). М., Наука. 808 с.
2. **Теория** кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики. (Под ред. С. Л. Соболева). Новосибирск, Наука, 1973. 263 с.
3. **Пятое** советско-чехословацкое совещание по применению методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики. Новосибирск, Наука, 1978. 314 с.

О КОРНЯХ МНОГОЧЛЕНОВ ЭЙЛЕРА

С. Л. СОБОЛЕВ

(*Новосибирск*)

1. Введение. Многочлены Эйлера $E_k(\lambda)$ определяются формулой

$$E_k(\lambda) = \frac{(1-\lambda)^{k+2}}{\lambda}\left(\frac{\lambda d}{d\lambda}\right)^{[k]}\frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}.$$

Они, естественно, возникают при построении оптимальных квадратурных формул в $L_2^{(m)}$. Например, в оптимальных формулах вида

$$\int_{-\eta_1}^{N+\eta_2} \varphi(x)\,dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} c[\beta]\,\varphi(\beta); \qquad 0 \leqslant \eta_j < 1$$

коэффициенты $c[\beta]$ выражаются как

$$c[\beta] = 1 + \sum_{j=1}^{m-1} a_j\lambda_j^{\beta} + \sum_{j=1}^{m-1} b_j\lambda_j^{N-\beta}$$

квадратные скобки мы употребляем для обозначения функций дискретного аргумента). Здесь $\lambda_j = \lambda_j^{(2m-2)}$ $(j = 1, 2, \ldots, m-1)$ суть корни уравнения $E_{2m-2}(\lambda) = 0$.

Известно [1], что все корни $\lambda_j^{(k)}$ вещественны, отрицательны и различны:

$$\lambda_1^{(k)} < \lambda_2^{(k)} < \ldots < \lambda_k^{(k)} < 0. \qquad (1)$$

Кроме того, корни, равноотстоящие от концов цепочки (1), взаимно-обратны:

$$\lambda_j\lambda_{k+1-j} = 1. \qquad (2)$$

В настоящей статье мы изучим асимптотическое поведение корней $\lambda_j^{(k)}$ при больших значениях k. Удобно иногда рассматривать логарифмы этих корней

$$q_j^{(k)} = \frac{1}{\pi}\ln\left(-\lambda_j^{(k)}\right).$$

Для двух групп таких корней будут выведены две различные формулы. Первая из асимптотических формул имеет вид

$$q_j^{(k)} \cong q_j^{\mathrm{I}(k)} = \operatorname{ctg} \frac{(j+1/2)\,\pi}{k+2}. \tag{3}$$

Она выражает поведение $q_j^{(k)}$ всюду, кроме окрестностей точек $\pm\infty$. Точнее говоря, она справедлива для тех q, для которых

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{|q|}{\sqrt{k}} < \varkappa_{\max}, \tag{4}$$

где $\varkappa_{\max} \cong 3{,}0215\ldots$. Это, как мы увидим, равносильно паре условий:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{i}{\sqrt{k}} > \frac{1}{\pi\varkappa_{\max}} \text{ и } \lim_{k\to\infty} \frac{k-j+1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{\pi\varkappa_{\max}}.$$

С. Х. Сираждинов показал, что формула (3) пригодна почти для всех q.

Другая формула

$$\lambda_j^{(k)} \cong \left(\frac{j+1}{j}\right)^{k+1} \text{ или } q_j^{(k)} \cong q_j^{\mathrm{II}(k)} = \frac{k+1}{\pi} \ln\left(1+\frac{1}{j}\right) \tag{5}$$

выражает поведение тех $q_j^{(k)}$ (т. е. $\lambda_j^{(k)}$), которые близки к $\pm\infty$. Она справедлива для тех q, у которых

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{j}{\sqrt{k}} < \frac{1}{\pi\varkappa_{\min}} \text{ или } \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{k+1-j}{\sqrt{k}} < \frac{1}{\pi\varkappa_{\min}}, \tag{6}$$

где $\varkappa_{\min} = 0{,}3726\ldots$ Это условие равносильно тому, что

$$\lim \frac{|q|}{\sqrt{k}} > \varkappa_{\min}. \tag{7}$$

Краткое изложение результатов настоящей статьи опубликовано в нескольких заметках (см. [2—6]). Для формулы (3) наш результат является расширением результатов С. Х. Сираждинова [7].

Как видно, в совокупности (3) и (5) охватывают все возможные случаи расположения корней.

2. Вторая асимптотическая формула. Нам удобнее будет начать со второй асимптотической формулы. Коэффициенты $a_s^{(k)}$ многочленов Эйлера, как показано им самим, выражаются формулой

$$a_s^{(k)} = (s+1)^{k+1} - \binom{k+2}{1} s^{k+1} + \binom{k+2}{2} (s-1)^{k+1} - \ldots \tag{8}$$

Составим уравнение Лобачевского, корнями которого служат квадраты корней многочленов Эйлера:

$$L_k(\mu) = b_0^{(k)}\mu^{(k)} - b_1^{(k)}\mu^{k-1} + \ldots + (-1)^k b_k^{(k)}.$$

Коэффициенты $b_j^{(k)}$ выражаются известной формулой:

$$b_j^{(k)} = a_j^{(k)2} - 2a_{j-1}a_{j+1} + 2a_{j-2}a_{j+2} - \ldots,$$

обрывающейся на конечном числе слагаемых, так же как и (8). Переименуем всевозможные сочетания без повторений из k элементов по s. Эти сочетания характеризуются наборами s различных номеров:

$$j_1(t), j_2(t), \ldots, j_s(t); \quad j_m(t) \neq j_l(t); \quad t = 1, 2, \ldots, \binom{k}{s},$$

и пусть

$$\nu_{s,t}^{(k)} = \left| \lambda_{j_1(t)}^{(k)} \lambda_{j_2(t)}^{(k)} \ldots \lambda_{j_s(t)}^{(k)} \right|.$$

Каждый коэффициент $a_s^{(k)}$ — простейшая симметрическая функция корней $\lambda_j^{(k)}$ выражается в виде

$$a_s^{(k)} = \sum_{t=1}^{\binom{k}{s}} \nu_{s,t}^{(k)}, \tag{9}$$

а каждый коэффициент $b_j^{(k)}$ соответственно будет

$$b_j^{(k)} = \sum_{t=1}^{\binom{k}{j}} \nu_{j,t}^{(k)2}.$$

Оценим наибольшие из чисел $\nu_{s,t}^{(k)}$, из которых состоит сумма (9). Воспользуемся следующей леммой.

Лемма. Пусть N неотрицательных чисел $\nu_1 > \nu_2 \geqslant \nu_3 \geqslant \ldots \geqslant \nu_N > 0$ удовлетворяют условиям

$$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_N = a \quad \text{и} \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \ldots + \nu_N^2 = b$$

и пусть $1/2 \leqslant b/a^2$. Тогда ν_1 — наибольшее из ν_j удовлетворяет неравенству $(1/2)\,(a + \sqrt{2b - a^2}) \leqslant \nu_1 \leqslant \sqrt{b}$.

Докажем эту лемму. Заменяя ν_j на $a\nu_j$ и полагая $b/a^2 = c^2$, сведем задачу к случаю $a = 1$, $b = c^2$. Рассмотрим сферу

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \ldots + \nu_N^2 = c^2 > 1/2. \tag{10}$$

Эта сфера дважды пересекает каждый отрезок, соединяющий пары точек $\nu_j = 1$ и $\nu_l = 1$, лежащих на $N-1$-мерном симплексе

$$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_N = 1; \quad \nu_j \geqslant 0; \quad (j = 1, 2, \ldots, N), \tag{11}$$

разбивая его на три части

$$0 \leqslant \nu_j \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{2c^2 - 1}\right); \; \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{2c^2 - 1}\right) < \nu_j <$$
$$< \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2c^2 - 1}\right); \; \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2c^2 - 1}\right) \leqslant \nu_j \leqslant 1.$$

На среднем промежутке

$$\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{2c^2 - 1}\right) < \nu_j < \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2c^2 - 1}\right) \tag{12}$$

функция $R^2 = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \ldots + \nu_N^2 < c^2$, а на двух остальных — больше или равна этому числу. Функция эта вогнута и потому, если в точках множества $\mathscr{E}$ она меньше постоянной c^2, то она меньше этой постоянной на всей выпуклой оболочке этого множества. Выпуклой оболочкой промежутков (12) служит выпуклый многогранник, состоящий из тех точек симплекса (11), где $\left|\nu_j - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 - 1}$. Убедиться в этом можно, например, если образовать поочередно выпуклую оболочку s-мерных граней данного многогранника, $s = 1, 2, \ldots, N-1$. Таким образом, точки поверхности сферы (10) могут лежать лишь в тех частях симплекса (11), где одна из координат ν_j больше или равна $(1/2)(1+\sqrt{2c^2-1})$. Очевидно, что такой координатой может быть только одна и при том наибольшая, т. е. ν_1. Лемма доказана.

Применим эту лемму к оценкам $\nu_{j,1}^{(k)}$ и $\nu_{j-1,1}^{(k)}$. Тогда

$$\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 4\eta_j^{(k)}}\right) \leqslant \frac{|\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_j|}{a_j^{(k)}} \leqslant \sqrt{1 - 2\eta_j^{(k)}}; \tag{13}$$

$$\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 4\eta_{j-1}^{(k)}}\right) \leqslant \frac{|\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_{j-1}|}{a_{j-1}^{(k)}} \leqslant \sqrt{1 - 2\eta_{j-1}^{(k)}}, \tag{14}$$

где

$$\eta_j^{(k)} = \frac{a_{j-1}^{(k)} a_{j+1}^{(k)}}{a_j^{(k)2}} - \frac{a_{j-2}^{(k)} a_{j+2}^{(k)}}{a_j^{(k)2}} + \ldots \tag{15}$$

Оценки (13), (14), очевидно, справедливы при $1 - 2\eta_j^{(k)} > \frac{1}{2}$. Из (13) и (14) получим делением

$$\frac{1 + \sqrt{1 - 4\eta_j^{(k)}}}{2\sqrt{1 - 2\eta_{j-1}^{(k)}}} \leqslant \frac{-\lambda_j^{(k)} a_{j-1}^{(k)}}{a_j^{(k)}} \leqslant \frac{2\sqrt{1 - 2\eta_j^{(k)}}}{1 + \sqrt{1 - 4\eta_{j-1}^{(k)}}}$$

или, логарифмируя,

$$\frac{1}{\pi} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - 4\eta_j^{(k)}}}{2\sqrt{1 - 2\eta_{j-1}^{(k)}}} \leqslant q_j^{(k)} - \frac{1}{\pi} \ln \frac{a_j^{(k)}}{a_{j-1}^{(k)}} \leqslant \frac{1}{\pi} \ln \frac{2\sqrt{1 - 2\eta_j^{(k)}}}{1 + \sqrt{1 - 4\eta_{j-1}^{(k)}}}. \tag{16}$$

Как было установлено в [3], при любом фиксированном j, величина $\eta_j^{(k)}$ стремится к нулю с ростом k. Из формулы (16), как мы увидим ниже, следует при этом

$$\left| q_j^{(k)} - \frac{k+1}{\pi} \ln \frac{j+1}{j} \right| < \varepsilon. \tag{17}$$

3. Область применимости формулы (5). Оценим качество приближения $q_j^{(k)} \cong q_j^{\mathrm{II}(k)}$, где

$$q_j^{\mathrm{II}(k)} = \frac{k+1}{\pi} \ln\left(1 + \frac{1}{j}\right) = \frac{k+1}{\pi} \ln \frac{(j+1/2)+1/2}{(j+1/2)-1/2} =$$

$$= \frac{k+1}{\pi}\left(\frac{1}{j+1/2} + \frac{1}{12}\frac{1}{(j+1/2)^2} + \ldots\right)$$

для j растущего как $\sqrt{k}$. В этом случае положим

$$j + 1/2 = \frac{\sqrt{k+1}}{\varkappa_j^{\prime(k)}\pi}; \quad \varkappa_j^{\prime(k)} = \frac{\sqrt{k+1}}{\pi(j+1/2)} \tag{18}$$

и будем исследовать область, где $\varkappa'$ меняется в некоторых конечных пределах, оставаясь больше чем 0,1. Для $q_j^{\mathrm{II}(k)}$ получим при этом

$$q_j^{\mathrm{II}(k)} = \varkappa_j^{\prime(k)} \sqrt{k+1} + O\left(k^{-1/2}\right). \tag{19}$$

Оценим коэффициенты $a_s^{(k)}$ и $b_j^{(k)}$ для s, j, подчиненных условиям

$$s < \frac{2\sqrt{k+1}}{\pi\varkappa'}\left(1 + O\left(k^{-1}\right)\right); \quad j = \frac{\sqrt{k+1}}{\pi\varkappa'}\left(1 + O\left(k^{-1}\right)\right). \tag{19'}$$

Составим отношение абсолютных значений слагаемого с номером $t+1$ и предыдущего в формуле (8)

$$\rho_{t+1} = \frac{k+2-t}{t+1}\left[\left(1 - \frac{1}{s-t+1}\right)^{s-t+1}\right]^{\frac{k+1}{s-t+1}}. \tag{20}$$

Из (20) пользуясь тем, что квадратная скобка, возрастая, стремится к e^{-1}, получим

$$\rho_{t+1} < (k+2)\,e^{-\frac{k+1}{s-t+1}} < (k+2)\,e^{-\frac{k+1}{s}} < (k+2)\,e^{-\frac{\pi\varkappa'\sqrt{k+1}}{2}}.$$

При $\varkappa' \geqslant 0{,}1$ это отношение равномерно относительно $\varkappa'$ стремится к нулю. Иными словами,

$$a_s^{(k)} = (s+1)^k\left[1 + O\left((k+1)\,e^{-0{,}05\pi\sqrt{k+1}}\right)\right]. \tag{21}$$

В формуле (15) для $\eta_j^{(k)}$ участвуют слагаемые, зависящие от тех коэффициентов $a_{j+1}^{(k)}$, у которых $j + t \leqslant k$ и $j - t \geqslant 0$, откуда, в частности, следует $(j+t) \leqslant \min(k, 2j)$.

При этих условиях для всех тех s, которые участвуют в (15), первое из ограничений (19′) оказывается следствием второго. Значит, для всех $a_s^{(k)}$, входящих в (15), неравенство (21) имеет место. Пользуясь этим, получим оценку:

$$\frac{a_{j-t}^{(k)} a_{j+t}^{(k)}}{a_j^{(k)2}} = \left[\left(1 - \frac{t^2}{(j+1)^2}\right)^{(j+1)^2}\right]^{\frac{k+1}{(j+1)^2}}\left[1 + O\left((k+2)\,e^{-0{,}05\pi\sqrt{k+1}}\right)\right].$$

Отсюда вытекает, что сумма (15), рассматриваемая как ряд, обрывающийся на конечном числе членов, сходится равномерно по отношению к k и в нем можно перейти к пределу при $k \to \infty$:

$$\lim \eta_j^{(k)} = \sum_{t=1}^{\infty} (-1)^{t-1} e^{-t^2\pi^2\varkappa'^2} = \eta(\varkappa'). \qquad (22)$$

Сумма ряда (22) выражается через ϑ_4-функцию Якоби с отношением периодов $\tau = 2\pi i\varkappa'$. Функция $\eta(\varkappa')$ равна единице при $\varkappa' = 0$ и убывает с ростом $\varkappa'$. Пусть $\varkappa'_{\min}$ — корень уравнения $\eta(\varkappa'_{\min}) = 0{,}25$. Подсчет показывает, что $\varkappa'_{\min} = 0{,}3725$. Приведем значения функции η и связанной с ней функции $\omega(\eta) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{2\sqrt{1-2\eta}}{1+\sqrt{1-4\eta}}$:

$\varkappa'$	$\exp-(\pi^2\varkappa')^2$	$\eta(\varkappa')$	$\omega(\eta)$
0,37254	0,254167	0,249998	0,109420
0,38	0,240468	0,237137	0,053213
0,4	0,206153	0,204347	0,023755
0,5	0,084805	0,084753	0,001684
0,6	0,028637	0,028637	0,000150
0,66	0,013579	0,013579	0,000030

При достаточно большом k и $\varkappa' > \varkappa'_{\min}$ величина $\eta(\varkappa')$ будет меньше 0,25, и формула (16) дает

$$\left| q_j^{(k)} - q_j^{\mathrm{II}(k)} \right| < \frac{1}{\pi} \ln \frac{2\sqrt{1-2\eta}}{1+\sqrt{1-4\eta}}.$$

Мы видим, что погрешность $q_j^{(k)} - q_j^{\mathrm{II}(k)}$ будет ограничена, в то время как $q_j^{\mathrm{II}(k)}$ растет как $\sqrt{k+1}$. Значит,

$$q_j^{(k)} = q_j^{\mathrm{II}(k)} + o(1) = q_j^{\mathrm{II}(k)} \left(1 + O\left(k^{-1/2}\right)\right). \qquad (23)$$

Предположение (18) является в силу сказанного эквивалентным (6), а из (23) при этом следует (7).

Полезно вычислить расстояние между двумя соседними $q_j^{\mathrm{II}(k)}$. Из (17) и (18) получим

$$q_{j-1}^{\mathrm{II}(k)} - q_j^{\mathrm{II}(k)} = -\frac{k+1}{\pi} \ln \frac{(j+1)(j-1)}{j^2} = \frac{k+1}{\pi} \frac{1}{j^2} \left(1 + O(j^{-2})\right) =$$

$$= \frac{k+1}{\pi} \frac{1 + O(j^{-2})}{(j+1/2)(j-1/2) - 1/4} \leqslant \frac{k+1}{\pi} \frac{1 + O(j^{-2})}{(j+1/2)(j-1/2)} = \pi \varkappa_j^{(k)} \varkappa_{j-1}^{(k)} (1 + O(k^{-1})).$$

4. Величина $q_j^{\mathrm{II}(k)}$ и погрешность при больших q. Рассмотрим теперь корни с номерами меньшими, чем $o(k^{1/2})$. Пусть

$$j + 1/2 = \frac{1}{\pi\sigma_j^{(k)}} \sqrt{\frac{k+1}{\tau(k)}},$$

где функция $\tau(k)$ монотонно стремится к ∞ при $k \to \infty$. Естественно разобрать два случая:

$$\frac{k+1}{\tau(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty \tag{24}$$

и

$$\frac{k+1}{\tau(k)} < M^2. \tag{25}$$

В предположении (24) из (19) будем иметь

$$q_j^{\mathrm{II}} = \sigma_j^{(k)} \sqrt{(k+1)\,\tau(k)}\,(1 + O(k^{-1})).$$

Для ρ_t — модуля отношения члена с номером t к предыдущему в сумме (15), действуя аналогично тому, как это было при выводе (19), получим

$$\rho_t < (k+2)\, e^{-\frac{\pi\sigma\sqrt{(k+1)\tau(k)}}{2}},$$

и, следовательно, ρ_t и первый член в сумме (15) стремится к нулю. При этом сумма всех слагаемых, начиная со второго, пренебрежимо мала по сравнению с первым членом, который оценивается как

$$\frac{a_{j-1}^{(k)} a_{j+1}^{(k)}}{a_j^{(k)2}} \left(1 - \frac{1}{(j+1)^2}\right)^{k+1} \left[1 + O\left((k+1)\, e^{-\pi\sigma\sqrt{(k+1)\tau(k)}}\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{k+1}{(j+1)^2}} \leqslant e^{-\frac{(k+1)\pi^2\sigma^2\tau(k)}{(k+1)+o(1)}}.$$

Таким образом, при больших k $\eta \cong e^{-\pi^2\sigma^2\tau(k)}$ и, поскольку для малых η

$$\ln \frac{2\sqrt{1-2\eta}}{1+\sqrt{1-4\eta}} = \frac{1}{2}\eta^2 + O(\eta^4) \cong \frac{1}{2} e^{-2\pi^2\sigma^2\tau(k)},$$

значит,

$$\left| q_j^{(k)} - q_j^{\mathrm{II}(k)} \right| < \frac{1}{2} e^{-2\pi^2\sigma^2\tau(k)}.$$

Будем называть промежуток изменения q продуктивным, если в нем содержится хотя бы один корень $E_k(-e^{\pi q})$. Мы установили, что при соблюдении (24) промежуток

$$\Delta_j^{\mathrm{II}(k)} = \left\{ q : \left| q - q_j^{\mathrm{II}(k)} \right| < \frac{1}{2} e^{-2\pi^2\sigma^2\tau(k)} \right\}$$

является продуктивным.

Предположение (25) равносильно ограниченности j. Этот случай был разобран в [3], и мы внесем сейчас незначительные уточнения. Те доводы, по которым уже в случае (24) величины $\eta_j^{(k)}$

и $a_1^{(k)}$ асимптотически выражались первыми членами их разложений:

$$\eta_j^{(k)} = \frac{a_{j-1}^{(k)} a_{j-1}^{(k)}}{a_j^{(k)2}}; \; a_1^{(k)} = (s+1)^{k+1}\left(1 + O\left(\left(1 - \frac{1}{j+1}\right)^{k+1}\right)\right),$$

сохраняют силу a' fortiori (тем более) и в рассматриваемом случае. Получим

$$a_j^{(k)} \cong \frac{k+1}{\pi} \ln\left(1 + \frac{1}{j+1}\right); \; \eta_j^{(k)} \cong \left(1 - \frac{1}{(j+1)^2}\right)^{k+1}.$$

Для продуктивного промежутка будем иметь

$$\Delta_j^{\mathrm{II}(k)} = \left\{q : \left|q - q_j^{\mathrm{II}(k)}\right| < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{j+1}\right)^{2k+2}\right\}.$$

Займемся теперь выводом формулы (3).

5. Первая асимптотическая формула. Введем в $\dot{E}_k(\lambda)$ новую переменную

$$q = \frac{1}{\pi} \ln(-\lambda); \; \lambda = -e^{\pi q}.$$

В этой переменной формула для $E_k(\lambda)$ упрощается, поскольку логарифмическое дифференцирование $\frac{\lambda d}{d\lambda}$ переходит в обычное. После элементарных выкладок получим

$$E_k(\lambda) = E_k(-e^{\pi q}) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{k+2} e^{k\pi q/2} \mathrm{ch}^{k+2} \pi q/2 \, \frac{d^k}{dq^k} \frac{(\pi/2)^2}{\mathrm{ch}^2 \pi q/2}. \quad (26)$$

Все $\lambda_j^{(k)}$ вещественны, а в выражении (26) первые множители вещественных корней не имеют. Поэтому числа $q_j^{(k)} = \frac{1}{\pi} \ln\left(-\lambda_j^{(k)}\right)$ представляют собой корни функции $\frac{d^k}{dq^k} \frac{(\pi/2)^2}{\mathrm{ch}^2 \pi q/2}$, лежащие на вещественной оси. Воспользуемся теперь Миттаг—Леффлеровым разложением $1/\mathrm{ch}^2 \pi q/2$ на простейшие дроби. Мы имеем

$$\frac{\pi^2}{4\mathrm{ch}^2 \pi q/2} = \frac{\pi^2}{4\sin^2 \pi\left(\frac{1+iq}{2}\right)} = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left[4\beta + \frac{1+iq}{2}\right]^2} = \sum_{\beta=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2\beta + 1 + iq)^2}. \quad (27)$$

Дифференцируя, получим

$$\frac{d^k}{dq^k} \frac{(\pi/2)^2}{\mathrm{ch}^2 \frac{\pi}{2} q} = (-1)^{k+1}(k+1)! \sum_{\beta=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{i}{(2\beta + 1 + iq)}\right)^{k+2}.$$

Положим теперь

$$S_k(q) = \frac{1}{2} \sum_{\beta=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{i}{2\beta + 1 + iq}\right)^{k+2} = \Re(\widetilde{S}_k(q)),$$

где

$$\widetilde{S}_k(q) = \sum_{\beta=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2\beta+1+iq}\right)^{k+2} = \left(\frac{i}{i+q}\right)^{k+2}\zeta(q), \tag{28}$$

$$\zeta(q) = 1 + \sum_{\beta=1}^{\infty}\left(\frac{1+iq}{2\beta+1+iq}\right)^{k+2}. \tag{29}$$

Уравнение для $q_j^{(k)}$ запишется теперь в виде $\Re\{\widetilde{S}_k(q)\} = 0$ или $\arg\widetilde{S}_k(q) = (t+1/2)\pi$, где t — целое. Функция $\widetilde{S}_k(q)$ обладает свойством: $\widetilde{S}_k(-q) = (-1)^k\widetilde{S}_k(q)$, откуда

$$\arg\widetilde{S}_k(-q) = -\arg\widetilde{S}_k(q),\ S_k(0) = 0,\ k \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2);$$

$$-\frac{\pi}{2} + \arg\widetilde{S}_k(-q) = -\left(-\frac{\pi}{2} + \arg\widetilde{S}_k(+q)\right), \quad k \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2).$$

Удобно иногда вместо q рассматривать в качестве независимого переменного $\alpha = \arg\frac{i}{1+iq}$ — угол, составленный вектором $1+ +iq$ с мнимой осью. Тогда

$$q = \mathrm{ctg}\,\alpha;\ 0 < \alpha < \pi. \tag{30}$$

Формула (30) отображает взаимно-однозначно промежуток $0 < \alpha < \pi$ на всю вещественную ось q, причем $q(\alpha)$ нечетно в этом промежутке, т. е.

$$\alpha(q) + \alpha(-q) = \pi;\ q(\alpha) + q(\pi - \alpha) = 0.$$

Из уравнения (28) следует

$$\arg\widetilde{S}_k(q) = (k+2)\alpha + \arg\zeta. \tag{31}$$

Пусть в области $\frac{t\pi}{k+2} < \alpha < \frac{(t+1)\pi}{k+2}$, t — целое, справедлива оценка:

$$|\arg\zeta| < h < \pi/2. \tag{32}$$

Положим

$$\alpha_1 = \frac{(t+1/2)\pi + h}{k+2}, \quad \alpha_2 = \frac{(t+1/2)\pi - h}{k+2}.$$

В силу (31) и (32)

$$\arg\widetilde{S}_k(\mathrm{ctg}\,\alpha_1) > (t+1/2)\pi; \qquad \arg\widetilde{S}_k(\mathrm{ctg}\,\alpha_2) < (t+1/2)\pi.$$

Это значит, что в промежутке $\alpha_1 > \alpha > \alpha_2$ функция $\arg\widetilde{S}_k(\mathrm{ctg}\,\alpha)$ пройдет через значение $(t+1/2)\pi$ и, следовательно, вещественная часть $\widetilde{S}_k(\mathrm{ctg}\,\alpha)$ имеет корень в этом промежутке. Вычисляя $\mathrm{ctg}\,\alpha_j$ по обычной тригонометрической формуле, получим

$$\mathrm{ctg}\,\alpha_1 = \frac{\mathrm{ctg}\frac{(t+1/2)\pi}{k+2} - \mathrm{tg}\frac{h}{k+2}}{1 + \mathrm{ctg}\frac{(t+1/2)\pi}{k+2}\,\mathrm{tg}\frac{d}{k+2}}; \quad \mathrm{ctg}\,\alpha_2 = \frac{\mathrm{ctg}\frac{(t+1/2)\pi}{k+2} + \mathrm{tg}\frac{h}{k+2}}{1 - \mathrm{ctg}\frac{(t+1/2)\pi}{k+2}\,\mathrm{tg}\frac{h}{k+2}}.$$

Обозначим:

$$\operatorname{ctg}\frac{(t+1/2)\,\pi}{k+2}=q_t^{\mathrm{I}(k)};\ \operatorname{tg}\frac{h}{k+2}=g.$$

В этих обозначениях

$$\operatorname{ctg}\alpha_1=q_t^{\mathrm{I}(k)}-g\,\frac{1+q_t^{\mathrm{I}(k)2}}{1+gq_t^{\mathrm{I}(k)}};\ \operatorname{ctg}\alpha_2=q_t^{\mathrm{I}(k)}+g\,\frac{1+q_t^{\mathrm{I}(k)2}}{1-gq_t^{\mathrm{I}(k)}}.$$

В промежутке между $\operatorname{ctg}\alpha_1$ и $\operatorname{ctg}\alpha_2$ функция $\Re\{\widetilde{S}_k(\operatorname{ctg}\alpha)\}$ будет иметь по крайней мере один корень. Обозначим этот промежуток:

$$\Delta_t^{\mathrm{I}(k)}=\left\{q:-g\,\frac{1+q^{\mathrm{I}(k)^2}}{1+gq_t^{\mathrm{I}(k)}}<q-q_t^{\mathrm{I}(k)}<g\,\frac{1+q_t^{\mathrm{I}(k)^2}}{1-gq_t^{\mathrm{I}(k)}}\right\}. \tag{33}$$

Будем по-прежнему называть продуктивным промежуток, в котором есть хотя бы один корень $\Re\,\{\widetilde{S}_k(q)\}$. Нами доказано, что $\Delta_t^{\mathrm{I}(k)}$ при соблюдении (31) и (32) будет продуктивным.

6. Оценка ζ. Введем вместо q еще одно новое переменное $\varkappa$ изменением масштаба

$$q=\varkappa\sqrt{k+2},\quad \varkappa=\frac{1}{\sqrt{k+2}}q$$

и будем предполагать, что $\varkappa$ заключено в некоторых конечных пределах, которые будут уточнены в дальнейшем. Члены ряда (29) зависят от дискретного переменного k. Покажем, что при любом фиксированном $\varkappa$ ряд этот сходится абсолютно и равномерно по отношению к k.

Вычислим абсолютную величину членов ряда (29) и построим для него естественный мажорантный ряд:

$$\sum_{\beta=1}^{\infty}\left(\frac{1+iq}{2\beta+1+iq}\right)^{k+2}\ll\sum_{\beta=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^2}{(2\beta+1)^2+q^2}\right)^{\frac{k+2}{2}}. \tag{34}$$

В переменной $\varkappa$ будем иметь

$$\sum_{\beta=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^2}{(2\beta+1)^2+q^2}\right)^{\frac{k+2}{2}}=\sum_{\beta=1}^{\infty}\left(\frac{1+\varkappa^2(k+2)}{(2\beta+1)^2+\varkappa^2(k+2)}\right)^{\frac{k+2}{2}}. \tag{35}$$

При возрастании k члены мажорантного ряда (35) имеют предел

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1+\varkappa^2(k+2)}{(2\beta+1)^2+\varkappa^2(k+2)}\right)^{\frac{k+2}{2}}=\lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\varkappa^2(k+2)}\right)^{k+2}:\right.$$

$$\left.:\left(1+\frac{(2\beta+1)^2}{\varkappa^2(k+2)}\right)^{k+2}\right]^{1/2}=e^{1/2\left(\frac{1}{\varkappa^2}-\frac{(2\beta+1)^2}{\varkappa^2}\right)}=e^{-\frac{2\beta(\beta+1)}{\varkappa^2}}.$$

Предельный ряд с положительными членами

$$\sum_{\beta=1}^{\infty}e^{-\frac{2\beta(\beta+1)}{\varkappa^2}}=\xi(\varkappa) \tag{36}$$

сходится. Сумма его непосредственно выражается через функцию ϑ_1-Якоби $\xi(\varkappa) = \frac{1}{2\mu^{1/4}}\vartheta_1(0, \tau)$, $\mu = e^{-2/\varkappa^2}$ с отношением периодов $\tau = 2i/\pi\varkappa^2$.

Покажем теперь, что мажорантный ряд (34) равномерно сходится по отношению к k. Отсюда будет следовать абсолютная и равномерная сходимость ряда (29), а значит, и то, что в этом ряде можно перейти к пределу при $k \to \infty$.

Вначале сделаем одно, почти очевидное замечание по поводу равномерно сходящихся рядов.

Замечание. Пусть некоторый ряд

$$\sum_{\beta=1}^{\infty} u_\beta(k), \tag{37}$$

члены которого зависят от натурального переменного k, сходится при всех значениях k. Кроме того, в соответствие любому $\varepsilon > 0$ можно привести такую пару чисел $\beta(\varepsilon)$ и $k(\varepsilon)$, что при $\beta_1 > \beta(\varepsilon)$ и $k > k(\varepsilon)$

$$\left|\sum_{\beta=\beta_1}^{\infty} u_\beta(k)\right| < \varepsilon.$$

Тогда ряд (37) сходится равномерно по отношению к k. Воспользуемся этим замечанием. Найдем число B так, чтобы B-й член предельного ряда (36) имел оценку

$$e^{-\frac{2B(B+1)}{\varkappa^2}} < \frac{\varepsilon}{3}$$

и для отношения этого члена к предыдущему соблюдалось неравенство

$$e^{-\frac{2B(B+1)}{\varkappa^2}} : e^{-\frac{2(B-1)B}{\varkappa^2}} = e^{-\frac{4B}{\varkappa^2}} < \frac{1}{3},$$

и рассмотрим остаток ряда (35)

$$R_B = \sum_{\beta=B}^{\infty} \left(\frac{1+\varkappa^2(k+2)}{(2\beta+1)^2+\varkappa^2(k+2)}\right)^{\frac{k+2}{2}}.$$

Покажем, что при достаточно большом k, этот остаток будет меньше ε. Прежде всего подчиним k требованию, согласно которому член с номером B и отношение этого члена к предыдущему должны быть соответственно меньше $\varepsilon/3$ и $1/3$:

$$\left(\frac{1+\varkappa^2(k+2)}{(2B+1)^2+\varkappa^2(k+2)}\right)^{\frac{k+2}{2}} < \frac{\varepsilon}{3} \quad k > k_1(\varepsilon); \tag{38}$$

$$\left(\frac{(2B-1)^2+\varkappa^2(k+2)}{(2B+1)^2+\varkappa^2(k+2)}\right)^{\frac{k+2}{2}} < \frac{1}{3} \quad k > k_2(\varepsilon). \tag{39}$$

Разобьем R_B на два слагаемых

$$R_B = \sum_{\beta=B}^{\infty}(\cdot) = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2; \ \sum\nolimits_1 = \sum_{\beta=B}^{N-1}(\cdot); \ \sum\nolimits_2 = \sum_{\beta=N}^{\infty}(\cdot),$$

где

$$N - 1 \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{1 + \varkappa^2(k+2)} < N$$

(обозначение $(\cdot)$ понятно без уточнения).

Оба слагаемых $\sum_1$ и $\sum_2$ оценим порознь.

7. Оценка $\sum_1$. Докажем, что слагаемые, входящие в $\sum_1$, убывают с увеличением β быстрее, чем геометрическая прогрессия со знаменателем 1/3. Для этого рассмотрим функцию

$$\frac{(2z-1)^2 + \varkappa^2(k+2)}{(2z+1)^2 + \varkappa^2(k+2)} = 1 - \frac{8z}{(2z+1)^2 + \varkappa^2(k+2)} = r(z).$$

Эта функция в степени $\frac{k+2}{2}$ выражает отношение члена ряда (35) с номером $\beta = z$ к предыдущему. Имеем

$$\frac{d}{dz}\frac{z}{(2z+1)^2 + \varkappa^2(k+2)} = \frac{-4z^2 + \varkappa^2(k+2) + 1}{[(2z+1)^2 + \varkappa^2(k+2)]^2}.$$

Из этой формулы видно, что положительная функция $r(z)$, равная единице при $z = 0$ и при $z = \pm\infty$, имеет один максимум при $z = -\frac{1}{2}\sqrt{1 + \varkappa^2(k+2)}$ и один минимум при $z = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \varkappa^2(k+2)}$. Поскольку $N - 1$ не больше этого минимума и в силу (39), отношение каждого члена суммы $\sum_1$ к предыдущему только убывает, значит, оно меньше 1/3 для всех ее членов. Из (38) следует, что первый член $\sum_1$ не больше $\varepsilon/3$. В силу сказанного выше сумма всех слагаемых в $\sum_1$ оценивается:

$$\sum\nolimits_1 \leqslant \varepsilon/3 \, \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{40}$$

8. Оценка $\sum_2$. Члены ряда $\sum_2$ суть значения в целых точках монотонно убывающей функции переменного z:

$$\left(\frac{1 + \varkappa^2(k+2)}{(2z+1)^2 + \varkappa^2(k+2)}\right)^{\frac{k+2}{2}}.$$

Поэтому сумма этого ряда не превосходит интеграла от этой функции:

$$\sum_{\beta=N}^{\infty}\left(\frac{1 + \varkappa^2(k+2)}{(2\beta+1)^2 + \varkappa^2(k+2)}\right)^{\frac{k+2}{2}} < \int_{N-1}^{\infty}\left(\frac{1 + \varkappa^2(k+2)}{(2z+1)^2 + \varkappa^2(k+2)}\right)^{\frac{k+2}{2}} dz. \tag{41}$$

Заменяя в интеграле переменное интегрирования $(2z+1)^2 = u$; $dz = du/4\sqrt{u}$, получим

$$\Sigma_2 < \int\limits_{(2N-1)^2}^{\infty} \left(\frac{1+\varkappa^2(k+2)}{u+\varkappa^2(k+2)}\right)^{\frac{k+2}{2}} \frac{du}{4\sqrt{u}} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{(2N-1)^2}^{\infty} \left(\frac{1+\varkappa^2(k+2)}{u+\varkappa^2(k+2)}\right)^{\frac{k+2}{2}} \frac{du}{4(2N-1)},$$

$$\Sigma_2 < \frac{1}{2(2N-1)} \left(\frac{1+\varkappa^2(k+2)}{(2N-1)^2+\varkappa^2(k+2)}\right)^{\frac{k}{2}} \frac{1+\varkappa^2(k+2)}{k}.$$

Первый множитель в этом выражении стремится к нулю как $1/\sqrt{k}$. Во втором дробь в скобке меньше единицы, равно как и ее положительная степень. Третий множитель, очевидно, ограничен. Отсюда следует, что при $k > k_3(\varepsilon)$ будем иметь

$$\Sigma_2 < \frac{\varepsilon}{2} \tag{42}$$

и окончательно из (40) и (42) $R_B < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Согласно замечанию, это доказывает равномерную сходимость ряда (29) и, значит, мы можем перейти в нем к пределу при $k \to \infty$. Иными словами,

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} \left(\frac{1+\varkappa^2(k+2)}{(2\beta+1)^2+\varkappa^2(k+2)}\right)^{\frac{k+2}{2}} = \sum_{\beta=1}^{\infty} e^{-\frac{2\beta(\beta+1)}{\varkappa^2}} = \xi(\varkappa).$$

9. Оценка погрешности формулы (3). Функция $\xi(\varkappa)$ при $\varkappa = \varkappa_{\max}$ обращается в единицу $\xi(\varkappa_{\max}) = 1$. Подсчет дает для $\varkappa_{\max}$ величину

$$\varkappa_{\max} = 3{,}0215. \tag{43}$$

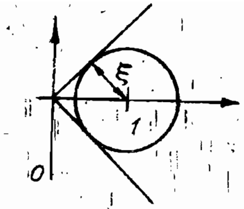
Приведем значения этой функции и функции $\varkappa^2\xi(\varkappa)$:

$\varkappa$	$e^{-4/\varkappa^2}$	$\xi(\varkappa)$	$\varkappa^2\xi(\varkappa)$	$\varkappa$	$e^{-4/\varkappa^2}$	$\xi(\varkappa)$	$\varkappa^2\xi(\varkappa)$
0,65	0,00008	0,00008	0,000032	2,0	0,3679	0,4204	1,6806
0,7	0,00030	0,00030	0,000137	3,00	0,6412	0,9874	8,8866
1,0	0,0183	0,0183	0,0183	3,0215	0,6452	1,00000	9,1295

Для всех значений $\varkappa < \varkappa_{\max}$ величина ζ принадлежит кругу радиуса $\xi(x)$ с центром в единице. Геометрически (см. рисунок) легко убедиться, что

$$\arg\zeta < \arcsin\xi(\varkappa) < \frac{\pi}{2}; \quad |\zeta| > 0. \tag{44}$$

Проверим продуктивность (33). Для этого выразим q через новую переменную y: $q = \operatorname{ctg}\frac{\pi y}{k+2}$ и $\varkappa = \frac{q}{\sqrt{k+2}} = \frac{1}{\sqrt{k+2}}\operatorname{ctg}\frac{\pi y}{k+2}$.



Производная от $\varkappa$ по y будет иметь вид

$$\frac{d\varkappa}{dy}=\frac{\pi}{\sqrt{k+2}}\left(\varkappa^2+\frac{1}{k+2}\right).$$

Функция $\varkappa$ при достаточно большом k будет меняться сколь угодно медленно и поэтому, если (44) выполнено при $y=(t+1/2)\pi$, то оно будет выполняться и для $y=t+l$, $l=-L, -L+1, \ldots, L$ $(L=O(\sqrt{k+2}))$. Таким образом, (32) будет верно и, значит, промежутки $\Delta_t^{\mathrm{I}(k)}$ будут продуктивными при $h=\arcsin\xi$, $g=\operatorname{tg}\frac{\arcsin\xi}{k+2}$.

Оценим еще величину этих промежутков. Для этого заметим, что $q_t^{\mathrm{I}(k)2}=\varkappa^2(k+2)\left(1+O\left(k^{-1}\right)\right)$; $g=\xi(\varkappa)(k+2)^{-1}$. Следовательно, с точностью до малых величин порядка k^{-1} $\Delta_t^{\mathrm{I}(k)}$ можно записать в виде

$$\left|q-q_t^{\mathrm{I}(k)}\right|<\varkappa^2\xi(\varkappa). \tag{45}$$

Для разности $q_{t-1}^{\mathrm{I}(k)}-q_t^{\mathrm{I}(k)}$ — исходных точек двух соседних продуктивных промежутков получим

$$q_{t-1}^{\mathrm{I}(k)}-q_t^{\mathrm{I}(k)}=\operatorname{ctg}\frac{(t+1/2)\pi}{k-2}-\operatorname{ctg}\frac{(t-1/2)\pi}{k-2}=$$

$$=\sin\frac{\pi}{k+2}\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\frac{(t+1/2)\pi}{k+2}}\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\frac{(t-1/2)\pi}{k+2}}=$$

$$=\pi\varkappa_t^{(k)}\varkappa_{t-1}^{(k)}\left(1+O\left(k^{-1}\right)\right). \tag{46}$$

Из (45) и (46) вытекает, что соседние продуктивные промежутки не пересекаются.

10. Оценка длины продуктивных промежутков при $q=o(k^{1/2})$. Пусть $\tau(k)$ — произвольная положительная функция, монотонно стремящаяся к нулю при $k\to\infty$. Положим

$$q=\sigma\sqrt{(k+2)\tau(k)} \quad \text{или} \quad \sigma=\frac{q}{\sqrt{(k+2)\tau(k)}} \tag{47}$$

и будем рассматривать ограниченные значения новой переменной σ. Подставим выражение (47) для q в ряд (34) и оценим сумму этого ряда. Вначале рассмотрим сумму всех членов, начиная со второго. Пользуясь тем же приемом, которым мы оценивали $\sum_2$, получим

$$\sum_{\beta=2}^{\infty}\left(\frac{1+(k+2)\sigma^2\tau(k)}{(2\beta+1)^2+(k+2)\sigma^2\tau(k)}\right)^{\frac{k+2}{2}}<$$

$$<\int_1^{\infty}\left(\frac{1+(k+2)\sigma^2\tau(k)}{(2z+1)^2+(k+2)\sigma^2\tau(k)}\right)^{\frac{k+2}{2}}dz\leqslant\frac{[1+(k+2)\sigma^2\tau(k)]^{k/2+1}}{4}\times$$

$$\times\int_9^\infty \frac{d\tau}{[u+(k+2)\,\sigma^2\tau(k)]^{k/2+1}} \leqslant \left(\frac{1+(k+2)\,\sigma^2\tau(k)}{9+(k+2)\,\sigma^2\tau(k)}\right)^{k/2+1}\times$$

$$\times\frac{9+(k+2)\,\sigma^2\tau(k)}{4k}=\left(\frac{1+q^2}{9+q^2}\right)^{k/2+1}\frac{9+(k+2)\,\sigma^2\tau(k)}{4k}.$$

Отношение всей суммы к первому члену не превосходит $\frac{9+(k+2)\,\sigma^2\tau(k)}{4k}$. Очевидно, что при $k\to\infty$ эта величина стремится к нулю как $\frac{\sigma^2\tau(k)}{4}$ и, значит, суммой всех членов, кроме первого, в ряде (34) можно пренебречь. Таким образом,

$$\xi(\sigma)\cong\left(\frac{1+(k+2)\,\sigma^2\tau(k)}{9+(k+2)\,\sigma^2\tau(k)}\right)^{\frac{k+2}{2}}=$$

$$=\left[\left(1-\frac{8}{9+(k+2)\,\sigma^2\tau(k)}\right)^{9+(k+2)\sigma^2\tau(k)}\right]^{\frac{k+2}{2(9+(k+2)\sigma^2\tau(k))}}.$$

Квадратная скобка, возрастая, стремится к e^{-8} и, следовательно,

$$\xi(\sigma)<e^{-\frac{4(k+2)}{9+(k+2)\sigma^2\tau(k)}}. \tag{48}$$

Как и при рассмотрении формулы (5), будем различать два случая:

$$(k+2)\tau(k)\to\infty \tag{49}$$

и

$$(k+2)\tau(k)<M. \tag{50}$$

В случае (49) из (48) имеем $\xi(\sigma)<e^{-\frac{4}{\sigma^2\tau(k)}}$. Легко проверить, что производная

$$\frac{d\sigma}{dy}=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{(k+2)\,\tau(k)}}\operatorname{ctg}\frac{\pi y}{k+2}\right)$$

будет сколь угодно мала при больших k. Отсюда следует, что промежутки (33) будут продуктивными при

$$g=\operatorname{tg}\frac{\arcsin\xi}{k+2}\cong\frac{1}{k+2}\,e^{-\frac{4}{\sigma^2\tau(k)}}.$$

Воспользовавшись (47), получим выражение для таких промежутков

$$\Delta_i^{\mathrm{I}(k)}=\left\{q:\left|q-q_i^{\mathrm{I}(k)}\right|<\sigma^2\tau(k)\,e^{-\frac{4}{\sigma^2\tau(k)}}\right\}.$$

Подсчет для расстояния между соседними $q_j^{\mathrm{I}(k)}$ дает в этом случае

$$q_{j-1}^{\mathrm{I}(k)}-q_j^{\mathrm{I}(k)}\leqslant\sigma^2\tau(k). \tag{51}$$

В случае (50) величина q будет ограниченной, и (48) дает

$$\xi(\sigma) \cong e^{-\frac{4(k+2)}{M\sigma^2+9}}.$$

Промежутки (33) будут продуктивными при

$$g \cong \frac{1}{k+2} e^{-\frac{4(k+2)}{M\sigma^2+9}}.$$

Пользуясь (47), получим для этих промежутков выражение

$$\Delta_t^{\mathrm{I}(k)} = \left\{ q : \left| q - q_t^{\mathrm{I}(k)} \right| < M\sigma^2 e^{-\frac{4(k+2)}{M\sigma^2+9}} \right\}.$$

Для разности двух соседних $q_j^{\mathrm{I}(k)}$ в этом случае сохраняется формула (51).

Таким образом, в обоих случаях длина промежутков оказывается малой по сравнению с расстоянием между ними.

Переменные $\varkappa'$ и $\varkappa$ в области, где они ограничены, отличаются на малую величину порядка k^{-1}. Это позволяет сопоставить формулы (3) и (5) там, где они имеют смысл, т. е. при $\varkappa'_{\min} = 0{,}3726 < \varkappa < 3{,}0215 = \varkappa_{\max}$. Сравним исходные точки продуктивных промежутков, даваемые формулами (3) и (5). Пользуясь тем, что в формуле (3) $q_j^{(k)} = O\left(k^{1/2}\right)$, имеем

$$q_j^{(k)} = \operatorname{ctg} \frac{(t+1/2)\pi}{k+2} = \frac{k+2}{\pi(t+1/2)} + O\left(k^{-1/2}\right). \tag{52}$$

По формуле (5) при $j = O(k^{1/2})$

$$q_j^{\mathrm{II}(k)} = \frac{k+1}{\pi} \ln \left(\frac{(j+1/2)+\frac{1}{2}}{(j+1/2)-\frac{1}{2}} \right) = \frac{k+1}{\pi(j+1/2)} + O\left(k^{-1/2}\right). \tag{53}$$

Из (52) и (53) вытекает, что промежутки $\Delta_t^{\mathrm{I}(k)}$ и $\Delta_j^{\mathrm{II}(k)}$ могут относиться к одному и тому же корню, т. е. частично перекрываться лишь в том случае, когда $j = t$. При этом разность исходных точек этих промежутков будет величиной порядка $O(k^{-1/2})$.

Подсчитаем теперь число различных (неперекрывающихся) продуктивных промежутков, даваемых обеими формулами. Число $N_{\mathrm{II}}(j_0)$ таких промежутков, определяемых формулой (5), для $j \leqslant j_0$ выражается $N_{\mathrm{II}}(j_0) = 2j_0$, поскольку каждому большому положительному $q_j^{\mathrm{II}(k)}$ отвечает равное ему по абсолютной величине отрицательное $q_{k+i-j}^{\mathrm{II}(k)}$ в силу (2).

Число $N_{\mathrm{I}}(j_0)$ продуктивных промежутков, даваемых формулой (3) для $t \geqslant j_0$ и $k+1-t \leqslant j_0$, будет равно числу точек вида $\operatorname{ctg} \frac{(t+1/2)\pi}{k+2}$, для которых

$$\left| \operatorname{ctg} \frac{(t+1/2)\pi}{k+2} \right| \leqslant \operatorname{ctg} \frac{(j_0+1/2)\pi}{k+2}$$

и, значит, $N_{\mathrm{I}}(j_0) = k - 2j_0 + 2$. Складывая результаты, получим $N_{\mathrm{I}}(j_0) + N_{\mathrm{II}}(j_0) = k + 2$. Принимая во внимание, что при таком подсчете точки промежутки $\Delta_{j_0}^{(k)}$ и $\Delta_{k+1-j_0}^{(k)}$ сосчитаны по 2 раза, получим, что число продуктивных промежутков в точности равно степени многочлена $E_k(\lambda)$.

Следствие. Каждый продуктивный промежуток $\Delta_i^{\mathrm{I}(k)}$ содержит ровно одно число $q_j^{(k)}$. (Для формулы (5) это следовало уже из ее вывода). Отсюда вытекает оценка приближенного значения корней $q_j^{(k)}$, даваемых первой формулой

$$\left| q_j^{(k)} - q_j^{\mathrm{I}(k)} \right| < g \frac{1 + q_j^{\mathrm{I}(k)2}}{1 - g q_j^{\mathrm{I}(k)}}, \text{ где } g = \operatorname{tg} \frac{\arcsin \xi}{k+2}.$$

Нетрудно проверить, что из наших рассмотрений следует справедливость условия (4) для пригодности формулы (3).

Вернемся опять к сопоставлению формул (3) и (5). В промежутке $\varkappa'_{\min} < \varkappa < \varkappa_{\max}$ по мере увеличения $\varkappa$ погрешность формулы (3) растет, а погрешность формулы (5) уменьшается. В точке, где оценки этих формул совпадают, как видно из приведенных таблиц, имеем $\varkappa = 0{,}66$. При таком $\varkappa$ погрешность обеих формул приблизительно равна

$$\left| q_j^{(k)} - q_j^{\mathrm{I}(k)} \right| \cong \left| q_j^{(k)} - q_j^{\mathrm{II}(k)} \right| \cong 0{,}0001.$$

В этой точке расстояние между двумя последовательными значениями $\pi\varkappa_j^{(k)}\varkappa_{j-1}^{(k)} \cong 1{,}48$.

Таким образом, погрешность $q_j^{(k)}$ оказывается более чем в 10^4 раз меньше расстояния между корнями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Frobenius. Sitzungberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1910, S. 809.
2. Соболев С. Л. О корнях многочленов Эйлера.— Докл. АН СССР, 1977, т. 235, № 2, с. 277—289.
3. Соболев С. Л. О крайних корнях многочленов Эйлера.— Докл. АН СССР, 1978, т. 242, № 5, с. 1016—1018.
4. Соболев С. Л. К асимптотике корней многочленов Эйлера.— Докл. АН СССР, 1979, т. 245, № 2, с. 304—308.
5. Соболев С. Л. Еще об асимптотике корней многочленов Эйлера.— Докл. АН СССР, 1979, т. 245, N 4, с. 801—804.
6. Соболев С. Л. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул.— Докл. АН СССР, 1977, т. 235, № 1, с. 34—35.
7. Сиражудинов С. Х. О предельном распределении корней многочленов Эйлера.— Докл. АН СССР, 1978, т. 239, № 1, с. 56—59.

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЕ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА $W_p^{(m)}$ ПРИ ЧЕТНОМ m

Ц. Б. ШОЙНЖУРОВ

(Улан-Удэ)

В данной работе продолжены исследования С. Л. Соболева [1] по теории кубатурных формул. Основным результатом теории Соболева является построение кубатурных формул с правильной решеткой узлов с регулярным пограничным слоем и доказательство их асимптотической оптимальности в $L_2^{(m)}$.

В работе В. И. Половинкина [2] показано, что при нечетном m кубатурные формулы с регулярным пограничным слоем асимптотически оптимальны в $L_p^{(m)}(\Omega)$.

В указанных работах функционал погрешности определялся над фактор-пространством $L_p^{(m)}$, что влекло за собой требование его ортогональности к многочленам степени ниже m.

Данное требование не является обязательным в пространстве $W_p^{(m)}$ с нормой, зависящей от младших производных. Поэтому мы построим кубатурные формулы с регулярным пограничным слоем над пространством $W_p^{(m)}$, но отличные от формул С. Л. Соболева.

Введем следующие обозначения: Ω — ограниченная область в E_n, $|\Omega| = \operatorname{mes}\Omega$, $\Gamma = \Gamma(\Omega)$ — граница области Ω, $\rho(x, \Gamma(\Omega))$ — расстояние между точкой x и границей $\Gamma(\Omega)$, $\mathscr{E}_\Omega(x)$ — характеристическая функция области Ω, H — квадратная матрица порядка $[n\times n]$, Ω_0 — фундаментальная область для матрицы периодов H, Δ — оператор Лапласа, $\delta(x)$ — δ-функция Дирака, B_0 — некоторое конечное множество n-мерных целочисленных векторов, $l(x) = \mathscr{E}_{\Omega_0}(x) - \sum\limits_{\gamma'\in B_0} C'_\gamma \delta(x - H\gamma')$ — локальный функционал погрешности, удовлетворяющий условиям:

а) $\| l(x)\|_{C^*} < A$; б) $\operatorname{supp} l(x) \subset \{x \in E_n : |x| < (2L+1)\}$,

где $\operatorname{supp} l(x)$ — носитель функционала $l(x)$, R — множество n-мерных целочисленных векторов в E_n, $\vec{a} = (a, a, \ldots, a)$, Ω_β — область, получаемая из Ω_0 переносом на вектор $H\beta$, $\Omega^*_\beta = \Omega_\beta \cap \Omega$, $hH\beta$ — координаты вершин некоторой решетки с матрицей периодов hH, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$,

$$\frac{|\Omega|}{N} = h^n, \quad B_1 = \{\gamma \in R : \rho(hH\gamma, \Gamma(\Omega)) < (2L+1)h \text{ и } hH\gamma \in \overline{\Omega}\},$$

$$B_2 = \{\gamma \in R : \rho(hH\gamma, \Gamma(\Omega)) > (2L+1)h \text{ и } hH\gamma \in \Omega\},$$

$$\mu_m(\xi) = \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}} \text{ и } \Lambda\left(\frac{x}{h}\right) = 1 + \sum_{\beta\neq 0} \frac{e^{2\pi i\beta^* h^{-1} H^{-1} x}}{\mu_m(h^{-1}H^{-1*}\beta)}.$$

Известно [3], что коэффициенты $\mathring{C}_p$ оптимального периодического функционала погрешности $\tilde{l}_0\left(\frac{x}{h}\right) = 1 - \sum_{\beta} h^n \mathring{C}_p \delta(x - hH\beta)$ над пространством периодических функций $\widetilde{W}_p^{(m)}(\Omega_0)$ с нормой

$$\|\varphi\|_{\widetilde{W}_p^{(m)}(\Omega_0)} = \left[\int_{\Omega_0} \left|(1-\Delta)^{\frac{m}{2}}\varphi(x)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

определяются из уравнений

$$\int_{\Omega_0} |1 - \mathring{C}_p \Lambda(x)|^{p'} dx = \int_{\Omega_0} |1 - \mathring{C}_p \Lambda(x)|^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sgn}[1 - \mathring{C}_p \Lambda(x)]\, dx \tag{2}$$

при $1 < p \leqslant \infty$.

Вычисление показывает, что в случае $p = 2$ и $p = \infty$

$$1 - \mathring{C}_2 = \frac{\sum\limits_{\beta \neq 0} \frac{1}{\mu_{2m}(h^{-1}H^{-1*}\beta)}}{1 + \sum\limits_{\beta \neq 0} \frac{1}{\mu_{2m}(h^{-1}H^{-1*}\beta)}} \quad \text{и} \quad 1 - \mathring{C}_\infty = \sum_{\beta \neq 0} \times$$

$$\times \frac{e^{2\pi i\left(\beta^*, H^{-1}\frac{\vec{1}}{4}\right)}}{\mu_m(h^{-1}H^{-1*}\beta)}(1 + O(h)). \tag{3}$$

Пусть m — четное число и $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Рассмотрим пространство $W_p^{(m)}(E_n)$ с нормой

$$\|\varphi\|_{W_p^{(m)}(E_n)} = \left[\int_{E_n} \left|(1-\Delta)^{\frac{m}{2}}\varphi(x)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\|\varphi\|_{W_\infty^{(m)}(E_n)} = \sup_{x \in E_n} \operatorname{vrai} \left|(1-\Delta)^{\frac{m}{2}}\varphi(x)\right|. \tag{4}$$

Пусть заданы числа $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| \leqslant m$, $a^\alpha = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2}, \ldots, a_n^{\alpha_n}$, а числа $c_\alpha = c_{\alpha_1} c_{\alpha_2} \ldots c_{\alpha_n}$ определяются из условия

$$\sum_{|\alpha| < m} c_\alpha a^\alpha = \left(1 - \sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{m}{2}}. \tag{5}$$

Определение. Пусть Ω — ограниченная область с кусочно-гладкой границей, $pm > n$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Функционал погрешности $l_\Omega^h(x)$ называется функционалом погрешности с регулярным пограничным слоем на решетках над пространством $W_p^{(m)}(E_n)$, если его можно представить в виде суммы

$$l_\Omega^h(x) = \sum_{\gamma \in B_1} l_\gamma\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right) + \sum_{\gamma \in B_2} l\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right),$$

где все функционалы $l_\gamma(x)$ и $l(x)$ удовлетворяют условиям а), б) и, кроме того, $\forall\gamma \in \beta_1(l_j(x), x^\alpha) = 0$, $|\alpha| < m$ и

$$(l(x), x^\alpha) = (1-\mathring{C}_\rho)C_\alpha h^{-|\alpha|}, \ |\alpha| \leqslant m. \tag{6}$$

Кубатурная формула с функционалом с регулярным пограничным слоем называется кубатурной формулой с регулярным пограничным слоем над $W_p^{(m)}(E_n)$.

Теорема 1. Пусть Ω—ограниченная область с кусочно-гладкой границей, $pm > n$ и $1 < p \leqslant \infty$. При $h \to 0$ функционал погрешности $l_\Omega^h(x)$ с регулярным пограничным слоем над пространством $W_p^{(m)}(E_n)$ асимптотически оптимален в $W_p^{(m)}(E_n)$ и

$$\| l_\Omega^h \|_{W_p^{(m)*}(E_n)} = |\Omega|^{\frac{p-1}{p}} \left\| \tilde{l}_0\left(\frac{x}{h}\right)\right\|_{\widetilde{W}_p^{(m)*}(\Omega_0)}(1+O(h)). \tag{7}$$

Доказательство. По неравенству Минковского имеем

$$\| l_\Omega^h \|_{W_p^{(m)*}} \leqslant \left[\int_{E_n} \left| G_m(x) * \sum_{\gamma\in B_1} G\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right)\right|^{p'} dx\right]^{\frac{1}{p'}} +$$

$$+\left[\int_{E_n} \left| G_m(x) * \sum_{\gamma\in B_2} l\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right)\right|^{p'} dx\right]^{\frac{1}{p'}} = I_1 + I_2, \tag{8}$$

где $G_m(x) = \int\limits_{E_n} \frac{e^{2\pi i \xi x}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}} d\xi.$

Первый интеграл оценен в работе [4] и

$$I_1 = O(h^{m+1}). \tag{9}$$

Учитывая $\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} c_\alpha G_m^{(\alpha)}(x-y) = (1-\Delta)^{\frac{m}{2}} G_m(x-y) = 0$ при $x-y \neq 0$, получим

$$I_2 = |\Omega|^{\frac{p-1}{p}} \left\| \tilde{l}_0\left(\frac{x}{h}\right)\right\|_{\widetilde{W}_p^{(m)*}(\Omega_0)}(1+O(h)). \tag{10}$$

Из (8) — (10) имеем

$$\| l_\Omega^h \|_{W_p^{(m)*}} \leqslant |\Omega|^{\frac{p-1}{p}} \left\| \tilde{l}_0\left(\frac{x}{h}\right)\right\|_{\widetilde{W}_p^{(m)*}(\Omega_0)}(1+O(h)). \tag{11}$$

Пусть $l_\Omega^N(x) = \mathscr{E}_\Omega(x) - \sum\limits_\beta h^n c_\beta \delta(x - hH_\beta)$ — какой-то функционал погрешности.

Норма этого функционала удовлетворяет неравенству [3]

$$\| l_\Omega^N \|_{W_p^{(m)*}} \geqslant |\Omega|^{\frac{p-1}{p}} \left\| \tilde{l}_0\left(\frac{x}{h}\right)\right\|_{\widetilde{W}_p^{(m)*}(\Omega_0)}(1+O(h)). \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует теорема.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М., Наука, 1974, 808 с.
2. Половинкин В. И. Последовательность функционалов с пограничным слоем.— Сиб. мат. журн., 1974, т. 15, № 2, с. 413—429.
3. Шойнжуров Ц. Б. Кубатурные формулы с узлами в криволинейной решетке.— В кн.: Труды семинара акад. С. Л. Соболева. Новосибирск, Наука, 1977, с. 157—164.
4. Шойнжуров Ц. Б. О приближенном интегрировании функций в пространстве $W_{p(\omega)}^{(m)}$ — В кн.: Применение функциональных методов к краевым задачам математической физики. Новосибирск, 1972, с. 256—265.

Часть 4

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ И НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Ю. Е. АНИКОНОВ

(*Новосибирск*)

Задачами интегральной геометрии принято называть задачи определения функции, если известны ее интегралы по заданным многообразиям [1]. Примером является хорошо известная задача Радона: найти функцию по ее интегралам по гиперплоскостям.

К настоящему времени имеется значительное количество работ, посвященных задачам интегральной геометрии и приложениям. В случае линейных и других простейших многообразий результаты в этой области связаны в основном с формулами обращения и применением этих формул в теории представлений групп [1]. Потребности теории многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений приводят к вопросам интегральной геометрии, когда многообразия, по которым производится интегрирование искомых функций, сложны по своей структуре [2, 3].

Новые задачи интегральной геометрии для сложных многообразий исследованы главным образом в направлении единственности и устойчивости их решения. Актуальным является вопрос разрешимости этих задач. В частности, как нам представляется, успешные расчеты связаны прежде всего с условием разрешимости. Здесь мы иллюстрируем общий подход к этой проблеме [3, 4].

С этой целью рассматривается фиксированная аналитическая метрика на плоскости (x, y):

$$ds^2 = B^2(x, y)(dx^2 + dy^2), \quad B > 0, \quad \frac{\partial B}{\partial y} < 0, \quad B(x, 0) = 1.$$

Уравнение геодезических γ имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = B\frac{\partial B}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = B\frac{\partial B}{\partial y}, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = B^2.$$

Обозначим через $\gamma(\xi, \varphi)$ часть геодезической, выходящей из точки $(\xi, 0)$ под углом φ и лежащей в полуплоскости $y \geqslant 0$.

Задача. Известна функция

$$u(\xi, \varphi) = \int\limits_{\gamma(\xi,\varphi)} \lambda(x, y)\sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad -\xi_0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0.$$

Требуется найти функцию $\lambda(x, y)$.

Помимо самостоятельного интереса эта задача важна тем, что к ней приводит метод возмущений обратной кинематической задачи [3].

Пусть $\eta = \eta(\xi, \varphi)$ — точка оси OX, соответствующая пересечению $\gamma(\xi, \varphi)$ с этой осью; $\Theta = \Theta(\xi, \varphi)$ — угол, образованный $\gamma(\xi, \varphi)$ с осью OX в точке $(\eta(\xi, \varphi), 0)$.

Обозначим через F множество всех вещественных аналитических функций $f(x, z)$, определенных в окрестностях точки $(0, 0)$. Зададим операторы Af и Df, $f \in F$. Положим

$$Af = \frac{1}{2}[f(\eta, \sin\Theta)(1 + \cos\Theta) - f(\eta, -\sin\Theta)(1 - \cos\Theta)] -$$

$$-\frac{1}{2}[f(\xi, \sin\varphi)(1 + \cos\varphi) - f(\xi, -\sin\varphi)(1 - \cos\varphi)].$$

Af — функция переменных ξ и φ, которая определяется f и известными кривыми $\gamma(\xi, \varphi)$.

Оператор Df определяется следующим образом. Рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial y} z + \frac{\partial v}{\partial x} + B\frac{\partial B}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial y} z + (B^2 - z^2)\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial B}{\partial x} u + B\frac{\partial B}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0; \qquad (1)$$

$$u(x, y, z) = u(x, y, -z), \quad v(x, y, z) = -v(x, y, -z);$$

$$u|_{y=0} = \frac{f(x, z) + f(x, -z)}{2}, \quad v|_{y=0} = \frac{f(x, z) - f(x, -z)}{2}, \quad f \in F.$$

Если эта задача имеет единственное решение $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, то

$$Df = \frac{1}{B}\left[\frac{\partial v}{\partial y} z + (B^2 - z^2)\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial B}{\partial x} u + B\frac{\partial B}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\right];$$

Df есть функция переменных (x, y).

Пусть R — множество функций $r(x, z)$, порождаемое первыми интегралами уравнений геодезических, а именно: если $\tilde{r}(x, y, x', y') = ux' + v$ и $\frac{d}{dt}[u(x, y, y')x' + v(x, y, y')] = 0$ вдоль γ, то $r(x, z) = \tilde{r}(x, 0, z, 1)$.

Обозначим, наконец, через F/R фактор-пространство: $f_1 \sim f_2$, если $f_1(x, z) - f_2(x, z) \in R$.

Теорема.

1. Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи интегральной геометрии в классе аналитических функций $\lambda(x, y)$ является представление $\omega(\xi, \varphi)$, $-\xi_0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$ в виде $\omega(\xi, \varphi) = Af$, при этом имеет место формула $\lambda(x, y) = Df$.

2. $Af_1 = Af_2$ тогда и только тогда, когда $f_1 \sim f_2$.

3. Если $\omega_1(\xi, \varphi) = \omega_2(\xi, \varphi)$ и $\lambda_i(x, y)$ — аналитические функции, то $\lambda_1(x, y) = \lambda_2(x, y)$.

Заметим, что если $f(x, z) = u_0(x) + v_0(x)z$, то решением (1) являются функции $u = \tilde{u}(x, y)$, $v = \tilde{v}(x, y)z$, где $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ удовлетворяют системе уравнений Коши — Римана

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$$

и данным $\tilde{u}|_{y=0} = u_0(x)$, $\tilde{v}|_{y=0} = v_0(x)$.
В этом случае искомая функция $\lambda(x, y)$ вычисляется по формуле

$$\lambda(x, y) = \tilde{u}\frac{\partial B}{\partial x} + \tilde{v}\frac{\partial B}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}\right)B.$$

Одномерным аналогом формулы

$$Af = \int\limits_{\gamma(\xi,\varphi)} Df\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

является формула Ньютона — Лейбница

$$\int\limits_{\xi}^{\eta} \lambda(t)\,dt = w(\xi, \eta), \quad w = Af = f(\eta) - f(\xi), \quad \lambda = Df = \frac{df}{dx}.$$

Другие задачи интегральной геометрии приводят к другим операторам Af и Df, но принцип их построения остается прежним.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.** Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М., Физматгиз, 1962.
2. **Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Васильев В. Г.** Многомерные и обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск, Наука, 1969.
3. **Аниконов Ю. Е.** Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. Новосибирск, Наука, 1978.
4. **Аниконов Ю. Е.** О разрешимости одной задачи интегральной геометрии.— Мат. сб., 1976, т. 101 (143), № 2 (10), с. 271—279.

ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ОТОБРАЖЕНИЯ, СОХРАНЯЮЩИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ

В. М. ГОЛЬДШТЕЙН

(Новосибирск)

Предлагается метод, позволяющий получить для плоских ограниченных односвязных областей необходимые и достаточные условия продолжения функций классов $W_2^1(G)$, $B_p^l(G)$, $lp = 2$, $l < 1$ на всю плоскость с сохранением класса. Во всех этих случаях необходимо и достаточно выполнение для границы условия Альфорса.

Жорданова кривая γ удовлетворяет условию Альфорса локально, если для любой точки $x_0 \in \gamma$ существует окрестность $V(x_0)$ такая, что любая тройка точек $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \subset \gamma \cap V(x_0)$ удовлетворяет неравенству $|\xi_1 - \xi_3| \leqslant C|\xi_1 - \xi_2|$. Здесь точка ξ_3 лежит между точками ξ_1, ξ_2 на дуге $\gamma \cap V(x_0)$, а постоянная C не зависит от выбора точек $x_0 \subset \gamma$ и $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \subset \gamma \cap V(x_0)$.

Условие Альфорса возникло при изучении вопроса о продолжении квазиконформного гомеоморфизма через границу области [1]. Класс областей, удовлетворяющих условию Альфорса, существенно шире класса Lip 1, для которого результат о продолжении для перечисленных выше пространств W_2^1, B_p^l известен[1].

Перейдем к точным формулировкам. Для суммируемых функций $f: G \to R$, $G \subset R^2$ рассмотрим разность

$$\Delta(t, G) f(x) = \begin{cases} f(x+t) - f(x) & \text{при } x, x+t \subset G; \\ 0 & \text{при } x, x+t \not\subset G. \end{cases}$$

Здесь t — вектор в R^2.

Если сумма

$$\|f\|_{B_p^l(G,h)} = \|f\|_{L_p(G)} + |||f|||_{l,p,h,G}, \tag{1}$$

где $|||f|||_{l,p,h,G} = \left(\int\limits_{|t|<h} \frac{\|\Delta(t, G) f(x)\|^p_{L_p(G)}}{\|t\|^{2+lp}} dt \right)^{1/p}$, ограничена, то функция f принадлежит пространству $B_p^l(G, h)$ и сумма (1) является нормой в этом пространстве [3]. Для областей с гладкой границей нормы $\|f\|_{B_p^l(G,h)}$, $\|f\|_{B_p^l(G,h_1)}$ эквивалентны при любых h, h_1 [3].

Условие продолжения. Область $G \subset R^2$, граница которой компактна, удовлетворяет условию продолжения для пространства $B_p^l(G)$, если существуют ограниченные операторы $\theta_0 : B_p^l(R^2 \setminus \overline{G}) \to B_p^l(R^2)$ и $\theta_1 : B_p^l(G) \to B_p^l(R^2)$.

---

[1] Мы не приводим истории вопроса о продолжении для этих функциональных классов, отсылая читателя к монографиям [2, 3] или работе [4].

Для пространства $W_2^1(G)$ в условии продолжения достаточно требовать существования только одного из операторов θ_0, θ_1.

Теорема 1. Для того чтобы ограниченная односвязная плоская область удовлетворяла условию продолжения для пространства $B_p^l(G, h)$, $lp = 2$, $l < 1(W_2^1(G))$, необходимо и достаточно, чтобы ее граница была жордановой кривой, удовлетворяющей условию Альфорса.

Замечание. Для пространства $W_2^1(G)$ результат получен в несколько более общей ситуации [5].

Доказательство необходимости основано на понятии емкости, аналогичном понятию конформной емкости, хорошо известной для пространства $W_2^1(G)$.

Определение емкости. Пару (F_0, F_1) замкнутых относительно области G множеств назовем допустимой, если F_0, F_1 связны и $\overline{F}_0 \cap \overline{F}_1 = \varnothing$. Функция u называется допустимой для пары (F_0, F_1) в пространстве $B_p^l(G, h)$, если $u \equiv 0$ на F_0, $u \equiv 1$ на F_1, u непрерывна, $u \in B_p^l(G, h)$. Емкостью $\mathrm{Cap}_p^l\,(F_0, F_1, G, h)$ пары (F_0, F_1) назовем число $\inf \|\|u\|\|_{l,\,p,\,G,\,h}$, где нижняя грань берется по всем допустимым функциям.

Лемма 1. Пусть $\{(F_0^m, F_1^m)\}$ — последовательность допустимых в области G пар, удовлетворяющих условиям $\operatorname{diam} F_i^m \geqslant a^2 > 0$; $\operatorname{dist}\left(F_0^m, F_1^m\right) \to 0$. Тогда $\mathrm{Cap}_p^l\left(F_0^m, F_1^m, G, h\right) \to \infty$ при $m \to \infty$.

Лемма 2. Пусть $r_0 < 1$, (F_0, F_1) — допустимая в R^2 пара компактов, соединяющих сферы $s(0, r_0)$, $s(0, 2r_0)$. Тогда $\mathrm{Cap}_p^l(F_0, F_1, R^2, h) \geqslant \alpha^2\,(h, l, p)$.

При доказательстве необходимости условий теоремы из леммы 1 получаем локальную односвязность области в любой граничной точке. Затем, используя емкостную метрику [7], можно показать, что граница области будет жордановой кривой. Из леммы 2 получаем выполнение условия Альфорса.

Для пространства W_2^1 используется конформная емкость.

Достаточность. Если область G удовлетворяет условию Альфорса, то для некоторой окрестности $V(\partial G)$ границы ∂G существует квазиизометрия $\varphi : V(\partial G) \cap \overline{G} \to V(\partial G) \cap \left(R^2 \setminus \overline{G}\right)$ [1], при помощи которой осуществляется продолжение для пространств B_p^l.

Этот метод непригоден для пространства $W_2^1(G)$, так как не удается проверить существование обобщенных производных у продолженной функции. В этом случае продолжение следует из диаграммы

$$\begin{array}{ccc} W_2^1(G) & \xrightarrow{\varphi^*} & W_2^1(R_+^2) \\ {\scriptstyle \psi^*\circ\theta\circ\varphi^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta} \\ W_1^2(R^2) & \xleftarrow{\psi^*} & W_2^1(R^2) \end{array}$$

Здесь R^2_+ — верхняя полуплоскость; φ^* — оператор, индуцированный конформным гомеоморфизмом $\varphi: R^2_+ \to G$ по правилу $\varphi^* u = u \circ \varphi$. Квазиконформный гомеоморфизм $\varphi: R^2 \to R^2$, продолжающий φ^{-1}, существует (так как область удовлетворяет условию Альфорса [1,8]) и индуцирует ограниченный оператор ψ^*; θ — оператор продолжения. Подробное доказательство приведено в [6].

Следствие. Если область удовлетворяет условию Альфорса, то пространства $B^l_p(G, h)$ совпадают при любых h, нормы $\|\cdot\|_{B^l_p(G,h)}$ эквивалентны, существует оператор продолжения $\theta: B^l_p(G) \to B^l_p(R^2)$, ограниченный для любой пары норм $\|\cdot\|_{B^l_p(G,h)}$, $\|\cdot\|_{B^l_p(R^2,h)}$.

В качестве следствия теоремы 1 сформулируем теорему о замене переменной, прямое доказательство которой удалось осуществить только для случая $G = G^1 = R^2$ [9].

Теорема 2. Пусть G, G^1 — две ограниченные односвязные области, удовлетворяющие условию Альфорса. Тогда любой квазиконформный гомеоморфизм $\varphi: G \to G^1$ индуцирует ограниченный оператор $\varphi^*: B^{2/3}_3(G^1) \to B^{2/3}_3(G)$ по правилу $\varphi^* u = u \circ \varphi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. М., Мир, 1969.
2. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., Наука, 1969.
3. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., Наука, 1975.
4. Буренков В. И. Об одном способе продолжения дифференцируемых функций.— Труды мат. ин-та АН СССР, 1976, т. 140, с. 27—67.
5. Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г. О геометрических свойствах функций с первыми обобщенными производными.— Успехи мат. наук, 1979, т. 34, вып. 1, с. 17—65.
6. Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М. Квазиконформные отображения и пространства функций с первыми обобщенными производными.— Сиб. мат. журн., 1976, т. 17, № 3, с. 515—531.
7. Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М. Метрическое пополнение области при помощи конформной емкости, инвариантное при квазиконформных отображениях.— Докл. АН СССР, 1978, т. 238, № 5, с. 1040—1042.
8. Rickman S. Characterisation of quasiconformal arcs.— Ann. Acad. Sci. Fenn. AI. 1966, N 395, p. 1—15.
9. Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М. Новый функциональный инвариант для квазиконформных отображений.— В кн.: Некоторые вопросы современной теории функций. (Матер. конф. по современным вопросам геометрической теории функций). Новосибирск, 1976.

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ В МЕТРИКЕ L_p

Н. П. КОРНЕЙЧУК

(*Киев*)

1. Пусть X — функциональное пространство $C = C[0, 1]$ или $L_p = L_p(0,1) (1 \leqslant p < \infty)$ и информация о функции f из X задается вектором $T(f, \Lambda_N) = \{\lambda_1(f), \ldots, \lambda_N(f)\}$, где $\Lambda_N = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$ — набор заданных на X функционалов. Задачу восстановления функции f по информации $T(f, \Lambda_N)$ естественно решать, сопоставляя ее с функцией

$$g(f, (\Lambda_N, \Phi_N), t) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k(f) \varphi_k(t), \tag{1}$$

где $\Phi_N = \{\varphi_k(t)\}_1^N$ — некоторая система линейно-независимых функций. Набор функционалов Λ_N и система функций Φ_N определяют метод восстановления (Λ_N, Φ_N), число N будем называть размерностью метода.

Говорить об оценке погрешности восстановления можно, если считать, что f удовлетворяет определенным условиям (например, связанным с гладкостью), обеспечивающим ограниченность множества функций с одним и тем же вектором информации $T(f, \Lambda_N)$. Если $\mathfrak{M}$ — класс функций, определяемый такими условиями, и другой информации о функции f, кроме $T(f, \Lambda_N)$ и включения $f \in \mathfrak{M}$, нет, то о погрешности восстановления функции f методом (Λ_N, Φ_N) в метрике X можно только сказать, что она не превосходит величины

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}, (\Lambda_N, \Phi_N))_X = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \| f - g(f, (\Lambda_N, \Phi_N)) \|_X. \tag{2}$$

Теперь возникают задачи минимизации верхней грани (2) сразу по Λ_N и Φ_N (N фиксировано), по Φ_N (при фиксированном Λ_N) или по Λ_N (при фиксированной системе Φ_N) и отыскания методов восстановления, реализующих эти минимумы. Заметим, что если ограничиться только линейными функционалами $\lambda_k (k = 1, \ldots, N)$, то минимизация $\mathscr{E}(\mathfrak{M}, (\Lambda_N, \Phi_N))$ по Λ_N есть хорошо известная в теории аппроксимации задача отыскания наилучшего линейного метода приближения функций класса $\mathfrak{M}$ фиксированным подпространством размерности N.

Если $E(f, F_N)_X$ — наилучшее приближение функции $f \in X$ подпространством F_N (размерности N) в метрике X, а

$$d_N(\mathfrak{M}, X) = \inf_{F_N} \sup_{f \in \mathfrak{M}} E(f, F_N)_X$$

— N-мерный поперечник (по Колмогорову) класса $\mathfrak{M}$ в пространстве X, то, очевидно, всегда

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}, (\Lambda_N, \Phi_N))_X \geqslant d_N(\mathfrak{M}, X). \tag{3}$$

Метод (Λ_N, Φ_N), для которого в (3) имеет место знак равенства, заведомо является оптимальным (наилучшим) методом восстановления функций класса $\mathfrak{M}$ в пространстве X.

В случае, когда f' и φ_k' принадлежат некоторому функциональному пространству Y, можно говорить о восстановлении по информации $T(f, \Lambda_N)$ не только самой функции f, но и ее производной. За меру погрешности одновременного восстановления f и f' естественно взять величину $\|f - g(f,(\Lambda_N, \Phi_N))\|_X/d_N(\mathfrak{M}, X) + \|f' - g'(f,(\Lambda_N, \Phi_N))\|_Y/d_N(\mathfrak{M}', Y)$, где $\mathfrak{M}'$ — класс, образованный производными функций f из $\mathfrak{M}$.

2. Наши конкретные результаты по оптимальному восстановлению будут касаться классов, задаваемых с помощью мажоранты модуля непрерывности $\omega(f, \delta)$ функции $f \in C$.

Пусть H^ω — класс функций f из C таких, что $\omega(f, \delta) \leqslant \omega(\delta)$ $(0 \leqslant \delta \leqslant 1)$, где $\omega(\delta)$ — заданный модуль непрерывности, а W^1H^ω — класс функций $f \in C^1$, у которых $f' \in H^\omega$; H_*^ω и $W^1H_*^\omega$ — соответствующие классы функций периода 1. С модулем непрерывности $\omega(\delta)$ будем связывать функции $f_{m0}(t)$ и $f_{m1}(t)$ $(m = 1, 2, \ldots)$, определяемые равенствами

$$f_{m0}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega\left(\frac{1}{m} - 2t\right) & \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2m}\right), \\ -\frac{1}{2}\omega\left(2t - \frac{1}{m}\right) & \left(\frac{1}{2m} \leqslant t \leqslant \frac{1}{m}\right), \\ f_{m0}(t) = -f_{m0}\left(t - \frac{1}{m}\right) & \left(\frac{1}{m} \leqslant t \leqslant 1\right); \end{cases}$$

$$f_{m1}(t) = \int_0^t f_{m0}(u)\,du.$$

Если $\omega(\delta)$ — выпуклый вверх, то $f_{m0} \in H^\omega$, $f_{m1} \in W^1H^\omega$, и можно считать, что $f_{2n,0} \in H_*^\omega$, $f_{2n,1} \in W^1H_*^\omega$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Положив $t_k = k/m$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ и $\Delta_1 = [t_0, t_1]$, $\Delta_k = (t_{k-1}, t_k)$ $(k = 2, \ldots, m)$, введем в рассмотрение векторы информации $\{f(t_k)\}_0^m$ для $f \in C$, $\{\gamma_k(f)\}_1^m$, где $\gamma_k(f) = m\int_{\Delta_k} f(t)dt$, для $f \in L_1$ и соответственно два линейных метода восстановления:

$l_m(f, t)$ — ломаные с узлами t_k, интерполирующие функцию f в точках t_k;

$\psi_m(f, t)$ — кусочно-постоянные функции, равные $\gamma_k(f)$ на Δ_k.

Очевидно, что $l_m(f, t)$ и $\psi_m(f, t)$ представимы в форме (1), причем размерность первого метода равна $m + 1$, а второго — m. 1-периодические функции восстанавливаются ломаными $l_m(f, t)$ по информации $\{f(t_k)\}_1^m$, и в этом случае размерность метода равна m. Если f абсолютно непрерывна, то $l_m'(f, t) = \psi_m(f', t)$.

Т е о р е м а 1. Справедливы оценки

$$\|f-\psi_m(f)\|_{L_p}\leqslant\|f_{m0}\|_{L_p}=\frac{1}{2}\left[m\int\limits_0^{\frac{1}{m}}\omega^p(t)\,dt\right]^{\frac{1}{p}}(1\leqslant p\leqslant 2)\;\forall f\in H^\omega; \tag{4}$$

$$\|f-l_m(f)\|_{L_p}\leqslant\|f_{m1}\|_{L_p}\,(1\leqslant p<\infty)\quad \forall f\in W^1H^\omega, \tag{5}$$

которые в случае выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(\delta)$ неулучшаемы.

Доказательство теоремы 1 базируется на следующей лемме.

Л е м м а. Пусть $f\in C[a,\ b]$, $\int\limits_a^b f(t)\,dt=0$ и функция $f_0(t)$ определена равенствами

$$f_0(t)=\frac{1}{2}\omega\,(f,a+b-2t)\left(a\leqslant t\leqslant\frac{a+b}{2}\right),$$

$$f_0(t)=-f_0(a+b-t)\left(\frac{a+b}{2}\leqslant t\leqslant b\right).$$

Тогда

$$\int\limits_a^b|f(t)|^p dt\leqslant\int\limits_0^b|f_0(t)|^p dt=2^{-p}\int\limits_0^{b-a}\omega^p(f,t)\,dt\quad(1\leqslant p\leqslant 2);$$

$$\int\limits_a^b\left|\int\limits_a^t f(u)\,du\right|^p dt\leqslant\int\limits_a^b\left|\int\limits_a^t f_0(u)\,du\right|^p dt\quad(1\leqslant p<\infty).$$

Заметим, что оценка $\|f-l_m(f)\|_C\leqslant\|f_{m1}\|_C$ получена в [1].

Из (4) и результатов работы [2] следует, что при $1\leqslant p\leqslant 2$ линейный поперечник $d'_m\,(H^\omega,\ L_p)$ (для выпуклых $\omega(\delta)$) совпадает с $d_m(H^\omega,\ L_p)$ и равен правой части (4). С учетом (3) приходим к такому утверждению.

Т е о р е м а 2. Оптимальным методом восстановления функций класса $H^\omega(\omega(\delta)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности) в пространстве $L_p(1\leqslant p\leqslant 2)$ является линейный метод, доставляемый функциями $\psi_m\,(f,\ t)$. При этом

$$\inf_{(\Lambda_m,\Phi_m)}\sup_{f\in H^\omega}\|f-g\,(f,(\Lambda_m,\Phi_m))\|_{L_p}=\sup_{f\in H^\omega}\|f-\psi_m(f)\|_{L_p}=$$

$$=d_m\left(H^\omega,L_p\right)=\frac{1}{2}\left[m\int\limits_0^{\frac{1}{m}}\omega^p(t)\,dt\right]^{1/p}\quad(1\leqslant p\leqslant 2).$$

Использование соотношений (4) и (5), а также теоремы Борсука (см., например, [3]) позволило вычислить поперечники некоторых классов периодических функций в L_p, точное значение которых не было известно.

Теорема 3. Каков бы ни был выпуклый вверх модуль непрерывности $\omega(\delta)$, справедливы равенства

$$d_{2n}\left(H_*^\omega, L_p\right) = d'_{2n}\left(H_*^\omega, L_p\right) = \| f_{2n,0}\|_{L_p} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2n \int\limits_0^{\frac{1}{2n}} \omega^p(t)\,dt\right]^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leqslant p \leqslant 2);$$

$$d_{2n}\left(W^1H_*^\omega, L_p\right) = d'_{2n}\left(W^1H_*^\omega, L_p\right) = \| f_{2n,1}\|_{L_p} \quad (1 \leqslant p < \infty).$$

Из теорем 1 и 3 вытекает

Теорема 4. Среди всех методов $(\Lambda_{2n}, \Phi_{2n})$ оптимальным методом восстановления функций f из $W^1H_*^\omega(\omega(\delta)$ — выпуклый вверх) в метрике $L_p(1 \leqslant p < \infty)$ и одновременно их производных f' в метрике $L_p(1 \leqslant p \leqslant 2)$ является линейный метод, доставляемый ломаными $l_{2n}(f, t)$, интерполирующими f в узлах $k/2n(k = 1, \ldots, 2n)$. Погрешность восстановления ломаными $l_{2n}(f, t)$ функций $f \in W^1H_*^\omega$ и f' не превосходит соответственно $d_{2n}(W^1H_*^\omega, L_p)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ и $d_{2n}\left(H_*^\omega, L_p\right)$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$.

Этот результат означает также, что наилучшее совместное приближение в $L_p(1 \leqslant p \leqslant 2)$ функций $f \in W^1H_*^\omega$ и их производных подпространствами размерности $2n$ осуществляют интерполяционные ломаные $l_{2n}(f, t)$.

В непериодическом случае при условии выпуклости вверх $\omega(\delta)$ можно написать неравенства:

$$\| f_{m+1,1}\|_{L_p} \leqslant d_{m+1}\left(W^1H^\omega, L_p\right) \leqslant \sup_{f \in W^1H^\omega} \| f - l_m(f)\|_{L_p} \leqslant$$

$$\leqslant \| f_{m1}\|_{L_p} \quad (1 \leqslant p < \infty),$$

из которых следует асимптотическая (при $m \to \infty$) оптимальность метода $l_m(f, t)$. Производная функции $f \in W^1H_\omega$ при этом восстанавливается в метрике $L_p(1 \leqslant p \leqslant 2)$ с погрешностью, не превосходящей $d_m'(H^\omega, L_p)$.

3. Рассмотрим задачу оптимального восстановления функций $f \in C^r$ $(r = 0, 1;\ C^0 = C)$, взяв в качестве меры погрешности восстановления величину

$$\| f - g(f, (\Lambda_N, \Phi_N))\|_{L_p} / \omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{N}\right). \tag{6}$$

Оценки сверху дает

Теорема 5. Справедливы точные неравенства

$$\| f - \psi_m(f)\|_{L_p} \leqslant \frac{1}{2}\,\omega\left(f, \frac{1}{m}\right) \quad (1 \leqslant p \leqslant 2) \quad \forall f \in C; \tag{7}$$

$$\| f - l_m(f)\|_{L_p} \leqslant \frac{1}{4m}(p+1)^{-1/p}\omega\left(f', \frac{1}{m}\right) \quad (1 \leqslant p < \infty) \quad \forall f \in C^1. \tag{8}$$

С другой стороны, можно показать, что если F_N — произвольное подпространство размерности N, то

$$\sup_{f\in C}\frac{E(f, F_N)_{L_p}}{\omega\left(f, \frac{1}{N}\right)}\geqslant\frac{1}{2}\quad(1\leqslant p<\infty);\tag{9}$$

$$\sup_{f\in C^1}\frac{E(f, F_N)_{L_p}}{\omega\left(f', \frac{1}{N}\right)}\geqslant\frac{1}{4N}(p+1)^{-1/p}\quad(1\leqslant p<\infty).\tag{10}$$

Соотношения (7) — (10) приводят к утверждениям, сформулированным ниже в виде теорем 6 и 7.

Теорема 6. Для функций $f\in C$ оптимальным относительно взвешенной погрешности (6) при $1\leqslant p\leqslant 2$ методом восстановления является линейный метод, доставляемый функциями $\psi_m(f, t)$. При этом

$$\sup_{f\in C}\frac{\|f-\psi_m(f)\|_{L_p}}{\omega\left(f, \frac{1}{m}\right)}=\inf_{F_m}\sup_{f\in C}\frac{E(f, F_m)_{L_p}}{\omega\left(f, \frac{1}{m}\right)}=\frac{1}{2}\quad(1\leqslant p\leqslant 2).$$

Пусть C^1_* — множество 1-периодических функций из C^1.

Теорема 7. Среди всех методов $(\Lambda_{2n}, \Phi_{2n})$ $(n=1, 2, \ldots)$ оптимальным относительно погрешности (6) для функций $f\in C^1_*$ при $1\leqslant p<\infty$ и одновременно для их производных f' при $1\leqslant\leqslant p\leqslant 2$ является линейный метод интерполяционных ломаных $l_{2n}(f, t)$. При этом

$$\sup_{f\in C^1_*}\frac{\|f-l_{2n}(f)\|_{L_p}}{\omega\left(f', \frac{1}{2n}\right)}=\inf_{F_{2n}}\sup_{f\in C^1_*}\frac{E(f, F_{2n})_{L_p}}{\omega\left(f', \frac{1}{2n}\right)}=\frac{1}{8(p+1)^{1/p}n}\quad(1\leqslant p<\infty);$$

$$\sup_{f\in C^1_*}\frac{\|f'-l'_{2n}(f)\|_{L_p}}{\omega\left(f', \frac{1}{2n}\right)}=\inf_{F_{2n}}\sup_{f\in C^1_*}\frac{E(f', F_{2n})_{L_p}}{\omega\left(f', \frac{1}{2n}\right)}=\frac{1}{2}\quad(1\leqslant p\leqslant 2).$$

В непериодическом случае, учитывая, что размерность метода $l_m(f, t)$ равна $m+1$, получим при всех $m=1, 2, \ldots$

$$\frac{1}{4(p+1)^{1/p}(m+1)}\leqslant\inf_{(\Lambda_{m+1}, \Phi_{m+1})}\sup_{f\in C^1}\frac{E(f, F_{m+1})_{L_p}}{\omega\left(f', \frac{1}{m}\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{f\in C^1}\frac{\|f-l_m(f)\|_{L_p}}{\omega\left(f', \frac{1}{m}\right)}\leqslant\frac{1}{4(p+1)^{1/p}m}\quad(1\leqslant p<\infty);$$

$$\sup_{f\in C^1}\frac{\|f'-l'_m(f)\|_{L_p}}{\omega\left(f', \frac{1}{m}\right)}=\inf_{F_m}\sup_{f\in C^1}\frac{E(f', F_m)_{L_p}}{\omega\left(f', \frac{1}{m}\right)}=\frac{1}{2}\quad(1\leqslant p\leqslant 2).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Малоземов В. Н. Об отклонении ломаных.— Вестн. ЛГУ, 1966, № 7, с. 150—153.
2. Корнейчук Н. П. О поперечниках классов непрерывных функций в пространстве L_p.— Мат. заметки, 1971, т. 10, № 5, с. 493—500.
3. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М., Изд-во МГУ, 1976.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ

М. М. ЛАВРЕНТЬЕВ

(Новосибирск)

1. Широкий класс задач аналитического продолжения для функций одной переменной в общем виде может быть сформулирован следующим образом.

Известно, что существует функция комплексного переменного $f(z)$, аналитическая в области D комплексной плоскости. Относительно функции $f(z)$ может быть задана некоторая дополнительная информация. Например: $f(z)$ непрерывна на множестве $\overline{D}$ — замыкании D и ограничена на $\overline{D}$ заданной константой: $|f(z)| \leqslant C$, $z \in \overline{D}$.

Пусть далее A, B — подмножества $\overline{D}$; $A \subset B \subset \overline{D}$ и значения функции $f(z)$ известны на множестве A. Требуется определить значения функции $f(z)$ на множестве B.

2. Задачи аналитического продолжения являются классическими задачами теории аналитических функций и функций комплексного переменного. Некоторые теоремы единственности для этих задач получены в прошлом столетии и приводятся в большинстве учебников.

Если рассматривать функции, аналитические в D, без дополнительных ограничений, то задачи аналитического продолжения являются линейными, и, таким образом, единственность решения задачи аналитического продолжения эквивалентна справедливости следующего утверждения.

Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в области D, $f(z) = 0$, $z \in A$. Тогда $f(z) = 0$, $z \in B$.

Отметим, что в известных теоремах единственности задач аналитического продолжения множество B включает область аналитичности D: $B \supset D$.

3. Приведем классические результаты по единственности решения задач аналитического продолжения.

Т е о р е м а 1. Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в области D, D_1 — подобласть D. Тогда если $f(z) = 0$, $z \in D_1$, то $f(z) = 0$, $z \in D$.

Теорема 2. Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в области D, A — множество, имеющее предельную точку, принадлежащую D. Тогда если $f(z) = 0$, $z \in A$, то $f(z) = 0$, $z \in D$.

Теорема 3. Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в области D, Γ — граница D и Γ_1, $\Gamma_1 \subset \Gamma$ — спрямляемая кривая. Тогда если $f(z) = 0$, $z \in \Gamma_1$, то $f(z) = 0$, $z \in D$.

4. С аналитическим продолжением связано понятие риманова многообразия. Приведем в связи с этим некоторые определения.

Определение 1. Аналитическим элементом называется совокупность $\{D, f\}$ области D комплексной плоскости и функции $f(z)$, аналитической в D.

Определение 2. Два аналитических элемента $\{D_1, f_1\}$, $\{D_2, f_2\}$ называются непосредственным аналитическим продолжением друг друга через область $\widetilde{D}$, $\widetilde{D} \subset D_1 \cap D_2$, если $f_1(z) = f_2(z)$, $z \in \widetilde{D}$.

Определение 3. Аналитические элементы $\{D_0, f_0\}$ и $\{D_n, f_n\}$ называются аналитическим продолжением друг друга, если существуют такие аналитические элементы $\{D_k, f_k\}$ и области $\widetilde{D}_k$, $k = 1, \ldots, n-1$, что элементы $\{D_k, f_k\}$, $\{D_{k+1}, f_{k+1}\}$ являются непосредственными аналитическими продолжениями друг друга через $\widetilde{D}_k$.

Определение 4. Аналитической функцией называется совокупность аналитических элементов, которые являются аналитическими продолжениями какого-либо одного аналитического элемента. Функции $f_a(z)$, принадлежащие одной аналитической функции $\{a, f_a(z)\}$, называются ветвями этой функции.

Рассмотрим теперь совокупность пар $\{a, f_a(z)\}$, где a — точка комплексной плоскости, $f_a(z)$ — функция, аналитическая в некотором круге U_a с центром a, $f_a(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k$. На множестве пар $\{a, f_a(z)\}$ введем топологию: ε-окрестностью элемента $\{a, f_a(z)\}$ назовем совокупность элементов $\{b, f_b(z)\}$ таких, что:

1) $|a - b| < \varepsilon$;

2) аналитический элемент $\{U_b, f_b\}$ есть непосредственное аналитическое продолжение аналитического элемента $\{U_a, f_a\}$.

Можно показать, что топологическое пространство пар $\{a, f_a(z)\}$ является хаусдорфовым, т. е. его окрестности удовлетворяют аксиоме отделимости.

Определение 5. Хаусдорфово пространство пар $\{a, f_a(z)\}$, где a — точка комплексной плоскости, $f_a(z)$ — функция, аналитическая в круге U_a, и топология введена указанным выше способом, называется римановым многообразием.

Отображение (проекция) риманова многообразия на комплексную плоскость $\{a, f_a(z)\} \to a$ является локальным гомеоморфизмом, т. е. в некоторых окрестностях пары $\{a, f_a(z)\}$ и точки a это отображение взаимно-однозначно и непрерывно.

Между аналитическими функциями и областями риманова многообразия имеется взаимно-однозначное соответствие.

Определение 6. Область риманова многообразия, у которой все функции, принадлежащие ее точкам, являются ветвями некоторой аналитической функции, называется римановой поверхностью этой функции.

5. В связи с вышеизложенным возникают следующие постановки задач аналитического продолжения. Пусть A — подмножество римановой поверхности аналитической функции $f(z)$ и значения функции $f(z)$ известны на множестве A. Требуется определить:

1) значения функции $f(z)$ на некотором множестве $B \supset A$;

2) некоторые характеристики (например, топологические) римановой поверхности функции $f(z)$;

3) особые точки функции $f(z)$ и поведение функции в окрестности этих точек, в частности типы особых точек, поведение в окрестности особых точек римановой поверхности.

Имеет место следующая

Теорема 4. Пусть множество A содержит предельную точку внутри римановой поверхности аналитической функции $f(z)$. Тогда риманова поверхность функции $f(z)$ однозначно определяется значениями $f(z)$ на множестве A.

6. Сформулируем постановку задачи аналитического продолжения для функций нескольких переменных, аналогичную постановке, сформулированной в п. 1 для одной переменной.

Известно, что существует функция n комплексных переменных $f(z_1, \ldots, z_n)$, аналитическая в области D n-мерного комплексного пространства; A, B — подмножества замыкания D: $A \subset B \subset \bar{D}$. Значения функции $f(z_1, \ldots, z_n)$ известны на множестве A. Требуется определить значения $f(z_1, \ldots, z_n)$ на множестве B.

Вопросы аналитического продолжения для функций нескольких переменных начали разрабатываться примерно с начала нашего столетия. Аналитическое продолжение занимает значительное место в монографиях по теории аналитических функций нескольких переменных.

Приведем некоторые понятия и результаты, связанные с аналитическим продолжением функций нескольких переменных.

Пространство n комплексных переменных $(z_1, \ldots, z_n)$ будем обозначать символом C_n.

Определение 7. Область G, строго содержащая область $D \subset C^n$, называется голоморфным расширением D, если любая функция $f(z_1, \ldots, z_n)$, аналитическая в D, допускает аналитическое продолжение в область G.

Области в комплексной плоскости, как известно, не допускают голоморфного расширения. В пространствах двух и более комплексных переменных имеются области, допускающие голоморфное расширение. Существование одного класса подобных областей устанавливается следующей теоремой.

Теорема 5 (Хартогса). Пусть D — область C^n, D_1 — область комплексной плоскости, Γ_1—граница D_1, $\mathscr{M}$ — множество:

$$\mathscr{M} = [\overline{D} \times \Gamma_1] \cup [(z_1^0, \ldots, z_n^0) \times \overline{D}_1],$$

где $(z_1^0, \ldots, z_n^0) \in D$. Тогда любая функция $f(z_0, z_1, \ldots, z_n)$, аналитическая в некоторой окрестности множества $\mathscr{M}$ (в пространстве C^{n+1}), аналитически продолжается в область $\tilde{D} = D \times D_1$.

7. Решения некоторых задач аналитического продолжения непрерывно зависят от данных. Для одной переменной это случай, когда множество A совпадает с Г-границей области D. Для нескольких переменных это, например, аналитическое продолжение в голоморфное расширение, о котором говорится в теореме 5.

Для функций одной переменной задачи аналитического продолжения с множеств внутри области регулярности и с части границы области в классическом смысле некорректны, характер неустойчивости в этих задачах такой же, как и в некорректных задачах Коши для уравнений Лапласа и теплопроводности.

8. Как известно, решения некоторых дифференциальных уравнений внутри областей регулярности являются аналитическими функциями. В частности, указанным свойством обладают решения эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами. В связи с этим возникают задачи следующего типа, которые мы также относим к задачам аналитического продолжения.

Пусть L — дифференциальный оператор в пространстве, обладающий свойством: все решения уравнения

$$Lu = 0 \tag{1}$$

внутри области регулярности есть аналитические функции переменных $(x_1, \ldots, x_n)$.

Известно, что в области D существует регулярное решение уравнения (1) $u(x_1, \ldots, x_n)$. Относительно функции $u(x_1, \ldots, x_n)$ может быть задана дополнительная информация, например: $|u| \leqslant C$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \overline{D}$.

Пусть A, B — некоторые подмножества $\overline{D} : A \subset B \subset \overline{D}$.

Значения решения (1) известны на множестве A, требуется определить значения решения на множестве B.

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ЛОРАНА ОБОБЩЕННОЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ

А. Ф. ЛАВРИК

(Ташкент)

Обобщенная дзета-функция — функция комплексного переменного $s = \sigma + it$, определяемая для $0 < a \leqslant 1$ при $\sigma > 1$ в виде ряда Дирихле:

$$\zeta(s; a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + a)^{-s}.$$

Эта функция естественным образом возникает в теории L-функций Дирихле; в случае $a = 1$ она совпадает с дзета-функцией Римана.

Имея в виду приложения, мы рассматриваем равномерные оценки величин $\gamma_n(a)$, являющихся коэффициентами ряда Лорана для $\zeta(s; a)$ в окрестности ее полюса $s = 1$:

$$\zeta(s; a) = (s-1)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(a)(s-1)^n.$$

Полагая

$$\zeta(s; a) = a^{-s} + (s-1)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(a)(s-1)^n, \qquad (1)$$

получаем

$$\gamma_n(a) = \beta_n(a) + (-1)^n \frac{\log^n a}{n!}.$$

Поэтому достаточно выписать результаты лишь для $\beta_n(a)$.

Теорема 1. Для $n = 1, 2, \ldots$ коэффициенты $\beta_n(a)$ ряда (1) удовлетворяют неравенству

$$|\beta_n(a)| < 2^{-n},$$

а для $n = 0$ имеем

$$\beta_0(a) = \gamma - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{k(k+a)},$$

$$-\frac{\pi^2}{6} + \gamma < \beta_0(a) \leqslant -1 + \gamma,$$

где $\gamma = 0{,}577\ldots$ — постоянная Эйлера.

Теорема 2. Для $n = 0, 1, 2, \ldots$ имеем

$$\beta_n(a) = \frac{(-1)^n}{n!} \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log^n(m+a)}{m+a} - \frac{\log^{n+1} N}{n+1} \right).$$

В частности, если в теоремах 1 и 2 взять $a = 1$, будем иметь оценки величин γ_n, $\gamma_n = \gamma_n(1) = \beta_n(1)$, которые являются коэффициентами разложения Лорана в окрестности точки $s = 1$ ζ-функции Римана. Заметим, что в этом случае соотношение теоремы 2 указано Г. Харди [1] без множителя $\frac{(-1)^n}{n!}$ и вошло в ряд справочников (см. [2]). Эта неточность, по-видимому, впервые была исправлена С. Рамануджаном [3], на что обратил наше внимание в связи с [4] С. Б. Стечкин.

Доказательство теорем опирается на следующую формулу суммирования Эйлера. Если $\varphi(x)$ обладает непрерывной производной на интервале (b, c), то, полагая $\psi(x) = x - [x] - 1/2$, где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x, будем иметь

$$\sum_{b<n\leqslant c} \varphi(n) = \int_b^c \varphi(x)\,dx + \int_b^c \psi(x)\,\varphi'(x)\,dx + \psi(b)\,\varphi(b) - \psi(c)\,\varphi(c).$$

Отсюда, если взять $\varphi(x) = (x + a)^{-s}$, $s \neq 1$, $b = 1$, c — целое (> 1), получим

$$\sum_{1<n\leqslant c} (n+a)^{-s} = -s\int_1^c \frac{\psi(x)}{(x+a)^{s+1}}\,dx + \frac{(c+a)^{1-s} - (1+a)^{1-s}}{1-s} - \frac{(c+a)^{-s} - (1+a)^{-s}}{2}.$$

Поэтому для

$$\zeta(s;\,a) - a^{-s} = -s\int_1^\infty \frac{\psi(x) - 1/2}{(x+a)^{s+1}}\,dx + \frac{(1+a)^{1-s}}{s-1}. \qquad (2)$$

Последний интеграл в силу ограниченности $\psi(x)$ сходится при $\sigma > 0$, причем равномерно в любой конечной области, лежащей правее вертикали $\sigma = 0$, и потому предыдущее выражение (2) дает относительное продолжение функции $\zeta(s;\,a)$ в полуплоскость $\sigma > 0$. Отсюда, согласно формуле Эрмита ([5], с. 66),

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s;\,a) - \frac{1}{s-1}\right) = -\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}.$$

С другой стороны,

$$\beta_0(a) = -\frac{1}{a} - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}.$$

Из этого тождества и известного выражения для логарифмической производной Г-функции вытекает соотношение теоремы 1 для $\beta_0(a)$, из которого нетрудно вывести указанные в теореме 1 неравенства для этой величины.

Рассмотрим величины $\beta_{n-1}(a)$ для $n = 2, 3, \ldots$ Из разложения (1) находим

$$\beta_{n-1}(a) = \frac{1}{n!}\lim_{s\to\infty}\frac{\partial^n}{\partial s^n}(s-1)\left(\zeta(s;\,a) - a^{-s}\right).$$

Отсюда и из (2) следует, что

$$n!\,\beta_{n-1}(a) = (-1)^n \log^n(1+a) - n\lim_{s\to 1}\frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}}\int_1^\infty \frac{\psi(x) - 1/2}{(x+a)^{s+1}}\,dx - $$

$$- n(n-1)\lim_{s\to 1}\frac{\partial^{n-2}}{\partial s^{n-2}}\int_1^\infty \frac{\psi(x) - 1/2}{(x+a)^{s+1}}\,dx. \qquad (3)$$

Функция $g(s;x) = (\psi(x) - 1/2)(x + a)^{-s-1}$ регулярна по s в круге $|s - 1| < 1/2$ и является кусочно-непрерывной по x на луче $(1, \infty)$. Несобственный интеграл от $g(s;\,x)$ в пределах $(1, \infty)$, а также интегралы, полученные из него дифференцированием $g(s;$

x) по s, равномерно сходятся в упомянутой области. Поэтому в (3) можно обратить порядок дифференцирования и интегрирования. Это дает

$$n!\,\beta_{n-1}(a) = (-1)^n \log^n(1+a) + (-1)^n n \int_1^\infty \frac{\psi(x)-1/2}{(x+a)^2} \times$$
$$\times \left(\log^{n-1}(x+a) - (n-1)\log^{n-2}(x+a)\right) dx.$$

Если теперь положить

$$J(n;\,a) = -\int_1^\infty (\psi(x)-1/2)\, d\left((x+a)^{-1}\log^{n-1}(x+a)\right)$$

и воспользоваться разложением функции $\psi(x)$ в ряд Фурье, получим

$$J(n;\,a) = -\frac{\log^{n-1}(1+a)}{2(1+a)} - J_1(n;\,a),$$

где

$$J_1(n;\,a) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m}\int_1^\infty \frac{\sin 2\pi mx}{(x+a)^2}\left(\log^{n-1}(x+a) -\right.$$
$$\left.-(n-1)\log^{n-2}(x+a)\right) dx,$$

при условии, что мы вправе были изменить порядок суммирования и интегрирования. Поскольку ряд Фурье для $\psi(x)$ сходится почти всюду и его частные суммы ограниченны, произведенная перестановка операций законна на любом конечном отрезке. Кроме того, для $\nu = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m}\int_N^\infty \frac{\sin 2\pi mx}{(x+a)^2}\log^\nu(x+a)\,dx = 0.$$

Следовательно, предыдущее выражение для $J_1(n;\,a)$ верно безусловно. Отсюда

$$J_1(n;\,a) = \frac{\log^{n-1}(1+a) - (n-1)\log^{n-2}(1+a)}{12(1+a)^2} + J_2(n;\,a);$$

$$J_2(n;\,a) = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m^2}\int_n^\infty \frac{\cos 2\pi mx}{(x+a)^3}\left(-2\log^{n-1}(x+a) +\right.$$
$$\left.+3(n-1)\log^{n-2}(x+a) - (n-1)(n-2)\log^{n-3}(x+a)\right) dx.$$

Заменяя здесь слагаемые их абсолютными значениями, $\cos 2\pi mx$ — единицей, проводя интегрирование и дополнив конечные суммы до соответствующих рядов, найдем неравенства

$$|J_2(n; a)| < 2^{-n}(n-1)!,$$

в силу которых для $n = 2, 3, \ldots$

$$n!\,|\beta_{n-1}(a)| < \frac{n!}{2^n} + \left|\log^n(1+a) - \frac{n\log^{n-1}(1+a)}{2(1+a)} + \right.$$

$$\left. + \frac{n\log^{n-1}(1+a) - n(n-1)\log^{n-2}(1+a)}{12(1+a)^2}\right| < \frac{n!}{2^{n-1}}.$$

Теорема 1 доказана. Вывод теоремы 2 производится при помощи указанной формулы суммирования Эйлера в случае $\varphi(x) = (x+a)^{-1}\log^{n-1}(x+a)$, $b = 1$, $c = N$. Выкладки аналогичны тем, которые приведены нами в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Hardy G. H. Callected papers of G. H. Hardy. Vol. I. Oxford, 1966.
2. Bateman H. Higher transcendental functions. Vol. 1. New-York—Toronto — London, MeGraw—Hull Book Co., Inc., 1953.
3. Ramanujan S. Collected papers of Sriniwesa Ramanujan. Cambridge, 1927.
4. Лаврик А. Ф. О главном члене проблемы делителей и степенном ряде дзета-функции Римана в окрестностях ее полюса.— Труды мат. ин-та АН СССР, 1976, т. 142, с. 165—173.
5. Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н. Курс современного анализа. Ч. II. М., Физматгиз, 1963.

ОБ ОДНОМ УСИЛЕНИИ ТЕОРЕМЫ ПЛЕМЕЛЯ — ПРИВАЛОВА И ЗАДАЧИ НАИЛУЧШЕЙ АППРОКСИМАЦИИ

ДЖ. И. МАМЕДХАНОВ

(*Баку*)

Пусть Γ — некоторая замкнутая кусочно-гладкая кривая (или более общо — K-кривая, см., например, [1, с. 398]). Известна следующая [2]

Теорема Племеля — Привалова. Пусть

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt. \tag{1}$$

Если $\varphi(t) \in H^\alpha(\Gamma)$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ (т. е. $\forall\, t_1, t_2 \in \Gamma$ $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leqslant \text{const}\,|t_1 - t_2|^\alpha$), то граничные значения $\Phi^\pm(t)$ интеграла (1) удовлетворяют условию $H^\alpha(\Gamma)$ при $\alpha < 1$, а при $\alpha = 1$ — условию $H^{\alpha-\varepsilon}$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная [1]).

При тех же предположениях на замкнутую кривую Γ и при условии, что точки [2]) $\pm 1 \in \Gamma$, введем в рассмотрение класс функций $H^{\alpha,\beta}(\Gamma)$, определяемый следующим образом: будем говорить, что $\varphi(z)$ принадлежит классу $H^{\alpha,\beta}(\Gamma)$ ($\varphi(z) \in H^{\alpha,\beta}(\Gamma)$) ($0 < \alpha < 1$, $0 \leqslant \beta < 1$), если $\forall z_1, z_2 \in \Gamma$: $|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leqslant A_\beta(z_1, z_2)|z_1 - z_2|^\alpha$, где $A_\beta(z_1, z_2) = \mathrm{const} \cdot \max\{|1 - z_1^2|^\beta, |1 - z_2^2|^\beta\}$.

Очевидно, что $H^{\alpha,0}(\Gamma) = H^\alpha(\Gamma)$.

Имеет место

Теорема 1. Пусть $\varphi(z) \in H^{\alpha,\beta}(\Gamma)$. Тогда, если $\beta < 1 - \alpha$, то $\Phi^\pm(t) \in H^{\alpha,\beta}(\Gamma)$; если же $\beta > 1 - \alpha$, то имеет место соотношение $\forall z_1, z_2 \in \Gamma$:

$$|\Phi^\pm(z_1) - \Phi^\pm(z_2)| \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const} \cdot \max\{A_\beta(z_1, z_2)|z_1 - z_2|^\alpha, |z_1 - z_2|\},$$

где постоянная не зависит от z_1 и z_2.

Замечание. Теорему 1 можно сформулировать в более общем случае, а именно когда функция $\varphi(z)$ имеет повышенную гладкость в произвольных k точках кривой Γ.

Рассмотрим класс замкнутых кривых B_k^*, введенный В. К. Дзядыком (см., например, [1, с. 439]). Известна следующая [1]

Теорема (В. К. Дзядык). Пусть при некотором натуральном k граница Γ множества G принадлежит B_k^* и $f(z) \in A(\overline{G}) \cap H^\alpha(\Gamma)$ $(0 < \alpha < 1)$ ($A(\overline{G})$ — класс аналитических в G и непрерывных в $\overline{G}$ функций). Тогда при каждом натуральном n можно построить многочлен $P_n(z)$ степени не выше n такой, что в любой точке $z \in \Gamma$ будет выполняться неравенство

$$|f(z) - f_n(z)| \leqslant \mathrm{const} \cdot d^\alpha(z, 1/n),$$

где $d(z, 1/n)$ определяет расстояние от точки $z \in \Gamma$ до линии уровня $\Gamma_{1+1/n}$ (см. [1, с. 358]).

Заметим, что эта теорема доказана В. К. Дзядыком в терминах модулей непрерывности и модулей гладкости. А так как мы преследуем цель — качественно улучшить теорему В. К. Дзядыка, то, очевидно, достаточно рассмотреть модельный случай этой теоремы.

В. И. Белый [3] показал, что теорема В. К. Дзядыка остается в силе, если граница Γ множества G является квазиконформной кривой, т. е. $\Gamma \in A$ (см. [1, с. 401])[3]).

---

[1]) Точнее, при $\alpha = 1$ для любых двух достаточно близких точек t_1 и t_2 на Γ имеет место $\left|\Phi^\pm(t_1) - \Phi^\pm(t_2)\right| \leqslant \mathrm{const} \cdot |t_1 - t_2| \ln \dfrac{1}{|t_1 - t_2|}$.

[2]) Все наши рассуждения остаются в силе, если вместо точек ± 1 брать произвольные точки на Γ.

[3]) Следует заметить, что класс квазиконформных кривых A не содержит классы B_k^*, а лишь пересекается с ними.

Пусть $\tilde{z} \in \psi[\Phi(z)(1 + 1/n)]$, где $w = \Phi(z)$ и $z = \psi(w)$ — функции, которые конформно и однолистно отображают соответственно внешность G на внешность единичного круга $|w| < 1$ и обратно, при этом $0 < \lim\limits_{z\to\infty} \Phi(z)/z < +\infty$.

Имеет место

Теорема 2. Пусть граница множества $G\Gamma$ ($\pm 1 \in \Gamma$) принадлежит классу $J = B_k^* \cup A$ и $f(z) \in A(\overline{G}) \cap H^{\alpha,\beta}(\Gamma)$ $(0<\alpha\leqslant 1,$ $0 \leqslant \beta \leqslant 1)$. Тогда при каждом натуральном n, можно построить многочлен $P_n(z)$ степени не выше n такой, что в любой точке $z \in \Gamma$ будет выполняться неравенство

$$|f(z) - P_n(z)| \leqslant \text{const}\cdot\max\{A_\beta(z, \tilde{z})d^\alpha(z, 1/n), d(z, 1/n)\}. \qquad (2)$$

Замечание. Нетрудно показать, что в случае $\beta < 1 - \alpha$

$$d(z, 1/n) \leqslant \text{const}\cdot A_\beta(z, \tilde{z})d^\alpha(z, 1/n),$$

и тогда вместо соотношения (2) будем иметь

$$|f(z) - P_n(z)| \leqslant \text{const}\cdot A_\beta(z, \tilde{z})d^\alpha(z, 1/n). \qquad (3)$$

Используя теоремы 1 и 2, можно доказать следующий результат.

Теорема 3. Пусть замкнутая кривая $\Gamma \in K(\pm 1 \in \Gamma)$ $(K \subset J)$(см., например, [1, с. 398]) и $f(z) \in H^{\alpha,\beta}$ (Γ). Тогда при каждом натуральном n можно построить многочлен $P_n(z, 1/z)$ степени не выше n по z и $1/z$ [4)] такой, что в любой точке $z \in \Gamma$ будет выполняться неравенство

$$|f(z) - P_n(z, 1/z)| \leqslant \text{const}\cdot\max\{A_\beta(z, \tilde{z})d^\alpha(z, 1/n), d(z, 1/n)\}. \qquad (4)$$

Очевидно, когда $\beta < 1 - \alpha$, будем иметь

$$|f(z) - P_n(z)| \leqslant \text{const}\cdot A_\beta(z, \tilde{z})d^\alpha(z, 1/n).$$

Замечание. Следует отметить, что в случае, когда $\Gamma \in B_k^*$, имеет место соотношение $|z - \tilde{z}| \asymp d(z, 1/n)$.

Теоремы 2 и 3 можно сформулировать и в более общем случае, а именно, когда функция $f(z)$ имеет повышенную гладкость в произвольных k точках кривой Γ.

Наконец, имеет место

Теорема 4. Пусть дуга $\Gamma \in K$ и $f(z) \in H^\alpha(\Gamma)(0 < \alpha < 1)$. Тогда при каждом натуральном n можно построить многочлен

---

4) Здесь мы, не умаляя общности, предполагаем, что точка 0 лежит внутри Γ.

$P_n(z)$ степени не выше n такой, что в любой точке $z \in \Gamma$ будет выполняться неравенство

$$|f(z) - P_n(z)| \leqslant \text{const} \cdot d_*^\alpha(z, 1/n),$$

где в каждой двукратной точке $z \in \Gamma$ через $d_*(z, 1/n)$ обозначено большее из расстояний до двух ветвей линии уровня $\Gamma_{1+1/n}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дзядык В. К.** Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., Наука, 1977.
2. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд. М., Наука, 1968.
3. **Белый В. И.** Конформные отображения и приближение аналитических функций в областях с квазиконформной границей. Мат. сб., 1977, т. 102 (144), № 3, с. 331—361.

О СУММИРОВАНИИ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ МЕТОДОМ РИССА

М. Н. ОЧИРОВ

(Улан-Удэ)

В работе [1] изучено суммирование тригонометрических интегралов Фурье методом Рисса, который определяется следующим образом. Пусть $p(y)$ — положительная, строго возрастающая функция: $p(0) = 0$, $p(y) \to +\infty$ при $y \to +\infty$. Будем говорить, что интеграл $\int_0^\infty a(t)\,dt$ суммируется методом Рисса или $(R, p(y), 1)$ — суммируется к I, если

$$\lim_{y\to+\infty} R(y) = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{p(y)} \int_0^y [p(y) - p(t)]\, a(t)\, dt = I.$$

Как известно, продифференцированный интеграл Фурье функции $f(t)$ и сопряженный с ним интеграл имеют соответственно вид

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty u du \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin u(t-x)\, dt; \tag{1}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty u du \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos u(t-x)\, dt. \tag{2}$$

Здесь доказывается суммируемость этих интегралов методом Рисса, причем предполагается, что функция $p(y)$, определяющая этот метод, удовлетворяет условиям

$$\int_0^y p'(y)\, e^{iut} du < Cp\left(\frac{1}{t}\right); \tag{3}$$

$$\int_a^y \frac{p(t)}{t \log t} dt = O(p(y)), \tag{4}$$

где $a > 1$ — фиксированное число; C — абсолютная постоянная. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть функция $f(t) \in L(-\infty, \infty)$ абсолютно непрерывна на любом конечном интервале и имеет ограниченную вариацию в $(-\infty, \infty)$. Если при $t \to +0$

$$\int_0^t |d_u \{f(x+u) - f(x-u) - 2uf'(x)\}| = o\left(t \log^{-1} t^{-1}\right),$$

то интеграл (1)$(R, p(y), 1)$ суммируется к $f'(x)$.

Теорема 2. Пусть функция $f(t) \in L(-\infty, \infty)$ абсолютно непрерывна на любом конечном интервале и имеет ограниченную вариацию в $(-\infty, \infty)$. Если при $t \to +0$

$$\int_0^t |d\{f(x+u) + f(x-u)\}| = o\left(t \log^{-1} t^{-1}\right),$$

то интеграл (2) $(R, p(y), 1)$ суммируется к

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty t^{-2}\{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\}\, dt$$

в любой точке x, в которой последний интеграл существует.

Доказательство этих теорем основано на том, что интегралы (1) и (2) можно представить соответственно в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty f'(t) \cos u(t-x)\, dt; \quad \frac{1}{\pi}\int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty f'(t) \sin u(t-x)\, dt.$$

Они представляют собой интеграл Фурье и сопряженный интеграл Фурье функции $f'(t) \in L(-\infty, \infty)$.

Отметим еще, что для функции $p(y) = \log y$ выполнены (3) и (4), и поэтому в условиях приведенных выше теорем интегралы (1) и (2) будут суммироваться к соответствующим значениям методом $(R, \log y, 1)$, который называется методом логарифмических средних.

ЛИТЕРАТУРА

1. Очиров М. Н. Суммирование интегралов Фурье методом Рисса. — Сборник аспирантских работ. Точные науки. Казань, Изд-во КГУ, 1974, с. 75—77.

О МИНИМУМЕ ФУНКЦИОНАЛОВ, СОДЕРЖАЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В. Р. ПОРТНОВ

(*Новосибирск*)

В статье формулируются некоторые результаты работы [1] и указываются приложения к задачам вариационного исчисления (в частности, как следствие, получается ряд теорем существования в нелинейной теории упругости).

1°. Определение 1. Пусть Ω — пространство точек x с σ-конечной мерой, а Y — банахово пространство [1]. *Лебеговым* пространством (л. п.) на Ω будем называть всякое банахово пространство $\mathscr{H}$ измеримых на Ω функций со значениями в Y, которое обладает следующими свойствами:

а) если ω — измеримое подмножество Ω и $w(x) \in \mathscr{H}$, то $\chi_\omega(x) w(x) \in \mathscr{H}$ и $\|\chi_\omega w\|_{\mathscr{H}} \leqslant \|w\|_{\mathscr{H}}$;

б) если $w(x)$ — измеримая на Ω функция со значениями в Y и $\{\omega_n\}$ — последовательность измеримых подмножеств в Ω такая, что $\omega_1 \subset \omega_2 \subset \omega_3 \subset \ldots$, и $\bigcup\limits_{n \in N} \omega_n = \Omega$, причем $\chi_{\omega_n}(x) w(x) \in \mathscr{H}$ $\forall n \in N$ и $\sup\limits_{n \in N} \|\chi_{\omega_n} w\| < +\infty$, то $w(x) \in \mathscr{H}$ и $\|w\|_{\mathscr{H}} \leqslant \sup\limits_{n \in N} \|\chi_{\omega_n} w\|_{\mathscr{H}}$.

Пусть $\mathfrak{R}$ — векторное пространство, на котором задана полунорма p. Пусть на $\mathfrak{R}$ задан также конечный набор линейных операторов $\mathscr{P} = \{P_j : \mathfrak{R} \to \mathscr{H}_j(\mathfrak{A}_j)\}_{j \in J}$, $J \neq \varnothing$, где $\mathscr{H}_j$ — л. п. на пространстве Ω_j с σ-конечной мерой, и $\mathfrak{A}_j$ — *допустимое* покрытие Ω_j ([1], определение 2).

Определение 2. Пусть θ и ν — полунормы на $\mathfrak{R}$. Скажем, что полунорма ν *подчинена полунорме* θ, если: 1) с константой $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство $\varepsilon\nu(u) \leqslant \theta(u)$ $\forall u \in \mathfrak{R}$; 2) всякая последовательность, ограниченная относительно полунормы $\theta + \nu$, содержит подпоследовательность, фундаментальную относительно полунормы ν.

Определение 3. Набор операторов $\mathscr{P}$ называется *подчиненным полунорме* p, если найдется такая полунорма ν на $\mathfrak{R}$, что: 1) для любого набора множеств $\omega = \{\omega_j\}_{j \in J}$, $\omega_j \in \mathfrak{A}_j$ $\forall j \in J$ с константой $\varepsilon(\omega) > 0$ имеет место неравенство $\varepsilon(\omega)\nu^{(\omega)}_{\mathscr{P}}(u) \leqslant p(u) + \nu(u)$ $\forall u \in \mathfrak{R}$; 2) полунорма ν подчинена полунорме $p + \mu^{(\lambda)}_{\mathscr{P}}$ $\forall \lambda \in \mathfrak{M}^{(2)}_{\mathscr{P}}$.

Теорема 1[3]. Если набор операторов P замкнут по отношению к полунорме p ([1], определение 3) и подчинен ей, то: 1) $\mathfrak{M}_{\mathscr{P}} \neq \varnothing$; 2) $\dim \ker p < +\infty$; 3) каков бы ни был набор функ-

---

[1]) Все векторные пространства в статье считаются вещественными.
[2]) Определение $\mathfrak{M}_{\mathscr{P}}$ см. в [1, с. 116].

[3]) В [1] это теорема 5 (с. 127, 128), которая была доказана для частного случая, когда $\nu = \nu^{(\omega^*)}_{\mathscr{P}}$, $\omega^* = \{\omega^{(j)*}\}_{j \in J}$, $\omega^{(j)*} \in \mathfrak{A}_j \forall j \in J$. Однако теорема 5,

ций $\lambda \in \mathfrak{M}_{\mathscr{P}}$, полунормы $\|\cdot\|^{(1)} = p(\cdot) + \mu^{(\lambda)}_{\mathscr{P}}(\cdot)$ и $\|\cdot\|^{(2)} = p(\cdot) + \nu^{(\omega)}_{\mathscr{P}}(\cdot)$, где ω — семейство множеств из определения 4 в [1], суть эквивалентные нормы на $\mathfrak{R}$, причем относительно каждой из этих норм $\mathfrak{R}$ — банахово пространство; 4) для всякого замкнутого в $\mathfrak{R}$ векторного подпространства X и всякого линейного непрерывного проекционного оператора $\pi: X \xrightarrow{\text{на}} X \cap \ker p$ полунорма p эквивалентна на подпространстве $\ker \pi$ нормам $\|\cdot\|^{(1)}$ и $\|\cdot\|^{(2)}$.

2°. В следующем пункте мы рассмотрим несколько примеров к теореме 1. Для этого нам понадобится ряд обозначений и определений.

Пусть R^n, $n \in N$, $n > 1$,— n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathcal{O}$ — совокупность непустых открытых подмножеств пространства R^n. Каждое множество $g \in \mathcal{O}$ рассматривается вместе с заданной на нем мерой Лебега и допустимым покрытием, состоящим из всех его компактных подмножеств.

Определение 4. Пусть $m, \widehat{m} \in N$ и $g \in \mathcal{O}$. Выражение $\sum\limits_{\alpha} a_\alpha(x) D^\alpha$, где $a_\alpha(x)$ — определенная на g прямоугольная вещественная матрица размера $m \times \widehat{m}$ с элементами из пространства $C^{|\alpha|}(g)$ такая, что для любого компакта $\omega \subset g$ $\exists$ $N_\omega \in N$: $a_\alpha(x) = 0$ $\forall x \in \omega$, $\forall \alpha : |\alpha| > N_\omega$, называется *матричным дифференциальным оператором* (м. д. о.) на g размера $m \times \widehat{m}$.

Пусть заданы: множества $\Omega \in \mathcal{O}$; числа $s, r, r^*, \widehat{r} \in N$, $\max(1, r^*) < r$; числа $s_1, \ldots, s_r, \widehat{s}_1, \ldots, \widehat{s}_{\widehat{r}} \in N$; м. д. о. $P_1, \ldots, P_r$, $\widehat{P}_1, \ldots, \widehat{P}_{\widehat{r}}$ размеров $s_1 \times s, \ldots, s_r \times s, \widehat{s}_1 \times s, \ldots, \widehat{s}_{\widehat{r}} \times s$ на множествах $\Omega_1, \ldots, \Omega_r, \widehat{\Omega}_1, \ldots, \widehat{\Omega}_{\widehat{r}} \in \mathcal{O}$ соответственно, причем $\left(\bigcup\limits_{1 \leqslant k \leqslant r} \Omega_k\right) \cup \left(\bigcup\limits_{1 \leqslant j \leqslant \widehat{r}} \widehat{\Omega}_j\right) = \Omega$; переменная N-функция $M: \Omega \times R^{s_1} \times \ldots \times R^{s_r} \to R$ [2], обладающая тем свойством, что

$$M^*\left(x, v^{(1)}(x), \ldots, v^{(r^*)}(x)\right) \in L_1(\Omega) \quad \forall v^{(k)}(x) \in C^\infty\left(\Omega, R^{s_k}\right),$$

$\operatorname{supp} v^{(k)}$ — компакт в Ω_k, $\forall k = 1, \ldots, r^*$.

Пусть каждому $k = r^* + 1, \ldots, r$ и каждому $j = 1, \ldots, \widehat{r}$ поставлены в соответствие л. п. $\mathscr{H}_k$ на Ω_k и л. п. $\widehat{\mathscr{H}}_j$ на $\widehat{\Omega}_j$, причем $\mathscr{H}_k$ состоит из функций со значениями в R^{s_k}, $\widehat{\mathscr{H}}_j$ — из функций со значениями в $R^{\widehat{s}_j}$.

Будем считать, что имеет место непрерывное вложение $\mathscr{H}_k(\mathfrak{A}_k)$ в $L_1^{\text{loc}}(\Omega_k)$ $\forall k = r^* + 1, \ldots, r$ и $\widehat{H}_j(\widehat{\mathfrak{A}}_j)$ в $L_1^{\text{loc}}(\widehat{\Omega}_j)$ $\forall j = 1, \ldots, r$.

Обозначим через $\mathfrak{R}$ совокупность всех таких функций $u(x)$ со значениями в R^s, определенных на Ω, у которых: 1) существует обобщенный в смысле С. Л. Соболева м. д. о. P_k на Ω_k $\forall k = 1, \ldots$

как нетрудно заметить, просматривая ее доказательство, остается справедливой и для наборов операторов, подчиненных полунорме в смысле данного здесь определения 2.

$\ldots, r$ и м. д. о. $\widehat{P}_j$ на $\widehat{\Omega}_j \forall j = 1, \ldots, \widehat{r}$; 2) $P_k u(x) \in \mathscr{H}_k(\mathfrak{A}_k) \forall k = r^* + 1, \ldots, r$ и $\widehat{P}_j u(x) \in \widehat{\mathscr{H}}_j(\widehat{\mathfrak{A}}_j)$ $\forall j = 1, \ldots, \widehat{r}$; 3) $\mathscr{L} u(x) \in L_M(\Omega)$, где положено: $\mathscr{L} u(x) = (\mathring{P}_1 u(x), \ldots, \mathring{P}_{r^*} u(x))$, $\mathring{P}_k u(x) = P_k u(x)$ при $x \in \Omega_k$ и $\mathring{P}_k u(x) = 0$ для $x \in \Omega \setminus \Omega_k \forall k = 1, \ldots, r$ (это обозначение используется ниже также при $r^* + 1 \leqslant k \leqslant r$).

Ясно, что $\mathfrak{R}$ — вещественное векторное пространство. Зададим в нем полунорму $p(\cdot) = \| \mathscr{L} \cdot \|_{L_M(\Omega)}$. Положим $\mathscr{P}^{(k)} = \{P_j : \mathfrak{R} \to \mathscr{H}_j(\mathfrak{A}_j)\}_{j=r^*+1,\ldots,k}$ $\forall k = r^* + 1, \ldots, r$ и $\mathscr{P} = \mathscr{P}^{(r)}$.

Мы будем рассматривать пары вида $(g, A : \mathfrak{R} \to h)$, где $g \in \mathcal{O}$, $g \subset \Omega$, h — л. п. на g, A — м. д. о. на g.

Определение 5. Пусть θ — полунорма на $\mathfrak{R}$. Скажем, что пара $(g, A : \mathfrak{R} \to h)$ *подчинена конечному семейству пар* $\{(g_j, A_j : \mathfrak{R} \to h_j)\}_{j=1,\ldots,N}$, $N \in \boldsymbol{N}$, *относительно полунормы* θ, если найдется полунорма ν на $\mathfrak{R}$, называемая *переходной полунормой*, подчиненная полунорме $p + \mu_{\mathscr{P}}^{(\lambda)} \forall \lambda \in \mathfrak{M}_{\mathscr{P}}$, такая, что с константой $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\varepsilon \| Au \|_h \leqslant \theta(u) + \nu(u) + \sum_{j=1}^{N} \| A_j u \|_{h_j} \quad \forall u \in \mathfrak{R}.$$

Определение 6. Пара $(g, A : \mathfrak{R} \to h)$ называется *опорной для полунормы* θ, заданной на $\mathfrak{R}$, если найдется полунорма ν на $\mathfrak{R}$, называемая *опорной полунормой*, подчиненная полунорме $p + \mu_{\mathscr{P}}^{(\lambda)} \forall \lambda \in \mathfrak{M}_{\mathscr{P}}$, такая, что с константой $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\varepsilon \| Au \|_h \leqslant \theta(u) + \nu(u) \ \forall u \in \mathfrak{R}.$$

Точка $x \in g$ называется *опорной точкой оператора* $A : \mathfrak{R} \to h$ *относительно полунормы* θ, если найдется такая открытая окрестность ω точки x с компактным в g замыканием, что пара $(\omega, A : \mathfrak{R} \to h^{(\omega)})$[4] является опорной для полунормы θ.

Определение 7. Конечный упорядоченный набор пар $\{(g_j, A_j : \mathfrak{R} \to h_j)\}_{j=1,\ldots,N}$, $N \in \boldsymbol{N}$, называется *цепочкой длины* N *для полунормы* θ на $\mathfrak{R}$, если при $N > 1$ $\forall j = 2, \ldots, N$ пара $(g_j, A_j : \mathfrak{R} \to h_j)$ подчинена паре $(g_{j-1}, A_{j-1} : \mathfrak{R} \to h_{j-1})$. Пара $(g_j, A_j : \mathfrak{R} \to h_j)$ при $j = 1$ называется *началом цепочки*, а при $j = N$ — ее концом. Будем называть цепочку для полунормы θ *опорной*, если ее начало является опорной парой для полунормы θ.

Определение 8. *Потоком* для пары $(g, A : \mathfrak{R} \to h)$ относительно полунормы θ на $\mathfrak{R}$ называется конечный упорядоченный набор множеств $\{\Sigma_j\}_{j=1,\ldots,l}$, $l \in \boldsymbol{N}$, в котором каждое множество Σ_j непусто и состоит из конечного числа цепочек для полунормы θ и который обладает следующими свойствами: 1) множество Σ_l целиком состоит из опорных цепочек; 2) пара $(g, A : \mathfrak{R} \to h)$ подчинена семейству концов всех цепочек множест-

[4] $h^{(\omega)}$ — л. п. на ω, являющееся сужением в общеизвестном смысле пространства h с g на ω.

ва Σ_1; 3) при $l > 1 \forall j = 1, \ldots, l-1$ начало каждой цепочки множества Σ_j является либо опорной парой, либо парой, подчиненной множеству концов всех цепочек из множества Σ_{j+1}.

Замечание. Сформулируем одно достаточное условие подчиненности пары (g, P_k)[5], $g \in \mathcal{O}$, $\bar{g}$ — компакт в Ω_k, $r^*+1 \leqslant k \leqslant r$, паре (g_0, P_k), g_0 — компакт в Ω_k, относительно полунормы p при $k = r^*+1$ и относительно полунормы $p + \mu^{(\lambda)}_{\mathscr{P}(k-1)}$ при $r^*+1 < k \leqslant r$ $\forall \lambda \in \mathfrak{M}_{\mathscr{P}(k-1)}$. Это условие удобно применять в тех случаях, когда в некоторой открытой окрестности множества g возможны «априорные» оценки на финитных бесконечно дифференцируемых функциях типа оценок Л. Хёрмандера [3, с. 507] (см. пример 5). Пусть множество $g_* \in \mathcal{O}$, $\bar{g}_*$ — компакт в Ω_k, $\bar{g} \subset g_*$. Положим $g^* = g_* \setminus \bar{g}$. Обозначим через Ψ_k совокупность таких функций $\psi(x) \in C^\infty(\Omega_k)$, у которых $\operatorname{supp}\psi$ — компакт в g_* и $\psi(x) \equiv 1$ в некоторой окрестности множества g. Пусть далее пара (g^*, P_k) подчинена паре (g_0, P_k) относительно полунормы, указанной выше. Для подчиненности пары (g, P_k) паре (g_0, P_k) относительно этой полунормы достаточно, чтобы: 1) $\psi P_k u \in \mathscr{H}_k \forall \psi \in \Psi_k, \forall u \in \mathfrak{R}$; 2) при $k = r^*+1 \forall \psi \in \Psi_k$ нашлась константа $\varepsilon(\psi) > 0$ такая, что $\varepsilon(\psi)\|\psi P_k u\|_{\mathscr{H}_k} \leqslant p(u) + \|\chi_{g^*} P_k u\|_{\mathscr{H}_k}$ $\forall u \in \mathfrak{R}$; 3) при $r^*+1 < k \leqslant r$ $\forall \psi \in \Psi_k$, $\forall \lambda \in \mathfrak{M}_{\mathscr{P}(k-1)}$ нашлась константа $\varepsilon(\psi, \lambda) > 0$ такая, что $\varepsilon(\psi, \lambda)\|\psi P_k u\|_{\mathscr{H}_k} \leqslant p(u) + \mu^{(\lambda)}_{\mathscr{P}k-1}(u) + \|\chi_{g^*} P_k u\|_{\mathscr{H}_k}$ $\forall u \in \mathfrak{R}$.

Рассмотрим некоторые конкретные примеры (1 и 2) цепочки и потока, используемые в дальнейшем. В них: θ — полунорма на $\mathfrak{R}$, $g \in \mathcal{O}$, $g \subset \Omega$; φ — взаимно-однозначное и непрерывное в обе стороны отображение непустого открытого множества Δ, расположенного в n-мерном евклидовом пространстве переменных $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, на множество g; h — л. п. на g; $A : \mathfrak{R} \to h$ — м. д. о. на g размера $s_0 \times s$; $\beta^{(n)} = \{1, \ldots, n\}$; β — непустое подмножество множества $\beta^{(n)}$; n_0 — число элементов в множестве β; $\xi^{(\beta)} = \{\xi_i\}_{i \in \beta}$ $\hat{\xi}^{(\beta)} = \{\xi_i\}_{i \in \beta^{(n)} \setminus \beta}$ при $\beta \neq \beta^{(n)}$; γ — непустое связное компактное подмножество в g такое, что при $n_0 < n$ множество $\varphi^{-1}(\gamma)$ расположено в гиперплоскости размерности n_0, параллельной пространству переменных $\xi^{(\beta)}$; a — точка на γ, называемая *началом* γ; $\mathscr{K}$ — совокупность множеств вида $\varphi(e)$, где e — открытый параллелепипед с ребрами, параллельными координатным осям $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и с компактным в ∇ замыканием; $S_\omega(\beta)$ при $\omega \in \mathscr{K}$, $\beta = \beta^{(n)}$ — совокупность всех $\sigma \in \mathscr{K}$ таких, что $\sigma \subset \omega$; $S_\omega(\beta)$ при $\omega \in \mathscr{K}$, $\beta \neq \beta^{(n)}$, — совокупность всех $\sigma \in \mathscr{K}$ таких, что $\sigma \subset \omega$ и ортогональные проекции параллелепипедов $\varphi^{-1}(\sigma)$ и $\varphi^{-1}(\omega)$ на пространство переменных $\hat{\xi}^{(\beta)}$ совпадают.

---

[5] Здесь положено: $(g, P_k) = (g, P_k : \mathfrak{R} \to \mathscr{H}^{(g)}_k)$ (см. сноску [4]).

Пример 1. Пятерку объектов $(\gamma, g, \varphi, A: \mathfrak{R} \to h, \beta)$ будем называть ***мостом для полунормы*** θ, если $\forall x \in \gamma \setminus \{a\}$ найдется такая окрестность $\omega \in \mathscr{K}$ точки x, что, каковы бы ни были множества $\omega_0 \in S_\omega(\beta^{(n)})$ и $\sigma \in S_{\omega_0}(\beta)$, с константой $\varepsilon(\omega_0, \sigma) > 0$ имеет место неравенство

$$\varepsilon(\omega_0, \sigma) \| \chi_{\omega_0} Au \|_h \leqslant \theta(u) + \| \chi_\sigma Au \|_h \ \forall u \in \mathfrak{R}.$$

Начало a компакта γ будем называть также *началом моста*. Мост для полунормы θ называется ***опорным***, если его начало является опорной точкой оператора $A: \mathfrak{R} \to h$ относительно полунормы θ. Из определения моста следует, что $\forall \omega \in \mathscr{K}$, $a \in \omega$, $\forall b \in \gamma$ найдется цепочка $\{(g_j, A: \mathfrak{R} \to h^{(g_j)})\}_{j=1, \ldots, N}$, $N \in \boldsymbol{N}$, для полунормы θ такая, что $g_j \in \mathscr{K}$ $\forall j = 1, \ldots, N$, $g_1 = \omega$ и $b \in g_N$ (по поводу обозначения $h^{(g_j)}$ см. сноску [4]).

Пример 2. Оператор $A: \mathfrak{R} \to h$ назовем подчиненным *в точке* $x \in g$ *семейству мостов* $\{(\gamma_j, g_j, \varphi_j, A_j: \mathfrak{R} \to h_j, \beta_j)\}_{j=1, \ldots, N}$, $N \in \boldsymbol{N}$, для полунормы θ, если: 1) $x \in \bigcap\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} \gamma_j$; 2) какова бы ни была открытая окрестность ω точки x такая, что $\bar{\omega}$ — компакт в $\bigcap\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} g_j$, найдутся окрестность $\sigma \in \mathscr{K}$ точки x и полунорма ν, называемая *переходной*, подчиненная полунорме $p + \mu_{\mathscr{P}}^{(\lambda)}$ $\forall \lambda \in \mathfrak{M}_{\mathscr{P}}$, такие, что с константой $\varepsilon(\omega, \sigma) > 0$ имеет место неравенство

$$\varepsilon(\omega, \sigma) \| \chi_\sigma Au \|_h \leqslant \theta(u) + \nu(u) + \sum_{j=1}^{N} \| \chi_\omega A_j u \|_{h_j} \ \forall u \in \mathfrak{R}.$$

Мост $(\gamma, g, \varphi, A: \mathfrak{R} \to h, \tau)$ для полунормы θ с началом a называется *подчиненным* конечному семейству мостов для той же самой полунормы, если оператор $A: \mathfrak{R} \to h$ подчинен этому семейству в точке a. *Сетью* для оператора $A: \mathfrak{R} \to h$ на g в точке $x \in g$ относительно полунормы θ называется конечный упорядоченный набор множеств $\Gamma = \{\Gamma_j\}_{j=1, \ldots, l}$, $l \in \boldsymbol{N}$, в котором каждое множество Γ_j непусто и состоит из конечного числа мостов для полунормы θ и который обладает следующими свойствами: 1) множество Γ_l целиком состоит из опорных мостов; 2) оператор $A: \mathfrak{R} \to h$ подчинен семейству Γ_1 в точке x; 3) при $l > 1$ $\forall j = 1, \ldots, l-1$ каждый мост семейства Γ_j или является опорным, или его начало подчинено некоторому подмножеству мостов из семейства Γ_{j+1}. Можно доказать, что *если оператор* $A: \mathfrak{R} \to h$ *на* g *обладает сетью в точке* $x \in g$ *относительно полунормы* θ, *то существует такая окрестность* $\omega \in \mathscr{K}$ *точки* x, *что пара* $(\omega, A: \mathfrak{R} \to h^{(\omega)})$ *обладает потоком относительно полунормы* θ.

Рассмотрим пример моста, пользуясь обозначениями, введенными перед примером 1.

Пример 3. Предположим, что $\forall x \in \gamma \setminus \{a\}$ найдутся окрестность $\omega \in \mathscr{K}$ точки x, л. п. h_0 и h_* и м. д. о. Q по переменным ξ на $\varphi^{-1}(\omega)$[6]) такие, что: 1) $\forall u \in \mathfrak{R}$ у функции $Au(\varphi(\xi))$ на множестве $\varphi^{-1}(\omega)$ оператор Q существует в обобщенном смысле С. Л. Соболева и $QAu(\varphi(\xi)) \in h_*$; 2) с константой $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство $\varepsilon \| QAu(\varphi(\xi)) \|_{h_*} \leqslant \theta(u)$ $\forall u \in \mathfrak{R}$, 3) справедлива импликация $\{v \in h\} \Leftrightarrow \{v(\varphi^{-1}(\xi)) \in h_0\}$ и с константой $\varepsilon > 0$ имеют место неравенства

$$\varepsilon \| v \|_h \leqslant \| v(\varphi^{-1}(\xi)) \|_{h_0} \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \| v \|_h \quad \forall v \in h;$$

4) $\forall \omega_0 \in S_\omega(\beta^{(n)})$, $\forall \sigma \in S_{\omega_0}(\beta)$ с константой $\varepsilon(\omega_0, \sigma) > 0$ имеет место неравенство

$$\varepsilon(\omega_0, \sigma) \| \chi_{\varphi^{-1}(\omega_0)} v \|_{h_0} \leqslant \| Qv \|_{h_*} + \| \chi_{\varphi^{-1}(\sigma)} v \|_{h_0} \quad \forall v \in \Gamma,$$

где Γ — совокупность тех функций $v \in h_0$, у которых оператор Q существует на множестве $\varphi^{-1}(\omega)$ в обобщенном смысле С. Л. Соболева и $Qv \in h_*$. Тогда $(\gamma, g, \varphi, A : \mathfrak{R} \to h, \beta)$ — мост для полунормы θ.

В примерах 4—6, применяя обозначения примера 3, мы рассматриваем три конкретных ситуации, в которых выполнено условие 4 примера 3.

Пример 4. Будем рассматривать Γ как нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_\Gamma = \| Q \cdot \|_{h_*} + \| \cdot \|_{h_0}$. Предположим, что: 1) Γ — банахово пространство; 2) найдутся л. п. $\tilde{h}$ на множестве $\varphi^{-1}(\omega)$ и м. д. о. Ξ по переменным ξ на $\varphi^{-1}(\omega)$, вполне непрерывно отображающий пространство Γ в пространство $\tilde{h}$, такие, что с константой $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\varepsilon \| v \|_{h_0} \leqslant \| Qv \|_{h_*} + \| \Xi v \|_{\tilde{h}} \quad \forall v \in \Gamma;$$

3) справедлива импликация $\{v \in \Gamma,\ \omega_0 \in S_\omega(\beta^{(n)}),\ \sigma \in S_{\omega_0}(\beta),\ Qv \equiv 0 \text{ на } \varphi^{-1}(w_0),\ v \equiv 0 \text{ на } \varphi^{-1}(\sigma)\} \Rightarrow \{v \equiv 0 \text{ на } \varphi^{-1}(\omega_0)\}$. Тогда выполнено условие 4 примера 3. Один частный случай приведенной здесь ситуации рассматривается в работе [5].

Пример 5. Пусть $n_0 = 1$, $\beta = \{i\}$, $i \in \beta^{(n)}$, $h_0 = h_* = L_q(\varphi^{-1}(\omega), \boldsymbol{R}^{s_0})$, $1 \leqslant q \leqslant +\infty$, Q — канонический м. д. о. [4, с. 260—262] по переменной ξ_i[7]) на множестве $\varphi^{-1}(\omega)$. Тогда выполнено условие 4 примера 3 (см. [6]).

Пример 6. Пусть $\beta \neq \beta^{(n)}$ и пусть Q — м. д. о. на $\varphi^{-1}(\omega)$ по переменным набора $\xi^{(\beta^*)} = \{\xi_i\}_{i \in \beta^*}$ такого, что $\beta \subset \beta^*$ и $\beta^* \neq \beta^{(n)}$, с коэффициентами, зависящими только от переменных этого набора. Представим множество $\varphi^{-1}(\omega)$ в виде $\varphi^{-1}(\omega) = \hat{\varkappa} \times \varkappa^*$,

---

[6]) ω, h_0, h_1 и Q, разумеется, зависят от x.

[7]) Говоря о каноническом дифференциальном операторе, мы не исключаем того случая, когда в нем максимальный порядок дифференцирования по некоторым или всем компонентам равен нулю, так что, в частности, такой оператор может оказаться тождественным оператором.

где $\varkappa^*$ и $\widehat{\varkappa}$ — ортоногальные проекции множества $\varphi^{-1}(\omega)$ на пространства переменных $\xi^{(\beta^*)}$ и $\widehat{\xi}^{(\beta^*)} = \{\xi_i\}_{i\in\beta^{(n)}\setminus\beta^*}$ соответственно. Пусть нормы в пространствах h_0 и h_* имеют вид $\|\cdot\|_{h_0} = \|\,\|\cdot\|_{H_0}\|_{\widehat{h}}$ и $\|\cdot\|_{h_*} = \|\,\|\cdot\|_{H_*}\|_{\widehat{h}}$, где H_0 и H_* — л. п. на $\varkappa^*$, а $\widehat{h}$ — л. п. на $\widehat{\varkappa}$ такое, что $\{v\in\widehat{h},\ w\in\widehat{h},\ 0\leqslant v\leqslant w$ на $\widehat{\varkappa}\}\Rightarrow$ $\Rightarrow\{\|w\|_{\widehat{h}}\leqslant\|v\|_{\widehat{h}}\}$. Обозначим через Λ совокупность тех функций $v\in H_0$, у которых оператор Q существует на множестве $\varkappa^*$ в обобщенном смысле С. Л. Соболева и $Qv\in H_*$. Будем рассматривать Λ как нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_\Lambda = \|Q\cdot\|_{H_*} + \|\cdot\|_{H_0}$. Предположим (см. пример 5), что: 1) Λ — банахово пространство; 2) найдутся л. п. $\widetilde{H}$ на множестве $\varkappa^*$ и м. д. о. Ξ на $\varkappa^*$, вполне непрерывно отображающий пространство Λ в пространство $\widetilde{H}$, такие, что с константой $\varepsilon>0$ имеет место неравенство $\varepsilon\|v\|_{H_0}\leqslant\|Qv\|_{H_*}+\|\Xi v\|_{\widetilde{H}}$ $\forall v\in\Lambda$; 3) каковы бы ни были открытые параллелепипеды e и d в пространстве переменных $\xi^{(\beta^*)}$ с ребрами, параллельными координатным осям, такие, что $e\subset d\subset$ $\subset\varkappa^*$, и при $\beta\neq\beta^*$ имеющие одинаковые ортогональные проекции на пространство переменных $\{\xi_i\}_{i\in\beta^*\setminus\beta}$, справедлива импликация $\{v\in\Lambda,\ Qv\equiv 0$ на d и $v\equiv 0$ на $e\}\Rightarrow\{v\equiv 0$ на $d\}$. Тогда выполнено условие примера 3.

В следующих примерах (7 и 8) опорных точек нам понадобятся обозначения, введенные перед примером 1.

Пример 7. Пусть $x\in g$ и ω — открытая окрестность точки x такая, что $\omega\subset g$, и с константой $\varepsilon>0$ имеет место неравенство $\varepsilon\|\varkappa_\omega Au\|_h\leqslant\theta(u)$ $\forall u\in\mathfrak{R}$. Тогда, очевидно, x — опорная точка оператора $A:\mathfrak{R}\to h$ относительно полунормы θ с нулевой опорной полунормой (см. определение 6).

Пример 8. Пусть $x\in g$. Пусть существуют окрестность $\omega\in\mathscr{K}$ точки x, л. п. h_0 и h_* на множестве $\varphi^{-1}(\omega)$ и м. д. о. Q по переменным ξ на $\varphi^{-1}(\omega)$ такие, что выполнены условия 1—3 примера 3 и условие 2 примера 4. Тогда x — опорная точка оператора $A:\mathfrak{R}\to h$ относительно полунормы θ с опорной полунормой $\nu(\cdot)=\|\Xi\cdot\|_{\widetilde{H}}$.

3°. Рассмотрим ряд примеров к теореме 1.

Пример 9. Предположим, что $\forall k=r^*+1,\ldots,r$, $\forall x\in$ $\in\Omega_k$ найдется открытая окрестность g точки x с компактным в Ω_k замыканием с таким свойством: пара $(g,\ P_k:\mathfrak{R}\to\mathscr{H}_k^{(g)})$ (см. сноску [4]) обладает потоком $\Sigma_x^{(k)}$ относительно полунормы p при $k=$ $=r^*+1$ и относительно полунормы $p+\mu^{(\lambda)}_{\mathscr{P}(k-1)}$ $\forall\lambda\in\mathfrak{M}_{\mathscr{P}(k-1)}$ при $r^*+1\leqslant k\leqslant r$ [8]. Обозначим через $\Lambda_x^{(k)}$ совокупность всех опорных и переходных полунорм потока $\Sigma_x^{(k)}$. Пусть множество

---

[8]) Для этого достаточно, чтобы оператор $P_k:\mathfrak{R}\to\mathscr{H}_k^{(g)}$ обладал сетью в точке x относительно указанных полунорм (см. пример 2).

$\bigcup\limits_{r^*+1<k<r}\ \bigcup\limits_{x\in\Omega_k}\Lambda_x^{(k)}$ конечно [9]. *Тогда набор операторов $\mathscr{P}$ подчинен полунорме p.* Далее предположим, что $\forall\lambda\in\mathfrak{M}_{\mathscr{P}}$ и для любых компактов $g\subset\Omega$, $g_1\subset\widehat{\Omega}_1,\ldots, g_{\widehat{r}}\subset\widehat{\Omega}^{\widehat{r}}$ существует константа $\varepsilon(\lambda, g, g_1, \ldots, g_{\widehat{r}})>0$ такая, что имеет место неравенство

$$\varepsilon(\lambda, g, g_1, \ldots, g_{\widehat{r}})\left(\|u\|_{L_1(g,R^s)}+\sum_{j=1}^{\widehat{r}}\|\chi_{g_j}\widehat{P}_j u\|_{\widehat{\mathscr{H}}_j}\right)\leqslant$$
$$\leqslant p(u)+\mu_{\mathscr{P}}^{(\lambda)}(u)\quad\forall u\in\mathfrak{R}.$$

Тогда набор операторов $\mathscr{P}$ замкнут по отношению к полунорме p; значит, имеют место утверждения теоремы 1. При этом, если переменные N-функции M и M^* удовлетворяют Δ_2'-условию [2], *то $\mathfrak{R}$-рефлексивное пространство относительно норм, указанных в теореме 1.*

В следующих примерах конкретизируется ситуация примера 9. В них набор операторов $\mathscr{P}$ подчинен полунорме p и замкнут по отношению к ней. Примеры 11 и 12 имеют непосредственное приложение в теории упругости.

Пример 10. Пусть $r^*=\widehat{r}=1$, $r=2$, $\widehat{s}_1=s$, $\Omega_1=\Omega_2=\widehat{\Omega}_1=\Omega$, $\widehat{P}_1=I$ [10] и Ω — связное множество, причем пространство $L_M(\Omega)$ непрерывно вложено в пространство $L_q^{\mathrm{loc}}(\Omega, R^{s_1})$, где $1<q<+\infty$. Пусть далее $\widehat{\mathscr{H}}_1=L_q(\Omega, R^s)$ и $\mathscr{H}_2=L_q(\Omega, R^{s_2})$. Укажем две ситуации, в которых набор операторов $\mathscr{P}=\{P_2\}$ подчинен полунорме p и замкнут по отношению к ней:

$$a)\ P_1=\left\{\frac{\partial^{m_i}}{\partial x_i^{m_i}}\mathscr{L}\right\}_{i=1,\ldots,n}\cup\left\{\frac{\partial^{\theta_i}}{\partial x_i^{\theta_i}}Q+\sum_{\frac{\alpha_1}{m_1}+\ldots+\frac{\alpha_n}{m_n}<1}a_\alpha^{(i)}D^\alpha\mathscr{L}\right\}_{i=1,\ldots,n};$$

$$P_2=(\mathscr{L},\ Q),$$

где m_i, $\theta_i\in N$, $\mathscr{L}$ и Q — м. д. о. на Ω с постоянными коэффициентами размеров $\tau\times s$ и $\gamma\times s$ соответственно ($\tau,\gamma\in N$), для которых найдутся постоянные вещественные матрицы K размера $s\times\tau$ и T размера $s\times\gamma$ такие, что $K\mathscr{L}+TQ=I$, $a_\alpha^{(i)}$ — постоянные вещественные матрицы размера $\gamma\times\tau$;

---

[9]) На самом деле достаточно требовать, чтобы $\nu(u)=\max\limits_{r^*+1\leqslant k\leqslant r}\ \sup\limits_{x\in\Omega_k}\ \max\limits_{\xi\in\Lambda_x^{(k)}}\xi(u)<+\infty$, и чтобы полунорма ν была подчинена полунорме $p+\mu_{\mathscr{P}}^{(\lambda)}\ \forall\lambda\in\mathfrak{M}_{\mathscr{P}}$.

[10]) Символом I здесь и в дальнейшем обозначается тождественный оператор.

б) $P_1 = \left\{ \frac{\partial^{l_{ij}}}{\partial x_j^{l_{ij}}} \left(\frac{\partial^{m_i}}{\partial x_i^{m_i}} + \sum_{\frac{\alpha_1}{m_1}+\ldots+\frac{\alpha_n}{m_n}<1} a_\alpha^{(i)} D^\alpha \right) \right\}_{i,j=1,\ldots,n}$;

$$P_2 = \left\{ \frac{\partial^{m_i}}{\partial x_i^{m_i}} \right\}_{i=1,\ldots,n} \cup \{D^\alpha\}_{\frac{\alpha_1}{m_1}+\ldots+\frac{\alpha_n}{m_n}<1},$$

где $m_i \in N$, $l_{ij} \in Z$, $l_{ij} \geqslant 0$, $a_\alpha^{(i)}$ — постоянные вещественные квадратные матрицы порядка s.

Пример 11. Пусть $r = r^* + 1$, $s = s_r = n$, $s_k = 1$ $\forall k = 1, \ldots, r^*$, $\hat{s}_j = 1$ $\forall j = 1, \ldots, \hat{r}$, $\Omega_r = \Omega$, $P_r = I$, $\mathscr{P} = \{I\}$, $\mathscr{H}_r^* = L_1(\Omega, R^n)$, $\hat{\mathscr{H}}_j = L_1(\hat{\Omega}_j)$ $\forall j = 1, \ldots, \hat{r}$, $P_k u(x) = \sum_{i,l=1,\ldots,n} a_{il}^{(k)}(x) \times e_{il}^{(k)} u(x)$ $\forall x \in \Omega_k$, $\forall u(x) \in \mathfrak{R}$, $\forall k = 1, \ldots, r^*$, где $a_{il}^{(k)}(x) \in C^{(1)}(\Omega_k)$, $e_{il}^{(k)} u(x) = \left(A_k(x) \sum_{\tau=1}^n \frac{\partial \varphi_\tau^{(k)}}{\partial \xi_l^{(k)}} \left(\varphi^{(k)-1}(x)\right) \frac{\partial u(x)}{\partial x_\tau} \right)_i + \left(A_k(x) \sum_{\tau=1}^n \frac{\partial \varphi_\tau^{(k)}}{\partial \xi_i^{(k)}} \left(\varphi^{(k)-1}(x)\right) \frac{\partial u(x)}{\partial x_\tau} \right)_l + \sum_{\tau=1}^n b_{il}^{(\tau,k)}(x) u_\tau(x)$,[11] $b_{il}^{(\tau,k)}(x) \in C(\Omega_k)$, $A_k(x)$ — вещественная квадратная матрица порядка n, заданная и непрерывно дифференцируемая на множестве Ω_k, $\varphi^{(k)} = \left(\varphi_1^{(k)}, \ldots, \varphi_n^{(k)}\right)$ — взаимно-однозначное и дважды непрерывно дифференцируемое в обе стороны отображение некоторого непустого открытого множества ∇_k, расположенного в n-мерном евклидовом пространстве переменных $\xi^{(k)} = \left(\xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}\right)$, на множество Ω_k. Операторы $\hat{P}_j$, $j = 1, \ldots, \hat{r}$, определяются по аналогии с операторами P_k. Пусть $\forall j = 1, \ldots, \hat{r}$ и для любого компакта $g \subset \hat{\Omega}_j$ найдется константа $\varepsilon_j(g) > 0$ такая, что имеет место неравенство

$$\varepsilon_j(g) \|\hat{P}_j u\|_{L_1(g)} \leqslant p(u) + \|u\|_{L_1(g, R^n)} \quad \forall u \in \mathfrak{R}.$$

Тогда набор операторов $\mathscr{P} = \{I\}$ замкнут по отношению к полунорме p. Сформулируем теперь одно достаточное условие подчиненности набора $\mathscr{P} = \{I\}$ полунорме p. Для этого нам понадобится одно открытое подмножество σ множества Ω. Скажем, что точка $y \in \sigma$, если найдется такая ее открытая окрестность g с компактным в Ω замыканием, что на множестве g у любой функции $u(x) \in \mathfrak{R}$ существуют в обобщенном смысле С. Л. Соболева все дифференциальные операторы $e_{il}^{(g)}$, $i, l = 1, \ldots, n$, определяемые равенствами

$$e_{il}^{(g)} u(x) = \left(A(x) \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_l} \left(\varphi^{-1}(x)\right) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right)_i + \left(A(x) \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_i} \left(\varphi^{-1}(x)\right) \times \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right)_l + \sum_{j=1}^n b_{il}^{(j)}(x) u_j(x) \quad \forall x \in g,$$

---

[11]) Заметим, что существование операторов $e_{il}^{(k)}$ для функций $u(x) \in \mathfrak{R}$ на множестве Ω_k не предполагается.

где $b_{il}^{(j)}(x) \in C(g)$, $A(x)$ — вещественная невырожденная квадратная матрица порядка n, заданная и непрерывно дифференцируемая на множестве g; $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ — взаимно-однозначное и дважды непрерывно дифференцируемое в обе стороны отображение некоторого непустого открытого множества ∇, расположенного в n-мерном евклидовом пространстве переменных $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, на множество g, причем с константой $\varepsilon(g) > 0$ имеет место неравенство

$$\varepsilon(g) \sum_{i,l=1,\ldots,n} \| e_{il}^{(g)} u \|_{L_1(g)} \leqslant p(u) \quad \forall u \in \mathfrak{R}.$$

Будем считать, что множество $\sigma \neq \varnothing$. Зафиксируем некоторое его непустое подмножество $\sigma_0 \in \mathcal{O}$, имеющее конечное число компонент связности. Пятерку объектов $(\gamma, g, \varphi, A : \mathfrak{R} \to h, \beta)$, введенных перед примером 1, назовем *регулярным* мостом для полунормы p, если выполнены следующие условия: 1) начала a компакта γ принадлежит σ_0; 2) отображение $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ дважды непрерывно дифференцируемо в обе стороны; 3) $\bar{g}$ — компакт в Ω; 4) $s_0 = n_0$; 5) $h = L_1(g, R^{n_0})$; 6) $A(x)$ — вещественная прямоугольная матрица размера $n_0 \times n$, заданная и непрерывно дифференцируемая на множестве g; 7) на множестве g существуют в обобщенном смысле С. Л. Соболева все дифференциальные операторы e_{il}, $i, l \in \beta$, определяемые равенствами

$$e_{il} u(x) = \left(A(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_l} (\varphi^{-1}(x)) \frac{\partial u(u)}{\partial x_j} \right)_i +$$

$$+ \left(A(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_i} (\varphi^{-1}(x)) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right)_l + \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_l} (\varphi^{-1}(x)) \frac{\partial A(x)}{\partial x_j} u(x) \right)_i +$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_i} (\varphi^{-1}(x)) \frac{\partial A(x)}{\partial x_j} u(x) \right)_l + \sum_{j \in \beta} b_{il}^{(j)}(x) (A(x) u(x))_j$$

$$\forall x \in g, \quad \forall u(x) \in \mathfrak{R},$$

где $b_{il}^{(j)}(x) \in C(g)$ и функция $b_{il}^{(j)}(\varphi(\xi))$ на ∇ при $n_0 < n$ не зависит от аргумента $\widehat{\xi}^{(\beta)}$; 8) существует константа $\varepsilon > 0$ такая, что имеет место неравенство $\varepsilon \sum\limits_{i,l \in \beta} \| e_{il} u \|_{L_1(g)} \leqslant p(u) \quad \forall u \in \mathfrak{R}$.

Предположим, что для любой точки $x \in \Omega \setminus \sigma_0$ найдется конечное семейство регулярных мостов

$$\{\gamma_j, g_j, \varphi_j, A_j : \mathfrak{R} \to L_1(g_j), \beta_j\}_{j=1,\ldots,N},$$

для полунормы p зависящее от x, такое, что $x \in \bigcap\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} \gamma_j$ и ранг матрицы $\begin{pmatrix} A_1(x) \\ \vdots \\ A_N(x) \end{pmatrix}$ равен n. Тогда набор операторов $\mathscr{P} = \{I\}$ подчинен полунорме p. Опишем одну простейшую ситуацию, в которой выполнено сформулированное предположение и, следовательно, набор $\mathscr{P} = \{I\}$ подчинен полунорме p: существуют точки $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ в R^n такие, что векторы $x^{(2)} - x^{(1)}, \ldots \ldots, x^{(n)} - x^{(1)}$ линейно-независимы, гиперплоскость, проходящая через эти точки, не пересекается с множеством Ω и $\forall x \in \Omega \setminus \sigma_0$, $\forall j = 1, \ldots, n$ найдутся точка $y \in \sigma_0 \cap [x^{(j)}, x]$ и множество $g \in \mathcal{O}$, $[y, x] \subset g$, $\bar{g}$ — компакт в Ω, обладающее таким свойством: каждая функция $u(x) \in \mathfrak{R}$ имеет на множестве g обобщенный в смысле С. Л. Соболева диффенциальный оператор $e^{(j)}$, определяемый равенством:

$$e^{(j)}u(x) = \sum_{i,l=1,\ldots,n} \frac{\left(x_i - x_i^{(j)}\right)\left(x_l - x_l^{(j)}\right)}{\left|x - x^{(j)}\right|^2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right),$$

и с константой $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство $\varepsilon \| e^{(j)}u \|_{L_1(g)} \leqslant p(u)$ $\forall u \in \mathfrak{R}$.

Пример 12. Пусть $r = \underline{r}^* + 1$, $\Omega_r = \Omega$, $P_{\underline{r}} = I$, $\mathscr{P} = \{I\}$. Пусть $g_0, g, g_* \in \mathcal{O}$, $\bar{g}_0, \bar{g}_*$ — компакты в Ω, $\bar{g}$ — компакт в g_*, причем для любого множества $\omega \in \mathcal{O}$, такого, что $\bar{\omega}$ — компакт в Ω и $g \cap \omega = \varnothing$, пара (ω, P_r) подчинена паре (g_0, P_r) с не зависящей от ω переходной полунормой. Пусть далее всякая последовательность, ограниченная относительно полунормы $p + \nu_{\mathscr{P}}^{(g_0)}$, содержит подпоследовательность, фундаментальную относительно полунормы $\| \chi_{g_0} \cdot \|_{\mathscr{H}_r}$. Положим $g^* = g_* - \bar{g}$ и обозначим через Ψ совокупность таких функций $\psi(x) \in C^\infty(\Omega)$, у которых $\operatorname{supp}\psi$ — компакт в g_* и $\psi(x) = 1$ в некоторой окрестности множества g. Предположим, что выполнены следующие два условия: 1) $\psi u \in \mathscr{H}$, $\forall \psi \in \Psi$, $\forall u \in \mathfrak{R}$; 2) $\forall \psi \in \Psi$ $\exists \varepsilon(\psi) > 0 : \varepsilon(\psi) \|\psi u\|_{\mathscr{H}} \leqslant p(u) + \| \chi_{g^*} u \|_{\mathscr{H}_r}$ $\forall u \in \mathfrak{R}$ (это оценка типа оценок Л. Хермандера для дифференциальных операторов [3, с. 507]). Тогда набор операторов $\mathscr{P}$ подчинен полунорме p. Рассмотрим одну конкретную ситуацию, в которой условия 1 и 2 выполнены: а) $r = r^* + 1$, $r^* > 1$, $\hat{r} = 1$, $s = 1$, $\Omega_r = \hat{\Omega}_1 = \Omega$, $P_r = I$, $\hat{P}_1 = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha D^\alpha$ — дпф. оператор с постоянными коэффициентами, $m \in N$, $\sum_{|\alpha| \leqslant m} \xi^\alpha a_\alpha \neq 0$ на C^n, $\Omega_{r^*} = g$, $P_{r^*} = \chi_g \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha D^\alpha$, $\Omega_k = \Omega \setminus g$ $\forall k = 1, \ldots, r^* - 1$, $\{P_1, \ldots, P_{r^*-1}\} = \{\chi_{\Omega \setminus g} D^\alpha\}_{|\alpha| = m}$, $\mathscr{H}_r = \hat{\mathscr{H}}_1 = L_1(\Omega)$; б) Ω — связное множество; в) имеют место включения $P_{r^*}(\mathfrak{R}) \subset L_2(g)$, $\chi_{g^*} D^\alpha(\mathfrak{R}) \subset L_2(g^*)$ $\forall \alpha : |\alpha| = m$ и с константой $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\varepsilon \left(\|P_{r^*} u\|_{L^2(g)} + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L_2(g^*)} \right) \leqslant p(u) \quad \forall u \in \mathfrak{R}.$$

4°. Рассмотрим приложения теоремы 1 к задачам вариационного исчисления.

Пусть $\mathfrak{M}$ — непустое подмножество в $\mathfrak{R}$, $g : \mathfrak{M} \to R$ — функционал на $\mathfrak{M}$, f — линейный функционал на $\mathfrak{R}$, $\mathrm{B} : \mathfrak{M} \to \Psi$ — оператор, отображающий множество $\mathfrak{M}$ в непустое множество Ψ произвольной природы, такой, что имеет место импликация $\{u, v \in \mathfrak{M},\ \mathrm{B}(u) = \mathrm{B}(v)\} \Rightarrow \{u - v \in X\}$, где X — замкнутое векторное подпространство в $\mathfrak{R}$.

Введем на $\mathfrak{M}$ функционал $g(\cdot) = g(\cdot) - < f, \cdot >$ и зададим элемент $\psi \in \mathrm{B}(\mathfrak{M})$. Положим $\mathfrak{M}^{(\psi)} = \{u \in \mathfrak{M} | \mathrm{B}(u) = \psi\}$. Зафиксируем элемент $u^{(0)} \in \mathfrak{M}^{(\psi)}$ и рассмотрим множество $\mathfrak{M}^{(\psi)}_{u^{(0)}} = \mathfrak{M}^{(\psi)} - u^{(0)}$, расположенное в подпространстве X.

Положим $X_0 = \ker \pi$, где π — оператор из теоремы 1, а через π_0: $X \overset{\text{на}}{\to} X_0$ обозначим линейный проекционный оператор с $\ker \pi_0 = X \cap \ker p$.

Предположим, что X — рефлексивное подпространство в $\mathfrak{R}$, $\pi_0(\mathfrak{M}^{(\psi)}_{u^{(0)}})$ — слабозамкнутое подмножество в X_0, а функционал $g(u^{(0)} + \cdot) : \mathfrak{M}^{(\psi)}_{u^{(0)}} \to R$ имеет вид $g(u^{(0)} + u) = g(u, u | u^{(0)})$ $\forall u \in \mathfrak{M}^{(\psi)}_{u^{(0)}}$, где $u, v \to g(u, v | u^{(0)})$ — вещественный функционал на множестве $\mathfrak{M}^{(\psi)}_{u^{(0)}} \times \mathfrak{M}^{(\psi)}_{u^{(0)}}$, обладающий вместе с функционалом f такими двумя свойствами: *а*) для любой последовательности $\{u^{(n)}\} \subset \mathfrak{M}^{(\psi)}_{u^{(0)}}$ такой, что $\pi_0 u_n \to v \in \pi_0(\mathfrak{M}^{(\psi)}_{u^{(0)}})$ слабо в X_0, найдется такая ее подпоследовательность, которую мы обозначим тем же символом, и такой элемент $w \in X \cap \ker p$, что $v + w \in \mathfrak{M}^{(\psi)}_{u^{(0)}}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{\xi \in \mathfrak{M}^{(\psi)}_{u(0)}, p(\xi) \leqslant \rho} \left(g(u_n, \xi | u^{(0)}) - g(v + w, \xi | u^{(0)}) - \langle f, u_n \rangle + \right.$$
$$\left. + \langle f, v + w \rangle \right) \geqslant 0 \quad \forall \rho > 0;$$

б) существует оператор $G(\cdot | u^{(0)}) : \mathfrak{M}^{(\psi)}_{u(0)} \to X_0^*$, удовлетворяющий неравенству $g(u, v | u^{(0)}) - g(u^{(0)} + u) \geqslant < G(u | u^{(0)}), \pi_0(v - u) >$ $\forall u, v \in \mathfrak{M}^{(\psi)}_{u(0)}$.

Теорема 2. Пусть либо $\sup\limits_{u \in \mathfrak{M}^{(\psi)}_{u(0)}} p(u) < +\infty$, либо

$$\sup_{u\in\mathfrak{M}^{(\psi)}_{u^{(0)}}} p(u) = +\infty \text{ и } \lim_{u\in\mathfrak{M}^{(\psi)}_{u(0)},\, p(u)\to+\infty} g_f\left(u^{(0)}+u\right) >$$
$$> \inf_{u\in\mathfrak{M}^{(\psi)}_{u(0)}} g_f\left(u^{(0)}+u\right).$$

Тогда $\exists u \in \mathfrak{M}^{(\psi)}: g_f(u) = \inf\limits_{v\in\mathfrak{M}^{(\psi)}} g_f(v)$.

Пример 13. Пусть $\mathfrak{R}$ — пространство из примера 9[12], причем переменные N-функции M и M^* удовлетворяют Δ_2'-условию, $\mathfrak{M}$ — непустое слабозамкнутое подмножество в $\mathfrak{R}$, $\Gamma: \mathfrak{M} \to L_M(\Omega)$ — оператор, переводящий слабо сходящиеся последовательности из $\mathfrak{M}$ в сильно сходящиеся последовательности из $L_M(\Omega)$ и такой, что $\sup\limits_{u\in\mathfrak{M}} \|\Gamma(u)\|_{L_M(\Omega)} < +\infty$, $\mathrm{B}: \mathfrak{M}\to\Psi$ — оператор, отображающий множество $\mathfrak{M}$ в непустое множество Ψ произвольной природы, такой, что имеет место импликация: $\{u, v\in\mathfrak{M}, \mathrm{B}(u) = \mathrm{B}(v)\} \Rightarrow \{u - v \in X\}$, где X — замкнутое векторное подпространство в $\mathfrak{R}$. Зададим на $\mathfrak{M}$ функционал $g(\cdot) = \int\limits_\Omega M(x, \mathscr{L}\cdot + \Gamma(\cdot))\,dx$. Зафиксируем некоторое разложение пространства $X \cap \ker p$ в прямую сумму векторных подпространств: $X \cap \ker p = \hat{X} \oplus \check{X}$.

Пусть $I_X = \pi_0 + \hat{\pi} + \check{\pi}$ — разложение тождественного оператора на X в сумму линейных проекционных операторов, соответствующее разложению подпространства X в прямую сумму векторных подпространств вида $X = X_0 \oplus \hat{X} \oplus \check{X}$.

Предположим, что имеет место импликация $\{u, v \in \mathfrak{M}, u - v \in \check{X}\} \Rightarrow \{\Gamma(u) = \Gamma(v)\}$. Пусть $\psi \in \mathrm{B}(\mathfrak{M})$, $f \in \mathfrak{R}^*$, причем $\langle f, v\rangle = 0$ $\forall v \in \check{X}$, $u^{(0)} \in \mathfrak{M}^{(\psi)}$ и множество $\hat{\pi}\left(\mathfrak{M}^{(\psi)}_{u(0)}\right)$ ограничено в $\mathfrak{R}$. Тогда в силу теоремы 2 $\exists u \in \mathfrak{M}^{(\psi)}: g_f(u) = \inf\limits_{v\in\mathfrak{M}^{(\psi)}} g_f(v)$.

Следующий пример имеет непосредственное отношение к нелинейной теории оболочек.

Пример 14. Пусть $\mathfrak{R}$, M, $\mathfrak{M}$, $\mathrm{B}: \mathfrak{M}\to\Psi$, X, $\hat{X}$, $\check{X}$, ψ, f, $u^{(0)}$ те же, что в примере 13 (в частности, $\hat{\pi}\left(\mathfrak{M}^{(\psi)}_{u(0)}\right)$ — ограниченное множество в $\mathfrak{R}$). Пусть задано целое число $N > 1$ и каждому $j \in N$, $j \leqslant N$, поставлены в соответствие: пространство $\Omega^{(j)}$ точек $x^{(j)}$ с σ-конечной мерой[13]; число $\varkappa_j \in N$; переменная N-функция $M_j: \Omega^{(j)} \times R^{\varkappa_j} \to R$; линейный непрерывный опера-

[12]) Пространство $\mathfrak{R}$ в примерах 10—12 — частный случай этого пространства.

[13]) Обычно $\Omega^{(j)} \in \mathcal{O}$ или является подмножеством границы $\partial\Omega$ множества Ω.

тор $\mathscr{L}_j : \mathfrak{R} \to L_{M_j}(\Omega^{(j)})$; полунорма $p_j(\cdot) = \|\mathscr{L}_j \cdot\|_{L_{M_j}(\Omega^{(j)})}$ на $\mathfrak{R}$; линейный на $\mathfrak{R}$ функционал f_j; оператор $\Gamma_j : \mathfrak{M} \to L_{M_j}(\Omega^{(j)})$, переводящий слабо сходящиеся последовательности из $\mathfrak{M}$ в сильно сходящиеся последовательности из $L_{M_j}(\Omega^{(j)})$.

Введем такие обозначения: $\mathfrak{M}_1(\rho) = \mathfrak{M}\ \forall \rho > 0$,

$$\mathfrak{M}_j(\rho) = \left\{ u \in \mathfrak{M} \,\middle|\, \sum_{k=1}^{j-1} p_j(u) \leqslant \rho \right\} \quad \forall \rho > 0, \quad \forall j = 2, \ldots, N.$$

Предположим, что выполнены следующие условия: 1) имеет место импликация

$$\{u,\ v \in \mathfrak{M},\ u - v \in \check{X}\} \to \{\mathscr{L}_j u + \Gamma_j(u) = \mathscr{L}_j v + \Gamma_j(v) \forall j = 1, \ldots, N\},$$

2) с константой $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство $\varepsilon p(u) \leqslant \sum_{j=1}^{N} p_j(u)$ $\forall u \in \mathfrak{R}$; 3) $\sup\limits_{u \in \mathfrak{M}_j(\rho)} \|\Gamma_j(u)\|_{L_{M_j}(\Omega^{(j)})} < +\infty \quad \forall \rho > 0, \forall j$; 4) $f = \sum_{j=1}^{N} f_j$; 5) имеет место неравенство $\langle f_1, u \rangle \leqslant \beta p_1(u) \forall u \in \mathfrak{M}$, где $\beta \in R$, если функция $M_1^* : \Omega^{(1)} \times R^{\varkappa_1} \to R$ удовлетворяет Δ_2'-условию, и $\beta \in (-\infty, 1)$ — в противном случае; 6) $\sup\limits_{u \in \mathfrak{M}} \langle f_j, u \rangle < +\infty$ $\forall j = 2, \ldots, N$.

Зададим на $\mathfrak{M}$ функционал

$$g(\cdot) = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Omega^{(j)}} M_j\left(x^{(j)}, \mathscr{L}_j \cdot + \Gamma_j(\cdot)\right) dx^{(j)}.$$

В силу теоремы 2 $\exists u \in \mathfrak{M}^{(\psi)} : g_f(u) = \inf\limits_{v \in \mathfrak{M}^{(\psi)}} g_f(v)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Портнов В. Р.** Пространства типа С. Л. Соболева с полунормой, имеющей конечномерное ядро.— В кн.: Вопросы вычислительной и прикладной математики. Вып. 32. Ташкент, 1975, с. 114—138.
2. **Портнов В. Р.** О разрешимости нелинейных операторных уравнений в банаховых пространствах.— Докл.АН СССР, 1975, т. 225, № 1, с. 52—55.
3. **Морен К.** Методы гильбертова пространства. М., Мир, 1965.
4. **Степанов В. В.** Курс дифференциальных уравнений. М., 1958.
5. **Бесов О. В.** О коэрцитивности в неизотропном пространстве С. Л. Соболева.— Мат. сб., 1967, т. 73, № 4, с. 585—599.
6. **Портнов В. Р.** Об интегральном представлении функций через обыкновенный дифференциальный оператор.— Дифференц. уравнения, 1970, т. 6, № 8, с. 1424—1438.

ОБ АППРОКСИМАТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В. М. ТИХОМИРОВ

(*Москва*)

Изучаются аппроксимативные характеристики $W_{\bar{P}}^{\bar{D}}(\bar{\gamma}, T)$-классов функций многих переменных, задаваемых системой неравенств вида $\|Dx\|_{L_{P(T)}} \leqslant \gamma_j$, $j = 1, \ldots, m$, $D = (D_1, \ldots \ldots D_m)$, $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, $\bar{P} = (P_1, \ldots, P_m)$, $\gamma_j > 0$, $1 \leqslant p^j \leqslant \leqslant \infty$, $j = 1, \ldots, m$, $T = R^n$ или T^n, или $R_+ \times R^{n-1}$, D_j — дифференциальные операторы. Результаты относятся к условиям конечности задачи $\|D_0 x\|_{L_{p^0}(T)} \to \sup$; $x \in W_{\bar{P}}^{\bar{D}}(\bar{\gamma}, T)$ и точным решениям этой задачи в отдельных частных случаях. Ставятся вопросы аппроксимации изучаемых классов.

1. Постановка задачи. В статье освещены три темы, тесно связанные с проблематикой теорем вложения, поставленной в замечательных работах С. Л. Соболева [1, 2]. Общий замысел теорем вложения состоит в выяснении вопроса, как по априорной информации, сводящейся к тому, что интересующая нас функция принадлежит к определенным классам функций (скажем, удовлетворяет каким-то неравенствам с дифференциальными операторами), извлечь информацию о принадлежности ее некоторому другому классу. Эта проблематика имеет два аспекта: асимптотический, когда нас интересует сам факт вложения, и точный, когда мы интересуемся некоторыми экстремальными соотношениями, связанными с вложениями. Постановку точных экстремальных задач выдвинул в 30-е годы А. Н. Колмогоров [3]. Наконец, возникает задача о наилучшем приближении функций, если опять-таки мы располагаем относительно нее описанной выше априорной информацией. Эта задача послужила предметом исследования школы С. М. Никольского [4, 5].

В достаточно общей форме этот круг вопросов описывается следующей постановкой. Пусть $D_0, \ldots, D_m$ — некоторые дифференциальные операторы на многообразии T. У нас всегда $T = R^n$, T^n или $R_+ \times R^{n-1}$, т. е. T — n-мерное евклидово пространство, n-мерный тор или полупространство n-мерного евклидова пространства. Требуется исследовать задачу

$$\|D_0 x\|_{L_{p^0}(T)} \to \sup; \; \|D_j x\|_{L_{p^j}(T)} \leqslant \gamma_j, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

где $x(\cdot)$ — обобщенная функция, обладающая тем свойством, что $D_j x \in L_{p^j}(T)$, а норма $D_j x$ в $L_{p^j}(T)$ не превосходит $\gamma_j > 0$, $j = 1, \ldots, m$. В неравенствах, содержащихся в задаче (1), и заключена та априорная информация, о которой говорилось выше.

Если значение задачи конечно, то $x(\cdot)$ принадлежит другому классу, состоящему из тех обобщенных функций, для которых $D_0x \in L_{p^0}(T)$.

В работах С. Л. Соболева и многих его последователей решался вопрос о конечности задачи (1), скажем, для вложения класса $W_p^r(R^n)$ в $C(R^n)$, т. е.

$$\|x(\cdot)\|_{C(R^n)} \to \sup; \quad \|D^\alpha x\|_{L_p(R^n)} \leqslant 1, \; \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = r.$$

Начиная со старых работ Ландау и Адамара, в одномерном случае для $T = R$ или R_+ решались экстремальные задачи вида

$$\|D^k x\|_{L_p(T)} \to \sup; \; \|x\|_{L_q(T)} \leqslant \gamma_1, \; \|D^r x\|_{L_s(T)} \leqslant \gamma_2. \tag{2}$$

Колмогоровым была поставлена и общая задача (1) с $D_j = D^{r_j}$, $T = RvR^n$, $p^j = \infty$.

Задачам типа (2) посвящено множество работ, из которых отметим работы Стечкина и его учеников — Арестова, Бердышёва, Габушина, Субботина, Тайкова, а также Надя, Домара и др. Их обзор содержится, например, в [6, 7].

Относительно задач (1) возникает три группы вопросов: 1) критерии конечности; 2) нахождение точных решений; 3) вопросы приближения классов функций в метрике $L_{p^0}(T)$, определяемых неравенствами, стоящими в ограничениях задачи (1). Вопросы типа 1 и 2 имеют интерес и для других областей математики. В частности, для приближения операторов дифференцирования.

Далее будем рассматривать следующий класс задач (1):

$$\|D^{\alpha^0} x\|_{L_{p^0}(T)} \to \sup; \; \|D^{\alpha^j} x\|_{L_{p^j}(T)} \leqslant \gamma_j, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1'}$$

где D^α — оператор дробного дифференцирования порядка α, определяемый формулой $D^\alpha x = F^{-1} \circ \mathscr{E}^\alpha \circ Fx$ с помощью операторов, оператора Фурье F, сопоставляющего функции $x(\cdot)$ на торе T^n последовательность функции $\{(Fx)(k)\}$, $k \in Z^n$ по формуле $\widehat{x}_k = (Fx)(k) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{T^n} x(t)\, e^{-i(t,k)} dt$, функции $x(\cdot)$ на R^n функцию $\widehat{x}(\sigma) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{R^n} x(t)\, e^{-i\langle t,\sigma\rangle} dt$ — обратного преобразования Фурье F^{-1} и оператора $\mathscr{E}^\alpha$ — оператора умножения, действующего на последовательность $\widehat{x} = \{\widehat{x}_k\}$, $k \in Z^n$ по формуле $(\mathscr{E}^\alpha \widehat{x})(k) = (ik)^\alpha \widehat{x}_k$, на функцию $\widehat{x}(\cdot)$ — по формуле $(\mathscr{E}^\alpha \widehat{x})(\sigma) = (i\sigma)^\alpha \widehat{x}(\sigma)$. При этом $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $t = (t_1, \ldots, t_n)$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, α_i, t_i, $\sigma_i \in R$, $\langle t, \sigma \rangle = \sum\limits_{i=1}^n t_i\sigma_i$, $(i\sigma)^\alpha = \prod\limits_{j=1}^n (i\sigma_j)^{\alpha_j}$, $(i\sigma)^b = |a|^b e^{(i\pi b \operatorname{sign} a)/2}$.

Задача (1) была предметом изучения на семинаре автора по теории приближений (МГУ, 1976—1977 гг). Далее дается обзор результатов по этой тематике, полученных участниками семинара.

2. **Критерии конечности.** Наиболее завершенные результаты получаются для пространств L_p с векторными $p=(p_1,\ldots,p_n)$, когда норма определяется так (на торе):

$$\|x(\cdot)\|_{L_p(T^n)}=\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{T^1}\left(\ldots\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{T_1}|x(t)|^{p_1}dt_1\right)^{p_2/p_1}dt_2\ldots\right)^{p_n/p_{n-1}}dt_n\right)^{1/p_n}.$$

Для формулировки результатов нам понадобятся специальные множества, через которые описываются вложения:

$$\widetilde{G}=\widetilde{G}\left(\frac{1}{p^j},\alpha^j\right)=\left\{\operatorname{conv}\left\{\left(\frac{1}{p^j},\alpha^j\right),\ j=1,\ldots,m\right\}-\right.$$

$$\left.-(\lambda,\lambda)+(\nu,0),\ \lambda,\nu\geqslant 0\right\};$$

$$G=G\left(\frac{1}{p^j},\alpha^j\right)=\left\{\operatorname{conv}\left\{\left(\frac{1}{p^j},\alpha^j\right),\ j=1,\ldots,m\right\}-(\lambda,\lambda),\ \lambda\geqslant 0\right\}.$$

Здесь $\frac{1}{p}=\left(\frac{1}{p^1},\ldots,\frac{1}{p^n}\right)$, $0=(0,0,\ldots,0)$, $\nu\geqslant 0\Leftrightarrow\nu_i\geqslant 0$, $i=1,\ldots,m$, $1<p_i^j<\infty$.

Т е о р е м а 1. Если $T=T^n$ и $0<\frac{1}{p^0}\leqslant 1$, то задача (1′) конечна тогда и только тогда, когда точка $\left(\frac{1}{p^0},\alpha^0\right)\in\widetilde{G}$.

Т е о р е м а 2. Если $T=R^n$, $0<\frac{1}{p^0}<1$, то задача (1′) конечна тогда и только тогда, когда точка $\left(\frac{1}{p^0},\alpha^0\right)\in G$.

Теорема 1 принадлежит Э. М. Галееву [8]. Само множество и достаточное условие вложения было получено для несколько иных, но вполне аналогичных классов Н. С. Бахваловым [9]. Теорема 2 принадлежит Г. Г. Магарил-Ильяеву [10]. Основные моменты доказательства теорем 1 и 2 разработаны школой С.М.Никольского. Важнейшую роль в них играют мультипликативные неравенства О. В. Бесова [11]. Э. М. Галеев охватил и случай, когда среди p_i^0 имеются равные бесконечности. В остальных случаях вопрос о вложениях при условии, что некоторые из p_i^j равны единице или бесконечности $j=0,1,\ldots,m$, $i=1,\ldots,n$, остается открытым.

3. **Точные решения.** Нахождение точных решений возможно, когда уравнения, получающиеся применением методов теории экстремальных задач, обладают упрощенной структурой (линейной, квадратичной, конечномерной) или имеют инварианты. В остальных случаях уравнения могут быть решены, по-видимому, лишь с помощью ЭВМ.

Общие принципы применения теории экстремальных задач описаны в книге [6]. Там же разбираются одномерные примеры, причем в ряде ситуаций одномерность не является существенной. Укажем несколько новых случаев, когда решение найдено.

Полностью исследованы задачи (1′) и некоторые подобные им, если все $p^j = 2, 2 = (2, 2, \ldots, 2)$ для $T = R^n$ и $T = T^1$. Этим исследованиям посвящена работа Динь Зунга [12]. При этом получили завершение (для случая $T = R^n$) теоремы, доказанные Харди — Литтльвудом — Полиа и Ю. Г. Субботиным.

С точки зрения теории экстремальных задач здесь получается особенно простая редукция — к задачам линейного программирования.

Была подвергнута детальному исследованию задача $p^j = 2$, $j = 1, \ldots, m$. Изначальные результаты, относящиеся к этой теме, получены Л. В. Тайковым и В.Н. Габушиным (о них см. [6]). Поэтому весь рассматриваемый случай мы называем случаем Тайкова — Габушина. Точные результаты, полученные в этом направлении, изложены в работе [13]. Случай Тайкова — Габушина в R^n и $R_+ \times R^{n-1}$ редуцируется к задаче квадратичного программирования, что позволяет и ее исследовать.

Другие случаи точных решений рассмотрены в статьях [14—16].

4. Приближения классов гладких функций. Вопросы наилучшего приближения классов гладких функций, подобных тем, которые задаются неравенствами в (1) для компактных многообразий (скажем, для тора), не требуют новых постановок. Можно ставить задачу, скажем, о поперечниках по Колмогорову или Александрову (см. [6]) или иных величинах, изучающихся в теории приближений. Условия конечности, о которых говорилось в п. 2, обычно совпадают с условиями компактной вложимости, и потому возникает естественная задача о вычислении, скажем, поперечника по Колмогорову класса $\widetilde{W}^{\overline{\alpha}}_{\overline{P}}(\overline{\gamma}, T^n)$, для функций из которого выполнены неравенства $\|D^{\alpha^j}x\|_{L_{p^j}(T^n)} < \gamma_j$, $j = 1, \ldots, m$, $\overline{\alpha} = (\alpha^1, \ldots, \alpha^m)$, $\overline{P} = (P^1, \ldots, P^n)$, $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ в пространстве $L_{p^0}(T^n)$ в случае, если в соответствии с теоремой 1 имеется вложение $W^{\overline{\alpha}}_{\overline{P}}(\overline{\gamma}, T^n)$ в $L_{p^0}(T^n)$. Правда, и здесь возникают особые задачи, не типичные для классической теории приближений. Например, как наилучшим образом «отбирать» гармоники для приближения класса $W^{\overline{\alpha}}_{\overline{P}}(\overline{\gamma}, T^n)$ методом Фурье; когда метод Фурье может дать асимптотически наилучшее приближение класса $W^{\overline{\alpha}}_{\overline{P}}(\overline{\gamma}, T^n)$, и. т.п. Ряд подобных вопросов решен в статьях [8, 17], но окончательные результаты еще не получены.

Вопросы приближения функций на некомпактных многообразиях (скажем, в R^n) требуют некоторого изменения постановок задач. Здесь нельзя ставить вопрос о точности, с которой класс функций (скажем, $W_{\bar{p}}^{\bar{\alpha}}(\bar{\gamma}, R^n)$) можно приблизить подпространством заданной размерности, но можно ставить вопрос о точности приближения подпространствами, «средняя» размерность которых на единицу времени равна заданному числу. Вопрос об аппроксимативных характеристиках классов функций (и притом случайных функций), определенных на всей вещественной оси, был впервые поставлен Шенноном. Для неслучайных функций «энтропийная» усредненная характеристика введена Колмогоровым и изучена автором [18]. Приведем аналогичную характеристику классов функций в R^n, отправляющуюся не от энтропии, а от поперечника по Колмогорову. Пусть W — класс функций, содержащийся в пространстве $L_p(R^n)$, W^T—совокупность ограничений W на куб $K^T = \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, L_p^T — пространство $L_p(K^T)$, а $n_\varepsilon(W^T, L_p^T)$— функция, обратная к ε-поперечнику по Колмогорову. Если существуют $\underline{\lim}_{T\to\infty} \frac{n_\varepsilon(W^T \cap B_p, L_p^T)}{T^n}$ и $\overline{\lim}_{T\to\infty} \frac{n_\varepsilon(W^T \cap B_p, L_p^T)}{T^n}$ (где B_p — единичный шар в пространстве L_p (R)) и их значения равны, то их общее значение естественно назвать средней ε-размерностью класса W в $L_p(R^n)$. Обозначим ее $\nu_\varepsilon(W, L_p(P^n))$.

Аналогом тригонометрических полиномов для приближений в пространствах $L_p(R)$ является известное пространство B_σ (см. [18]). В работе [18] фактически доказано, что

$$\nu_\varepsilon(B_\sigma, L_\infty(R)) = \frac{\sigma}{\pi}, \tag{3}$$

т. е. оно не зависит от ε. Аналогичная формула верна в пространстве R^n. Такие пространства назовем равномерными. Равномерные пространства и являются аналогом конечномерных пространств для некомпактных классов.

Динь Зунгом [12] доказано обобщение формулы (3) на n-мерный случай в пространстве $L_2(R^n)$ и построена теория приближений классов $W_2^{\bar{\alpha}}(\bar{\gamma}, R^n)$ равномерными пространствами. Для стандартных классов $W_\infty^r(R)$, исследуемых в пространстве $L_\infty(R)$, доказывается (Ле Чыонг Тунг), что пространства B_σ являются экстремальными (наряду с другими) подпространствами среди всех равномощных подпространств заданной средней размерности. Аналогичные факты верны и для других подобных характеристик.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Соболев С. Л.** Об одной теореме функционального анализа.— Мат. сб., 1938, т. 4, № 3, с. 471—497.
2. **Соболев С. Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск, 1962.

3. Колмогоров А. Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале.— Учен. зап. МГУ, 1939, вып. 30, кн. 3, с. 3—16.
4. Никольский С. М. Приближения функций многих переменных и теоремы вложения. М., Наука, 1969.
5. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., Наука, 1975.
6. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М., Изд-во Моск. ун-та, 1976.
7. Арестов В. В. О точных неравенствах между нормами функций и их производных.— Acta Sci. Math. Szeged, 1972, v. 33, N 3—4, p. 243—267.
8. Галеев Э. М. Приближения суммами Фурье классов функций с несколькими ограниченными производными.— Мат. заметки, 1978, т. 23, № 2, с. 197—212.
9. Бахвалов Н. С. Теоремы вложения для классов функций с несколькими ограниченными производными.— Вестн. МГУ. Сер. мат. 1963, № 3, с. 7—16.
10. Магарил-Ильяев Г. Г. Задача о промежуточной производной.— Мат. заметки, 1979, т. 25, № 1, с. 81—96.
11. Бесов О. В. Мультипликативные оценки для интегральных норм дифференцируемых функций многих переменных.— Труды мат. ин-та АН СССР, 1974, т. 131, с. 3—15.
12. Динь Зунг. Аппроксиматичные характеристики классов гладких функций в метрике. Канд. дис. М., 1978.
13. Буслаев А. П., Тихомиров В. М. О неравенствах для производных в многомерном случае.— Мат. заметки, 1979, т. 256, № 1, с. 59—73.
14. Буслаев А. П. Об одной экстремальной задаче, связанной с неравенствами для производных.— Вестн. МГУ. Сер. мат., 1978, № 3, с. 67—77.
15. Магарил-Ильяев Г. Г. О неравенствах Колмогорова на полупрямой.— Вестн. МГУ, Сер. мат., 1976, № 5, с. 33—41.
16. Соляр В. Г. Об одном неравенстве для норм функций и ее производных.— Изв. вузов. Математика, 1976, № 2, с. 64—68.
17. Галеев Э. М. Приближение некоторых классов периодических функций многих переменных суммами Фурье в метрике.— Успехи мат. наук, 1977, т. 32, вып. 4, с. 251—252.
18. Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М. ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах.— Успехи мат. наук, 1959, т. 14, вып. 2, с. 3—86.

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА МАТРИЧНОГО МЕТОДА СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ — ЧЕБЫШЕВА

Л. П. ФАЛАЛЕЕВ

(Алма-Ата)

Пусть $f(x) \in C_{[-1,1]}$. Введем в рассмотрение алгебраические полиномы $P_n(f, \Lambda, x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} c_k(f)\, T_k(x)$, где $T_k(x)$, $k = 1, \ldots, n$ — ортонормированная с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ система полиномов Чебышева; $c_k = c_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по этой системе; $\Lambda = \lambda_k^{(n)}$, $\lambda_0^{(n)} = 1$, $n = 1, 2 \ldots$; $\lambda_k^{(n)} = 0$, $k > n$ —

нижняя треугольная матрица чисел, удовлетворяющих условию, чуть более широкому, нежели условие Стечкина — Фомина [1]:

$$n \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta\lambda_k^{(n)})^2 \leqslant c_1; \ \lambda_n^{(n)} \leqslant \frac{c_2}{\ln n}. \tag{1}$$

Здесь c_1, c_2 — зафиксированные постоянные (класс таких матриц обозначим Λ^*); $\Delta\lambda_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)} - \lambda_{k+1}^{(n)}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$; $\Delta\lambda_n^{(n)} = \lambda_n^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$

Положим $A_n(x) = \sup\limits_{\Lambda \subset \Lambda^*} \sup\limits_{f \in M} |f(x) - P_n(f, \Lambda, x)|$. Нами исследовано поведение величины $A_n(x)$ на некоторых функциональных классах M. История этого вопроса изложена в [2] (см. также [3, 4]). Сформулируем теорему и наметим схему доказательства наиболее простого случая.

Т е о р е м а. Пусть $f(x) \leqslant \mathrm{Lip}_1\, \alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$. Тогда для любого $x \in (-1,1)$

$$A_n(\alpha, x) = \begin{cases} O_x\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), & 0 < \alpha < \frac{1}{2}, \\ O_x\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right), & \alpha = \frac{1}{2}, \\ O_x\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), & \alpha > \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{2}$$

причем все оценки точны в порядковом отношении.

Заметим, что символ $O_x(\,)$ указывает на зависимость оценки от положения точки на рассматриваемом отрезке, которую (в явном виде громоздкую) мы опустили.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $y = \arccos x$, тогда $\Delta_n(f, \Lambda, x) = |P_n(f, \Lambda, x) - f(x)| = \frac{1}{\pi}\left|\int\limits_0^\pi [f(\cos t) - f(\cos y)] \times \right.$ $\left. \times \left\{1 + \sum\limits_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^{(n)} [\cos\nu(t+y) + \cos\nu(t-y)]\right\} dt\right|$. Проделаем одно преобразование Абеля, тогда

$$\Delta_n(f, \Lambda, x) = \frac{1}{\pi}\left|\int\limits_0^\pi [f(\cos t) - f(\cos y)] \sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta\lambda_\nu^{(n)} \left[\frac{\sin(\nu+1/2)(t+y)}{2\sin(t+y)/2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\sin(\nu+1/2)(t-y)}{2\sin(t-y)/2}\right] dt\right| + O_x\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = J_1(y) + J_2(y) + O_x\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

так как в силу условия (1) и неравенства Лебега

$$\lambda_n^{(n)} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi [f(\cos t) - f(\cos y)] \left\{\frac{\sin(n+1/2)(t+y)}{2\sin(t+y)/2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sin(n+1/2)(t-y)}{2\sin(t-y)/2}\right\} dt = \lambda_n^{(n)} (P_n(f, 1, x) - f(x)) = O_x\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Так как $J_2(y) = J_1(-y)$, то будем оценивать лишь $J_1(y)$. Производя несложные преобразования и учитывая условие Липшица, получим

$$J_1(y) \leqslant c(\alpha) \int\limits_0^{\pi/2} |\sin(u-y)\sin u|^\alpha \left| \sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta\lambda_\nu^{(n)} \frac{\sin(2\nu+1)u}{\sin u} \right| du,$$

где $c(\alpha)$ здесь и в дальнейшем — постоянные, вообще говоря различные, зависящие от α. Поскольку $\frac{1}{(\sin u)^{1-\alpha}} - \frac{1}{u^{1-\alpha}} = O(1)$, $\alpha \geqslant 0$, $|u| \leqslant \pi/2$ и $|u \pm v|^\alpha = |u|^\alpha + \theta|v|^\alpha$, $0 < \theta < 1$, $0 < \alpha \leqslant 1$, то

$$J_1(y) \leqslant c(\alpha) \left\{ |\sin y|^\alpha \left| \sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta\lambda_\nu^{(n)} \int\limits_0^{\pi/2} \sin(2\nu+1)u \left(\frac{1}{u^{1-\alpha}} + \frac{1}{u^{1-3\alpha}} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + 1\right) du \right| + |\cos y|^\alpha \left| \sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta\lambda_\nu^{(n)} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\nu+1)u}{u^{1-2\alpha}} du \right| \right\}.$$

Далее используются неравенство Коши — Буняковского, ортогональность на $[0, \pi/2]$ системы $\{\sin(2\nu+1)t\}$ и оценки

$$\int\limits_0^{1/n} \frac{\sin(2\nu+1)u}{u^\beta} du = O\left(\frac{2\nu+1}{n^{2-\beta}}\right), \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 1;$$

$$\int\limits_{1/n}^{\pi/2} \frac{du}{u^{2\beta}} = \begin{cases} O(1), & 0 < \beta < 1/2, \\ O(\ln n), & \beta = 1/2, \\ O\left(n^{2\beta-1}\right), & \beta > 1/2. \end{cases}$$

Сравнивая поведение $\Delta_n(f, \Lambda, x)$ на промежутках $[0, 1/6)$, $[1/6, 1/4)$, $[1/4, 1/2)$, $[1/2, 1]$, из (3) получим (2). Точность первой оценки в (2) очевидна. Хорошо известно, что

$$\mathrm{Lip}_1\alpha \ni f(x) = \begin{cases} (u-x)^\alpha, & 1 \geqslant u \geqslant x, \\ (x-u)^\alpha, & -1 \leqslant u \leqslant x, \quad 0 < \alpha \leqslant 1. \end{cases}$$

В случае, когда $\alpha > 1/2$, неулучшаемость третьей оценки из (2) показывается с помощью следующей матрицы Λ^*: $\lambda_0^{(n)} = 1$; $\lambda_1^{(n)} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, $\lambda_k^{(n)} = 1 - \frac{k}{n+1}$, $2 \leqslant k \leqslant n$; $\lambda_k^{(n)} = 0$, $k > n$.

Точность второй оценки из (2) для $\alpha = 1/2$ доказывается с помощью конструкции

$$\lambda_0^{(n)} = 1, \; n = 1, 2, \ldots, \; \lambda_k^{(n)} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n \ln(n+1)}}\right) \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{i}},$$

$$k = 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] + 1;$$

$$\lambda_k^{(n)} = \left(\frac{n-k}{n-\left[\frac{n}{2}\right]-1}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{n\ln(n+1)}}\right)\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\frac{1}{\sqrt{i}},$$

$$k=\left[\frac{n}{2}\right]+2,\ldots,n.$$

Показано, что следующие (см. [5]), более жесткие по сравнению с (1) условия $|\lambda_n^{(n)}|+|\Delta\lambda_0^{(n)}|\leqslant c/n^{3/2}$, $\sum_{k=0}^{n-2}(\Delta^2\lambda_k^{(n)})^2+(\Delta\lambda_{n-1}^{(n)})^2\leqslant c/n^3$ гарантируют на классе $\mathrm{Lip}_1\,\alpha$ для соответствующего метода суммирования наилучший порядок приближения.

В терминах третьих симметрических разностей (см. [6]) установлена неулучшаемая оценка на классе $M = W_\beta^2 H^\alpha$ функций, представимых в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k^2}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\,[\cos(y+t)]\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt,$$

где $y = \arccos x$, $\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\,[\cos(y+t)]\,dt = 0$, $\varphi(x)\in\mathrm{Lip}_1\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Фомин Г. А.** О линейных методах суммирования рядов Фурье.— Мат. сб., 1964, т. 64, № 1, с. 144—152.
2. **Баскаков В. А.** О порядке приближения непрерывных функций некоторыми линейными методами суммирования рядов Фурье.— Изв. вузов. Математика, 1969, № 7, с. 20—27.
3. **Баскаков В. А.** О порядке приближения сопряженных функций линейными методами суммирования рядов Фурье.— Изв. вузов. Математика, 1973, № 2, с. 3—14.
4. **Баскаков В. А.** О порядке приближения непрерывных функций некоторыми линейными средними их рядов Фурье.— Мат. заметки, 1971, т. 9, № 6, с. 617—627.
5. **Ермаков П. В.** О сходимости некоторых линейных операторов к функциям класса Z_α.— Мат. заметки, 1977, т. 22, № 4, с. 601—607.
6. **Баскаков В. А.** О некоторых линейных средних рядов Фурье.— В кн.: Теоретические и прикладные задачи математики и механики. Алма-Ата, Наука, 1978.

Часть 5

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ И МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ КОШИ — РИМАНА

Н. К. БЛИЕВ

(*Алма-Ата*)

Сформулируем некоторые теоремы, используемые ниже. Теоремы 2, 3 имеют и самостоятельный интерес. Всюду в дальнейшем $B^{\alpha}_{p,\theta}(G)$ — пространства О. В. Бесова [1], G — ограниченная область точек $z = x + iy$ класса C^1_{ν}, $0 < \alpha < \nu \leqslant 1$.

Теорема 1. Интегральный оператор

$$T_G f = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_G \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dG_{\zeta}$$

ограничен из $B^{\alpha}_{p,\theta}(G)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $0 < \alpha < \nu \leqslant 1$, в $B^{1+\alpha}_{p,\theta}(G)$. Для обобщенных производных имеют место равенства $\partial_{\bar z} T_G f = f$, $\partial_z T_G f = \Pi_G f$, где

$$\Pi_G f = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_G \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} dG_{\zeta}$$

существует в смысле главного значения по Коши и ограничен в $B^{\alpha}_{p,\theta}(G)$.

При $p = \theta = \infty$, $B^{\alpha}_{p,\theta}(G) \equiv H^{\alpha}_{p}(G) = C_{\alpha}(\overline{G})$, теорема имеется в работе [2, с. 73]. Случай $1 < p < 2$, $\alpha = \frac{2}{p} - 1$, $\theta = 1$, опубликован автором [3]. Предложенная там схема доказательства проходит и в остальных случаях.

Теорема 2. Пусть даны $B^{\alpha_j}_{p_j,\theta_j}(\Omega)$, $j = 1, 2$, где Ω — область n-мерного евклидова пространства E^n, $\partial\Omega \in C^1$, $0 < \alpha_j$, $1 \leqslant p_j < \infty$, и удовлетворяет одному из условий:

а) $\theta_j = 1$, $\frac{1}{p_j} - \frac{\alpha_j}{n} \geqslant 0$;

б) $0 < \frac{1}{p_j} - \frac{\alpha_j}{n} \leqslant \frac{1}{\theta_j} \leqslant 1$.

Пусть для определенности $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$ и $\frac{1}{r} \equiv \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{\alpha_2}{n} \leqslant 1$. Тогда для произвольных функций $f_j(x) \in B^{\alpha_j}_{p_j,\theta_j}(\Omega)$ имеем

$$f_1 \cdot f_2 \in B^{\alpha_1}_{r,\theta}(\Omega), \qquad \theta = \max_j \{\theta_j\},$$

$$\|f_1 \cdot f_2\|_{B^{\alpha_1}_{r,\theta}(\Omega)} \leqslant c \|f_1\|_{B^{\alpha_1}_{p_1\theta_1}(\Omega)} \cdot \|f_2\|_{B^{\alpha_2}_{p_2\theta_2}(\Omega)}, \tag{1}$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от f_1 и f_2.

Доказательство. В условиях теоремы справедливы вложения [1]

$$B^{\alpha_j}_{p_j\theta_j}(\Omega) \to L_{\lambda_j}(\Omega), \quad \frac{1}{\lambda_j} = \frac{1}{p_j} - \frac{\alpha_j}{n};$$

$$B^{\alpha_2}_{p_2,\theta_2}(\Omega) \to B^{\alpha_1}_{q_2,\theta_2}(\Omega),\ \alpha_1 = \alpha_2 - \frac{n}{p_2} + \frac{n}{q_2}; \quad q_2 = p_2, \text{ если } \alpha_1 = \alpha_2.$$

При этом нетрудно проверить справедливость соотношений

$$0 < \frac{1}{p_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{q_2} + \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{r} \leqslant 1. \tag{2}$$

Методом индукции можно показать, что

$$\Delta^k_h (f_1 \cdot f_2) = \sum_{l=0}^{k} C^l_k \Delta^{(k-l)}_h f_1(x + lh)\, \Delta^l_h f_2(x), \tag{3}$$

где $k \geqslant 0$ — любое целое число, $\Delta^k_h f$ — k-я разность с шагом $h \in E^n$, $\Delta^0_h f = f$.

Из формулы (3) в силу соотношений (2) и неравенства Гёльдера следует

Теорема 3. Пусть даны $B^{\alpha_j}_{p_j\theta_j}(\Omega)$, $1 \leqslant p_j < \infty$, $1 \leqslant \theta_j \leqslant \infty$, $0 < \alpha_1 \leqslant \alpha_2$, $j = 1, 2$; $\theta \equiv \max_j \{\theta_j\}$.

а. Если $\frac{1}{p_1} - \frac{\alpha_1}{n} \geqslant 0$, $\frac{1}{p_2} - \frac{\alpha_2}{n} < 0$, то для произвольных $f_j \in B^{\alpha_j}_{p_j,\theta_j}(\Omega)$ $j = 1, 2$, $f_1 \cdot f_2 \in B^{\alpha_1}_{p_1,\theta}(\Omega)$.

б. Если $\frac{1}{p_j} - \frac{\alpha_j}{n} < 0$, то для произвольных

$$f_j \in B^{\alpha_j}_{p_j,\theta_j}(\Omega), \quad j = 1, 2, \quad f_1 \cdot f_2 \in B^{\alpha_1}_{r,\theta}(\Omega),$$

где $r = \min\{p_1, q_2\}$, q_2 определяется условием $\alpha_1 = \alpha_2 - n/p_2 + n/q_2$ при $\alpha_1 < \alpha_2$, $q_2 = p_2$ при $\alpha_1 = \alpha_2$.

В каждом из этих случаев а)—б) имеет место неравенство вида (1). Доказывается аналогично теореме 2.

Теорема 4. Пусть задана $A(z) \in B^{\alpha}_{p,\theta}(G)$, где α, p, θ удовлетворяют одному из условий:

а) $1 = \theta$, $\alpha = 2/p - 1$, $1 < p < 2$;

б) $1 \leqslant \theta$, $2/p - 1 < \alpha < 1$, $1 < p < 2$;

в) $1 \leqslant \theta$, $0 < \alpha < 1$, $2 \leqslant p < \infty$.

Тогда оператор $P_G f \equiv T_G(Af)$ переводит $B^{1+\alpha}_{p,\theta}(G)$ в себя и вполне непрерывен.

Теорема в случае а) доказана в работе автора [4, с. 5]. Приведенная там схема доказательства в силу теорем 1—3 проходит и в общем случае.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\partial_{\bar{z}} W + A(z) W + B(z) \overline{W} = F(z) \tag{4}$$

в области G. Решения уравнения (4) будем понимать в обобщенном смысле, указанном в [2, 4].

Теорема 5. Уравнение (4), где A, B и F принадлежат $B^{\alpha}_{p,\theta}(G)$, удовлетворяющему одному из условий а)—б) теоремы 4, всегда разрешимо в $B^{1+\alpha}_{p,\theta}(G)$.

Теорема в случае а) доказана в работе автора [3, с. 39]. Остальные случаи доказываются с помощью теорем 1—4.

Замечание. Пусть в случае в) теоремы 5 $\theta = 1$, $\alpha p = 2$. Тогда справедливы вложения $B^{\alpha}_{p,1}(G) \to C(\overline{G})$, но $B^{\alpha}_{p,1}(G) \not\to C_{\beta}(G)$ ни при каком $\beta > 0$, $B^{1+\alpha}_{p,1}(G) \to C^1(\overline{G})$ [1]. Поэтому из теоремы 5 следует, что если в уравнении (4) A, B и F — непрерывные функции из $B^{\alpha}_{p,1}(G)$, то оно всегда имеет решение и в классическом смысле. Это утверждение представляется интересным, если учесть, что до сих пор существование классического решения уравнения (4) доказано для A, B и F, принадлежащих классу $C_{\beta}(\overline{G})$, $0 < \beta < 1$, непрерывных по Гёльдеру функций (см. [2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.** Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., Наука, 1975. 480 с.
2. **Векуа И. Н.** Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959. 628 с.
3. **Блиев Н. К.** К теории обобщенных аналитических функций в дробных пространствах.— Вестн. АН КазССР, 1976, № 12 с. 33—42.
4. **Блиев Н. К.** Обобщенные в смысле И. Н. Векуа аналитические функции и краевые задачи в дробных пространствах.— Дифференц. уравнения, 1978, т. XIV, № 1, с. 3—11.

ВЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ $\mathring{W}_{p,\nu}^{(l)}(R)$ ПРИ НЕКОТОРЫХ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯХ ОТНОСИТЕЛЬНО ОБЛАСТЕЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ВЕСОВОЙ НОРМЫ ГРАДИЕНТОВ НИЗШИХ ПОРЯДКОВ

М. М. ЗАРУБИН

(*Новосибирск*)

В монографии [1] С. Л. Соболевым были установлены вложения пространств $\mathring{W}_{p,\nu}^{(l)}(R^n)$ относительно параметров p, ν и l (см. [1, гл. V—VI]). В настоящей заметке покажем, что в случае $n = 1$, при весьма необременительных предположениях, могут быть получены более сильные вложения, чем те, которые непосредственно следуют из вложений С. Л. Соболева.

Введем обозначения. Через $L_{p,\nu}(R^n)$ обозначим пространство измеримых на R^n функций $\varphi(x)$ с конечной нормой

$$\|\varphi\|_{p,\nu} \overset{\text{def}}{=} \|\varphi(x)\cdot(1+|x|^2)^{\nu/2}\|_{L_p(R^n)}; \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \ \nu \in R.$$

Через $W_{\text{loc}}^{(l)}(R^n)$, $(l = 0, 1, 2, \ldots)$ обозначим множество локально суммируемых функций $\varphi(x)$, обобщенные производные порядка l которых регулярны на R^n. Тогда $W_{p,\nu}^{(l)}(R^n)$ будет обозначать подмножество $W_{\text{loc}}^{(l)}(R^n)$, состоящее из функций $\varphi(x)$, градиент l-го порядка $T_l(x\,|\,\varphi) \overset{\text{def}}{=} \left(\sum\limits_{|\alpha|=l} \left(D^\alpha\varphi(x)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ которых принадлежит $L_{p,\nu}(R^n)$. Зададим в $W_{p,\nu}^{(l)}(R^n)$ полунорму $\|\cdot\|_{p,\nu}^{(l)}$ следующим равенством:

$$\|\varphi\|_{p,\nu}^{(l)} \overset{\text{def}}{=} \|T_l(x\,|\,\varphi)\|_{p,\nu}.$$

Через $\mathring{W}_{p,\nu}^{(l)}(R^n)$ обозначим замыкание по норме $\|\cdot\|_{p,\nu}^{(l)}$ множества финитных функций из $W_{p,\nu}^{(l)}(R^n)$.

Определение. Областью существования весовой нормы $\|\cdot\|_{p,\nu}$ измеримой функции $\varphi(x)$ (о. с. в. н. $\varphi(x)$) назовем множество $A(\varphi)$ точек (ν, τ), $\left(\tau = \dfrac{n}{p},\ \tau=0 \text{ при } p = \infty\right)$, для которых $\varphi(x) \in L_{p,\nu}(R^n)$, т. е. $\|\varphi\|_{p,\nu} < \infty$.

Следуя С. Л. Соболеву, через $\Lambda(\nu_0, \tau_0\,|\,\Delta, \Gamma)$ обозначим резец с вершиной в точке (ν_0, τ_0) (см. [1, с. 204]). Тогда вложения пространств $\mathring{W}_{p,\nu}^{(l)}(R^n)$, полученные С. Л. Соболевым в [1], будут иметь следующий вид.

Если $\varphi(x) \in \mathring{W}^{(l)}_{p_0,\nu_0}(R^n)$, где $1 < p_0 < \infty$, $l \geqslant 1$, то $A(T_{l-k}(\varphi))$ — о. с. в. н. градиента $T_{l-k}(x|\varphi)$, $(1 \leqslant k \leqslant l)$, содержит резец $\Lambda_k(\nu_k, \tau_k|\Delta_k, \Gamma_k)$, где $\nu_k = \nu_0 + \min(0, \tau_0 - k)$, $\tau_k = \max(0, \tau_0 - k)$, причем

1) $\Delta_k = \{(\nu, \tau)|\nu + \tau = \nu_0 + \tau_0, \tau_k \leqslant \tau \leqslant \tau_0\}$, $\Gamma_k = \{\tau = \tau_k, \nu \leqslant \nu_k\}$ при $k \neq \tau_0$ и $\nu_0 + \tau_0 \neq 1, 2, \ldots, k$;

2) $\Delta_k = \varnothing$, $\Gamma_k = \{\tau = \tau_k, \nu < \nu_k\}$, если $k \neq \tau_0$, а $(\nu_0 + \tau_0) \in \in \{1, 2, \ldots, k\}$; (1)

3) $\Delta_k = \{(\nu, \tau)|\nu + \tau = \nu_0 + \tau_0, 0 < \tau \leqslant \tau_0\}$, $\Gamma_k = \varnothing$ при $k = \tau_0$ и $\nu_0 + \tau_0 \neq 1, 2, \ldots, k$;

4) $\Delta_k = \varnothing$, $\Gamma_k = \varnothing$, если $k = \tau_0$, а $(\nu_0 + \tau_0) \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Замечание 1. Вложения (1) являются действительно вложениями пространств $\mathring{W}^{(l)}_{p,\nu}(R^n)$, так как возможность приближения функции $\varphi(x)$ финитными элементами в новой норме следует из непрерывности всех рассмотренных выше вложений.

В случае $n = 1$ вложения (1) принимают следующий вид (см. пояснение к рис. 1).

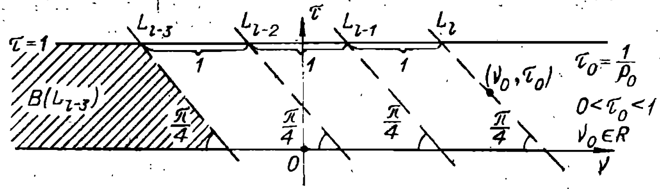


Рис. 1.

На рис. 1 $\varphi \in \mathring{W}^{(l)}_{p_0,\nu_0}(R)$, $1 < p_0 < \infty$, $l \geqslant 1$. Через $B(L)$, где L — некоторая прямая, обозначено множество точек полосы $\{0 \leqslant \tau \leqslant 1\}$, лежащих левее L. Прямые L_{l-k}, $(1 \leqslant k \leqslant l)$ получаются из прямой L_l (см. рис. 1) параллельным сдвигом влево на k единиц. Множества $B(L_{l-k})$ содержатся в $A(T_{l-k}(\varphi))$, причем дополнительная информация о точке (ν_0, τ_0) добавляет к $A(T_{l-k}(\varphi))$ разве что точки прямых L_{l-k} с $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$ (см. (1)).

В [1, гл. V, § 1], а также в работах автора [2, 3] было исследо-

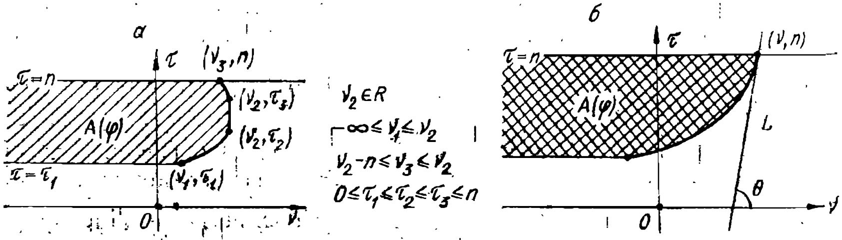


Рис. 2.

вано строение о. с. в. н. Общий вид непустого $A(\varphi)$, ограниченного справа, приведен на рис. 2, *а*.

Если «правая граница» $\partial A(\varphi)$ множества $A(\varphi)$ (на рис. 2 множество $\partial A(\varphi)$ выделено) имеет касательную L в точке (ν, n), то будем писать $\varphi \in \partial(\nu, \theta)$, где ν и θ — определяющие L параметры (см. рис. 2, *б*).

Наши предположения относительно о. с. в. н. градиентов низших порядков состоят в следующем.

Если $\varphi(x) \in W^{(l)}_{\mathrm{loc}}(R)$, $l \geqslant 1$, то существует $k_0 \in \{1, 2, \ldots, l\}$ такое, что $T_{l-k_0}(\varphi) \in \partial(\nu_{k_0}, \theta_{k_0})$ и выполнено

$$0 < \theta_{k_0} < \frac{3\pi}{4}. \tag{2}$$

Замечание 2. Предположения (2) весьма необременительны, так как существование касательной к «правой границе» о. с. в. н. гарантируется почти в каждой точке, а соответствующее множество изменения параметра θ есть промежуток $0 < \theta \leqslant \frac{3\pi}{4}$ (см. [2]).

Основным результатом является

Теорема 1. Пусть $\varphi \in W^{(1)}_{\mathrm{loc}}(R)$; $\varphi \in \partial(\nu_0, \theta_0)$ с $0 < \theta_0 < \frac{3\pi}{4}$. Тогда $A(\varphi') \subset \overline{B}(L)$ (рис. 3, *а*), где через $\overline{B}(L)$ обозначено множество точек, лежащих не правее L.

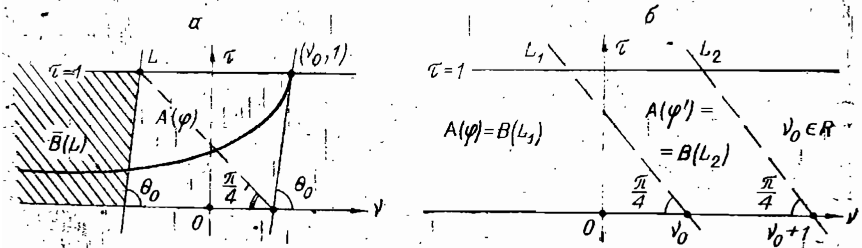


Рис. 3.

Замечание 3. При $\theta_0 = \frac{3\pi}{4}$ теорема 1 неверна, так как существует функция $\varphi \in W^{(1)}_{\mathrm{loc}}(R)$, реализующая пару $\langle A(\varphi), A(\varphi')\rangle$, изображенную на рис. 3, *б*.

В качестве простого следствия теоремы 1 получается

Теорема 2. Пусть $\varphi \in W^{(1)}_{p_0, \nu_0}(R)$; $\varphi \in \partial(\nu, \theta_0)$ с $0 < \theta_0 < \frac{3\pi}{4}$. Тогда $\nu \geqslant \frac{2-\tau_0}{\operatorname{tg}\theta_0} + \nu_0 + 1$.

Из теоремы 2, вложений (1) и свойства выпуклости о. с. в. н. (см. [1, с. 203]), следует

Теорема 3. Пусть $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{(1)}_{p_0, \nu_0}(R)$, $1 < p_0 < \infty$, $\varphi \in \partial(\nu, \theta_0)$ с $0 < \theta_0 < \frac{3\pi}{4}$ (ν неизвестна). Тогда $A(\varphi) \supset B(L_0)$, где L_0 — прямая, проходящая через точки $(\nu_0 + \tau_0 - 1,\ 0)$ и $\left(\frac{2 - \tau_0}{\operatorname{tg} \theta_0} + \nu_0 + 1,\ 1\right)$ (рис. 4, *а*).

Замечание 4. Теорема 3 не гарантирует непрерывности вложений $\overset{\circ}{W}{}^{(1)}_{p_0, \nu_0}(R) \to W^{(0)}_{p,\nu}(R)$ для точек $(\nu, \tau) \in B(L_0) \setminus B(L)$ (см. рис. 4, *а*), в то время как для точек $(\nu, \tau) \in B(L)$ они непрерывны в силу (1).

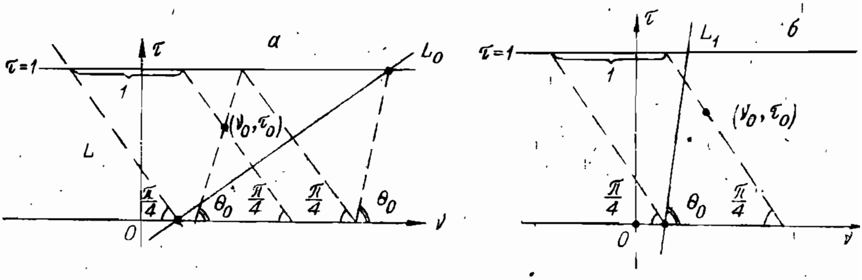


Рис. 4.

Замечание 5. Априорная информация относительно $A(\varphi)$, использованная в теореме 3, т. е. предположение $\varphi \in \partial(\nu, \theta_0)$ с $0 < \theta_0 < \frac{3\pi}{4}$, позволяет расширить область вложений, если воспользоваться уже известными ранее фактами (вложениями (1) и свойством выпуклости о. с. в. н.). А именно, из них сразу следуют вложения $\overset{\circ}{W}{}^{(1)}_{p_0, \nu_0}(R) \to W^{(0)}_{p,\nu}(R)$ для $(\nu, \tau) \in B(L_1)$ (см. рис. 4, *б*). Сравнивая рис. 4, *а* и 4, *б*, видим, что наши результаты позволяют улучшить вложения на классе функций, удовлетворяющих условиям теоремы 3.

В области параметров $\nu + \tau \leqslant 1$ пространства $\overset{\circ}{W}{}^{(l)}_{p,\nu}(R^n)$ и $W^{(l)}_{p,\nu}(R^n)$ совпадают (см. [1, гл. V, § 4]). Далее предполагаем, что всегда выполнено неравенство

$$\nu + \tau \leqslant 1. \tag{3}$$

Пусть $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{(l)}_{p_0, \nu_0}(R)$, $1 < p_0 < \infty$, и выполнено (2). Пользуясь вложениями (1) и применяя к $T_{l-k_0}(\varphi)$ результат теоремы 3, получаем для $T_m(\varphi)$, $m \leqslant l - k_0$, более сильные вложения, чем известные ранее. При этом чем больше индексов k, $1 \leqslant k \leqslant l$, для которых $T_{l-k}(\varphi) \in \partial(\nu_k, \theta_k)$ с $\theta_k \neq \frac{3\pi}{4}$, тем значительнее улучшаются вложения пространств $\overset{\circ}{W}{}^{(l)}_{p,\nu}(R)$ на классах функций, выделяемых условиями (2).

Замечание 6. Предположение (3) понадобилось только для того, чтобы воспользоваться результатом теоремы 3 для функций $T_{l-k}(\varphi)$ (см. замечания 1, 4), а потому может быть ослаблено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул.— М., Наука, 1974. 808 с.
2. Зарубин М. М. Построение функции, имеющей заданную область существования весовой нормы.— В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Новосибирск, 1977, № 1, с. 50—70.
3. Зарубин М. М. О неулучшаемости вложений одного класса пространств с весовой нормой. Новосибирск, 1977. 14 с. (Препринт ИМ СО АН СССР).

ВОЗМУЩЕНИЕ ПРОИЗВОДЯЩИХ ОПЕРАТОРОВ ЛЕБЕГОВСКИХ ПОЛУГРУПП

В. В. ИВАНОВ,

(Новосибирск)

Е. В. МЕЛЬНИКОВ

(Омск)

Введение

Классическая теория возмущений полугрупп операторов, как и остальные разделы теории полугрупп в банаховом пространстве, в качестве основного инструмента исследования использует аппарат резольвенты. Хорошо известно, что этот аппарат в принципе непригоден для исследования общих полугрупп операторов, действующих в локально-выпуклых пространствах. В работе [1] Т. Комура ввел понятие обобщенной резольвенты и с его помощью решил вопрос о необходимых и достаточных условиях порождения данным оператором полугруппы класса C_0. Б. Дембарт в [2] применил этот аппарат к изучению задачи о возмущении C_0-полугрупп, обобщив соответствующие результаты Р. Филлипса [3] и И. Миядеры [4] на случай произвольных локально-выпуклых пространств. С другой стороны, в работах [5] и [6] был предложен иной аппарат для исследования полугрупп операторов в локально-выпуклых пространствах, более простой, чем аппарат Т. Комуры, и, по-видимому, более гибкий. Основанный на применении этого аппарата метод изучения вопроса о возмущении производящих операторов полугрупп был предложен одним из авторов и применен, в частности, к исследованию лебеговских классов полугрупп.

Здесь мы продолжим изучение возмущений лебеговских полугрупп операторов, однако нас будет интересовать не только возможность порождения полугруппы возмущенным оператором, но также возможность явного выражения возмущенной полугруппы через исходную и возмущающий оператор. Желание иметь такую возможность объясняется тем, что в этом случае существенно облегчается решение одной из главных задач теории возмущений полугрупп — задачи о непрерывной зависимости возмущенной полугруппы от возмущения.

Топологическое (вещественное или комплексное) векторное пространство X предполагается отделимым, секвенциально полным и локально-выпуклым; $\mathfrak{P}$ означает совокупность всех непрерывных на X полунорм; $L(X)$ — алгебра линейных непрерывных операторов в X с единицей I.

§ 1. Предварительные сведения о лебеговских полугруппах

Определение 1. Полугруппа T называется *лебеговской порядка* α $(1 \leqslant \alpha \leqslant \infty)$, если

1) множество $\bigcup \{\mathrm{im}(T(t)) \,|\, t > 0\}$ секвенциально плотно в X;

2) $\bigcap \{\ker(T(t)) \,|\, t > 0\} = \{0\}$;

3) для каждой полунормы $p \in \mathfrak{P}$ можно указать такие полунорму $q \in \mathfrak{P}$ и неотрицательную функцию $\varphi \in L^{\alpha}_{(0,1)}$, что почти для всех $t \in (0, 1)$ выполняется оценка $p(T(t)x) \leqslant \varphi(t) q(x)$, $x \in X$. Класс всех таких полугрупп обозначается L^{α}_{u}.

Заметим, что случай $\alpha = \infty$ выделяет классические C_0-полугруппы. Лебеговские полугруппы любых порядков возникают даже в самых простых ситуациях. Например, следуя [7], рассмотрим в пространстве $L^2(R)$ систему уравнений

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -i^n \frac{\partial^n u_1}{\partial s^n} + i^m \frac{\partial^m u_2}{\partial s^m},$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = -i^n \frac{\partial^n u_2}{\partial s^n},$$

где n — четное натуральное, а m — неотрицательное целое числа, $u_k : (0, \infty) \to L^2(R)$, $k = 1, 2,$ — дифференцируемые функции, а $\partial/\partial s$ — оператор обобщенного дифференцирования в $L^2(R)$. Нам удобнее будет работать с Фурье-образом этой системы:

$$\frac{\partial v_1(t, s)}{\partial t} = -s^n v_1(t, s) + s^m v_2(t, s),$$

$$\frac{\partial v_2(t, s)}{\partial t} = -s^n v_2(t, s).$$

Оператору $A = -s^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + s^m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, определяющему последнюю систему, соответствует полугруппа операторов T в пространстве $X = L^2(R) \times L^2(R)$, действующая, как нетрудно видеть, следующим образом:

$$[T(t)(\varphi_1, \varphi_2)](s) = \left(e^{-ts^n}\varphi_1(s) + e^{-ts^n}ts^m\varphi_2(s),\ e^{-ts^n}\varphi_2(s)\right),$$

где $(\varphi_1, \varphi_2) \in X$, $t \geqslant 0$, $s \in R$. Легко оценить норму оператора $T(t)$. В самом деле,

$$\|T(t)(\varphi_1, \varphi_2)\| \leqslant \|\varphi_1\| + \left[\int_R e^{-2ts^n}(2ts^n)^{\frac{2m}{n}} t^2 (2t)^{-\frac{2m}{n}} |\varphi_2(s)|^2 ds\right]^{1/2} +$$
$$+ \|\varphi_2\| \leqslant \|\varphi_1\| + M(n, m) t^{1-\frac{m}{n}} \|\varphi_2\| + \|\varphi_2\|,$$

где $M(n, m)$ — подходящая константа, не зависящая от $t \geqslant 0$. Таким образом, $\|T(t)\| \leqslant O\left(1 + t^{1-\frac{m}{n}}\right)$ при $t \to +0$. Для получения аналогичной оценки слева достаточно рассмотреть оператор $T(t)$ на паре $\left(0, \Delta\left(k, \left(\frac{m}{nt}\right)^{1/n}\right)\right) \in X$, где

$$[\Delta(k, \tau)](s) = k^{1/2}\Delta(k(s - \tau)),\ \tau,\ s \in R,\ k = 1, 2, \ldots,$$

а Δ — неотрицательная функция из $L^2(R)$ с компактным носителем и единичной нормой. В результате при $t \to +0$ справедлива оценка $\|T(t)\| \geqslant O\left(t^{1-\frac{m}{n}}\right)$. Итак, включение $\|T\| \in L^\alpha_{(0,1)}$ для $\alpha \in [1, \infty)$ равносильно условию $\frac{m}{n} < 1 + \alpha^{-1}$, а для $\alpha = \infty$ — условию $m \leqslant n$.

Отметим необходимые нам свойства лебеговских полугрупп.

Определение 2. Отображение $R : (\omega, \infty) \to L(X)$ называется *квазирезольвентой в* (ω, ∞) *линейного оператора* A, если $R(\lambda)A \subset AR(\lambda) \in L(X)$ для всех $\lambda > \omega$. Отображение $\lambda \mapsto (\lambda I - A)R(\lambda) - I$ называется остатком R.

Напомним, что производящий оператор полугруппы — это замыкание сильной производной полугруппы в нуле.

Лемма 1. Пусть A — производящий оператор полугруппы T класса L^α_u $(1 \leqslant \alpha \leqslant \infty)$. Рассмотрим операторы

$$R_0(\lambda) = \int_0^a e^{-\lambda t} T(t)\, dt, \quad v_0(\lambda) = -e^{-\lambda a} T(a),$$

где $a > 0$. Справедливы следующие утверждения:

а) dom (A) секвенциально плотно в X;

б) $\lim\limits_{t \to +0} T(t)x = x$ для всякого $x \in \mathrm{dom}(A)$;

в) отображение R_0 есть квазирезольвента оператора A с остатком v_0;

г) $\mathrm{cl}(A|\mathrm{dom}(A^2)) = A$.

Доказательство этих фактов достаточно просто (см., например, [8]).

Т е о р е м а 1. Для того чтобы линейный оператор A был производящим оператором некоторой полугруппы класса $L_u^\alpha (1 \leqslant \alpha \leqslant \infty)$, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

1) dom (A) секвенциально плотно в X;

2) для некоторого $a > 0$ существует сильно непрерывное отображение $V: (0, a] \to L(X)$ такое, что

а) для всякой полунормы $p \in \mathfrak{P}$ можно указать полунорму $q \in \mathfrak{P}$ и неотрицательную функцию $\varphi \in L^\alpha_{(0,1)}$, для которых почти при каждом $t \in (0, a)$ выполняется оценка $p(V(t)x) \leqslant \varphi(t)q(x)$, $x \in X$;

б) отображение $\lambda \mapsto \int\limits_0^a e^{-\lambda t} V(t)\, dt$ есть квазирезольвента оператора A с остатком $\lambda \mapsto -e^{-\lambda a} V(a)$.

При этом если T — порожденная оператором A полугруппа, то $T(t) = V(t)$, $0 < t \leqslant a$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условий вытекает из леммы 1. Для доказательства достаточности заметим, прежде всего, что из [8, предложение 1.1.14] следует замкнутость оператора A. Теперь можно показать, что оператор A порождает некоторую полугруппу T класса L_u^α. Пусть

$$R_0(\lambda) = \int\limits_0^a e^{-\lambda t} T(t)\, dt, \quad R(\lambda) = \int\limits_0^a e^{-\lambda t} V(t)\, dt.$$

Из леммы 1 (в) и условия 2 (б) вытекает тождество

$$R_0(\lambda) - R(\lambda) = e^{-\lambda a} [V(a) R_0(\lambda) - R(\lambda) T(a)].$$

Таким образом, для каждой полунормы $p \in \mathfrak{P}$ можно указать полунорму $q \in \mathfrak{P}$ такую, что $p(R_0(\lambda)x - R(\lambda)x) \leqslant e^{-\lambda a} q(x)$, $\lambda > 0$, $x \in X$, откуда с легкостью вытекает равенство $T(t) = V(t)$ для всякого $t \in (0, a]$ (см., например, [9, с. 234]).

§ 2. Теорема о возмущении лебеговских полугрупп

Перейдем теперь к основному вопросу настоящей работы.

Линейный оператор B называется *непрерывным относительно линейного оператора A* (A-непрерывным), если dom $(A) \subset$ dom(B) и для каждой полунормы $p \in \mathfrak{P}$ можно указать такую полунорму $q \in \mathfrak{P}$, что $p(Bx) \leqslant q(x) + q(Ax)$ для всякого $x \in$ dom (A).

Т е о р е м а 2. Пусть A — производящий оператор полугруппы T класса L_u^α $(1 \leqslant \alpha < \infty)$, оператор B непрерывен относительно A, и существуют число $a > 0$ и мультинорма $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{P}$, эквивалентная $\mathfrak{P}$, такие, что каждой полунорме $q \in \mathfrak{Q}$ можно сопоставить число $K_q > 0$, для которого

$$\left[\int_0^a q(BT(s)x)^{\alpha'} ds\right]^{1/\alpha'} \leqslant K_q q(x), \quad x \in \mathrm{dom}(A)$$

(здесь $\alpha' = \alpha/(\alpha-1)$). Тогда оператор $A + B$ порождает в X некоторую полугруппу S класса L_u^α. При этом

$$S(t)x = \sum_{n \geqslant 0} S_n(t)x, \quad 0 \leqslant t \leqslant a, \quad x \in X,$$

где

$$S_0(t) = T(t), \quad S_{n+1}(t) = \mathrm{cl} \int_0^t S_n(t-s)BT(s) \,|\, \mathrm{dom}(A)\, ds.$$

Отображения $S_{n+1} : [0, a] \to L(X)$ сильно непрерывны, и для любого $x \in X$ ряд, определяющий $S(t)x$, сходится равномерно относительно $t \in [0, a]$.

Замечание 1. Теорема справедлива и для случая $\alpha = \infty$, если предположить, что $K_q < 1$, $q \in \mathfrak{Q}$.

Замечание 2. Если интересоваться только вопросом порождения возмущенным оператором полугруппы класса L_u^α и не требовать возможности столь явного выражения возмущенной полугруппы S через полугруппу T и оператор B, как в теореме 1, то условия на оператор B, по крайней мере для случая $\alpha = 1$, можно существенно ослабить.

§ 3. Доказательство теоремы о возмущении

Выберем для каждой полунормы $p \in \mathfrak{P}$ такие полунорму $\bar{p} \in \mathfrak{Q}$ и неотрицательную функцию $\varphi_p \in L_{(0,a)}^\alpha$, чтобы почти для всех $t \in (0, a)$ выполнялась оценка $p(T(t)x) \leqslant \varphi_p(t)\bar{p}(x)$, $x \in X$.

Лемма 2. Для любого натурального n отображение S_n сильно непрерывно на $[0, a]$, и справедлива оценка

$$p(S_n(t)x) \leqslant \left(\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)^{1/\alpha} \|\varphi_p\| K_{\bar{p}}^n \bar{p}(x),$$

где $p \in \mathfrak{P}$, $0 \leqslant t \leqslant a$, $x \in X$ и $\| \; \|$ — норма в $L_{(0,a)}^\alpha$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу A-непрерывности оператора B отображение $s \mapsto S_0(t-s)BT(s)x$ непрерывно на $(0, t)$ для любого $x \in \mathrm{dom}(A)$. Поэтому для всякого $t \in [0, a]$ оператор $S_1(t)$ корректно определен на $\mathrm{dom}(A)$ и удовлетворяет оценкам

$$p(S_1(t)x) \leqslant \int_0^t \varphi_p(t-s)\, \bar{p}(BT(s)x)\, ds \leqslant \|\varphi_p\| K_{\bar{p}}\, \bar{p}(x), \quad x \in \mathrm{dom}(A).$$

Ввиду секвенциальной плотности в X множества $\mathrm{dom}(A)$, оператор $S_1(t)$ и последняя оценка распространяются по непрерывности на все X. Для доказательства сильной непрерывности отображения S_1 на $[0, a]$ заметим, что при любых $t_1 > t_0$ и $x \in \mathrm{dom}(A)$ имеют место равенства

$$S_1(t_1)x - S_1(t_0)x = \int_{t_0}^{t_1} S_0(s) B [T(t_1 - s)x - T(t_0 - s)x] ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} S_0(s) BT(t_1 - s)x ds = S_1(t_0)[T(t_1 - t_0)x - x] +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} S_0(s) BT(t_1 - s) x ds.$$

Так как из полученной на $S_1(t)$ оценки следует эквинепрерывность семейства $\{S_1(t)\}(0 \leqslant t \leqslant a)$, а полугруппа T, согласно лемме 1 (б), непрерывна в нуле на $\mathrm{dom}(A)$, то последние равенства влекут непрерывность отображения $S_1 x$ на $[0, a]$ для $x \in \mathrm{dom}(A)$ и, следовательно, для любого $x \in X$.

Для произвольного n нужные свойства отображения S_{n+1} выводятся из соответствующих свойств отображения S_n так же, как и в случае $n = 0$.

Лемма 3. Ряд $\sum\limits_{n \geqslant 0} S_n(t)x$ сходится для любого $x \in X$ равномерно по $t \in [0, a]$, и его сумма $S(t)x$ непрерывна по $t \in (0, a]$. Для каждой полунормы $p \in \mathfrak{P}$ можно указать неотрицательную функцию $\psi_p \in L^{\alpha}_{(0,a)}$ такую, что почти для всех $t \in (0, a)$ выполняется оценка $p(S(t)x) \leqslant \psi_p(t)\overline{p}(x)$, $x \in X$.

Доказательство. Первое утверждение следует непосредственно из леммы 2. Для доказательства второго утверждения леммы достаточно положить $\psi_p = \varphi_p + M_p$, $p \in \mathfrak{P}$, где $M_p = \sum\limits_{n \geqslant 0} \left(\frac{a^n}{n!}\right)^{1/\alpha} \|\varphi_p\| K_p^{n+1}$, и воспользоваться оценками из леммы 2.

Лемма 4. Для любых $\lambda > 0$, $\tau \in [0, a]$ и целых $n \geqslant 0$ рассмотрим оператор

$$P_n(\lambda, \tau) = \int_0^{\tau} e^{-\lambda t} S_n(t) dt.$$

Для $n \geqslant 1$ справедливы следующие соотношения:

$$AP_n(\lambda, \tau)x = -BP_{n-1}(\lambda, \tau)x + \lambda P_n(\lambda, \tau)x + e^{-\lambda\tau} S_n(\tau)x, \ x \in X;$$

$$P_n(\lambda, \tau)Ax = -P_{n-1}(\lambda, \tau)Bx + \lambda P_n(\lambda, \tau)x + e^{-\lambda\tau} S_n(\tau)x,$$
$$x \in \mathrm{dom}(A).$$

Доказательство. Для обоснования первого соотношения возьмем сначала $x \in \operatorname{dom}(A)$. Тогда

$$AP_1(\lambda, \tau)x = A\int_0^\tau e^{-\lambda t}\int_0^t S_0(t-s)BT(s)\,xdsdt =$$

$$= \int_0^\tau e^{-\lambda s}AP_0(\lambda, \tau - s)BT(s)\,xds = \int_0^\tau e^{-\lambda s}[\lambda P_0(\lambda, \tau - s) -$$

$$- I + e^{-\lambda(\tau - s)}T(t-s)]\,BT(s)\,xds = \lambda P_1(\lambda, \tau)x -$$

$$- BP_0(\lambda, \tau)x + e^{-\lambda\tau}S_1(\tau)x.$$

В третьем равенстве мы воспользовались леммой 1 (в), а в последнем — свойством перестановочности оператора B с интегралом, вытекающим из соответствующего свойства оператора A в силу A-непрерывности оператора B. По той же причине $BP_0(\lambda, \tau) \in L(X)$, что вместе с замкнутостью оператора A позволяет считать, что при $n = 1$ первое соотношение установлено для всех $x \in X$. Для остальных значений n следует воспользоваться равенством

$$P_{n+1}(\lambda, \tau)x = \int_0^\tau e^{-\lambda s}P_n(\lambda, \tau - s)BT(s)\,xds, \quad x \in \operatorname{dom}(A).$$

Для доказательства второго соотношения леммы возьмем $x \in \operatorname{dom}(A^2)$ и заметим, что в этом случае $BT(s)Ax = \frac{d}{ds}(BT(s)x)$, $s > 0$, причем, согласно лемме 1 (б), $\lim\limits_{s\to+0} BT(s)x = Bx$. Так как, очевидно, $\frac{\partial}{\partial\tau}P_n(\lambda, \tau) = e^{-\lambda\tau}S_n(\tau)$, $\tau \in (0, a]$, то для любых $\lambda > 0$, $\tau \in [0, a]$ и $x \in \operatorname{dom}(A^2)$ имеем

$$P_n(\lambda, \tau)Ax = \int_0^\tau e^{-\lambda t}P_{n-1}(\lambda, \tau - s)(BT(s)x)'ds =$$

$$= -P_{n-1}(\lambda, \tau)Bx + \lambda\int_0^\tau e^{-\lambda s}P_{n-1}(\lambda, \tau - s)BT(s)\,xds +$$

$$+ \int_0^\tau e^{-\lambda s}e^{-\lambda(\tau - s)}S_{n-1}(\tau - s)BT(s)\,xds = -P_{n-1}(\lambda, \tau)Bx +$$

$$+ \lambda P_n(\lambda, \tau)x + e^{-\lambda\tau}S_n(\tau)x.$$

Пусть теперь $x \in \operatorname{dom}(A)$. По лемме 1 (г) можно выбрать семейство $\{x_\alpha\}$ такое, что $x_\alpha \in \operatorname{dom}(A^2)$, $x_\alpha \to x$ и $Ax_\alpha \to Ax$. Но тогда и $Bx_\alpha \to Bx$, так что последнее соотношение, доказанное нами для $x \in \operatorname{dom}(A^2)$, распространяется на $\operatorname{dom}(A)$.

Лемма 5. Пусть

$$P(\lambda) = \int_0^a e^{-\lambda t} S(t)\, dt, \quad \mu(\lambda) = -e^{-\lambda a} S(a).$$

Тогда P есть квазирезольвента оператора $A + B$ с остатком μ.

Доказательство. Так как $P(\lambda) = \sum_{n \geqslant 0} P_n(\lambda, a)$, то равенство

$$P(\lambda)(A + B)x = \lambda P(\lambda)x - x - \mu(\lambda)x, \quad x \in \mathrm{dom}\,(A + B) = \\ = \mathrm{dom}\,(A)$$

непосредственно следует из леммы 4, если просуммировать по n первое соотношение для $\tau = a$ и вытекающее из леммы 1 (в) равенство

$$P_0(\lambda, a)Ax = \lambda P_0(\lambda, a)x - x + e^{-\lambda a} S_0(a)x, \quad x \in \mathrm{dom}\,(A).$$

Далее, по индукции легко установить оценку

$$q(BP_n(\lambda, \tau)\, x) \leqslant \left[\frac{\tau^{n+1}}{(n+1)!}\right]^{1/\alpha} K_q^{n+1} q(x)$$

для всех $q \in \mathfrak{Q}$, целых $n \geqslant 0$, $\lambda > 0$, $\tau \in [0, a]$ и $x \in X$. Отсюда следует, что ряд $\sum_{n \geqslant 0} BP_n(\lambda, a)$ сходится, а тогда в силу леммы 4 сходится и ряд $\sum_{n \geqslant 0} AP_n(\lambda, a)$. Но оператор A замкнут, поэтому

$$\mathrm{im}\,(P(\lambda)) \subset \mathrm{dom}\,(A) \text{ и } AP(\lambda) = \sum_{n \geqslant 0} AP_n(\lambda, a).$$

Ввиду непрерывности оператора B относительно A получаем

$$\mathrm{im}\,(P(\lambda)) \subset \mathrm{dom}\,(B) \text{ и } BP(\lambda) = \sum_{n \geqslant 0} BP_n(\lambda, a).$$

Таким образом, суммирование по n второго соотношения леммы 4 вместе с вытекающим из леммы 1 (в) тождеством $AP_0(\lambda, a) = \lambda P_0(\lambda, a) - I + e^{-\lambda a} S_0(a)$ дает нам требуемое соотношение $(A + B)P(\lambda) = \lambda P(\lambda) - I - \mu(\lambda)$.

Для завершения доказательства теоремы 2 остается лишь сослаться на теорему 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Komura T. Semigroups of operators in locally convex spaces.— J. Funct. Anal., 1968, v. 2, N 3, p. 258—296.
2. Dembart B. On the theory of semigroups of operators on locally convex spaces.— J. Funct. Anal., 1974, v. 16, N 2, p. 123—160.

3. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., ИЛ, 1962. 829 с.
4. Miyadera I. On the perturbation theory for semi-groups of operators.— Tôhoku Math. J., 1966, v. 18, N 3, p 299—310.
5. Иванов В. В. Резольвентная последовательность в вопросах порождения суммируемых полугрупп операторов.— Докл. АН СССР, 1973, т. 213, № 2, с. 282—285.
6. Ouchi S. Semi-groups of operators in locally convex spaces.— J. Math. Soc. Japan, 1973, v. 25, N 2, p. 265—276.
7. Oharu S. Semi-groups of linear operators in a Banach spaces.— Publ. R. I. M. S., 1971/72, v. 7, N 2, p. 205—260.
8. Иванов В. В. Полугруппы линейных операторов в локально-выпуклом пространстве.— В кн.: Теория операторов в функциональных пространствах. Новосибирск, Наука, 1977, с. 121—153.
9. Иосида К. Функциональный анализ. М., Мир, 1967. 624 с.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ВЛОЖЕНИЯ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

В. П. ИЛЬИН

(Ленинград),

С. В. УСПЕНСКИЙ

(Новосибирск)

Классические теоремы вложения функциональных пространств $W_p^l(G)$, содержащих функции, имеющие на области G n-мерного евклидова пространства E^n всевозможные обобщенные производные порядка l, суммируемые со степенью p на G, были установлены С. Л. Соболевым для областей, удовлетворяющих условию конуса [1—3]. Для указанного класса областей теоремы вложения пространств $W_p^l(G)$ формулируются так же, как и в случае, когда $G = E^n$. Если же область задания функции не удовлетворяет условию конуса, то, вообще говоря, теоремы вложения пространств $W_p^l(G)$ могут отличаться от случая, когда $G = E^n$.

Вопрос о зависимости свойств функций, принадлежащих пространствам $W_p^l(G)$, от геометрических свойств области их задания изучался в работах В. Г. Мазьи [4, 5], И. Г. Глобенко [6], Кампанато [7] и др. (см., например, [8]).

В настоящей работе мы остановимся главным образом на связи между свойствами анизотропных (по дифференциальным свойствам) классов функций и геометрическими свойствами области их задания. Эта связь рассматривается только в классах областей, удовлетворяющих тому или иному условию рога, являющемуся обобщением понятия «условие конуса».

§ 1. Основные обозначения и определения

Если $\overline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\overline{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $\overline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ — n-мерные векторы, причем $0 < \nu_i < \beta_i < \mu_i \leqslant \infty$, то будем коротко писать $\overline{\nu} \leqslant \overline{\beta} \leqslant \overline{\mu}$. Положим также $|\beta| = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i$, $\overline{\beta}^{-1} = (\beta_1^{-1}, \ldots, \beta_n^{-1})$, $\overline{0} = (0, \ldots, 0)$, $\overline{1} = (1, \ldots, 1)$, $\overline{\infty} = (\infty, \ldots, \infty)$ и, как обычно, $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i$.

Введем классы областей, удовлетворяющих условию рога.

Пусть $\overline{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ — вектор с положительными компонентами, $0 < h < \infty$, $s > 0$, $a_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Назовем $\overline{s}$-рогом (радиуса h и раствора ε) множество точек $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, определяемое соотношением

$$V(\overline{s}, h) = \bigcup_{0 < v \leqslant h} \left\{x:\ \frac{x_i}{a_i} > 0,\quad v^{1/s_i} < \frac{x_i}{a_i} < (1+\varepsilon)\, v^{1/s_i}\right\}. \tag{1}$$

Будем говорить, что открытое множество $G \subset E^n$ удовлетворяет условию $\overline{s}$-рога и писать $G \subset A(\overline{s}, h)$, если существует конечное число k открытых множеств G_k и $\overline{s}$-рогов V_k вида (1) (с коэффициентами a_i, зависящими от k), так что при этом

$$G = \bigcup_{k=1}^{m} G_k = \bigcup_{k=1}^{m} (G_k + V_k(\overline{s}, h)).$$

В случае $s_1 = s_2 = \ldots = s_n$ s-рог $V(s)$ является конусом, и мы будем говорить, что открытое множество $G \subset V(s)$ удовлетворяет условию конуса. Заметим, что данное здесь понятие области, удовлетворяющее условию конуса, эквивалентно известному определению С. Л. Соболева [1].

Из вида $\overline{s}$-рога следует, что при любом $c > 0$ классы областей $A(\overline{s}, h)$ и $A(c\overline{s}, h^c)$ совпадают.

Отметим еще, что получается, по существу, тот же класс открытых множеств $A(\overline{s})$, если рог $V_k(\overline{s})$ заменить на тело, ограниченное поверхностями

$$\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{s_i} = (1+\varepsilon)\left(\frac{x_j}{a_j}\right)^{s_j}, \qquad (i \neq j,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n).$$

Определим функциональные пространства $W_{\overline{p}}^{\overline{l}}(G)$.

Пусть $\overline{l} = (l_1, \ldots, l_n)$ — вектор с натуральными компонентами, $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $i = 1, \ldots, n$, G — открытое множество n-мерного евклидова пространства E^n. Обозначим через $W_{\overline{p}}^{\overline{l}}(G)$ пространство локально суммируемых на G функций f, имеющих на G обобщенные производные $D_i^{l_i} f(x) = \frac{\partial l_i}{\partial x_i l_i} f$ и конечную норму

$$\left\| f, W_{\bar p}^{\bar l}(G) \right\| = \| f, L_{\bar p}(G) \| + \sum_{i=1}^{n} \left\| D_i^{l_i} f, L_{\bar p}(G) \right\|, \qquad (2)$$

где

$$\| f, L_{\bar p}(G) \| = \left(\int_{E_1} \left[\cdots \left[\int_{E_1} \left(\int_{E_1} |\bar f(x)|^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} dx_2 \right)^{p_3/p_2} \cdots \right)^{1/p_n},$$

$$\bar f(x) = \begin{vmatrix} f(x) & x \in G \\ 0 & x \in E^n \setminus G. \end{vmatrix}$$

Введем еще пространство $W_{\bar p}^{(l)}(G)$ С. Л. Соболева [2], где l — натуральное число, а $\bar p = (p_1, \ldots, p_n)$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$. Функции этого пространства имеют на G все обобщенные производные порядка l и конечную норму

$$\left\| f, W_{\bar p}^{(l)}(G) \right\| = \| f, L_{\bar p}(G) \| + \sum_{|\bar\alpha| = l} \| D^{\bar\alpha} f, L_{\bar p}(G) \|, \qquad (3)$$

где

$$\bar\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \ D^{\bar\alpha} f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f.$$

Если l — натуральное число, а $\bar l = (l_1, \ldots, l_n) = l \cdot \bar 1$, то пространства $W_{\bar p}^{l \cdot \bar 1}(G)$ и $W_{\bar p}^{(l)}(G)$ отличаются друг от друга тем, что к первому пространству принадлежат функции, имеющие на G несмешанные производные порядка l и конечную норму (2), а ко второму принадлежат те функции, которые имеют на G все (в том числе и смешанные) производные порядка l и конечную норму (3).

Основной результат. Основной результат сформулируем в виде одной теоремы (основной в теории вложения С. Л. Соболева), относящейся лишь к пространствам $W_{\bar p}^{\bar l}(G)$, поскольку характер зависимости теорем вложения для пространств $H_{\bar p}^{\bar l}(G)$, $B_{\bar p, \bar\theta}^{\bar l}(G)$ и $L_{\bar p}^{\bar l}(G)$ от геометрических свойств области G аналогичный (по крайней мере в случае тех классов областей, которые мы рассматриваем) и изучается теми же методами.

Теорема 1. Пусть открытое множество G удовлетворяет условию $\bar s$-рога ($G \subset A(\bar s, H)$, $\bar 1 \leqslant \bar p \leqslant \bar q \leqslant \bar\infty$, $\bar\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — вектор с целочисленными неотрицательными компонентами, $\bar l = (l_1, \ldots, l_n)$ — вектор с натуральными компонентами,

$$\delta_i = \frac{l_i}{s_i} - \left(\bar\alpha + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \frac{1}{s} \right), \quad \delta = \min_{i=1,\ldots,n} \delta_i \geqslant 0 \qquad (4)$$

и при $\delta_0 = 0$ либо $1 < p_n < q_n < \infty$, либо $1 = p_n < q_n < \infty$, либо $\bar{1} < \bar{p} = \bar{q} < \bar{\infty}$.

Тогда $D^{\bar{\alpha}} W_{\bar{p}}^{\bar{l}}(G) \subset L_{\bar{q}}(G)$, точнее говоря, для $f \in W_{\bar{p}}^{\bar{l}}(G)$ на G существует обобщенная производная $D^{\bar{\alpha}} f \subset L_{\bar{q}}(G)$ и

$$\| D^{\bar{\alpha}} f, L_{\bar{q}}(G) \| \leqslant C \left(h^{-\delta_0} \| f, L_{\bar{p}}(G) \| + \sum_{i=1}^{n} h^{-\delta_i} \| D_i^{l_i} f, L_{\bar{p}}(G) \| \right), \quad (5)$$

где $\delta_0 = \left(\bar{\alpha} + 1/\bar{p} - \frac{1}{\bar{q}}, \frac{1}{\bar{s}} \right)$; h — произвольное число из $(0, H]$; C — константа, не зависящая от f.

Заметим, что в силу того, что параметр $\bar{q}$ является векторным, в приведенной формулировке содержатся также теоремы о суммируемости $D^{\bar{\alpha}} f$ с определенной степенью на m-мерном сечении области G (при $\bar{q} = (q_1, \ldots, q_m, \infty, \ldots, \infty)$ и о непрерывности $D^{\bar{\alpha}} f$ (при $\bar{q} = (\infty, \ldots, \infty)$) на G.

Примеры показывают, что если классы областей характеризовать в терминах рога, то условие (4) является также необходимым для справедливости неравенства (5). Точнее, для произвольных векторов $\bar{s}$ и $\bar{l}$ ($\bar{s} > 0$, $\bar{l}$ — вектор с натуральными компонентами) существует область G класса $A(\bar{s}, h)$ такая, что неравенство (5) для произвольной функции класса $W_{\bar{p}}^{\bar{l}}(G)$ ($\bar{1} \leqslant \bar{p} \leqslant \bar{\infty}$) может иметь место только тогда, когда выполнено неравенство (4) (см., например, [8, с. 175, 176]).

Замечание. Если условия теоремы 1 выполнены для вектора $\bar{s}$, то они будут выполнены также для вектора $c\bar{s}$, где c — произвольное положительное число. Это следует, во-первых, из того, что если $G \in A(\bar{s}, h)$, то $G \in A(c\bar{s}, h^c)$, и, во-вторых, из того, что неравенство (4) сохраняется при умножении $\bar{s}$ на положительное число. Отсюда следует, что можно рассматривать только такие классы областей, которые характеризуются векторами $\bar{s}$, нормированными тем или иным способом.

Следствия из теоремы 1. Не умаляя общности, можем предположить, что в условиях теоремы

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{l_i}{s_i} = \frac{l_1}{s_1}$$

и вектор $\bar{s}$ нормирован так, что $s_1 = l_1$, т. е. что выполнены соотношения

$$s_1 = l_1, \; s_i \leqslant l_i \; (i = 2, \ldots, n). \quad (6)$$

Тогда неравенство (4) примет вид

$$(\bar{\alpha} + 1/\bar{p} - 1/\bar{q}, 1/\bar{s}) \leqslant 1, \quad (7)$$

где $\bar{s} = (l_1, s_2, \ldots, s_n)$.

Таким образом, для произвольной функции класса $W_p^{\overline{l}}(G)$, где $G \in A(\overline{s}, H)$, $\overline{s} = (l_1, s_2, \ldots, s_n)$ и выполнены соотношения (6), неравенство (5) можно гарантировать лишь для множества таких $\overline{\alpha}$ и $\overline{q}$, для которых справедливо неравенство (7)[1]. Эти множества, как видно из (7), существенно зависят от вектора $\overline{s} = (l_1, s_2, \ldots \ldots, s_n)$ и одни и те же для всех $\overline{l}$, удовлетворяющих условиям (6).

Пусть задан вектор $\overline{s} = (s_1, \ldots, s_n)$, причем для простоты будем считать, что его компоненты s_i $(i = 1, \ldots, n)$ — целые положительные числа.

Рассмотрим на открытом множестве G класса $A(\overline{s}, h)$ различные классы функций $W_p^{\overline{l}}(G)$, характеризуемые векторами $\overline{l}$, удовлетворяющими соотношениям (6) ($\overline{p}$ фиксировано). К этому множеству классов функций относится, в частности, и класс $W_{\overline{p}}^{\overline{s}}(G)$.

Из сказанного вытекает, что для функций класса $W_{\overline{p}}^{\overline{l}}(G)$, характеризуемого любым вектором l, удовлетворяющим соотношениям (6), неравенство (5) можно гарантировать лишь для таких α и q, для которых оно справедливо для функций класса $W_{\overline{p}}^{\overline{s}}(G)$. Иными словами, при возрастании векторного индекса $\overline{l}$, удовлетворяющего условию (6), т. е. с фиксированным компонентом $l_1 = s_1$ и возрастающими другими компонентами, свойства функций классов $W_p^{\overline{l}}(G)$, утверждаемые теоремой, на множестве G класса $A(\overline{s}, H)$, вообще говоря, не улучшаются (в том смысле, что множества векторов $\overline{\alpha}$ и $\overline{q}$, для которых имеет место неравенство (5), не расширяются). В то же время хорошо известно, что если $G = E^n$ или G представляет собой прямоугольный параллелепипед Π^n с ребрами, параллельными осям координат, то с увеличением хотя бы одной компоненты вектора $\overline{l}$ множества векторов $\overline{\alpha}$ и $\overline{q}$, для которых справедливо неравенство (5), расширяются. В этих случаях, как известно, вместо неравенства (7) определяющим является неравенство

$$(\overline{\alpha} + 1/\overline{p} - 1/\overline{q}, 1/\overline{l}) \leqslant 1. \tag{7'}$$

Приведенный здесь результат можно рассматривать как своеобразную теорему насыщения по свойствам типа неравенства (5), характеризуемым параметрами $\overline{\alpha}$ и $\overline{q}$, причем это насыщение определяется классом областей, в которых эти свойства рассматриваются.

Заметим, однако, что если $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{l_i}{s_i} = \frac{l_1}{s_1}$ и увеличивать компоненту l_1 вектора l, то свойства функций класса $W_p^{\overline{l}}(G)$ на

[1] При $(\overline{\alpha} + 1/\overline{p} - 1/\overline{q}, 1/\overline{s}) = 1$ векторы $\overline{p}$ и $\overline{q}$, согласно теореме 1, должны удовлетворять дополнительным условиям.

области G класса $A(\overline{s}, H)$ будут улучшаться до тех пор, пока остается справедливым соотношение

$$\frac{l_1}{s_1} = \min_{1 \leq i \leq n} \frac{l_i}{s_i}.$$

Если же $\frac{l_1}{s_1}$ станет больше, чем $\min \frac{l_i}{s_i}$, то определяющую роль будут играть те компоненты l_j вектора $\overline{l}$, для которых $\frac{l_j}{s_j} = \min \frac{l_i}{s_i}$.

Сравним теперь свойства функций из $W_{\overline{p}}^{\overline{l}}(G)$, где $\overline{l}$ и $\overline{p}$ фиксированы, на областях G, принадлежащих классам $A(\overline{s}, H)$, определяемым различными векторами $s > 0$. Без ограничения общности мы можем ограничиться рассмотрением таких классов областей $A(\overline{s}, H)$, для которых $\min_i \frac{l_i}{s_i} = \frac{l_1}{s_1}$. Так как нас будут интересовать лишь такие свойства функций из $W_{\overline{p}}^{\overline{l}}(G)$, которые утверждаются теоремой 1, можно считать, что $s_1 = l_1$. Тогда компоненты векторов $\overline{s}$ будут удовлетворять условиям (6).

Поскольку мы считаем выполненными условия (6), множество векторов $\overline{\alpha}$ и $\overline{q}$, для которых имеет место неравенство (5), определяется неравенством (7). Из этого неравенства следует, что чем больше компоненты вектора $\overline{s} = (l_1, s_2, \ldots, s_n)$, тем более широкие множества векторов $\overline{\alpha}$ и $\overline{q}$ удовлетворяют неравенству (7). Из всех векторов $\overline{s}$, подчиняющихся условиям (6), наилучшим в указанном смысле является вектор $\overline{s} = \overline{l}$.

Отсюда следует, что функции пространства $W_{\overline{p}}^{\overline{l}}(G)$ обладают наилучшими (в смысле широты множества векторов $\overline{\alpha}$ и $\overline{q}$, для которых имеет место неравенство (5)) свойствами на открытых множествах G, удовлетворяющих условию l-рога. Такие свойства, например, будут наблюдаться в случае, когда $G = E^n$ или $G = \Pi^n$, так как E^n и Π^n принадлежат классу $A(\overline{l}, H)$ при любом $\overline{l}$. В этом случае основное условие (7) запишется в форме (7).

Замечая далее, что класс открытых множеств $A(\overline{s})$, характеризуемых вектором $\overline{s}$, совпадает с классом открытых множеств $A(\overline{l})$ в том и только в том случае, когда существует число $c > 0$ такое, что $c\overline{s} = \overline{l}$, т. е. когда

$$\frac{l_1}{s_1} = \ldots = \frac{l_n}{s_n}, \tag{8}$$

можно перефразировать указанный результат в несколько более общей форме: функции пространства $W_{\overline{p}}^{\overline{l}}(G)$ обладают наилучшими свойствами на открытых множествах G класса $A(\bar{s}, H)$, характеризуемого вектором $\bar{s}$, удовлетворяющим соотношениям (8).

Из сказанного вытекает следующий вывод: для того чтобы для любого открытого множества G класса $A(\bar{s}, H)$ была справедлива такая же теорема вложения типа приведенной выше, что и для $G = E^n$, необходимо и достаточно, чтобы компоненты вектора $\bar{s}$ удовлетворяли соотношениям (8), т. е. чтобы векторы l и $\bar{s}$ были согласованы.

Приведем некоторые примеры для случая $n = 2$. Рассмотрим следующие пять плоских областей $G_i (i = 1, \ldots, 5)$: G_1 — треугольник, G_2 — трапеция, G_3 — круг, G_4 — область, ограниченная дугами окружностей и отрезками прямых $x_2 = h$, $x_2 = -h$, G_5 — отрезками прямых $x_1 = 0$, $x_1 = d$, $x_2 = h$, $x_2 = -h$ и выпуклыми дугами (рис. 1, *а* — *д*).

Нетрудно установить, что если вектор s считать нормированным так, что $s_2 = 1$, т. е. $\bar{s} = (1, s_2)$, что указанные области принадлежат соответственно к следующим классам:

1) $G_1 \in A(\bar{1}, H)$, $\bar{1} = (1, 1)$ и $G \notin A(\bar{s}, H)$, если $\bar{s} \neq \bar{1}$;

2) $G_2 \subset A(\bar{s}, H)$, $s = (1, s_2)$, в том и только том случае, когда $0 < s_2 \leqslant 1$;

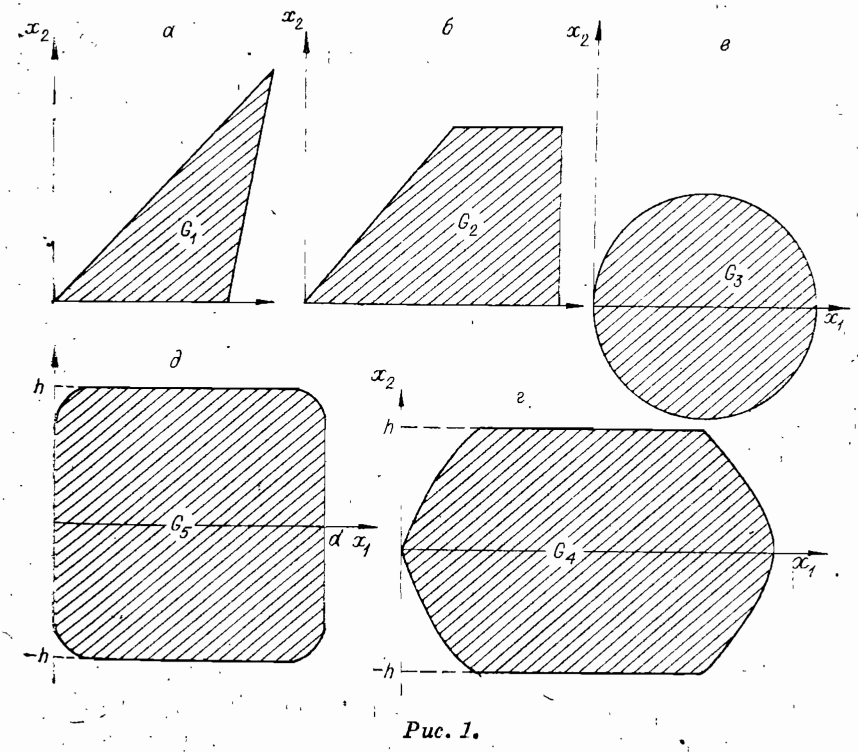


Рис. 1.

3) $G_3 \in A(\overline{s}, H)$, $\overline{s} = (1, s_2)$, тогда и только тогда, когда $1/2 \leqslant s_2 \leqslant 2$;

4) $G_4 \in A(\overline{s}, H)$, $\overline{s} = (1, s_2)$, если и только если $0 < s_2 \leqslant 2$;

5) $G_5 \in A(\overline{s}, H)$, $\overline{s} = (1, s_2)$, при $0 < s_2 < \infty$.

Из указанных здесь границ для параметра s_2, при которых $G_i \in A(s, H)$, и соотношений (8), которые в нашем случае ($n = 2$ $s_1 = 1$) можно записать в виде

$$l_1 = \frac{l_2}{s_2}, \tag{8'}$$

легко вытекают соотношения (необходимые и достаточные) между l_1 и l_2, при которых теорема 1 для $W_p^{\overline{l}}(G)$, $\overline{l} = (l_1, l_2)$, будет такой, как и для $G = E^2$.

Для G_1 это соотношение имеет вид $l_1 = l_2$, $G_2 - l_1 \geqslant l_2$, $G_3 - 2l_2 \geqslant l_1 \geqslant 1/2 l_2$, $G_4 - l_1 \geqslant 1/2 l_2$, $G_5 - l_1 > 0$, $l_2 > 0$.

Из примеров видно, что даже для областей с достаточно гладкими границами (например, G_3) не всегда имеют место такие теоремы вложения, которые справедливы в случае, когда областью задания функций является все пространство. Следовательно, даже с таких областей не всегда можно продолжить функцию на все пространство с сохранением класса.

§ 2. О теоремах вложения в областях для весовых классов $W^{\overline{l}}_{p,\overline{\sigma}}(G)$

Пусть $\rho(x)$ — гладкая неотрицательная функция, определенная в области G и имеющая вблизи границы ∂G оценку

$$c_2 r(x, \partial G) \leqslant \rho(x) \leqslant c_1 r(x, \partial G),$$

где $r(x, \partial G)$ — расстояние от точки x до границы ∂G. Определим пространства $W^{l}_{p,\overline{\sigma}}(G)$, $\overline{l} = (l_1, \ldots, l_n)$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $1 < p < \infty$, как замыкание гладких функций по норме

$$\| f, W^{l}_{p,\sigma}(G) \| = \| f, L_p(G) \| + \sum_{j=1}^{n} \| \rho^{\sigma_j} D^{l_j} f, L_p(G) \|.$$

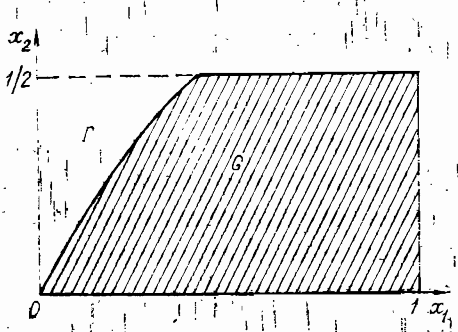


Рис. 2.

Такие классы хорошо изучены, если область G есть полупространство E_+^n ($x' \in E^{n-1}$, $x_n > 0$) (см., например, [10]). Если же рассматривать общие весовые классы функций в областях, то теоремы вложения носят иной характер. Приведем пример.

Рассмотрим класс функций $W^{\bar{l}}_{p,\bar{\sigma}}(G)$ $l = (2,2)$, $\sigma = (1, 0)$, где G — область (рис. 2), ограниченная прямыми $x_2 = 1/2$, $x_1 = 1$ отрезком $[0, 1]$ на оси ox_1 и кривой Г, заданной уравнением $x_1^{s_1} = x_2^{s_2}$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $s_1 > 0$, $s_2 > 0$. Класс функций $W^{\bar{l}}_{p,\bar{\sigma}}(G)$ ассоциирован с оператором Трикоми

$$L[D]f = x_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}.$$

Рассмотрим в области G последовательность функций

$$f_n(x_1, x_2) = x_2 e^{-nx_1}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Легко показать, что

$$\left\| f_n, W^{\bar{l}}_{p,\bar{\sigma}}(G) \right\| = 0\left(n^{-1/p - s_1/s_2(1+1/p)}\left[1 + n^{2-\frac{s_1}{s_2}}\right]\right),$$

$$\left\| x_2^{1/2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, L_p(G) \right\| = 0\left(n^{-1/p - s_1/s_2(1+1/p)+1+s_1/2s_2}\right).$$

Таким образом, для справедливости оценки

$$\left\| x_2^{1/2} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1 \partial x_2}, L_p(G) \right\| \leqslant c \left\| f_n, W^{\bar{l}}_{p,\bar{\sigma}}(G) \right\|,$$

где константа c не зависит от f_n, необходимо, чтобы $s_2/s_1 \geqslant 3/2$.

Как и в случае классов $W^{\bar{l}}_{p}(G)$, можно выделить классы областей, для которых сохраняются теоремы вложения, справедливые в случае полупространства. Этот класс областей выделяется при помощи условия «весового рога». Определим множество

$$V(\alpha, \gamma, \beta) = \bigcup_{0<v<h} \left(y \subset E^n, a_i < \frac{y_i - x_i}{v^{\alpha_i}[v^{\beta} + \rho(x)]^{\gamma_i}} < b_i, \quad i = 1, \ldots, n \right), \tag{9}$$

которое будем называть весовым рогом с вершиной в точке x. Будем считать, что область G удовлетворяет условию рога, если существует конечное число областей G_k, $k = 1, \ldots, N$, образующих покрытие области G такое, что для каждой точки $x \in G_k$ рог $V_k(\alpha, \gamma)$ (с константами a_i, b_i, зависящими от k) целиком содержится в области G. Приведем теорему вложения в случае веса $\rho = (1 + x_n)^{-1} x_n$, вырождающегося на куске границы, принадлежащей плоскости $x_n = 0$.

Т е о р е м а 2. Пусть $f \in W^{\bar{l}}_{p,\bar{\sigma}}(G)$, $1 < p < \infty$, $l = (l_1, \ldots, l_n)$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, l_j — натуральные числа,

$\sigma_j p + 1 > 0$, $l_n - \sigma_n - \sigma_i > 0$, область G удовлетворяет условию рога с $\rho(x) = x_n (1 + x_n)^{-1}$ и параметрами $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j = 1/l_j$, $j = 1, \ldots, n$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $\gamma_j = (\sigma_i - \sigma_n) l_i^{-1}$, $\beta = \alpha_n$.

Положим

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i \nu_i}{l_i} - (l_n - \sigma_n)\left[1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\nu_i}{l_i}\right],$$

где ν_i — целые натуральные числа. Тогда если $\nu : l = \sum\limits_{i=1}^{n} \nu_i / l_i \leqslant 1$, то $\rho^{\tilde{\lambda}} D^{\nu} f \in L_p(G)$ и справедлива оценка

$$\left\| \rho^{\tilde{\lambda}} D^{\nu} f, L_p(G) \right\| \leqslant \left\| f_1 W^{\bar{l}}_{p,\bar{\sigma}}(G) \right\|,$$

где

$$\tilde{\lambda} = \begin{cases} \lambda, & \lambda p + 1 > 0, \\ 0, & \lambda p + 1 \leqslant 0. \end{cases}$$

Приведенные здесь результаты содержатся в работах [11, 12].

§ 3. О следах функций $W_p^{\bar{l}}$ на гладких поверхностях

Для классов $W_p^{\bar{l}}$ Соболева (а также весовых и $B^{\bar{l}}_{p,\bar{\theta}}$ Бесова) даны точные характеристики следа функций на гиперплоскостях, параллельных координатным плоскостям. В случае, когда след рассматривается на гладких многообразиях различной размерности, в общем случае неизотропных классов точная характеристика граничных свойств является нерешенной задачей. В этом случае существенную роль играет ориентация поверхности, ее геометрические свойства. Ниже мы рассмотрим эти вопросы для классов $W_p^{\bar{l}}(G)$, для классов $B^{\bar{l}}_{p,\bar{\theta}}(G)$ и весовых они решаются аналогично (см. [13—16]).

Будем считать, что граница ∂G гладкая. Тогда существует такое покрытие $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$, $\partial G = \bigcup\limits_j \sigma_j$, что каждый кусок σ_k имеет представление

$$x_j = \varphi_k(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n), \tag{10}$$
$$x'(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \subset D_k,$$
$$\varphi_k \in C^m(D_k).$$

Если при этом по j-й координате дифференциальные свойства класса $W_p^{\bar{l}}(G)$ наилучшие, т. е. $l_j = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} l_i$ (такую координату будем называть регулярной), то, применяя преобразование, выпрямляющее границу и сохраняющее класс $W_p^l(G)$, приходим к случаю гиперплоскости, рассмотренной в [8].

Если кусок поверхности σ_m не имеет гладкого представления вида (10) по регулярной координате, то такой кусок будем называть нерегулярным. В этом случае производная функции φ_m' по регулярной координате обращается в ноль на некоторой области, принадлежащей D_m.

В дальнейшем будем считать, что эта область имеет $n-1$-мерную меру нуль и после инвариантного относительно класса $W_p^l(G)$ преобразования переходит в область, лежащую в одной из координатных плоскостей. Будем считать, что такое преобразование сделано, а саму область будем называть особой.

Потребуем, чтобы поверхность ∂G в окрестности особой области лежала в области, выметаемой рогами вида (1) при $s_j = l_j$ и некоторыми константами a_j, $j = 1, \ldots, n$ с вершинами, пробегающими особую область. Геометрически это требование означает, что поверхность имеет заданный порядок касания со своей касательной плоскостью в точках особой области. В этом случае в терминах классов Бесова и весовых B-классов можно дать точную (необходимую и достаточную) характеристику следа функции из $W_p^{\bar{l}}(G)$ на $n-1$-мерном гладком многообразии. Другие подходы к этой задаче были предложены в работе [17].

Сформулируем теорему о следах для классов $W_p^{\bar{l}}(G)$, $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_n)$ для нерегулярного куска $\sigma \subset \partial G$.

Будем предполагать, что область G удовлетворяет условию рога, позволяющему продолжить функцию с G на все E_n с сохранением класса, а кусок σ — условиям, формулируемым выше.

Положим

$$l_1 = \max_j l_j, \ l_n < l_1.$$

Тогда всегда можно считать, что область G имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} -\infty < x_n < \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \\ -\infty < x_j < \infty, \ j = 1, \ldots, n-1, \ \varphi \in C^m \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Положим $\partial G_1 = \partial G \cap x_1 > 0$, $\partial G_2 = \partial G \cap x_1 < 0$. Будем считать, что каждый кусок границы ∂G_k имеет представление $x_1 = \psi_k(x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x_2, \ldots, x_n) \in D$, где $\psi \subset C^m$ при $x' \in D$, $x_1 \neq 0$.

Определим следы на ∂G. Положим при $k = 1, 2$

$$\varphi_k = f|_{\partial G_k} = \lim_{v\to 0} f(\psi_k + v, x'),$$

$$\varphi_0 = f|_{\partial G} = \lim_{v\to 0} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, v + \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})).$$

Пусть $D(h)$ — подобласть области D, отстоящая от границы на расстояние больше mh. Будем говорить, что $\varphi_k \subset B_p^{\bar{r}}(D)$, $r = r_2, \ldots, r_n$, если

$$\|f, B_p^{\bar{r}}(D)\|^p = \|f, L_p(G)\|^p + \sum_{i=2}^{n} \int_0^{\varepsilon} \int_{D(h)} \frac{|\Delta_{\delta h}^m(f, e_i)|^p}{h^{pr_i+1}} dx dh < \infty,$$

где

$$\Delta_h(f, e_i) = f(x_2, \ldots, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_2, \ldots \\ \ldots, x_n),$$

$$\Delta_h^m(f, e_i) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1}(f, e_i), e_i).$$

Положим также

$$Q(h) = \begin{pmatrix} |x_1| < 2h & \\ -\infty < x_j < \infty & j = 2, \ldots, n-1 \end{pmatrix},$$

$$E_{n-1}^1 = (-\infty < x_j < \infty, \; x_1 > 0, \; j = 2, \ldots, n-1),$$

$$E_{n-1}^2 = (-\infty < x_j < \infty, \; x_1 < 0, \quad j = 2, \ldots, n-1).$$

Будем говорить, что $\varphi \in B_p^{\bar{r}}(0)$, $r = (r_1, \ldots, r_{n-1})$, если

$$\|\varphi, B_p^r(0)\|^p = \|f, L_p(G)\|^p + \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^{\varepsilon} \int_{Q\left(h^{\alpha_1 \alpha_i^{-1}}\right)} \frac{|\Delta_{\delta h}^m(f, e_i)|^p}{h^{pr_i+1}} dx dh < \infty,$$

где $\alpha_j = 1/l_j$, $j = 1, \ldots, n$;

$\varphi \in B_{p, \varkappa}^{\bar{r}}(E_{n-1}^k)$, если

$$\|f, B_{p,\varkappa}^r(E_{n-1}^k)\|^p = \|f, L_p(G)\|^p + \\ + \sum_{i=1}^{m-1} \int_0^{\varepsilon} \int_{E_{n-1}^k} |x_1|^{\varkappa p} \frac{|\Delta_{\delta_k h}^m(f, e_i)|^p}{h^{pr_i+1+\varkappa p \alpha_1 \alpha_i^{-1}}} dx dh < \infty,$$

где $\varkappa > 0$, $\alpha_i = l_i^{-1}$, $\delta_k = (-1)^{k-1}\delta$, $m\delta < 1$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $f \in W_p^{\bar{l}}(G)$, $l = (l_1, \ldots, l_n)$, $1 < p < \infty$, область G имеет вид (11) и удовлетворяет условию конуса (1) с $s_j = l_j$, $j = 1, \ldots, n$,

$$l_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} l_j.$$

Тогда $f|_{\partial G}$ допускает на каждом куске ∂G_k, $k = 1, 2$, представление

$$f|_{\partial G_k} = f_{1,k} + f_{2,k},$$

где $f_{1,k}$, рассматриваемая на ∂G_k как функция точек $(x_2, \ldots, x_n)$, принадлежит классу $B_p^{\bar{r}}(D)$, $r = (r_2, \ldots, r_n)$,

$$r_j = l_j l_1^{-1}(l_1 - 1/p), \quad j = 2, \ldots, n,$$

и удовлетворяет оценке

$$\| f_{1,k}, B_p^{\bar{r}}(D) \| \leqslant C \| f_1, W_p^{\bar{l}}(G) \|,$$

а функции $f_{2,k}$, рассматриваемые на ∂G_k как функции точек $(x_1, \ldots, x_{n-1})$, принадлежат классу

$$B_{p,\varkappa}^{\rho}(E_{n-1}^k), \quad \rho = (\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}), \quad \rho_j = l_j l_n^{-1}(l_n - 1/p),$$
$$\varkappa \in [0, l_1(l_1 - 1)],$$

и удовлетворяют оценке

$$\sup_{\varkappa \in [0, l_1(l_1 - 1)]} \| f_{2,k}, B_{p,\varkappa}^{\rho}(E_{n-1}^k) \| \leqslant C \| f, W_p^{\bar{l}}(G) \|.$$

Кроме того, имеет место условие согласования. Рассматривая функции $f_{1,k}$, $f_{2,k}$ на ∂G_k как функции точек $(x_1, \ldots, x_{n-1})$, положим

$$f^1 = \begin{cases} f_{11}, & x_1 > 0, \\ f_{21}, & x_1 < 0, \end{cases}$$

$$f^2 = \begin{cases} f_{12}, & x_1 > 0, \\ f_{22}, & x_1 < 0. \end{cases}$$

Тогда $f^k \in B_p^{\rho}(0)$, $k = 1, 2$, где

$$\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}), \quad \rho_j = l_j l_n^{-1}(l_n - 1/p), \quad j = 1, \ldots, n-1$$

и имеет место оценка

$$\| f^k, B_p^{\rho}(0) \| \leqslant C \| f, W_p^{l}(G) \|.$$

Теорема 3 допускает обращения. Аналогичные теоремы о следах имеют место также для классов $B_{p,\bar{\theta}}^{\bar{l}}$ Бесова и весовых классов $W_{p,\bar{\sigma}}^{\bar{l}}(G)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. Об одной краевой задаче для полигармонических уравнений.— Мат. сб., 1937, т. 2(44), N 3, с. 465—499.
2. Соболев С. Л. Об одной теореме функционального анализа.— Мат. сб. 1938, т. 4(46), N 3, с. 471—497.
3. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. ЛГУ, 1950, Переизд.: Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
4. Мазья В. Г. Классы областей и теоремы вложения функциональных пространств.— Докл. АН СССР, 1960, т. 133, № 3, с. 527—530.

5. Мазья В. Г. «p-проводимость» и теоремы вложения некоторых функциональных пространств в пространство C.— Докл. АН СССР, 1961, т. 140, № 2, с. 299—302.
6. Глобенко И. Г. Некоторые вопросы теории вложения для областей с особенностями на границе.— Мат. сб., 1962, т. 57(99), № 2, с. 201—224.
7. Campanato S. Il teorema di immersione di Sobolev per una classe di aparti non dotati della proprietà di cono.— Ricerche di Mat. II, 1962, N 1, 103—122.
8. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., 1975.
9. Бесов О. В., Ильин В. П. Естественное расширение класса областей в теоремах вложения.— Мат. сб., 1968, т. 75(117), № 4, с. 483—495.
10. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., Наука, 1977.
11. Успенский С. В. О смешанных производных функций, суммируемых с весом.— Дифференц. уравнения, 1967, т. 3, № 1, с. 139—154.
12. Перепелкин В. Г. Интегральные представления функций, принадлежащих весовым классам С. Л. Соболева в областях и некоторые приложения, I, II.— Сиб. мат. журн., 1976, т. 17, № 1, 2, с. 119—140, 318—330.
13. Успенский С. В. О следах функций класса $W_p^{l_1,\ldots,l_n}(G)$ Соболева на гладких поверхностях.—Сиб. мат. журн., 1972, т. 13, № 2, с. 429—451.
14. Перепелкин В. Г. О граничных свойствах функций, принадлежащих весовым классам $W^{\bar{l}}_{p,\bar{\sigma}}(G)$ С. Л. Соболева в области.— В кн.: Труды семинара акад. С. Л. Соболева, 1977, № 1, с. 108—148.
15. Садыкова С. Б. О следах функций класса $B_p^{l_1,\ldots,l_n}$ Бесова на гладких поверхностях.— В кн.: Теоремы вложения и их приложения. Алма-Ата, Наука, 1976, с. 131—135.
16. Шмырев Г. А. О следах функций класса $B^{\bar{l}}_{p,\bar{\theta}}(G)$ на гладких поверхностях. — В кн.: Труды семинара акад. С. Л. Соболева, 1978, № 1, с. 136—164.
17. Рамазанов М. Д. Теоремы о следах и продолжениях функций с поверхностей.— Докл. АН СССР, 1970, т. 190, № 4, с. 784—787.

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

П. И. ЛИЗОРКИН

(*Москва*)

М. ОТЕЛБАЕВ

(*Алма-Ата*)

Пространства гладких функций, исследованные в работах С. Л. Соболева и других математиков (см., например, монографии [1—4]), служат мощным инструментом для изучения уравнений с гладкими коэффициентами или уравнений со специальными особенностями. Но в приложениях часто встречаются уравнения, коэффициенты которых ведут себя весьма нерегулярно. В связи с этим возникает необходимость изучения весовых пространств с «негладкими» весами. Ниже мы изложим некоторые результаты, относящиеся к этому кругу вопросов.

Пусть $\overset{\circ}{L}{}_p^l(\Omega, v)$ и $L_q(\Omega, r)$ — пополнения пространства $C_0^\infty(\Omega)$ соответственно по нормам

$$\left| u : \overset{\circ}{L}{}_p^l(\Omega, v) \right| = \left(\| \nabla^l u \|_p^p + \int_\Omega v(t) \, | u(t) |^p \, dt \right)^{1/p} \tag{1}$$

и

$$| u : L_q(\Omega, r) | = \left(\int_\Omega r \, | u |^q dt \right)^{1/q}, \tag{2}$$

где Ω — открытое множество в R^n; $\|\cdot\|_p$ — норма в $L_p(R^n)$; $v(t)$ и $r(t)$ — положительные в Ω локально измеримые функции, а $\nabla^l u$ — градиент порядка l функции u,

$$| \nabla^l u | = \left(\sum_{0 \leqslant i_1, \ldots, i_l \leqslant n} \left| \frac{\partial^l u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_l}} \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Будем изучать единичный оператор E, действующий из $\overset{\circ}{L}{}_p^l(\Omega, v)$ в $L_q(\Omega, r)$, т. е. оператор вложения

$$E : \overset{\circ}{L}{}_p^l(\Omega, v) \to L_q(\Omega, r). \tag{3}$$

При $l = 1$, $p = q = 2$, $r(t) \equiv 1$ А. М. Молчанов [5] впервые установил критерий компактности оператора вложения (3). Результат А. М. Молчанова получил различные обобщения и усиления в работах ряда авторов (см. [6] и опубликованные там ссылки).

Для формулировок более поздних результатов о вложении (3) необходимо привести некоторые определения. Чтобы избежать громоздкости изложения, всюду в дальнейшем будем предполагать, что $pl > n$. Но все результаты переносятся и на случай $pl < n$ (при соответствующем задании $v^*(x)$). Введем функцию $v^*(x)$ с помощью формулы

$$v^*(x) = \inf_{d > 0} \left\{ d^{-1} : d^{-pl+n} \geqslant \int_{Q_d(x)} v(t) \, dt \right\},$$

где $Q_d(x)$ — куб с ребрами, равными d, параллельными координатным осям, с центром в точке x.

Теорема 1. Пусть $1 < p$, $q < \infty$, $l > n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$. Предположим, что выполнено условие $v^*(x) \neq 0$ в Ω и

$$T^{-1} \leqslant r(x) r^{-1}(y) \leqslant T \text{ при } |x - y| \leqslant \beta v^*(x)^{-1}, \tag{4}$$

где β — достаточно большое постоянное число. Тогда

а) непрерывное вложение (3) имеет место тогда и только тогда, когда $A < \infty$, где

$$A = \begin{cases} \sup\limits_{x\in\Omega} \left(v^*(x)^{-ql+nq/p-n} r(x)\right)^{1/q} & \text{при } q \geqslant p, \\ \left(\int\limits_{\Omega} r(x)^{p/(p-q)} v^*(x)^{-qpl/(p-q)} dx\right)^{(p-q)/pq} & \text{при } q < p; \end{cases}$$

б) для нормы $\|E\|$ оператора вложения (3) справедливы оценки $c^{-1}A \leqslant \|E\| \leqslant cA$, где c зависит только от p, q, l, n и постоянных T и β условия (4);

в) если $p \leqslant q$, то оператор вложения (3) вполне непрерывен тогда и только тогда, когда [1]

$$\lim_{x\to\partial\Omega} v^*(x)^{-ql+nq/p-n} r(x) = 0;$$

г) если $p > q$, то оператор вложения (3) вполне непрерывен при условии $A < \infty$.

Эта теорема является следствием более общих теорем, доказанных в работе [7]. В некоторых случаях теоремы такого рода можно получить, не накладывая на v, r и Ω никаких излишних ограничений (см. [7]). Например, справедлива следующая просто формулируемая

Теорема 2. Пусть $l = p = n = 1$, $1 \leqslant q < \infty$, $\Omega \subseteq I = (-\infty, \infty)$. Тогда

а) непрерывное вложение (3) имеет место, если и только если

$$A = \sup_{x\in\Omega} \{A(x)\} < \infty,$$

где

$$A(x) = \int\limits_{x-\frac{1}{2}d_x^{-1}}^{x+\frac{1}{2}d_x^{-1}} r(t)\,dt, \quad d_x = v^*(x)^{-1},$$

$$v^*(x) = \inf_{\left(x-\frac{d}{2},\, x+\frac{d}{2}\right)\subset\Omega} \left(d^{-1} : 1 \geqslant \int\limits_{x-\frac{d}{2}}^{x+\frac{d}{2}} v(t)\,dt\right);$$

б) для нормы оператора E вложения (3) справедливы оценки $C^{-1}A \leqslant \|E\|^q \leqslant CA$, где C не зависит от v, r и Ω;

в) оператор E вполне непрерывен, если и только если $A < \infty$ и $\lim\limits_{x\to\partial\Omega} A(x) = 0$.

Более глубокие свойства компактности вложения можно охарактеризовать с помощью поперечников. Напомним, что k-поперечником по Колмогорову множества M в банаховом пространстве

---

[1] Запись $x \to \partial\Omega$ означает, что x, оставаясь в Ω, выходит за пределы любого компакта K, лежащего в Ω.

B называется нижняя грань отклонения M в метрике B от всевозможных подпространств $\subseteq B$ размерности $\leqslant k$, т. е. число

$$d_k = \inf_{\{L\}_k} \sup_{f \in M} \inf_{g \in L} \| f - g \|_B,$$

где $\{L\}_k$ — совокупность всех подпространств $L \subseteq B$ размерности $\leqslant k$. k-поперечником вложения (3) будем называть k-поперечник единичного шара пространства $\overset{\circ}{L}{}^l_p(\Omega, v)$ в $L_q(\Omega, r)$. Через $N(\lambda)$ обозначим количество поперечников вложения (3), превосходящих $\lambda > 0$. В [7] доказана следующая

Теорема 3. Пусть $1 < p = q < \infty$, $l > 0$ и выполнены условия (4). Тогда справедливы оценки

$$c^{-1}N(c\lambda) \leqslant \lambda^{-\frac{n}{l}} \int\limits_{r(x)^{-\frac{1}{p}} v^*(x)^l \leqslant \lambda^{-1}} r(x)^{n/pl} dx \leqslant cN(c^{-1}\lambda), \quad \lambda > 0, \tag{5}$$

где c зависит только от p, l, n и постоянных условия (4).

Функция

$$F(\lambda) = \lambda^{-\frac{n}{l}} \int\limits_{r(x)^{-\frac{1}{p}} v^*(x)^l \leqslant \lambda^{-1}} r(x)^{n/pl} dx,$$

очевидно, является монотонно убывающей на $(0, \infty)$. Возьмем точку θ такую, что $F(\theta) = 1$, и введем новую функцию $\widetilde{F}(\lambda)$, которая равна $F(\lambda)$ при $\lambda \leqslant \theta$ и равна $1/(\lambda + 1 - \theta)$ при $\lambda > \theta$. Из определения величины $N(\lambda)$ следует, что $N(d_k) = k$. Поэтому для достаточно больших k из (5) легко получить важную оценку

$$c_1^{-1} f(k) \leqslant d_k \leqslant c_1 f(k), \tag{6}$$

где $f(\cdot)$ — функция, обратная к функции $\widetilde{F}(\cdot)$. Эти оценки распространяются (с помощью теоремы 1) на все $k = 0, 1, 2, \ldots$, причем в них постоянная c_1 зависит только от p, l, n и констант условия (4).

В качестве примера приложения применим сформулированные результаты к расширению по Фридрихсу L оператора $L_0 u = (-\Delta)^l u + v(x)u$, $x \in \Omega$, определенного на $C_0^\infty(\Omega)$, где Ω — область в R^n, $v(x) \geqslant 0$.

Согласно известным вариационным принципам,

$$c^{-1} d_k^{-1} \leqslant \lambda_k^{1/2} \leqslant c d_k^{-1}, \tag{7}$$

где $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — множество точек спектра оператора L, занумерованных в порядке неубывания, а $\{d_k\}$ — поперечники вложения (3) при $p = q = 2$, $r(x) \equiv 1$. Из (6) и (7) сразу вытекает

Теорема 4. Справедливы оценки

$$c_1^{-2} f^{-2}(x) \leqslant \lambda_k \leqslant c_1^2 f^{-2}(k), \tag{8}$$

где c_1 не зависит от $v(x)$ и Ω, а $f(\cdot)$ — функция, обратная к функции $\tilde{F}_1(\lambda)$, которая равна $F_1(\lambda)$ при $\lambda \leqslant \theta$ и равна $(\lambda + 1 - \theta)^{-1}$ при $\lambda > \theta$. Здесь θ — корень уравнения $F_1(\lambda) = 1$, а $F_1(\lambda) = \lambda^{-n/l} \cdot \operatorname{mes}(x : v^*(x)^l \leqslant \lambda^{-1})$, mes — мера Лебега.

Сформулированная теорема может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 4′. Пусть $N(\lambda)$ — количество точек спектра оператора L, не превосходящих $\lambda > 0$. Тогда

$$c^{-1} N\left(c^{-1}\lambda\right) \leqslant \lambda^{n/2l} \operatorname{mes}\{x \in \Omega : v^*(x) \leqslant \lambda^{1/2l}\} \leqslant cN(c\lambda),$$

где c не зависит от Ω, λ и $v(x)$.

В [7] (см. [7], дополнение) доказано, что не существует эффективной (в определенном смысле) асимптотической формулы для $N(\lambda)$ $(\lambda \to +\infty)$. Поэтому теоремы 4 и 4′ представляются интересными.

Сформулированные результаты в основном распространяются на случай, когда вместо $\overset{\bullet}{L}{}_p^l(\Omega, v)$ рассматриваются пространства с нормами

$$\left(\|\rho^{1/p} |\nabla^l u|\|_p^p + \int_\Omega v(x) |u(x)|^p dx\right)^{1/p},$$

где $\rho(x)$ и $v(x)$—непрерывные на Ω функции, $\rho(x) > 0$, $v(x) \geqslant 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во ЛГУ, 1950. 255 с.
2. Adams R. Sobolev spaces. N. Y., Acad. Press, 1975.
3. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., Наука, 1977. 455 с.
4. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., Наука, 1975. 480 с.
5. Молчанов А. М. Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка.— Труды Моск. мат. о-ва, 1963, т. 2, с. 169—200.
6. Мазья В. Г. О (l, p)-емкости, теоремах вложения и спектре самосопряженного эллиптического оператора.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, т. 37, № 2, с. 356—385.
7. Отелбаев М. Оценки спектра эллиптических операторов и теоремы вложения, связанные с ними. Докт. дис. М., МГУ, 1978.

ТЕОРИЯ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

В. Г. МАЗЬЯ, Т. О. ШАПОШНИКОВА

(Ленинград)

1. Обозначения. Рассмотрим вопрос о мультипликаторах на пространствах С. Л. Соболева — Л. Н. Слободецкого $W_p^l(R^n)$, пространстве О. В. Бесова $B_p^l(R^n)$ и др. Многие из формулируемых здесь теорем относятся к мультипликаторам на каждом из упомянутых пространств (хотя их доказательства часто специфичны); в таких случаях мы даем единые формулировки, используя для пространства одно из обозначений S или S_p^l.

Под мультипликатором в пространстве S подразумевается функция γ, умножение на которую не выводит из S. Пространство мультипликаторов в S будем обозначать через MS. Так как оператор умножения функции $\gamma \in MS$ на элемент пространства S замкнут, то он ограничен. Норму этого оператора будем рассматривать как норму γ в MS.

Некоторые результаты относятся к пространствам $M(S_1 \to S_2)$ мультипликаторов, действующих из S_1 в S_2. Сказанное о норме в пространстве MS переносится и на норму в пространстве $M(S_1 \to S_2)$.

Пусть e — компактное подмножество R^n. Емкостью e, порожденной пространством S, назовем число

$$\operatorname{cap}(e) = \inf\{\|u\|_S^p : u \in C_0^\infty(R^n),\ u \geqslant 1 \text{ на } e\}.$$

Пусть $\mathscr{B}_\rho(x) = \{h \in R^n : |h-x| < \rho\}$, $\mathscr{B}_\rho = \mathscr{B}_\rho(O)$, $\nabla_k = \{\partial^k/\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}\}$. Через $c, c_1, c_2, \ldots$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от «безразмерных» параметров l, n и т. п. Будем говорить, что величины a и b эквивалентны ($a \sim b$), если $c_1 a \leqslant b \leqslant c_2 a$. Интегрирование без указания пределов распространено на R^n. То же относится к обозначениям функциональных пространств. Пусть еще $\|u\|_p$ обозначает норму в пространстве L_p.

Норма в пространстве С. Л. Соболева W_p^l ($p \geqslant 1$, $l = 0, 1, \ldots$) равна $\|\mathscr{D}u\|_p + \|u\|_p$, где $(\mathscr{D}u)(x) = |\nabla_l u(x)|$. Полагая

$$(\mathscr{D}u)(x) = \left(\int |\nabla_{[l]}u(x+h) - \nabla_{[l]}u(x)|^p |h|^{-n-p\{l\}} dh\right)^{1/p}$$

при дробном $l > 0$, получаем норму $\|\mathscr{D}u\|_p + \|u\|_p$ в пространстве Л. Н. Слободецкого W_p^l. То же выражение определяет норму в пространстве О. В. Бесова B_p^l, если под $\mathscr{D}u$ понимать функцию

$$\left(\int |\nabla_k u(x+h) - 2\nabla_k u(x) + \nabla_k u(x-h)|^p |h|^{-n-p\alpha} dh\right)^{1/p}$$

где $l = k + \alpha$, $\alpha \in (0, 1]$, и k — целое неотрицательное число.

Пополняя C_0^∞ по любой из норм $\|\mathcal{D}u\|_p$ $(pl < n)$, получаем пространства w_p^l и b_p^l.

Любое из указанных четырех пространств W_p^l, B_p^l, w_p^l, b_p^l в следующих теоремах обозначено через S, при этом вид функции $\mathcal{D}u$ и выбор емкости cap (e) согласованы с S. Через S_{loc} обозначим пространство $\{u : \eta u \in S$ для всех $\eta \in C_0^\infty\}$.

2. Описание и свойства пространств мультипликаторов. В следующей теореме дана характеристика пространства MS.

Теорема 1. Пусть $p \in (1, \infty)$. Функция γ принадлежит пространству MS в том и только том случае, если $\gamma \in L_\infty \cap S_{\mathrm{loc}}$ и $\|\mathcal{D}\gamma\|_{L_p(l)}^p \leqslant \mathrm{const\,cap}\,(e)$ для всех компактов e в R^n. Имеет место соотношение

$$\|\gamma\|_{MS} \sim \|\gamma\|_\infty + \sup_e \frac{\|\mathcal{D}\gamma\|_{L_p(e)}}{[\mathrm{cap}\,(e)]^{1/p}}. \tag{1}$$

Отметим, что в случае $lp > n$ это соотношение эквивалентно следующему:

$$\|\gamma\|_{MS} \sim \|\gamma\|_\infty + \sup_{x \in R^n} \|\mathcal{D}\gamma\|_{L_p(\mathscr{B}_1(x))}.$$

Для пространства бесселевых потенциалов последнее утверждение ранее было получено Р. С. Стричартцом [1].

Доказательство теоремы 1 существенно использует неравенство

$$\int_0^\infty \mathrm{cap}\,(\{x : |u(x)| \geqslant t\})\, t^{p-1} dt \leqslant c \|u\|_S^p, \tag{2}$$

впервые установленное в [2] для $S = w_p^l$, $l = 1, 2$, затем в [3] для $S = w_p^l$ при любом целом l и в [4] для $S = W_p^l$, $S = w_p^l$ при всех $l > 0$.

Если $S = W_1^l$ или $S = w_1^l$, то описание пространства MS, содержащееся в следующей теореме, не использует понятия емкости.

Теорема 2. Функция γ принадлежит пространству $MW_1^l (l > 0)$ в том и только том случае, если $\gamma \in L_\infty \cap W_{1,\mathrm{loc}}^l$ и для любого шара $\mathscr{B}_\rho(x)$, $\rho \in (0, 1)$,

$$\|\mathcal{D}\gamma\|_{L_1(\mathscr{B}_\rho(x))} \leqslant \mathrm{const}\,\rho^{n-l}.$$

Имеет место соотношение

$$\|\gamma\|_{MW_1^l} \sim \|\gamma\|_\infty + \sup_{x \in R^n, \rho \in (0,1)} \rho^{l-n} \|\mathcal{D}\gamma\|_{L_1(\mathscr{B}_\rho(x))}.$$

Если в этой формулировке заменить W на w и снять требование $\rho \in (0, 1)$, то получим описание пространства Mw_1^l.

Для пространств S, о которых идет речь в теоремах 1 и 2, справедливо интерполяционное неравенство

$$\|\gamma\|_{MS_p^k} \leqslant c \|\gamma\|_\infty^{1-k/l} \|\gamma\|_{MS_p^l}^{k/l}, \quad 0 < k < l.$$

Следующие две теоремы содержат не использующие емкости односторонние оценки нормы γ в MS.

Теорема 3. Пусть $S = W_p^l$ или $S = B_p^l (p > 1,\ l > 0)$.

1. Если $lp < n$, то

$$\sup_{x \in R^n,\ \rho \in (0,1)} \rho^{l-n/p} \|\mathcal{D}\gamma\|_{L_p(\mathscr{B}_\rho(x))} \leqslant c \|\gamma\|_{MS}. \tag{3}$$

2. Если $lp = n$, то

$$\sup_{x \in R^n,\ \rho \in (0,1)} (\log 2/\rho)^{(p-1)/p} \|\mathcal{D}\gamma\|_{L_p(\mathscr{B}_\rho(x))} \leqslant c \|\gamma\|_{MS}.$$

Если в неравенстве (3) снять требование $\rho \in (0, 1)$, то получится нижняя оценка нормы в MS, где $S = w_p^l,\ b_p^l,\ l_p < n$.

Теорема 4. Пусть $S = W_p^l$ или $S = B_p^l$ $(p > 1,\ l > 0)$.

1. Если $lp < n$, то

$$\|\gamma\|_{MS} \leqslant c \left(\sup_{\{e:\mathrm{diam}(e)<1\}} \frac{\|\mathcal{D}\gamma\|_{L_p(e)}}{(\mathrm{mes}_n e)^{1/p-l/n}} + \|\gamma\|_\infty \right). \tag{4}$$

2. Если $lp = n$, то

$$\|\gamma\|_{MS} \leqslant c \left(\sup_{\{e:\mathrm{diam}(e)<1\}} \left[\log (2^n/\mathrm{mes}_n e)\right]^{(p-1)/p} \|\mathcal{D}\gamma\|_{L_p(e)} + \|\gamma\|_\infty \right).$$

Если в (4) снять требование $\mathrm{diam}\,(e) < 1$, то получится верхняя оценка нормы в MS, где $S = w_p^l,\ b_p^l\,(lp < n)$.

Сформулируем теорему о делении на мультипликатор.

Теорема 5. Если $\gamma \in MS$ и $\|\gamma^{-1}\|_\infty < \infty$, то $\gamma^{-1} \in MS$.

3. Следы и продолжения мультипликаторов в пространстве W_p^l. Пусть $R^{n+m} = \{z = (x, y) : x \in R^n,\ y \in R^m\}$ и $W_{p,\beta}^k(R^{n+m})$ — пополнение пространства $C_0^\infty(R^{n+m})$ по норме

$$\left(\int |y|^{p\beta} (|\nabla_k U|^p + |U|^p)\, dz\right)^{1/p}.$$

Как известно [5, 6], пространство $W_p^l(R^n)$ при нецелых l представляет собой пространство следов на R^n функций из $W_{p,\beta}^k$ (R^{n+m}), где $\beta = k - l - m/p$. Следующие две теоремы показывают, что $MW_p^l(R^n)$ является пространством следов на R^n функций из пространства $MW_{p,\beta}^k(R^{n+m})$.

Теорема 6. Пусть $\{l\} > 0$, $l < k$, где k — целое число. $\Gamma \in MW_{p,\beta}^k(R^{n+m})$, $\beta = k - l - m/p$ и $\gamma(x) = \Gamma(x, 0)$. Тогда $\gamma \in MW_p^l(R^n)$ и справедлива оценка

$$\|\gamma\|_{MW_p^l(R^n)} \leqslant c \|\Gamma\|_{MW_{p,\beta}^k(R^{n+m})}.$$

Следуя Е. М. Стейну [7], введем оператор продолжения $R^n \to R^{n+m}$ равенством

$$\Gamma_*(x, y) = \int \zeta(t)\gamma(x + |y|t)dt, \tag{5}$$

где функция ζ подчинена условиям

$$\int (1+|x|)^l \sum_{j=0}^{k} \sup_{\partial \mathscr{B}_{|x|}} |\nabla_j \zeta|(1+|x|)^j dx = C < \infty,$$

$$\int \zeta(x)\, dx = 1,$$

$$\int x^\alpha \zeta(x)\, dx = 0, \quad 0 < |\alpha| \leqslant [l]. \tag{6}$$

Теорема 7. Пусть $\{l\} > 0$, $\gamma \in MW_p^l(R^n)$. Тогда $\Gamma_* \in MW_{p,\beta}^k(R^{n+m})$, $\beta = k - l - m/p$ и справедлива оценка

$$\|\Gamma_*\|_{MW_{p,\beta}^k(R^{n+m})} \leqslant cC \|\gamma\|_{MW_p^l(R^n)}.$$

Если в формулировке последней теоремы положить $m = 1$ и заменить R^{n+m} на $R_+^{n+1} = \{(x, y) : x \in R^n,\ y \geqslant 0\}$, то она остается справедливой и без условия (6). На этом замечании основано приложение теоремы 7 к первой краевой задаче в полупространстве R_+^{n+1}:

$$L(D)U = 0 \text{ при } y \geqslant 0; \ \frac{\partial^j U}{\partial y^j} = \varphi_j \text{ при } y = 0,$$
$$0 \leqslant j \leqslant m-1. \tag{7}$$

Здесь L — однородный дифференциальный оператор порядка $2m$ с постоянными коэффициентами.

Теорема 8. Пусть $\nabla_{m-1-j}\varphi_j \in MW_p^l(R^n)$, $0 < l < 1$, $1 \leqslant p < \infty$. Тогда существует одно и только одно решение задачи (7) такое, что $\nabla_{m-1}U \in MW_{p,\,k-l-1/p}^k(R_+^{n+1})$, $k \geqslant 1$. Для этого решения справедлива оценка

$$\|\nabla_{m-1}U\|_{MW_{p,\,k-l-1/p}^k(R_+^{n+1})} \leqslant K \sum_{j=0}^{m-1} \|\nabla_{m-1-j}\varphi_j\|_{MW_p^l(R^n)}.$$

Следующая теорема показывает, что пространство сужений функций из $MW_p^l(R^{n+m})$, $\{l - m/p\} > 0$, на R^n совпадает с пространством $MW_p^{l-m/p}(R^n)$.

Теорема 9. Пусть $\{l - m/p\} > 0$, $1 \leqslant p < \infty$, $\Gamma \in MW_p^l(R^{n+m})$, $\gamma(x) = \Gamma(x, 0)$ и Γ_* — продолжение функции γ, определенное формулой (5). Тогда справедливы оценки

$$c_1 C^{-1} \|\Gamma_*\|_{MW_p^l(R^{n+m})} \leqslant \|\gamma\|_{MW_p^{l-m/p}(R^n)} \leqslant c_2 \|\Gamma\|_{MW_p^l(R^{n+m})}.$$

4. Пространство $M(W_p^m \to W_q^l)$. Приведем характеристику пространства мультипликаторов, действующих из одного пространства С. Л. Соболева в другое.

Теорема 10. 1. Пусть m, l — целые неотрицательные числа, $m \geqslant l$, $1 < p < \infty$. Пространство $M(W_p^m \to W_p^l)$ состоит из функций γ, локально суммируемых со степенью p вместе с обобщенными производными порядка l и таких, что

$$\int_e |\gamma|^p dx \leqslant \mathrm{const}\,\mathrm{cap}\,(e, W_p^{m-l}),\quad \int_e |\nabla_l \gamma|^p dx \leqslant \mathrm{const}\,\mathrm{cap}\,(e, W_p^m)$$

для всех компактов e в R^n. Имеет место соотношение

$$\|\gamma\|_{M(W_p^m \to W_p^l)} \sim \sup_e \left(\frac{\|\gamma\|_{L_p(e)}}{[\mathrm{cap}\,(e, W_p^{m-l})]^{1/p}} + \frac{\|\nabla_l \gamma\|_{L_p(e)}}{[\mathrm{cap}\,(e, W_p^m)]^{1/p}} \right).$$

2. В случае $p = 1$, $q \geqslant p$ или $p > 1$, $q > p$

$$\|\gamma\|_{M(W_p^m \to W_q^l)} \sim \sup_{x \in R^n, \rho \in (0,1)} \rho^{m-l-n/p} \left(\|\gamma\|_{L_q(\mathscr{B}_\rho(x))} + \right.$$
$$\left. + \rho^l \|\nabla_l \gamma\|_{L_q(\mathscr{B}_\rho(x))} \right).$$

Обозначим через $|\gamma|_{M(W_p^m \to W_q^l)}$ существенную норму оператора умножения на $\gamma \in M(W_p^m \to W_q^l)$, $m \geqslant l$; m, l — целые. Следующая теорема содержит двусторонние оценки этой нормы.

Теорема 11. 1. Если $p > 1$, то

$$|\gamma|_{M(W_p^m \to W_p^l)} \sim \lim_{\delta \to +0} \sup_{\{e: \mathrm{diam}(e) \leqslant \delta\}} \left(\frac{\|\gamma\|_{L_p(e)}}{[\mathrm{cap}\,(e, W_p^{m-l})]^{1/p}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\|\nabla_l \gamma\|_{L_p(e)}}{[\mathrm{cap}\,(e, W_p^m)]^{1/p}} \right) + \lim_{\rho \to +\infty} \sup_{\{e: e \subset R^n \setminus B_\rho\}} \left(\frac{\|\gamma\|_{L_p(e)}}{[\mathrm{cap}(e, W_p^{m-l})]^{1/p}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\|\nabla_l \gamma\|_{L_p(e)}}{[\mathrm{cap}\,(e, W_p^m)]^{1/p}} \right).$$

2. Справедливо соотношение

$$|\gamma|_{M(W_p^m \to W_q^l)} \sim \overline{\lim_{r \to +0}}\, r^{m-n/p} \sup_{x \in R^n} \left(r^{-l} \|\gamma\|_{L_q(B_r(x))} + \right.$$
$$\left. + \|\nabla_l \gamma\|_{L_q(B_r(x))} \right) + \lim_{\rho \to +\infty} \sup_{x \in R^n \setminus B_\rho,\, r \in (0,1)} \times$$
$$\times r^{m-n/p} \left(r^{-l} \|\gamma\|_{L_q(B_r(x))} + \|\nabla_l \gamma\|_{L_q(B_r(x))} \right),$$

где $p = 1$, $q \geqslant p$ или $p > 1$, $q > p$.

5. Диффеоморфизмы, многообразия и дифференциальные операторы, связанные с пространством MW_p^l.

Пусть U—открытое подмножество R^n и $W_p^l(U, \mathrm{loc}) = \{u : \eta u \in W_p^l$ для всех $\eta \in C_0^\infty(U)\}$. Будем говорить, что отображение $\varkappa : U \to V \subset R^n$ есть диффеоморфизм класса $M_p^l(U, \mathrm{loc})$, $p \geqslant 1$, $l \geqslant 1$, если $\varkappa$ — липшицево отображение, определитель $\det \varkappa'$ сохраняет знак и отделен от нуля на любом компактном подмножестве множества U и если элементы матрицы Якоби $\varkappa'$ принадлежат классу мультипликаторов $MW_p^{l-1}(U, \mathrm{loc})$.

Диффеоморфизмы класса $M_{p,\mathrm{loc}}^l$ обладают следующими свойствами.

(i) Если $u \in W_p^l(V, \mathrm{loc})$ и $\varkappa \in M_p^l(U, \mathrm{loc})$, то $u \circ \varkappa \in W_p^l(U, \mathrm{loc})$.

(ii) Если $\varkappa \in M_p^l(U, \mathrm{loc})$, то $\varkappa^{-1} \in M_p^l(V, \mathrm{loc})$.

(iii) Если $\gamma \in MW_p^l(U, \mathrm{loc})$ и $\varkappa \in M_p^l(U, \mathrm{loc})$, то $\gamma \circ \varkappa \in MW_p^l(U, \mathrm{loc})$.

(iv) Если $\varkappa_1 : U \to V$, $\varkappa_2 : V \to W$ — диффеоморфизмы классов $M_p^l(U, \mathrm{loc})$ и $M_p^l(V, \mathrm{loc})$, то $\varkappa_2 \circ \varkappa_1 \in M_p^l(U, \mathrm{loc})$.

(v) Пусть

$$P(x, D_x)\, u = \sum_{|\alpha| \leqslant m} p_\alpha(x)\, D_x^\alpha u \tag{8}$$

— дифференциальный оператор на множестве U, $\varkappa \in M_p^l(U, \mathrm{loc})$, $l \geqslant m$, и Q — дифференциальный оператор на множестве V, определенный равенством $Q(u \circ \varkappa^{-1}) = (Pu) \circ \varkappa^{-1}$.

Тогда оператор Q действует из $W_p^l(V, \mathrm{loc})$ в $W_p^{l-m}(V, \mathrm{loc})$ в том и только том случае, если оператор P действует из $W_p^l(U, \mathrm{loc})$ в $W_p^{l-m}(U, \mathrm{loc})$.

(vi) Пусть $\mathfrak{M}_p^{l,m}(U, \mathrm{loc})$ — класс операторов P, таких, что $p_\alpha \in M\left(W_p^{l-|\alpha|}(U, \mathrm{loc}) \to W_p^{l-m}(U, \mathrm{loc})\right)$ для любого мультииндекса α. Оператор P принадлежит классу $\mathfrak{M}_p^{l,m}(U, \mathrm{loc})$ в том и только том случае, если $Q \in \mathfrak{M}_p^{l,m}(V, \mathrm{loc})$.

Ясно, что условие $P \in \mathfrak{M}_p^{l,m}(U, \mathrm{loc})$ достаточно для непрерывности $P : W_p^l(U, \mathrm{loc}) \to W_p^{l-m}(U, \mathrm{loc})$. При $p=1$ и при $p(l-m) > n$, $p > 1$ это условие является также и необходимым.

С помощью диффеоморфизмов $M_p^l(U, \mathrm{loc})$ стандартным образом определяется класс n-мерных многообразий $M_{p,n}^l$ без края или с краем. Если $\{l - 1/p\} > 0$, то дифференциальная структура класса $M_{p,n}^l$ индуцирует на крае структуру класса $M_{p,n-1}^{l-1/p}$. На многообразии Ω класса $M_{p,n}^l$ инвариантным образом определяются пространства $W_p^k(\Omega)$, $0 \leqslant k \leqslant l$.

Примером многообразия из $M_{p,n}^l$ с краем может служить компактная подобласть R^n с границей, допускающей локально явное задание липшицевой функцией с градиентом из $MW_p^{l-1/p}(R^{n-1})$.

Будем говорить, что дифференциальный оператор P порядка $m \leqslant l$ на многообразии $\Omega \in M_{p,n}^l$ принадлежит классу $\mathfrak{M}_p^{l,m}$, если для каждой координатной системы $\{\varkappa, U\}$ из некоторого атласа существует дифференциальный оператор $P^\varkappa$ из класса $\mathfrak{M}_p^{l,m}(\varkappa(U), \text{loc})$ такой, что $(Pu)\circ\varkappa^{-1} = P^\varkappa(u\circ\varkappa^{-1})$. В силу (vi) это определение не зависит от выбора атласа.

На многообразия класса $M_{p,n}^l$ и эллиптические краевые задачи с дифференциальными операторами из $\mathfrak{M}_p^{l,m}$ распространяетсь классическая L_p-теория. Приведем простейший пример, иллюстрирующий возникающие здесь возможности.

Теорема 12. Пусть P — эллиптический дифференциальный оператор в R^n порядка $2m$ с коэффициентами класса $C^l(l = 2m, 2m+1, \ldots)$ и Ω — подобласть R^n с компактным замыканием и границей $\partial\Omega$. Пусть существует конечное покрытие $\partial\Omega$ координатными окрестностями, в каждой из которых Ω задана неравенством $x_n > f(x')$, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, где f — липшицева функция. Пусть f допускает продолжение на R^{n-1} с компактным носителем и достаточно малой [1] нормой $\|\nabla f\|_{MW_p^{l-1-1/p}(R^{n-1})}$, где $p \in (1, \infty)$. Тогда оператор $P: W_p^l(\Omega) \cap \mathring{W}_p^m(\Omega) \to W_p^{l-2m}(\Omega)$ является нетеровым и для всех $u \in W_p^l(\Omega) \cap \mathring{W}_p^m(\Omega)$ справедлива коэрцитивная оценка

$$\|u\|_{W_p^l(\Omega)} \leqslant \text{const}\left(\|Pu\|_{W_p^{l-2m}(\Omega)} + \|u\|_{L_p(\omega)}\right),$$

где ω — подобласть Ω, $\bar{\omega} \subset \Omega$.

По теореме 1 условие, налагаемое на функцию f, означает достаточную малость константы Липшица и величины

$$\sup_{e \subset R^{n-1}} \frac{\|\mathscr{D}_{p,l-1/p} f\|_{L_p(e)}}{\left[\text{cap}\left(e, W_p^{l-1-1/p}\right)\right]^{1/p}}, \tag{9}$$

где

$$(\mathscr{D}_{p,l-1/p} f)(x') = \left(\int_{R^{n-1}} |\nabla_{l-1} f(x'+h) - \nabla_{l-1} f(x')|^p |h|^{2-n-p} dh\right)^{1/p}.$$

Из теоремы 4 следует, что для малости величины (9) достаточна малость одного из интегралов

$$\int_{R^{n-1}} (\mathscr{D}_{p,l-1/p} f)^p dx \quad \text{для} \quad p(l-1) > n,$$

$$\int_{R^{n-1}} (\mathscr{D}_{p,l-1/p} f)^p (\log_+ \mathscr{D}_{p,l-1/p} f)^{p-1} dx' \quad \text{для} \quad p(l-1) = n,$$

[1] Здесь и далее малость определяется константой эллиптичности и нормами коэффициентов оператора P.

$$\int\limits_{R^{n-1}} (\mathscr{D}_{p,l-1/p} f)^{\frac{p(n-1)}{p(l-1)-1}} dx' \quad \text{для} \quad p(l-1) < n.$$

Можно требовать лишь конечности этих интегралов, поскольку их малости можно добиться за счет измельчения покрытия $\partial\Omega$ координатными окрестностями.

Отсюда следует еще более жесткое достаточное условие $f \in C^{l-1}(R^{n-1})$ и модуль непрерывности $\omega(t)$ вектора $\nabla_{l-1} f$ удовлетворяет неравенству

$$\int\limits_0 [\omega(t)/t]^p dt < \infty.$$

Последнее условие было найдено ранее прямым методом В. А. Кондратьевым, который построил примеры, подтверждающие его точность.

6. О непрерывности свертки в пространстве L_2 с весом. Пусть $K: u \to K * u$ — оператор свертки с ядром k. Ясно, что этот оператор непрерывно отображает пространство $L_2(R^n; (1+|x|^2)^{m/2})$ на пространство $L_2(R^n; (1+|x|^2)^{l/2})$, $m \geqslant l \geqslant 0$, в том и только том случае, если преобразование Фурье $\widetilde{k}$ принадлежит пространству $M(W_2^m \to W_2^l)$. Последнее равносильно тому, что $\widetilde{k} \in W_{2,\mathrm{loc}}^l$ и для всех компактов e в R^n

$$\int\limits_e |\widetilde{k}|^2 dx \leqslant \mathrm{const}\, \mathrm{cap}\, (e, W_2^{m-l}), \quad \int\limits_e (\mathscr{D}_{2,l} \widetilde{k})^2 dx \leqslant \mathrm{const}\, \mathrm{cap}\, (e, W_2^m),$$

где

$$(\mathscr{D}_{2,l} u)(x) = \left(\int | \nabla_{[l],x} (u(x+h) - u(x)) |^2 |h|^{-n-2\{l\}} dh \right)^{1/2}.$$

При этом

$$\|K\| \sim \sup_e \left(\frac{\|\widetilde{k}\|_{L_2(e)}}{[\mathrm{cap}\,(e, W_2^{m-l})]^{1/2}} + \frac{\|\mathscr{D}_{2,l}\widetilde{k}\|_{L_2(e)}}{[\mathrm{cap}\,(e, W_2^m)]^{1/2}} \right).$$

При $2m > n$

$$\|K\| \sim \sup_{x \in R^n} \left(\|\widetilde{k}\|_{L_2(\mathscr{B}_1(x))} + \|\mathscr{D}_{2,l}\widetilde{k}\|_{L_2(\mathscr{B}_1(x))} \right).$$

Заменяя здесь W на w, получаем характеристику сверток, непрерывно действующих из $L_2(R^n; |x|^m)$ в $L_2(R^n; |x|^l)$, $m \geqslant l \geqslant 0$.

Пусть оператор $K: L_2(R^n; (1+|x|^2)^{m/2}) \to L_2(R^n; (1+|x|^2)^{l/2})$ непрерывен и φ — комплекснозначная функция комплексного аргумента, $\varphi(0) = 0$. Через $\varphi(K)$ обозначим оператор свертки с символом $\varphi(\widetilde{k})$. Если все производные функции φ до порядка $[l]$ ограничены и при дробном l производная $\varphi^{[l]}$ удовлетворяет равномерному условию Липшица, то оператор $\varphi(K): L_2(R^n; (1+

$+ |x|^2)^{m/2}) \to L_2(R^n; (1 + |x|^2)^{l/2})$ непрерывен. Заменяя условие Липшица более слабым $|\varphi^{[l]}(\xi + \eta) - \varphi^{[l]}(\xi)| \leqslant \mathrm{const} \times \max\{|\eta|^\rho, |\eta|\}$, где $\rho \in (0, 1)$, можно доказать следующее утверждение типа теоремы Хиршмана [8, с. 47]: оператор

$$\varphi(K) : L_2(R^n; (1 + |x|^2)^{(m-\sigma)/2} \to L_2(R^n; (1 + |x|^2)^{(l-\sigma)/2}),$$

$$\text{где } l(1 - \rho) < \delta,$$

непрерывен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Strichartz R. S. Multipliers on fractional Sobolev spaces.— J. of Math. and Mech., 1967, v. 16, N 9, p. 1031—1060.
2. Мазья В. Г. О некоторых интегральных неравенствах для функций многих переменных.— В кн.: Проблемы мат. анализа, 1972, № 3, с. 33—68.
3. Adams D. R. On the existence of capacitary strong type estimates in R^n.— Akk. mat., 1976, v. 14, N 1, p. 125—140.
4. Мазья В. Г. О емкостных оценках сильного типа для «дробных» норм.— Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1977, т. 70, с. 161—168.
5. Лизоркин П. И. Граничные свойства некоторого класса функций.— Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 4, с. 703—706.
6. Успенский С. В. О теоремах вложения для весовых классов.— Труды Мат. ин-та АН СССР, 1961, т. 60, с. 282—303.
7. Stein E. M. The characterization of functions arising as potentials.— Bull. Amer. Nath. Soc., 1962, v. 68, N 6, p. 577—582.
8. Hirschman I. I. Multiplier transformations II.— Duke Math. J., 1961, v. 28, N 1, p. 45—56.

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ С. Л. СОБОЛЕВА ОБ ИНТЕГРАЛАХ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА

П. Е. СОБОЛЕВСКИЙ

(*Воронеж*)

1. Пусть Ω — область m-мерного пространства, $\omega(t, s)$ — определенная на $\Omega \times \Omega$ непрерывная и ограниченная функция и $0 < \lambda < m$. Согласно теореме С. Л. Соболева (см. [1]), интегральный оператор

$$(\Pi x)(t) = \int\limits_\Omega \frac{\omega(t, s)}{|t - s|^\lambda} x(s)\, ds \tag{1}$$

является ограниченным оператором из пространства $L_p(\Omega)$ при $1 < p < \frac{m}{m - \lambda}$ в пространство $L_q(\Omega)$ при

$$q = \frac{mp}{m - (m - \lambda) p}.$$

Если область Ω ограничена, то оператор Π является вполне непрерывным оператором в пространстве $L_2(\Omega)$. Каждому вполне непрерывному оператору A поставим в соответствие (см. [2]) последовательность $S_n(A)$ его S-чисел. Например, известно, что

$$0 < an^{-\frac{m-\lambda}{m}} \leqslant S_n(\Pi) \leqslant bn^{-\frac{m-\lambda}{m}} < +\infty. \tag{2}$$

Оператор A принадлежит идеалу $\sigma_p (p > 0)$ кольца ограниченных операторов, если

$$\|A\|_p \equiv \left[\sum_{m=1}^{\infty} S_m^p(A)\right]^{\frac{1}{p}} < +\infty. \tag{3}$$

Из известной оценки $S_n(BA) \leqslant \|B\| S_n(A)$ следует, что оператор Π является ограниченным трансформатором в любом σ_p. Более того, справедлива

Теорема. Для любого $p > \frac{m}{\lambda}$ оператор Π является ограниченным трансформатором из σ_p в σ_q при

$$q = \frac{mp}{m + (m-\lambda)p}.$$

2. Доказательство проводится по схеме работы [3]. Из леммы 2 этой работы следует, что

$$S_n(\Pi A) \leqslant C_p \|A\|_p n^{-\frac{1}{p} - \frac{m-\lambda}{m}}. \tag{4}$$

Воспользовавшись этой оценкой при $\frac{m}{\lambda} < p_1 < p < p_2$ и применив интерполяционную лемму 3 из [3], получим утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Соболев С. Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962. 255 с.
2. **Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.** Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., Наука, 1965. 448 с.
3. **Соболевский П. Е.** Дробные степени эллиптических операторов в идеалах σ_p.—Труды Науч.-исслед. ин-та математики ВГУ, Воронеж, вып. V, 1972.

О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ВЫРАЖЕНИЯМИ

В. Д. СТЕПАНОВ

(*Хабаровск*)

Пусть $\Lambda(\xi) \neq 0$, $\xi \in R^n$ — гипоэллиптическое выражение [1, с. 461]. Рассмотрим связанный с Λ оператор T_Λ

$$(T_\Lambda f)(x) = \int\limits_{R^n} e^{2\pi i(x,\xi)} \frac{1}{\Lambda(\xi)} \hat{f}(\xi)\, d\xi, \tag{1}$$

определенный для всех $f \in C_0^\infty(R^n)$. Пусть $\|\cdot\|_p$ — норма в $L^p(R^n)$. Если оператор T_Λ вида (1) допускает оценку

$$\|T_\Lambda f\|_p \leqslant C\|f\|_p$$

с некоторой константой C, не зависящей от f, то говорят, что T_Λ — мультипликатор типа (p, p).

В. П. Паламодовым ([2], см. также [3]) показано, что если $n = 2$, то $\left(\frac{1}{\Lambda}\right)^\wedge(\xi) \in L^1(R^n)$ и, следовательно, T_Λ типа (p, p), $p \geqslant 1$. В случае $n \geqslant 3$ L^p-ограниченность оператора T_Λ для специальных классов гипоэллиптических выражений рассматривалась многими авторами.

В данной работе получаем, что для любого гипоэллиптического выражения $\Lambda(\xi) \neq 0$, $\xi \in R^n$, оператор T_Λ является мультипликатором типа (p, p), где интервал изменения p зависит, вообще говоря, от порядка убывания $\frac{1}{\Lambda(\xi)}$ на бесконечности. Прежде чем сформулировать основной результат, заметим, что для любого гипоэллиптического выражения $\Lambda(\xi) \neq 0$, $\xi \in R^n$, существуют константы $C > 0$, $\alpha > 0$, не зависящие от $\xi \in R^n$, такие, что

$$\left|\frac{1}{\Lambda(\xi)}\right| \leqslant \frac{C}{(1+|\xi|^2)^{\alpha/2}}. \qquad (2)$$

Как показано в [4], если в (2) $\alpha > \frac{n}{2}$, то $\left(\frac{1}{\Lambda}\right)^\wedge(\xi) \in L^1(R^n)$ и поэтому T_Λ — типа (p, p) для любого $p \geqslant 1$. Для других значений α в (2) получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а. Пусть $\Lambda(\xi) \neq 0$, $\xi \in R^n$,— гипоэллиптическое выражение, T_Λ — связанный с ним оператор вида (1). Тогда если в неравенстве (2) константа $\alpha = \frac{n}{2}$, то T_Λ—мультипликатор типа (p, p) для любого $1 < p < \infty$. Если $0 < \alpha < \frac{n}{2}$, то T_Λ — мультипликатор типа (p, p) при $\frac{2n}{n+2\alpha} \leqslant p \leqslant \frac{2n}{n-2\alpha}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно показать, что преобразование Фурье в смысле распределений функции $\frac{1}{\Lambda(\xi)}$ обладает следующими свойствами:

а) $\left(\frac{1}{\Lambda}\right)^\wedge \in C_0^\infty(R^n \setminus \{0\})$;

б) для любого $m > 0$ $\left(\frac{1}{\Lambda}\right)^\wedge(\eta) \leqslant \frac{C_m}{(1+|\eta|^2)^{m/2}}$, $|\eta| \geqslant 1$.

Пусть функция $0 \leqslant \varphi(x) \in C_0^\infty(R^n)$ такая, что $\varphi(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1$, $\varphi(x) = 0$ при $|x| \geqslant 2$. Запишем в смысле распределений

$$\left(\frac{1}{\Lambda}\right)^\wedge(\eta) = \left(\frac{1}{\Lambda}\right)^\wedge(\eta)\,\varphi(\eta) + \left(\frac{1}{\Lambda}\right)^\wedge(\eta)(1-\varphi(\eta)) =$$
$$= \Lambda_1(\eta) + \Lambda_2(\eta). \qquad (3)$$

Тогда распределение $\Lambda_1(\eta) = \left(\frac{1}{\Lambda}\right)^\wedge(\eta) - \Lambda_2(\eta)$ имеет компактный носитель, $\Lambda_2(\eta)$ и ее преобразование Фурье в силу оценки б) принадлежат $L^1(R^n)$ и хорошо убывают на бесконечности. Имеем

$$\overline{(\Lambda_1)}^\vee(\xi) = \frac{1}{\Lambda(\xi)} - (\Lambda_2)^\vee(\xi).$$

Отсюда в силу (2) и свойств функции $\Lambda_2(\eta)$ получаем

$$|(\Lambda_1)^\vee(\xi)| \leqslant \frac{C}{(1+|\xi|^2)^{\alpha/2}}$$

с некоторой константой C, не зависящей от $\xi \in R^n$. Отсюда и из [5, теоремы 1, 2] получаем, что если $\alpha = \frac{n}{2}$, то

$$\|T_{\Lambda_1} f\|_p \leqslant C\|f\|_p, \quad 1 < p < \infty, \quad f \in C_0^\infty(R^n).$$

Если $0 < \alpha < \frac{n}{2}$, то

$$\|T_{\Lambda_1} f\|_p \leqslant C\|f\|_p, \frac{2n}{n+2\alpha} \leqslant p \leqslant \frac{2n}{n-2\alpha}, \quad f \in C_0^\infty(R^n),$$

где

$$(T_{\Lambda_1} f)(x) = \int_{R^n} e^{2\pi i(x,\xi)} (\Lambda_1)^\vee(\xi) \hat{f}(\xi)\, d\xi, \; f \in C_0^\infty(R^n).$$

Из свойств Λ_1, Λ_2 и (3) получаем утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Березанский Ю. М.** Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, Наукова думка, 1965. 798 с.
2. **Паламодов В. П.** Об особенности фундаментальных решений гипоэллиптических уравнений.— Сиб. мат. журн., 1963, т. 4, № 6, с. 1365—1375.
3. **Madych W. R.** Absolute summability of Fourier transforms on R^n.—Indiana Univ. Math. J., 1976, v. 25, N 5, p. 467—479.
4. **Степанов В. Д.** Об одном случае регулярности резольвенты самосопряженного гипоэллиптического оператора в $L^2(R^n)$. — В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики. Новосибирск, Наука, 1973, с. 193—195.
5. **Björk J.-E.** *Lp* estimates for convolution operators defined by compactly supported distribution in R^n.— Math. Scand., 1974, v. 34, N 1, p. 129—136.

О ПОЛНОТЕ ПРОСТРАНСТВА $\mathscr{L}_p^\mu(E_n)$

Е. А. ХАМАЕВ

(Улан-Удэ)

Введем определение. Рассмотрим функцию $\mu(i\xi) \in C^{\sigma_n}$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $\mu(i\xi\lambda^\alpha) = \lambda\mu(i\xi)$, где α — показатель однородности, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j^{-1} \geqslant 1$;

2) $c_1|\xi| < \mu(i\xi) < c_2|\xi|$, где $|\xi| = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j^{2\alpha_j^{-1}}}$, $|\xi| \neq 0$;

3) для любого β, $|\beta| = 0, 1, 2, \ldots, N$, $N > 2n$ при $|\xi_j| > 0$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, $D^\beta\mu(i\xi)$ существуют и непрерывны и имеет место оценка

$$|D^\beta\mu(i\xi)| \leqslant \frac{1+|\xi|^{\beta+r}}{|\xi|^r}|\xi^{-\beta}|, \tag{1}$$

где $r > 0$ — некоторое число;

4) $|D^k(\mu(i\xi))^{-1}| \leqslant |\xi^{-k}| \cdot |\mu(i\xi)|^{-1}$, $k = \sum\limits_{j=1}^{n} k_j$, $|\xi^{-k}| = |(\xi_1^{-k_1}, \xi_2^{-k_2}, \ldots, \xi_n^{-k_n})|$;

5) имеет место оценка

$$\prod_{j=1}^{n} |\xi_j|^{r_j} |D^\rho(\xi^\gamma\mu(i\xi))| \leqslant c|\xi|^{-\nu},$$

где $\nu > 0$,

$$r_j = \begin{cases} 0, & \text{если } [l_j] = l_j, \\ 1 - l_j, & \text{если } [l_j] \neq l_j, \end{cases}$$

$l_j = \alpha_j^{-1} \geqslant 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — показатель однородности оператора P, $0 \leqslant \rho_j \leqslant \gamma_j + [l_j] + 1$, $0 \leqslant \gamma_j \leqslant [l_j] + 1$.

Положим

$$(u, v) = \int_{E_n} uv\,dx. \tag{2}$$

Определим множество функций S_N. Функция $\varphi(x) \in S_N$, если $\varphi(x) \in C^{2n}(E_n)$, $\varphi(x) \in L_p(E_n)$ для любого $p > 1$, и удовлетворяет следующим условиям:

1) $\mu(i\xi)\widehat{\varphi}(\xi) \in C^N(E_n)$; (3)

2) $|D^\beta(\mu(i\xi)\widehat{\varphi}(\xi))| \leqslant c_\varphi(1 + |\xi|)^{-N}$, $\beta = 0, 1, \ldots, N$.

Легко доказать, что функции $\varphi \in S_N$ плотны в $L_p(E_n)$, $1 < p < \infty$, [1, 2].

Введем класс функций $u(x) \in S'_N$. Функция $u \in S'_N$, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $u(x) \in L_p^{\mathrm{loc}}(E_n)$ и для почти всех $x \in E_n$ имеет место оценка;

2) $|u(x)|(1+|x|)^{-N} < k_0(x)$, где $k_0(x) \in L_p(E_n)$. (4)

Определим на функциях $\varphi(x) \in S_N$ оператор

$$Pu = \int_{E_n} \exp(2\pi i x\xi)\, \mu(i\xi)\, \widehat{u}(\xi)\, d\xi. \tag{5}$$

Пусть символ $\mu(i\xi)$ удовлетворяет условиям (1). Определим класс $\mathscr{L}_p^\mu(E_n)$. Функция $u(x) \in \mathscr{L}_p^\mu(E_n)$, если:

1) $u(x) \in S'_N$ для некоторого N и

2) $\|u\|_{\mathscr{L}_p^\mu(E_n)} = \sup\limits_{\varphi \in S_N} \dfrac{(u,\ F^{-1}(\mu(i\xi)\,\widehat{\varphi}(\xi)))}{\|\varphi\|_{L_{p'}}}$, (6)

где F^{-1} — обратное преобразование Фурье.

Из (6) следует, что существует такая функция $f(x) \in L_p(E_n)$, что для любых $\varphi \in S_N$ $(u, P\varphi) = (f, \varphi)$.

Положим

$$G(t) = (\mu(it))^{-1} G_1(t),\ G_1(t) = G_0(t) \sum_{j=1}^{n} t_j^{4k},$$

$$G_0(t) = \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} t_j^{4k} (\alpha_j 4k)^{-1}\right),$$

где k — достаточно большое число; α — показатель однородности, удовлетворяющий (1). Тогда из [3, 4] следует, что каждая функция $u \in \mathscr{L}_p^\mu(E_n)$ имеет для почти всех $x \in E_n$ представление

$$u(x) = Q(x) + \lim_{h \to 0} J_h[f(x)],$$

где

$$J_h[f(x)] = \int_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha|} \int_{E_n} \widehat{G}\left(\frac{t-x}{v^\alpha}\right) f(t)\, dt\, dv,$$

а $Q(x)$ — полином некоторой степени N_1 и $\|Q(x)\|_{\mathscr{L}_p^\mu(E_n)} = 0$.

Рассмотрим подпространство M пространства $\mathscr{L}_p^\mu(E_n)$. Функция $u(x) \in M$, если она имеет представление

$$u(x) = Q_{1/\alpha}(x) + \lim_{h \to 0} J_h[f(x)],$$

где $Q_{1/\alpha}(x)$ — некоторый полином фиксированной степени $[1/\alpha]$, $[1/\alpha] = ([1/\alpha_1], \ldots, [1/\alpha_n])$, $1/\alpha_j = [1/\alpha_j] + \beta_j$, $0 < \beta_j \leqslant 1$,

$j = 1, \ldots, n$. Для элементов этого пространства положим

$$\|u\|_M = \|U\|_{\mathscr{L}_p^{\mu}(E_n)}.$$

Таким образом, M образует нормированное линейное пространство [5]. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Пространство M — полное.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Соболев С. Л.** Введение в теорию кубатурных формул. М., Наука, 1974. 808 с.
2. **Лизоркин П. И.** Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций.— Труды Мат. ин-та АН СССР, 1969, т. 105, с. 89—167.
3. **Успенский С. В., Чистяков Б. Н.** О выходе на полином при стремлении $|x| \to \infty$ решений одного класса псевдодифференциальных уравнений.— Сиб. мат. журн., 1975, т. 16, № 5, с. 1053—1070.
4. **Успенский С. В.** О дифференциальных свойствах решений одного класса псевдодифференциальных уравнений на бесконечности.— Сиб. мат. журн., 1972, т. 13, № 3, с. 665—678.
5. **Хермандер Л.** Линейные дифференциальные операторы. М., Мир, 1965. 380 с.

О СЛЕДАХ ФУНКЦИЙ КЛАССА $H_p^l(G)$ С. М. НИКОЛЬСКОГО НА ГЛАДКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Г. А. ШМЫРЕВ

(*Новосибирск*)

Вопрос о поведении функций, заданных в области, на поверхностях меньшей размерности исследован в настоящее время достаточно полно. Подробную библиографию по этому вопросу можно найти в работах [1, 2] (см. также статью В. П. Ильина, С. В. Успенского «Некоторые вопросы теории вложения классов дифференцируемых функций» в данном сборнике). Для доказательства основных утверждений применяется схема, использованная ранее в работе [3] и примененная позже автором в [4]. Основные определения и понятия можно найти в работах [1—3].

В настоящей статье исследуются граничные свойства функций из анизотропных пространств H_p^l $(1 < p < \infty)$. При некоторых условиях геометрического характера на область G, связанных с показателем гладкости $l = (l_1, \ldots, l_n)$ класса, удается получить обратимую характеристику следа произвольной функции из указанного класса.

Условие на область заключается в следующем. Предполагается, что граница области является гладким многообразием, т. е. существует покрытие $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$, где каждый кусок σ_k имеет представление σ_k: $x_j = \varphi_k(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$.

Случай, когда $l_j = \max\limits_{1<i<n} l_i$ (такую координату будем называть регулярной), сводится путем распрямления границы (см. лемму 1) к известному случаю следов на гиперплоскостях [1]. Если же для данного куска поверхности $l_j < \max\limits_{1<i\leqslant n} l_i$ (такую координату будем называть нерегулярной), то распрямление границы с сохранением класса уже неприменимо, так как не является гладким в направлении регулярной координаты. В дальнейшем будем предполагать x_1 регулярной, x_n — нерегулярной координатой, а многообразие, где нарушается гладкость, лежащим в координатной гиперплоскости $x_1 = 0$.

1. **Определения. Основные результаты.** Пусть E_n — n-мерное евклидово пространство точек $(x_1, \ldots, x_n)$, G — область в E_n с границей ∂G. Через $H^l_p(G)$ $(1 < p < \infty)$ обозначим множество функций, заданных в G и имеющих конечную норму

$$\|F\|_{H^l_p(G)} = \|F\|_{L_p(G)} + \sum_{i=1}^{n} \sup_{0<h<h_0} \frac{\|\Delta_i^{m_i}(h, G) D_i^{k_i} f\|_{L_p}}{h^{l_i-k_i}}, \tag{1}$$

$\Delta_i^m(h)F$ — m-я разность с шагом h по i-й координате; $m_i + k_i > l_i > k_i \geqslant 0$; m_i, k_i — целые [2, § 18.1]. Область G предполагается удовлетворяющей условию рога [2], т. е.

$$G = \bigcup_{k=1}^{N} G_k, \ \forall k \ G_k + T_k(\alpha) \subset G, \ \alpha_i = 1/l_i,$$

где

$$T_k(\alpha) = \{x : 0 < a_i v^{\alpha_i} \leqslant x_i \leqslant b_i v^{\alpha_i}, \quad 0 < v < \varepsilon\}.$$

Предполагается также, что существует линейный ограниченный оператор продолжения $f(G) \to \tilde{f}(E_n)$, $\tilde{f}|_G = f$, причем $\|\tilde{f}\|_{H^l_p(E_n)} \leqslant c\|f\|_{H^l_p(G)}$ [2, § 9.8].

Пусть рассматриваемый кусок границы σ имеет представление в направлении нерегулярной координаты $x_n = \varphi(x')$, где φ удовлетворяет следующим условиям:

$$\left|\frac{\partial^k \varphi}{\partial x_i^k}\right| \leqslant M \cdot \begin{cases} |x_1|^{\frac{\alpha_n - k\alpha_i}{\alpha_1}} & \text{при } \alpha_n > k\alpha_i, \\ 1 & \text{при } \alpha_n \leqslant k\alpha_i, \end{cases} \tag{2}$$

где $k = 1, \ldots, [l_1]$, $i = 1, \ldots, n-1$, M не зависит от точки, а в направлении регулярной координаты x_1 данный кусок поверхности имеет вид

$$x_1 = \psi_1(x_2, \ldots, x_n) = \psi_1(x'),\ x' \in D,\ x_1 > 0,$$
$$x_1 = \psi_2(x_2, \ldots, x_n) = \psi_2(x'),\ x' \in D,\ x_1 < 0. \tag{3}$$

Считая область D удовлетворяющей условию l'-рога, $l' = (l_2, \ldots \ldots, l_n)$, можно показать, что в некоторой ε-окрестности D_ε границы ∂D имеет место

а) $\forall y' \in D_\varepsilon\ \exists h_1 = h_1(y')$, такое что $y' \in D(h_1) \setminus D(h_1/2)$;

б) если $x' \in D_\varepsilon$ и $a_i h^{\alpha_i} < t < b_i h^{\alpha_i}$, $i = 2, \ldots, n$, $0 < h \leqslant \varepsilon$, то $x' + t' \notin D(h/2)$;

в) $\exists \delta > 0$, не зависящее от h и x', такое, что если $x' \in D_\varepsilon \setminus D(h)$, то $y' = x' + t' \in D_\varepsilon \setminus D(h/2)$ при $0 \leqslant t_i \leqslant \delta h^{\alpha_i}$, $i = 2, \ldots, n$, $0 < h < \varepsilon c$.

На определенные в (3) функции наложим следующие ограничения:

$$\forall x',\ x' + y' \in D\ |\psi_k(x' + y') - \psi_k(x')| \leqslant M \left[\sum_{i=2}^{n} |y_i|^{1/\alpha_i}\right]^{\alpha_1}, \tag{4}$$

$$\left|\frac{\partial^k \psi_\nu}{\partial x_i^k}\right| \leqslant M h^{\alpha_1 - k\alpha_i}, \quad i = 2, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, [l_i],\ \nu = 1, 2, \tag{5}$$

$\forall x' \in D \setminus D(h)$, где $D(h)$ — подобласть D, «выметаемая» рогами длины h с вершинами на ∂D.

Для формулировки основных результатов введем некоторые нормы. Положим

$$\|f\|_{H_p^l(\mathring{D})} = \sum_{i=2}^{n} \sup_{0<h<h_0} \frac{\|\Delta_i^m(\delta h) f\|_{L_p(D \setminus D(h^{l_i}))}}{h^{l_i}} + \|f\|_{L_p}, \tag{6}$$

где $1 < p < \infty$, $m > \max\limits_{2 \leqslant i \leqslant n} l_i$,

$$\|f\|_{\dot{H}_{p(0)}^l} = \sum_{i=1}^{n-1} \sup_{0<h<h_0} \frac{\|\Delta_i^m(\delta h) f\|_{L_p\left(Q\left(h^{\alpha_1 \alpha_i^{-1}}\right)\right)}}{h^{l_i}} + \|f\|_{L_p}, \tag{7}$$

где

$$Q(h) = \begin{cases} |x_1| \leqslant h, \\ -\infty < x_j < \infty, \quad j = 2, \ldots, n-1. \end{cases}$$

$$\|x_1^\varkappa f\|_{H_p^{r,\dot\varkappa}(E_{n-1}^k)} = \sum_{i=1}^{n-1} \sup_{0<h<h_0} \frac{\|x_1^\varkappa \Delta_i^m(\delta_k h) f\|_{L_p(E_{n-1}^k)}}{h^{r_i + \alpha_1 \alpha_i^{-1} \varkappa}} + \|f\|_{L_p}, \tag{8}$$

где $E_{n-1}^1 = \{x_1 \geqslant 0,\ -\infty < x_j < \infty,\ j = 2, \ldots, n-1\}$,
$E_{n-1}^2 = \{x_1 \leqslant 0,\ -\infty < x_j < \infty,\ j = 2, \ldots, n-1\}$.

Пусть

$$G=\begin{cases}-\infty\leqslant x_n\leqslant\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1}),\\ -\infty<x_j<\infty,\ j=1,\ldots,n-1,\end{cases}\tag{9}$$

где ∂G удовлетворяет условиям (2)—(5), $\varphi\in C^m$, $m>l_1^2$. Определим

$$F|_{\Gamma_k}=\lim_{v\to 0}F(\psi_k(x')+v,\ x'),\quad k=1,\ 2.$$

Имеют место следующие утверждения.

Т е о р е м а 1. Пусть $F\in H_p^l(G)$, $1<p<\infty$, $l_1=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}l_i$, $l_1-[l_1]\geqslant\frac{1}{p}$, $(i=1,\ldots,n)$. Тогда $F|_\Gamma$ существует и допускает представление вида $f_k=F|_{\Gamma_k}=f_k^1+f_k^2$, где функция f_k^1, рассматриваемая на куске Γ_k как функция точки $x'=(x_2,\ldots,x_n)$, принадлежит классу $H_p^{r'}(D)$, $k=1,\ 2$, где $r_i=\frac{l_i}{l_1}\left(l_1-\frac{1}{p}\right)$, $r'=(r_2,\ldots,r_n)$, $i=2,\ldots,n$, и удовлетворяет оценке

$$\|f_k^1\|_{H_p^r(D)}\leqslant c\|F\|_{H_p^l(G)},\qquad k=1,\ 2.$$

Функции

$$f^1=\begin{cases}f_1^1,\ x_1>0,\\ f_2^1,\ x_1<0,\end{cases}\qquad f^2=\begin{cases}f_1^2,\ x_1>0,\\ f_2^2,\ x_1<0,\end{cases}$$

рассматриваемые как функции точки $x'=(x_2,\ldots,x_n)$, удовлетворяют оценкам

$$\|f^k(x')\|_{H_p^r(0)}\leqslant c\|F\|_{H_p^l(G)},$$

$$\|f_k^2\|_{H_p^{r,\varkappa}\left(\overset{k}{E}{}_{n-1}\right)}\leqslant c\|F\|_{H_p^l(G)},$$

где $k=1,2$, $r=(r_1,\ldots,r_{n-1})$, $r_i=\frac{l_i}{l_n}\left(l_n-\frac{1}{p}\right)$, $i=1,\ldots,n-1$, $\varkappa=([l_1]+1)([l_1]+2)$.

Т е о р е м а 2 (обратная). Пусть область G имеет вид (9) и области $G_1=G\cap\{x_1\geqslant 0\}$, $G_2=G\cap\{x_1\leqslant 0\}$ удовлетворяют условиям $(l_1,\ldots,l_n)$-рога. Пусть $\varphi\in G^m$, $m>\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}l_i^2=l_1^2$. Зададим на $\Gamma=\partial G$ функцию f, которая на каждом куске $\Gamma_k=\partial G_k$, $k=1,\ 2$, может быть представлена в виде $f=f_k^1+f_k^2$, где:

1) каждая функция f_k^1 как функция точки $x'=(x_2,\ldots,x_n)$ принадлежит классу $H_p^r(D)$, где $r'=(r_2,\ldots,r_n)$, $r_i=\frac{l_i}{l_1}\times\left(l_1-\frac{1}{p}\right)$, $i=2,\ldots,n$; $k=1,\ 2$, $1<p<\infty$;

2) функции

$$f^1 = \begin{cases} f_1^1, & x_1 > 0, \\ f_2^1, & x_1 < 0, \end{cases} \qquad f^2 = \begin{cases} f_1^2, & x_1 > 0, \\ f_2^2, & x_1 < 0, \end{cases}$$

рассматриваемые как функции точки $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, удовлетворяют оценкам

$$\|f^k\|_{H_p^r(0)} < \infty, \ \|x_1^{\varkappa} f_k^2\|_{H_p^{r,\varkappa}(E_{n-1}^k)} < \infty,$$

где $r_i = \frac{l_i}{l_n}\left(l_n - \frac{1}{p}\right)$, $i = 1, \ldots, n-1$, $r = (r_1, \ldots, r_{n-1})$, $1 < p < \infty$. Тогда в области G существует функция $F \in H_p^l(G)$ такая, что $F|_{\Gamma_k} = f_k^1 + f_k^2$, $k = 1, 2$, и имеет место оценка

$$\|F\|_{H_p^l(G)} \leqslant c \sum_{k=1}^{2} \left(\|f_k^1\|_{H_p^r(D)} + \|f^k\|_{H_p^r(0)} + \|x_1^{\varkappa} f_k^2\|_{H_p^{r,\varkappa}(E_{n-1}^k)} \right),$$

где $\varkappa \in [0, ([l_1] + 1)([l_1] + 2)$, c не зависит от f и F.

2. Некоторые вспомогательные утверждения. Всюду в дальнейшем будем считать область G удовлетворяющей условию рога и такой, что существует линейный ограниченный оператор продолжения с G на все E_n финитной функцией.

Лемма 1. Пусть $f \in H_p^l(G)$, где область G удовлетворяет описанным выше условиям, $l_1 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} l_i$. Тогда преобразование $z_i = x_i$, $i = 2, \ldots, n$; $z_1 = x_1 + \Phi(x')$, где $\Phi \in C^k(E_{n-1})$, $k > l_1$, $|D^\alpha \Phi| \leqslant N < \infty$ инвариантно относительно класса.

Для доказательства используется представление Ильина — Бесова [2, формула 7(97)]

$$f(x) = f_\varepsilon(x) + \int_0^\varepsilon \sum_{i=1}^n v^{-1-|\alpha|-\alpha_i} \int_{E_1} \int_{E_n} \Delta_i^m(\delta t) f(x + y + te_i) \times$$
$$\times \chi_i(y : v^\alpha) M_i(tv^{-\alpha_i}) \, dy \, dt, \tag{10}$$

где $\alpha_i = 1/l_i$, $i = 1, \ldots, n$, $m > \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} l_i = l_1$, $f_\varepsilon \in C_0^\infty$ и имеет вид

$$f_\varepsilon(x) = \int_{E_n} f(x + y) \prod_{j=1}^n \Omega_j(y_j v^{-\alpha_j}) v^{-\alpha_j} dy,$$

а функции, входящие в ядра усреднения, удовлетворяют условию

$$\chi_i(y) = \prod_{j=1}^n \chi_{ij}(y_j); \ \chi_{ij}, M_i, \Omega_j \in C_0^\infty(E_1). \tag{11}$$

Замечание 1. В силу леммы 1 и условия на функции ψ_k дальнейшие рассуждения можно проводить для области D_ε, а функции $f \in H_p^l(G)$ считать равными нулю для $x' \notin D_\varepsilon$ [2, теорема 17.11].

Лемма 2. Пусть область D удовлетворяет условию $l' = (l_2, \ldots, l_n)$-рога, $\alpha_i = 1/l_i$, $i = 2, \ldots, n$ и выполнены условия п. 1 на область D. Тогда нормы (1) и (6) эквивалентны, т. е. справедливо

$$c_1 \| f \|_{\overset{\circ}{H}{}_p^l(D)} \leqslant \| f \|_{H_p^l(D)} \leqslant c_2 \| f \|_{\overset{\circ}{H}{}_p^l(D)},$$

где константы c_1 и c_2 не зависят от f.

Доказательство этих утверждений повторяет доказательство лемм 1 и 2 из работы [4], отличаясь от него лишь применением неравенства Харди для L_∞-нормы вместо использования неравенства Харди для L_θ-норм $(1 < \theta < \infty)$.

3. Граничные свойства функций на поверхностях класса Гёльдера. Рассмотрим область $G = (0 < x_1 < \psi(x'), x' \in D)$. Предполагается что области G и D удовлетворяют условиям п. 1. Введем на G класс функций, равных нулю при $x_1 < 0$. При этом, как и ранее, x_1—регулярная координата, т. е. $l_1 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} l_i$, $l_1 - [l_1] > \frac{1}{p}$.

Таким образом, $f \in \overset{\bullet}{H}{}_p^l$, если $f \in H_p^l$ и $\left.\frac{\partial^k f}{\partial x_1^k}\right|_{x_1=0} = 0$, $k = 0, 1, \ldots, [l_1]$. Положим $F|_\Gamma = \lim\limits_{v \to 0} F(\psi(x') + v, x')$, где Γ имеет вид Γ: $x_1 = \psi(x') = \psi(x_2, \ldots, x_n)$.

Лемма 3. Пусть $f \in \overset{\circ}{H}{}_p^l(G)$, области G и D удовлетворяют перечисленным выше условиям, $l_1 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} l_i$, тогда след $F|_\Gamma = f(x')$ существует и имеет место оценка

$$\| f \|_{H_p^r(D)} \leqslant c \| F \|_{H_p^l(G)}, \tag{12}$$

где c не зависит от F, $r_i = \frac{l_i}{l_1}\left(l_1 - \frac{1}{p}\right)$.

Лемма 4. Пусть поверхность Γ имеет вид $x_1 = \psi(x')$, $x' \in D$. Область D удовлетворяет условию l'-рога и условиям а) — в), а функция $\psi(x')$ — условиям (4), (5). Тогда если $f \in H_p^r(\Gamma)$, где $r_i = \frac{l_i}{l_1}\left(l_1 - \frac{1}{p}\right)$, $i = 2, \ldots, n$, $l_1 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} l_i$, то существует функция $F(x)$, определенная на G, такая, что $F|_\Gamma = f(x')$ и

$$\| F \|_{H_p^l(G)} \leqslant c \| f \|_{H_p^r(\Gamma)}, \tag{13}$$

где $l = (l_1, \ldots, l_n)$, а c не зависит от f и F.

В силу условия на область D можно воспользоваться представлением (10). Нетрудно проверить, что функция

$$F(x_1, x') = f_{\varepsilon_1}(x')\,\chi\left(\frac{x_1 - \psi(x')}{\varepsilon^{\alpha_1}}\right) + \sum_{i=2}^{n} \int_0^{\varepsilon_1} v^{-1-|\alpha'|-\alpha_i} dv \int \Delta_i^m(\delta t)\, f(x' + y' + te_i)\,\chi_i(y' : v^{\alpha'})\, M_i(tv^{-\alpha_i})\,\chi\left(\frac{x_1 - \psi(x')}{v^{\alpha_1}}\right) dy'dt$$

удовлетворяет условиям леммы. Оценки (12), (13) получаются повторением доказательства лемм 3 и 4 работы [4] с учетом замечания к лемме 2.

Пусть области G и D удовлетворяют перечисленным выше условиям. Используя представление (10), построим функцию [2, § 16, формула (34)]

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=0}^{[l_1]} \frac{(-1)^k x_1^k}{k!}\,\chi\left(\frac{x_1}{\varepsilon^{\alpha_1}}\right) \int_{E_n} \varepsilon^{-|\alpha|-\alpha_1 k}\,\Omega_1^{(k)}\left(\frac{y_1}{\varepsilon^{\alpha_1}}\right) \prod_{j=2}^{n} \Omega_j \times$$

$$\times \left(\frac{y_j - x_j}{\varepsilon^{\alpha_j}}\right) F(y)\,dy + \sum_{k=0}^{[l_1]} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\varepsilon_1} \int_{E_{n-1}} v^{-|\alpha|-1-\alpha_i} (-1)^k \left(\frac{x_1}{v^{\alpha_1}}\right)^k \chi_{i1}^{(k)} \times$$

$$\times \left(\frac{y_1}{v^{\alpha_1}}\right) \prod_{j=2}^{n} \chi_{ij}\left(\frac{y_j - x_j}{v^{\alpha_j}}\right) \chi\left(\frac{x_1}{v^{\alpha_1}}\right) M_i\left(tv^{-\alpha_i}\right) \Delta_i^m(\delta t)\, F(y)\, dydtdv, \tag{15}$$

где $m > \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} l_i$, $\chi \in C_0^\infty(E_1)$.

Л е м м а 5. Пусть $F \in H_p^l(E_n)$, $l_1 - [l_1] > \frac{1}{p}$, а области G и D удовлетворяют указанным выше условиям. Тогда функция $\Phi \in H_p^l(E_n)$ и имеет место оценка $\|\Phi\|_{H_p^l} \leqslant c\,\|F\|_{H_p^l}$, где c не зависит от F.

В силу (10), (15) и предположений леммы легко проверить, что

$$\left.\frac{\partial^k \Phi}{\partial x_1^k}\right|_{x_1=0} = \left.\frac{\partial^k F}{\partial x_1^k}\right|_{x_1=0}, \quad k = 0, \ldots, [l_1],$$

откуда, применяя общую теорему вложения разных измерений [1, теорема 6.7] и теорему о продолжении для обобщенных гельдеровских классов [2, теорема 17.10], получаем утверждение леммы.

З а м е ч а н и е 2. Из леммы 5 следует, что любую функцию $F \in H_p^l(E_n)$ можно представить в виде $F = \Phi + F - \Phi = \Phi + F_1$, где F_1 по построению обладает свойством $\left.\frac{\partial^k F_1}{\partial x_1^k}\right|_{x_1=0} = 0$, $k = 0, \ldots, [l_1]$, $\|F_1\|_{H_p^l} \leqslant c\|F\|_{H_p^l}$, а $\Phi \in H_p^l$ и бесконечно дифференцируема по x_1.

4. Некоторые свойства функций, суммируемых с весом. Пусть область G имеет вид (9), где x_n — нерегулярная координата, т. е. $l_n < \max\limits_{1 \le i \le n} l_i = l_1$, а функция φ удовлетворяет оценке (2). Как и выше, предполагаем, что область G удовлетворяет условию l-рога, а функции считаем продолженными финитным образом на все E_n. Для функции $F \in H_p^l$ положим

$$F|_{\partial G} = \lim_{v \to 0} F(x', v + \varphi(x')) = f(x').$$

Лемма 6. Пусть $F \in H_p^l(G)$, а область G имеет вид (9), где функция $\varphi(x')$ удовлетворяет оценке (2). Тогда $\|f\|_{H_p^r(0)} \le c \times \|F\|_{H_p^l(G)}$, где $r = (r_1, \ldots, r_{n-1})$, $r_i > 0$, $r_i = \frac{l_i}{l_n}\left(l_n - \frac{1}{p}\right)$, $i = 1, \ldots, n-1$, c не зависит от F.

Доказательство леммы вытекает из представления (10) с подстановкой $x_n = \varphi(x')$ и повторяет доказательство леммы 6 работы [4].

Лемма 7. Пусть область G имеет вид (9). Рассмотрим функцию $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$, построенную по функции $F \in H_p^l$ согласно (15). Тогда существует след $\Phi|_{\partial G} = \lim\limits_{\gamma \to 0} \Phi(x', \varphi(x') + \gamma) = f(x') \in L_p(E_{n-1})$ и имеет место оценка

$$\|x_1^{\varkappa} f\|_{H_p^{r,\varkappa}(E_{n-1})} \le c \|F\|_{H_p^l(G)},$$

где $r = (r_1, \ldots, r_{n-1})$, $r_k = \frac{l_k}{l_n}\left(l_n - \frac{1}{p}\right)$, $\varkappa \in [0, ([l_1] + 1) \times ([l_1] + 2)]$, а c не зависит от F.

Пусть на каждой области $E_{n-1}^+ = E_{n-1} \cap \{x_1 \ge 0\}$, $E_{n-1}^- = E_{n-1} \cap \{x_1 \le 0\}$ заданы функции $f^+(x')$, $f^-(x')$. Положим

$$f(x') = \begin{cases} f^+, & x \in E_{n-1}^+, \\ f^-, & x \in E_{n-1}^-. \end{cases}$$

Имеет место следующая

Лемма 8. Пусть $1 < p < \infty$, $\|f\|_{H_p^r(0)} < \infty$, $\|x_1^{\varkappa} f^+\|_{H_p^{r,\varkappa}} < \infty$, $\|x_1^{\varkappa} f^-\|_{H_p^{r,\varkappa}(E_{n-1}^-)} < \infty$, где $r = (r_1, \ldots, r_{n-1})$, $r_i = \frac{l_i}{l_n}\left(l_n - \frac{1}{p}\right)$, $i = 1, \ldots, n-1$, $\varkappa \in [0, ([l_1] + 1)([l_1] + 2))$. Тогда существует функция $F \in H_p^l(G)$, такая, что

$$F|_{\partial G} = \lim_{v \to 0} F(x', \varphi(x') + v) = f(x') \in L_p(E_{n-1}),$$

и имеет место оценка

$$\|F\|_{H_p^l(G)} \le c \left(\|f\|_{H_p^r(0)} + \sup_{\varkappa} \|x_1^{\varkappa} f^+\|_{H_p^{r,\varkappa}(E_{n-1}^+)} + \right.$$
$$\left. + \sup_{\varkappa} \|x_1^{\varkappa} f^-\|_{H_p^{r,\varkappa}(E_{n-1}^-)}\right),$$

где c не зависит от F и f.

Функция $F(x', x_n)$ строится по функции $f(x')$ с помощью представления (10) и свойств области аналогично, как и в лемме 4. Доказательство лемм 7 и 8 повторяет доказательство подобных лемм работы [4], отличаясь от него лишь применением неравенства Харди для L_∞-нормы вместо рассмотренного ранее случая L_θ-норм $(1 < \theta < \infty)$.

Доказательство теоремы 1 получается непосредственно из лемм 3—7 и замечания 2.

Доказательство теоремы 2. Из леммы 8 следует, что существует функция $F^2 \in H_p^l(G)$ такая, что

$$F^2|_{\partial G} = f^2 = \begin{cases} f_1^2, & x_1 \geqslant 0, \\ f_2^2, & x_1 \leqslant 0, \end{cases}$$

$$\|F^2\|_{H_p^l(G)} \leqslant c\left(\|f^2\|_{H_p^r(0)} + \sum_{k=1}^{2} \sup_{\varkappa} \|x_1^\varkappa f_k^2\|_{H_p^{r,\varkappa}\left(E_{n-1}^k\right)}\right).$$

По лемме 4 в каждой области G_k можно построить функции F_k^1 такие, что $F_k^1|_{\partial G_k} = f_k^1$. Так как $F_k^1 = \mathring{F}_k^1 + \Phi_k$, $k = 1, 2$ (замечание 2), то функция

$$\mathring{F}^1 = \begin{cases} \mathring{F}_1^1, & x \in G_1, \\ \mathring{F}_2^1, & x \in G_2 \end{cases}$$

принадлежит $H_p^l(G)$ [5] и

$$\|\mathring{F}^1\|_{H_p^l(G)} \leqslant c\sum_{k=1}^{2} \|f_k^1\|_{H_p^r(D)}.$$

По лемме 6 для функции $\mathring{f}^1 = \mathring{F}^1|_{\partial G}$ имеем $\|\mathring{f}^1\|_{H_p^r(0)} \leqslant c\sum_{k=1}^{2}\|f_k^1\|_{H_p^r(D)}$. Обозначая

$$\psi = \begin{pmatrix} \Phi_1|_{\partial G_1} = \psi_1 \\ \Phi_2|_{\partial G_2} = \psi_2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1^1, & x \in \partial G_1 \\ f_2^1, & x \in \partial G_2 \end{pmatrix},$$

в силу этой оценки и условий на функции f_k^1 получаем, что

$$\|\psi\|_{H_p^r(0)} \leqslant c\sum_{k=1}^{2} \|f_k^1\|_{H_p^r(D)} + c\|f\|_{H_p^r(0)}.$$

Поскольку по лемме 7 функции ψ_k, $k = 1, 2$, удовлетворяют оценке

$$\sum_{k=1}^{2} \|x_1^\varkappa \psi_k\|_{H_p^{r,\varkappa}\left(E_{n-1}^k\right)} \leqslant c\sum_{k=1}^{2} \|\Phi^k\|_{H_p^l(G)} \leqslant c\sum_{k=1}^{2} \|f_k^1\|_{H_p^r(D)}$$

из леммы 8 вытекает существование функции $F^1 \in H_p^l(G)$ такой, что $F^1|_{\partial G} = \psi$ и

$$\|F_1\|_{H_p^l(G)} \leqslant c\left(\sum_{k=1}^{2}\|f_k^1\|_{H_p^r(D)} + \|f\|_{H_p^r(0)}\right).$$

Но тогда функция $F = F^2 + \mathring{F}^1 + F^1$ удовлетворяет условиям теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Никольский С. М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., Наука, 1977. 456 с.
2. **Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.** Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., Наука, 1975. 480 с.
3. **Успенский С. В. О следах функций класса $W_p^{l_1,\ldots,l_n}$ Соболева на гладких** поверхностях.— Сиб. мат. журн., 1972, т. 13, N 2, с. 429—451.
4. **Шмырев Г. А. О следах функций класса $B_{p,\theta}^l$ на гладких поверхностях.—** В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. (Труды семинара С. Л. Соболева). Новосибирск, Ин-т мат. СО АН СССР, 1978. № 1, с. 136—164.
5. **Никольский С. М.** Об одном свойстве классов. H_p^r. — Annales Univ. Sc. Budapest de Rolando Eōtvösnominatae, sectio math., 1960/61, т III, IV, p. 205—216.

УДК 517.946+518.12

Осреднение процесса распространения коротких волн в периодических средах. Бахвалов Н. С.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Процесс распространения коротких волн в периодических средах описывается уравнениями с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами. При этом рассматриваются сильно колеблющиеся решения со средним периодом колебаний, много меньшим периода структуры. Предложен формализм построения асимптотического разложения решения бесконечного порядка точности.

Библиогр. 7.

УДК 517.5+518.12

Обобщение метода конечных элементов для решения квазигиперболических уравнений. Брилла Й.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Рассматривается обобщение метода конечных элементов для решения квазигиперболических уравнений колебания вязкоупругих пластин. При этом предварительно используются преобразования Лапласа по времени и только после этого метод конечных элементов. Получена вариационная формулировка задачи и доказана сходимость метода.

Библиогр. 9.

УДК 517.956

Устойчивость устойчивых матриц. Годунов С. К., Булгаков А. Я.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Предложена числовая функция от матриц, конечная в случае, если матрица, аргумент устойчива. Даны неравенства, оценивающие непрерывность этой функции, и установлена связь между ее значениями и числом обусловленности линейной системы уравнений для коэффициентов квадратичной функции Ляпунова. Предложен итерационный процесс решения этой системы, являющийся одним из вариантов метода сопряженных градиентов.

Библиогр. 7.

УДК 518:517.91/94

Разностные методы произвольного порядка аппроксимации для обыкновенных дифференциальных уравнений. Гудович Н. Н.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Исследуются три класса разностных методов произвольного порядка аппроксимации для обыкновенных дифференциальных уравнений. Дается приложение к теории α-устойчивости.

Библиогр. 3.

УДК 518:517.944/947

Асимптотическая минимизация вычислительной работы при решении сильноэллиптических краевых задач. Дьяконов Е. Г.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Рассматриваются асимптотически оптимальные по трудоемкости методы решения краевых задач в ограниченных областях на плоскости, включая случай не знакоопределенного оператора. Получены оценки числа арифметических действий, требуемых для отыскания приближенного решения.

Библиогр. 5, рис. 2.

УДК 517.917

Равномерные приближения к решениям дифференциальных уравнений с малым параметром при производных. Каримов С.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Рассматривается способ построения равномерных приближений к решениям сингулярно возмущенных задач.

Библиогр. 2.

УД 518.12

Метод внутренних граничных условий и его приложения. Новый прием численного решения граничных интегральных уравнений. Рябенький В. С.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Излагается новый метод численного решения граничных интегральных уравнений, к которым сводятся краевые задачи для уравнений с частными производными. Метод основан на комбинированном использовании разностных внутренних граничных условий и некоторых свойств проекторов Кальдерона. Дается обоснование сходимости дискретных аппроксимаций. Приводится алгоритм решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Библиогр. 3.

УДК 517.954

Сходимость приближений решения и области в задаче со свободной границей. Фаге Д. М.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Рассматривается задача со свободной границей для эллиптических уравнений. Исследуется приближение этой задачи конечномерной. Считая, что базисом конечномерного пространства являются кусочно-линейные элементы, устанавливается оценка сходимости.

Библиогр. 5.

УДК 517.956

О некоторых уравнениях переменного типа. Яненко Н. Н.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

В работе рассматриваются математические одели механики сплошной среды, приводящие к уравнениям в частных производных переменного типа. Исследуются условия существования и единственности решения задач, сходимость метода Галеркина, численные методы решения конечно-разностным методом.

Библиогр. 10.

УДК 517.65

Обработка экспериментальных данных с применением осреднений, сохраняющих полиномиальные, тригонометрические или экспоненциальные функции. Василенко В. А., Зюзин М. В.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Рассмотрена конструкция локальных кусочно-постоянных осреднений, сохраняющих полиномы произвольно заданной степени, тригонометрические функции с заданными наперед частотами, экспоненциальные функции с заданным порядком роста и убывания.

Библиогр. 2.

УДК 518.5

О прямом методе вариации параметра на бесконечном промежутке обращения линейных операций. Давиденко Д. Ф.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Прямой метод вариации параметра на бесконечном промежутке применяется к обращению линейных операций A. Ввод параметра $\lambda (0 \leqslant \lambda \leqslant \infty)$ осуществляется через оператор-функцию $e^{-A\lambda}$. Рассматриваются способы построения шагов h_{k+1} и их увеличения в процессе счета, а также способы выбора свободных параметров $\beta_{ij}^{(k+1)}$ метода Рунге — Кутта s-го порядка точности. Доказывается сходимость и дается оценка погрешности. Тем же методом строятся псевдообратные операции в явном и неявном виде.

Библиогр. 11.

УДК 518.5

Об оптимальных по числу операций алгоритмах решения задач вычислительной математики на ЭВМ. Иванов В. В.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Представлен обзор последних результатов, связанных с оптимальными по числу операций алгоритмами решения задач вычислительной математики. Обсуждение идет по трем основным разделам: общая теория оптимальных алгоритмов, оптимальные алгоритмы в алгебре многочленов и линейной алгебре, оптимальные алгоритмы аппроксимации, решения уравнений и минимизации функций. Наряду с отечественными работами включены результаты зарубежных авторов.
Библиогр. 15.

УДК 518.12+517.544

Блочно-релаксационный метод решения задачи Дирихле. Кузнецов Ю. А.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Работа посвящена применению блочно-релаксационных методов решения систем вариационно-разностных уравнений, аппроксимирующих краевую задачу Дирихле для дифференциальных уравнений эллиптического типа. Основные особенности предлагаемого метода: рассмотрение его в подпространстве, специальная реализация каждого шага метода и использование сопряженных градиентов в подпространстве для ускорения сходимости. Оцениваются количество арифметических действий и объем памяти вычислительной машины, требуемые для решения систем с заданной точностью.
Библиогр. 7.

УДК 518.9+518.12

Теория игр и оптимальность итерационных методов. Лебедев В. И.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Развивается новый метод оценки эффективности итерационных процессов, использующий критерий оптимальной стратегии теории игр. Метод обобщен на случай распределения масс с весом, что дает возможность оценить сравнительную эффективность методов сопряженных градиентов и чебышевских методов.
Библиогр. 6.

УДК 518.12

Об оптимальной аппроксимации линейных операторов. Морозов В. А.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

В работе рассматриваются вопросы, связанные с оптимальным или квазиоптимальным приближением элемента, для которого известно приближенное значение оператора и некоторое допустимое множество. При ряде ограничений на оператор и множество удается явно построить оптимальные либо квазиоптимальные алгоритмы приближения такого элемента. Результаты имеют важное значение для обоснования прямых методов решения операторных уравнений первого рода.
Библиогр. 9.

УДК 518.392

Оценка ошибок кубатурных формул для функций из пространств С. Л. Соболева на областях с вырожденными углами. Акопян Г. Г.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Построены кубатурные формулы для интегрирования функций из пространств С. Л. Соболева по областям, содержащим вырожденные углы. Показано, что для некоторого класса областей с вырожденными углами (удовлетворяющих условию r-конуса) во многих случаях эти формулы неулучшаемы (по порядку убывания их функционалов ошибок) среди всевозможных кубатурных формул с произвольными узлами.
Библиогр. 6.

УДК 517.5

Об оптимальных методах восстановления интеграла. Женысбаев А. А.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Рассматривается задача о нахождении наилучшей квадратурной формулы для функций.
Библиогр. 6.

УДК 511.29

Нахождение числа решений линейных диофантовых уравнений. Исраилов М. И.— В кн. :Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Приводится точная формула для подсчета числа решений линейных диофантовых уравнений $\Sigma a_i x_i = n$, $x_i \geqslant 0$ при любых положительных числах a_i.
Библиогр. 5.

УДК 518.12+517.392

Квадратурная формула 35-го порядка для сферы. Лебедев В. И.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Развивается подход, предложенный С. Л. Соболевым для построения квадратур на сфере, инвариантных относительно групп вращения. Удалось обойти трудности, возникающие при построении квадратур наивысшей алгебраической степени точности $n > 29$ и построить квадратурную формулу при $n = 35$.
Библиогр. 6.

УДК 517.382

О декартовых произведениях кубатурных формул. Носков М. В.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Приводятся две теоремы об условиях разложимости кубатурных формул вообще говоря эрмитовых, в декартовы произведения формул меньшей размерности и об алгебраической точности сомножителей декартовых произведений.
Библиогр. 3.

УДК 517.392

Асимптотически наилучшие последовательности кубатурных и квадратурных формул. Половинкин В. И.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Приводятся результаты автора, касающиеся кубатурных и квадратурных формул, образующих асимптотически наилучшие последовательности в пространствах $L_p^m(\Omega)$, в том числе асимптотическая оценка $\|\cdot\|_{L_p^{m*}}(\Omega)$ функционалов ошибок таких формул $\forall\{N\} \to \infty$, где N — количество узлов.
Библиогр. 7.

УДК 518+517.392

Развитие теории кубатурных формул Соболева. Рамазанов М. Д., Блинов Н. И., Войтишек Л. В., Жамалов З. Ж., Загирова Ф. Я., Половинкин В. И., Салихов Г. Н., Шарипов Т. Х., Шойнжуров Ц. Б.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Дан обзор работ, относящихся к тем направлениям в теории приближенного интегрирования функций n-переменных, основы которых заложил в 60-х годах С. Л. Соболев. Одно из них — построение формул численного интегрирования по многомерной сфере. Главный вопрос другого — исследование кубатурных формул, асимптотически оптимальных для широких классов банаховых пространств. Такими формулами являются кубатурные формулы с регулярным пограничным слоем С. Л. Соболева либо их обобщения.
Библиогр. 3.

УДК 517.51

О корнях многочленов Эйлера. Соболев С. Л.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Изучается асимптотическое поведение корней полиномов Эйлера E_k при больших k. Получена асимптотическая формула.
Ил. 1. Библиогр. 7.

УДК 517.392

Асимптотически оптимальные кубатурные формулы в пространстве Соболева W_p^m при четном m. Шойнжуров Ц. Б.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Рассматриваются новые асимптотически оптимальные кубатурные формулы в пространстве Соболева W_p^m при четном m и $1 < p \leqslant \infty$.
Библиогр. 4.

УДК 517.9

Вопросы разрешимости задач интегральной геометрии. Аниконов Ю. Е.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

На примере интегрирования по геодезическим фиксированной аналитической метрики излагается способ исследования разрешимости задач интегральной геометрии. Для данных и решения рассмотренной задачи приведены формулы, содержащие в себе аналитическую функцию двух переменных.
Библиогр. 4.

УДК 517.54:517.514

Продолжение функций и отображения, сохраняющие классы функций. Гольдштейн В. М.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Получены необходимые и достаточные условия продолжения функций классов $W_2^1(G)$, $B_p^l(G)$, $lp = 2$, $l < 1$ из плоских ограниченных односвязных областей. При этом существенно используется инвариантность данных классов функций при квазиконформных и квазиизометрических гомеоморфизмах. Условия сформулированы в виде геометрического требования на границу области.
Библиогр. 9.

УДК 517.5

Оптимальное восстановление функций и их производных в метрике L_p. Корнейчук Н. П.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Рассматривается задача оптимального восстановления в метрике L_p непрерывных и дифференцируемых функций по информации, заданной с помощью конечного набора функционалов. Для широких классов функций указаны линейные методы, гарантирующие погрешность восстановления функции (и одновременно ее производной), не превосходящую соответствующего поперечника.
Библиогр. 3.

УДК 517.55

Некоторые задачи аналитического продолжения. Лаврентьев М. М.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Работа содержит обзор классических результатов в области теории аналитического продолжения функций одной или нескольких комплексных переменных. Наряду с этим рассматриваются постановки нелинейных задач теории продолжения с дополнительными ограничениями. Для многих типичных ситуаций приведены теоремы существования продолжений.

УДК 511

О коэффициентах Лорана обобщенной дзета-функции. Лаврик А. Ф.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Устанавливаются оценки коэффициентов ряда Лорана дзета-функции в окрестности полюса.

Библиогр. 5.

УДК 517.53/57

Об одном усилении теоремы Племеля — Привалова и задачи наилучшей аппроксимации. Мамедханов Дж. И.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Приводится усиление теоремы Племеля — Привалова, а именно, утверждается, что если плотность интеграла типа Коши в некоторых точках имеет повышенную гладкость, то такую же гладкость в этих точках будут иметь предельные значения интеграла типа Коши. Формируются весовые теоремы наилучшей аппроксимации на замкнутых кривых в метрике пространства $H^{\alpha\beta}$ усиливающие соответствующие теоремы Е. К. Дзядыка и В. И. Белого, а также прямая теорема полиномиальной аппроксимации на дугах.

Библиогр. 3.

УДК 517.512

О суммировании интегралов Фурье методом Рисса. Очиров М. Н.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Доказывается суммируемость продифференцированного интеграла Фурье и сопряженного с ним интеграла функциональным методом Рисса при некоторых ограничениях на функцию, определяющую этот метод.

Библиогр. 1.

УДК 517.531

О минимуме функционалов, содержащих дифференциальные операторы. Портнов В. Р.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Рассматриваются функциональные пространства, определяемые некоторыми полунормами, содержащими дифференциальные операторы. Исследуются свойства таких пространств. Получены приложения к задачам нелинейной теории упругости.

Библиогр. 6.

УДК 517.5

Об аппроксимативных характеристиках гладких функций многих переменных. Тихомиров В. М.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Работа представляет собой обзор новых результатов, полученных советскими авторами по аппроксимативным характеристикам гладких функций многих переменных. Рассмотрены три группы вопросов: критерии конечности, нахождение точных решений, вопросы приближения классов функций в метрике L_p.

Библиогр. 18.

УДК 517.51

Аппроксимативные свойства матричного метода суммирования рядов Фурье — Чебышева. Фалалеев Л. П.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Рассматриваются линейные методы суммирования рядов Фурье по системе Чебышева в случае, когда элементы нижней треугольной матрицы удовлетворяют условию Стечкина — Фомина и аналогичным (более узким) условиям. Исследована скорость сходимости соответствующих агрегатов на конкретных классах непрерывных функций.

Библиогр. 6.

УДК 517.94

О разрешимости обобщенной системы Коши—Римана. Баиев Н. К.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Изучается разрешимость обобщенной системы Коши—Римана в пространствах О. В. Бесова.

Библиогр. 4.

УДК 517.518.22

Вложения пространств $\overset{0}{W}{}^{(l)}_{p,v}(R)$ при некоторых предположениях относительно областей существования весовой нормы градиентов низших порядков. Зарубин М. М.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Получен результат, позволяющий улучшить вложения пространств $\overset{\circ}{W}{}^{(l)}_{p,v}(R)$ на некоторых классах функций.

Библиогр. 3, ил. 4.

УДК 517.983:517.986

Возмущение производящих операторов лебеговских полугрупп. Иванов В. В., Мельников Е. В.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Изучается вопрос о возмущении производящих операторов, равномерно суммируемых в нуле полугрупп операторов, действующих в локально выпуклых пространствах. Теорема о возмущении доказывается в условиях, обеспечивающих возможность явного выражения возмущенной полугруппы через исходную и возмущающий оператор.

Библиогр. 9.

УДК 517.51

Некоторые вопросы теории вложения классов дифференцируемых функций. Ильин В. П., Успенский С. В.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Исследуются вопросы теории вложения классов дифференцируемых функций с неизотропными дифференциальными свойствами по разным переменным в областях. Устанавливается зависимость теорем вложения от геометрических свойств области для классов W_p^l, $B_{p,\theta}^l$, весовых и других классов.

Библиогр. 17, ил. 2.

УДК 513.88

Теоремы вложения для одного класса весовых пространств и их применения. Лизоркин П. И., Отелбаев М.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Рассматриваются теоремы о непрерывности, компактности оператора вложения для весовых классов. Результаты развивают критерии компактности, полученные ранее различными авторами.

Библиогр. 7.

УДК 517.518.22

Теория мультипликаторов в пространствах дифференцируемых функций и ее приложения. Мазья В. Г., Шапошникова Т. О.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Исследуется вопрос о мультипликаторах на пространствах С. Л. Соболева — Л. Н. Слободецкого $W_p^l(R^n)$, пространствах О. В. Бесова $B_p^l(R^n)$ и др.

Библиогр. 8.

УДК 517.514

Аналог теоремы С. Л. Соболева об интегралах типа потенциала. Соболевский П. Е.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Рассматриваются свойства интегралов типа потенциала как трансформатора в идеале кольца ограниченных операторов.
Библиогр. 3.

УДК 517.5

О мультипликаторах, порожденных гипоэллиптическими выражениями. Степанов В. Д.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Показывается, что для любого гипоэллиптического выражения $\Lambda(\xi)\neq 0$, $\xi\in R^n$ оператор $T_\Lambda = F\dfrac{1}{\Lambda}F^{-1}$ является мультипликатором типа (p, p), где интервал изменения p зависит от порядка убывания $\dfrac{1}{\Lambda(\xi)}$ на бесконечности.
Библиогр. 5.

УДК 517.948

О полноте пространства $\mathscr{L}_p^\mu(E_n)$. Хамаев Е. А.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Доказывается полнота пространства $\mathscr{L}_p^\mu(E_n)$. Пространство $\mathscr{L}_p^\mu(E_n)$ может быть рассмотрено как обобщение пространств $\mathscr{L}_p^l(E_n)$, введенных С. Л. Соболевым для целых индексов l, на случай произвольных однородных функций $\mu(i\xi)$, являющихся символом некоторого псевдодифференциального оператора.
Библиогр. 5.

УДК 517.518.22

О следах функций класса $H_p^l(G)$ С. М. Никольского на гладких поверхностях. Шмырев Г. А.— В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука, 1980.

Исследуются граничные свойства функций, принадлежащих анизотропным классам $H_p^l(G)$ С. М. Никольского, $l=(l_1, \ldots, l_n)$, $1<p<\infty$. Для каждого класса функций определяется класс областей, на границе которых дается точная обратимая характеристика следа произвольной функции.
Библиогр. 5.

СОДЕРЖАНИЕ

Часть 1

Численные методы решения задач математической физики

Часть 2

Построение алгоритмов

Часть 3

Кубатурные формулы

Часть 4

Теория функций и некоторые вопросы функционального анализа

Часть 5

Теоремы вложения и мультипликаторы