LECTURE NOTES IN MATHEMATICS
A collection of informal reports and seminars
edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

217

Thomas J. Jech

LECTURES IN SET THEORY WITH PARTICULAR EMPHASIS ON THE METHOD OF FORCING

SPRINGER-VERLAG
Berlin • Heidelberg • New York
1971

* * * * * * * * * * * * *

Т. Йех

* * * * * * * * * * * * *

Теория множеств и метод форсинга

* * * * * * * * * * * * *

Перевод с английского
В. И. Фуксона

Под редакцией
В. Н. Гришина

Издательство «Мир»

Москва 1973

УДК 519.50

В книге изложены аксиоматическая теория множеств и методы доказательства совместимости утверждений теории множеств: метод Гёделя, метод форсинга Коэна, метод булевозначных моделей, метод Френкеля — Мостовского. При помощи этих методов строятся модели для многих известных гипотез теории множеств: обобщенной континуум-гипотезы, отрицания континуум-гипотезы, отрицания аксиомы выбора, гипотезы Суслина и ее отрицания и т. д.

Книга не требует предварительных знаний аксиоматической теории множеств и доступна широкому кругу математиков.

Редакция литературы по математическим наукам

И $\frac{0223\text{-}009}{041\,(01)\text{-}73}$

От переводчика

С первоначальным вариантом метода форсинга, или метода вынуждения, читатель может ознакомиться по книге П. Коэна „Теория множеств и континуум-гипотеза", М., 1969 г. Во многих случаях более удобны формулировки метода на языке генерических расширений (А. Леви, Р. Соловей) и булевозначных моделей (Д. Скотт, Р. Соловей и П. Вопенка). Именно использование этого языка в настоящей книге позволило автору, чешскому математику Томасу Йеху, с большой простотой изложить доказательства независимости известных теоретико-множественных гипотез. Бóльшая часть излагаемых результатов получена в 1963—1966 гг., но опубликована лишь недавно. Все это делает книгу Т. Йеха интересной и для математиков, не знакомых с предметом, и для специалистов.

Незначительные исправления, часть которых указана автором, внесены в текст без специальных оговорок. Нумерованные примечания, составленные совместно редактором и переводчиком, помещены в конце книги.

Предисловие

Настоящая книга представляет собой записи курса лекций, прочитанного мною в университете штата Нью-Йорк, Буффало, в 1969—70 г. Как указывает заглавие, особое внимание уделено методу форсинга. По-видимому, следовало снабдить лекции еще подзаголовком, так как в них не затронуты два важных раздела теории множеств: теория больших кардиналов и дескриптивная теория множеств.

Многие теоремы в лекциях являются относительно новыми, и я всюду пытался установить авторство. Возможно, эта задача решена не вполне успешно, потому что некоторые методы стали частью „математического фольклора".

Особую благодарность я выражаю П. Вопенке, который научил меня форсингу и которому я обязан своим интересом к теории множеств. Мне хочется также поблагодарить моих пражских коллег, чей энтузиазм делал наши занятия теорией множеств увлекательными.

Настоящие лекции содержат материал для двухсеместрового курса. Я включил лишь немного упражнений, но надеюсь, что добросовестный студент получит достаточное удовлетворение, отшлифовывая детали некоторых доказательств.

Т. Йех

Лос-Анджелес, март, 1971 г.

1. Формулы и классы

Формулы аксиоматической теории множеств построены из *атомарных формул*

$$x \in y \quad \text{и} \quad x = y$$

с помощью *пропозициональных связок*:

$$\varphi \wedge \psi, \quad \varphi \vee \psi, \quad \neg \varphi, \quad \varphi \to \psi, \quad \varphi \leftrightarrow \psi$$

(конъюнкции, дизъюнкции, отрицания, импликации, эквивалентности), и *кванторов*:

$$\forall x \varphi \quad \text{и} \quad \exists x \varphi.$$

Обозначение $\varphi(\vec{u})$ употребляется для формулы $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$, где $u_1, \ldots, u_n$ — свободные переменные φ.

Переменные $x, y, \ldots, X, Y, \ldots$ обозначают *множества*. По техническим соображениям удобно рассматривать совокупность всех множеств, удовлетворяющих данной формуле $\varphi(x)$. Такая совокупность называется *классом*. Будем называть также классом совокупность множеств x, удовлетворяющих формуле $\varphi(x, \vec{u})$, где $\vec{u}$ — некоторые множества (*параметры*); мы используем запись

$$x \in \mathbf{C} \leftrightarrow \varphi(x, \vec{u})$$

и

$$\mathbf{C} = \{x\colon\ \varphi(x, \vec{u})\}.$$

В этом случае говорят, что класс $\mathbf{C}$ *определим через* $\vec{u}$. Если

$$\mathbf{C} = \{x\colon\ \varphi(x)\}$$

и φ содержит только одну свободную переменную, то класс $\mathbf{C}$ называется *определимым*. Классы обозначаются полужирными прописными латинскими буквами $\mathbf{C}$, $\mathbf{A}$ и т. п. (Однако в некоторых частных случаях мы используем стандартные обозначения, например: $\mathrm{V} = \mathrm{L}$, On.)

Каждое множество можно рассматривать как класс, именно

$$X = \{x\colon\ x \in X\}.$$

Два класса

$$\mathbf{C} = \{x\colon \varphi(x, \vec{u})\} \quad \text{и} \quad \mathbf{D} = \{x\colon \psi(x, \vec{v})\}$$

считаются равными, если для всех x

$$\varphi(x, \vec{u}) \leftrightarrow \varphi(x, \vec{v})\ ^{1}).$$

Если класс $\mathbf{C}$ не равен никакому множеству, то $\mathbf{C}$ называется *собственным классом*. Не каждый класс является множеством; класс $\{x\colon x \notin x\}$ является собственным классом (в силу парадокса Рассела).

В заключение этого раздела для произвольных классов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ определим

$$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \leftrightarrow (x \in \mathbf{A} \to x \in \mathbf{B}),$$
$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{x\colon x \in \mathbf{A} \wedge x \in \mathbf{B}\},$$
$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{x\colon x \in \mathbf{A} \vee x \in \mathbf{B}\},$$
$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \{x\colon x \in \mathbf{A} \wedge x \notin \mathbf{B}\}.$$

Универсальным классом является класс всех множеств:

$$\mathbf{V} = \{x\colon x = x\}.$$

2. Аксиомы Цермело—Френкеля

(A0) Аксиома существования[2])

$$\exists x\,(x = x).$$

(A1) Аксиома экстенсиональности

$$\forall u\,(x \in X \leftrightarrow u \in Y) \to X = Y.$$

(A2) Аксиома пары[3])

$$\forall u \forall v \exists x \forall z\,(z \in x \leftrightarrow z = u \vee z = v).$$

Используя (A1) и (A2), можно определить *неупорядоченную пару*

$\{u, v\}$ = (единственное множество x, такое, что $\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z = u \vee z = v)$),

единичное множество

$$\{u\} = \{u, u\},$$

упорядоченную пару

$$(u, v) = \{\{u\}, \{u, v\}\},$$

упорядоченную тройку и *упорядоченную четверку*

$$(u, v, w) = ((u, v), w),$$
$$(u, v, w, x) = (((u, v), w), x).$$

Аналогично можно определить упорядоченную пятерку или двадцатку. Для определенности положим

$$(u) = \{u\}.$$

Лемма 1. *$(u, v) = (x, y)$ тогда и только тогда, когда $u = x$ и $v = y$.*

(A3) Схема аксиом выделения

$$\forall \vec{p} \forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi(u, \vec{p})).$$

Формула (A3) является аксиомой при любой формуле φ*) и утверждает, что класс $\{u\colon u \in X \wedge \varphi(u, \vec{p})\}$ есть множество; это множество единственно в силу (A1) и обозначается

$$Y = \{u \in X\colon \varphi(u, \vec{p})\}.$$

Пусть $\mathbf{C} = \{u\colon \varphi(u, \vec{p})\}$, тогда аксиома (A3) может быть выражена в виде

$$\forall X \exists Y (Y = \mathbf{C} \cap X),$$

или

$$\forall X (\mathbf{C} \cap X \text{ есть множество}).$$

Используя (A3) и (A1), можно определить *пересечение* и *разность*

$$X \cap Y = \{x \in X\colon x \in Y\}, \quad X - Y = \{x \in X\colon x \notin Y\},$$

пустое множество

$$0 = \{u \in X\colon u \neq u\} \qquad (X \text{ — произвольное множество}).$$

(A4) Аксиома суммы

$$\forall X \exists Y \forall z \forall u (u \in z \wedge z \in X \to u \in Y).$$

В силу (A3) для каждого X существует такое Y, что

$$u \in Y \leftrightarrow (\exists z \in X)[u \in z].$$

(Здесь $(\exists z \in X)\varphi$ — сокращение формулы $\exists z (z \in X \wedge \varphi)$. Аналогично $(\forall z \in X)\varphi$ — сокращение для $\forall z (z \in X \to \varphi)$.)

Множество Y единственно в силу (A1), так что можно определить

$$\bigcup X = \{u\colon (\exists z \in X)[u \in z]\}$$

(*сумма* X). Определим также

$$X \cup Y = \bigcup\{X, Y\}, \quad X \cup Y \cup Z = \bigcup\{X, Y, Z\} \text{ и т. д.}$$

Множество Y является *подмножеством* множества X ($Y \subseteq X$),

*) Предполагается, что формула φ не содержит свободно переменную Y. — *Прим. ред.*

если $\forall u (u \in Y \to u \in X)$. Если $Y \subseteq X$ и $Y \neq X$, то Y называется *собственным подмножеством* множества X ($Y \subset X$).

(А5) Аксиома множества подмножеств

$$\forall X \exists Y \forall u (u \subseteq X \to u \in Y).$$

Множеством подмножеств X является множество

$$\mathscr{P}(X) = \{u: u \subseteq X\}$$

(которое существует в силу (А3) и единственно в силу (А1)). Теперь мы можем определить некоторые основные понятия теории множеств.

Декартово произведение

$$X \times Y = \{(u, v): u \in X \wedge v \in Y\}$$

(существование следует из аксиомы (А3), потому что $X \times Y \subseteq \mathscr{P}\mathscr{P}(X \cup Y)$),

$$X \times Y \times Z = (X \times Y) \times Z, \quad W \times X \times Y \times Z = ((W \times X) \times Y) \times Z.$$

Множество R называется (бинарным) *отношением*, если $R \subseteq X \times Y$ для некоторых X и Y. (Аналогично класс $\mathbf{R}$ называется отношением, если $\mathbf{R}$ состоит из упорядоченных пар, т. е.

$$\mathbf{R} = \{(u, v): \varphi(u, v, \vec{p})\}.)$$

Если R — отношение, положим

$$\operatorname{dom}(R) = \{u: \exists v [(u, v) \in R]\}$$

(*область определения* R; существование следует из (А3), потому что $\operatorname{dom}(R) \subseteq \cup \cup R$),

$$\operatorname{rng}(R) = \{v: \exists u [(u, v) \in R]\}$$

(*область значений* R).

Отношение f называется *функцией*, если

$$\forall x \forall y \forall y' [(x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \to y = y'].$$

Для выражения $(x, y) \in f$ мы используем общепринятую запись

$$y = f(x),$$

и ее варианты *), а также

$$f: x \mapsto y.$$

Множество всех функций из X в Y

$$\{f: f \text{ есть функция } \wedge \operatorname{dom}(f) = X \wedge \operatorname{rng}(f) \subseteq Y\}$$

обозначается через ${}^{X}Y$ **).

*) А именно, $x = f^{-1}(y)$, $fx = y$; для $(x_1, \ldots, x_n, y) \in f$ используется запись $f(x_1, \ldots, x_n) = y$. — *Прим. перев.*

**) Функция из X в Y обозначается $f: X \to Y$. — *Прим. перев.*

Ограничение функции f на X определяется как

$$f \mid X = \{(u, v) \in f\colon u \in X\}.$$

Образом и *прообразом* множества являются

$$f''X = \{v\colon (\exists u \in X)[v = f(u)]\},$$
$$f_{-1}X = \{u\colon f(u) \in X\}.$$

Функция f называется *взаимно однозначной*, если $f(x) \neq f(y)$ при $x \neq y$.

(A6) Схема аксиом подстановки

$$\forall x \forall y \forall y' [\varphi(x, y, \vec{p}) \wedge \varphi(x, y', \vec{p}) \to y = y'] \to$$
$$\to \forall X \exists Y (\forall x \in X) \forall y [\varphi(x, y, \vec{p}) \to y \in Y]\ ^*).$$

Пусть $\mathbf{F} = \{(x, y)\colon \varphi(x, y, \vec{p})\}$. Посылка в (A6) утверждает, что $\mathbf{F}$ является функцией, и поэтому аксиома (A6) может быть выражена следующим образом:

$$\text{если } \mathbf{F} \text{ — функция, то } \forall X \exists Y (\mathbf{F}''X \subseteq Y),$$

или:

$$\text{если } \mathbf{F} \text{ — функция, то } \forall X (\mathbf{F}''X \text{ — множество}),$$
$$\text{если } \mathbf{F} \text{ — функция, то } \forall X \exists f (\mathbf{F} \mid X = f).$$

Последний вариант (A6) утверждает, что если класс есть функция, то его ограничение на любом множестве равно функции, являющейся множеством.

(A7) Аксиома бесконечности

$$\exists Y [0 \in Y \wedge \forall u (u \in Y \to \{u\} \in Y)],$$

т. е. Y содержит 0, {0}, {{0}} и т. д.

В разделах 7 и 9 будут сформулированы еще две аксиомы: аксиома регулярности (A8) и аксиома выбора (A9).

Аксиоматическая система (A1) — (A8) называется аксиоматической теорией множеств Цермело — Френкеля (см. Цермело [59] и Френкель [7]) и обозначается ZF. При добавлении к ZF аксиомы выбора (AC) система обозначается ZFC.

3. Ординальные числа

Начнем этот раздел с нескольких определений.

Множество P *частично упорядочено* отношением $<$, если

(i) $p \not< p$ для любого $p \in P$,

(ii) если $p < q$ и $q < r$, то $p < r$.

---

*) Формула $\varphi(x, y, \vec{p})$ не содержит свободно переменную Y. — *Прим. ред.*

Назовем $(P, <)$ *частично упорядоченным множеством* (*ч. у. множеством*). Часто множество P также будем называть ч. у. множеством *). Если

(iii) $p < q$, или $p = q$, или $q < p$ для всех $p, q \in P$,

то отношение $<$ называется (*линейным*) *упорядочением* P. Упорядоченное множество $(P, <)$ называется *вполне упорядоченным* (*в. у. множеством*), если

(i v) каждое непустое подмножество P имеет наименьший элемент.

(Пусть P — ч. у. множество, $0 \neq X \subseteq P$ и $a \in P$, тогда a называется: *наименьшим элементом* X, если $a \in X \wedge (\forall x \in X)[a \leqslant x]$; *минимальным элементом* X, если $a \in X \wedge (\forall x \in X)[x \not< a]$; *нижней гранью* X, если $(\forall x \in X)[a \leqslant x]$; *инфимумом* X ($a = \inf X$ = н. н. г. X), если a является наибольшей нижней гранью X. Аналогично определяются *наибольший элемент*, *максимальный элемент*, *верхняя грань и супремум* ($\sup X$ = н. в. г. X).)

Пусть f есть функция, отображающая ч. у. множество P в ч. у. множество Q, тогда

f — *гомоморфизм*, если $x \leqslant y \rightarrow f(x) \leqslant f(y)$;

f — *вложение*, если f — взаимно однозначная функция и $x < y \leftrightarrow f(x) < f(y)$;

f — *изоморфизм* между P и Q, если f — вложение и $\operatorname{rng}(f) = Q$;

f — *сохраняющая порядок функция*, если $x < y \rightarrow f(x) < f(y)$.

Ординальными числами являются порядковые типы вполне упорядоченных множеств. Следующее определение ординальных чисел дано фон Нейманом [51].

Определение. Множество S *транзитивно*, если

$$\forall x (x \in S \rightarrow x \subseteq S).$$

Множество S называется *ординальным числом* (ординалом), если S транзитивно и вполне упорядочено отношением $\in$.

Лемма 2. *Пусть f — сохраняющая порядок функция, отображающая в. у. множество P в себя, тогда $f(x) \geqslant x$ для каждого $x \in P$.*

Если $(P, <)$ вполне упорядочено и $x \in P$, тогда множество $\hat{x} = \{y \in P: y < x\}$ называется *начальным отрезком* P до x.

Лемма 3. *В. у. множество не изоморфно никакому своему начальному отрезку.*

---

*) В дальнейшем ч. у. множеством автор называет также $(P, \leqslant)$, где $a \leqslant b \leftrightarrow a < b \vee a = b$. — *Прим. перев.*

Доказательство. Нужно применить лемму 2.

Лемма 4. *Если P и Q — в. у. множества, то либо P изоморфно Q, либо P изоморфно начальному отрезку Q, либо Q изоморфно начальному отрезку P.*

Доказательство. Пусть $f = \{(p, q) \in P \times Q: \hat{p}$ изоморфно $\hat{q}\}$. Ясно, что f — функция, сохраняющая порядок; более того, или $\mathrm{dom}(f) = P$, или $\mathrm{rng}(f) = Q$. Если $\mathrm{dom}(f) \neq P$, то $\mathrm{dom}(f) = \hat{p}$ для некоторого $p \in P$ (аналогично для $\mathrm{rng}(f)$).

Ординальные числа обозначаются греческими буквами α, β, γ и т. д. Естественным упорядочением ординалов является отношение: $\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta$. Класс всех ординалов обозначается через On.

Несколько утверждений об ординалах:

(1) $\alpha = \{\beta: \beta < \alpha\}$ для каждого α;

(2) $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ есть наименьший ординал, больший α;

(3) каждое непустое множество ординалов имеет наименьший элемент.

Лемма 5. *Если A — множество ординалов, то* $\lim A = \sup A = \bigcup A$ *является ординалом.*

Доказательство. Множество $\bigcup A$ транзитивно: если $x \in y \in \bigcup A$, то $y \in \alpha \in \bigcup A$ для некоторого α и, в силу транзитивности α, $x \in \alpha$; поэтому $x \in \bigcup A$. Очевидно, что $\bigcup A$ вполне упорядочено отношением $\in$.

Следствие. *Класс ординалов* On *является собственным классом.*

Теорема 1. *Каждое вполне упорядоченное множество изоморфно единственному ординальному числу.*

Доказательство. Если P вполне упорядочено, пусть S — множество ординалов, изоморфных какому-либо начальному отрезку P (S существует в силу (A6)). Ординал $\alpha = \lim S$ изоморфен P.

Определение. Ординал α называется *последующим ординалом*, если $\alpha = \beta + 1$ для некоторого β. В противном случае α — *предельный ординал.*

Лемма 6. *Ординал α — предельный тогда и только тогда, когда* $\alpha = \lim \alpha$.

Наименьший отличный от нуля предельный ординал обозначается ω. Существование такого ординала следует из (A7), (A6) и (A3). Ординалы, меньшие ω, называются *натуральными числами* и обозначаются буквами m, n, i, j и т. д.

Теорема 2. (Принцип индукции).
Пусть $\mathbf{C}$ *— класс ординалов и предположим, что*
(1) $0 \in \mathbf{C}$,
(2) $\alpha \in \mathbf{C} \to \alpha + 1 \in \mathbf{C}$,
(3) $S \in \mathbf{C} \to \lim S \in \mathbf{C}$.
Тогда $\mathbf{C} = \mathrm{On}$[4]).

Доказательство. Если утверждение неверно, то существует наименьшее α, такое, что $\alpha \notin \mathbf{C}$; используя (1), (2) и (3), получаем противоречие.

Теорема 3. (Трансфинитная рекурсия).
Для каждого отношения $\mathbf{G}$ *существует такое отношение* $\mathbf{F}$, *что если* $\mathbf{G}$ *— функция на* V, *то* $\mathbf{F}$ *— единственная функция на* On, *для которой при любом* α

$$\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{G}(\mathbf{F} \mid \alpha).$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{C} = \{f\colon f$ — функция $\wedge\ \mathrm{dom}(f) \in \mathrm{On} \wedge \wedge (\forall \alpha \in \mathrm{dom}(f))[f(\alpha) = \mathbf{G}(f \mid \alpha)]\}$. Если f, $g \in C$, то либо $f \subseteq g$, либо $g \subseteq f$; полагаем $\mathbf{F} = \bigcup \mathbf{C}$. Единственность доказывается от противного: если $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}'$ — две искомые функции, рассмотрим наименьшее α, такое, что $\mathbf{F}(\alpha) \neq \mathbf{F}'(\alpha)$.

Закончим этот раздел определением *трансфинитных последовательностей.*
α-последовательность

$$\langle a_\xi\colon \xi < \alpha \rangle$$

есть функция на α со значениями a_ξ. Аналогично

$$\langle a_\xi\colon \xi \in \mathrm{On} \rangle$$

есть функция (класс) на On. *Последовательностью* называется ω-последовательность

$$\langle a_n\colon n \in \omega \rangle.$$

4. Кардинальные числа

Кардинальное число (мощность) множества X, обозначаемое $|X|$, есть число элементов X. Мы определим $|X|$ позднее (с помощью (A9)), а пока можно определить упорядочение кардинальных чисел:

$|X| \leqslant |Y| \leftrightarrow$ существует взаимно однозначная функция f, отображающая X в Y;

$|X| = |Y| \leftrightarrow$ существует взаимно однозначная функция f, отображающая X на Y.

Отношение $\leqslant$ является частичным упорядочением в силу следующей теоремы.

Теорема 4 (Шрёдер — Бернштейн). *Если* $|X| \leqslant |Y|$ *и* $|Y| \leqslant |X|$, *то* $|X| = |Y|$.

Доказательство. Докажем, что если $A_1 \subseteq B \subseteq A$ и $|A_1| = |A|$, то $|B| = |A|$. Пусть f — взаимно однозначная функция, отображающая A на A_1; положим

$$A_0 = A, \quad A_1 = f''A_0, \quad A_2 = f''A_1, \ldots;$$
$$B_0 = B, \quad B_1 = f''B_0, \quad B_2 = f''B_1, \ldots.$$

Определим

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in A_n - B_n \text{ для некоторого } n; \\ x & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

тогда g является взаимно однозначным отображением A на B.

Определение. Алгебраические операции над кардинальными числами. (Легко видеть, что определение не зависит от выбора множеств A и B.)

$k + \lambda = |A \cup B|$, где $k = |A|$, $\lambda = |B|$ и $A \cap B = 0$.
$k \cdot \lambda = |A \times B|$, где $k = |A|$ и $\lambda = |B|$.
$k^\lambda = |{}^B A|$, где $k = |A|$, $\lambda = |B|$.

Лемма 7. $|\mathscr{P}(X)| = 2^{|X|}$.

Доказательство. Нужно использовать характеристические функции подмножеств X.

Теорема 5 (Кантор). $2^k > k$.

Доказательство. Ясно, что $|\mathscr{P}(X)| \geqslant |X|$. Если f — функция, отображающая X в $\mathscr{P}(X)$, то множество $Y = \{x \in X: x \notin f(x)\}$ не принадлежит $\operatorname{rng}(f)$.

Определение. Ординальное число α называется *кардиналом*, если $|\alpha| \neq |\beta|$ для каждого $\beta < \alpha$.

(Дальше мы увидим, что $|X|$ может быть определено как такое ординальное число.) Буквы k, λ и т. п. используются для обозначения кардиналов.

Число Хартогса множества X определяется как

$$\mathscr{H}(X) = (\text{наименьшее } \alpha, \text{ для которого не существует взаимно однозначной функции из } \alpha \text{ в } X).$$

Лемма 8. (1) $\mathscr{H}(X)$ *является кардиналом для каждого* X. (2) $\mathscr{H}(\alpha)$ — *наименьший кардинал, превосходящий* α.

(3) *Если* $\langle k_\xi\colon \xi < \alpha\rangle$ — *возрастающая* α-*последовательность кардиналов, то* $\lim k_\xi$ *является кардиналом.*

Определение. (Алефы.) Определяем по рекурсии:

$$\aleph_0 = \omega_0 = \omega,$$
$$\aleph_{\alpha+1} = \omega_{\alpha+1} = \mathscr{H}(\omega_\alpha),$$
$$\aleph_\alpha = \omega_\alpha = \lim\{\omega_\beta\colon \beta < \alpha\}, \text{ если } \alpha \text{ — предельный ординал.}$$

Множества мощности $\aleph_0$ называются *счетными.*

Теорема 6. $\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$.

Докажем следующее утверждение: существует вполне-упорядочение $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$, такое, что для каждого α произведение $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$ является начальным отрезком $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$, изоморфным ω_α. (Для каждого α получаем некоторое *каноническое* вполне-упорядочение $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$.)

Доказательство. Положим

$$(\alpha_1, \alpha_2) \prec (\beta_1, \beta_2) \leftrightarrow \max(\alpha_1, \alpha_2) < \max(\beta_1, \beta_2) \vee$$
$$\vee [\max(\alpha_1, \alpha_2) = \max(\beta_1, \beta_2) \wedge \alpha_1 < \beta_1] \vee$$
$$\vee [\max(\alpha_1, \alpha_2) = \max(\beta_1, \beta_2) \wedge \alpha_1 = \beta_1 \wedge \alpha_2 < \beta_2].$$

Очевидно, что $\prec$ вполне упорядочивает $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$, и $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$ является начальным отрезком для $\prec$. Чтобы доказать существование изоморфизма между $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$ и ω_α, предположим, что α — наименьший ординал, для которого $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$ неизоморфно ω_α. Таким образом, ω_α изоморфно начальному отрезку $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$, допустим отрезку $(\beta, \gamma)\hat{}$. Пусть $\delta < \omega_\alpha$ — такое, что $\delta > \beta$ и $\beta > \gamma$; тогда $\delta \times \delta \supseteq (\beta, \gamma)\hat{}$. Получаем $\aleph_\alpha \leqslant |\delta \times \delta| = \aleph_\xi^2$ для некоторого $\xi < \alpha$. По предположению $\aleph_\xi^2 = \aleph_\xi$, так что $\aleph_\alpha \leqslant \aleph_\xi < \aleph_\alpha$; противоречие.

Следствие. $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_\alpha + \aleph_\beta = \max(\aleph_\alpha, \aleph_\beta)$.

Определение. Пусть α — предельный ординал. *Конфинальность* α есть число $\mathrm{cf}(\alpha)$, равное наименьшему β, для которого существует функция f из β в α и $\sup f(\xi) = \alpha$. (Например, $\mathrm{cf}(\omega + \omega) = \mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \omega$.)

Кардинал $\aleph_\alpha$ называется *регулярным*, если $\mathrm{cf}(\omega_\alpha) = \omega_\alpha$. Кардинал $\aleph_\alpha$ — *сингулярный*, если $\mathrm{cf}(\omega_\alpha) < \omega_\alpha$.

Лемма 9. *Ординал* $\mathrm{cf}(\alpha)$ *является регулярным кардиналом.*

Доказательство. $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

Лемма 10. *Для каждого* α *существует* $\beta > \alpha$, *такое, что кардинал* $\aleph_\beta$ *сингулярен.*

Доказательство. Положим $\omega_\beta = \omega_{\alpha+\omega} = \lim\{\omega_{\alpha+n}: n \in \omega\}$. Ясно, что $\mathrm{cf}(\omega_\beta) = \omega$.

В лемме 18 мы докажем (используя AC), что кардинал $\aleph_{\alpha+1}$ регулярен для любого α. Однако без AC неизвестно даже, существуют ли регулярные кардиналы (бóльшие $\aleph_0$).

Нерешенная проблема (в ZF, без AC). Существует ли регулярное $\aleph_\alpha > \aleph_0$?

Весьма вероятно, что существование таких кардиналов не может быть доказано без помощи AC. Было бы интересно построить модель коэновского типа (см. раздел 25), в которой $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \omega$ для всех α.

Лемма 11. *Кардинал k является сингулярным тогда и только тогда, когда существуют кардинал $\lambda < k$ и семейство $\{S_\xi: \xi < \lambda\}$ подмножеств k, такие, что $k = \bigcup\limits_{\xi<\lambda} S_\xi$ и $|S_\xi| < k$ для каждого $\xi < \lambda$.*

Доказательство. (a) Если k сингулярен, то существует функция f: $\mathrm{cf}(k) \to k$, для которой $\lim f(\xi) = k$; полагаем $S_\xi = f(\xi)$.
(b) Можно предполагать, что множества S_ξ попарно не пересекаются. Для каждого $\xi < \lambda$ положим $f(\xi)$ равным порядковому типу S_ξ. Очевидно, f: $\lambda \to k$. Имеем также $\sup f(\xi) = k$, ибо в противном случае получаем противоречие: если $\sup f(\xi) = \alpha < k$, то $k = \left|\bigcup\limits_{\xi<\lambda} S_\xi\right| \leqslant |\lambda \times \alpha| = \max(\lambda, |\alpha|) < k$.

Определение. Кардинал k называется *предельным*, если $k = \omega_\alpha$ и α — предельный ординал.
Кардинал $k > \aleph_0$ называется *слабо недостижимым*, если k — предельный и регулярный кардинал.

Лемма 12. *Если $\aleph_\alpha > \aleph_0$ — предельный кардинал, то* $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

Следствие. *Если кардинал k — слабо недостижимый, то* $k = \omega_k$.

Существуют кардиналы k, такие, что $k = \omega_k$; например,

$$k = \lim\{\omega,\ \omega_\omega,\ \omega_{\omega_\omega},\ \ldots\}.$$

Однако в этом случае $\mathrm{cf}(k) = \omega$. С другой стороны, существование слабо недостижимых кардиналов не может быть доказано в ZFC (см. разд. 13).

5. Конечные множества

Определение. Множество S *конечно*, если $|S| = n$ для некоторого $n \in \omega$; в противном случае S — *бесконечное* множество.

Лемма 13 (Тарский). *Множество S конечно тогда и только тогда, когда каждое непустое $X \subseteq \mathcal{P}(S)$ имеет $\subseteq$-максимальный элемент.*

Доказательство. (a) Если $S = n$, а также если $|S| = n$, условие леммы выполнено.
(b) Если S бесконечно, то множество $X = \{x \subseteq S: x \text{ конечно}\}$ не имеет $\subseteq$-максимального элемента.

Лемма дает изящное определение конечных множеств (не требующее понятия натурального числа).
Множество S называется конечным по Дедекинду (*D-конечным*), если S не может быть взаимно однозначно отображено на свое собственное подмножество. Очевидно, каждое конечное множество является D-конечным. Используя аксиому AC, можно доказать, что D-конечное множество является также конечным. Однако без помощи AC доказать этот факт невозможно (см. разд. 25).

Лемма 14. *Множество S является D-бесконечным тогда и только тогда, когда $|S| \geqslant \aleph_0$.*

Доказательство. (a) Число $\aleph_0$ является D-бесконечным; следовательно, если $|S| \geqslant \aleph_0$, то S есть D-бесконечное множество.
(b) Пусть S является D-бесконечным множеством и f — взаимно однозначное отображение S на собственное подмножество S. Существует $x_0 \in S - \operatorname{rng}(f)$; положим $x_{n+1} = f(x_n)$ для $n \in \omega$. Очевидно, $|\{x_n: n \in \omega\}| = \aleph_0$ и $\{x_n: n \in \omega\} \subseteq S$.

Упражнение. Сумма D-конечного семейства попарно не пересекающихся D-конечных множеств является D-конечной.
С другой стороны, можно показать методами раздела 27, что следующее утверждение недоказуемо без помощи AC:
Сумма D-конечного семейства конечных множеств является D-конечной.

6. Действительные числа

Определить целые и рациональные числа предоставляем читателю.

Теорема 7 (Кантор). *Пусть $(P, <)$ — счетное упорядоченное множество, такое, что*

(a) *упорядочение P плотное (т. е. если $p<q$, то $\exists r[p<r<q]$),*
(b) *P не имеет ни наименьшего, ни наибольшего элементов. Тогда P изоморфно множеству рациональных чисел.*

Доказательство. Методом зигзага: пусть $P=\{p_n\colon n\in\omega\}$, $Q=\{r_n\colon n\in\omega\}$ (рациональные числа); по рекурсии определяем $f(p_n)\in Q$ на шаге $2n$ и $f^{-1}(r_n)$ на шаге $2n+1$.

Лемма 15. *Множество конечных последовательностей натуральных чисел счетно.*

Предупреждение. Без помощи AC нельзя доказать, что сумма счетного семейства счетных множеств является счетной.

Теорема 8. *Пусть $(P, <)$ — плотно упорядоченное множество, не имеющее ни наименьшего, ни наибольшего элементов. Тогда существует упорядоченное множество $(C, \lessdot)$, такое, что*
(i) *$P\subseteq C$ и отношения $<$, $\lessdot$ совпадают на P;*
(ii) *P плотно в C (т. е. если $c, d\in C$ и $c\lessdot d$, то $(\exists p\in P)[c\leqslant p\leqslant d]$);*
(iii) *C не имеет ни наибольшего, ни наименьшего элементов;*
(iv) *C — полно упорядоченное множество (т. е. каждое непустое ограниченное подмножество множества C имеет н. в. г.). Множество C единственно с точностью до изоморфизма и называется пополнением P.*

Доказательство. *Дедекиндово сечение* множества P есть непустое подмножество $X\subseteq P$, такое, что
(a) $y\leqslant x\in X\to y\in X$,
(b) если $\sup X$ существует, то $\sup X\in X$.
Полагаем в качестве C множество всех дедекиндовых сечений P, упорядоченное отношением $\subseteq$.

Множество действительных чисел R определяется как пополнение множества рациональных чисел. Очевидно, $|R|=2^{\aleph_0}$. Кардинал $2^{\aleph_0}$ называется *мощностью континуума.*

Континуум-гипотеза: $2^{\aleph}=\aleph_1$.

Континуум-гипотеза недоказуема и неопровержима в ZFC (см. разд. 12 и 18).

Лемма 16. *Если S — счетное множество действительных чисел, то $|R-S|=2^{\aleph_0}$.*

Доказательство. Небольшая хитрость: используем $R\times R$ вместо R (потому что $|R\times R|=2^{\aleph_0}$); если $S\subseteq R\times R$ счетно, то $S\cap R\times\{x\}=0$ для некоторого $x\in R$.

Следствие. (a) *Существует $2^{\aleph_0}$ иррациональных чисел;*
(b) *существует $2^{\aleph_0}$ трансцендентных чисел* (Кантор).

Упражнение. Множество всех открытых множеств действительных чисел имеет мощность $2^{\aleph_0}$.

Проблема Суслина [48]. *Пусть* $(P, <)$ — *упорядоченное множество, такое, что*

(i) P — *плотно и полно упорядоченное,*

(ii) P *не имеет ни наименьшего, ни наибольшего элементов,*

(iii) *каждое семейство попарно непересекающихся интервалов* P *не более чем счетно.*

Изоморфно ли $(P, <)$ *множеству всех действительных чисел?*

Очевидно, R обладает свойствами (i), (ii), (iii). Гипотеза Суслина недоказуема и неопровержима в ZFC (см. разд. 21).

7. Аксиома выбора

Функция f называется *функцией выбора* на S, если $f(X) \in X$ для каждого непустого $X \in S$.

(A9) Аксиома выбора (AC):

Для каждого множества S непустых множеств существует функция выбора на S.

В разделах 12 и 25 будет доказано, что AC не зависит от аксиом ZF.

Имеются две эквивалентные формулировки аксиомы выбора, заслуживающие особого упоминания.

Принцип вполне-упорядочения (Цермело [58]). *Каждое множество может быть вполне упорядочено.*

Подмножество C частично упорядоченного множества $(P, <)$ называется *цепью* в P, если C линейно упорядочено посредством $<$.

Принцип максимальности (Куратовский [19], Цорн [60]). *Пусть* $(P, <)$ — *ч. у. множество и каждая цепь в* P *имеет верхнюю грань. Тогда* P *имеет максимальный элемент.*

Лемма 17. *Принцип вполне-упорядочения и принцип максимальности эквивалентны* AC.

Доказательство. (i) Аксиома AC влечет принцип максимальности. Пусть P удовлетворяет предположениям принципа. Используем функцию выбора на $\mathcal{P}(P)$, чтобы строить по рекурсии такую цепь $a_0 < a_1 < \ldots < a_\alpha < \ldots$, что для всех α элемент a_α является (выбранной) верхней гранью цепи $\{a_\beta : \beta < \alpha\}$. В результате получим максимальный элемент.

(ii) Принцип максимальности влечет утверждение Цермело. Пусть U — данное множество. Используем ч. у. множество

$(P, \subset)$ взаимно однозначных функций, областями определения которых являются ординалы, а значения принадлежат U. Максимальным элементом P является взаимно однозначная функция, отображающая некоторый ординал на U; с помощью этой функции получаем вполне-упорядочение U.

(iii) Принцип вполне-упорядочения влечет АС. Пусть S—множество непустых множеств. Используем вполне-упорядочение $\bigcup S$, чтобы определить функцию выбора f на S:

$$f(X) = (\text{наименьший элемент множества } X).$$

С аксиомой выбора имеем, что для каждого бесконечного множества X существует α, для которого $|X| = |\omega_\alpha|$. Таким образом, *кардинальные числа* можно теперь определить как натуральные числа (конечные кардиналы) и алефы (бесконечные кардиналы).

8. Арифметика кардинальных чисел

При наличии аксиомы выбора кардинальные числа вполне упорядочены и действия с кардиналами становятся значительно проще. Приведем для начала два простых факта.

(1) $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \max(\aleph_\alpha, \aleph_\beta)$.

(2) Если $\alpha \leqslant \beta$, то $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.

Доказательство. $2^{\aleph_\beta} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = |{}^{\omega_\beta}\omega_\alpha| \leqslant |\mathscr{P}(\omega_\beta \times \omega_\alpha)| = 2^{\aleph_\beta \aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\beta}$. Формулы, оценивающие $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ при $\alpha > \beta$, даны в теоремах 10 и 11.

Декартово произведение индексированного семейства множеств $\langle X_i : i \in I \rangle$ есть множество

$$\prod_{i \in I} X_i = \{\langle x_i : i \in I \rangle : x_i \in X_i \text{ для } i \in I\}.$$

Сумма и *произведение* семейства кардиналов $\{k_i : i \in I\}$ определяются следующим образом (аксиома выбора используется для доказательства независимости определения от выбора множеств X_i):

$\sum_{i \in I} k_i = \left| \bigcup_{i \in I} X_i \right|$, где $|X_i| = k_i$ для всех $i \in I$ и множества X_i попарно не пересекаются;

$\prod_{i \in I} k_i = \left| \prod_{i \in I} X_i \right|$, где $|X_i| = k_i$ для всех $i \in I$.

В разделе 4 уже упоминалась следующая лемма.

Лемма 18. *Кардинал* $\aleph_{\alpha+1}$ *регулярен для каждого* α.

Доказательство. В противном случае $\omega_{\alpha+1}$ есть сумма не более чем $\aleph_\alpha$ множеств, каждое из которых мощности $\leqslant \aleph_\alpha$. Таким образом,

$$\aleph_{\alpha+1} \leqslant \sum_{i<\omega_\alpha} \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha;$$

противоречие.

Теорема 9 (Кёниг [17]). *Если* $k_i < \lambda_i$ *для каждого* $i \in I$, *то*

$$\sum_{i\in I} k_i < \prod_{i\in I} \lambda_i.$$

Доказательство. (a) Докажем $\leqslant$. Пусть $|S_i| = k_i$, $|T_i| = \lambda_i$, $S_i \subset T_i$ и множества S_i попарно не пересекаются. Построим взаимно однозначную функцию F: $\bigcup_{i\in I} S_i \to \prod_{i\in I} T_i$ следующим образом: для $x \in S_i$ положим $F(x) = \langle t_i : i \in I\rangle$, где $t_i = x$ и $t_j \notin S_j$ при $j \neq i$.

(b) Докажем $\neq$. Предположим, что $\prod_i T_i = \bigcup_i Z_i$, множества Z_i попарно не пересекаются и $|Z_i| = k_i$, $|T_i| = \lambda_i$. Пусть $S_i = \{z_i : \langle z_j : j \in I\rangle \in Z_i\}$. Так как $|S_i| \leqslant k_i < \lambda_i$, то существует функция $\langle u_i : i \in I\rangle \in \prod_i T_i$, такая, что $u_i \notin S_i$ для любого $i \in I$. Следовательно, $\langle u_i : i \in I\rangle \notin Z_i$ для любого $i \in I$.

Следствие. $\mathrm{cf}(2^{\aleph_\alpha}) > \aleph_\alpha$.

Доказательство. Докажем, что $\sum_{i<\omega_\alpha} k_i < 2^{\aleph_\alpha}$, когда $k_i < 2^{\aleph_\alpha}$ для всех i:

$$\sum_{i<\omega_\alpha} k_i < \prod_{i<\omega_\alpha} 2^{\aleph_\alpha} = (2^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}.$$

Дальше в этом разделе k, λ, μ обозначают бесконечные кардиналы; если $k = \aleph_\alpha$, то $k^+ = \aleph_{\alpha+1}$.

Лемма 19. *Если* $\lambda < \mathrm{cf}(k)$, *то* $^\lambda k = \bigcup_{\alpha<k} {}^\lambda\alpha$.

Теорема 10. (a) (Хаусдорф [10]).

$$(k^+)^\lambda = k^+ \cdot k^\lambda.$$

(b) (Тарский [49]). *Если* $\lambda < \mathrm{cf}(k)$ *и* k — *предельный кардинал, то*

$$k^\lambda = \sum_{\nu<k} \nu^\lambda.$$

Доказательство. Применить лемму 19.

Лемма 20. *Если* $\nu \leqslant \mu$, *то* $\mu^{\nu} = |\mathscr{P}_{\nu}(\mu)|$, *где* $\mathscr{P}_{\nu}(X) = \{Y \subseteq X: |Y| = \nu\}$.

Доказательство. (a) ${}^{\nu}\mu \subseteq \mathscr{P}_{\nu}(\nu \times \mu)$.

(b) Построим взаимно однозначную функцию $F: \mathscr{P}_{\nu}(\mu) \to {}^{\nu}\mu$ следующим образом: для $X \in \mathscr{P}_{\nu}(\mu)$ положим $F(X) = f$, где f — взаимно однозначная функция, отображающая ν на X.

Лемма 21. *Если* $\operatorname{cf}(k) \leqslant \lambda < k$, *то* $k^{\lambda} = \left(\sum_{\nu < k} \nu^{\lambda}\right)^{\operatorname{cf}(k)}$.

Доказательство. (a) $\left(\sum_{\nu < k} \nu^{\lambda}\right)^{\operatorname{cf}(k)} \leqslant (k^{\lambda})^{\operatorname{cf}(k)} = k^{\lambda \cdot \operatorname{cf}(k)} = k^{\lambda}$.

(b) Построим взаимно однозначную функцию F, отображающую ${}^{\lambda}k$ в $\mathscr{P}_{\operatorname{cf}(k)}\left(\bigcup_{\nu < k} {}^{\lambda}\nu\right)$, следующим образом. Пусть $\langle \nu_{\alpha}: \alpha < \operatorname{cf}(k)\rangle$ — возрастающая последовательность и $\lim \nu_{\alpha} = k$. Для $f \in {}^{\lambda}k$, $\alpha < \operatorname{cf}(k)$ и $x \in \lambda$ положим

$$f_{\alpha}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) < \nu_{\alpha}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для каждой функции $f \in {}^{\lambda}k$ и $\alpha < \operatorname{cf}(k)$ мы имеем $f_{\alpha} \in {}^{\lambda}(\nu_{\alpha})$. Положим теперь $F(f) = \{f_{\alpha}: \alpha < \operatorname{cf}(k)\}$; для $f \in {}^{\lambda}k$ имеем $F(f) \in \mathscr{P}_{\operatorname{cf}(k)}\left(\bigcup_{\nu < k} {}^{\lambda}\nu\right)$ и F — взаимно однозначная функция.

Теорема 11 (Буковский [1]). *Предположим, что* $\operatorname{cf}(k) \leqslant \lambda < k$ *и обозначим* $\sum_{\nu < k} \nu^{\lambda}$ *через* μ.

(a) *Если существует* $\nu_0 < k$, *такое, что* $\nu^{\lambda} = \nu_0^{\lambda}$ *для всех* ν, $\nu_0 \leqslant \nu < k$, *то* $k^{\lambda} = \mu$.

(b) *Если для каждого* $\nu < k$ *существует* $\bar{\nu} > \nu$, $\bar{\nu} < k$, *такое, что* $\nu^{\lambda} < \bar{\nu}^{\lambda}$, *то* $k^{\lambda} = \mu^{\operatorname{cf}(\mu)}$.

Значение этой теоремы состоит в том, что степени кардиналов определяются функцией $\mu^{\operatorname{cf}(\mu)}$ от одного аргумента.

Доказательство. (a) Ясно, что $\nu_0^{\lambda} \geqslant k$, и мы имеем $\sum_{\nu < k} \nu^{\lambda} = \nu_0^{\lambda} \cdot k = \nu_0^{\lambda}$. По лемме 21, $k^{\lambda} = \mu^{\operatorname{cf}(k)} = \nu_0^{\lambda \cdot \operatorname{cf}(k)} = \nu_0^{\lambda} = \mu$.

(b) В этом случае нетрудно видеть, что $\operatorname{cf}\left(\sum_{\nu < k} \nu^{\lambda}\right) = \operatorname{cf}(k)$.

Теперь применим лемму 21.

Аналогичные рассуждения, как в лемме 21 и теореме 11, показывают, что для каждого предельного кардинала k

$$2^{k} = \left(2^{\underline{k}}\right)^{\operatorname{cf}(k)},$$

где $2^{\underline{k}} = \sum_{\lambda < k} 2^{\lambda}$, и для сингулярного k

$$2^k = \begin{cases} 2^{\underline{k}}, & \text{если существует } \lambda_0 < k, \text{ такое, что } 2^{\lambda} = 2^{\lambda_0} \\ & \text{для } \lambda,\ \lambda_0 \leqslant \lambda < k; \\ (2^{\underline{k}})^{\mathrm{cf}\,(2^{\underline{k}})} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Обобщенная континуум-гипотеза (GCH):

$2^k = k^+$ для всех бесконечных кардиналов k.

Замечание. (1) $k < k^{\mathrm{cf}\,(k)} \leqslant 2^k$ (неравенство следует из теоремы Кёнига).

2) Если GCH верна, то

$$k^{\lambda} = \begin{cases} k & \text{при } \lambda < \mathrm{cf}\,(k), \\ k^+ & \text{при } \mathrm{cf}\,(k) \leqslant \lambda \leqslant k, \\ \lambda^+ & \text{при } k \leqslant \lambda. \end{cases}$$

9. Аксиома регулярности

(A8) $$(\forall S \neq 0)(\exists x \in S)[x \cap S = 0].$$

В качестве следствия (A8) получаем: не существует бесконечной последовательности x_0, x_1, x_2, ..., такой, что

$$x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \ldots$$

(в частности, не существует такого x, что $x \in x$); действительно, рассмотрим множество $S = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ и применим аксиому. В предположении AC обратное также верно: если не существует бесконечной последовательности $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \ldots$, то (A8) выполняется. Действительно, если аксиома не выполняется, то $(\exists S \neq 0)(\forall x \in S)[x \cap S \neq 0]$ и можно построить последовательность $x_0, x_1, \ldots$, для которой $x_0 \in S$, $x_1 \in S \cap x_0$, $x_2 \in S \cap x_1$ и т. д.

В теореме 13 дана еще одна формулировка аксиомы регулярности, принадлежащая фон Нейману [52]. Определяем по рекурсии:

$$V_0 = 0,$$
$$V_{\alpha} = \bigcup_{\beta < \alpha} V_{\beta}, \quad \text{если } \alpha \text{ — предельный ординал,}$$
$$V_{\alpha+1} = \mathscr{P}(V_{\alpha}).$$

Положим $\Pi = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_{\alpha}$ и для $x \in \Pi$

$$\text{ранг}\,(x) = (\text{наименьшее } \alpha, \text{ такое, что } x \in V_{\alpha+1}).$$

Лемма 22. (a) $V_\alpha \subset V_{\alpha+1}$, (b) $\mathrm{On} \subset \Pi$, (c) $x \in \Pi \leftrightarrow x \subset \Pi$, (d) *если* $x \in y \in \Pi$, *то ранг* $(x) <$ *ранг* (y), (e) *ранг* $(\alpha) = \alpha$.

Определение. *Транзитивное замыкание* множества S, обозначаемое $\mathrm{TC}(S)$, есть транзитивное множество, обладающее следующими свойствами: (a) $\mathrm{TC}(S) \supseteq S$, (b) $\mathrm{TC}(S) \subseteq T$ для любого транзитивного множества $T \supseteq S$.

Лемма 23. $\mathrm{TC}(S)$ *существует для каждого множества* S.
Доказательство. Положим $S_0 = S$, $S_{n+1} = \bigcup S_n$, $\mathrm{TC}(S) = \bigcup_{n \in \omega} S_n$.

Лемма 24. *Если* $\mathbf{C}$ *— непустой класс, то* $(\exists x \in \mathbf{C})[x \cap \mathbf{C} = 0]$.

Доказательство. Пусть $S \in \mathbf{C}$. Если $S \cap \mathbf{C} = 0$, то S — искомое множество. Если $S \cap \mathbf{C} \neq 0$, то $T = \mathrm{TC}(S) \cap \mathbf{C} \neq 0$ и по аксиоме регулярности существует $x \in T$, такое, что $x \cap T = 0$. Тогда $x \cap \mathbf{C} = 0$; действительно, если $y \in x \cap \mathbf{C}$, то $y \in \mathrm{TC}(S)$ в силу транзитивности $\mathrm{TC}(S)$, и $y \in x \cap T$.

Теорема 12 ($\in$-индукция). *Если класс* $\mathbf{C}$ *— такой, что*

$$x \subseteq \mathbf{C} \rightarrow x \in \mathbf{C} \quad \textit{для каждого } x,$$

то $\mathbf{C} = \mathrm{V}$.

Доказательство. В противном случае существует $x \in \mathrm{V} - \mathbf{C}$, для которого $x \cap (\mathrm{V} - \mathbf{C}) = 0$, т. е. $x \subseteq \mathbf{C}$, и отсюда $x \in \mathbf{C}$.
(Аналогично вводится понятие $\in$-рекурсии: $\mathbf{F}(x) = \mathbf{G}(\mathbf{F}''x)$.)

Теорема 13. *Аксиома регулярности выполняется тогда и только тогда, когда* $\mathrm{V} = \Pi$.

Доказательство. (a) Если $\mathrm{V} = \Pi$ и S непусто, пусть x — элемент S наименьшего ранга; тогда $x \cap S = 0$.
(b) Если аксиома выполняется, то равенство $\mathrm{V} = \Pi$ доказывается $\in$-индукцией.

10. Транзитивные модели

Теория, излагаемая в разделах 10—14, была развита Гёделем в [8]. Пусть $\mathbf{M}$ — класс и $\mathbf{E}$ — бинарное отношение на $\mathbf{M}$; пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — формула. Определяем

$$(\mathbf{M}, \mathbf{E}) \models \varphi(x_1, \ldots, x_n) \qquad (\text{для } x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{M})$$

($(\mathbf{M}, \mathbf{E})$ *удовлетворяет* φ, φ *выполняется в* $(\mathbf{M}, \mathbf{E})$, $(\mathbf{M}, \mathbf{E})$ — *модель* φ) следующим образом:

(a) $(\mathbf{M}, \mathbf{E}) \models x \in y$, если $(x, y) \in \mathbf{E}$;
$(\mathbf{M}, \mathbf{E}) \models x = y$, если $x = y$;

(b) $(\mathbf{M}, \mathbf{E}) \models \neg\varphi$, если $\neg(\mathbf{M}, \mathbf{E}) \models \varphi$;
$(\mathbf{M}, \mathbf{E}) \models \varphi \wedge \psi$, если $(\mathbf{M}, \mathbf{E}) \models \varphi \wedge (\mathbf{M}, \mathbf{E}) \models \psi$;
(c) $(\mathbf{M}, \mathbf{E}) \models \exists x \varphi$, если $(\exists x \in \mathbf{M})[(\mathbf{M}, \mathbf{E}) \models \varphi]$.

Аналогично определяется выполнимость для $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ и $\forall$[5]).
В случае когда $\mathbf{E} = \in \cap\, \mathbf{M}^2$, мы пишем $\mathbf{M} \models \varphi$ *).

Определение. Класс $\mathbf{M}$ называется *экстенсиональным*, если для всех x, $y \in \mathbf{M}$ неравенство $x \neq y$ влечет $x \cap \mathbf{M} \neq y \cap \mathbf{M}$.

Лемма 25. *Класс* $\mathbf{M}$ *— экстенсиональный тогда и только тогда, когда* $\mathbf{M} \models$ (A1).

Доказательство.

$\mathbf{M} \models (\mathrm{A1}) \leftrightarrow \mathbf{M} \models \forall X \forall Y [\forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y) \rightarrow X = Y] \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\forall X, Y \in \mathbf{M})[\mathbf{M} \models \forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y) \rightarrow \mathbf{M} \models X = Y] \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\forall X, Y \in \mathbf{M})[X \cap \mathbf{M} = Y \cap \mathbf{M} \rightarrow X = Y] \leftrightarrow$
$\leftrightarrow \mathbf{M}$ — экстенсиональный класс.

Лемма 26. *Если класс* $\mathbf{M}$ *транзитивен* **), *то* $\mathbf{M}$ *— экстенсиональный класс.*

Определение. Пусть $\mathbf{M}$ — транзитивный класс, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — формула. Говорят, что φ *абсолютна* для $\mathbf{M}$, если $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \mathbf{M} \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ для любых $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{M}$. Пусть $\varphi(\vec{x}, y)$ — формула и $\mathfrak{F}(\vec{x}) = \{y\colon \varphi(\vec{x}, y)\}$; $\mathfrak{F}(\vec{x})$ может не быть множеством. Если $\mathfrak{F}(\vec{x})$ — множество, тогда по аксиоме (A1) такое множество единственно. Назовем $\mathfrak{F}$ *операцией* (определяемой формулой φ).

Если $\mathbf{M}$ — транзитивный класс, положим $\mathfrak{F}^{\mathbf{M}}(\vec{x}) = \{y \in \mathbf{M}\colon \mathbf{M} \models \varphi(\vec{x}, y)\}$ для $\vec{x} \in \mathbf{M}$. Говорят, что операция $\mathfrak{F}$ *определена в* $\mathbf{M}$, если $\mathfrak{F}^{\mathbf{M}}(\vec{x}) \in \mathbf{M}$ для всех $\vec{x} \in \mathbf{M}$ (в частности, $\mathfrak{F}$ *определена*, если $\mathfrak{F}(\vec{x})$ — множество для любого $\vec{x}$).

Если формула φ абсолютна, то ясно, что $\mathfrak{F}^{\mathbf{M}}(\vec{x}) = \mathfrak{F}(\vec{x}) \cap \mathbf{M}$. Операция $\mathfrak{F}$ называется *абсолютной* для $\mathbf{M}$, если $\mathfrak{F}^{\mathbf{M}}(\vec{x}) = \mathfrak{F}(\vec{x})$ для всех $\vec{x} \in \mathbf{M}$. Если φ абсолютна и $\mathfrak{F}(\vec{x}) \subseteq \mathbf{M}$ для $\vec{x} \in \mathbf{M}$, то $\mathfrak{F}$ абсолютна.

Лемма 27. *Пусть* $\mathbf{M}$ *— транзитивный класс.*
(a) $x \in y$ *и* $x = y$ *— абсолютные формулы.*
(b) *Если формулы* φ *и* ψ *абсолютны, то* $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$ *и* $\neg\varphi$ *также абсолютны.*
(c) *Если* φ *абсолютна, то* $(\forall x \in y)\varphi$ *и* $(\exists x \in y)\varphi$ *абсолютны.*

*) Здесь через $\in$ обозначается класс $\{(x, y)\colon x \in y\}$. — *Прим. перев.*
**) т. е. если $\forall x (x \in \mathbf{M} \rightarrow x \subseteq \mathbf{M})$. — *Прим. перев.*

Доказательство. Утверждения (a) и (b) очевидны.

(c) Пусть $\psi(y, \ldots)$ есть формула $(\exists x \in y)\,\varphi(x, y, \ldots)$ и φ абсолютна для $\mathbf{M}$. Если $y, \ldots \in \mathbf{M}$, тогда

$$\psi(y, \ldots) \leftrightarrow (\exists x \in y)\,\varphi \leftrightarrow (\exists x \in y)\,\mathbf{M} \models \varphi(x, y, \ldots) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists x \in \mathbf{M})\,[x \in y \wedge \mathbf{M} \models \varphi] \leftrightarrow \mathbf{M} \models (\exists x \in y)\,\varphi \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \mathbf{M} \models \psi(y, \ldots).$$

Аналогично разбирается случай с квантором всеобщности.

Лемма 28. (a) *Если операция* $\mathfrak{F}$ *и формула* φ *абсолютны (для данного* $\mathbf{M}$*), то формула*

$$(\exists y \in \mathfrak{F}(\vec{x}))\,\varphi$$

также абсолютна.

(b) *Если операция* $\mathfrak{F}$ *абсолютна и определена в* $\mathbf{M}$*, а формула* φ *абсолютна, то* $\varphi(\mathfrak{F}(\vec{x}))$ *абсолютна.*

(Здесь $\mathbf{M} \models (\exists y \in \mathfrak{F}(\vec{x}))\,\varphi$ означает $(\exists y \in \mathfrak{F}^{\mathbf{M}}(\vec{x}))\,[\mathbf{M} \models \varphi]$; если $\mathfrak{F}$ определена в $\mathbf{M}$, то $\mathbf{M} \models \varphi(\mathfrak{F}(\vec{x}))$ означает $\mathbf{M} \models \varphi(y)$, где $y = \mathfrak{F}^{\mathbf{M}}(\vec{x})$.)

Абсолютность некоторых формул и операций.

(a) Следующие формулы абсолютны (для любого транзитивного класса $\mathbf{M}$):

(1) $x \subseteq y$,
(2) x непусто,
(3) x — **неупорядоченная (упорядоченная) пара,**
(4) x — **единичное множество,**
(5) x — **бинарное отношение,**
(6) x — **функция,**
(7) x транзитивно,
(8) x — упорядоченное множество,
(9) x упорядочено отношением $\in$.

(b) Если $\mathbf{M}$ — транзитивный класс и $x, y \in \mathbf{M}$, тогда

(10) $\{x, y\}^{\mathbf{M}} = \{x, y\}$,
(11) $\bigcup^{\mathbf{M}} x = \bigcup x$,
(12) $\mathscr{P}^{\mathbf{M}}(x) = \mathscr{P}(x) \cap \mathbf{M}$.

(c) Класс $\mathbf{C}$ *замкнут относительно операции* $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{F}(\vec{x}) \in \mathbf{C}$ при $\vec{x} \in \mathbf{C}$.

Пусть $\mathbf{M}$ — транзитивный класс. Операции (13) и (14) абсолютны. Если $\mathbf{M}$ замкнут относительно операции $\{\ \}$, то операции (15)—(17) также абсолютны.

(13) $\{x, y\}$,
(14) $x - y$,

(15) $x \times y$,
(16) $\mathrm{dom}(x)$,
(17) $x^2 \cap \in$.

Доказательство. $z \in x \times y \leftrightarrow (\exists u \in x)(\exists v \in y)[z = (u, v)]$.

$$z \in \mathrm{dom}(x) \leftrightarrow (\exists y \in \bigcup \bigcup (x))[(z, y) \in x].$$

$$z \in x^2 \cap \in \leftrightarrow (\exists u \in x)(\exists v \in x)[z = (u, v) \wedge u \in v].$$

Снова предполагаем, что класс **M** транзитивен и замкнут относительно { }.

(d) Следующие операции абсолютны:

(18) 0,
(19) $x \cup y$,
(20) $x \cap y$,
(21) $\mathrm{rng}(x)$,
(22) $x \cup \{x\}$.

(e) Следующие формулы абсолютны:

(23) x — ординал,
(24) x — предельный ординал,
(25) x — последующий ординал.

Доказательство. Используя аксиому регулярности, имеем x — ординал $\leftrightarrow$ x транзитивно и упорядочено отношением $\in$ (вполне-упорядоченность x отношением $\in$ следует из (A8)).

(f) Если x — кардинал и $x \in \mathbf{M}$, то x — кардинал в **M** (т. е. $\mathbf{M} \models x$ — кардинал).

Доказательство. x — кардинал $\leftrightarrow$ x — ординал $\wedge$ $\forall f \neg \varphi(x, f)$, где $\varphi(x, f)$ — абсолютная формула:

„функция f взаимно однозначна $\wedge$ $\mathrm{dom}(f) = x \wedge \mathrm{rng}(f) \in x$“.

Если формула φ ложна для любой функции f, то φ ложна для любой $f \in \mathbf{M}$. Однако обратное неверно и формула „x есть кардинал“ *не* является абсолютной.

Определение. Транзитивный класс **M** называется *почти универсальным*, если

$$(\forall S \subseteq \mathbf{M})(\exists Y \in \mathbf{M})[Y \supseteq S].$$

(Очевидно, каждый почти универсальный класс является собственным классом.)

Лемма 29. *Пусть класс* **M** *транзитивен, почти универсален и замкнут относительно* { }. *Тогда* **M** *удовлетворяет аксиомам* (A1), (A2), (A4), (A5), (A6). *Кроме того, если аксиомы* (A3) *выполняются в* **M**, *то* **M** *удовлетворяет* (A7).

Доказательство. (A1) выполняется в силу леммы 25.

(A2) Очевидно.

(A4) Если $X \in \mathbf{M}$, то $\bigcup^{\mathbf{M}} X = \bigcup X$; следовательно, $\bigcup^{\mathbf{M}} X$ есть множество и существует $Y \in \mathbf{M}$, такое, что $\bigcup^{\mathbf{M}} X \subseteq Y$.

(A5) Если $X \in \mathbf{M}$, то $\mathscr{P}^{\mathbf{M}}(X) = \mathscr{P}(X) \cap \mathbf{M}$ есть множество и существует $Y \in \mathbf{M}$, такое, что $\mathscr{P}^{\mathbf{M}}(X) \subseteq Y$.

(A6) Пусть φ — формула и $\mathbf{F} = \{(x, y) \in \mathbf{M}^2 : \mathbf{M} \models \varphi(x, y)\}$. Предположим, что $\mathbf{M} \models \mathbf{F}$ есть функция, и докажем $\mathbf{M} \models \models \forall X \exists Y (\forall u \in X)[\mathbf{F}(u) \in Y]$. Пусть $\mathbf{G}$ — функция из $\mathbf{M}$ в $\mathbf{M}$, определенная следующим образом:

$$y = \mathbf{G}(x) \leftrightarrow \mathbf{M} \models \varphi(x, y).$$

Если $X \in \mathbf{M}$, то для $S = \mathbf{G}''X$ существует $Y \in \mathbf{M}$, такое, что $\mathbf{G}''X \subseteq Y$. Для каждого $u \in X$ имеем $\mathbf{G}(u) \in Y$, т. е. $\mathbf{M} \models \mathbf{F}(u) \in Y$.

(A7) Если аксиомы (A3) выполняются в $\mathbf{M}$, то $0 \in \mathbf{M}$. Пусть $S \subseteq \mathbf{M}$ — множество, содержащее 0, и если $x \in S$, то $\{x\} \in S$. Существует $Y \in \mathbf{M}$, такое, что $S \subseteq Y$; в силу $\mathbf{M} \models$ (A3) и $\mathbf{M} \models$ (A6) существует такое $X \subseteq Y$, что $X \in \mathbf{M}$, $0 \in X$ и $\forall u (u \in \in X \rightarrow \{u\} \in X)$.

В следующей теореме предполагаются только аксиомы (A1) — (A7) и доказывается, что класс $\Pi = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} \mathrm{V}_\alpha$ является *моделью* ZF, т. е. $\Pi \models \varphi$, когда φ — аксиома ZF (включая аксиому (A8)).

Теорема 14 (фон Нейман [52]). *Класс* Π *является моделью* ZF.

Доказательство. Класс Π транзитивен, почти универсален и замкнут относительно { }; таким образом, достаточно проверить, что Π удовлетворяет аксиомам выделения и (A8).

(A3) Для данной формулы φ нужно доказать, что

$$\Pi \models \forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi(u)),$$

т. е. $(\forall X \in \Pi)(\exists Y \in \Pi) \forall u [u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \Pi \models \varphi(u)]$.

Если $x \in \Pi$, то $Y = \{u \in X : \Pi \models \varphi(u)\}$ есть подмножество X и, по лемме 22 (c), $Y \in \Pi$.

(A8) Формула $(\exists x \in S)[x \cap S = 0]$ абсолютна и выполняется для каждого непустого множества $S \in \Pi$ (но может не выполняться для $S \in \mathrm{V}$, если (A8) не предполагается). Следовательно, $\Pi \models$ (A8).

Следствие. $\mathrm{Con}((\mathrm{A1}) - (\mathrm{A7})) \rightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{ZF})$.

Читается: если аксиомы (A1) — (A7) непротиворечивы (совместимы), то теория ZF непротиворечива; ZF *непротиворечива относительно* (A1) — (A7). Если бы противоречие выводилось в ZF, то можно было бы получить противоречие, не используя

аксиому регулярности. Действительно, предположим $\varphi \wedge \neg\varphi$ доказуемо в ZF; тогда $\Pi \models \varphi \wedge \neg\varphi$ доказуемо из аксиом (A1) — (A7). Однако утверждение $\Pi \models \varphi \wedge \neg\varphi$ противоречиво: $(\Pi \models \varphi) \wedge \neg(\Pi \models \varphi)$.

Используем теперь аксиому регулярности, чтобы доказать теорему об изоморфизме (Мостовский [32], Шепердсон [39]) и принцип отражения (Леви [22]).

Теорема 15A. (Теорема об изоморфизме.) *Если* $\mathbf{P}$ *— экстенсиональный класс, то существуют единственный транзитивный класс* $\mathbf{Q}$ *и единственная функция* $\mathbf{H}$, *такие, что* $\mathbf{H}$ *— изоморфизм между* $(\mathbf{P}, \in)$ и $(\mathbf{Q}, \in)$.

(То есть $\mathbf{H}$ — взаимно однозначная функция, отображающая $\mathbf{P}$ на $\mathbf{Q}$, и $x \in y \leftrightarrow \mathbf{H}(x) \in \mathbf{H}(y)$ для $x, y \in \mathbf{P}$.)

Доказательство. (a) Существование. Построим по рекурсии три трансфинитные последовательности:

$$P_0 \subseteq P_1 \subseteq \ldots P_\alpha \subseteq \ldots,$$
$$H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots H_\alpha \subseteq \ldots,$$
$$Q_0 \subseteq Q_1 \subseteq \ldots Q_\alpha \subseteq \ldots;$$

положим $\mathbf{H} = \bigcup_{\alpha \in On} H_\alpha$, $\mathbf{Q} = \bigcup_{\alpha \in On} Q_\alpha$ и докажем, что $\mathbf{P} = \bigcup_{\alpha \in On} P_\alpha$, класс $\mathbf{Q}$ транзитивен и $\mathbf{H}$ есть $\in$-изоморфизм между $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$.

Положим (i) $P_0 = 0$, $H_0 = 0$, $Q_0 = 0$;

(ii) $P_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} P_\beta$, $H_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} H_\beta$, $Q_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} Q_\beta$, если α — предельный ординал;

(iii) $P_{\alpha+1} = \{x \in \mathbf{P}: x \cap \mathbf{P} \subseteq P_\alpha\}$,
$H_{\alpha+1}(x) = H''_\alpha(x \cap \mathbf{P})$ для $x \in P_{\alpha+1}$,
$Q_{\alpha+1} = \operatorname{rng}(H_{\alpha+1})$.

Теперь достаточно доказать, что для каждого α

(1) P_α — множество и $P_\alpha \subseteq \mathbf{P}$,
(2) $P_\alpha \subseteq P_{\alpha+1}$,
(3) H_α — функция, отображающая P_α на Q_α, и $H_{\alpha+1} \mid P_\alpha = H_\alpha$,
(4) $Q_\alpha \subseteq Q_{\alpha+1}$,
(5) Q_α транзитивно,
(6) H_α есть $\in$-изоморфизм,
(7) $\mathbf{P} = \bigcup_{\alpha \in On} P_\alpha$.

Утверждение (1) следует из экстенсиональности $\mathbf{P}$: так как $x \cap \mathbf{P} \neq y \cap \mathbf{P}$ при $x \neq y$, то $P_{\alpha+1}$ имеет элементов не больше, чем множество подмножеств P_α.

(2) — (6). Доказываются по индукции.

(7). Если $\mathbf{P} \neq \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} P_\alpha$, тогда по аксиоме (A8) существует $x \in \mathbf{P} - \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} P_\alpha$, такое, что $x \cap \left(\mathbf{P} - \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} P_\alpha\right) = 0$, т. е. $x \cap \mathbf{P} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} P_\alpha$; существует α_0, для которого $x \cap \mathbf{P} \subseteq \bigcup_{\alpha < \alpha_0} P_\alpha$, и поэтому $x \cap \mathbf{P} \subseteq P_{\alpha_0}$ и $x \in P_{\alpha+1}$; противоречие.

(b) Единственность. Для любых транзитивных классов $\mathbf{Q}$ и $\bar{\mathbf{Q}}$ доказываем (по $\in$-индукции), что если $\mathbf{Q}$ и $\bar{\mathbf{Q}}$ изоморфны, то $\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}}$ и изоморфизм является тождественным отображением.

Следующая далее теорема 15B является обобщением теоремы об изоморфизме. Отношение $\mathbf{E}$ на классе $\mathbf{P}$ называется *экстенсиональным*, если

$$\mathbf{E}_{-1}(x) \neq \mathbf{E}_{-1}(y) \quad \text{при} \quad x, y \in \mathbf{P} \quad \text{и} \quad x \neq y.$$

(Здесь $\mathbf{E}_{-1}(x) = \{z\colon (z, x) \in \mathbf{E}\}$.) Отношение $\mathbf{E}$ называется *правильно построенным* (*п. п. отношением*), если

(1) $\mathbf{E}_{-1}(x)$ является множеством для каждого $x \in \mathbf{P}$,

(2) для каждого непустого $S \subseteq \mathbf{P}$ существует $x \in S$, для которого $S \cap \mathbf{E}_{-1}(x) = 0$.

Заметим, что

(i) условие (1) тривиально выполняется, если $\mathbf{P}$ — множество,

(ii) $\in$ является п. п. отношением и $\in_{-1}(x) = x$,

(iii) если $\mathbf{P}$ — экстенсиональный класс, то $\mathbf{E} = \in \cap\, \mathbf{P}^2$ — экстенсиональное отношение и $\mathbf{E}_{-1}(x) = x \cap \mathbf{P}$.

Теорема 15B. (Теорема об изоморфизме). *Если* $\mathbf{E}$ *— экстенсиональное, правильно построенное отношение на* $\mathbf{P}$, *то существуют единственный транзитивный класс* $\mathbf{Q}$ *и единственная функция* $\mathbf{H}$, *такие, что* $\mathbf{H}$ *— изоморфизм между* $(\mathbf{P}, \mathbf{E})$ *и* $(\mathbf{Q}, \in)$.

Доказательство. Доказывается так же, как теорема 15A, за исключением того, что

$$P_{\alpha+1} = \{x \in \mathbf{P}\colon \mathbf{E}_{-1}(x) \subset P_\alpha\}$$

и

$$\mathbf{H}_{\alpha+1}(x) = H''_\alpha(\mathbf{E}_{-1}(x)).$$

Для доказательства (7) используем, что $\mathbf{E}$ — п. п. отношение; тогда, если $0 \neq \mathbf{C} \subseteq \mathbf{P}$, существует $y \in \mathbf{C}$, такое, что $\mathbf{C} \cap \mathbf{E}_{-1}(y) = 0$.

Лемма 30. *Пусть* $\varphi(x, \vec{y})$ *— формула. Для каждого множества* S_0 *существует такое* $S \supseteq S_0$, *что для всех* $\vec{y} \in S$

$$\exists x \varphi(x, \vec{y}) \to (\exists x \in S)\, \varphi(x, \vec{y}).$$

Предполагая аксиому выбора, можно потребовать, чтобы $|S| \leqslant \aleph_0 \cdot |S_0|$.

Доказательство. Если $\mathbf{C}$ — класс, полагаем

$$\hat{\mathbf{C}} = \{x \in \mathbf{C}\colon (\forall y \in \mathbf{C})\ [\text{ранг}\ (x) \leqslant \text{ранг}\ (y)]\};$$

$\hat{\mathbf{C}}$ является множеством и $\hat{\mathbf{C}} \subseteq \mathbf{C}$ *).

Пусть $\mathbf{C}_y = \{x\colon \varphi(x, y)\}$ и

$$\mathfrak{T}(X) = X \cup \bigcup_{y \in X} \hat{\mathbf{C}}_y.$$

Используя операцию $\mathfrak{T}$, построим (по рекурсии) $S_1 = \mathfrak{T}(S_0)$, ..., $S_{n+1} = \mathfrak{T}(S_n)$ и $S = \bigcup_n S_n$. Ясно, что если $\vec{y} \in S$ и $\exists x \varphi(x, \vec{y})$ то $(\exists x \in S)\, \varphi(x, \vec{y})$.

Если AC предполагается, пусть F — функция выбора на $\mathscr{P}(S)$ и

$$\mathfrak{T}^*(X) = X \cup \{F(\hat{\mathbf{C}}_y)\colon\ y \in X\}$$

для $X \subseteq S$. Полагаем $S_0^* = S_0$, $S_{n+1}^* = \mathfrak{T}^*(S_n^*)$ и $S^* = \bigcup_n S_n^*$, тогда S^* — искомое множество и $|S^*| \leqslant \aleph_0 \cdot |S_0|$.

Замечание. Для данных n формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ можно, немного изменив доказательство леммы 30, получить такое S, что для всех $\vec{y} \in S$

$$\exists x \varphi_i(x, y) \to (\exists x \in S)\, \varphi_i(x, y), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Теорема 16 (Монтегю, Леви). Принцип отражения. *Пусть* φ *— формула. Для каждого множества* M_0 *существует* $M \supseteq M_0$, *такое, что*

$$\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow M \models \varphi(\vec{x})$$

для всех $\vec{x} \in M$ (*M отражает* φ).

Более сильные варианты принципа отражения получаются, если:

(A) предполагая AC, потребовать, чтобы $|M| \leqslant \aleph_0 \cdot |M_0|$;

(B) потребовать, чтобы M было замкнуто относительно операций $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$;

(C) для данного множества B функций потребовать, чтобы M было замкнуто относительно каждой функции $f \in B$ и, если аксиома AC предполагается, чтобы $|M| \leqslant \aleph_0 \cdot |M_0| \cdot |B|$;

(D) потребовать, чтобы $M = V_\alpha$ для некоторого α; а также, чтобы α было предельным ординалом;

---

*) Таким способом можно определить кардинальные числа без помощи аксиомы выбора (но используя аксиому регулярности) кардинальным числом множества X будет тогда множество $\hat{\mathbf{C}}$, где $\mathbf{C} = \{Y\colon |Y| = |X|\}$.

(E) для данной теоремы Θ теории ZF потребовать, чтобы $M \models \Theta$.

Доказательство. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — список всех подформул φ. Применим лемму 30, чтобы получить M, для которого

$$\exists z \varphi_i \to (\exists z \in M)\, \varphi_i$$

при $i = 1, \ldots, n$*). Мы утверждаем, что M отражает каждую формулу φ_i. Это легко проверяется для атомарных формул и формул, полученных с помощью пропозициональных связок. Предположим, что M отражает $\varphi_i(\vec{x}, z)$, и докажем, что M отражает $\exists z \varphi_i$. Если $\vec{x} \in M$, то

$$\exists z \varphi_i \leftrightarrow (\exists z \in M)\, \varphi_i \leftrightarrow (\exists z \in M)\, [M \models \varphi_i] \leftrightarrow M \models \exists z \varphi_i.$$

Для доказательства усиленных вариантов принципа отражения нужно изменить построение S_n в лемме 30. Чтобы доказать (B), положим $S_{n+1} = \mathfrak{T}(S_n) \cup \{\mathfrak{F}(\vec{y}) : \vec{y} \in S_n\}$; в случае (C), $S_{n+1} = \mathfrak{T}(S_n) \cup \bigcup_{f \in B} f'' S_n$. Для доказательства (D) положим S_{n+1} равным наименьшему $V_\gamma \supseteq \mathfrak{T}(S_n)$. Усиление (A) очевидно. Для доказательства (E) просто потребуем, чтобы M отражало также формулу Θ.

Гёделевские операции.

Возможность замены схемы аксиом выделения конечным числом ее частных случаев была впервые отмечена Гёделем (см. [8]). Рассмотрим следующие восемь операций, называемых *гёделевскими операциями*:

$$\mathfrak{F}_1(X, Y) = \{X, Y\},$$
$$\mathfrak{F}_2(X, Y) = X - Y,$$
$$\mathfrak{F}_3(X, Y) = X \times Y,$$
$$\mathfrak{F}_4(X) = \operatorname{dom}(X),$$
$$\mathfrak{F}_5(X) = \in \cap X^2 = \{(u, v) : u, v \in X \wedge u \in v\},$$
$$\mathfrak{F}_6(X) = \{(a, b, c) : (b, c, a) \in X\},$$
$$\mathfrak{F}_7(X) = \{(a, b, c) : (c, b, a) \in X\},$$
$$\mathfrak{F}_8(X) = \{(a, b, c) : (a, c, b) \in X\}.$$

Гёделевские операции абсолютны для любого транзитивного класса, замкнутого относительно $\{\ \}$. (Абсолютность $\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_5$ указана выше, в (13) — (17); абсолютность $\mathfrak{F}_6 - \mathfrak{F}_8$ проверяется аналогично.)

*) и для любой переменной z, входящей свободно в φ_i. — *Прим. ред.*

Теорема 17. *Если класс* $\mathbf{M}$ *транзитивен, почти универсален и замкнут относительно гёделевских операций, то* $\mathbf{M}$ *является моделью* ZF.

Эта теорема следует из леммы 29 и леммы 31. Вторая часть леммы 31 используется в дальнейшем (раздел 14) и приведена здесь потому, что ее доказательство такое же, как доказательство первой части леммы.

Лемма 31. *Для данной формулы* φ *существует операция* $\mathfrak{F}$, *составленная из гёделевских операций, для которой*

(1) *если класс* $\mathbf{M}$ *транзитивен, почти универсален и замкнут относительно гёделевских операций* $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_8$, *то для всех* $X, \vec{p} \in \mathbf{M}$ *существуют* $X_1, \ldots, X_k \in \mathbf{M}$, *такие, что*

$$\{(u_1, \ldots, u_n)\colon u_1, \ldots, u_n \in X \wedge \mathbf{M} \models \varphi(\vec{u}, \vec{p})\} = \mathfrak{F}(X, \vec{p}, X_1, \ldots, X_k);$$

(2) *для всех* X, $\vec{p}$ *существуют ординалы* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, *такие, что*

$$\{(u_1, \ldots, u_n)\colon u_1, \ldots, u_n \in X \wedge \varphi(\vec{u}, \vec{p})\} = \mathfrak{F}(X, \vec{p}, V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_k}).$$

Доказательство. Индукцией по сложности формулы φ.

(I) $\varphi(u_1, \ldots, u_n, p_1, \ldots, p_m)$ — атомарная формула. Ограничимся двумя случаями

(A) $u_i \in p$

и

(B) $u_i \in u_j$,

потому что другие атомарные формулы устранимы, например:

$$p \in u_i \leftrightarrow \exists y\,(y = p \wedge y \in u_i),$$
$$p = u_i \leftrightarrow \forall y\,(y \in p \leftrightarrow y \in u_i).$$

Случай A. Положим

$$\mathfrak{F}(X, p) = X \times \ldots \times (p \cap X) \times \ldots \times X,$$

тогда

$$(u_1, \ldots, u_n) \in \mathfrak{F}(X, p) \leftrightarrow u_1, \ldots, u_n \in X \wedge u_i \in p.$$

(Заметим, что $p \cap X = p - (p - X) = \mathfrak{F}_2(p, \mathfrak{F}_2(p, X))$.)

Случай B. Используем индукцию по n. Пусть

$$Y = \{(u_1, \ldots, u_n)\colon u_1, \ldots, u_n \in X \wedge u_i \in u_j\} \text{ и } v = (u_1, \ldots, u_{n-2}).$$

Подслучай B1. $i = n-1$, $j = n$.

$$Y = \{(v, u_{n-1}, u_n)\colon v \in X^{n-2} \wedge (u_{n-1}, u_n) \in \mathfrak{F}_5(X)\}.$$

Положим

$$\mathfrak{F}(X) = \mathfrak{F}_6(\mathfrak{F}_5(X) \times X^{n-2})$$

и тогда $Y = \mathfrak{F}(X)$.

Подслучай B2. $i=n$, $j=n-1$. Так как

$$Y=\{(v, u_{n-1}, u_n)\colon\ v\in X^{n-2}\wedge(u_n, u_{n-1})\in\mathfrak{F}_5(X)\},$$

положим

$$\mathfrak{F}(X)=\mathfrak{F}_7(\mathfrak{F}_5(X)\times X^{n-2})$$

и тогда $Y=\mathfrak{F}(X)$.

Подслучай B3. $i,\ j\neq n$. По индуктивному предположению существует операция $\mathfrak{G}$, такая, что

$$\{(u_1, \ldots, u_{n-1})\colon\ u_1, \ldots, u_{n-1}\in X\wedge u_i\in u_j\}=\mathfrak{G}(X).$$

Теперь положим

$$\mathfrak{F}(X)=\mathfrak{G}(X)\times X$$

и тогда $\mathfrak{F}(X)=Y$.

Подслучай B4. $i,\ j\neq n-1$. По индуктивному предположению существует операция $\mathfrak{G}$, такая, что

$$\{(v, u_n)\colon\ v\in X^{n-2}\wedge u_n\in X\wedge u_i\in u_j\}=\mathfrak{G}(X).$$

Положим

$$\mathfrak{F}(X)=\mathfrak{F}_8(\mathfrak{G}(X)\times X),$$

и тогда

$$Y=\{(v, u_{n-1}, u_n)\in X^n\colon\ u_i\in u_j\}=\mathfrak{F}(X).$$

(II) Пропозициональные связки. Пусть $Y_i=\{(u_1, \ldots, u_n)\in X^n\colon\ \varphi_i(\vec{u})\}$, $i=1, 2$. Тогда

(A) $\{(u_1, \ldots, u_n)\in X^n\colon\ \neg\varphi_1(\vec{u})\}=X^n-Y_1=\mathfrak{F}_2(X^n, Y_1)$,

(B) $\{(u_1, \ldots, u_n)\in X^n\colon\ \varphi_1(\vec{u})\wedge\varphi_2(\vec{u})\}=Y_1\cap Y_2=\mathfrak{F}_2(Y_1, \mathfrak{F}_2(Y_1, Y_2))$.

(III) Квантор существования. Части (1) и (2) леммы трактуются теперь различно. Рассмотрим формулу

$$\exists v\varphi(u_1, \ldots, u_n, v)$$

и предположим, что существует операция $\mathfrak{G}$, для которой

(1) если $Z\in\mathbf{M}$, то существуют множества $Z_1, \ldots, Z_k\in\mathbf{M}$, такие, что

$$\{(\vec{u}, v)\in Z^{n+1}\colon\ \mathbf{M}\models\varphi(\vec{u}, v)\}=\mathfrak{G}(Z, Z_1, \ldots, Z_k);$$

(2) для каждого Z существуют ординалы $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, такие, что

$$\{(\vec{u}, v)\in Z^{n+1}\colon\ \varphi(\vec{u}, v)\}=\mathfrak{G}(Z, V_{\gamma_1}, \ldots, V_{\gamma_k}).$$

Пусть

$$\mathfrak{F}(X, X_1, \ldots, X_{k+1}) = X^n \cap \operatorname{dom}(\mathfrak{G}(X_{k+1}, X_1, \ldots, X_k));$$

докажем следующее:

(1) если $X \in \mathbf{M}$, то существуют такие $X_1, \ldots, X_{k+1} \in \mathbf{M}$, что

$$\{\vec{u} \in X^n\colon\ \mathbf{M} \models \exists v \varphi(\vec{u}, v)\} = \mathfrak{F}(X, X_1, \ldots, X_{k+1}),$$

и

(2) для каждого X существуют такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}$, что

$$\{\vec{u} \in X^n\colon\ \exists v \varphi(\vec{u}, v)\} = \mathfrak{F}(X, V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_{k+1}}).$$

Доказательство.

(1) Пусть $X \in \mathbf{M}$. Существует $S \supseteq X$, такое, что $S \subseteq \mathbf{M}$ и

$$(\exists v \in \mathbf{M})[\mathbf{M} \models \varphi(\vec{u}, v)] \leftrightarrow (\exists v \in S)[\mathbf{M} \models \varphi(\vec{u}, v)]$$

для всех $\vec{u} \in X$.

Так как класс $\mathbf{M}$ почти универсален, существует такое $X_{k+1} \in \mathbf{M}$, что $X_{k+1} \supseteq S$. Тогда для всех $\vec{u} \in X$

$$(\exists v \in \mathbf{M})[\mathbf{M} \models \varphi(\vec{u}, v)] \leftrightarrow (\exists v \in X_{k+1})[\mathbf{M} \models \varphi(\vec{u}, v)].$$

Пусть теперь $X_1, \ldots, X_k \in \mathbf{M}$ — множества, для которых $\mathfrak{G}(X_{k+1}, X_1, \ldots, X_k) \subseteq X_{k+1}^{n+1}$ и для всех $\vec{u}$, $v \in X_{k+1}$

$$\mathbf{M} \models \varphi(\vec{u}, v) \leftrightarrow (\vec{u}, v) \in \mathfrak{G}(X_{k+1}, X_1, \ldots, X_k).$$

Отсюда следует, что для всех $\vec{u} \in X$

$$u \in \mathfrak{F}(X, X_1, \ldots, X_{k+1}) \leftrightarrow u \in \operatorname{dom}(\mathfrak{G}(X_{k+1}, X_1, \ldots, X_k)) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists v \in X_{k+1})[(\vec{u}, v) \in \mathfrak{G}(X_{k+1}, X_1, \ldots, X_k)] \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists v \in X_{k+1})[\mathbf{M} \models \varphi(\vec{u}, v)] \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists v \in \mathbf{M})[\mathbf{M} \models \varphi(\vec{u}, v)].$$

(2) Для данного X существует такое α_{k+1}, что $V_{\alpha_{k+1}} \supseteq X$ и

$$\exists v \varphi(\vec{u}, v) \leftrightarrow (\exists v \in V_{\alpha_{k+1}})\varphi(\vec{u}, v)$$

для всех $\vec{u} \in X$.

Полагаем $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ такими, что

$$\mathfrak{G}(V_{\alpha_{k+1}}, V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_k}) = \{(\vec{u}, v) \in V_{\alpha_{k+1}}^{k+1}\colon\ \varphi(\vec{u}, v)\};$$

тогда

$$\mathfrak{F}(X, V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_{k+1}}) = \{u \in X^n\colon\ \exists v \varphi(\vec{u}, v)\}.$$

11. Конструктивные множества

Определение конструктивных множеств, а также результаты разделов 11 и 12 принадлежат Гёделю [8]. *Конструктивный универсум* L, класс всех конструктивных множеств, является наименьшей транзитивной моделью, содержащей все ординалы. Класс L удовлетворяет и аксиоме выбора, и обобщенной континуум-гипотезе. Мы получаем таким образом, что AC и GCH совместимы с ZF.

Для любого множества S *замыкание* S (обозначаемое $\mathrm{cl}(S)$) есть наименьшее множество $T \supseteq S$, замкнутое относительно гёделевских операций. Заметим, что

$$\mathrm{cl}(S) = g''\omega,$$

где

$$g(0) = S \quad \text{и} \quad g(n+1) = g(n) \cup \mathfrak{F}_1''(g(n) \times g(n)) \cup \ldots \cup \mathfrak{F}_8''(g(n)).$$

Определение.

$$L_0 = 0;$$

$$L_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} L_\beta, \quad \text{если } \alpha \text{ — предельный ординал;}$$

$$L_{\alpha+1} = \mathscr{P}(L_\alpha) \cap \mathrm{cl}(L_\alpha \cup \{L_\alpha\});$$

$$L = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} L_\alpha.$$

Очевидно, класс L транзитивен, почти универсален и замкнут относительно гёделевских операций; следовательно, L является моделью ZF. Элементы L называются *конструктивными множествами*. Заметим, что каждый ординал конструктивен.

Доказательства главных теорем о классе L основаны на том факте, что понятие конструктивности абсолютно; абсолютно не для любого транзитивного класса **M**, но если **M** обладает некоторыми свойствами (или, точнее, удовлетворяет некоторой теореме Θ теории ZF), то $X \in L_\alpha$ — абсолютное свойство X и α.

Пусть **M** — транзитивный класс. Если **M** обладает свойствами (A) — (E), перечисленными ниже, то формулы и операции (1) — (5) абсолютны для **M**.

(A) Класс **M** замкнут относительно гёделевских операций.

(1) Операции $\mathfrak{F}_1''(X \times X), \ldots, \mathfrak{F}_8''(X)$ абсолютны.

Доказательство. $x \in \mathfrak{F}_1''(X \times X) \leftrightarrow (\exists u, v \in X)[x = \mathfrak{F}_1(u, v)]$.

(B) Если $X \in \mathbf{M}$, то $\mathfrak{F}_1''(X \times X) \in \mathbf{M}, \ldots, \mathfrak{F}_8''(X) \in \mathbf{M}$.

(C) $\omega \in \mathbf{M}$.

Назовем функцию g — функцией замыкания множества X, если

$$\mathrm{dom}(g) = \omega \wedge g(0) = X \wedge (\forall n \in \omega)[g(n+1) = \\ = g(n) \cup \mathfrak{F}'(g(n) \times g(n)) \cup \ldots \cup \mathfrak{F}''_8(g(n))];$$

функция замыкания единственна для каждого X.

(2) Формула „g есть функция замыкания X“ абсолютна.

(D) Если $X \in \mathbf{M}$, то функция замыкания X принадлежит $\mathbf{M}$.

(3) Операция $\mathscr{P}(X) \cap \mathrm{cl}(X \cup \{X\})$ абсолютна.

Доказательство. $y \in \mathscr{P}(X) \cap \mathrm{cl}(X \cup \{X\}) \leftrightarrow y \subseteq X \wedge \exists g\,[g$ есть функция замыкания $X \cup \{X\} \wedge \exists n(y \in g(n))]$.

(E) Если $X \in \mathbf{M}$, то $\mathscr{P}(X) \cup \mathrm{cl}(X \cup \{X\}) \in \mathbf{M}$.

Функцию f назовем конструирующей $(\alpha+1)$-последовательностью, если

$$\mathrm{dom}(f) = \alpha + 1 \wedge f(0) = 0 \wedge (\forall \beta \in \mathrm{dom}\, f)[\beta \text{ — предельное} \rightarrow \\ \rightarrow f(\beta) = \mathrm{rng}(f \restriction \beta)] \wedge (\forall \beta \in \alpha)[f(\beta+1) = \mathscr{P}(f(\beta)) \cap \mathrm{cl}(f(\beta) \cup \{f(\beta)\})];$$

конструирующая $(\alpha+1)$-последовательность единственна для каждого α.

(4) Формула „f есть конструирующая $(\alpha+1)$-последовательность“ абсолютна.

(F) Если $\alpha \in \mathbf{M}$, то конструирующая $(\alpha+1)$-последовательность принадлежит $\mathbf{M}$.

(5) Формула $X \in \mathrm{L}_\alpha$ абсолютна.

Доказательство. $X \in \mathrm{L}_\alpha \leftrightarrow \exists f$ (f есть конструирующая $(\alpha+1)$-последовательность $\wedge X \in f(\alpha)$).

Существует предложение Θ*), являющееся теоремой ZF, такое, что транзитивный класс $\mathbf{M}$ обладает свойствами (A) — (E) тогда и только тогда, когда $\mathbf{M} \models \Theta$. Например, условие

„$\mathbf{M}$ замкнуто относительно $\mathfrak{F}_2$“

может быть выражено посредством

$$\mathbf{M} \models \forall X \forall Y \exists Z \forall u\,(u \in Z \leftrightarrow u \in X \wedge u \notin Y);$$

аналогично можно выразить условия (A) — (E). Получаем таким образом следующую теорему.

Теорема 18 (Гёдель). (i) *Если* $\mathbf{M} \models \Theta$, *то формула* $X \in \mathrm{L}_\alpha$ *абсолютна для* $\mathbf{M}$.

(ii) *Кроме того, если* $\mathbf{M}$ *содержит все ординалы, то „*X *конструктивно“ абсолютно для* $\mathbf{M}$.

*) т. е. Θ — формула без свободных переменных. — *Прим. перев.*

(iii) *В частности, „X конструктивно" абсолютно для* L *и, следовательно,* $L \models$ *каждое множество конструктивно.*

Следствие 1. *Если* $\mathbf{M}$ *— модель* ZF *и* $\mathbf{M} \supseteq On$, *то* $\mathbf{M} \supseteq L$.
2. $Con(ZF) \to Con(ZF + V = L)$, *где* $V = L$ *— аксиома конструктивности: каждое множество конструктивно.*

12. Совместимость AC и GCH

Аксиома конструктивности влечет AC и GCH; так как $V = L$ совместимо с ZF, то отсюда следует совместимость AC и GCH с ZF.

Теорема 19 (Гёдель). $V = L$ *влечет* AC.

Доказательство. Докажем, что существует определимое отображение $\mathbf{F}$ класса On на L, для которого формула $x = \mathbf{F}(\alpha)$ абсолютна. Это отображение дает вполне-упорядочение L. Начнем с того, что существует определимое, взаимно однозначное отображение $\mathbf{J}$ класса On на класс всех троек (i, α, β), где $i = 0, \ldots, 8$ и $\alpha, \beta \in On$; это отображение можно получить с помощью канонического вполне-упорядочения $On \times On$. Построим $\mathbf{F}$ по рекурсии. Пусть $\gamma \in On$ и $\mathbf{J}(\gamma) = (i, \alpha, \beta)$.

$$\mathbf{F}(\gamma) = \begin{cases} \mathfrak{F}_i(\mathbf{F}(\alpha), \mathbf{F}(\beta)), & \text{если } i = 1, 2, 3; \\ \mathfrak{F}_i(\mathbf{F}(\alpha)), & \text{если } i = 4, 5, 6, 7, 8; \\ L_\alpha, & \text{если } i = 0. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что если $\mathbf{M} \models \Theta$, то $x = \mathbf{F}(\alpha)$ абсолютно для $\mathbf{M}$.

Теорема 20 (Гёдель). $V = L$ *влечет* GCH.

Доказательство. Предположим $V = L$. Докажем, что если $X \subseteq \omega_\eta$, то $X \in L_{\omega_{\eta+1}}$; так как $|L_{\omega_{\eta+1}}| = \aleph_{\eta+1}$, мы получим $|\mathcal{P}(\omega_\eta)| = \aleph_{\eta+1}$.

Пусть $X \subseteq \omega_\eta$; существует такое β, что $X \in L_\beta$. В силу принципа отражения существует множество S, такое, что

(1) $S \models (A1) \wedge \Theta$,

(2) $\omega_\eta \subseteq S$, $X \in S$, $\beta \in S$,

(3) $|S| = \aleph_\eta$,

(4) $S \models (\beta$ — ординал $\wedge X \in L_\beta)$.

По теореме об изоморфизме существуют транзитивное множество M и $\in$-изоморфизм π между S и M. В силу транзитивности ω_η, отображение $\pi | \omega_\eta$ тождественно и поэтому $\pi(X) = X$. Так как

$$M \models \pi(\beta) \text{ есть ординал}$$

и свойство „быть ординалом“ абсолютно, то $\pi(\beta)$ — ординал, $\pi(\beta) = \alpha \in M$. Отсюда следует, что $\alpha \subseteq M$ и, поскольку $|M| = \aleph_\eta$, $\alpha < \omega_{\eta+1}$. Так как $M \models \pi(X) \in L_{\pi(\beta)}$, мы имеем $M \models X \in L_\alpha$. Кроме того, M удовлетворяет Θ и поэтому $X \in L_\alpha$ абсолютно для M; другими словами, $X \in L_\alpha$. Таким образом, $\mathcal{P}(\omega_\eta) \subseteq L_{\omega_{\eta+1}}$.

13. Теоремы о транзитивных моделях

В этом разделе рассматриваются некоторые результаты о транзитивных моделях ZF. Теорема 21 показывает, что существование недостижимого кардинала недоказуемо в ZFC. Из теоремы 22, принадлежащей Вопенке и Балчару [55], следует, что транзитивные модели ZFC определяются своими множествами ординалов. Остальная часть раздела посвящена обобщению понятия конструктивности. Это обобщение сделано Леви [21], Хайналом [19] и Шёнфилдом [41].

Определение. Кардинал $k > \aleph_0$ называется *(строго) недостижимым*, если k регулярен и $2^\lambda < k$ для всех $\lambda < k$.

Заметим, что недостижимый кардинал является слабо недостижимым; если GCH верна, то слабо недостижимый кардинал является недостижимым.

Лемма 32. *Если k — недостижимый кардинал, то $|V_\alpha| < k$ для всех $\alpha < k$.*

Доказательство. По индукции. Если α — предельный ординал, то $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$ и, предполагая $|V_\beta| < k$ для $\beta < \alpha$, имеем $|V_\alpha| < k$ в силу регулярности k. Если $|V_\alpha| = \lambda < k$, то $|V_{\alpha+1}| = |\mathcal{P}(V_\alpha)| = 2^\lambda < k$.

Лемма 33. *Если k — недостижимый кардинал, $\alpha < k$ и $f\colon V_\alpha \to V_k$, то $f''V_\alpha \in V_k$.*

Доказательство. Так как $|V_\alpha| < k$ и k регулярно, то существует $\beta < k$, для которого $f''V_\alpha \subseteq V_\beta$; поэтому $f''V_\alpha \in V_{\beta+1} \subseteq V_k$.

Теорема 21. *Если k — недостижимый кардинал, то V_k является моделью* ZFC.

Доказательство. Теорема является фактически схемой теорем ZFC:

$\forall k$ (k — недостижимый кардинал $\to V_k \models \varphi$) (φ — аксиома ZFC).

Легко проверить, что если $\alpha > \omega$ — предельный ординал, то V_α удовлетворяет всем аксиомам, за исключением, быть может,

аксиомы подстановки. Если кардинал k — недостижимый, то для доказательства выполнимости аксиомы подстановки в V_k нужно применить лемму 33.

Следствие. $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \to \mathrm{Con}$ (ZFC + „*не существует недостижимых кардиналов*“).

Доказательство. Формула „α есть недостижимый кардинал“ абсолютна для любого V_β. Пусть k — наименьший недостижимый кардинал, тогда

$$V_k \models \text{не существует недостижимых кардиналов.}$$

Лемма 34. *Отношение R является правильно построенным тогда и только тогда, когда существует функция f, область определения которой равна полю отношения R (т. е.* $\mathrm{dom}\, f = \mathrm{dom}\, R \cup \mathrm{rng}\, R$*), значениями f являются ординалы и*

$$(x, y) \in R \to f(x) < f(y).$$

Доказательство. (a) Пусть R — отношение и условие леммы выполняется. Пусть X — непустое подмножество поля R, и пусть y — элемент X, такой, что $f(y) \leqslant f(x)$ для всех $x \in X$; тогда $(x, y) \notin R$ для всех $x \in X$. Таким образом, R — правильно построенное отношение.

(b) Пусть R — правильно построенное отношение. Так же, как в доказательстве теоремы 15, положим $P_0 = 0$, $P_\alpha = \bigcup\limits_{\beta < \alpha} P_\beta$ для предельного α и $P_{\alpha+1} = \{x \in \text{поле } (R)\colon R_{-1}(x) \subseteq P_\alpha\}$. Пусть теперь $f(x)$ равно наименьшему α, для которого $x \in P_{\alpha+1}$.

Лемма 35. *Если класс $\mathbf{M}$ транзитивен, замкнут относительно гёделевских операций и $\mathbf{M} \models$ лемма 34, то формула „R есть правильно построенное отношение“ абсолютна для $\mathbf{M}$.*

Доказательство. По лемме 34,

$$R \text{ — п. п. отношение} \leftrightarrow \forall X \varphi(X) \leftrightarrow \exists f \psi(f),$$

где φ и ψ — абсолютные формулы:

$$\varphi(X) \leftrightarrow X \neq 0 \wedge X \subseteq \text{поле } (R) \to (\exists y \in X)(\forall z \in X)[(z, y) \notin R],$$

$$\psi(f) \leftrightarrow f \text{ есть функция} \wedge \mathrm{dom}(f) = \text{поле } (R) \wedge \mathrm{rng}(f) \text{ есть ординальное число} \wedge (\forall x, y \in \mathrm{dom}(f))[(x, y) \in R \to f(x) \in f(y)].$$

Если $\forall X \varphi(X, R)$, то $\mathbf{M} \models \forall X \varphi(X, R)$; если $\mathbf{M} \models \exists f \psi(f, R)$, то $\exists f \psi(f, R)$. Следовательно, отношение R — правильно построенное тогда и только тогда, когда $\mathbf{M} \models R$ — правильно построенное.

Теорема 22. *Пусть* $\mathbf{M}$ *и* $\mathbf{N}$ — *транзитивные модели* ZF *и* $\mathbf{M} \models \mathrm{AC}$. *Если* $\mathbf{M}$ *и* $\mathbf{N}$ *имеют одни и те же множества ординалов, то* $\mathbf{M} = \mathbf{N}$ [6]).

Доказательство. (a) $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ имеют одни и те же подмножества $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$. Пусть $\mathbf{F}$ — каноническое, взаимно однозначное отображение $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$ на On; $\mathbf{F}$ — абсолютно. Если $X \subseteq \mathrm{On} \times \mathrm{On}$ и $X \in \mathbf{M}$, то множество $Y = \mathbf{F}''X$ имеется и в $\mathbf{M}$, и в $\mathbf{N}$; следовательно, $X = \mathbf{F}_{-1}(Y)$ принадлежит $\mathbf{N}$.

(b) $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$. Пусть $X \in \mathbf{M}$. Так как $\mathbf{M} \models \mathrm{AC}$, существует взаимно однозначное отображение $f \in \mathbf{M}$ множества $\mathrm{TC}(\{X\})$ на некоторый ординал $k \in \mathbf{M}$. Пусть $R \in \mathbf{M}$ — следующее отношение на k:

$$(\alpha, \beta) \in R \leftrightarrow f(\alpha) \in f(\beta).$$

Отношение R — правильно построенное и экстенсиональное. Так как $R \subseteq \mathrm{On} \times \mathrm{On}$, то R имеется в $\mathbf{N}$. По лемме 35, правильная построенность является абсолютным свойством отношений и поэтому $\mathbf{N} \models R$ есть правильно построенное и экстенсиональное отношение. Если теперь применить теорему об изоморфизме в $\mathbf{N}$, то получим транзитивное множество $Q \in \mathbf{N}$, такое, что $(Q, \in)$ изоморфно (k, R). С другой стороны, (k, R) изоморфно транзитивному множеству $\mathrm{TC}(\{X\})$, так что $Q = \mathrm{TC}(\{X\})$. Следовательно, $Q \in \mathbf{N}$ и поэтому $X \in \mathbf{N}$.

(c) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{M}$. Доказываем по $\in$-индукции. Предполагая, что $X \in \mathbf{N}$ и $X \subseteq \mathbf{M}$, докажем $X \in \mathbf{M}$. Существует такое $Y \in \mathbf{M}$, что $Y \supseteq X$; действительно, так как $X \in \mathbf{N}$, то существует $\alpha \in \mathbf{N}$, для которого $X \subseteq \mathbf{V}_\alpha^{\mathbf{N}} = \mathrm{V}_\alpha \cap \mathbf{N}$ и, следовательно, $X \subseteq \mathrm{V}_\alpha \cap \mathbf{M} = \mathbf{V}_\alpha^{\mathbf{M}} \in \mathbf{M}$. Пусть $f \in \mathbf{M}$ — взаимно однозначная функция, отображающая Y на некоторый ординал $k \in \mathbf{M}$. Так как $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$, то f принадлежит $\mathbf{N}$ и $f''X \in \mathbf{N}$. Однако $f''X \subseteq \mathrm{On}$ и поэтому $f''X \in \mathbf{M}$. Теперь имеем $X = f_{-1}(f''X)$ и $X \in \mathbf{M}$.

Кардиналы в транзитивных моделях

Пусть $\mathbf{M}$ — транзитивная модель ZF. Следующие утверждения получаются из ранее доказанных результатов об абсолютности (предполагается, что X, Y, α принадлежат $\mathbf{M}$):

(1) $\mathscr{P}^{\mathbf{M}}(X) = \mathscr{P}(X) \cap \mathbf{M}$;

(2) $\mathbf{V}_\alpha^{\mathbf{M}} = \mathrm{V}_\alpha \cap \mathbf{M}$;

(3) если $\mathbf{M} \models |X| = |Y|$, то $|X| = |Y|$;

(4) если α — кардинал, то α — кардинал в $\mathbf{M}$ (т. е. $\mathbf{M} \models \alpha$ есть кардинал);

(5) $|\alpha| \leqslant |\alpha|^{\mathbf{M}}$;

(6) если α — предельный кардинал, то α — предельный кардинал в $\mathbf{M}$;

(7) $\mathrm{cf}(\alpha) \leqslant \mathrm{cf}^{\mathbf{M}}(\alpha)$;

(8) если α — регулярный кардинал, то α — регулярный кардинал в $\mathbf{M}$;

(9) если α — слабо недостижимый кардинал, то α — слабо недостижимый кардинал в $\mathbf{M}$;

(10) если α — недостижимый кардинал и $\mathbf{M} \models \mathrm{AC}$, то α — недостижимый кардинал в $\mathbf{M}$.

Относительная конструктивность

Пусть A — множество, положим

$$L_0[A] = 0;$$

$$L_\alpha[A] = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta[A], \text{ если } \alpha \text{ — предельный ординал;}$$

$$L_{\alpha+1}[A] = \mathscr{P}(L_\alpha[A]) \cap \mathrm{cl}(L_\alpha[A] \cup \{L_\alpha[A]\} \cup \{L_\alpha[A] \cap A\}),$$

$$L[A] = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} L_\alpha[A].$$

Теорема 23. *Класс* $L[A]$ *является моделью* ZFC.

Доказательство. Из транзитивности $L[A]$, почти универсальности и замкнутости относительно гёделевских операций следует, что $L[A]$ — модель ZF. Выполнимость AC в $L[A]$ является следствием леммы 39.

Лемма 36. *Если класс* $\mathbf{M}$ *транзитивен и* $\mathbf{M} \models \Theta$, *то* $X \in L_a[A]$ *абсолютно для* $\mathbf{M}$.

Доказательство. Лемма доказывается так же, как теорема 18.

Лемма 37. $A \cap L[A] \in L[A]$.

Доказательство. $A \cap L[A] = A \cap L_\alpha[A]$ для некоторого α; следовательно, $A \cap L[A] \in L_{\alpha+1}[A]$.

Лемма 38. *Пусть* $\mathbf{M}$ — *транзитивная модель* ZF *и* $\mathbf{M} \supseteq \mathrm{On}$. *Если* $A \cap \mathbf{M} \in \mathbf{M}$, *то*

$$L[A] = L[A \cap \mathbf{M}] \subseteq \mathbf{M}.$$

Доказательство. По индукции. Предполагая, что $L_\alpha[A] = L_\alpha[A \cap \mathbf{M}] \subseteq \mathbf{M}$, докажем, что $L_{\alpha+1}[A] = L_{\alpha+1}[A \cap \mathbf{M}] \subseteq \mathbf{M}$. По определению,

$$L_{\alpha+1}[A] = \mathscr{P}(L_\alpha[A]) \cap \mathrm{cl}(L_\alpha[A] \cup \{L_\alpha[A]\} \cup \{L_\alpha[A] \cap A\}),$$

и, так как $L_\alpha[A] \cap A = L_\alpha[A \cap \mathbf{M}] \cap A \cap \mathbf{M}$, получаем $L_{\alpha+1}[A] = L_{\alpha+1}[A \cap \mathbf{M}]$. По лемме 36 имеем $L_{\alpha+1}[A \cap \mathbf{M}] = L^{\mathbf{M}}_{\alpha+1}[A \cap \mathbf{M}] \subseteq \mathbf{M}$.

Следствие. $L[A] = L[\bar{A}]$, *где* $\bar{A} = A \cap L[A]$.

Доказательство. Положим $\mathbf{M} = \mathrm{L}[A]$.

Следствие. $\mathrm{L}[A] \models \exists X (\mathrm{V} = \mathrm{L}[X])$, *именно* $\mathrm{L}[A] \models \mathrm{V} = \mathrm{L}[\bar{A}]$.

Лемма 39. *Если* $\mathrm{V} = \mathrm{L}[A]$ *для некоторого* A, *то аксиома* AC *выполняется.*

Доказательство. Аналогично тому, как в доказательстве теоремы 19, построим вполне-упорядочение V, определимое через A.

Следствие. $\mathrm{L}[A] \models \mathrm{AC}$.

Лемма 40. *Если* $\mathrm{V} = \mathrm{L}[A]$, *то* $\mathrm{V} = \mathrm{L}[\bar{A}]$ *для некоторого* $\bar{A} \subseteq \mathrm{On}$.

Доказательство. Пусть f — взаимно однозначное отображение $\mathrm{TC}(\{A\})$ на некоторый кардинал k. Пусть R — следующее отношение на k:

$$(\alpha, \beta) \in R \leftrightarrow f(\alpha) \in f(\beta).$$

Те же рассуждения, что в доказательстве теоремы 22, дают $A \in \mathrm{L}[R]$. Пусть g — каноническое отображение $k \times k$ на k и $\bar{A} = g''R$. Ясно, что $A \in \mathrm{L}[\bar{A}]$; следовательно, $\mathrm{L}[\bar{A}] = \mathrm{V}$.

Лемма 41. *Предположим* $\mathrm{V} = \mathrm{L}[A]$. *Тогда существует* η_0, *такое, что для всех* $\eta \geqslant \eta_0$

$$2^{\aleph_\eta} = \aleph_{\eta+1}.$$

Доказательство. Лемма доказывается так же, как теорема 20. Предположим, что $A \subseteq \omega_{\eta_0}$ для некоторого η_0. Пусть $\eta \geqslant \eta_0$ и $X \subseteq \omega_\eta$; пусть β — ординал, для которого $X \in \mathrm{L}_\beta[A]$. Существует множество S, такое, что

(1) $S \models (\mathrm{A1}) \wedge \Theta$,

(2) $\omega_\eta \subseteq S$, $A \in S$, $X \in S$, $\beta \in S$,

(3) $|S| = \aleph_\eta$,

(4) $S \models (\beta - \text{ординал} \wedge X \in \mathrm{L}_\beta[A])$.

Теперь применяем теорему об изоморфизме и получаем $X \in \mathrm{L}_{\omega_{\eta+1}}[A]$.

Замечание. Полученный выше результат можно улучшить. Например, если $\mathrm{V} = \mathrm{L}[A]$ и $A \subseteq \omega_1$, тогда $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ и поэтому GCH выполняется.

Действительно, предположим $X \subseteq \omega$ и $X \in L_\beta[A]$. Существует такое S, что

(1) $S \models (A1) \wedge \Theta$,

(2) $\omega \subseteq S$, $A \in S$, $X \in S$, $\beta \in S$,

(3) $|S| = \aleph_0$,

(4) $S \models (\beta$ — ординал $\wedge\ X \in L_\beta[A])$,

(5) если $\xi < \omega_1$ и $\xi \in S$, то $\xi \subseteq S$.

Здесь используется усиленный вариант принципа отражения. Чтобы получить (5), изменим доказательство леммы 30: пусть $\xi < \omega_1$ — наименьший ординал, такой, что $S_n \cap \omega_1 = S_n \cap \xi$; тогда при построении S_{n+1} обеспечим включение $\xi \subseteq S_{n+1}$.

Применим теорему об изоморфизме: пусть M — транзитивное множество, изоморфное S, и π — изоморфизм S на M. В силу (5) существует $\xi < \omega_1$, такое, что $\omega_1 \cap S = \xi$. Очевидно, $\pi | \xi$ тождественно и $\pi(A) = A \cap \xi$. Таким образом, $M \models \pi(X) \in L_{\pi(\beta)}[\pi(A)]$ и $X \in L_\alpha[A \cap \xi]$ для некоторого $\alpha < \omega_1$. Теперь имеем

$$\mathscr{P}(\omega) \subseteq \bigcup_{\alpha < \omega_1} \bigcup_{\xi < \omega_1} L_\alpha[A \cap \xi],$$

и поэтому $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Понятие конструктивности можно еще обобщить следующим образом. Пусть U — семейство множеств, и пусть

$$L_0(U) = 0,$$

$$L_\alpha(U) = \bigcup_{\beta < \alpha} L_\beta(U), \text{ если } \alpha \text{ — предельное},$$

$$L_{\alpha+1}(U) = \mathscr{P}(L_\alpha(U)) \cap \mathrm{cl}(L_\alpha(U) \cup \{L_\alpha(U)\} \cup \{A \cap L_\alpha(U) \colon A \in U\}),$$

$$L(U) = \bigcup_{\alpha \in On} L_\alpha(U).$$

Класс $L(U)$ является моделью ZF. Однако нельзя доказать в общем случае, что $L(U) \models AC$. Действительно, предположим, что множество $U = \mathscr{P}(\omega)$ нельзя вполне упорядочить (см. разд. 25). Тогда $L(U) \models U$ не может быть вполне упорядочено.

14. Ординальная определимость

Первоначальная идея принадлежит Гёделю [7]), точное определение и основные результаты об ординальной определимости получены Вопенкой и Балчаром [57], Майхиллом и Скоттом [33].

Класс *ординально определимых* множеств (OD-множеств) определяется как класс

$$\mathrm{OD} = \mathrm{cl}(\{V_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{On}\}) = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} \mathrm{cl}(\{V_\beta\colon \beta < \alpha\}),$$

где $\mathrm{cl}(X)$ означает замыкание X относительно гёделевских операций.

Следующие утверждения характеризуют OD-множества и объясняют их название.

Утверждение I. *Существует определимое отображение класса* On *на* OD.

Доказательство. Существует каноническое вполне-упорядочение каждого множества $\mathrm{cl}(\{V_\beta\colon \beta < \alpha\})$.

Утверждение II. *Существует формула* $\varphi(u, v)$, *такая, что*

(a) $\forall\alpha(\{u\colon \varphi(u, \alpha)\} \in \mathrm{OD})$,

(b) $(\forall X \in \mathrm{OD})\,\exists\alpha\,[X = \{u\colon \varphi(u, \alpha)\}]$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{F}$ — определимое отображение On на OD и

$$\varphi(u, v) \leftrightarrow v \text{ — ординал} \wedge u \in \mathbf{F}(v).$$

Утверждение III. *Пусть* $\varphi(u, v_1, \ldots, v_n)$ — *формула. Для любых* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, *если*

$$X = \{u\colon \varphi(u, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\}$$

есть множество, то $X \in \mathrm{OD}$.

Доказательство. Если $X = \{u\colon \varphi(u, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\}$ — множество, тогда для некоторого β

$$X = \{u \in V_\beta\colon \varphi(u, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\}.$$

В силу леммы 31

$$X = \mathfrak{F}(V_\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, V_{\gamma_1}, \ldots, V_{\gamma_k}),$$

где $\mathfrak{F}$ — композиция гёделевских операций. Снова по лемме 31 существует операция $\mathfrak{G}$, такая, что для каждого α имеем

$$\alpha = \mathfrak{G}(V_\alpha, V_{\delta_1}, \ldots, V_{\delta_l});$$

здесь мы воспользовались тем, что

$$\alpha = \{x \in V_\alpha\colon x \text{ — ординал}\}.$$

Таким образом, существует операция $\mathfrak{H}$, составленная из гёделевских операций, для которой

$$X = \mathfrak{H}(V_\beta, V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n}, V_{\gamma_1}, \ldots, V_{\gamma_k}, V_{\delta_1}, \ldots)$$

и поэтому $X \in \mathrm{OD}$.

Заключение. Ординально определимые множества — это множества вида

$$X = \{u\colon \varphi(u, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\}.$$

Аналогично можно определить класс $\mathrm{OD}(A)$ множеств, *ординально определимых с помощью* A:

$$\mathrm{OD}(A) = \mathrm{cl}(\{V_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{On}\} \cup \{A\}).$$

Наследственные OD-множества.

Определение. Класс HOD всех наследственных OD-множеств состоит из элементов X, для которых $\mathrm{TC}(\{X\}) \subseteq \mathrm{OD}$.

Заметим, что множество может быть OD-множеством, но не HOD-множеством. Например, множество действительных чисел определимо, но некоторые действительные числа могут не быть OD-множествами.

Теорема 24. *Класс* HOD *является транзитивной моделью* ZFC *и* $\mathrm{HOD} \supseteq \mathrm{On}$.

Доказательство. Класс HOD, очевидно, транзитивен и замкнут относительно гёделевских операций. Для доказательства почти универсальности HOD покажем, что $V_\alpha \cap \mathrm{HOD} \in \mathrm{HOD}$ для каждого α.

В силу принципа индукции достаточно показать, что $V_\alpha \cap \mathrm{HOD} \in \mathrm{OD}$. Последнее верно потому, что $V_\alpha \cap \mathrm{HOD} = \{u\colon \varphi(u, \alpha)\}$, где

$$\varphi(u, \alpha) \leftrightarrow u \in V_\alpha \wedge (\forall z \in \mathrm{TC}(\{u\}))\, \exists \beta\, [z \in \mathrm{cl}(\{V_\gamma\colon \gamma < \beta\})].$$

Таким образом, класс HOD есть модель ZF. Чтобы проверить $\mathrm{HOD} \models \mathrm{AC}$, докажем существование для каждого α взаимно однозначной HOD-функции g, которая отображает $V_\alpha \cap \mathrm{HOD}$ в ординалы. Любая такая функция является подмножеством HOD, и поэтому достаточно найти $g \in \mathrm{OD}$. В силу утверждения I, существует взаимно однозначная функция f, определимая через α и отображающая $V_\alpha \cap \mathrm{OD}$ в ординалы. Положим $g = f \restriction (V_\alpha \cap \mathrm{HOD})$, тогда g является OD-функцией.

Следствие. $\mathrm{L} \subseteq \mathrm{HOD} \subseteq \mathrm{V}$.

Если $\mathrm{V} = \mathrm{L}$, то $\mathrm{L} = \mathrm{HOD} = \mathrm{V}$. Совместимы, однако, следующие соотношения: $\mathrm{L} = \mathrm{HOD} \neq \mathrm{V}$, $\mathrm{L} \neq \mathrm{HOD} = \mathrm{V}$, $\mathrm{L} \neq$

$\neq \mathrm{HOD} \neq \mathrm{V}$. Совместимость первого соотношения получена Леви [24] и будет доказана в разделе 24, совместимость двух других доказана Мак-Алуном [29].

15. Ультрастепени

Докажем основные теоремы о построении моделей ZFC с помощью ультрастепеней.

Определение. Пусть S — множество. Семейство $U \subseteq \mathscr{P}(S)$ называется *ультрафильтром* на S, если

$$(1)\ Y \supseteq X \in U \to Y \in U,$$

$$(2)\ X \in U \wedge Y \in U \to X \cap Y \in U,$$

$$(3)\ X \in U \leftrightarrow (S - X) \notin U.$$

Пусть фиксированы кардинал k и ультрафильтр U на $k = \{\alpha\colon \alpha < k\}$. Рассмотрим функции с областью определения k, т. е. элементы ${}^{k}\mathrm{V}$, и определим

$$f \in {}^{*}g \leftrightarrow \{\alpha\colon f(\alpha) \in g(\alpha)\} \in U,$$

$$f = {}^{*}g \leftrightarrow \{\alpha\colon f(\alpha) = g(\alpha)\} \in U.$$

Лемма 42. (a) $=^{*}$ *есть отношение эквивалентности на* ${}^{k}\mathrm{V}$. (b) *Если* $f \in {}^{*}g$ *и* $f_1 = {}^{*}f$, $g_1 = {}^{*}g$, *то* $f_1 \in {}^{*}g_1$.

Определение.

$$[f] = \{g\colon g = {}^{*}f \wedge \forall h\,[h = {}^{*}f \to \text{ранг}\ (h) \geqslant \text{ранг}\ (g)]\},$$

$$[f] \in {}^{*}[g] \leftrightarrow f \in {}^{*}g,$$

$$\mathrm{Ult} = \mathrm{Ult}_U(\mathrm{V}) = \{[f]\colon f \in {}^{k}\mathrm{V}\}.$$

Теорема 25. (i) *Ультрастепень* (Ult, $\in^{*}$) *является моделью* ZFC.

(ii) *Если* φ — *предложение, то*

$$((\mathrm{Ult}, \in^{*}) \models \varphi)$$ *тогда и только тогда, когда* φ

(т. е. ультрастепень (Ult, $\in^{*}$) *элементарно эквивалентна* V).

Теорема является следствием леммы 43, принадлежащей фактически Лосю [25].

Лемма 43. *Пусть* $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$ — *формула. Для* $f_1, \ldots, f_n \in {}^{k}\mathrm{V}$, $(\mathrm{Ult}, \in^{*}) \models \varphi([f_1], \ldots, [f_n])$ *тогда и только тогда, когда* $\{\alpha \in k\colon \varphi(f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha))\} \in U$.

Введем обозначение: будем писать $\varphi^{*}(f_1, \ldots, f_n)$ вместо $(\mathrm{Ult}, \in^{*}) \models \varphi([f_1], \ldots, [f_n])$.

Доказательство. Индукцией по сложности φ. (i) Если φ — атомарная формула, то утверждение леммы, очевидно, выполняется.

(ii) Пропозициональные связки

$$(\varphi(\vec{f}) \wedge \psi(\vec{f}))^* \leftrightarrow \varphi^*(\vec{f}) \wedge \psi^*(\vec{f}) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \{\alpha \in k\colon \varphi(\vec{f}(\alpha))\} \in U \wedge \{\alpha \in k\colon \psi(\vec{f}(\alpha))\} \in U \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \{\alpha \in k\colon \varphi\} \cap \{\alpha \in k\colon \psi\} \in U \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \{\alpha \in k\colon \varphi(\vec{f}(\alpha)) \wedge \psi(\vec{f}(\alpha))\} \in U.$$

$$(\neg\varphi(\vec{f}))^* \leftrightarrow \neg\varphi^*(\vec{f}) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \{\alpha \in k\colon \varphi(\vec{f}(\alpha))\} \notin U \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow k - \{\alpha \in k\colon \varphi\} \in U \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \{\alpha \in k\colon \neg\varphi(\vec{f}(\alpha))\} \in U.$$

(iii) Квантор существования. Предполагая, что

$$\varphi^*(f, g) \leftrightarrow \{\alpha \in k\colon \varphi(f(\alpha), g(\alpha))\} \in U,$$

докажем

$$(*) \qquad (\exists f \in {}^k\mathrm{V})\,\varphi^*(f, g) \leftrightarrow \{\alpha \in k\colon \exists x \varphi(x, g(\alpha))\} \in U.$$

Если левая часть эквивалентности (*) верна, то существует функция f, для которой

$$\{\alpha \in k\colon \varphi(f(\alpha), g(\alpha))\} \in U,$$

и, так как

$$\{\alpha \in k\colon \exists x \varphi(x, g(\alpha))\} \supseteq \{\alpha \in k\colon \varphi(f(\alpha), g(\alpha))\},$$

получаем правую часть (*). Если верна правая часть (*), определим функцию $f \in {}^k\mathrm{V}$ следующим образом: если $\exists x \varphi(x, g(\alpha))$, то $f(\alpha)$ равно некоторому x, такому, что $\varphi(x, g(\alpha))$; в противном случае значение $f(\alpha)$ произвольно. Теперь мы имеем

$$\{\alpha\colon \varphi(f(\alpha), g(\alpha))\} = \{\alpha\colon \exists x \varphi(x, g(\alpha))\},$$

и потому верна левая часть (*).

Определение. Для любого x *постоянная* функция $c_x \in {}^k\mathrm{V}$ определяется равенством $c_x(\alpha) = x$ для всех $\alpha \in k$; пусть $i(x) = [c_x]$.

Теорема 26. *Пусть* φ *— формула. Для любых* $x_1, \ldots, x_n$

$$\varphi^*(i(x_1), \ldots, i(x_n)) \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

(i *— элементарное вложение* V *в* (Ult, $\in^*$)).

Доказательство. Доказывается с помощью леммы 43.

Естественный вопрос: является ли ультрастепень правильно построенной, т. е. является ли отношение $\in^*$ на Ult правильно построенным? Так как $\{[g]: g^* \in f\}$ есть множество для каждой функции $f \in {}^k\mathrm{V}$, то $(\mathrm{Ult}, \in^*)$ правильно построено тогда и только тогда, когда не существует бесконечной последовательности $f_0 \ni^* f_1 \ni^* f_2 \ni^* \ldots$.

Определение. Ультрафильтр U называется *счетно полным*, если для каждого подмножества $\{S_n: n \in \omega\} \subseteq U$, $\bigcap_{n\in\omega} S_n \in U$.

Теорема 27. *Ультрастепень* $(\mathrm{Ult}_U, \in^*)$ *правильно построена тогда и только тогда, когда* U *— счетно полный ультрафильтр.*

Доказательство. (a) Пусть U — счетно полный ультрафильтр, и предположим, что существует бесконечная последовательность $f_0 \ni^* f_1 \ni^* f_2 \ni^* \ldots$. Пусть $S_n = \{\alpha \in k: f_n(\alpha) \ni f_{n+1}(\alpha)\}$. Так как $S_n \in U$ для каждого n, то $\bigcap_{n\in\omega} S_n \in U$. Если $\alpha \in \bigcap_{n\in\omega} S_n$, тогда $f_0(\alpha) \ni f_1(\alpha) \ni f_2(\alpha) \ni \ldots$; противоречие.

(b) Предположим, что ультрафильтр U не является счетно полным. В этом случае существует семейство $\{X_n: n \in \omega\}$ попарно непересекающихся подмножеств k, таких, что $X_n \notin U$ для любого n и $\bigcup_{n\in\omega} X_n = k$. Для $n \in \omega$ пусть f_n — следующая функция:

$$f_n(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha \in X_m \text{ и } m \leqslant n; \\ m - n, & \text{если } \alpha \in X_m \text{ и } m > n. \end{cases}$$

Очевидно, $f_0 \ni^* f_1 \ni^* f_2 \ni^* \ldots$.

Пусть U — ультрафильтр на ω, содержащий все множества вида $\{n \in \omega: n \geqslant n_0\}$ (существование U обеспечивается леммой 44 (iv)). Ультрафильтр U не является счетно полным; следовательно, соответствующая ультрастепень не является правильно построенной.

Если $U = \{X \subseteq k: \alpha_0 \in X\}$, где α_0 — некоторый элемент k, то U называется *тривиальным* ультрафильтром на k. Если ультрафильтр U тривиален, то ультрастепень $(\mathrm{Ult}_U, \in^*)$ изоморфна V.

Нетривиальные счетно полные ультрафильтры существуют далеко не для каждого k. Наименьший кардинал, для которого такой ультрафильтр существует, очень большой; в частности, недостижимый. Один из основных результатов об ультрастепенях состоит в следующем [8]).

Теорема 28 (Скотт [37]). *Если* $\mathrm{V} = \mathrm{L}$, *то ни для какого кардинала* k *не существует нетривиального счетно полного ультрафильтра на* k.

Доказательство. Пусть $V = L$ и k — наименьший кардинал, на котором существует нетривиальный счетно полный ультрафильтр U. Тогда для любого $\gamma < k$ имеем $\gamma \notin U$; в противном случае семейство $\{X \cap \gamma\colon X \in U\}$ было бы нетривиальным счетно полным ультрафильтром на γ.

Ультрастепень $(\mathrm{Ult}_U, \in^*)$ правильно построена и, следовательно, изоморфна транзитивной модели $\mathbf{M}$; пусть π — изоморфизм между $(\mathrm{Ult}_U, \in^*)$ и $\mathbf{M}$. Так как $V = L$, то $L = \mathbf{M} = V$. Функция j, определенная равенством $j(x) = \pi(c_x)$, является элементарным вложением V в V; т. е. $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ выполняется тогда и только тогда, когда $\varphi(j(x_1), \ldots, j(x_n))$ выполняется, где φ — произвольная формула. Ограничение j на On есть, очевидно, сохраняющая порядок функция из On в On; следовательно, $j(\alpha) \geqslant \alpha$ для любого α.

Пусть $\mathrm{id} \in {}^kV$ — функция, определенная равенством $\mathrm{id}(\alpha) = \alpha$, где $\alpha < k$. Тогда $j(\gamma) < \pi(\mathrm{id})$ для $\gamma < k$, потому что $\{\alpha \in k\colon \gamma < \mathrm{id}(\alpha)\} = k - \gamma \in U$. Так как $\pi(\mathrm{id}) < j(k)$, то получаем $j(k) > k$. Используем тот факт, что j — элементарное вложение: k — наименьший кардинал, на котором существует нетривиальный счетно полный ультрафильтр, поэтому $j(k)$ также наименьший кардинал, на котором существует нетривиальный счетно полный ультрафильтр; противоречие.

Закончим этот раздел следующим замечанием. Пусть $\mathbf{M}$ — модель ZFC; рассмотрим функции $f \in \mathbf{M}$, область определения которых равна кардиналу $k \in \mathbf{M}$. Пусть U — ультрафильтр на k (необязательно принадлежащий $\mathbf{M}$). Положим

$$f \in^* g \leftrightarrow \{\alpha \in k\colon f(\alpha) \in g(\alpha)\} \in U,$$
$$f =^* g \leftrightarrow \{\alpha \in k\colon f(\alpha) = g(\alpha)\} \in U.$$

Определим множества $[f]$ и $\mathrm{Ult}_U(\mathbf{M})$ — класс всех $[f]$, где $f \in \mathbf{M}$, $f\colon k \to \mathbf{M}$. Теперь имеем

$(\mathrm{Ult}(\mathbf{M}) \in^*) \models \varphi(\vec{f})$ тогда и только тогда,

когда $\{\alpha \in k\colon \mathbf{M} \models \varphi(\vec{f}(\alpha))\} \in U$.

Модель $(\mathrm{Ult}(\mathbf{M}), \in^*)$ элементарно эквивалентна $\mathbf{M}$, i — элементарное вложение $\mathbf{M}$ в $(\mathrm{Ult}(\mathbf{M}), \in^*)$.

16. Замечания о полных булевых алгебрах

В этом разделе сформулированы некоторые основные понятия теории булевых алгебр, детальное изложение которой имеется в [42]. Теорема 29, доказанная Мак-Нейлом [26], представляет собой обобщение метода сечений Дедекинда (теорема 8).

Булевой алгеброй (б. а.) называется алгебра $(B, +, \cdot, -, 1, 0)$ с бинарными операциями $+$ и $\cdot$, унарной операцией $-$, константами 1 и 0, для элементов которой выполняются равенства

$$u + u = u; \qquad u \cdot u = u;$$
$$u + v = v + u; \qquad u \cdot v = v \cdot u;$$
$$u + (v + w) = (u + v) + w; \qquad u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w;$$
$$(u + v) \cdot w = (u \cdot w) + (v \cdot w);$$
$$(u \cdot v) + w = (u + w) \cdot (v + w);$$
$$u + (-u) = 1; \qquad u \cdot (-u) = 0;$$
$$u \cdot 1 = u; \qquad u + 0 = u;$$
$$-(u + v) = -u \cdot -v; \qquad -(u \cdot v) = -u + -v;$$
$$--u = u.$$

Если положить

$$u \leqslant v \leftrightarrow u = v \cdot u,$$

тогда отношение $\leqslant$ является частичным упорядочением B и $+$, $\cdot$, $-$, 1, 0 определимы посредством $\leqslant$:

$a + b =$ н. в. г. $\{a, b\}$, $\qquad a \cdot b =$ н. н. г. $\{a, b\}$,

$1 =$ наибольший элемент B, $\qquad 0 =$ наименьший элемент B,

$-u =$ единственное v, такое, что $u + v = 1$ и $u \cdot v = 0$.

В этом случае $(B, \leqslant)$ также называем булевой алгеброй.

Булева алгебра B является *полной* (п. б. а.), если каждое непустое подмножество $X \subseteq B$ имеет н. в. г. ΣX и н. н. г. ΠX. Для определенности положим $\Sigma 0 = 0$ и $\Pi 0 = 1$.

Пусть $(P, <)$—частично упорядоченное множество. Назовем элементы p и q *совместимыми*, если существует r, такое, что $r \leqslant p$ и $r \leqslant q$. Частичное упорядочение $<$ называется *отделимым*, если для всех p и q, таких, что $p \not\leqslant q$, существует $r \leqslant p$, несовместимое с q.

Теорема 29А. *Для каждого частично упорядоченного множества $(P, <)$ существует единственное (с точностью до изоморфизма) отделимое ч. у. множество $(Q, <)$ и такой гомоморфизм h, отображающий P на Q, что для всех $p, q \in P$*

$$p, q \text{ совместимы в } P \leftrightarrow hp, hq \text{ совместимы в } Q.$$

Доказательство. Пусть для $p, q \in P$

$$p \leqslant q \leftrightarrow (\forall x \leqslant p)[x, q \text{ совместимы}].$$

Отношение $\leqslant$ рефлексивно и транзитивно, так что $p \leqslant q \wedge q \leqslant p$ есть отношение эквивалентности. Пусть Q — множество всех

классов эквивалентности $\bar{p}$ и $\bar{p} \leqslant \bar{q}$, если $p \leqslant q$. Пусть h — функция из P в Q и $hp = \bar{p}$ для всех $p \in P$. Отношение $\leqslant$ на Q является отделимым частичным упорядочением и h — гомоморфизм; p, q совместимы в P тогда и только тогда, когда hp, hq совместимы в Q.

Для доказательства единственности заметим, что отношение $\leqslant$ в отделимом ч. у. множестве $(Q, \leqslant)$ определяется в терминах совместимости:

$$x \leqslant y \leftrightarrow \forall z\,(z,\ x \text{ совместимы} \rightarrow z,\ y \text{ совместимы}).$$

Следовательно, если g — отображение отделимого множества Q_1 на отделимое Q_2, такое, что

$$x,\ y \text{ — совместимы в } Q_1 \leftrightarrow gx,\ gy \text{ совместимы в } Q_2,$$

тогда g — изоморфизм. Используя этот факт, получаем единственность.

Определение. Множество $A \subseteq P$ *плотно* в ч. у. множестве $(P, \leqslant)$, если для каждого $p \in P$ существует такое $a \in A$, что $a \leqslant p$.

Пусть $(B, \leqslant)$ — полная булева алгебра и $P = B - \{0\}$. Ненулевые элементы u, $v \in B$ назовем *совместимыми* в B, если они совместимы в $(P, \leqslant)$, т. е. если $u \cdot v \neq 0$. Аналогично, $A \subseteq B$ *плотно* в B, когда $0 \notin A$ и A плотно в $(P, \leqslant)$. Заметим, что $(P, \leqslant)$ — отделимое ч. у. множество.

Теорема 29B. *Если $(Q, \leqslant)$ — отделимое ч. у. множество, то существует единственная (с точностью до изоморфизма) полная булева алгебра $(B, \leqslant)$, для которой*

(1) $\leqslant$ *и* $\leqslant$ *совпадают на* Q,

(2) Q *плотно в* B.

Доказательство. Множество $A \subseteq Q$ является *сечением* Q, если $y \leqslant x \in A$ влечет $y \in A$. Пусть $[z] = \{x \in Q\colon x \leqslant z\}$ для всех $z \in Q$. Назовем элемент $x \in Q$ *близким к* $A \subseteq Q$, если $[y] \cap A \neq 0$ для каждого $y \leqslant x$, и пусть $\bar{A} = \{x \in Q\colon x$ — элемент, близкий к $A\}$. Сечение u *регулярно*, если каждое $x \in P$, близкое к u, принадлежит u.

Справедливы утверждения:

(1) $[r]$ — регулярное сечение для каждого $r \in Q$;

(2) пересечение любого семейства регулярных сечений есть регулярное сечение;

(3) $\bar{A}$ — регулярное сечение для каждого $A \subseteq Q$;

(4) если $u \supseteq A$ — регулярное сечение, то $u \supseteq \bar{A}$.

Пусть теперь B — множество регулярных сечений, и для $u, v \in B$ определим

$$u \cdot v = u \cap v,$$
$$u + v = \overline{u \cup v},$$
$$-u = \{x \in Q\colon [x] \cap u = 0\}.$$

Предоставляем читателю проверить, что $(B, \subseteq)$ — полная б. а. с операциями $+$, $\cdot$, $-$ и что Q, 0 являются единичным и нулевым элементами B. Функция e на Q, определенная равенством $e(z) = [z]$, является вложением $(Q, \leqslant)$ в $(B, \subseteq)$ и $e''Q$ плотно в B.

Для доказательства единственности предположим, что Q плотно в п. б. а. B_1, а также в п. б. а. B_2. Тогда функция

$$g(u) = \Sigma^{B_2}\{x \in Q\colon x \leqslant u\} \qquad (u \in B_1)$$

есть изоморфизм между B_1 и B_2.

Следствие. *Если п. б. а. B_1 и B_2 имеют изоморфные плотные подмножества, то B_1 и B_2 изоморфны.*

Для частично упорядоченного множества $(P, \leqslant)$ можно, используя теоремы 29A и 29B, построить единственную п. б. а. B и гомоморфизм e, такие, что

(1) p, q совместимы в P тогда и только тогда, когда ep, eq совместимы в B;
(2) $e''P$ плотно в B.

Обозначим указанную п. б. а. через $\mathrm{RO}(P)$ и назовем *e естественным гомоморфизмом* P в $\mathrm{RO}(P)$. Другое возможное построение $\mathrm{RO}(P)$ состоит в определении топологии на P, в которой за базисные открытые множества принимаются множества $[p] = \{x \in P\colon x \leqslant p\}$, и тогда п. б. а. регулярных открытых множеств будет $\mathrm{RO}(P)$.

Определение. Пусть B — б. а. Множество $F \subseteq B$ есть *фильтр* на B, если

(a) $u, v \in F \to u \cdot v \in F$,
(b) $u \geqslant v \in F \to u \in F$,
(c) $1 \in F$, $0 \notin F$.

(Если S — множество и F — фильтр на б. а. $(\mathscr{P}(S), \subseteq)$, то F называется фильтром на S.)

Фильтр F называется *ультрафильтром* (у. ф.), если

(d) $u \in F$ или $-u \in F$ для каждого $u \in B$.

Множество $I \subseteq B$ есть *идеал* на B, если

(a) $u, v \in I \to u + v \in I$,
(b) $u \leqslant v \in I \to u \in I$,
(c) $0 \in I$, $1 \notin I$.

Идеал I называется *главным идеалом*, если

(d) $u \in I$ или $-u \in I$ для каждого $u \in B$.

Лемма 44. (i) *Фильтр F на B является ультрафильтром тогда и только тогда, когда F является $\subseteq$-максимальным фильтром на B. Идеал является главным идеалом тогда и только тогда, когда является максимальным идеалом.*

(ii) *Если F — фильтр, то $\{-u\colon u \in F\}$ — идеал; если I — идеал, то $\{-u\colon u \in I\}$ — фильтр.*

(iii) *Если F — у. ф., то $B - F$ есть главный идеал; если I — главный идеал, то $B - I$ есть у. ф.*

(iv) *Для каждого фильтра F на B существует у. ф. F_1, такой, что $F \subseteq F_1$.*

Доказательство. (iv) Нужно применить (i) и принцип максимальности.

17. Метод форсинга и булевозначные модели

Метод форсинга, излагаемый в этом разделе, является основным для многих результатов о непротиворечивости. Этот метод был предложен П. Коэном [2, 3] для доказательства независимости континуум-гипотезы и аксиомы выбора. Излагаемый здесь обобщенный вариант метода форсинга, в котором используются булевозначные модели, принадлежит Скотту, Соловею [38] и Вопенке [54].

В этом разделе через $\mathfrak{M}$ обозначается транзитивная модель ZFC, *исходная модель*.

Пусть $(B, \leqslant)$ — полная булева алгебра в $\mathfrak{M}$, т. е. B — б. а., $B \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} \models B$ — полная алгебра. Для такой алгебры ΣA и ΠA существуют при условии, что $A \subseteq B$ и $A \in \mathfrak{M}$.

Определение. Ультрафильтр G на B называется $\mathfrak{M}$-*генерическим* у. ф. на B, если

(*) $\qquad A \subseteq G$ и $A \in \mathfrak{M}$ влечет $\Pi A \in G$.

Генерический у. ф. в общем случае не принадлежит модели $\mathfrak{M}$. (*Упражнение.* Если $G \in \mathfrak{M}$, то ΠG — атом B.)

Подмножество $A \subseteq B$ является *разбиением* B, когда $\Sigma A = 1$ и $u \cdot v = 0$ для $u \neq v \in A$. Условие (*) может быть заменено

условием

(**) если $A \in \mathfrak{M}$ — разбиение B, то существует такое (единственное) $u \in A$, что $u \in G$.

Рассмотрим частично упорядоченное множество $(P, <) \in \mathfrak{M}$. Назовем элементы P *вынуждающими условиями* и будем говорить, что p *сильнее* q, когда $p \leqslant q$.

Определение. Множество $G \subseteq P$ называется *$\mathfrak{M}$-генерическим* множеством условий, если

(a) $y \geqslant x \in G \to y \in G$,

(b) элементы G попарно совместимы,

(c) если D плотно в P и $D \in \mathfrak{M}$, то $D \cap G \neq 0$.

Лемма 45. *В $\mathfrak{M}$ пусть $(P, <)$ — ч. у. множество и $B = \mathrm{RO}(P)$ с естественным гомоморфизмом e. Тогда*

(1) *если G есть $\mathfrak{M}$-генерический у. ф. на B, то $e_{-1}(G)$ есть $\mathfrak{M}$-генерическое подмножество P,*

(2) *если G_1 есть $\mathfrak{M}$-генерическое подмножество P, то $\{u \in B\colon (\exists p \in G_1)[e(p) \leqslant u]\}$ есть $\mathfrak{M}$-генерический у. ф. на B,*

(3) *операции в (1) и (2) взаимно обратны.*

Доказательство. Нужно проверить свойства в определении генеричности. Заметим, что G определимо через G_1 и элементы $\mathfrak{M}$, и наоборот.

Пример генерического множества условий.

Пусть P состоит из всех конечных последовательностей ординалов $\alpha < \omega_1^{\mathfrak{M}}$; p сильнее q, если $p \supseteq q$. Пусть G — генерическое множество условий. Тогда

(1) если $p, q \in G$, то $p \supseteq q$ или $q \supseteq p$ (в силу (b)),

(2) $(\forall \alpha < \omega_1^{\mathfrak{M}})(\exists p \in G)[\alpha \in \mathrm{rng}(p)]$.

Действительно, пусть $D_\alpha = \{p\colon \alpha \in \mathrm{rng}(p)\}$. Для каждого q существует $p \in D_\alpha$, которое сильнее q; следовательно, D_α плотно в P (также $D_\alpha \in \mathfrak{M}$). В силу (c), $D_\alpha \cap G \neq 0$. Аналогичное рассуждение дает

(3) $\forall n (\exists p \in G)[n \in \mathrm{dom}(p)]$.

Полагаем $f = \bigcup G$; нетрудно видеть, что f отображает ω на $\omega_1^{\mathfrak{M}}$. Следовательно, в каждой транзитивной модели $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}$, содержащей генерическое множество определенных выше вынуждающих условий, ординал $\omega_1^{\mathfrak{M}}$ будет счетным.

Булевозначные модели

В применениях метода форсинга используются произвольные множества вынуждающих условий, но для развития теории можно ограничиться, в виду теоремы 29 и леммы 45, полными булевыми алгебрами.

До окончания доказательства теоремы 31 все построения будут происходить в модели $\mathfrak{M}$.

Определение. *Булевозначный универсум.*

$$\mathfrak{M}_0^B = 0,$$

$$\mathfrak{M}_\alpha^B = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{M}_\beta^B, \text{ если } \alpha \text{ — предельный ординал,}$$

$$\mathfrak{M}_{\alpha+1}^B = \{x\colon x \text{ — функция, } \operatorname{dom}(x) \subseteq \mathfrak{M}_\alpha^B \text{ и } \operatorname{rng}(x) \subseteq B\}^*),$$

$$\mathfrak{M}^B = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} \mathfrak{M}_\alpha^B.$$

Существует естественное вложение $\check{}$ универсума ($\mathfrak{M}$) в булевозначный универсум.

Определим $\check{}$ по $\in$-рекурсии:

(a) $\check{0} = 0$,

(b) $\check{x}$ есть элемент $\mathfrak{M}^B$ с областью $\{\check{y}\colon y \in x\}$ и $\check{x}(\check{y}) = 1$ для всех $y \in x$.

Определение. *Булевы значения* $\|x \in y\|$, $\|x = y\|$ для $x, y \in \mathfrak{M}^B$.

Определение дается рекурсией по $(\rho(x), \rho(y))$ при каноническом вполне-упорядочении $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$, где $\rho(x)$ есть наименьшее α, такое, что $x \in \mathfrak{M}_{\alpha+1}^B$.

Для $u, v \in B$ пусть $u \Rightarrow v = -u + v$ (сравните с $\varphi \to \psi \leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$). Полагаем

$$\|x \in y\| = \sum_{z \in \operatorname{dom}(y)} (y(z) \cdot \|z = x\|),$$

$$\|x = y\| = \prod_{z \in \operatorname{dom}(x)} (x(z) \Rightarrow \|z \in y\|) \cdot \prod_{z \in \operatorname{dom}(y)} (y(z) \Rightarrow \|z \in x\|).$$

(Сравните с $x \in y \leftrightarrow (\exists z \in y)[z = x]$ и $x = y \leftrightarrow (\forall z \in x)[z \in y] \wedge (\forall z \in y)[z \in x]$.)

Доказательства следующих двух лемм нетрудны, но длинные и малоинтересные, и предоставляются читателю [9]).

Лемма 46.

(i) $\|x = x\| = 1$,

(ii) $x(y) \leqslant \|y \in x\|$,

(iii) $\|x = y\| = \|y = x\|$,

(iv) $\|x = y\| \cdot \|y = z\| \leqslant \|x = z\|$,

(v) $\|x = z\| \cdot \|x \in y\| \leqslant \|z \in y\|$,

(vi) $\|x = z\| \cdot \|y \in x\| \leqslant \|y \in z\|$.

*) Заметим, что $\mathfrak{M}_1^B = \{0\}$, так как пустое множество есть функция, $\operatorname{dom}(0) = 0 \subseteq \mathfrak{M}_1^B$ и $\operatorname{rng}(0) = 0 \subseteq B$. — *Прим. ред.*

Для любой формулы φ с переменными, область изменения которых $\mathfrak{M}^B$, определим булево значение φ следующим образом:

$$\|\neg\varphi\| = -\|\varphi\|,$$
$$\|\varphi\wedge\psi\| = \|\varphi\|\cdot\|\psi\|,$$
$$\|\varphi\vee\psi\| = \|\varphi\|+\|\psi\|,$$
$$\|\varphi\to\psi\| = \|\varphi\|\Rightarrow\|\psi\|,$$
$$\|\forall x\varphi\| = \prod_{x\in\mathfrak{M}^B}\|\varphi(x)\|,$$
$$\|\exists x\varphi\| = \sum_{x\in\mathfrak{M}^B}\|\varphi(x)\|.$$

Лемма 47. (a) $\|x=y\|\cdot\|\varphi(x)\|\leqslant\|\varphi(y)\|$,

(b) $\|(\exists y\in x)\varphi(y)\| = \sum_{y\in\mathrm{dom}(x)}(x(y)\cdot\|\varphi(y)\|)$,

$$\|(\forall y\in x)\varphi(x)\| = \prod_{y\in\mathrm{dom}(x)}(x(y)\Rightarrow\|\varphi(y)\|).$$

Доказательство. Применить лемму 46. [10]).

Пусть φ — формула. Если $x_1, \ldots, x_n\in\mathfrak{M}^B$, то $\mathfrak{M}^B\models\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (φ *значима* в $\mathfrak{M}^B$) означает, что $\|\varphi(x_1, \ldots, x_n)\| = 1$.

Теорема 30. *Если* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *доказуема в исчислении предикатов, то* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *значима в* $\mathfrak{M}^B$ *при любых* $x_1, \ldots, x_n\in\mathfrak{M}^B$.

Доказательство теоремы, во всяком случае довольно техническое, не связано с темой этих лекций и потому не приводится; см. [35][11]).

Теорема 31. *Все аксиомы* ZFC *значимы в* $\mathfrak{M}^B$.

Доказательство.

(A1) Аксиома экстенсиональности. Аксиома значима в силу леммы 46.

Чтобы проверить значимость (A2) — (A8) в $\mathfrak{M}^B$, докажем предварительно следующую лемму.

Лемма 48. *Если* $S\subseteq\mathfrak{M}^B$, *то существует* $Y\in\mathfrak{M}^B$, *такое, что* $\|u\in Y\| = 1$ *для каждого* $u\in S$.

Доказательство. Положим $\mathrm{dom}(Y) = S$ и $Y(u) = 1$ для всех $u\in S$.

(A2) Аксиома пары. Докажем

$$(\forall x, y\in\mathfrak{M}^B)(\exists Y\in\mathfrak{M}^B)\|x\in Y\wedge y\in Y\| = 1.$$

Для этого положим $S = \{x, y\}$ и применим лемму 48.

(A3) Аксиома выделения. Докажем

$$(\forall X\in\mathfrak{M}^B)(\exists Y\in\mathfrak{M}^B)(\|(\forall z\in Y)(z\in X\wedge\varphi(z))\| = 1\wedge$$
$$\wedge\|(\forall z\in X)(\varphi(z)\to z\in Y)\| = 1).$$

Для этого положим $\mathrm{dom}(Y) = \mathrm{dom}(X)$ и $Y(z) = X(z) \cdot \|\varphi(z)\|$ для всех $z \in \mathrm{dom}(X)$.

(A4) Аксиома суммы. Докажем

$$(\forall X \in \mathfrak{M}^B)(\exists Y \in \mathfrak{M}^B)\|(\forall u \in X)(\forall v \in u)[u \in Y]\| = 1.$$

Для этого положим $S = \bigcup\{\mathrm{dom}(u)\colon u \in \mathrm{dom}(X)\}$ и применим лемму 48.

(A5) Аксиома множества подмножеств. Докажем

$$(\forall X \in \mathfrak{M}^B)(\exists Y \in \mathfrak{M}^B)\|\forall u(u \subseteq X \to u \in Y)\| = 1.$$

Полагаем $S = \{u\colon \mathrm{dom}(u) = \mathrm{dom}(X) \wedge (\forall t \in \mathrm{dom}(X))(\|t \in u\| \leqslant \leqslant \|t \in X\|)\}$, тогда $\|v \subseteq X\| = \sum\limits_{u \in S} \|v = u\|$*) для каждого $v \in \in \mathfrak{M}^B$. Теперь применим лемму 48.

(A6) Аксиома подстановки. Заметим сначала, что в ZF схема аксиом подстановки (A6) может быть заменена следующими аксиомами:

$$\forall X \exists Y (\forall u \in X)[\exists v \varphi(u, v) \to (\exists v \in Y)\varphi(u, v)].$$

Поэтому докажем

$$(\forall X \in \mathfrak{M}^B)(\exists Y \in \mathfrak{M}^B)\|(\forall u \in X)[\exists v \varphi(u, v) \to (\exists v \in Y)\varphi(u, v)]\| = 1.$$

Для каждого $u \in \mathrm{dom}(X)$ существует такое $S_u \subset \mathfrak{M}^B$, что

$$\sum_{v \in \mathfrak{M}^B} \|\varphi(u, v)\| = \sum_{v \in S_u} \|\varphi(u, v)\|.$$

Положим $S = \bigcup\{S_u\colon u \in \mathrm{dom}(X)\}$ и применим лемму 48.

(A7) Аксиома бесконечности. Докажем

$$(\exists Y \in \mathfrak{M}^B)\|\exists u(u \in Y) \wedge (\forall v \in Y)(\exists w \in Y)[w = \{v\}]\| = 1.$$

Пусть $S_0 = \{0\}$, и, применяя лемму 48, получим Y_0. Теперь пусть $S_1 = \{Y_0\}$ и по лемме 48 получим Y_1. Пусть $S_2 = \{Y_1\}$ и т. д. Наконец, положим $S = \{Y_0, Y_1, Y_2, \ldots\}$ и применим лемму 48, чтобы получить искомое Y.

(A8) Аксиома регулярности. Докажем

$$(\forall X \in \mathfrak{M}^B)\|\exists u(u \in X) \wedge (\forall y \in X)(\exists z \in y)[z \in X]\| = 0.$$

Предположим противное, т. е. что $\|\ldots\| = b \neq 0$ для некоторого $X \in \mathfrak{M}^B$. Пусть y — элемент $\mathfrak{M}^B$ наименьшего ранга $\rho(y)$, такой, что $\|y \in X\| \cdot b \neq 0$. Тогда $\|y \in X\| \cdot b \leqslant \|(\exists z \in y)[z \in X]\|$ и существует $z \in \mathrm{dom}(y)$, для которого $\|z \in X\| \cdot \|y \in X\| \cdot b \neq 0$. Так как $\rho(z) < \rho(y)$, получаем противоречие.

Прежде чем закончить доказательство теоремы 31 проверкой значимости AC в $\mathfrak{M}^B$, докажем две леммы.

*) Более того, если $u \in \mathfrak{M}^B$, $\mathrm{dom}(u) = \mathrm{dom}(X)$ и $u(t) = \|t \in v \wedge t \in X\|$, то $u \in S$ и $\|v \subseteq X\| = \|v = u\|$. — *Прим. перев.*

Лемма 49. *Пусть u — ненулевой элемент B. Для любого разбиения $\{u_i\colon i\in I\}$ элемента u (т. е. $\sum_{i\in I} u_i = u$, $u_i\cdot u_j = 0$ при $i\neq j$) и любого множества $\{t_i\colon i\in I\}$ элементов $\mathfrak{M}^B$ существует такое $t\in\mathfrak{M}^B$, что для всех $i\in I$*

$$u_i \leqslant \| t = t_i \|.$$

Доказательство. Пусть $\alpha = \sup\limits_{i\in I} \rho(t_i)$ и

$$t(z) = \sum_{i\in I} u_i\cdot t_i(z) \quad \text{для каждого } z\in\mathfrak{M}^B_{\alpha+1}.$$

Тогда $u_i\cdot t(z) = u_i\cdot t_i(z)$ для всех $i\in I$, $z\in\mathfrak{M}^B$, и получаем утверждение леммы.

Лемма 50. *Пусть φ — формула. Существует $t\in\mathfrak{M}^B$, такое, что $\| \exists x \varphi(x)\| = \|\varphi(t)\|$.*

Следствие. (1) *Если $\mathfrak{M}^B\models \exists x\varphi(x)$, то $\mathfrak{M}^B\models\varphi(t)$ для некоторого $t\in\mathfrak{M}^B$.*

(2) *Для каждого $z\in\mathfrak{M}^B$ существует $t\in\mathfrak{M}^B$, для которого*

$$\| z\neq 0\to t\in z\| = 1.$$

Доказательство. Пусть $u = \| \exists x\varphi(x)\| \neq 0$. Существует $t_0\in\mathfrak{M}^B$, для которого

$$u_0 = \|\varphi(t_0)\| \neq 0.$$

По рекурсии, если $u\cdot -\sum\limits_{\eta<\xi} u_\eta \neq 0$, полагаем $t_\xi\in\mathfrak{M}^B$ таким, что

$$0\neq u_\xi = \|\varphi(t_\xi)\|\cdot -\sum_{\eta<\xi} u_\eta.$$

Существует ординал α, для которого $\sum\limits_{\xi<\alpha} u_\xi = u$. Теперь применим лемму 49, чтобы получить такое $t\in\mathfrak{M}^B$, что $u_\xi \leqslant \|t = t_\xi\|$ для каждого $\xi<\alpha$. Очевидно, $\|\varphi(t)\| = u$.

(A9) Аксиома выбора. Докажем

$$(\forall X\in\mathfrak{M}^B)(\exists Y\in\mathfrak{M}^B)\| Y \text{ — функция выбора на } X\| = 1.$$

Нам потребуется понятие булевозначной пары. Для $x, y\in\mathfrak{M}^B$ полагаем $\{x, y\}^B = s$, где $\mathrm{dom}(s) = \{x, y\}$ и $s(x) = s(y) = 1$; $(x, y)^B = \{\{x\}^B\{x, y\}^B\}^B$.

Чтобы найти функцию выбора на X, пересчитаем множество $\mathrm{dom}(X)$: $z_0, z_1, \ldots, z_\alpha, \ldots$, и положим

$$u_\alpha = \| z_\alpha\in X\|\cdot -\sum_{\beta<\alpha} \| z_\beta = z_\alpha\|.$$

В силу леммы 50 существует t_α, такое, что

$$\| z_\alpha \neq 0 \to t_\alpha \in z_\alpha \| = 1.$$

Теперь положим $p_\alpha = (z_\alpha, t_\alpha)^B$ и $Y(p_\alpha) = u_\alpha$ для каждого α [12]).

Таким образом, все аксиомы ZFC значимы в $\mathfrak{M}^B$. Фактически, используя теорему 30, можно доказать, что каждая выводимая в ZFC формула значима в $\mathfrak{M}^B$.

До сих пор наши рассмотрения относились только к модели $\mathfrak{M}$. Теперь предположим, что G есть $\mathfrak{M}$-генерический у. ф. на B. Определим с помощью G (рекурсией по $\rho(x)$) *интерпретацию* i_G универсума $\mathfrak{M}^B$:

(a) $i(0) = 0$,

(b) $i(x) = \{i(y)\colon\ x(y) \in G\}$.

Определение. $\mathfrak{M}[G] = \operatorname{rng}(i_G)$ называется *генерическим расширением* $\mathfrak{M}$ посредством G.

Лемма 51. *Для каждого* $x \in \mathfrak{M}$, $i(\check{x}) = x$; *следовательно*, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}[G]$.

Доказательство. По $\in$-индукции: $i(\check{0}) = 0$, $i(\check{x}) = \{i(\check{y})\colon\ \check{x}(\check{y}) \in G\} = x$.

Лемма 52. $G \in \mathfrak{M}[G]$.

Доказательство. Определим *канонический* генерический у. ф. $\underline{G} \in \mathfrak{M}^B$ следующим образом:

$$\operatorname{dom}(\underline{G}) = \{\check{u}\colon\ u \in B\},\ \underline{G}(\check{u}) = u \text{ для каждого } u \in B.$$

Очевидно, $i(\underline{G}) = \{i(x)\colon\ \underline{G}(x) \in G\} = \{i(\check{u})\colon\ u \in G\} = G$.

Если $x \in \mathfrak{M}[G]$, $\underline{x} \in \mathfrak{M}^B$ и $i(\underline{x}) = x$, то $\underline{x}$ называется *именем* x.

Лемма 53. *Если* $\underline{x}$, $\underline{y}$ — *имена* x, y, *то*

$$x \in y \leftrightarrow \| \underline{x} \in \underline{y} \| \in G,$$
$$x = y \leftrightarrow \| \underline{x} = \underline{y} \| \in G.$$

Доказательство. Индукцией по $(\rho(x), \rho(y))$. Докажем $\| \underline{x} \in \underline{y} \| \in G \to x \in y$, предоставляя остальное читателю. Если $\| \underline{x} \in \underline{y} \| \in G$, то

$$\sum_{z \in \operatorname{dom}(\underline{y})} (\underline{y}(z) \cdot \| z = \underline{x} \|) \in G.$$

В силу генеричности существует $z \in \operatorname{dom}(\underline{y})$, такое, что

$$\underline{y}(z) \cdot \| z = \underline{x} \| \in G;$$

т. е. $\underline{y}(z) \in G$ и $\| z = \underline{x} \| \in G$. Следовательно, $i(z) \in y$ и, по индуктивному предположению, $i(z) = x$; поэтому $x \in y$.

Теорема 32. *Пусть* φ — *формула. Если* $\underline{x}, \ldots, \underline{y}$ — *имена* $x, \ldots, y \in \mathfrak{M}[G]$, *то*

$$\mathfrak{M}[G] \models \varphi(x, \ldots, y) \leftrightarrow \| \varphi(\underline{x}, \ldots, \underline{y}) \| \in G.$$

Доказательство. Индукцией по сложности φ, используя лемму 53 и генеричность G. Например:

$$\mathfrak{M}[G] \models \neg\varphi \leftrightarrow \neg(\mathfrak{M}[G] \models \varphi) \leftrightarrow \neg(\| \varphi \| \in G) \leftrightarrow -\| \varphi \| \in$$
$$\in G \leftrightarrow \| \neg\varphi \| \in G.$$

Следствие. (1) $\mathfrak{M}[G]$ — *модель* ZFC.

(2) $\mathfrak{M}[G]$ *есть наименьшая модель* $\mathfrak{N}$ *для* ZF, *такая, что* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ *и* $G \in \mathfrak{N}$.

Доказательство. Было доказано, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}[G]$ и $G \in \mathfrak{M}[G]$. Если $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}$ есть модель ZF и $G \in \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{M}_\alpha^B \in \mathfrak{N}$ и $i_G | \mathfrak{M}_\alpha^B \in \mathfrak{N}$ для всех $\alpha \in \mathfrak{M}$ (определение $i_G | \mathfrak{M}_\alpha^B$ абсолютно для каждой модели $\mathfrak{N}$, содержащей G и $\mathfrak{M}_\alpha^B$). Следовательно, $\mathfrak{M}[G] \subseteq \mathfrak{N}$.

Определение. Пусть B — булева алгебра и F — семейство подмножеств B. Фильтр G на B называется *F-полным*, если $\Pi A \in G$ при условии, что $A \subseteq G$, $A \in F$ и ΠA существует.

Генеричность у. ф. G зависит не от всей модели $\mathfrak{M}$, а только от подмножеств B, принадлежащих $\mathfrak{M}$. Следовательно, если B — п. б. а. в $\mathfrak{M}$, то у. ф. G на B является $\mathfrak{M}$-генерическим тогда и только тогда, когда G является $\mathscr{P}^{\mathfrak{M}}(B)$-полным.

Лемма 54. *Пусть* B — *п. б. а. в* $\mathfrak{M}$, $F = \mathscr{P}^{\mathfrak{M}}(B)$ *и* $\underline{G}$ — *канонический генерический у. ф. в* $\mathfrak{M}^B$. *Тогда*

$$\| \underline{G} \text{ есть } \check{F}\text{-полный у. ф. на } \check{B} \| = 1.$$

Доказательство. Легко проверить, что $\mathfrak{M}^B \models (\underline{G}$ есть у. ф. на $\check{B})$. Для проверки $\check{F}$-полноты достаточно доказать, что $\| \check{A} \subseteq \underline{G} \to (\Pi A)^{\check{}} \in \underline{G} \| = 1$ для всех $A \in F$. Последнее следует из равенств:

$$\| \check{A} \subseteq \underline{G} \| = \| (\forall x \in \check{A})(x \in \underline{G}) \| = \Pi \{ \| \check{u} \in \underline{G} \| : u \in A \} =$$
$$= \Pi A = \| (\Pi A)^{\check{}} \in \underline{G} \|.$$

Применение булевозначных моделей и генерических расширений в доказательствах непротиворечивости.

Объясним доказательства непротиворечивости на примере. Предположим, мы хотим установить совместимость утверждения

$$\text{„}\omega_1^{\mathrm{L}}\text{ — счетно“}.$$

I. Булевозначные модели

Можно считать, что $\mathrm{V}=\mathrm{L}$, и пусть $\mathfrak{M}=\mathrm{V}$. Пусть P — множество всех конечных последовательностей счетных ординалов, частично упорядоченное отношением $\supseteq$, и $B=\mathrm{RO}(P)$.

В этом случае можно доказать, что

$$\|\cup\underline{G}\text{ есть функция из }\check{\omega}\text{ на }\check{\omega}_1\|=1$$

и

$$\|\check{\omega}_1\text{ счетно}\|=1.$$

Кроме того, если формула ψ имеет только ограниченные кванторы *), то

$$\|\psi(\check{x},\ \ldots,\ \check{y})\|=1\leftrightarrow\psi(x,\ \ldots,\ y)$$

(упражнение). Эта эквивалентность верна и для многих других абсолютных формул:

$$\|\check{x}\text{ — ординал}\|=1\leftrightarrow x\in\mathrm{On},$$

или

$$\|\check{x}\text{ конструктивно }\|=1\leftrightarrow x\in\mathrm{L}.$$

В нашем примере таким образом получаем

$$\|\text{конструктивное }\check{\omega}_1\text{ счетно}\|=1.$$

Так как каждое утверждение, которое опровержимо в ZFC, имеет булево значение 0, то отсюда мы можем заключить, что

$$\text{„}\omega_1^{\mathrm{L}}\text{ счетно“}$$

совместимо с ZFC.

II. Второй способ

Снова предположим, что $\mathrm{V}=\mathrm{L}=\mathfrak{M}$ и B — алгебра, определенная выше. Пусть $F=\mathscr{P}(B)$. По лемме 54,

$$\mathfrak{M}^B\models\text{существует }\check{F}\text{-полный у. ф. на }\check{B}.$$

Определения B и F абсолютны для $\mathfrak{M}^B$, т. е.

*) т. е. кванторы вида $(\exists x\in y)$ и $(\forall x\in y)$. (Заметим, что в силу леммы 27 формулы, имеющие только ограниченные кванторы, абсолютны.) — *Прим. перев.*

$\|\check{B}$ есть конструктивная RO-алгебра для ч. у. множества конечных последовательностей конструктивных счетных ординалов и $\check{F}$—конструктивное множество подмножеств $\check{B}\| = 1$. Таким образом, следующее утверждение совместимо с ZFC: „существует L-генерический у. ф. на B".

Предполагая существование L-генерического у. ф. на B, можно доказать (см. пример, следующий за леммой 45), что

$$L[G] \models \omega_1^L \text{ счетно.}$$

III. Третий способ

Допустим можно показать, что для произвольной модели $\mathfrak{M}$ теории ZFC существует алгебра $B \in \mathfrak{M}$, такая, что $\mathfrak{M}[G] \models \varphi$ для любого $\mathfrak{M}$-генерического у. ф. G на B. Тогда $\neg\varphi$ обычно не доказуемо в ZFC. Действительно, если $\neg\varphi$ доказуемо, то $\mathfrak{M}[G] \models \neg\varphi$, т. е. можно показать, что для произвольной модели $\mathfrak{M}$ теории ZFC существует алгебра $B \in \mathfrak{M}$, такая, что $\mathfrak{M}[G] \models \varphi \wedge \neg\varphi$, для каждого $\mathfrak{M}$-генерического у. ф. G на B. Вообще говоря, мы воспользовались тем, что $\mathfrak{M}$ — модель ZFC. Фактически требуется только конечная часть этого утверждения; а именно, что $\mathfrak{M}$ удовлетворяет некоторому конечному числу аксиом ZFC [13]). В силу принципа отражения существует *счетное* множество M, удовлетворяющее этим аксиомам. Как следует из леммы 55, для любой алгебры $B \in M$ существует M-генерический у. ф. G на B. Таким образом, $M[G] \models \varphi \wedge \neg\varphi$, что невозможно, и, следовательно, $\neg\varphi$ недоказуемо.

Лемма 55. *Пусть* $(P, <)$ — *ч. у. множество в* $\mathfrak{M}$ *и предположим, что* $\mathcal{P}^{\mathfrak{M}}(P)$ *счетно. Тогда для каждого* $p \in P$ *существует генерическое множество* $G \subseteq P$, *для которого* $p \in G$. *В частности, утверждение верно, если* $\mathfrak{M}$ *счетно.*

Доказательство. Пусть $\{D_n : n \in \omega\}$ — семейство всех плотных подмножеств P, принадлежащих $\mathfrak{M}$. Пусть $p_0 = p$ и p_{n+1} есть элемент из D_n, который сильнее p_n. Множество $\{q \in P: \exists n (q \geqslant p_n)\}$ — генерическое.

Таким же методом доказывается следующая теорема, см. [34].

Теорема 33. (Расёва, Сикорский). *Если* B — *булева алгебра и* F — *счетное семейство подмножеств* B, *то существует* F-*полный у. ф. на* B.

Понятие вынуждения (форсинга).

Пусть $(P, <) \in \mathfrak{M}$ и $B = \mathrm{RO}^{\mathfrak{M}}(P)$; пусть φ — формула с переменными, область изменения которых $\mathfrak{M}^B$. Будем говорить, что условие p *вынуждает* $\varphi(\vec{x})$, $p \Vdash \varphi(\vec{x})$, если $p \leqslant \|\varphi(\vec{x})\|$, т. е.

$$p \Vdash \varphi(\vec{x}) \leftrightarrow p \leqslant \|\varphi(\vec{x})\|.$$

(Здесь p отождествлено со своим образом при естественном гомоморфизме P в B.)

Следующие утверждения о вынуждении получены из определения булевых значений:

$$p \Vdash \neg\varphi \leftrightarrow \text{никакое } q \leqslant p \text{ не вынуждает } \varphi,$$
$$p \Vdash \varphi \wedge \psi \leftrightarrow p \Vdash \varphi \wedge p \Vdash \psi,$$
$$p \Vdash \varphi \vee \psi \leftrightarrow (\forall q \leqslant p)(\exists r \leqslant q)[r \Vdash \varphi \vee r \Vdash \psi],$$
$$p \Vdash \forall x \varphi \leftrightarrow (\forall x \in \mathfrak{M}^B)\, p \Vdash \varphi(x),$$
$$p \Vdash \exists x \varphi \leftrightarrow (\forall q \leqslant p)(\exists r \leqslant q)(\exists x \in \mathfrak{M}^B)[r \Vdash \varphi(x)].$$

Для любой формулы φ также имеем

$$\forall p (\exists q \leqslant p)(q \text{ разрешает } \varphi),$$

где „*q разрешает* φ“ означает $q \Vdash \varphi \vee q \Vdash \neg\varphi$.

Если G_1 — генерическое подмножество P, полагаем $\mathfrak{M}[G_1] = \mathfrak{M}[G]$, где G есть $\mathfrak{M}$-генерический у. ф. на $\mathrm{RO}(P)$, указанный в лемме 45. В силу этой леммы, $\mathfrak{M}[G_1]$ есть наименьшая модель $\mathfrak{N}$, для которой $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}$ и $G_1 \in \mathfrak{N}$. Теперь, в соответствии с теоремой 32, между выполнимостью и вынуждением имеет место соотношение

$$\mathfrak{M}[G_1] \models \varphi(x, \ldots, y) \leftrightarrow (\exists p \in G_1)\, p \Vdash \varphi(\underline{x}, \ldots, \underline{y}).$$

18. Независимость континуум-гипотезы и смещение кардинальных чисел

В этом разделе приводятся некоторые важнейшие результаты о непротиворечивости, полученные методом форсинга. В дальнейшем мы употребляем выражение „*существует генерическое расширение* $\mathfrak{M}[G]$ *для* $\mathfrak{M}$, *удовлетворяющее* φ“, которое следует понимать как утверждение о существовании такой п. б. а. B в $\mathfrak{M}$, что $\mathfrak{M}[G]$ удовлетворяет φ для любого $\mathfrak{M}$-генерического у. ф. G на B. Соответствующие результаты о непротиворечивости могут быть получены одним из способов, указанных в разделе 17.

Теорема 34 (Коэн [2]). *Если* $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$, *то* $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \mathrm{V} \neq \mathrm{L})$.

Теорема 35 (Коэн [2]). *Если* $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$, *то* $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + 2^{\aleph_0} > \aleph_1)$.

Следующая теорема является обобщением теоремы 35 (см. Соловей [43], Вопенка [53]).

Теорема 36. *Предположим, что*

$\mathfrak{M} \models \mathrm{GCH} \wedge k$ *— регулярный кардинал* $\wedge\ \lambda$ *— кардинал* $\wedge\ \mathrm{cf}(\lambda) > k$.

Тогда существует генерическое расширение $\mathfrak{M}[G]$, *в котором*

(i) *кардиналы абсолютны, т. е. каждый кардинал в* $\mathfrak{M}$ *является кардиналом в* $\mathfrak{M}[G]$,

(ii) *конфинальность ординалов абсолютна, т. е.* $\mathrm{cf}^{\mathfrak{M}}(\alpha) = \mathrm{cf}^{\mathfrak{M}[G]}(\alpha)$ *для всех* α,

(iii) $2^k = \lambda$; *кроме того, в* $\mathfrak{M}[G]$ *верно*

(a) $2^\alpha = \alpha^+$, *если* $\alpha < k$;

(b) $2^\alpha = \lambda$, *если* $k \leqslant \alpha < \mathrm{cf}(\lambda)$;

(c) $2^\alpha = \lambda^+$, *если* $\mathrm{cf}(\lambda) \leqslant \alpha < \lambda$;

(d) $2^\alpha = \alpha^+$, *если* $\lambda \leqslant \alpha$.

Теорема 37 (Истон [4]). *Предположим, что* $\mathfrak{M} \models \mathrm{GCH} \wedge F$ *— функция, определенная на регулярных кардиналах и значениями которой являются такие кардиналы, что*

(a) $k \leqslant \lambda \to F(k) \leqslant F(\lambda)$,

(b) $\mathrm{cf}(F(k)) > k$.

Тогда существует генерическое расширение $\mathfrak{M}[G]$, *в котором* $2^k = F(k)$ *для всех* $k \in \mathrm{dom}(F)$.

Ввиду теоремы Кёнига (теорема 9), по которой $\mathrm{cf}(2^k) > k$, этот результат — наилучший для кардиналов из $\mathrm{dom}(F)$. Видоизменяя метод форсинга (а именно, используя собственные классы вынуждающих условий), Истон доказал такой же результат для любой функции **F**, определенной на всех *регулярных* кардиналах и удовлетворяющей условиям (a) и (b). Однако для *сингулярных* кардиналов никакого аналогичного утверждения не доказано. В силу результатов раздела 8, функция 2^k определяется функцией $G(k) = k^{\mathrm{cf}(k)}$, обладающей свойствами

(a) $G(k) > k$,

(b) $\mathrm{cf}(G(k)) > \mathrm{cf}(k)$,

(c) если λ регулярно и $k \leqslant \lambda$, то $G(k) \leqslant G(\lambda)$.

Нерешенная проблема. (Проблема сингулярных кардиналов.) *Определить, для каких функций* $G(k)$ *существует модель* ZFC, *в которой* $k^{\mathrm{cf}(k)} = G(k)$ *для всех кардиналов* k.

Теорема 38 (Коэн, Леви). *Предположим, что*

$\mathfrak{M} \models \mathrm{GCH} \wedge \lambda$, k *— регулярные кардиналы* $\wedge\ \lambda > k \wedge$ *если* $\lambda = \mu^+$, *то* $\mathrm{cf}(\mu) \geqslant k$.

Тогда существует $\mathfrak{M}[G]$, *такое, что*

(a) $|\alpha|^{\mathfrak{M}[G]} = |\alpha|^{\mathfrak{M}}$, *если* $\alpha \leqslant k$ *или* $\alpha \geqslant \lambda$;

(b) $|\alpha|^{\mathfrak{M}[G]} = k$, *если* $k \leqslant \alpha < \lambda$.

Для доказательства теорем 34—38 построим соответствующие генерические расширения. Исходная модель обозначается через $\mathfrak{M}$.

Модель I (Коэн).

Множество $(P, <)$ вынуждающих условий определяется как множество всех конечных последовательностей, состоящих из 0 и 1, частично упорядоченное отношением $\supseteq$ (т. е. p сильнее q, если $p \supseteq q$).

Пусть G есть $\mathfrak{M}$-генерическое множество условий. Легко видеть, что для каждого n множество $\{p \in P\colon p(n) = 1 \vee p(n) = 0\}$ плотно; поэтому существует $p \in G$, для которого $n \in \operatorname{dom}(p)$. Если p и q совместимы, то либо $p \supseteq q$, либо $q \supseteq p$. Таким образом,

(A) $\bigcup G$ есть функция из ω в $\{0, 1\}$.

Пусть $\underline{z} \in \mathfrak{M}^B$ и $\operatorname{dom}(\underline{z}) = \{\check{n}\colon n \in \omega\}$, $\underline{z}(\check{n}) = \Sigma\{p \in P\colon p(n) = 1\}$. Очевидно, $\underline{z}$ есть имя множества $z = \{n \in \omega\colon (\bigcup G)(n) = 1\}$. Докажем утверждение

(B) $G \notin \mathfrak{M}$,

в силу которого

(C) существует $z \subseteq \omega$, такое, что $z \in \mathfrak{M}[G]$ и $z \notin \mathfrak{M}$.

Отсюда следует теорема 34.

Доказательство (B). Предположим $G \in \mathfrak{M}$. Для каждого $q \in G$ либо $q^\frown 0$ *), либо $q^\frown 1$ не принадлежит G. Следовательно, $\{p\colon p \notin G\}$ плотно в P. Однако это противоречит генеричности G.

Модель II (Коэн). Модель, в которой $2^{\aleph_0} > \aleph_1$.

Множество вынуждающих условий $(P, <)$ определяется (в $\mathfrak{M}$) следующим образом:

$p \in P \leftrightarrow p$ — функция, $\operatorname{dom}(p)$ — конечное подмножество $\omega \times \omega_2$ и $\operatorname{rng}(p) \subseteq \{0, 1\}$; $p \leqslant q \leftrightarrow p \supseteq q$.

Пусть G есть $\mathfrak{M}$-генерическое подмножество P.

Так как $\{p \in P\colon (n, \alpha) \in \operatorname{dom}(p)\}$ плотно для каждого (n, α), мы имеем

(A) $\bigcup G$ есть функция из $\omega \times \omega_2$ в $\{0, 1\}$.

*) Если q есть α-последовательность, то $q^\frown a = q \cup \{(\alpha, a)\}$. — *Прим. перев.*

Для $\alpha < \omega_2$ пусть $\underset{\sim}{z}_\alpha \in \mathfrak{M}^B$ и $\mathrm{dom}(\underset{\sim}{z}_\alpha) = \{\check{n}\colon n \in \omega\}$, $\underset{\sim}{z}_\alpha(\check{n}) = \Sigma\{p \in P\colon p(n, \alpha) = 1\}$. Очевидно, $\underset{\sim}{z}_\alpha$ — имя для $z_\alpha = \{n \in \omega\colon (\bigcup G)(n, \alpha) = 1\}$. Имеем также

(B) если $\alpha \neq \beta$, то $z_\alpha \neq z_\beta$.

Для доказательства (B) покажем, что $\| \underset{\sim}{z}_\alpha = \underset{\sim}{z}_\beta \| = 0$. Действительно, предположим существует такое $p \in P$, что $p \| - \underset{\sim}{z}_\alpha = \underset{\sim}{z}_\beta$. Существует $n \in \omega$, для которого ни (n, α), ни (n, β) не принадлежат $\mathrm{dom}(p)$; пусть $q \supseteq p$, такое, что $q(n, \alpha) = 1$ и $q(n, \beta) = 0$. Тогда

$$q \| - \check{n} \in \underset{\sim}{z}_\alpha \quad \text{и} \quad q \| - \check{n} \notin \underset{\sim}{z}_\beta;$$

следовательно, $q \| - \underset{\sim}{z}_\alpha \neq \underset{\sim}{z}_\beta$, но $q \leqslant p$; противоречие.

Семейство $\{z_\alpha\colon \alpha < \omega_2^{\mathfrak{M}}\}$ состоит из различных подмножеств ω; доказательство теоремы 35 было бы закончено, если бы мы знали, что $(\aleph_2)^{\mathfrak{M}[G]} = \aleph_2^{\mathfrak{M}}$, т. е. что и $\omega_1^{\mathfrak{M}}$, и $\omega_2^{\mathfrak{M}}$ — кардиналы в $\mathfrak{M}[G]$. Последнее является следствием леммы 56.

Определение. Пусть k — бесконечный кардинал. Ч. у. множество $(P, <)$ удовлетворяет *k-цепному условию* (k-ц. у.), если каждое множество попарно несовместимых элементов P имеет мощность, меньшую k.

Условием счетности цепей (*у. с. ц.*) называется ω_1-цепное условие.

Заметим, что $(P, <)$ удовлетворяет k-ц. у. тогда и только тогда, когда $\mathrm{RO}(P)$ удовлетворяет k-ц. у.

Лемма 56. *Пусть k — регулярный кардинал, и предположим, что п. б. а. B удовлетворяет k-ц. у. (в $\mathfrak{M}$). Тогда k — регулярный кардинал в $\mathfrak{M}[G]$.*

Доказательство. Предположим $\mathrm{cf}^{\mathfrak{M}[G]}(k) < k$. Тогда существуют $\lambda < k$ и $h \in \mathfrak{M}^B$, для которых

$$(*)\quad w = \| h - \text{функция} \wedge \mathrm{dom}(h) = \check{\lambda} \wedge \mathrm{rng}(h) \subset \check{k} \wedge \sup(\mathrm{rng}(h)) = \check{k} \| \neq 0.$$

Пусть $w(\alpha, \beta) = w \cdot \| h(\check{\alpha}) = \check{\beta} \|$ для $\alpha < \lambda$, $\beta < k$. Из $(*)$ следует

$$w(\alpha, \beta) \cdot w(\alpha, \beta_1) = 0, \quad \text{если} \quad \beta \neq \beta_1,$$

и

$$(\forall \beta < k)(\exists \beta_1 > \beta)\, \exists \alpha [w(\alpha, \beta_1) \neq 0].$$

Таким образом, $|\{\beta < k\colon \exists \alpha (w(\alpha, \beta) \neq 0)\}| = k$ и, так как $\lambda < k$, существует $\alpha_0 < \lambda$, для которого

$$|\{\beta < k\colon w(\alpha_0, \beta) \neq 0\}| = k.$$

Отсюда в противоречии с предположением получаем, что $\{w(\alpha_0, \beta)$: $\beta < k \wedge w(\alpha_0, \beta) \neq 0\}$ есть множество попарно несовместимых элементов B мощности k.

Если B удовлетворяет у. с. ц., то B удовлетворяет k-ц. у. для каждого k.

Следствие. *Если B удовлетворяет у. с. ц., то каждый кардинал в $\mathfrak{M}$ является кардиналом в $\mathfrak{M}[G]$.*

Теперь вернемся к модели II. Чтобы показать абсолютность кардиналов, проверим у. с. ц. для $(P, <)$.

Сначала заметим, что если $p, q \in P$ несовместимы, то существует $x \in \mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{dom}(q)$, для которого $p(x) \neq q(x)$. Если W — множество попарно несовместимых условий, тогда пусть $W_n = \{p \in W$: $|\mathrm{dom}(p)| = n\}$ для $n \in \omega$. Легко видеть, что каждое W_n конечно; следовательно, $W = \bigcup_{n \in \omega} W_n$ счетно.

Доказательство теоремы 35 теперь закончено.

Лемма 57. *Пусть k — кардинал, и предположим, что $(P, <)$ обладает следующим свойством (в $\mathfrak{M}$): если $p_0 \geqslant p_1 \geqslant \ldots \geqslant p_\xi \geqslant \ldots$ $(\xi < k)$ — убывающая последовательность условий, то существует такое $p \in P$, что $p_\xi \geqslant p$ для всех $\xi < k$. Тогда $\mathfrak{M}[G]$ и $\mathfrak{M}$ имеют одни и те же подмножества k. Следовательно, если $\alpha \leqslant k$ есть кардинал в $\mathfrak{M}$, то α — кардинал в $\mathfrak{M}[G]$; также $\mathrm{cf}^{\mathfrak{M}}(\alpha) = \mathrm{cf}^{\mathfrak{M}[G]}(\alpha)$.*

Доказательство. Подмножество $D \subseteq P$ называется *открыто-плотным*, если D плотно и $p_1 \leqslant p_2 \in D \to p_1 \in D$. Легко проверить, что условие (c) в определении генерического множества может быть заменено условием

(c′) если $D \subseteq P$, $D \in \mathfrak{M}$ и D — открыто-плотное, то $D \cap G \neq 0$.

Для доказательства леммы покажем, что пересечение любого семейства $\{D_\alpha$: $\alpha < k\} \in \mathfrak{M}$ открыто-плотных множеств является открыто-плотным. Если $p \in P$, в качестве p_α по рекурсии полагаем элемент D_α, который сильнее каждого p_β, $\beta < \alpha$. Тогда пусть q сильнее каждого p_α, $\alpha < k$. Ясно, что $q \leqslant p$ и $q \in \bigcap_{\alpha < k} D_\alpha$.

Пусть f: $k \to \mathfrak{M}$, $f \in \mathfrak{M}[G]$ и $\underline{f}$ — имя для f. Пусть $A \in \mathfrak{M}$, $\mathrm{rng}(f) \subseteq A$ и предположим, что

$$u = \|\underline{f} \text{ — функция из } \check{k} \text{ в } \check{A}\| = 1;$$

предположение несущественно, так так в противном случае мы использовали бы $P' = \{p \in P$: $p \leqslant u\}$.

Для каждого $\alpha < k$ множество

$$D_\alpha = \{p\colon (\exists x \in A)\, p \Vdash \underset{\sim}{f}(\check{\alpha}) = \check{x}\}$$

открыто-плотное. Следовательно, $D = \bigcap_{\alpha<k} D_\alpha$ плотно и существует $p \in D \cap G$. Это означает, что для каждого $\alpha < k$ существует x_α, такое, что $p \Vdash \underset{\sim}{f}(\check{\alpha}) = \check{x}_\alpha$. Если g — функция, определенная равенством $g(\alpha) = x_\alpha$ (очевидно, $g \in \mathfrak{M}$), то получаем $p \Vdash \underset{\sim}{f} = \check{g}$ и, таким образом, $f = g$.

Сумма частично упорядоченных множеств.

Пусть $(P_i, <_i)$, $i \in I$, — семейство частично упорядоченных множеств, каждое из которых имеет наибольший элемент 1. Для каждого x из декартова произведения $\prod_{i\in I} P_i$ положим

$$s(x) = \{i \in I\colon x_i \neq 1\}$$

и определим

$$x \leqslant y \leftrightarrow (\forall i \in I)\, x_i \leqslant_i y_i.$$

Если

$$P = \{x \in \prod_{i\in I} P_i\colon s(x) \text{ конечно}\},$$

тогда $(P, <)$ называется *суммой* $\{(P_i, <_i)\colon i \in I\}$

В общем случае, пусть k — кардинал и

$$P = \{x \in \prod_{i\in I} P_i\colon |s(x)| < k\};$$

$(P, <)$ называется *k-суммой* $\{(P_i, <_i)\colon i \in I\}$.

Понятия суммы и k-суммы ч. у. множеств близки к понятиям произведения и k-произведения топологических пространств. Следующая теорема представляет собой переформулировку теоремы Энгелькинга и Карловича [5].

Теорема 39. *Пусть $(P, <)$ есть k^+-сумма $(P_i, <_i)$, $i \in I$, и предположим, что $|P_i| \leqslant \lambda$ для каждого $i \in I$. Тогда P удовлетворяет $(\lambda^k)^+$-цепному условию.*

Доказательство. Пусть $W \subseteq P$ состоит из попарно несовместимых элементов. Докажем, что $|W| \leqslant \lambda^k$. Определим по рекурсии $W_\alpha \subseteq W$ и $S_\alpha \subseteq I$ для всех $\alpha < k^+$:

(a) $W_0 = \{x_0\}$, где x_0 — произвольный элемент W;
(b) $S_\alpha = \bigcup \{S(x)\colon x \in W_\alpha\}$;
(c) $W_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} W_\beta$, если α — предельный ординал;

(d) чтобы определить $W_{\alpha+1}$, рассмотрим отношение эквивалентности

$$x \approx y \leftrightarrow x \mid S_\alpha = y \mid S_\alpha$$

на W и положим $W_{\alpha+1} = W_\alpha \cup \{$элемент из каждого класса эквивалентности$\}$. Проверим, что $|W_\alpha| \leqslant \lambda^k$ и $|S_\alpha| \leqslant \lambda^k$ для каждого $\alpha < k^+$: если $|W_\alpha| \leqslant \lambda^k$, тогда $|S_\alpha| \leqslant \lambda^k$; если $|S_\alpha| \leqslant \lambda^k$, тогда $|W_{\alpha+1}| \leqslant \lambda^k$ в силу того, что

$$\begin{aligned}
|W_{\alpha+1} - W_\alpha| &= (\text{число классов эквивалентности}) \leqslant \\
&\leqslant \Big|\Big\{x \in \prod_{i \in S_\alpha} P_i\colon\ s(x) \leqslant k\Big\}\Big| \leqslant \\
&\leqslant |\{s \subseteq S_\alpha\colon\ |s| \leqslant k\}| \cdot \Big|\prod_{i<k} P_i\Big| \leqslant \\
&\leqslant |\mathcal{P}_k(\lambda^k)| \cdot \lambda^k = \\
&= (\lambda^k)^k \cdot \lambda^k = \lambda^k.
\end{aligned}$$

Докажем теперь, что $W = \bigcup_{\alpha<k^+} W_\alpha$; из этого следует $|W| \leqslant \lambda^k$. Пусть $x \in W$; докажем, что $x \in W_\alpha$ для некоторого $\alpha < k^+$. Если положить $S = \bigcup_{\alpha<k^+} S_\alpha$, то $s(x) \cap S = s(x) \cap S_\alpha$ для некоторого $\alpha < k^+$ ($|s(x)| \leqslant k$). Существует такое $y \in W_{\alpha+1}$, что $y \mid S_\alpha = x \mid S_\alpha$. Так как $s(y) \subseteq S$, мы имеем $s(x) \cap s(y) = s(x) \cap S_\alpha$; поэтому x, y совпадают на $s(x) \cap s(y)$ и совместимы. Следовательно, $x = y$ и $x \in W_{\alpha+1}$.

Следствие 1. *Сумма любого семейства счетных ч. у. множеств удовлетворяет у. с. ц.*

Следствие 2. *Пусть k — предельный кардинал. Если $(P, <)$ есть k-сумма $(P_i, <_i)$, $i \in I$, и $|P_i| \leqslant \lambda$ для каждого $i \in I$, то $(P, <)$ удовлетворяет $(\lambda^{\underline{k}})^+$-ц. у.*

Доказательство. Для любого $W \subseteq P$ положим $W_\alpha = \{x \in W\colon\ |s(x)| \leqslant \alpha\}$ при $\alpha < k$; тогда $W = \bigcup_{\alpha<k} W_\alpha$ и можно применить теорему.

Следствие 3. *Если λ — недостижимый кардинал и $k < \lambda$, то k-сумма $(P_i, <_i)$, где каждое слагаемое мощности меньшей λ, удовлетворяет λ-ц. у.*

Доказательство. Такое же, как доказательство теоремы.

Лемма 58. *Если полная булева алгебра B удовлетворяет k-ц. у. и P плотно в B, то для каждого $u \in B$ существует $A \subseteq P$, такое, что $u = \Sigma A$ и $|A| < k$. Следовательно, $|B| \leqslant |P|^{\underline{k}}$.*

Доказательство. По рекурсии построим трансфинитную последовательность p_α, $p_\alpha \leqslant u$, попарно несовместимых элементов P: если $\sum_{\xi<\alpha} p_\xi < u$, то за p_α принимаем такое p, что $p \leqslant u \cdot -\sum_{\xi<\alpha} p_\xi$. В качестве A возьмем множество всех p_α.

Лемма 59. *Если G есть $\mathfrak{M}$-генерический у. ф. на B, то*

$$(2^k)^{\mathfrak{M}[G]} \leqslant (|B|^k)^{\mathfrak{M}}.$$

Доказательство. Каждое подмножество $A \subseteq k$ в $\mathfrak{M}[G]$ имеет имя $\underline{A} \in \mathfrak{M}^B$; каждое такое имя $\underline{A}$ определяется функцией $\alpha \longmapsto \|\check{\alpha} \in \underline{A}\|$ из k в B. Разным подмножествам соответствуют разные функции, поэтому число всех подмножеств k в $\mathfrak{M}[G]$ не больше, чем число всех функций в $\mathfrak{M}$, отображающих k в B.

Модель III.

Предположим, что k — регулярный кардинал в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} \models 2^{\underline{k}} = k$.

Множество $(P, <)$ определяется (в $\mathfrak{M}$) следующим образом:

$p \in P \leftrightarrow p$ — функция на некотором $\alpha < k$ и $\operatorname{rng}(p) \subseteq \{0, 1\}$;

$p \leqslant q \leftrightarrow p \supseteq q$.

$(P, <)$ обладает свойствами:

(1) для $\alpha < k$ каждая убывающая α-последовательность условий имеет нижнюю грань,

(2) $(P, <)$ удовлетворяет k^+-ц. у.

Для доказательства (1) воспользуемся тем, что $p \leqslant q \leftrightarrow p \supseteq q$ и $\bigcup_{\xi<\alpha} p_\xi$ есть условие более сильное, чем любое p_ξ из $\subseteq$-возрастающей α-последовательности. Для доказательства (2) заметим, что $(P, <)$ плотно в k-сумме k ч. у. множеств, состоящих из двух несравнимых элементов (и наибольшего элемента). По теореме 39, P удовлетворяет $(2^{\underline{k}})^+$-ц. у., т. е. k^+-ц. у. Пусть G есть $\mathfrak{M}$-генерическое подмножество P. Генерическое расширение $\mathfrak{M}[G]$ обладает свойствами:

(A) существует $z \subseteq k$, такое, что $z \in \mathfrak{M}[G]$ и $z \notin \mathfrak{M}$;

(B) $\mathfrak{M}[G]$ имеет те же подмножества α, что и $\mathfrak{M}$ для каждого $\alpha < k$;

(C) кардиналы абсолютны и конфинальность кардиналов абсолютна.

Свойство (A) доказывается так же, как для модели I; (B) следует из леммы 57 и (1). Свойство (C) следует частично из леммы 57 и (2), для кардиналов больших или равных k^+, и из леммы 57 и (1), для кардиналов меньших или равных k.

Модель IV (Вопенка).

Предположим, что

$\mathfrak{M} \models \mathrm{GCH} \wedge k$—регулярный кардинал $\wedge\ \lambda$—кардинал $\wedge\ \mathrm{cf}(\lambda) > k$.

Множество $(P, <)$ определяется (в $\mathfrak{M}$) следующим образом:

$$p \in P \leftrightarrow p - \text{функция} \wedge \mathrm{dom}(p) \subseteq k \times \lambda \wedge |\mathrm{dom}(p)| < k \wedge \mathrm{rng}(p) \subseteq \{0, 1\};$$

$$p \leqslant q \leftrightarrow p \supseteq q.$$

Замечание. Так как $|k \times \lambda| = \lambda$, то можно было бы определить множество вынуждающих условий, изоморфное $(P, <)$, так, чтобы $\mathrm{dom}(p) \subseteq \lambda$.

$(P, <)$ обладает свойствами:

(1) для $\alpha < k$ каждая убывающая α-последовательность имеет нижнюю грань,

(2) $(P, <)$ удовлетворяет k^+-ц. у.,

(3) $|\mathrm{RO}(P)| = \lambda$.

Свойства (1) и (2) доказываются так же, как при построении модели III. Третье свойство следует из леммы 58, (2) и GCH: $|\mathrm{RO}(P)| \leqslant |P|^k = \lambda^k = \lambda$.

Пусть G есть $\mathfrak{M}$-генерическое подмножество P. Генерическое расширение $\mathfrak{M}[G]$ обладает следующими свойствами:

(A) кардиналы абсолютны и конфинальность кардиналов абсолютна;

(B) семейство $\{z_\alpha\colon \alpha < \lambda\}$, где $z_\alpha = \{\beta < k\colon (\bigcup G)(\beta, \alpha) = 1\}$ состоит из λ различных подмножеств k;

(C) для каждого кардинала α

(i) $2^\alpha = \alpha^+$, если $\alpha < k$ или $\alpha \geqslant \lambda$;

(ii) $2^\alpha = \lambda$, если $k \leqslant \alpha < \mathrm{cf}(\lambda)$;

(iii) $2^\alpha = \lambda^+$, если $\mathrm{cf}(\lambda) \leqslant \alpha \leqslant \lambda$.

Свойство (A) следует из (1) и (2); (B) доказывается так же, как для модели II. Свойство (C) следует из (B), леммы 59, (3) и теоремы Кёнига.

Доказательство теоремы 36 закончено.

Модель V (Коэн, Леви).

Предположим, что

$\mathfrak{M} \models \mathrm{GCH} \wedge k$—регулярный кардинал $\wedge\ \mu$—кардинал $\wedge\ \mathrm{cf}(\mu) \geqslant k$.

$(P <)$ определяется следующим образом:

$p \in P \leftrightarrow p$ есть функция на некотором $\alpha < k$ и $\mathrm{rng}(p) \subseteq \mu$;

$p \leqslant q \leftrightarrow p \supseteq q$.

$(P, <)$ обладает свойствами:

(1) для $\alpha < k$ каждая убывающая α-последовательность имеет нижнюю грань,

(2) P удовлетворяет μ^+-ц. у.

Для доказательства (2) следует рассматривать P как k-сумму ч. у. множеств мощности μ и воспользоваться тем, что $\mu^{\underline{k}} = \mu$ в силу GCH.

Пусть G есть $\mathfrak{M}$-генерическое подмножество условий. Генерическое расширение $\mathfrak{M}[G]$ обладает следующими свойствами:

(A) если α — кардинал в $\mathfrak{M}$ и либо $\alpha \leqslant k$, либо $\alpha \geqslant \mu^+$, тогда α — кардинал в $\mathfrak{M}[G]$,

(B) $\bigcup G$ есть отображение k на μ; следовательно, $|\mu|^{\mathfrak{M}[G]} = k$,

(C) $\mathfrak{M}[G] \models \mathrm{GCH}$.

Свойства (A) — (C) проверяются непосредственно; (A) следует из (1) и (2), а (C) — по лемме 59.

Таким образом, мы доказали часть теоремы 38: случай, когда $\lambda = \mu^+$ и $\mathrm{cf}(\mu) \geqslant k$. П. б. а. $\mathrm{RO}(P) = B$, где P — определенное выше множество условий, называется (k, μ)-*алгеброй смещения*.

Модель VI (Леви).

Предположим, что

$$\mathfrak{M} \models k \text{ — регулярный кардинал} \wedge \lambda \text{ — недостижимый кардинал} \wedge k < \lambda.$$

Пусть $(P, <)$ будет k-суммой $\{(P_\mu, <_\mu): \mu \in I\}$, где $I = \{\mu < \lambda: \mu$ — кардинал $\wedge\ \mathrm{cf}(\mu) \geqslant k\}$ и для каждого $\mu \in I$, $(P_\mu, <_\mu)$ — ч. у. множество, указанное для модели V (т. е. $\mathrm{RO}(P_\mu)$ есть (k, μ) алгебра смещения).

$(P, <)$ обладает свойствами:

(1) для $\alpha < k$ каждая убывающая α-последовательность условий имеет нижнюю грань,

(2) P удовлетворяет λ-ц. у.

Для доказательства (1) заметим, что каждое P_μ обладает этим свойством, и используем тот факт, что P есть k-сумма; (2) следует из теоремы 39, следствие 3.

Пусть G есть $\mathfrak{M}$-генерическое множество вынуждающих условий. Тогда

(A) если α — кардинал в $\mathfrak{M}$ и $\alpha \leqslant k$ или $\alpha \geqslant \lambda$, то α — кардинал в $\mathfrak{M}[G]$;

(B) G порождает семейство $\{f_\mu: \mu \in I\}$ отображений k на μ; следовательно, $|\mu|^{\mathfrak{M}[G]} = k$ для каждого $\mu < \lambda$.

Доказательство теоремы 38 закончено.

П. б. а. $\mathrm{RO}(P)$, где P — указанное выше множество вынуждающих условий, называется (k, λ)-*алгеброй Леви*.

Модель VII (Истон).

Предположим, что

$\mathfrak{M} \models \mathrm{GCH} \wedge F$ — функция, отображающая регулярные кардиналы в кардиналы и такая, что

(a) $\alpha \leqslant \beta \to F(\alpha) \leqslant F(\beta)$,

(b) $\mathrm{cf}(F(\alpha)) > \alpha$.

Вынуждающие условия $p \in P$ являются функциями, определенными следующим образом:

(i) $\mathrm{dom}(p) \subseteq \{(\alpha, \beta)\colon \alpha \in \mathrm{dom}(F) \wedge \beta < F(\alpha)\}$;

(ii) $\mathrm{rng}(p) \subseteq \{0, 1\}$;

(iii) для каждого регулярного кардинала k

$$|p_k| < k,$$

где $p_k = p \mid \{(\alpha, \beta)\colon \alpha \leqslant k\}$;

(iv) $p \leqslant q \leftrightarrow p \supseteq q$.

Если положить $p^k = p - p_k$, $P_k = \{p_k\colon p \in P\}$ и $P^k = \{p^k\colon p \in P\}$, то P изоморфно $P_k \oplus P^k$, сумме $\{P_k, P^k\}$ *). Если k регулярно, то

(1) каждая убывающая k-последовательность условий в P^k имеет нижнюю грань,

(2) P_k удовлетворяет k^+-ц. у.,

(3) $|P_k| = F(k)$, когда $k \in \mathrm{dom}(F)$.

Свойство (2) следует из (доказательства) теоремы 39 и GCH; (1) и (3) очевидны.

Основным средством доказательства теоремы Истона является лемма 60. Пусть P_1 и P_2 — ч. у. множества (с наибольшим элементом 1) и $P = P_1 \oplus P_2$. Если G есть $\mathfrak{M}$-генерическое подмножество P, тогда $G_1 = \{p \in P_1\colon (p, 1) \in G\}$ и $G_2 = \{q \in P_2\colon (1, q) \in G\}$ являются $\mathfrak{M}$-генерическими подмножествами P_1 и P_2 соответственно и $G = G_1 \times G_2$.

Лемма 60. *В $\mathfrak{M}$ пусть $P = P_1 \oplus P_2$, k — кардинал и предположим, что P_1 удовлетворяет k^+-ц. у. и каждая убывающая k-последовательность условий из P_2 имеет нижнюю грань. Пусть $G = G_1 \times G_2$ — генерическое подмножество P. Если $f \in \mathfrak{M}[G]$ является функцией из k в $\mathfrak{M}$, то $f \in \mathfrak{M}[G_1]$.*

Доказательство. Пусть $\underline{f}$ — имя f. Для $\alpha < k$ определим (в $\mathfrak{M}$) $D_\alpha \subseteq P_2$ следующим образом:

$q \in D_\alpha \leftrightarrow$ существует разбиение $\{p_i^\alpha\colon i \in I_\alpha\}$ множества P_1 и семейство $\{a_i^\alpha\colon i \in I_\alpha\}$, такие, что

(*) $(p_i^\alpha, q) \Vdash \underline{f}(\check{\alpha}) = \check{a}_i^\alpha$ для каждого $i \in I_\alpha$.

*) Сумму $P_k \oplus P^k$ можно определить, так как в P_k и P^k имеется наибольший элемент (пустое множество). — *Прим. перев.*

(*Разбиение* P_1 есть максимальное множество попарно несовместимых условий в P_1; это разбиение является разбиением $\mathrm{RO}(P_1)$.)

Мы утверждаем, что каждое D_α является открыто-плотным в P_2. Ясно, что если $q' \leqslant q \in D_\alpha$, то $q' \in D_\alpha$. Пусть q_0 — произвольный элемент P_2; найдем $q \in D_\alpha$, такое, что $q \leqslant q_0$. Можно предполагать, что $\| \underline{f}$ есть функция из $\check{k}$ в $\check{A} \| = 1$ для некоторого A. Существуют $q_1 \leqslant q_0$, $p_1 \in P_1$ и $a_1 \in A$, такие, что $(p_1, q_1) \| - \underline{f}(\check{\alpha}) = \check{a}_1$. По рекурсии определяем $q_\gamma \in P_2$, $p_\gamma \in P_1$ и $a_\gamma \in A$, такие, что $q_0 \geqslant q_1 \geqslant \ldots \geqslant q_\gamma \geqslant \ldots$, p_γ попарно несовместимы и

$$(p_\gamma, q_\gamma) \| - \underline{f}(\check{\alpha}) = \check{a}_\gamma;$$

если $\sum_{\xi < \gamma} p_\xi < 1$, такие p_γ, q_γ и a_γ можно найти. Существует $\beta < k^+$, для которого $\sum_{\gamma < \beta} p_\gamma = 1$. Пусть q сильнее каждого q_γ, $\gamma < \beta$; тогда $(p_\gamma, q) \| - \underline{f}(\check{\alpha}) = \check{a}_\gamma$ для $\gamma < \beta$. Отсюда $q \in D_\alpha$ и, следовательно, D_α плотно.

Пусть $D = \bigcap_{\alpha < k} D_\alpha$. Из условий на P_2 следует, что D плотно. Так как G_2 есть $\mathfrak{M}$-генерическое подмножество P_2, существует такое $q \in G_2$, что $q \in D_\alpha$ для каждого α. Выберем $\{p_i^\alpha : i \in I_\alpha\}$ и $\{a_i^\alpha : i \in I_\alpha\}$, для которых (*) выполняется. В $\mathfrak{M}[G_1]$ определим функцию g: $k \to A$ следующим образом: $g(\alpha) = a_i^\alpha$, где i — единственный элемент I, для которого $p_i^\alpha \in G_1$. Отсюда следует, что $f = g$ и поэтому $f \in \mathfrak{M}[G_1]$.

Вернемся к модели VII. Пусть G есть $\mathfrak{M}$-генерическое подмножество P. Генерическое расширение $\mathfrak{M}[G]$ обладает следующими свойствами:

(A) кардиналы абсолютны и конфинальность кардиналов абсолютна;

(B) $(2^\alpha)^{\mathfrak{M}[G]} = F(\alpha)$ для каждого $\alpha \in \mathrm{dom}(F)$.

Доказательство. (A) Достаточно доказать, что каждый регулярный кардинал в $\mathfrak{M}$ является регулярным кардиналом в $\mathfrak{M}[G]$. Пусть λ — регулярный кардинал в $\mathfrak{M}$, и предположим, что $\mathrm{cf}^{\mathfrak{M}[G]}(\lambda) = k < \lambda$. Существует функция $f \in \mathfrak{M}[G]$, такая, что $\mathrm{dom}(f) = k$, $\mathrm{rng}(f) \subseteq \lambda$ и $\sup_{\alpha < k} f(\alpha) = \lambda$. Пусть $G = G_1 \times G_2$, где G_1 есть $\mathfrak{M}$-генерическое подмножество P_k и G_2 есть $\mathfrak{M}$-генерическое подмножество P^k. В силу (1), (2) и леммы 60, $f \in \mathfrak{M}[G_1]$. Однако, поскольку $k^+ \leqslant \lambda$ и P_k удовлетворяет λ-ц. у., то, по лемме 56, λ — регулярный кардинал в $\mathfrak{M}[G_1]$; противоречие.

(В) Так же, как при построении модели IV, условия с первым аргументом α порождают семейство $F(\alpha)$ различных подмножеств α. Для доказательства того, что существует самое большое $F(\alpha)$ подмножеств α, используем лемму 59. Каждое подмножество α в силу леммы 60 принадлежит $\mathfrak{M}[G_1]$, где G_1 есть $\mathfrak{M}$-генерическое подмножество P_α. В $\mathfrak{M}$ выполняются равенства $|P_\alpha| = |F(\alpha)|$ и $|\mathrm{RO}(P_\alpha)| = |F(\alpha)|^\alpha = F(\alpha)$. Следовательно, $(2^\alpha)^{\mathfrak{M}[G]} \leqslant (|F(\alpha)|^\alpha)^{\mathfrak{M}} = F(\alpha)$.

19. Применения булевозначных моделей в теории булевых алгебр

Отображение h б. а. B_1 в б. а. B_2 является *гомоморфизмом*, если h сохраняет булевы операции, т. е. если $h(u+v) = h(u) + h(v)$ и т. д. Гомоморфизм h называется *полным гомоморфизмом*, если h сохраняет также бесконечные операции, т. е. $h(\Sigma A) = \Sigma(h''A)$ при условии, что ΣA существует. Взаимно однозначный полный гомоморфизм называется *вложением*. *Изоморфизм* между B_1 и B_2 является взаимно однозначным гомоморфизмом B_1 на B_2 и, следовательно, полным гомоморфизмом. Изоморфизм алгебры B на себя называется *автоморфизмом* B. Если тождественное отображение B_1 является вложением B_1 в B_2, то алгебра B_1 является *подалгеброй* B_2.

Теорема 40 (Крипке [18]). *Для каждой булевой алгебры B существует такой кардинал μ, что B может быть вложена в $(\aleph_0, \mu)$-алгебру смещения.*

Замечание. Б. а. B называется *счетно порожденной*, если существует счетное множество $Z \subseteq B$, такое, что B есть наименьшая подалгебра B, содержащая Z. Соловей доказал в [44], что каждая $(\aleph_0, \mu)$-алгебра смещения является счетно порожденной. Этот результат дает новое доказательство теоремы Гейфмана и Хейлеса о существовании счетно порожденной алгебры произвольно большой мощности. В силу теоремы 40 получаем, что каждая булева алгебра может быть вложена в счетно порожденную алгебру [14]).

Доказательство. Напомним (вариант) теорему 33: для каждого счетного семейства F подмножеств б. а. B и ненулевого $a \in B$ существует F-полный у. ф. G на B, такой, что $a \in G$.

Пусть B — данная б. а. и $F = \mathscr{P}(B)$. Пусть $k = |B|$, $\mu = 2^k = |F|$ и B_1 есть $(\aleph_0, \mu)$-алгебра смещения. Построим вложение h алгебры B в B_1. Так как $V^{B_1} \models \check{F}$ счетно, а также $V^{B_1} \models$

$\models$ теорема 33, то отсюда следует, что существует $G \in V^{B_1}$, такое, что $V^{B_1} \models G$ есть $\check{F}$-полный у. ф. на $\check{B}$ (здесь мы применили лемму 50). Положим

$$(*) \qquad h(b) = \| \check{b} \in G \| \quad \text{для всех } b \in B.$$

Легко видеть, что h — полный гомоморфизм; т. е. если $b = \Sigma A$ в B, то

$$h(b) = \| \check{b} \in G \| = \| (\exists x \in \check{A})\, x \in G \| = \sum_{x \in A} \| \check{x} \in G \| = \sum_{x \in A} h(x).$$

Однако, чтобы обеспечить взаимную однозначность h, мы должны специальным образом выбрать G. Покажем сначала, что существует $a \in V^{B_1}$, такое, что $\| a = \check{b} \| \neq 0$ для каждого $b \neq 0$ в B. Пусть $\{b_\xi\colon \xi < k\}$ — множество всех ненулевых элементов B. Так как B_1 есть $(\aleph_0, 2^k)$-алгебра смещения, то в B_1 имеется k попарно несовместимых элементов u_ξ, $\xi < k$. По лемме 49 существует такое $a \in V^{B_1}$, что $\| a = \check{b}_\xi \| \geqslant u_\xi$ для каждого $\xi < k$. Теперь выберем $G \in V^B$ так, чтобы

$$V^{B_1} \models a \in G \wedge G \text{ есть } \check{F}\text{-полный у. ф. на } \check{B}.$$

Для доказательства взаимной однозначности гомоморфизма h, определенного посредством $(*)$, достаточно проверить, что $h(b) \neq 0$ при $0 \neq b \in B$. Если $b \neq 0$, то

$$h(b) = \| \check{b} \in G \| \geqslant \| a \in G \| \cdot \| a = \check{b} \| = \| a = \check{b} \| \neq 0.$$

Вторая теорема этого раздела касается алгебры Леви. Пусть k — недостижимый кардинал. Пусть P — множество таких конечных множеств p, состоящих из троек (α, n, β), что

(i) $\beta < \alpha < k$, $n \in \omega$;

(ii) если $(\alpha, n, \beta_1) \in p$ и $(\alpha, n, \beta_2) \in p$, то $\beta_1 = \beta_2$.

Пусть $p \leqslant q \leftrightarrow p \supseteq q$ для $p, q \in P$.

В разделе 18 мы определили $(\aleph_0, k)$-алгебру Леви как $B = \mathrm{RO}(P)$ и доказали, что

$$V^B \models \check{k} \text{ — первый несчетный кардинал.}$$

Следующая теорема, как указано в [28], принадлежит Енсену.

Теорема 41. *Пусть k — недостижимый кардинал и B есть $(\aleph_0, k)$-алгебра Леви. Если B_1 и B_2 — п. б. а., мощности меньшей k, и B_1 — подалгебра B, а также B_1 — подалгебра B_2, то существует вложение $h\colon B_2 \to B$, такое, что $h \restriction B_1$ — тождественное отображение.*

П. б. а. B называется *однородной*, если для любой подалгебры B_1, такой, что $|B_1| < |B|$, каждый автоморфизм B_1 может быть продолжен до автоморфизма B. Следующая тео-

рема фактически доказана в статье Соловея [44]: ($\aleph_0$, k)-алгебра Леви является однородной. Теорема 41 представляет собой усиление этой теоремы. Доказательство теоремы 41 аналогично доказательству теоремы 40. Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 61. *Пусть S — множество ненулевых элементов B, $|S|<k$ и $\lambda<k$. Тогда в B существует λ попарно несовместимых элементов u_ξ, $\xi<\lambda$, таких, что $u_\xi \cdot a \neq 0$ для любого $\xi<\lambda$ и любого $a \in S$.*

Доказательство. $B = \mathrm{RO}(P)$, где P — указанное выше множество конечных множеств, состоящих из троек (α, n, β).

Для $\beta<\alpha<k$ пусть

$$u_{\alpha\beta} = \{(\alpha, 0, \beta)\}.$$

Для $a \in S$ полагаем

$$I_a = \{\alpha<k\colon (\exists \beta<\alpha)[a \cdot u_{\alpha\beta} = 0]\}.$$

Существует $X_a \subseteq P$, для которого $a = \Sigma\{p\colon p \in X_a\}$ и

$$I_a = \{\alpha<k\colon (\exists\beta<\alpha)(\forall p \in X_a)[p \cdot u_{\alpha\beta} = 0]\} =$$
$$= \{\alpha<k\colon (\exists\beta<\alpha)(\forall p \in X_a)(\exists \beta_1 \neq \beta)[(\alpha, 0, \beta_1) \in p]\}.$$

Последнее множество конечно, так как конечно каждое $p \in P$. Следовательно,

$$|\{\alpha<k\colon (\exists a \in S)(\exists\beta<\alpha)[a \cdot u_{\alpha\beta} = 0]\}|<k$$

и поэтому существует $\alpha_0 \geqslant \lambda$, такое, что

$$(\forall a \in S)(\forall \beta<\alpha_0)[a \cdot u_{\alpha_0\beta} \neq 0].$$

Теперь полагаем $u_\xi = u_{\alpha_0\xi}$ для $\xi<\lambda$.

Доказательство теоремы 41. В доказательстве используется следующий усиленный вариант теоремы 33: для любого счетного семейства F подмножеств б. а. B и F-полного фильтра G_0 на B существует F-полный у. ф. G на B, такой, что $G_0 \subseteq G$ (упражнение).

Пусть B есть ($\aleph_0$, k)-алгебра Леви. Пусть $\underline{G}$ — канонический генерический у. ф. в V^B. Существует $G_1 \in V^B$, такое, что

$$V^B \models G_1 = \underline{G} \cap \check{B}_1.$$

(Здесь и дальше мы применяем лемму 50.) Очевидно, $\|\check{a} \in G_1\| = a$ для $a \in B_1$ и

$$V^B \models G_1 \text{ есть } \check{F}_1\text{-полный у. ф. на } \check{B}_1,$$

где $F_1 = \mathscr{P}(B_1)$. Существует $G_2 \in V^B$, такое, что

$$V^B \models G_2 \text{ есть фильтр на } \check{B}_2, \text{ порожденный } G_1,$$

т. е.

$$V^B \models (\forall x \in \check{B}_2)[x \in G_2 \leftrightarrow (\exists y \in \check{B}_1)[y \check{\leqslant} x \wedge y \in G_1]].$$

Нетрудно проверить, что для каждого $b \in B_2$

$$\| \check{b} \in G_2 \| = \| (\bar{b})^{\vee} \in G_1 \| = \bar{b},$$

где

$$\bar{b} = \Sigma \{a \in B_1 \colon a \leqslant b\}.$$

Очевидно, $\bar{b} \leqslant b$ и $\bar{b} \in B_1$. Пусть $F_2 = \mathscr{P}(B_2)$; мы имеем

$$V^B \models G_2 \text{ есть } \check{F}_2\text{-полный фильтр на } B_2,$$

потому что $\overline{\Pi A} = \Pi \{\bar{b} \colon b \in A\}$ для каждого $A \subseteq B_2$ и

$$\| \check{A} \subseteq G_2 \| = \| \{\bar{b} \colon b \in A\}^{\vee} \subseteq G_1 \| = \| (\overline{\Pi A})^{\vee} \in G_1 \| = \| (\Pi A)^{\vee} \in G_2 \|.$$

Так как

$$V^B \models \text{теорема } 33 \wedge \check{F}_2 \text{ счетно},$$

существует такое $H \in V^B$, что

$$V^B \models H \text{ есть } \check{F}_2\text{-полный у. ф. на } \check{B}_2 \text{ и } H \supseteq G_2.$$

Определим теперь отображение h алгебры B_2 в B:

$$h(b) = \| \check{b} \in H \| \qquad \text{для всех} \quad b \in B_2.$$

Так же, как при доказательстве теоремы 40, получаем, что h — полный гомоморфизм B_2 в B. Если $a \in B_1$, то

$$h(a) = \| \check{a} \in H \| = \| \check{a} \in G_1 \| = a.$$

Снова, чтобы обеспечить взаимную однозначность h, выберем H специальным образом. В силу леммы 61 существует такое семейство $\{u_b \colon b \in B_2 \wedge b \neq 0\}$ попарно несовместимых элементов B, что $u_b \cdot a \neq 0$ для каждого u_b и $0 \neq a \in B_1$. По лемме 49 существует $t \in V^B$, такое, что $\| t = \check{b} \| \geqslant u_b$ для каждого $0 \neq b \in B_2$. Пусть $-t \in V^B$ является дополнением t в $\check{B}_2$ (т. е. $V^B \models -t$ есть дополнение t в $\check{B}_2$).

Выберем теперь $H \in V^B$ так, чтобы

$$V^B \models H \text{ есть } \check{F}_2\text{-полный у. ф. на } \check{B}_2 \wedge H \supseteq G_2 \wedge$$
$$\wedge \text{ если } -t \notin G_2, \text{ то } t \in H.$$

Получаем

$$\| t \in H \| = \| -t \notin G_2 \|.$$

Докажем взаимную однозначность h. Пусть $b \in B_2$ и $b \neq 0$. Тогда

$$h(b) = \| \check{b} \in H \| \geqslant \| \check{b} = t \| \cdot \| t \in H \| = \| \check{b} = t \| \cdot \| -t \notin G_2 \| \geqslant$$
$$\geqslant \| \check{b} = t \| \cdot \| -(\bar{b}) \notin G_2 \| = \| \check{b} = t \| \cdot \| (-b)^{\vee} \notin G_2 \| \geqslant u_b \cdot -(\overline{-b}).$$

Пусть $a = -(\overline{-b})$. Так как $-b < 1$, имеем $\overline{-b} < 1$ и поэтому $a \neq 0$. Так как $a \in B_1$, то $u_b \cdot a \neq 0$ и $h(b) \neq 0$. Таким образом, отображение h взаимно однозначно.

20. Измеримость по Лебегу

В этом разделе мы изложим результат Соловея [45] об измеримости по Лебегу множеств действительных чисел.

Классический пример Витали показывает, что существуют множества действительных чисел, неизмеримые по Лебегу (не LM-множества). Построение этого примера существенно использует аксиому выбора. Естественный вопрос: можно ли доказать существование неизмеримых множеств без помощи AC? А также: существуют ли определимые, но неизмеримые множества? Теоремы 42 и 43 отвечают на эти вопросы.

Мы не можем совсем отказаться от AC, если хотим, чтобы мера Лебега обладала хорошими свойствами; множество действительных чисел без AC может оказаться суммой счетного числа счетных множеств. Однако все нужные свойства сохраняются при следующей слабой форме AC.

Принцип зависимого выбора (DC). Пусть R — бинарное отношение на непустом множестве X, и предположим, что

$$(\forall x \in X)(\exists y \in X)\, xRy\ ^*).$$

Тогда существует последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ элементов X, такая, что для всех n

$$x_n R x_{n+1}.$$

В числе следствий DC имеются следующие (упражнение):

(1) для каждого счетного семейства непустых множеств существует функция выбора,

(2) каждое бесконечное множество имеет счетное подмножество,

(3) ω_1 регулярно.

Теорема 42 (Соловей). *Если* Con(ZFC + „*существует недостижимый кардинал*“), *то* Con(ZF + DC + „*каждое множество действительных чисел есть* LM-*множество*“).

Нерешенная проблема. *Можно ли в теореме* 42 (*и* 43) *устранить предположение о существовании недостижимого кардинала*? [15])

*) xRy означает $(x, y) \in R$. — *Прим. перев.*

В отношении определимых множеств действительных чисел заметим, что если $V=L$, то существует определимое вполне-упорядочение $<$ действительных чисел по типу ω_1. Применяя теорему Фубини, получаем, что множество

$$\{(x, y): x<y\}$$

неизмеримо по Лебегу на плоскости.

С другой стороны, некоторые определимые множества действительных чисел всегда измеримы по Лебегу. Например, все борелевские множества, аналитические множества и их дополнения (эти множества определимы с помощью параметра $p\in{}^{\omega}\omega$) измеримы, что доказуемо в $ZF+DC$.

Рассмотрим семейство всех множеств действительных чисел, которые определимы с помощью счетной последовательности ординалов, т. е. рассмотрим

$$\mathcal{P}(R)\cap\bigcup_{s\in S}\mathrm{OD}(s),$$

где $S={}^{\omega}\mathrm{On}$ есть класс счетных последовательностей ординалов. Это семейство содержит все определимые множества действительных чисел, а также все проективные множества.

Теорема 43 (Соловей). *Если* $\mathrm{Con}(ZFC+$ „*существует недостижимый кардинал*“*),* *то* $\mathrm{Con}(ZFC+$ „*каждое множество действительных чисел, определимое с помощью счетной последовательности ординалов, есть* LM-*множество*“*).*

Докажем сначала теорему 43.

Предполагается, что читатель знаком с определением борелевских множеств; однако, так как нам потребуется некоторый способ кодирования борелевских множеств, приведем здесь соответствующие определения.

Коды борелевских множеств.

Определим по рекурсии *множество кодов* $C\subseteq{}^{\omega}\omega$ и *борелевские множества* A_c, $c\in C$. Пусть r_i, $i\in\omega$, — каноническая нумерация рациональных чисел и π — каноническое взаимно однозначное отображение $\omega\times\omega$ на ω.

Если $c\in{}^{\omega}\omega$, пусть $\varphi(c)=d$, где

$$d(n)=c(n+1)\quad\text{для всех}\quad n\in\omega.$$

Для каждого $i\in\omega$ пусть $\psi_i(c)=d$, где

$$d(n)=c(\pi(i, n)+1).$$

Определим C_α, $\alpha<\omega_1$, следующим образом.

(1) $C_0=\{c\in{}^{\omega}\omega: c(0)=0\}$.

Для $c \in C_0$ полагаем

$$A_c = (\text{открытый интервал } (r_i, r_j)),$$

где $i = c(1)$ и $j = c(2)$.

(2) α — нечетный ординал.

$$c \in C_\alpha \leftrightarrow c(0) = 1 \wedge (\exists \beta < \alpha)\, \varphi(c) \in C_\beta.$$

Для $c \in C_\alpha$ полагаем

$$A_c = R - A_{\varphi(c)}.$$

(3) α — четный ординал.

$$c \in C_\alpha \leftrightarrow c(0) = 2 \wedge (\forall i \in \omega)(\exists \beta < \alpha)\, \psi_i(c) \in C_\beta.$$

Для $c \in C_\alpha$

$$A_c = \bigcup_{i \in \omega} A_{\psi_i(c)}.$$

Положим $C = \bigcup_{\alpha < \omega_1} C_\alpha$ и *борелевскими* множествами назовем множества A_c (мы говорим, что A_c *кодируется* посредством c). Заметим, что „c есть код" — абсолютное понятие для транзитивных моделей ZF. Если $\mathfrak{M}$ — модель ZF + DC и $c \in C \cap \mathfrak{M}$, то через $A_c^{\mathfrak{M}}$ обозначим борелевское множество в $\mathfrak{M}$, кодируемое посредством c.

Определим следующие свойства кодов:

(a) c кодирует открытое множество $\leftrightarrow c \in C_2 \wedge (\forall i \in \omega)\, \psi_i(c) \in C_0$,

(b) c кодирует дополнение $A_d \leftrightarrow d = \varphi(c)$,

(c) c кодирует замкнутое множество $\leftrightarrow \varphi(c)$ кодирует открытое множество,

и аналогично определяется

(d) c кодирует пересечение $A_d \cap A_e$,
разность $A_d - A_e$,
симметрическую разность $A_d \triangle A_e$.

Все эти свойства абсолютны. (Заметим, что „A_c — открытое множество" не означает, что c кодирует открытое множество.)

Нам будут нужны более сильные утверждения об абсолютности. В частности, мы используем следующую лемму, доказательство которой не связано с темой этих лекций и здесь не приводится.

Лемма. *Пусть* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ *и* $\mathfrak{N}$ — *транзитивные модели* ZF + DC *и* c — *код в* $\mathfrak{M}$. *В этом случае*

$$\mathfrak{M} \models A_c^{\mathfrak{M}} = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } \mathfrak{N} \models A_c^{\mathfrak{N}} = 0.$$

Доказательство леммы основано на том факте, что утверждение $A_c = 0$ может быть выражено в виде

$$(*) \qquad (\forall x \in {}^{\omega}\omega)\, \varphi(x, c),$$

где φ — формула, содержащая только ограниченные кванторы $\forall n \in \omega$ или $\exists n \in \omega$. Имеется теорема (см. [40]) о том, что формулы вида (*) абсолютны для любой транзитивной модели ZF [16]).

Нулевым множеством назовем множество действительных чисел лебеговой меры нуль.

Лемма 62. *Пусть* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ *и* $\mathfrak{N}$*—транзитивные модели* ZF+DC *и* c *— код в* $\mathfrak{M}$.

$\mathfrak{M} \models (A_c^{\mathfrak{M}}$ *— нулевое множество*$)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathfrak{N} \models (A_c^{\mathfrak{N}} \text{ — нулевое множество}).$$

Доказательство. Из предыдущей леммы следует, что $A_c \subseteq A_d$ — абсолютное свойство, потому что

$$A_c \subseteq A_d \leftrightarrow A_e = 0, \text{ где } e \text{ кодирует } A_c - A_d.$$

Так как „c кодирует открытое множество“ — абсолютное свойство, то мера A_c также абсолютна как сумма длин открытых интервалов. Поэтому, чтобы доказать

$$\mathfrak{M} \models (A_c^{\mathfrak{M}} \text{ — нулевое множество}) \rightarrow \mathfrak{N} \models (A_c^{\mathfrak{N}} \text{ — нулевое множество})$$

воспользуемся тем, что

$$A_c \text{ — нулевое} \leftrightarrow \forall n \exists e \left(e \text{ кодирует открытое множество} \wedge \right.$$
$$\left. \wedge\, A_c \subseteq A_e \wedge \text{ мера } A_e \leqslant \frac{1}{n}\right).$$

С другой стороны, чтобы доказать $\mathfrak{N} \models (A_c^{\mathfrak{N}} \text{ — нулевое множество}) \rightarrow \mathfrak{M} \models (A_c^{\mathfrak{M}} \text{ — нулевое множество})$, используем эквивалентность

$$A_c \text{ — нулевое} \leftrightarrow \forall e\, [(e \text{ кодирует замкнутое множество} \wedge$$
$$\wedge\, A_e \subseteq A_c) \rightarrow \text{мера } A_e \text{ равна } 0].$$

Форсинг Соловея.

Если A и A' — борелевские множества и симметрическая разность $A \triangle A'$ — нулевое множество, тогда полагаем $A \approx A'$. Отношение $\approx$ есть отношение эквивалентности; пусть $[A]$ обозначает класс эквивалентности множества A. Ясно, что если $A \approx A'$, то $(R - A) \approx (R - A')$, и если $A_n \approx A'_n$ для каждого n, то $\bigcup\limits_{n \in \omega} A_n \approx \bigcup\limits_{n \in \omega} A'_n$.

Полагаем $[A] \leqslant [A']$, если $A - A'$ есть нулевое множество. Пусть B — множество классов эквивалентности. Покажем, что $(B, \leqslant)$ — полная булева алгебра.

(a) B — б. а.,

(b) B — счетно полная алгебра (т. е. F-полная, где F есть множество счетных подмножеств B).

Доказательство. $\sum\limits_{n\in\omega} [A_n] = \left[\bigcup\limits_{n\in\omega} A_n\right]$.

(c) B удовлетворяет у. с. ц.

Доказательство. $[A_1]\cdot[A_2] = 0$ тогда и только тогда, когда $A_1 \cap A_2$ — нулевое множество. Предположим, что множества A_α, $\alpha < \omega_1$, имеют положительную меру и $A_\alpha \cap A_\beta$ — нулевое множество при $\alpha \neq \beta$. Пусть $A'_\alpha = A_\alpha - \bigcup\limits_{\beta<\alpha} A_\beta = A_\alpha - \bigcup\limits_{\beta<\alpha} (A_\alpha \cap A_\beta)$, тогда каждое A'_α имеет положительную меру и $A'_\alpha \cap A'_\beta = 0$ при $\alpha \neq \beta$; противоречие.

Из леммы 63 следует, что B — п. б. а.

Лемма 63. *Если булева алгебра B удовлетворяет у. с. ц. и счетно полная, то B — полная алгебра.*

Доказательство. По трансфинитной индукции. Предположим, что сумма существует для каждого подмножества B мощности, меньшей k. Пусть $A = \{b_\alpha: \alpha < k\}$; покажем, что $\sum A$ существует. Пусть $a_\alpha = \sum\limits_{\beta<\alpha} b_\beta$ для каждого $\alpha < k$. Тогда k-последовательность $\{a_\alpha: \alpha < k\}$ имеет только счетное число различных элементов; в противном случае семейство $\{b_\alpha \cdot - a_\alpha: \alpha < k\}$ было бы несчетно, что невозможно, так как элементы семейства попарно несовместимы. Следовательно, $\sum\limits_{\alpha<k} a_\alpha$ существует. Легко проверить, что $\sum\limits_{\alpha<k} a_\alpha =$ н. в. г. (A).

Определенная выше п. б. а. B называется *алгеброй борелевских множеств по модулю нулевых множеств.*

Определение. Пусть $\mathfrak{M}$ — модель ZFC и $B \in \mathfrak{M}$ — алгебра борелевских множеств по модулю нулевых множеств (в $\mathfrak{M}$). Если G есть $\mathfrak{M}$-генерический у. ф. на B, полагаем

$$x_G = \sup\{r: r \text{ — рациональное число и } [(r, +\infty)] \in G\}.$$

Здесь $[(r, +\infty)]$ — класс эквивалентности открытого интервала $(r, +\infty)$ (в $\mathfrak{M}$). Действительное число x называется *числом*

Соловея над $\mathfrak{M}$, если $x = x_G$ для некоторого $\mathfrak{M}$-генерического у. ф. G на B [17]).

Заметим, что $x_G \notin \mathfrak{M}$. В противном случае $\{x_G\} = \bigcap_{n\in\omega} I_n$, где $\{I_n\colon n \in \omega\} \in \mathfrak{M}$ — семейство интервалов с рациональными концами. В силу $\mathfrak{M}$-генеричности G, мы получили бы $[\{x_G\}] \in G$, но $[\{x_G\}] = 0$. В частности, x_G — иррациональное число.

В следующих трех леммах будем писать A_c вместо $A_c^{\mathfrak{M}}$ и A_c^* вместо A_c^{V}, также (r_i, r_j) обозначает интервал в $\mathfrak{M}$ и $(r_i, r_j)^*$ — интервал в универсуме; B — алгебра борелевских множеств по модулю нулевых множеств (в $\mathfrak{M}$).

Лемма 64. *Пусть c — код в $\mathfrak{M}$ и G есть $\mathfrak{M}$-генерический у. ф. на B. Тогда*

$$x_G \in A_c^* \leftrightarrow [A_c] \in G.$$

Доказательство. Индукцией по построению кодов в $\mathfrak{M}$.

(1) Если $c \in C_0$, то $A_c = (r_1, r_2)$ и $A_c^* = (r_1, r_2)^*$. Мы имеем

$$\begin{aligned} x_G \in A_c^* &\leftrightarrow r_1 < x_G < r_2 \leftrightarrow r_1 < \sup\{r\colon [(r, +\infty)] \in G\} < r_2 \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow [(r_1, +\infty)] \in G \wedge [(r_2, +\infty)] \notin G \leftrightarrow [(r_1, r_2)] \in G \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow [A_c] \in G. \end{aligned}$$

(2) Если $c(0) = 2$, то $A_c = \bigcup_{i\in\omega} A_{\psi_i(c)}$ и $A_c^* = \bigcup_{i\in\omega} A_{\psi_i(c)}^*$. Мы имеем

$$\begin{aligned} x_G \in A_c^* &\leftrightarrow x_G \in \bigcup_{i\in\omega} A_{\psi_i(c)}^* \leftrightarrow \exists i\,(x_G \in A_{\psi_i(c)}^*) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \exists i\,([A_{\psi_i(c)}] \in G) \leftrightarrow \left[\bigcup_{i\in\omega} A_{\psi_i(c)}\right] \in G \leftrightarrow [A_c] \in G. \end{aligned}$$

(3) Аналогично для $c(0) = 1$.

Обозначим через $\mathfrak{M}[x]$ наименьшую транзитивную модель $\mathfrak{N}$ теории ZF, для которой $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ и $x \in \mathfrak{N}$. Мы не доказали существования такого минимального расширения в общем случае и употребляем введенное обозначение, когда существование $\mathfrak{M}[x]$ установлено.

Лемма 65. (a) *Действительное число x является числом Соловея над $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда x не принадлежит ни одному нулевому борелевскому множеству с кодом в $\mathfrak{M}$.*

(b) *Пусть x — число Соловея и*

$$G = \{[A_c]\colon x \in A_c^*\},$$

тогда $x = x_G$ и $\mathfrak{M}[G] = \mathfrak{M}[x]$.

Доказательство. (a) Пусть x — число Соловея и G — такое, что $x = x_G$. Для каждого кода c в $\mathfrak{M}$, если A_c^* — нулевое мно-

жество, тогда, по лемме 62, A_c — нулевое в $\mathfrak{M}$. Таким образом, $[A_c] \notin G$ и, по лемме 64, $x \notin A_c^*$.

Предположим теперь, что x не принадлежит ни одному нулевому борелевскому множеству A_c^* с кодом $c \in \mathfrak{M}$ и

$$G = \{[A_c]\colon\ x \in A_c^*\}.$$

Заметим, что если $A_c \approx A_d$, то $x \in A_c^* \leftrightarrow x \in A_d^*$. Действительно, $A_c \triangle A_d$ — нулевое множество; если e кодирует $A_c \triangle A_d$ в $\mathfrak{M}$, то $A_e^* = A_c^* \triangle A_d^*$ и A_e^* — нулевое множество по лемме 62. Следовательно, $x \notin A_c^* \triangle A_d^*$. Аналогично доказывается, что G — ультрафильтр на B.

Чтобы доказать $\mathfrak{M}$-генеричность G, предположим $X \subseteq B$, $X \in \mathfrak{M}$ и $\Sigma X \in G$. Докажем, что $X \cap G \neq 0$. Так как B удовлетворяет у. с. ц., то существует (в $\mathfrak{M}$) такое счетное семейство $\{A_{c_0}, A_{c_1}, \ldots, A_{c_n}, \ldots\}$, что $[A_{c_n}] \in X$ для каждого n и $\sum\limits_{n \in \omega} [A_{c_n}] = \Sigma X$. Пусть $c \in \mathfrak{M}$ — код для $\bigcup\limits_{n \in \omega} A_{c_n}$; так как $[A_c] \in G$, то $x \in A_c^*$. Однако $A_c^* = \bigcup\limits_{n \in \omega} A_{c_n}^*$, и поэтому существует такое n, что $x \in A_{c_n}^*$; следовательно, $[A_{c_n}] \in G$ и $X \cap G \neq 0$.

(b) Легко проверить, что если x — число Соловея и $G = \{[A_c]\colon x \in A_c^*\}$, то $x = x_G$. Очевидно, $x_G \in \mathfrak{M}[G]$. Если $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}$ — транзитивная модель и $x_G \in \mathfrak{N}$, то $G \in \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}[G] \subseteq \mathfrak{N}$. Следовательно, $\mathfrak{M}[G]$ есть наименьшая модель $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}$, для которой $x_G \in \mathfrak{N}$.

Лемма 66. *Пусть* φ *— формула,* U *— множество действительных чисел, и предположим, что*

1) *множество чисел, не являющихся числами Соловея над* $\mathfrak{M}$, *есть нулевое множество;*

2) $U = \{y \in R\colon\ \mathfrak{M}[y] \models \varphi(y)\}$.

Тогда U *есть* LM*-множество.*

Доказательство. Пусть $U' = \{y \in R\colon\ y$ есть число Соловея над $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}[y] \models \varphi(y)\}$. В силу 1) множество $U' \triangle U$ — нулевое, и, следовательно, достаточно показать, что U' есть LM-множество. Если y — число Соловея, то существует $G = G_y$, такое, что $y = y_G$ и $\mathfrak{M}[y] = \mathfrak{M}[G_y]$. Существует $\underline{x} \in \mathfrak{M}^B$, являющееся *каноническим числом Соловея* ($\underline{x}$ определяется в $\mathfrak{M}^B$ с помощью канонического генерического у. ф.); для каждого $\mathfrak{M}$-генерического у. ф. G интерпретацией $\underline{x}$ в $\mathfrak{M}[G]$ является x_G. Таким образом, $y \in U' \leftrightarrow \|\varphi(\underline{x})\| \in G_y$. Пусть теперь c — код в $\mathfrak{M}$ и $\|\varphi(\underline{x})\| = [A_c]$. Тогда мы имеем

$$y \in U' \leftrightarrow [A_c] \in G_y \leftrightarrow y \in A_c^*$$

для каждого y, которое является числом Соловея над $\mathfrak{M}$. Таким образом, множество $U' \triangle A_c^*$ — нулевое; так как борелевское множество A_c^* измеримо по Лебегу, то U' есть LM-множество.

Прежде чем доказывать теорему 43, установим некоторые свойства *автоморфизмов* булевозначных моделей. Пусть π — автоморфизм алгебры B. Можно определить автоморфизм π на V^B рекурсией по $\rho(x)$:

(i) $\pi(0) = 0$,

(ii) предположим, что π определено для всех $y \in \mathrm{dom}(x)$; определим πx, полагая $\mathrm{dom}(\pi x) = \pi'' \mathrm{dom}(x)$, $(\pi x)(\pi y) = \pi(x(y))$ для $\pi y \in \mathrm{dom}(\pi x)$.

Ясно, что π — взаимно однозначная функция, отображающая V^B на себя, и $\pi \check{x} = \check{x}$ для каждого x.

Лемма 67. $\| \varphi(\pi x, \ldots, \pi y) \| = \pi \| \varphi(x, \ldots, y) \|$.

Доказательство. Нужно сначала по индукции доказать равенство для $x \in y$ и $x = y$.

Лемма 68. *Допустим, что для каждого $b \in B$, если $b \neq 0$ и $b \neq 1$, существует автоморфизм π алгебры B, такой, что $\pi b \neq b$. Пусть φ — предложение, тогда $\| \varphi \|$ есть либо* 0, *либо* 1. *В общем случае, для любых $\check{x}, \ldots, \check{y}$*

$$\| \varphi(\check{x}, \ldots, \check{y}) \| \text{ есть либо } 0, \text{ либо } 1$$

при условии, что только $\check{x}, \ldots, \check{y}$ являются свободными переменными φ.

Доказательство тривиально.

Если B — п. б. а и $Z \subseteq B$, то *подалгеброй B, порожденной* множеством Z, называется наименьшая п. б. а. B_1, такая, что B_1 является подалгеброй B и $Z \subseteq B_1$. Порожденная подалгебра всегда существует как пересечение подалгебр, содержащих Z.

Лемма 69. *Пусть B — п. б. а. в транзитивной модели $\mathfrak{M}$ и G есть $\mathfrak{M}$-генерический у. ф. на B. Пусть $s \in \mathfrak{M}[G]$, $s \subseteq \mathfrak{M}$, и $\underset{\sim}{s} \in \mathfrak{M}^B$ — произвольное имя для s. Если $B_{\underset{\sim}{s}}$ — подалгебра B, порожденная $\{ \| \check{x} \in \underset{\sim}{s} \| : x \in \mathfrak{M} \}$, то*

$$\mathfrak{M}[G \cap B_{\underset{\sim}{s}}] = \mathfrak{M}[s].$$

Кроме того, $G \cap B_{\underset{\sim}{s}}$ определимо через s и $\underset{\sim}{s}$ равномерно относительно G, s, $\underset{\sim}{s}$, т. е. существует такая операция $\mathfrak{F}$ (возможно зависящая от параметра $\vec{p} \in \mathfrak{M}$), что $\mathfrak{M}[s] \models G \cap B_{\underset{\sim}{s}} = \mathfrak{F}(s, \underset{\sim}{s})$ для всех G, s, $\underset{\sim}{s}$.

Доказательство. Очевидно, $G \cap B_{\underset{\sim}{s}}$ есть $\mathfrak{M}$-генерический у. ф. на $B_{\underset{\sim}{s}}$, так что обозначение $\mathfrak{M}[G \cap B_{\underset{\sim}{s}}]$ имеет смысл. Докажем,

что модель $\mathfrak{M}[G \cap B_{\underline{s}}]$ является наименьшим расширением $\mathfrak{M}$, содержащим s.

(a) Для доказательства $s \in \mathfrak{M}[G \cap B_{\underline{s}}]$ заметим, что для всех $x \in \mathfrak{M}$

$$x \in s \leftrightarrow \| \check{x} \in \underline{s} \| \in G \leftrightarrow \| \check{x} \in \underline{s} \| \in G \cap B_{\underline{s}}.$$

(b) Пусть $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}$ и $s \in \mathfrak{N}$; докажем $G \cap B_{\underline{s}} \in \mathfrak{N}$. Заметим, что $B_{\underline{s}} = \bigcup \{A_\alpha\colon \alpha < |B|^+\}$, где $A_0 = \{\| \check{x} \in \underline{s} \|\colon x \in \mathfrak{M}\}$, $A_\alpha = \{-\bar{b}\colon b \in A_\beta$ для некоторого $\beta < \alpha\}$, если α нечетное, и $A_\alpha = \left\{\Sigma X\colon X \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta\right\}$, если α четное. Теперь имеем $G_0 = G \cap A_0 \in \mathfrak{N}$, так как $G \cap A_0 = \{\| \check{x} \in \underline{s} \|\colon x \in s\}$. Если $G_\beta = G \cap A_\beta \in \mathfrak{N}$ для $\beta < \alpha$, тогда $G_\alpha = G \cap A_\alpha \in \mathfrak{N}$, так как при нечетном α

$$G \cap A_\alpha = \{-b\colon (\exists \beta < \alpha)[b \in A_\beta \wedge b \notin G_\beta]\}$$

и при четном α

$$G \cap A_\alpha = \left\{\Sigma X\colon X \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta \text{ и } X \cap G_\beta \neq 0 \text{ для некоторого } \beta < \alpha\right\}.$$

Наконец, $G \cap B_{\underline{s}} = \bigcup_\alpha G_\alpha \in \mathfrak{N}$.

Построение $G \cup B_{\underline{s}}$ в (b) определяет операцию $\mathfrak{F}$ (параметром операции служит, например, $B \in \mathfrak{M}$).

Пусть $\mathfrak{M}$ — исходная модель и k — недостижимый кардинал в $\mathfrak{M}$. Пусть B есть $(\aleph_0, k)$-алгебра Леви. Алгебра B удовлетворяет k-ц. у. и однородна. Напомним, что $B = \mathrm{RO}(P)$, где P — множество конечных множеств p, состоящих из троек (α, n, β), таких, что $\beta < \alpha < k$, $n \in \omega$ и если $(\alpha, n, \beta_1) \in p$ и $(\alpha, n, \beta_2) \in p$, то $\beta_1 = \beta_2$. Пусть G есть $\mathfrak{M}$-генерический у. ф. на B. Множества $\mathfrak{M}$, B, P остаются фиксированными до окончания доказательства теоремы 43.

Лемма 70. *Предположим, что* $t \in \mathfrak{M}^B$, $\mathrm{dom}(t) \subseteq \{\check{x}\colon x \in \mathfrak{M}\}$ *и* $|\mathrm{rng}(t)| < k$. *Пусть* B_t — *подалгебра* B, *порожденная* $\mathrm{rng}(t)$. *Тогда для любой формулы* φ

$$\| \varphi(t) \| \in B_t.$$

Лемма представляет собой усиление леммы 68, основанное на однородности B (теорема 41).

Доказательство. Пусть $b = \| \varphi(t) \|$. Если π — автоморфизм B, такой, что $\pi | B_t$ — тождественное отображение, тогда $\pi t = t$ и поэтому $\pi b = b$. Докажем, что для любого $u \notin B_t$ существует автоморфизм π алгебры B, такой, что $\pi u \neq u$ и отображение $\pi | B_t$ тождественно.

Докажем сначала, что $|B_t| < k$. Так как P плотно в B и B удовлетворяет k-ц. у., то для каждого $a \in B$ существует $S_a \subseteq P$, такое, что $|S_a| < k$ и $a = \Sigma S_a$. Пусть $S = \bigcup \{S_a\colon a \in \operatorname{rng}(t)\}$; очевидно, $|S| < k$. Для $\lambda < k$ и $p \in P$ положим $p_\lambda = \{(\alpha, n, \beta)\colon \alpha < \lambda \wedge (\alpha, n, \beta) \in p\}$ и $P_\lambda = \{p_\lambda\colon p \in P\}$. Заметим, что если $q \in P_\lambda$, $p \in P$ и p, q несовместимы, то p_λ, q несовместимы. Так как $|S| < k$, то существует λ, для которого $S \subseteq P_\lambda$. Пусть $B_\lambda = \{\Sigma X\colon X \subseteq P_\lambda\}$. Мы утверждаем, что B_λ является подалгеброй B, порожденной P_λ. Достаточно показать, что $-u \in B_\lambda$, если $u \in B_\lambda$. Пусть $u \in B_\lambda$, $u = \Sigma X$, где $X \subseteq P_\lambda$, и пусть $-u = \Sigma Y$, где $Y \subseteq P$. Для $q \in X$, $p \in Y$ имеем $p \cdot q = 0$ и поэтому $p_\lambda \cdot q = 0$; следовательно, $-u = \Sigma \{p_\lambda\colon p \in Y\} \in B_\lambda$. Очевидно, $|B_\lambda| < \kappa$, и так как $S \subseteq B_\lambda$, то $B_t \subseteq B_\lambda$. Таким образом, $|B_t| < k$.

Пусть $u \notin B_t$. Положим $B' = \{a \cdot u + b \cdot -u\colon a, b \in B_t\}$. Так как $v \in B'$ влечет $-v \in B'$ и $X \subseteq B'$ влечет $\Sigma X \in B'$, получаем, что B' является подалгеброй B, порожденной $B_t \cup \{u\}$. Пусть $v = \Sigma \{a \in B_t\colon a \leqslant u\}$ и $w = \Sigma \{a \in B_t : a \leqslant -u\}$. Каждый элемент $x \in B'$ представим единственным образом в виде $x = a \cdot u + b \cdot -u + c$, где a, b, $c \in B_t$, $c \leqslant v + w$ и a, $b \leqslant -(v + w)$. Пусть π — автоморфизм B', определяемый равенством $\pi(a \cdot u + b \cdot -u + c) = b \cdot u + a \cdot -u + c$. Очевидно, $\pi a = a$ для всех $a \in B_t$ и $\pi(u) = -w \cdot -u + v \neq u$. В силу однородности B (теорема 41) автоморфизм π может быть продолжен до автоморфизма на B.

Закончим теперь доказательство теоремы 43. Отметим следующее: если $s \in \mathfrak{M}[G]$ — счетная последовательность ординалов, то s имеет имя $\underline{s} \in \mathfrak{M}^B$, такое, что $\|\underline{s}$ есть счетная последовательность ординалов $\| = 1$; используя k-ц. у., для каждого $n \in \omega$ получаем $|\{\alpha\colon \|(n, \alpha)\check{} \in \underline{s}\| \neq 0\}| < k$, и поэтому $|\operatorname{rng}(\underline{s})| < k$.

Пусть $u \in \mathfrak{M}[G]$ — множество действительных чисел, определимое (в $\mathfrak{M}[G]$) с помощью последовательности ординалов. Докажем, что U есть LM-множество в $\mathfrak{M}[G]$.

Существует формула φ и последовательность ординалов s, такие, что $\mathfrak{M}[G] \models (y \in U \leftrightarrow \varphi(y, s))$.

Пусть $\underline{s} \in \mathfrak{M}^B$ — имя для s и $|\operatorname{rng}(\underline{s})| < k$.

Предположим для простоты, что действительные числа отождествлены с подмножествами ω. Тогда имеем

$$
\begin{aligned}
y \in U &\leftrightarrow \mathfrak{M}[G] \models \varphi(y, s) \leftrightarrow \\
&\leftrightarrow (\exists \underline{y})[\underline{y} \text{ есть имя для } y \wedge \|\varphi(\underline{y}, \underline{s})\| \in G] \leftrightarrow \\
&\leftrightarrow (\exists \underline{y})[\operatorname{dom}(\underline{y}) = \{\check{n}\colon n \in \omega\} \wedge \operatorname{rng}(\underline{y}) \subseteq B \wedge \\
&\quad \wedge \forall n [n \in y \leftrightarrow \underline{y}(\check{n}) \in G] \wedge \|\varphi(\underline{y}, \underline{s})\| \in G].
\end{aligned}
$$

Пусть $B_{\underline{y},\,\underline{s}}$ — подалгебра B, порожденная $\operatorname{rng}(\underline{s}) \cup \operatorname{rng}(\underline{y})$. Ясно, что $\underline{y}(\check{n}) \in G \leftrightarrow \underline{y}(\check{n}) \in G \cap B_{\underline{y},\,\underline{s}}$ и, по лемме 70, $\|\varphi(\underline{y}, \underline{s})\| \in G \leftrightarrow \|\varphi(\underline{y}, \underline{s})\| \in G \cap B_{\underline{y},\,\underline{s}}$. По лемме 69, $\mathfrak{M}[G \cap B_{\underline{y},\,\underline{s}}] = \mathfrak{M}[y, s]$ и $G \cap B_{\underline{y},\,\underline{s}}$ определимо через y, s, $\underline{y}$, $\underline{s}$ (возможно, с помощью параметров из $\mathfrak{M}$) равномерно относительно G, y, s, $\underline{y}$, $\underline{s}$. Следовательно, существует формула φ_1, такая, что для некоторого $p \in \mathfrak{M}$

$$y \in U \leftrightarrow \mathfrak{M}[y, s] \models \exists \underline{y} \varphi_1(y, \underline{y}, s, p).$$

Пусть $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}[s]$. Существует формула ψ, такая, что для некоторого $q \in \mathfrak{N}$

$$y \in U \leftrightarrow \mathfrak{N}[y] \models \psi(y, q).$$

Теперь применим лемму 66 (которая справедлива также для формул, содержащих параметр $q \in \mathfrak{N}$). Для этого, однако, мы должны показать, что действительные числа в $\mathfrak{M}[G]$, за исключением нулевого множества, являются числами Соловея над $\mathfrak{N}$.

Лемма 71. $(R \cap \mathfrak{N})^{\mathfrak{M}[G]} = \aleph_0$.

Доказательство. $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}[s] = \mathfrak{M}[G \cap B_{\underline{s}}]$, где $|B_{\underline{s}}| < k$. В силу леммы 59, $(2^{\aleph_0})^{\mathfrak{N}} \leqslant (|B_{\underline{s}}|^{\aleph_0})^{\mathfrak{M}} = \lambda < k = (\aleph_1)^{\mathfrak{M}[G]}$.

Действительное число x не является числом Соловея над $\mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда x принадлежит некоторому нулевому множеству $A_c^{\mathfrak{M}[G]}$ с кодом $c \in \mathfrak{N}$. Так как существует только счетное число таких множеств в $\mathfrak{M}[G]$, то их сумма есть нулевое множество. Таким образом, все действительные числа в $\mathfrak{M}[G]$, за исключением нулевого множества, являются числами Соловея над $\mathfrak{N}$ и, следовательно, U измеримо по Лебегу.

Теорема 43 доказана.

Доказательство теоремы 42.

Если Con(ZFC + „существует недостижимый кардинал"), тогда, по теореме 43, Con(ZFC + „каждое множество действительных чисел, определимое с помощью счетной последовательности ординалов, есть LM-множество"). Таким образом, можно предполагать, что последнее утверждение в скобках выполняется в универсуме V. Определим такую транзитивную модель $\mathbf{M}$, что

$\mathbf{M} \models$ DC $\wedge$ каждое множество действительных чисел есть LM-множество.

Пусть $\mathbf{M}$ — класс множеств, наследственно ординально определимых с помощью счетных последовательностей ординалов, т. е.

$$u \in \mathbf{M} \leftrightarrow (\forall z \in \mathrm{TC}(\{u\}))\,(\exists s \in {}^{\omega}\mathrm{On})\,[z \in \mathrm{OD}(s)].$$

Тот факт, что $\mathbf{M}$ есть транзитивная модель ZF, доказывается так же, как для класса HOD.

Лемма 72. *Если f — функция на ω со значениями в $\mathbf{M}$, то $f \in \mathbf{M}$. В частности, каждое действительное число принадлежит $\mathbf{M}$.*

Доказательство. Существует определимая функция $\mathbf{F}(\alpha, s)$ на $\mathrm{On} \times {}^{\omega}\mathrm{On}$, такая, что $\mathbf{F}(\alpha, s)$ является взаимно однозначным отображением On на $\mathrm{OD}(s)$ для каждого s (см. разд. 14). Пусть $f\colon \omega \to \mathbf{M}$. Выберем α_n и s_n, $n \in \omega$, для которых $f(n) = \mathbf{F}(\alpha_n, s_n)$. Ясно, что f — функция, определимая с помощью $\langle \alpha_n\colon n \in \omega\rangle$ и $\langle s_n\colon n \in \omega\rangle$. Легко найти единственную последовательность ординалов u, с помощью которой определимы и $\langle \alpha_n : n \in \omega\rangle$, и $\langle s_n : n \in \omega\rangle$. Следовательно, функция f определима с помощью u и поэтому $f \in \mathbf{M}$.

Лемма 73. DC *выполняется в* $\mathbf{M}$.

Доказательство. Пусть X — непустое множество в $\mathbf{M}$, R — отношение на X и

$$(\forall x \in X)\,(\exists y \in X)\,xRy.$$

Так как DC выполняется в V, то существует функция $f\colon \omega \to X$, такая, что $f(n)\,R\,f(n+1)$ для каждого n. По лемме 72, $f \in \mathbf{M}$.

Лемма 74. *В* $\mathbf{M}$ *каждое множество действительных чисел есть* LM-множество.

Доказательство. Заметим, что $\mathbf{M}$ и V имеют одни и те же борелевские множества: действительные числа в $\mathbf{M}$ и V одни и те же, интервалы с рациональными концами также одинаковые и $A_c^{\mathbf{M}} = A_c$ для каждого кода c. Если U — множество действительных чисел в $\mathbf{M}$, то U есть LM-множество (в V), потому что U определимо с помощью счетной последовательности ординалов. Следовательно, U отличается от борелевского множества на нулевое множество, т. е.

$$\mathrm{V} \models (\exists A)\,(\exists N)\,(A \text{ — борелевское множество}, N \text{ — нулевое борелевское множество и } A \mathbin{\triangle} U \subseteq N).$$

По лемме 62, множество N — нулевое тогда и только тогда, когда $\mathbf{M} \models N$ — нулевое. Таким образом, мы имеем

$$\mathbf{M} \models (\exists A)\,(\exists N)\,(A \text{ — борелевское множество}, N \text{ — нулевое борелевское множество и } A \mathbin{\triangle} U \subseteq N).$$

Следовательно, $\mathbf{M} \models U$ есть LM-множество [18]).

21. Проблема Суслина

В разделе 6 приведена следующая проблема, поставленная Суслиным [48]. Пусть $(P, <)$ — упорядоченное множество, такое, что

(i) упорядочение P плотное и полное,

(ii) P не имеет ни первого, ни последнего элементов,

(iii) каждое семейство попарно непересекающихся интервалов в P не более чем счетно.

Изоморфно ли $(P, <)$ множеству всех действительных чисел?

Гипотеза Суслина (SH) предполагает, что ответ положительный. Контрпример для SH называется *континуумом Суслина*. Очевидно, что проблема сводится к следующему вопросу: каждое ли упорядоченное множество, обладающее свойством (iii), содержит счетное плотное подмножество?

Имеется другая формулировка проблемы.

Определение. Частично упорядоченное множество $(T, \leqslant)$ называется *деревом*, если для каждого $x \in T$ множество

$$\hat{x} = \{y \in T: y < x\}$$

вполне упорядочено отношением $<$. *Порядок* элемента x, обозначаемый $o(x)$, есть порядковый тип (ординал) множества $\hat{x}$. *Длина* дерева T определяется как

$$l(T) = \sup\{o(x) + 1: x \in T\}.$$

Дерево длины α называется α-*деревом*. Множество

$$U_\alpha = \{x \in T: o(x) = \alpha\}$$

называется α-ым *уровнем* T. Полагаем $T|\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta$. Дерево $(T_2, \leqslant_2)$ является *продолжением* $(T_1, \leqslant_1)$, если $T_1 = T_2|\alpha$ для некоторого α и отношения $\leqslant_1$, $\leqslant_2$ совпадают на T_1. Максимальное (линейно) упорядоченное подмножество дерева называется *ветвью*; α-*ветвь* есть ветвь длины α.

Лемма 75. *Если T есть ω-дерево и каждый уровень T конечен, то T содержит ω-ветвь.*

Доказательство. Построим ω-ветвь по рекурсии: пусть $x_n \in U_n$ выбрано; полагаем $x_{n+1} \in U_{n+1}$ таким, что $x_{n+1} > x_n$ и множество $\{y \in T: y \geqslant x_{n+1}\}$ бесконечно.

Определение. ω_1-дерево T называется *деревом Ароншайна*, если каждый уровень T счетен и T не содержит ω_1-ветвей.

Существование таких деревьев было доказано Ароншайном, см. [20].

Теорема 44. *Деревья Ароншайна существуют.*

Доказательство. Построим дерево T, элементами которого будут некоторые возрастающие, трансфинитные последовательности рациональных чисел. Для

$$x=\langle q_\xi\colon \xi<\alpha\rangle\in T,\ y=\langle r_\xi\colon \xi<\beta\rangle\in T$$

полагаем

$$x\leqslant y\leftrightarrow x\subseteq y.$$

Пусть Q — множество рациональных чисел. Так как $|Q|=\aleph_0$, T не будет содержать ω_1-ветвей. Чтобы обеспечить счетность уровней, построим T по рекурсии, выбирая для каждого $\alpha<\omega_1$ только некоторые α-последовательности рациональных чисел. Построим U_α, $\alpha<\omega_1$, так, чтобы $|U_\alpha|=\aleph_0$ и

$$(\alpha)\ (\forall x\in T\mid\alpha)(\forall q>\sup x)(\exists y\in U_\alpha)[y\supseteq x\wedge\sup y<q].$$

Случай 1. Уровни $U_0,\ \ldots,\ U_\alpha$, удовлетворяющие условиям (0), ..., (α), построены. Пусть $U_{\alpha+1}$ — множество всех $x^\frown q=x\cup\{(\alpha,\ q)\}$, где $x\in U_\alpha$, $q\in Q$ и $q>\sup x$. Ясно, что $U_{\alpha+1}$ счетно и условие $(\alpha+1)$ выполняется.

Случай 2. Пусть α — предельное число, $T\mid\alpha$ построено и условия (β) выполняются для $\beta<\alpha$. Докажем, что

$$(\forall x\in T\mid\alpha)(\forall q>\sup x)\exists y\ [y \text{ есть возрастающая } \alpha\text{-последовательность}\wedge x\subset y\wedge\{y\mid\beta\colon \beta<\alpha\}\subseteq T\mid\alpha\wedge\sup y\leqslant q].$$

Другими словами, α-последовательность y, существование которой утверждается, дает представление α-ветви в $T\mid\alpha$. Пусть $\langle\alpha_n\colon n\in\omega\rangle$ — возрастающая последовательность ординалов, для которой $\lim\alpha_n=\alpha$, и $\langle q_n\colon n\in\omega\rangle$ — возрастающая последовательность рациональных чисел, для которой $\sup x<q_0$ и $\lim q_n\leqslant q$. В силу (α_n) можно построить $\langle y_n\colon n\in\omega\rangle$ так, чтобы $y_n\in U_{\alpha_n}$, $x\subseteq y_0\subseteq y_1\subseteq\ldots\subseteq y_n\subseteq\ldots$ и $\sup y_n\leqslant q_n$ для каждого n. Теперь положим $y=\bigcup\limits_{n\in\omega}y_n$.

Для определения U_α выберем по одной из построенных α-последовательностей y для каждого $x\in T\mid\alpha$ и каждого $q>\sup x$. Пусть U_α состоит из выбранных y, тогда U_α счетно и условие (α) выполняется.

Отсюда следует, что $T=\bigcup\limits_{\alpha<\omega_1}U_\alpha$ является деревом Ароншайна.

Подмножество A дерева T называется *антицепью* в T, если элементы A попарно несравнимы.

Определение. ω_1-дерево T называется *деревом Суслина* (S-деревом), если T не содержит ω_1-ветвей и каждая антицепь в T не более чем счетна.

Лемма 76 (Миллер [30]). SH *выполняется тогда и только тогда, когда не существует* S-*дерева.*

Доказательство. (a) Пусть T есть S-дерево; определим упорядоченное множество P, которое удовлетворяет условию (iii) и не содержит счетного плотного подмножества. Возьмем в качестве P множество всех ветвей T. Линейно упорядочим каждый уровень T и положим $b_1 < b_2$, где b_1, $b_2 \in P$, если для наименьшего уровня U_α, на котором ветвь b_1 отлична от b_2, α-й член b_1 предшествует α-му члену b_2 в упорядочении U_α. Очевидно, $\leqslant$ линейно упорядочивает P. Каждый интервал в P содержит подинтервал вида $\{b \in P\colon x \in b\}$ для некоторого $x \in T$; если два таких подинтервала не пересекаются, то определяющие их элементы несравнимы. Следовательно, (iii) выполняется для P. Остается показать, что P не содержит счетного плотного подмножества. Предположим, что S — счетное плотное подмножество P и α — верхняя грань длин всех $b \in S$. Пусть $x \in T$ имеет порядок $> \alpha$ и существует не менее трех различных ветвей $b_1 < b_2 < b_3$, содержащих x. Ясно, что открытый интервал (b_1, b_3) не пересекается с S.

(b) Пусть P — упорядоченное множество, удовлетворяющее (iii), но не имеющее счетного плотного подмножества; построим S-дерево. Определяем по рекурсии: пусть I_α, $\alpha < \omega_1$, — открытый непустой интервал (a_α, b_α) в P, который не пересекается со счетным множеством $\{a_\beta\colon \beta < \alpha\} \cup \{b_\beta\colon \beta < \alpha\}$. Множество T всех I_α, $\alpha < \omega_1$, частично упорядоченное отношением $\supseteq$, является ω_1-деревом. Элементы I_α, I_β дерева T несравнимы тогда и только тогда, когда не пересекаются в P, так что T не содержит несчетных антицепей. Дерево T не содержит также ω_1-ветвей; действительно, если $(a_{\alpha_0}, b_{\alpha_0}) \supset \ldots$ $\ldots \supset (a_{\alpha_\xi}, b_{\alpha_\xi}) \supset \ldots$, $\xi < \omega_1$, есть ω_1-ветвь, тогда либо $\{(a_{\alpha_\xi}, a_{\alpha_{\xi+1}})\colon \xi < \omega_1\}$, либо $\{(b_{\alpha_{\xi+1}}, b_{\alpha_\xi})\colon \xi < \omega_1\}$ будет несчетным семейством попарно непересекающихся интервалов в P.

Определение. ω_1-дерево T называется *нормальным деревом Суслина* (NS-деревом), если

(a) каждое $x \in T$ *разветвляется*, т. е. существуют такие y, $z \in U_{\alpha+1}$, где $\alpha = o(x)$, что $y > x$, $z > x$ и $y \neq z$;

(b) для каждого $x \in T$ и $\alpha > o(x)$ существует $y \in U_\alpha$, такое, что $y > x$;

(c) T не содержит несчетных антицепей.

Заметим, что NS-дерево является S-деревом. Действительно, если b есть ω_1-ветвь в T, то для каждого $x \in b$ выберем такой элемент y_x, что $y_x > x$ и $y_x \notin b$; тогда множество $\{y_x\colon x \in b\}$ — антицепь.

Независимость гипотезы Суслина от аксиом ZFC была установлена с использованием переформулировки проблемы в терминах деревьев. Совместимость $\neg$ SH была доказана независимо Тенненбаумом [50] и Йехом [12], а совместимость SH доказана Соловеем и Тенненбаумом [46]. Позднее Енсен [16] доказал, что $V = L \to \neg$ SH.

Прежде чем излагать эти результаты, мы дадим описание нормальных деревьев с помощью трансфинитных последовательностей. Пусть ${}^{\omega_1}2 = \bigcup_{\alpha<\omega_1} {}^{\alpha}2$ — множество α-последовательностей, состоящих из 0 и 1, где $\alpha < \omega_1$. *Длина* $s \in {}^{\omega_1}2$, обозначаемая $l(s)$, равна dom (s). Если $l(s)=\alpha$, то $s^\frown\varepsilon$ ($\varepsilon=0, 1$) есть $(\alpha+1)$-последовательность $s \cup \{(\alpha, \varepsilon)\}$. Пусть $\alpha \leqslant \omega_1$; множество $T \subseteq {}^{<\alpha}2$ называется *нормальным двоичным α-деревом*, если

(1) для каждого $s \in T$, при $l(s) < \beta < \alpha$, $s^\frown 0 \in T$ и $s^\frown 1 \in T$;

(2) для каждого $s \in T$ и $\xi < \alpha$ существует $t \in T$, такое, что $l(t) = \xi$ и либо $t \subseteq s$, либо $s \subseteq t$;

(3) для каждого $\xi < \alpha$ множество $T \cap {}^{\xi}2$ не более чем счетно.

Нормальное двоичное ω_1-дерево T, частично упорядоченное отношением $\subseteq$, является нормальным ω_1-деревом. Порядок элемента $s \in T$ равен $l(s)$. Каждый α-й уровень T равен $T \cap {}^{\alpha}2$ и $T \restriction \alpha = T \cap {}^{<\alpha}2$. Если $\alpha < \omega_1$ — предельный ординал и b есть α-ветвь в $T \restriction \alpha$, то $s = \lim b = \bigcup \{t\colon t \in b\}$ принадлежит ${}^{\alpha}2$; мы будем отождествлять ветвь b с последовательностью $\lim b \in {}^{\alpha}2$.

Если $\alpha < \omega_1$ и T — нормальное двоичное α-дерево, тогда (2) влечет следующее условие:

(2′) для каждого $s \in T$ существует α-ветвь b в T, такая, что $s \subset b$.

Чтобы получить (2′) из (2) для предельного α, положим $\alpha = \lim\limits_{n\to\omega} \xi_n$, где $\langle \xi_n\colon n \in \omega\rangle$ — возрастающая последовательность, $\xi_0 = l(s)$, и применим (2) бесконечное число раз.

Теорема 45 (Тенненбаум, Йех). *Если* Con (ZFC), *то* Con (ZFC + $\neg$ SH).

Для доказательства построим генерическое расширение, в котором существует дерево Суслина.

Модель VIII (Йех [12]).

Пусть $\mathfrak{M}$ — модель ZFC. Множество $(P, <)$ вынуждающих условий состоит из нормальных двоичных α-деревьев, где $\alpha < \omega_1$. Условие T_1 сильнее T_2, если T_1 является продолжением T_2.

Пусть G есть $\mathfrak{M}$-генерическое множество условий. Пусть $\mathscr{T} = \bigcup \{T\colon T \in G\}$. Докажем, что $\mathscr{T}$ является нормальным деревом Суслина в $\mathfrak{M}[G]$.

Заметим сначала, что вынуждающие условия T_1 и T_2 являются несовместимыми, если T_1 и T_2 несравнимы. Следующая лемма утверждает, что каждая счетная убывающая последовательность условий имеет нижнюю грань.

Лемма 77. *Если $T_n \in P$ для всех n и $T_0 \geqslant T_1 \geqslant \ldots \geqslant T_n \geqslant \ldots$ (т. е. T_{n+1} есть продолжение T_n), то $T = \bigcup_{n \in \omega} T_n$ является вынуждающим условием.*

Доказательство. Непосредственная проверка.

Применяя лемму 57, получаем, что $\mathfrak{M}[G]$ и $\mathfrak{M}$ имеют одни и те же счетные подмножества ординалов, и $\omega_1^{\mathfrak{M}[G]} = \omega_1^{\mathfrak{M}}$.

Лемма 78. $\mathfrak{M}[G] \models \mathscr{T}$ *есть нормальное двоичное ω_1-дерево.*

Доказательство. Так как любые два элемента G совместимы и потому сравнимы, то, очевидно, $\mathscr{T}$ является нормальным двоичным деревом. Для доказательства равенства $l(\mathscr{T}) = \omega_1$ достаточно показать, что для каждого $\alpha < \omega_1$ у. ф. G содержит некоторое дерево T длины, не меньшей α. Это справедливо, если множество $\{T \in P\colon l(T) \geqslant \alpha\}$ плотно в P при $\alpha < \omega_1$ или, другими словами, если для каждого $T_0 \in P$ и $\alpha < \omega_1$ существует продолжение T_0, длина которого $\geqslant \alpha$. Последнее является следствием леммы 77 и утверждения: для каждого $T_0 \in P$ существует продолжение T, такое, что $l(T) = l(T_0) + 1$. Если $l(T_0)$ — последующий ординал, то продолжение T_0 нетрудно построить; если $l(T_0) = \xi$ — предельный ординал, то выберем ξ-ветвь b_s для каждого $s \in T_0$ и положим $T = T_0 \cup \{b_s\colon s \in T_0\}$.

Остается доказать, что $\mathscr{T}$ не содержит несчетных антицепей. Доказательство составляют следующие леммы.

Антицепь A дерева T называется *максимальной антицепью*, если для каждого $s \in T$ существует $t \in A$, такое, что s и t сравнимы; другими словами, если $A' \supseteq A$ — антицепь, то $A' = A$.

Лемма 79. *Пусть T — нормальное двоичное $(\alpha+1)$-дерево, A — максимальная антицепь в T и T' — продолжение T. Тогда A является максимальной антицепью в T'.*

Доказательство. Каждое $s \in T' - T$ больше элемента $s' = s\,|\,(\alpha+1)$ уровня $(\alpha+1)$ в T; существует $t \in A$, такое, что $s \supseteq s' \supseteq t$.

Лемма 80. *Пусть $\alpha < \omega_1$ — предельный ординал, T — нормальное двоичное α-дерево и A — максимальная антицепь в T. Тогда существует продолжение T' для T, такое, что $l(T') = \alpha + 1$ и A является максимальной антицепью в T'.*

Доказательство. Для каждого $s \in T$ существует такое $t \in A$, что $s \subseteq t$ или $t \subseteq s$. В любом случае существует α-ветвь b_s, для которой $s \subseteq b_s$ и $t \subseteq b_s$. Пусть $T' = T \cup \{b_s\colon s \in T\}$. Так как каждая ветвь b_s сравнима с некоторым $t \in A$, то антицепь A является максимальной в T'.

Лемма 81. $\mathfrak{M}[G] \models$ *каждая антицепь в* $\mathscr{T}$ *счетна.*

Доказательство. Так как любая антицепь может быть продолжена до максимальной антицепи, достаточно показать, что каждая максимальная антицепь счетна. Пусть $\underline{\mathscr{T}}$ — каноническое имя $\mathscr{T}$ и $\underline{\mathscr{A}}$ — имя подмножества из $\check{}^{\omega_1}2$; пусть T_0 — произвольное условие, для которого верно

(1) $T_0 \Vdash \underline{\mathscr{A}}$ есть максимальная антицепь в $\underline{\mathscr{T}}$.

Найдем $T \leqslant T_0$, такое, что

$$T \Vdash \underline{\mathscr{A}} \text{ счетно};$$

тогда лемма будет доказана.

Прежде всего заметим, что поскольку $\underline{\mathscr{T}}$ — каноническое имя для $\mathscr{T} = \bigcup\{T\colon T \in G\}$, то для каждого $\overline{T}$ имеем

$$T \Vdash \underline{\mathscr{T}} \restriction l(T)\check{} = \check{T}.$$

Используя (1), получаем, что для $s \in T_0$ существуют $T' \leqslant T_0$ и $t_s \in T'$, такие, что

(2) s, t_s сравнимы в T' и $T' \Vdash \check{t}_s \in \underline{\mathscr{A}}$.

Так как T_0 счетно, построим через бесконечное число шагов $T_1 \leqslant T_0$, для которого (2) верно при каждом $s \in T_0$. Вообще, если для $n \in \omega$ построено T_n, пусть T_{n+1} — такое продолжение T_n, что

(3) $(\forall s \in T_n)(\exists t_s \in T_{n+1})[s, t_s$ сравнимы и $T_{n+1} \Vdash \check{t}_s \in \underline{\mathscr{A}}]$.

Положим $T' = \bigcup\limits_{n \in \omega} T_n$. Для каждого $s \in T'$ существует $t_s \in T'$, для которого (2) верно.

Таким образом, если

$$A = \{t_s\colon s \in T'\},$$

то A является максимальной антицепью в T' и

(4) $$T' \Vdash \check{A} \subseteq \underline{\mathscr{A}}.$$

Применим теперь лемму 80 и получим продолжение T для T', такое, что $l(T) = l(T') + 1$ и A — максимальная антицепь в T.

По лемме 79, антицепь A остается максимальной в любом продолжении T, и мы получаем

(5) $T \Vdash \check{A}$ есть максимальная антицепь в $\underline{\mathscr{T}}$.

Отсюда следует

$$T \Vdash \check{A} = \underline{\mathscr{A}},$$

и поэтому

$$T \Vdash \underline{\mathscr{A}} \text{ счетно.}$$

Замечание. Существует взаимно однозначное отображение e множества указанных выше вынуждающих условий P в множество функций, значениями которых являются элементы $2^{\aleph_0}$, а областями определения — счетные ординалы; кроме того, $T_1 \leqslant T_2 \leftrightarrow e(T_1) \supseteq e(T_2)$. Отображение e может быть построено следующим образом (по рекурсии):

если $l(T) \geqslant 1$, тогда T имеет ровно $2^{\aleph_0}$ попарно несовместимых продолжений T_i, $i < 2^{\aleph_0}$, длины $l(T)+1$; положим $e(T_i) = (e(T))^\frown i$. Образы деревьев T составляют плотное множество в $(Q, \supseteq)$, где $Q = {}^{\omega_1}(2^{\aleph_0})$; следовательно, $\mathrm{RO}(P) = \mathrm{RO}(Q)$. Однако $(Q, \supseteq)$ уже использовалось как множество вынуждающих условий в разделе 18 (модель V). Из ранее доказанного следует, что $\mathfrak{M}[G] \models 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ независимо от величины $2^{\aleph_0}$ в $\mathfrak{M}$; кардиналы $\mathfrak{M}$, бо́льшие $2^{\aleph_0}$, сохраняются [19]).

Теорема 46 (Енсен [16]). *Гипотеза Суслина не выполняется в* L.

Доказательство. Предположим $\mathrm{V} = \mathrm{L}$ и построим нормальное двоичное ω_1-дерево, которое не содержит несчетных антицепей.

По рекурсии построим нормальные двоичные α-деревья T_α, такие, что для всех $\alpha \leqslant \beta$ дерево T_β является продолжением T_α; тогда положим $\mathscr{T} = \bigcup_{\alpha < \omega_1} T_\alpha$.

Рассмотрим три случая.

I. Если α — предельный ординал, положим

$$T_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} T_\beta.$$

II. Если α — последующий ординал, $\alpha = \beta + 1$, положим

$$T_{\alpha+1} = T_{\beta+2} = T_{\beta+1} \cup \{s^\frown \varepsilon\colon\ s \in T_{\beta+1},\ \varepsilon = 0, 1\}.$$

III. Чтобы построить $T_{\alpha+1}$ для предельного α, используем следующую лемму.

Лемма 82. *Пусть $\alpha < \omega_1$ — предельный ординал и T — нормальное двоичное α-дерево; пусть $\{A_n\colon\ n \in \omega\}$ — счетное семейство*

максимальных антицепей в T. Тогда существует продолжение T' для T, такое, что $l(T') = \alpha + 1$ и каждая антицепь A_n является максимальной в T'.

Доказательство аналогично доказательству леммы 80. Для $s \in T$ выберем такую α-ветвь b_s, что $b_s \cap A_n \neq 0$ при любом $n \in \omega$: пусть α_n — возрастающая последовательность с пределом α и $s = b_0 \subset b_1 \subset \ldots \subset b_n \subset \ldots$, $b_n \in T$, — последовательность α_n-ветвей, таких, что $b_n \cap A_n \neq 0$ для каждого n; $b_s = \bigcup b_n$.

Если $\alpha < \omega_1$, то существует функция f, отображающая ω на α; из аксиомы конструктивности следует, что $f \in L_\nu$ для некоторого $\nu < \omega_1$ (см. доказательство теоремы 20). Пусть $\alpha \mapsto \nu(\alpha)$ — фиксированная функция из ω_1 в ω_1, удовлетворяющая для каждого $\alpha < \omega_1$ условию

(a) существует функция $f \in L_{\nu(\alpha)}$, отображающая ω на α.

Пусть α — предельный ординал. Определим $T_{\alpha+1}$ как продолжение T_α, такое, что

(b) каждая антицепь $A \in L_{\nu(\alpha)}$, максимальная в T_α, является максимальной в $T_{\alpha+1}$.

Существование $T_{\alpha+1}$ следует из леммы 82, потому что $L_{\nu(\alpha)}$ счетно.

Положим $\mathscr{T} = \bigcup_{\alpha < \omega_1} T_\alpha$. Очевидно, $\mathscr{T}$ — нормальное двоичное ω_1-дерево. Остается показать, что $\mathscr{T}$ не содержит несчетных антицепей.

Используем такие же рассуждения, как при доказательстве теоремы 20, и предложение Θ — такое же, как в теореме 18. Пусть $\mathscr{A}$ — максимальная антицепь в $\mathscr{T}$. В силу принципа отражения существует S, для которого

(1) $S \models (A1) \wedge \Theta$;

(2) $\omega \in S$, $\omega_1 \in S$, $\mathscr{T} \in S$, $\mathscr{A} \in S$;

(3) $|S| = \aleph_0$;

(4) $S \models \forall x \exists \gamma\, (x \in L_\gamma)$;

(5) $S \models \neg \exists f$ (f отображает ω на ω_1);

(6) если $\xi < \omega_1$ и $\xi \in S$, то $\xi \subseteq S$ и $T_\xi \subseteq S$;

(7) если $s \in \mathscr{T}$ и $s \in S$, то существует $t \in \mathscr{A}$, такое, что $t \in S$ и t, s сравнимы.

По теореме об изоморфизме существует транзитивное множество M и $\in$-изоморфизм π между S и M. Из (4) следует, что $M = \bigcup \{L_\gamma : \gamma \in M\}$ и поэтому $M = L_\beta$ для некоторого $\beta < \omega_1$. В силу (6) имеем, что $\pi(\omega_1) = \alpha < \omega_1$, где $\alpha = \omega_1 \cap S$, и $\pi(\mathscr{T}) = T_\alpha$, $\pi(\mathscr{A}) = A = \mathscr{A} \cap {}^{\alpha}2 \subseteq \mathscr{A}$. В силу (7) антицепь A является макси-

мальной в T_α. Используя (5) и условие (a), получаем, что ω может быть отображено на α некоторой функцией из $L_{\nu(\alpha)}$, но не из L_β; отсюда $\beta < \nu(\alpha)$ и $L_\beta \subset L_{\nu(\alpha)}$. Последнее влечет $A \in M = L_\beta \subseteq L_{\nu(\alpha)}$. Таким образом, согласно (b), A — максимальная антицепь в $T_{\alpha+1}$. По лемме 79, A — максимальная антицепь в $\mathscr{T}$. Следовательно, $A = \mathscr{A}$ и поэтому антицепь $\mathscr{A}$ счетна.

Теорема 47 (Соловей, Тенненбаум [46]). $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \rightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \mathrm{SH})$.

Мы докажем эту теорему в следующем разделе с помощью аксиомы Мартина. Совместимость аксиомы Мартина доказывается методом Соловея и Тенненбаума.

22. Аксиома Мартина

Аксиома Мартина (MA). Если B — булева алгебра, удовлетворяющая у. с. ц., и F — семейство подмножеств B, такое, что $|F| < 2^{\aleph_0}$, то существует F-полный ультрафильтр G на B.

В силу теоремы 33 аксиома Мартина является следствием континуум-гипотезы. Этот раздел посвящен доказательству $\mathrm{Con}(\mathrm{MA} + 2^{\aleph_0} > \aleph_1)$.

MA может быть сформулирована в терминах ч. у. множеств. Пусть $(P, <)$ — частично упорядоченное множество и $F \subseteq \mathscr{P}(P)$. Множество $G \subseteq P$ называется *F-генерическим*, если

(a) $y \geqslant x \in G \rightarrow y \in G$;

(b) $x, y \in G \rightarrow (\exists z \in G)(z \leqslant x \wedge z \leqslant y)$;

(c) если $D \subseteq P$ плотно в P и $D \in F$, то $D \cap G \neq 0$.

Следующая лемма аналогична лемме 45.

Лемма 83. MA *эквивалентна утверждению: если* $(P, <)$ — *частично упорядоченное множество, удовлетворяющее у. с. ц., и если* $F \subseteq \mathscr{P}(P)$, $|F| < 2^{\aleph_0}$, *то существует F-генерическое подмножество P.*

Предположение о том, что B удовлетворяет у. с. ц., существенно. Ч. у. множество $(P, <) = \left(\bigcup_{n \in \omega} {}^n\omega_1, \supset\right)$ не удовлетворяет у. с. ц., и если мы возьмем $F = \{D_\alpha: \alpha < \omega_1\}$, где $D_\alpha = \{p \in P: \alpha \in \mathrm{rng}(p)\}$, тогда любое F-генерическое подмножество P порождает отображение ω на ω_1. Так как $|F| = \aleph_1$, то MA без предположения об у. с. ц. была бы несовместима с $2^{\aleph_0} > \aleph_1$.

Как упомянуто в предыдущем разделе, совместимость SH может быть доказана с помощью MA.

Лемма 84. *Гипотеза Суслина следует из* MA *и* $2^{\aleph_0} > \aleph_1$.

Доказательство. Предположим, что SH неверна. Пусть $(T, \leqslant)$ — дерево Суслина. Положим $(P, <) = (T, >)$; ясно, что P удовлетворяет у. с. ц. Возьмем $F = \{D_\alpha\colon \alpha < \omega_1\}$, где $D_\alpha = \{x \in T\colon o(x) \geqslant \alpha\}$; каждое D_α плотно в P. В силу MA существует F-генерическое подмножество G на P. Однако, как нетрудно проверить, G является ω_1-ветвью в T; противоречие [20]).

Теорема 48 (Соловей, Тенненбаум [46]; Мартин, Соловей [27]). *Если* $\mathfrak{M}$ — *модель* $\mathrm{ZFC} + 2^{\aleph_1} = \aleph_2$, *то существует генерическое расширение* $\mathfrak{M}[G]$, *в котором выполняются* MA *и* $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

Доказательство разобьем на ряд лемм.

Лемма 85. *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *модель* ZFC. *Если* B — *п. б. а. в* $\mathfrak{M}$, $D \in \mathfrak{M}^B$ *и* $\mathfrak{M}^B \models D$ *есть п. б. а., то существует п. б. а.* $C \in \mathfrak{M}$, *для которой*

(a) B *есть подалгебра* C;

(b) *если* G_1 *есть* $\mathfrak{M}$-*генерический у. ф. на* B *и* G_2 *есть* $\mathfrak{M}[G_1]$-*генерический у. ф. на* $i_{G_1}(D)$, *то существует* $\mathfrak{M}$-*генерический у. ф.* G *на* C, *такой, что*

$$\mathfrak{M}[G] = \mathfrak{M}[G_1][G_2]$$

(i_{G_1} — *интерпретация* $\mathfrak{M}^B$ *посредством* G_1);

(c) *если* G *есть* $\mathfrak{M}$-*генерический у. ф. на* C, *то существует* $\mathfrak{M}[G \cap B]$-*генерический у. ф.* G_2 *на* $i_{G \cap B}(D)$, *такой, что* $\mathfrak{M}[G] = \mathfrak{M}[G \cap B][G_2]$.

(Мораль: двойной форсинг не лучше однократного.) Будем обозначать указанную алгебру C через $C = D * B$.

Доказательство. Пусть $B \in \mathfrak{M}$ и $D \in \mathfrak{M}^B$; без ограничения общности можно предположить, что существуют $\mathrm{D} \in \mathfrak{M}$ и $\leqslant_D \in \mathfrak{M}^B$, такие, что $\mathfrak{M}^B \models D = (\check{\mathrm{D}}, \leqslant_D)$. Рассмотрим класс C_0, состоящий из таких $c \in \mathfrak{M}^B$, что $\| c \in \check{\mathrm{D}} \| = 1$, и пусть C содержит по одному элементу c из каждого класса $\approx$-эквивалентности на C_0, где $c \approx c'$ определяется как $\| c = c' \| = 1$. Для $c_1, c_2 \in C$ положим

$$c_1 \leqslant_C c_2 \leftrightarrow \| c_1 \leqslant_D c_2 \| = 1.$$

(1) $(C, \leqslant_C)$ — полная булева алгебра.

Предоставляем читателю проверить, что C — булева алгебра. Для доказательства полноты C предположим, что A — произвольное подмножество C. Если $\bar{A} \in \mathfrak{M}^B$ и $\mathrm{dom}(\bar{A}) = A$, $\bar{A}(c) = 1$

для всех $c \in A$, то мы имеем $\| \bar{A} \subseteq \check{\mathrm{D}} \| = 1$ и поэтому

$$\left\| \exists t \left(t = \sum_{D} \bar{A} \right) \right\| = 1.$$

По лемме 50 существует $c \in \mathfrak{M}^B$, для которого

$$\left\| c \in \check{\mathrm{D}} \wedge c = \sum_{D} \bar{A} \right\| = 1.$$

Можно предполагать, что $c \in C$, и тогда $c = \sum_{C} A$.

(2) Существует вложение B в C.
Для каждого $b \in B$ существует единственное $c \in C$, такое, что

$$\| c = \check{1}_{\mathrm{D}} \| = b \quad \text{и} \quad \| c = \check{0}_{\mathrm{D}} \| = -b^{21});$$

положим $c = e(b)$. Функция e: $B \to C$ является вложением.

(3) Рассмотрим множество $P = \{(b, d)\colon b \neq 0_B \wedge d \neq 0_{\mathrm{D}}\}$. Для каждой пары (b, d) существует единственное $c \in C$, такое, что

$$\| c = \check{d} \| = b \quad \text{и} \quad \| c = \check{0}_{\mathrm{D}} \| = -b.$$

Множество таких c плотно в C. Отождествим $(b, d) \in P$ и соответствующее c; заметим, что

$$(b_1, d_1) \leqslant_C (b_2, d_2) \leftrightarrow b_1 \leqslant_B b_2 \wedge b_1 \leqslant \| \check{d}_1 \leqslant_D \check{d}_2 \|.$$

(4) Доказательство (b). Пусть G_1, G_2 удовлетворяют условиям леммы. Положим $G = G_1 \times G_2$ и докажем, что G есть $\mathfrak{M}$-генерическое подмножество P. Так как $G \in \mathfrak{M}[G_1][G_2]$, то $\mathfrak{M}[G] = \mathfrak{M}[G_1][G_2]$. Для доказательства $\mathfrak{M}$-генеричности G предположим, что $\Delta \in \mathfrak{M}$ — открыто-плотное множество в P. Тогда $\Delta_1 = \{b \in B\colon (b, 1_{\mathrm{D}}) \in \Delta\}$ плотно в B[22]) и $\Delta_2 = \{d \in D\colon (1_B, d) \in \Delta\}$ плотно в $i_{G_1}(D)$. Следовательно, существуют $b \in G_1$ и $d \in G_2$, такие, что $(b, 1_{\mathrm{D}}) \in \Delta$ и $(1_B, d) \in \Delta$; так как Δ — открытое множество, то $(b, d) \in \Delta \cap G$.

(5) Доказательство (c). Пусть G удовлетворяет условиям леммы. Положим $G_1 = G \cap B$ и $G_2 = \{d \in \mathrm{D}\colon (1_B, d) \in G\}$. Легко видеть, что G_1 есть $\mathfrak{M}$-генерический у. ф. на B. Докажем, что G_2 есть $\mathfrak{M}[G_1]$-генерический на $i_{G_1}(D)$. Равенство $\mathfrak{M}[G_1][G_2] = \mathfrak{M}[G]$ следует из того, что $G \cap P = G_1 \times G_2$ и $\mathfrak{M}[G] = \mathfrak{M}[G \cap P]$. Для доказательства $\mathfrak{M}[G_1]$-генеричности G_2 предположим, что $\Delta \in \mathfrak{M}[G_1]$ — плотное подмножество D. Существует имя $\underline{\Delta} \in \mathfrak{M}^B$ для Δ, такое, что $\| \underline{\Delta}$ плотно в $\check{\mathrm{D}} \| = b_0 \in G_1$. Положим

$$\Delta_1 = \{(b, d) \in P\colon b \leqslant b_0 \wedge b \leqslant \| \check{d} \in \underline{\Delta} \|\}.$$

Мы утверждаем, что Δ_1 *плотно в* P *ниже* $(b_0, 1_{\mathrm{D}})$, т. е. для $(b, d) \leqslant_C (b_0, 1_{\mathrm{D}})$ существует $(b'. d') \in \Delta_1$, такое, что $(b', d') \leqslant_C$

$\leqslant_C (b, d)$. Пусть $(b, d) \leqslant_C (b_0, 1_D)$. Так как $b_0 = \| \underset{\sim}{\Delta}$ плотно в $\check{D} \|$, то существуют $b' \leqslant b$ и $d' \in D$, такие, что

$$b' \leqslant \| \check{d}' \in \underset{\sim}{\Delta} \wedge \check{d}' \leqslant_D \check{d} \|;$$

поэтому $(b', d') \in \Delta_1$ и $(b', d') \leqslant_C (b, d)$. Следовательно, Δ_1 плотно в P ниже элемента $(b_0, 1_D)$, который принадлежит G; в силу генеричности G получаем $\Delta_1 \cap G \neq 0$. Таким образом, в Δ_1 существует $(b, d) \in G$, т. е. $b \leqslant \| \check{d} \in \underset{\sim}{\Delta} \|$; отсюда следует, что $b \in G_1$, $d \in G_2$ и $d \in \Delta$. Поэтому $\Delta \cap G_2 \neq 0$ и G_2 является $\mathfrak{M}[G_1]$-генерическим.

Лемма 86. *Пусть $C = D * B$. Если B удовлетворяет у. с. ц. (в $\mathfrak{M}$) и $\mathfrak{M}^B \models$ (D удовлетворяет у. с. ц.), то C удовлетворяет у. с. ц. (в $\mathfrak{M}$).*

Доказательство. Предположим C не удовлетворяет у. с. ц.; докажем, что

$$\| D \text{ не удовлетворяет у. с. ц.} \| > 0.$$

Пусть P — плотное подмножество C, определенное в лемме 85, (3). P не удовлетворяет у. с. ц., и, следовательно, существуют попарно C-несовместимые элементы

$$(b_\alpha, d_\alpha), \quad \alpha < \omega_1.$$

Если (b, d) и (b', d) являются C-несовместимыми, то b и b' также B-несовместимы; так как B удовлетворяет у. с. ц., только счетному числу b_α может соответствовать одно и то же d_α, и поэтому можно предполагать, что d_α попарно различны. Рассмотрим W, являющееся $\mathfrak{M}^B$-подмножеством $\check{D}$:

$$\mathrm{dom}(W) = \{\check{d}_\alpha\colon \alpha < \omega_1\}, \quad W(\check{d}_\alpha) = b_\alpha \quad \text{для каждого } \alpha < \omega_1.$$

Ясно, что $\| \check{d}_\alpha \in W \| = b_\alpha$ и $\| W \subseteq \check{D} \| = 1$. Докажем

(1) $\| W$ состоит из попарно D-несовместимых элементов $\| = 1$,
(2) $\| W$ несчетно $\| > 0$.

Чтобы доказать (1), предположим противное; тогда существуют $b \neq 0$, $d \neq 0$, $d^1 = d_{\alpha_1}$ и $d^2 = d_{\alpha_2}$, такие, что

$$b \leqslant \| \check{d}^1 \in W \wedge \check{d}^2 \in W \wedge \check{d} \leqslant_D \check{d}^1 \wedge \check{d} \leqslant_D \check{d}^2 \|.$$

Мы имеем $b \leqslant \| \check{d}^i \in W \| = b^i = b_{\alpha_i}$ для $i = 1, 2$. По определению $\leqslant_C$, $(b, d) \leqslant_C (b^i, d^i)$; однако это противоречит C-несовместимости (b^1, d^1) и (b^2, d^2).

Чтобы доказать (2), предположим противное, т. е.

$$\| W \text{ счетно} \| = 1.$$

Так как B удовлетворяет у. с. ц., то ω_1 абсолютно и поэтому

$$\|\exists\alpha<\check{\omega}_1)\,\varphi(\alpha)\|=1,$$

где $\varphi(\alpha)$ — формула $(\forall\beta>\alpha)[d_\beta\notin W]$. Мы хотим найти $\alpha<\omega_1$, для которого $\|\varphi(\check{\alpha})\|=1$. Существуют $b_0\neq 0$, $\alpha_0<\omega_1$, такие, что $b_0\|-\varphi(\check{\alpha}_0)$; определяем b_ξ и α_ξ так, чтобы b_ξ были попарно несовместимы, $\alpha_\xi<\omega_1$ и либо $b=\Sigma\{b_\xi\colon \xi<\zeta\}=1$, либо $b_\zeta<-b$, $\alpha_\zeta<\omega_1$ и $b_\zeta\|-\varphi(\check{\alpha}_\zeta)$. Так как B удовлетворяет у. с. ц., то существует счетный ординал γ, для которого $\Sigma\{b_\xi\colon \xi<\gamma\}=1$. Пусть $\alpha<\omega_1$ есть верхняя грань α_ξ, $\xi<\gamma$. Тогда $\|\varphi(\check{\alpha})\|=1$, т. е.

$$\|(\forall\beta>\alpha)\,d_\beta\notin W\|=1.$$

Следовательно, для каждого $\beta>\alpha$ имеем $\|\check{d}_\beta\notin W\|=1$, и $b_\beta=\|\check{d}_\beta\in W\|=0$; противоречие.

Лемма 87. *Предположим* $2^{\aleph_1}=\aleph_2$; *пусть* $C=D*B$, *и пусть алгебры* B *и* C *удовлетворяют у. с. ц. Если* $|B|\leqslant\aleph_2$ *и* $\mathfrak{M}^B\models(|D|\leqslant\aleph_2)$, *то* $|C|\leqslant\aleph_2$.

Доказательство. Так как B удовлетворяет у. с. ц., то $\mathfrak{M}^B$ имеет те же кардиналы, что и $\mathfrak{M}$. Можно предполагать, что $\mathfrak{M}^B\models$ поле $(D)=\check{\mathrm{D}}$, где $\mathrm{D}\in\mathfrak{M}$ и $|\mathrm{D}|\leqslant\aleph_2$. Алгебра C имеет плотное подмножество $P\subseteq B\times\mathrm{D}$; так как $|P|\leqslant\aleph_2$ и C удовлетворяет у. с. ц., то $|C|\leqslant|P|^{\aleph_0}\leqslant\aleph_2$ по лемме 58.

Лемма 88. *Пусть* B — *п. б. а. в* $\mathfrak{M}$; *пусть*

$$\mathfrak{M}^B\models(P,<)\text{ — }\textit{ч. у. множество}$$

и $F\in\mathfrak{M}^B$ — *множество подмножеств* P *в* $\mathfrak{M}^B$. *Если* $\mathfrak{M}^B\models(D=\mathrm{RO}(P))$ *и* $C=D*B$, *то*

$$\mathfrak{M}^C\models\textit{существует } F\textit{-генерическое подмножество } P.$$

Доказательство. В $\mathfrak{M}^C$ пусть G — канонический генерический у. ф. на $\check{C}$, $G_1=\hat{B}\cap G$ и G_2 есть $\mathfrak{M}^B[G_1]$-генерический у. ф. на D (см. лемму 85). Тогда $\mathfrak{M}^C\models G_2\cap P$ есть F-генерическое подмножество P.

Лемма 89. MA *эквивалентна следующему утверждению: если* $(P,<)$ — *произвольное частично упорядоченное множество, удовлетворяющее у. с. ц.,* $|P|<2^{\aleph_1}$, *и если* $F\subseteq\mathscr{P}(P)$, $|F|<2^{\aleph_0}$, *то существует* F-*генерическое подмножество* P.

Доказательство. Приведенная формулировка MA отличается от формулировки в лемме 83 ограничением $|P|<2^{\aleph_1}$. Предположим, что при $|P|<2^{\aleph_0}$ утверждение аксиомы выполняется.

Пусть P' удовлетворяет у. с. ц. и $|F'|<2^{\aleph_0}$, найдем F'-генерическое подмножество $G'\subseteq P'$. Можно считать, что каждое $D\in F'$ плотно в P'. Пусть p_0 — произвольный элемент P' и $P_0=\{p_0\}$. Для каждого n положим $P_{n+1}=P_n\cup Q_n$, где Q_n получено следующим образом: для $p\in P_n$ и $D\in F'$ выбирается такое q, что $q\leqslant p$; Q_n состоит из выбранных q. Пусть $P=\bigcup\limits_{n\in\omega}P_n$. Ясно, что $|P|<2^{\aleph_0}$ и $D\cap P$ плотно в P. Пусть $F=\{D\cap P\colon D\in F'\}$. По предположению существует F-генерическое $G\subseteq P$. Теперь $G'=\{p'\in P'\colon (\exists q\in G)[q\leqslant p]\}$ есть F'-генерическое подмножество P'.

Лемма 90. *Предположим, что*

(*) *если* $(P,<)$ — *частично упорядоченное множество, удовлетворяющее у. с. ц.,* $|P|\leqslant\aleph_1$, *и если* $F\subseteq\mathcal{P}(P)$, $|F|\leqslant\aleph_1$, *то существует* F-*генерическое подмножество* P.

Тогда $2^{\aleph_0}>\aleph_1$. *Следовательно, если выполняется* (*) *и* $2^{\aleph_0}\leqslant\aleph_2$, *то выполняется* MA *и* $2^{\aleph_0}=\aleph_2$.

Доказательство. Пусть $S\subseteq{}^{\omega}2$, $|S|\leqslant\aleph_1$; найдем последовательность $s\in{}^{\omega}2$, которая не принадлежит S. Пусть $(P,<)=\left(\bigcup\limits_{n\in\omega}{}^{n}2,\supset\right)$. Для $s\in S$ положим $D_s=\{p\in P\colon p\not\subseteq s\}$. Каждое D_s плотно в P. Пусть $F=\{D_s\colon s\in S\}$ и G есть F-генерическое подмножество P. Тогда $\bigcup G\in{}^{\omega}2$ и $\bigcup G\notin S$.

Определение. Пусть α — предельный ординал; пусть B_ξ, $\xi<\alpha$, — п. б. а. и B_ξ является подалгеброй B_η при $\xi<\eta<\alpha$. Полагаем $B=\bigcup\limits_{\xi<\alpha}B_\xi$; B — булева алгебра. П. б. а. $\overline{B}=\mathrm{RO}(B)$ называется *прямым пределом* B_ξ,

$$\overline{B}=\lim_{\xi\to\alpha}B_\xi.$$

Теорема 49 (Соловей, Тенненбаум [46]). *Пусть* α — *предельный ординал; пусть* $B_0\subseteq B_1\subseteq\ldots\subseteq B_\xi\subseteq\ldots$ $(\xi<\alpha)$ — *п. б. а. удовлетворяющие у. с. ц., и* $B_\gamma=\lim\limits_{\xi\to\gamma}B_\xi$ *для каждого предельного ординала* $\gamma<\alpha$. *Тогда* $\lim\limits_{\xi\to\alpha}B_\xi$ *удовлетворяет у. с. ц.*

Докажем комбинаторную лемму.

Лемма 91. *Пусть* W — *несчетное семейство конечных подмножеств* ω_1. *Существуют несчетное* $Z\subseteq W$ *и конечное множество* $S\subseteq\omega_1$, *такие, что* $X\cap Y=S$ *для любых неравных* $X,Y\in Z$.

Доказательство. Для $X\in W$ пусть X_n есть n-й элемент X. Существует n, для которого $\{X_n\colon X\in W\}$ несчетно; пусть n_0 —

наименьшее такое n. Можно построить несчетное $W_1 \subseteq W$, такое, что для любых неравных $X, Y \in W_1$ элемент X_{n_0} больше всех элементов Y (или наоборот). Семейство $\{\{X_0, \ldots, X_{n_0-1}\}: X \in W_1\}$ не более чем счетно; следовательно, существует несчетное $Z \subseteq W_1$, такое, что $S = \{X_0, \ldots, X_{n_0-1}\}$ одно и то же для каждого $X \in Z$.

Доказательство теоремы 49. Допустим $\lim\limits_{\xi \to \alpha} B_\xi$ не удовлетворяет у. с. ц., так что существует $W \subseteq \bigcup\limits_{\xi < \alpha} B_\xi$, состоящее из попарно несовместимых элементов, и $|W| = \aleph_1$. Отсюда следует $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega_1$ и можно предполагать, что $\alpha = \omega_1$. Для каждого $x \in \bigcup\limits_{\alpha < \omega_1} B_\alpha$ пусть $\rho(x)$ есть наименьшее ξ, такое, что $x \in B_\xi$. Для $x \neq 0$ при условии, что $\rho(x) > 0$, определим $j(x) \neq 0$ следующим образом: если $\rho(x) = \xi + 1$, то $j(x) = \Pi\{r \in B_\xi: r \geqslant x\}$; если $\rho(x) = \xi$ — предельный ординал, то полагаем $j(x)$ равным такому $r \neq 0$, $r \in \bigcup\limits_{\nu \in \xi} B_\nu$, что $r < x$.

Теперь мы утверждаем, что если $\rho(y) < \rho(x)$ и $x \cdot y = 0$, то $j(x) \cdot y = 0$. Так как $x \cdot y = 0$ означает, что $-y \geqslant x$, и $-y \in B_\alpha$, то при $\rho(x) = \alpha + 1$ мы имеем $-y \geqslant j(x)$ по определению j. Если $\rho(x)$ — предельный ординал, утверждение тривиально.

Для каждого $x \neq 0$ последовательность $x, j(x), j(j(x)), \ldots$ конечна, поскольку $\rho(x) > \rho(j(x)) > \rho(j^2(x)) \ldots$ Пусть $s(x) = \{\rho(x), \rho(j(x)), \rho(j^2(x)), \ldots\}$; $s(x)$ — конечное подмножество ω_1 для каждого $x \neq 0$. По лемме 91 существуют несчетное $Z \subseteq W$ и конечное $S \subseteq \omega_1$, такие, что $s(x) \cap s(y) = S$ для неравных $x, y \in Z$. Пусть $\gamma = \max S$ (S непусто, так как $0 \in s(x)$ для каждого x); если $x \in Z$, пусть x_γ — элемент множества $\{x, j(x), j^2(x), \ldots\}$, для которого $\rho(x_\gamma) = \gamma$.

Используя повторно равенство $j(x) \cdot y = 0$, справедливое при $x \cdot y = 0$ и $\rho(y) < \rho(x)$, получаем $x_\gamma \cdot y_\gamma = 0$ для любых неравных $x, y \in Z$. Таким образом, $\{x_\gamma: x_\gamma \in Z\}$ — несчетное множество попарно несовместимых элементов B_γ; это противоречит предположению о том, что B_γ удовлетворяет у. с. ц.

Модель IX. (Доказательство теоремы 48).

Пусть $\mathfrak{M}$ — модель ZFC и $\mathfrak{M} \models 2^{\aleph_1} = \aleph_2$. Построим п. б. а. $B \in \mathfrak{M}$, для которой

$$\mathfrak{M}^B \models \mathrm{MA} \wedge 2^{\aleph_1} = \aleph_2.$$

Алгебра B будет определена как прямой предел ω_2-последовательности п. б. а. B_α, $\alpha < \omega_2$; мы построим B_α по рекурсии так, чтобы каждая алгебра B_α удовлетворяла у. с. ц. и $|B_\alpha| \leqslant \aleph_2$. Пусть $\alpha \longmapsto (u_\alpha, v_\alpha)$ — каноническое, взаимно однозначное отображение ω_2 на $\omega_2 \times \omega_2$. Так как $|B_\alpha| \leqslant \aleph_2$ и B_α удовлетворяет у. с. ц., то $\mathfrak{M}^{B_\alpha}$ имеет только $\aleph_2$ подмножеств $(\omega_1 \times \omega_1)\check{}$. В частности, существует только $\aleph_2$ отношений $R \in \mathfrak{M}^{B_\alpha}$, таких, что

$$\mathfrak{M}^{B_\alpha} \models R \text{ есть частично упорядоченное отношение на } \check{\omega}_1, \text{ удовлетворяющее у. с. ц.;}$$

пусть $<_\alpha$ является u_α-ым таким отношением в $\mathfrak{M}^{B_{v_\alpha}}$.

Если α — предельный ординал, полагаем $B_\alpha = \lim\limits_{\xi \to \alpha} B_\xi$. Для $\alpha < \omega_2$ построим $B_{\alpha+1}$ с помощью B_α, как в лемме 88: $<_\alpha$ есть частичное упорядочение $\check{\omega}_1$ в $\mathfrak{M}^{B_\alpha} \supseteq \mathfrak{M}^{B_{v_\alpha}}$; пусть F — множество подмножеств $\check{\omega}_1$ в $\mathfrak{M}^{B_\alpha}$, тогда существует алгебра $B_{\alpha+1} \supseteq B_\alpha$, такая, что $B_{\alpha+1}$ удовлетворяет у. с. ц., $|B_{\alpha+1}| \leqslant \aleph_2$ и

$$\mathfrak{M}^{B_{\alpha+1}} \models \text{существует } F\text{-генерическое подмножество } (\check{\omega}_1, <_\alpha).$$

Пусть $B = \lim\limits_{\alpha \to \omega_2} B_\alpha$; докажем, что

$\mathfrak{M}^B \models (2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_2$ и для любого частично упорядоченного отношения $\prec$ на $\check{\omega}_1$, удовлетворяющего у. с. ц., и для любого $F \subseteq \mathscr{P}(\check{\omega}_1)$, $|F| \leqslant \aleph_1$, существует F-генерическое подмножество $(\check{\omega}_1, \prec))$.

Последнее по лемме 90 влечет $\mathfrak{M}^B \models \mathrm{MA} \wedge 2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

Так как B удовлетворяет у. с. ц. и $|B| \leqslant \aleph_2$, то кардиналы абсолютны и $\mathfrak{M}^B \models 2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_2$. Пусть $\prec$, $F \in \mathfrak{M}^B$ такие, что

$$\mathfrak{M}^B \models (\check{\omega}_1, \prec) \text{ удовлетворяет у. с. ц., } F \subseteq \mathscr{P}(\check{\omega}_1) \text{ и } |F| \leqslant \aleph_1.$$

Заметим, что если $X \in \mathfrak{M}^B$ и $\mathfrak{M}^B \models X \subseteq \check{\omega}_1$, то можно считать, что $X \in \mathfrak{M}^{B_\gamma}$ для некоторого $\gamma < \omega_2$. Действительно, X определяется значениями $b_\xi = \| \check{\xi} \in X \|$, $\xi < \omega_1$, и каждое b_ξ равно $\sum\limits_{n \in \omega} b_{\xi, n}$, где $b_{\xi, n} \in B_\gamma$ (следствие у. с. ц.); поэтому существует $\gamma < \omega_2$, такое, что $b_{\xi, n} \in B_\gamma$ для всех $\xi < \omega_1$, $n \in \omega$.

Аналогично, если $\mathscr{X}$ — семейство, мощности $\aleph_1$, подмножеств $\check{\omega}_1$ в $\mathfrak{M}^B$, то $\mathscr{X}$ кодируется некоторым подмножеством $(\omega_1 \times \omega_1)\check{}$, и снова можно считать, что $\mathscr{X} \in \mathfrak{M}^{B_\gamma}$ для некоторого $\gamma < \omega_2$.

Таким образом, мы можем предполагать, что $\prec$, $F \in \mathfrak{M}^{B_\gamma}$ для некоторого $\gamma < \omega_2$. Существует такое $\alpha \geqslant \gamma$, что $\prec = <_\alpha$. Если

F' — множество подмножеств $\check{\omega}_1$ в $\mathfrak{M}^{B_\alpha}$, то

$\mathfrak{M}^{B_{\alpha+1}} \models$ существует F'-генерическое подмножество $(\check{\omega}_1, <_\alpha)$.

Так как $\mathfrak{M}^B \supseteq \mathfrak{M}^{B_{\alpha+1}}$ и $\mathfrak{M}^B \models F' \supseteq F$, мы имеем

$\mathfrak{M}^B \models$ существует F-генерическое подмножество $(\check{\omega}_1, <)$.

Теорема 48 доказана.

В качестве примера применения метода Мартина и Соловея докажем следующую теорему, одно из многочисленных следствий MA.

Теорема 50 (Мартин, Соловей [27]). *Если выполняется* MA, *то для каждого* $k < 2^{\aleph_0}$

(a) *объединение* k *нулевых множеств действительных чисел является нулевым множеством,*

(b) *объединение* k *измеримых по Лебегу множеств действительных чисел является измеримым по Лебегу множеством,*

(c) *если* A_α, $\alpha < k$, *попарно непересекающиеся* LM-*множества действительных чисел, то*

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha<k} A_\alpha\right) = \sum_{\alpha<k} \mu(A_\alpha),$$

где μ *обозначает меру Лебега и*

$$\sum_{i\in I} s_i = \sup_{\substack{e\subseteq I \\ e-\text{конечно}}} \sum_{i\in e} s_i$$

для любых неотрицательных действительных чисел s_i, $i \in I$.

Доказательство. Заметим сначала, что (b) и (c) следуют из (a). Если A_α, $\alpha < k$, являются LM-множествами, положим $A'_\alpha = A_\alpha - \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$. В силу принципа индукции каждое A'_α является LM-множеством и $\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta = \bigcup_{\beta<\alpha} A'_\beta$ есть объединение попарно непересекающихся LM-множеств; из этих множеств только счетное число имеет положительную меру, остальные — нулевые множества.

Чтобы доказать (a), предположим A_α, $\alpha < k$, — нулевые множества и $A = \bigcup_{\alpha<k} A_\alpha$. Докажем, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $U \supseteq A$ меры $\leqslant \varepsilon$. Пусть $\varepsilon > 0$. Пусть P — множество всех открытых множеств действительных чисел меры $< \varepsilon$; множества $p \in P$ частично упорядочены отношением $\supset$. Докажем теперь, что $(P, \supset)$ удовлетворяет у. с. ц. Элементы p, $q \in P$ несовместимы тогда и только тогда, когда

$\mu(p \cup q) \geqslant \varepsilon$. Предположим, существует несчетное множество $W \subseteq P$ попарно несовместимых элементов. Существует $\delta > 0$, такое, что множество $Z = \{p \in W\colon \mu(p) < \varepsilon - \delta\}$ несчетно. Для каждого $p \in Z$ пусть $q_p \subseteq p$ — конечное объединение открытых интервалов с рациональными концами и $\mu(p - q_p) \leqslant \frac{\delta}{2}$. Поскольку $\{q_p\colon p \in Z\}$ счетно, достаточно показать, что $q_p \neq q_{p'}$ для неравных $p, p' \in Z$; тогда получим противоречие. Если $p \neq p'$, то $\mu(p \cup p') \geqslant \varepsilon$ и $\mu(q_p \cup q_{p'}) \geqslant \mu(p \cup p') - \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2} \geqslant \varepsilon - \delta$; так как $\mu(q_p) < \varepsilon - \delta$ для $p \in Z$, мы имеем $q_p \neq q_{p'}$, что доказывает у. с. ц.

Теперь для $\alpha < k$ положим $D_\alpha = \{p \in P\colon A_\alpha \subseteq p\}$. Докажем, что D_α плотно. Пусть $p \in P$. Так как A_α — нулевое множество, то существует открытое множество $q \supseteq A_\alpha$, для которого $\mu(q) + \mu(p) < \varepsilon$; следовательно, $p \cup q \in D_\alpha$ и $p \cup q \supseteq p$.

Пусть $F = \{D_\alpha\colon \alpha < k\}$. В силу MA существует F-генерическое $G \subseteq P$. Множество $U = \bigcup G$ открыто и, в силу F-генеричности G, $U \supseteq A_\alpha$ для каждого $\alpha < k$; отсюда $U \supseteq A$. Остается показать, что $\mu(U) \leqslant \varepsilon$. Если $\mu(U) > \varepsilon$, то существуют $p_1, \ldots, p_n \in G$, для которых $\mu(p_1 \cup \ldots \cup p_n) > \varepsilon$. Но, в силу свойств F-генерического множества, $p_1 \cup \ldots \cup p_n$ принадлежит G и поэтому $p_1 \cup \ldots \cup p_n \in P$, т. е. $\mu(p_1 \cup \ldots \cup p_n) < \varepsilon$; противоречие.

23. Совершенный форсинг

В этом разделе мы изложим результат Сакса о форсинге, в котором вынуждающими условиями являются совершенные множества действительных чисел.

Начнем с общей леммы о форсинге. Пусть P_1 и P_2 — частично упорядоченные множества (с наибольшим элементом 1) и $P = P_1 \oplus P_2$. Как установлено выше (разд. 18), если G есть $\mathfrak{M}$-генерическое подмножество P, то $G = G_1 \times G_2$, где $G_1 = \{p \in P_1\colon (p, 1) \in G\}$ и $G_2 = \{q \in P_2\colon (1, q) \in G\}$ и G_i есть $\mathfrak{M}_i$-генерическое подмножество P_i $(i = 1, 2)$. Следующая лемма дает дополнительную информацию.

Лемма 92. *Пусть $P_1, P_2 \in \mathfrak{M}$ — ч. у. множества (с наибольшим элементом 1). Если $G = G_1 \times G_2$ есть $\mathfrak{M}$-генерическое подмножество $P = P_1 \oplus P_2$, то $G_1 \subseteq P_2$ является $\mathfrak{M}[G_1]$-генерическим (и $G_1 \subseteq P_1$ является $\mathfrak{M}[G_2]$-генерическим).*

Доказательство. Нужно доказать только, что $D \cap G_2 \neq 0$, если $D \in \mathfrak{M}[G_1]$ плотно в P_2. Пусть $\underline{D}$ — имя D; существует некоторое $p_0 \in G_1$, для которого

$$p_0 \Vdash \underline{D} \text{ плотно в } \check{P}_2,$$

т. е.

$$(\forall p \leqslant p_0)(\forall q \in P_2)(\exists p' \leqslant p)(\exists q' \leqslant q)[p' \Vdash \check{q}' \in \underline{D}].$$

Другими словами, $\Delta = \{(p', q'): p' \Vdash q' \in \underline{D}\}$ плотно в $P_1 \oplus P_2$ ниже $(p_0, 1)$. Так как $(p_0, 1) \in G$ и G — генерическое, имеем $\Delta \cap G \neq 0$. Поэтому существуют $p' \in G_1$ и $q \in G_2$, такие, что $p' \Vdash \check{q}' \in \underline{D}$. Отсюда следует $D \cap G_2 \neq 0$.

Рассмотрим вынуждающие условия Коэна: $P = \bigcup_{n \in \omega} {}^n 2$. Вместо этих условий можно использовать открыто-замкнутые множества $A_p = \{u \in {}^\omega 2: p \subseteq u\}$ в канторовом пространстве ${}^\omega 2$, частично упорядоченные отношением $\subseteq$, т. е. $p < q \leftrightarrow A_p \subset A_q$. Если $G \subseteq P$ есть $\mathfrak{M}$-генерическое подмножество P, определим в $\mathfrak{M}[G]$:

$$A_p^* = \{u \in {}^\omega 2: p \subseteq u\} \text{ для каждого } p \in P.$$

Если $x_G = \bigcup G$ — генерический элемент ${}^\omega 2$, тогда легко видеть, что

$$x_G \in A_p^* \leftrightarrow p \in G,$$

и мы имеем $\mathfrak{M}[G] = \mathfrak{M}[x_G]$, а также

$$\bigcap_{p \in G} A_p^* = \{x_G\}.$$

Для каждого $p \in P$ пусть p^e, p^o — ограничения p на четных и нечетных числах; пусть $P^e = \{p^e: p \in P\}$ и $P^o = \{p^o: p \in P\}$. Можно отождествить P с $P^e \oplus P^o$ и тогда $G = G^e \times G^o$, $G^e \subseteq P^e$ является $\mathfrak{M}[G^o]$-генерическим и $G^o \subseteq P^o$ является $\mathfrak{M}[G^e]$-генерическим; также $x_G = x_{G^e} \cup x_{G^o}$. Но множества P^e и P^o изоморфны P, и в исходной модели нет генерического $G \subseteq P$; таким образом, мы имеем

$$\mathfrak{M}[x_G] = \mathfrak{M}[x_{G^e}][x_{G^o}]$$

и

$$x_{G^o} \notin \mathfrak{M}[x_{G^e}].$$

Вывод: существует $y \in \mathfrak{M}[x_G]$, $y \in {}^\omega 2$, такое, что

$$\mathfrak{M} \subsetneqq \mathfrak{M}[y] \subsetneqq \mathfrak{M}[x_G].$$

Полученное утверждение не имеет места, когда вынуждающими условиями являются совершенные множества.

Теорема 51 (Сакс [36]). *Если $\mathfrak{M}$ — модель* ZFC, *то существует генерическое расширение $\mathfrak{M}[G]$, такое, что $\mathfrak{M}[G] = \mathfrak{M}[x]$ для некоторого $x \subseteq \omega$ и если $y \in \mathfrak{M}[x]$ — множество ординалов, тогда либо $y \in \mathfrak{M}$, либо $\mathfrak{M}[y] = \mathfrak{M}[x]$.*

Рассмотрим замкнутый интервал [0, 1] действительных чисел. Множество $P \subseteq [0, 1]$ называется *совершенным*, если P непусто, замкнуто и не содержит изолированных точек.

Лемма 93. *Пусть для каждого* $s \in \bigcup_{n \in \omega} {}^n2$, p_s — *совершенное множество, такое, что*

(a) *диаметр* p_s *стремится к* 0 *с увеличением длины* s,

(b) $p_{s^\frown 0} \cap p_{s^\frown 1} = 0$ и $p_{s^\frown \varepsilon} \subseteq p_s$ $(\varepsilon = 0, 1)$.

Тогда множество $p = \bigcap_{n \in \omega} \bigcup_{s \in {}^n2} p_s = \bigcup_{f \in {}^\omega 2} \bigcap_{n \in \omega} p_{f|n}$ *совершенное.*

Доказательство. Очевидно, что p непусто и замкнуто. Для каждой функции $f \in {}^\omega 2$ пересечение $\bigcap_{n \in \omega} p_{f|n}$ является единичным множеством; пусть $\bigcap_{n \in \omega} p_{f|n} = \{x_f\}$. Покажем, что точка x_f не изолирована. Пусть $\varepsilon > 0$. Существует n, для которого диаметр $p_{f|n}$ меньше ε. Пусть $g \in {}^\omega 2$ — такая функция, что $g|n = f|n$ и $g(n) \neq f(n)$. Тогда $x_g \neq x_f$ и $|x_g - x_f| < \varepsilon$. Следовательно, x_f — неизолированная точка.

Модель X (Сакс [36]).

Пусть $\mathfrak{M}$ — модель ZFC. Рассмотрим множество вынуждающих условий $(P, \subset)$, где P — множество совершенных подмножеств отрезка [0, 1]. Пусть $G \subseteq P$ является $\mathfrak{M}$-генерическим. Каждое $p \in P$ — замкнутое множество действительных чисел (в $\mathfrak{M}$), и поэтому p является дополнением некоторой суммы открытых интервалов с рациональными концами. Если рассмотреть дополнение этой суммы в $\mathfrak{M}[G]$, мы получим замкнутое множество $p^* \in \mathfrak{M}[G]$. Пересечение $\bigcap_{p \in G} p^*$ непусто и, так как G содержит множества произвольно малого диаметра, $\bigcap_{p \in G} p^* = \{x_G\}$ для некоторого действительного числа x_G. Ясно, что $p \in G$ влечет $x_G \in p^*$. С другой стороны, если $p \notin G$, то существует $q \in G$, несовместимое с p, и, следовательно, $q \cap p = 0$ для некоторого $q \subseteq q'$. Так как расстояние между p и q положительно (в $\mathfrak{M}$), то расстояние между p^* и q^* также положительно (в $\mathfrak{M}[G]$) и поэтому $p^* \cap q^* = 0$; следовательно, $x_G \notin p^*$. Таким образом, имеем

$$p \in G \leftrightarrow x_G \in p^*$$

и

$$\mathfrak{M}[G] = \mathfrak{M}[x_G].$$

Для доказательства теоремы 51 предположим, что $y \in \mathfrak{M}[G]$ — множество ординалов и $y \subseteq \gamma$. Пусть $\underline{y}$ — имя для y.

Если $p \in P$, тогда либо

$$\text{(I)}\quad (\exists q \leqslant p)(\forall \alpha < \gamma)\ [q \text{ разрешает } \check{\alpha} \in \underline{y}],$$

либо

$$\text{(II)}\quad (\forall q \leqslant p)(\exists \alpha < \gamma)(\exists q_1,\ q_2 \leqslant q)\ [q_1 \Vdash \neg(\check{\alpha} \in \underline{y}) \wedge q_2 \Vdash (\check{\alpha} \in \underline{y})].$$

Если верно (I), тогда пусть $r(p)$ — одно из q, существующих в силу (I). Если верно (II), тогда для каждого $q \leqslant p$ можно найти непересекающиеся q_1, q_2; для $s \in \bigcup_{n \in \omega} {}^n2$ определим p_s следующим образом:

(1) $p_0 = p$,

(2) если p_s определено, то существуют $\alpha_s < \gamma$, $p_{s^\frown 0}$, $p_{s^\frown 1}$, такие, что

(a) $p_{s^\frown \varepsilon} \subseteq p$ $(\varepsilon = 0,\ 1)$, $p_{s^\frown 0} \cap p_{s^\frown 1} = 0$;

(b) диаметр $p_{s^\frown \varepsilon}$ меньше $\frac{1}{2^n}$, где n — длина s, $\varepsilon = 0,\ 1$;

(c) $p_{s^\frown 0} \Vdash (\check{\alpha}_s \in \underline{y})$, $p_{s^\frown 1} \Vdash (\check{\alpha}_s \notin \underline{y})$.

Положим $r(p) = \bigcap_{n \in \omega} \bigcup_{s \in {}^n 2} p_s$; по лемме 93, $r(p)$ является совершенным множеством.

Множество $D = \{r(p)\colon p \in P\}$ плотно в P и поэтому существует $q \in D \cap G$.

I. Если q разрешает $\check{\alpha} \in \underline{y}$ для каждого $\alpha < \gamma$, то

$$y = \{\alpha < \gamma\colon q \Vdash \check{\alpha} \in \underline{y}\}$$

и, следовательно, $y \in \mathfrak{M}$.

II. Пусть $q = \bigcap_{n \in \omega} \bigcup_{s \in {}^n 2} p_s$ для некоторого $p \in P$; докажем, что $x_G \in \mathfrak{M}[y]$.

В $\mathfrak{M}[y]$ определим $f \in {}^\omega 2$ по рекурсии:

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_{f|n} \in y; \\ 1, & \text{если } \alpha_{f|n} \notin y. \end{cases}$$

Для каждого n, $\bigcup_{s \in {}^n 2} p_s \supseteq q \in G$. По определению f, имеем

$$p_s \in G \leftrightarrow s \subseteq f \quad \text{для} \quad s \in \bigcup_{n \in \omega} {}^n 2.$$

Отсюда следует, что $x_G \in p_s^*$ для $s \subseteq f$. Так как $p_s = (p_s)^{\mathfrak{M}_1} \subseteq (p_s)^{\mathfrak{M}[y]} \subseteq (p_s)^{\mathfrak{M}[G]} = p_s^*$ и диаметр p_s^* стремится к 0 с увеличением длины s, то

$$\bigcap_{s \subseteq f} (p_s)^{\mathfrak{M}[G]} = \bigcap_{s \subseteq f} p_s^* = \{x_G\}.$$

Таким образом, $x_G \in \mathfrak{M}[y]$, что доказывает теорему 51.

Замечание. Если $\mathfrak{M} \models 2^{\aleph_0} = \aleph_1$, тогда кардиналы в $\mathfrak{M}[G]$ абсолютны. Действительно, число совершенных множеств $2^{\aleph_0} = \aleph_1$; следовательно, выполняется ω_2-ц. у. и кардиналы $\geqslant \aleph_2$ сохраняются. Тот факт, что ω_1 сохраняется, может быть доказан (даже без $\mathfrak{M} \models$ CH) с помощью леммы 93. Если CH выполняется в $\mathfrak{M}$, можно рассуждать следующим образом: если $\omega_1^{\mathfrak{M}}$ счетно в $\mathfrak{M}[G]$, то $(2^{\aleph_0})^{\mathfrak{M}}$ счетно в $\mathfrak{M}[G]$ и, применяя лемму 55, найдем $G' \in \mathfrak{M}[G]$, которое является $\mathfrak{M}$-генерическим множеством коэновских вынуждающих условий; но, как доказано в начале этого раздела, тогда существует $y \subseteq \omega$, такое, что

$$\mathfrak{M} \subsetneqq \mathfrak{M}[y] \subsetneqq \mathfrak{M}[G'] \subseteqq \mathfrak{M}[G];$$

противоречие.

24. Об ординальной определимости

Докажем один из результатов о непротиворечивости, приведенных в разделе 14.

Теорема 52 (Леви [24]). *Если* Con (ZFC), *то* Con (L=HOD$\neq$ $\neq$ V).

Доказательство. Рассмотрим вынуждающие условия Коэна:

$$(P, <) = \left(\bigcup_{n \in \omega} {}^n2, \supset\right).$$

Пусть $B = \mathrm{RO}(P)$ в L. Докажем, что если $u \in B$ и $u \neq 0, 1$, то существует автоморфизм π на B, такой, что $\pi u \neq u$. Это влечет по лемме 68, что $\|\varphi(\check{x})\|$ равно 0 или 1 для любой формулы φ.

Пусть G есть L-генерический у. ф. на B. Докажем

$$\mathrm{L}[G] \models \mathrm{L} = \mathrm{HOD};$$

для этого достаточно доказать, что каждое множество ординалов $\mathrm{L}[G]$, являющееся OD-множеством в $\mathrm{L}[G]$, конструктивно. Пусть $y \in \mathrm{L}[G]$ — множество ординалов и для некоторых ординалов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

$$\alpha \in y \leftrightarrow \mathrm{L}[G] \models \varphi(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \quad \text{для всех } \alpha.$$

Тогда

$$\alpha \in y \leftrightarrow \| \varphi(\check{\alpha}, \check{\alpha}_1, \ldots, \check{\alpha}_n) \| \in G \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \| \varphi(\check{\alpha}, \check{\alpha}_1, \ldots, \check{\alpha}_n) \| = 1$$

и поэтому $y \in \mathrm{L}$.

Таким образом, достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 94. *Пусть* $B = \mathrm{RO}(P)$, *где* $(P, <) = \left(\bigcup_{n \in \omega} {}^n 2, \supset\right)$. *Для любой пары* $u, v \in B$, *если* $u, v \neq 0, 1$, *существует автоморфизм* π *алгебры* B, *такой, что* $\pi u = v$.

Доказательство. Заметим, что если π — взаимно однозначное отображение B на B, сохраняющее порядок (с. п. отображение), то π является автоморфизмом.

Пусть $q, p \in P$ — произвольные вынуждающие условия. Существует взаимно однозначное с. п. отображение $\pi_{p,q}$ множества $P_p = \{r \in P: r \leqslant p\}$ на P_q:

$$\pi_{pq}(p^\frown \varepsilon_1^\frown \varepsilon_2^\frown \ldots {}^\frown \varepsilon_n) = q^\frown \varepsilon_1^\frown \varepsilon_2^\frown \ldots {}^\frown \varepsilon_n.$$

Это отображение может быть продолжено до взаимно однозначного с. п. отображения $B_p = \{x \in B: x \leqslant p\}$ на B_q.

Пусть $u, v \in B$ и $u, v \neq 0, 1$. Существуют счетные множества $\{p_n^+: n \in \omega\}$, $\{p_n^-: n \in \omega\}$, $\{q_n^+: n \in \omega\}$, $\{q_n^-: n \in \omega\}$ попарно несовместимых элементов P, такие, что

$$u = \sum_{n \in \omega} p_n^+, \quad -u = \sum_{n \in \omega} p_n^-, \quad v = \sum_{n \in \omega} q_n^+, \quad -v = \sum_{n \in \omega} q_n^-.$$

Пусть π_n^+, π_n^- — взаимно однозначные с. п. отображения $B_{p_n^+}$ на $B_{q_n^+}$ и $B_{p_n^-}$ на $B_{q_n^-}$ соответственно. Определим π следующим образом: для всех $x \in B$

$$\pi(x) = \sum_{n \in \omega} \pi_n^+(x \cdot p_n^+) + \sum_{n \in \omega} \pi_n^-(x \cdot p_n^-).$$

Отображение π является автоморфизмом на B и $\pi u = v$.

Следствие. $B \models \mathrm{L}[G]$ *не существует* OD *вполне-упорядочения действительных чисел* [23]). (Если существует взаимно однозначное OD-отображение действительных чисел в ординалы, тогда каждое действительное число является OD-множеством.)

25. Независимость AC

Теорема 53 (Коэн). *Если* $\mathrm{Con}(\mathrm{ZF})$, *то* $\mathrm{Con}(\mathrm{ZF} + \neg\mathrm{AC})$.

Мы воспользуемся обобщением доказательства Коэна (см. [38], [56] и [13]). Введем понятие *симметрического расширения*, являющегося подмоделью генерического расширения.

Пусть $\mathfrak{M}$ — модель ZFC. Пусть B — п. б. а. в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^B$ — соответствующая булевозначная модель. Каждый автоморфизм π на B может быть продолжен до автоморфизма π на $\mathfrak{M}^B$ (см. разд. 20).

Пусть $\mathcal{G}$ — группа автоморфизмов B. Для каждого $x \in \mathfrak{M}^B$ положим

$$\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(x) = \{\pi \in \mathcal{G}\colon\ \pi(x) = x\};$$

$\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(x)$ является подгруппой $\mathcal{G}$. Множество $\mathcal{F}$ подгрупп $\mathcal{G}$ называется *нормальным фильтром* на $\mathcal{G}$, если для всех подгрупп H, K группы $\mathcal{G}$

(i) $\mathcal{G} \in \mathcal{F}$;

(ii) если $H \supseteq K \in \mathcal{F}$, то $H \in \mathcal{F}$;

(iii) если $H \in \mathcal{F}$ и $K \in \mathcal{F}$, то $H \cap K \in \mathcal{F}$;

(iv) если $\pi \in \mathcal{G}$ и $H \in \mathcal{F}$, то $\pi H \pi^{-1} \in \mathcal{F}$.

Пусть B, $\mathcal{G}$, $\mathcal{F} \in \mathfrak{M}$ фиксированы. Мы говорим, что элемент $x \in \mathfrak{M}^B$ *симметрический*, если $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(x) \in \mathcal{F}$. Класс $\mathrm{HS} \subseteq \mathfrak{M}^B$ *наследственно симметрических* элементов $\mathfrak{M}^B$ определяется по рекурсии:

(a) $0 \in \mathrm{HS}$,

(b) если $\mathrm{dom}(x) \subseteq \mathrm{HS}$ и x — симметрический элемент, то $x \in \mathrm{HS}$.

Так как $\pi(\check{x}) = \check{x}$ для любых $\pi \in \mathcal{G}$ и $x \in \mathfrak{M}$, то HS содержит каждое $\check{x}$.

Пусть теперь G есть $\mathfrak{M}$-генерический у. ф. на B. Пусть i_G — интерпретация $\mathfrak{M}^B$ посредством G. Положим

$$\mathfrak{N} = i_G''\mathrm{HS}.$$

Очевидно, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}[G]$.

Лемма 95. *$\mathfrak{N}$ является моделью* ZF.

Доказательство. Предполагая, что $\mathfrak{M}$ — собственный класс, докажем транзитивность, замкнутость относительно гёделевских операций и почти универсальность $\mathfrak{N}$. Если $\mathfrak{M}$ — множество, доказательство может быть соответствующим образом изменено.

Транзитивность $\mathfrak{N}$ следует из того факта, что $\mathrm{dom}(x) \subseteq \mathrm{HS}$, если $x \in \mathrm{HS}$.

Предоставляем читателю в качестве упражнения доказать замкнутость $\mathfrak{N}$ относительно гёделевских операций (для каждых x, $y \in \mathfrak{M}^B$ можно определить канонические $z_1, \ldots, z_8 \in \mathfrak{M}^B$, такие, что $\|z_i = \mathfrak{F}_i(x, y)\| = 1$ при $i = 1, \ldots, 8$ и $\mathrm{sym}(z_i) \supseteq \mathrm{sym}(x) \cap \mathrm{sym}(y)$, $z_i \in \mathrm{HS}$ при x, $y \in \mathrm{HS}$).

Класс $\mathfrak{N}$ почти универсален. Если $X \subseteq \mathfrak{N}$, то $X = i_G''X_1$ для некоторого $X_1 \subseteq \mathrm{HS}$. Существует α, для которого $X_1 \subseteq \mathrm{HS} \cap$

$\bigcap \mathfrak{M}_a^B$. Докажем, что $Y = i_G''(\mathrm{HS} \cap \mathfrak{M}_a^B) \in \mathfrak{N}$. Пусть $\underset{\sim}{Y} \in \mathfrak{M}^B$, $\mathrm{dom}(\underset{\sim}{Y}) = \mathrm{HS} \cap \mathfrak{M}_a^B$ и $\underset{\sim}{Y}(x) = 1$ для каждого $x \in \mathrm{dom}(\underset{\sim}{Y})$. Мы имеем $Y = i_G(\underset{\sim}{Y})$ и $\mathrm{dom}(\underset{\sim}{Y}) \subseteq \mathrm{HS}$. Докажем, что $\mathrm{sym}(\underset{\sim}{Y}) = \mathscr{G}$. Если $x \in \mathfrak{M}_a^B$, то $\pi x \in \mathfrak{M}_a^B$ для любого $\pi \in \mathscr{G}$. Также если $x \in \mathrm{HS}$ и $\pi \in \mathscr{G}$, то $\pi x \in \mathrm{HS}$; это верно потому, что $\mathrm{sym}(\pi x) = \pi\, \mathrm{sym}(x)\, \pi^{-1}$ для всех $\pi \in \mathscr{G}$ и $x \in \mathfrak{M}^B$. Следовательно, $\pi''(\mathrm{HS} \cap \mathfrak{M}_a^B) = \mathrm{HS} \cap \mathfrak{M}_a^B$ для $\pi \in \mathscr{G}$, и $\mathrm{sym}(Y) = \mathscr{G} \in \mathscr{F}$. Таким образом, существует $Y \in \mathfrak{N}$, такое, что $Y \supseteq \overset{\vee}{X}$.

Назовем модель $\mathfrak{N}$ *симметрическим расширением* $\mathfrak{M}$. Так же, как в разделе 18, выражéние „существует симметрическое расширение $\mathfrak{N}$ для $\mathfrak{M}$, удовлетворяющее φ“ означает существование B, $\mathscr{G}$, $\mathscr{F}$ в $\mathfrak{M}$, таких, что если G есть $\mathfrak{M}$-генерический у. ф. на B, то $\mathfrak{N} = i_G''\mathrm{HS}$ удовлетворяет φ. Построение симметрического расширения может быть преобразовано в доказательство непротиворечивости (см. разд. 17).

Докажем теперь теорему 53.

Модель XI.

Пусть $\mathfrak{M}$ — модель ZFC. Рассмотрим вынуждающие условия Коэна (модель I); удобнее, однако, считать, что P состоит из конечных функций p со значениями 0, 1 и $\mathrm{dom}(p) \subseteq \omega \times \omega$; полагаем $< = \supset$. Пусть $B = \mathrm{RO}(P)$ в $\mathfrak{M}$.

Пусть G есть $\mathfrak{M}$-генерический у. ф. на B. Для каждого $n \in \omega$ пусть x_n — действительное число (подмножество ω) и

$$x_n = \{m \in \omega\colon (\exists p \in G)[p(n, m) = 1]\}.$$

Мы хотим построить $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}[G]$ так, чтобы множество

$$A = \{x_n\colon n \in \omega\}$$

принадлежало $\mathfrak{N}$, но отображение $n \longmapsto x_n$ не принадлежало бы $\mathfrak{N}$, и чтобы

$$\mathfrak{N} \models A \text{ конечное по Дедекинду множество.}$$

Действительные числа x_n, $n \in \omega$, имеют канонические имена $\underset{\sim}{x}_n$:

$$\underset{\sim}{x}_n(\check{m}) = u_{nm} = \Sigma\{p \in P\colon p(n, m) = 1\} \quad \text{для всех } n, m \in \omega.$$

Для множества A каноническим именем является $\underset{\sim}{A}$:

$$\mathrm{dom}(\underset{\sim}{A}) = \{\underset{\sim}{x}_n\colon n \in \omega\}, \quad \underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{x}_n) = 1 \quad \text{для всех } n \in \omega.$$

Пусть π — перестановка на ω *); π индуцирует взаимно

*) т. е. π — взаимно однозначное отображение ω на ω. — *Прим. перев.*

однозначное, сохраняющее порядок отображение $(P, <)$:

$$\operatorname{dom}(\pi p) = \{(\pi n, m): (n, m) \in \operatorname{dom}(p)\},$$
$$\pi p(\pi n, m) = p(n, m).$$

В результате π индуцирует автоморфизм алгебры B:

$$\pi u = \Sigma\{\pi p: p \leqslant u\}.$$

Пусть $\mathscr{G}$ — группа автоморфизмов B, индуцируемых перестановками на ω. Для каждого конечного $e \subseteq \omega$ положим

$$H_e = \{\pi \in \mathscr{G}: \pi n = n \quad \text{для} \quad n \in e\}.$$

Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр на $\mathscr{G}$, порожденный подгруппами H_e, где e — конечное, т. е.

$$H \in \mathscr{F} \leftrightarrow \exists e (H \supseteq H_e).$$

Предоставляем читателю проверить, что $\mathscr{F}$ — нормальный фильтр на $\mathscr{G}$.

Теперь, когда $\mathscr{G}$ и $\mathscr{F}$ определены, пусть HS — класс наследственно симметрических элементов $\mathfrak{M}^B$. Пусть G есть $\mathfrak{M}$-генерический у. ф. на B и i_G — интерпретация $\mathfrak{M}^B$ посредством G.

Лемма 96. $\mathfrak{N} \models$ (*существует бесконечное, D-конечное множество действительных чисел*).

Доказательство. Так же, как для модели II, имеем $\| \underline{x}_n = \underline{x}_{n'} \| = 0$ для $n \neq n'$; следовательно, A — бесконечное множество действительных чисел в $\mathfrak{M}[G]$. Докажем, что $A \in \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N} \models$ (A есть D-конечное множество).

Заметим сначала, что $\pi(u_{nm}) = u_{\pi n, m}$ для $\pi \in \mathscr{G}$ и $m, n \in \omega$. Отсюда $\pi(\underline{x}_n) = \underline{x}_{\pi n}$ для $\pi \in \mathscr{G}$, $n \in \omega$. Следовательно, $\operatorname{sym}(\underline{x}_n) = H_{\{n\}} \in \mathscr{F}$ и $x_n \in \mathfrak{N}$ для всех $n \in \omega$. Также $\pi(\underline{A}) = \underline{A}$ для $\pi \in \mathscr{G}$ и поэтому $A \in \mathfrak{N}$.

Предположим, что существует функция $f \in \mathfrak{N}$, взаимно однозначно отображающая ω на A. Тогда f имеет имя $\underline{f} \in \mathrm{HS}$ и для некоторого $p_0 \in G$

$p_0 \| - \underline{f}$ есть взаимно однозначное отображение $\check{\omega}$ на $\underline{A}$.

Найдем такое $q \leqslant p_0$, что

$q \| - \underline{f}$ не есть функция;

тогда получим противоречие.

Пусть e — конечное подмножество ω и $\operatorname{sym}(\underline{f}) \supseteq H_e$. Существуют $i \in \omega$, $p \leqslant p_0$, $n \notin e$, для которых верно

$$p \| - \underline{f}(\check{i}) = \underline{x}_n.$$

Найдем такое $\pi \in \mathcal{G}$, что

(i) πp и p совместимы,

(ii) $\pi \in H_e$,

(iii) $\pi n \neq n$.

Тогда будем иметь $\pi \underline{f} = \underline{f}$ в силу (ii), $\pi(\check{i}) = \check{i}$, и, так как

$$\pi p \Vdash (\pi \underline{f})(\pi \check{i}) = \pi \underline{x}_n,$$

получим

$$q = p \cdot \pi p \Vdash (\underline{f}(\check{i}) = \underline{x}_n \wedge \underline{f}(\check{i}) = \underline{x}_{\pi n});$$

так как $\| \underline{x}_n = \underline{x}_{\pi n} \| = 0$ в силу (iii), то

$$q \Vdash \underline{f} \text{ не есть функция.}$$

Чтобы получить искомое π, положим n' таким, что $n' \notin e$ и $(n', m) \notin \mathrm{dom}(p)$ для любого m. Пусть π — перестановка ω, меняющая n на n', и $\pi(i) = i$ для $i \neq n', n$. Тогда π индуцирует автоморфизм $\pi \in H_e$, такой, что $\pi n \neq n$ и πp совместимо с p.

Доказательство теоремы 53 закончено. Аналогичные рассуждения используются при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 54 (Коэн). *С* ZF *совместимо утверждение*

(*) *существует счетное множество* $A = \{C_n : n \in \omega\}$, *где каждое* C_n *состоит из двух элементов, являющихся множествами действительных чисел, и не существует функции выбора на* A.

Следствие утверждения (*). Семейство множеств действительных чисел $\bigcup C_n$ не может быть линейно упорядочено.

Модель XII.

Пусть $\mathfrak{M}$ — модель ZFC. Снова используем коэновские вынуждающие условия; на этот раз P состоит из конечных функций p со значениями 0, 1 и $\mathrm{dom}(p) \subseteq (\omega \times 2 \times \omega) \times \omega$; как обычно, $< = \supset$. Пусть $B = \mathrm{RO}(P)$ в $\mathfrak{M}$.

Пусть G есть $\mathfrak{M}$-генерический у. ф. на B. Определим следующие элементы $\mathfrak{M}[G]$ и их канонические имена:

$$x_{n\varepsilon i} = \{j \in \omega : (\exists p \in G)[p(n\varepsilon i, j) = 1]\},$$

$$\underline{x}_{n\varepsilon i}(\check{j}) = u_{n\varepsilon i, j} = \Sigma\{p \in P : p(n\varepsilon i, j) = 1\} \quad (n, i, j \in \omega, \varepsilon = 0, 1),$$

$$X_{n\varepsilon} = \{x_{n\varepsilon i} : i \in \omega\},$$

$$\mathrm{dom}(\underline{X}_{n\varepsilon}) = \{\underline{x}_{n\varepsilon i} : i \in \omega\}, \ \underline{X}_{n\varepsilon}(\underline{x}_{n\varepsilon i}) = 1 \quad \text{для} \quad i \in \omega,$$

$$C_n = \{X_{n0}, X_{n1}\},$$

$$\mathrm{dom}\, C_n = \{\underline{X}_{n0}, \underline{X}_{n1}\}, \ \underline{C}_n(\underline{X}_{n\varepsilon}) = 1 \quad (\varepsilon = 0, 1),$$

$$A = \{C_n\colon\ n \in \omega\},$$
$$\operatorname{dom}(\underset{\sim}{A}) = \{\underset{\sim}{C}_n\colon\ n \in \omega\},\quad \underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{C}_n) = 1 \quad \text{для} \quad n \in \omega;$$

Таким образом, $x_{n\varepsilon i}$ — действительные числа, $X_{n\varepsilon}$ — множества действительных чисел, C_n — пары множеств действительных чисел. Как и раньше,

$$\| x_{n\varepsilon i} = x_{n'\varepsilon' i'} \| = 0$$

при $(n, \varepsilon, i) \neq (n', \varepsilon', i')$.

Каждая перестановка π на $\omega \times 2 \times \omega$ индуцирует взаимно однозначное, сохраняющее порядок отображение на P:

$$\pi p(\pi(n\varepsilon i),\ j) = p(n\varepsilon i,\ j),$$

и в результате индуцирует автоморфизм π на B. Ясно, что

$$\pi(u_{n\varepsilon i,\ j}) = u_{\pi(n\varepsilon i),\ j}$$

и

$$\pi(\underset{\sim}{x}_{n\varepsilon i}) = \underset{\sim}{x}_{\pi(n\varepsilon i)}.$$

Пусть теперь $\mathcal{G}$ — группа автоморфизмов алгебры B, индуцируемых перестановками π на $\omega \times 2 \times \omega$, которые удовлетворяют условию: если $\pi(n\varepsilon i) = (\bar{n}\bar{\varepsilon}\bar{i})$, то

(1) $\bar{n} = n$,

(2) для каждого n либо $\forall i(\bar{\varepsilon} = \varepsilon)$, либо $\forall i(\bar{\varepsilon} \neq \varepsilon)$.

Отсюда непосредственно следует, что для каждого $\pi \in \mathcal{G}$

(a) $\pi(\underset{\sim}{X}_{n\varepsilon}) = \underset{\sim}{X}_{n\bar{\varepsilon}}$,

(b) $\pi(\underset{\sim}{C}_n) = \underset{\sim}{C}_n$,

(c) $\pi(\underset{\sim}{A}) = \underset{\sim}{A}$.

Для конечного $e \subseteq \omega \times 2 \times \omega$ положим

$$H_e = \{\pi \in \mathcal{G}\colon\ (\forall s \in e)[\pi s = s]\}.$$

Пусть $\mathcal{F}$ — фильтр, порожденный множеством

$$\{H_e\colon\ e \subseteq \omega \times 2 \times \omega,\ e \text{ — конечное}\};$$

$\mathcal{F}$ — нормальный фильтр на $\mathcal{G}$.

Пусть $\mathfrak{N}$ — интерпретация посредством G элементов $\mathrm{HS} \subseteq \mathfrak{M}^B$.

Лемма 97. *Множества* $x_{n\varepsilon i}$, $X_{n\varepsilon}$, C_n, A *принадлежат* $\mathfrak{N}$ *для всех* n, $i \in \omega$, $\varepsilon = 0, 1$.

Доказательство. $\operatorname{sym}(\underline{x}_{n\varepsilon i}) = H_{\{(n\varepsilon i)\}}$,

$\operatorname{sym}(\underline{X}_{n\varepsilon}) = H_{\{(n\varepsilon i)\}}$ ($i \in \omega$ — произвольное),

$\operatorname{sym}(\underline{C}_n) = \mathcal{G}$,

$\operatorname{sym}(\underline{A}) = \mathcal{G}$.

Лемма 98. *Множество A счетно в $\mathfrak{N}$.*

Доказательство. $C_n \neq C_{n'}$ при $n \neq n'$, потому что $x_{n\varepsilon i} \neq x_{n'\varepsilon' i'}$ при $(n, \varepsilon, i) \neq (n', \varepsilon', i')$. Докажем, что отображение $n \mapsto C_n$ принадлежит $\mathfrak{N}$. Пусть $g \in \mathfrak{M}^B$, $\operatorname{dom}(g) = \{(\check{n}, \underline{C}_n)^B : n \in \omega\}$ и $g(x) = 1$ для $x \in \operatorname{dom}(\underline{g})$. Так как $\pi(\check{n}) = \check{n}$ и $\pi(\underline{C}_n) = \underline{C}_n$ для $\pi \in \mathcal{G}$, $n \in \omega$, то $\pi(\underline{g}) = \underline{g}$ для $\pi \in \mathcal{G}$, и поэтому $\underline{g} \in \mathrm{HS}$. Следовательно, $g = i_G(\underline{g})$ — взаимно однозначная функция, отображающая ω на A, $g(n) = C_n$ для $n \in \omega$ и $g \in \mathfrak{N}$.

Лемма 99. *Не существует функции $f \in \mathfrak{N}$, такой, что $\operatorname{dom}(f) = A$ и $f(C_n) \in C_n$ для всех n.*

Доказательство. Предположим, что $f \in \mathfrak{N}$ есть функция выбора на A; пусть $\underline{f} \in \mathrm{HS}$ — имя f и для некоторого $p_0 \in G$

$p_0 \Vdash \underline{f}$ есть функция, определенная на $\underline{A}$, и $\forall n (\underline{f}(\underline{C}_n) \in \underline{C}_n)$.

Найдем такое $q \leqslant p_0$, что

$$q \Vdash \underline{f} \text{ не есть функция;}$$

тогда получим противоречие.

Пусть e — конечное подмножество $\omega \times 2 \times \omega$ и $\operatorname{sym}(\underline{f}) \supseteq H_e$. Существуют $n \in \omega$, ε_0 (предположим, что $\varepsilon_0 = 0$) и $p \leqslant p_0$, для которых верно

$$p \Vdash \underline{f}(\underline{C}_n) = \underline{X}_{n0} \quad \text{и } (n, \varepsilon, k) \notin e \text{ для всех } k \in \omega;\ \varepsilon = 0,1.$$

Найдем такое $\pi \in \mathcal{G}$, что

(i) πp и p совместимы,

(ii) $\pi \in H_e$,

(iii) $\pi(\underline{X}_{n0}) = \underline{X}_{n1}$.

Тогда будем иметь $\pi\underline{f} = \underline{f}$ в силу (ii), $\pi\underline{C}_n = \underline{C}_n$, и, так как

$$\pi p \Vdash (\pi\underline{f})(\pi\underline{C}_n) = \pi\underline{X}_{n0},$$

получим

$$q = p \cdot \pi p \Vdash (\underline{f}(\underline{C}_n) = \underline{X}_{n0} \wedge \underline{f}(\underline{C}_n) = \underline{X}_{n1});$$

так как $\| \underline{X}_{n0} = \underline{X}_{n1} \| = 0$, то

$$q \Vdash \underline{f} \text{ не есть функция.}$$

Чтобы получить искомое π, возьмем k, такое, что

$$(\forall i \geqslant k)(\forall \varepsilon)[(n \varepsilon i) \notin \mathrm{dom}(p)].$$

Пусть π — перестановка $\omega \times 2 \times \omega$, определенная следующим образом:

$$\pi(n, 0, i) = \begin{cases} (n, 1, i+k), & \text{если } i < k; \\ (n, 1, i-k), & \text{если } k \leqslant i < 2k; \\ (n, 1, i), & \text{если } 2k \leqslant i; \end{cases}$$

$$\pi(n, 1, i) \ldots \text{ аналогично}$$

$$\pi(n' \varepsilon i) = n' \varepsilon i \quad \text{для} \quad n' \neq n.$$

Ясно, что автоморфизм $\pi \in \mathscr{G}$ удовлетворяет указанным выше условиям (i), (ii), (iii).

26. Модели Френкеля — Мостовского

Метод симметризации в коэновских результатах о независимости, изложенных в предыдущем разделе, использует идеи, примененные значительно раньше Френкелем [6], развитые и формализованные затем Мостовским [31].

Рассмотрим вместо ZF теорию, допускающую также *атомы*, т. е. объекты, отличные от множеств и не содержащие элементов. Метод симметризации позволяет построить модели, в которых множество атомов не может быть вполне упорядочено.

Теория множеств с атомами (ZFA).

Язык ZFA содержит $\in$, $=$ и два константных символа 0 и A (пустое множество и множество атомов).

Аксиомы ZFA:

(0) $\neg \exists x (x \in 0)$;

(A) $\forall z (z \in A \leftrightarrow z \neq 0 \wedge \neg \exists x (x \in z))$;

атомами называются элементы A, *множествами* — объекты, не являющиеся атомами.

(A1) Аксиома экстенсиональности:

$(\forall$ множеств $S_1)(\forall$ множеств $S_2)[S_1 = S_2 \leftrightarrow \forall u (u \in S_1 \leftrightarrow u \in S_2)]$.

Остальные аксиомы ZFA такие же, как в ZF.

Предупреждение. Утверждения „X — непусто“ и „$X \neq 0$“ эквивалентны только, если X — множество.

Аксиома регулярности.

$$(\forall \text{ непустых } X)(\exists y \in X)[y \cap X = 0].$$

Одни операции имеет смысл рассматривать только для множеств, например $\bigcup X$, $\mathscr{P}(x)$; другие — также и для атомов, например $\{x, y\}$.

Заметим, что $\mathrm{ZFA} + (A = 0) = \mathrm{ZF}$.

Построения в ZFA во многом такие же, как в ZF. Получим сначала равенство, аналогичное $V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$. Для любого множества S определим $\mathscr{P}^\alpha(S)$:

$$\mathscr{P}^0(S) = S;$$

$$\mathscr{P}^\alpha(S) = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathscr{P}^\beta(S), \text{ если } \alpha \text{ — предельный ординал;}$$

$$\mathscr{P}^{\alpha+1}(S) = \mathscr{P}^\alpha(S) \cup \mathscr{P}(\mathscr{P}^\alpha(S));$$

$$\mathscr{P}^\infty(S) = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} \mathscr{P}^\alpha(S).$$

В ZFA мы имеем $V = \mathscr{P}^\infty(A)$. Класс $\mathscr{P}^\infty(0)$ является моделью ZF и называется *ядром*.

Если класс $\mathbf{M}$ транзитивен, почти универсален и замкнут относительно гёделевских операций, то $\mathbf{M}$ — модель ZFA.

Опишем теперь *модели Френкеля — Мостовского* (FM-модели) для ZFA. Построение, которое мы приводим, является более общим, чем у Мостовского, и принадлежит Шпеккеру [47].

Пусть $\mathscr{G}$ — группа перестановок A. Будем называть теперь нормальным фильтром на $\mathscr{G}$ множество $\mathscr{F}$ подгрупп $\mathscr{G}$, такое, что для всех подгрупп H, K группы $\mathscr{G}$

(i) $\mathscr{G} \in \mathscr{F}$;

(ii) если $H \supseteq K \in \mathscr{F}$, то $H \in \mathscr{F}$;

(iii) если $H \in \mathscr{F}$ и $K \in \mathscr{F}$, то $H \cap K \in \mathscr{F}$;

(iv) если $\pi \in \mathscr{G}$ и $H \in \mathscr{F}$, то $\pi H \pi^{-1} \in \mathscr{F}$;

(v) если e — конечное подмножество A, то $H_e \in \mathscr{F}$, где $H_e = \{\pi \in \mathscr{G}: (\forall a \in e)[\pi(a) = a]\}$.

Каждая перестановка π на A индуцирует $\in$-автоморфизм универсума: рекурсией по рангу ($\mathrm{rank}(x) = $(наименьшее α, для которого $x \in \mathscr{P}^{\alpha+1}(A)$) определим

$$\pi(x) = \pi'' x = \{\pi(y): y \in x\}.$$

Для любых x, y имеем $x \in y \leftrightarrow \pi(x) \in \pi(y)$, и если x принадлежит ядру, то $\pi x = x$.

Пусть $\mathscr{G}$, $\mathscr{F}$ фиксированы. Для каждого x положим

$$\mathrm{sym}_{\mathscr{G}}(x) = \{\pi \in \mathscr{G}: \pi(x) = x\};$$

$\mathrm{sym}_{\mathscr{G}}(x)$ является подгруппой $\mathscr{G}$. Назовем объект x *симметрическим*, если $\mathrm{sym}(x) \in \mathscr{F}$. Класс HS *наследственно симметрических*

объектов состоит из всех x, для которых каждый элемент множества $\mathrm{TC}(\{x\})$ симметрический.

Лемма 100. HS — *модель* ZFA, $\mathscr{P}^{\infty}(0) \subseteq \mathrm{HS}$ *и* $A \in \mathrm{HS}$.

Доказательство. (a) Очевидно, что HS — транзитивный класс.

(b) Класс HS замкнут относительно гёделевских операций, потому что для всех x, y

$$\mathrm{sym}(\mathfrak{F}_i(x, y)) \supseteq \mathrm{sym}(x) \cap \mathrm{sym}(y) \qquad (i = 1, \ldots, 8).$$

(c) Класс HS почти универсальный; достаточно доказать, что $\mathrm{sym}(\mathscr{P}^{\alpha}(A) \cap \mathrm{HS}) \in \mathrm{HS}$ для всех α. Для любых x и $\pi \in \mathscr{G}$ имеем $\mathrm{rank}(\pi x) = \mathrm{rank}(x)$ и $\mathrm{sym}(\pi x) = \pi\, \mathrm{sym}(x)\, \pi^{-1}$; таким образом, если элемент x — симметрический элемент, то πx также симметрический и, по индукции, если $x \in \mathrm{HS}$, то $\pi x \in \mathrm{HS}$. Отсюда $\pi(\mathscr{P}^{\alpha}(A) \cap \mathrm{HS}) = \mathscr{P}^{\alpha}(A) \cap \mathrm{HS}$ для каждого $\pi \in \mathscr{G}$.

(d) $\mathscr{P}^{\infty}(0) \subseteq \mathrm{HS}$. Для каждого x из ядра, $\mathrm{sym}(x) = \mathscr{G}$.

(e) $A \in \mathrm{HS}$. Каждый атом a — симметрический, потому что $\mathrm{sym}(a) = H_{\{a\}} \in \mathscr{F}$; множество A является симметрическим, потому что $\mathrm{sym}(A) = \mathscr{G}$.

В качестве примера применения FM-моделей докажем независимость AC относительно ZFA.

Теорема 55 (Френкель). *Если* $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFA})$, *то* $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFA} + \neg\mathrm{AC})$.

Доказательство. Предположим, что A — бесконечное множество, и построим FM-модель, в которой AC не выполняется. Совместимость предположения о том, что существует бесконечно много атомов, мы докажем в лемме 101.

Модель XIII.

Пусть A — бесконечное множество. Пусть $\mathscr{G}$ — группа всех перестановок на A и $\mathscr{F}$ — фильтр, порожденный

$$\{H_e\colon\ e \subseteq A,\ e \text{ — конечное}\}.$$

Докажем, что

$$\mathrm{HS} \models A \text{ — конечное по Дедекинду множество.}$$

Предположим, что существует функция $f \in \mathrm{HS}$, взаимно однозначно отображающая ω на A. Пусть e — конечное подмножество A и $\mathrm{sym}(f) \supseteq H_e$. Существуют $n \in \omega$ и $a_1, a_2 \in A$, такие, что

$$a_1 \neq a_2,\ a_1 \notin e,\ a_2 \notin e \quad \text{и} \quad f(n) = a_1.$$

Пусть π — перестановка, меняющая a_1 на a_2, и $\pi(x) = x$ для $x \neq a_1, a_2$. Ясно, что $\pi \in H_e$, и поэтому $\pi(f) = f$. Так как

$\pi(n) = n$, мы имеем

$$a_2 = \pi(a_1) = \pi(f(n)) = (\pi f)(\pi n) = f(n) = a_1;$$

противоречие.

Лемма 101. *Система аксиом* (ZFA + „A — *бесконечное множество*“) *непротиворечива относительно* ZF.

Доказательство. Пусть C — бесконечное множество бесконечных подмножеств ω. Определим

$$\Pi_0 = C,$$
$$\Pi_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \Pi_\beta, \text{ если } \alpha \text{ — предельный ординал},$$
$$\Pi_{\alpha+1} = \Pi_\alpha \cup (\mathscr{P}(\Pi_\alpha) - \{0\}),$$
$$\Pi = \bigcup_{\alpha \in On} \Pi_\alpha.$$

Выберем $a_0 \in C$ и положим $A = C - \{a_0\}$. Легко проверить, что Π является моделью ZFA, если A интерпретировать как множество всех атомов, а a_0 — как пустое множество.

Замечание. Аналогично можно построить модель ZFC с произвольно большим числом атомов.

27. Вложение FM-моделей в модели ZF

Существует соответствие между FM-моделями для ZFA и симметрическими расширениями ZF. Многие результаты о непротиворечивости относительно ZFA, полученные с помощью FM-моделей, верны для ZF, что является следствием теоремы 56.

Теорема 56. Теорема о вложении (Йех, Сохор [14]). *Пусть* $\mathfrak{V}$ — *модель* ZFA + AC, A — *множество атомов в* $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{M}$ — *ядро* $\mathfrak{V}$ *и* α — *ординал в* $\mathfrak{V}$. *Для каждой* FM-*модели* $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{W}$ (*модели* ZFA) *существует симметрическое расширение* $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}$ (*модель* ZF) *и множество* $\tilde{A} \in \mathfrak{N}$, *такие, что*

$$(\mathscr{P}^\alpha(A))^{\mathfrak{V}} \in\text{-изоморфно } (\mathscr{P}^\alpha(\tilde{A}))^{\mathfrak{N}}.$$

Доказательство. Пусть α — ординал в $\mathfrak{V}$; пусть $\mathscr{G}$, $\mathscr{F} \in \mathfrak{V}$ — группа перестановок множества A атомов в $\mathfrak{V}$ и соответственно нормальный фильтр на $\mathscr{G}$. Пусть $\mathfrak{B}$ — класс HS-элементов $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{M}$ — ядро $\mathfrak{V}$. Построим сначала генерическое расширение $\mathfrak{M}[G]$ для $\mathfrak{M}$.

Пусть k — регулярный кардинал и $k > |\mathscr{P}^\alpha(A)|$ (в $\mathfrak{V}$). Множество вынуждающих условий P состоит из функций p со зна-

чениями 0, 1 и таких, что $|\operatorname{dom}(p)|<k$, $\operatorname{dom}(p)\subseteq(A\times k)\times k$; как обычно, $(P,<)=(P,\supset)$. (Точнее, чтобы $(P,<)\in\mathfrak{M}$, следует положить $\operatorname{dom}(p)\subseteq(A'\times k)\times k$, где $A'\in\mathfrak{M}$ имеет ту же мощность, что и A.)

Пусть G есть $\mathfrak{M}$-генерический у. ф. на $B=\mathrm{RO}(P)$. Определим следующие элементы $\mathfrak{M}[G]$ вместе с их каноническими именами в $\mathfrak{M}^B$:

$$x_{a\xi}\subseteq k,\ \eta\in x_{a\xi}\leftrightarrow(\exists p\in G)[p(a,\xi,\eta)=1]\quad(a\in A,\ \xi<k),$$
$$\operatorname{dom}(\underline{x}_{a\xi})=\{\check{\eta}\colon \eta<k\},\ \underline{x}_{a\xi}(\check{\eta})=u_{a\xi\eta}=\Sigma\{p\in P\colon p(a,\xi,\eta)=1\},$$
$$\tilde{a}=\{x_{a\xi}\colon \xi<k\}\qquad(a\in A),$$
$$\underline{\tilde{a}}(\underline{x}_{a\xi})=1\quad\text{для}\quad\xi<k,$$
$$\tilde{A}=\{\tilde{a}\colon a\in A\},$$
$$\underline{\tilde{A}}(\underline{\tilde{a}})=1\quad\text{для}\quad a\in A.$$

Для каждого $x\in\mathfrak{V}$ определим $\tilde{x}\in\mathfrak{M}[G]$ и каноническое имя $\underline{\tilde{x}}\in\mathfrak{M}^B$ по $\in$-рекурсии:

если x — множество из $\mathfrak{V}$ и $\tilde{y}$, $\underline{\tilde{y}}$ определены для каждого $y\in x$, положим

$$\tilde{x}=\{\tilde{y}\colon y\in x\},$$
$$\operatorname{dom}(\underline{\tilde{x}})=\{\underline{\tilde{y}}\colon y\in x\},\ \underline{\tilde{x}}(\underline{\tilde{y}})=1\quad\text{для}\quad y\in x.$$

Так как $\tilde{a}$ и $\underline{\tilde{a}}$ определены для всех $a\in A$, то мы можем определить $\tilde{x}$ и $\underline{\tilde{x}}$ для всех $x\in\mathfrak{V}$.

Лемма 102. *Если* x, $y\in\mathfrak{V}$, то

$$x\in y\leftrightarrow\tilde{x}\in\tilde{y},$$
$$x=y\leftrightarrow\tilde{x}=\tilde{y}.$$

Доказательство. Ясно, что если $x\in y$, то $\|\underline{\tilde{x}}\in\underline{\tilde{y}}\|=1$ и $\tilde{x}\in\tilde{y}$.

Чтобы доказать $\tilde{x}\in\tilde{y}\to x\in y$ и $\tilde{x}=\tilde{y}\to x=y$, используем индукцию по рангу одновременно для $\in$ и $=$ (аналогично тому, как доказывается, например, лемма 46). Заметим, что $\|\underline{x}_{a\xi}=\underline{x}_{a'\xi'}\|=0$ при $(a,\xi)\neq(a',\xi')$ и $\|\underline{\tilde{x}}_{a\xi}=x\|=0$ для $x\in\mathfrak{M}$. Следовательно, $\tilde{a}_1\neq\tilde{a}_2$ при $a_1\neq a_2\in A$. Мы утверждаем, что $\tilde{x}\neq x_{a\xi}$ для любых a, ξ и $x\in\mathfrak{V}$. Если $x\in\mathfrak{M}$, то $\tilde{x}=x$ и поэтому $\tilde{x}\neq x_{a\xi}$. Если $x\in\mathfrak{V}-\mathfrak{M}$, то $\tilde{x}$ имеет больший ранг, чем $x_{a\xi}$: $x_{a\xi}$ — множество ординалов, в то время как $\mathrm{TC}(\{\tilde{x}\})$ содержит некоторые $x_{a\xi}$.

Теперь мы можем доказать лемму.

(а) Если $\tilde{x}\in\tilde{y}$, то y не может быть атомом, так как мы имели бы тогда $\tilde{x}=x_{a\xi}$ для некоторых a, ξ, что невозможно.

Следовательно, $\tilde{x} = \tilde{z}$ для некоторого $z \in y$ и, по индуктивному предположению, $x = z$; таким образом, $x \in y$.

(b) Если $x \neq y$, то либо x, y — атомы и тогда $\tilde{x} \neq \tilde{y}$, либо x, например, содержит некоторое z, не принадлежащее y, и тогда, по индуктивному предположению, $\tilde{z} \in \tilde{x}$ и $\tilde{z} \notin \tilde{y}$; таким образом, $\tilde{x} \neq \tilde{y}$.

Построим симметрическое расширение $\mathfrak{N}$ модели $\mathfrak{M}$; определим группу $\overline{\mathcal{G}}$ автоморфизмов алгебры B и нормальный фильтр $\overline{\mathcal{F}}$ на $\overline{\mathcal{G}}$.

Для каждой перестановки ρ на A пусть $\hat{\rho}$ — группа таких перестановок π на $A \times k$, что при всех a, ξ

$$\pi(a, \xi) = (\rho(a), \xi').$$

Положим

$$\overline{\mathcal{G}} = \bigcup \{\hat{\rho}\colon \rho \in \mathcal{G}\};$$

аналогично, пусть $\overline{H} = \bigcup \{\hat{\rho}\colon \rho \in H\}$ для подгрупп H группы $\mathcal{G}$. Так как каждая перестановка π на $A \times k$ индуцирует автоморфизм π на B:

$$(\pi p)(\pi(a, \xi), \eta) = p(a, \xi, \eta) \text{ для всех } a, \xi, \eta \qquad (p \in P)$$

и

$$\pi(u) = \Sigma \{\pi(p)\colon p \in P \wedge p \leqslant u\} \qquad (u \in B),$$

то $\overline{\mathcal{G}}$ будем рассматривать как группу автоморфизмов на B. Для конечного множества $e \subseteq A \times k$ положим

$$H_e = \{\pi \in \overline{\mathcal{G}}\colon (\forall s \in e)[\pi s = s]\}.$$

Пусть $\overline{\mathcal{F}}$ — фильтр, порожденный

$$\{\overline{H}\colon H \in \mathcal{F}\} \cup \{H_e\colon e \subseteq A \times k,\ e \text{ — конечное}\}.$$

Читатель без труда проверит, что $\overline{\mathcal{F}}$ — нормальный фильтр.

Пусть $\underline{\mathfrak{N}} \subseteq \mathfrak{M}^B$ — класс HS-элементов $\mathfrak{M}^B$ и $\mathfrak{N}$ — интерпретация $\underline{\mathfrak{N}}$ посредством G.

Тогда имеем

(a) $x_{a\xi} \in \mathfrak{N}$ для $a \in A$, $\xi < k$, потому что $\operatorname{sym}_{\overline{\mathcal{F}}}(\underline{x}_{a\xi}) = H_{\{(a, \xi)\}}$;

(b) $\tilde{a} \in \mathfrak{N}$ для $a \in A$, потому что $\operatorname{sym}_{\overline{\mathcal{F}}}(\underline{\tilde{a}}) = \overline{\operatorname{sym}_{\mathcal{G}}(a)}$;

(c) $\tilde{A} \in \mathfrak{N}$, потому что $\operatorname{sym}(\underline{\tilde{A}}) = \overline{\mathcal{G}}$.

Лемма 103. *Если* $x \in \mathfrak{V}$, *то*

$$x \in \mathfrak{V} \leftrightarrow \underline{\tilde{x}} \in \underline{\mathfrak{N}}.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$\mathrm{sym}_{\mathscr{G}}(x) \in \mathscr{F} \leftrightarrow \mathrm{sym}_{\overline{\mathscr{G}}}(\underline{\tilde{x}}) \in \overline{\mathscr{F}}.$$

Если $\rho \in \mathscr{G}$ и $\pi \in \hat{\rho}$, то $\rho\widetilde{(x)} = \pi(\underline{\tilde{x}})$ и поэтому $\mathrm{sym}_{\overline{\mathscr{G}}}(\underline{\tilde{x}}) = \overline{\mathrm{sym}_{\mathscr{G}}(x)}$; таким образом, если $\overline{\mathrm{sym}_{\mathscr{G}}(x)} \in \mathscr{F}$, то $\mathrm{sym}_{\overline{\mathscr{G}}}(\underline{\tilde{x}}) \in \overline{\mathscr{F}}$. С другой стороны при $\mathrm{sym}_{\overline{\mathscr{G}}}(\underline{\tilde{x}}) \in \mathscr{F}$, имеем $\overline{\mathrm{sym}_{\mathscr{G}}(x)} \supseteq \bar{H} \cap H_e$ для некоторого $H \in \mathscr{F}$ и конечного $e \subseteq A \times k$. Если e' — проекция e в A ($e' = \{a \in A\colon \exists \xi\,[(a, \xi) \in e]\}$), то $\mathrm{sym}_{\mathscr{G}}(x) \supseteq H \cap H_{e'}$ и, следовательно, $\mathrm{sym}_{\mathscr{G}}(x) \in \mathscr{F}$.

Лемма 104. *Если* $x \in \mathfrak{W}$, *то*

$$x \in \mathfrak{V} \leftrightarrow \tilde{x} \in \mathfrak{N}.$$

Доказательство. В силу леммы 103 достаточно доказать, что $x \in \mathfrak{V}$, если $\tilde{x} \in \mathfrak{N}$. Предположим, что $x \in \mathfrak{W}$ имеет наименьший ранг, для которого $\tilde{x} \in \mathfrak{N}$ и $x \notin \mathfrak{V}$. Поэтому $x \subseteq \mathfrak{V}$; так как $\tilde{x} \in \mathfrak{N}$, существуют $\underline{z} \in \mathfrak{N}$ и $p \in G$, такие, что $p \Vdash \underline{z} = \underline{\tilde{x}}$. Мы имеем $\mathrm{sym}_{\overline{\mathscr{G}}}(\underline{z}) \in \overline{\mathscr{F}}$, и поэтому существуют $H \in \mathscr{F}$ и конечное $e \subseteq A \times k$, для которых $\mathrm{sym}(\underline{z}) \supseteq \bar{H} \cap H_e$. Найдем такие $\rho \in \mathscr{G}$ и $\pi \in \hat{\rho}$, что

(i) πp и p совместимы,

(ii) $\pi \in \bar{H} \cap H_e$,

(iii) $\rho(x) \neq x$.

Тогда будем иметь $\pi\underline{z} = \underline{z}$ в силу (ii), $\| \pi(\underline{\tilde{x}}) = \underline{\tilde{x}} \| = 0$ в силу (iii), и, так как

$$\pi p \Vdash \pi\underline{z} = \pi\underline{\tilde{x}},$$

получим

$$q = p \cdot \pi p \Vdash \underline{z} = \underline{\tilde{x}} \wedge \underline{z} = \pi(\underline{\tilde{x}});$$

противоречие.

Чтобы получить π, заметим, что x не является симметрическим; поэтому существует $\rho \in \mathscr{G}$, для которого $\rho(x) \neq x$ и $\rho \in H \cap H_{e'}$, где e' — проекция e на A. Так как $|p| < k$, существует $\gamma < k$, такое, что $(a, \xi) \notin \mathrm{dom}(p)$ и $(a, \xi) \notin e$ для любых $a \in A$ и $\xi \geqslant \gamma$.

Определим $\pi \in \hat{\rho}$ следующим образом:

если $a \in e'$, то $\pi(a, \xi) = (a, \xi)$ при $\xi < k$;

если $a \notin e'$, то $\pi(a, \xi) = (\rho a, \gamma + \xi)$ при $\xi < \gamma$
и $\pi(a, \gamma + \xi) = (\rho a, \xi)$,
$\pi(a, \xi) = (\rho a, \xi)$ при $\xi \geqslant 2\gamma$.

Отсюда следует, что $\pi \in \bar{H} \cap H_e$ и p, πp совместимы.

Следующая лемма завершает доказательство теоремы 56.

Лемма 105.

$$(\mathscr{P}^{\alpha}(A)^{\mathfrak{B}})^{\sim} = \mathscr{P}^{\alpha}(\tilde{A})^{\mathfrak{N}}.$$

Доказательство. Достаточно доказать $\mathscr{P}^{\alpha}(\tilde{A})^{\mathfrak{N}} \subseteq (\mathscr{P}^{\alpha}(A)^{\mathfrak{B}})^{\sim}$. Доказательство проводится индукцией. Докажем, что если $x \in \mathscr{P}^{\alpha}(A)^{\mathfrak{B}}$ и $y \subseteq x$, $y \in \mathfrak{N}$, то существует $z \in \mathfrak{B}$, такое, что $y = \tilde{z}$. Пусть $\underline{y}$ — имя для y. Заметим, что каждая убывающая последовательность вынуждающих условий, мощности меньшей k, имеет нижнюю грань. Так как $|x| < k$, можно с помощью тех же рассуждений, что и в доказательстве леммы 57, получить $p \in G$, которое разрешает $\tilde{t} \in \underline{y}$ для всех $t \in x$. Отсюда следует, что $y = \tilde{z}$, где $z = \{t \in x\colon p \Vdash \tilde{t} \in \underline{y}\}$. По лемме 104, так как $\tilde{z} \in \mathfrak{N}$, имеем $z \in \mathfrak{B}$.

Применения теоремы 56

Рассмотрим формулу φ, такую, что

$$\varphi \leftrightarrow \exists X \psi(X, \nu),$$

где кванторы ψ имеют вид $\exists u \in \mathscr{P}^{\nu}(X)$ и $\forall u \in \mathscr{P}^{\nu}(X)$. Пусть $\mathfrak{B}$ — модель ZFA + AC, и предположим, что существует FM-модель $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$, такая, что $\mathfrak{B} \models \varphi$. Пусть $X \in \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \models \psi(X, \nu)$; пусть α — такое, что $\mathscr{P}^{\nu}(X) \subseteq \mathscr{P}^{\alpha}(A)$. По теореме 56 существует $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}$, такое, что $\mathscr{P}^{\alpha}(A)^{\mathfrak{B}} \approx \mathscr{P}^{\alpha}(\tilde{A})^{\mathfrak{N}}$. Таким образом, имеем $\mathfrak{N} \models \psi(\tilde{X}, \nu)$ и поэтому $\mathfrak{N} \models \varphi$.

Следовательно, если для некоторой формулы φ построена FM-модель $\mathfrak{B}$, удовлетворяющая φ, то можно построить модель ZF, удовлетворяющую φ. Существует много примеров утверждений, которые могут быть выражены указанным выше образом и совместимость которых с ZFA установлена, см. [15].

Среди них имеются следующие:

(1) существует множество X, которое не может быть вполне упорядочено (это утверждение можно выразить формулой $\exists X \varphi(X, \nu)$, где $\nu = 1$);

(2) существует X, которое не может быть линейно упорядочено;

(3) существует бесконечное X, которое D-конечно и множество подмножеств которого является (не является) D-конечным;

(4) $\exists X, Y$ несравнимые по мощности, но X может быть отображено на Y и Y на X;

(5) существует векторное пространство, не имеющее базиса (имеющее базисы разной мощности).

Мы закончим этот раздел теоремой о структуре кардиналов при отсутствии аксиомы выбора. Оказывается, что каждое частичное упорядочение может быть представлено как упорядоченное множество кардиналов в некоторой модели ZF.

Теорема 57 (Йех [11]). *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *модель* ZFC. *Пусть* $(I, \leqslant)$ — *частично упорядоченное множество в* $\mathfrak{M}$. *Тогда существует симметрическое расширение* $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}$, *удовлетворяющее следующему условию*:

(*) *существует индексированное семейство множеств* $\langle S_i : i \in I\rangle$, *такое, что для всех* $i, j \in I$

$$i \leqslant j \leftrightarrow |S_i| \leqslant |S_j|.$$

Доказательство. Утверждение (*) может быть выражено в форме, указанной в замечаниях, предшествующих теореме 57, так что теорема 56 применима, и достаточно построить соответствующую FM-модель. Предположим, что $\mathfrak{V}$ — модель ZFA+AC с достаточно большим множеством атомов, и предположим, что $(I, \leqslant)$ принадлежит ядру; найдем FM-модель $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{W}$, для которой $\mathfrak{V} \models (*)$.

Так как $(I, \leqslant)$ может быть вложено в $(\mathscr{P}(I), \subseteq)$ отображением $i \mapsto \{j \in I : j \leqslant i\}$, мы будем рассматривать $(\mathscr{P}(I), \subseteq)$, а не $(I, \leqslant)$.

Модель XIV.

Пусть $\mathfrak{W}$ — модель ZFA + AC, I принадлежит ядру $\mathfrak{W}$ и предположим, что $|A| = |I| \cdot \aleph_0$. Пусть $\{a_{in} : i \in I, n \in \omega\}$ — пересчет атомов. Для каждого $p \subseteq I$ положим $S_p = \{a_{in} : i \in X, n \in \omega\}$. Построим FM-модель $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{W}$ таким образом, чтобы $\{S_p : p \subseteq I\} \in \mathfrak{V}$, отображение $h : p \mapsto S_p$ принадлежало $\mathfrak{V}$ и

$$p \subseteq q \leftrightarrow \mathfrak{V} \models |S_p| \leqslant |S_q|.$$

Пусть $\mathscr{G}$ — группа перестановок π на A, таких, что $\pi(S_{(i)}) = S_{(i)}$ для каждого $i \in I$, т. е. если $\pi(a_{in}) = a_{jm}$, то $i = j$. Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр на $\mathscr{G}$, порожденный $\{H_e : e \subseteq A, e$ конечное$\}$, где $H_e = \{\pi \in \mathscr{G} : (\forall a \in e)[\pi a = a]\}$. Пусть $\mathfrak{V}$ — класс всех HS-элементов $\mathfrak{W}$.

Из определения $\mathscr{G}$ следует, что $\operatorname{sym}(S_p) = \mathscr{G}$ для $p \subseteq I$ и $\operatorname{sym}(h) = \mathscr{G}$. Если $p \subseteq q$, то $S_p \subseteq S_q$, и поэтому $\mathfrak{V} \models |S_p| \leqslant |S_q|$; следовательно, остается показать, что $\mathfrak{V} \models |S_p| \not\leqslant |S_q|$, если $p \not\subseteq q$.

Пусть $p \not\subseteq q$, $i \in p - q$ и предположим, что существует взаимно однозначное отображение $g \in \mathfrak{V}$ из S_p в S_q. Существует конечное $e \subseteq A$, такое, что $\operatorname{sym}(g) \supseteq H_e$. Пусть n, n',

такие, что $a_{in} \notin e$ и $a_{in'} \notin e$. Пусть π — перестановка A, меняющая a_{in} на $a_{in'}$, и $\pi(a) = a$ в остальных случаях. Ясно, что $\pi \in H_e$ и поэтому $\pi(g) = g$. Так как $a_{in} \notin S_q$, то $g(a_{in}) \neq a_{in}$, и поэтому $g(a_{in}) = a_{jm}$, где $j \neq i$; более того, $\pi(a_{jm}) = a_{jm}$. Теперь мы имеем

$$g(a_{in}) = a_{jm} = \pi(a_{jm}) = \pi(g(a_{in})) = \pi g(\pi a_{in}) = g(a_{in'})$$

в противоречии с предположением о взаимной однозначности g[24]).

Список литературы

1 Bukovský L.
The continuum problem and powers of alephs, *Comment. Math Univ Carolinae*, **6** (1965), 181—197.

2. Cohen P.
The independence of the continuum hypothesis, *Proc. Nat. Acad. Sci*, **50** (1963), 1143—1148; **51** (1964), 105—110. (Русский перевод: Коэн П, Независимость континуум-гипотезы, *Математика*, 9 : 4 (1965), 142—155)

3. Cohen P.
Set theory and the continuum hypothesis, New York, 1966. (Русский перевод Коэн П., Теория множеств и континуум-гипотеза, М, 1969.)

4 Easton W.
Powers of regular cardinals, *Annals of Math. Logic.* **1** (1970). 139—178.

5 Engelking R., Karlowicz M.
Some theorems of set theory, *Fund. Math.* **57** (1965), 275—285.

6 Fraenkel A
Der Begriff «definit» und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms. S. — B. d Preuss Acad. d W. 1922, 253—257.

7. Fraenkel A
Über die Axiome der Teilmengenbildung, Verh. des int. Math. Kongress Zürich, 1932, 341—342.

8. Gödel K
The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis, Princeton 1940. (Русский перевод: Гёдель К., Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств, *Успехи матем наук*, 3 (1948), 96—149.)

9 Hajnal A.
On a consistency theorem connected with the generalized continuum problem, *Zeitscrift für math. Logik*, 2 (1956), 131—136.

10. Hausdorff F.
Der Potenzbegriff in der Mengenlehre, *Jahrber. der Deutsch. Math. Ver.*, **13** (1904), 569—571.

11. Jech T.
On ordering of cardinalities, *Bull. de l'Acad. Polon. des. Sci.*, **14** (1966), 293—296.

12 Jech T.
Nonprovability of Suslin's hypothesis, *Comment Math Univ. Carolinae*, **8** (1967), 291—305.

13. Jech T.
On models for set theory without AC, *Proc. of Symp in Pure Math.*, **13**, I (1971), 135—142.

14 Jech T., Sochor A.
On Θ-models of set theory, *Bull. de l'Acad Polon. des Sci.*, **14** (1966), 297—303

15 Jech T, Sochor A
Applications of Θ-model, *Bull. de l'Acad. Polon. des Sci.*, **14** (1966), 351—355.

16 Jensen R
Suslin's hypothesis is incompatible with V = L, *Notices Amer. Math. Soc.*, **15** (1968), 935
17 König J
Zum Kontinuum-Problem, *Math. Annalen*, **60** (1905), 177—180.
18 Kripke S.
An extension of a theorem of Gaifman — Hales — Solovay, *Fund. Math.*, **61** (1967), 29—32
19 Kuratowski C.
Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnement mathématiques, *Fund. Math.*, **3** (1922), 76—108.
20 Kurepa D
Ensembles ordonnés et ramifiés, *Publ. Math. Univ Belgrade*, **4** (1935), 1—138
21 Lévy A
Indépendence conditionnelle de V = L. *C. R. de l'Acad Sci Paris*, **245** (1957), 1582—1583.
22 Lévy A.
Axiom schemata of strong infinity in axiomatic set theory, *Pacific Jour. Math*, **10** (1960), 223—238.
23 Lévy A.
Independence results in set theory by Cohen's method, *Notices Amer. Math. Soc.*, **10** (1963), 592—593.
24 Lévy A.
Definability in axiomatic set theory 1, Proc. 1964 Inter. Congress Logic, Meth and Phil. of Science, 127—151, Amsterdam, 1965.
25. Loś J.
Quelques remarques, théorèmes et problèmes sur les classes définissables d'algèbres. Math. interpret. of formal systems, 98—113, Amsterdam, 1955.
26 MacNeille H.
Partially ordered sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **42** (1937), 416—460.
27 Martin D., Solovay R.
Internal Cohen extentions, *Annals of Math. Logic*, **2** (1970), 143—178.
28 Mathias A.
Докторская диссертация, Cambridge, England, 1969.
29 McAloon K.
Consistency results about ordinal definability, *Annals of Math. Logic*, **2** (1971), 449—467.
30. Miller E
A note on Suslin's problem, *Amer. Jour. Math.*, **65** (1943), 673—678.
31 Mostowski A.
Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip, *Fund Math.*, **32** (1939), 201—252.
32 Mostowski A.
An undecidable arithmetical statement, *Fund. Math.*, **36** (1949), 143—164.
33 Myhill J, Scott D.
Ordinal definability, *Proc. of Symp. in Pure Math.*, **13**, I (1971), 271—278.
34 Rasiowa H., Sikorski R.
A proof of the completeness theorem of Gödel, *Fund. Math*, **37** (1950), 193—200.
35 Rasiowa H, Sikorski R.
Mathematics of metamathematics, 1963. (Русский перевод: Расёва Х., Сикорский Р., Математика метаматематики. М; 1972)
36 Sacks G.
Forcing with perfect closed sets. *Proc. of Symp. in Pure Math*, **13**, I (1971), 331—356.

37. Scott D.
Measurable cardinals and constructible sets, *Bull. de l'Acad. Polon. des Sci.* **9** (1961), 521—524.
38. Scott D., Solovay R.
Boolean-valued models for set theory, *Proc. of Symp. in Pure Math.*, **13**, II (в печати).
39. Shepherdson J.
Inner models for set theory 1, *Jour. Symb. Logic*, **16** (1951), 161—190.
40. Shoenfield J.
The problem of predicativity, Essays on the foundations of math., 132—139, Jerusalem, 1961.
41. Shoenfield J.
On the independence of the axiom of costructivity, *Amer. Jour. Math.*, **81** (1959), 537—540.
42 Sikorski R.
Boolean algebras. New York, 1964. (Русский перевод: Сикорский Р., Булевы алгебры, М, 1970.)
43. Solovay R.
$2^{\aleph_0}$ can be anything it ought to be, Proc. 1963 Symposium on the Theory of Models, Amsterdam, 1965, 435.
44. Solovay R.
New proof of a theorem of Gaifman and Hales, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72** (1966), 282—284.
45. Solovay R.
A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, *Annals of Math.*, **92** (1970), 1—56.
46. Solovay R., Tennenbaum S.
Iterated Coden extensions and Suslin's Problem. *Annals of Math.*, **94** (1971), 201—245.
47. Specker E.
Zur Axiomatik der Mengenlehre, *Zeitschr. für Math. Logik*, **3** (1957), 173—210.
48. Suslin M.
Problème 3, *Fund. Math.*, **1** (1920), 223.
49. Tarski A.
Quelques théorèmes sur les alephs, *Fund. Math.*, **7** (1925), 1—14.
50. Tennenbaum S.
Suslin's Problem, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **59** (1968), 60—63.
51. Von Neumann J.
Die Axiomatisierung der Mengenlehre, *Math. Zeitschrift*, **27** (1928), 669—752.
52. Von Neumann J.
Über eine Widerspruchsfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre, *J. für die reine und ang. Math.*, **160** (1929), 227—241.
53. Vopěnka P.
∇-models in which the generalized continuum hypothesis does not hold, *Bull. de l'Acad. Polon. des Sci.*, **14** (1966), 95—99
54. Vopěnka P.
General theory of ∇-models. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **8** (1967), 145—170.
55. Vopěnka P., Balcar B.
On complete models of the set theory, *Bull. de l'Acad. Polon. des Sci*, **15** (1967), 839—841.
56. Vopěnka P., Hájek P.
Permutations submodels of the model ∇, *Bull. de l'Acad. Polon. Sci.*, **13** (1965), 611—614.
57 Vopěnka P, Hájek P.
The theory of semisets Prague, 1972.

58 Zermelo E.
Beweis das jede Menge wohlgeordnet werden kann, *Math. Annalen.*, **59** (1904), 514—516.
59. Zermelo E.
Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, *Math. Annalen.*, **65** (1908), 261—281.
60 Zorn M.
A remark on method in transfinite algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **41** (1935), 667—670.

Примечания

[1]) Использование классов в теории множеств не является необходимым, и получаемые результаты удается переформулировать без привлечения понятия класса. Примеры такой переформулировки приведены в примечаниях [4]) и [6]).

[2]) Аксиома (A0) выводима в исчислении предикатов с равенством из аксиомы $\forall x\,(x = x)$ и теоремы исчисления предикатов $\forall x\,(x = x) \to \exists x\,(x = x)$.

[3]) Аксиома (A2) выводима из остальных аксиом теории множеств. Доказательство этого факта, а также другие результаты о взаимосвязи аксиом имеются в [3].

[4]) Теорему 2 можно сформулировать как схему теорем ZF. Именно, для всякой формулы $\varphi(x, \vec{p})$ в ZF доказуемо:

если

(1) $\varphi(0, \vec{p})$,

(2) $\varphi(\alpha, \vec{p}) \to \varphi(\alpha + 1, \vec{p})$ для всех ординалов α,

(3) $\forall \alpha\,(\alpha \in S \to \varphi(\alpha, \vec{p})) \to \varphi(\lim S, \vec{p})$ для каждого множества S ординальных чисел, то

$$\forall x\,(x \text{ — ординал} \to \varphi(x, \vec{p})).$$

[5]) Таким образом, выражение $(\mathbf{M}, \mathbf{E}) \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ обозначает формулу ZF. Пусть, например, $\mathbf{M} = \{u\colon \psi(u, \vec{p})\}$; тогда через $(\mathbf{M}, \in) \models (\text{A1})$ обозначается формула

$$\forall u\,(\psi(u, \vec{p}) \to (u \in X \leftrightarrow u \in Y)) \to X = Y.$$

[6]) В доказательстве теоремы 22 предположение о том, что $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ являются моделями ZF, не используется в полной мере. Достаточно предположить, что $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ являются моделями для некоторого конечного числа $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ аксиом ZF; эти аксиомы можно выписать, проанализировав доказательство. Таким образом, в теореме можно заменить условие „$\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$—

модели ZF“ условием

$$\mathbf{M} \models \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k \quad \text{и} \quad \mathbf{N} \models \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k,$$

и тогда можно сформулировать теорему 22 как схему теорем теории ZF.

[7]) См. Gödel K., Remarks before the Princeton Bicentennial Conference on Problems in Mathematics (1946); The Undecidable, New York, 1965, 84—87.

[8]) Заключение теоремы 28 может быть доказано также в предположении, что множество конструктивных подмножеств ω несчетно (см. Gaifman H., Measurable cardinals and constructible sets, Amer. Math. Soc. Notices, 11(1964), 771; Rowbottom F., Some strong axioms of infinity incompatible with the axiom of constructibility *Annals of Math. Logic*, 3 (1971), 1—44).

[9]) Доказательство леммы 46. Пусть

$$D = \{(\alpha, \beta, \gamma) \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathrm{On}^3 \wedge \alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma\}.$$

Класс D вполне упорядочен каноническим отношением $\prec$, которое совпадает на D с лексикографическим упорядочением. Пусть π_i, $1 \leqslant i \leqslant 6$, — перестановки упорядоченных троек; положим $F(x, y, z) = (\alpha, \beta, \gamma)$, если $(\alpha, \beta, \gamma) \in D$ и существует перестановка π_i, такая, что $(\alpha, \beta, \gamma) = \pi_i(\rho(x), \rho(y), \rho(z))$.

Докажем лемму индукцией по $F(x, y, z)$.
Индукционный шаг.

(ii) Так как $y \in \mathrm{dom}(x)$, то $\rho(y) < \rho(x)$, $F(y, y, z) \prec F(x, y, z)$ и по индуктивному предположению, пункт (i), $\| y = y \| = 1$.
Теперь имеем

$$x(y) = x(y) \cdot \| y = y \| \leqslant \sum_{z \in \mathrm{dom}(x)} x(z) \cdot \| z = y \| = \| y \in x \|.$$

(i) Пусть $z \in \mathrm{dom}(x)$. В силу (ii), $x(z) \leqslant \| z \in x \|$ и $x(z) \Rightarrow \| z \in x \| = 1$. Отсюда следует

$$\prod_{z \in \mathrm{dom}(x)} (x(z) \Rightarrow \| z \in x \|) = 1, \text{ т. е. } \| x = x \| = 1.$$

(iii) Непосредственно из определения булевых значений получаем $\| x = y \| = \| y = x \|$; индуктивное предположение не используется.

(iv) Пусть $t \in \mathrm{dom}(x)$. Так как $\| x = y \| \leqslant x(t) \Rightarrow \| t \in y \|$, то

$$x(t) \cdot \| x = y \| \leqslant \| t \in y \|,$$

$$x(t) \cdot \| x = y \| \cdot \| y = z \| \leqslant \| t \in y \| \cdot \| y = z \|.$$

Так как $F(t, y, z) < F(x, y, z)$, то по индуктивному предположению, пункт (vi),

$$\| t \in y \| \cdot \| y = z \| \leqslant \| t \in z \|,$$

$$x(t) \cdot \| y = x \| \cdot \| y = z \| \leqslant \| t \in z \|.$$

В силу эквивалентности $a \cdot b \leqslant c \leftrightarrow a \leqslant (b \Rightarrow c)$, имеем

$$\| x = y \| \cdot \| y = z \| \leqslant (x(t) \Rightarrow \| t \in z \|),$$

$$\| x = y \| \cdot \| y = z \| \leqslant \prod_{t \in \mathrm{dom}\,(x)} (x(t) \Rightarrow \| t \in z \|).$$

Аналогично доказывается

$$\| x = y \| \cdot \| y = z \| \leqslant \prod_{t \in \mathrm{dom}\,(z)} (z(t) \Rightarrow \| t \in x \|).$$

Таким образом,

$$\| x = y \| \cdot \| y = z \| \leqslant \| x = z \|.$$

(v) Пусть $t \in \mathrm{dom}(y)$. Так как $F(t, x, z) < F(y, x, z)$, то по индуктивному предположению, пункт (iv), имеем

$$y(t) \cdot \| t = x \| \cdot \| x = z \| \leqslant y(t) \cdot \| t = z \| \leqslant \| z \in y \|.$$

Отсюда следует

$$\| x = z \| \cdot \sum_{t \in \mathrm{dom}\,(y)} y(t) \cdot \| t = x \| \leqslant \| z \in y \|, \text{ т. е.}$$

$$\| x = z \| \cdot \| x \in y \| \leqslant \| z \in y \|.$$

(vi) Пусть $t \in \mathrm{dom}(x)$, тогда

$$x(t) \cdot \| x = z \| \leqslant \| t \in z \|,$$

$$\| t = y \| \cdot x(t) \cdot \| x = z \| \leqslant \| t = y \| \cdot \| t \in z \|.$$

Так как $F((t, y, z)) < F((x, y, z))$, то по индуктивному предположению, пункт (v), имеем

$$\| t = y \| \cdot \| t \in z \| \leqslant \| y \in z \|.$$

Отсюда следует

$$\| x = z \| \cdot x(t) \cdot \| t = y \| \leqslant \| y \in z \|,$$

$$\| x = z \| \cdot \sum_{t \in \mathrm{dom}\,(x)} x(t) \cdot \| t = y \| \leqslant \| y \in z \|, \text{ т. е.}$$

$$\| x = z \| \cdot \| y \in x \| \leqslant \| y \in z \|.$$

[10]) Доказательство леммы 47.
(a) Доказывается индукцией по сложности φ.
(b) Так как $x(y) \leqslant \| y \in x \|$, то

$$\| (\exists y \in x)\, \varphi(y) \| \geqslant \sum_{y \in \mathrm{dom}\,(x)} x(y) \cdot \| \varphi(y) \|.$$

С другой стороны, $\| (\exists y \in x)\, \varphi(y) \| = \sum_{y \in \mathfrak{M}^B} \| y \in x \| \cdot \| \varphi(y) \| =$

$$= \sum_{y \in \mathfrak{M}^B} \sum_{z \in \mathrm{dom}\,(x)} x(z) \cdot \| y = z \| \cdot \| \varphi(y) \|.$$

В силу пункта (a) леммы, $\| y = z \| \cdot \| \varphi(y) \| \leqslant \| \varphi(z) \|$ и поэтому

$$\| (\exists y \in x)\, \varphi(y) \| \leqslant \sum_{y \in \mathfrak{M}^B} \sum_{z \in \mathrm{dom}\,(x)} x(z) \cdot \| \varphi(z) \| = \sum_{z \in \mathrm{dom}\,(x)} x(z) \cdot \| \varphi(z) \|.$$

Аналогично доказывается второе равенство

$$\| (\forall y \in x)\, \varphi(y) \| = \prod_{y \in \mathrm{dom}\,(x)} (x(y) \Rightarrow \| \varphi(y) \|).$$

[11]) Теорема доказывается вычислением булевых значений аксиом исчисления предикатов и проверкой того факта, что правила вывода сохраняют значимость, т. е. если формула χ получена из φ или φ, ψ по одному из правил вывода и φ, ψ — формулы, значимые в $\mathfrak{M}^B$ при всех значениях свободных переменных, то формула χ также значима в $\mathfrak{M}^B$ при всех значениях свободных переменных; далее применяется индукция по сложности вывода. Отметим, что если φ выводима в исчислении предикатов из ψ и некоторых значимых в $\mathfrak{M}^B$ формул, то $\| \psi \| \leqslant \| \varphi \|$.

[12]) Докажем, что $\| Y$ — функция выбора на $X \| = 1$. Так как $\mathrm{dom}\,(Y) = \{p_0, p_1, \ldots, p_\alpha, \ldots\}$, то

$$\| Y \text{ — функция} \| = \prod_{p_\alpha,\, p_\beta} (Y(p_\alpha) \cdot Y(p_\beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \prod_{u,\, v_1,\, v_2 \in \mathfrak{M}^B} \| p_\alpha = (u, v_1) \wedge p_\beta = (u, v_2) \to v_1 = v_2 \|).$$

Если для любых p_α, p_β, u, v_1, $v_2 \in \mathfrak{M}^B$

$$(*) \quad Y(p_\alpha) \cdot Y(p_\beta) \cdot \| p_\alpha = (u, v_1) \wedge p_\beta = (u, v_2) \| \leqslant \| v_1 = v_2 \|,$$

то $\| Y$ — функция $\| = 1$. В силу определения p_α имеем

$$\| p_\alpha = (z_\alpha, t_\alpha) \| = 1.$$

Из формулы $p_\alpha = (z_\alpha, t_\alpha)$, аксиом экстенсиональности и пары в исчислении предикатов выводимо

$$p_\alpha = (u, v_1) \to u = z_\alpha \wedge v_1 = t_\alpha.$$

В силу теоремы 30, $\| p_\alpha = (u, v_1) \| \leqslant \| u = z_\alpha \wedge v_1 = t_\alpha \|$. Отсюда следует

$$Y(p_\alpha) \cdot Y(p_\beta) \cdot \| p_\alpha = (u, v_1) \wedge p_\beta = (u, v_2) \| \leqslant$$
$$\leqslant Y(p_\alpha) \cdot Y(p_\beta) \cdot \| z_\alpha = z_\beta \wedge v_1 = t_\alpha \wedge v_2 = t_\beta \|.$$

Если $\alpha \neq \beta$, то $Y(p_\alpha) \cdot Y(p_\beta) \cdot \| z_\alpha = z_\beta \| = 0$; если $\alpha = \beta$, то $\| v_1 = t_\alpha \wedge v_2 = t_\beta \| \leqslant \| v_1 = v_2 \|$.

Таким образом, неравенство (*) верно и $\| Y$ — функция $\| = 1$.

Используя $\| p_\alpha = (z_\alpha, t_\alpha) \| = 1$ и $\| z_\alpha \neq 0 \to t_\alpha \in z_\alpha \| = 1$, получаем для любых p_α, u, $v \in \mathfrak{M}^B$

$$\| p_\alpha = (u, v) \wedge u \neq 0 \| \leqslant \| u = z_\alpha \wedge v = t_\alpha \wedge z_\alpha \neq 0 \| \leqslant$$
$$\leqslant \| u = z_\alpha \wedge v = t_\alpha \wedge t_\alpha \in z_\alpha \| \leqslant \| v \in u \|.$$

Отсюда следует

$$\| (\forall x \in Y) \forall u, v (x = (u, v) \wedge u \neq 0 \to v \in u) \| = 1,$$
$$\| Y \text{ — функция выбора на } X \| = 1.$$

[13]) Таким образом, можно указать конечное число $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ аксиом, для которых в ZFC доказуема формула

$$(*)\ \forall X (X \models \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k \to (\exists \text{ п. б. а. } B \in X) \forall G$$
$$(G \text{ есть } X\text{-генерический у. ф. на } B \to X[G] \models \varphi \wedge \neg\varphi)).$$

Тогда в силу принципа отражения существует множество M, такое, что

$$M \models \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k,$$

и в силу (*) и леммы 55 существует п. б. а. $B \in M$ и M-генерический у. ф. G на B, для которого

$$M[G] \models \varphi \wedge \neg\varphi.$$

Следовательно, в ZFC оказывается доказуема противоречивая формула

$$\exists X (\exists \text{ п. б. а. } B \in X) \exists G \ (G \text{ есть } X\text{-генерический у. ф.}$$
$$\text{на } B \wedge X[G] \models \varphi \wedge \neg X[G] \models \varphi).$$

[14]) Мартин и Соловей [27] доказали также, что любая п. б. алгебра, мощности $\leqslant 2^{\aleph_0}$ и удовлетворяющая у. с. ц., может быть вложена в счетно порожденную п. б. алгебру, удовлетворяющую у. с. ц.

[15]) Без предположения о существовании недостижимого кардинала Соловей доказал совместимость с ZF + DC утверждения „существует инвариантная относительно сдвигов, счетно аддитивная мера, определенная на всех множествах действительных чисел и являющаяся продолжением меры Лебега“ (см. Saks G., Measure-theoretical uniformity in recursion theory and set theory, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **142** (1969), 381—420).

[16]) Доказательство леммы. Пусть $c \in {}^{\omega}\omega$ и S — множество всех конечных последовательностей натуральных чисел. Определим на $S \times \omega$ функцию ρ_c по рекурсии:

$$\rho_c(0, m) = m,$$

$$\rho_c(s^\frown j, m) = \begin{cases} \rho_c(s, m+1), & \text{если } c(\rho_c(s, 0)) = 1; \\ \rho_c(s, \pi(j, m)+1), & \text{если } c(\rho_c(s, 0)) = 2; \\ \rho_c(s, m) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если c кодирует борелевское множество A, то функции $c_s \in {}^{\omega}\omega$, $c_s(m) = c(\rho_c(s, m))$, являются кодами борелевских множеств, возникающих в процессе построения множества A по коду c. Для этих функций выполняются соотношения: $c_{s^\frown j} = \varphi(c_s)$, если $c_s(0)=1$; $c_{s^\frown j} = \psi_j(c_s)$, если $c_s(0)=2$; $c_{s^\frown j} = c_s$ в остальных случаях. Нетрудно проверить индукцией по построению множеств C_α, что

$$c\text{—код борелевского множества} \leftrightarrow (\forall x \in {}^{\omega}\omega)(\exists m \in \omega)\,[c_{x|m}(0) = 0].$$

Кодируя последовательности из S натуральными числами, можно определить функции ρ_c и c_s арифметическими формулами и выразить утверждение „c есть код“ в виде

$$(*) \qquad (\forall x \in {}^{\omega}\omega)(\exists m \in \omega)\,\varphi(c, x|m),$$

где φ — арифметическая формула.

Если c — код, то для каждого $x \in {}^{\omega}\omega$ функция

$$y(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A_{c_s}; \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

является единственной функцией, удовлетворяющей арифметической формуле $\chi(c, x, y)$:

$$(\forall s \in S)\,[[y(s) = 1 \leftrightarrow ((c_s(0) = 0 \wedge c_s(1) = r_i \wedge c_s(2) = r_j \wedge r_i < x < r_j) \vee (c_s(0) = 1 \wedge y(s^\frown 0) = 0) \vee (c_s(0) = 2 \wedge \wedge (\exists k \in \omega)(y(s^\frown k) = 1)))] \wedge (y(s) = 1 \vee y(s) = 0)].$$

Таким образом,

$$x \in A_{c_s} \leftrightarrow c - \text{код} \wedge (\forall y \in {}^{\omega}\omega)(\chi(c, x, y) \rightarrow y(s) = 1),$$

$$x \in A_c \leftrightarrow c - \text{код} \wedge (\forall y \in {}^{\omega}\omega)(\chi(c, x, y) \rightarrow y(0) = 1),$$

$$x \notin A_c \leftrightarrow c - \text{код} \wedge (\forall y \in {}^{\omega}\omega)(\chi(c, x, y) \rightarrow y(0) = 0).$$

Приводя правые части эквивалентностей к предваренной форме и пользуясь правилами сокращения кванторов (см. Х. Роджерс, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., 1972, гл. 16), получаем, что утверждение $(\forall x \in {}^{\omega}\omega)[x \notin A_c]$, т. е. $A_c = 0$, выразимо в виде (*).

Докажем абсолютность формул вида (*). Пусть S_0 состоит из последовательностей $s \in S$, для которых $\neg\varphi(c, s \mid m)$ при любом $m \in \mathrm{dom}(s)$. Для s_1, $s_2 \in S_0$ положим

$$s_1 \prec s_2 \leftrightarrow s_2 \subset s_1.$$

Теперь имеем

$$\text{отношение } \prec \text{ на } S_0 \text{ правильно построено} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall x \in {}^{\omega}\omega)(\exists m \in \omega)\,\varphi(c, x \mid m).$$

Правильная построенность отношений является по лемме 35 абсолютным свойством для транзитивных моделей ZF, поэтому утверждения вида (*) абсолютны.

[17]) В [45] Соловей называет такие числа случайными относительно $\mathfrak{M}$, объясняя выбор названия тем, что ввиду леммы 65 (а) эти числа удовлетворяют интуитивным требованиям, предъявляемым к „случайным“ числам.

[18]) В построенной модели $\mathbf{M}$ каждое множество действительных чисел обладает свойством Бэра и либо счетно, либо содержит совершенное ядро (см. [45]). В модели $\mathfrak{M}[G]$ указанными свойствами обладают множества, определимые с помощью счетной последовательности ординалов. Аналогично можно построить модель ZFC, в которой, кроме того, $2^{\aleph_0} \neq \aleph_1$ и каждое множество действительных чисел, определимое с помощью счетной последовательности ординалов, является суммой $\aleph_1$ борелевских множеств (см. Lévy A., Solovay R., On decomposition of sets of reals to Borel sets, *Annals of Math. Logic*, 5 (1972), 1—19).

Совместимость утверждения „каждое несчетное множество действительных чисел содержит совершенное ядро“ с аксиомами ZF + DC не может быть доказана без предположения о существовании недостижимого числа (см. Mycielsky Y., On the axiom determinateness, *Fund. Math.*, 53 (1964), 205—224).

[19]) В [50] Тенненбаум построил модель ZFC, в которой выполняются и $\neg$SH, и $\neg$CH.

[20]) Как указано в [46], Енсен построил модель ZFC, в которой выполняются SH, и CH.

[21]) Без ограничения общности можно предполагать существование элементов 1_D, $0_D \in D$, таких, что $\| \check{1}_D$ — единичный элемент в $D\| = 1$ и $\| \check{0}_D$ — нулевой элемент в $D\| = 1$.

[22]) Утверждение ошибочно, $\mathfrak{M}$-генеричность множества $G_1 \times G_2$ можно доказать следующим образом. Пусть $\Delta \in \mathfrak{M}$ — плотное подмножество в P. Достаточно показать, что множество

$$\Delta_1 = \{d \in D\colon (\exists b \in G_1)((b, d) \in \Delta)\}$$

плотно в п. б. а. $i_{G_1}(D)$. Пусть $d' \in D$ и

$$\Delta_2 = \{b \in B\colon (\exists d \in D)(b \leqslant \| \check{d} \leqslant_D \check{d}' \| \wedge (b, d) \in \Delta)\}.$$

Множество Δ_2 плотно в B; это следует из плотности Δ в P. В силу генеричности G_1, $\Delta_2 \cap G_1 \neq 0$, т. е.

$$(*) \qquad (\exists b \in G_1)(\exists d \in D)(b \leqslant | \check{d} \leqslant_D \check{d}' \| \wedge (b, d) \in \Delta).$$

Из $(*)$ следует

$$(\exists d \in D)(\| \check{d} \leqslant_D \check{d}' \| \in G_1 \wedge (\exists b \in G_1)((b, d) \in \Delta)).$$

Таким образом,

$$(\forall d' \in D)(\exists d \in D)(d \leqslant_{i_{G_1(D)}} d' \wedge d \in \Delta_1).$$

[23]) Леви доказал, что Con (ZFC) $\rightarrow$ Con (ZFC + GCH + „каждое OD вполне упорядоченное множество действительных чисел счетно"). (Lévy A., Definability in axiomatic set theory II, Mathematical Logic and Foundations of Set Theory, Amsterdam — London, 1970, 129—145.)

[24]) Многие результаты о совместимости теоретико-множественных утверждений с ZF + $\neg$AC приведены в обзоре Матиаса „A survey of recent results in set theory", Proc. of Symp. in Pure Math., 13, II (в печати) и книге Йехе „The axiom of choice", Amsterdam — New Jork, 1973.

Указатель обозначений

$\varphi(\vec{u})$	7
$\{x\colon \varphi(x\vec{u})\}$	7
V	8
$A \subseteq B$	8, 10
$A \cap B$	8
$A \cup B$	8
$A = B$	8
(u, v)	8
$\{u \in X\colon \varphi(u\vec{p})\}$	9
0	9
$\bigcup X$	9
$X \subset Y$	10
$\mathscr{P}(X)$	10
$X \times Y$	10
$\mathrm{dom}(R)$	10
$\mathrm{rng}(R)$	10
$f\colon x \longmapsto y$	10
^{X}Y	10
$f \mid X$	11
$f''X$	11
$f_{-1}X$	11
ZF	11
ZFC	11
$\inf X$	12
$\sup X$	12
On	13
$\alpha + 1$	13
$\lim A$	13
ω	13
$\langle \alpha_\xi\colon \xi < \alpha \rangle$	14
$\mid X \mid$	14, 21
$k + \lambda$	15
$k \cdot \lambda$	15
k^λ	15
$\mathscr{H}(X)$	15
$\aleph_\alpha$	16
ω_α	16
$\mathrm{cf}(\alpha)$	16
AC	20
$\prod_{i \in I} X_i$	21
$\sum_{i \in I} k_i$	21
$\prod_{i \in I} k_i$	21
k^+	22
$2^{\overset{\smile}{k}}$	24
GCH	24
V_α	24
π	24
TC(S)	25
$(\mathbf{M}, \mathbf{E}) \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)$	25
$\mathbf{M} \models \varphi$	26
$\mathscr{F}^{\mathbf{M}}(\vec{x})$	26
Con(ZF)	29
$\mathscr{F}_1(X, Y), \ldots, \mathscr{F}_3(X, Y)$	33
$\mathscr{F}_4(x), \ldots, \mathscr{F}_8(X)$	33
L	37
$\mathrm{cl}(S)$	37
L_α	37
$L_\alpha[A]$	43
$L[A]$	43
$L_\alpha(U)$	45
$L(U)$	45
OD	46
OD(A)	47
HOD	47
$(\mathrm{Ult}, \in^*)$	48
ΣX	52
ΠX	52
RO(P)	54
$B(\mathfrak{M})$	55
$\mathfrak{M}_\varphi$	57

$\mathfrak{M}^B$	57	C_a	83
$\check{x}$	57	A_c	83
$u \Rrightarrow v$	57	$A_C^{\mathfrak{M}}$	83
$\| x \in y \|$	57	$[A]$	84
$\| x = y \|$	57	x_a	85
$\| \varphi \|$	58	A_C	86
i_a	61	SH	93
$\mathfrak{M}[G]$	61	$l(T)$	93
G	61	MA	101
$\overline{p} \Vdash \varphi$	65	$\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(x)$	115, 123
$q^\frown a$	67	HS	115, 123
$\bigoplus$	75	ZFA	122
DC	81	$\mathscr{P}^a(S)$	122
		$\mathscr{P}^\infty(S)$	122

Предметный указатель

Абсолютная формула 26
— операция 26
Абсолютность кардиналов 66
— конфинальности 66
Автоморфизм 77
— булевозначного универсума 88
Аксиома выбора 20
— конструктивности 39
— Мартина 101
Аксиомы ZF 8—11
— ZFA 122
Алгебра борелевских множеств 85
— булева 51
— — полная 52
— Леви 74
— однородная 78
— смещения 74
— счетно порожденная 77
Алефы 16
Антицепь 94
— максимальная 97
Атомы 122

Булевозначный универсум 57
Булевы значения 57

Ветвь 93
Вложение 12, 77
— элементарное 49
Вынуждающие условия 56
Вынуждение 64
Выполнимость 25

Гёделевские операции 33
Генерическое расширение 61
Гипотеза Суслина 93
Гомоморфизм 12, 77
— естественный 54
— полный 77

Дерево 93
— Ароншайна 93
— нормальное двоичное 96
— Суслина 94
— — нормальное

Замыкание 37
— транзитивное 25
Значимая формула 58

Идеал 55
— главный 55
Изоморфизм 12, 77
$\in$-изоморфизм 30
Имя 61
Интерпретация 61

Каноническое вполне-упорядочение $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$ 16
Кардинал 15
— недостижимый 40
— — слабо 17
— предельный 17
— регулярный 16
— сингулярный 16
Класс 7
— определимый 7
— замкнутый относительно операции 27
— собственный 8
— универсальный 8
— — почти 28
— экстенсиональный 26
Коды борелевских множеств 82
Континуум Суслина 93
Континуум-гипотеза 19
— обобщенная 24
Конфинальность 16

Множество бесконечное 18
— борелевское 83
— вполне упорядоченное 12
— $\mathfrak{M}$-генерическое 56
— F-генерическое 101
— единичное 8
— конечное 18
— — по Дедекинду 18
— конструктивное 37
— ординально определимое 46
— — — наследственное 47
— открыто-плотное 69
— плотное 53

Множество плотное ниже 103
— симметрическое 116
— — наследственно 116
— совершенное 112
— упорядоченное 12
— — частично 12
Модель 25
— исходная 55
— Френкеля—Мостовского 123
— ZF 29
Мощность континуума 19

Ординал 12
— последующий 13
— предельный 13
Относительная конструктивность 43
— непротиворечивость 29
Отношение 10
— правильно построенное 31
— экстенсиональное 31

Пара неупорядоченная 8
— упорядоченная 8
Подалгебра 77
— порожденная 88
Пополнение 19
Последовательность 14
Принцип вполне-упорядочения 20
— зависимого выбора 81
— индукции 14
— $\in$-индукции 25
— максимальности 20
— отражений 32
Продолжение дерева 93
Произведение декартово 10, 21
— кардиналов 15, 21
Прямой предел алгебр 106

Сечение 53
— дедекиндово 19
— регулярное 53
Симметрическое расширение 117
Совместимые элементы 52
Сумма кардиналов 15, 21
— множества 9
— ч. у. множеств 70

Разбиение 55, 60, 76
Ранг 24, 57, 123

Теорема о вложении 125
— об изоморфизме 30, 31
Трансфинитная рекурсия 14

Ультрастепень 48
Ультрафильтр 48, 54
— $\mathfrak{M}$-генерический 55
— канонический генерический 61
— счетно полный 50
— тривиальный 50
Упорядочение (линейное) 12
— отделимое 52
— плотное 19
— полное 19
— частичное 12
Условие счетности цепей 68
— k-цепное 68

Фильтр 54
— нормальный 116, 123
— F-полный 62

Цепь 20

Число действительное 19
— кардинальное 21
— Соловея 85
— — каноническое 87
— Хартогса 15

Элемент симметрический 123
— — наследственно 123
Элементарная эквивалентность 48

Ядро 123

Оглавление

От переводчика 5
Предисловие 6
1. Формулы и классы 7
2. Аксиомы Цермело — Френкеля 8
3. Ординальные числа 11
4. Кардинальные числа 14
5. Конечные множества 18
6. Действительные числа 18
7. Аксиома выбора 20
8. Арифметика кардинальных чисел 21
9. Аксиома регулярности 24
10. Транзитивные модели 25
11 Конструктивные множества 37
12. Совместимость AC и GCH 39
13 Теоремы о транзитивных моделях 40
14. Ординальная определимость 45
15 Ультрастепени 48
16. Замечания о полных булевых алгебрах 51
17. Метод форсинга и булевозначные модели 55
18. Независимость континуум-гипотезы и смещение кардинальных чисел 65
19. Применения булевозначных моделей в теории булевых алгебр . . 77
20. Измеримость по Лебегу 81
21. Проблема Суслина 93
22. Аксиома Мартина 101
23. Совершенный форсинг 110
24. Об ординальной определимости 114
25. Независимость AC 115
26. Модели Френкеля — Мостовского 122
27. Вложение FM-моделей в модели ZF 125
Список литературы 132
Примечания 136
Указатель обозначений 144
Предметный указатель 146

Уважаемый читатель!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

Т. ИЕХ

Теория множеств
и метод форсинга

Редактор И. А. Маховая
Художник К. И. Милаев
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор З. И. Резник

Сдано в набор 2/XII 1972 г.
Подписано к печати 19/X 1973 г.
Бумага тип. № 1 $60\times90^{1}/_{16}$=4,75 бум. л. 9,5 печ. л.
Уч.-изд. л. 7,83. Изд. № 1/6845
Цена 56 коп. Зак. 427

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома
при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли
198052, Ленинград, Измайловский проспект, 29

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
ГОТОВИТ К ВЫПУСКУ В 1974 г. НОВУЮ КНИГУ

Окстоби Дж., Мера и категория, *Нью-Йорк, 1971, пер. с англ., 7 л.*

В этой книге изучаются важные понятия теории меры и теории множеств. Наиболее подробно рассматриваются понятия множества первой категории и множества меры нуль. Излагаются многочисленные приложения этих понятий в различных областях анализа.

Книга написана в хорошем стиле и при небольшом объеме затрагивает широкий круг вопросов. Она дает ценный материал для начальных семинаров по теории множеств и особенно полезна как учебное пособие при изучении основ теории множеств, теории меры и теории функций.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, начиная от студентов младших курсов университетов и педагогических институтов.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
ГОТОВИТ К ВЫПУСКУ В 1974 г. НОВУЮ КНИГУ

Сложность вычислений и алгоритмов. *Сб. ст. 1969—1971, пер. с англ., 20 л.*

Затрагиваемые в сборнике проблемы математической логики тесно связаны с теорией вычислительных машин. В книге рассматриваются модели вычислительных устройств, их классификация, классификация языков, оценки сложности вычислений и оценки сложности программ. Развивается связанный со сложностью программ подход А. Н. Колмогорова к обоснованию теории вероятностей и теории информации. В настоящее время эти вопросы начинают привлекать большое число ученых.

Перевод ряда более ранних работ содержится в сборнике «Проблемы математической логики» («Мир», 1970).

Книга рассчитана на читателей, интересующихся современными проблемами теории алгоритмов и автоматов, математической лингвистики, вычислительных машин и программирования. Она будет полезна студентам и аспирантам указанных специальностей.

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Заказы на эти книги можно оформить в магазинах, торгующих научно-технической литературой, или направить в фирменную секцию издательства «Мир» по адресу: 121019, Москва, Г-19, проспект Калинина, 26, п/я № 42, Московский дом книги. Помните, что своевременно оформленный заказ помогает правильному установлению тиража книги и гарантирует Вам получение ее в первые дни поступления в продажу.