Г. БИРКГОФ

ТЕОРИЯ РЕШЕТОК

Перевел с английского
В. Н. САЛИЙ

Под редакцией
Л. А. СКОРНЯКОВА

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1984

22.144
Б64
УДК 512.8

LATTICE THEORY

BY

GARRETT BIRKHOFF

PROVIDENCE

RHODE ISLAND

1967

Биркгоф Г. **Теория решеток:** Пер. с англ. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 568 с.

Книга является энциклопедией классической теории решеток (структур). В ней отражены основные направления этой теории, развивавшиеся в первые десятилетия ее становления (30 — 50-е годы), а также различные ее приложения. Многие из этих направлений, имеющих не только историческое значение, не находят должного отражения в современных учебниках. Большую роль в развитии теории решеток сыграли проблемы Биркгофа — некоторые из них продолжают оставаться открытыми. Переводчик и редактор дают, по возможности, полную информацию о современном состоянии этих проблем.

Б $\frac{1702030000-061}{053\ (02)\text{-}84}$ 4-83

ОГЛАВЛЕНИЕ [1]

---

[1] В оригинале перечисляются лишь названия глав. Для удобства мы приводим и названия параграфов. — *Прим. перев.*

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Три издания монографии Г. Биркгофа (1940, 1948, 1967 гг.), по существу, различные книги. Первые два издания (русский перевод второго вышел в 1952 г.) были для своего времени энциклопедиями теории решеток (структур), отражая все ее важнейшие направления. Третье издание появилось в период, когда под влиянием общих идей и методов универсальной алгебры в теории решеток начали складываться новые направления: эквациональные теории решеток, исследование решеток многообразий алгебраических систем и других конкретных решеток, связанных с алгебраическими системами. Уже тогда (а тем более через 15 лет после выхода оригинала!) книга не могла претендовать на энциклопедичность. Написанная довольно сумбурно, она мало пригодна для первоначального ознакомления с предметом. Однако этот недостаток с лихвой окупается многочисленными достоинствами. Пожалуй, самым главным из них является то большое внимание, которое автор уделяет связям теории решеток с самыми разными разделами математики и других естественных наук. Здесь и геометрия, и теория групп, и функциональный анализ, и теоретическая физика, и теория вероятностей. . . Читатель не раз получит повод удивиться продемонстрированному в книге богатству ассоциаций, отражающих огромный диапазон научных интересов автора (от гидродинамики до психологии). Конечно, читать книгу нелегко. Часто предлагаются лишь эскизы доказательств. Во многих главах как рефрен звучит: «Мы опускаем детали». Нередко (в особенности, если дело касается не теории решеток) отсутствуют строгие определения. В некоторых случаях мы снабдили подобные высказывания примечаниями, но немалая часть работы осталась и для читателя. Однако богатство и разнообразие идей безусловно окупят все эти трудности, и представители самых различных разделов математики, механики и физики смогут найти интересное для себя в рассматриваемой книге.

Библиография приведена в конце монографии и разбита на три раздела: I) постоянно используемые источники, II) другие источники, III) работы, добавленные при переводе. Для постоянно используемых источников, следуя автору, мы применяли сокращенные буквенные обозначения. В частности, для первых двух изданий настоящей книги приняты аббревиатуры [LT1] и [LT2]. В остальных случаях ссылки оформляются обычным образом: указанием фамилии автора и номера его работы.

Для первоначального знакомства с теорией решеток более подходящими представляются книги Л. А. Скорнякова [III, 2], Д. А. Владимирова [III, 1], Р. Сикорского [II, 1]. Современной теории решеток посвящена монография Г. Гретцера [III, 2]. Новейшие достижения были отражены в обзорах Л. А. Скорнякова [III. 1], М. М. Глухова, И. В. Стеллецкого, Т. С. Фофановой [III, 1], а также в сериях обзоров, помещенных в специальных выпусках сборника «Упорядоченные множества и решетки» и в сборнике «Теория решеток». Имея в виду эту литературу, мы, как правило, не останавливались на вопросах дальнейшего развития затронутых в книге исследований (напомним, что после выхода оригинала прошло 15 лет), ограничившись комментариями по поводу явно сформулированных проблем. В ряде случаев мы отметили, что те или иные из упоминаемых автором результатов журнальных статей нашли отражение в монографической литературе.

Многочисленные небрежности, допущенные в оригинале (опечатки в формулах, очевидные пробелы в ряде доказательств, сбои в нумерациях), при переводе исправлялись без специальных указаний.

Мы выражаем искреннюю признательность проф. А. И. Векслеру за сделанные им полезные замечания.

В. Салий,
Л. Скорняков

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Это издание преследует три цели: сделать основные идеи теории решеток доступными для широких кругов математиков, обрисовать общую логическую структуру этой теории и указать некоторые из наиболее интересных ее приложений. Как и в предыдущих изданиях, я старался осветить и последние достижения, в том числе свои собственные, еще не опубликованные результаты, но библиография на этот раз представлена очень неполно.

Где-нибудь в другом месте [1] я подробно изложу свои взгляды на ту роль, которую теория решеток играет в математике вообще. Здесь же будет затронута в основном логическая структура теории; я попытался отразить ее в оглавлении книги.

Красота теории решеток отчасти объясняется исключительной простотой ее основных понятий: упорядочения, точной верхней и точной нижней граней. В этом отношении она очень напоминает теорию групп. Исходные идеи развиваются в главах I—V, где показано, что за их кажущейся простотой скрываются многие тонкие детали, как, например, свойства модулярности и полумодулярности, конструкции псевдодополнения и ортодополнения.

Теоретико-решеточными понятиями пронизана вся современная алгебра, хотя во многих учебниках это обстоятельство явным образом не отмечается. Решетки и группы принадлежат к числу самых основных инструментов «универсальной алгебры»; в частности, строение алгебраических систем обычно наиболее отчетливо выявляется путем анализа связанных с ними решеток. В главах VI и VII делается попытка раскрыть и подтвердить смысл этих замечаний рассмотрением достаточного числа специфических приложений в теории групп и луп с операторами.

Теория решеток в различных своих аспектах соприкасается с основаниями теории множеств (включая общую топологию) и действительного анализа. Здесь при использовании различных упорядочений, связанных с обоснованием трансфинитной индукции и других предельных процессов, приходится сталкиваться с самыми изощренными во всей математике конструкциями, некоторые из которых даже сомнительны! Главы VIII—XII описывают указанные процессы с теоретико-решеточной точки зрения.

---

[1]) Биркгоф Г. Что могут дать вам решетки? (Birkhoff G. What can lattices do for you?) — статья в сборнике Trends in Lattice Theory.— Princeton: Van Nostrand, 1967.

Наконец, многие из весьма глубоких и интересных приложений теории решеток связаны с упорядоченными математическими структурами, наделенными также бинарным сложением или умножением: решеточно упорядоченные группы, моноиды, векторные пространства, кольца и поля (как, например, действительное поле). В главах XIII—XVII устанавливаются свойства таких систем, а также свойства положительных линейных операторов на упорядоченных векторных пространствах. Теория упорядоченных систем сейчас является, по-видимому, наиболее быстро развивающейся частью теории решеток.

Создание этой книги потребовало огромного труда, хотя я ни в коей мере не пытался добиться в ней полноты. Я хотел бы выразить свою глубокую признательность тем моим коллегам и ученикам, которые принимали участие в обсуждении рукописи на различных этапах ее подготовки. Я очень обязан, в частности, следующим лицам: Керби Бейкеру, К. Грандье, Джорджу Гретцеру, Роджеру Линдону, Дональду Макларену, Ричарду С. Пирсу, Джорджу Рейни, Эрлану Ремси, Джан-Карло Рота, Уолтеру Тейлору, Алану Уотермену, Орину Фринку, Полю Халмошу, Альфреду Хейлсу, Семьюэлу Х. Холанду и М. Ф. Яновицу.

Я благодарен Национальному научному фонду за частичную поддержку исследований и за помощь в подготовке предварительного издания заметок, а также Аргонской национальной лаборатории и Рэнд Корпорейшн за поддержку исследований в тех областях теории решеток, которые представляли интерес для их персонала.

Наконец, я хотел бы поблагодарить Лауру Шлесинджер и Лорен Доэрти за квалифицированную работу по перепечатке рукописи.

ГЛАВА I

ТИПЫ РЕШЕТОК

1. Упорядоченные множества. Цепи

«Чистая» теория решеток имеет дело со свойствами единственного объекта — первоначально заданного бинарного отношения $\leqslant$, которое читается как «содержится в», «является частью» или «меньше или равно». У этого отношения предполагается наличие определенных свойств, самые основные из которых приводят к следующему понятию «упорядоченного множества» или, сокращенно, «у-множества».

Определение. *Упорядоченным множеством* [1]) называется множество, на котором определено бинарное отношение $x \leqslant y$, удовлетворяющее для всех x, y, z следующим условиям:

P1 $\qquad x \leqslant x$ (рефлексивность);

P2 $\qquad$ если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$ (антисимметричность);

P3 $\qquad$ если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$ (транзитивность).

Если $x \leqslant y$ и $x \neq y$, то пишут $x < y$ и говорят, что «x строго меньше чем y» или «x собственным образом содержится в y». Отношение $x \leqslant y$ записывается и в виде $y \geqslant x$, и тогда оно читается как «y содержит x» (или «y включает x»). Аналогично $x < y$ записывают и как $y > x$. Введенные обозначения и терминология являются стандартными.

Существует бесконечно много хорошо известных примеров упорядоченных множеств, т. е. математических объектов, определяемых свойствами P1—P3. Вот три простейшие иллюстрации.

Пример 1. Σ (I) состоит из всех подмножеств некоторого множества I, включая само I и пустое подмножество $\varnothing$, а $x \leqslant y$ означает, что x является подмножеством в y.

Пример 2. $\mathbf{Z}^+$ — множество целых положительных чисел, а $x \leqslant y$ означает, что x делит y.

Пример 3. F состоит из всех действительных функций $f(x)$, определенных на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$, и $f \leqslant g$ означает, что $f(x) \leqslant g(x)$ для *каждого* x такого, что $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Теперь сформулируем без доказательства два вытекающие из P1—P3 известные свойства, которые характеризуют отношение включения.

---

[1]) В другой терминологии «частично упорядоченное множество». Об «упорядоченном множестве» говорили раньше в тех случаях, когда любые два элемента оказывались сравнимыми. Однако сейчас в этом смысле, как правило, употребляют выражение «линейно упорядоченное множество», так что термин «упорядоченное множество» остается свободным и его все чаще используют в самом общем понимании, как это и принято в настоящем переводе.— *Прим. перев.*

Лемма 1. *В любом у-множестве соотношение $x < x$ не имеет места ни для какого x, а из $x < y$ и $y < z$ следует, что $x < z$. Обратно, если бинарное отношение $<$ обладает этими двумя свойствами, то отношение $\leqslant$, определенное требованием, что $x < y$ или $x = y$, удовлетворяет* P1—P3.

Другими словами, строгое включение характеризуется законами антирефлексивности и транзитивности.

Легко показать, что у-множество P может содержать самое большее один элемент a, который удовлетворял бы неравенству $a \leqslant x$ для всех $x \in P$. В самом деле, если a и b — два такие элемента, то $a \leqslant b$ и в то же время $b \leqslant a$, откуда $a = b$ согласно P2. Такой элемент, если он существует, обозначается символом O и называется *наименьшим* элементом у-множества P. Двойственный ему *наибольший* элемент у-множества P, если он существует, обозначается символом I. Элементы O и I, когда они существуют, называются *универсальными гранями* у-множества P, поскольку $O \leqslant x \leqslant I$ для всех $x \in P$. Подмножество $X \subset P$ называется *ограниченным*, если существуют $a, b \in P$ такие, что $a \leqslant x \leqslant b$ для всех $x \in X$.

Лемма 2. *Если* $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_1$, *то* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. (Антицикличность порядка.)

Пример 4. $\mathbf{R}$ — множество действительных чисел и $x \leqslant y$ имеет свой обычный для действительных чисел смысл.

Отношение порядка в этом и других важных у-множествах удовлетворяет условию

P4 Для любых x, y имеет место $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$.

Определение. У-множество, удовлетворяющее P4, называется *линейно* упорядоченным, или *цепью*.

Другими словами, из двух различных элементов цепи один является меньшим, а другой бо́льшим. Понятно, что у-множества в примерах 1—3 не являются цепями: они содержат *не сравнимые* элементы x, y, т. е. такие, что ни $x \leqslant y$, ни $y \leqslant x$ места не имеют.

Отправляясь от примеров 1—4, можно построить много других у-множеств путем перехода к подмножествам. Точнее, если P — произвольное у-множество и S — некоторое подмножество множества P, то $x \leqslant y$ для элементов $x, y \in S$, по определению, означает, что $x \leqslant y$ в P. Поскольку условия P1—P3 для отношения $\leqslant$ выполняются в P, они тем более выполняются в S. Подобным образом обстоит дело, конечно, и с P4, и мы приходим к следующему очевидному заключению.

Теорема 1. *Всякое подмножество S у-множества P само является у-множеством относительно того же самого порядка (ограниченного на S). В частности, любое подмножество цепи является цепью.*

Таким образом, множество $\mathbf{Z}^+$ положительных целых чисел является цепью, если рассматривать его с отношением $\leqslant$ из примера 4, но оно не будет цепью относительно упорядоченности примера 2.

Пример 5. (а) Множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ образует цепь $\mathbf{n}$ (*ординальное* число n) в своей естественной упорядоченности. (б) Если это множество не упорядочено, т. е. никакие два его различных элемента не сравнимы [1]), оно образует другое у-множество (*кардинальное* число n).

Совокупность всех подмножеств произвольного множества, выделяемых некоторым заданным свойством, образует у-множество относительно теоретико-множественного включения. Это справедливо, в частности, для подгрупп группы, векторных подпространств векторного пространства, борелевских подмножеств T_0-пространства и т. д. Например, идеалом кольца R является всякое его подмножество H, выделяемое свойствами: (i) если a, $b \in R$, то $a-b \in R$; (ii) если $a \in H$ и $b \in R$, то $ab \in H$ и $ba \in H$. Принцип, сформулированный выше, в применении к данному случаю дает еще один важный пример, который более подробно будет рассмотрен в главах VII и XIV.

Пример 6. P состоит из идеалов $H, J, K, \ldots$ некоторого кольца R и $H \leqslant K$ для двух идеалов означает, что H является подмножеством в K (т. е. что $H \subset K$).

2. Изоморфизм. Двойственность

Функция $\theta : P \to Q$, заданная на у-множестве P и принимающая значения в у-множестве Q, называется *сохраняющей порядок* или *изотонной*, если

(1) из $x \leqslant y$ следует, что $\theta(x) \leqslant \theta(y)$.

Изотонная функция, допускающая изотонную обратную функцию, называется *изоморфизмом*. Другими словами, изоморфизм между двумя у-множествами есть взаимно однозначное соответствие между ними, которое удовлетворяет условию (1) и условию

(1′) из $\theta(x) \leqslant \theta(y)$ следует, что $x \leqslant y$ [2]).

Изоморфизм у-множества P с самим собой называется его *автоморфизмом*.

Два у-множества P и Q называются *изоморфными* (обозначение: $P \cong Q$), если существует изоморфизм между ними.

Обратным для отношения ρ, по определению, является отношение $\breve{\rho}$ такое, что $x\breve{\rho}y$ (читается «x находится в отношении $\breve{\rho}$ с y») тогда и только тогда, когда $y\rho x$. Так, обратным для отноше-

[1]) В таких случаях обычно говорят «тривиально упорядочено». Тривиально упорядоченные подмножества данного у-множества называются его *антицепями*.— *Прим. перев.*

[2]) Свойство (1′) называется *обратной изотонностью* отображения θ.— *Прим. перев.*

ния «включает» будет отношение «включается», обратным для «больше чем» — отношение «меньше чем».

Рассматривая условия P1—P3, мы очевидным образом приходим к следующему заключению.

Теорема 2 (Принцип двойственности). *Отношение, обратное для отношения порядка, само является упорядоченностью.*

Определение. *Двойственным* для у-множества X называется у-множество $\breve{X}$, определяемое на тех же элементах отношением, обратным к упорядоченности в X.

Так как $X \cong \breve{\breve{X}}$, эта терминология законна: отношение двойственности должно быть симметричным.

Определение. Функция $\theta : P \to Q$ называется *антиизотонной* [1]), если

(2) $$\text{из } x \leqslant y \text{ следует, что } \theta(x) \geqslant \theta(y).$$

Взаимно однозначное соответствие θ, удовлетворяющее условию (2) и условию

(2′) $$\text{из } \theta(x) \leqslant \theta(y) \text{ следует, что } x \geqslant y,$$

называется *дуальным изоморфизмом* [2]).

Мы будем называть системы, изоморфные $\breve{X}$, *двойственными* по отношению к X. Очевидно, что у-множества по признаку двойственности распределяются парами, если исключить случаи самодвойственности. Аналогично, каждое определение и каждая теорема об у-множествах имеют двойственные аналоги, и если некоторая теорема справедлива для всех у-множеств, то для всех них будет истинным и двойственное утверждение.

Как мы увидим впоследствии, этот принцип двойственности находит применение в алгебре, в проективной геометрии и в логике.

Многие важные у-множества являются самодвойственными (т. е. антиизоморфными себе). Таким будет у-множество в примере 1 из § 1: соответствие, сопоставляющее каждому подмножеству его дополнение, взаимно однозначно и обращает включение. Аналогично, множество всех линейных подпространств n-мерного евклидова пространства, содержащих начало, самодвойственно: соответствие, соотносящее каждому подпространству его ортогональное дополнение, взаимно однозначно и обращает включение.

В этих примерах самодвойственность имеет период два: для любого x образ $(x')'$ образа x' совпадает с x. Такие самодвойственности (дуальные автоморфизмы) называются *инволюциями*.

---

[1]) Иногда говорят «антитонная».— *Прим. перев.*

[2]) Или *антиизоморфизмом*.— *Прим. перев.*

Упражнения к §§ 1—2

1. Докажите лемму 1.
2. Докажите лемму 2.
3. Покажите, что существует в точности три способа упорядочения двухэлементного множества.
4. (а) Покажите, что есть только два неизоморфных двухэлементных у-множества, и оба они самодвойственны.

(б) Покажите, что существует пять неизоморфных трехэлементных у-множества, и три из них самодвойственны.

$\ast$ 5[1]. (а) Пусть $G(n)$ обозначает число неизоморфных у-множеств с n элементами. Покажите, что $G(4) = 16$, $G(5) = 63$, $G(6) = 318$. (Роуз и Сасаки.)

(б) Пусть $G^*(n)$ обозначает число различных упорядочений n-элементного множества. Покажите, что $G^*(2) = 3$, $G^*(3) = 19$, $G^*(4) = 219$, $G^*(5) = 4231$, $G^*(6) = 130\,023$, $G^*(7) = 6\,129\,859$.

(в) Сколько в каждом из указанных случаев будет самодвойственных у-множеств?

(г) Верно ли, что $G^*(n)$ будет нечетным при любом n?

3. Диаграммы. Градуированные у-множества

Понятие «непосредственно старшего» в иерархии можно перенести и на случай произвольного у-множества следующим образом.

Определение. Говорят, что «a покрывает b»[2] в у-множестве P, если $a > b$ и не существует такого $x \in P$, чтобы было $a > x > b$.

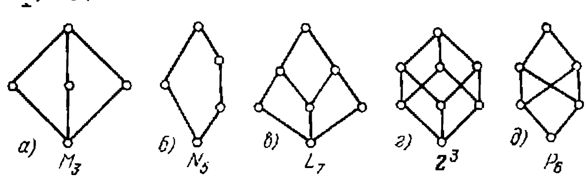


Рис. 1. Примеры диаграмм.

Порядком $n(P)$ у-множества P называется (кардинальное) число его элементов. Если это число конечно, P называется *конечным* у-множеством.

Используя отношение покрытия, можно следующим образом получить графическое представление любого конечного у-множества P. Изобразим каждый элемент множества P в виде небольшого кружка, располагая a выше b, если $a > b$. Соединим a и b прямолинейным отрезком, если a покрывает b. Полученная фигура называется *диаграммой* у-множества P; примеры показаны на рис. 1, *а—д*.

Так как $a > b$ тогда и только тогда, когда на диаграмме можно из a в b пройти по нисходящей ломаной, ясно, что любое конечное у-множество с точностью до изоморфизма определяется своей

[1] Звездочкой, как правило, отмечаются упражнения повышенной сложности. — *Прим. перев.*

[2] Обозначение: $a \succ b$. — *Прим. перев.*

диаграммой. Понятно, что диаграмма двойственного для P у-множества $\breve{P}$ получается, если диаграмму для P перевернуть «вверх ногами».

Определение. *Наименьшим* элементом подмножества X у-множества P называется элемент $a \in X$ такой, что $a \leqslant x$ для всех $x \in X$. *Наибольшим* элементом подмножества X называется элемент $b \in X$ такой, что $b \geqslant x$ для всех $x \in X$.

Введенные понятия не следует смешивать с понятиями *минимального* и *максимального* элементов. Минимальный элемент подмножества X упорядоченного множества P — это такой элемент a, что неравенство $a > x$ невозможно ни для какого $x \in X$; максимальные элементы определяются двойственно. Понятно, что наименьший элемент обязательно будет минимальным, а наибольший элемент максимальным, но обратные утверждения уже не верны.

Теорема 3. *Любое конечное непустое подмножество X произвольного у-множества имеет минимальные и максимальные элементы.*

Доказательство. Пусть X состоит из элементов $x_1, \ldots, x_n$. Положим $m_1 = x_1$, а m_k равным x_k, если $x_k < m_{k-1}$, и равным m_{k-1} в противном случае. Тогда элемент m_n будет минимальным. Аналогично доказывается существование в X максимального элемента.

Теорема 4. *В цепях понятия минимального и наименьшего (максимального и наибольшего) элемента подмножества совпадают. Таким образом, любая конечная цепь имеет наименьший (первый) и наибольший (последний) элементы.*

Доказательство. Если неравенство $x < a$ не выполняется ни для какого $x \in X$, то согласно P4 для любого $x \in X$ будет $x \geqslant a$.

Теорема 5. *Любая конечная цепь из n элементов изоморфна ордцнальному числу $\boldsymbol{n}$ (т. е. цепи целых чисел $1, \ldots, n$).*

Другими словами, существует взаимно однозначное соответствие φ между n-элементной цепью X и множеством $\{1, \ldots, n\}$ такое, что $x_1 \leqslant x_2$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x_1) \leqslant \varphi(x_2)$. Таким образом, конечные цепи — это конечные ординальные числа.

Доказательство. Пусть φ отображает наименьший элемент $x \in X$ в 1, наименьший элемент из оставшихся $x \in X$ в 2 и т. д.

Длина конечной цепи $\boldsymbol{n}$ по определению полагается равной $n - 1$ (взгляните на ее диаграмму). В общем случае *длиной* $l[P]$ у-множества P называется точная верхняя грань длин цепей в P. Если $l[P]$ конечна, о P говорят, что оно имеет *конечную длину*. Любое у-множество конечной длины с точностью до изоморфизма определяется своим отношением покрытия: $a > b$ тогда и только тогда, когда существует конечная последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_n$ такая, что $a = x_0$, $b = x_n$ и x_{i-1} покрывает x_i для $i = 1, \ldots, n$.

Изоморфны или не изоморфны два конечные у-множества часто можно проще всего выяснить, нарисовав их диаграммы. Любой изоморфизм должен устанавливать взаимно однозначное соответствие между элементами низшего уровня, между элементами следующего уровня и т. д. Соответствующие элементы должны покрываться одинаковым числом элементов, и эти покрывающие элементы также должны находиться в соответствии. Руководствуясь этими правилами, можно легко перечислить различные (т. е. неизоморфные) у-множества, состоящие, скажем, из 4 элементов— их окажется в точности 16.

В у-множестве P конечной длины с O *высотой* или размерностью $h[x]$ элемента x называется точная верхняя грань длин цепей $O = x_0 < x_1 < \ldots < x_l = x$ между O и x. Если P имеет наибольший элемент I, то, конечно, $h[I] = l[P]$. Понятно также, что $h[x] = 1$ тогда и только тогда, когда x покрывает O,— такие элементы называются *атомами* или *точками* у-множества P.

Высота является особенно важной функцией в градуированных у-множествах. *Градуированным* у-множеством называется у-множество P с заданной на нем функцией $g: P \to \mathbf{Z}$, принимающей значения в цепи всех целых чисел (с их естественной упорядоченностью) и такой, что

G1 если $x > y$, то $g[x] > g[y]$ (строгая изотонность);
G2 если x покрывает y, то $g[x] = g[y] + 1$.

Во всяком градуированном у-множестве имеет место следующее

Цепное условие Жордана—Дедекинда. *Все максимальные цепи между двумя фиксированными точками имеют одинаковую длину.*

Лемма. *В у-множестве P с O и конечными цепями тогда и только тогда выполняется цепное условие Жордана — Дедекинда, когда P градуируется функцией $h[x]$.*

Доказательство. Если P градуируется функцией $h[x]$, то условие Жордана—Дедекинда выполняется очевидным образом: длина максимальной цепи, соединяющей точки a и $b > a$, равна $h[b] - h[a]$. Обратно, если имеет место условие Жордана—Дедекинда, то $h[x]$ будет длиной каждой максимальной цепи от O до x, откуда сразу следует выполнимость для $h[x]$ условий G1 и G2.

Упражнения

1. (а) Покажите, что диаграмма у-множества является ориентированным графом [1]), если рисовать стрелку от x к y тогда и только тогда, когда x покрывает y.

---

[1]) О понятиях графа и ориентированного графа («орграф») см. Оре О. Теория графов.— 2-е изд.— М.: Наука, 1980.

(б) Покажите, что конечный ориентированный граф тогда и только тогда соответствует некоторому у-множеству, когда в нем $\overrightarrow{a_0a_1}$, $\overrightarrow{a_1a_2}$, ..., $\overrightarrow{a_{n-1}a_n}$ несовместимо с $\overrightarrow{a_na_0}$.

(в) Покажите, что любой орграф определяет квазиупорядоченное множество [1]), если считать $a \geqslant b$ тогда и только тогда, когда $a = b$, или $\overrightarrow{ab}$, или $\overrightarrow{aa_1}$, $\overrightarrow{a_1a_2}$, ..., $\overrightarrow{a_nb}$ для подходящих $a_1, \ldots, a_n$.

2. Покажите, что «отношения покрытия» в любом у-множестве образуют новое у-множество, если считать, что («x покрывает y») $>$ («u покрывает v») тогда и только тогда, когда $y \geqslant u$.

3. Покажите, что любое изотонное отображение $P \to P_1$ одного у-множества P на другое P_1 переводит связные компоненты графа для P в связные компоненты графа для P_1.

4. Какие из диаграмм на рис. 1 изображают самодвойственные у-множества? С помощью диаграмм постройте новые самодвойственные у-множества.

5. Покажите, что цепь можно определить как множество элементов, на котором задано транзитивное отношение $x > y$ такое, что для любых элементов u, v имеет место одно и только одно из соотношений $u > v$, $u = v$, $v > u$.

6. Покажите, что цепи это в точности те у-множества, все у-подмножества которых являются решетками.

7. Покажите, что никакое конечное у-множество с более чем двумя элементами не определяется с точностью до изоморфизма своим графом.

8. Пусть у-множество P имеет конечную длину. Покажите, что любые два элемента в нем имеют верхнюю грань тогда и только тогда, когда P имеет универсальную верхнюю грань I.

9. Покажите, что в у-множестве конечной длины цепь максимальна среди цепей, соединяющих элементы a и b, тогда и только тогда, когда она связна в графе, представляющем P.

4. Решетки

Верхней гранью подмножества X в у-множестве P называется элемент $a \in P$, содержащий все $x \in X$. *Точная верхняя грань* подножества X — это такая его верхняя грань, которая содержится в любой другой его верхней грани [2]); она обозначается символом $\sup X$. Согласно P2, если точная верхняя грань $\sup X$ существует, то она единственна. Понятия *нижней грани* подмножества X и *точной нижней грани* (которая обозначается символом $\inf X$) определяются двойственно [3]). Также согласно P2, если точная нижняя грань $\inf X$ существует, то она единственна.

Определение. *Решеткой* [4]) называется у-множество L, в котором любые два элемента имеют точную нижнюю грань,

---

[1]) Автор часто использует понятия, формально вводимые позднее. См., например, ниже упр. 6.— *Прим. перев.*

[2]) Другими словами, это *наименьшая* верхняя грань подмножества X или наименьший элемент верхнего конуса множества X. Символ $\sup X$ читается «супремум X».— *Прим. перев.*

[3]) Таким образом, точная нижняя грань подмножества — это его *наибольшая* нижняя грань или наибольший элемент нижнего конуса множества X. Символ $\inf X$ читается «инфимум X».— *Прим. перев.*

[4]) Одинаково распространенный термин «структура» становится неудобным из-за большой смысловой емкости этого слова (к тому же постоянно употребляется «структура» в смысле Бурбаки).— *Прим. перев.*

или «пересечение», обозначаемое $x \wedge y$, и точную верхнюю грань, или «объединение», обозначаемое $x \vee y$. Решетка L называется *полной*, если любое ее подмножество X имеет в L точные верхнюю и нижнюю грани [1]).

Полагая $X = L$, мы видим, что любая непустая полная решетка содержит наименьший элемент O и наибольший элемент I. Очевидно, что у-множество, двойственное решетке, само является решеткой, а у-множество, двойственное полной решетке, будет полной решеткой с взаимной заменой пересечений и объединений. Любая конечная решетка, а также решетка конечной длины является полной. Более тонкие аналоги «цепных условий», обеспечивающие полноту решетки, будут обсуждаться в главе VIII.

Любая цепь является решеткой, в которой $x \wedge y$ совпадает с меньшим, а $x \vee y$ с бо́льшим из элементов x, y. Не каждая решетка полна: так, у-множество рациональных чисел не является полной решеткой; и для действительных чисел (с естественным их упорядочением) условия полноты не выполняются, пока мы не присоединим к ним в качестве «универсальных граней» $-\infty$ и $+\infty$.

Решетка всех подмножеств данного множества X (пример 1 § 1) полна; наименьшим элементом O здесь будет пустое множество $\varnothing$, а роль I играет само X. Для любого семейства A подмножеств $S_\alpha \subset X$ точная нижняя грань $\inf A$ совпадает с теоретико-множественным пересечением $\bigcap_A S_\alpha$ всех S_α, а $\sup A$ есть не что иное, как теоретико-множественное объединение $\bigcup_A S_\alpha$.

Определение. *Подрешеткой* решетки L называется подмножество $X \subset L$ такое, что если $a \in X$, $b \in X$, то $a \wedge b \in X$ и $a \vee b \in X$.

Подрешетка решетки сама является решеткой с теми же операциями объединения и пересечения. Пустое подмножество и любое одноэлементное подмножество также будут подрешетками. Вообще, если $a \leqslant b$ в решетке L, то *(замкнутый) интервал* $[a, b]$, состоящий из всех элементов $x \in L$, которые удовлетворяют неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, всегда будет подрешеткой. *Выпуклым* подмножеством в у-множестве P называется подмножество, которое вместе с любыми своими элементами a, b, где $a \leqslant b$, содержит весь интервал $[a, b]$. Подмножество S решетки L, по определению, является *выпуклой подрешеткой*, если для любых $a, b \in S$ будет $[a \wedge b, a \vee b] \subset S$.

Подмножество решетки L может быть решеткой относительно того же (точнее, индуцированного) порядка, не будучи, однако, подрешеткой. Следующий пример иллюстрирует типичную ситуацию для широкого класса таких (полных) решеток.

---

[1]) Понятие решетки («Dualgruppe») впервые глубоко изучалось Дедекиндом [1, S. 113—114]. Полные решетки ввел автор в [1, p. 442].

Пример 7. Пусть Σ состоит из подгрупп некоторой группы G и пусть $\leqslant$ означает теоретико-множественное включение. Тогда Σ является полной решеткой, в которой $H \wedge K = H \cap K$ (теоретико-множественное пересечение), а $H \vee K$ есть наименьшая подгруппа в Σ, содержащая H и K (и она не совпадает с их теоретико-множественным объединением).

В приведенном примере теоретико-множественное объединение двух несравнимых подгрупп никогда не будет подгруппой, так что решетка подгрупп *не* является подрешеткой решетки всех подмножеств группы G.

Примеры 6 и 7 являются типичными для широкого класса полных решеток, характеризуемых в терминах следующего понятия.

Определение. Свойство подмножеств множества I называется свойством *замыкания*, если (i) I обладает этим свойством и (ii) любое пересечение подмножеств, имеющих данное свойство, само обладает им.

Свойства замыкания систематически изучаются в главах V и VIII. А пока отметим лишь следующий результат.

Теорема 6. *Пусть L — полная решетка и S — некоторое подмножество в L такое, что* (i) $I \in S$ *и* (ii) *если* $T \subset S$, *то* $\inf T \in S$. *Тогда S является полной решеткой.*

Доказательство. Для любого (непустого) подмножества T из S, очевидно, $\inf T$ (в L) является элементом подмножества S согласно (ii), и этот элемент будет точной нижней гранью для T в S. Двойственно, пусть $U \subset S$ обозначает множество всех верхних граней подмножества $T \subset S$; оно не пусто, так как $I \in S$. Тогда $\inf U \in S$ также будет верхней гранью для T и, более того, наименьшей верхней гранью, так как $\inf U \leqslant u$ для всех $u \in U$. Это и доказывает, что S является полной решеткой.

Следствие. *Подмножества любого множества, обладающие некоторым свойством замыкания, образуют полную решетку, в которой решеточное пересечение любого семейства подмножеств S_α совпадает с их теоретико-множественным пересечением, а их решеточное объединение совпадает с пересечением всех подмножеств T_β, содержащих все S_α.*

Прямые произведения. Кроме тех решеток, которые естественным образом возникают в различных областях математики, при помощи специальных конструкций можно строить и новые решетки, отправляясь от некоторых заданных. Одна из таких возможностей — образование прямого произведения, аналогичного прямым произведениям групп или прямым суммам колец.

Определение. *Прямым произведением*[1]) PQ двух у-множеств P и Q называется множество всех пар (x, y), где $x \in P$,

---

[1]) Прямые произведения называются также «кардинальными произведениями» по причинам, которые выяснятся в § III.1. [Автор использует обозначение PQ вместо более распространенного $P \times Q$. — *Прим. ред.*]

$y \in Q$, упорядоченное по следующему правилу: $(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2)$ тогда и только тогда, когда $x_1 \leqslant x_2$ в P и $y_1 \leqslant y_2$ в Q.

Теорема 7. *Прямое произведение LM любых двух решеток является решеткой.*

Доказательство. Для любых двух элементов (x_i, y_i) в LM $(i = 1, 2)$ элемент $(x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2)$ содержит оба элемента (x_i, y_i) и, следовательно, является верхней гранью для этой пары. Далее, любая другая верхняя грань (u, v) обоих (x_i, y_i) удовлетворяет неравенству $u \geqslant x_i$ $(i = 1, 2)$ и значит (по определению точной верхней грани), $u \geqslant x_1 \vee x_2$; аналогично $v \geqslant y_1 \vee y_2$, так что $(u, v) \geqslant (x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2)$. Это показывает, что

$$(x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2) = (x_1, y_1) \vee (x_2, y_2), \tag{3}$$

откуда следует, что объединение, стоящее справа, существует. Двойственно,

$$(x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2) = (x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2), \tag{3'}$$

и, таким образом, LM является решеткой.

5. Решетки как алгебры

Бинарные операции $\wedge$ и $\vee$ в решетках имеют важные алгебраические свойства, некоторые из которых аналогичны свойствам обычных умножения и сложения ($\cdot$ и $+$). Прежде всего, легко доказывается следующая

Лемма 1. *В любом у-множестве для операций пересечения и объединения выполняются, если, конечно, определены входящие в них выражения, следующие законы:*

L1 $\quad x \wedge x = x, \quad x \vee x = x \quad$ (*идемпотентность*);

L2 $\quad x \wedge y = y \wedge x, \quad x \vee y = y \vee x \quad$ (*коммутативность*);

L3 $\quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z, \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

(*ассоциативность*);

L4 $\quad x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x \quad$ (*поглощение*).

Кроме того, неравенство $x \leqslant y$ равносильно каждому из условий

$$x \wedge y = x \text{ и } x \vee y = y \quad (\textit{совместимость}).$$

Доказательство. Законы идемпотентности и коммутативности выполняются очевидным образом. Ассоциативный закон L3 также очевиден, поскольку $x \wedge (y \wedge z)$ и $(x \wedge y) \wedge z$ равны $\inf \{x, y, z\}$, если все эти выражения определены. Равносильность соотношений $x \leqslant y$, $x \wedge y = x$ и $x \vee y = y$ проверяется непосредственно, и из них следует L4.

Лемма 2. *Если у-множество P имеет O, то $O \wedge x = O$ и $O \vee x = x$ для всех $x \in P$. Двойственно, если P имеет наибольший элемент I, то $x \wedge I = x$ и $x \vee I = I$ для всех $x \in X$.*

Доказательства оставляем читателю.

Лемма 3. *Во всякой решетке операции объединения и пересечения изотонны:*

(4) *если* $y \leqslant z$, *то* $x \wedge y \leqslant x \wedge z$ *и* $x \vee y \leqslant x \vee z$.

Доказательство. Согласно L1—L4, если $y \leqslant z$, то

$$x \wedge y = (x \wedge x) \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge (x \wedge z),$$

откуда $x \wedge y \leqslant x \wedge z$ вследствие совместимости. Второе неравенство в (4) доказывается двойственно (принцип двойственности).

Лемма 4. *Во всякой решетке имеют место следующие неравенства дистрибутивности*

(5) $$x \wedge (y \vee z) \geqslant (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

(5′) $$x \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Доказательство. Ясно, что $x \wedge y \leqslant x$ и $x \wedge y \leqslant y \leqslant y \vee z$, откуда $x \wedge y \leqslant x \wedge (y \vee z)$. Точно так же $x \wedge z \leqslant x$, $x \wedge z \leqslant z \leqslant y \vee z$, откуда $x \wedge z \leqslant x \wedge (y \vee z)$. Таким образом, $x \wedge (y \vee z)$ является верхней гранью для $x \wedge y$ и $x \wedge z$, и значит, выполняется (5). Неравенство (5′) следует из (5) по принципу двойственности.

Лемма 5. *Элементы любой решетки удовлетворяют следующему неравенству модулярности:*

(6) *если* $x \leqslant z$, *то* $x \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee y) \wedge z$.

Доказательство. $x \leqslant x \vee y$ и $x \leqslant z$, и значит, $x \leqslant (x \vee y) \wedge z$. Аналогично, $y \wedge z \leqslant y \leqslant x \vee y$ и $y \wedge z \leqslant z$. Следовательно, $y \wedge z \leqslant (x \vee y) \wedge z$, откуда $x \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee y) \wedge z$. Ч. т. д.

После лемм 1—5 становится очевидным, что теория решеток имеет отчетливый алгебраический оттенок. Сейчас мы докажем, что ее в самом деле можно рассматривать как часть алгебры: *тождества* L1—L4 *полностью характеризуют решетки* [1]).

При доказательстве этого факта, и во многих других случаях, оказывается полезным следующее понятие.

Определение. Система с одной бинарной идемпотентной, коммутативной и ассоциативной операцией называется *полурешеткой*.

Следующий факт немедленно вытекает из леммы 1 (справедливо и двойственное утверждение для объединений (см. § II. 2)).

---

[1]) L1—L4 для определения решеток использовал фактически Дедекинд. Операции inf и sup в у-множествах первым изучал Пирс (Peirce C. S.— Amer. J. Math., 1880, 3. p. 15—57 (особенно p. 33)). Шредер [1, S. 197] указал на ошибочность убеждения Пирса, считавшего все решетки дистрибутивными.

Следствие. *Пусть в у-множестве P любые два элемента имеют пересечение. Тогда P является полурешеткой относительно бинарной операции $\wedge$.*

Такие полурешетки называются *$\wedge$-полурешетками* или *нижними полурешетками*. Обратно:

Лемма 6. *Если в полурешетке с бинарной операцией $\circ$ положить*

$$(*) \qquad x \leqslant y \text{ тогда и только тогда, когда } x \circ y = x,$$

то она становится у-множеством, в котором $\inf\{x, y\} = x \circ y$.

Доказательство. Из закона идемпотентности $x \circ x = x$ следует рефлексивность $x \leqslant x$. При помощи коммутативного закона $x \circ y = y \circ x$ получается антисимметричность P2: если $x \leqslant y$ (т. е. $x \circ y = x$) и $y \leqslant x$ (т. е. $y \circ x = y$), то $x = x \circ y = y \circ x = y$. Применяя ассоциативный закон, из $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$ получаем $x = x \circ y = x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z = x \circ z$, откуда $x \leqslant z$, т. е. доказана транзитивность P3. Предоставим читателю самому доказать, что $x \circ y \leqslant x$ и $x \circ y \leqslant y$. Наконец, если $z \leqslant x$ и $z \leqslant y$, то $z \circ (x \circ y) = (z \circ x) \circ y = z \circ y = z$, откуда $z \leqslant x \circ y$, и значит, $x \circ y = \inf\{x, y\}$.

Теорема 8. *Любая алгебраическая система L с двумя бинарными операциями, удовлетворяющими условиям* L1—L4, *является решеткой, и обратно.*

Доказательство. Во-первых, по лемме 6 любая система L, операции которой удовлетворяют L1—L4, является у-множеством, в котором $x \wedge y = \inf\{x, y\}$, так что $x \leqslant y$ означает, что $x \wedge y = x$. Во-вторых, согласно L4, из $x \wedge y = x$ следует, что $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y$ и (двойственность) обратно. Следовательно, неравенство $x \leqslant y$ равносильно также и равенству $x \vee y = y$. По принципу двойственности получаем, что $x \vee y = \sup\{x, y\}$, и значит, L является решеткой. Вторая часть теоремы содержится в лемме 1. Этим и завершается доказательство.

Упражнения к §§ 4—5

1. Докажите, что в любой решетке $(a \vee b) \wedge (c \vee d) \geqslant (a \wedge c) \vee (b \wedge d)$, каковы бы ни были a, b, c, d.

2. Выведите утверждение (4) непосредственно из L1—L4.

3. Докажите, что любой интервал решетки является подрешеткой и что подрешеткой будет любое пересечение интервалов.

4. (а) Нарисуйте диаграммы пяти неизоморфных пятиэлементных решеток; три из них самодвойственны.

(б) Покажите, что любая пятиэлементная решетка изоморфна одной из построенных пяти решеток.

(в) Покажите, что существует в точности четыре неизоморфные непустые решетки, содержащие менее пяти элементов каждая.

(г) Покажите, что существует в точности 15 неизоморфных шестиэлементных решеток, из которых семь самодвойственны. (Указание. Добавьте O и I к четырехэлементным у-множествам.)

(д) Сколько существует неизоморфных семиэлементных решеток? (Указание. Добавьте O и I к пятиэлементным у-множествам. Сколько среди них решеток?)

5. Покажите, что «объединение» любых двух множеств в решетке всех множеств, замкнутых относительно произвольной операции замыкания, является замыканием их теоретико-множественного объединения.

6. Покажите, что следующие совокупности образуют полные решетки: (а) нормальные подгруппы группы; (б) характеристические подгруппы группы; (в) правые идеалы кольца; (г) идеалы решетки; (д) инвариантные подалгебры линейной алгебры.

7. Пусть Φ обозначает класс (однозначных) преобразований φ некоторого множества I. Покажите, что подмножества X из I такие, что $\varphi(X) \subset X$ для всех $\varphi \in \Phi$, образуют полную решетку.

8. Покажите, что выпуклые подмножества евклидова пространства образуют полную решетку.

*9. Подмножество S векторного пространства V со скалярами из упорядоченного поля F называется выпуклым, если для $x, y \in S$, $\lambda, \mu \geqslant 0$ и $\lambda + \mu = 1$ всегда будет $\lambda x + \mu y \in S$. Докажите, что выпуклые подмножества пространства V образуют полную решетку.

10. Покажите, что если $n(P) \leqslant 5$ и P содержит универсальные грани O и I, то P является решеткой.

11. Покажите, что для любого подмножества S решетки L множество всех его нижних граней является подрешеткой в L.

12. Докажите, что полная решетка всех идеалов кольца $\mathbf{Z}$ изоморфна решетке всех неотрицательных целых чисел, рассматриваемых относительно делимости. Укажите универсальные грани этой последней решетки.

13. (а) Покажите, что восьмиэлементная решетка всех подмножеств трехэлементного множества не содержит семиэлементных подрешеток.

(*б) Покажите, что любая решетка с $n > 6$ элементами содержит шестиэлементную подрешетку.

6. Дистрибутивность

Во многих решетках аналогия между решеточными операциями $\wedge$, $\vee$ и арифметическими операциями $\cdot$, $+$ включает и дистрибутивный закон $x(y+z) = xy + xz$. В таких решетках неравенства дистрибутивности (5)—(5′) усиливаются до тождеств. Эти тождества выполняются не во всех решетках; они нарушаются, например, в решетках M_3 и N_5, изображенных на рис. 2, *а*, *б* [1]).

Исследование дистрибутивности мы начнем с результата, который не имеет аналога в обычной алгебре (где в общем случае $a + bc \neq (a+b)(a+c)$).

Теорема 9. *В любой решетке следующие тождества равносильны*

L6′ $\quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ *для любых* x, y, z;

L6″ $\quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ *для любых* x, y, z.

Предостережение. Выполнимость L6′ для отдельных элементов x, y, z решетки не влечет выполнимости для них L6″,— это видно на рис. 2, *б*, *в*.

---

[1]) Решетку с диаграммой, изображенной на рис. 2, *а*, автор обозначает символом M_5 (индекс — число элементов). В переводе он всюду заменен ныне общепринятым знаком M_3.— *Прим. перев.*

Доказательство. Покажем, что из L6′ следует L6″. Обратная импликация L6″ ⇒ L6′ будет тогда получаться по принципу двойственности.

Для любых x, y, z имеем:

$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = [(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z] \quad \text{(согласно L6′)}$$

$$= x \vee [z \wedge (x \vee y)] \quad \text{(ввиду L4, L2)}$$

$$= x \vee [(z \wedge x) \vee (z \wedge y)] \quad \text{(вследствие L6′)}$$

$$= [x \vee (z \wedge x)] \vee (z \wedge y) \quad \text{(на основании L3)}$$

$$= x \vee (z \wedge y) \quad \text{(в соответствии с L4).}$$

Определение. Решетка называется *дистрибутивной*, если в ней выполняется тождество L6′ (а значит, и L6″).

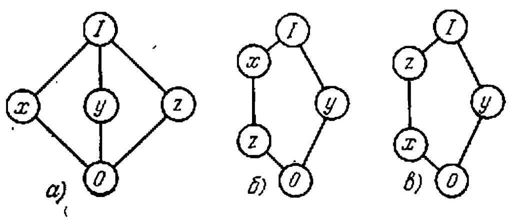


Рис. 2.

Все решетки в примерах 1—5 из § 1 дистрибутивны; однако решетки в примерах 6—7 в общем случае дистрибутивными не являются. То, что действительные числа (пример 4) образуют дистрибутивную решетку, вытекает из следующего несложного результата.

Лемма. *Любая цепь является дистрибутивной решеткой.*

Действительно, $x \wedge y$ меньше, чем x и y, а $x \vee y$ больше, чем x и y; элементы $x \wedge (y \vee z)$ и $(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ оба равны x, если x меньше, чем y или z, и оба равны $y \vee z$ в противном случае — когда x больше, чем y и z.

Решетка, двойственная к дистрибутивной, дистрибутивна, и любая подрешетка дистрибутивной решетки дистрибутивна. Прямое произведение дистрибутивных решеток также является дистрибутивной решеткой.

Известный факт дистрибутивности решетки из примера 1 можно рассматривать в более общих рамках.

Определение. *Кольцом множеств* называется семейство Φ подмножеств множества I, содержащее вместе с любыми двумя множествами S и T их (теоретико-множественные) пересечение и объединение $S \cap T$ и $S \cup T$. *Полем множеств* называется кольцо множеств, которое вместе с любым S содержит также и его теоретико-множественное дополнение S'.

Любое кольцо множеств в естественной упорядоченности $S \subset T$ является дистрибутивной решеткой. Например, открытые множества топологического пространства образуют дистрибутивную решетку (и замкнутые множества тоже).

Решетка в примере 2 также дистрибутивна. Здесь $x \vee y$ есть не что иное, как наименьшее общее кратное чисел x и y, а $x \wedge y$ — их наибольший общий делитель. Числа x, y и z можно записать как произведения $\Pi p_i^{e_i}$ степеней всех простых p_i, делящих x, y и z (если нужно, с показателем $e_i = 0$ для простого, не делящего соответствующее число). Тогда $e_i(x \wedge y) = \min\{e_i(x), e_i(y)\}$, $e_i(x \vee y) = \max\{e_i(x), e_i(y)\}$, так что для всех i число $e_i(x \wedge (y \vee z)) = e_i((x \wedge y) \vee (x \wedge z))$ будет статистической *медианой* трех показателей $e_i(x)$, $e_i(y)$, $e_i(z)$.

Важное свойство дистрибутивных решеток устанавливает следующая

Теорема 10. *Если в дистрибутивной решетке*[1] $c \wedge x = c \wedge y$ *и* $c \vee x = c \vee y$, *то* $x = y$.

Доказательство. Применяя L4, L2 и L6′, получаем:

$$x = x \wedge (c \vee x) = x \wedge (c \vee y) = (x \wedge c) \vee (x \wedge y) =$$

$$= (c \wedge y) \vee (x \wedge y) = (c \vee x) \wedge y = (c \vee y) \wedge y = y.$$

Этим завершается доказательство. (См. следствие из теоремы II.13.)

7. Модулярность

Рассматривая для дистрибутивного закона L6′ случай $x \leqslant z$, т. е. $z = x \vee z$, мы получаем самодвойственный «модулярный» закон

L5 если $x \leqslant z$, то $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$.

Таким образом, L5 имеет место в любой дистрибутивной решетке.

Определение. Решетка называется *модулярной*, если в ней выполняется модулярный закон[2] L5.

Не каждая решетка модулярна: например, немодулярна пятиэлементарная решетка N_5, изображенная на рис. 2, *б*. Хотя всякая дистрибутивная решетка модулярна, пятиэлементная решетка M_3 на рис. 2, *а* модулярна, но не дистрибутивна. Решетка M_3

[1] Для произвольного фиксированного c.— *Прим. перев.*

[2] Основные свойства модулярных решеток («Dualgruppen von Modultypus») и дистрибутивных решеток были установлены Дедекиндом [1]; см. также Шредер [1].

изоморфна решетке всех нормальных подгрупп четверной группы [1]). Ее модулярность вытекает из следующей теоремы.

Теорема 11. *Нормальные подгруппы любой группы G образуют модулярную решетку.*

Доказательство. Нормальные подгруппы в G, конечно, образуют решетку, в которой $M \wedge N = M \cap N$ является пересечением подгрупп M и N, а $M \vee N = MN$ ($\neq M \cup N$) совпадает с множеством произведений xy, где $x \in M$, $y \in N$. Чтобы доказать модулярность этой решетки, достаточно вследствие модулярного неравенства (6) установить, что из $L \subset N$ следует включение $(L \vee M) \cap N \subset L \vee (M \cap N)$. Пусть $a \in \in (L \vee M) \cap N$. Тогда *если* $LM = ML$, то $L \vee M = LM$, откуда $a = bc$, где $b \in L$, $c \in M$, $bc \in N$. Отсюда $c = b^{-1}a$, где $b^{-1} \in L \subset N$, и $a \in (L \vee M) \cap N \subset N$, и значит, $c \in N$. Но так как $c \in M$, то $c \in M \cap N$, и следовательно, $a = bc \in \in L \vee (M \cap N)$. Этим и доказывается требуемое включение $(L \vee M) \cap N \subset L \vee (M \cap N)$.

Замечание. Проведенные рассуждения показывают, что если подгруппы L, M, N группы G таковы, что $LM = ML$ и $L \subset N$, то $L \vee (M \cap N) = (L \vee M) \cap N$.

Любая подрешетка модулярной решетки модулярна. Отсюда следует, что подпространства любого векторного пространства и идеалы любого кольца (пример 6 из § 1) образуют модулярные решетки, будучи элементами модулярной решетки всех (нормальных) подгрупп соответствующей аддитивной группы. Прямое произведение модулярных решеток также будет модулярной решеткой.

Легко проверить, что решетка на рис. 2, *б* не модулярна. Оказывается, она является единственной немодулярной решеткой с пятью элементами. На самом деле, имеет место даже более сильный результат.

Теорема 12. *Любая немодулярная решетка L содержит решетку N_5, изображенную на рис. 2, б, в качестве подрешетки.*

Доказательство. Если L не модулярна, то она содержит элементы x, y и z такие, что $x \leqslant z$ и $x \vee (y \wedge z) < (x \vee \vee y) \wedge z$. Тогда элементы y, $x \vee y$, $y \wedge z$, $(x \vee y) \wedge z$ и $x \vee \vee (y \wedge z)$ образуют подрешетку, изоморфную N_5. В самом деле, очевидно, что $y \wedge z \leqslant x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge z \leqslant x \vee y$. Далее, $[x \vee (y \wedge z)] \vee y = x \vee y$ и двойственно. Наконец, равенство $y \wedge z = x \vee (y \wedge z)$ невозможно, поскольку тогда было бы $x \leqslant y \wedge z$, откуда $(x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z)$, что противоречит исходному соотношению.

Одним из основных свойств модулярных решеток является следующий «принцип транспозиции», восходящий к Дедекинду [2, S. 245].

---

[1]) Впрочем, поскольку эта группа коммутативна, то все ее подгруппы нормальны.— *Прим. ред.*

Теорема 13. *В любой модулярной решетке M отображения $\varphi_a : x \to x \wedge a$ и $\psi_b : y \to y \vee b$ являются взаимно обратными изоморфизмами между интервалами* $[b, a \vee b]$ *и* $[a \wedge b, a]$.

Доказательство. Если $x \in [b, a \vee b]$, то $x\varphi_a \in [a \wedge b, a]$ вследствие изотонности φ_a. Далее, $(x \wedge a) \vee b = x \wedge (a \vee b)$ согласно L5, так как $x \in [b, a \vee b]$. Это означает, что $x\varphi_a\psi_b = x$, а из соображений двойственности получается, что $y\psi_b\varphi_a = y$ для всех $y \in [a \wedge b, a]$.

Следствие. *В любой модулярной решетке*

(ξ) *если $a \neq b$ и оба элемента a и b покрывают c, то $a \vee b$ покрывает и a, и b;*

(ξ') *двойственно, если $a \neq b$ и c покрывает оба элемента a и b, то a и b оба покрывают $a \wedge b$.*

(В теореме II.16 будет показано, что в решетках конечной длины условия (ξ)—(ξ') и необходимы, и достаточны для модулярности.)

Доказательство. Если a и $b \neq a$ покрывают c, то $c = a \wedge b$. Следовательно, по доказанной теореме $[a, a \vee b] \cong [a \wedge b, b] \cong 2$, и значит, $a \vee b$ покрывает a. Те же рассуждения показывают, что $a \vee b$ покрывает b. Доказательство для (ξ') проводится двойственно.

Теорема 13 имеет и другие следствия, формулировки которых можно упростить, используя следующие два понятия.

Определение. Два интервала решетки называются *транспонированными*, если они могут быть представлены в виде $[a \wedge b, a]$ и $[b, a \vee b]$ для подходящих a, b. Два интервала $[x, y]$ и $[x', y']$ называются *проективными* (записывают $[x, y] \sim [x', y']$), если существует конечная последовательность $[x, y], [x_1, y_1], [x_2, y_2], \ldots, [x', y']$, в которой любые два последовательные интервала транспонированы.

Следствие 1. *В теореме* 13 ψ_b (*соответственно* φ_a) *отображает подинтервалы интервала* $[a \wedge b, a]$ (*соответственно* $[a, a \vee b]$) *на* (*изоморфные им*) *транспонированные интервалы.*

Следствие 2. *В любой модулярной решетке проективные интервалы изоморфны.*

Упражнения к §§ 6—7

1. Покажите, что решетки, изображенные на рис. 2, *а*, *б*, являются единственными недистрибутивными решетками с пятью элементами.

2. Покажите, что из L6 и L1—L3 следует равенство $x \vee (x \wedge y) = x \wedge (x \vee y)$.

3. Покажите, что если к дистрибутивной решетке L добавить новые элементы O, I, удовлетворяющие неравенствам $O < x < I$ для всех $x \in L$, то получится дистрибутивная решетка.

4. Покажите, что «римановы» разбиения интервала на конечное число непересекающихся подинтервалов образуют дистрибутивную решетку.

5. Покажите, что L5 равносильно следующему условию: если $x < z$, то $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$.

6. (а) Покажите, что решетка N_5, изображенная на рис. 1, *б*, не модулярна.

(б) Покажите, что решетка, изображенная на рис. 1, *а*, модулярна.

(в) Покажите, что N_5 является единственной немодулярной пятиэлементной решеткой.

7. (а) Покажите, что модулярный закон самодвойствен.

(б) Покажите, что любая решетка длины два модулярна.

8. На рис. 2, *в* $x \wedge (y \vee z) = x = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, но двойственное соотношение не выполняется, поскольку $x \vee (y \wedge z) = x < z = (x \vee y) \wedge \wedge (x \vee z)$. Почему это не противоречит теореме 9?

9. Покажите, что подмодули любого R-модуля (т. е. модуля над кольцом R) образуют модулярную решетку.

10. Пусть в модулярной решетке $a \wedge b = O$, $a \vee b = I$ и $O < c < a$, $O < d < b$. Покажите, что множество $\{a, b, c, d\}$ порождает подрешетку, изоморфную прямому произведению 3×3, где 3 обозначает трехэлементную цепь.

11. Покажите, что если P и Q — непустые у-множества, то группа автоморфизмов у-множества PQ содержит подгруппу, изоморфную прямому произведению $\mathrm{Aut}\, P \times \mathrm{Aut}\, Q$.

8. Полумодулярность

Решетки конечной длины, удовлетворяющие (ξ) или (ξ'), называются *полумодулярными* [1]). Более точно, решетка конечной длины, удовлетворяющая условию (ξ), называется *полумодулярной* (*сверху*), а решетка конечной длины, удовлетворяющая условию (ξ'),— *полумодулярной снизу* или «дуально» полумодулярной.

Легко показать, что любой интервал в полумодулярной сверху решетке является полумодулярной (сверху) решеткой и что свойство полумодулярности (сверху) сохраняется при образовании прямого произведения таких решеток. Однако, поскольку каждая немодулярная решетка содержит подрешетку, изоморфную решетке N_5 (см. рис. 1, *б*), которая не удовлетворяет ни условию (ξ), ни условию (ξ'), подрешетка полумодулярной (сверху) решетки не обязана быть полумодулярной (сверху) [2]). Это видно на примере семиэлементной решетки, изображенной на рис. 1, *в*. На самом деле любая конечная решетка изоморфна подрешетке полумодулярной решетки (Дилуорс) — это будет доказано в главе IV.

В следующих двух примерах появляются типичные полумодулярные (сверху) решетки конечной длины.

Пример 8. Пусть F — поле и пусть $A(F; n)$ обозначает совокупность всех *подпространств* (или «плоских подмножеств») n-мерного аффинного пространства над F (это подмножества, которые вместе с любыми двумя точками содержат и всю прямую,

---

[1]) Полумодулярные решетки впервые рассматривались, по-видимому, автором [1, p. 446]; см. также работу Ф. Клейна (Klein Fr.— Math. Z., 1936, 42. S. 58—81). Пример 9 впервые исследовал автор в [3, p. 446—452].

[2]) Конечно, здесь подразумевается, что существуют не модулярные полумодулярные сверху решетки (см. рис. 3, *а*, где жирными точками выделена подрешетка N_5).— *Прим. ред.*

проходящую через них). Тогда $A(F; n)$ является полумодулярной сверху решеткой длины $n+1$, в которой $h[x]$ не превосходит геометрическую размерность. На рис. 3, *а* представлена диаграмма для $A(\mathbf{Z}_2, 2)$.

Пример 9. Пусть S — n-элементное множество. Симметрической *решеткой разбиений* длины $n-1$ называется у-множество Π_n отношений эквивалентности (разбиений) на множестве S, в котором $\rho \leqslant \tau$ означает, что $x\rho y$ влечет $x\tau y$, т. е. что разбиение $\pi(\rho)$ является измельчением разбиения $\pi(\tau)$.

В решетке Π_n *пересечение* $\rho \wedge \tau$ имеет своими классами эквивалентности пересечения $R_i \cap T_j$ классов эквивалентности R_i для ρ и T_j для τ, так что $x(\rho \wedge \tau) y$ тогда и только тогда, когда

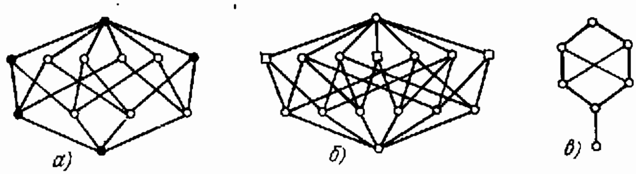


Рис. 3.

одновременно $x\rho y$ и $x\tau y$. *Объединение* $\rho \vee \tau$ является пересечением всех отношений эквивалентности, содержащих и ρ, и τ. В Π_n наименьшим элементом O будет отношение равенства, а наибольшим элементом I — вырожденное разбиение, единственный класс эквивалентности которого совпадает со всем множеством S.

Далее, τ *покрывает* ρ в Π_n в том и только в том случае, когда $\pi(\tau)$ получается из $\pi(\rho)$ объединением каких-нибудь двух классов эквивалентности. Наконец, $h[\rho] = n - \nu(\rho)$, где $\nu(\rho)$ — число классов эквивалентности, на которые ρ разбивает множество S. Таким образом, Π_n является *градуированной решеткой* при любом конечном n. Рис. 3, *б* изображает Π_4.

Тесно связано с рассмотренным в примере 9 следующее у-множество.

Пример 10. Пусть $\mu : N = m_1 + \cdots + m_r$ и $\nu : N = n_1 + \cdots + n_s$ — разбиения положительного целого N на положительные целые слагаемые m_i, соответственно n_j. Будем считать $\mu \leqslant \nu$ тогда и только тогда, когда разбиение ν может быть получено из μ (возможно, после перегруппировки слагаемых) выполнением подходящих сложений.

Получающееся у-множество P_N не может удовлетворять условию (ξ), если $N > 4$, поскольку в этом случае оно не является решеткой (рис. 3, *в* изображает P_6) [1]. Однако в этом у-множестве выполняется цепное условие Жордана—Дедекинда (см. § II.8).

[1]) Фраза не совсем логична, ибо свойство (ξ) определено лишь для решеток. — *Прим. ред.*

Упражнения

1. Покажите, что любая немодулярная решетка содержит подрешетку, не являющуюся полумодулярной.

2. Пусть M — произвольная модулярная решетка и $s < I$ — некоторый максимальный собственный элемент[1]) в M. Покажите, что если из M исключить все $x \leqslant s$, то получится полумодулярная решетка[2]) L. Покажите, что если $p > O$ в L, то элементы $y \geqslant p$ образуют модулярную решетку.

3. (а) Покажите, что если в произвольной полумодулярной решетке L приравнять элементу I все элементы высоты не меньше n (где n — произвольное фиксированное натуральное число), то получится полумодулярная решетка.

(б) Покажите, что она будет $\bigvee$-гомоморфным образом решетки L (Маклейн).

4. Покажите, что симметрическая решетка разбиений длины n при $n > 2$ не модулярна.

5. Покажите, что решетка всех разбиений конечного графа на связные подграфы полумодулярна.

*6. Покажите, что «нормальные смежные классы» (т. е. смежные классы по нормальным подгруппам) конечной группы G образуют полумодулярную решетку тогда и только тогда, когда нормальная подгруппа, порожденная каждым элементом $a \in G$ (отличным от единицы), является минимальной неодноэлементной нормальной подгруппой.

7. Покажите, что при $k \leqslant 5$ каждая решетка порядка $n > k$ содержит k-элементную подрешетку.

8. Покажите, что при $2 \leqslant n \leqslant 7$ каждая решетка подрядка n содержит $(n-1)$-элементную подрешетку.

9. Покажите, что при $k \leqslant 6$ каждая модулярная решетка порядка $n > k$ содержит k-элементную подрешетку.

(В упражнениях 7—9 цитируются результаты Ф. Клейна.)

9. Модулярные решетки с дополнениями

Под *дополнением* элемента x в решетке с O и I понимают элемент $y \in L$ такой, что $x \wedge y = O$ и $x \vee y = I$. Решетка L называется *решеткой с дополнениями*, если все ее элементы имеют дополнения. Решетка называется *решеткой с относительными дополнениями*, если каждый ее (замкнутый) интервал является решеткой с дополнениями[3]). Теорема 10 утверждает, что в любом заданном интервале $[a, b]$ дистрибутивной решетки элемент c может иметь самое большее одно относительное дополнение.

В § 1 только в примере 1 всегда получаются решетки с дополнениями. Модулярная решетка всех подпространств n-мерного векторного пространства $F^n = V_n(F)$ над любым полем (или телом) F является решеткой с дополнениями. Случай $V_2(\mathbf{Z}_2)$ дает модулярную решетку M_3, изображенную на рис. 1, a.

Теорема 14. *Любая модулярная решетка M с дополнениями является решеткой с относительными дополнениями.*

---

[1]) Под *собственным элементом* здесь понимается элемент, отличный от I.— *Прим. ред.*

[2]) Простейшим контрпримером к этому утверждению служит решетка M_3. Нужно рассматривать модулярные решетки с O и отбрасывать ненулевые $x \leqslant s$.— *Прим. перев.*

[3]) Более общие понятия см. у Саса [1, § 18] и в Publ. Math. Debrecen, 1953, 3, p. 9—16.

Доказательство. Прежде всего, если $O \leqslant x \leqslant b$ в M, то, конечно, $x \wedge (x' \wedge b) = (x \wedge x') \wedge b = O$, а согласно L5

$$x \vee (x' \wedge b) = (x \vee x') \wedge b = I \wedge b = b.$$

Значит, $B = [O, b]$ является модулярной подрешеткой с дополнениями решетки M. Двойственно, $[a, b] \subset B$ является модулярной подрешеткой с дополнениями в B. Ч. т. д.

Немодулярная пятиэлементная решетка N_5 (рис. 1, *б*) является решеткой с дополнениями, но не с относительными дополнениями.

Теорема 15. *В решетке L конечной длины с относительными дополнениями каждый элемент a является объединением содержащихся в нем атомов.*

Доказательство. Если $a > O$, то либо a является атомом, либо $a > b > O$ для некоторого $b \in L$. Пусть c будет относительным дополнением элемента b в a[1]). Индукцией по длине интервала $[O, a]$ доказывается, что элементы b и c оба являются объединениями атомов. Но тогда это справедливо и для $a = b \vee c$.

Следствие. *В модулярной решетке конечной длины с дополнениями каждый элемент является объединением содержащихся в нем атомов.*

Пример 11. Решетка M подпространств n-мерного евклидова пространства E_n модулярна (по теореме 11) и является решеткой с дополнениями, поскольку для ортогонального дополнения $S^{\perp}$ любого подпространства S будет $S \cap S^{\perp} = 0$, $S + S^{\perp} = E_n$.

10. Булевы решетки. Булевы алгебры

По определению, *булева решетка* — это дистрибутивная решетка с дополнениями. Напомним, что по теореме 10 в дистрибутивной решетке каждый элемент имеет не более одного дополнения. Отсюда следует

Теорема 16. *В булевой решетке любой элемент x имеет одно и только одно дополнение x'. При этом*

L8 $$x \wedge x' = O, \qquad x \vee x' = I;$$

L9 $$(x')' = x;$$

L10 $$(x \wedge y)' = x' \vee y', \quad (x \vee y)' = x' \wedge y'.$$

Доказательство. Соответствие $x \to x'$, как мы видели, однозначно. Но в силу симметричности понятия дополнения элемент x является дополнением для x', откуда $x = (x')'$

---

[1]) То есть в интервале $[O, a]$.— *Прим. перев.*

ввиду единственности дополнений, и L9 доказано. Значит, соответствие $x \to x'$ взаимно однозначно. Далее докажем, что

(7) $\qquad x \wedge a = O$ тогда и только тогда, когда $x \leqslant a'$.

Это получается так: (i) если $x \leqslant a'$, то $x \wedge a \leqslant a' \wedge a = O$, и (ii) если $x \wedge a = O$, то

$$x = x \wedge I = x \wedge (a \vee a') = (x \wedge a) \vee (x \wedge a') = \\ = O \vee (x \wedge a') = x \wedge a'.$$

Из (7) следует, что при $a \leqslant b$, и значит, при $b' \wedge a \leqslant b' \wedge b = O$, будет $b' \leqslant a'$: взаимно однозначное соответствие $x \to x'$ антиизотонно (обращает порядок). Так как соответствие $x' \to (x')'$ тоже антиизотонно, то $x \to x'$ будет дуальным изоморфизмом, что и доказывает L10.

Отсюда следует, что любая булева решетка дуально изоморфна себе (самодвойственна). Так как дополнения в булевой решетке *единственны*, ее можно рассматривать и как алгебру с двумя бинарными $\wedge$, $\vee$ и одной унарной операцией $'$. В этом смысле булева решетка называется булевой *алгеброй*.

Определение. *Булевой алгеброй* называется алгебра с операциями $\wedge$, $\vee$, $'$, удовлетворяющими условиям L1—L10. (Булева) *подалгебра* булевой алгебры A есть непустое подмножество в A, содержащее с любыми a, b также $a \wedge b$, $a \vee b$ и a'.

Таким образом, собственный интервал $[a, b]$ булевой алгебры A, хотя и является ее булевой подрешеткой, но булевой подалгеброй не будет.

Теперь покажем, что в любой дистрибутивной решетке с O и I имеется наибольшая «булева подалгебра».

Теорема 17. *Элементы дистрибутивной решетки с O и I, обладающие дополнениями, образуют подрешетку.*

Доказательство. Если x и y обладают дополнениями, то

$$(x \wedge y) \wedge (x' \vee y') = (x \wedge y \wedge x') \vee (x \wedge y \wedge y') = O \vee O = O$$

и двойственно. Значит, $x \wedge y$ имеет дополнением элемент $x' \vee y'$. Из двойственных соображений получается, что дополнением для $x \vee y$ будет $x' \wedge y'$, чем и завершается доказательство.

Любое поле множеств и, в частности, поле всех подмножеств данного множества является булевой алгеброй. Далее, любая подалгебра булевой алгебры сама будет булевой алгеброй. Булевыми алгебрами будут любое прямое произведение булевых алгебр и любой интервал булевой алгебры.

Пример 12. Класс всех бинарных отношений между элементами двух классов I и J является булевой алгеброй, поскольку этот класс изоморфен классу всех подмножеств в $I \times J$, если сопоставить каждому отношению ρ его график — множество всех пар (x, y) таких, что $x\rho y$.

Упражнения к §§ 9—10

1. Покажите, что в любой модулярной решетке с дополнениями $\bigvee$-неразложимые элементы являются атомами.

2. Покажите, что если z является относительным дополнением для x в $x \bigvee y$ или для $x \bigwedge y$ в y, то z является дополнением для $x \bigvee (x \bigvee y)'$.

3. Покажите, что все решетки с относительными дополнениями, имеющие не более восьми элементов, модулярны. (Рубин)

4. (а) Покажите, что решетка на рис. 1, *в* дуально изоморфна решетке всех подгрупп группы октаэдра.

(б) Покажите, что на рис. 1, *в* средний элемент не имеет дополнения.

5. (а) Покажите, что любая решетка L является подрешеткой решетки с дополнениями, содержащей лишь на три элемента больше.

(б) Покажите, что если L конечна, то достаточно добавить к ней всего один элемент.

6. Докажите, что каждый интервал $[a, b]$ булевой решетки L является булевой решеткой, в которой $\leqslant$, $\bigwedge$, $\bigvee$ имеют тот же смысл, что в L, а дополнениями в $[a, b]$ являются относительные дополнения соответствующих элементов в решетке L.

7. (а) Покажите, что в любой булевой решетке конечной длины каждый элемент является объединением атомов.

(б) Покажите, что если в дистрибутивной решетке L конечной длины наибольший элемент I является объединением атомов, то L — булева решетка.

8. Покажите, что непустое подмножество булевой алгебры будет ее подалгеброй, если оно замкнуто относительно операций $\bigwedge$ и $'$.

9. Найдите семиэлементную модулярную решетку, в которой элементы, имеющие дополнения, не образуют подрешетки.

10. Покажите, что каждое из следующих свойств имеет место в PQ тогда и только тогда, когда оно выполняется в обоих у-множествах P и Q:

(а) PQ — $\bigwedge$-полурешетка;
(б) PQ — модулярная решетка;
(в) PQ — решетка с дополнениями;
(г) PQ — дистрибутивная решетка.

11. (а) Постройте решетку с относительными дополнениями порядка 9, не удовлетворяющую цепному условию Жордана—Дедекинда.

(б) Покажите, что это условие выполняется в любой решетке с относительными дополнениями, имеющей не более 8 элементов.

(в) Постройте шестиэлементную решетку с дополнениями, которая не была бы решеткой с относительными дополнениями, но удовлетворяла бы условию Жордана—Дедекинда.

12. Постройте решетку с относительными дополнениями порядка 14, которая удовлетворяла бы условию Жордана—Дедекинда, но не была бы полумодулярной.

13. (а) Покажите, что Π_4 является полумодулярной решеткой с относительными дополнениями порядка 15, но что она не модулярна.

(б) Покажите, что любая полумодулярная решетка с относительными дополнениями порядка не более 11 будет модулярной.

* 14. Пусть L — модулярная решетка с универсальными гранями. Докажите, что: (i) если $a \bigwedge b$, $a \bigvee b$ имеют дополнения в L, то a, b тоже имеют дополнения в L; (ii) если a, b имеют единственные дополнения a', b' в L, то $a' \bigvee b'$ и $a' \bigwedge b'$ являются дополнениями для $a \bigwedge b$, $a \bigvee b$ (Бамкрет).

ПРОБЛЕМЫ

1. Для данного n каким будет наименьшее целое $\psi(n)$ такое, что любая решетка порядка $r \geqslant \psi(n)$ содержит n-элементную подрешетку? [1])

2. Вычислить для небольших n и найти асимптотику и оценки для степени роста функций $G(n)$ и $G^*(n)$ из упр. 5 к § 2.[2])

3. Тот же вопрос для чисел $H^*(n)$ и $H(n)$, обозначающих соответственно количество различных и количество неизоморфных решеточных упорядочений n-элементного множества.

4. (а) Подсчитать число $\gamma(n, \lambda)$ связных [3]) у-множеств длины λ, имеющих n элементов. (б) Сколько среди них решеток? (в) Вывести асимптотические формулы для этих функций при $n \to \infty$ для малых фиксированных λ или $n - \lambda$.

5. Перечислить все конечные решетки, которые однозначно (т. е. с точностью до изоморфизма) определяются своей диаграммой, рассматриваемой как граф. (См. упр. 7 к § 3.) [4])

6. Найти все конечные решетки, для которых каждый автоморфизм соответствующего им графа являлся бы решеточным автоморфизмом (Уотермен).

---

[1]) Проблема 9 из [LT2]. Хейвес и Уорд (Havas G., Ward M.— J. Combin. Theory, 1969, 7, № 3, p. 281—282) показали, что $\psi(n)$ существует для любого $n > 0$ и что $\psi(n) < N^{3^N}$ при $n > 1$.— *Прим. перев.*

[2]) Кларнер (Klarner D. A.— J. Combin. Theory, 1969, 6, № 1, p. 12—19) получил для $G^*(n)$ оценку снизу, а Батлер (Ким Ки-ханг) (Butler K. K.—H.— J. Combin. Theory, 1972, 13, p. 276—289) представил $G(n)$ и $G^*(n)$ формулами, пригодными для машинного счета.— *Прим. перев.*

[3]) То есть со связной как граф диаграммой.— *Прим. перев.*

[4]) Проблема 8 из [LT2]. Частичное решение (для случая модулярных решеток) дал Якубик (Jakubik J. — Czechosl. Math. J., 1954, 4, p. 131—141). — *Прим. перев.*

ПОСТУЛАТЫ ДЛЯ РЕШЕТОК

1. Квазипорядки

Большинство классов алгебраических систем допускает различные аксиоматические описания. В § I.1 мы видели, например, что обычные постулаты P1—P3 для у-множеств равносильны следующим двум законам строгого включения:

P1′ ни для какого x не может быть $x < x$ (антирефлексивность);

P3 если $x < y$ и $y < z$, то $x < z$ (транзитивность).

Другие системы аксиом для у-множеств можно получить, описывая свойства тернарного отношения *между* $(a\ x\ b)$ β, которое по определению означает, что $a \leqslant x \leqslant b$ *или* $b \leqslant x \leqslant a$; см. ниже § 9.

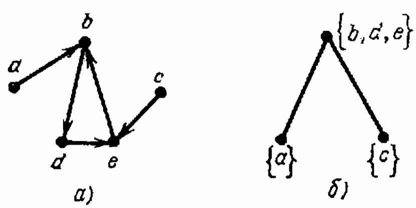


Рис. 4.

Подобные системы аксиом, хотя и любопытны, но зачастую оказываются неплодотворными. В настоящей главе мы рассмотрим для различных типов решеток несколько действительно интересных и полезных систем аксиом. Будет исследован и вопрос о том, что получится, если в соответствующих аксиоматиках отказаться от одного или нескольких постулатов.

Действуя в этом духе, определим сначала *квазиупорядочение* множества S как отношение $\trianglelefteq$, удовлетворяющее условиям P1 и P3, но с необязательным P2. Пара $(S, \trianglelefteq)$ называется в этом случае *квазиупорядоченным множеством*.

Квазиупорядоченные множества можно строить, исходя из ориентированных графов — совокупностей точек, которые соединены направленными прямолинейными отрезками. На рис. 4, *а* показан такой ориентированный граф.

Если дан ориентированный граф с вершинами $x, y, \ldots$, то пусть $x \trianglelefteq y$ означает, что $x = y$, или существует путь из x в y в направлении стрелок. Так, на рис. 4, *а* $b \trianglelefteq e$, поскольку имеется путь $b \to d$, $d \to e$. Построенное отношение, конечно, транзитивно. С другой стороны, как видно из рис. 4, *а*, $b \trianglelefteq e$ и $e \trianglelefteq b$, так что антисимметричность не всегда имеет место.

Покажем теперь, как из данного квазипорядка построить у-множество, Лемма. *В квазиупорядоченном множестве $Q = (S, \trianglelefteq)$ положим $x \sim y$, если $x \trianglelefteq y$ и $y \trianglelefteq x$. Тогда*

(i) *$\sim$ является отношением эквивалентности на S;*

(ii) *если E и F — два класса эквивалентности отношения $\sim$, то либо $x \trianglelefteq y$ для всех $x \in E$, $y \in F$, либо подобное соотношение невозможно ни при каких $x \in E$, $y \in F$;*

(iii) *фактор-множество $S/\sim$ становится у-множеством, если положить $E \leqslant F$ в случае, когда $x \trianglelefteq y$ для некоторых (а значит, и для всех) $x \in E$, $y \in F$.*

Доказательство. (i) Так как $x \trianglelefteq x$ для всех $x \in S$, то $\sim$ рефлексивно. Далее, из $x \sim y$ и $y \sim z$ следует, что $x \trianglelefteq y$ и $y \trianglelefteq z$ (по определению), откуда $x \trianglelefteq z$ согласно P3. Аналогично $z \trianglelefteq x$, и потому $x \sim z$, т. е. отношение $\sim$ транзитивно. Оно симметрично по определению.

(ii) Если $x \trianglelefteq y$ для некоторых $x \in E$, $y \in F$, то $x_1 \trianglelefteq x \trianglelefteq y \trianglelefteq y_1$ для всех $x_1 \in E$, $y_1 \in F$, и значит, $x_1 \trianglelefteq y_1$ вследствие транзитивности.

(iii) Ясно, что $E \sim E$ (так как $x \sim x$) для всех E. Далее, из $E \leqslant F$ и $F \leqslant G$ следует, что $x \trianglelefteq y \trianglelefteq z$ для всех $x \in E$, $y \in F$, $z \in G$, откуда $x \trianglelefteq z$ согласно P3 для $\trianglelefteq$. Значит, $\leqslant$ транзитивно. Наконец, если $E \leqslant F$ и $F \leqslant E$, то для всех $x \in E$, $y \in F$ будет $x \trianglelefteq y$ и $y \trianglelefteq x$, откуда $x \sim y$, и значит, $E = F$. Ч. т. д.

В ориентированном графе на рис. 4, *а* классами эквивалентности $\sim$ будут множества $\{a\}$, $\{b, d, e\}$, $\{c\}$, и диаграмма соответствующего у-множества изображена на рис. 4, *б*.

Ввиду леммы квазипорядки часто называют «предпорядками». Эта лемма имеет множество приложений.

Пример 1. В коммутативной полугруппе S с единицей пусть $a|b$ означает, что $ax = b$ для некоторого $x \in S$. Отношение $|$ квазиупорядочивает S; два элемента множества S «эквивалентны» в смысле леммы тогда и только тогда, когда они «ассоциированы» в теоретико-числовом смысле.

2. Постулаты для решеток. Полурешетки

Постулаты L1—L4, определяющие решетку, не являются независимыми: законы идемпотентности выводятся из L4. Именно

$$x \vee x = x \vee [x \wedge (x \vee x)] = x,$$

где первое равенство вытекает из закона поглощения $x = x \wedge \wedge (x \vee y)$ при $y = x$, а второе — из двойственного закона при $y = x \vee x$. Двойственно доказывается, что $x \wedge x = x$.

Остальные шесть тождеств L2—L4 независимы. Это означает, что ни одно из них не может быть выведено из остальных пяти. Чтобы доказать это, достаточно, помня о двойственности, привести примеры подходящих множеств и определенных на них операций, удовлетворяющих пяти из шести тождеств L2—L4. Этим мы и займемся.

Пример 2. Пусть $\mathbf{Z}^+$ обозначает множество положительных целых чисел. Положим $x \vee y = \max(x, y)$ и $x \wedge y = x$. Тогда выполняются все тождества L2—L4, кроме $x \wedge y = y \wedge x$.

Пример 3. Рассмотрим диаграмму на рис. 5. Объединения определим обычным образом, а пересечения тоже, за исключением одного случая: $a \wedge b$ положим равным не c, а нижнему элементу. Получающаяся алгебраическая система удовлетворяет L2, L4 и $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, но $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ не выполняется, например, для тройки a, b, c.

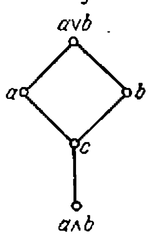


Рис. 5. Неассоциативная решетка.

Пример 4. Пусть $\mathbf{Z}^+$ обозначает множество положительных целых чисел. Положим $x \vee y = \max(x, y)$, $x \wedge y = 1$. Закон поглощения $x \wedge (x \vee y) = x$ нарушается, но остальные пять тождеств L2—L4 выполнены.

Итак, нами доказана

Теорема 1. *Аксиомы* L2—L4 *для решеток независимы и из них выводятся тождества* L1.

Полурешетки. Интересные обобщения понятия решетки (см. ниже о косых и неассоциативных решетках) получаются исключением одного или нескольких тождеств из списка L2—L4. Но наиболее важным обобщением решеток как алгебр являются полурешетки[1]). Как в § I.5, назовем *полурешеткой* множество S с бинарной операцией $\circ$, которая идемпотентна, коммутативна и ассоциативна.

Лемма. *Любая полурешетка S упорядочивается отношением делимости $a|b$ (что означает равенство $a \circ x = b$ для некоторого x). В этом упорядоченном множестве $c \circ d = c \vee d$ для любых c, d.*

Доказательство. Отношение $a|b$ квазиупорядочивает S (см. пример 1), причем $a|a$, поскольку операция $\circ$ идемпотентна. Далее, если $a \circ x = b$, то

$$a \circ b = a \circ (a \circ x) = (a \circ a) \circ x = a \circ x = b,$$

а обратное очевидно; следовательно, $a|b$ тогда и только тогда, когда $a \circ b = b$. Поэтому из $a|b$ и $b|a$ вытекает, что $a = b \circ a = a \circ b = b$, и квазиупорядочение оказывается упорядочением. Наконец, $c|c \circ d$ (поскольку $c \circ d = c \circ d$) и $d|c \circ d$ (согласно коммутативности), а если $c|x$ и $d|x$, то $x = c \circ x = c \circ d \circ x$, откуда $(c \circ d)|x$, и значит, $c \circ d = c \vee d$.

[1]) Полурешетки изучал еще Хантингтон [1, p. 294]. См. также работы Ф. Клейна (Klein Fr.— Math. Z., 1943, 48, S. 275–288, 715–734).

Определение. Упорядоченное множество, полученное в лемме, называется *$\vee$-полурешеткой*, определяемой S; двойственное ему у-множество называется *$\wedge$-полурешеткой*, определяемой S.

Понятно, что любая решетка L одновременно является $\vee$-полурешеткой относительно операции $\vee$ и $\wedge$-полурешеткой относительно $\wedge$; это оправдывает введенную терминологию.

Многие полурешетки оказываются решетками. Например, всякая $\wedge$-полурешетка L конечной длины с наибольшим элементом I. В самом деле, пусть $U = U(a, b)$ обозначает подмножество в L, состоящее из всех общих верхних граней для двух данных элементов a и b. Множество U содержит I и вместе с любыми двумя элементами x и y также и $x \wedge y$ (если $x \geqslant a$ и $y \geqslant a$, то $x \wedge y \geqslant a$, по определению, и аналогично $x \wedge y \geqslant b$). Теперь построим в U цепь следующей рекурсией. Пусть $x_0 = I$. Если x_n не является наименьшим элементом в U, возьмем $y \in U$ такой, чтобы не было $y \geqslant x_n$, и положим $x_{n+1} = x_n \wedge y < x_n$. Как показано выше, вся цепь $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots$ лежит в U. Она, как и каждая цепь в L, конечна, и значит, имеет *последний* элемент $x_n \in U$. Этот x_n и будет наименьшим в U. Итак, $x_n = a \vee b$ существует, и следовательно, L является решеткой. Ч. т. д.

Пример 5. Множество Q_n всех квазиупорядочений n-элементного множества S является полной решеткой. Подмножество P_n, состоящее из всех упорядочений множества S, будет уже не решеткой, а $\wedge$-полурешеткой.

Решетка Q_n содержит симметрическую решетку разбиений Π_n. Хотя она и не является полумодулярной, но тем не менее заслуживает дальнейшего изучения.

Связки, косые и неассоциативные решетки. Промежуточным между понятиями полугруппы и полурешетки является понятие связки [1]. *Связкой* называется полугруппа, все элементы которой идемпотентны (т. е. выполняются условия L1, L3). Известно, что всякая связка является полурешеткой «прямоугольных» связок, которые определяются как декартовы произведения $S = X \times Y$ с операцией

$$(x, y) \circ (x', y') = (x, y') \text{ для всех } x, x' \in X \text{ и } y, y' \in Y.$$

Если предположить выполнимость L3 и равенств $(a \wedge b) \vee a = a \vee (b \wedge a) = a$, то получаются «дуальные связки», или косые решетки, в которых имеет место и L1. Косые решетки изучал Йордан [2]; мы еще вернемся к ним.

---

[1]) Это понятие, восходящее к Ф. Клейну, позднее изучал Маклин (Mc Lean D. — Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, p. 110—113). По поводу общей теории связок см. книгу Клиффорда и Престона [1].

[2]) Jordan P.— Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1957, **21**, p. 127—138; Crelle's J., 1962, **211**, p. 136—161. См. также работы Келмана (Kalman J. A.— Math. Ann., 1959, **137**, S. 362—370) и Герхарда (Gerhardt M. D.— Math. Ann., 1965, **161**, S. 231—240).

Различные понятия «неассоциативной решетки» — когда ослабляется один или оба ассоциативных закона L3 — также исследовались многими авторами [1]).

Упражнения к §§ 1—2

1. В произвольной полурешетке определим по индукции $x_1 \circ \ldots \circ x_n$ как $x_1 \circ (x_2 \circ \cdots \circ x_n)$.

(а) Используя L3, докажите индукцией обобщенный ассоциативный закон: если $y_i = x_{s_{i-1}} \circ \cdots \circ x_{s_i}$ $[O = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = n]$, то $y_1 \circ \cdots \circ y_m = x_1 \circ \cdots \circ x_n$.

(б) Используя только L2 и L3, докажите, что $x_1 \circ \cdots \circ x_m$ не меняется при перестановках сомножителей.

2. В классе Λ всех топологических линейных пространств пусть $S \rho T$ означает, что T топологически изоморфно некоторому подмножеству из S. Пользуясь леммой 1 из § 1, определите у-множество «линейных размерностей». (См. Банах [1, глава XII].)

3. (а) В классе Φ всех групп пусть $G \rho H$ означает, что группа H изоморфна некоторой подгруппе группы G. Покажите, что ρ квазиупорядочивает Φ и является порядком на классе всех конечных групп.

(б) Обобщите это на другие классы алгебраических систем.

4. (а) Покажите, что для конечных групп $G \rho H$ (в смысле упр. 3 и леммы из § II.1) означает, что G изоморфна H. Обобщите.

(б) Установите аналогичный результат для конечномерных векторных пространств и для произвольных кардинальных чисел.

5. Для положительных непрерывных функций, определенных на $0 \leqslant x < \infty$, пусть $f = O(g)$ означает, что $f(x) \leqslant Kg(x)$ для всех $x > N$, где K и N — некоторые постоянные. Покажите, что это квазипорядок и рассмотрите связанное с ним отношение эквивалентности $f \sim g$.

6. Покажите, что из любого отношения ρ можно получить транзитивное отношение $\tau = \tau(\rho)$, полагая $x \tau y$ тогда и только тогда, когда для некоторого конечного набора $a_0, \ldots, a_n$ имеют место соотношения $a_0 = x$, $a_n = y$ и $a_{i-1} \rho a_i$ $[i = 1, \ldots, n]$.

7. Покажите, что прямое произведение PQ двух у-множеств P и Q будет $\vee$-полурешеткой, когда $\vee$-полурешетками являются оба сомножителя.

3. Гомоморфизмы [2]) и идеалы

Общее понятие гомоморфизма имеет для решеток четыре различные (хотя и связанные) интерпретации и каждая из них находит важные приложения. Займемся ими.

Определение. Отображение $\theta: L \to M$ решетки L в решетку M называется *изотонным*, если из $x \leqslant y$ следует, что $\theta(x) \leqslant \theta(y)$; *$\vee$-гомоморфизмом*, если

(1) $$\theta(x \vee y) = \theta(x) \vee \theta(y) \text{ для всех } x, y \in L;$$

$\wedge$-гомоморфизмом, если выполняется двойственное равенство

(1′) $$\theta(x \wedge y) = \theta(x) \wedge \theta(y) \text{ для всех } x, y \in L;$$

---

[1]) Кимура (Kimura N.— J. Sci. Tokushima Univ., 1950), Фельшер (Felscher W.— Arch. Math., 1957, 8, p. 171—174), Сас (Szasz G.— Publ. Math. Debrecen, 1963, 10, p. 108—115).

[2]) Автор использует термины «морфизм», «мономорфизм», «эпиморфизм». Так как в них не вкладывается теоретико-категорное содержание, в переводе они всюду заменены привычными «гомоморфизм», «вложение», «наложение».— *Прим. перев.*

гомоморфизмом (или «решеточным гомоморфизмом»), если выполняются оба равенства (1)—(1').

Как всегда (см. § VI.3), гомоморфизм называется (i) *изоморфизмом*, если он является взаимно однозначным соответствием; (ii) *наложением*, когда он отображает L на M; (iii) *вложением* в случае взаимной однозначности; (iv) *эндоморфизмом*, если $L = M$ и (v) *автоморфизмом*, когда $L = M$ и θ — изоморфизм.

Конечно, понятия $\vee$- и $\wedge$-гомоморфизма имеет смысл рассматривать в более общем смысле для $\vee$-полурешеток и $\wedge$-полурешеток соответственно, а изотонные отображения — вообще для всех упорядоченных множеств. Следующие два утверждения очевидны.

Лемма 1. *Любой $\vee$-гомоморфизм для $\vee$-полурешеток является изотонным, как и любой $\wedge$-гомоморфизм для $\wedge$-полурешеток.*

Лемма 2. *Любое изотонное взаимно однозначное соответствие, обращение которого изотонно, является решеточным изоморфизмом.*

Таким образом, для взаимно однозначных соответствий нет необходимости делать вышеуказанные различия [1]). Но для взаимно однозначных отображений и отображений «на» это уже необходимо. (Например, часто требуется «усилить» порядок в решетке, чтобы получить ее образ при $\vee$-вложении [2]); или еще, операции замыкания являются $\vee$-наложениями, но, как правило, не $\wedge$-наложениями.)

Понятие ядра гомоморфизма, знакомое из теории групп, в применении к решеткам приобретает несколько искусственный характер. Более подходящей является следующая конструкция [3]).

Определение. *Идеалом* называется непустое подмножество J решетки (или $\vee$-полурешетки) [4]) L такое, что

(2) $\quad$ если $a \in J$, $x \in L$, $x \leqslant a$, то $x \in J$,

(3) $\quad$ если $a \in J$, $b \in J$, то $a \vee b \in J$.

Двойственное понятие (в решетке или $\wedge$-полурешетке) именуется *дуальным идеалом* (или $\wedge$-идеалом).

Легко показать, что J является идеалом, если $a \vee b \in J$ тогда и только тогда, когда $a \in J$ и $b \in J$ («кастовость»).

---

[1]) Между гомоморфизмами.— *Прим. перев.*

[2]) Непонятно, что здесь имеется в виду.— *Прим. перев.*

[3]) Понятие идеала ввел Стоун (Stone M. H.— Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1934, **20**, p. 197—202; 1935, **21**, p. 103—105). См. также Тарский [1, 2]; Моисил (Moisil Gr. C.— Ann. Sci. Jassy, 1936, **22**, p. 1—118). $\vee$- и $\wedge$-гомоморфизмы ввел Оре [1, глава II]. Завершающие результаты, представленные в § 4, были получены многими авторами.

[4]) Об идеалах в v-множествах см. работы Фринка (Frink O.— Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, p. 223—234), Уолка (Wolk E. S.— Proc. AMS, 1956, **7**, p. 589—594), Фалкерсона (Fulkerson D. R.— Proc. AMS, 1956, **7**, p. 701—702).

Пример 6. В «множестве-степени» $P(E)$, состоящем из всех подмножеств множества E, дуальный идеал (не совпадающий с самим $P(E)$) называется *фильтром* множеств.

Теорема 2. *Если θ — $\bigvee$-гомоморфизм $\bigvee$-полурешетки L на $\bigvee$-полурешетку M с O, то множество* $\operatorname{Ker}\theta$ *прообразов элемента O (ядро $\bigvee$-гомоморфизма θ) является идеалом в L.*

Доказательство. Если $a\theta = O$ и $b\theta = O$, то $(a \bigvee b)\theta = a\theta \bigvee b\theta = O$. С другой стороны, если $(a \bigvee b)\theta = O$, то $a\theta \bigvee b\theta = O$, откуда $a\theta = b\theta = O$. Таким образом, рассматриваемое множество является идеалом в смысле приведенного выше определения.

Требование непустоты идеалов имеет и преимущества и известные неудобства. Постулирование непустоты идеала J позволяет доказать обращение теоремы 2 (см. теорему 4). Основным недостатком этого требования является невозможность обеспечить непустоту пересечения бесконечного множества непустых идеалов в решетке без наименьшего элемента O. Но если решетка имеет O, все идеалы содержат этот элемент, и упомянутая трудность не возникает.

Пусть a — некоторый фиксированный элемент решетки L. Множество $L(a)$ всех элементов $x \leqslant a$, очевидно, будет идеалом, который называется *главным идеалом* в L. В любой решетке конечной длины всякий (непустой) идеал является главным. Вообще, это справедливо для любой решетки L с конечными убывающими цепями (см. главу VIII).

Если $J = L(a)$ — главный идеал в L, порожденный элементом a, то отображение $x \to \theta(x) = x \bigvee a$ является $\bigvee$-эндоморфизмом с ядром J. В самом деле,

$$\theta(x \bigvee y) = (x \bigvee y) \bigvee a = (x \bigvee a) \bigvee (y \bigvee a) = \theta(x) \bigvee \theta(y).$$

Далее, если $z \in J$, то $z \leqslant a$, откуда $z \bigvee a = a$, и значит, $\theta(z) = a$. Для любого $x \in L$ будет $\theta(x) = x \bigvee a \geqslant a$, так что если $z \in J$, то $\theta(z) \leqslant \theta(x)$. Это означает, что a есть наименьший элемент O в $\operatorname{Im}\theta$ и таким образом $J = \operatorname{Ker}\theta$ является ядром $\bigvee$-эндоморфизма.

Теорема 3. *Множество $\widehat{L}$ всех идеалов решетки L, упорядоченное включением, является решеткой. Множество всех главных идеалов решетки L образует подрешетку решетки $\widehat{L}$, изоморфную L.*

Доказательство. Любые два идеала J и K имеют общий элемент, так как если $a \in J$ и $b \in K$, то $a \bigwedge b \in J \bigwedge K$. Таким образом, в качестве $J \bigwedge K$ можно взять теоретико-множественное пересечение идеалов J и K, которое, конечно, является идеалом.

Далее, любой идеал, который содержит J и K, должен содержать и множество M всех элементов x таких, что $x \leqslant a \bigvee b$ для некоторых $a \in J$, $b \in K$. Но множество M само является идеалом. Действительно, если $x \in M$ и $y \leqslant x \leqslant a \vee b$, то согласно P3, $y \leqslant a \vee b$, а если $\{x, y\} \subset M$, то

$$x \vee y \leqslant (a \vee b) \vee (a_1 \vee b_1) = (a \vee a_1) \vee (b \vee b_1),$$

поскольку $x \leqslant a \vee b$ и $y \leqslant a_1 \vee b_1$ для некоторых $a, a_1 \in J$ и $b, b_1 \in K$ и $a \vee a_1 \in J$ и $b \vee b_1 \in K$, так как J и K — идеалы. Так что $M = \sup (J, K)$ в множестве всех идеалов решетки L.

Если J и K — главные идеалы в L, порожденные элементами a и b соответственно, то $J \vee K$ и $J \wedge K$ также будут главными идеалами — их порождают элементы $a \vee b$ и $a \wedge b$ соответственно. Таким образом, главные идеалы образуют подрешетку решетки $\hat{L}$, и эта подрешетка изоморфна L.

Замечание. Если L конечна, то $\hat{L}$ изоморфна L, так что решетка идеалов $\hat{L}$ важна главным образом для бесконечных решеток (см. главу V).

4. Конгруэнции

Конгруэнцией на алгебраической системе A называется отношение эквивалентности θ на A, которое обладает свойством подстановки для всех операций системы A (§ VI.4). Когда A является $\vee$-полурешеткой, то это означает, что

(4) если $a \equiv b \pmod{\theta}$, то $a \vee x \equiv b \vee x$ для всех $x \in A$.

В решетке требуется еще и выполнимость двойственного к (4) соотношения.

Лемма 1. *Пусть J — идеал в данной $\vee$-полурешетке S. Отношение*

(5) $a \equiv b \pmod{J}$, *если* $a \vee d = b \vee d$ *для некоторого* $d \in J$,

является конгруэнцией на S.

Доказательство. Легко показать, что отношение (5) — эквивалентность. Оно будет конгруэнцией для операции объединения, поскольку $(a \vee c) \vee d = (b \vee c) \vee d$, если $a \vee d = b \vee d$, и значит, из $a \equiv b \pmod{J}$ следует, что $a \vee c \equiv b \vee c \pmod{J}$.

Из леммы 1 вытекает следующее обращение [1]) теоремы 2.

Теорема 4. *Если J — идеал $\vee$-полурешетки S с O, то существует $\vee$-гомоморфизм θ этой $\vee$-полурешетки на некоторую $\vee$-полурешетку T такой, что* $\operatorname{Ker} \theta = J$.

Доказательство. Рассмотрим классы эквивалентности, образуемые $\vee$-конгруэнцией $a \equiv b \pmod{J}$. Отображение,

---

[1]) Этот и многие другие связанные с ним результаты получил Кришнан (Krishnan V. S. — Proc. Indian Acad. Sci. Sect. A, 1945, 22, p. 1—19).

которое сопоставляет элементу из S класс эквивалентности, содержащий этот элемент, будет $\vee$-гомоморфизмом, что следует из свойства подстановки для конгруэнций. Множество T классов эквивалентности является $\vee$-полурешеткой. Так как J совпадает с одним из классов эквивалентности и при этом содержит элемент O полурешетки S, то $\operatorname{Ker} \theta = J$.

Теорема 5. *Если J — идеал дистрибутивной решетки L, то конгруэнция $a \equiv b \pmod J$ определяет гомоморфизм θ решетки L на решетку M с O такой, что $J = \operatorname{Ker} \theta$.*

Доказательство. Как мы уже показали, если $a \equiv b \pmod J$, то $a \vee c \equiv b \vee c \pmod J$ для $c \in J$. Теперь нужно установить еще, что если $a \equiv b \pmod J$, то $a \wedge c \equiv b \wedge c \pmod J$ для любого $c \in J$. Но это в самом деле так, поскольку при $a \vee d = b \vee d$ для некоторого $d \in J$, получаем:

$$(a \wedge c) \vee d = (a \vee d) \wedge (c \vee d) = \\ = (b \vee d) \wedge (c \vee d) = \\ = (b \wedge c) \vee d.$$

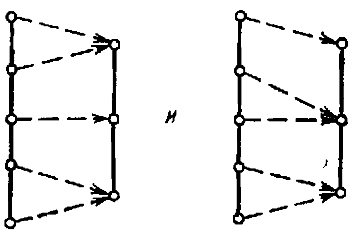


Рис. 6. Различные гомоморфизмы с одинаковым ядром.

Важно отметить, что в отличие от ситуации, имеющей место в группах, ядро решеточного гомоморфизма в общем случае не будет однозначно определять соответствующую конгруэнцию. Например, на рис. 6 представлены два гомоморфизма цепей, имеющие одно и то же ядро, но определяющие разные конгруэнции. Можно привести примеры, когда гомоморфные образы в аналогичной ситуации даже не будут изоморфными между собой.

Однако в решетках с относительными дополнениями подобная двусмысленность уже не возникает. Доказывается это достаточно просто.

Лемма 2. *Если $u \equiv v \pmod \theta$ в решетке L, то $x \equiv y \pmod \theta$ для всех x, y из интервала $[u \wedge v, u \vee v]$.*

Доказательство. По предположению, $x = x \vee (u \wedge v) \equiv x \vee (u \wedge u) \equiv x \vee u \pmod \theta$. Двойственно, $x \equiv x \wedge u \pmod \theta$. Значит,

$$u = u \wedge (u \vee x) \equiv u \wedge x \equiv x \pmod \theta.$$

Аналогично $u \equiv y \pmod \theta$, откуда вследствие транзитивности $x \equiv y \pmod \theta$.

Стандартные идеалы. В решетках с относительными дополнениями действительно удается построить удовлетворительное взаимно однозначное соответствие между конгруэнциями и некоторыми специальными идеалами. Делается это так. В условиях теоремы 5, как нетрудно заметить, $a \equiv b \pmod J$ тогда и только тогда, когда $(a \wedge b) \vee c = a \vee b$ для некоторого $c \in J$. В произвольной решетке L идеал J называется *стандартным*[1]), если указанное отношение эквивалентности обладает свойством подстановки и для объединений, и для пересечений (см. лемму 1), т. е. если оно представляет собой конгруэнцию. Теорема 5 утверждает, что любой идеал в дистрибутивной решетке является стандартным; верно и обратное: если любой идеал решетки стандартен, то эта решетка дистрибутивна.

Теперь определим понятие *решетки с начальными дополнениями*. Это такая решетка с O, в которой каждый интервал $[O, a]$ является решеткой с дополнениями. Понятно, что решетка с относительными дополнениями, имеющая O, будет и решеткой с начальными дополнениями.

Теорема 6. *Пусть θ — конгруэнция на решетке с начальными дополнениями L. Тогда элементы x такие, что $x \equiv O$, образуют стандартный идеал $J(\theta)$ в L, причем $x \equiv y\ (\theta)$ тогда и только тогда, когда $(x \wedge y) \vee a = x \vee y$ для некоторого $a \in J(\theta)$. Обратно, всякий стандартный идеал J решетки L определяет указанным образом конгруэнцию на L.*

Доказательство. В любой решетке, если $x \vee a = y \vee a$ для некоторого $a \equiv O$, то $x = x \vee O \equiv x \vee a = y \vee a \equiv y \vee O = y\ (\theta)$. Обратно, пусть $x \equiv y\ (\theta)$ в решетке с начальными дополнениями и пусть a будет дополнением элемента $x \wedge y$ в интервале $[O, x \vee y]$, так что $x \wedge y \wedge a = O$ и $(x \wedge y) \vee a = x \vee y$. Тогда $a \leqslant x \vee y$, откуда

$$a = (x \vee y) \wedge a \equiv x \wedge y \wedge a = O\ (\theta).$$

Но $x \vee y \geqslant x \vee a \geqslant (x \wedge y) \vee a = x \vee y$, т. е. $x \vee a = x \vee y$; аналогично, $y \vee a = x \vee y\ (= x \vee a)$, чем и завершается доказательство.

Следствие. *В решетке конечной длины с относительными дополнениями каждой конгруэнции θ соответствует элемент a такой, что $x \equiv y\ (\theta)$ тогда и только тогда, когда $x \vee a = y \vee a$.*

Таким элементом a является наибольший элемент (главного) идеала J из теоремы 6.

Простые и максимальные идеалы. Идеал P решетки L называется *простым*, если его теоретико-множественное дополнение является дуальным идеалом. Это, очевидно, равносильно тому, что если $a \wedge b \in P$, то $a \in P$ или $b \in P$. Поэтому в дистрибутивной решетке главный идеал (c) является простым тогда и только тогда, когда элемент c $\wedge$-неразложим. Далее, собственный идеал решетки L называется *максимальным*, если L не содержит боль-

[1]) Это понятие ввел Гретцер (Grätzer G. — Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl., 1959, 9, p. 81—97). См. также работу Гретцера (Grätzer G.) и Шмидта (Schmidt E. T.). — Acta Math. Acad. Sci. Hung., 1960, 12, p. 17—86.

ших собственных идеалов, т. е. если он является дуальным атомом в решетке $\hat{L}$. Из теорем 2 и 4 сразу вытекает важное

Следствие. *Простые идеалы данной решетки L являются ядрами решеточных наложений* $\theta: L \to 2$.

В отличие от ситуации для колец, максимальные идеалы в решетках не обязаны, вообще говоря, быть простыми, а простые — максимальными. Однако заметим, что имеет место следующая

Теорема 7 (Стоун [1]). *Идеал нетривиальной булевой алгебры является простым тогда и только тогда, когда он максимален.*

Доказательство. Если P — простой идеал в A, то для любого $a \notin P$ будет $a' \in P$, поскольку $a \wedge a' = O \in P$; следовательно, любой идеал $J > P$ содержит некоторый элемент $a \notin P$ и одновременно a', и значит, содержит $I = a \vee a'$. Обратно, пусть идеал M максимален. Предположим, что $x \wedge y \in M$ и $x \notin M$. Тогда идеал $x \vee M > M$, и он должен содержать I. Поэтому для некоторого $z \in M$ будет $x \vee z = I$, так что

$$y = y \wedge I = y \wedge (x \vee z) = (y \wedge x) \vee (y \wedge z) \in M \vee M = M.$$

Таким образом, идеал M является простым. Ч. т. д.

Упражнения к §§ 3—4

1. Докажите лемму 1 § 3.
2. Докажите лемму 2 § 3.
3. Покажите, что идеалы любой решетки образуют полную решетку.
4. (а) Покажите, что конгруэнции на конечной цепи находятся во взаимно однозначном соответствии с ее разбиениями на интервалы.

(б) Покажите, что каждый порядковый гомоморфизм[1]) цепи является ее решеточным гомоморфизмом.

(в) Покажите, что если каждый порядковый гомоморфизм решетки L является ее решеточным гомоморфизмом, то L — цепь.

5. Покажите, что в случае решетки конечной длины прообразы любого элемента при решеточном гомоморфизме образуют интервал $[a, b]$.
6. (а) Покажите, что $\wedge$-гомоморфизм решетки L на решетку M является изоморфизмом, если при $x < x'$ всегда $\theta(x) < \theta(x')$.

(б) Покажите, что для произвольных изотонных отображений это уже неверно.

7. Покажите, что решетка является цепью тогда и только тогда, когда все ее идеалы просты.
8. (а) Покажите, что соответствие, сопоставляющее каждому подмножеству S группы G подгруппу $\bar{S}$, которую оно порождает, является $\vee$-гомоморфизмом решетки всех подмножеств множества G на решетку всех подгрупп группы G.

(б) Найдите изотонное отображение у-множества 2^2 на ординал $\mathbf{4}$, которое не было бы ни $\vee$-, ни $\wedge$-гомоморфизмом.

9. В N_5 найдите стандартный идеал, не являющийся нейтральным[2]). (См. также работу Яновица и Шмидта (Janowitz M., Schmidt E. T. — Acta Math. Acad. Sci. Hung., 1965, **16**, р. 289—301, 435).)

---

[1]) То есть изотонное отображение. — *Прим. перев.*

[2]) Идеал решетки L называется *нейтральным*, если он является нейтральным элементом (§ III.9) решетки $\hat{L}$ идеалов решетки L. — *Прим. перев.*

10. Покажите, что для у-множеств любое изотонное наложение θ: $P \to Q$ может быть единственным образом представлено как результат «усиления» [1]) порядка в P до более сильного квазипорядка с последующим применением леммы из § 1.

11. Пусть S, T — произвольные $\vee$-полурешетки с O.

(а) Покажите, что для идеала J из S существует («регулярная») наименьшая конгруэнция $\theta(J)$ на S такая, что $\mathrm{Ker}\ \theta = J$.

(б) Покажите, что любой $\vee$-гомоморфизм φ: $S \to T$ может быть единственным образом представлен как произведение $\alpha\beta$ «регулярного» $\vee$-гомоморфизма $\alpha = 0(J)$ и «неприводимого» $\vee$-гомоморфизма с ядром, равным O. (Кришнан)

12. Рассмотрите решеточные гомоморфизмы θ: $LM \to L$ произведения двух решеток на первый множитель.

13. Покажите, что любая конечная решетка является $\vee$-гомоморфным образом конечной булевой решетки. (Указание. Рассмотрите подмножества множества «$\vee$-неразложимых» элементов решетки.)

14. (а) Покажите, что простой идеал решетки — это такое непустое ее подмножество P, что $a \wedge b \in P$ тогда и только тогда, когда $a \in P$ или $b \in P$.

(б) Покажите, что главный идеал (c) решетки прост тогда и только тогда, когда из $x \wedge y \leqslant c$ следует, что $x \leqslant c$ или $y \leqslant c$.

15. Покажите, что любая дистрибутивная решетка порядка $n > 2$ имеет две конгруэнции θ и θ_1 такие, что $0 \wedge \theta_1 = O$ (отношение равенства). (Указание. Рассмотрите отображения $x \to x \wedge a$ и $x \to x \vee a$.)

16. Покажите, что любая недистрибутивная решетка L имеет (главный) идеал, который не является ядром никакого решеточного гомоморфизма.

17. Пусть E — отношение эквивалентности на решетке L. Покажите, что E является конгруэнцией тогда и только тогда, когда

(i) из aEb и $a \wedge b \leqslant x$, $y \leqslant a \vee b$ следует, что xEy, и

(ii) $(a \wedge b)\ Ea$, если и только если $bE\ (a \vee b)$ (Кроун).

5. Решеточные многочлены

Выражения, составленные из символов $\wedge$, $\vee$ и букв, называются *решеточными многочленами*. Точнее, индивидуальные буквы x, y, z, ..., по определению, являются многочленами *веса* один. Далее, рекурсивно, если p и q — решеточные многочлены весов w и w' соответственно, то $p \wedge q$ и $p \vee q$ [2]) называются решеточными многочленами *веса* $w + w'$.

При этом определении $x \wedge x$ и $x \vee (x \wedge x)$ считаются различными многочленами (веса два и три соответственно), несмотря на то, что они *эквивалентны* в том смысле, что в любой решетке L представляют одну и ту же *функцию* p: $L \to L$.

Довольно просто перечисляются все решеточные полиномиальные *функции* от x и y. Этому помогает

Лемма 1. *В любой решетке L подрешетка S, порожденная двумя элементами x и y, состоит из элементов x, y, $x \vee y = u$ и $x \wedge y = v$, для которых операции $\vee$ и $\wedge$ задаются, как показано на рис. 7.*

Доказательство. Согласно L4 $x \wedge u = x$, а из L3, L1 следует, что $x \vee u = x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y = u$.

[1]) То есть увеличения числа сравнимых пар. — *Прим. перев.*

[2]) Строго говоря, следует писать $(p \wedge q)$ и $(p \vee q)$. Внешние скобки договариваются опускать. — *Прим. перев.*

Остальные случаи рассматриваются аналогично с использованием симметрии между x и y и двойственности. (Ввиду L4 $u \vee v = x \vee y \vee (x \wedge y) = x \vee y = u$.)

Следствие. *Пусть $F_2 = 2^2$ — решетка, изображенная на рис. 7, и пусть заданы a, $b \in L$ (L — произвольная решетка). Тогда отображение $x \to a$, $y \to b$ можно продолжить до гомоморфизма θ: $F_2 \to L$.*

Эти результаты обычно объединяют в утверждение о том, что F_2 является свободной решеткой с порождающими x и y; она содержит четыре элемента и дистрибутивна (и более того, булева).

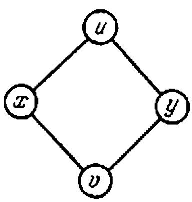


Рис. 7.

Решеточные многочлены от трех и более переменных могут быть устроены чрезвычайно сложно (см. § VI.8). Однако у них есть и несколько простых свойств.

Лемма 2. *В любой $\vee$-полурешетке каждый многочлен от символов $x_1, \ldots, x_r$ эквивалентен объединению $\bigvee_S x_i$ некоторого непустого множества этих x_i.*

Доказательство. Согласно L2—L3 каждый такой многочлен эквивалентен объединению некоторых $x_1, x_2, \ldots, x_r$ в указанном порядке, возможно, с повторениями. Но тогда, используя L1, можно заменить повторяющиеся вхождения одного и того же символа одним вхождением этого символа.

Другими словами, свободная полурешетка с r порождающими имеет 2^r-1 элементов. (См. Мартич (Martic L.) — C. R. Acad. Sci. Paris, 1957, **244**, p. 1953—1955.)

Лемма 3. *В любой дистрибутивной решетке каждый многочлен эквивалентен некоторому объединению пересечений и двойственно:*

$$p(x_1, \ldots, x_r) = \bigvee_{\alpha \in A} \left\{ \bigwedge_{S_\alpha} x_i \right\} = \bigwedge_{\delta \in D} \left\{ \bigvee_{T_\delta} x_j \right\}, \tag{6}$$

где S_α, T_δ — непустые множества индексов.

Доказательство. Каждый x_i можно записать в таком виде, считая A (или D) семейством множеств, состоящим из единственного одноэлементного множества $\{x_i\}$. С другой стороны, используя L1—L3, как в лемме 1, получаем, что

$$\bigvee_{\alpha \in A} \left\{ \bigwedge_{S_\alpha} x_i \right\} \vee \bigvee_{\beta \in B} \left\{ \bigwedge_{S_\beta} x_i \right\} = \bigvee_{A \cup B} \left\{ \bigwedge_{S_\gamma} x_i \right\}. \tag{7}$$

Вследствие дистрибутивности аналогично имеем:

$$\bigvee_{\alpha \in A} \left\{ \bigwedge_{S_\alpha} x_i \right\} \wedge \bigvee_{\beta \in B} \left\{ \bigwedge_{S_\beta} x_i \right\} = \bigvee_{A \times B} \left\{ \bigwedge_{S_{\alpha\beta}} x_i \right\}, \tag{7'}$$

где $\bigwedge$ обозначает пересечение, а $\bigvee$ — объединение конечного числа членов, подобно тому, как в обычной алгебре с помощью

Σ и Π записываются сумма и произведение конечного числа членов.

Это дальнейшее обобщение для решеточного аналога знакомого из обычной алгебры общего дистрибутивного закона

$$\left(\sum_{\alpha \in A} x_\alpha\right)\left(\sum_{\beta \in B} y_\beta\right) = \sum_{A \times B} x_i y_j.$$

Оно получается из L2 и L6′ в сочетании с соотношением $\left\{\bigwedge_S x_i\right\} \wedge \left\{\bigwedge_T x_i\right\} = \bigwedge_{S \cup T} x_i$, которое выводится из L1—L3, как в лемме 2.

Принцип изотонности (лемма 3 из § I.5) индукцией по весу может быть расширен до следующего результата.

Лемма 4. *Если $y_i \leqslant z_i$ $(i = 1, \ldots, r)$, то $p(y_1, \ldots, y_r) \leqslant p(z_1, \ldots, z_r)$ для любого решеточного многочлена p.*

Вообще, имеет место *принцип минимакса*:

$$\bigwedge_{\gamma \in C}\left(\bigvee_{B(\gamma)} x_{\gamma, \beta}\right) \geqslant \bigvee_P \left(\bigwedge_\gamma x_{\gamma, \beta(\gamma)}\right). \tag{8}$$

Здесь каждое $\gamma \in C$ определяет индексное множество $B(\gamma)$ с элементами β, так что индексы γ, β пробегают декартово произведение $\prod_C B(\gamma)$. В первой скобке γ фиксировано, а β пробегает $B(\gamma)$; справа же $\beta(\gamma)$ обозначает произвольную функцию, сопоставляющую каждому $\gamma \in C$ элемент $\beta(\gamma) \in B(\gamma)$, а P есть множество всех таких функций. Например, если $C = \{1, 2\}$, $B(1) = \{1, 2\}$, $B(2) = \{1, 2, 3\}$, неравенство минимакса (8) приобретает следующий вид:

$$(x_{11} \vee x_{12}) \wedge (x_{21} \vee x_{22} \vee x_{23}) \geqslant \left[\bigvee_{j=1}^{3} (x_{11} \wedge x_{2j})\right] \vee \left[\bigvee_{k=1}^{3} (x_{12} \wedge x_{2k})\right].$$

Доказательство. Каждый член $\bigvee_{B(\gamma)} x_{\gamma, \beta}$ является верхней гранью для каждого члена $\bigwedge_\gamma x_{\gamma, \beta(\gamma)}$ из правой части в (8), поскольку они оба имеют некоторый общий элемент $x_{\gamma, \beta(\gamma)}$. Значит, точная нижняя грань множества всех членов левой части будет верхней гранью для каждого члена правой части, и следовательно, верхней гранью для точной верхней грани всех этих членов. Ч. т. д.

Упражнения

1. Покажите, что каждая пара конгруэнций θ на L и θ' на M индуцирует некоторую конгруэнцию на LM (L, M — решетки).

2. (а) Докажите, что в любой решетке $(a \vee b) \wedge (c \vee d) \geqslant (a \wedge c) \vee \vee (b \wedge d)$.

(б) Докажите, что $[a \wedge b \wedge (c \vee d)] \vee (c \wedge d) \leqslant c \vee [b \wedge (a \vee d)] \vee \vee (a \wedge d)$.

(в) Покажите, что L5 в любой решетке равносильно равенству $(a \vee b) \wedge \wedge (a \vee c) = a \vee [b \wedge (c \vee a)]$. (Дедекинд)

3. [1]) Выведите (4) непосредственно из L1 — L4.

4. Элемент a решетки называется $\vee$-*неразложимым*, если из $x \vee y = a$ следует, что $x = a$ или $y = a$. Покажите, что если все цепи в решетке L конечны, то каждый элемент $a \in L$ может быть представлен как объединение $a = x_1 \vee \ldots \vee x_n$ конечного числа $\vee$-неразложимых элементов.

5. Пусть J — множество $\vee$-неразложимых элементов конечной решетки L. Каждому $a \in L$ сопоставим множество $S(a)$ элементов $x \leqslant a$ из J. Покажите, что это дает изоморфное представление решетки L (как упорядоченного множества) подмножествами множества J и что пересечениям из L соответствуют теоретико-множественные пересечения. [2])

6. Определим $\wedge$-*ширину* $b(L)$ конечной решетки L как наименьшее целое b такое, что любое пересечение $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ $[n > b]$ равно пересечению $x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_b}$, где $1 \leqslant i_s \leqslant n$.

(а) Покажите, что если $b[L] = n$ и S — подрешетка или решеточно гомоморфный образ решетки L, то $b[S] \leqslant n$.

(б) Покажите, что $b[LM] = b[L] + b[M]$.

(в) Покажите, что наименьшей решеткой с $b(L) = n$ является 2^n.

7. (а) Покажите, что конечное у-множество P, диаграмма которого может быть уложена на плоскости [3]), является решеткой тогда и только тогда, когда P имеет универсальные грани.

(б) Покажите, что любая решетка L с планарным графом содержит $\vee$-неразложимый элемент, отличный от O и I.

(* в) Покажите, что конечная решетка L имеет плоскую диаграмму тогда и только тогда, когда между ее элементами существует «дополнительный» порядок $<'$ такой, что $a, b \in L$ являются $<$-сравнимыми, если они $<'$-несравнимы, и только в этом случае (Зильбер).

8. Покажите, что в модулярной решетке конгруэнция, отождествляющая две смежные вершины в четырехугольнике, образуемом элементами, связанными отношением покрывания, отождествляет и две другие вершины. (Указание. Если $x \equiv x \wedge y\ (\theta)$, то $x \vee y \equiv y\ (\theta)$.)

9. Будет ли лемма 1 справедливой, если отказаться от L3 (т. е. в «неассоциативных решетках»)?

6. Дистрибутивность

Как и в § I.6, назовем решетку *дистрибутивной*, если в ней выполняется какой-нибудь (и значит, каждый) из эквивалентных дистрибутивных законов L6′ — L6″. Сейчас мы получим еще один результат в этом направлении.

Теорема 8. *Решетка дистрибутивна тогда и только тогда, когда в ней выполняется самодвойственный закон* медианы

L6 $\quad (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x).$

---

[1]) Это упр. 2 к § II.4 из [**LT2**]. Номером (4) там обозначено модулярное неравенство леммы 5 из § I.5 настоящего издания. — *Прим. перев.*

[2]) См. работу Кемпбела (Campbell A. D. — Bull. AMS, 1943, **49**, p. 395—398). Интересно было бы для произвольной конечной решетки L найти «представление» в указанном смысле, которое использовало бы минимальное число точек. [См. упр. 5 § II.4 в [**LT2**]. Такое представление нашел Зарецкий К. А. — УМН, 1961, **16**, № 1, с. 153—154. — *Прим. перев.*]

[3]) То есть нарисована без самопересечений. — *Прим. перев.*

Доказательство. При $x \geqslant z$ левая часть в L6 согласно L4 примет вид $(x \wedge y) \vee [(y \wedge z) \vee z] = (x \wedge y) \vee z$; двойственно, правая часть сведется к $(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge x = [x \wedge (x \vee y)] \wedge (y \vee z) = x \wedge (y \vee z)$. Значит, L6 влечет модулярный закон L5.

Записав теперь L6 сокращенно в виде $u = v$, мы имеем тождество $x \wedge u = x \wedge v$. С помощью L2 — L4 получаем

$$x \wedge v = [x \wedge (x \vee y)] \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = x \wedge (z \vee x) \wedge \wedge (y \vee z) = x \wedge (y \vee z)$$

и далее

$$x \wedge u = x \wedge [(y \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge z)] = (x \wedge y \wedge z) \vee \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

(на последнем шаге используется L5). Наконец, применяя L4 к первым двум членам последнего выражения, приходим к равенству $x \wedge u = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. Подставив все это в исходное тождество $x \wedge u = x \wedge v$, завершаем вывод L6′.

Обратно, применяя L6′ к правой части L6, получаем, что

$$[(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge z] \vee [(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge x] = = [z \wedge (x \vee y)] \vee [x \wedge (y \vee z)]$$

(мы свободно пользуемся законами L4 и L2). Преобразуем теперь оба члена последнего выражения снова при помощи L6′ (и, конечно, L2 — L4):

$$(z \wedge x) \vee (z \wedge y) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x).$$

Мы получаем, что L6′ влечет L6, чем и завершается доказательство.

Лемма 1. *В любой дистрибутивной решетке подрешетка, порожденная тремя заданными элементами x_1, x_2, x_3, состоит из этих x_j, элементов $i = x_1 \vee x_2 \vee x_3$, $o = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$, $u_1 = x_2 \vee x_3$ и т. д., $v_1 = x_2 \wedge x_3$ и т. д., $c_1 = u_2 \wedge u_3$ и т. д., $d_1 = v_2 \vee v_3$ и т. д. и элемента*

$$(9)\quad e = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (x_3 \wedge x_1) = (x_1 \vee x_2) \wedge \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee x_1).$$

Пояснение. «И т. д.» заменяет два аналогично устроенные элемента (например, $u_2 = x_3 \vee x_1$, $u_3 = x_1 \vee x_2$), которые получаются из первого элемента серии циклической перестановкой индексов.

Доказательство. Используя L1 — L6, можно явным образом свести объединение и пересечение любой пары перечисленных выражений к выражению из этого же списка. Если помнить о шести перестановках индексов и принципе двойственности, то каждая такая редукция порождает одиннадцать других, что значительно упрощает вычисление. Далее, для любых $j \neq k$ имеем

$$o < v_j < d_k < x_k, \quad e < c_k < u_j < i.$$

Если исключить случаи объединения и пересечения сравнимых элементов, то останется проверить только следующие соотношения (при $j \neq k \neq l \neq j$):

$$(10) \quad x_j \vee u_j = u_l \vee u_k = i, \; u_j \wedge c_j = e, \; x_j \vee e = c_j,$$
$$x_j \wedge c_k = d_j, \; x_j \vee c_k = u_l$$

и двойственные им. С этим и завершится доказательство.

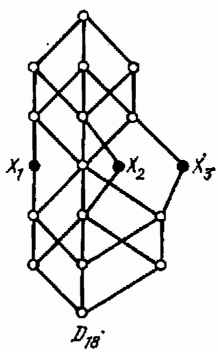


Рис. 8.

Лемма 2. *Существует дистрибутивная решетка D_{18} с тремя порождающими, в которой все 18 выражений из леммы 1 представляют различные элементы.*

Доказательство. Построим D_{18} в виде кольца множеств. Пусть X_j ($j = 1, 2, 3$) обозначает множество, состоящее из четырех функций f: $\{1, 2, 3\} \to \{0, 1\}$, где $f_j = 1$. Каждую $f = (f_1, f_2, f_3)$ можно отождествить с 3-вектором, компоненты которого принадлежат множеству $2 = \{0, 1\}$. Тогда $X_1 \cup X_2$ есть множество U_3 всех f таких, что $f_1 \vee f_2 = 1$; $X_1 \cap X_2$ — множество всех f со свойством $f_1 \wedge f_2 = 1$, и далее циклически. Наконец, $E = U_1 \cap U_2 \cap U_3 = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ есть множество всех f, имеющих не менее двух компонент, равных 1. Эти подмножества множества 2^3 все различны и ни одно из них не равно $O = \{(1, 1, 1)\}$ и его дополнению $I = X_1 \cup X_2 \cup X_3$.

Диаграмма решетки D_{18} показана на рис. 8. Отметим следующее замечательное свойство этой решетки.

Теорема 9. *Пусть D_{18} — решетка, изображенная на рис. 8, с выделенными элементами X_1, X_2, X_3 и пусть a_1, a_2, a_3 — произвольные три элемента некоторой дистрибутивной решетки L. Тогда существует гомоморфизм φ: $D_{18} \to L$, при котором $\varphi(X_i) = a_i$ ($i = 1, 2, 3$).*

Доказательство. По лемме 2 мы можем каждый элемент $p_j(X_1, X_2, X_3)$ дистрибутивной решетки D_{18} отождествить в точности с одним из 18 многочленов $p_j(x_1, x_2, x_3)$, построенных в доказательстве леммы 1. Положим теперь

$$(11) \quad \varphi(p_j(x_1, x_2, x_3)) = p_j(a_1, a_2, a_3) = p_j(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \varphi(a_3))$$

и покажем, что таким образом определен гомоморфизм. В самом деле, по лемме 1 каждое из возникающих 648 равенств $p_j \vee p_k = p_l$ и $p_j \wedge p_k = p_m$, которые были получены в лемме 1 с использованием L1 — L6 и определили «таблицы умножения» для $\vee$ и $\wedge$ в D_{18}, истинно в любой дистрибутивной решетке, и значит, в L. Но тогда в L выполняются и соотношения $\varphi(p_j) \vee \vee \varphi(p_k) = \varphi(p_j \vee p_k)$ и двойственные им.

Свойство, описанное в теореме 9, дает основание назвать D_{18} *свободной* дистрибутивной решеткой с тремя порождающими.

Теперь получим результат, показывающий, что для дистрибутивной решетки с I система аксиом L2 — L4, L6 весьма избыточна. Этот результат, если учесть независимость L2 — L4, установленную в § 2, иллюстрирует силу дистрибутивного закона.

Теорема 10. *Следующие четыре аксиомы для алгебраической системы с двумя бинарными операциями и выделенным элементом I описывают дистрибутивную решетку:*

D1 $\quad a \wedge a = a$ *для всех* a;

D2 $\quad a \vee I = I \vee a = I$ *для всех* a;

D3 $\quad a \wedge I = I \wedge a = a$ *для всех* a;

D4 $\quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ *и* $(b \vee c) \wedge a = (b \wedge a) \vee (c \wedge a)$.

Доказательство. Сначала получаем для всех a, b:

D5 $\quad a = a \wedge I = a \wedge (a \vee I) = (a \wedge a) \vee (a \wedge I) = a \vee a$,

D6 $\quad (a \wedge b) \vee a = (a \wedge b) \vee (a \wedge I) = a \wedge (b \vee I) = a \wedge I = a$

и, аналогично,

D6′ $\quad a \vee (a \wedge b) = a \vee (b \wedge a) = (b \wedge a) \vee a = a$.

Далее, используя D4, D1 и D6′, имеем

D7 $\quad a \wedge (a \vee b) = (a \wedge a) \vee (a \wedge b) = a \vee (a \wedge b) = a$

и, аналогично,

D7′ $\quad a \wedge (b \vee a) = (a \vee b) \wedge a = (b \vee a) \wedge a = a$.

Теперь мы можем вывести коммутативный закон:

D8 $\quad a \vee b = [a \wedge (b \vee a)] \vee [b \wedge (b \vee a)] = (a \vee b) \wedge (b \vee a)$

(согласно D7 — D7′, D4)

$= [(a \vee b) \wedge b] \vee [(a \vee b) \wedge a] = b \vee a$

(здесь использованы D4, D7 — D7′).

В качестве подготовки к доказательству ассоциативности объединения устанавливаем следующие равенства:

$$a \wedge [(a \vee b) \vee c] = [a \wedge (a \vee b)] \vee [a \wedge c] = a \vee (a \wedge c) = a \quad \text{(согласно D4, D7, D6}'\text{);}$$

D9 $$b \wedge [(a \vee b) \vee c] = [b \wedge (a \vee b)] \vee [b \wedge c] = b \vee (b \wedge c) = b \quad \text{(аналогично);}$$

$$c \wedge [(a \vee b) \vee c] = [c \wedge (a \vee b)] \vee [c \wedge c] = [c \wedge (a \vee b)] \vee c = c \quad \text{(использованы D4, D1, D6).}$$

Теперь выводим ассоциативный закон для объединения:

D10 $$a \vee (b \vee c) = \{a \wedge [(a \vee b) \vee c]\} \vee (\{b \wedge [(a \vee b) \vee c]\} \vee \{c \wedge [(a \vee b) \vee c]\}) \quad \text{(согласно D9)}$$
$$= [a \vee (b \vee c)] \wedge [(a \vee b) \vee c] \quad \text{(дважды использовано D4)}$$
$$= (a \vee b) \vee c \quad \text{(в силу симметрии предыдущего выражения).}$$

Далее устанавливаем соотношения, двойственные для D4:

D11 $$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = [a \wedge (a \vee c)] \vee [b \wedge (a \vee c)] = a \vee [(b \wedge a) \vee (b \wedge c)] \quad \text{(согласно D4)}$$
$$= [a \vee (b \wedge a)] \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c) \quad \text{(вследствие D10, D6}'\text{),}$$

D11′ $$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c) \quad \text{(в силу симметрии).}$$

Мы уже получили D5, двойственное для D1, а D6 и D7 двойственны друг для друга. Но только эти соотношения и были использованы при доказательстве D8 и D10. Значит, дуализация доказательства для D8 и D10 даст нам коммутативный и ассоциативный законы для пересечения:

D12 $$a \wedge b = b \wedge a \text{ и } a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c.$$

Этим и завершается доказательство истинности L1 — L4, а что касается закона дистрибутивности L6, то он постулировался в виде D4.

С доказанной теоремой связан следующий остроумный результат.

Теорема 10′ (Шоландер [1])). *Система с двумя бинарными операциями $\wedge$ и $\vee$, удовлетворяющими условиям $a \wedge (a \vee b) = a$*

[1]) Scholander M. — Canad. J. Math., 1951, 3, p. 28—30. См. также работу Круазо (Croisot R.) — Canad. J. Math., 1951, 3, p. 24—27.

и $a \wedge (b \vee c) = (c \wedge a) \vee (b \wedge a)$, *является дистрибутивной решеткой.*

Медианы. Рис. 8 показывает, что симметричная и самодвойственная тернарная операция *медианы*

$$(a, b, c) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) \tag{12}$$

имеет исключительное значение для дистрибутивных решеток. Ее свойства можно использовать и для характеризации этого класса. Например, [LT2, с. 196—197] имеет место [1])

Теорема 11. *Система M с выделенными элементами O, I и тернарной операцией, удовлетворяющей условиям*

$$\begin{gathered}(O, a, I) = a, \ (a, b, a) = a,\\ (a, b, c) = (b, a, c) = (b, c, a),\\ ((a, b, c), d, e) = ((a, d, e), b, (c, d, e)),\end{gathered} \tag{13}$$

является дистрибутивной решеткой относительно бинарных операций $a \wedge b = (a, O, b)$ *и* $a \vee b = (a, I, b)$.

Шоландер показал также, что можно ограничиться двумя постулатами

$$(O, a, (I, b, I)) = a \text{ и } (a, (b, c, d), e) = ((a, c, e), d, (b, a, e)). \tag{14}$$

Операция медианы связана также с различными определениями понятия «между» в решетках; см. ниже § 9.

Упражнения

1. В произвольной дистрибутивной решетке L для заданных $a, b \in L$ пусть $J(a, b)$ обозначает множество всех x таких, что $a \vee x = b \vee x$. Покажите, что $J(a, b)$ — дуальный идеал.

2. Покажите, что любая решетка, в которой для всех x, y, z

$$(x \vee y) \wedge [z \vee (x \wedge y)] = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x),$$

дистрибутивна.

3. Покажите, что решетка дистрибутивна тогда и только тогда, когда в ней $x \vee (y \wedge z) \geqslant (x \vee y) \wedge z$ для всех x, y, z (Боуден, 1936).

4. Покажите, что если в решетке существуют элементы O и I такие, что $a \vee O = a \wedge I = a$ для всех a, то L1 — L4 выводимы из L2, L3, L6′ — L6″ (Хантингтон [1, p. 292—295]).

*5. Покажите, что следующие постулаты характеризуют дистрибутивные решетки: $a \wedge a = a$, $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge$

---

[1]) Теорема 11 принадлежит Кишу (Kiss S. A.) и автору. — Bull AMS, 1947, 53, p. 749—752. См. также [LT 2, с. 196—197] и работу Грау (Grau A. A. — Bull. AMS, 1947, 58, p. 567—572).

$\wedge b) \wedge c$, $a \wedge (a \vee b) = a$, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. (Указание. Определите $a \geqslant b$ как $a \wedge b = b$.)

6. Покажите, что в дистрибутивной решетке L с O и I, если определить (a, b, c) как в (12), то имеют место (13) и (14).

7. (а) В дистрибутивной решетке докажите тождество $(a, b, (c, d, e)) = ((a, b, c), d, (a, b, e))$.

(б) Покажите, что L6′ и L6″ являются его частными случаями.

*8. Докажите, что решетка L дистрибутивна тогда и только тогда, когда каждый ее идеал стандартен.

9. Покажите, что в M_8 невозможно определить операцию медианы (a, b, c), которая была бы самодвойственной и инвариантной относительно автоморфизмов.

7. Модулярность

Теперь переключим наше внимание с дистрибутивности на модулярность. Как было указано в § I.7, модулярный закон L5 является частным случаем дистрибутивного закона L6. Колибиар и Речан[1]) построили для модулярных решеток интересные системы аксиом, в некотором смысле аналогичные тем, которые приведены в теоремах 10 и 10′.

Как мы увидим, из модулярности выводятся более тонкие следствия, чем из дистрибутивности. Но сначала докажем одну простую лемму.

Лемма 1. *Если в модулярной решетке элементы x и y сравнимы (т. е. $x \geqslant y$ или $y \geqslant x$), то из условий $a \wedge x = a \wedge y$ и $a \vee x = a \vee y$ следует равенство $x = y$.*

Доказательство. Если $x \geqslant y$, то предположив, что $x \neq y$, мы получили бы $x > y$, и элементы a, x, y породили бы пятиэлементную немодулярную решетку N_5, изображенную на рис. 1, *б* в § I.3, а это противоречит условию. Случай $x \leqslant y$ рассматривается аналогично: можно взаимно заменить x и y или воспользоваться двойственностью.

Теорема I.12 показывает, что заключение леммы 1 не может выполняться ни в какой немодулярной решетке.

Дистрибутивные тройки. В модулярных решетках многие тройки элементов $\{x, y, z\}$ порождают дистрибутивные подрешетки. Если это имеет место, мы будем писать $(x, y, z)\,D$ и называть $\{x, y, z\}$ *дистрибутивной тройкой*.

Теорема 12. *Если a, b, c — элементы модулярной решетки M, то при выполнении любого из двух равенств $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ или $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ тройка $\{a, b, c\}$ будет дистрибутивной.*

Доказательство. Предположим сначала, что $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, и применим предыдущую лемму к трем элементам a, $x = (a \wedge b) \vee c$, $y = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$.

---

[1]) Kolibiar M., Riečan J. — Czechoslovak Math. J., 1956, **6**, p. 381—386; Acta Fac. Natur. Univ. Comenian, 1958, **2**, p. 257—262 (MR, 1960, **21**, # 1278, # 1279).

Согласно дистрибутивному неравенству, $x \leqslant y$. Тогда

$$a \vee x = a \vee (a \wedge b) \vee c = a \vee c,$$

$$a \vee y = y \vee a = [(a \vee c) \wedge (b \vee c)] \vee a =$$

$$= (a \vee c) \wedge [(b \vee c) \vee a] \quad \text{(согласно L5)}$$

$$= a \vee c \quad \text{(ввиду L4).}$$

Аналогично,

$$a \wedge x = x \wedge a = [(a \wedge b) \vee c] \wedge a = (a \wedge b) \vee (c \wedge a) \quad \text{(согласно L5)}$$

$$= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c) \quad \text{(по предположению)},$$

$$a \wedge y = a \wedge [(a \vee c) \wedge (b \vee c)] = [a \wedge (a \vee c)] \wedge (b \wedge c) =$$

$$= a \wedge (b \vee c).$$

Отсюда по лемме 1 $x = y$. Итак, из $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee \vee (a \wedge c)$ мы получили равенство $c \vee (a \wedge b) = (c \vee a) \wedge (c \vee \vee b)$.

По принципу двойственности из $c \vee (a \wedge b) = (c \vee a) \wedge \wedge (c \vee b)$ будет следовать, что $b \wedge (c \vee a) = (b \wedge c) \vee (b \wedge a)$. Сопоставляя с предыдущим результатом, мы видим, что равенство $b \wedge (c \vee a) = (b \wedge c) \vee (b \wedge a)$ вытекает из равенства $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Таким образом, в модулярной решетке выполнимость дистрибутивного закона для одного размещения элементов тройки $\{a, b, c\}$ влечет его выполнимость и для размещения $\{c, a, b\}$, получаемого из первого циклической перестановкой. Повторяя этот процесс, мы получим истинность всех шести реализаций дистрибутивного закона для тройки $\{a, b, c\}$. Отсюда следует сразу, что $\{a, b, c\}$ порождает дистрибутивную решетку.

Теореме I.12 показывает, что предположение о модулярности в теореме 12 не только достаточно, но и необходимо.

Приводимая далее теорема 13 также подтверждает существенность условия модулярности в теореме 12. Тем не менее, имеет место

Теорема 12′. *Для любых трех элементов a, b, c произвольной решетки L всегда $(a \wedge b, b \wedge c, c \wedge a)\,D$ и $(a \vee b, b \vee c, c \vee a)\,D$.*

Доказательство. Пусть $p = a \wedge b$, $q = b \wedge c$, $r = c \wedge a$, $o = a \wedge b \wedge c$ и пусть $u = p \vee q$, $v = p \vee r$, $w = q \vee r$, $i = p \vee q \vee r$. Мы покажем, что подмножество $\{o, p, q, r, u, v, w, i\}$ образует подрешетку, в которой объединения и пересечения вычисляются как в булевой алгебре 2^3 всех подмножеств множества $\{p, q, r\}$. В самом деле,

$$p \leqslant u \wedge v = [(a \wedge b) \vee (b \wedge c)] \wedge [(a \wedge b) \vee (c \wedge a)] \leqslant \leqslant [b \vee b] \wedge [a \vee a] = b \wedge a = p,$$

откуда $u \wedge v = p$. Из соображений симметрии $u \wedge w = q$ и $v \wedge \wedge w = r$. Наконец, очевидным образом, $p \wedge q = q \wedge r = r \wedge \wedge p = o$ и $u \vee v = u \vee r = u \vee w = p \vee w = v \vee w = v \vee q = i$.

Лемма 2. *В любой модулярной решетке для всех x, y, z*

$$[x \wedge (y \vee z)] \vee [y \wedge (z \vee x)] = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x). \tag{15}$$

Доказательство. Поскольку $x \wedge (y \vee z) \leqslant x \leqslant \leqslant z \vee x$ и $y \leqslant y \vee z$, то повторное применение L5 дает:

$$[x \wedge (y \vee z)] \vee [y \wedge (z \vee x)] = \{[x \wedge (y \vee z)] \vee y\} \wedge (z \vee x) = = [(y \vee z) \wedge (x \vee y)] \wedge (z \vee x).$$

Отсюда и следует (с использованием L2 — L3) формула (15). Используя принцип двойственности, мы получаем

Следствие. *В любой модулярной решетке*

$$[x \vee (y \wedge z)] \wedge [y \vee (z \wedge x)] = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x). \tag{16}$$

Лемма 3. *В модулярной решетке положим*

$$e = (y \wedge z) \vee [x \wedge (y \vee z)] = [(y \wedge z) \vee x] \wedge (y \vee z) \quad \text{(ввиду L5)}$$

и пусть f и g определяются аналогично циклической перестановкой элементов x, y, z (например, $f = (z \wedge x) \vee [y \wedge (z \vee x)]$ и т. д.). Тогда

$$e \wedge f = f \wedge g = g \wedge e = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) \tag{17}$$

и

$$e \vee f = f \vee g = g \vee e = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x). \tag{17'}$$

Доказательство. Согласно L2 — L3 и по построению, если применить лемму 2, то будет

$$e \vee f = (y \wedge z) \vee [x \wedge (y \vee z)] \vee [y \wedge (z \vee x)] \vee (z \wedge x) = = (y \wedge z) \vee [(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)] \vee (z \wedge x).$$

Но $y \wedge z$ и $z \wedge x$ оба содержатся в выражении в квадратных скобках, так как они являются нижними гранями каждого из элементов $x \vee y$, $y \vee z$, $z \vee x$. Отсюда следует (17'), а (17) получается двойственно.

Лемма 4. *Если в условиях леммы 3 какие-нибудь два из элементов e, f, g равны, то (x, y, z) D.*

Доказательство. Если равны, скажем, e и f, то $e \wedge f = e \vee f$ и тогда, согласно (17)—(17'), будет

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x). \tag{18}$$

Но теперь — как в доказательстве теоремы 8

$$x \wedge [(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)] = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

$$x \wedge [(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)] = x \wedge (y \vee z)$$

(и это в любой модулярной решетке). Значит, по теореме 12 $(x, y, z)\,D$ следует из (18).

Теорема 13. *Любая модулярная недистрибутивная решетка M содержит подрешетку, изоморфную решетке M_3, изображенной на рис. 1, а.*

Доказательство. Если M не дистрибутивна, она содержит недистрибутивную тройку $\{x, y, z\}$. По лемме 4 элементы e, f, g будут различными, а согласно лемме 3 они порождают подрешетку, изоморфную M_3.

Следствие. *Следующее условие необходимо и достаточно для дистрибутивности решетки:*

$$\text{если } a \wedge x = a \wedge y \text{ и } a \vee x = a \vee y, \text{ то } x = y. \tag{19}$$

Другими словами, необходима и достаточна единственность относительных дополнений

Упражнения

1. Докажите, что в любой модулярной решетке $x \wedge y = [(x \wedge y) \vee (x \wedge z)] \wedge [(x \wedge y) \vee (y \wedge z)]$ (Левиг (Löwig H. — Ann. Math., 1943, 44, p. 573—579).).

2. Докажите, что в любой решетке модулярный закон L5 равносилен каждому из тождеств[1])

$$x \wedge (y \vee z) = x \wedge \{[y \wedge (x \vee z)] \vee z\}, \quad [(x \wedge z) \vee y] \wedge z = [(y \wedge z) \vee x] \wedge z$$

3. Докажите, что любая подрешетка и любой гомоморфный образ модулярной решетки являются модулярными решетками.

4. Докажите, что прямое произведение модулярных решеток является модулярной решеткой.

5. Используя теорему 12, дайте короткое доказательство теоремы 8.

6. Покажите, что заключение теоремы 12 не имеет места ни в какой немодулярной решетке.

*7. Покажите, что всякая немодулярная решетка с дополнениями L конечной длины содержит немодулярную пятиэлементную подрешетку, в которую входят O и I (Дилуорс (Dilworth R. P. — Tôhoku Math. J., 1940, 47, p. 18—23).).

8. Покажите, что в модулярной решетке L при любом фиксированном a бинарная операция $[x, y]_a = [x \wedge (a \vee y)] \vee (a \wedge y)$ идемпотентна и ассоциативна (т. е. определяет «связку») (Киш).

---

[1]) Таким образом, модулярные решетки образуют многообразие (эквационально определимый класс). См. также упр. 2 (в) к § II.5. — *Прим. перев.*

8. Полумодулярность и длина

Пусть P — у-множество конечной длины с O. Мы будем называть P *полумодулярным* (*сверху*), когда в нем выполняется следующее условие:

(σ) если каждый из различных элементов a и b покрывает c, то существует элемент $d \in P$, покрывающий a и b [1]).

Полумодулярное снизу у-множество конечной длины определяется двойственно. У-множество конечной длины, которое полумодулярно и сверху и снизу, называется *модулярным*.

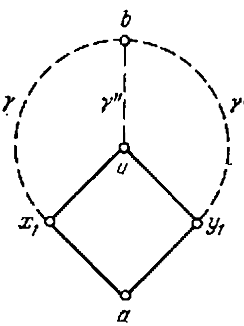


Рис. 9.

Условие (σ) тесно связано с условием (ξ) из § I.7. Именно, справедлива

Л е м м а. *Если у-множество P является решеткой, то* (σ) *равносильно* (ξ).

Действительно, в (σ) элемент $d \geqslant a \vee b$, поскольку d является верхней гранью множества $\{a, b\}$. Но при $a \neq b$ неравенство $d > a \vee b$ невозможно, так как тогда $d > a \vee b > a$ и d не покрывает a. Значит, в решетке условие (σ) влечет (ξ), а обратное очевидно. Двойственный результат доказывается двойственно.

Т е о р е м а 14. *Цепное условие Жордана — Дедекинда выполняется в любом полумодулярном (сверху или снизу) у-множестве конечной длины.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу двойственности достаточно доказать, что в у-множестве конечной длины с O цепное условие Жордана — Дедекинда вытекает из (σ). Это доказывается по индукции следующим образом (см. рис. 9).

Для любого положительного целого m пусть $P(m)$ означает, что если какая-нибудь связная [2]) цепь γ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ имеет длину m, то всякая связная цепь, соединяющая a и b, имеет длину m. Понятно, что $P(1)$ истинно. Покажем, что из $P(m-1)$ следует $P(m)$. Пусть γ': $a = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = b$ — другая (конечная) связная цепь, соединяющая a и b. Согласно (σ) существует элемент u, который покрывает x_1 и y_1, если только не будет $x_1 = y_1 = I$ (тривиальный случай). Построим какую-нибудь связную цепь γ'', соединяя u и b. Вследствие справедливости $P(m-1)$ связная цепь (x_1, γ'') имеет длину $m-1$, поскольку такую длину имеет связная цепь $x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b$. Значит, γ'' имеет длину $m-2$, а (y_1, γ'') имеет длину $m-1$.

[1]) Ope (O r e O. — Bull. AMS, 1943, 49, p. 558—566).

[2]) Цепь $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ в у-множестве P называется *связной*, если x_i покрывает x_{i-1} в P при всех $i \geqslant 1$. — *Прим. перев.*

Но тогда длина связной цепи $y_1 < y_2 < \ldots < y_n = b$, ввиду $P(m-1)$, также равна $m-1$, так что $m = n$.

Возвращаясь к § I.3, мы получаем

Следствие. *Любое модулярное или полумодулярное у-множество конечной длины градуируется своей функцией высоты* $h[x]$.

Более важный вывод содержит

Теорема 15. *Градуированная решетка конечной длины полумодулярна (сверху) тогда и только тогда, когда*

$$h[x] + h[y] \geqslant h[x \vee y] + h[x \wedge y]. \tag{20}$$

Двойственно, она полумодулярна снизу, если и только если

$$h[x] + h[y] \leqslant h[x \vee y] + h[x \wedge y]. \tag{20'}$$

Доказательство. Очевидно, что в градуированной решетке конечной длины из (20) следует условие (ξ).

Обратно, пусть L — полумодулярная решетка конечной длины. Тогда существуют две конечные связные цепи

$$x \wedge y = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = x,$$

$$x \wedge y = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = y,$$

одна между $x \wedge y$ и x, а другая между $x \wedge y$ и y. Если, проводя индукцию по $i + j - 1$, мы предположим, что $x_{i-1} \vee y_j$ и $x_i \vee y_{j-1}$ самое большее покрывают $x_{i-1} \vee y_{j-1}$ (т. е. что каждый из этих элементов покрывает элемент $x_{i-1} \vee y_{j-1}$ или совпадает с ним), то в силу полумодулярности (сверху) решетки L объединение

$$x_i \vee y_j = (x_{i-1} \vee y_j) \vee (x_i \vee y_{j-1})$$

самое большее покрывает $x_{i-1} \vee y_j$ и $x_i \vee y_{j-1}$. Таким образом, по индукции

$$h[x \vee y_j] - h[x \vee y_{j-1}] \leqslant 1$$

и, в частности, $h[x \vee y_j]$ конечна для всех j. Суммируя по j, получаем, что

$$h[x \vee y] - h[x] \leqslant n = h[y] - h[x \wedge y].$$

Тем самым доказано, что из полумодулярности следует (20). Второе утверждение получается двойственно.

Следствие. *В любой полумодулярной решетке конечной длины*

$$h[x] + h[y] = h[x \vee y] + h[x \wedge y]. \tag{21}$$

Теорема 16. *Пусть решетка* L *имеет конечную длину. Тогда следующие условия равносильны:*

(i) *в* L *выполняется модулярный закон* L5;

(ii) L *полумодулярна сверху и снизу*;

(iii) *в L выполняется цепное условие Жордана — Дедекинда и* (21).

Доказательство. Импликация (i) → (ii) уже была доказана в § I.7, а (ii) → (iii) следует из теоремы 14 и предшествующей ей леммы. Так что остается доказать, что (iii) → (i). Поскольку выполнено условие Жордана — Дедекинда, функция $h[x]$ определена. Если L не модулярна, то по теореме I.12 она содержит подрешетку N_5 с элементами $x < z$ и y такими, что $x \wedge y = z \wedge y$ и $x \vee y = z \vee y$. Но если имеет место (iii), то согласно (21)

$$h[x] + h[y] = h[x \wedge y] + h[x \vee y] = h[z \wedge y] + h[z \vee y] = h[z] + h[y],$$

что противоречит неравенству $x < z$. Значит, (iii) влечет (i). Ч. т. д.

Модулярные и полумодулярные решетки с дополнениями будут рассматриваться еще в главе IV, где в § IV.2 будет определена полумодулярность для решеток бесконечной длины.

9*. [1]) Отношение «между»

Нетрудно описать [2]) свойства интуитивно понимаемого отношения «между» в цепях.

Лемма. *Для троек элементов любой цепи следующие условия равносильны*:

(i) $a \leqslant b \leqslant c$ *или* $c \leqslant b \leqslant a$;

(ii) $b \in [a \wedge c, a \vee c]$;

(iii) $(a, b, c) = b$.

Мы опускаем доказательство.

Если выполнено какое-то (а значит, каждое) из условий данной леммы, то говорят, что элемент b находится *между* a и c, и это тернарное отношение записывают как $(abc)\,\beta$. Оно обладает следующими очевидными свойствами:

(B1) если $(abc)\,\beta$, то $(cba)\,\beta$;

(B2) если $(abc)\,\beta$ и $(acb)\,\beta$, то $b = c$;

(B3) если $(abc)\,\beta$ и $(axb)\,\beta$, то $(axc)\,\beta$;

(B4) если $(abc)\,\beta$, $(bcd)\,\beta$ и $b \neq c$, то $(abd)\,\beta$;

(B5) если $(abc)\,\beta$ и $(acd)\,\beta$, то $(bcd)\,\beta$.

---

[1]) Звездочка у номера параграфа, по-видимому, является знаком факультативности. — *Прим. перев.*

[2]) См., например, Гильберт Д. Основания геометрии. — М.: ОГИЗ — Гостехиздат, 1948, с. 58 и далее; Хантингтон и Клайн (Huntington E. V., Kline J. R. — Trans. AMS, 1917, 18, p. 301—325); Хантингтон (Huntington E. V. — Trans. AMS, 1935, 38, p. 1—19).

К сожалению, приведенная лемма не верна для произвольных решеток, хотя, например, (ii) и (iii) равносильны в любой дистрибутивной решетке. Таким образом, в решетках возникают три *не эквивалентные* понятия для отношения «между», каждое из которых сохраняет многие из свойств (B1)—(B5), выполняющиеся для отношения «между» в цепях. Но во всех трех случаях, конечно, нарушается

(B6) Для любых трех элементов a, b, c истинно одно из следующих соотношений: $(abc)\,\beta$, $(bca)\,\beta$ или $(cab)\,\beta$.

Как ни удивительно, но обычно, определяя отношение «между» в решетках, используют не условия выше приведенной леммы, а следующее, восходящее к Гливенко отношение [1]).

Определение. В произвольной решетке будем писать $(abc)\,\beta$, если

$$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) = b = (a \vee b) \wedge (b \vee c). \tag{22}$$

Можно показать, что в модулярной решетке условие (22) равносильно тому, что b лежит между a и c в метрическом пространстве, определяемом *графом* этой решетки, если считать, что каждое ребро имеет длину 1. (Здесь «между» означает, что $\partial(a, b) + \partial(b, c) = \partial(a, c)$.)

Отношение «между» (22) имеет много интересных квазигеометрических свойств. Например, в дистрибутивной решетке «медиана» (a, b, c) является единственным элементом, который находится «между» любыми двумя из трех элементов a, b, c. Читателя, интересующегося этими свойствами, отошлем к журнальным статьям [2]).

Упражнения к §§ 8—9

1. Если определить $(axb)\,\beta$ условием (i) леммы 1, то какие из свойств (B1)—(B5) будут выполняться в любом у-множестве? (См. работу Альтвега (Altwegg M. — Comment. Math. Helv., 1950, 24, p. 149—155).)

2. Покажите, что если $(axb)\,\beta$ определить условием, что $x \in [a \wedge b, a \vee b]$, то (B2) истинно не во всех решетках. А что можно сказать в этом случае о (B3)—(B5)?

3. Какие из условий (B1)—(B5) будут выполняться для тернарного отношения $(abc)\,\gamma$, определенного условием: $a < x < b$ или $a > x > b$?

4. В дистрибутивной решетке конечной длины L положим $\partial(a, b) = h[a \vee b] - h[a \wedge b]$.

(а) Покажите, что $(axb)\,\beta$ [3]) тогда и только тогда, когда $\partial(a, x) + \partial(x, b) = \partial(a, b)$.

---

[1]) Glivenko V.—Amer. J. Math., 1936, 58, p. 799—828; 1937, 59, p. 941—956. См. также работы Питчера и Смайли (Pitcher E., Smiley M. F. — Trans. AMS, 1942, 52, p. 95—114) и Смайли и Трансю (Smiley M. F., Transue R. — Bull. AMS, 1943, 49, p. 280—287).

[2]) Келли (Kelly L. M. — Duke Math. J., 1952, 19, p. 661—669), Шоландер (Sholander M. — Proc. AMS, 1952, 3, p. 369—381; 1954, 5, p. 808—812). См. также работу Хасимото (Hashimoto J. — Osaka Math. J., 1958, 10, p. 147—158) и там же ссылки.

[3]) В смысле Гливенко. — *Прим. перев.*

(б) Проверьте, что сумма $\partial(a, x) + \partial(b, x) + \partial(c, x)$ на медиане (a, b, c) принимает минимальное значение

$$\frac{1}{2}[\partial(a, b) + \partial(b, c) + \partial(c, a)].$$

(в) Установите, что любой автоморфизм графа решетки L является автоморфизмом решетки L по отношению к тернарной операции (a, b, c).

(г) Проверьте, что решетка 2^n имеет $2^n n!$ автоморфизмов относительно тернарной операции (a, b, c) в отличие от $n!$ обычных автоморфизмов.

5. Покажите, что ни одна из двух пятиэлементных недистрибутивных решеток не имеет такого элемента x, который минимизировал бы сумму $\partial(a, x) + \partial(b, x) + \partial(c, x)$ сразу для всех a, b, c.

***6.** Пусть P — у-множество, в котором каждая ограниченная цепь конечна. Покажите, что любая максимальная цепь между двумя элементами может быть деформирована в любую другую максимальную цепь между теми же элементами путем последовательного замещения одной стороны «простого цикла» другой его стороной [1]).

7. Покажите, что следующие аксиомы характеризуют отношение «между» в цепях (Альтвег):

(i) если $(xyx)\beta$, то $x = y$;

(ii) если $(xyz)\beta$, то $(zyx)\beta$;

(iii) если $(xyz)\beta$, $(yzu)\beta$ и $y \neq z$, то $(xyu)\beta$;

(iv) $(xyz)\beta$, $(yzx)\beta$ или $(zxy)\beta$.

8. Покажите, что в модулярной решетке с дополнениями следующие условия равносильны для любой конгруэнции θ:

(i) $x \equiv y\ (\theta)$;

(ii) $x \wedge y \equiv x \vee y\ (\theta)$;

(iii) $(x \wedge y)' \wedge (x \vee y) \equiv O\ (\theta)$ для *некоторого* дополнения элемента $x \wedge y$;

(iv) $(x \wedge y)' \wedge (x \vee y) \equiv 0\ (\theta)$ для *любого* дополнения элемента $x \wedge y$.

***9.** Пусть $\theta(L)$ обозначает решетку $\vee$-эндоморфизмов конечной решетки L.

(а) Покажите, что $\theta(L)$ дистрибутивна, если L дистрибутивна;

(б) Покажите, что если L не дистрибутивна, то $\theta(L)$ не полумодулярна (и не любой главный идеал этой решетки является ядром решеточного гомоморфизма) (Гретцер — Шмидт).

10. Булевы алгебры

Булева решетка была определена в § I.10 как дистрибутивная решетка с дополнениями; по самому определению такая решетка должна содержать универсальные грани O и I. Как было показано (там же), дополнения в булевой решетке *единственны* и функция $a \to a'$ является дуальным автоморфизмом периода два («инволюцией»):

(23) $$(a \wedge b)' = a' \vee b', \quad (a \vee b)' = a' \wedge b',$$

(24) $$(a')' = a \text{ для всех } a \in L.$$

---

[1]) Маклейн (Mac Lane S. — Bull. AMS, 1943, **49**, p. 567—568).

(В [**LT2**] к этому заданию (упр. 6 к § V.6) имеется пояснение: «простой цикл» — это пара цепей γ, γ' между x и y такая, что если $x < t < y$, то не может быть, чтобы было $t \geqslant u > x$, $t \geqslant u' > x$ (где $u \in \gamma$, $u' \in \gamma'$) или $t \leqslant v < y$, $t \leqslant v' < y$ (где $v \in \gamma$, $v' \in \gamma'$). — *Прим. перев.*)

Эти факты были хорошо известны уже к 1900 г. (см., например, у Шредера [1]).

Другие системы аксиом для булевой алгебры интенсивно изучались в период 1900—1940 гг.; большое влияние на эти исследования оказала ранняя работа Хантингтона [1]. Мы не будем пытаться дать обзор обширной литературы, посвященной подобным системам аксиом, а отметим лишь следующий типичный результат [1]).

Теорема Хантингтона. *Пусть A — система с одной бинарной операцией $\vee$ и одной унарной операцией $'$ и пусть, по определению, $a \wedge b = (a' \vee b')'$. Если при этом*

(25a) $$a \vee b = b \vee a,$$

(25б) $$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c,$$

(25в) $$(a \wedge b) \vee (a \wedge b') = a,$$

то A является булевой алгеброй.

Хотя из (23)—(24) сразу следует, что $\wedge$ можно исключить из числа неопределяемых (первоначальных) операций, все же удивительно, что L1 — L4, L6 и L8 — L10 все выводятся из трех тождеств (25а)—(25в), т. е. из половины условий L2 — L3 и одного тождества, связанного с дополнением!

В главе I было показано, что в любой дистрибутивной решетке дополнения единственны. Теперь мы займемся выяснением обратной зависимости этих условий. Хотя в главе VII будет показано, что существование единственного дополнения для любого элемента a влечет дистрибутивный закон в решетках, где каждый элемент является объединением атомов, в общем случае это не так (теорема VI.15). Мы установим сейчас один частный результат.

Теорема 17. *Если каждый элемент a решетки L имеет единственное дополнение a' и если в ней выполняется условие* (23), *то L — булева решетка.*

Доказательство. Вследствие коммутативности, из $a \wedge a' = O$ и $a \vee a' = I$ следует, что $a' \wedge a = O$ и $a' \vee a = I$, т. е. выполняется (24). Теперь покажем, что

(26) $$\text{если } b \geqslant a, \text{ то } (b \wedge a') \vee a = b.$$

В самом деле, для $c = b \wedge a'$ (напомним, что $b \geqslant a$) будет $c \wedge a \leqslant a' \wedge a = O$. Далее, согласно (23)—(24)

$$O = (b' \vee a) \wedge (a' \wedge b) = [(b' \vee a) \wedge a'] \wedge b.$$

Но $(b' \vee a) \wedge a' = (b \wedge a')' \wedge a' = [(b \wedge a') \vee a]' = (c \vee a)'$, и подстановкой в предыдущее равенство получаем $O = (c \vee a)' \wedge b$. С другой стороны, $c \vee a = (b \wedge a') \vee a \leqslant$

---

[1]) Huntington E. V. — Trans. AMS, 1933, 35, p. 274—304. Цитируемая ниже теорема, в которой A рассматривается как «полурешетка с дополнениями», связана с четвертым множеством постулатов Хантингтона.

$\leqslant b \vee a = b$, так что $(c \vee a)' \vee b \geqslant b' \vee b = I$. Таким образом, $(c \vee a)'$ является (единственным) дополнением для b, и значит,

$$b = (b')' = ((c \vee a)')' = c \vee a = (b \wedge a)' \vee a.$$

Тем самым доказано (26), а в силу самодвойственности условий, налагаемых на решетку L, справедливо и соотношение, двойственное к (26).

Чтобы доказать дистрибутивность, используем следствие к теореме 13. Предположим, что $x \wedge y = a$, $x \vee y = b$, и пусть $e = b' \vee (x \wedge a')$. Так как $y = a \vee y = b \wedge y$, то, применяя L4, а также (26) и двойственное ему условие, получаем, что

$$e \vee y = b' \vee (x \wedge a') \vee a \vee y = b' \vee x \vee y = b' \vee b = I,$$
$$e \wedge y = [b' \vee (x \wedge a')] \wedge b \wedge y = x \wedge a' \wedge y = a' \wedge a = O.$$

Значит, y есть (единственное) дополнение e' элемента e. Аналогично $x = e'$, так что $x = y$, т. е. относительные дополнения единственны. Следовательно, выполняется (19) и решетка L дистрибутивна. Ч. т. д.

Шефер [1]) показал, что все булевы функции могут быть получены из единственной бинарной операции «отвергания»

$$a \mid b = a' \wedge b' \tag{27}$$

(знак | называется штрихом Шефера). Именно,

$$a' = a \mid a, \quad a \vee b = (a \mid b) \mid (a \mid b), \quad a \wedge b = (a \mid a) \mid (b \mid b). \tag{28}$$

Тогда булеву алгебру можно охарактеризовать следующими двумя остроумными постулатами:

I. $$(b \mid a) \mid (b' \mid a) = a$$

и

II. $$a \mid (b \mid c) = [(c' \mid a) \mid (b' \mid a)]'.$$

Но, конечно, работать с этими аксиомами не так-то просто.

11*. Брауэровы решетки

В любой булевой алгебре A элемент a' является *наибольшим* среди таких x, что $a \wedge x = O$ (т. е. среди x, «дизъюнктных» с a). Вообще, $a \wedge x \leqslant b$ тогда и только тогда, когда $a \wedge x \wedge b' = O$, т. е. когда $(a \wedge b') \wedge x = O$, или $x \leqslant (a \wedge b')' = b \vee a'$. Таким образом, для любых заданных $a, b \in A$ существует *наибольший* элемент $c = b \vee a'$ такой, что $a \wedge c \leqslant b$.

---

[1]) Sheffer H. M. — Trans. AMS, 1913, **14**, p. 481—488. Система постулатов I—II для булевой алгебры была найдена Бернштейном (Bernstein B. A. — Bull. AMS, 1933, **39**, p. 783—787).

В связи с исследованиями по основаниям логики (см. главу XII) Брауэр и Гейтинг [1]) ввели важное обобщение понятия булевой алгебры, основываясь на только что отмеченном свойстве.

Определение. *Брауэровой решеткой* [2]) называется решетка L, в которой для любых данных элементов a и b множество всех $x \in L$ таких, что $a \wedge x \leqslant b$, имеет наибольший элемент $b : a$, называемый *относительным псевдодополнением* a в b.

Теорема 18. *Любая брауэрова решетка дистрибутивна.*

Доказательство. Для заданных элементов a, b, c образуем $d = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ и рассмотрим $d : a$. Так как $a \wedge b \leqslant d$ и $a \wedge c \leqslant d$, то $b \leqslant d : a$ и $c \leqslant d : a$. Значит, $b \vee \vee c \leqslant d : a$ и потому $a \wedge (b \vee c) \leqslant a \wedge (d : a) \leqslant d = (a \wedge \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Но отсюда по теореме I.9 (с учетом неравенства дистрибутивности) следует дистрибутивность.

Нетрудно проверить, что любая булева алгебра является брауэровой решеткой, в которой $b : a = a' \vee b$ будет относительным дополнением для a в $[a \wedge b, I]$. Точно так же любая конечная дистрибутивная решетка брауэрова, поскольку объединение $u = \bigvee x_\alpha$ всех x_α таких, что $a \wedge x_\alpha \leqslant b$, удовлетворяет соотношению $a \wedge u = a \wedge \bigvee x_\alpha = \bigvee (a \wedge x_\alpha) \leqslant b$. Любая цепь тоже брауэрова.

Полная дистрибутивная решетка всех *открытых* подмножеств любого топологического пространства также является брауэровой. Однако полная дистрибутивная решетка всех *замкнутых* подмножеств прямой уже не будет брауэровой: не существует наибольшего замкнутого подмножества со свойством $p \wedge x = \varnothing$ [3]). Значит, не все дистрибутивные решетки брауэровы.

В брауэровой решетке с O элемент $O : a$ называется *псевдодополнением* для a и обозначается a^*. Псевдодополнения в брауэровых решетках имеют много интересных формальных свойств.

Упражнения к §§ 10—11

1. Покажите, что для булевых алгебр любое решеточное наложение θ: $A \to B$ сохраняет дополнения.

2. Покажите, что следующие постулаты определяют булеву алгебру: (а) $x \wedge y = y \wedge x$; (б) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$; (в) $x \wedge y' = z \wedge z'$ тогда и только тогда, когда $x \wedge y = y$ (Ли Берн) [4]).

3. Пусть L — решетка с дополнениями, в которой если $a \wedge x = O$, то $x \leqslant a'$ для любого дополнения a' элемента a. Докажите, что

(а) L — решетка с единственными дополнениями;

---

[1]) Heyting A. — S. B. Preuss. Akad. Wiss., 1930, S. 42—56. Связь с теорией решеток отметил автор [LT 1, §§ 161—162].

[2]) О брауэровых полурешетках см. работу Фринка (Frink O. — Duke Math. J., 1962, 29, p. 505—514), а также у Бюхи (Büchi J. R. — Portug. Math., 1948, 7, p. 119—178).

[3]) Где p — точка. — *Прим. перев.*

[4]) См. также Столл Р. Множества. Логики. Аксиоматические теории. — М.: Просвещение, 1968, с. 199. — *Прим. перев.*

(б) если $a \leqslant b$, то $a \wedge b' = O$, и значит, $b' \leqslant a'$;
(в) L — булева алгебра (Хантингтон [1]).

4. Докажите, что в булевой решетке A тогда и только тогда $b \leqslant c$, когда из $a \wedge c = O$ ($a \in A$) следует, что $a \wedge b = O$.

5. Покажите, что в булевой алгебре $(a, b, c)' = (a', b', c')$.

6. Покажите, что для псевдодополнений в брауэровой решетке справедливо:
(i) если $a \leqslant b$, то $b^* \leqslant a^*$; (ii) $a \leqslant a^{**}$;
(iii) $a^* = a^{***}$; (iv) $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$ и в решетке замкнутых элементов [1])
(v) $(a \wedge b)^* = a^* \vee b^*$.

*7. Докажите, что из постулатов I, II для штриха Шефера выводимы все законы булевой алгебры.

*8. Пусть в булевой алгебре A, по определению, $a * b = a' \wedge b$. Покажите, что
(i) $(a*b)*a = a$, $(a*b)*b = (b*a)*a$, $a*(b*c) = b*(a*c)$;
(ii) $a*a = O$, $O*a = a$, $a*O = O$;
(iii) существует элемент 1 такой, что $1*a = O$.

Покажите, что (i) — (iii) есть система аксиом для булевых алгебр как «импликативных алгебр» с вычитанием [2]) (Эбот и Клейндорфер). (Ср. B e r n s t e i n B. A. — Trans. Amer. Math. Soc., 1934, **36**, p. 876—884.)

*9. Покажите, что идеалы дистрибутивной решетки с O образуют полную брауэрову решетку (Рибенбойм).

10. В каждой из двух недистрибутивных пятиэлементных решеток M_3 и N_5 найдите элементы a, b такие, что $a : b$ не существует.

11. Покажите, что N_5 обладает псевдодополнениями.

12. Покажите, что каждая цепь обладает относительными псевдодополнениями.

13. Покажите, что любая конечная дистрибутивная решетка является брауэровой.

14. Покажите, что брауэрова решетка является булевой, если в ней (а) $(x^*)^* = x$ или (б) $x \wedge x^* = O$.

15. В пятиэлементной брауэровой решетке найдите элементы a, b такие, что $(a \wedge b)^* > a^* \vee b^*$.

*16. Покажите, что следующая система аксиом для брауэровых решеток независима:

$$a : a = I, \qquad a \wedge O = O,$$
$$(a : b) \wedge a = a, \qquad (a : b) \wedge b = a \wedge b,$$
$$(a \wedge b) : c = (a : c) \wedge (b : c), \quad a : (b \vee c) = (a : b) \wedge (a : c)$$

(Монтейро (M o n t e i r o A. A. — Rev. Union Mat. Argentina, 1955, **17**, p. 148—160).)

12*. Булевы кольца

Аналогия между алгеброй логики и обычной алгеброй подчеркивалась многими математиками, начиная с Буля [1]. Однако Стоун [1] был первым, кто осознал точную связь между булевыми алгебрами и кольцами [3]).

[1]) То есть таких элементов a, что $a^{**} = a$, ибо можно показать, что равенство $a = a^{**}$ определяет свойство замыкания. — *Прим. ред.*

[2]) См. § XII.3. — *Прим. перев.*

[3]) По поводу более ранних связанных с этим работ см. ссылки в [**LT2**, сноска на с. 217].

Кольцо можно построить из элементов любой булевой алгебры, беря в качестве умножения пересечение и определяя сложение как «симметрическую разность»:

(29) $$ab = a \wedge b \text{ и } a + b = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b).$$

Очевидно, что обе операции коммутативны. Проверим ассоциативность для сложения:

$$(a + b) + c = \{[(a \wedge b') \vee (a' \wedge b)] \wedge c'\} \vee \vee \{[(a \wedge b') \vee (a' \wedge b)]' \wedge c\}.$$

После упрощения с помощью дистрибутивности получаем

$$(a + b) + c = (a' \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge b' \wedge c') \vee (b' \wedge c \wedge a') \vee \vee (a \wedge b \wedge c) -$$

выражение, симметричное относительно a, b и c. В силу этой симметрии

(30) $$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Элемент O булевой алгебры действует как аддитивный нуль кольца:

$$a + O = (a \wedge O') \vee (a' \wedge O) = (a \wedge I) \vee (a' \wedge O) = a \vee O = a.$$

Аддитивно обратный (противоположный) элемент для a существует и равен самому a, поскольку согласно (29) будет

(31) $$a + a = O \vee O = O.$$

Осталось установить законы дистрибутивности. По определению,

$$a(b + c) = a \wedge [(b \wedge c') \vee (b' \wedge c)] = (a \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge b' \wedge c)$$

и

$$\begin{aligned} ab + ac &= (a \wedge b \wedge (a \wedge c)') \vee ((a \wedge b)' \wedge a \wedge c) = \\ &= ((a \wedge b) \wedge (a' \vee c')) \vee ((a' \vee b') \wedge a \wedge c) = \\ &= (a \wedge b \wedge a') \vee (a \wedge b \wedge c') \vee (a' \wedge a \wedge c) \vee (b' \wedge a \wedge c) = \\ &= (a \wedge b \wedge c') \vee (b' \wedge a \wedge c). \end{aligned}$$

Таким образом, $a(b + c) = ab + ac$, чем и завершается доказательство.

Очевидно, что построенное кольцо имеет мультипликативную единицу — это будет I, поскольку $I \wedge a = a \wedge I = a$ для всех a. Также очевидно, что в этом кольце $aa = a$. Поэтому если определить *булево кольцо* как (ассоциативное) кольцо, в котором

(32) $$aa = a \text{ для всех } a$$

(т. е. умножение идемпотентно), то доказанное можно сформулировать в следующем виде.

Теорема 19. *Относительно операций, определенных формулами* (23), *каждая булева алгебра является булевым кольцом с единицей.*

Обратно, если задано булево кольцо с единицей, можно построить булеву алгебру, полагая

$$a \wedge b = ab \text{ и } a \vee b = a + b + ab. \tag{33}$$

Если определить $x \geqslant y$ как $xy = y$, то очевидно, что

(i) $1 \geqslant x \geqslant 0$ для всех x;

(ii) $x \geqslant x$ вследствие идемпотентности;

(iii) если $x \geqslant y$ и $y \geqslant x$, то $x = yx = xy = y$ по определению и ввиду коммутативности; [1])

(iv) если $x \geqslant y$ и $y \geqslant x$, то $x = xy = x\,(yz) = (xy)\,z = xz$, так что $x \geqslant z$;

(v) $x \geqslant xy$, поскольку $x\,(xy) = (xx)\,y = xy$;

(v′) $y \geqslant xy$, аналогично, с учетом коммутативности;

(vi) если $x \geqslant z$ и $y \geqslant z$, то $xyz = xz = z$, и значит, $xy \geqslant z$;

(vii) соответствие $x \to 1 - x$ взаимно однозначно.

Так как при $xy = y$ будет $(1 - y)\,(1 - x) = 1 - y - x + xy = 1 - x$, то это соответствие обращает включение, и следовательно, является дуальным автоморфизмом.

Таким образом, наше определение превращает булево кольцо R с единицей в у-множество с O и I (i — iv), в котором $x \wedge y$ определено и совпадает с xy (v — vi), а $x \vee y$ существует (vii) и равняется

$$1 - (1 - x)\,(1 - y) = x + y - xy,$$

как в (33). Итак, если положить $x' = 1 - x$, то $x \wedge x' = x\,(1 - x) = 0$ и $x \vee x' = x + (1 - x) + x\,(1 - x) = 1$, и R становится решеткой с дополнениями.

Наконец,

$$x \wedge (y \vee z) = x\,(y + z - yz) = xy + xz - xyz =$$
$$= xy + xz - xyxz = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

и значит, R является булевой решеткой.

Для любого булева кольца $R\,(B)$ с единицей, построенного из булевой алгебры B согласно (29), булева решетка $B\,(R\,(B))$, полученная из кольца $R\,(B)$ по правилам (33), изоморфна B. Мы опускаем доказательство.

---

[1]) Коммутативность умножения следует из его идемпотентности:

$$a + b = (a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a + b + ab + ba$$

и, учитывая, что $x + x = 0$, достаточно к обеим частям равенства прибавить $a + b + ba$. — *Прим. перев. и ред.*

Стоун [1] определил *обобщенную булеву алгебру* как дистрибутивную решетку с O (но не обязательно с I), обладающую *относительными* дополнениями. Иллюстрацией является следующий

Пример 7. Решетка $2^{(\omega)}$ всех конечных подмножеств множества $\mathbf{Z}^+ = \omega$ положительных целых чисел будет обобщенной булевой алгеброй. Соответствующие характеристические функции (со значениями в $\mathbf{Z}_2$) образуют булево кольцо, которое является ограниченной прямой суммой (произведением) счетного числа экземпляров кольца $\mathbf{Z}_2$ (см. ниже упр. 6). Заметим, что $2^{(\omega)}$ будет идеалом в 2^ω — множестве всех подмножеств множества ω. Фактор-решетка $2^\omega/2^{(\omega)}$ имеет много интересных свойств (см. ниже упр. 3, а также упр. 1 в конце главы VIII). В обобщенной булевой алгебре мы определяем $a + b$, как в (29), под b' и a' понимая *относительные* дополнения в интервале $[O, c]$ для произвольного $c \geqslant a \vee b$.

Следующий пример показывает, что существуют и неассоциативные булевы кольца.

Пример 8. Рассмотрим *неассоциативную* линейную алгебру над полем $\mathbf{Z}_2$ вычетов по mod 2 с базисным элементом 1 (единица), элементами a, b, c и правилами умножения

(34) $$a^2 = a,\ ab = ba = c \text{ и циклически.}$$

Тогда $(a+b)^2 = a^2 + 0 + b^2 = a + b$ и т. д.

13*. Алгебры Ньюмена

Замечательный синтез булевых алгебр и булевых колец получил в 1941—1942 гг. Ньюмен [1]). Назовем *алгеброй Ньюмена* алгебру A с двумя бинарными операциями, удовлетворяющими условиям

N1 $$a(b + c) = ab + ac;$$

N1′ $$(a + b)c = ac + bc;$$

N2 существует элемент 1 такой, что $a1 = a$ для всех a;

N3 существует элемент 0 такой, что $a + 0 = 0 + a = a$ для всех a;

N4 для каждого a существует по крайней мере один элемент a' такой, что $aa' = 0$ и $a + a' = 1$.

Заметим, что не предполагается ни идемпотентность, ни коммутативность, ни ассоциативность этих операций. Не требуется заранее и единственность a'.

Легко проверить, что каждая булева алгебра и каждое булево кольцо с единицей являются алгебрами Ньюмена, причем булево

---

1) Newman M. H. A. — J. London Math. Soc., 1941, **16**, p. 256—272; 1942, **17**, p. 34—**47**. См. также работу Биркгофов (Birkhoff G. D., Birkhoff G. — Trans. AMS, 1946, **60**, p. 3—11).

кольцо *не* обязано быть ассоциативным. Тогда алгеброй Ньюмена будет и любое прямое произведение булевой алгебры и булева кольца.

Следующая серия лемм (T1 — T7) позволит получить обращение этого результата.

T1 $$aa = a \text{ для всех } a.$$

Доказательство.

$$aa = aa + 0 = aa + aa' = a(a + a') = a1 = a.$$

Затем покажем, что *любое* дополнение $(a')'$ *произвольного* дополнения a' элемента a должно совпадать с a.

T2 $$(a')' = a.$$

Доказательство.

$$(a')' = 0 + (a')'(a')' = a'(a')' + (a')'(a')' = [a' + (a')'](a')' =$$
$$= 1(a')' = (a + a')(a')' = a(a')' + 0 = 0 + a(a')' =$$
$$= aa' + a(a')' = a(a' + (a')') = a1 = a. \text{ Ч. т. д.}$$

Таким образом, если a' и a^* — два дополнения для a, то по доказанному $(a^*)' = a$ и $((a^*)')' = a^*$. Но кроме того, $((a^*)')' = a'$, так что $a^* = a'$, т. е. *дополнения единственны*.

Как следствие T2 и N4 получаем

N4′ $$a'a = 0 \text{ и } a' + a = 1.$$

Далее, применяя N4, N3, N1′, N4 и N3, имеем

$$0 = aa' = a(a' + 0) = aa' + a0 = 0 + a0 = a0,$$

и аналогично, используя N4′, N3, N1′, N4′ и N3,

$$0 = a'a = (a' + 0)a = a'a + 0a = 0 + 0a = 0a.$$

Тем самым мы доказали

T3 $$a0 = 0 = 0a \text{ для всех } a \in A.$$

Заметим, что если $1 = 0$, то $0 = a0 = a1 = a$ для всех a. Значит, за исключением этого тривиального случая всегда $0 \neq 1$, что мы и будем предполагать в дальнейшем. Теперь получаем

N2′ $$1a = (a + a')a = aa + a'a = a + 0 = a.$$

Следовательно, имеется полная лево-правая симметрия в свойствах сложения и умножения.

Положим $1 + 1 = 2$ и назовем левые кратные $x2$ элемента 2 *четными* элементами. Заметим, что $2 + 2 = 2(1 + 1) = 2 \cdot 2 = 2$ (согласно T1). Используя это новое понятие, устанавливаем

T4 *x является четным тогда и только тогда, когда $x + x = x$.*

В самом деле, $y2 + y2 = y\ (2 + 2) = y2$, и обратно, если $x + x = x$, то $x = x1 + x1 = x\,(1 + 1) = x2$.

T5 *Любое кратное xt или vx четного элемента x будет четным.*

Действительно, если $x = x + x$, то $xt = (x + x)\ t = xt + xt$ и $vx = v\,(x + x) = vx + vx$.

T6 *Функция $x \to x2$ является идемпотентным эндоморфизмом:*

$$(x + y)2 = x2 + y2, \quad (xy)\,2 = (x2)\,(y2), \quad (x2)\,2 = x2.$$

Доказательство.

$$(x + y)\,2 = x2 + y2,\ \ (x2)\,2 = x2 + x2 = x\,(2 + 2) = x2$$

и

$$\begin{aligned}(x2)\,(y2) = (x + x)\,(y + y) &= (x + x)\ y\ + \ (x + x)\ y = \\ &= (xy + xy)\ + \ (xy + xy)\ = \ (xy)\,2 + (xy)\,2 = \\ &= (xy)\,(2 + 2) = (xy)\ 2\end{aligned}$$

Отсюда следует, что четные элементы образуют в A подалгебру B с идемпотентным сложением. Для элементов этой подалгебры

$$\begin{aligned}a + 1 &= (a + 1)\,(a + 1) = (aa + a) + (aa' + 1a') = \\ &= (a + a) + (0 + a') = a + a' = 1,\end{aligned}$$

так что $a + 2 = a2 + 2 = (a + 1)\,2 = 2$, а $2 \in B$.

Таким образом, B удовлетворяет всем указанным в теореме 10 постулатам для дистрибутивной решетки, причем 2 действует здесь как универсальная верхняя грань I. Далее, если $a \in B$, то $a'2 \in B$ является дополнением для a в B, поскольку

$$a + a'2 = a2 + a'2 = (a + a')\,2 = 1 \cdot 2 = 2$$

и

$$a\,(a'2) = a\,(a' + a') = aa' + aa' = 0 + 0 = 0.$$

Значит, B является булевой алгеброй. Отсюда получается, в частности, ассоциативность умножения «четных» элементов. Левые кратные элемента $2'$ назовем *нечетными* элементами. Так как $2' + 2' = 2' \cdot 1 + 2' \cdot 1 = 2'\,(1 + 1) = 2' \cdot 2 = 0$, то

T7 *x является нечетным тогда и только тогда, когда $x + x = 0$.*

Действительно, если x — нечетный элемент, то $x = y2'$ для некоторого y и $x + x = y2' + y2' = y\,(2' + 2') = y0 = 0$. С другой стороны, если $x + x = 0$, то $x = x1 = x\ (2' + 2) = x2' + x2 = x2'$, так как $x2 = x + x = 0$.

Рассуждения, аналогичные тем, которые были использованы в доказательствах утверждений T5 и T6, показывают, что множество B' всех нечетных элементов образует булево кольцо с единицей $2'$, и оно не обязано быть ассоциативным.

Наконец, для любого x из нашей алгебры Ньюмена

$$x = x1 = x(2 + 2') = x2 + x2'.$$

Таким образом, мы набросали доказательство следующего результата.

Теорема 20. *Любая алгебра Ньюмена является прямым произведением булевой алгебры и (возможно неассоциативного) булева кольца с единицей.*

Упражнения к §§ 12—13

1. Покажите, что в любой булевой алгебре $x + y = (x \wedge y) + (x \vee y)$.
2. Покажите, что каждая групповая трансляция $x \to x + a$ булевой алгебры является автоморфизмом относительно операции медианы.
3. Покажите, что конечные множества целых чисел образуют относительно операций $\cap$ и $\cup$ обобщенную булеву алгебру без единицы.
4. (а) Покажите, что идемпотентные элементы коммутативного кольца характеристики два образуют булево подкольцо.

(б) Покажите, что коммутативное кольцо с единицей будет кольцом и относительно «двойственных операций»

$$x \bullet y = x + y - xy, \quad x \oplus y = x + y - 1,$$

5. Покажите, что при соответствии, установленном в теореме 19, автоморфизмы переходят в автоморфизмы, булевы подалгебры — в подкольца, идеалы — в идеалы, а решеточные простые идеалы — в простые идеалы кольца.
6. Распространите теорему 19 на обобщенные булевы алгебры и (ассоциативные) булевы кольца, не обязательно имеющие 1.
7. Пусть R — коммутативное и ассоциативное кольцо с 1, в котором $1 + 1 = 0$ и $x(1 - x)y(1 - y) = 0$. Покажите, что тождество $a = (a + aa) + aa$ однозначно разлагает каждое $a \in R$ на сумму нильпотентной и идемпотентной компонент.
8. Используя только N1 — N4 и их следствия, докажите, что

(а) $a + b = (a + b)(b + b') = (a + 1)b + ab' = \ldots = b + a$;

(б) $1 + (1 + c) = [1 + (1 + 1)]c + (c' + c') = \ldots = (1 + 1) + c$, умножая справа на $c + c'$, раскрывая скобки и используя (а), чтобы получить равенство $1 + (1 + 1) = (1 + 1) + 1$;

(в) $1 + (b + c) = (1 + b) + c$, используя (б) и аналогичное умножение справа на $b + b'$;

(г) $a + (b + c) = (a + b) + c$, используя (в).

*9. Покажите, что в N1 — N4 условие $0 + a = a$ избыточно.

10. Пусть R — коммутативное и ассоциативное кольцо с 1 характеристики два, в котором $ab(a + b + ab) = ab$ для всех a, b. Докажите, что

(i) $a^4 = a^2$;

(ii) R является прямой суммой булева кольца и нуль-кольца (его радикала), и обратно. См. работу Фостера (Foster A. L. — Trans. AMS, 1946, 59, p. 166—187).

14*. Орторешетки

Наконец, рассмотрим *недистрибутивные* (в отличие от булевых решеток, § I.10) аналоги булевых алгебр, когда задана унарная операция *взятия дополнения* $a \to a^\perp$ вместе с упорядочением, при котором любые два элемента имеют точные нижнюю и верхнюю грани.

Определение. *Орторешеткой* называется решетка с универсальными гранями и унарной операцией $a \to a^{\perp}$ такой, что

L8$^{\perp}$ $\quad a \wedge a^{\perp} = O, \quad a \vee a^{\perp} = I$ для всех a;

L9$^{\perp}$ $\quad (a^{\perp})^{\perp} = a$;

L10$^{\perp}$ $\quad (a \wedge b)^{\perp} = a^{\perp} \vee b^{\perp}, \ (a \vee b)^{\perp} = a^{\perp} \wedge b^{\perp}$.

Понятно, что любая орторешетка обладает дополнениями, а дистрибутивная орторешетка является булевой алгеброй. Самой известной недистрибутивной орторешеткой является орторешетка подпространств конечномерного евклидова пространства (§ I.9, пример 11), она модулярна. Теперь мы опишем чрезвычайно важную *немодулярную* орторешетку.

Пример 9. Пусть $L(\mathfrak{H})$ — решетка всех замкнутых подпространств (сепарабельного) гильбертова пространства $\mathfrak{H} = L^2(0, 1)$. Для любого такого замкнутого подпространства S пусть $S^{\perp}$ будет его ортодополнение. Тогда L является орторешеткой.

Определение. В орторешетке будем писать aCb (читают: a коммутирует с b), если $a = (a \wedge b) \vee (a \wedge b^{\perp})$.

Лемма. *В любой орторешетке, если $a \leqslant b$, то aCb.*

Доказательство. Если $a \leqslant b$, то $(a \wedge b) \vee (a \wedge b^{\perp}) = a \vee (a \wedge b^{\perp}) = a$ (по закону поглощения L4).

В примере 9 SCT означает, что проекции E_S и E_T на S и T коммутируют: $E_S E_T = E_T E_S$. В этом примере, таким образом, из aCb следует bCa. Накамурой [1] доказана

Теорема 21. *В любой орторешетке L следующие два условия равносильны:*

(35) *если $x \leqslant y$, то $x \vee (x^{\perp} \wedge y) = y$ (т. е. yCx);*

(35′) *если xCy, то yCx (коммутативность симметрична).*

Доказательство можно найти у Холанда [1], содержание теорем 1—3 которого мы излагаем далее.

Орторешетка, удовлетворяющая одному (и значит, каждому) из равносильных условий (35)—(35′), называется *ортомодулярной решеткой*. Согласно (35), любая модулярная орторешетка является ортомодулярной. С другой стороны, в любой ортомодулярной решетке каждая «ортогональная» [2] пара является «модулярной» парой (см. § IV.2), хотя модулярный закон *не* обязательно выполняется.

---

[1] Nakamura M. — Kodai Math. Sem. Rep., 1957, 9, p. 158—160.

[2] В орторешетке элемент x *ортогонален* элементу y, если $x \leqslant y^{\perp}$. Отношение ортогональности симметрично. — *Прим. перев.*

Следствие. *Любая ортомодулярная решетка обладает относительными дополнениями.*

Теорема 22 (Фоулис и Холанд). *В любой ортомодулярной решетке L для каждого $a \in L$ множество $C(a)$ всех элементов x таких, что aCx, является подорторешеткой* [1]).

Заметим также, что имеет место [2])

Теорема 23. *Если в ортомодулярной решетке L aCb и aCc, то $\{a, b, c\}$ порождает в L дистрибутивную подрешетку.*

Следствие 1. *Пусть S — подмножество в ортомодулярной решетке L* и *a_iCa_j для всех $a_i \in S$. Тогда S порождает булеву алгебру относительно операций $\wedge$, $\vee$, $a^\perp$ решетки L.*

Следствие 2. *В любой ортомодулярной решетке L каждая цепь порождает в L булеву подалгебру.*

Следствие 3. *В любой ортомодулярной решетке каждый интервал $[a, b]$ является ортомодулярной решеткой, замкнутой относительно $\wedge$, $\vee$ и операции взятия относительного дополнения $c^* = (a \vee c^\perp) \wedge b = a \vee (c^\perp \wedge b)$.*

Упражнения (см. также упражнения к § IV. 15)

1. (а) Покажите, что всякая дистрибутивная орторешетка является булевой алгеброй.

(б) Пусть LM есть прямое произведение двух орторешеток, рассматриваемых как у-множества. Превратите LM в орторешетку, которая была бы ортомодулярной, когда ортомодулярными являются L и M.

2. Покажите, что в любой орторешетке $a \leqslant b$ тогда и только тогда, когда $a^\perp \geqslant b^\perp$.

3. (а) Покажите, что в симметричной [3]) орторешетке $a \leqslant b$ тогда и только тогда, когда из $b \wedge c = O$ следует $a \wedge c = O$.

(б) Покажите, что никакая пятиэлементная решетка не может быть превращена в орторешетку.

4. Покажите, что следующие условия равносильны для элементов a, b ортомодулярной решетки L:

(i) aCb;

(ii) $(a \vee b^\perp) \wedge b = a \wedge b$;

(iii) $a = (a \vee b) \wedge (a \vee b^\perp)$;

(iv) $a = e \vee g$ и $b = f \vee g$ для некоторых попарно ортогональных элементов e, f, $g \in L$ (Фоулис и Холанд).

5. Покажите, что любая решетка конечного порядка $n > 2$ может быть вложена в качестве подрешетки

(i) в решетку с дополнениями порядка $n + 1$ и

---

[1]) Foulis D. J. — Portug. Math., 1962, 21, p. 65—72, лемма 3; Холанд [1].

[2]) Holland [1, теорема 3], Foulis D. J. — Portugal. Math., 1962, 21, теорема 5.

[3]) *Симметричной* называется орторешетка, в которой истинна импликация xMy & $x \wedge y = O \Rightarrow yMx$, где xMy означает модулярность пары (x, y) (см. § IV.2). — *Прим. перев.*

(ii) в орторешетку порядка $2n - 2$.

6. Покажите, что любая модулярная орторешетка ортомодулярна.

7. Докажите, что каждое из следующих условий необходимо и достаточно для того, чтобы орторешетка была ортомодулярной:

(i) если $a \leqslant b$ и $a^{\perp} \wedge b = O$, то $a = b$;

(ii) если $a \leqslant b \leqslant c$, то $a \vee (b^{\perp} \wedge c) = (a \vee b^{\perp}) \wedge c$.

8. Покажите, что в примере 9 элементы конечной высоты образуют идеал F, который является модулярной подрешеткой.

* **9.** Опишите фактор-решетку $L(\mathfrak{H})/F$, где F — идеал из упр. 8. (См. главу VIII.)

* **10.** Найдите решетку длины 5 с 18 элементами, которая имеет дуальный автоморфизм, но не имеет инволютивного дуального автоморфизма.

* **11.** Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей 1, на котором задано отображение $a \to a^*$ в себя со свойствами $a^{**} = a$, $(a + b)^* = a^* + b^*$ и $(ab)^* = b^*a^*$. Пусть L — множество элементов $x \in R$ таких, что $x = x^* = x^2$. Докажите, что

(а) отношение «$x \leqslant y$ в смысле $x = xy$» является порядком;

(б) если L — решетка относительно этого порядка, то она является ортомодулярной, причем $x^{\perp} = 1 - x$;

(в) $xy = yx$ в L тогда и только тогда, когда xCy;

(г) указанным свойствам удовлетворяют ограниченные линейные преобразования пространства $\mathfrak{H}$, где a^* обозначает сопряженное для a подпространство.

ГЛАВА III

СТРОЕНИЕ И ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

1. Кардинальная арифметика

Основная *структурная проблема* алгебры состоит в *разложении* данной алгебраической системы на более простые *компоненты*, из которых путем *синтеза* может быть восстановлена исходная система. Классическими результатами в этом направлении являются, например, разложение конечномерного векторного пространства в прямую сумму одномерных подпространств (изоморфных основному полю) или разложение конечной абелевой группы в прямую сумму примарных (т. е. с порядком, равным степени простого числа) циклических подгрупп.

Подобные теоремы о разложении помогают описать строение данной алгебраической системы. Получающиеся компоненты обычно образуют решетку. Эти компоненты рассматривают либо как специальные подмножества (например, нормальные подгруппы группы), либо как разбиения (отношения конгруэнтности), либо, наконец, как то и другое одновременно. Тем самым естественно возникают два типа связей между исследованием строения алгебраических систем и теорией решеток (см. примеры 6 и 7 в главе I), — они будут рассматриваться в главах VI—VIII.

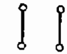
Эту главу мы начнем с изучения строения решеток и, в частности, с проблемы построения решетки из меньших компонент. Оказывается, что в таком синтезе существенную роль играют операции над у-множествами, обобщающие знакомые арифметические действия сложения, умножения и возведения в степень.

Хотя кардинальные операции умножения и сложения можно определить для множеств с произвольными отношениями [1]), мы будем иметь дело только с у-множествами.

Определение. Пусть X, Y — у-множества. *Кардинальная сумма* $X+Y$ — это множество, элементами которого являются все элементы из X и Y, рассматриваемых как непересекающиеся множества. Порядок $\leqslant$ сохраняет свой смысл отдельно в X и в Y, и ни для каких $x\in X$, $y\in Y$ не может быть ни $x\leqslant y$, ни $x\geqslant y$. *Кардинальное произведение* XY — это уже определенное в § I.4 прямое произведение. *Кардинальной степенью* Y^X с осно-

[1]) Уайтхед и Рассел [1, §§ 162, 172]. О приложениях к у-множествам см. в книге Хаусдорф Ф. Теория множеств. — М.: ОНТИ, 1937. Приложения в теории решеток рассматривал автор ([5] и Duke J. Math., 1937, 3, p. 311—316), им же введено понятие кардинального возведения в степень.

ванием Y и показателем X называется множество всех изотонных функций $y = f(x)$, заданных на X и принимающих значения в Y, упорядоченных отношением $f \leqslant g$, означающим, что $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in X$.

Для конечных у-множеств диаграмма для $X + Y$ состоит из диаграмм для X и Y, помещенных рядом; например,  представляет собой диаграмму для $\mathbf{2} + \mathbf{2}$.

Далее, если X — конечная цепь, а Y имеет плоскую диаграмму, то декартово произведение диаграммы для X и плоской диаграммы для Y даст пространственную диаграмму для XY. Вообще, если X и Y имеют пространственные диаграммы, в которых никакой вектор $\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_k$ не равен никакому вектору $\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j$, то векторы $\mathbf{x}_h + \mathbf{y}_j$ образуют вершины пространственной диаграммы для XY, причем вершина $\mathbf{x}_h + \mathbf{y}_i$ покрывается вершинами вида $\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_i$, где $\mathbf{x}_k$ покрывает $\mathbf{x}_h$, и вершинами вида $\mathbf{x}_h + \mathbf{y}_j$, где $\mathbf{y}_j$ покрывает $\mathbf{y}_i$.

Легко показать, что кардинальные сумма, произведение и степень любых двух у-множеств будут снова у-множествами. Более того, из теоремы I.7 мы знаем, что произведение любых двух решеток является решеткой. Теперь докажем менее очевидный результат.

Теорема 1. *Если M — решетка, а X — у-множество, то M^X — решетка. При этом если M модулярна или дистрибутивна, то соответственно модулярной или дистрибутивной будет M^X.*

Доказательство. Пусть $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — две изотонные функции, заданные на X и со значениями в M. Если для любого x положить $h(x) = f(x) \vee g(x) \in M$, то получается функция h, которая изотонна и является точной верхней гранью для f и g в M^X. Двойственно, $h^*(x) = f(x) \wedge g(x)$ является точной нижней гранью. Этим доказано первое утверждение. Чтобы доказать второе, нужно лишь проверить выполнимость соответствующих тождеств для каждого x.

Важным приложением понятия кардинальной степени является 2^X, где 2 обозначает ординальную двойку, а X — произвольное у-множество. Назовем подмножество A в X *J-замкнутым* [1]) (или «дуальным полуидеалом»), если оно содержит вместе с любым a все $x \geqslant a$, и полуидеалом, или *M-замкнутым*, если вместе с любым a оно содержит и все $x \leqslant a$. (Таким образом, если X — решетка, то каждый идеал в X будет M-замкнутым, а каждый дуальный идеал — J-замкнутым.) Имеет место

---

[1]) Как выяснится в главе IX, T_0-пространство, связанное посредством «J-замкнутых подмножеств» с XY, есть произведение T_0-пространств, связанных соответственно с X и Y.

Лемма. *Дистрибутивная решетка 2^X изоморфна кольцу всех J-замкнутых подмножеств у-множества X, упорядоченному теоретико-множественным включением.*

Именно, каждому такому J-замкнутому подмножеству A соответствует его *характеристическая функция* $Q_A : X \to \mathbf{2}$, определяемая условием:

$$Q_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Очевидно, что это соответствие взаимно однозначно; оно, кроме того, является отображением на 2^X, поскольку произвольная функция $f \in 2^X$ соответствует множеству J_f таких $x \in X$, что $f(x) = 1$. Другими словами, $Q_{J_f} = f$.

Далее, J_f является J-замкнутым в X вследствие изотонности f, так как если $a \in J_f$ и $x \geqslant a$, то $f(x) \geqslant f(a) = 1$, и значит, $x \in J_f$ по определению J_f. Наконец, соответствие $A \to Q_A$ является изоморфизмом, ибо если $B \subset A$, то $Q_B(x) \leqslant Q_A(x)$ для всех $x \in X$, и обратно.

Следствие. *Двойственно $2^{\breve{X}}$ дуально изоморфно кольцу всех M-замкнутых подмножеств у-множества X.*

2. Формальные свойства

Если использовать знак равенства для обозначения изоморфности, то большинство законов арифметики можно перенести на произвольные у-множества и, кроме того, получить ряд свойств путем дуализации [1]).

Теорема 2. *Следующие соотношения являются тождествами кардинальной арифметики у-множеств:*

(1) $X + Y = Y + X, \qquad X + (Y + Z) = (X + Y) + Z;$

(2) $XY = YX, \qquad X(YZ) = (XY)Z;$

(3) $X(Y + Z) = XY + XZ, \qquad (X + Y)Z = XZ + YZ;$

(4) $X^{Y+Z} = X^Y X^Z, \qquad (XY)^Z = X^Z Y^Z, \qquad (X^Y)^Z = X^{YZ};$

(5) $\widetilde{X+Y} = \breve{X} + \breve{Y}, \qquad \widetilde{XY} = \breve{X}\breve{Y}, \qquad \widetilde{Y^X} = \breve{Y}^{\breve{X}}.$

Доказательство. Доказательство для (1) тривиально. Тождество $XY = YX$ следует из того факта, что отображение $(x, y)\,\theta = (y, x)$, определяемое для всех $x \in X$ и $y \in Y$, является

[1]) Много других свойств можно найти в работах Биркгофа [5] и Дея [1]. Некоторые из них встречаются ниже в упражнениях.

взаимно однозначным и сохраняющим порядок [1]) отображением у-множества XY на у-множество YX, т. е. изоморфизмом. Аналогично отображение $\varphi : (x, (y, z))\varphi = ((x, y), z)$ определяет очевидный изоморфизм у-множества $X(YZ)$ на у-множество $(XY)Z$. Выполнимость дистрибутивных законов (3) столь же очевидна. Простым применением принципа двойственности получаются законы (5) для дуализации.

Доказательства трех «показательных законов» (4) менее тривиальны, и мы по очереди проведем их.

Если $f \in X^{Y+Z}$, то f является функцией, определенной на объединении двух не пересекающихся множеств Y и Z. Пусть f соответствует паре $(f_Y, f_Z) \in X^Y X^Z$, где f_Y и f_Z определяются как ограничения f на Y и Z соответственно. Ясно, что f_Y и f_Z изотонны, если изотонна f; построенное соответствие взаимно однозначно, поскольку Y и Z вместе дают все множество $Y+Z$. Обратно, каждый элемент (f_1, f_2) из $X^Y X^Z$ соответствует функции, равной f_1 на Y и f_2 на Z. Она определена корректно, поскольку Y и Z не пересекаются, и является изотонной, так как упорядочение на $Y+Z$ согласовано с исходными упорядочениями на Y и Z. Наконец, наше соответствие является изоморфизмом: если $f \leqslant g$, т. е. $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in Y$ и всех $x \in Z$, то $f_1 \leqslant g_1$ и $f_2 \leqslant \leqslant g_2$, и обратно.

Предположим, что $f \in (XY)^Z$, и пусть эта функция соответствует паре (f_X, f_Y), где $f_X(z)$, $z \in Z$, является X-компонентой функции f, а f_Y соответственно Y-компонентой. Тем самым определен изоморфизм между $(XY)^Z$ и $X^Z Y^Z$. Изотонность пары (f_X, f_Y) следует сразу из покоординатного рассмотрения. Построенное соответствие взаимно однозначно, поскольку f определяется через свои компоненты. Далее, если пара $(f_1, f_2) \in X^Z Y^Z$, то она соответствует функции $f(z) = (f_1(z), f_2(z)) \in (XY)^Z$, так что наше соответствие будет отображением на. Наконец, $f \leqslant g$ в $(XY)^Z$ означает, что $f_X(z) \leqslant g_X(z)$ и $f_Y(z) \leqslant g_Y(z)$ для всех $z \in Z$. Таким образом, мы получаем изотонность и обратную изотонность.

Если $f \in (X^Y)^Z$, то f является изотонной функцией, заданной на Z и со значениями в множестве изотонных функций из Y в X. Обозначим образ $z \in Z$ через f_z. Построим функцию φ из $(X^Y)^Z$ в X^{YZ}, полагая $f_\varphi(y, z) = f_z(y)$. Она изотонна, так как изотонна f: если $z \leqslant z_1$ и $y \leqslant y_1$, то $f_z \leqslant f_{z_1}$, откуда, в свою очередь, $f_\varphi(y, z) = f_z(y) \leqslant f_z(y_1) \leqslant f_{z_1}(y_1) = f_\varphi(y_1, z_1)$. Очевидно, что φ взаимно однозначна и является отображением на, поскольку если $g \in X^{YZ}$, то функцию $\bar{g} \in (X^Y)^Z$, определяемую условием $\bar{g}_z(y) = g(z, y)$, φ будет отображать в g. Если $f \leqslant g$, $f, g \in (XY)^Z$, то $f_z \leqslant g_z$ для всех $z \in Z$, а это означает выполнимость неравенства $f_z(y) \leqslant g_z(y)$ для любых $z \in Z$ и $y \in Y$.

[1]) То есть выполняются оба условия (1) и (1′) из § I.2. — *Прим. перев.*

Упражнения к §§ 1—2

1. Покажите, что если X и Y — у-множества, то $X+Y$, XY и Y^X также являются у-множествами.

2. Докажите первые соотношения в (1)—(3) и второе в (5).

3. Докажите, что $X+Y$ не может быть решеткой, если X и Y оба не пусты.

4. Покажите, что если X — у-множество, то M^X является решеткой тогда и только тогда, когда M — решетка.

5. Покажите, что если положить $0^0=1$, то $X^0=1$ для всех X. Покажите, что $0^X=0$ для всех непустых X [1]).

6. Покажите, что решетка всех J-замкнутых подмножеств в $X+Y$ является произведением решетки всех J-замкнутых подмножеств в X и решетки всех J-замкнутых подмножеств в Y.

7. Покажите, что у-множество на рис. 1, *г* есть 2^3. (Биркгоф [1, теорема 5.1].)

8. Докажите, что если $n(X)$ обозначает порядок множества X, то $n(X+Y)=n(X)+n(Y)$ и $n(XY)=n(X)\,n(Y)$, но может случиться, что $n(Y^X)<n(Y)^{n(X)}$.

9. (а) Докажите, что $X^1=X$ и что $X^mX^n=X^{m+n}$ для любых кардинальных чисел (неупорядоченных множеств) m и n.

(б) Пусть P, Q, R — конечные у-множества и P имеет наименьший элемент. Покажите, что если $P^Q\cong P^R$, то $Q\cong R$.

10. (а) Покажите, что множество интервалов у-множества P, упорядоченное теоретико-множественным включением, изоморфно некоторому у-подмножеству в $\breve{P}P$.

(б) Покажите, что оно находится во взаимно однозначном соответствии с $P^{\mathbf{2}}$, где $\mathbf{2}$ — двухэлементная решетка.

(в) Покажите, что если (как у Оре [1, p. 425]) $[x, y]\leqslant[x_1, y_1]$ означает, что $x\leqslant x_1$ и $y\leqslant y_1$, то получается $P^{\mathbf{2}}$.

3. Представление дистрибутивных решеток

Теперь мы покажем, что любая дистрибутивная решетка конечной длины допускает изоморфное представление в виде кольца множеств. Именно, $L\cong 2^X$, где X есть у-множество $\vee$-неразложимых элементов решетки L. В главе VIII первый из этих результатов (но не второй) мы докажем без предположения о конечности длины.

Определение. *Представлением* дистрибутивной решетки L называется ее решеточный гомоморфизм в кольцо R подмножеств S, T, ... некоторого множества X. Элемент $a\neq 0$ решетки L, по определению, *$\vee$-неразложим*, если из $b\vee c=a$ следует, что $b=a$ или $c=a$; $\wedge$-неразложимость определяется двойственно.

Лемма 1. *Если элемент p $\vee$-неразложим в дистрибутивной решетке L, то из $p\leqslant\bigvee_{i=1}^{k}x_i$ следует, что $p\leqslant x_i$ для некоторого i.*

---

[1]) Здесь 0 обозначает пустое, а 1 — одноэлементное множества. — *Прим. перев.*

Доказательство. Если $p \leqslant \bigvee_{i=1}^{k} x_i$, то вследствие дистрибутивности $p = p \wedge \bigvee_{i=1}^{k} x_i = \bigvee_{i=1}^{k} (p \wedge x_i)$. Так как p $\bigvee$-неразложим, то $p = p \wedge x_i$ для некоторого i. Значит, $p \leqslant x_i$ для некоторого i.

Следствие. *В дистрибутивной решетке конечной длины каждый элемент a имеет точно одно представление в виде объединения $\bigvee$-несократимого множества $\bigvee$-неразложимых элементов.*

Доказательство. Таким будет представление элемента a в виде объединения максимальных элементов множества $\bigvee$-неразложимых элементов, содержащихся в a. ($\bigvee$-несократимость означает, что объединение элементов любого собственного подмножества дает меньший элемент.)

Лемма 2. *Если дистрибутивная решетка L имеет n $\bigvee$-неразложимых элементов $p_1, \ldots, p_n$, то ее длина $d[L] = n$.*

Доказательство. Перенумеруем элементы p_i таким образом, чтобы при $p_i < p_j$ было $i < j$; это можно сделать, поскольку отношение порядка не допускает циклов. Тогда $O < p_1 < p_1 \vee p_2 < \cdots < \bigvee_{i=1}^{n} p_i$ будет цепью длины n, так как, предположив, что $p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_j = p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_j \vee p_{j+1}$, мы получили бы неравенство $p_{j+1} \leqslant p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_j$, откуда по лемме 1 $p_{j+1} \leqslant p_i$ для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant j$ — противоречие [1]).

Теорема 3. *Пусть L — дистрибутивная решетка длины n. Тогда у-множество X ее $\bigvee$-неразложимых элементов $p_i > O$ имеет порядок n и $L \cong 2^X$.*

Доказательство. Простой индукцией получаем, что каждый элемент a из L является объединением $\bigvee_A p_i$ множества A $\bigvee$-неразложимых элементов $p_i > O$, которые он содержит. Если $p_i \leqslant a$ и $p_j \leqslant p_i$, то, конечно, $p_j \leqslant a$, т. е. каждое множество A будет M-замкнутым в X. Но, с другой стороны, по лемме 1, если A является M-замкнутым множеством, то $\bigvee_A p_i$ не содержит p_k, не входящих в A. Следовательно, два отображения $a \leftrightarrow A$, которые очевидным образом изотонны, будут взаимно однозначными, и значит, являются изоморфизмами между L и кольцом J-замкнутых подмножеств из $\breve{X}$, или, по лемме 1 из § 1, между L и $2^{\breve{X}}$. Но длина 2^X и есть порядок у-множества X. Этим и завершается доказательство.

Следствие 1. *Число (неизоморфных) дистрибутивных решеток длины n равно числу у-множеств с n элементами.*

---

1) Строго говоря, доказано лишь, что $d[L] \geqslant n$. Впрочем, для дальнейшего этого достаточно. — *Прим. перев. и ред.*

Таким образом, имеется 2 неизоморфные дистрибутивные решетки длины два, 5 — длины три, 16 — длины четыре и 63 — длины пять.

Следствие 2. *Дистрибутивная решетка длины n изоморфна кольцу подмножеств n-элементного множества X.*

Так как каждая булева решетка L обладает относительными дополнениями (теорема I.14), то $\vee$-неразложимые ее элементы $p > O$ являются атомами, и значит, у-множество X из теоремы 3 будет неупорядоченным.

Теорема 4. *Булева алгебра конечной длины n изоморфна полю всех подмножеств n-элементного множества. Таким образом, существует в точности одна*[1]) *булева алгебра длины n, именно 2^n.*

Упражнения

1. Покажите, что $\mathrm{Aut}\, P \simeq \mathrm{Aut}\,(2^P)$ для любого конечного у-множества P.

2. (а) Покажите, что главный идеал $a \wedge L$ дистрибутивной решетки L является простым тогда и только тогда, когда элемент a $\wedge$-неразложим.

(б) Покажите, что если L имеет конечную длину n, то L имеет в точности n простых идеалов, не считая пустого множества и самой L.

3. Покажите, что в дистрибутивной решетке L представление $a = x_1 \wedge \cdots \wedge x_r$ элемента a в виде пересечения $\wedge$-неразложимых элементов несократимо, если только не будет $x_i > x_j$ для некоторых i, j.

4. Покажите, что $\vee$-неразложимыми элементами в примере 2 из § I.1 являются степени простых чисел.

5. Покажите, что порядок $f(m, n)$ у-множества m^n определяется рекуррентной формулой $f(m, n) = f(m-1, n) + f(m, n-1)$, где $f(1, n) = 1$, $f(m, 1) = m$.

4. Свободные дистрибутивные решетки

Понятия решеточного многочлена и «свободной» решетки уже появлялись неформально в § II.5, где было показано, что свободная дистрибутивная решетка D_{18} с тремя порождающими содержит в точности 18 элементов. Изучая помещенный там рис. 8, мы замечаем, что на самом деле $D_{18} \cong 2^P$, где P есть у-множество, получающееся из 2^3 исключением O и I. Таким образом, если мы присоединим O и I к D_{18}, то получится 2^{2^3}. Используя подобные рассуждения, мы сейчас обобщим этот результат.

Определение. Решеточный многочлен вида

$$f_J(x_1, \ldots, x_n) = f_J(\mathbf{x}) = \bigvee_{S \in J} \Big\{ \bigwedge_{k \in S} x_k \Big\}, \tag{6}$$

где J есть J-замкнутое семейство подмножеств S множества индексов $k = 1, \ldots, n$, называется *J-нормальным*.

Лемма 1. *В любой решетке J-нормальная полиномиальная функция f_J удовлетворяет условию*

$$f_J(\mathbf{x}) \vee f_K(\mathbf{x}) = f_{J \cup K}(\mathbf{x}). \tag{7}$$

[1]) Конечно, с точностью до изоморфизма. — *Прим. перев.*

Доказательство. Тождество (7) очевидным образом следует из L1—L3 и (6), если исключить повторные вхождения каждого S.

Лемма 2. *В любой дистрибутивной решетке*

$$f_J(\boldsymbol{x}) \wedge f_K(\boldsymbol{x}) = f_{J \cap K}(\boldsymbol{x}). \tag{8}$$

Доказательство. Полагая $y_S = \bigwedge_{i \in S} x_i$ и т. д., мы получаем ввиду дистрибутивности

$$\left\{\bigvee_{S \in J} y_S\right\} \cap \left\{\bigvee_{T \in K} y_T\right\} = \bigvee_{J \times K} \{y_S \wedge y_T\} = \bigvee_{J \times K} y_{S \cup T} \tag{9}$$

(последний переход обеспечивается законами L1—L3 для пересечения). Так как J и K оба J-*замкнуты*, то $S \cup T = U \in J \cap K$ для любых $S \in J$, $T \in K$, и обратно, если $U \in J \cap K$, то полагая $S = T = U$, видим, что $y_U = y_S \wedge y_T$ является одним из членов в правой части (9), и тогда

$$f_J \wedge f_K = \bigvee_{J \cap K} y_U = \bigvee_{J \cap K} \left\{\bigwedge_{k \in U} x_k\right\} = f_{J \cup K}. \quad \text{Ч.т.д.}$$

Так как одноэлементное множество $S_i = \{i\}$, состоящее из одного элемента i, тривиально J-замкнуто, то каждый $x_i = \bigvee_{S_i} \left\{\bigwedge_{k \in S} x_k\right\}$ записывается в J-нормальной форме. Отсюда, а также из (7) и (8) получается

Лемма 3. *Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — некоторые элементы дистрибутивной решетки L. Тогда подрешетка, порожденная в L элементами a_i, совпадает с множеством всех $f_J(a_1, \ldots, a_n)$ — (формально) различных J-нормальных многочленов* (6).

Теперь рассмотрим пример, в котором различные нормальные многочлены (6) задают различные функции.

Пример 1. В булевой алгебре 2^n с атомами $p_1, \ldots, p_n$ пусть X_i обозначает главный идеал, состоящий из всех $x \leqslant p_i'$. Согласно леммам 1—2 кольцо множеств, порожденное идеалами X_i, состоит из всех $f_J(X_1, \ldots, X_n)$, где $\bigwedge_S X_i$ — (главный) идеал, элементами которого являются все $x \leqslant \bigwedge_S p_i' = \left(\bigvee_S p_i\right)'$. Следовательно, $f_J(X_1, \ldots, X_n)$ будет J-замкнутым подмножеством, которое содержит O и не содержит I у-множества 2^n. Обратно, так как каждое такое J-замкнутое подмножество в 2^n является теоретико-множественным объединением главных идеалов, порожденных его максимальными элементами, мы получим все искомые многочлены, и все они будут различными!.

Из лемм 1—3 по теореме VI.13 следует, как в теореме II.9, что J-нормальные многочлены от $x_1, \ldots, x_n$ определяют *свободную дистрибутивную решетку* с n порождающими. Далее, (7) и (8) показывают, что она изоморфна кольцу J-замкнутых множеств, элементами которых являются подмножества множества $\{1, \ldots, n\}$. При этом все J, участвующие в (6), сами не пусты и не содержат пустого множества $\varnothing$ индексов. В противном случае такое J содержит все подмножества из 2^S. Если мы теперь присоединим O (представляющий $J = \varnothing \subset 2^S$) и I (представляющую множество всех, включая пустое, подмножеств индексного множества), то получается

Теорема 5. *Свободная дистрибутивная решетка, порожденная n символами, с присоединенными O и I, изоморфна кольцу всех J-замкнутых подмножеств решетки 2^n всех подмножеств n-элементного множества.*

Из теоремы 5, так как 2^n самодвойственна, сразу выводим

Следствие. *Свободная дистрибутивная решетка, порожденная n символами, с присоединенными O и I, совпадает с 2^{2^n}.*

Свободные дистрибутивные решетки с n порождающими интенсивно изучались [1]).

В заключение приведем без доказательства обобщенный конечный дистрибутивный закон:

$$\bigwedge_{i=1}^{r}\left\{\bigvee_{j=1}^{s(i)} x_{i,j}\right\} = \bigvee_{F}\left\{\bigwedge_{i=1}^{r} x_{i,f(i)}\right\}, \tag{10}$$

где F — множество всех функций, сопоставляющих каждому i некоторое $f(i)$ из множества $1, \ldots, s(i)$.

5. Свободные булевы алгебры

Булев многочлен от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ строится аналогичным образом с использованием трех основных операций — объединения, пересечения и взятия дополнения. Например, булевыми многочленами от одной переменной будут в точности [2]) x, x', $x \vee x'$, $x \wedge x'$.

Применением законов булевой алгебры можно любой булев многочлен от n переменных $y_1, \ldots, y_n$ привести к *дизъюнктивной нормальной* форме следующим образом:

(i) если некоторый штрих встречается в многочлене вслед за знаком скобки, вводим его внутрь, применяя законы дуализации:

$$(p \wedge q)' = p' \vee q', \quad (p \vee q)' = p' \wedge q'. \tag{11}$$

Тем самым многочлены превращаются в выражения, содержащие штрихованные и нештрихованные буквы, соединенные знаками объединения и пересечения.

---

[1]) Ямамото (Yamamoto K. — J. Math. Soc. Japan, 1954, 6, p. 343—353). О связанных с этим вопросах (на языке релейно-контактных схем) см. у Мура и Шеннона (Moore E. F., Shannon C. — J. Franklin Inst., 1956, 262, p. 191—208, 281—297).

[2]) Если отождествлять булевы многочлены, задающие одну и ту же булеву функцию. — *Прим. перев. и ред.*

(ii) Последовательным применением дистрибутивного закона (в сочетании с L1—L4) приводим полученные выражения к виду (6), где S теперь могут содержать[1]) как $y_i = x_i$, так и $y'_i = x_{n+i}$, $i = 1, \ldots, n$.

(iii) Если какое-нибудь S содержит одновременно y_i и y'_i, то $\bigwedge_S x_k = O$ и соответствующий член можно опустить.

(iv) Если какое-нибудь S не содержит ни y_i, ни y'_i, то записываем

$$\bigwedge_S x_k = \bigwedge_S x_k \wedge (y_i \vee y'_i) = \Big(\bigwedge_{S_1} x_k\Big) \vee \Big(\bigwedge_{S_2} x_k\Big),$$

где $S_1 = y_i \cup S$ и $S_2 = y'_i \cup S$. Повторяя этот процесс, мы можем добиться того, чтобы каждое S в (6) содержало *в точности один* из элементов каждой пары y_i, y'_i.

Рассмотрим все это на примере многочлена от трех переменных

$$\begin{aligned} F &= [(x \wedge y')' \vee z'] \wedge (z \vee x')' \\ &= [x' \vee y \vee z'] \wedge (z' \wedge x) && \text{(согласно (i))} \\ &= (x' \wedge z' \wedge x) \vee (y \wedge z' \wedge x) \vee (z' \wedge z' \wedge x) && \text{(согласно (iv))} \\ &= (y \wedge z' \wedge x) \vee (z' \wedge x) && \text{(согласно (iii))} \\ &= (y \wedge z' \wedge x) \vee (y \wedge z' \wedge x) \vee (y' \wedge z' \wedge x) && \text{(согласно (iv)).} \end{aligned}$$

Шаги (i)—(iv) приводят любой многочлен от трех переменных либо к O, либо к объединению некоторого набора членов

$$x \wedge y \wedge z,\quad x' \wedge y \wedge z,\quad x \wedge y' \wedge z,\quad x \wedge y \wedge z',$$
$$x \wedge y' \wedge z',\ x' \wedge y \wedge z',\ x' \wedge y' \wedge z,\ x' \wedge y' \wedge z'.$$

Эти 2^3 выражений называются *минимальными* булевыми многочленами (от трех переменных).

Точно так же любой булев многочлен от n переменных $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$ можно свести к объединению некоторого множества минимальных булевых многочленов от n переменных (всего их 2^n).

Теорема 6. *Любой заданный булев многочлен одним и только одним способом можно представить в виде объединения минимальных многочленов.*

Доказательство. Существование по крайней мере одного такого представления обеспечивается описанным процессом редукции. Чтобы доказать, что существует не более одного представления, другими словами, что объединения различных наборов минимальных многочленов представляют различные булевы функции, вернемся к примеру 1 из § 4, где X_i было множеством всех $t \in 2^n$ таких, что $t \wedge p_i = O$, т. е. X_i исключало p_i. Тогда X'_i является множеством всех $x \in 2^n$, которые содержат p_i.

---

[1]) В этих рассуждениях под S понимается совокупность переменных, индексированных элементами множества S из (6). — *Прим. перев.*

Если задано какое-нибудь множество T атомов p_i, мы можем представить это множество как пересечение множеств Z_i, где Z_i совпадает с X_i или X_i' в зависимости от того, будет или нет $p_i \in T$. Значит, в примере 1 все 2^{2^n} объединений минимальных многочленов, о которых говорится в теореме 6, представляют различные булевы функции. Этим доказано, что семейство всех совокупностей подмножеств множества $\{1, \ldots, n\}$ дает изоморфное представление свободной булевой алгебры с n порождающими. Итак,

Теорема 7. *Свободная булева алгебра с n порождающими совпадает с* 2^{2^n}.

Упражнения к §§ 4—5

1. Покажите, что свободная решетка с двумя порождающими является булевой решеткой, но что она не будет свободной булевой алгеброй с двумя порождающими.

2. Для каких X решетка 2^X будет свободной дистрибутивной решеткой с n порождающими без присоединения O и I?

3. Покажите, что подрешетка, порожденная n-элементным подмножеством в дистрибутивной решетке, содержит не более 2^{2^n} элементов, и следовательно, конечна.

4. Пусть $f(n)$ обозначает число элементов в $FD(n)$ [1]. Покажите, что $f(1) = 3$, $f(2) = 6$, $f(3) = 20$, $f(4) = 168$, $f(5) = 7581$, $f(6) = 7\,828\,354$, $f(7) = 2\,414\,682\,040\,998$ [2].

5. Докажите, что булев многочлен эквивалентен решеточному многочлену тогда и только тогда, когда он является изотонным (как булева функция).

6. Докажите, что при четных n число элементов в $FD(n)$ четно.

7. Рассмотрите алгебры с двумя бинарными идемпотентными, коммутативными, ассоциативными и взаимно дистрибутивными операциями, а также с двумя фиксированными элементами O и I такими, что $O \vee a = I \wedge a = a$. Покажите, что в данном случае «свободная» алгебра с одним порождающим имеет в точности пять элементов [3].

6. Свободная модулярная решетка M_{28}

Алгебраические следствия модулярного закона гораздо менее отчетливы, чем в случае дистрибутивности. Тем не менее имеет место следующий замечательный результат.

Теорема 8 (Дедекинд). *Свободная модулярная решетка с тремя порождающими* [4] *имеет* 28 *элементов и диаграмму, представленную на рис.* 10, *а*.

Доказательство. Понятно, что основным является второе утверждение. Мы покажем, что рис. 10, *а* представляет диаграмму модулярной решетки M_{28} с порождающими x, y, z

---

[1]) Стандартное обозначение свободной дистрибутивной решетки с n порождающими. — *Прим. перев.*

[2]) Чёрч (Church R. — Notices AMC, 1965, 12, p. 724).

[3]) Келман (Kalman J. A. — Math. Chron., 1971, 1, p. 147—150. Другие обобщения дистрибутивных решеток рассматривали Моисил и Смайли (Smiley M. — Trans. AMS, 1944, 56, p. 435—437).

[4]) Стандартное обозначение $FM(3)$. — *Прим. перев.*

и что тождества, выполнимые в M_{28}, являются следствиями L1—L5. Приступая к доказательству, выделим элементы x, y, z, $O = x \wedge y \wedge z$, $I = x \vee y \vee z$ и

$o = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$,

$$i = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x),$$

а оставшиеся 21 элемент решетки M_{28} сгруппируем по тройкам, эквивалентным относительно перестановки порождающих x, y, z.

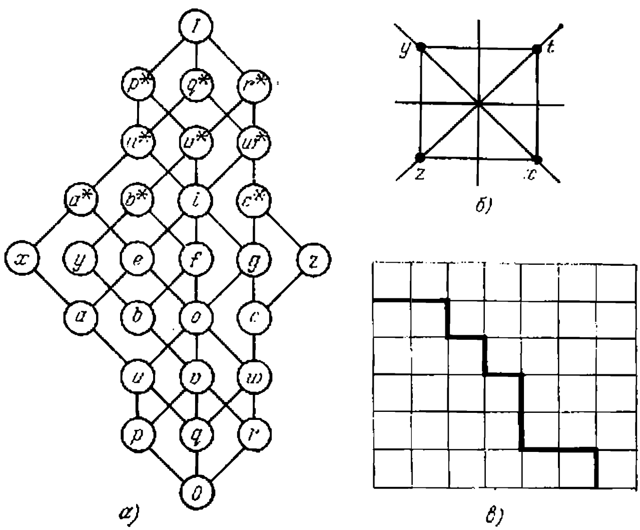


Рис. 10.

Таким образом, положим

$p = x \wedge y$, $q = x \wedge z$, $r = y \wedge z$; $p^* = x \vee y$, $q^* = x \vee z$,

$$r^* = y \vee z;$$

$u = p \vee q$, $v = p \vee r$, $w = q \vee r$; u^*, v^*, w^* двойственны им;

$$a = x \wedge (y \vee z),\ b = y \wedge (x \vee z),\ c = z \wedge (x \vee y);$$

$$a^* = x \vee (y \wedge z),\ b^* = y \vee (x \wedge z),\ c^* = z \vee (x \wedge y);$$

$$e = a \vee o,\ f = b \vee o,\ g = c \vee o.$$

Так как $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \vee x) \leqslant y \vee z$, то

$$e = a \vee o = o \vee a = [(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)] \vee$$
$$\vee [x \wedge (y \vee z)]$$
$$= [(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) \vee x] \wedge (y \vee z) \text{ (согласно L5)}$$
$$= [(y \wedge z) \vee x] \wedge (y \vee z) = (y \wedge z) \vee [x \wedge (y \vee z)]\,^{1)}$$

(согласно L2—L4, L5).

[1]) Последнее равенство показывает, что e самодвойственно. — *Прим. перев.*

Значит, $e = a \vee o = a^* \wedge i = e^*$; подобные рассуждения приводят к аналогичным равенствам $f = f^*$ и $g = g^*$.

Восьмиэлементные подрешетки, состоящие из элементов $t \leqslant o$ и $t^* \geqslant i$ (см. рис. 10, *а*), можно получить, используя теорему II.13. После этого, если учесть еще симметрию и двойственность, остается проверить уже небольшое число соотношений. Поскольку $x \wedge r^* \leqslant x \leqslant x \vee z = q^*$, мы, как в лемме 2 из § II.7, имеем согласно L5:

$$a \vee b = (x \wedge r^*) \vee (y \wedge q^*) = [(x \wedge r^*) \vee y] \wedge q^* =$$
$$= [r^* \wedge (x \vee y)] \wedge q^* = (y \vee z) \wedge (x \vee y) \wedge (x \vee z) = i.$$

Отсюда в силу симметрии $b \vee c = c \vee a = i$, а вследствие двойственности $a \wedge b = b \wedge c = c \wedge a = o$. Как в лемме 3 из § II.7, будет $e \wedge f = f \wedge g = g \wedge e = o$ и, двойственно, $e \vee \vee f = f \vee g = g \vee e = i$.

Остальные клетки в таблице объединений для M_{28} можно заполнить, сделав приведенные ниже упражнения, а таблица пересечений для M_{28} получается по принципу двойственности.

З а м е ч а н и е. Свободная модулярная решетка с четырьмя порождающими бесконечна. Чтобы проверить это, рассмотрим подрешетку модулярной (орто) решетки подпространств трехмерного действительного векторного пространства, порожденную одномерными подпространствами векторов вида $(\lambda x, 0, \lambda x)$, $(0, \lambda y, \lambda y)$, $(0, 0, \lambda z)$ и $(\lambda t, \lambda t, \lambda t)$. Рассматриваемые как точки проективной плоскости, они порождают подрешетку S, элементами которой являются проективные точки и прямые, и которая содержит четыре точки x, y, z, t, никакие три из которых не коллинеарны. Подрешетке S вместе с любыми двумя точками принадлежит и прямая, проходящая через них, и вместе с двумя прямыми — точка их пересечения. На рис. 10, *б* показаны проекции некоторых точек и прямых из S на «конечную» (x, y)-плоскость векторов $(x, y, 1)$; геометрически очевидно (так как $(x \vee t) \wedge \wedge (y \vee z)$ и $(y \vee t) \wedge (z \vee x)$ лежат на «бесконечно удаленной прямой» векторов $(x, y, 0)$), что последовательными делениями углов пополам можно получить в S бесконечное подмножество.

7. Свободные модулярные решетки, порожденные двумя цепями

Теперь мы рассмотрим подрешетку модулярной решетки общего вида, порожденную двумя цепями. Пусть L — некоторая решетка и пусть $O = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = I$ и $O = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = I$ — две цепи в ней между O и I. Понятно, что множество элементов $u^i_j = x_i \vee y_j$ содержит все x_i и y_j (поскольку $x_i \wedge y_n = x_i$ и $x_m \wedge y_j = y_j$); и двойственно, среди элементов

$v_j^i = x_i \vee y_j$ также содержатся все x_i и y_j. Но тогда все x_i и y_j входят в множество объединений элементов u_j^i и в множество пересечений элементов v_j^i.

Лемма 1. *Любое объединение элементов u_j^i можно записать в виде*

$$(x_{i(1)} \wedge y_{j(1)}) \vee \cdots \vee (x_{i(r)} \wedge y_{j(r)}),$$

где $i(1) > \cdots > i(r)$ *и* $j(1) < \cdots < j(r)$.

Доказательство. Если два u_j^i имеют одинаковый верхний индекс, то поскольку y_j образуют цепь, один из элементов u_j^i должен содержаться в другом и, следовательно, согласно L4, будет поглощаться им. Поэтому мы можем сделать все $i(k)$ и, симметрично, все $j(k)$ различными. Далее, если $i > i'$ и $j \geqslant j'$, то $x_i \wedge y_j$ содержит и будет поглощать $x_{i'} \wedge y_{j'}$. Так что если после поглощения всех возможных элементов мы, используя L2, расположим $i(k)$ в убывающем порядке, то будет $j(1) < \cdots < j(r)$.

Лемма 2. *Если в модулярной решетке $a_i \geqslant a_{i+1}$ и $b_i \leqslant b_{i+1}$ для всех i, то*

$$(a_1 \wedge b_1) \vee \cdots \vee (a_r \wedge b_r) = a_1 \wedge (b_1 \vee a_2) \wedge \cdots \wedge (b_{r-1} \vee a_r) \wedge b_r,$$

$$(b_1 \vee a_1) \wedge \cdots \wedge (b_r \vee a_r) = b_1 \vee (a_1 \wedge b_2) \vee \cdots \vee (a_{r-1} \wedge b_r) \vee a_r.$$

Доказательство. Будем доказывать индукцией по r. Из соображений двойственности достаточно проверить выполнимость первого равенства в предположении, что второе истинно при меньшем, чем r, числе объединяемых пар. Применяя дважды L5, мы можем $(a_1 \wedge b_1) \vee \cdots \vee (a_r \wedge b_r)$ переписать в виде

$$a_1 \wedge [b_1 \vee (a_2 \wedge b_2) \vee \cdots \vee (a_{r-1} \wedge b_{r-1}) \vee a_r] \wedge b_r.$$

Согласно второму равенству (для случая $r-1$) выражения

$$(b_1 \vee a_2) \wedge (b_2 \vee a_3) \wedge \cdots \wedge (b_{r-1} \vee a_r)$$

и

$$b_1 \vee (a_2 \wedge b_2) \vee (a_3 \wedge b_3) \vee \cdots \vee (a_{r-1} \wedge b_{r-1}) \vee a_r$$

равны. И если теперь первое из них подставить вместо второго в квадратные скобки, то получится правая часть доказываемого равенства.

Лемма 3. *Объединения элементов u_j^i образуют подрешетку.*

Доказательство. Очевидно, что объединение объединений элементов вида u_j^i будет объединением некоторых u_j^i. Что касается пересечения объединений элементов u_j^i, то согласно леммам 1—2 оно будет равно пересечению пересечений элементов вида v_j^i, т. е. пересечению некоторых v_j^i, и значит, по леммам 1—2 совпадет с объединением элементов вида u_j^i.

Теперь заметим, что если X_i обозначает множество точек (x, y) прямоугольника $O \leqslant x \leqslant m$, $O \leqslant y \leqslant n$, удовлетворяющих условию $x \leqslant i$, а Y_j обозначает множество точек этого прямоугольника, удовлетворяющих неравенству $y \leqslant j$, и если при этом объединения и пересечения рассматривать как теоретико-множественные операции, то всем выражениям, получающимся в лемме 1, будут соответствовать различные множества (пилообразной формы). Например, на рис. 10, *в* изображено $(x_2 \wedge y_5) \vee \vee (x_3 \wedge y_4) \vee (x_4 \wedge y_3) \vee (x_5 \wedge y_2) \vee (x_6 \wedge y_1)$ (т. е. $m = 6$, $n = 5$). По лемме 3 эти множества образуют кольцо множеств (подрешетку решетки всех подмножеств квадрата), которое и будет изоморфно представлять свободную модулярную решетку, порожденную двумя цепями. Отсюда мы заключаем, что эта решетка дистрибутивна и конечна. Таким образом, доказана

Теорема 9. *Свободная модулярная решетка, порожденная двумя конечными цепями, является конечной дистрибутивной решеткой* [1]).

Следствие. *В модулярной решетке любые две конечные цепи между одними и теми же двумя точками обладают такими уплотнениями, что каждый интервал одного взаимно проективен* (см. § 11) *с некоторым интервалом другого.*

Упражнения к §§ 6—7

1. Покажите, что в модулярной решетке каждое из следующих условий влечет $(x, y, z) D$ (обозначение см. в § II.7):
(i) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
(ii) $e = f$.

2. Покажите, что в немодулярной решетке ни одно из условий упр. 1 не обеспечивает $(x, y, z) D$.

*3. (а) Представьте M_{28} как подрешетку решетки $2^6 M_3$.
(б) Убедитесь, что рис. 10, *а* есть диаграмма модулярной решетки.

4. Покажите, что M_{28} имеет $\wedge$-ширину 3.

5. Пусть A — коммутативная группа с 256 элементами и порождающими $e_1, \ldots, e_8$ порядка два. Пусть X_1, X_2, X_3 — подгруппы, порожденные соответственно подмножествами $\{e_1, e_2, e_4, e_7\}$, $\{e_2, e_3, e_5, e_8\}$, $\{e_1, e_3, e_6, e_7 + e_8\}$. Покажите, что все 28 подгрупп на рис. 10, *а* будут различными.

6. (а) Покажите, что свободная модулярная решетка, порожденная элементами $a > b$ и $c > d$, имеет 18 элементов. (Заметим, что это не будет частным случаем теоремы 9, — нужно присоединить еще O и I.)
(б) Покажите, что если $m = 1$, $n = 3$ и O и I не присоединены, то на рис. 10, *б* представлена диаграмма решетки, получаемой в теореме 9.

7. (а) Покажите, что если $m = 2$, то решетка из теоремы 9 планарна [2]).
(б) Какова в общем случае ее $\wedge$-ширина?

---

[1]) Этот результат принадлежит автору [**LT1**, p. 51]. Доказательство, по существу, повторяет рассуждения Шрейера (Schreier O. — Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1928, **6**, S. 300—302) и Цасенхауза (Zassenhaus H. — Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1934, **10**, S. 106—108).

[2]) То есть диаграмма может быть нарисована на плоскости без самопересечений. — *Прим. перев.*

8. (а) Пусть две цепи в теореме 9 имеют $m-1$ и $n-1$ элементов соответственно. Покажите, что если к получающейся дистрибутивной решетке добавить O и I, то она превратится в $\mathbf{2}^{mn}$.

(б) Покажите, что упомянутая решетка содержит $(m+n)!/m!n!$ элементов. (Указание. Жирную ломаную на рис. 10, *в* отождествите с представлением $x^{n}y^{5}$ в виде $xxyxyxyyxy$.)

В упр. 9—11 содержатся результаты Йонссона (Jónsson B. — Proc. AMS, 1955, **6**, p. 682—688).

9. Пусть $X_1, \ldots, X_p$ — цепи в модулярной решетке. Покажите, что $X_1 \cup \cdots \cup X_p$ порождает дистрибутивную решетку тогда и только тогда, когда $(x_1, x_2, \ldots, x_p) D$ для всех $x_i \in X_i$.

10. Пусть S, T — дистрибутивные подрешетки модулярной решетки. Покажите, что $S \cup T$ порождает дистрибутивную подрешетку тогда и только тогда, когда $(x, y, z) D$ для всех $x, y, z \in S \cup T$.

11. Пусть X — подмножество модулярной решетки. Покажите, что X порождает дистрибутивную подрешетку тогда и только тогда, когда $\left(\bigvee y_i\right) \wedge \wedge \left(\bigwedge z_j\right) = \bigvee \left[y_i \wedge \bigwedge z_j\right]$ для всех $y_i, z_j \in X$.

*12. Обобщите теорему 9 на случай произвольных цепей.

8. Центр

Разложения у-множества с универсальными гранями O и I удобнее всего изучать, пользуясь понятием центра, которое вводится следующим образом [1].

Определение. *Центром* у-множества P с O и I называется множество элементов $e \in P$, у которых при некотором разложении P в прямое произведение одна компонента равна I, а остальные — O.

Поскольку кардинальное умножение решеток [2] коммутативно и ассоциативно, мы видим, что e принадлежит центру тогда и только тогда, когда $e = (I, O)$ при некотором представлении P в виде произведения двух множителей $P = XY$.

Всюду в дальнейшем пусть P обозначает у-множество с O и I, а C — его центр.

Лемма 1. *Каждый элемент $e \in C$ имеет единственное дополнение e', которое тоже лежит в C.*

Доказательство. Ясно, что $(I, O) \wedge (x, y) = (x, O)$ и $(I, O) \vee (x, y) = (I, y)$, поэтому (x, y) будет дополнением для $e = (I, O)$ тогда и только тогда, когда $(x, y) = (O, I) = e'$, и это дополнение единственно и принадлежит центру. При этом P является произведением множества всех $x \leqslant (I, O)$ и множества всех $y \leqslant (O, I)$ тогда и только тогда, когда P является произведением множества всех $s \geqslant (I, O)$ и множества всех $t \geqslant (O, I)$.

Лемма 2. *Если $e \in C$, то $z \wedge e$ и $z \vee e$ существуют для любого $z \in P$ и отображение $z \to (z \wedge e, z \vee e)$ является изо-*

---

[1] Для модулярных решеток с дополнениями это понятие ввел фон Нейман, для произвольных у-множеств — автор [**LT1**, p. 24].

[2] И у-множеств вообще. — *Прим. перев.*

морфизмом у-множества P на EE^*, где E обозначает идеал $[O, e]$, а E^* — дуальный идеал $[e, I]$ в P.

Доказательство. Если $P = XY$ и $e = (I, O)$, то отображение $z \to (z \wedge e,\ z \vee e)$ действует следующим образом:

$$(x, y) \to ((x, y) \wedge (I, O));\quad (x, y) \vee (I, O) = ((x, O), (I, y)).$$

Отсюда и получается требуемое утверждение, поскольку $[O, e]$ главный идеал (изоморфный X), состоящий из элементов $(x, O) \leqslant (I, O)$, а $[e, I]$ — дуальный идеал, состоящий из $(I, y) \geqslant (I, O)$.

Для произвольного $e \in C$ пусть φ_e и ψ_e обозначают *проекции* $z \to z \vee e = \varphi_e(z)$ и $z \to z \wedge e = \psi_e(z)$ соответственно. Нетрудно проверить, что для любой пары дополнительных элементов e, $e' \in C$ отображение φ_e является *изоморфизмом* интервала $[e', I]$ на $[O, e]$ и $\psi_{e'}$ — обратный для него изоморфизм. Далее, для любых $e, f \in C$ будет $\psi_{e\wedge f} = \psi_e\psi_f = \psi_f\psi_e$, поскольку $z \wedge (e \wedge f) = (z \wedge e) \wedge f$ и т. д. Двойственно $\varphi_{e\vee f} = \varphi_e\varphi_f$ и (на $[O, e \wedge f]$)

$$\psi^{-1}_{e\wedge f} = (\psi_e\psi_f)^{-1} = \psi_f^{-1}\psi_e^{-1} = \varphi_{f^*}\varphi_{e^*} = \varphi_{e^*\vee f^*}.$$

Этими и другими аналогичными равенствами доказывается

Лемма 3. *Если e, f принадлежат C, то $e \wedge f$ и $e \vee f$ (которые определены в P по лемме 2) также лежат в C.*

Теорема 10. *Центр C любого у-множества P с O и I является булевой решеткой, в которой объединения и пересечения совпадают соответственно с точными верхними и точными нижними гранями в P.*

Доказательство. По лемме 3 C является подрешеткой в P. Если в этой подрешетке $e \wedge f = e \wedge g$ и $e \vee f = e \vee g$, то по лемме 2 $f = g$. Значит, согласно следствию из теоремы II.13 эта подрешетка *дистрибутивна*. Наконец, по лемме 1 C обладает дополнениями, что и доказывает теорему 10.

Так как определение прямого произведения инвариантно относительно изоморфизмов и дуальных изоморфизмов, то очевидно, что центр любого у-множества P с универсальными гранями отображается на себя при всех автоморфизмах и дуальных автоморфизмах у-множества P.

Однозначность разложения. Теорема об однозначности разложения на множители для кардинальных произведений легко выводится из полученных результатов[1]). Сначала доказывается

Лемма 4. *Если задано прямое разложение $P = \prod_{i=1}^{m} X_i$ у-множества P с универсальными гранями, то пусть для $e_i \in P$ X_i-компонента будет равна I, а все другие компоненты — O. Тогда элементы e_i являются дизъюнктными элементами центра у-множества P, объединение которых равно I. Обратно, любое*

---

[1]) Первоначальное доказательство этой теоремы было иным. См. Birkhoff G. — Bull. AMS, 1934, **40**, p. 613—619.

такое подмножество центра соответствует некоторому прямому разложению у-множества P.

Доказательство. Первое утверждение становится очевидным, если представить e_i в виде векторов с подходящими координатами (дизъюнктность означает, что $e_i \wedge e_j = O$ при $i \neq j$).

Для доказательства обратного утверждения рассмотрим отображение

$$(12) \qquad z \to (z \wedge e_1, z \wedge e_2, \ldots, z \wedge e_m),$$

определенное согласно лемме 2. Элемент $e_1' = e_2 \vee \cdots \vee e_m$ является единственным (по лемме 1) дополнением для e_1 и $z \in [e_1, I]$ тогда и только тогда, когда $z \geqslant e_1$. Следовательно, как в доказательстве леммы 1, $P \cong E_1E_1^*$, где E_1^* есть идеал $[e_1, I] \cong [O, e_1']$. Индукцией по m получаем, что

$$E_1^* \cong E_2E_3 \cdots E_m,$$

чем и завершается доказательство.

Теорема 11. *С любыми двумя разложениями у-множества P с O и I в произведение сомножителей X_i и Y_j соответственно связано разложение его на множители Z_j^i такие, что произведение всех Z_j^i с фиксированным j дает X_i, а поизведение всех Z_j^i с фиксированным i дает Y_j.*

Доказательство. Пусть даны разложения $P = \Pi X_i$ и $P = \Pi Y_j$ на множители, определяемые соответственно элементами e_i и f_j центра у-множества P, так что $X_i \cong [O, e_i]$ и $Y_j \cong \cong [O, f_j]$. Тогда идеалы $Z_j^i = [O, e_i \wedge f_j]$, некоторые из которых могут вырождаться в тривиальный идеал $[O]$, определяют по лемме 4 разложение $P = \Pi Z_j^i$. Далее, так как

$$\bigvee_j (e_i \wedge f_j) = e_i \wedge \bigvee_j f_j = e_i \vee I = e_i,$$

то $X_i = \prod_j Z_j^i$, как и требовалось. Аналогично $Y_j = \prod_i Z_j^i$, чем и завершается доказательство.

Следствие 1. *Если у-множество P можно разложить в произведение неразложимых сомножителей, то это разложение однозначно в том точном смысле, что любое несократимое*[1]) *разложение для P получается группировкой этих неразложимых множителей в некоторые подсемейства.*

Следствие 2. *Если у-множество P содержит конечную максимальную цепь, то P можно разложить в произведение нетривиальных неразложимых у-множеств и притом единственным образом.*

Доказательство. Однозначность разложения обеспечивается следствием 1, а его существование доказывается индук-

[1]) Разложения, содержащие тривиальный множитель O, называются сократимыми, и они, таким образом, исключаются из рассмотрения.

цией по длине самой короткой из максимальных цепей. Мы опускаем детали.

Дальнейшие результаты. Накаяма[1]) показал, что разложение на неразложимые сомножители однозначно и в более общем случае бинаправленных множеств. Однако оно не будет однозначным для конечных несвязных у-множеств; например,

$$(1+2^3)(1+2+2^2) \cong (1+2^2+2^4)(1+2),$$

совсем как для обычных многочленов с целыми *положительными* коэффициентами. Впрочем, полукольцо $\mathcal{P}$ конечных у-множеств можно *вложить* в $\mathbf{Z}[x_1, x_2, x_3, \ldots]$, где имеет место однозначность разложения на множители (это будет коммутативное l-кольцо, см. главу XIII).

9. Дистрибутивные и стандартные элементы

Теперь покажем, что центр любой решетки L состоит из таких элементов $a \in L$, которые обладают дополнениями и *дистрибутивны* (или «нейтральны» [2])) в следующем смысле.

Определение. Элемент a решетки L называется *нейтральным* (иначе «дистрибутивным»), если $(a, x, y) D$ для всех $x, y \in L$, т. е. если любая тройка, содержащая a, порождает дистрибутивную подрешетку в L.

Лемма 1. *Элемент a дистрибутивен* (*нейтрален*) *тогда и только тогда, когда функции φ_a: $x \to x \wedge a$ и ψ_a: $x \to x \vee a$ являются* (*решеточными*) *эндоморфизмами, причем соответствие $x \to (x\varphi_a, x\psi_a)$ будет вложением решетки L в произведение идеала A, состоящего из элементов $y \leqslant a$, и дуального идеала A_d, состоящего из всех $z \geqslant a$.*

Доказательство. Первые два утверждения очевидны, а последнее выводится в точности, как формула (19) в главе II. Приведенные условия представляют L в виде *подпрямого произведения* идеала A и дуального идеала A_d, и вложение отображает элемент a на элемент (I, O) из $A \times A_d$. Отсюда следует справедливость обратного утверждения.

Понятно, что a' является *дополнением* для a тогда и только тогда, когда $(a'\varphi_a, a'\psi_a) = (O, I)$. Следовательно, элемент a' должен быть нейтральным и однозначно определенным, к тому же он лежит в центре решетки L. Таким образом, доказана

---

[1]) Nakayama T. — Math. Japon., 1948, 1, p. 49—50. См. также работы Хасимото (Hashimoto J. — Math. Japon., 1948, 1, p. 120—123; Ann. Math., 1951, 54, p. 315—318) и Чэна (Chang C. C. [Symp, p. 123.]).

[2]) Оре [1, p. 419—421] первым изучал «нейтральные» элементы в модулярных решетках; на общий случай это понятие перенес автор (Bull. AMS, 1940, 46, p. 702—705). Хотя синоним «дистрибутивный» более соответствует сути дела, сочетание «дистрибутивный идеал» все же звучало бы двусмысленно. Поэтому мы будем употреблять оба термина — «нейтральный» и «дистрибутивный».

Теорема 12. *Нейтральный элемент может иметь не более одного дополнения, и каждое его дополнение нейтрально. Центр решетки состоит из ее нейтральных элементов, обладающих дополнениями.*

Следуя Гретцеру и Шмидту (см. сноску в § II.4), назовем элемент s решетки L *стандартным*, когда

(i) функция $\psi_s: x \to x \vee s$ является эндоморфизмом решетки L;

(ii) если $x \vee s = y \vee s$ и $x \wedge s = y \wedge s$, то $x = y$.

Очевидно, что элемент нейтрален в L тогда и только тогда, когда он стандартен и в решетке L и в двойственной ей решетке, поскольку условия (i), двойственное ему (i′) и самодвойственное (ii) совпадают с условиями леммы 1. Если, кроме того, L модулярна, то из (i) следует (i′), поскольку любое из равенств дистрибутивности между элементами s, x, y влечет все шесть таких равенств. Наконец, согласно (ii) стандартный элемент может иметь не более одного дополнения. Из этих рассуждений получаются следующие два результата.

Лемма 2. *В модулярной решетке каждый стандартный элемент является дуально стандартным (нейтральным); в произвольной решетке элемент нейтрален тогда и только тогда, когда он стандартен и дуально стандартен. Дополнения стандартных элементов единственны (если они существуют).*

Теорема 13. *Множество нейтральных элементов решетки L совпадает с пересечением ее максимальных дистрибутивных подрешеток.*

Доказательство. Если элемент a не является нейтральным, то какая-нибудь из троек $\{a, x, y\}$ не дистрибутивна. Следовательно, *никакая* максимальная дистрибутивная подрешетка, получаемая расширением дистрибутивной подрешетки, порожденной парой [1]) $\{x, y\}$, не может содержать a. Отсюда заключаем, что в пересечении максимальных дистрибутивных подрешеток решетки L все элементы нейтральны.

Обратно, пусть S — максимальная дистрибутивная подрешетка в L, а элемент a нейтрален. Легко показать, что подрешетка $\{a, S\}$ решетки $L \subset AA_d$, порожденная элементом $a = [I, O]$ и S, дистрибутивна. Но тогда $a \in S$, так как подрешетка S максимальна. (Детализация доказательства: достаточно показать, что A-компоненты элементов подрешетки $\{a, S\}$, так же как их A_d-компоненты, образуют дистрибутивные подрешетки, а к ним нужно присоединить соответственно I или O.)

---

[1]) В этом месте в [LT2, с. 53] автор делает примечание: «Предполагая, что всякую дистрибутивную подрешетку можно расширить до максимальной дистрибутивной подрешетки, мы предвосхищаем результаты главы III» (глава VIII в настоящем издании). — *Прим. перев.*

В качестве следствия получаем, что нейтральные элементы решетки образуют дистрибутивную подрешетку. Гретцер получил более сильный результат: *стандартные* элементы любой решетки образуют в ней дистрибутивную подрешетку.

10. Решетки с начальными дополнениями

В этом разделе через L будет обозначаться произвольная решетка с начальными дополнениями (§ II.4). Такими решетками будут, например, модулярные решетки с дополнениями (теорема I.13), — они имеют особенно простое строение.

Вспомним, что конгруэнции θ на решетке L находятся во взаимно однозначном соответствии со стандартными идеалами (теорема II.6), которое устанавливается условием: $x \equiv y\,(\theta)$ тогда и только тогда, когда $(x \wedge y) \vee a = x \vee y \vee a$ для некоторого $a \in J$.

Если теперь L имеет конечную длину, то $J\,(\theta) = (s)$ будет *главным* идеалом с наибольшим элементом s. В этом случае $(x \wedge \wedge y) \vee a = x \vee y \vee a$ для некоторого $a \in (s)$ тогда и только тогда, когда $(x \wedge y) \vee s = x \vee y \vee s$, т. е. тогда и только тогда, когда s стандартен [1]). Тем самым доказана

Лемма 1. *В решетке с начальными дополнениями, имеющей конечную длину, $x \equiv y\,(\theta)$ в том и только в том случае, когда $(x \wedge y) \vee s = x \vee y \vee s$ для некоторого стандартного элемента s.*

Следствие 1. *Пусть s — наибольший элемент ядра $J\,(\theta)$ конгруэнции θ. Проектирующий эндоморфизм ψ_s: $x \to x \vee s$ устанавливает изоморфизм между фактор-решеткой L/θ и дуальным идеалом решетки L, состоящим из элементов $x \geqslant s$.*

Из двойственных соображений получается

Следствие 2. *В решетке конечной длины с относительными дополнениями пусть d будет наименьшим элементом «дуального ядра» для конгруэнции θ, т. е. дуального идеала $D\,(\theta)$, состоящего из всех $x \equiv I\,(\theta)$ в L. Тогда $x \equiv y\,(\theta)$ в том и только в том случае, когда $x \wedge d = y \wedge d$, и при этом проектирующий эндоморфизм φ_d: $x \to x \wedge d$ устанавливает изоморфизм между фактор-решеткой L/θ и идеалом $[O,\ d]$.*

Заметим, что для каждого x элемент $x \vee s$ будет наибольшим, а элемент $x \wedge d$ — наименьшим в классе конгруэнтности, содержащем x. Следовательно, $d \vee s = I$ и $s \wedge d = O$, т. е. элементы s и d являются дополнениями друг для друга. На самом деле, как мы сейчас покажем, s и d принадлежат центру решетки L.

В самом деле, если $x \wedge d = O$, то

$$s = O \vee s = (x \wedge d) \vee s = (x \vee s) \wedge (d \vee s) = x \vee s,$$

так что $x \leqslant s$. Другими словами, d является *псевдодополнением* для s (§ II.11). Кроме того, для *любого* $x \in L$ элемент $s \wedge x$

[1]) См. ниже упр. 3. — *Прим. перев.*

имеет относительное дополнение в $[O, x]$ — такое t, что $(s \wedge x) \wedge t = O$ и $(s \wedge x) \vee t = x$. Так как d является псевдодополнением для s, то $t = x \wedge t \leqslant d$. Но $t \leqslant x$, поэтому $t \leqslant d \wedge x$, откуда

$$x = (s \wedge x) \vee t \leqslant (s \wedge x) \vee (d \wedge x) \leqslant x.$$

Таким образом, соответствие $x \to (x \wedge s, x \wedge d)$ является изоморфизмом между L и произведением $[O, s]$ $[O, d]$. Итак, справедлива

Теорема 14 (Дилуорс[1]). *Решетка конечной длины с относительными дополнениями либо проста (т. е. не имеет собственных конгруэнций), либо разлагается в прямое произведение.*

Следствие 1. *Любая решетка конечной длины с относительными дополнениями разлагается в произведение простых решеток.*

Для модулярных решеток теорему Дилуорса можно получить независимо следующим образом. Если M — модулярная решетка конечной длины, то применима теорема II.5 [2]), и каждая конгруэнция на M будет ассоциирована с некоторым эндоморфизмом $x \to x \vee a$. Так как $(x \wedge y) \vee a = (x \vee a) \wedge (y \vee a)$, то по теореме II.12 $(a, x, y) D$, откуда следует, что a — нейтральный элемент. Но в решетке *с дополнениями* каждый нейтральный элемент принадлежит центру. Отсюда получаем

Следствие 2. *Модулярная решетка с дополнениями, имеющая конечную длину, разлагается в произведение простых модулярных решеток с дополнениями, также имеющих конечную длину.*

Мы закончим параграф неопубликованной леммой Яновица. Вслед за Маедой ([1], p. 20) будем писать $a \nabla b$ в решетке L, если $a \wedge b = O$ и $(a \vee x) \wedge b = x \wedge b$ для всех $x \in L$. Например, в модулярной решетке $a \nabla b$ тогда и только тогда, когда $a \wedge b = O$ и $(a, b) D$[3]). Интересный результат содержит

Лемма 2. *В решетке L с относительными дополнениями, содержащей O и I, следующие условия равносильны:* (i) $a \nabla b$; (ii) *b содержится в каждом дополнении элемента a;* (iii) *если $a_1 \leqslant a$, $b_1 \leqslant b$ и $a_1 \sim b_1$*[4]), *то $a_1 = b_1 = O$;* (iv) $x = (x \vee a) \wedge (x \vee b)$ *для всех $x \in L$.*

Доказательство. Из (i) следует (ii). Если c является дополнением для a, то $b = (a \vee c) \wedge b = c \wedge b$, откуда $b \leqslant c$.

---

[1]) Dilworth R. P.— Ann. Math., 1950, 51, p. 348—359. Эта работа содержит и много других интересных результатов в данном направлении. См. также статью Маклафлина (McLaughlin J. E. — Pacif. J. Math., 1953, 3, p. 197—208).

[2]) Лучше сослаться на теорему I.14 и следствие из теоремы II.6. — *Прим. перев.*

[3]) $(a, b) D$ означает, что $(a \vee b) \wedge x = (a \wedge x) \vee (b \wedge x)$ для любого $x \in L$. — *Прим. перев.*

[4]) $a \sim b$ означает, что элементы a и b имеют в решетке L общее дополнение c (см. § IV.6).

Из (ii) следует (iii). Пусть c будет общим дополнением для a_1 и b_1. Тогда $c \vee a \geqslant c \vee a_1 = I$. Пусть, далее, d — относительное дополнение для $a \wedge c$ в $[O, c]$, т. е. $d \wedge a \leqslant c \wedge a = O$ и $d \vee (a \wedge c) = c$. Так как $d \vee a \geqslant d \vee (c \wedge a) = c$, то $d \vee \vee a \geqslant c \vee a = I$. Следовательно, d является дополнением для a и, значит, согласно (ii) $b \leqslant d$. Тем более $b_1 \leqslant d$, так что $b_1 = b_1 \wedge d \leqslant b_1 \wedge c = O$, откуда $c = b_1 \vee c = I$ и $a_1 = a_1 \wedge \wedge I = a_1 \wedge c = O$.

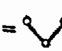
Из (iii) следует (iv). Для любого $x \in L$, очевидно, $(x \vee a) \wedge (x \vee b) \geqslant x$. Пусть y будет относительным дополнением для элемента $(x \vee a) \wedge (x \vee b)$ в $[x, I]$. Тогда $y \vee a = y \vee x \vee a \geqslant y \vee ((x \vee a) \wedge (x \vee b)) = I$ и, аналогично, $y \vee b = I$. Далее, $y \wedge a$ имеет относительное дополнение a_1 в $[O, a]$, а $y \wedge b$ — относительное дополнение b_1 в $[O, b]$. Тогда $y \vee a_1 \geqslant (y \wedge a) \vee a_1 = a$, откуда $y \vee a_1 \geqslant y \vee a = I$. Точно так же y оказывается дополнением для b_1. Но теперь согласно (iii) $a_1 = b_1 = O$, так что $y = I$, и значит, $x = (x \vee a) \wedge (x \vee b)$.

Из (iv) следует (i). Если $x = (x \vee a) \wedge (x \vee b)$ для всех $x \in L$, то $x \wedge b = (x \vee a) \wedge b$, чем и завершается доказательство.

Следствие. *В любой решетке с относительными дополнениями отношение $a \nabla b$ симметрично и при этом если $a \nabla b$ и $a_1 \leqslant a$, $b_1 \leqslant b$, то $a_1 \nabla b_1$.*

Упражнения к §§ 8—10

1. (а) Покажите, что N_5 содержит стандартный элемент, не являющийся нейтральным.

(б) Покажите, что решетка L_5 конгруэнций решетки N_5 есть 2^P, где $P =$ , и следовательно, не является булевой алгеброй.

2. (а) Докажите, что в решетке с относительными дополнениями каждый простой идеал максимален (см. теорему II.7).

(б) Докажите, что дистрибутивная решетка тогда и только тогда обладает дополнениями, когда каждый ее простой идеал максимален. (Нахбин и Монтейро; см. также у Хасимото [1, p. 162].)

3. Покажите, что в решетке L главный идеал $[O, a]$ стандартен тогда и только тогда, когда a — стандартный элемент.

4. (а) Покажите, что решетка на рис. 11, *а* содержит нестандартный элемент, который имеет единственное дополнение.

(б) Покажите, что существуют главные идеалы $[O, a]$, являющиеся прообразами элемента O при решеточных гомоморфизмах, но с не стандартным a (см. рис. 11, *б*).

5. Покажите, что всякое решеточное наложение переводит нейтральные элементы в нейтральные, а стандартные — в стандартные. Верно ли это для дуальных наложений?

6. (а) Покажите, что элемент n решетки L нейтрален тогда и только тогда, когда для всех $x, y \in L$

$$(n \wedge x) \vee (n \wedge y) \vee (x \wedge y) = (n \vee x) \wedge (n \vee y) \wedge (x \vee y).$$

(б) Покажите, что в решетке с дополнениями элемент нейтрален тогда и только тогда, когда он имеет единственное дополнение [1]).

---

[1]) Упр. 6 содержит результаты Хасимото и Кинугавы (Hashimoto, Kinugawa. — Proc. Japan Acad. Sci., 1963, 39, p. 162—163). Упр. 7—8

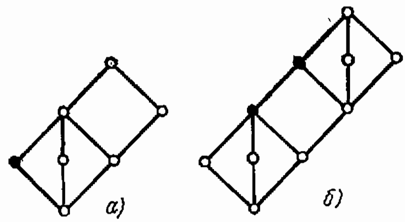


Рис. 11.

*7. Покажите, что элемент s решетки L стандартен тогда и только тогда, когда $x \wedge (s \vee y) = (x \wedge s) \vee (x \wedge y)$ для всех $x, y \in L$.

*8. Покажите, что стандартные элементы любой решетки образуют дистрибутивную подрешетку.

11. Лемма Швана. Независимость

В любой решетке L при заданных a, b функции φ_a: $x \to x \wedge a$ и ψ_b: $y \to y \vee b$ *изотонно* отображают соответственно $[b, a \vee b]$ в $[a \wedge b, a]$ и обратно. В модулярной решетке они являются взаимно обратными изоморфизмами (§ I.7). В общем случае ввиду модулярного неравенства (6) главы 1 $x\varphi_a\psi_b \leqslant x$ для всех $x \in \in [b, a \vee b]$ и $y \leqslant y\psi_b\varphi_a$ для всех $y \in [a \wedge b, a]$. Так как φ_a отображает $[b, a \vee b]$ в $[a \wedge b, a]$, а ψ_b отображает $[a \wedge b, a]$ в $[b, a \vee b]$, то

(13) $$\varphi_a\psi_b\varphi_a = \varphi_a \text{ на } [b, a \vee b]$$

и

(13′) $$\psi_b\varphi_a\psi_b = \psi_b \text{ на } [a \wedge b, a].$$

Отсюда следует простой, но очень важный результат[1]).

Лемма Швана. *В любой решетке функции* φ_a: $x \to x \wedge a$ *и* ψ_b: $y \to y \vee b$ *являются изотонными отображениями соответственно* $[b, a \vee b]$ *в* $[a \wedge b, a]$ *и обратно и при этом выполняются условия* (13) *и* (13′).

В *модулярной* решетке неравенства, установленные в начале параграфа, становятся тождествами и отсюда как частный случай получается классический принцип транспозиции Дедекинда (теорема I.13). Сейчас мы более детально рассмотрим некоторые следствия принципа транспозиции Дедекинда в произвольных модулярных решетках.

Теорема 15. *Подрешетка модулярной решетки, порожденная интервалами* $U = [u \wedge v, u]$ *и* $V = [u \wedge v, v]$, *является кардинальным произведением* UV.

связаны с работами Гретцера и Шмидта (Grätzer G., Schmidt E. T. — Acta Math. Acad. Sci. Hung., 1961, 12, p. 17—86) и Яновица (Janowitz M. F. — Acta Math. Acad. Sci. Hung., 1965, 16, p. 289—301).

[1]) Schwan W. — Math. Z., 1948, 51, S. 126—134, 346—354.

Доказательство. Пусть (x, y) обозначает элемент $x \vee y$ при любых $x \in U$, $y \in V$. Тогда согласно L2—L3 для любых $x, x' \in U$ и $y, y' \in V$ будет

$$(x, y) \vee (x', y') = x \vee y \vee x' \vee y' = \\ = (x \vee x') \vee (y \vee y') = (x \vee x', y \vee y').$$

Кроме того, применяя теорему I.13 и условие L5, получаем

$$(x, y) = x \vee y = [(v \vee x)] \wedge y = (v \vee x) \wedge (u \vee y).$$

Значит, $(x, y) \wedge (x', y') = [(v \vee x) \wedge (v \vee x')] \wedge [(u \vee y) \wedge (u \vee y')]$ ввиду L2—L3. Снова используем теорему I.13: $(v \vee x) \wedge (v \vee x') = v \vee (x \wedge x')$, $(u \vee y) \wedge (u \vee y') = u \vee (y \wedge y')$. Поэтому

$$(x, y) \wedge (x', y') = [v \vee (x \wedge x')] \wedge [u \vee (y \wedge y')] = (x \wedge x', y \wedge y').$$

Этим и завершается доказательство.

В частности, полагая $u = a \vee c$ и $v = b \vee d$ и замечая, что в любой решетке двухэлементное подмножество, например, $\{a, c\}$ или $\{b, d\}$, порождает дистрибутивную подрешетку, мы получаем

Следствие 1. *В любой модулярной решетке, если* $(a \vee c) \wedge (b \vee d) = O$, *то*

$$(a \vee b) \wedge (c \vee d) = (a \wedge c) \vee (b \wedge d).$$

Детали оставляем читателю. Из теоремы 15 индукцией выводится

Следствие 2. *Если в модулярной решетке* $(x_1 \vee \cdots \vee x_k) \wedge x_{k+1} = a$ *для* $k = 1, \ldots, n-1$, *то подрешетка, порожденная в ней интервалами* $X_k = [a, x_k]$, *совпадает с произведением* $X_1 X_2 \ldots X_n$.

Так как, по определению, $X_1 X_2 \ldots X_n$ симметрично относительно индексов, то условие, сформулированное в следствии 2, инвариантно относительно всех перестановок индексов, и значит, корректно следующее

Определение. Если для элементов $x_1, \ldots, x_n$ выполняется условие следствия 2, то они называются *независимыми* над a.

Используя понятие независимости, мы можем доказать еще одну лемму, простую, но полезную в теории решеток фон Неймана (глава XI).

Лемма фон Неймана — Гальперина. *Пусть* x *и* $a \leqslant b$ — *элементы модулярной решетки* M *с дополнениями. Тогда существует относительное дополнение* y *для* a *в* b *такое, что* $x = (x \vee y) \wedge (x \vee a)$.

Доказательство. Если $x_1 = x \wedge a$, x_2 — относительное дополнение для $x \wedge a$ в $x \wedge b$, y_1 — относительное дополнение для $a \wedge x$ в a, y_2 — относительное дополнение для $a \vee x_2$ в b, то x_1, x_2, y_1, y_2 независимы[1]) и потому элемент $y = x_2 \vee y_2$ обладает требуемым свойством.

12. Перспективность. Теорема Куроша—Оре

В модулярной решетке *с дополнениями* вместо транспонированных интервалов можно рассматривать перспективные элементы. Приступая к обоснованию этого, докажем одну лемму.

Лемма 1. *«Разности» $d_k = x'_{k-1} \wedge x_k$ между двумя последовательными членами произвольной цепи $O = x_0 < x_1 < \ldots < x_s$ являются независимыми (над O) элементами, объединение которых равно x_s. (Заметим, что дополнения x'_{k-1} не обязательно единственны.)*

Доказательство. Очевидно, что $d_1 = x'_0 \wedge x_1 = I \wedge x_1 = x_1$. Дальше движемся индукцией по k. Пусть $d_1 \vee \ldots \vee d_k = x_k$. Тогда

$$\bigvee_{i=1}^{k+1} d_i = x_k \vee d_{k+1} = x_k \vee (x'_k \wedge x_{k+1}) =$$
$$= (x_k \vee x'_k) \wedge x_{k+1} = I \wedge x_{k+1} = x_{k+1}.$$

Элементы d_k независимы над O, так как для $k = 1, 2, \ldots, s-1$ $(d_1 \vee d_2 \vee \ldots \vee d_k) \wedge d_{k+1} = x_k \wedge d_{k+1} = x_k \wedge x'_k \wedge x_{k+1} = O \wedge x_{k+1} = O$.

Определение. Два элемента a и b модулярной решетки с дополнениями называются *перспективными*, если они имеют общее дополнение c, называемое «осью перспективы» для a и b.

В любой конечномерной модулярной решетке с дополнениями, как будет показано в главе IV, перспективность является отношением эквивалентности. Она очевидным образом рефлексивна и симметрична в любой модулярной решетке с дополнениями, так что суть дела заключается в том, будет ли перспективность *транзитивной* (см. § IV.6). Так как в модулярной решетке из $a \leqslant b$, $a \wedge c = b \wedge c$ и $a \vee c = b \vee c$ следует равенство $a = b$ (в противном случае эти элементы порождают N_5), то ясно, что ни один элемент модулярной решетки не может быть перспективным со своей собственной частью.

С другой стороны, если элементы a и b перспективны, то интервалы $[O, a]$ и $[O, b]$ проективны посредством интервала $[c, I]$, который является транспонированным по отношению к ним обоим. Поэтому, если перспективность транзитивна, то элементы a и b перспективны тогда и только тогда, когда интервалы $[O, a]$ и $[O, b]$ проективны. Приведем пример, в котором указанное условие нарушается.

---

[1]) Над нулем. — *Прим. перев.*

Пример 2. Пусть M — модулярная решетка с дополнениями всех подгрупп абелевой группы $A = Z_2^\omega$ (прямое произведение счетного числа циклических групп порядка два). Тогда любые две подгруппы $S \subset A$ и $T \subset A$ бесконечного порядка и индекса являются проективными [1]) в M (будучи связанными последовательностью перспектив) и в то же время существуют две такие подгруппы, что $S \prec T$.

Более общую ситуацию описывает

Лемма 2. *Пусть M — решетка всех подпространств счетномерного векторного пространства V над некоторым полем F. Любые два идеала $[O, a]$ и $[O, b]$, имеющие бесконечную размерность и бесконечномерные дополнения, проективны в M.*

Доказательство. Сначала заметим, что если подпространства A и B, представленные в M элементами a и b соответственно, таковы, что $A \wedge B = O$, то существует изоморфизм θ: $A \to B$, а «диагональное» подпространство D, состоящее из всех сумм вида $x + \theta(x)$ (где $x \in A$), является общим относительным дополнением для A и B в $A \vee B$. Следовательно, если C — какое-нибудь дополнение для $A \vee B$, то $C \vee D$ будет общим дополнением для A и B, которые, таким образом, оказываются перспективными с осью перспективы $C \vee D$.

Доказательство легко переносится на случай, когда $A/A \wedge B$ и $B/A \wedge B$ оба бесконечномерны, продолжением перспективы с относительного дополнения A' для $A \wedge B$ в A на относительное дополнение B' для $A \wedge B$ в B. Наконец, если $A/A \wedge B$ или $B/A \wedge B$ конечномерно, то $A \vee B$ имеет бесконечномерное дополнение C_1; оно пересекается по нулю и с A, и с B, и следовательно, перспективно обоим.

Теорема Куроша—Оре. Покажем теперь, что несократимое представление элемента a дистрибутивной решетки в виде объединения $\vee$-неразложимых элементов, существование и единственность которого были установлены в § 3, имеет аналог в модулярных решетках. Эта ослабленная теорема единственности относится лишь к *числу* компонент такого разложения. В доказательстве ее снова используется принцип транспозиции Дедекинда (теорема I.13).

Теорема 16. *Пусть $a = x_1 \wedge \ldots \wedge x_r = x_1^* \wedge \ldots \wedge x_s^*$ — несократимые разложения элемента a на неразложимые компоненты. Тогда можно заменить произвольно выбранный элемент x_i на подходящий x_j^* и снова получится разложение элемента a.*

Доказательство. Положим $y_i = x_1 \wedge \ldots \wedge x_{i-1} \wedge \wedge x_{i+1} \wedge \ldots \wedge x_r$. Конечно, $x_i \wedge y_i = a$, а в силу несократимости разложения $y_i > a$. Теперь построим $z_j = y_i \wedge x_j^*$. Очевидно, что $y_i \geqslant z_j \geqslant a$, а так как $z_j \leqslant x_j^*$, то

$$a \leqslant z_1 \wedge \ldots \wedge z_s \leqslant x_1^* \wedge \ldots \wedge x_s^* \leqslant a.$$

[1]) То есть проективны интервалы $[O, S]$ и $[O, T]$, где O — нулевая подгруппа. — *Прим. перев.*

Но по теореме I.13 интервал между $a = x_i \wedge y_i$ и y_i изоморфен интервалу между x_i и $x_i \vee y_i$. Поскольку элемент x_i неразложим в этом последнем интервале, то элемент a будет неразложимым в первом. Значит, a совпадает с одним из z_j и

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_{i-1} \wedge x_j^* \wedge x_{i+1} \wedge \ldots \wedge x_r = a.$$

Теорема 17. *Число компонент в несократимых разложениях любого элемента не зависит от разложения (в теореме* 16 $r = s$).

Доказательство. Будем считать, что r не больше s, и по очереди заменим элементы x_i на подходящие x_j^*. В конце концов получится $a = x_{j(1)}^* \wedge \ldots \wedge x_{j(r)}^*$, где в силу несократимости встретятся по крайней мере s штук элементов вида $j(i)$. Значит, $s \leqslant r$, откуда $s = r$.

Упражнения к §§ 11—12

1. (а) Покажите, что на диаграмме модулярной решетки конечной длины противоположные стороны четырехугольников представляют транспонированные интервалы.

(б) Покажите, что два простых интервала проективны тогда и только тогда, когда от одного к другому можно перейти за конечное число шагов, заменяя на каждом шаге одну из сторон четырехугольника диаграммы его противоположной стороной.

2. Покажите, что в модулярной решетке элемент c является относительным дополнением для a в b (где $a \leqslant b$) тогда и только тогда, когда $c = a' \wedge b$ для некоторого дополнения a' элемента a.

3. Покажите, что a и b перспективны в модулярной решетке, если существует элемент d такой, что $a \wedge d = b \wedge d = O$ и $a \vee d = b \vee d$.

4. Покажите, что в дистрибутивной решетке любое произведение эндоморфизмов вида $x \to x \vee c$ или $x \to x \wedge c$ можно записать в виде $x \to (x \vee a) \wedge b$ при подходящих a, b.

5. (а) Используя упр. 4, докажите, что если в дистрибутивной решетке интервалы $[x, y]$ и $[x_1, y_1]$ проективны, то $x_1 = (x \vee a) \wedge b$ и $y_1 = (y \vee a) \wedge b$ при некоторых a, b.

(б) Убедитесь, что в *дистрибутивной решетке никакой интервал не проективен своему собственному подинтервалу.*

6. (а) Покажите, что для любых элементов a, b решетки L соответствие $x \to [(a \wedge b) \vee x] \wedge [a \vee b]$ является изотонным и идемпотентным отображением L на $[a \wedge b, a \vee b]$.

(б) Покажите, что если θ и φ являются изотонными преобразованиями у-множества P, то множество неподвижных точек произведения $\theta\varphi$ изоморфно [1]) множеству неподвижных точек для $\varphi\theta$ (Шван).

*7. Для произвольных элементов a, b решетки L пусть $a/a \wedge b$ обозначает множество всех $x = (x \vee b) \wedge a$, а $a \vee b/b$ — двойственное множество всех $y = (y \wedge a) \vee b$. Покажите, что $a/a \wedge b$ и $a \vee b/b$ всегда будут изоморфными решетками, хотя не обязательно подрешетками в L. Покажите, что L5 равносильно тождеству $a/a \wedge b = a/a \wedge b$ (Шван).

8. Покажите, что в доказательстве теоремы 16 элементы y_i на самом деле независимы над a.

9. Покажите, что в теореме 16 можно так перенумеровать элементы x_j^*, чтобы каждый x_i^* можно было заменить на x_i, $i = 1, \ldots, r$.

---

[1]) Как у-множество. — *Прим. перев.*

*10. (а) Покажите, что в теореме 16 для любого x_i существует x_j^*, который взаимно заменим с x_i.

(б) Покажите, что в общем случае не существует такой нумерации, чтобы при всех i элементы x_i^* были взаимно заменимы с x_i.

11. (а) Покажите, что заключение теоремы Куроша—Оре [1]) неверно в полумодулярной решетке, изображенной на рис. 12.

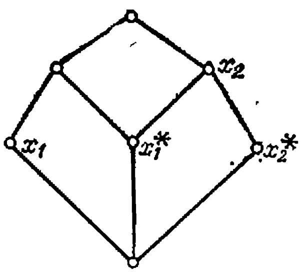


Рис. 12.

(*б) Покажите, что заключение теоремы Куроша—Оре истинно в конечной полумодулярной решетке M тогда и только тогда, когда подрешетка $L(a)$, порожденная элементами p_i, покрывающими произвольный элемент $a \in M$, модулярна [2]).

*12. (а) Покажите, что если в полумодулярной решетке L $y \wedge z \leqslant x \leqslant z$, то в L существует элемент t такой, что $y \wedge z < t \leqslant y$ и $x = (x \vee t) \wedge z$.

(б) Покажите, что если элемент a полумодулярной решетки L $\wedge$-неразложим, то из $a \wedge c = b \wedge c$ и $a > b$ следует, что $b \geqslant c$ (Лезье [1, p. 179, задача 7.1]).

13. Покажите, что заключение теоремы 15 остается верным, если uCv в ортомодулярной решетке (§ II.14).

13. Нейтральные элементы в модулярных решетках

Нейтральные (т. е. дистрибутивные) элементы в модулярных решетках с дополнениями имеют много специфических свойств. Прежде всего, лемма 2 из § 9 может быть усилена:

Лемма. *В модулярной решетке элемент a нейтрален, если $x \to x \vee a$ или $x \to x \wedge a$ является эндоморфизмом.*

В самом деле, любое из соотношений дистрибутивности между a, x, y влечет все шесть, и теперь применяется лемма 1 из § 9.

Следствие. *В модулярной решетке с дополнениями элемент a принадлежит центру, если $x \to x \vee a$ или $x \to x \wedge a$ является эндоморфизмом.*

Теорема 18 (фон Нейман [3]). *Элемент принадлежит центру модулярной решетки с дополнениями L тогда и только тогда, когда он имеет единственное дополнение.*

Доказательство. В любой решетке $L = M \times N$ элемент $[I, O]$ может иметь дополнением только $[O, I]$, поэтому никакой элемент центра не может иметь более одного дополнения. С другой стороны, предположим, что a имеет единственное дополнение a' и что $u \wedge a = O$. Тогда, по предположению, u, a и любое дополнение $(u \vee a)'$ для $u \vee a$ будут независимыми элементами, объединение которых равно I. Значит, $u \vee (u \vee a)' = a'$ и $u \leqslant a'$. Таким образом, a' содержит все u такие, что $u \wedge a = O$.

[1]) То есть теоремы 17. — *Прим. перев.*

[2]) См. работы Дилуорса (Dilworth R. P.— Duke Math., 1941, 8, p. 286—299; Trans. AMS, 1941, 49, p. 325—353).

[3]) [Neu, часть I, теоремы 5.3—5.4]. См. упр. 6 (б) к § 10.

В частности, так как $[(a \wedge x)' \wedge x] \wedge a = O$ независимо от выбора x, то $(a \wedge x)' \wedge x$ содержится одновременно в a' и в x, откуда

$$x = (a \wedge x) \vee [(a \wedge x)' \wedge x] \leqslant (a \wedge x) \vee (a' \wedge x) \leqslant x \vee x = x.$$

Следовательно, $x = (a \wedge x) \vee (a' \wedge x)$ и каждый $x \in L$ можно записать в виде $y \vee z$, $y \leqslant a$, $z \leqslant a'$. По теореме 15 $L = [O, a] \times [O, a']$. Ч. т. д.

Теорема 19. *В модулярной решетке с дополнениями L два элемента a и b связаны последовательностью перспектив тогда и только тогда, когда идеалы $[O, a]$ и $[O, b]$ проективны.*

Доказательство. Если a и b перспективны с осью c, то $[O, a]$, $[c, I]$ и $[O, b]$ являются транспонированными в указанном порядке, и следовательно, $[O, a]$ и $[O, b]$ проективны. Так как проективность является транзитивным отношением, то $[O, a]$ и $[O, b]$ проективны (в смысле § I.7), если их можно связать последовательностью перспектив. Обратно, пусть $[O, a]$ и $[O, b]$ проективны и пусть $[u \wedge v, v]$ и $[u, u \vee v]$ будут какими-нибудь соседними интервалами в последовательности транспонированных интервалов, связывающих (по определению) $[O, a]$ и $[O, b]$. Тогда любые относительные дополнения w для $u \wedge v$ в v и w_1 для u в $u \vee v$ перспективны, и осью является любой элемент $(u \vee v)' \vee t$, где t — произвольное относительное дополнение для $u \wedge v$ в u. (Доказательство. Рассмотрите цепи $O \leqslant u \wedge v \leqslant u \leqslant u \vee v \leqslant I$ и $O \leqslant u \wedge v \leqslant v \leqslant u \vee v \leqslant I$.) Следовательно, по индукции, любые относительные дополнения элемента O в a и элемента O в b связаны последовательностью перспектив. Но a и b являются единственными относительными дополнениями для O в $[O, a]$ и в $[O, b]$ соответственно. Ч. т. д.

Теорема 20. *В модулярной решетке L с дополнениями конгруэнции находятся во взаимно однозначном соответствии с нейтральными идеалами N из L, т. е. с идеалами, содержащими вместе с каждым своим элементом все элементы, перспективные ему.*

Доказательство. Предположим, что идеал N определяет конгруэнцию на L, как в теореме II.3, что $a \in N$ и что a и b перспективны с осью перспективы c. Тогда

$$b = b \wedge I = b \wedge (a \vee c) \equiv b \wedge c = O \pmod N.$$

Значит, $b \in N$, и потому N нейтрален. Обратно, пусть N — нейтральный идеал и $x \equiv y$ означает, что $x \vee a = y \vee a$ для некоторого $a \in N$. Это отношение эквивалентности и, более того, $\vee$-конгруэнция, какими бы ни были идеал N и решетка L (§ II.4, лемма 1). Мы хотим доказать, что в модулярной решетке с дополнениями, если идеал N нейтрален, то из $x \equiv y$ следует, что $x \wedge u \equiv y \wedge u$. Поскольку мы имеем дело с отношением эквивалентности и $x \equiv x \vee a = y \vee a \equiv y$, мы можем ограничиться случаем $y = x \vee a$, т. е. достаточно показать, что

$$(x \wedge u) \vee a \equiv [(x \vee a) \wedge u] \vee a = (x \vee a) \wedge (u \vee a)$$

в любой модулярной решетке. Но в самом деле, если положить $u = y$ и $a = z$, то все сводится к доказательству соотношения $w^* \equiv c^*$ в свободной модулярной решетке с тремя порождающими (рис. 10, a). Анализ показывает, однако, что интервал $[c^*, w^*]$ проективен части элемента[1] $z = a$. Тогда по теореме 19 z и некоторый элемент d, который содержит $w^* \wedge c^{*\prime}$ (где $c^{*\prime}$ — любое из дополнений для c^* в L), будут перспективными. Следовательно, $w^* \wedge c^{*\prime} \in N$ и $c^* \equiv c^* \vee (c^{*\prime} \wedge w^*) = w^*$, чем и завершается доказательство.

Упражнения

1. Покажите, что идеал модулярной решетки с дополнениями нейтрален[2] тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию теоремы 20.

2. Постройте модулярную решетку с десятью элементами, которая содержала бы 3^2 в качестве подрешетки и имела бы элемент, обладающий единственным дополнением и в то же время не нейтральный (М. Холл).

ПРОБЛЕМЫ

7. Найти естественное расширение понятий нейтрального элемента и стандартного идеала на общий случай у-множеств.

8. φ-подрешетка решетки L определяется как пересечение $\varphi(L)$ всех ее максимальных собственных подрешеток. Найти условия, которым должна удовлетворять решетка L, чтобы $\varphi(L)$ была пустой[3].

9. Верно ли, что каждое истинное равенство для операций кардинального сложения, умножения и возведения в степень следует из тождеств (1)—(4) теоремы 2? Если присоединить еще дуализацию, то будут ли (1)—(5) составлять полную систему тождеств (i) для класса всех у-множеств; (ii) для положительных действительных чисел; (iii) для положительных целых чисел?

10. Описать алгоритм для приведения произвольного булева многочлена к наикратчайшей форме, т. е. к виду, содержащему наименьшее число входящих букв[4].

11. Каков порядок $f(n)$ для 2^{2^n}? Описать асимптотическое поведение $\log \log f(n)$ при больших n[5].

---

[1] То есть подинтервалу интервала $[O, a]$. — *Прим. перев.*

[2] В смысле примечания к упр. 9 из § II.4. — *Прим. перев.*

[3] Подрешетка $\varphi(L)$ называется подрешеткой Фраттини решетки L. Проблема 8 выступала в [LT2] в качестве упр. 9 к § II.4. Частичное решение (для случая обрыва в L возрастающих или убывающих цепей) дал Ко (К о К.-М. — Algebra univers., 1971, 1, № 1, p. 104—116). — *Прим. перев.*

[4] О связанной с этим проблеме см. у Барти (B a r t e e T. — IRE Trans. EC-10, 1961, p. 21—26).

[5] См. К о р о б к о в В. К. — Докл. АН СССР, 1963, 150, с. 744—747. [Алгоритм, позволяющий вычислять $f(n)$, нашли Берман и Келер (B e r m a n J., K ö h l e r P. — Mitt. Math. Sem. Giessen, 1976, № 121, p. 103—124). Асимптотическую формулу для $f(n)$ вывел К о р ш у н о в А. Д. — Докл. АН СССР, 1977, 233, с. 543—546. — *Прим. перев.*]

ГЛАВА IV

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ

1. Введение

Идея рассматривать различные совокупности точек, прямых, плоскостей и т. д. как геометрические «конфигурации», упорядоченные теоретико-множественным включением, далеко не нова. Многие важные конфигурации подобного рода представляют собой геометрические (или матроидные) решетки в смысле следующего определения [1]).

Определение. *Точечной* (или «атомно порожденной») называется решетка, в которой каждый элемент является объединением точек. *Геометрическая решетка* (или «матроидная решетка») — это конечномерная полумодулярная (сверху) точечная решетка.

Пример 1. Аффинные подпространства (включая пустое подмножество) n-мерного векторного пространства $D^n \cong V_n(D)$ над некоторым полем или телом D образуют немодулярную геометрическую решетку $AG_n(D)$.

Пример 2. В «аффинной» геометрической решетке $AG_n(D)$ «линейные» подпространства, содержащие начало, образуют *модулярную* геометрическую решетку $PG_{n-1}(D)$, называемую $(n-1)$-мерной проективной геометрией над D (см. ниже § 7). Если $D = \mathbf{Z}_p$ (поле вычетов по $\operatorname{mod} p$), то решетка $PG_{n-1}(\mathbf{Z}_p)$ изоморфна решетке всех подгрупп аддитивной группы $\mathbf{Z}_p^n$.

Заметим, что в решетке $AG_n(D)$ высота $h[x]$ (§ I.3) любого элемента на единицу больше геометрической размерности соответствующего аффинного подпространства: «точки» имеют высоту один, «прямые» — высоту два и т. д. В то же время в $PG_{n-1}(D)$ теоретико-решеточная высота элемента совпадает с геометрической размерностью соответствующего подпространства [2]). Если же, как в проективной геометрии, переименовать прямые из $PG_{n-1}(D)$ в «точки», плоскости — в «прямые» и т. д., то высота снова будет

---

[1]) Birkhoff G. — Amer. J. Math., 1935, 57, p. 800—804. Эта работа была стимулирована введенным Уитни (Whitney H. — Amer. J. Math., 1935, 57, p. 509—533) понятием матроида, которое автор воспринял как естественное обобщение понятия конечномерной модулярной решетки с дополнениями. Менгер, Альт и Шрейбер независимо развивали очень близкие идеи в 1928—1935 гг. — см. Менгер [1].

[2]) Этим оправдывается равноправное в настоящей главе употребление символов $h[x]$ и $d[x]$ для высоты элемента x. — *Прим. перев.*

превышать на единицу проективную геометрическую размерность.

Другой интересной геометрической решеткой, которая в явном виде не возникает в геометрии, является симметрическая решетка разбиений Π_n степени n (§ I.8, пример 9). Она будет изучаться ниже в § 9.

Геометрические решетки в приведенных примерах обладают высокой степенью симметрии. Так, группы автоморфизмов решеток вида $PG_{n-1}(D)$, если их рассматривать как группы перестановок, действуют транзитивно на элементах любой заданной размерности и трижды транзитивно на точках любой «прямой». Группы же автоморфизмов решеток вида $AG_n(D)$ действуют транзитивно на элементах любой заданной размерности и дважды транзитивно на точках любой прямой. Наконец, группа автоморфизмов решетки Π_n представляет собой симметрическую группу степени n.

В теоремах 14—15 из § II.8 было показано, что решетка конечной длины тогда и только тогда полумодулярна, когда она удовлетворяет цепному условию Жордана—Дедекинда (т. е. когда она *градуируема*) и, кроме того,

(1) $$h[x] + h[y] \geqslant h[x \wedge y] + h[x \vee y].$$

Это важное неравенство имеет несколько полезных следствий.

Так, если учесть, что $h[x \wedge y] \geqslant 0$, то из (1) вытекает неравенство $h[x \vee y] \leqslant h[x] + h[y]$, и следовательно (по индукции)

(2) $$h[x_1 \vee \ldots \vee x_n] \leqslant h[x_1] + \ldots + h[x_n].$$

Из (2) также получается условие (ξ), введенное в § I.7.

Следствие 1. *Решетка конечной длины полумодулярна тогда и только тогда, когда для любых элементов x, y справедливо:*

(3) *если x покрывает $x \wedge y$, то $x \vee y$ покрывает y.*

Следствие 2. *Если $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ — связная цепь в полумодулярной решетке, то область изменения функции ψ_a: $x_i \to x_i \vee a$ также является связной цепью (может быть, более короткой).*

Следствие 3. *В полумодулярной решетке конечной длины имеет место:*

(4) *если p — точка, то $p \leqslant a$ или $a \vee p$ покрывает a.*

Доказательство. $p \wedge a \leqslant p$. Если $p \wedge a = p$, то $p \leqslant a$. Если $p \wedge a < p$, то $p \wedge a = O$. Тогда, согласно (2), $h[p \vee a] \leqslant h[p] + h[a] = 1 + h[a]$. Так как $p \nleqslant a$, то $h[p \vee a] \neq h[a]$, откуда $h[p \vee a] = h[a] + 1$.

Следствие 4. *В полумодулярной решетке конечной длины выполнено условие:*

(5) *если p, q — точки и $a < a \vee q \leqslant a \vee p$, то $a \vee p = a \vee q$.*

Доказательство вытекает из следствия 3.

Соотношение (5) называют аксиомой о замене Штейница—Маклейна.

2. Модулярные пары

Теперь введем основное понятие модулярной пары[1]), которое связано с построениями Швана, рассматривавшимися в § III.11. Как было отмечено там, каждая упорядоченная пара элементов a, b решетки L определяет четыре *изотонные* функции: ψ_a: $x \to x \vee a$, отображающая интервал $[a \wedge b, b]$ в интервал $[a, a \vee b]$, ψ_b: $x \to x \vee b$, отображающая $[a \wedge b, a]$ в $[b, a \vee b]$, φ_a: $x \to x \wedge a$, заданная на $[b, a \vee b]$ и со значениями в $[a \wedge b, b]$, и φ_b: $x \to x \wedge b$ с областью определения $[a, a \vee b]$ и со значениями в $[a \wedge b, b]$. Кроме того, $\varphi_a\psi_b\varphi_a = \varphi_a$ и $\psi_b\varphi_a\psi_b = \psi_b$. В модулярных решетках все эти функции по теореме Дедекинда I.13 являются взаимно однозначными соответствиями, причем $\psi_b = \varphi_a^{-1}$ и $\psi_a = \varphi_b^{-1}$ (двусторонняя обратимость).

Определение. Говорят, что (a, b) является *модулярной парой* в решетке L, и пишут aMb или $(a, b)\,M$, если

(6) $x = (x \vee a) \wedge b = x\psi_a\varphi_b$ для всех $x \in [a \wedge b, b]$.

Лемма 1. *aMb тогда и только тогда, когда*

(7) *из $t \leqslant b$ следует, что $t \vee (a \wedge b) = (t \vee a) \wedge b$.*

Доказательство. Для $t \in [a \wedge b, b]$ имеем $t \vee (a \wedge b) = t$ и потому из (7) следует (6). Обратно, если выполняется (6) и $t \leqslant b$, то полагая $x = t \vee (a \wedge b) \in [a \wedge b, b]$, мы получаем, что

$$x = t \vee (a \wedge b) = [t \vee (a \wedge b) \vee a] \wedge b = [t \vee a] \wedge b$$

(здесь второе равенство вытекает из (6)). Этим и доказывается (7).

Следствие. *Решетка L модулярна тогда и только тогда, когда aMb для всех a, $b \in L$.*

Двойственное для *aMb отношение aM^*b* определяется условием

(6′) $y = (y \wedge a) \vee b = y\varphi_a\psi_b$ для всех $y \in [b, a \vee b]$.

Очевидно, что ψ_a и φ_b являются взаимно обратными изоморфизмами тогда и только тогда, когда одновременно aMb и bM^*a. Отсюда вытекает

Лемма 2. *Если в решетке L одновременно имеет место aMb и bM^*a, то интервалы $[a \wedge b, b]$ и $[a, a \vee b]$ изоморфны.*

---

[1]) Это понятие введено Уилкоксом (W i l c o x L. R. — Ann. Math., 1939, **40**, p. 490—505), который употреблял терминологию, двойственную нашей. [Автор следовал Уилкоксу в [LT2]. В оригинале настоящего издания переход к новым обозначениям осуществляется очень непоследовательно. — *Прим. перев.*]

В общем случае условие aMb влечет взаимную однозначность отображения ψ_a (т. е. то, что оно является порядковым вложением). В частности, ψ_a будет переводить цепи длины n из $[a \wedge b, b]$ в цепи той же длины в $[a, a \vee b]$. Поэтому если $[a \wedge b, a \vee b]$ является интервалом *конечной длины* в решетке, удовлетворяющей цепному условию Жордана—Дедекинда, то из aMb следует, что $h[b] - h[a \wedge b] \leqslant h[a \vee b] - h[a]$. Перенося соответствующие члены из одной части неравенства в другую, получаем следующий результат.

Теорема 1. *В любой решетке L конечной длины, удовлетворяющей цепному условию Жордана—Дедекинда, из aMb следует, что*

$$h[a] + h[b] \leqslant h[a \wedge b] + h[a \vee b]. \tag{8}$$

Эта теорема применима, в частности, к *полумодулярным* (сверху) решеткам конечной длины. Но в них, согласно (1), выполняется неравенство, обратное для (8). Значит, из aMb следует равенство $h[a] + h[b] = h[a \wedge b] + h[a \vee b]$. Покажем, что верно и обратное. Сначала устанавливается

Лемма 3. *В любой решетке следующие утверждения равносильны:* (i) aMb; (ii) ψ_a *взаимно однозначно*; (iii) φ_b *является наложением.*

Доказательство. Для того чтобы произведение $\psi_a\varphi_b$ было тождественным на $[a \wedge b, b]$, в любом случае ψ_a должно быть взаимно однозначным, а φ_b — наложением, так что (ii) и (iii) выводятся из (i) почти тривиально. Более тонкие обратные импликации следуют из соотношений леммы Швана (§ III.11)

$$\psi_a\varphi_b\psi_a = \psi_a \quad \text{и} \quad \varphi_b\psi_a\varphi_b = \varphi_b. \tag{9}$$

Поэтому если aMb не имеет места, то $x < (x \vee a) \wedge b = x'$ для некоторого $x \in [a \wedge b, b]$, хотя $x'\psi_a = x\psi_a\varphi_b\psi_a = x\psi_a$, и значит, ψ_a не является взаимно однозначным. Так что из (ii) следует (i). Наконец, если φ_b является наложением, то $x = y\varphi_b = y\varphi_b\psi_a\varphi_b = x\psi_a\varphi_b$ для всех $x \in [a \wedge b, b]$, откуда aMb, и таким образом, (i) выводится из (iii).

Теорема 2. *В полумодулярной (сверху) решетке L конечной длины aMb тогда и только тогда, когда*

$$h[a] + h[b] = h[a \wedge b] + h[a \vee b]. \tag{10}$$

Доказательство. Импликация $aMb \Rightarrow (10)$ уже доказана. Для доказательства обратного утверждения предположим, что aMb не выполняется. Тогда по лемме 3 $\vee$-гомоморфизм ψ_a не является взаимно однозначным, и следовательно, он должен отображать какие-то различные элементы x и $x \vee z > x$ какой-нибудь связной цепи из $[a \wedge b, b]$ в один и тот же элемент $y = x\psi_a$ из $[a, a \vee b]$. Но ввиду следствия 2 из § 1 ψ_a переводит связные цепи интервала $[a \wedge b, b]$ в связные цепи интервала $[a,$

$a \vee b]$. Значит, если aMb не выполняется, то связные цепи, соединяющие $a \wedge b$ и b и проходящие через x и $x \vee z$, укорачиваются при отображении φ_a, и потому

$$h[b] - h[a \wedge b] > h[a \vee b] - h[a].$$

Следствие 1. *В любой полумодулярной (сверху) решетке конечной длины из aMb следует bMa.*

Следствие 2. *В любой полумодулярной снизу решетке L конечной длины из aM^*b следует bM^*a.*

Эти два результата позволяют следующим образом перенести понятие полумодулярности на решетки бесконечной длины.

Определение. Решетка L называется *полумодулярной*, если из aMb следует bMa для всех $a, b \in L$. Она называется полумодулярной *снизу* (или «дуально полумодулярной»), если из aM^*b следует bM^*a для всех $a, b \in L$.

3. Примеры

Хотя каждая немодулярная решетка содержит пятиэлементную подрешетку, которая не является полумодулярной (теорема I.12), имеет место очевидная

Лемма 1. *Любая выпуклая подрешетка полумодулярной решетки полумодулярна.*

Менее тривиальным результатом является

Лемма 2. *Пусть $L = L_1L_2$ — кардинальное произведение решеток L_1 и L_2. Тогда $(a_1, a_2)\ M\ (b_1, b_2)$ в L тогда и только тогда, когда a_iMb_i в L_i для $i = 1, 2$.*

Доказательство. Так как при любом фиксированном c_1 множество всех пар (c_1, x_2) является выпуклой подрешеткой, изоморфной L_2, и аналогично для L_1, то импликация «только тогда» следует из леммы 1. Для доказательства импликации «тогда» напомним, что $(a_1, a_2)\ M\ (b_1, b_2)$ в том и только в том случае, когда из $a_i \wedge b_i \leqslant a_i \vee b_i$ для $i = 1, 2$ следует, что ψ_a: $x \to x \vee a$ является в L_1L_2 взаимно однозначным отображением интервала $[a \wedge b, b]$ в интервал $[a, a \vee b]$, т. е. тогда и только тогда, когда ψ_{a_i}: $x_i \to x_i \vee a_i$ взаимно однозначно отображает $[a_i \wedge b_i, b_i]$ в $[a_i, a_i \vee b_i]$ в каждой решетке L_i. Но это и означает, что a_iMb_i при $i = 1, 2$.

Следствие. *Кардинальное произведение двух решеток тогда и только тогда полумодулярно, когда полумодулярны оба сомножителя.*

Теперь рассмотрим одно далеко идущее обобщение примеров 1 — 2. Истоки этой конструкции можно найти в работе Тутте [1]); приводимые здесь формулировки принадлежат Рота и Уотермену (личные сообщения).

---

[1]) Tutte W. M. — Trans. AMS, 1958, **88**, p. 144—174.

Лемма. 3. *Пусть G — геометрическая решетка и P — некоторое множество ее атомов («точек»). Тогда множество L всевозможных объединений атомов $p_i \in P$ является геометрической решеткой* $\left(\text{*если присоединить еще*}\ O = \bigvee_{\varnothing} p_i\right)$.

Доказательство. Ясно, что b покрывает a в L тогда и только тогда, когда $b = a \vee p$ для некоторого $p \in P$. Поэтому если b и c оба покрывают a в L, то элемент $b \vee c = (a \vee p) \vee \vee (a \vee q) = a \vee p \vee q$ будет покрывать b и c в G и тем более в L. Значит, L удовлетворяет условию (3). Но очевидно, что L является точечной решеткой конечной длины. Этим и завершается доказательство.

Пусть теперь Φ будет n-мерным подпространством векторного пространства D^X всех функций f: $X \to D$, где D — тело, а X — некоторое множество. Для каждого $x \in X$ пусть $F_x \subset \Phi$ обозначает подпространство, состоящее из всех $f \in \Phi$ таких, что $f(x) = 0$. Понятно, что либо $F_x = \Phi$, либо F_x является гиперплоскостью в Φ, другими словами, *дуальным* атомом в решетке $L(\Phi) \cong PG_{n-1}(D)$ всех линейных подпространств пространства Φ. Назовем Φ *разделяющим*, если для каждого $x \in X$ существует ненулевая функция $f \in \Phi$ такая, что $f(x) = 0$, т. е. если F_x *всегда* является дуальным атомом. Тогда множество всех пересечений $\bigcap_S F_x$ для подмножеств $S \subset X$, упорядоченное теоретико-множественным включением, изморфно множеству всех пересечений множества дуальных атомов $F_x \in L(\Phi)$. Значит, по лемме 3 мы получаем решетку, двойственную геометрической. Эти рассуждения можно подытожить следующим образом.

Лемма 4. *Пусть Φ — произвольное разделяющее конечномерное линейное пространство функций, заданных на множестве X. Для каждого $x \in X$ пусть F_x обозначает множество всех функций $f \in \Phi$ таких, что $f(x) = 0$. Тогда множество $P(\Phi)$ всевозможных пересечений $\bigcap F_x$, упорядоченное теоретико-множественным включением, образует решетку, двойственную геометрической.*

Заметим, что решетка, двойственная для $P(\Phi)$, допускает естественную интерпретацию. Для произвольного подмножества $S \subset X$ определим *замыкание* $\bar{S}$ следующим образом:

(11) $p \in \bar{S}$ тогда и только тогда, когда $f(p) = 0$

$$\text{для всех } f \in \bigcap_{x \in S} F_x.$$

«Замкнутые» подмножества множества X и образуют геометрическую решетку, двойственную $P(\Phi)$. Это один из примеров общего понятия «полярности», которое систематически изучается в главе V. Проведенными рассуждениями доказывается

Теорема 3. *Пусть Φ — разделяющее конечномерное линейное пространство функций, заданных на множестве X. Назовем подмножество $S \subset X$ Φ-замкнутым, если для любого p, не принадлежащего S, существует функция $f \in \Phi$ такая, что $f(p) \neq 0$, но $f(x) = 0$ для всех $x \in S$. Тогда Φ-замкнутые подмножества множества X образуют геометрическую решетку.*

В примере 1 в роли Φ выступало множество всех линейных функций на $V_n(D)$. Решетка $PG_{n-1}(D)$ получается, если в качестве Φ взять множество всех линейных однородных функций на $V_n(D)$ (т. е. сопряженное пространство $V_n^*(D)$). Если Φ является множеством всех действительных функций вида $f = a + \sum b_i x_i + c \sum x_i^2$, то получится *сферическая* геометрия.

Подобным образом можно построить и много других любопытных примеров.

«Геометрические» решетки бесконечной длины. Предположение о конечности длины будет играть существенную роль в этой главе. Если от него отказаться, то понятие «полумодулярности» неприятным образом разветвляется [1]). Представление о возникающих при этом возможностях дает следующий важный пример.

Пример 3. Пусть $\mathcal{B}$ — банахово пространство и $L(\mathcal{B})$ — решетка всех замкнутых подпространств пространства $\mathcal{B}$. Макки доказал, что aMb в $L(\mathcal{B})$ тогда и только тогда, когда линейная сумма замкнутых подпространств a и b является замкнутой, и что aM^*b также равносильно этому условию [2]). Но оно симметрично относительно a и b, так что имеет место

Теорема 4. *Для любого банахова пространства $\mathcal{B}$ решетка $L(\mathcal{B})$ является полумодулярной сверху и снизу.*

Случай гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ особенно интересен, поскольку здесь получается полумодулярная ортомодулярная решетка (§ II.14). Объединяя теорему II.16 с только что доказанной теоремой 4, получаем

Следствие. *В любой полумодулярной ортосрешетке все интервалы конечной длины являются модулярными решетками.*

В дополнение к этому свойству можно доказать, что в решетке $L(\mathfrak{H})$ выполняется условие

(12) $$aMa^{\perp} \text{ для всех } a \in L(\mathfrak{H}).$$

Ортомодулярные полумодулярные решетки, удовлетворяющие условию (12), можно назвать *строго* ортомодулярными. Так, $L(\mathfrak{H})$ — строго ортомодулярная решетка, в которой каждый элемент является объединением некоторого числа точек (т. е. эта решетка атомно порожденная).

---

[1]) Круазо (Croisot R. — Ann. Sci. École Norm. Sup., 1951, 68, p. 203—265) обсуждает взаимосвязь между 23 такими возможностями! См. также § VIII.9.

[2]) MacKey G. — Trans. AMS, 1945, 57, p. 155—207.

Какутани и Макки[1]) рассматривали возможность введения операции взятия ортодополнения в решетках вида $L(\mathscr{B})$, где $\mathscr{B}$— другие банаховы пространства. Они показали, что это возможно тогда и только тогда, когда $\mathscr{B}$ топологически и линейно изоморфно некоторому гильбертову пространству.

Упражнения к §§ 1—3

1. Покажите, что в любой решетке L, если p — точка, то xMp для всех $x \in L$.

2. Покажите, что если F не состоит только из 0 и I, то каждая «прямая» в $PG(F, n)$ содержит по крайней мере четыре точки.

3. Покажите, что если p — точка в $AG_n(D)$, то дуальный идеал $[p, I]$, состоящий из всех $x \geqslant p$, является модулярной решеткой, изоморфной решетке $PG_{n-1}(D)$.

4. Покажите, что если в произвольной полумодулярной решетке L приравнять I все элементы высоты $h[x] \geqslant n$ (n — произвольное фиксированное натуральное число), то получится полумодулярная решетка. Покажите, что она будет $\bigvee$-гомоморфным образом решетки L (Маклейн)[2]).

5. Покажите, что если $\mathbf{R}$ — поле действительных чисел, то части аффинных подпространств, содержащиеся в любом открытом выпуклом подмножестве S пространства $V(\mathbf{R}, n)$, образуют полумодулярную решетку. (Если в качестве S взять n-сферу, то получится n-мерная гиперболическая геометрия.)

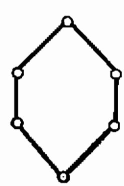
6. Покажите, что решетка всех подгрупп любой p-группы дуально полумодулярна.

*7. Покажите, что подпространства конечномерного действительного пространства, левоинвариантные относительно любой конечной группы линейных операторов, образуют модулярную орторешетку.

*8. Постройте 16-элементную немодулярную орторешетку длины 3, в которой каждая подрешетка замкнута относительно $a \wedge b'$ и $b \vee (a \wedge b')$. (D i l w o r t h R. P. — Tôhoku Math. J., 1940, 47, p. 18—23.)

9. Покажите, что свободная модулярная орторешетка с двумя порождающими есть $2^4 \times PG(\mathbf{Z}_3, 1)$ и что она имеет 96 элементов.

10. Покажите, что решетка с диаграммой



не вложима в геометрическую решетку той же длины (Уотермен).

11. Пусть $L(G)$ — решетка всех подгрупп группы G.

(а) Покажите, что если $ST = TS$ в G, то (S, T) является дуально полумодулярной парой в $L(G)$.

(б) Покажите, что если N — нормальная подгруппа в G, то (N, S) будет в $L(G)$ дуально полумодулярной парой, какова бы ни была подгруппа $S \subset G$. (У к а з а н и е. Используйте замечание после теоремы I.11.)

---

[1]) K a k u t a n i S., M a c K e y G. — Ann. Math., 1944, 45, p. 50 — 58 (действительные $\mathscr{B}$); Bull. AMS, 1946, 52, p. 727—733 (комплексные $\mathscr{B}$).

[2]) Это задание повторяет упр. 3 к § I.8. — *Прим. перев.*

$*$12. Пусть L — решетка, в которой любые два элемента $a < b$ могут быть соединены по крайней мере одной конечной цепью. Покажите, что в L из (3) следует полумодулярность и найдите подходящее обобщение для (8) (Капланский).

$*$13. Покажите, что в теореме 3 $\overline{S}$ является множеством всех $p \in X$ таких, что если $f(x) = 0$ для всех $x \in S$, то $f(p) = 0$.

4. Зависимость и ранг

До конца этой главы мы будем рассматривать только решетки конечной длины. Начнем с естественного расширения понятия линейной независимости [1]) на случай геометрических решеток.

Определение. Последовательность $x_1, \ldots, x_r$ элементов полумодулярной решетки конечной длины называется *независимой*, если она удовлетворяет следующему симметричному условию:

(13) $$h[x_1 \vee \ldots \vee x_r] = h[x_1] + \ldots + h[x_r].$$

Значение условия (13) становится ясным, если сравнить его с (2). Согласно (1) для любых элементов $x_1, \ldots, x_r$ полумодулярной решетки L конечной длины

$$h[x_1 \vee \ldots \vee x_r] = h[x_1 \vee \ldots \vee x_{r-1}] + h[x_r] - \\ - h[(x_1 \vee \ldots \vee x_{r-1}) \wedge x_r].$$

Далее, ввиду (10), равенство имеет место тогда и только тогда, когда

(i) $(x_1 \vee \ldots \vee x_{r-1}) \wedge x_r = O$;

(ii) $x_1 \vee \ldots \vee x_{r-1}$ и x_r образуют модулярную пару и

(iii) $x_1, \ldots, x_{r-1}$ независимы.

Из (iii) в силу симметрии условия (13) по индукции получается, что *любое подмножество независимого множества независимо.*

Наиболее интересен случай, когда все x_i являются точками; тогда вышеуказанное условие (ii) выполняется автоматически и имеет место следующая

Лемма 1. *Последовательность $x_1, \ldots, x_r$ точек независима тогда и только тогда, когда*

(14) $$(x_1 \vee \ldots \vee x_k) \wedge x_{k+1} = O \text{ для } k = 1, \ldots, r-1.$$

Доказательство. Поскольку из следствия 1 теоремы 1 вытекает, что $x_1 \vee \ldots \vee x_{k+1}$ самое большее покрывает $x_1 \vee \ldots \vee x_k$, мы получаем, что $h[x_1 \vee \ldots \vee x_{k+1}]$ равняется $h[x_1 \vee \ldots \vee x_k] + 1$ или $h[x_1 \vee \ldots \vee x_k]$ — в зависимости от того, будет ли $(x_1 \vee \ldots \vee x_k) \wedge x_{k+1}$ равно O или нет.

Вообще, последовательность элементов $x_1, \ldots, x_r$ решетки с O назовем *секвенциально независимой*, если для нее выполняется

---

[1]) См. работы Уитни (Whitney H. — Amer. J. Math., 1935, 57, p. 507—533) и Маклейна [1].

равенство (14):

$$(x_1 \vee \ldots \vee x_{k-1}) \wedge x_k = O \text{ для } k = 2, \ldots, r.$$

Мы только что видели, что свойство секвенциальной независимости *симметрично* (т. е. инвариантно относительно всех перестановок) для последовательности *точек* в любой полумодулярной (и значит, в любой геометрической) решетке.

Следующее определение вводит понятие, тесно связанное с независимостью.

Определение. Пусть X — некоторое множество точек и $\sup X$ обозначает его точную верхнюю грань. Тогда $r(X) = h[\sup X]$ называется *рангом* множества X. (Заметим, что $\sup X$ есть не что иное, как *замыкание* $\bar{X}$ множества X в обозначениях § 3).

Лемма 2. *В полумодулярной решетке*[1]) *любое множество точек содержит независимое подмножество того же ранга (т. е. с тем же объединением).*

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_r$ — произвольная последовательность точек, независимая или нет. Мы можем, просматривая элемент за элементом и опуская x_k, если $x_k \leqslant x_1 \vee \ldots \vee x_{k-1}$, построить последовательность, у которой ни один член не будет содержаться в объединении предыдущих, а объединение всех членов совпадет с $x_1 \vee \ldots \vee x_r$. Она и будет независимой.

Теорема 5. *Пусть X — некоторое множество независимых элементов $x_i > O$ в полумодулярной решетке L конечной длины. Тогда эти элементы x_i порождают подрешетку, изоморфную полю всех подмножеств множества X.*

Доказательство. Каждому подмножеству S множества X сопоставим $\sup S$. Множество всех элементов вида $\sup S$, очевидно, замкнуто относительно объединений. Согласно неравенству минимакса (глава II, § 5, (8)), будет $\sup (S \cap T) \leqslant \sup S \wedge \sup T$, а ввиду L1—L3 имеет место равенство $\sup (S \cup T) = \sup S \vee \sup T$. Отсюда и из (2) получаем

$$h[\sup S \wedge \sup T] \leqslant h[\sup S] + h[\sup T] - h[\sup (S \cup T)] =$$
$$= \sum_S h[x_i] + \sum_T h[x_i] - \sum_{S \cup T} h[x_i] = \sum_{S \cap T} h[x_i] = h[\sup (S \cap T)].$$

Значит, в неравенстве минимакса на самом деле имеет место равенство и пересечения соответствуют теоретико-множественным пересечениям, так же как объединения — теоретико-множественным объединениям. Условие $x_i > O$ гарантирует, что мы имеем не просто наложение, а изоморфизм.

---

[1]) Напомним, что речь идет о решетках конечной длины. — *Прим. перев.*

5. Постулаты для геометрических решеток

Определение геометрической решетки, данное в § 1, соответствует интуитивным геометрическим представлениям, в частности, об аффинной и проективной геометриях. Но оно не входит в рамки классификации решеток, проведенной в главах I — II. Чтобы установить связь с этой классификацией, мы охарактеризуем теперь геометрические решетки как полумодулярные решетки конечной длины с (относительными) *дополнениями*.

Напомним, что в § I.9 решетка была названа решеткой *с дополнениями*, если в ней

L7 для любого x существует элемент x' такой, что $x \wedge x' = O$, $x \vee x' = I$.

Решетка называется решеткой *с относительными дополнениями*, если в ней

L7R из того, что $a \leqslant x \leqslant b$, следует существование y, для которого $x \wedge y = a$, $x \vee y = b$.

Конечно, любая решетка с относительными дополнениями, имеющая O и I, обладает дополнениями. Обратное, вообще говоря, не верно, хотя любая модулярная решетка с дополнениями будет и решеткой с относительными дополнениями (см. теорему I.14). В частности, как показывает диаграмма на рис. 13, *а*, полумодулярная (сверху) решетка с дополнениями не обязательно обладает относительными дополнениями.

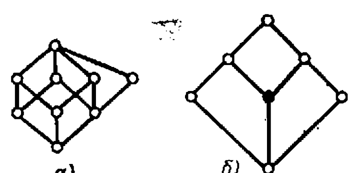


Рис. 13.

Теорема 6. *Полумодулярная решетка конечной длины обладает дополнениями тогда и только тогда, когда в ней*

L7′ *элемент I является объединением точек.*

Она является решеткой с относительными дополнениями тогда и только тогда, когда в ней

L7R′ *каждый элемент $x > O$ является объединением точек.*

Доказательство. В любой решетке L конечной длины из L7 следует L7′. В самом деле, если a — объединение всех точек решетки L, то $a' = O$, поскольку этот элемент не содержит точек. Значит, $I = a \vee a' = a \vee O = a$, т. е. I является объединением точек.

Обратно, пусть L — полумодулярная решетка конечной длины, удовлетворяющая условию L7′, и дан элемент $a \in L$. Тогда существует последовательность точек $p_1 \nleqslant a$, $p_2 \nleqslant a \vee p_1$, ..., такая, что для некоторого r будет $a \vee p_1 \vee \ldots \vee p_r = I$. Как в лемме 1 из § 4,

$$h[a \vee (p_1 \vee \ldots \vee p_r)] = h[a] + r,$$

откуда

$$h[a \wedge (p_1 \vee \ldots \vee p_r)] \leqslant h[a] + h[p_1 \vee \ldots \vee p_r] - \\ - h[a \vee p_1 \vee \ldots \vee p_r] = h[a] + r - (h[a] + r) = 0.$$

Следовательно, элемент $a' = p_1 \vee \ldots \vee p_r$ является дополнением для a и, более того, a и a' образуют модулярную пару.

Далее, по теореме 1.15, в любой решетке конечной длины из L7R следует L7R′. С другой стороны, если L — полумодулярная решетка, удовлетворяющая условию L7R′, и в ней $a \leqslant x \leqslant b$, то существует последовательность точек $p_1, \ldots, p_r \leqslant b$ такая, что $(x \vee p_1 \vee \ldots \vee p_k) \wedge p_{k+1} = O$ и $x \vee p_1 \vee \ldots \vee p_r = b$. Если положить $z = p_1 \vee \ldots \vee p_r$, то, как в лемме 1 из § 4 и как в предыдущем параграфе, будет $h[a \vee z] = h[a] + r$ и $h[x \vee z] = h[x] + r = h[b]$. Пусть $y = a \vee z$. Тогда $x \vee y = x \vee \vee a \vee z = x \vee z = b$, в то время как $x \wedge y \geqslant a$ и $h[x \wedge y] \leqslant \leqslant h[x] + h[a \vee z] - h[x \vee y] = h[x] + h[a] + r - (h[x] + r) = h[a]$. Значит, $x \wedge y = a$, и L7R и L7R′ равносильны в любой полумодулярной решетке конечной длины.

Таким образом, геометрическая решетка — это просто полумодулярная решетка конечной длины с относительными дополнениями. Следовательно, модулярные геометрические решетки — это в точности модулярные решетки конечной длины с дополнениями.

Решетка, в которой выполняется L7′ или L7R′, не обязательно обладает дополнениями, если, конечно, она не является полумодулярной. Рис. 13, *б* показывает пример такой решетки: заштрихованный элемент не имеет дополнений.

Теперь докажем довольно сильное обращение предыдущих результатов [1]).

Теорема 7. *Решетка конечной длины с дополнениями тогда и только тогда является геометрической решеткой, когда в ней выполняется одно из следующих условий:* (i) L *удовлетворяет условию* (ξ), *т. е. является полумодулярной*; (ii) L *удовлетворяет* (4); (iii) *в* L *выполняется* (5); (iv) *секвенциальная независимость в* L *симметрична*.

Доказательство. Так как L7R′ следует из L7R в любой решетке конечной длины, то достаточно показать, что при выполнении L7R′ условия (ξ), (iv), (4) и (5) циклически следуют друг из друга. Действительно, тогда любое из этих условий в сочетании с L7R′ повлечет (ξ) и L7R′, и значит, L7R и (ξ), а это означает, что L — геометрическая решетка.

---

[1]) См. [LT2, с. 157, теорема 7] и Дюбрей-Жакотен, Лезье, Круазо [1].

Сначала заметим, что, как в лемме 1 из § 4, из (ξ) следует (iv). Далее, из (iv) выводится (5). Используя L7R′, легко найти независимые $p_1, \ldots, p_r$ такие, что $p_1 \vee \ldots \vee p_r = a$. Затем, так как $a \vee q \leqslant a \vee p$, то последовательность $p_1, \ldots, p_r, p, q$ не является независимой, а тогда, согласно (13), независимой не будет и последовательность $p_1, \ldots, p_r, q, p$. Значит, $p \geqslant (a \vee q) \wedge p > O$, откуда $p \leqslant a \vee q$ и $a \vee p \leqslant a \vee q$, и следовательно, $a \vee p = a \vee q$ по условию и ввиду P2.

Из (5) следует (4). В самом деле, если $a < b \leqslant a \vee p$, то согласно L7R′ существует точка q, содержащаяся в b и не содержащаяся в a. Ясно, что $a < a \vee q \leqslant b$. Согласно (5) $a \vee p = b$, и значит, $a \vee p$ покрывает a.

Наконец, из (4) выводится (ξ). Действительно, если x и y покрывают a, то ввиду L7R′ существуют точки p, q такие, что $a < a \vee p \leqslant x$, $a < a \vee q \leqslant y$, откуда $a \vee p = x$ и $a \vee q = y$. Поэтому $x \vee y = a \vee p \vee q$, а этот элемент, вследствие (4), покрывает $x = a \vee p$ и $y = a \vee q$.

Теорема 8. *Точечная решетка конечной длины является полумодулярной (сверху) тогда и только тогда, когда pMa имеет место для любого элемента $a \in L$ и любой точки $p \in L$.*

Доказательство. Пусть L полумодулярна сверху. Нужно показать, что для любого элемента a и любой точки p, если $b \leqslant a$, то $a \wedge (p \vee b) = (a \wedge p) \vee b$. Ввиду следствия 3 из § 1 $p \leqslant a$ или $a \vee p$ покрывает a. Если $p \leqslant a$, то $p \wedge a = p$, откуда $(a \wedge p) \vee b = p \vee b$. Но так как $b \leqslant a$, то $b \vee p \leqslant a$, и значит, $a \wedge (p \vee b) = b \vee p$. Если же $p \nleqslant a$, то $p \nleqslant b$, и следовательно, $b \vee p$ покрывает b. Поэтому $a \wedge (b \vee p) = b = (a \wedge p) \vee b$, ибо $p \wedge a = O$ при $p \nleqslant a$.

Обратно, предположим, что $a \wedge (b \vee p) = (a \wedge p) \vee b$ для всех $b \leqslant a$ и всех точек p. Так как каждый элемент решетки по условию является объединением точек, то достаточно убедиться в выполнимости (4), поскольку тогда по теореме 7 решетка будет геометрической, и значит, полумодулярной. Пусть $p \nleqslant b$ и пусть существует элемент c такой, что $b \leqslant c \leqslant b \vee p$. Если $p \leqslant c$, то $b \vee p \leqslant c \leqslant b \vee p$, откуда $c = b \vee p$. Если же p не содержится в c, то $c = c \wedge (b \vee p) = b \vee (c \wedge p) = b$. Так что $b \vee p$ покрывает b и (4) выполняется.

Упражнения

1. (а) Покажите, что точечная решетка L является геометрической тогда и только тогда, когда для любой точки p при всех $a \in L$ истинно pMa.

(б) Докажите, что это условие равносильно тому, что из $b \leqslant a$ следует $a \wedge (b \vee p) = b \vee (a \wedge p)$.

2. Покажите, что в решетке конечной длины, удовлетворяющей L7′, каждый интервал вида $[a, I]$ является решеткой с дополнениями.

3. Пусть в геометрической решетке элементы $c \leqslant b$ являются дополнениями для a. Покажите, что если aMb и aMc, то $b = c$.

4. Покажите, что если в полумодулярной решетке точки $p_1, \ldots, p_s$ независимы и точки $q_1, \ldots, q_{s+1}$ независимы, то будет независимым и некоторое множество $p_1, \ldots, p_s, q_i$ (Уитни).

5. Покажите, что в геометрической решетке, даже если элементы $x_1, \ldots, x_r$ независимы, интервалы $[O, x_i]$ не обязательно порождают подрешетку, изоморфную их кардинальному произведению. (Указание. Рассмотрите полумодулярную решетку, получающуюся из 2^4 удалением какой-нибудь точки.) (Чейз)

6. (а) Покажите, что в решетке, изображенной на рис. 13, *б*, из aMb не следует bMa.

(б) Покажите, что заключение теоремы Куроша—Оре в этой решетке не выполняется.

(*в) Покажите, что заключение теоремы Куроша—Оре выполняется в конечной полумодулярной решетке M тогда и только тогда, когда для любого $a \in M$ подрешетка $L(a)$, порожденная элементами p_i, покрываемыми a, модулярна [1]).

7. Установите связь между наблюдением Ф. Клейна о том, что в полумодулярной решетке независимость симметрична, с условием Уилкокса о симметричности отношения модулярности для пар.

8. Покажите, что на любой решетке конечной длины можно определить изотонную функцию со значениями 0, $^1/_2$, $^3/_4$, $^7/_8$, ..., для которой будет выполняться (1).

9. Постройте одиннадцатиэлементную полумодулярную решетку длины 3 с относительными дополнениями, которая содержит шестиэлементную подрешетку, обладающую относительными дополнениями, но не удовлетворяющую условию Жордана—Дедекинда (Дилуорс).

10. Покажите, что аксиома о замене выполняется для R-подмодулей R-модуля тогда и только тогда, когда кольцо R является «регулярным слева» кольцом [2]).

6. Модулярные геометрические решетки

В § 5 было показано, что модулярные геометрические решетки — это в точности модулярные решетки конечной длины с дополнениями. По теореме Дилуорса (теорема III.14) любая геометрическая решетка G (будучи решеткой с дополнениями) разлагается в прямое произведение *простых* (геометрических) решеток. Теперь покажем, что если *G модулярна*, то сомножители этого прямого произведения будут проективными геометриями. Для этого потребуется

Лемма 1. *Пусть p и q — различные точки модулярной геометрической решетки M. Тогда $p \vee q$ содержит третью точку s тогда и только тогда, когда p и q имеют общее дополнение.*

Доказательство. Любая третья точка в $p \vee q$ является общим *относительным* дополнением для p и q в $[O, p \vee q]$. Тогда, как в теореме I.14, элемент $s \vee (p \vee q)' = c$ будет общим дополнением для p и q, каким бы ни было дополнение $(p \vee q)'$ элемента $p \vee q$.

---

[1]) Пункты (б), (*в) повторяют упр. 11 к § III.12. — *Прим. перев.*

[2]) Вероятно, имеются в виду штейницевы кольца, исчерпывающее описание которых дали Г. М. Бродский (Матем. исслед., 1972, 7, № 2, с. 14—28) и Ленциг (Lenzig H.—Proc. AMS, 1971, 29, p. 269—271). — *Прим. ред.*

Обратно, пусть p и q имеют общее дополнение c. Понятно, что $I = p \vee c = q \vee c$ покрывает c. Положим $s = (p \vee q) \wedge c$. Тогда

$$d[s] = d[p \vee q] + (d[c] - d[p \vee q \vee c]) = 2 - 1 = 1,$$

поскольку $p \vee q \vee c = I$ покрывает c. Значит, $r \leqslant p \vee q$ является точкой и притом отличной от p и q, так как $r \leqslant c$, а $p \wedge c = q \wedge c = O$. Это и есть третья точка в $p \vee q$.

Определение. Два элемента a и b решетки с дополнениями L называются *перспективными*, если они имеют общее дополнение (обозначение: $a \sim b$).

Лемма 2. *В модулярной геометрической решетке M перспективность является отношением эквивалентности.*

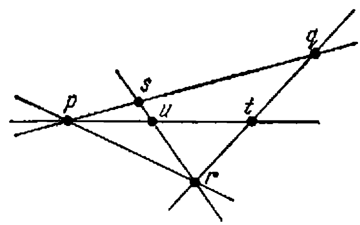


Рис. 14.

Доказательство. В любой решетке с дополнениями перспективность рефлексивна и симметрична; остается доказать, что *перспективность точек транзитивна* в любой модулярной геометрической решетке. Для доказательства используется лемма 1, которая утверждает, что если $p \sim q$ и $q \sim r$, то (за исключением тривиального случая $p = q$ или $q = r$) существуют точки s на $p \vee q$ и t на $q \vee r$ такие, что образуется конфигурация, изображенная на рис. 14.

Теперь построим «прямую» $s \vee t$. Очевидно, что

$$d[(s \vee t) \wedge (p \vee r)] = d[s \vee t] + d[p \vee r] - d[s \vee t \vee p \vee r] \geqslant 2 + 2 - 3 = 1,$$

поскольку $s \vee t \vee p \vee r \leqslant p \vee q \vee r$. Это означает, что $s \vee t$ и $p \vee r$ имеют общую точку u. Но ясно, что прямая $s \vee t$ не может содержать p, иначе она содержала бы $p \vee s$, и следовательно, q, а вместе с этой точкой $q \vee t$, и значит, r, откуда получилось бы $d[p \vee q \vee r] = d[s \vee t] = 2$. Аналогично выводится, что $s \vee t$ не может содержать r. Поэтому u является третьей точкой на $p \vee r$ и, таким образом, по лемме 1 будет $p \sim r$. Ч. т. д.

Отсюда следует, что в любой модулярной геометрической решетке M (т. е. в любой модулярной решетке конечной длины с дополнениями) отношение перспективности разбивает множество точек на классы эквивалентности E_i такие, что для $p \in E_i$ и $q \in E_j$ будет $p \sim q$ тогда и только тогда, когда $i = j$.

Пусть теперь $E_1, \ldots, E_s$ будут классами эквивалентности, состоящими из взаимно перспективных точек, и пусть $e_1, \ldots, e_s$ обозначают объединения точек, принадлежащих этим классам. Мы еще не знаем, будет ли s конечным. Сами же классы эквивалентности в общем случае не являются конечными.

Лемма 3. *В конечномерной модулярной решетке с дополнениями только что определенные элементы e_i независимы.*

Доказательство. Для доказательства равенства $(e_1 \vee \ldots \vee e_k) \wedge e_{k+1} = O$ достаточно заметить, что никакая точка из e_{k+1} не может содержаться в $e_1 \vee \ldots \vee e_k$, поскольку E_i не пересекаются, и что каждый элемент $x > O$ содержит точку.

Теорема 9. *Любая модулярная решетка конечной длины с дополнениями является произведением идеалов $[O, e_i]$, где e_i — объединения элементов различных классов E_i отношения перспективности точек.*

Доказательство. Любой элемент a является объединением точек, которые он содержит; так что $a = (a_i)$, где $a_i \in [O, e_i]$, будет объединением точек из E_i, содержащихся в a. Поэтому ввиду следствия 2 из теоремы III.15 достаточно показать, что элементы e_i независимы. Но это только что доказано.

Отсюда следует, что элементы e_i принадлежат центру данной решетки. А обратное утверждение немедленно получается из того факта, что элемент центра решетки M должен иметь *единственное* дополнение (т. е. быть перспективным лишь с собой).

7. Проективные геометрии

Очевидно, что сомножители длины один в теореме 9 — это в точности экземпляры решетки **2**, и их произведение является булевой алгеброй. Теперь рассмотрим сомножители длины $d[L] > 1$ в этой теореме — *простые* (модулярные) *геометрические решетки* [1]). Мы будем называть атомы такой решетки «точками», а ее элементы λ размерности $d[\lambda] = 2$ — «прямыми». Будем говорить, что p «лежит на» λ и писать $p \in \lambda$, если $p \leqslant \lambda$.

Лемма 1. *Решетки $PG_{n-1}(D)$ из примера* 1 § 1 *все являются простыми геометрическими решетками.*

Набросок доказательства. Условия независимости, приведенные в § 4, — это известные свойства линейной независимости над полем или телом. Тот факт, что «прямая» содержит три «точки», очевиден. Модулярность следует из теоремы I.11.

Лемма 2. *В любой простой модулярной геометрической решетке длины $d > 1$:*

PG1 *две разные точки лежат на одной и только одной прямой;*

PG2 *если прямая λ пересекает две стороны треугольника (не в точке их пересечения), то она пересекает и третью его сторону;*

PG3 *каждая прямая содержит по крайней мере три точки;*

---

[1]) То есть модулярные геометрические решетки с попарно перспективными точками. — *Прим. перев. и ред.*

PG4 *множество всех точек порождается подмножеством, содержащим d точек, но не порождается никаким подмножеством с меньшим числом точек.*

Доказательство. Во-первых, если $p \neq q$ — разные точки, то любая прямая λ, соединяющая их, содержит $p \vee q$ и потому совпадает с $p \vee q$. Во-вторых, предполагая, что в PG2 речь идет о треугольнике с вершинами p, q, r и о прямой λ, положим, что $\lambda \wedge (p \vee q) = s$ и $\lambda \wedge (q \vee r) = t$ (где s, $t \neq q$), и тогда (см. рис. 14)

$$d[\lambda \wedge (p \vee r)] = d[\lambda] + d[p \vee r] - d[\lambda \vee p \vee r] = 2 + 2 - 3 = 1,$$

так что $\lambda \wedge (p \vee r)$ является точкой. Это доказывает PG2. Наконец, PG3 следует, как в § 6, из предположения о простоте решетки.

Но условия PG1—PG4 представляют собой классическое определение [1]) *проективной геометрии* размерности $d - 1$. Таким образом, нами доказана

Теорема 10. *Всякая модулярная геометрическая решетка является произведением булевой алгебры и проективных геометрий.*

С другой стороны, из любой проективной геометрии Λ можно построить простую геометрическую решетку, состоящую из плоских (в смысле следующего определения) множеств геометрии Λ.

Определение. Множество точек проективной геометрии называется *плоским*, если оно вместе с любыми двумя различными точками p и q содержит все точки, лежащие на прямой $p \vee q$.

Очевидно, что плоские множества любой проективной геометрии образуют *полную атомно порожденную решетку* (каждое плоское множество является объединением точек). Некоторых усилий потребует доказательство выполнимости условия замены Штейница—Маклейна для конечных подмножеств. Если пространство порождается конечным числом точек, то решетка будет геометрической. Далее, можно показать, что $d[x] + d[y] = d[x \wedge y] + d[x \vee y]$, т. е. решетка *модулярна*. Согласно PG3 она является простой.

Следствие. *Каждое из следующих условий необходимо и достаточно для того, чтобы модулярная геометрическая решетка L была проективной геометрией:*

(i) *L проста*; (ii) *L неразложима в прямое произведение*; (iii) *все точки L перспективны.*

Чуть менее тривиален следующий результат.

Теорема 11. *В конечномерной проективной геометрии элементы x и y перспективны тогда и только тогда, когда $d[x] = d[y]$.*

---

[1]) Юнг Дж. Проективная геометрия — М.: ИЛ, 1949. Результаты §§ 6—7 принадлежат автору [2].

Доказательство. Если x и y перспективны и их общим дополнением является c, то $d[x] = d[y] = d[I] - d[c]$. Обратно, пусть $d[x] = d[y]$ и пусть точки $p_1, \ldots, p_r$ и $q_1, \ldots, q_r$ будут базисами[1]) для $x \wedge (x \wedge y)'$ и $y \wedge (x \wedge y)'$ соответственно. Если $t_1, \ldots, t_r$ — третьи точки на прямых $p_1 \vee q_1, \ldots, p_r \vee q_r$, то, очевидно,

$$x \vee t_1 \vee \ldots \vee t_r = (x \wedge y) \vee p_1 \vee t_1 \vee \ldots \vee p_r \vee t = \\ = (x \wedge y) \vee p_1 \vee q_1 \vee \ldots \vee p_r \vee q_r = x \vee y,$$

и потому из размерностных соображений элементы $x \wedge y$, p_i, t_j и $(x \vee y)'$ независимы и их объединение равно I. Значит, $(x \vee y)' \vee t_1 \vee \ldots \vee t_r$ и $x = (x \wedge y) \vee p_1 \vee \ldots \vee p_r$ являются дополнениями друг для друга. Аналогично $(x \vee y)' \vee t_1 \vee \ldots \vee t_r$ будет дополнением и для y. Таким образом, x и y перспективны.

Упражнения к §§ 6—7

1. Проведите подробное доказательство следствия из теоремы 10.

2. Покажите, что если отношение перспективности между точками геометрической решетки G транзитивно, то G модулярна.

3. (а) Покажите, что если a и a_1 — перспективные элементы в решетке A, то (a, b) и (a_1, b) при любом $b \in B$ будут перспективными элементами кардинального произведения AB.

(б) Покажите, что отношение перспективности между элементами любой модулярной геометрической решетки M транзитивно.

4. Покажите, что в простой модулярной геометрической решетке (т. е. в проективной геометрии) все прямые содержат одинаковое число точек. (Указание. По теореме 11 все прямые перспективны.)

5. Покажите, что если в модулярной геометрической решетке все прямые содержат одинаковое число точек, то эта решетка будет или проективной геометрией, или конечной булевой алгеброй.

6. Докажите, что гомоморфный образ геометрической решетки является геометрической решеткой.

7. Покажите, что модулярная геометрическая решетка тогда и только тогда будет проективной геометрией, когда в ней только O и I являются элементами, обладающими единственными дополнениями.

8. (а) Покажите, что модулярная решетка всех конечномерных подпространств бесконечномерного векторного пространства обладает относительными дополнениями, но не является решеткой с дополнениями.

(б) Покажите, что эта решетка удовлетворяет также условию L7R'.

(в) Постройте модулярную решетку, в которой выполнялось бы L7R и не выполнялось бы L7R', и в которой было бы истинно L7R', но не L7R. (См. § III.12, пример 3.)

9. Пусть Z_p — поле простой характеристики. Покажите, что $PG_3(Z_p)$ является модулярной решеткой, порождаемой четырьмя элементами.

8. Немодулярные геометрические решетки

Много типов немодулярных геометрических решеток возникает в геометрии. Мы начнем с более детального рассмотрения примера 1 из § 1: геометрической решетки $AG_n(D)$ всех *аффин-*

---

[1]) То есть дают в объединении соответствующий элемент. — *Прим. перев.*

ных подпространств n-мерного пространства $V_n(D)$ над телом. Такие «аффинные геометрии» впервые изучал Менгер [1]). В любой решетке $AG_n(D)$ для любого элемента $a > O$ дуальный идеал $[a, I]$ является проективной геометрией $PG_{n-1}(D)$. Другое, связанное с этим, свойство состоит в следующем. Если заданы произвольный элемент $a > O$ и точка $p \nleqslant a$, то существует единственная «параллель» b к a, проходящая через p», т. е. такой элемент b, что $a \wedge b = O$, $p \leqslant b$, $d[b] = d[a]$ и $a \vee b = a \vee p$. Наконец, для любого $a > O$ идеал $[O, a]$ также является аффинной геометрией, и каждая прямая содержит не менее двух точек. Возможность обращения этих результатов рассматривал Сасаки [2]) в двух своих важных работах. Он показал, что геометрические решетки, являющиеся «аффинными геометриями», можно охарактеризовать следующим *постулатом о параллельных*.

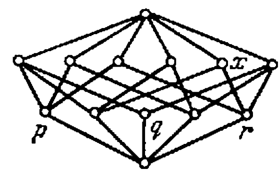


Рис. 15.

PP Если p, q, r — независимые точки, то существует единственная прямая λ такая, что $p < \lambda < p \vee q \vee r$ и $\lambda \wedge (q \vee r) = O$.

Сасаки и Фудзивара, кроме того, следующим образом перенесли теорему автора о разложении для модулярных геометрических решеток на случай немодулярных геометрических решеток.

Определение. В геометрической решетке G точки p и r называются *псевдоперспективными*, если $p = r$ или $r \leqslant p \vee x$ для некоторого x такого, что $p \wedge x = O$.

Теорема Сасаки—Фудзивары. *Отношение псевдоперспективности является отношением эквивалентности. Центр любой геометрической решетки состоит из объединений e_i для классов E_i отношения псевдоперспективности элементов.*

Разницу между «перспективностью» в первоначальном смысле фон Неймана и «псевдоперспективностью» хорошо иллюстрирует геометрическая решетка, изображенная на рис. 15. В этой решетке точки q и p, а также q и r перспективны, но p будет не перспективной, а псевдоперспективной с r.

Другой интересный пример геометрической решетки возникает в действительной *сферической* геометрии. Здесь геометрическую решетку составляют те подмножества действительной n-сферы (но *не* n-шара), которые либо (i) содержат не более двух точек, либо (ii) содержат вместе с любыми тремя точками и ту единственную окружность, которая проходит через них. Строение

---

[1]) Менгер, Альт, Шрейбер [1].

[2]) Sasaki U., Fujiwara S. — J. Sci. Hiroshima Univ., 1951, 15, p. 183—188; Sasaki U. — J. Sci. Hiroshima Univ., 1952, 16, p. 223—228, 409—416. Сасаки говорит о «перспективных» элементах там, где мы употребляем термин «псевдоперспективные» элементы.

этой геометрической решетки анализировать сложнее [1]); она является «полярой» в $V_n(\mathbf{R})$ по отношению к множеству всех функций вида $f = a + \sum b_i x_i + c \sum x_i^2$ (см. § 3).

Еще один тип геометрических решеток получается, если рассмотреть «поляру» множества всех квадратичных функций $f = a + \sum b_i x_i + \sum c_{ij} x_i x_j$, где $\|c_{ij}\|$ — произвольная невырожденная матрица. Если F — поле действительных чисел, то классические теоремы Брианшона и Паскаля описывают некоторые из основных свойств этой решетки.

Такие геометрические решетки характеризуются высшей степенью симметрии: группа автоморфизмов каждой из них действует транзитивно на элементах любой заданной размерности. То же верно и для *гиперболической* геометрии, определяемой как решетка всех пересечений плоских множеств с внутренностью некоторой фиксированной поверхности второго порядка. Однако из всех рассмотренных геометрий только проективная геометрия (которую можно определить как геометрию геодезических в *эллиптическом* пространстве) определяет модулярную решетку.

9. Решетки разбиений. Алгебраически замкнутые подполя

В последние годы важное развитие получила теория *немодулярных* геометрических решеток. Постепенно стало ясно, что большинство геометрических решеток возникает в комбинаторном анализе, а не в геометрии или в абстрактной алгебре — этих двух областях математики (не считая логики и теории множеств), с которыми были связаны первые приложения теории решеток.

Первым объектом изучения [2]) из этих решеток стала Π_n — симметрическая решетка всех разбиений совокупности из n объектов, уже появлявшаяся в § I.8. Одним из начальных результатов здесь является

Теорема 12. *Решетка Π_n всех разбиений конечного n-элементного множества является геометрической решеткой длины $n-1$.*

Доказательство. «Точками» в Π_n будут отношения эквивалентности, отождествляющие точно два элемента. Выполнимость условия покрытия (ξ) и тот факт, что Π_n является точечной решеткой, проверяются без труда.

Теорема 13. *Пусть θ и θ' — перестановочные отношения эквивалентности на множестве S. Тогда $\theta M^* \theta'$, т. е. θ и θ' образуют модулярную пару в решетке, двойственной для $\Pi(S)$.*

Доказательство. Вспоминая определение, мы видим, что суть дела состоит в том, чтобы из $\theta \leqslant \theta''$ вывести ра-

[1]) См. работы Хофмана (Hoffman A. J. — Trans. AMS, 1951, 71, p. 218—242) и Преновица (Prenowitz W. — Canad. J. Math., 1950, 2, p. 100—119).

[2]) Birkhoff G. [3, §§ 16—22] и Bull. AMS, 1934, 40, p. 797.

венство $(\theta \vee \theta') \wedge \theta'' = \theta \vee (\theta' \wedge \theta'')$. В силу модулярного неравенства (глава I, (6)) достаточно показать, что $(\theta \vee \theta') \wedge \wedge \theta'' \leqslant \theta \vee (\theta' \wedge \theta'')$. Этим мы и займемся.

Если $\theta\theta' = \theta'\theta$ *и* $\theta \leqslant \theta''$, *то* $(\theta \vee \theta') \wedge \theta'' \leqslant \theta \vee (\theta' \wedge \theta'')$. В самом деле, если $\theta\theta' = \theta'\theta$, то $\theta \vee \theta' = \theta\theta' = \theta'\theta$, и значит, из $x \equiv y\ (\theta \vee \theta')$ следует существование t такого, что $x \equiv t\ (\theta)$ и $t \equiv y\ (\theta')$. Если, кроме того, $\theta \leqslant \theta''$ и $x \equiv y\ (\theta)$, то $x \equiv y\ (\theta'')$ и потому (так как θ'' — отношение эквивалентности) $t \equiv y\ (\theta' \wedge \theta'')$. Наконец, так как $x \equiv t\ (\theta)$ и $t \equiv y\ (\theta' \wedge \theta'')$, мы получаем, что $x \equiv y\ (\theta\,(\theta' \wedge \theta''))$. Таким образом, если $\theta\theta' = \theta'\theta$ и $\theta \leqslant \theta''$, то

$$(\theta \vee \theta') \wedge \theta'' \leqslant \theta\,(\theta' \wedge \theta'') \leqslant \theta \vee (\theta' \wedge \theta''),$$

чем и завершается доказательство [1]).

Следствие 1. *Любая подрешетка решетки* Π_n, *состоящая из попарно перестановочных отношений эквивалентности, является модулярной решеткой.*

Следствие 2. *Пусть* θ, θ' — *перестановочные отношения эквивалентности на множестве* S. *Тогда*

(15) *если* $\theta \wedge \theta' = O$ и $\theta \vee \theta' = I$, *то* $S = (S/\theta) \times (S/\theta')$.

Доказательство. Так как $\theta \wedge \theta' = O$, каждое пересечение $X_i \cap Y_j$ θ-класса X_i и θ'-класса Y_j содержит самое большее один элемент: $X_i \cap Y_j$ пусто или состоит из некоторого элемента z_{ij}. Но так как $\theta\theta' = \theta \vee \theta' = I$, то для любых $x \in X_i$ и $y \in Y_j$ существует элемент $s \in S$ такой, что $x\theta s$ и $s\theta' y$. Ясно, что $s \in X_i \cap Y_j$, и поэтому $X_i \cap Y_j$ содержит в точности один элемент $s = z_{ij} \in S$. Наконец, $z_{ij}\theta z_{kl}$ тогда и только тогда, когда $j = l$, чем и завершается доказательство.

Геометрические решетки совершенно иного типа возникают в алгебраической теории чисел. Здесь имеет место

Теорема 14. *Пусть* $I = F(t_1, \ldots, t_r)$ — *некоторое конечное трансцендентное расширение поля* F. *Тогда алгебраически замкнутые* [2]) *поля* S *такие, что* $F \subset S \subset I$, *образуют геометрическую решетку длины* r.

Доказательство. Пусть S — алгебраически замкнутое подполе поля I, а H и K покрывают S. Выберем элементы x в H и y в K, не принадлежащие S. Тогда H является множеством чисел из I, алгебраических над кольцом $\{S, x\}$; K состоит из чисел, алгебраических над $\{S, y\}$, а $H \vee K$ — над $\{S, x, y\}$. Если

---

[1]) Интересную характеризацию решетки Π_n см. у Оре (Ore O. — Duke Math. J., 1942, 6, p. 573—627, в частности, глава IV) и у Сакса (Sachs D.— Pacif. J. Math., 1961, 11, p. 325—345).

[2]) «Алгебраически замкнутое» означает, что если $x \in K$ и $p(x) = 0$, где p — многочлен с коэффициентами из S, то $x \in S$. Теорема 14 принадлежит Маклейну [1].

теперь z лежит в $H \vee K$, то $p(x, y, z) = 0$ для некоторого многочлена, и если z не принадлежит H, то в этом многочлене встретится y в положительной степени. Значит, y является алгебраическим над $\{S, x, z\}$. Отсюда следует, что если $H < Z \leqslant H \vee K$, то Z содержит y и потому $Z = H \vee K$. Этим доказана выполнимость условия (ξ) и «аксиомы о замене» Штейница—Маклейна (5). Наконец, рассматриваемая решетка удовлетворяет и условию L7R′: если $G > F$, то возьмем максимальное множество чисел x_α из G, алгебраически независимых над F, и тогда алгебраические замыкания колец $\{F, x_\alpha\}$ и будут теми точками, объединение которых совпадает с G.

Степень трансцендентности поля G над F можно определить как теоретико-решеточную размерность поля G над F. Тогда встречавшиеся уже теоремы о зависимости, ранге и т. д. включают в себя бóльшую часть теории Штейница об алгебраической зависимости. Например, количество элементов x_α есть не что иное, как $d\,[G/F]$.

И геометрическая решетка, описанная в теореме 14, и Π_n *симметричны* в том смысле, что группа их автоморфизмов действует транзитивно на точках (атомах). Кроме того, в Π_n все дуальные идеалы $[\pi, I]$ длины l изоморфны решетке Π_l и потому все попарно изоморфны. А в решетке из теоремы 14 группа автоморфизмов транзитивна на элементах любой заданной высоты.

Основное различие между Π_n и решетками из теоремы 14 состоит в том, что Π_n конечна. В Π_n каждая *«прямая» содержит не более трех точек*. Точнее, если $l[\pi_1, \pi_2] = h[\pi_2] - h[\pi_1] = 2$, то интервал $[\pi_1, \pi_2]$ содержит три элемента высоты $h[\pi_1]+1$, когда π_2 получается из π_1 объединением трех π_1-классов, и два таких элемента, когда π_2 получается из π_1 объединением двух пар π_1-классов.

Нерешенная проблема. Очень интересная комбинаторная проблема заключается в следующем: всякая ли *конечная* решетка изоморфна подрешетке некоторой *конечной* решетки Π_n? [1]) (Глубокий результат Уитмена [2]) утверждает, что *любая* решетка изоморфна подрешетке некоторой бесконечной решетки Π_∞.) Важным результатом в этом направлении является

Теорема о вложении (Дилуорс) [3]). *Любая конечная решетка изоморфна некоторой подрешетке конечной полумодулярной решетки.*

---

[1]) Пудлак и Тума (Pudlak P., Tůma J. — Comment. math. univ. carol., 1977, 18, № 2, p. 409—414) дали положительный ответ на этот вопрос (проблема 48 из [LT2]). — *Прим. перев.*

[2]) Whitman P. — Bull. AMS, 1946, 52, p. 507—522. В доказательстве существенно используется теория свободных решеток (глава VI). О последующих результатах см. обзор Хартманиса [Symp, p. 22—30].

[3]) [LT2, с. 154]. Доказательство см. в работе Финкбейнера (Finkbeiner D. T. — Canad. J. Math., 1960, 12, p. 582—591).

Доказательство начинается с построения для произвольной решетки L конечной длины целозначного псевдоранга $r[a]$ такого, что $r[O]=0$, из $a>b$ следует $r[a]>r[b]$ и выполняется (1).

Упражнения к §§ 8—9

1. Покажите, что если только F не совпадает с $\mathbf{Z}_2$, то каждая «прямая» в $PG_n(F)$ содержит не менее четырех точек.

2. Покажите, что если p — какая-нибудь точка в $AG_n(F)$, то элементы $x \geqslant p$ образуют модулярную решетку, изоморфную $PG_{n-1}(F)$ (Менгер).

3. (а) Покажите, что части аффинных подпространств, содержащиеся в открытом выпуклом подмножестве S пространства $\mathbf{R}^n$, образуют геометрическую решетку. (Если S — n-сфера, то получится действительная n-мерная *гиперболическая* геометрия.) [1])

(б) Обобщите насколько возможно этот результат на случай других упорядоченных полей.

4. Покажите, что решетка подалгебр булевой алгебры $\mathbf{2}^3$ модулярна, но что это не так для $\mathbf{2}^4$.

5. (а) Покажите, что решетка Π_n модулярна тогда и только тогда, когда $n \leqslant 3$.

(б) Покажите, что число $\pi(n)$ разбиений n-элементного множества удовлетворяет рекурсивной формуле

$$\pi(n+1)=\sum_{i=0}^{n} C_n^i \pi(i).$$

(в) Покажите, что для $n!\pi(n)$ производящей функцией будет $e^{e^x}-1$.

(г) Вычислите $\pi(n)$ для $n=1, \ldots, 10$. (Например, $\pi(10)=115\,975$.)

6. Покажите, что существует $\bigvee$-гомоморфизм, отображающий геометрическую решетку $\mathbf{2}^3$ на цепь $\mathbf{3}$.

7. Покажите, что любой интервал геометрической решетки и кардинальное произведение геометрических решеток являются геометрическими решетками.

8. (а) Покажите, что Π_n изоморфна подрешетке решетки всех подгрупп симметрической группы степени n. (Указание. Каждому разбиению π сопоставьте множество перестановок, для которых π-классы являются областями импримитивности.)

(б) Перенесите этот результат на бесконечный случай (Левиг). (Указание. Проделайте то же самое, но только возьмите перестановки, оставляющие неподвижными все точки за исключением конечного числа.)

9. Покажите, что если n конечно, то решетка Π_n не имеет собственных конгруэнций.

10. (а) Покажите, что в Π_n любой дуальный идеал $[a, I]$ длины k изоморфен Π_k.

(б) Покажите, что в Π_n любой интервал $[a, b]$ длины k изоморфен произведению $s=d[I]+1-d[b]$ симметрических решеток разбиений $\Pi_{m(i)}$, где $m(i)=d[I]-d[a]$.

11. Покажите, что $\theta M^*\theta'$ в Π_n тогда и только тогда, когда $\theta \vee \theta' = \theta\theta'\theta$ (Уотермен).

12. Покажите, что в действительной сферической геометрии для любой точки p дуальный идеал $[p, I]$ является действительной аффинной геометрией. А что можно сказать о дуальном идеале $[p \vee q, I]$, если $p \neq q$ — две точки?

---

[1]) Задания 1, 2, 3 (а) повторяют соответственно упр. 2, 3, 5 к § 3. — *Прим. перев.*

13. (а) Покажите, что k-сферы и k-плоскости ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) евклидова n-пространства I образуют вместе с I и пустым множеством $\varnothing$ геометрическую решетку L_s длины $n+2$. (Замечание. 0-сфера — это пара точек.)

(б) Покажите, что аналогичные утверждения верны для сферического n-пространства и эллиптического n-пространства, где получаются решетки L'_s и L''_s соответственно.

(в) Покажите, что каждая «инверсия» порождает автоморфизм решетки L'_s.

14. (а) Используя проекцию Птолемея, покажите, что (для данного n) решетка L_s изоморфна подрешетке решетки L'_s, получаемой исключением единственной точки.

(б) Покажите, что если p — точка в L'_s, то дуальный идеал, состоящий из элементов $x \geqslant p$, в L'_s изоморфен решетке $AG_{n-1}(\mathbf{R})$, где $\mathbf{R}$ — поле действительных чисел.

(в) Сформулируйте соответствующий результат для L_s.

10. Графы. Ширина и $\wedge$-ширина

Фактически по самому своему определению *граф* есть градуированная точечная решетка длины 3, в которой каждая «прямая» (*ребро*) содержит точно две точки (вершины) [1]. Было бы неразумным вдаваться здесь в детали обширной теории графов [2]. Но поскольку любой конечной решетке сопоставляется *ориентированный* граф, и она определяется им, мы отметим две связи между теорией графов и теорией геометрических (или «матроидных») решеток, имеющие важные приложения в теории решеток. Прежде всего,

Теорема Кёнига [3]. *Пусть G — граф и π — разбиение множества P «точек» графа G на два дополняющие друг друга подмножества S и T. Определим (S, T)-сечение как минимальное подмножество $C \subset P$ такое, что каждое ребро, соединяющее точку из S с точкой из T, имеет один конец в C. Определим (S, T)-соединение как множество J ребер, соединяющих точки из S с точками из T и не имеющих общих концов. Тогда* $\max |J| = \min |C|$, *где вертикальные черточки являются знаком для количества элементов соответствующего множества* [4].

Ширина и $\wedge$-ширина. Определим *ширину* $w[P]$ у-множества P как максимальное число элементов в его подмножествах, состоящих из попарно не сравнимых элементов. Очевидно, что P нельзя представить в виде теоретико-множественного объединения меньшего, чем $w[P]$ количества цепей. Следующее обращение

---

[1]) В теории графов, как и при изучении топологических комплексов высших размерностей вообще, пустое множество и I обычно исключаются.

[2]) О самодвойственных графах с высокой степенью симметрии см. у Коксетера (Coxeter H. S. M. — Bull. AMS, 1950, **56**, p. 413—455).

[3]) König J. Theorie der Graphen. — Leipzig: Akad. Verlag, 1936, p. 232.

[4]) См. теорему 7.9.4 в книге Оре О. Теория графов. — М.: Наука, 1981.— *Прим. перев.*

этого факта, впервые отмеченное Дилуорсом [1]), является простым следствием теоремы Кёнига.

Теорема 15. *Если $w[P]$ конечна, то P можно представить в виде теоретико-множественного объединения $w[P]$ цепей.*

Практически определить величину $w[P]$ не так-то просто. Но в случае $P = 2^n$ имеет место

Лемма Шпернера. *Число $w[2^n]$ равно числу C_n^k подмножеств n-элементного множества, содержащих $k = [n/2]$ элементов* [2]).

(Понятно, что никакие два из таких подмножеств не сравнимы, и поэтому $w[2^n] \leqslant C_n^k$.)

Тесно связано с $w[P]$ понятие *размерности* $\delta[P]$ у-множества, которую не следует путать с его *длиной*. Размерность у-множества P определяется [3]) как наименьшее число m *цепей* $P_1, \ldots, P_m$ таких, что P изоморфно подмножеству произведения $P_1 \cdot \ldots \cdot P_m$.

Введенные числа связаны и с понятием $\wedge$-*ширины* решетки L, определенным в упр. 6 к § II.5 как наибольшее положительное целое $b = b[L]$ такое, что любое пересечение $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ $(n > b)$ равно пересечению уже b из этих элементов x_i. Легко показать, что в любой решетке $b[L] \leqslant \delta[L]$. В конечной дистрибутивной решетке $L = 2^P$, как нетрудно проверить,

$$b[2^P] = w[P].$$

Следствие. *$\wedge$-ширина свободной дистрибутивной решетки с n порождающими 2^{2^n} равна C_n^k, где $k = [n/2]$.*

11*. Полиэдральные комплексы

Дальнейшее очень важное обобщение понятия геометрической решетки возникает в комбинаторной топологии при изучении симплициальных и полиэдральных комплексов. Это конечные *градуированные* у-множества, минимальные элементы которых называются «точками» или «0-клетками». При этом требуется:

(i) чтобы любой идеал являлся «точечной полурешеткой», т. е. чтобы каждое его подмножество, имеющее верхнюю грань, имело бы и точную верхнюю грань, которая была бы объединением точек;

---

[1]) Dilworth R. P. — Ann. Math., 1950, 51, p. 161—166. На связь с теоремой Кёнига указал Фалкерсон (Fulkerson D. R. — Proc. AMS, 1956, 7, p. 701—702).

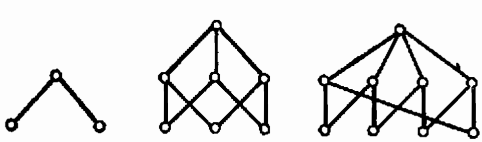
[2]) Sperner A. — Hamb. Abh., 1930, 7, S. 149—163. См. также работы Лирнера (Learner A. — MR., 21, #4930) и Эрдеша и Радо (Erdös P., Rado R. — Quart. J. Math., 1961, 12, p. 313—320).

[3]) Душник и Миллер (Dushnik B., Miller E. W. — Amer. J. Math., 1941, 63, p. 600—610).

(ii) чтобы каждая «прямая» (или «1-клетка») содержала в точности две точки. Таким образом, граф является просто комплексом высоты один.

На рис. 16, *а—в* изображены комплексы, соответствующие сегменту, треугольнику и квадрату. По определению, n-симплекс есть у-множество 2^{n+1} с исключенным 0. На рис. 16, *а—б* представлены симплексы для $n = 1, 2$. Комплекс, все идеалы которого являются симплексами, называется *симплициальным* комплексом в силу понятных геометрических ассоциаций.

Как ни удивительно, но, по-видимому, до сих пор не найдена простая характеризация комплексов (полурешеток), которые соответствуют n-мерным *полиэдрам* для $n > 3$; отыскание такой характеристики представляет собой одну из основных проблем, предложенных ван Кампеном[1]). Однако, если определить *границу* ∂a_i k-клетки a_i как множество всех $(k-1)$-клеток, *покрываемых* a_i, а границу ∂R множества R k-клеток $a_1, \ldots, a_m$ как булеву сумму (в смысле булевых колец) $\sum_R \partial a_i$, то классическим результатом является равенство



а) *б)* *в)*

Рис. 16.

$$\partial(\partial R) = \varnothing \text{ для всех } R. \tag{16}$$

Поэтому мы постулируем:

(iii) в любом комплексе должно выполняться условие (16).

Интересные абстрактные теории в комбинаторной топологии, основанные на подобных аксиомах, были предложены Майером, П. С. Александровым и др. [2]).

Налагают еще и самодвойственное условие ориентируемости:

(iv) можно приписать значение ± 1 каждому случаю покрытия таким образом, что если ∂a_i принимает значения $\pm 1 \in \mathbf{Z}$, то выполняется (16) [3]).

Мы ограничимся упоминанием лишь о некоторых очевидных фактах, связанных с введенными понятиями.

Во-первых, кардинальная сумма двух комплексов C_1 и C_2 представляет топологическую сумму соответствующих многообразий, а кардинальное *произведение* C_1C_2 — декартово произведение $M(C_1) \times M(C_2)$ соответствующих многообразий (например, рис. 16, *в* изображает S_1^2, где S_1 — симплекс на рис. 16, *а*).

---

[1]) Kampen E. R. van. Die kombinatorische Topologie. — Hague, 1929.

[2]) Mayer W. — Monatsh. Math. Phys., 1929, 36, S. 1—42, 219—258. Александров П. С. — Матем. сб., 1937, 44, с. 501—519.

[3]) Имеется в виду сложение по mod 2 и нуль в правой части. — *Прим. перев. и ред.*

Далее, *двойственность* при разбиении многообразий без края — это не что иное, как решеточная двойственность.

В полиэдральном комплексе C множество h-клеток S с условием $\partial S = 0$ называется *h-циклом*. *Число Бетти* β_h для комплекса C — это максимальное число (линейно) независимых [1] h-циклов комплекса C минус максимальное число независимых *границ* h-циклов $B = \partial A$, где A — произвольное множество $(h+1)$-циклов. Обратно, любая геометрическая решетка имеет свою характеристику Эйлера—Пуанкаре и группу гомологии [2].

Упражнения к §§ 10—11

В упр. 1—8 P обозначает произвольное у-множество. Большинство упражнений принадлежит Бейкеру.

1. Покажите, что условия $b[P] = 1$, $\delta[P] = 1$ и то, что P — цепь, равносильны.

2. Покажите, что если у-множество P конечно и содержит универсальные грани, то P имеет плоскую диаграмму тогда и только тогда, когда оно является решеткой и притом размерности, не большей двух.

3. Покажите, что $b[L] = b[\breve{L}]$ [3]. (Указание. См. теорему II.13.)

4. Постройте девятиэлементную решетку L такую, что $b[L] = 2$, $\delta[L] = 3$.

5. Покажите, что $b[L] \leqslant \delta[L]$ для любой решетки L.

6. Покажите, что $b[L] = \delta[L]$ для любой конечной дистрибутивной решетки. (Указание. Используйте теорему Дилуорса.)

*7. (а) Покажите, что если P и Q — у-множества с универсальными гранями, то $\delta[PQ] = \delta[P] + \delta[Q]$, $b[PQ] = b[P] + b[Q]$.

(б) Обобщите этот результат на случай произвольных кардинальных произведений.

*8. Покажите, что если P конечно и $o(P) \geqslant 3$, то $\delta(P) \leqslant \dfrac{o(P)}{2}$ [4] (Хирагути).

9. Покажите, что любой комплекс становится решеткой, если присоединить O.

10. Нарисуйте диаграмму, представляющую треугольную призму (произведение 1-симплекса и 2-симплекса).

11. Нарисуйте диаграмму, двойственную для комплекса, соответствующего кубу, и объясните, каким образом (присоединением I и исключением O) она представляет октаэдр.

12. (а) Охарактеризуйте абстрактные конфигурации, представляющие полигональные разбиения 1-сферы (окружности).

(б) То же для полиэдральных разбиений 2-сферы. (Указание. Каждое ребро имеет две вершины, а грани, сходящиеся в одной точке, упорядочены циклически.)

*13. (а) Покажите, что π и π' образуют модулярную пару в том и только в том случае, когда топологический граф для π и π' не имеет циклов (вершинами

---

[1] По поводу «линейной зависимости» рассмотрите булеву алгебру $2^{n(h)}$ h-цепей как булево кольцо $V_{n(h)}(\mathbf{Z}_2)$.

[2] Фолкмен (Folkman J. — J. Math. Mech., 1966, 15, p. 631—636).

[3] Таким образом, двойственная для $\wedge$-ширины величина (которую можно было бы назвать $\vee$-шириной решетки) совпадает с ней. — Доказательство см. в работе Л. Н. Шеврина в кн. Теория полугрупп и ее приложения. — Саратов, 1965, с. 325—351. — *Прим. перев.*

[4] $o(P)$ обозначает порядок (число элементов) множества P. — *Прим. перев.*

этого графа являются π-классы A_i и π'-классы A'_j, причем A_i и A'_j соединены ребром тогда и только тогда, когда $A_i \wedge A'_j > 0$) [1]).

(б) Убедитесь, что определению полумодулярности по Уилкоксу [2]) удовлетворяют даже разбиения бесконечных множеств.

*14. (а) Покажите, что разбиения любого пространства с мерой на конечное число непересекающихся измеримых подмножеств образуют полумодулярную решетку.

(б) В каком смысле разбиения на счетное число непересекающихся измеримых подмножеств образуют полумодулярную решетку? А если отбросить множества меры нуль?

15. (а) Назовем комплекс «h-симметричным», если его группа автоморфизмов транзитивна на h-клетках. Покажите, что тогда число (h, k) h-клеток, инцидентных с каждой k-клеткой, зависит только от h и k (условие Мура).

(б) Покажите, что это справедливо для n-симплекса, причем

$$(h, k) = C_{h+1}^{k+1}, \text{ если } h > k.$$

12. Функция Мёбиуса

Пусть P — произвольное у-множество. Определим функцию *инцидентности* $n(x, y)$ на P (классической для комплексов) формулой:

$$n(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x < y, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{17}$$

Таким образом, $n(x, y)$ является характеристической функцией для отношения $<$, а $\xi(x, y) = \delta_{xy} + n(x, y)$ — для отношения порядка $\leqslant$ на P.

Если у-множество P *конечно*, то заданный в нем порядок можно усилить до линейного порядка, который расположит элементы множества P в конечную последовательность $x_1, \ldots, x_n$ так, что если $x_i < x_j$, то $i < j$. Для любого такого «допустимого» линейного порядка на P числа $n_{ij} = n(x_i, x_j)$ образуют треугольную матрицу $N = \| n_{ij} \|$, которая называется матрицей *инцидентности* для P (относительно допустимого линейного порядка).

Отсюда следует, что $I + N$ (дзета-матрица) обратима. Обратная для нее матрица $(I + N)^{-1}$ имеет много важных приложений в теории вероятностей, в теории чисел, в комбинаторном анализе и т. д. Полный обзор по этим вопросам содержится в фундаментальной работе Рота [1] [3]), мы же ограничимся очень беглым перечислением результатов, представляющих интерес для теории решеток.

---

[1]) Оре (O r e O. — Duke Math. J., 1942, 6, p. 583), а также Дюбрей и Дюбрей-Жакотен (D u b r e i l P., D u b r e i l-J a c o t i n M.-L. — J. Pur. Appl. Math., 1939, 18, p. 63—96).

[2]) То есть в смысле завершающего § 2 определения. — *Прим. перев.*

[3]) Автор хотел бы выразить свою признательность профессору Рота за многие весьма полезные беседы.

Определение. *Функция Мёбиуса*[1]) $\mu(x, y)$ для конечного у-множества определяется следующим образом: (i) $\mu(x, x) = 1$, (ii) $\mu(x, y) = 0$, если $x \nleqslant y$, и

$$\mu(x, y) = -\sum_{x \leqslant z < y} \mu(x, z), \text{ если } x < y. \tag{18}$$

Лемма 1 (Рота). *Функция Мёбиуса удовлетворяет условию*

$$\|\mu(x, y)\| = \|I + N\|^{-1} = I - N + N^2 - N^3 + \cdots \pm N^{l(P)}. \tag{19}$$

Доказательство непосредственное, по индукции. В качестве тривиального следствия получается следующая теорема Ф. Холла.

Первая теорема Холла. *Если $\lambda(x, y; n)$ обозначает число цепей длины n, которыми можно связать x и y, то*

$$\mu(x, y) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \lambda(x, y; k).$$

Лемма 2. *Пусть $\theta: x \to x^*$ — дуальный изоморфизм $P \to P^*$. Тогда функция Мёбиуса μ^* на P^* удовлетворяет равенству*

$$\mu^*(x, y) = \mu(x^*, y^*). \tag{20}$$

Мы опускаем доказательство этой леммы и последующих важной теоремы Холла и теоремы Рота [1].

Вторая теорема Холла. *Если P — решетка, то $\mu(x, y) = 0$ за исключением того случая, когда y является объединением элементов, покрывающих x.*

Теорема Рота. *Пусть в конечной геометрической решетке $x \leqslant y$. Тогда $\mu(x, y) \neq 0$, причем значение $\mu(x, y)$ положительно, если $h[y] - h[x]$ четно, и отрицательно, если $h[y] - h[x]$ нечетно.*

Теперь определим *характеристический многочлен* конечного *градуированного* у-множества (§ I.3) как

$$p_x(\lambda) = \lambda^{h[x]+1} - \sum_{y < x} p_y(\lambda). \tag{21}$$

Связь с функцией Мёбиуса устанавливается формулой

$$p_x(\lambda) = \sum \mu(x, y) \lambda^{h[y]+1}. \tag{21'}$$

Это частный случай формулы для числа способов раскраски графа (карты) Ω в λ цветов.

Рассмотрим у-множество P «подкарт» карты Ω (подкарта получается стиранием некоторых границ). Имеется λ^n способов раскраски n областей в λ цветов, каждый из которых окрашивает либо всю Ω, либо однозначно определенную подкарту карты Ω таким образом, чтобы никакие две прилегающие области не были окрашены в один цвет. Значит, $p_\Omega(\lambda)$ есть количество способов

---

[1]) Möbius A. F. — J. reine angew. Math., 1832, **9**, S. 105—123 (см. ниже упр. 1.) Обобщение на случай у-множеств дали Вайснер [1] и Ф. Холл (Hall P. — Quart. J. Math., 1936, 7, p. 134—151); см. также [**LT1**, §§ 39—40].

раскраски карты Ω в λ цветов таким образом, чтобы никакие две смежные области не имели одного цвета [1]). Связанное с этим приложение к релейно-контактным схемам рассматривал Тутте.

Функция Мёбиуса была применена Дилуорсом [2]) для доказательства следующего замечательного результата.

Теорема Дилуорса. *Пусть в конечной модулярной решетке M через V_k обозначено множество элементов, каждый из которых покрывается в точности k элементами, а через W_k — множество элементов, каждый из которых покрывает в точности k элементов. Тогда V_k и W_k имеют одинаковое число элементов.*

Полагая $k = 1$, получаем

Следствие. *В любой конечной модулярной решетке число $\wedge$-неразложимых элементов равно числу $\vee$-неразложимых элементов.*

(В конечной дистрибутивной решетке $L = 2^P$ оба числа по теореме III.3 совпадают с $o(P) = l(L)$ — длиной решетки L.)

Упражнения

1. Пусть в дистрибутивной решетке L натуральных чисел относительно делимости $m|n$ будет $\mu(n) = \mu(1, n)$.

(а) Покажите, что $\mu(n) = 0$ за исключением случая, когда n свободно от квадратов, а в этом случае $\mu(n) = (-1)^s$, где s — число различных простых в разложении числа n.

(б) Покажите, что $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$, если m и n взаимно просты.

(в) Покажите, что если $n = p_1 \ldots p_s$ (p_i — различные простые), то $p_n(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^s$.

2. (а) Докажите лемму 1.

(б) Докажите лемму 2.

3. Докажите, что для любых $x \leqslant y$ в у-множестве P функция $\mu(x, y)$ имеет на $[x, y]$ те же значения, что и на P.

4. Покажите, что на $P = 2^n$, если $x \leqslant y$, то $\mu(x, y) = (-1)^{h[y]-h[x]}$.

5. Пусть $P = PG_n(F)$, где F — поле Галуа с $q = p^r$ элементами. Покажите, что для $x \leqslant y$ будет

$$(*) \qquad \mu(x, y) = (-1)^h q^{C_h^2}, \quad \text{где} \quad h = h[y] - h[x].$$

6. (а) Пусть μ_P обозначает $\mu(O, I)$ в P. Покажите, что $\mu_{PQ} = \mu_P \mu_Q$.

(б) Пусть μ_1, μ_2, μ обозначают функции Мёбиуса на конечных у-множествах P, Q и PQ соответственно. Докажите, что $\mu((x, y), (u, v)) = \mu_1(x, u)\mu_2(y, v)$ (Рота).

7. Пусть $\mu_n = \mu(O, I)$ в симметрической решетке разбиений Π_n.

(а) Покажите, что $\mu_n = (-1)^{n-1}(n-1)!$.

(б) Вычислите $\mu(x, y)$ в Π_n. (Указание. Используйте упр. 6 и упр. 10 (б) к § 9.)

---

[1]) См. работы Биркгофа (Birkhoff G. D. — Ann. Math., 1913, **14**, p. 42—46), Биркгофа и Льюиса (Birkhoff G. D., Lewis D. C. — Trans. AMS, 1946, **60**, p. 355—451, и здесь же ссылки), Тутте (Tutte W. T. — Canad. J. Math., 1953, **6**, p. 80—91). Связь с функцией Мёбиуса впервые была отмечена автором.

[2]) Dilworth R. P. — Ann. Math., 1954, **60**, p. 359—364; см. также работу Эвана (Avann S. P. — Proc. AMS, 1960, **11**, p. 9—16).

8. Покажите, что «подкарты» конечной карты образуют решетку, дуальную геометрической.

9. Покажите, что в любой конечной дистрибутивной решетке

$$\mu(O, x \wedge y)\,\mu(O, x \vee y) = \mu(O, x)\,\mu(O, y).$$

10. Покажите, что стягивания любого графа образуют геометрическую решетку. («Стягивание» графа получается последовательным отождествлением пар смежных вершин с удалением соответствующего ребра.)

11. Сколько существует способов раскраски в λ цветов карты, состоящей из n треугольников, сторонами которых являются стороны правильного n-угольника и радиусы из его центра к вершинам?

12. Любой набор из λ элементов группы G конечного порядка g порождает либо саму G, либо подгруппу S в G. Проверьте, что число $P_G(\lambda)$ порождающих множеств группы G, имеющих λ элементов каждое, определяется рекурсивно формулой

$$P_G(\lambda) = \lambda^g - \sum_{S<G} P_S(\lambda).$$

13. Покажите, что разбиения числа n (§ I.8, пример 10) образуют модулярное у-множество, в котором $\mu(0, x)$ равняется $(-1)^d$ для любых двух элементов высоты d и равняется 0 в остальных случаях (Уэйлс).

13*. Проективные преобразования и коллинеации

Задача изучения группы Aut G всех автоморфизмов («симметрий») геометрической решетки представляется чрезвычайно заманчивой и имеет длинную историю. Сначала рассмотрим случай $G = PG_n(D)$ n-мерной проективной геометрии над телом D. Случай $n = 1$ тривиален: здесь Aut G совпадает с симметрической группой всех перестановок множества точек в G.

Для произвольного n группа Proj G всех проективных преобразований

$$w_i = \frac{z_1 a_{1i} + \cdots + z_n a_{ni} + a_{n+1,\,i}}{z_1 b_1 + \cdots + z_n b_n + b_{n+1}} \qquad (b_j = a_{j,\,n+1},\ i = 1, \ldots, n), \tag{22}$$

где $\| a_{ij} \|$ — невырожденная $(n+1) \times (n+1)$-матрица, очевидно, является *подгруппой* группы Aut G, если отождествлять матрицы, отличающиеся числовым множителем. При $n = 1$ эта подгруппа *трижды транзитивна*, для $n > 1$ дважды транзитивна и «почти» трижды транзитивна (она переводит три коллинеарные или неколлинеарные точки в три другие, обладающие этим же свойством). Если в качестве D взять поле действительных чисел $\mathbf{R}$, то при $n > 1$ группа Proj G = Proj $PG(\mathbf{R})$ совпадает с группой Aut G, которая, таким образом, имеет те же свойства.

В общем случае (для $n > 1$) Aut G является *группой коллинеаций*; для любого автоморфизма φ тела D преобразование

$$w_i = \frac{z_1^{\varphi} a_{1i} + \cdots + z_n^{\varphi} a_{ni} + a_{n+1,\,i}}{z_1^{\varphi} b_1 + \cdots + z_n^{\varphi} b_n + b_{n+1}} \tag{23}$$

также является коллинеацией, и *обратно*. Таким образом, группа Aut G будет полупрямым произведением группы Proj G и группы

Галуа тела D (над его простым подполем). См. также [LT2, глава VIII, § 7].

Наконец, классическим результатом является то, что любая проективная плоскость, в которой имеет место теорема Дезарга [1]) (т. е. дезаргова), есть $PG_2(D)$; этот результат мы обсудим в § 14. Далее, при $h > 2$ любая проективная геометрия длины $h+1$, и в частности $PG_h(D)$, является дезарговой. Однако существуют и *недезарговы проективные плоскости*.

Приведенные результаты сводят изучение *модулярных* геометрических решеток и их автоморфизмов (i) к изучению тел и их групп Галуа и (ii) к изучению недезарговых проективных плоскостей. Более того, в *конечном* случае, который является наиболее интересным с комбинаторной точки зрения, все тела и их группы автоморфизмов легко перечисляются: существует только одно тело [2]) (для каждого возможного порядка: ими являются степени простых чисел p^r) — это «поле Галуа» с циклической группой автоморфизмов порядка r. Следовательно, по крайней мере, когда речь идет о *конечных* модулярных геометрических решетках, покров тайны скрывает именно недезарговы проективные плоскости.

Теории конечных недезарговых проективных плоскостей в математической литературе уделено огромное внимание [3]). Замечательная теорема Острома и Вагнера, например, утверждает, что конечная проективная плоскость P является дезарговой тогда и только тогда, когда ее группа коллинеаций $\mathrm{Aut}\,P$ дважды транзитивна на точках. Другие теоремы связаны с описанием целых n, для которых существуют проективные плоскости с $n+1$ точками на каждой прямой (и значит, с общим числом точек n^2+n+1). Такой плоскости нет, например, при $n=6$ (Тарри) и вообще при любом n, сравнимом с 1 или 2 по модулю 4 и не являющемся суммой двух квадратов (теорема Брака—Райзера).

14*. Проблема координатизации

Теперь обратимся к проблеме координатизации, т. е. к проблеме представления данной геометрической решетки «замкнутыми» подмножествами некоторой алгебраической системы, например,

---

[1]) Эта теорема утверждает, что два треугольника, перспективные по отношению к точке, перспективны по отношению к некоторой прямой, и обратно.

[2]) Каждое конечное тело коммутативно. О конечных полях см. в книге ван дер Вардена [II, 1, § 43].

[3]) Прекрасное, ставшее классическим изложение см. в книге Холл М. Теория групп. — М.: ИЛ, 1962, глава XX. По поводу теоремы Острома—Вагнера см. Math Z., 1959, **71**, S. 186—199. См. также работу Фрайера (Fryer K. D.) в [Symp, p. 71—78]. [Можно назвать также обзорную статью Л. А. Скорнякова (УМН, 1951, **6**, № 6, с. 112—154) и энциклопедическую монографию Пиккерта (Pickert G. Projektive Ebenen. — 2 Aufl. — Springer-Verlag, 1975). — *Прим. ред.*]

подпространствами или «плоскими множествами» векторного пространства или аффинного пространства. Возможность такой координатизации в проективных геометриях была осознана примерно сто лет назад фон Штаудтом [1]), который изобрел для этого «алгебру вурфов». Технически, как впервые отметили Артин и Холл [2]), эта проблема более проста для аффинных плоскостей (в которых определена параллельность), чем в случае проективных плоскостей.

В принципе эта проблема берет свое начало в «геометрической алгебре» греков, которые использовали конфигурации вместо алгебраических равенств (по-видимому, из-за отсутствия хороших алгебраических обозначений). Зафиксируем (произвольным образом) начало отсчета $(0, 0)$ и три множества параллельных прямых, которые будем представлять себе как прямые вида $x = a$, $y = b$ и $x + y = c$ при произвольных постоянных a, b, c. Осями x и y будут прямые $y = 0$ и $x = 0$, проходящие через «начало». Нужно выбрать еще единицу 1, фиксируя точку $(1, 0)$ на оси x. Прямая $x + y = 1$ будет проходить через эту точку и пересекать прямую $x = 0$ в точке $(0, 1)$. Тогда каждая точка на плоскости получит координаты (a, b).

Чтобы построить $a + b$, проведем через точку $(b, 0)$ прямую, параллельную прямой, проходящей через $(0, 0)$ и $(a, 1)$. Она пересечет прямую $y = 1$ в точке $(a + b, 1)$. Чтобы построить ab, проведем через точку $(0, b)$ прямую, параллельную прямой, проходящей через $(0, 1)$ и $(a, 0)$. Построенная прямая пересечет ось x в точке $(ab, 0)$. Коммутативность умножения будет равносильна теореме Паппа: если вершины шестивершинника лежат поочередно на двух прямых, то три точки пересечения пар его противоположных сторон располагаются на одной прямой. Остальные тождества из аксиом поля (т. е. тождества, определяющие тело) равносильны другим «конфигурационным» геометрическим теоремам [3]).

Обратно, пусть дана алгебра H с одной тернарной операцией $a + sx$, которая удовлетворяет следующим условиям:

(i) если $a + sx = a' + sx$, то $a = a'$;

(ii) если $s \neq s'$, то $a + sx = a' + s'x$ в точности для одного x;

---

[1]) Исторические сведения см. у Веблена и Юнга (Veblen O., Young J. M. Projective Geometry. — Boston, 1910, v. I, p. 141, § 55).

[2]) Artin E. — Coordinates in affine geometry. Reps. Math. Colloq. Notre Dame, 1940. Его же. — Геометрическая алгебра. — М.: Наука, 1969, глава II. Также работа Холла (Hall M. — Trans. AMS, 1943, 54, p. 229—277, § 5). [Об исчислении вурфов см. также Глаголев Н. А. Проективная геометрия. — М.: Высшая школа, 1963. — *Прим. ред.*]

[3]) Классическая трактовка этих вопросов содержится в книге Веблена и Юнга (Veblen O., Young J. W. Projective Geometry. — Boston, 1910). О современном подходе см. у Пиккерта (Pickert G. Projective Ebene. — 2 Aufl. — Springer, 1975), а также Бэр Р. Линейная алгебра и проективная геометрия. — М.: ИЛ, 1955, глава VII, и книги Артина (Артин Э. Геометрическая алгебра. — М.: Наука, 1969) и Холла (Холл М. Теория групп. — М.: ИЛ, 1962, глава XX).

(iii) при заданных x, y, $x \neq x'$ и y' система уравнений $a + sx = y$, $a + sx' = y'$ имеет в точности одно решение a, s.

Мы назовем такую алгебру *тернаром*.

Если задан тернар A, то «точками» назовем пары чисел $(x, y) \in A^2$, а «прямыми» — множества, определяемые уравнениями вида $x = c$ и $y = a + sx$ при любых заданных c, s, a из A. Тогда выполняются следующие аксиомы для *аффинной плоскости*:

AP1 Любые две различные точки p, q лежат на одной и только на одной прямой $p \vee q$.

AP2 Если дана прямая $p \vee q$ и $r \not\leqslant p \vee q$, то существует в точности одна прямая $r \vee s$ такая, что $(p \vee q) \wedge (r \vee s) = \varnothing$.

AP3 Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

Мы опускаем (почти тривиальную) проверку. В результате получается

Теорема 16. *Любую аффинную плоскость можно координатизировать некоторым тернаром, и любой тернар определяет некоторую аффинную плоскость.*

Однако, одной и той же аффинной плоскости могут соответствовать много тернаров в зависимости от выбора начала и множества (пучков) параллельных прямых. В дезарговом случае все они будут изоморфными, но в общей ситуации это не так [1]).

Координаты в кольцах. Остроумная, основанная на совсем других соображениях «координатизация» для модулярных геометрических решеток, являющихся произведениями проективных геометрий, была предложена фон Нейманом [**Neu**, ч. II]. Основная идея связана с фундаментальной теоремой 10 для модулярных геометрических решеток.

Именно, любая такая «дезаргова» геометрическая решетка G является произведением $2^r \prod_{i=1}^{s} P_i$ булевой алгебры 2^r и дезарговых проективных геометрий P_i. Каждая $P_i = PG_{n(i)}(D_i)$ изоморфна решетке всех правых идеалов «полного матричного кольца» $M_i = M_{n(i)}(D_i)$, состоящего из $n(i) \times n(i)$-матриц над телом D_i, а 2 изоморфна решетке всех правых идеалов поля F. Значит, G изоморфна решетке всех правых идеалов (полупростого) кольца, являющегося прямой суммой $\bigoplus_{i=1}^{s} M_i \oplus F^r$ s колец M_i и r экземпляров поля F. Этим доказана

---

1) Тернары связаны с лупами. См. у Хьюгса (Hughes D. R. — Proc. AMS, 1955, **6**, p. 973—980). Как в [**LT2**, с. 162], мы не предполагаем наличия 0 или 1. См. еще работу Уэссена (Wesson J. R. — Amer. Math. Monthly, 1966, **73**, p. 36—40). [См. также Скорняков Л. А. — УМН, 1951, **6**, № 6, с. 112—154; Белоусов В. Д. Алгебраические сети и квазигруппы. — Кишинев: Штиинца, 1971. — *Прим. перев. и ред.*]

Теорема 17 (фон Нейман). *Любая дезаргова геометрическая решетка G изоморфна решетке всех правых идеалов подходящего полупростого кольца.*

Заметим, что хотя F произвольно, множества тел D_i и порядков $n(i)$ в вышеуказанном разложении определяются однозначно. Обратно, если R — произвольное полупростое кольцо и если решетка L его правых идеалов имеет конечную длину, то L является модулярной геометрической решеткой.

Бинарные геометрические решетки. Другой, очень оригинальный подход к проблеме координатизации нашел Тутте [1]), который, следуя первоначальным построениям Уитни, рассматривает геометрические решетки как «матроиды». Назовем геометрическую решетку *бинарной*, если никакой ее интервал высоты два не содержит более трех точек. Например, решетки разбиений Π_n «бинарны». Тутте доказал, что матроид всех «многоугольников» (простых циклов) любого графа Г также является бинарным и «регулярным», и эта регулярность равносильна исключению двух специальных конечных конфигураций (конфигурации Фано и «семигранника»). Такие регулярные бинарные матроиды могут быть (единственным образом) координатизированы при помощи «цепных групп» над $\mathbf{Z}_2$.

15. Ортодополнения в $PG_{n-1}(D)$

Сравнительно нетрудно описать операции взятия ортодополнения, которые можно построить в *дезарговой* модулярной геометрической решетке. Этим мы сейчас и займемся [2]). Поскольку центр является булевой алгеброй, в которой существует только одна операция взятия ортодополнения, то в силу результатов § 14 достаточно описать все возможные операции взятия ортодополнения в произвольной «конкретной» проективной геометрии $PG_{n-1}(D)$, т. е. в решетке всех подпространств n-мерного правого векторного пространства $V_n(D) = D^n$ над некоторым телом.

Сопряженное пространство V_n^* состоит из всех линейных слева функционалов $f(x)$ на D^n, удовлетворяющих условиям

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{и} \quad f(x\lambda) = f(x)\lambda \text{ для всех } \lambda \in D. \tag{24}$$

Они образуют также *левое* n-мерное векторное пространство над D — изоморфную копию пространства $D^{\#n}$, где $D^{\#}$ получается из D *обращением* порядка сомножителей в операции умножения. Далее, из теории систем линейных уравнений над телом следует, что для любого k-мерного подпространства $S_k \subset V_n$ множество

---

[1]) Tutte W. R. — Trans. AMS, 1958, **88**, p. 144—174; 1959, **90**, p. 527—552; Proc. AMS, 1960, **11**, p. 905—917; J. Res. Nat. Bureau Standarts Sect., 1965, **69B**, p. 1—47.

[2]) См. статью Биркгофа и фон Неймана [1, приложение].

всех $f \in V_n^*$ таких, что $f(x) = 0$ для любого $x \in S_k$, является $(n-1)$-мерным подпространством $T_{n-k} = S_k^*$ в V_n^*. Этим доказана следующая

Теорема двойственности для линейных уравнений. *Отображение* δ: $S_k \to S_k^*$ *является дуальным изоморфизмом решетки* $PG_{n-1}(D)$ *на решетку* $PG_{n-1}(D^\#)$. *Если* δ^*: $T_k \to T_k^+$ *— аналогичное соответствие между* $PG_{n-1}(D^\#)$ *и* $PG_{n-1}(D)$, *то* $\delta\delta^*$ *и* $\delta^*\delta$ *являются тождественными преобразованиями на своей области определения (т. е.* δ *и* δ^* *взаимно обратны).*

Отсюда очевидным образом следует, что если $P = PG_{n-1}(D)$, то PP^* всегда можно превратить в орторешетку. Однако сделать орторешеткой саму решетку P (т. е. задать операцию ортодополнения на P) не так просто, а если P не является самодвойственной, то и вовсе невозможно!

Если решетка P самодвойственна, то произведение $\varphi\delta^*$ *любого* ее дуального автоморфизма φ на определенную выше каноническую двойственность δ^* является *автоморфизмом* решетки P, и значит (при $n > 2$) *коллинеацией*. Таким образом, этот автоморфизм определяется преобразованием вида (23) решетки P, соответствующим *полулинейному* преобразованию $x_i \to \sum a_{ij} x_j^\alpha$ (где α — *автоморфизм* тела D, а $A = \| a_{ij} \|$ — невырожденная матрица) векторного пространства V_n. Из этого результата как следствие получается

Теорема 18. *Дуальный изоморфизм* $PG_{n-1}(D) \to PG_{n-1}(D^\#)$ *самого общего вида сопоставляет каждому* $S_k \in PG_{n-1}(D)$ *множество* T_{n-k} *всех* $f \in D^{\#n}$ *таких, что*

$$\sum f_j a_{jk} x_k^\alpha = 0 \text{ для всех } \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in S_k, \tag{25}$$

где $A = \| a_{ij} \|$ *— некоторая невырожденная* $(n \times n)$*-матрица, а* α *— некоторый автоморфизм тела* D.

Следствие 1. *Дуальный автоморфизм решетки* $PG_{n-1}(D)$ *самого общего вида получается заданием матрицы* $A = \| a_{ij} \|$ *и антиавтоморфизма* $x \to x^\#$ *тела* D *и связывает с каждым* $S \in PG_{n-1}(D)$ *множество* $S^\perp$ *всех* $y \in D^n$ *таких, что*

$$\sum x_j^\# a_{jk} y_k = 0 \text{ для любого } \boldsymbol{x} \in S. \tag{26}$$

Следствие 2. *Дезаргова геометрия* $PG_{n-1}(D)$, $n > 2$, *тогда и только тогда имеет дуальный автоморфизм, когда тело* D *допускает антиавтоморфизм.*

Для заданного антиавтоморфизма $x \to x^\#$ и матрицы a_{jk} всегда будет

$$(S \vee T)^\perp = S^\perp \wedge T^\perp \text{ и } (S \wedge T)^\perp = S^\perp \vee T^\perp. \tag{27}$$

Для того, чтобы было $(S^\perp)^\perp = S$, необходимо и достаточно выполнение равенства $a_{kj} = a_{jk}^\#$ (с точностью до числового множителя, который определяется однозначно, если только не все a_{jj} равны 0). Для выполнения равенства $S \wedge S^{\perp} = O$ (равносильного согласно (27) равенству $S \vee S^{\perp} = I$) необходимо и достаточно, чтобы матрица $A = \| a_{ij} \|$ была для антиавтоморфизма $\#$ *определенной*, т. е. чтобы

(28) $$\text{если } \sum x_j^{\#} a_{jk} x_k = 0, \text{ то } x_1 = \cdots = x_n = 0.$$

Поскольку поле действительных чисел не допускает собственных автоморфизмов, то имеет место

Теорема 19. *Чтобы превратить $PG_{n-1}(\mathbf{R})$ в орторешетку при $n > 2$, $S^{\perp}$ должно быть ортодополнением для S относительно некоторой положительно определенной квадратичной формы.*

Следствие. *При $n > 2$ любая орторешетка, изоморфная решетке $PG_{n-1}(\mathbf{R})$ как решетка, будет изоморфна как орторешетка орторешетке подпространств евклидова n-пространства (упорядоченной теоретико-множественным включением и с операцией взятия ортогонального дополнения).*

Упражнения к §§ 13—15

1. Покажите, что «прямая» с n точками может быть координатизирована телом тогда и только тогда, когда $n = p^k + 1$, где p — простое и k — натуральное числа.

2. Дайте прямое доказательство того, что точки решетки $PG_n(D)$ порождают относительно операции $\vee$ полурешетку.

3. (а) Покажите, что в $PG_n(\mathbf{R})$, $n > 1$, каждая операция ортодополнения подобна ортодополнению, определяемому скалярным произведением $\sum x_i y_i$.

(б) Покажите, что в $PG_n(\mathbf{C})$, $n > 1$, каждая операция ортодополнения изоморфна ортодополнению, определяемому эрмитовым произведением $\sum x_i y_i^*$.

4. Пусть F — поле «формальных действительных чисел», в котором все $x_i = 0$, если $\sum x_i^2 = 0$, и пусть $S^{\perp}$ будет множеством всех y таких в $V_n(F)$, что $\sum x_i y_i = 0$. Покажите, что тем самым $PG_{n-1}(F)$ превращается в модулярную орторешетку.

5. (а) Покажите, что если $\mathbf{R}$ — поле действительных чисел, а $\mathbf{Q}$ — тело кватернионов, то $PG_2(\mathbf{Q})$ изоморфна подрешетке решетки $PG_{11}(\mathbf{R})$.

(*б) Убедитесь, что теорема Паскаля не эквивалентна никакому решеточному тождеству. (Указание. См. главу VI.)

*6. На проективной плоскости для заданных a_i ($i = 1, 2, 3, 4$) положим $b_{12} = (a_1 \vee a_2) \wedge (a_3 \vee a_4)$ и т. д., $c_{12} = (a_1 \vee a_2) \wedge (b_{13} \vee b_{14})$ и т. д. Покажите[1]), что теорема Дезарга эквивалентна тождеству $c_{12} \leqslant c_{23} \vee c_{31}$.

*7. На проективной плоскости для a_i, b_i ($i = 1, 2, 3$) положим

$$y = (a_1 \vee a_2) \wedge (b_1 \vee b_2) \wedge [\{(a_1 \vee a_3) \wedge (b_1 \vee b_3)\} \vee \{(a_2 \vee a_3) \wedge (b_2 \vee b_3)\}].$$

Покажите, что теорема Дезарга эквивалентна тождеству

$$\bigwedge_{i=1}^{3} (a_i \vee b_i) \leqslant [a_1 \wedge (a_2 \vee y)] \vee [b_1 \wedge (b_2 \vee y)].$$

---

[1]) Упр. 6 принадлежит Шютценберже (Schützenberger M. P. — C. R. Acad. Sci., 1945, 221, p. 218—220), а упр. 7—8 — Йонссону (Jónsson B. — Math. Scad., 1953, 1, p. 193—206).

*8. (а) Покажите, что никакая недезаргова проективная геометрия не может быть изоморфной решетке нормальных подгрупп.

(б) Покажите, что аналогичный результат верен и для свободной модулярной решетки с четырьмя порождающими.

9. (а) Покажите, что если M — подрешетка модулярной геометрической решетки, все простые интервалы которой проективны, и если $[a, b]$ и $[c, d]$ — интервалы длины 3 в M, то они одновременно являются или не являются дезарговыми плоскостями.

(б) Покажите, что не всякая модулярная решетка изоморфна подрешетке модулярной решетки с дополнениями [1]).

«Нуль-системой» [2]) называется проективная геометрия P с полярностью $S \to S^*$ такой, что $p \leqslant p^*$ для любой точки $p \in P$.

10. (а) Покажите, что в нуль-системе, если $p \leqslant q^*$, то $p^* \geqslant q$.

(б) Докажите, что никакая проективная геометрия на плоскости не может быть превращена в нуль-систему.

*11. (а) Покажите, что любая нуль-система содержит цепь $O < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < I$, в которой x_i покрывает x_{i-1} и $x_i^* = x_{n-i}$.

(б) Покажите, что если в $PG_n(D)$ задана нуль-система и в качестве координатных пространств взяты эти x_i, то в матрице «полярности» $\|a_{ij}\|$ можно элементы первых двух строк и столбцов сделать нулевыми, кроме $a_{01} = 1$ и $a_{10} = -1$.

(в) Покажите, что n нечетно и что можно все коэффициенты сделать равными нулю, кроме $a_{2i,\,2i+1} = 1$ и $a_{2i+1,\,2i} = -1$.

(г) Установите, что тело D должно быть коммутативным.

ПРОБЛЕМЫ

12. Как можно было бы определить «модулярные пары» (т. е. отношение aMb) в произвольном у-множестве?

13. Найти необходимое и достаточное условие, которому должна удовлетворять решетка, чтобы все ее гомоморфные образы были полумодулярными. Будет ли гомоморфный образ полумодулярной решетки полумодулярной решеткой? [3]) (См. Дюбрей-Жакотен, Лезье, Круазо [1, p. 95, теорема 2].)

14. Для каких m, n решетка $\breve{\Pi}_m$ допускает вложение в решетку Π_n?

15. Каждая ли конечная решетка является гомоморфным образом подходящей подрешетки симметрической решетки разбиений Π_n при некотором конечном n?

16. Каждый ли гомоморфный образ подрешетки решетки Π_n допускает вложение в некоторую решетку Π_m (m конечное)? [4])

17. Каждая ли решетка конечной длины изоморфна подрешетке некоторой геометрической решетки конечной длины?

18. Какие модулярные решетки M можно представить как подрешетки модулярных решеток с дополнениями L? В тех слу-

---

[1]) Холл и Дилуорс (Hall M., Dilworth R. P. — Ann. Math., 1944, **45**, p. 450—456).

[2]) См. работы Брауэра (Brauer R. — Bull. AMS, 1936, **42**, p. 247—254) и Бэра (Baer R. — Bull. AMS, 1945, **51**, p. 903—906).

[3]) Джонс (Jones P. R. — Algebra univers., 1979, **9**, № 1, p. 127—130) дал отрицательный ответ на этот вопрос. — *Прим. перев.*

[4]) Из результата Пудлака и Тумы (см. сноску на с. 130) следует положительный ответ на вопросы 15 и 16. — *Прим. перев.*

чаях, когда это возможно, нельзя ли сделать длину решетки L равной длине решетки M (Дилуорс — Холл)? [1])

19. Определить все симметричные конфигурации, имеющие малую длину и небольшое число элементов [2]).

20. Какие (m, n)-системы для заданных m, n допускают группу автоморфизмов, транзитивную на точках? [3])

21. При каких n существуют проективные плоскости, имеющие $n+1$ точку на каждой прямой?

22. Перечислите все конечные проективные плоскости. Какие из них самодвойственны? Какие допускают ортодополнение?

23. Какие конечные проективные плоскости имеют группы автоморфизмов, транзитивные: (а) на точках; (б) на прямых? Не следует ли из всех этих условий теорема Дезарга? Есть ли среди этих геометрий такая, которая не имеет нетривиальных автоморфизмов?

24. Существует ли проективная плоскость, которая имеет дуальный автоморфизм периода два, перестановочный с каждой коллинеацией (решеточным автоморфизмом)?

25. Охарактеризовать комбинаторно все у-множества, которые соответствуют полиэдральным разбиениям сферы [4]).

26. Получить эффективный тест для распознавания ориентируемости конфигураций.

27. Какие конечные у-множества с I, удовлетворяющие условию Жордана — Дедекинда, с точностью до изоморфизма определяются характеристическим многочленом $p_I(\lambda)$? Множеством всех характеристических многочленов $p_x(\lambda)$? [5])

28. Пусть L — «конфигурация», определяемая выпуклым многогранником в n-пространстве. Найти оценку для «размерности» (в смысле Душника — Миллера) конфигурации $\breve{L}$ (Курепа).

29. Охарактеризовать абстрактно (с точностью до изоморфизма) решетку Γ_n всех выпуклых многогранников в действительном n-пространстве. Каковы ее модулярные пары?

30. Будет ли каждая конечная модулярная орторешетка дезарговой (Фоулис)?

---

[1]) Проблемы 18, 19, 20, 25 и 26 — это соответственно проблемы 55, 5, 53, 3 и 4 из [**LT2**]. — *Прим. перев.*

[2]) См. Мур (Moore E. H. — Amer. J. Math., 1896, **18**, p. 264) и Леви (Levi F. Geometrische Konfigurationen. — Berlin: Springer, 1927).

[3]) По поводу проблем 18—21 см. книгу Холла (Hall M. Combinatory Analysis. — Ginn — Blaisdell, 1967).

[4]) См. книгу ван Кампена (Kampen E. R. van. Kombinatorische Topologie. — Hague, 1929).

[5]) Проблема 6 из [**LT2**]. Ответ на первый вопрос дал Сокол Ю. (В кн.: Упорядоченные множества и решетки, вып. 4. — Саратов. Изд-во Саратовск. ун-та, 1977, с. 113—123). — *Прим. перев.*

ГЛАВА V

ПОЛНЫЕ РЕШЕТКИ

1. Операции замыкания

В § I.4 полная решетка была определена как у-множество, в котором каждое подмножество имеет точную верхнюю грань и точную нижнюю грань. Понятно, что всякая решетка конечной длины является полной. Прямое произведение любых двух полных решеток также будет полной решеткой. Кардинальная степень X^Y для у-множеств X и Y является полной решеткой, если основание X — полная решетка.

В теореме I.6 мы показали также, что подмножества произвольного множества I, «замкнутые» относительно какого-нибудь свойства замыкания на I, образуют полную решетку, причем свойство *замыкания* для подмножеств множества I выделялось условиями: 1) для самого I выполняется это свойство и 2) любое пересечение подмножеств, имеющих указанное свойство, также им обладает.

Очевидно, что совокупности подмножеств, «замкнутых» относительно свойств замыканий, это в точности муровские семейства в смысле следующего определения.

Определение. *Муровское семейство* подмножеств множества I — это семейство подмножеств, которое 1) содержит I и 2) содержит пересечение $\bigcap X_\alpha$, если все X_α принадлежат семейству (т. е. оно замкнуто относительно пересечений).

Теперь покажем, что понятие «свойство замыкания» в сущности своей равносильно понятию «операция замыкания», определяемому ниже, и дадим другое доказательство теоремы I.6.

Определение. *Операцией замыкания* на множестве I называется оператор $X \to \overline{X}$ на подмножествах этого множества такой, что

C1 $\qquad X \subset \overline{X}$ (экстенсивность);

C2 $\qquad \overline{X} = \overline{\overline{X}}$ (идемпотентность);

C3 $\qquad$ если $X \subset Y$, то $\overline{X} \subset \overline{Y}$ (изотонность).

Подмножество $X \subset I$, по определению, *замкнуто* относительно данной операции замыкания, если оно совпадает со своим «замыканием» $\overline{X}$.

Теорема 1. *Подмножества множества I, «замкнутые» относительно какой-нибудь операции замыкания, образуют муровское семейство, и обратно.*

Другими словами, свойство «быть замкнутым» является свойством замыкания, и обратно[1]).

Доказательство. Пересечение $D = \bigcap_{\Phi} X_\varphi$ любого набора замкнутых множеств замкнуто, поскольку в силу С3 будет $\overline{D} \subset \overline{X}_\varphi = X_\varphi$ для всех $\varphi \in \Phi$, откуда $\overline{D} \subset D$. Согласно С1, это означает, что D замкнуто. Обратно, если $\mathcal{F}$ — муровское семейство подмножеств множества I, то пусть $\overline{X}$ обозначает пересечение множеств $F_\alpha \in \mathcal{F}$, содержащих X. Так как $I \in \mathcal{F}$, то существует по крайней мере одно такое множество. Далее, $\overline{X} = \bigcap F_\alpha$ содержит X, поскольку каждое F_α содержит X, — это доказывает выполнимость С1. Так как каждое $F_\alpha \in \mathcal{F}$, содержащее X, содержит и $\overline{X}$ (по определению $\overline{X}$), то С2 истинно. Наконец, С3 выполняется тривиально, и доказательство закончено.

Теорема 2. *Любое муровское семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества I образует полную решетку относительно теоретико-множественного включения.*

Доказательство. Очевидно, что для любого семейства $\{X_\alpha\} \subset \mathcal{F}$ в $\mathcal{F}$ существуют $\inf\{X_\alpha\} = \bigcap X_\alpha$ и $\sup\{X_\alpha\} = \overline{\bigcup X_\alpha}$.

Следствие. *Подмножества произвольного множества, «замкнутые» относительно заданной на нем операции замыкания, образуют полную решетку, в которой точная нижняя грань совпадает с теоретико-множественным пересечением.*

Пример 1. Пусть G — произвольный моноид непрерывных преобразований, действующих на пространстве S. По определению, $X \in \mathcal{F}$ означает, что $X \subset S$ и для $x \in X$ и $\gamma \in G$ всегда $x\gamma \in X$. Тогда $\mathcal{F}$ является полной решеткой относительно теоретико-множественного включения.

Предыдущие результаты могут быть обобщены следующим образом.

Теорема 3. *Если P — у-множество и любое его подмножество (включая пустое) имеет в P точную нижнюю грань, то P является полной решеткой.*

Доказательство. Пусть $X \subset P$ и пусть U обозначает множество верхних граней для X. Положим $a = \inf U$. Если $x \in X$, то x является нижней гранью для U, так что $x \leqslant a$. Значит, a будет верхней гранью для X. Если теперь и b является верхней гранью для X, то $b \in U$, откуда $a \leqslant b$. Таким образом, $a = \sup X$; точные верхние грани подмножеств множества P существуют, и следовательно, P — полная решетка.

---

[1]) Теорема 1 восходит к Муру [1, р. 53—80]. Мур «свойства замыкания» называет «экстенсивно достижимыми». У Кона [1] «муровское семейство» выступает как «система замыканий».

Вообще, если S — произвольное подмножество полной решетки L такое, что $\inf X \in S$ для любого $X \subset S$, то S также является полной решеткой.

Определение. Если $S \subset L$ содержит $\inf X$ и $\sup X$ для любого $X \subset S$, то S называется *замкнутой подрешеткой* в L. *Операция замыкания* на решетке L — это операция $x \to \bar{x}$ на элементах решетки L, удовлетворяющая вышеуказанным условиям C1 — C3. Элементы $x \in L$, для которых $x = \bar{x}$, называются *замкнутыми*.

Следующие непосредственные обобщения теорем 1—3 получаются соответствующим пересказом их доказательств.

Теорема 4. *Пусть $x \to \bar{x}$ — операция замыкания на полной решетке L и пусть S — множество замкнутых элементов этой решетки. Тогда для $x_\alpha \in S$ будет $\bigwedge x_\alpha \in S$.*

Следствие. *Замкнутые элементы решетки L образуют полную решетку.*

Решетка всех операторов замыкания на данной решетке изучалась Морганом Уордом и др. [1]).

Упражнения

1. Покажите, что факторы [2]) a/b $(a \geqslant b)$ полной решетки образуют полную решетку в том случае, когда (i) $a/b \leqslant c/d$ означает, что $[b, a] \subset [d, c]$, и в том случае, когда (ii) $a/b \leqslant c/d$ означает, что $a \leqslant c$ и $b \leqslant d$.

2. Покажите, что если L — полная решетка и P — произвольное у-множество, то L^P является полной решеткой.

3. (а) Покажите, что бинарные отношения на любом множестве A образуют полную булеву алгебру $R(A) = 2^{A^2}$.

(б) Покажите, что рефлексивные отношения образуют в ней главный дуальный идеал, который, таким образом, является подрешеткой.

(в) Покажите, что симметричные отношения образуют в $R(A)$ замкнутую булеву подалгебру.

(г) Покажите, что транзитивные отношения образуют полную решетку, которая не является подрешеткой в $R(A)$.

4. Покажите, что тождество $x \vee \bar{\bar{x}} \leqslant \overline{x \vee y}$ является характеристическим для операции замыкания в любой полной решетке (Исеки).

5. Покажите, что условия C1 — C3 равносильны одному условию $y \cup \bar{\bar{y}} \cup \bar{\bar{x}} \subset \overline{x \cup y}$ (Монтейро).

6. Решеточный гомоморфизм называется «полным», если он сохраняет точные грани любых подмножеств. Покажите, что прообраз элемента при полном гомоморфизме полных решеток является замкнутым интервалом.

7. Покажите, что решеточный гомоморфизм между полными решетками не обязательно сохраняет бесконечные объединения и пересечения.

---

[1]) Ward M. — Ann. Math., 1942, **43**, p. 191—196. См. также работы Оре (Ore O. — Ann Math., 1943, **44**, p. 514—533; Duke Math. J., 1943, **10**, p. 761—785), Монтейро и Рибейро (Monteiro A., Ribeiro H. — Portug. Math., 1942, **3**, p. 191—284), Моргадо (Morgado J. — Math. Revs., 1962, **24**, p. 3092—3094).

[2]) В восходящей к Дедекинду традиции интервалы решетки называются ее факторами. Эту терминологию и соответствующее обозначение (b/a вместо $[a, b]$) автор использовал в [**LT1**]. — *Прим. перев.*

8. Покажите, что любой гомоморфный образ полной цепи — полная цепь.

***9.** Пусть $2^{\omega} = A$ — булева решетка всех подмножеств счетного множества и пусть F обозначает идеал конечных подмножеств. Покажите, что A полна, но ее гомоморфный образ A/F уже не будет полным.

10. В множестве C_L всех операторов замыкания на решетке L пусть $\varphi \leqslant \psi$ означает, что $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ для любого $x \in L$.

(а) Докажите, что если L полна, то получается полная решетка $C_L \subset L^L$.

(б) Докажите, что, если L не полна, то и C_L не будет полной.

11. Покажите, что решетка C_L модулярна тогда и только тогда, когда L — (полная?) цепь.

2. Решетки идеалов

В § II.3 мы уже встречались с решеткой $\hat{L}$ всех идеалов данной решетки L. Она содержит L в качестве подрешетки [1]) (подрешетки главных идеалов). Очевидно, что идеалы любой решетки L образуют муровское семейство подмножеств [2]) в L. Если L рассматривать как алгебру с одной бинарной операцией объединения $x \vee y$ и с унарными операциями $f_a(x) = x \wedge a$ для всевозможных $a \in L$, то идеалы решетки L будут в точности ее подалгебрами.

Т е о р е м а 5. *Всякая решетка L может быть вложена как подрешетка в полную решетку $\hat{L}$ всех своих идеалов.*

Можно дать явное описание пересечений и объединений в $\hat{L}$. Именно, имеет место

Л е м м а 1. *Если A, B — непустые идеалы решетки L, то пересечение $A \wedge B = A \cap B$ совпадает с множеством всех элементов вида $a \wedge b$ (где $a \in A$, $b \in B$), а объединение $A \vee B$ — с множеством всех $x \leqslant a \vee b$, где a и b пробегают соответственно A и B.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $a \wedge b \leqslant a, b$, то каждое такое $a \wedge b$ находится и в A, и в B, т. е. в пересечении $A \cap B$. Обратно, если $c \in A \cap B$, то $c = c \wedge c$, где $c \in A$, $c \in B$. Далее, любой идеал, который содержит A и B, должен содержать все $x \leqslant a \vee b$, где $a \in A$, $b \in B$. Обратно, множество $x \leqslant a \vee b$, $a \in A$, $b \in B$, очевидным образом содержит A и B и содержится в любом идеале, содержащем A и B. Так как для всех a, $a' \in A$ и b, $b' \in B$ будет $(a \vee b) \vee (a' \vee b') = (a \vee a') \vee (b \vee b')$, то это множество является идеалом.

Т е о р е м а 6 (Дилуорс). *Идеалы любой модулярной решетки M образуют модулярную решетку [3]) $\hat{M}$.*

---

[1]) Понятно, что имеется в виду вложимость решетки L в решетку $\hat{L}$ ее идеалов. — *Прим. перев.*

[2]) Если решетка L не содержит O, то к числу идеалов придется отнести и пустое подмножество. — *Прим. перев. и ред.*

[3]) Так как класс всех модулярных решеток является многообразием, то утверждение теоремы следует из того, что всякое тождество, выполнимое в L, выполняется и в $\hat{L}$ (см. упр. 10 к § VI.9). Этот последний факт, сформулированный в [**LT2** (упр. 2 к § V.8)], доказал Сакс (S a c h s D. — Proc. AMS, 1961, 12, p. 944—945). — *Прим. перев.*

Доказательство. Пусть $X \subset Z$ и Y — некоторые идеалы. Поскольку модулярное неравенство всегда имеет место, нам достаточно показать, что каждый элемент $t \in (X \vee Y) \wedge Z$ лежит в $X \vee (Y \wedge Z)$. Но для идеалов $t \in (X \vee Y) \wedge Z$ всегда означает, что $t \leqslant (x \vee y) \wedge z$ для некоторых $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$. В данном случае, так как $X \subset Z$, то $x \in Z$, откуда $w = x \vee z \in Z$, и следовательно, $t \leqslant (x \vee y) \wedge w$, причем $x \leqslant w$. Тогда, согласно модулярному закону, $t \leqslant x \vee (y \wedge w)$, т. е. $t \in X \vee (Y \wedge Z)$. Ч. т. д.

Следствие. *Любая модулярная решетка может быть вложена в полную модулярную решетку.*

Лемма 2. *Если A и B — идеалы дистрибутивной решетки, то*

$$A \vee B = \{a \vee b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Доказательство. Используем лемму 1: если $x \leqslant a \vee b$, $a \in A$, $b \in B$, то $x = x \wedge (a \vee b) = (x \wedge a) \vee (x \wedge b) = a' \vee b'$, причем $a' = x \wedge a \in A$ и $b' = x \wedge b \in B$.

Теорема 7. *Идеалы любой дистрибутивной решетки L образуют дистрибутивную решетку*[1] $\hat{L}$.

Доказательство. Если X, Y, Z — идеалы, то согласно дистрибутивному неравенству

$$(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \subset X \wedge (Y \vee Z).$$

С другой стороны, если $a \in X \wedge (Y \vee Z)$, то $a = x \wedge (y \vee z)$ для некоторых $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$. Тогда, вследствие дистрибутивного закона, $a = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, и значит, $a \in (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$.

Следствие. *Любая дистрибутивная решетка может быть вложена в полную дистрибутивную решетку.*

Но об идеалах булевой решетки мы уже не можем сказать, что они образуют булеву решетку. В самом деле, пусть, например, X — идеал конечных множеств в полной булевой решетке $A = 2^S$ всех подмножеств некоторого бесконечного множества S. Если $X \wedge Y = O$ для некоторого идеала Y из A, то $x \wedge y = \varnothing$ для всех $x \in X$, $y \in Y$. Пусть $y \in Y$. Тогда для любого $p \in S$ будет $\{p\} \in X$, $\{p\} \wedge y = \varnothing$, $p \notin y$, откуда $y = \varnothing$ и $Y = O$. Но тогда $X \vee Y = X \neq A$, так что Y не будет дополнением для X. Значит, X не имеет дополнения в A и A не является булевой решеткой[2].

---

[1]) См. примечание [3]) на с. 151. — *Прим. перев.*

[2]) Заметим, что соображения, приведенные в примечании [3]) на с. 151, к булевым алгебрам, не образующим многообразия в сигнатуре решетки (т. е. относительно операций $\vee$, $\wedge$), не применимы. — *Прим. перев.*

3. Условная полнота. Теорема о неподвижной точке

Многие важные решетки, хотя и не являются полными, обладают тем свойством, что каждое их непустое ограниченное подмножество имеет обе точные грани. Решетки (и у-множества) с этим свойством называются *условно полными*. Так, поле действительных чисел $\mathbf{R}$ является условно полным; другой пример — множество всех функций, выпуклых на данном замкнутом интервале и принимающих данные значения на его концах.

Мы имеем следующий частичный аналог теоремы 3.

Теорема 8. *Решетка L условно полна, если каждое ее ограниченное непустое подмножество имеет точную нижнюю грань.*

Доказательство. Пусть X — непустое ограниченное подмножество решетки L. Обозначим через U множество всех верхних граней для X. Так как X ограничено, то U не пусто. Выберем $a \in U$. Пусть V — множество всех элементов вида $a \wedge u$, где $u \in U$, и пусть $x_0 \in X$. Понятно, что V ограничено снизу элементом x_0, сверху элементом a и не пусто, так как $a = a \wedge a \in V$. Значит, $b = \inf V$ существует в L. Если $x \in X$, то x является нижней гранью для V, так что $x \leqslant b$. Таким образом, построенный элемент b будет верхней гранью для X. Если $u \in U$, то $a \wedge u \in V$, так что $b \leqslant a \wedge u \leqslant u$. Итак, $b = \sup X$.

Следствие. *Решетка L условно полна, если каждое ее непустое ограниченное подмножество имеет точную верхнюю грань.*

Теорема 9. *В условно полной решетке L каждое непустое подмножество, имеющее нижнюю грань, имеет и точную нижнюю грань и двойственно.*

Доказательство. Пусть X — непустое подмножество решетки L и b — нижняя грань для X. Выберем $c \in X$. Множество всех элементов вида $c \wedge x$, где $x \in X$, ограничено и не пусто, а тогда оно имеет точную нижнюю грань, которая будет также и точной нижней гранью для X.

Покажем теперь, что условно полные у-множества отличаются от полных решеток лишь отсутствием универсальных граней O и I. Это обобщает известный факт: $\mathbf{R}$ можно превратить в полную решетку, присоединяя $-\infty$ и $+\infty$.

Теорема 10. *Если P — условно полное у-множество, то присоединяя к P элементы O и I, получим полную решетку $\overline{P}$.*

Доказательство. Пусть X — произвольное подмножество в $\overline{P}$. Покажем, что X имеет точную нижнюю грань. Если $O \in X$, то $O = \inf X$. Поэтому можно предположить, что $O \notin X$. Положим в этом случае $X' = X - \{I\}$. Очевидно, $X' \subset P$. Если $X' = \varnothing$, то $X = \varnothing$ или $X = \{I\}$. В обеих ситуациях $I = \inf X$. Будем теперь считать, что $X' \neq \varnothing$. Если X' не имеет нижних граней в P, то $O = \inf X' = \inf X$. Если же X' имеет в P

нижнюю грань, то пусть $b = \inf_P X'$. Но тогда $b = \inf X$. Значит, X имеет точную нижнюю грань, и можно применить теорему 3.

Теорема о неподвижной точке. Для изотонных операторов, удовлетворяющих одному лишь условию С3, имеет место следующий замечательный факт, установленный Тарским в 1942 г., но не публиковавшийся им вплоть до 1955 г. [1])

Теорема 11. *Пусть L — полная решетка и f — изотонное ее отображение в себя. Тогда $f(a) = a$ для некоторого $a \in L$.*

Доказательство. Пусть S обозначает множество всех $x \in L$ таких, что $x \leqslant f(x)$, и пусть $a = \sup S$. Конечно, $O \in S$. Далее, по предположению и вследствие изотонности отображения f получаем, что

$$x \leqslant f(x) \leqslant f(a) \text{ для всех } x \in S.$$

Значит, $a = \sup S \leqslant f(a)$, откуда $a \in S$. Снова, ввиду изотонности, $f(a) \leqslant f(f(a))$, так что $f(a) \leqslant \sup S = a$. Но $a \leqslant f(a)$, откуда $f(a) = a$, что и требовалось.

Упражнения к §§ 2—3

1. Покажите, что пятиэлементная модулярная недистрибутивная решетка M_3 имеет два идеала J, K, объединение которых не совпадает с множеством элементов вида $x \vee y$, где $x \in J$, $y \in K$.

2.[2]) (а) Покажите, что главный идеал $a \wedge L$ дистрибутивной решетки L является простым тогда и только тогда, когда элемент a $\wedge$-неразложим.

(б) Покажите, что если L имеет конечную длину n, то L имеет в точности n собственных идеалов, включая O.

(в) Докажите, что каждый максимальный идеал дистрибутивной решетки является простым.

3. Покажите, что интервал $[0, 1]$ числовой прямой, хотя и является полной цепью, но не изоморфен полной решетке своих идеалов.

4. Покажите, что идеалы булевой решетки A образуют булеву решетку $\widehat{A}$ тогда и только тогда, когда A конечна.

5. Докажите, что субгармонические функции, принимающие данные непрерывные значения на границе плоской области R, образуют условно полную решетку.

6. Покажите, что если изотонный оператор f на условно полной решетке таков, что $a \leqslant f(a) \leqslant f(b) \leqslant b$, то $c = f(c)$ для некоторого c между a и b.

7. Покажите, что в условиях теоремы 11 существует наименьшая неподвижная точка. Покажите, что неподвижные точки не обязательно образуют подрешетку. Образуют ли они решетку?

8. Докажите, что лемма 2 из § 2 справедлива для любого идеала A и любого стандартного идеала B в произвольной решетке (Гретцер и Шмидт).

9. Докажите, что если в решетке L каждое изотонное преобразование имеет неподвижную точку, то L полна (Девис).

---

[1]) См. Tarski A. — Pacif. J. Math., 1955, 5, p. 285—309; также работу Девис (Davis A. C. — Pacif. J. Math., 1955, 5, p. 311—319). Близкий результат был получен ранее Л. В. Канторовичем (Acta Math., 1939, 71, p. 63—97).

[2]) Задания (а), (б) этого упражнения повторяют упр. 2 к § III.3. — *Прим. перев.*

4. Топологическое замыкание

Наиболее подробно изученные операции замыкания встречаются в теории множеств, хотя это понятие играет важную роль и в алгебре. Определим *топологическое пространство* [1]) как множество Q вместе с семейством R «замкнутых» множеств, имеющим следующие три свойства:

(α) объединение любых двух замкнутых множеств замкнуто;
(β) любое пересечение замкнутых множеств замкнуто;
(γ) Q и пустое множество $\varnothing$ замкнуты.

По теореме 1 из (β) и (γ) следует, что тем самым в любом топологическом пространстве определяется операция замыкания со свойствами C1 — C3. Вследствие (α) эта операция удовлетворяет также условию

C3* $$\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}.$$

Наконец, (γ) влечет еще равенство $\overline{\varnothing} = \varnothing$.

Вообще, семейство множеств, удовлетворяющее условиям (α) и (β), т. е. замкнутое относительно конечных объединений и произвольных пересечений, будем называть $\bigcap$-кольцом множеств. Понятие $\bigcup$-кольца множеств вводится двойственно.

Таким образом, в любом топологическом пространстве Q замкнутые множества образуют $\bigcap$-кольцо, элементами которого являются, в частности, $\varnothing$ и Q; «открытые» множества (т. е. дополнения замкнутых множеств) составляют дуально изоморфное $\bigcup$-кольцо, также содержащее $\varnothing$ и Q. Очевидно имеет место

Теорема 12. *Замкнутые (и, двойственно, открытые) подмножества любого топологического пространства образуют полную дистрибутивную решетку.*

Вообще, если L — любая полная дистрибутивная решетка с операцией «замыкания» $x \to \bar{x}$, удовлетворяющей условиям C1, C2, C3*, то подмножество S, состоящее из «замкнутых» элементов, является полной дистрибутивной подрешеткой в L.

Топологическое пространство называется *T_1-пространством*, когда в нем имеет место

C4 Если p — точка, то $\bar{p} = p$.

T_0-пространство удовлетворяет более слабому условию

C4′ Для двух точек p и q из $\bar{p} = \bar{q}$ следует, что $p = q$.

Между конечными T_0-пространствами и конечными у-множествами имеется естественное взаимно однозначное соответствие. В самом деле, назовем *М-замыканием* подмножества S у-множе-

[1]) Топологические пространства систематически изучаются в главе IX. Условия C1 — C4 были впервые сформулированы Рисом (1909). См. Куратовский К. Топология, т. I. — М.: Мир, 1966.

ства P множество $\bar{S}$ всех $t \in P$ таких, что $t \leqslant s$ для некоторого $s \in S$. Тогда C1 следует из P1; C2 из P3; C4′ из C1, P2; а выполнимость C3* очевидна. Значит, P является T_0-пространством. Заметим, что в этом пространстве $q \in \bar{p}$ тогда и только тогда, когда $q \leqslant p$. С другой стороны полагая

$$q \leqslant p \text{ тогда и только тогда, когда } q \in \bar{p},$$

мы упорядочиваем точки T_0-пространства. Для конечного множества $S = \bigvee_{i=1}^{n} p_i$ получаем, что $\bar{S} = \bigvee_{i=1}^{n} \bar{p}_i$ будет множеством точек $q \in Q$ таких, что $q \leqslant p$ для некоторого $p \in S$. Таким образом, установленные соответствия между T_0-топологиями и упорядочениями взаимно обратны. Нами доказана

Теорема 13. *Существует взаимно однозначное соответствие между конечными у-множествами P и конечными T_0-пространствами Q: $q \leqslant p$ в P означает, что $q \in \bar{p}$ в Q.*

Семейство подмножеств некоторого множества называется «кольцом», если оно содержит вместе с любыми двумя подмножествами S и T их объединение $S \cup T$ и их пересечение $S \cap T$.

Теорема 14. *Соответствие, устанавливаемое в предыдущей теореме, показывает, что решетка 2^P изоморфна кольцу всех открытых подмножеств пространства Q, и следовательно, антиизоморфна кольцу всех замкнутых подмножеств этого пространства.*

Доказательство. Каждому подмножеству S из Q сопоставим его «характеристическую функцию» f_S: $f_S(p) = 1$ или 0 в зависимости от того, будет ли $p \in S$ или $p \notin S$. Тогда $S \subseteq T$ в том и только в том случае, если $f_S \leqslant f_T$. Далее, S замкнуто, если и только если $f_S(q) \geqslant f_S(p)$ при $q \leqslant p$, и значит, S открыто тогда и только тогда, когда f_S изотонна. Этим и устанавливается искомый изоморфизм.

Полученный результат тесно связан с теоремой III.3. Он показывает, что каждая конечная дистрибутивная решетка изоморфна решетке всех замкнутых подмножеств конечного T_0-пространства своих $\bigvee$-неразложимых элементов.

5. Бесконечная дистрибутивность

В любой полной решетке L операции $\inf S = \bigwedge S$ и $\sup S = \bigvee S$ применимы не только к конечным, но и к бесконечным подмножествам $S \subset L$. Рассмотрим некоторые основные свойства этих *бесконечноместных* [1]) операций.[2])

---

[1]) Этому термину в алгебре придается и другое толкование, но здесь оно не встречается. — *Прим. перев.*

[2]) См. упр. 6—9 к § 1, а также работу Дилуорса и Маклафлина (Dilworth R. P., McLaughlin J. E. — Duke Math. J., 1952, **19**, p. 683—693).

Следующие «обобщенные ассоциативные законы» почти очевидны.

L* Если Φ — произвольное семейство подмножеств S_φ полной решетки L, то

$$\bigwedge_{\Phi}\left\{\bigwedge_{S_\varphi} x\right\} = \bigwedge_{\bigcup S_\varphi} x \text{ и двойственно, } \bigvee_{\Phi}\left\{\bigvee_{S_\varphi} x\right\} = \bigvee_{\bigcup S_\varphi} x.$$

Обратно, опираясь на свойства теоретико-множественной операции $\bigcup$, мы получаем из этих законов L1 — L3, так что L^* вместе с L4 характеризуют полные решетки.

Теорема 15. *Любая система L с бесконечноместными операциями $S \to \bigvee S \in L$ и $S \to \bigwedge S \in L$, $S \subset L$, удовлетворяющими условиям* L4 *и* L*, *является полной решеткой.*

Доказательство. Пусть $x \leqslant y$ означает, что $\bigwedge\{x, y\} = x$ и $\bigvee\{x, y\} = y$; согласно L4 эти соотношения равносильны. Так как L4 влечет L1, мы имеем $x = x \wedge x = \bigwedge\{x, x\} = \bigwedge\{x\}$ для всех $x \in L$. Если $x, y, z \in L$, то

$$x \wedge (y \wedge z) = \bigwedge\{x, y, z\} = \bigwedge\{\bigwedge\{x\}, \bigwedge\{y, z\}\} = \bigwedge\{x, y, z\},$$

согласно L*. Итак, L — решетка.

Пусть теперь $S \subset L$. Тогда

$$(\bigwedge S) \wedge x = \bigwedge\{\bigwedge S, x\} = \bigwedge\{\bigwedge S, \bigwedge\{x\}\} = \bigwedge(S \cup \{x\}) = \bigwedge S$$

для всех $x \in S$ и, если $x \wedge t = t$ для всех $x \in S$, то

$$\begin{aligned}(\bigwedge S) \wedge t &= \bigwedge\{\bigwedge S, t\} = \bigwedge\{\bigwedge S, \bigwedge\{t\}\} = \bigwedge(S \cup \{t\}) = \\ &= \bigwedge(\bigcup\{\{x, t\} \mid x \in S\}) = \bigwedge\{\bigwedge\{x, t\} \mid x \in S\} = \\ &= \bigwedge\{x \wedge t \mid x \in S\} = \bigwedge\{t\} = t,\end{aligned}$$

так что $\bigwedge S = \inf S$.

В любой дистрибутивной решетке, по индукции, выводится, что

$$a \wedge \bigvee_S x_\sigma = \bigvee_S (a \wedge x_\sigma) \tag{1}$$

и, двойственно,

$$a \vee \bigwedge_S x_\sigma = \bigwedge_S (a \vee x_\sigma) \tag{1'}$$

для произвольного *конечного* множества индексов S. Формулы (1)—(1′) имеют место для любого S во всякой полной булевой алгебре, но не во всякой полной дистрибутивной решетке.

Например, (1) не выполняется в полной дистрибутивной решетке всех замкнутых подмножеств плоскости: если c обозначает окружность $x^2 + y^2 = 1$, а d_k — круг $x^2 + y^2 \leqslant 1 - k^{-2}$, то $c \wedge \bigvee_{k=1}^{\infty} d_k = c$, в то время как множество $\bigvee_{k=1}^{\infty} (c \wedge d_k)$ пусто.

С другой стороны, (1′) истинно в рассматриваемой решетке, так как $\vee$ и $\wedge$ совпадают в ней с теоретико-множественными операциями $\cup$ и $\cap$ соответственно.

Полные решетки, в которых имеет место условие (1), будут изучаться в §§ 10—11, а различные более тонкие вариации этого свойства — в § X.11. Но пока мы ограничимся случаем булевых решеток. Сначала доказывается

Теорема 16. *Дистрибутивные законы* (1) *и* (1′) *истинны в любой полной булевой решетке A при произвольном выборе множества индексов S.*

Доказательство. Вследствие изотонности, $a \wedge \bigvee_S x_\sigma$ является верхней гранью для любого $a \wedge x_\sigma$, так что всегда $\bigvee_S (a \wedge x_\sigma) \leqslant a \wedge \bigvee_S x_\sigma$. Чтобы доказать противоположное неравенство и, значит (1), достаточно убедиться, что $a \wedge \bigvee_S x_\sigma \leqslant u$ для любой верхней грани u элементов $a \wedge x_\sigma$. Но если $a \wedge x_\sigma \leqslant u$ для всех σ, то

$$x_\sigma = (a \wedge x_\sigma) \vee (a' \wedge x_\sigma) \leqslant u \vee a'$$

для всех $\sigma \in S$, и значит,

$$a \wedge \bigvee_S x_\sigma \leqslant a \wedge (u \vee a') = (a \wedge u) \vee (a \wedge a') = a \wedge u \leqslant u,$$

что и доказывает (1). Двойственно, получается (1′).

Лемма. *В любой полной решетке бесконечный дистрибутивный закон* (1) *влечет равенство*

$$\left(\bigvee_S x_\sigma\right) \wedge \left(\bigvee_T y_\tau\right) = \bigvee_{S \times T} (x_\sigma \wedge y_\tau). \tag{2}$$

Доказательство. Согласно (1) и получающемуся из него применением L2 (коммутативность) соотношению, будет

$$\left(\bigvee_S x_\sigma\right) \wedge \left(\bigvee_T y_\tau\right) = \bigvee_S \left(x_\sigma \wedge \left(\bigvee_T y_\tau\right)\right) = \bigvee_S \left(\bigvee_T (x_\sigma \wedge y_\tau)\right),$$

откуда с помощью обобщенного ассоциативного закона и получается (2).

Следствие. *В любой полной булевой алгебре имеют место* (2) *и двойственное ему соотношение*

$$\left(\bigwedge_S x_\sigma\right) \vee \left(\bigwedge_T y_\tau\right) = \bigwedge_{S \times T} (x_\sigma \vee y_\tau). \tag{2′}$$

Для *конечных* множеств элементов (и конечных индексных множеств) в дистрибутивной решетке выполняется обобщенный конечный дистрибутивный закон (10) главы III:

$$\bigwedge_{h=1}^{r}\left[\bigvee_{i=1}^{s(h)} x_{h,i}\right]=\bigvee_{F}[x_{1,f(1)}\wedge\ldots\wedge x_{r,f(r)}]=\bigvee_{F}\left[\bigwedge_{h=1}^{r} x_{h,f(h)}\right], \tag{3}$$

где F — множество всех функций, сопоставляющих каждому $h=1, \ldots, r$ некоторое значение $f(h)$ из множества $\{1, \ldots, s(h)\}$. Имея теорему 16, естественно предположить, что в каждой полной булевой алгебре справедлив бесконечный аналог и соотношения (3). Однако это не так.

Назовем (полную) решетку *вполне дистрибутивной*, если она удовлетворяет взаимно двойственным *расширенным дистрибутивным законам*:

$$\bigwedge_{C}\left[\bigvee_{A_\gamma} x_{\gamma,\alpha}\right]=\bigvee_{\Phi}\left[\bigwedge_{C} x_{\gamma,\varphi(\gamma)}\right], \tag{4}$$

$$\bigvee_{C}\left[\bigwedge_{A_\gamma} x_{\gamma,\alpha}\right]=\bigwedge_{\Phi}\left[\bigvee_{C} x_{\gamma,\varphi(\gamma)}\right] \tag{4'}$$

для *любого* непустого семейства индексных множеств A_γ, $\gamma\in C$, при условии, что Φ есть множество *всех* функций φ, определенных на C и таких, что $\varphi(\gamma)\in A_\gamma$.

Теорема 17 (Тарский [1]). *Если полная булева алгебра A вполне дистрибутивна, то она изоморфна алгебре $2^{\aleph}$ всех подмножеств некоторого множества.*

Замечание. На самом деле, достаточно предположить (4).

Доказательство. Пусть C — множество пар вида (x_γ, x'_γ), где x'_γ — дополнение элемента $x_\gamma\in A$; Φ — множество функций φ, выбирающих из каждой такой пары один элемент $x_{\varphi(\gamma)}$; наконец, пусть $p_\varphi=\bigwedge x_{\varphi(\gamma)}$. Тогда, согласно (4),

$$I=\bigwedge_{C}(x_\gamma\vee x'_\gamma)=\bigvee_{\Phi}\left\{\bigwedge_{C} x_{\varphi(\gamma)}\right\}=\bigvee_{\Phi} p_\varphi.$$

Покажем теперь, что каждое p_φ самое большее покрывает O (т. е. что $p_\varphi=O$ или p_φ является атомом булевой алгебры A). В самом деле, если $x_\gamma<p_\varphi$, то $x_{\varphi(\gamma)}=x'_\gamma$, так как равенство $x_{\varphi(\gamma)}=x_\gamma$ повлекло бы соотношение $p_\varphi=\bigwedge x_{\varphi(\gamma)}\leqslant x_\gamma$. Но из $x_\gamma<p_\varphi$ следует, что

$$x_\gamma=x_\gamma\wedge p_\varphi\leqslant x_\gamma\wedge x_{\varphi(\gamma)}=x_\gamma\wedge x'_\gamma=O.$$

---

[1] Tarski A. — Fund. math., 1929, **16**, p. 195—197. См. также работу Оре (Ore O. — Ann. Math., 1946, **47**, p. 56—72), где (теорема 23) детализируется доказательство Тарского.

Далее, всякий элемент $x_\alpha = x_\alpha \wedge I = x_\alpha \wedge \bigvee_\Phi p_\varphi = \bigvee (x_\alpha \wedge \wedge p_\varphi)$, где $x_\alpha \wedge p_\varphi$ есть атом p_φ, если $p_\varphi \leqslant x_\alpha$, и O — в противном случае. Это означает, что каждый элемент $x_\alpha \in A$ является объединением тех «точек», которые он содержит. Наконец, объединение $g_S = \bigvee_S p_\varphi$ точек p_φ не содержит точек p, не принадлежащих S, поскольку, согласно (1),

$$g_S \wedge p = \left(\bigvee_S p_\varphi\right) \wedge p = \bigvee_S (p_\varphi \wedge p) = \bigvee_S O = O,$$

если p не совпадает ни с одним $p_\varphi \in S$. Этим устанавливается изоморфизм между элементами булевой алгебры A и подмножествами S множества всех точек p_φ, чем и завершается доказательство теоремы.

Теоремы Рейни. Класс всех вполне дистрибутивных (полных) решеток содержит много небулевых решеток. Например, имеет место следующая

Лемма. *Любая полная цепь является вполне дистрибутивной решеткой.*

Доказательство. В любой полной решетке

$$a = \bigwedge_C \left[\bigvee_{A_\gamma} x_{\gamma,\alpha}\right] \geqslant \bigvee_\Phi \left[\bigwedge_C x_{\gamma,\varphi(\gamma)}\right] = b,$$

так как левая часть является верхней гранью для $\bigwedge_C x_{\gamma,\varphi(\gamma)}$ при любом $\varphi \in \Phi$. Для доказательства противоположного неравенства заметим, что если $b < a$, то для любого $\gamma \in C$ существует $\alpha = \varphi(\gamma)$ такое, что $x_{\gamma\alpha} > b$.

Если a покрывает b, то отсюда следует, что $x_{\gamma\alpha} \geqslant a$, и значит, $\bigwedge_C x_{\gamma,\varphi(\gamma)} \geqslant a$, что и доказывает требуемое неравенство. Если же это не так, то a будет объединением некоторых $y < a$, а для любого такого y, как мы уже видели, $\bigwedge_C x_{\gamma,\varphi(\gamma)} \geqslant y$ при подходящем $\varphi = \varphi_y \in \Phi$. Значит, $\bigvee_\Phi \left[\bigwedge_C x_{\gamma,\varphi(\gamma)}\right] \geqslant \bigvee_{y<a} y = a$, чем и завершается доказательство.

Следствие. *Любая замкнутая подрешетка прямого произведения полных цепей является вполне дистрибутивной (полной) решеткой.*

Рейни доказал несколько сильных обращений приведенных результатов, используя понятие «полуидеала» (M-замкнутого подмножества)[1].

---

[1]) Raney G. N. — Proc. AMS, 1952, **3**, p. 677—680; 1953, **4**, p. 518—522. См. также работы Брунса (Bruns G. — J. reine angew. Math., 1962, **209**, p. 167—200; **210**, p. 1—23).

Так, он установил, что в любой полную решетке L каждое из условий (4)—(4') влечет другое (и значит, полную дистрибутивность) и равносильно тому, что L является гомоморфным образом полного кольца множеств по отношению к *произвольным* объединениям и пересечениям. Он доказал также глубокое обращение вышеуказанного следствия, именно, что каждая вполне дистрибутивная полная решетка является замкнутой подрешеткой прямого произведения полных цепей.

Упражнения к §§ 4—5

1 [1]. В произвольной полурешетке положим по индукции $x_1 \circ \ldots \circ x_n$ равным $x_1 \circ (x_2 \circ \ldots \circ x_n)$.

(а) Используя L3, докажите индукцией обобщенный ассоциативный закон: если

$$y_i = x_{s_{i-1}} \circ \ldots \circ x_{s_i} \; [0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = n],$$

то

$$y_1 \circ \ldots \circ y_m = x_1 \circ \ldots \circ x_n.$$

(б) Используя только L2 и L3, докажите, что $x_1 \circ \ldots \circ x_n$ не меняется при перестановках сомножителей.

(в) Докажите L^* индукцией, используя L1 — L3, в случае, когда Φ и все S_φ конечны.

2. Получите L1, L2, L3 как частные случаи закона L*.

3. Сформулируйте ослабленную форму закона L*, истинную во всякой σ-решетке [2].

4. (а) Покажите, что точка a лежит в замыкании $\overline{X}$ множества X тогда и только тогда, когда каждое открытое множество U, содержащее a, содержит некоторую точку из X.

(б) Покажите, что для доказательства этого результата достаточно использовать лишь (1) (Оре).

5. Покажите, что доказательство теоремы 17 требует лишь «промежуточного» дистрибутивного закона

$$\bigwedge_{i \in I} (a_i^{(1)} \vee a_i^{(2)}) = \bigvee_{2^I} \{\bigwedge a_i^{f(i)}\}.$$

6. Покажите, что для любого у-множества P (полная) решетка 2^P является вполне дистрибутивной. (Указание. Это будет $\bigcap$-подрешетка и $\bigcup$-подрешетка решетки $2^{o(P)}$.)

7. Обобщите результат упр. 6 на случай D^P, где D — любая вполне дистрибутивная решетка.

8. Пусть φ: $A \to B$ — гомоморфизм между двумя полными булевыми алгебрами A и B. Покажите, что φ является $\bigwedge\bigvee$-гомоморфизмом [3]) тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} \varphi$ — главный идеал (Двингер).

---

[1]) Задания (а), (б) этого упражнения повторяют упр. 1 к § II.2. — *Прим. перев.*

[2]) См. § XI.1. — *Прим. перев.*

[3]) То есть сохраняет произвольные объединения и пересечения. — *Прим. перев.*

6. Решетки с единственными дополнениями

Решетка, в которой каждый элемент имеет одно и только одно дополнение, называется решеткой *с единственными дополнениями*. Мы видели в § I.10, что булевы решетки обладают единственными дополнениями. Теперь докажем частичное обращение этого результата.

Лемма. *Если p и q — различные точки (атомы) решетки с единственными дополнениями, то $p \leqslant q'$.*

Доказательство. Пусть $p \nleqslant q'$. Тогда $p \wedge q' < p$ и поэтому $p \wedge q' = O$. Положим $x = p \vee q'$; очевидно, что $x > q'$. Если не будет $x \geqslant q$, то $x \wedge q < q$, откуда $x \wedge q = O$. Но $x \vee q \geqslant q' \vee q = I$. Следовательно, $x = q'$, а это противоречит неравенству $x > q'$. Значит, $x \geqslant q$. Но тогда $x \geqslant q \vee q' = I$, $x = I$, $p \vee q' = I$, так что $q' = p'$, и значит, $q = p$, что также невозможно.

Теорема 18. *Пусть L — полная решетка с единственными дополнениями, в которой каждый элемент $a > O$ содержит точку*[1]*. Тогда L изоморфна булевой решетке всех подмножеств множества P своих точек.*

Доказательство. Для произвольного $a \in L$ пусть $S(a)$ обозначает множество всех точек $p \leqslant a$. С другой стороны, каждому множеству S точек решетки L сопоставим объединение $j(S)$ всех точек $p \in S$. Соответствие $a \to S(a)$, очевидно, является изотонным отображением решетки L в множество-степень $2^{o(P)}$ всех подмножеств множества P, а $S \to j(S)$ изотонно отображает $2^{o(P)}$ в L. При этом, так как $j(P)$ содержит все точки, то $[j(P)]'$ не может содержать ни одной точки. Следовательно, $[j(P)]' = O$ и $j(P) = O' = I \in L$. Используя предыдущую лемму, получаем, что если $q \notin S$, то $q' \geqslant p$ для всех $p \in S$, откуда $q' \geqslant j(S)$. Значит, из $p \leqslant j(S)$ следует, что $p \in S$; но для $p \in S$ очевидным образом будет $p \leqslant j(S)$. Итак,

(5) $S(j(S)) = S$ для любого множества S точек решетки L.

Пусть теперь $A = S(a)$. Конечно, $j(A) = j(S(a)) \leqslant a$, а $j(A) \leqslant a$ не может содержать точек, не содержащихся в a. Значит, $a \wedge j(A')$ не содержит точек, не принадлежащих A и A' одновременно, откуда $a \wedge j(A') = O$. Но $a \vee j(A') \geqslant j(A) \vee j(A') = j(A \vee A') = j(P) = I$. Итак,

(6) $$j(A') = a', \text{ если } A = S(a).$$

Взаимно заменяя $a = (a')'$ и a', получаем, что $a = j([S(a')]')$, т. е. a является объединением точек $p \in [S(a')]'$. Таким образом, a будет объединением множества A всех точек $p \leqslant a$. Это

---

[1] Такие решетки называются *атомными*. Огасавара и Сасаки доказали эту теорему Биркгофа — Уорда, не предполагая полноты решетки (Ogasawara T., Sasaki U. — J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A, 1949, 14, p. 13). — *Прим. перев.*

доказывает, что $j(S(a)) = a$ для всех $a \in L$. Следовательно, согласно (5), соответствия $a \to S(a)$ и $S \to j(S)$ будут взаимно обратными *изоморфизмами* между решетками L и $2^{\rho(P)}$.

Следствие. *Любая конечная решетка с единственными дополнениями является булевой решеткой.*

Используя понятие «свободной алгебры» (глава VI), Дилуорс доказал [1]), что *любая* решетка является подрешеткой решетки с единственными дополнениями. Отсюда следует, что решетки с единственными дополнениями не обязаны быть ни дистрибутивными, ни даже модулярными.

Упражнения

1. Покажите, что во всякой решетке с единственными дополнениями $(a')' = a$.

2. Покажите, что любая модулярная решетка с единственными дополнениями является булевой решеткой. (См. § III.7.)

3. Покажите, что полная атомно порожденная решетка L тогда и только тогда является булевой решеткой, когда каждый элемент в L имеет единственное дополнение.

4. Покажите, что полная булева решетка является атомно порожденной тогда и только тогда, когда она вполне дистрибутивна.

7. Полярности

Теперь опишем важную конструкцию, которая позволяет получить из произвольного бинарного отношения два взаимно обратных дуальных изоморфизма. Они называются «полярностями», поскольку обобщают дуальный изоморфизм между «полярами» в аналитической геометрии [2]) (см. далее пример 4).

Пусть ρ — некоторое бинарное отношение между элементами двух классов I и J. Для любых подмножеств $X \subset I$ и $Y \subset J$ определим $X^* \subset J$ («поляра» для X) как множество всех $y \in J$ таких, что $x\rho y$ для всех $x \in X$, и определим $Y^+ \subset I$ («поляра» для Y) как множество всех $x \in I$ таких, что $x\rho y$ для всех $y \in Y$. Очевидна следующая

Лемма. *Для любого бинарного отношения* ρ

(7) *если* $X \subset X_1$, *то* $X^* \supset X_1^*$;

(7') *если* $Y \subset Y_1$, *то* $Y^+ \supset Y_1^+$;

(8) $X \subset (X^*)^+$ *и* $Y \subset (Y^+)^*$.

Следствие. *В условиях леммы*

(9) $((X^*)^+)^* = X^*$ *и* $(((Y)^+)^*)^+ = Y^+$.

---

[1]) Dilworth R. P. — Trans. AMS, 1945, 57, p. 123—154. — *Прим. перев.*

[2]) Эта конструкция была, по-видимому, впервые описана в общем виде в [**LT1**, § 32].

Доказательство. Согласно (8) имеем $X^* \subset ((X^*)^+)^*$ и $X \subset (X^*)^+$, откуда вследствие (7) $X^* \supset ((X^*)^+)^*$. Доказательство равенства $((Y^+)^*)^+ = Y^+$ проводится аналогично.

Теорема 19. *Операции $X \to (X^*)^+$ и $Y \to (Y^+)^*$ являются операциями замыкания. Соответствия $X \to X^*$ и $Y \to Y^+$ определяют дуальный изоморфизм между полными решетками «замкнутых» подмножеств множеств I и J.*

Доказательство. Условие C1 следует из (8), C2 — из (9) и C3 — из (7)—(7′). Согласно (9) замкнутые подмножества в I и J суть те, которые имеют вид Y^+ и X^* соответственно. Также вследствие (9) соответствия $Y^+ \to (Y^+)^*$ и $X^* \to (X^*)^+$ взаимно обратны; значит, они являются взаимно однозначными отображениями «на», обращающими согласно (7)—(7′) включение.

Пример 2. Пусть $I = J$ — некоторое кольцо и $x\rho y$ означает, что $xy = O$. Тогда каждое X^* является правым идеалом, а каждое X^+ — левым идеалом.

Пример 3. Пусть I — некоторое поле или тело и J — некоторая конечная группа автоморфизмов α этого I. Если положим $x\rho\alpha$ тогда и только тогда, когда $\alpha(x) = x$, то получим хорошо известный дуальный изоморфизм между решеткой подгрупп группы J и решеткой подполей в I.

Имеются и другие важные примеры, где $I = J$, а бинарное отношение ρ симметрично.

Пример 4. Пусть $A = \| a_{ij} \|$ — некоторая симметричная невырожденная $n \times n$-матрица. Для двух векторов $\xi \equiv (x_0, \ldots, x_n)$ и $\eta = (y_0, \ldots, y_n)$ проективного n-пространства I пусть $\xi\rho\eta$ означает, что сумма $Q(\xi, \eta) = \sum_{i,j} x_i a_{ij} y_j = O$. Замкнутыми подмножествами множества I тогда будут точки, линии, плоскости и другие подпространства; если X — такое подпространство, то X^* — его поляра относительно Q в смысле классической геометрии[1]).

Последним из рассмотренных примеров навеян следующий общий результат.

Следствие. *Если $I = J$ и отношение ρ симметрично, то $X^+ = X^*$ и в полной решетке замкнутых (т. е. таких, что $X = (X^*)^*$) множеств соответствие $X \to X^*$ является инволюцией, т. е. для замкнутых множеств X, Y будет*

(10) $$(X^*)^* = X;$$

(11) $$(X \wedge Y)^* = X^* \vee Y^*, \quad (X \vee Y)^* = X^* \wedge Y^*.$$

Если ρ антирефлексивно (т. е. если $x\rho x$ не имеет места ни для какого x) или если $x\rho x$ влечет $x\rho y$ для всех y, то

(12) $$X \wedge X^* = O \text{ и } X \vee X^* = I.$$

---

[1]) Четверухин Н. Ф. Проективная геометрия. — М.: Учпедгиз, 1953. — *Прим. ред.*

Доказательство. Так как $X^* = X^+$, то (10) следует из (9), (11) — из теоремы 19: дуальный изоморфизм взаимно заменяет объединения и пересечения, а (12) оставляем читателю.

Пример 5. Пусть I — группа и $x\rho y$ означает, что $xy = yx$. Тогда (10)—(11) выполняются, каждое замкнутое множество является подгруппой, а соответствие $X \to X^*$ сопоставляет каждой подгруппе ее «централизатор».

Пример 6. Пусть J — некоторый класс и $x\rho y$ означает, что $x \neq y$. Тогда выполняются условия (10)—(12), все подмножества замкнуты, а инволюция $X \to X^*$ отображает каждое подмножество на его теоретико-множественное дополнение.

Пример 7. Пусть I — декартово n-пространство и $x\rho y$ означает, что $x \perp y$ (x ортогонален с y). Тогда (10)—(12) выполняются, «замкнутыми» подмножествами будут подпространства, а инволюция сопоставляет каждому подпространству его ортогональное дополнение (это частный случай примера 4). Заметим, что $X \wedge X^*$ содержит только такие элементы x, что $x\rho x$, и следовательно, это будет пустое множество $\varnothing$ в примере 6 и начало координат в примере 7.

Пример 8. Пусть F — некоторое множество функций $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathbf{R}_1^n$ в $\mathbf{R}$. Пусть $f\rho x$ означает, что $f(\boldsymbol{x}) = O$. Тогда в число «замкнутых» множеств в $\mathbf{R}^n$, определяемых получающейся полярностью, входят многие семейства множеств, играющие важную роль в геометрии (см. упр. 7 ниже и § IV.3).

8. Связи Галуа

Предыдущие результаты могут быть следующим образом обобщены на случай произвольных у-множеств[1]).

Определение. Пусть P, Q — некоторые у-множества и пусть $x \to x^*$, $y \to y^+$ будут такими соответствиями φ: $P \to Q$ и ψ: $Q \to P$, что

(13) $$\text{если } x \leqslant x_1, \text{ то } x^* \geqslant x_1^*;$$

(13′) $$\text{если } y \leqslant y_1, \text{ то } y^+ \geqslant y_1^+;$$

(14) $$x \leqslant (x^*)^+ \text{ и } y \leqslant (y^+)^*.$$

Говорят, что эти соответствия $x \to x^*$ и $y \to y^+$ определяют *связь Галуа* между P и Q.

Доказательства из § 7 равенств (9) и того факта, что соответствия $x \to (x^*)^+$ и $y \to (y^+)^*$ являются операциями замыкания, если P и Q — полные решетки, проходят без изменения. Известно также, что связи Галуа определяются условием:

$b \leqslant a^*$ тогда и только тогда, когда $a \leqslant b^+$ (Ю. Шмидт).

---

[1]) См. работы Оре (Ore O. — Trans. AMS, 1944, 55, p. 494—513), Эверета (Everett C. J. — Trans. AMS, 1944, 55, p. 514—525), Пиккерта (Pickert G. — Arch. Math., 1962, 29, p. 505—514).

Применением теорем 1—2 получается

Теорема 20. *Связь Галуа $x \to x^*$, $y \to y^+$ между двумя полными решетками L и M определяет дуальный изоморфизм между полными решетками S и T «замкнутых» подмножеств в L и M.*

Другие результаты § 7 также обобщаются на случай произвольных связей Галуа. Так, если $L = M$ и $\varphi = \psi$, получается (11).

Эверет [1]) показал, что все связи Галуа между вполне дистрибутивными (полными) решетками $L = 2^S$ и $M = 2^T$ могут быть получены из подходящих полярностей. Условия, при которых связи Галуа между другими полными решетками имеют аналогичные свойства, обнаружил Рейни.

Псевдодополнения в полурешетках [2]). Хотя большинство связей Галуа возникает из полярностей, и следовательно, устанавливается между решетками множеств, достаточное число их естественно появляется и в других решетках. Пусть, например, S будет $\wedge$-полурешеткой с O, в которой каждый элемент a имеет *псевдодополнение* — такой элемент a^*, что $a \wedge x = O$ тогда и только тогда, когда $x \leqslant a^*$. Другими словами, мы предполагаем, что для любого $a \in S$ множество элементов, дизъюнктных с a, имеет наибольший элемент a^* (который, понятно, однозначно определен). Любая булева решетка является такой полурешеткой «с псевдодополнениями» (см. § II.9); другие примеры будут приведены в следующем разделе. Таким образом, по определению,

$$a \wedge a^* = O. \tag{15}$$

Далее, $O \wedge x = O$ для всех $x \in S$, откуда $O^* \geqslant x$ для всех $x \in S$: каждая такая полурешетка S имеет универсальную верхнюю грань O^*.

Так как из $a \leqslant b$ следует, что $a \wedge b^* \leqslant b \wedge b^* = O$, то

$$\text{если } a \leqslant b, \text{ то } b^* \leqslant a^*. \tag{16}$$

Поскольку $a^* \wedge a = O$, то $a \leqslant (a^*)^*$. Все вместе дает следующий результат.

Лемма. *В $\wedge$-полурешетке с псевдодополнениями операция взятия псевдодополнения определяет симметричную связь Галуа.*

Упражнения к §§ 7—8

1. Покажите, что для любых элементов a, b произвольной решетки L соответствия $x \to x \vee a$ и $y \to y \wedge b$ определяют двойственную по отношению к связи Галуа связь между решетками $[a \wedge b, b]$ и $[a, a \vee b]$.

---

[1]) Everett C. J. — Trans. AMS, 1944, 55, p. 514—525. Результаты Рейни (Raney G. N.) см. в Trans. AMS, 1960, 97, p. 418—426. С этим связаны и результаты Аумана (Aumann G.-S.-B. Bayer. Akad. Wiss., 1955, p. 281—284) и Райта (Wright E. F. — Pacif. J. Math., 1960, 10, p. 723—730).

[2]) См. работы Фринка (Frink O. — Duke Math. J., 1962, 29, p. 505—514) и Нимица (Nemitz W. C. — Trans. AMS, 1965, 115, p. 128—142).

2. Пусть ρ — некоторое бинарное отношение. Расширим систему обозначений § 7, обозначая через $X \cap X_1$ и $X \cup X_1$ соответственно теоретико-множественное пересечение и объединение. Покажите, что для любых замкнутых множеств $X = (X^*)^+$ и $X_1 = (X_1^*)^+$ будет $X \wedge X_1 = X \cap X_1$, но $X \vee X_1 = ((X \cup X_1)^*)^+ = (X^* \cap X_1^*)^+ > X \cup X_1$ в общем случае (Леви).

3. Пусть V — действительное векторное пространство и V^* — сопряженное ему. Положим $x\rho f$ тогда и только тогда, когда $|f(\pm x)| \leqslant 1$. Покажите, что полярой симметричного выпуклого «единичного шара» в V будет сопряженный единичный шар в V^*.

4. Пусть I — некоторая конечная абелева группа, J — группа ее характеров, а $a\rho\chi$ означает, что $\chi(a) = O$ (здесь $a \in I$, $\chi \in J$).

(а) Покажите, что «замкнутыми» подмножествами в I и J являются их подгруппы.

(б) Выведите, что решетка подгрупп группы I дуально изоморфна решетке подгрупп группы J.

(в) Докажите, что решетка подгрупп группы I самодвойственна.

5. (а) Пусть $x\rho y$ означает, что $x \perp y$ в гильбертовом пространстве. Покажите, что полная решетка замкнутых подпространств гильбертова пространства самодвойственна.

(б) Пусть I — какое-нибудь банахово пространство, а J — пространство его линейных функционалов. Пусть $x\rho\lambda$ для $x \in I$, $\lambda \in J$ означает, что $\lambda(x) = O$. Покажите, что решетки слабо замкнутых подпространств в I и J дуально изоморфны.

*6. Пусть M_n — класс всех комплексных $n \times n$-матриц, а $A\rho B$, где $A, B \in M_n$, означает, что $AB = BA$. Используя теорему Фробениуса — Бернсайда — Шура, выясните, как теорема 19 применяется в этой специализации примера 2.

7. В примере 8 дайте описание элементов решетки конфигураций для случаев, когда F состоит из: (а) всех линейных функций; (б) всех аффинных функций; (в) всех однородных квадратичных функций; (г) всех квадратичных функций; (д) всех полиномиальных функций; (*е) всех аналитических функций.

8. Пусть Ω — множество всех изотонных отображений $x \to \omega(x)$ полной решетки L в себя. Пусть, по определению, $x\rho\omega$ означает, что $\omega(x) \leqslant x$.

(а) Покажите, что если $X \subset L$, то X^* — подполугруппа в Ω, и если $\Sigma \subset \Omega$, то Σ^+ является полной решеткой.

(б) Покажите, что если $X_\alpha \in \Sigma^+$ для всех α, то $\bigcap X_\alpha \in \Sigma^+$.

9. Пусть ρ — некоторое бинарное отношение между элементами полных решеток L и M такое, что: (i) из $x\rho y$ и $t \leqslant x$, $u \leqslant y$ следует, что $t\rho u$; (ii) если $x_\alpha \rho y_\beta$ для всех α, β, то $(\bigvee x_\alpha)\rho(\bigvee y_\beta)$. Для любых $x \in L$ и $y \in M$ через $Y(x)$ и $X(y)$ обозначим соответственно множество $y_\beta \in M$ таких, что $x\rho y_\beta$, и множество $x_\alpha \in L$ таких, что $x_\alpha \rho y$. Покажите, что функции $x \to \sup Y(x)$ и $y \to \sup X(y)$ определяют связь Галуа.

9. Пополнение сечениями

Пусть P — некоторое у-множество и пусть $x\rho y$ ($x, y \in P$) означает, что $x \leqslant y$ в P. Тогда, в обозначениях § 7, X^* представляет собой множество верхних граней, а X^+ — множество нижних граней для X, и следовательно, $(X^*)^+$ является множеством всех нижних граней множества всех верхних граней множества X.

В частности, если x — какой-то элемент у-множества P, то x^* — это множество всех $u \geqslant x$, а $(x^*)^+$ — главный идеал, состоящий из элементов $t \leqslant x$. Значит, если $x > y$, то $(x^*)^+ > (y^*)^+$. Далее, если $a = \inf X$, то $t \leqslant a$ тогда и только тогда, когда $t \leqslant x$ для всех $x \in X$, т. е. когда $(a^*)^+$ совпадает с пересечением множеств $(x^*)^+$, $x \in X$. Это доказывает следующую теорему о представлении.

Теорема 21. *Всякое у-множество P допускает изоморфизм на некоторое семейство $\varphi(P)$ подмножеств множества P, при котором точные нижние грани в P (когда они существуют) переходят в теоретико-множественные пересечения.*

Следствие. *Отношение включения на множествах полностью характеризуется постулатами* P1 — P3 (см. § I.1).

Модификация предыдущего доказательства показывает, что знаменитое дедекиндово построение действительных чисел «сечениями» на самом деле применимо к любому у-множеству.

Теорема 22 (Макнил[1]). *Всякое у-множество P может быть вложено в полную решетку L таким образом, что порядок сохраняется вместе со всеми точными гранями, существующими в P.*

Доказательство. Если P не имеет наименьшего элемента, присоединим к этому у-множеству O. Пусть теперь L состоит из всех непустых «замкнутых» подмножеств $X = (X^*)^+$ из P; по теореме 19 L будет полной решеткой. В силу теоремы 21 соответствие $a \to (a^*)^+$ вкладывает P в L с сохранением порядка и точных нижних граней; напомним, что $(a^*)^+$ — это главный идеал — совокупность всех $x \leqslant a$ в P. Пусть $a = \sup X$ в P. Для $T \subset L$, согласно (9), $(T^*)^+ \supset (X^*)^+$ в L тогда и только тогда, когда $T^* \subset X^*$. Но $X^* = a^*$ по определению точной верхней грани. Значит, $(T^*)^+ \supset (X^*)^+$ тогда и только тогда, когда $T^* \subset a^*$, или, вследствие (7), тогда и только тогда, когда $(T^*)^+ \supset (a^*)^+$. Таким образом, $(a^*)^+$ является точной верхней гранью для $(X^*)^+$ в L, и значит, точные верхние грани сохраняются.

Заметим, что если L — решетка и X — некоторое ее подмножество, то $(X^*)^+$ является идеалом. Действительно, если $a, b \in (X^*)^+$, то поскольку $a \leqslant y$, $b \leqslant y$ для любого $y \in X^*$, то $a \vee b \leqslant y$ для всех $y \in X^*$, и значит, $a \vee b \in (X^*)^+$. Далее, из $t \leqslant a \in (X^*)^+$ очевидным образом следует, что $t \in (X^*)^+$. Это узаконивает следующую терминологию.

Определение. *Замкнутым идеалом* у-множества P называется такое подмножество множества P, которое включает в себя множество (на самом деле, состоит из) всех нижних граней множества всех своих верхних граней.

Теорема 23. *Решетка L полна тогда и только тогда, когда каждый ее замкнутый идеал является главным идеалом.*

Доказательство. Пусть каждый замкнутый идеал в L является главным, и $X \subset L$. Тогда идеал $(X^*)^+$ замкнут согласно (9) и, следовательно, будет главным идеалом, определя-

[1]) Первоначальное доказательство см. в работе Макнила [1]. Некоторые обобщения получил Брунс (Bruns G. — J. reine angew. Math., 1962, 209, p. 167—200).

емым некоторым $a \in L$. Вследствие (8), $X \subset (X^*)^+$, так что $x \leqslant a$ для всех $x \in X$, а так как $a \in (X^*)^+$, то $a \leqslant b$ для любой верхней грани b множества X, поскольку $b \in X^*$. Поэтому $a = \sup X$, и значит, L полна.

Обратно, пусть решетка L полна. Если J — замкнутый идеал: $J = (J^*)^+$, то пусть $a = \sup J$. Тогда $a = \inf J^*$. Если $x \in J$, то $x \leqslant a$, а если $x \leqslant a$, то $x \in (J^*)^+ = J$. Значит, J является главным идеалом, определяемым элементом a.

Условная полнота. Докажем один специальный вариант теоремы 22, который потребуется нам в главе XV.

Следствие. *Условное пополнение $D^{\#}$ непустыми сечениями бинаправленного*[1]) *множества D является условно полной решеткой.*

Доказательство. Очевидно, что $D^{\#}$ получается из $\overline{D}$ — пополнения сечениями у-множества D — исключением элементов O и I, если они существуют в D. Значит, $D^{\#}$ всегда будет условно полным у-множеством. Если D бинаправлено и a, b принадлежат $D^{\#}$, то можно найти u, $v \in D$ такие, что главные идеалы в D, состоящие из элементов $x \leqslant u$ и из элементов $y \leqslant v$, оба будут содержать нижние части «сечений», определяющих a и b. Поэтому $D^{\#}$ также направлено и, следовательно (будучи условно полным), является $\vee$-полурешеткой. Доказательство завершается обращением к принципу двойственности.

Пример 9. Рассмотрим модулярную орторешетку $M(\mathfrak{H})$ всех замкнутых подпространств гильбертова пространства $\mathfrak{H}$, которые имеют конечную размерность или коразмерность. Тогда пополнение этой решетки сечениями изоморфно *немодулярной* (слабо ортомодулярной) решетке $L(\mathfrak{H})$ всех замкнутых подпространств пространства $\mathfrak{H}$ (пример 9, § II.14).

Сопоставление с идеальным пополнением. Интересно сопоставить пополнение сечениями (или «нормальное» пополнение) с идеальным пополнением $L \to \hat{L}$ из § 2. В то время, как последнее сохраняет модулярный и дистрибутивный законы (если они имеют место в L), пример 9 показывает, что это уже не будет верным для пополнения сечениями.

С другой стороны, конструкция пополнения сечениями имеет то преимущество, что она *самодвойственна*, а для идеального пополнения это не так. Кроме того, как будет показано в § 11, пополнение сечениями булевой алгебры есть снова булева алгебра, в то время как для идеального пополнения это неверно.

Другие методы пополнения будут рассмотрены в главе X («метрическое пополнение») и в главе XV.

---

[1]) У-множество называется *бинаправленным*, если любые два его элемента имеют в нем верхнюю грань и нижнюю грань. — *Прим. перев.*

Упражнения

1. «Сегмент» у-множества определяется (Дьюси) как пересечение замкнутых интервалов. Покажите, что идеал решетки является сегментом тогда и только тогда, когда он замкнут.

2. Покажите, что замкнутые идеалы решетки L не обязательно образуют подрешетку решетки $\widehat{L}$ всех идеалов решетки L.

3. Нарисуйте диаграмму пополнения сечениями у-множества P_6, изображенного на рис. 1, ∂ в § I.3.

4. Докажите, что условно полное бинаправленное у-множество является решеткой.

5. (а) Покажите, что если $=$ и $\leqslant$ истолковывать как изоморфизм и вложение соответственно, то операция $P \to L(P)$ «пополнения сечениями» имеет следующие характеристические [1]) свойства: $P \leqslant L(P)$; если $P \leqslant Q$, то $L(P) \leqslant L(Q)$; $L(L(P)) = L$.

(б) Покажите, что она самодвойственна в том смысле, что решетка $L(\breve{P})$ дуально изоморфна решетке $L(P)$.

6. Пусть $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ — действительная ось с ее естественной упорядоченностью. Покажите, что пополнение сечениями для $\mathbf{R}^2$ не изоморфно квадрату пополнения сечениями для $\mathbf{R}$.

*7. Покажите, что $\wedge$-ширина и размерность сохраняются при пополнении сечениями.

*8. Покажите, что пополнение сечениями модулярной орторешетки (с дополнениями) всех подпространств гильбертова пространства, имеющих конечную размерность или коразмерность, не модулярно.

*9. Покажите, что если A — полная булева решетка и J — идеал в A, то решетка A/J полна тогда и только тогда, когда полна решетка $\overline{J}/J$ (Двингер).

*10. Постройте дистрибутивную решетку L, которая не может быть вложена «регулярно» (т. е. с сохранением всех точных граней, существующих в L) ни в какую полную дистрибутивную решетку [2]).

10. Полные брауэровы решетки

Брауэровы решетки были определены в § II.11 как решетки, в которых любые два элемента a, b имеют «относительное псевдодополнение» $b : a$ — наибольший элемент x со свойством $a \wedge x \leqslant b$. Теперь мы охарактеризуем класс *полных* брауэровых решеток с другой точки зрения.

Теорема 24. *Полная решетка является брауэровой тогда и только тогда, когда операция объединения в ней вполне дистрибутивна относительно пересечения, т. е. когда в ней*

$$\text{L6*} \qquad a \wedge \bigvee x_\alpha = \bigvee (a \wedge x_\alpha) \text{ для любого множества } \{x_\alpha\}.$$

Доказательство. Если L — полная брауэрова решетка, то пусть для произвольного множества $\{x_\alpha\}$ будет $b = \bigvee (a \wedge x_\alpha)$. По определению точной верхней грани $a \wedge x_\alpha \leqslant b$ для всех α; значит, каждый $x_\alpha \leqslant b : a$, так что $\bigvee x_\alpha \leqslant b : a$. Подстановкой в тождество $a \wedge (b : a) \leqslant b$ получаем, что $a \wedge$

[1]) Биркгоф (B i r k h o f f G. — Ann. Math., 1937, 38, p. 57—60).

[2]) Кроули (C r a w l e y P. — Proc. AMS, 1962, 13, p. 748—752).

$\wedge \bigvee x_\alpha \leqslant b = \bigvee (a \wedge x_\alpha)$. Объединяя это с дистрибутивным неравенством, получаем L6*. Обратно, если даны элементы a, b некоторой полной решетки B, удовлетворяющей условию L6*, то пусть $X = X(a, b)$ обозначает множество всех элементов x_α из B таких, что $a \wedge x_\alpha \leqslant b$, и пусть $b : a = \bigvee\limits_X x_\alpha$. Тогда согласно L6* будет

$$a \wedge (b : a) = a \wedge \bigvee_X x_\alpha = \bigvee (a \wedge x_\alpha) \leqslant b.$$

Значит, $b : a \in X$ и, следовательно, X имеет наибольший элемент. Ясно, что $a \wedge x \leqslant b$ тогда и только тогда, когда $x \leqslant b : a$. Таким образом, $b : a$ и есть искомое относительное псевдодополнение. Решетка L брауэрова, что и требовалось доказать.

В качестве следствия получается, что всякое $\bigcup$-кольцо множеств является полной брауэровой решеткой, так как операциями, участвующими в L6*, в данном случае будут теоретико-множественные объединение и (бинарное) пересечение. Отсюда вытекает, что открытые множества в любом топологическом пространстве (§ 4) образуют полную брауэрову решетку. В теореме VI.9 будет показано, что конгруэнции на любой решетке также образуют полную брауэрову решетку.

Теорема 25 (Стоун). *Идеалы любой дистрибутивной решетки L образуют полную брауэрову решетку.*

Доказательство. Как было показано в § 2, идеалы *любой* решетки образуют полную решетку. Значит, достаточно доказать, что для любых двух идеалов A и B решетки L существует относительное псевдодополнение $B : A$. Но элементы $c \in L$, для которых $a \wedge c \in B$ при любом $a \in A$, образуют именно такой идеал $C = B : A$. Действительно, (i) из $A \wedge X \subset B$ и $x \in X$ следует, что для любого $a \in A$ будет $a \wedge x \in B$, откуда $X \subset C$; а с другой стороны, (ii) из $a \wedge c \leqslant b$ и $a \wedge c_1 \leqslant b$ следует, что

$$a \wedge (c \vee c_1) \leqslant (a \wedge c) \vee (a \wedge c_1) \leqslant b,$$

и значит, C — идеал.

11*. Теорема Гливенко

Лемма, доказанная в конце § 8, показывает, что для любого фиксированного элемента c брауэровой решетки L функция

$$f_c\colon\ a \to c : a = a^c \tag{17}$$

определяет симметричную связь Галуа на решетке L. Тогда

$$\begin{aligned} &a \leqslant a^{cc};\ a^c = a^{ccc};\ \text{если } a \leqslant b, \text{ то } a^c \geqslant b^c; \\ &(a \vee b)^c = a^c \wedge b^c \text{ и } (a \wedge b)^c \geqslant a^c \vee b^c. \end{aligned} \tag{18}$$

Множество «замкнутых» элементов, т. е. таких, что $a = a^{cc}$, образует полную решетку C с новой бинарной операцией $a \bigtriangledown b = (a \vee b)^{cc}$ в качестве объединения, в то время как пересечения будут такими же, как в L. Теперь докажем менее очевидный факт.

Лемма. *Во всякой брауэровой решетке*

$$(a \wedge b)^c = a^c \triangledown b^c. \tag{19}$$

Доказательство. Определяя a^c как $c : a$, очевидно, получим $a \wedge a^c \leqslant c$ для всех $a \in L$. Заменяя a на a^c, имеем

$$a^c \wedge a^{cc} \leqslant c \text{ для всех } a \in L. \tag{20}$$

Теперь предположим, что $x \wedge a \wedge b \leqslant c$ в L, и возьмем $y = x \wedge a^{cc} \wedge b^{cc}$. Ясно, что $y \leqslant x$, откуда $y \wedge a \wedge b \leqslant c$, что влечет в свою очередь неравенство $y \wedge a \leqslant c : b = b^c$. Но $y \wedge a \leqslant y \leqslant b^{cc}$ по определению y; значит, согласно (20) $y \wedge a \leqslant b^c \wedge b^{cc} \leqslant c$. Отсюда следует, что $y \leqslant c : a = a^c$. Но $y \leqslant a^{cc}$ по определению и, следовательно, $y \leqslant a^c \wedge a^{cc} \leqslant c$ ввиду (20). Итак, если $x \wedge a \wedge b \leqslant c$, то $x \wedge a^{cc} \wedge b^{cc} \leqslant c$, или $(a \wedge b)^c \leqslant (a^{cc} \wedge b^{cc})^c$. Обратное неравенство очевидно, и значит, всегда $(a \wedge b)^c = (a^{cc} \wedge b^{cc})^c$.

С другой стороны, $(a^c \wedge b^c)^c = a^{cc} \wedge b^{cc}$, так что

$$(a \wedge b)^c = (a^{cc} \wedge b^{cc})^c = ((a^c \vee b^c)^c)^c = a^c \triangledown b^c,$$

чем и завершается доказательство леммы.

Полагая $c = 0$, мы в полученном результате должны заменить a^c на a^*. В этом случае, поскольку $(a \vee a^*)^* = a^* \wedge a^{**} = O$ и $a \triangledown a^* = O^* = I$, будет

$$a \wedge a^* = O \text{ и } a \triangledown a^* = I. \tag{21}$$

Следовательно, замкнутые элементы образуют булеву решетку.

Из этого факта получается первое утверждение следующей замечательной теоремы, по существу принадлежащей Гливенко.

Теорема 26. *Если L — брауэрова решетка, то соответствие $a \to a^{**}$ является операцией замыкания на L и гомоморфизмом решетки L на (полную) булеву решетку C всех ее «замкнутых» элементов. При этом $a^{**} = b^{**}$ тогда и только тогда, когда $a \wedge d = b \wedge d$ для некоторого «плотного» $d \in L$, т. е. такого, что $d^{**} = I$.*

Чтобы доказать второе утверждение, предположим, что $a \wedge d = b \wedge d$, где $d^{**} = I$. Тогда

$$a^{**} = a^{**} \wedge I = a^{**} \wedge d^{**} = (a \wedge d)^{**}.$$

Аналогично $b^{**} = (b \wedge d)^{**}$. Но $a \wedge d = b \wedge d$, так что $a^{**} = b^{**}$. Обратно, пусть $a^{**} = b^{**}$. Положим $d = (a \vee b^*) \wedge (a^* \vee b)$. Тогда

$$d^{**} = (a^{**} \triangledown b^*) \wedge (a^* \triangledown b^{**}) = (b^{**} \triangledown b^*) \wedge (a^* \triangledown a^{**}) = I,$$

как было показано раньше. Далее,

$$a \wedge d = a \wedge (a \vee b^*) \wedge (a^* \vee b) = a \wedge (a^* \vee b) = (a \wedge a^*) \vee (a \wedge b) = a \wedge b.$$

Аналогично $b \wedge d = a \wedge b$, откуда $a \wedge d = b \wedge d$, чем и завершается доказательство.

По теореме 26 булева решетка C полна, если полной является решетка L.

Полученный результат можно применить к полной булевой решетке $L(A)$ всех идеалов *данной* булевой алгебры A. В этом случае $a \wedge x' = O$ для всех $x \in X$ (где X — произвольное подмножество алгебры A) тогда и только тогда, когда $a \leqslant x$ для всех $x \in X$, т. е. тогда и только тогда, когда a принадлежит *замкнутому* идеалу, состоящему из всех нижних граней множества X (см. § 10). Из этого результата получается

Теорема 27 (Гливенко — Стоун)[1]. *Пополнение сечениями $C(A)$ любой булевой алгебры A является булевой алгеброй; при этом соответствие $J \to J^{**}$ отображает решетку $\hat{A}$ всех идеалов алгебры A на булеву решетку $C(A)$.*

Доказательство. Мы только что показали, что замкнутые элементы в $L(A)$ соответствуют замкнутым идеалам булевой алгебры A, и $J \subset K$ в $L(A)$ означает, что $J \leqslant K$ в пополнении алгебры A сечениями. Значит, булева алгебра C из теоремы 26 изоморфна $C(A)$ и функция $J \to J^{**}$ является решеточным гомоморфизмом. Ч. т. д.

Стоуновы решетки. Нетрудно доказать[2], что следующие условия равносильны в любой брауэровой решетке: (i) $a^* \vee a^{**} = I$ для всех a; (ii) $a^* \vee b^* = (a \wedge b)^*$ для всех a, b; (iii) булева алгебра всех замкнутых элементов является подрешеткой; (iv) каждый элемент a^* $(a \in L)$ имеет дополнение.

Брауэрова решетка, которая удовлетворяет какому-нибудь одному (и значит, каждому) из условий (i)—(iv), называется «стоуновой решеткой». Известно, что решетка всех идеалов любой полной булевой алгебры (тоже стоуновой решетки!) сама является стоуновой решеткой.

Упражнения к §§ 10—11

1[3]. В каждой из двух недистрибутивных пятиэлементных решеток укажите пару a, b такую, что $a : b$ не существует.

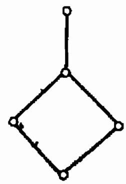
2. Покажите, что немодулярная решетка N_5 и все ее подрешетки-интервалы обладают псевдодополнениями, но N_5 не является решеткой с относительными псевдодополнениями.

---

[1] Glivenko V. — Bull. Acad. Sci. Belgique, 1929, 15, p. 183—188; Stone M. H. [3], Монтейро (Monteiro A.) — Revista Union. Mat. Argentina, 1955, 17, p. 149—160.

[2] Фринк (Frink O.) — Duke Math. J., 1962, 29, p. 505—514; Варле (Varlet J.) — Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, 1963, 8, p. 1—71. Стоуновы решетки впервые специально изучались Гретцером и Шмидтом (Grätzer G., Schmidt E. T. — Acta Math. Acad. Sci. Hung., 1957, 8, p. 455—460).

[3] Задания 1, 4 и 5 (a) повторяют соответственно упр. 10, 14 и 12 к § II.11. — *Прим. перев.*

3. В решетке 

найдите все элементы a и b такие, что $(a \wedge b)^* = a^* \vee b^*$.

4. Покажите, что брауэрова решетка является булевой алгеброй, если в ней (i) $(x^*)^* = x$ для всех x, или если (ii) $x \wedge x^* = O$ для всех x.

5. (а) Докажите, что каждая цепь является брауэровой решеткой.

(б) Постройте решетку с относительными дополнениями, которая не была бы решеткой с относительными псевдодополнениями.

6. Покажите, что любая дистрибутивная решетка изоморфна подрешетке решетки с относительными псевдодополнениями.

*7. Покажите, что брауэрова решетка будет стоуновой решеткой тогда и только тогда, когда любые два ее различные минимальные простые идеала являются взаимно простыми (т. е. когда их объединение совпадает со своей решеткой) (Гретцер и Шмидт). [1]

ПРОБЛЕМЫ (см. также главу IX)

31. Описать с точностью до изоморфизма (нётерову [2]) решетку всех алгебраических многообразий в аффинном и проективном n-пространстве: (а) над полем комплексных чисел; (б) над полем действительных чисел; (в) над полем рациональных чисел; (г) над произвольным полем.

32. Описать класс (полных) решеток, все решеточно-гомоморфные образы которых полны.

33. Что можно сказать о полных дистрибутивных решетках, которые удовлетворяют обоим законам (2) (т. е. являются брауэровыми и дуально брауэровыми)? Какие из них счетны? [3]

34. Является ли центр любой полной решетки ее выпуклой подрешеткой (Холанд)? [4]

35. Является ли пополнение сечениями любой решетки с единственными дополнениями решеткой с единственными дополнениями (Уотермен)?

*36. Является ли пополнение сечениями любой ортомодулярной решетки ортомодулярной решеткой (Ремси)? [5]

37. Существует ли нетривиальная полная булева алгебра, которая не имеет собственных автоморфизмов (Йонссон)? [6]

---

[1] Решение проблемы 70 из [**LT2**]. — *Прим. перев.*

[2] См. § VIII.1. — *Прим. перев.*

[3] О связанной с этой проблеме см. работы Рейни (R a n e y G. — Proc. AMS, 1953, **4**, p. 518—522; Trans. AMS, 1960, **97**, p. 418—426).

[4] По поводу проблемы 34 см. теорему XI.14′. [Отрицательный ответ на этот вопрос дал Якубик (J a k u b i k J. — Czechosl. Math. J., 1973, **23**, p. 125—138). — *Прим. перев.*]

[5] Отрицательный ответ на этот вопрос дал Адамс (A d a m s D. H. — Bull. Austral. Math. Soc., 1969, **1**, № 2, p. 279—280). — *Прим. перев.*

[6] Модель теории множеств, в которой такая булева алгебра существует, построил Макалун (M c A l o o n K. — Ann. Math. Log., 1971, **2**, № 4, p. 449—467). — *Прим. перев.*

ГЛАВА VI

УНИВЕРСАЛЬНАЯ АЛГЕБРА

1. Алгебра

«Универсальная алгебра» устанавливает *общие* теоремы об *алгебрах* с однозначными, всюду определенными, конечноместными операциями. Основное понятие может быть введено следующим образом [1]).

Определение. *Алгеброй* A называется пара (S, F), где S — непустое множество элементов, а F — заданное множество *операций* f_α, каждая из которых отображает степень $S^{n(\alpha)}$ множества S в S, где $n(\alpha)$ — некоторое подходящее неотрицательное *конечное* целое число.

Другими словами, операция f_α соотносит каждому упорядоченному набору $(x_1, \ldots, x_{n(\alpha)})$ из $n(\alpha)$ элементов множества S значение $f_\alpha(x_1, \ldots, x_{n(\alpha)})$, принадлежащее S, — результат применения операции f_α к последовательности $x_1, \ldots, x_{n(\alpha)}$. Если $n(\alpha) = 1$, операция f_α называется *унарной*, если $n(\alpha) = 2$ — *бинарной*, при $n(\alpha) = 3$ — *тернарной* и т. д. Когда $n(\alpha) = 0$, операция f_α называется *нульарной*; она фиксирует некоторый элемент из S (например, в группе единицу, в решетке O или I).

Пример 1. Группа [2]) есть множество с одной бинарной операцией $f(x, y) = xy$ и одной унарной операцией $g(x) = x^{-1}$, удовлетворяющими тождествам

(1а) $\quad f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$ (ассоциативный закон);

(1б) $$f(f(g(x), x), y) = f(y, f(g(x), x)) = y.$$

Пример 2. Решетка есть множество с двумя бинарными операциями $f(x, y) = x \wedge y$ и $g(x, y) = x \vee y$, удовлетворяющими тождествам L1 — L4 главы 1: $f(x, x) = g(x, x) = x$, $f(x, y) = f(y, x)$ и т. д.

Группы, решетки и кольца дают примеры *типовых классов* алгебр [3]): предполагается, что все алгебры такого класса имеют одно и то же множество операций (и удовлетворяют некоторому заданному множеству постулатов). Такие классы алгебр будут изучаться ниже в §§ 6—12, а пока мы рассматриваем их только как источники примеров индивидуальных алгебр.

---

[1]) Биркгоф ([1], [3] и Proc. 1 Canad. Math. Congress, 1945, p. 310—326).

[2]) Другие, эквивалентные определения группы приведены ниже в § 12.

[3]) В оригинале «family». В последующих параграфах это слово означает у автора «многообразие». — *Прим. перев.*

Пример 3. Векторное пространство над телом D есть множество с одной бинарной операцией $f(x, y) = x + y$ и с заданной для каждого $\lambda \in D$ унарной операцией $f_\lambda(x) = \lambda x$, называемой умножением (слева) на λ. Предполагается, что эти операции удовлетворяют определенным коммутативным, ассоциативным и дистрибутивным законам (Халмош П. Конечномерные векторные пространства. — М.: Физматгиз, 1963).

Заметим, что в примере 3 число различных операций, как правило, бесконечно, — эта возможность допускается нашим определением алгебры. Заметим также, что множество операций здесь зависит от D, поэтому класс всех векторных пространств (с нефиксированным D) *не* будет типовым классом алгебр.

Пример 4. Если рассматривать поле как множество S с двумя бинарными операциями $+$ и $\cdot$ и двумя унарными операциями $x \to -x$ и $x \to x^{-1}$, то оно *не* является алгеброй в нашем смысле, поскольку 0^{-1} не определено. Мы можем, конечно, превратить поле в алгебру, полагая $0^{-1} = 0$, но тогда придется пожертвовать таким важным тождеством, как $(xx^{-1})\,y = y$.

Пример 5. σ-решетка, определяемая как множество, замкнутое относительно двух счетноместных операций $\bigwedge_{k=1}^{\infty} x_k$ и $\bigvee_{k=1}^{\infty} x_k$, подчиненных определенным тождествам, также *не* будет абстрактной алгеброй, поскольку эти операции не являются конечноместными: они применяются к бесконечным совокупностям элементов.

Целый ряд результатов универсальной алгебры можно перенести на множества с бесконечноместными операциями («бесконечноместные алгебры») и на случай не всюду определенных операций («частичные алгебры»). Например, многие топологические пространства можно рассматривать (глава IX) как множества, снабженные единственной операцией «сходимости» $x_n \to x$. Определения подалгебры, гомоморфизма и прямого произведения, которые будут даны ниже, переходят здесь в понятия замкнутого подпространства, непрерывного отображения и декартова произведения соответственно. Но мы не будем обсуждать эти возможности.

Универсальная алгебра лежит где-то между математикой и математической логикой. Некоторые ее результаты являются «теоремами о теоремах» и в этом смысле относятся к *метаматематике*. Мы сосредоточимся на математических аспектах универсальной алгебры, отсылая читателя по вопросам, связанным с метаматематикой, к соответствующей литературе [1]).

---

[1]) Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. — М.: Наука, 1967; Тарский (Tarski A.) — Proc. Intern. Congr. Math. Cambridge, 1950, 1, p. 705—720; Кон [1]. [См. также Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. — *Прим. ред.*]

2. Подалгебры

Подалгеброй абстрактной алгебры $A = (S, F)$ называется (возможно и пустое [1])) подмножество T множества S, которое замкнуто относительно операций из F, т. е. *F-замкнуто*. Таким образом, мы требуем для $f_\alpha \in F$ и $x_1, \ldots, x_{n(\alpha)} \in T$, чтобы $f_\alpha(x_1, \ldots \ldots, x_{n(\alpha)}) \in T$ [2]). Пара (T, F) оказывается тогда абстрактной алгеброй. Очевидно, что если (T, F) — подалгебра в (S, F) и (U, F) — подалгебра в (T, F), то (U, F) будет подалгеброй в (S, F).

Применяя это определение к примерам 1—3, получаем понятия подгруппы, подрешетки и (векторного) подпространства соответственно. Заметим, что в подпространстве O «различные» операции умножения на число *совпадают* как функции. С другой стороны, «одна и та же» операция определяет «различные» функции (с различными областями определения и областями изменения), будучи ограниченной на те или иные подалгебры. С точки зрения алгебраических вопросов удобнее принять используемое ниже соглашение, чем применять стандартную для функций терминологию (см. также § 6).

Покажем теперь, что подалгебры любой абстрактной алгебры A образуют *муровское семейство* подмножеств множества S (§ V.1).

Теорема 1. *Любое пересечение $\bigcap T_\tau$ подалгебр T_τ алгебры A будет подалгеброй, и сама A является своей подалгеброй.*

В самом деле, если $x_1, \ldots, x_{n(\alpha)} \in T_\tau$, то $x_1, \ldots, x_{n(\alpha)} \in T_\tau$ для всех подалгебр T_τ данного семейства, поэтому элемент $f_\alpha(x_1, \ldots \ldots, x_{n(\alpha)}) \in T_\tau$ входит во все T_τ, и значит, $f_\alpha(x_1, \ldots, x_{n(\alpha)}) \in \in \bigcap T_\tau$.

Следствие. *Подалгебры любой алгебры A образуют полную решетку.*

С другой стороны, любая решетка L изоморфна решетке $\widehat{L}$ своих главных идеалов. Если L конечна, то эти идеалы будут «подалгебрами» алгебры $A = (L, F)$ по отношению к бинарной операции $a \vee b$ и унарным операциям проекций ψ_c: $a \to a \wedge c$. Поэтому каждая *конечная* (полная) решетка изоморфна решетке всех подалгебр подходящей алгебры.

Аналогичные результаты для бесконечных полных решеток выглядят не столь просто (см. § VIII.5).

Пересечение $\overline{T} = \bigcap S_\alpha$ всех подалгебр S_α алгебры A, содержащих данное подмножество T, называется подалгеброй, *порожденной* подмножеством T. Из теоремы 1 и результатов § V.1

---

[1]) Если A содержит наименьшую непустую подалгебру (как например, единичная подгруппа в группе), то пустое подмножество подалгеброй не считается. [Точнее, пустое множество не считается подалгеброй, если среди операций имеются 0-арные. — *Прим. ред.*]

[2]) В частности, при $n(\alpha) = 0$ это означает, что элемент, выделяемый 0-арной операцией f_α в алгебре (S, F), принадлежал подмножеству T. — *Прим. ред.*

следует, что соответствие $T \to \overline{T}$ является операцией *замыкания* на подмножествах алгебры A.

Можно также определить $\overline{T}$ рекурсивно как множество всех значений *производных операций*, или *многочленов* с аргументами из T, причем само T называется при этом множеством *порождающих* для $\overline{T}$. Этот подход развивается ниже в § 8.

Упражнения к §§ 1—2

1. Пусть $A = (S, F)$ — унарная алгебра, т. е. алгебра, имеющая только унарные и нульарные операции. Покажите, что $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ для любых двух подмножеств из A, но что решетка всех подалгебр алгебры A не обязательно булева [1]).
2. Пусть алгебра $A = (S, F)$ имеет только нульарные операции. Покажите, что подалгебры алгебры A образуют булеву решетку, которая является главным дуальным идеалом в решетке 2^S.
3. Рассмотрите группу как алгебру $G = (S, F)$ с единственной бинарной операцией xy^{-1}. Получите систему аксиом, равносильную аксиомам (1а)—(1б).
4. Постройте полную систему аксиом для коммутативных колец как алгебр $R = (S, F)$ с бинарными операциями — и $\cdot$. Покажите, что подалгебрами будут в точности подкольца.
5. В упр. 4 добавьте к F унарные операции $f_a(x) = ax$ (трансляции) для каждого $a \in S$. Что будет «подалгебрами» в этом случае?
6. Перенесите результаты упр. 4—5 на линейные ассоциативные алгебры.
7. Покажите, что любая полная решетка изоморфна решетке всех подалгебр некоторой «бесконечноместной алгебры» (Биркгоф [1, теорема 5.1]).

3. Гомоморфизмы

В §§ 3—11 мы фиксируем множество F операций f_α и соответствующие числа $n(\alpha)$ и будем рассматривать алгебры $A = (S, F)$ с различными S. Такие алгебры будем называть *однотипными*. Наши рассуждения тогда окажутся применимыми к группам, решеткам, кольцам, левым модулям над фиксированным кольцом R и т. д. Мы начнем с понятия гомоморфизма.

Определение. Пусть $A = (S, F)$ и $B = (T, F)$ — однотипные абстрактные алгебры. Отображение φ: $S \to T$ называется *гомоморфизмом* [2]) алгебры A в алгебру B, если для всех $f_\alpha \in F$ и $x_i \in S$

$$(2) \qquad f_\alpha(x_1\varphi, \ldots, x_{n(\alpha)}\varphi) = (f_\alpha(x_1, \ldots, x_{n(\alpha)}))\varphi.$$

Гомоморфизм A *на* B называется *наложением*, а взаимно однозначный гомоморфизм — *вложением*. *Изоморфизм* алгебр A и B определяется как взаимно однозначный гомоморфизм алгебры A на алгебру B. *Автоморфизм* есть изоморфизм алгебры на себя, а *эндоморфизмом* называется гомоморфизм алгебры в себя.

---

[1]) В оригинале очевидная описка: «не обязательно дистрибутивна». — *Прим. перев.*

[2]) Автор, использующий термин «морфизм», в этом месте делает сноску: «или, как часто говорят, гомоморфизмом». — *Прим. перев.*

Если φ: $A \to B$ и ψ: $B \to C$ — гомоморфизмы, то их произведение $\varphi\psi$: $A \to C$ также является гомоморфизмом, — это доказывается непосредственной подстановкой в (2). В частности, это имеет место и для эндоморфизмов алгебры. Поскольку умножение отображений ассоциативно, то справедлива

Теорема 2. *Эндоморфизмы любой абстрактной алгебры образуют полугруппу с единицей.*

Если гомоморфизм φ: $A \to B$ взаимно однозначен, то обратное для него отображение φ^{-1} также будет гомоморфизмом, поскольку

$$(f(x_1, \ldots, x_n))\,\varphi^{-1} = [f(x_1\varphi^{-1}\varphi, \ldots, x_n\varphi^{-1}\varphi)]\,\varphi^{-1} =$$
$$= [f(x_1\varphi^{-1}, \ldots, x_n\varphi^{-1})]\,\varphi\varphi^{-1} = f(x_1\varphi^{-1}, \ldots, x_n\varphi^{-1}).$$

Следствие. *Автоморфизмы любой абстрактной алгебры A образуют группу* Aut A.

Можно показать, что верно и обратное: любая группа G изоморфна группе всех автоморфизмов подходящей абстрактной алгебры, именно [1]), $G \cong \operatorname{Aut} L$ для некоторой подходящей дистрибутивной решетки L. Аналогично каждая полугруппа с единицей является полугруппой всех эндоморфизмов подходящей унарной алгебры, как было показано Армбрустом и Шмидтом.

Теорема 3. *При любом гомоморфизме φ алгебры A в алгебру B,* (i) *если T — подалгебра алгебры A, то $\varphi(T)$ — подалгебра алгебры B, и* (ii) *если U — подалгебра в B, то $\varphi^{-1}(U)$ будет подалгеброй в A.*

Доказательство. (i) Если задана операция $f_\alpha \in F$ и элементы $y_1, \ldots, y_{n(\alpha)} \in \varphi(T)$, то выберем $x_1, \ldots, x_{n(\alpha)} \in T$ так, чтобы $\varphi(x_i) = y_i$. Так как T — подалгебра, то $f_\alpha(x_1, \ldots$ $\ldots, x_{n(\alpha)}) \in T$, откуда вследствие (2) $f_\alpha(y_1, \ldots, y_{n(\alpha)}) = f_\alpha(\varphi(x_1),$ $\ldots, \varphi(x_{n(\alpha)})) = \varphi(f_\alpha(x_1, \ldots, x_{n(\alpha)})) \in \varphi(T)$, чем и доказывается, что $\varphi(T)$ является подалгеброй.

(ii) Если $f_\alpha \in F$ и $x_1, \ldots, x_{n(\alpha)} \in \varphi^{-1}(U)$, то по определению φ^{-1} все $y_i = \varphi(x_i) \in U$. Отсюда, ввиду (2),

$$\varphi(f_\alpha(x_1, \ldots, x_{n(\alpha)})) = f_\alpha(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{n(\alpha)})) =$$
$$= f_\alpha(y_1, \ldots, y_{n(\alpha)}) \in U,$$

поскольку U — подалгебра. Значит, $f_\alpha(x_1, \ldots, x_{n(\alpha)}) \in \varphi^{-1}(U)$, чем и завершается доказательство.

В частности, если T порождается k элементами $x_1, \ldots, x_k$, то $\varphi(T)$ порождается элементами $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_k)$.

Можно расширить множество F основных операций алгебры $A = (S, F)$, добавляя к нему (i) множество F_1 всех автоморфизмов алгебры A, (ii) множество F_2 всех ее эндоморфизмов или

---

[1]) Биркгоф (Birkhoff G.) — Revista Union Mat. Argentina, 1946, 11, № 4; Фрухт (Frucht R.) — Canad. J. Math., 1950, 2, p. 417—419; Армбруст и Шмидт (Armbrust M., Schmidt J.) — Math. Ann., 1964, 154, S. 70—72.

(iii) множество F_3 всех эндоморфизмов алгебры A на себя. Заметим, что $F_1 \leqslant F_3 \leqslant F_2$ и что $F_3 = F_1$, если A конечна. Подалгебры алгебры $A_1 = (S, F \cup F_1)$ называются *характеристическими* подалгебрами алгебры A (обозначение: $S \lhd A$), подалгебры алгебры $A_2 = (S, F \cup F_2)$ — *вполне характеристическими* подалгебрами в A и, наконец, подалгебры алгебры $A_3 = (S, F \cup F_3)$ — *строго характеристическими* подалгебрами [1]) алгебры A.

Поскольку операции из F_1, F_2, F_3 все являются унарными, то отсюда следует, что решетка характеристических, а также решетки вполне характеристических и строго характеристических подалгебр алгебры A все будут *замкнутыми подрешетками* полной решетки всех подалгебр алгебры A.

Бóльшая часть результатов в §§ 1—3 сохраняется для частичных и бесконечноместных операций.

Упражнения

1. Покажите, что если алгебра A имеет единственную одноэлементную подалгебру, то эта подалгебра является вполне характеристической.

2. Определим φ-подалгебру M алгебры $A = (S, F)$ как пересечение максимальных собственных подалгебр алгебры A. Покажите, что M является характеристической подалгеброй алгебры A (в обозначениях: $M \lhd A$).

3. Покажите, что если $B \lhd A$ и $C \lhd B$, то $C \lhd A$.

4. Докажите аналоги результатов упр. 3 для вполне и строго характеристических подалгебр.

5. Покажите, что в группе D_4 симметрий квадрата, хотя центр Z и подгруппа вращений $\{R\} \supset Z$ являются вполне характеристическими, $\{R\}/Z$ не будет характеристической подгруппой группы D_4/Z.

6. Покажите, что гомоморфные вложения любой алгебры в себя образуют полугруппу.

7. Пусть A — произвольная алгебра и $G(A)$ — группа ее автоморфизмов. Исходя из отношения $a\rho\gamma$, определяемого как $a = \gamma(a)$ (где $a \in A$, $\gamma \in G(A)$), при помощи полярности постройте «теорию Галуа», сопоставляя некоторым подалгебрам алгебры A подгруппы группы $G(A)$.

4. Конгруэнции

Покажем теперь, что гомоморфные образы $\varphi(A)$ абстрактной алгебры A с точностью до изоморфизма могут быть определены рассмотрением некоторых отношений эквивалентности на A. Напомним, что «отношение эквивалентности» — это бинарное отношение $x\theta y$, также записываемое в виде $x \equiv y \pmod{\theta}$, которое рефлексивно, симметрично и транзитивно. Через A/θ будем обозначать множество классов эквивалентности на A.

Определение. *Конгруэнцией* на алгебре $A = (S, F)$ называется отношение эквивалентности θ на A такое, что для всех $f_\alpha \in F$, если $x_i \equiv y_i \pmod{\theta}$, $i = 1, \ldots, n(\alpha)$, то $f_\alpha(x_1, \ldots, x_{n(\alpha)}) \equiv f_\alpha(y_1, \ldots y_{n(\alpha)}) \pmod{\theta}$ (свойство подстановки).

---

[1]) Это обобщает соответствующую терминологию для подгрупп, см. у Бэра (Baer R. — Bull. AMS, 1944, 50, p. 143—160).

Теорема 4. *Пусть φ — гомоморфизм алгебры A в алгебру B. Тогда отношение θ такое, что $x\theta y$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x) = \varphi(y)$, является конгруэнцией на A.*

Доказательство. Так как отношение равенства рефлексивно, симметрично и транзитивно, θ будет отношением эквивалентности. Далее, равенство (2) утверждает, что если $x_i \theta y_i$ для $i = 1, \ldots, n(\alpha)$, то

$$f_\alpha(x_1, \ldots, x_{n(\alpha)}) \equiv f_\alpha(y_1, \ldots, y_{n(\alpha)}) \pmod{\theta},$$

т. е. что наше отношение эквивалентности является конгруэнцией.

Обратно, имеет место

Теорема 5. *Пусть θ — конгруэнция на абстрактной алгебре $A = (S, F)$ и $x \to P_\theta(x)$ — отображение, сопоставляющее каждому элементу $x \in S$ содержащий его класс эквивалентности из S/θ. Тогда операции f_α на S/θ, задаваемые формулой*

$$(3) \qquad f_\alpha(P_\theta(x_1), \ldots, P_\theta(x_{n(\alpha)})) = P_\theta(f_\alpha(x_1, \ldots, x_{n(\alpha)})),$$

определяют алгебру $B = (S/\theta, F)$, однотипную с A. При этом отображение $x \to P_\theta(x)$ будет гомоморфизмом алгебры A на B.

Доказательство. Согласно свойству подстановки, $n(\alpha)$-местные функции, задаваемые формулой (3), однозначны и определены для любой $n(\alpha)$-системы из S/θ.

Алгебра [1]) B из теоремы 5 будет обозначаться A/θ. Согласно (3), отображение $x \to P_\theta(x)$ является гомоморфизмом алгебры A на A/θ. Обратно, если φ: $A \to B$ — какое-то гомоморфное наложение, то по теореме 4 элементы алгебры B будут классами эквивалентности из A/θ, а ввиду (2) операциями алгебры B являются операции алгебры $(S/\theta, F)$. Этим доказана

Теорема 6. *Гомоморфные образы любой абстрактной алгебры A исчерпываются алгебрами A/θ, определяемыми конгруэнциями θ алгебры A.*

В случае, когда A — группа, конгруэнции на A — это в точности разбиения группы A на классы смежности по ее нормальным подгруппам. Если A — кольцо, то конгруэнциями будут его разбиения на классы вычетов по идеалам.

Конгруэнции абстрактной алгебры A упорядочены как отношения эквивалентности: $\theta \leqslant \theta'$ означает, что если $x \equiv y \pmod{\theta}$, то $x \equiv y \pmod{\theta'}$. В у-множестве $\Theta(A)$ всех конгруэнций алгебры A универсальные грани O и I определяются формулами

$$(4) \qquad x \equiv y \pmod{O} \text{ тогда и только тогда, когда } x = y,$$

$$(4') \qquad x \equiv y \pmod{I} \text{ для всех } x, y.$$

Это тривиальные конгруэнции.

[1]) Это *фактор-алгебра* алгебры A по конгруэнции θ. — *Прим. перев.*

Теорема 7. *Пусть $B = A/\theta$ — какой-нибудь гомоморфный образ абстрактной алгебры A. Тогда конгруэнциями на B являются разбиения алгебры B, соответствующие конгруэнциям $\theta' \geqslant \theta$ на A.*

Набросок доказательства. Если $\varphi\colon A \to B$ — наложение, определяемое конгруэнцией θ, и ψ — любая конгруэнция на B, то пусть $x\theta' y$ означает в A, что $\varphi(x) \equiv \varphi(y) \pmod{\psi}$ в B. Тогда θ' будет на A отношением эквивалентности, удовлетворяющим свойству подстановки, и при этом $\theta' \geqslant \theta$. Обратно, если $\theta' \geqslant \theta$ — конгруэнция на A и $u\psi v$ в B по определению означает, что $x\theta' y$ для каких-то (и значит, для всех) $x \in \varphi^{-1}(u)$ и $y \in \varphi^{-1}(v)$ в A, то на B отношение ψ будет отношением эквивалентности со свойством подстановки.

Читатель, по-видимому, без особых затруднений проверит в деталях рассмотренные утверждения. Теорема 7 содержит в качестве частного случая Вторую теорему об изоморфизме из теории групп [1]).

Определим теперь *трансляции* алгебры $A = (S, F)$ как *унарные* операции, имеющие (при подходящих постоянных c_i) следующий вид:

(5) $g_{\alpha, c, k}(x) = f_\alpha(c_1, \ldots, c_{k-1}, x, c_{k+1}, \ldots, c_{n(\alpha)})$, где $f_\alpha \in F$.

Лемма. *Отношение эквивалентности на алгебре A тогда и только тогда является конгруэнцией, когда оно обладает свойством подстановки по отношению к любой трансляции алгебры A.*

Доказательство. Сформулированное условие, очевидно, необходимо. Оно и достаточно, поскольку если $x_k\theta y_k$ для $k = 1, \ldots, n(\alpha)$, то ввиду (5) будет

(5′) $f_\alpha(y_1, \ldots, y_{k-1}, x_k, \ldots, x_{n(\alpha)})\,\theta f_\alpha(y_1, \ldots, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n(\alpha)})$

для $k = 1, \ldots, n(\alpha) - 1$, откуда в силу транзитивности

$$f_\alpha(x_1, \ldots, x_{n(\alpha)})\,\theta f_\alpha(y_1, \ldots, y_{n(\alpha)}),$$

что и требовалось.

Теорема 8. *Конгруэнции произвольной алгебры $A = (S, F)$ образуют замкнутую подрешетку [2]) $\Theta(A)$ полной решетки $E(S)$ всех отношений эквивалентности на множестве S.*

Доказательство. Согласно лемме, достаточно рассмотреть лишь случай унарных операций $g_\gamma(x)$. Пусть B — некоторое множество конгруэнций θ_β на A. В решетке $E(S)$ пересечение $\theta = \bigwedge_B \theta_\beta$ определяется условием

(6) $x\theta y$ тогда и только тогда, когда $x\theta_\beta y$ для всех $\theta_\beta \in B$.

---

[1]) Более тщательное обсуждение теорем об изоморфизме см. в книге Кона [1, гл. II, § 6].

[2]) Автор [3, теорема 24] доказал, что $\Theta(A)$ является подрешеткой, а Кришнан (Krishnan V. S. — J. Madras Univ., 16B, p. 16) установил ее замкнутость.

Но если $x\theta_\beta y$ для всех θ_β, то, поскольку каждая θ_β обладает свойством подстановки, ввиду (5) будет $g_\gamma(x) \equiv g_\gamma(y)$ для всех $\theta_\beta \in B$. Следовательно, в силу (6), $g_\gamma(x) \equiv g_\gamma(y) \pmod{\theta}$, т. е. θ обладает свойством подстановки по отношению ко всем g_γ, и значит, является конгруэнцией.

Двойственно, $\varphi = \bigvee_B \theta_\beta$ определяется условием

(6′) $x\varphi y$ тогда и только тогда, когда для некоторой конечной последовательности $x = z_0, z_1, \ldots, z_m = y$ и соответствующих $\beta(j) \in B$ будет $z_{j-1}\theta_{\beta(j)}z_j$ при $j = 1, \ldots, m$.

Поэтому если $x\varphi y$, то $z_{j-1} \equiv z_j \pmod{\theta_{\beta(j)}}$ и, следовательно, $g_\gamma(z_{j-1}) \equiv g_\gamma(z_j) \pmod{\theta_{\beta(j)}}$ при $j = 1, \ldots, m$, ввиду свойства подстановки для $\theta_{\beta(j)}$. Но тогда $g_\gamma(z_{j-1}) \equiv g_\gamma(z_j) \pmod{\varphi}$ согласно (6′), если это условие применить к $g_\gamma(z_j)$. Так как φ транзитивно, то $g_\gamma(x) \equiv g_\gamma(y) \pmod{\varphi}$, и значит, φ обладает свойством подстановки, что и требовалось доказать.

Полная решетка $\Theta(A)$ называется *структурной решеткой* алгебры A. Если $\Theta(A) \cong 2$, т. е. если алгебра A имеет только тривиальные конгруэнции, она называется (*конгруэнц*-) *простой*.

Теорема 9 (Фунаяма и Накаяма [1]). *Для любой решетки L решетка $\Theta(L)$ является полной брауэровой решеткой.*

Доказательство. То, что $\Theta(L)$ — полная решетка, следует из теоремы 8. Поэтому (см. § V.10) достаточно доказать

L6 *: если $a \equiv b \left(\bmod\ \theta \wedge \bigvee_C \theta_\gamma\right)$, то $a \equiv b \left(\bmod\ \bigvee_C (\theta \wedge \theta_\gamma)\right)$.

Но если $a \equiv b \left(\theta \wedge \bigvee_C \theta_\gamma\right)$, то $y \equiv z\ (\theta)$ для всех $y, z \in [a \wedge b, a \vee b]$ и $x_{i-1} \equiv x_i\ (\theta_i)$ для некоторой конечной последовательности $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ элементов $x_i \in L$, где $\theta_i \in C$. Теперь построим $y_i = [(a \wedge b) \vee x_i] \wedge (a \vee b)$. Ясно, что $y_0 = a$, $y_n = b$ и $y_{i-1} \equiv y_i\ (\theta \wedge \theta_i)$. Отсюда в силу транзитивности и следует L6*. Ч. т. д.

Упражнения

1. Докажите, что конгруэнциями на цепи (рассматриваемой как дистрибутивная решетка) будут в точности ее разбиения на неперекрывающиеся интервалы [2].

2. Докажите, что любая конгруэнция на алгебре A индуцирует конгруэнцию на каждой подалгебре алгебры A.

3. Докажите, что если θ и θ_1 — какие-то конгруэнции на решетке с относительными дополнениями, то $\theta\theta_1 = \theta_1\theta$ [3].

---

[1]) Funayama N., Nakayama T. — Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1942, 18, p. 553—554.

[2]) Ср. с упр. 4 (а) к § II.4. — *Прим. перев.*

[3]) Этот факт, сформулированный в [LT2, упр. 3 к § VI. 1) в виде вопроса, доказал Дилуорс (Dilworth R. P. — Ann. Math., 1950, 51, p. 348—359). — *Прим. перев.*

4. Покажите, что конгруэнция θ на группе G является характеристической [1]) тогда и только тогда, когда ее ядро — характеристическая подгруппа группы G.

5. Покажите, что если C — характеристическая подалгебра алгебры A/θ, то ее полный прообраз будет характеристической подалгеброй в A.

6. Пусть G — группа, действующая на множестве S. Покажите, что отношение эквивалентности на S является конгруэнцией алгебры $A = (S, G)$ тогда и только тогда, когда оно разбивает S на «области импримитивности».

7. Пусть A — некоторая алгебра, T — какая-то ее подалгебра и θ — конгруэнция на A. Покажите, что множество элементов $x \in A$ таких, что $x\theta t$ по крайней мере для одного $t \in T$, образует подалгебру.

8. Для произвольной группы G пусть $A = (G, F)$, где F — множество всех левых трансляций $f_a(x) = ax$, $a \in G$. Покажите, что решетка конгруэнций алгебры A изоморфна решетке всех подгрупп группы G.

9. С помощью контрпримера покажите, что теорема 8 не имеет места для алгебр с бесконечноместными операциями.

5. Прямые и подпрямые произведения

Из двух однотипных абстрактных алгебр $A = (X, F)$ и $B = (Y, F)$ можно построить *прямое произведение* $A \times B = (X \times Y, F)$, где для любой операции $f_\alpha \in F$ и $n = n(\alpha)$

$$f_\alpha((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)) = (f_\alpha(x_1, \ldots, x_n), f_\alpha(y_1, \ldots, y_n)).$$

Эта конструкция содержит в себе как частные случаи определения прямого произведения двух (мультипликативных) групп, прямой суммы двух колец, кардинального произведения двух решеток и прямой суммы двух R-модулей над одним и тем же кольцом R.

С помощью взаимно однозначного соответствия $(x, y) \leftrightarrow (y, x)$ и т. д. легко устанавливаются следующие изоморфизмы:

$$(7) \qquad A \times B \cong B \times A, \quad A \times (B \times C) \cong (A \times B) \times C.$$

В общем случае, если Γ — произвольное множество однотипных алгебр $A_\gamma = (S_\gamma, F)$, $\gamma \in \Gamma$, то определим (неограниченное) прямое произведение $\prod_\Gamma A_\gamma$ как множество всех функций a: $\gamma \to a(\gamma) \in A_\gamma$, полагая

$$f_\alpha(a_1, \ldots, a_{n(\alpha)}) = b\colon\ \gamma \to f_\alpha(a_1(\gamma), \ldots, a_{n(\alpha)}(\gamma)) \in \prod_\Gamma A_\gamma.$$

Это прямое произведение $\prod_\Gamma A_\gamma$, очевидно, не зависит от порядка сомножителей [2]).

Конгруэнции на прямом произведении $A \times B$ можно построить из конгруэнций сомножителей следующим образом.

Теорема 10. *Пусть θ_A и θ_B — конгруэнции на однотипных алгебрах A и B. Тогда, полагая*

[1]) То есть если $x \equiv y\ (\theta)$, то $x\alpha \equiv y\alpha\ (\theta)$ для любого автоморфизма α. — *Прим. перев.*

[2]) Разумеется, с точностью до изоморфизма. — *Прим. ред.*

(8) $(a, b) \equiv (a_1, b_1)$ *тогда и только тогда, когда* $a\theta_A a_1$ *и* $b\theta_B b_1$, *мы получаем конгруэнцию на* $A \times B$.

Доказательство. Совсем просто проверяются рефлексивность, симметричность и транзитивность отношения (8), а также выполнимость свойства подстановки для него: соответствующие законы применяются к каждой компоненте по отдельности.

Конгруэнцию (8) мы будем обозначать как $\theta_A \times \theta_B$. Нетрудно показать, что $(A/\theta_A) \times (B/\theta_B) = (A \times B)/(\theta_A \times \theta_B)$. Доказательство мы опускаем.

В общем случае не каждая конгруэнция на $A \times B$ имеет вид $\theta_A \times \theta_B$. Например, если $G = \{0, 1\}$ является аддитивной группой со сложением по mod 2, то конгруэнция четверной группы $G \times G$, имеющая классы эквивалентности $\{(0, 0), (1, 1)\}$ и $\{(1\ 0), (0, 1)\}$, не будет произведением конгруэнций.

Аналогичные результаты можно доказать и для общего прямого произведения ΠA_γ, полагая $x \equiv y \pmod{\Pi\theta_\gamma}$ тогда и только тогда, когда $x_\gamma \equiv y_\gamma \pmod{\theta_\gamma}$ для всех γ, т. е. если элементы каждой пары соответствующих компонент конгруэнтны.

Определение. Подалгебра $C = (S, F)$ прямого произведения однотипных алгебр $A_\gamma = (X_\gamma, F)$ называется *подпрямым произведением* алгебр A_γ, если для любого $x_\gamma \in X_\gamma$ существует элемент $c \in S$, имеющий x_γ своей компонентой в A_γ. Гомоморфизм φ: $A \to C$ алгебры $A = (X, F)$ на подпрямое произведение однотипных алгебр $A_\gamma = (X_\gamma, F)$ называется *представлением* алгебры A в виде подпрямого произведения алгебр A_γ. Представление называется *изоморфным*, если φ — вложение.

Теорема 11. *Если φ — представление алгебры A в виде подпрямого произведения C однотипных алгебр A_γ, то $C \cong A/\bigwedge\theta_\gamma$, где θ_γ — конгруэнция, связанная с гомоморфизмом φ_γ, отображающим A на $A_\gamma = A/\theta_\gamma$. Обратно, любой набор конгруэнций θ_γ на A задает представление алгебры A в виде подпрямого произведения $C = A/\bigwedge\theta_\gamma$ алгебр $A_\gamma = A/\theta_\gamma$.*

Доказательство. Ввиду (6) гомоморфизм φ: $A \to C$ определяет гомоморфизм алгебры A на каждую A_γ, а по теореме 4 каждый из этих гомоморфизмов определяется некоторой конгруэнцией θ_γ такой, что $A_\gamma \cong A/\theta_\gamma$. Два элемента алгебры A отображаются на один и тот же элемент алгебры C тогда и только тогда, когда они конгруэнтны по модулю каждой θ_γ. Значит, $C \cong A/\bigwedge\theta_\gamma$. Обратно, если задано индексированное множество $\{\theta_\gamma\}$ конгруэнций на A, то естественные гомоморфизмы φ_γ: $A \to A_\gamma$ алгебры A на алгебры $A_\gamma = A/\theta_\gamma$ определяют гомоморфизм алгебры A на подалгебру C прямого произведения ΠA_γ, которая и будет подпрямым произведением алгебр A_γ.

Следствие 1. *Изоморфные представления алгебры A в виде подпрямого произведения находятся во взаимно однозначном* *соответствии с множествами конгруэнций* θ_γ *на* A *такими, что* $\bigwedge \theta_\gamma = O$ (*отношение равенства*).

Определение. Алгебра A называется *подпрямо неразложимой*, если в любом изоморфном представлении алгебры A в виде подпрямого произведения алгебр A_γ по крайней мере одно из естественных наложений $A \to A_\gamma$ является изоморфизмом. Попросту говоря, это означает, что алгебра подпрямо неразложима, если она не может быть представлена в виде подпрямого произведения «меньших» алгебр (т. е. собственных гомоморфных образов)[1].

Следствие 2. *Пусть P — у-множество всех конгруэнций $\theta_\gamma > O$ на алгебре A. Тогда A подпрямо неразложима в том и только в том случае, когда P имеет наименьший элемент θ_m.*

Доказательство. Если θ_m существует и $\theta_\gamma > O$, то $\theta_\gamma \geq \theta_m$. Значит, $\bigwedge\limits_P \theta_\gamma = O < \theta_m$ означало бы, что какая-то $\theta_\gamma = O$. Но тогда, по предыдущему определению и ввиду следствия 1, алгебра A подпрямо неразложима. Обратно, если θ_m не существует, то $\bigwedge\limits_P \theta_\gamma = O$, где все $\theta_\gamma > O$, и потому A не будет подпрямо неразложимой.

Пример 6. Единственной подпрямо неразложимой дистрибутивной решеткой является ординал **2** (одноэлементные алгебры, для которых $O = I$, здесь исключаются из рассмотрения). Действительно, если $O < a < I$, то эндоморфизмы φ_a: $x \to x \wedge a$ и φ'_a: $x \to x \vee a$ определяют собственные конгруэнции θ_a и θ'_a такие, что $\theta_a \wedge \theta'_a = O$. Аналогичный результат имеет место для булевых алгебр.

Основная теорема о подпрямых разложениях, которая будет доказана в главе VIII, утверждает, что *каждая* алгебра, имеющая более одного элемента, является подпрямым произведением подпрямо неразложимых алгебр. Теоремы об однозначности прямых разложений будут доказаны в главе VII (см. также теорему III.11).

Упражнения

1. Докажите, что каждая булева алгебра, имеющая более двух элементов, подпрямо разложима.

2. Покажите, что решетка конгруэнций $\Theta(A)$ любого прямого произведения $A = \prod A_\gamma$ алгебр содержит произведение $\prod \Theta(A_\gamma)$ в качестве подрешетки.

3. Пусть A, B — алгебры с двумя элементами 0, 1, операцией сложения по mod 2 и унарной операцией, определяемой равенствами $x' = x$ в A и $x' = 1 - x$ в B. Докажите, что $A \times B \cong B \times A$, хотя A и B не изоморфны Маккензи).

4. (а) Покажите, что если A — группа или булева алгебра и если $\theta \wedge \theta' = O$ и $\theta \vee \theta' = I$ в $\Theta(A)$, то $A \cong (A/\theta) \times (A/\theta')$.

(б) Покажите, что это не так для дистрибутивных решеток. (Указание. Рассмотрите $A = \mathbf{3}$.)

---

[1]) Впрочем, не исключено, что $A \cong A_\gamma$. Важно лишь, что $\theta_\gamma \neq O$ для всех γ. — *Прим. ред.*

$*$5. Покажите, что если A и B — конечные алгебры с одной унарной операцией и если $A^2 \cong B^2$, то $A \cong B$ (Марица и Брайант).

$*$6. Покажите, что если в условиях упр. 5 $A^n \cong B^n$, то $A \cong B$. (Иванова О. А. — Вестник МГУ. Матем. и мех., 1964, № 3, с. 31—38.)

6. Свободные алгебры слов

Зафиксируем теперь «тип» алгебр, имеющих данное множество F операций. Более точно, мы предполагаем заданным множество индексов, обозначаемых α, и множество связанных с ними неотрицательных целых чисел $n(\alpha)$. Будем рассматривать класс всех алгебр $A = (S, F)$ данного типа. В каждой из них для фиксированного α определена $n(\alpha)$-арная операция f_α: $S^{n(\alpha)} \to S$. Любой такой класс алгебр замкнут относительно образования подалгебр и прямых произведений — эти конструкции уже были определены. Кроме того, гомоморфизмы определялись только для однотипных алгебр (впрочем, см. ниже §§ 11—12).

Для любого набора операций F и любого кардинального числа r, конечного или бесконечного, мы можем построить (свободную) *алгебру слов* $W_r(F) = (W_r, F)$ (иногда называемую «примитивной алгеброй»), которая имеет r порождающих или *букв* x_i (множество X элементов x_i часто называют *алфавитом* алгебры $W_r(F)$). Делается это следующим образом.

Назовем каждую букву x_i F-многочленом *ранга* 0. Для любого положительного целого ρ определяем рекурсивно F-многочлен ранга ρ как выражение («слово») вида $f_\alpha(u_1, \ldots, u_{n(\alpha)})$, где хотя бы одно из $u_j = p_j(x_1, \ldots, x_r)$ будет F-многочленом ранга $\rho-1$ и все u_j являются F-многочленами ранга $<\rho-1$. Равенство в $W_r(F)$ определяется как формальное тождество: $x_i = x_j$ означает, что $i = j$, а

$$f_\alpha(u_1, \ldots, u_{n(\alpha)}) = f_\beta(v_1, \ldots, v_{n(\beta)}) \tag{9}$$

имеет место тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta$ и $u_k \equiv v_k$ для всех $k = 1, \ldots, n(\alpha) = n(\beta)$.

Например, пусть F состоит из двух бинарных операций $\wedge$ и $\vee$ и пусть $r = 2$. Для простоты обозначим x_1 и x_2 через x и y соответственно. Тогда элементов ранга 1 в $W_2(F)$ будет восемь:

$$x \wedge x,\ x \wedge y,\ y \wedge x,\ y \wedge y; \quad x \vee x,\ x \vee y,\ y \vee x,\ y \vee y.$$

Элементов ранга 2 уже $64 + 128 = 192$, —64 комбинации x и y с элементами ранга 1:

$$x \wedge (x \wedge x), \ldots, y \vee (y \vee y); \quad (x \wedge x) \wedge x, \ldots, (y \vee y) \vee y$$

и 128 комбинаций пар элементов ранга 1:

$$(x \wedge x) \wedge (x \wedge x), \ldots, (x \wedge x) \vee (y \wedge y), \ldots$$
$$\ldots, (y \vee y) \wedge (x \vee x), \ldots, (y \vee y) \vee (y \vee y).$$

Более интересен следующий

Пример 7. Пусть F состоит из единственной унарной операции f. Тогда $W_1(F)$ содержит для каждого неотрицательного целого ρ в точности один F-многочлен $f(p_\rho) = p_{\rho+1}$. Поэтому алгебра $W_1(F)$ изоморфна множеству N всех неотрицательных целых чисел, рассматриваемых с функцией следования Пеано: $\sigma(n) = n + 1$.

Ввиду этого, алгебры слов называют также и «алгебрами Пеано»; заметим, что для $W_r(F)$ можно указать [1]) множество аксиом, напоминающих аксиомы Пеано для $\mathbf{N}$.

Основное свойство (свободных) алгебр слов раскрывает

Теорема 12. *Любое вложение* [2]) δ: $X \to A$ *алфавита* X *в* F-*алгебру* $A = (S, F)$ *может быть (однозначно) продолжено до гомоморфизма алгебры слов* $W_r(F)$ *в* A.

Доказательство проводится индукцией по рангу. Каждому слову $p \in W_r(F)$ ранга ρ сопоставляется однозначно определенный элемент $q = p\varphi \in A$ такой, что

(9′) если $p = f_\alpha(u_1, \ldots, u_{n(\alpha)})$, то $q = f_\alpha(u_1\varphi, \ldots, u_{n(\alpha)}\varphi)$.

Согласно (9)—(9′) это отображение будет гомоморфизмом («F-гомоморфизмом»).

Следствие. *Если* $A = (S, F)$ *имеет* r *порождающих, то* $A \cong W_r(F)/\theta$, *т. е.* A *является гомоморфным образом алгебры слов* $W_r(F)$.

Упражнения

1. Сколько элементов ранга 3 содержит W_2 в случае двух бинарных операций?

2. Покажите, что каждая алгебра со счетным множеством порождающих и операций счетна.

3. Покажите, что $W_r(F)$ не может быть конечной, если только F не пусто.

4. (а) Покажите, что в любой алгебре слов $W_r(F)$ максимальные подалгебры — это в точности подмножества, получающиеся при исключении одного порождающего.

(б) Докажите, что множество порождающих в любой алгебре слов является дополнением ее φ-подалгебры [3]).

5. Покажите, что группа автоморфизмов любой алгебры слов изоморфна симметрической группе на множестве порождающих этой алгебры.

6. (а) Докажите, что алгебра слов $W_1(\sigma)$ с одним порождающим и одной унарной операцией изоморфна $\mathbf{Z}^+$ с функцией следования Пеано.

(б) Покажите, что полугруппа эндоморфизмов алгебры $W_1(\sigma)$ изоморфна аддитивной полугруппе $\mathbf{Z}^+$.

7. Докажите, что алгебра слов $W_r(\sigma)$ изоморфна теоретико-множественному объединению r копий алгебры $W_1(\sigma)$. Опишите моноид эндоморфизмов алгебры $W_r(\sigma)$.

---

[1]) См. у Шмидта (Schmidt J. — Zeitschr. Math. Logik Grundl. Math., 1965, 11, p. 227—239), где обсуждается и более ранняя работа Левига и Сломинского.

[2]) И даже любое отображение. — *Прим. ред.*

[3]) См. упр. 2 к § 3. — *Прим. перев.*

8. (а) Докажите, что алгебра слов с одним порождающим и m унарными операциями $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ изоморфна регулярному[1]) представлению свободного моноида FS_m с m порождающими.

(б) Докажите, что моноид эндоморфизмов алгебры $W_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ изоморфен FS_m.

9. Рассмотрите задания упр. 8 для $W_r(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$.

7. Свободные алгебры

Свойством, сформулированным в теореме 12, обладают (в подходящих классах алгебр) многие алгебры, отличные от обсуждавшихся по этому поводу свободных алгебр слов. В общем случае алгебра $C = (T, F)$, которая имеет это свойство для гомоморфизмов по отношению к некоторому классу Г однотипных алгебр $A_\gamma = (S, F_\gamma)$, называется «свободной алгеброй» в Г. В этом разделе мы будем иметь дело с такими свободными алгебрами и их свойствами.

Свободные булевы алгебры, построенные в § III.5, свободны в этом смысле в классе всех булевых алгебр. Подобным образом обстоит дело и со свободными дистрибутивными решетками, построенными в § III.4, и со свободной модулярной решеткой M_{28} из § III.6. Точно так же аналог теоремы 12 справедлив и для свободной группы с r порождающими в классе всех групп[2]). Дадим теперь общее

Определение. Пусть Г — произвольный класс однотипных алгебр $A_\gamma = (S_\gamma, F)$. Говорят, что алгебра $C \in \Gamma$ *свободно порождается* подмножеством $X \subset C$, если (i) X порождает C и (ii) любая функция $f\colon X \to S_\gamma$ может быть продолжена до гомоморфизма $\varphi\colon C \to A_\gamma$.

Так как X порождает C, то очевидно, что это продолжение единственно. Если C_1 и C_2 — алгебры из Г, свободно порожденные подмножествами $X_i \subset C_i$ одинаковой мощности, то любое взаимно однозначное соответствие $\beta\colon X_1 \leftrightarrow X_2$ может быть (однозначно) продолжено до изоморфизма $\mu\colon C_1 \leftrightarrow C_2$. Тем самым доказана

Теорема 13. *В произвольном классе* Г *однотипных алгебр «свободная алгебра с r порождающими» однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется кардинальным числом r и классом* Г.

Теперь рассмотрим, как строятся эти свободные алгебры.

Определение. Пусть Г — произвольный класс однотипных алгебр $A_\gamma = (S_\gamma, F)$ и r — кардинальное число. Пусть Δ обозначает множество всех функций $\delta\colon\ x_i \to \delta(x_i) \in A_{\gamma(\delta)}$, отображающих некоторое фиксированное множество X, состоящее из символов x_i, в A_γ. Для любого многочлена $p(x_1, \ldots, x_r) \in (W_r, F)$ положим

$$(10) \qquad \delta(p) = p(\delta(x_1), \ldots, \delta(x_r)) \in A_{\gamma(\delta)}.$$

---

[1]) То есть представлению правыми трансляциями. — *Прим. перев.*

[2]) Холл М. Теория групп. — М.: ИЛ, 1962, теорема 7.1.2.

Пусть, по определению, $p \equiv q \pmod{\Gamma}$ означает, что $\delta(p) = \delta(q)$ для всех таких δ. Это будет конгруэнцией $\theta(\Gamma)$ на алгебре слов (W_r, F). Тогда алгебра $(W_r, F)/\theta(\Gamma)$ называется свободной алгеброй с r порождающими, связанной с классом Г. Мы обозначим ее через $F_r(\Gamma)$.

Спрашивается, когда $F_r(\Gamma)$ будет принадлежать классу Г? Хотя по построению каждое вложение θ: $X \to A$ может быть (однозначно) продолжено до гомоморфизма, отсюда не следует, что $F_r(\Gamma)$ свободно порождается множеством X: для этого нужно, чтобы $F_r(\Gamma) \in \Gamma$.

Очевидно, что рассмотренная конструкция пред тавляет $F_r(\Gamma)$ как подалгебру произведения алгебр $A_\gamma \in \Gamma$. Отсюда следует

Лемма. *Если Г — класс однотипных алгебр A_γ, то $F_r(\Gamma)$ является подпрямым произведением подалгебр алгебр A_γ.*

Следствие. *Если класс Г замкнут относительно подалгебр и прямых произведений, то $F_r(\Gamma) \in \Gamma$.*

Ввиду сделанных ранее замечаний, этот результат дает достаточное условие для того, чтобы алгебра $F_r(\Gamma)$ свободно порождалась множеством X.

Теорема 13'. *Пусть Г — класс алгебр, замкнутый относительно подалгебр и прямых произведений. Тогда алгебра $F_r(\Gamma)$ свободно порождается множеством X элементов x_i.*

Следствие 1. *Каждое отображение f: $X \to F_r(\Gamma)$ множества порождающих алгебры $F_r(\Gamma)$ в $F_r(\Gamma)$ может быть продолжено до эндоморфизма алгебры $F_r(\Gamma)$.*

Следствие. 2. *Пусть θ — какое-нибудь вложение множества X порождающих алгебры $F_r(\Gamma)$ в множество Y порождающих алгебры $F_s(\Gamma)$, $r \leqslant s$. Тогда θ может быть продолжено до вложения $\bar{\theta}$: $F_r(\Gamma) \to F_s(\Gamma)$.*

В самом деле, θ имеет обратную справа проекцию ψ: $Y \to X$, которую можно продолжить до наложения $\bar{\psi}$: $F_s(\Gamma) \to F_r(\Gamma)$. Тогда искомым продолжением $\bar{\theta}$: $F_r(\Gamma) \to F_s(\Gamma)$ будет функция, имеющая обратной справа для себя $\bar{\psi}$; понятно, что она и будет осуществлять вложение.

Так как произведение любых двух гомоморфизмов является гомоморфизмом, то $F_r(\Gamma)$ останется «свободной», если Г расширить, присоединяя к этому классу все гомоморфные образы входящих в него алгебр. Отсюда получаем.

Следствие 3. *В классе $\mathfrak{A}$ всех алгебр, получающемся из данной алгебры A путем образования подалгебр, прямых произведений и гомоморфных образов, свободная алгебра F_r с r порождающими является подалгеброй алгебры*[1] $A^{o(A)^r}$.

---

[1]) Здесь $o(A)$ обозначает мощность множества A. Обобщения следствия 3 см. в работах Биркгофа ([3, p. 44, следствие 2] и Proc. I Canad. Math. Congr., 1945, p. 321).

Точнее, если X — множество всех элементов $\bar{x}_i \in A^{o(A)^r}$, δ-координатами которых являются $\delta(x_i) \in A$ для любого δ, то F_r будет подалгеброй алгебры $A^{o(A)^r}$, порожденной множеством $X = \{\bar{x}_i\}$.

Алгебраическая независимость. Тесно связана с понятием свободной алгебры следующая концепция алгебраической независимости, принадлежащая Марчевскому [1]).

Определение. Множество элементов $a_1, \ldots, a_r$ алгебры $A = (S, F)$ называется *алгебраически независимым*, если для любых многочленов $p, q \in P_r(F)$ из равенства $p(a_1, \ldots, a_r) = q(a_1, \ldots, a_r)$ следует тождество $p(x_1, \ldots, x_r) = q(x_1, \ldots, x_r)$ для всех $x_i \in A$.

Таким образом, алгебра $A = (S, F)$ является свободно порожденной тогда и только тогда, когда она имеет алгебраически независимое множество порождающих (это будут образы порождающих алгебры слов $F_r(A)$).

Упражнения

1. (а) Почему регулярные кольца не образуют многообразия алгебр?
(б) Покажите, что группы не образуют многообразия моноидов.

2. Покажите, что свободное коммутативное кольцо с r порождающими совпадает с кольцом целочисленных многочленов $\mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_r]$, и значит, является областью целостности.

3. Докажите, что алгебра A свободно порождена тогда и только тогда, когда она имеет алгебраически независимое множество порождающих.

4. Докажите, что для любого коммутативного [2]) кольца R свободный R-модуль с r порождающими есть R^r.

5. (а) Покажите, что если алгебра A имеет конечный порядок r, то порядок свободной алгебры $F_n(A)$ не превосходит r^{r^n}.
(б) Для произвольного конечного r постройте алгебру A, для которой указанная граница достигается.

6. Множество G порождающих алгебры A называется «независимым», если никакое собственное подмножество множества G не порождает A. Пересечение всех максимальных подалгебр алгебры A можно назвать ее «φ-подалгеброй». Покажите, что если A конечна, то ее φ-подалгебра состоит в точности из тех элементов, которые не входят *ни в какое* множество независимых порождающих алгебры A.

*7. Расширьте теорию свободных алгебр на случай бесконечноместных операций, в качестве иллюстрации рассмотрев сначала случай, когда F состоит из единственной операции, определенной на счетных последовательностях [3]).

8. Почему результат упр. 7 совместим с тем фактом, что не существует «свободной полной решетки» (§ XI.4) с тремя порождающими?

9. Покажите, что если F_r — свободная полурешетка с r порождающими, то $F_{r+s} \cong F_r \times F_s$.

---

[1]) Marczewski E. — Fund. Math., 1959, 48, p. 135—145; Ann. mat. pura et appl., 1962, 59, p. 1—9.

[2]) Коммутативность здесь не существенна. — *Прим. ред.*

[3]) Это сделали Сломинский (Slominski A. — Rozpr. mat., 1968, 57, 60 pp.) и Риччи (Ricci A. — Riv mat. univ. Parma, 1979, 52, p. 577—589). — *Прим. перев.*

8. Свободные решетки

Введенные понятия применимы, в частности, и к классу всех решеток. В этом случае явный критерий для проверки соотношений $p \leqslant q$ и $p = q$ между многочленами был предложен Уитменом [1]). Проверка осуществляется в $W_r(\wedge, \vee)$ индукцией по рангу ρ путем рекурсивного применения следующих четырех основных правил:

(11) $\qquad p \vee q \leqslant a$, если $p \leqslant a$ и $q \leqslant a$,

(11′) $\qquad b \leqslant p \wedge q$, если $b \leqslant p$ и $b \leqslant q$,

(12) $\qquad p \wedge q \leqslant a$, если $p \leqslant a$ или $q \leqslant a$,

(12′) $\qquad b \leqslant p \vee q$, если $b \leqslant p$ или $b \leqslant q$.

Ясно, что (11) и (11′) двойственны друг другу, так же, как (12) и (12′). Например, если мы хотим выяснить, будет ли $p \vee q \leqslant r \vee s$, то сначала нужно применить (11) к $p \vee q$, принимая $r \vee s$ за a, а затем (12′) к $r \vee s$, принимая $p \vee q$ за b. Поэтому $p \vee q \leqslant r \vee s$ тогда и только тогда, когда (i) $p \leqslant r \vee s$ и $q \leqslant r \vee s$, или (ii) $p \vee q \leqslant r$, или (iii) $p \vee q \leqslant s$. Таким образом, проверка неравенства $p \vee q \leqslant r \vee s$ сводится к рассмотрению не более чем четырех случаев, в каждом из которых суммарный ранг участвующих выражений понижается на единицу. Следовательно, повторяя процесс редукции для исследования выражения $a \leqslant b$, имеющего сумму рангов для a и b, равную $w + w'$, мы сводим дело к проверке самое большее $4^{w+w'}$ элементарных неравенств вида $x_i \leqslant x_j$ (истинных тогда и только тогда, когда $i = j$).

Теорема 14. *Если в $W_r(\wedge, \vee)$ определить $a\theta b$ как $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, то относительно порядка $\leqslant$ у-множество $W_r(\wedge, \vee)/\theta$ будет свободной решеткой $FL(r)$ с r порождающими* [2]).

Доказательство разбивается на две леммы.

Лемма 1. *$FL(r)$ является квазиупорядоченным множеством.*

Доказательство проводится индукцией. Так как $p \leqslant p$ и $q \leqslant q$, то, согласно (12′), $p \leqslant p \vee q$ и $q \leqslant p \vee q$, откуда $p \vee q \leqslant p \vee q$ ввиду (11). Ссылка на двойственность и принцип индукции завершает доказательство рефлексивности. Докажем теперь транзитивность: если $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, то $a \leqslant c$. Сначала рассмотрим случай, когда один из крайних членов a, c входит в неравенство по одному или сразу по обоим основным правилам.

---

[1]) Уитмен [1], [2]. Обзор более поздних результатов см. у Дина [Symp, p. 31—42].

[2]) Более общее утверждение см. Скорняков Л. А. Элементы теории структур. — М.: Наука, 1982, § 5. — *Прим. ред.*

Если $a = p \vee q \leqslant b$, как в (11), и $b \leqslant c$, то $p \leqslant b \leqslant c$ и $q \leqslant b \leqslant c$, откуда по предположению индукции $p \leqslant c$ и $q \leqslant c$, и значит, ввиду (11) $p \vee q \leqslant c$. Далее, если $a = p \wedge q \leqslant b$, как в (12), и $b \leqslant c$, то $p \leqslant b \leqslant c$ или $q \leqslant b \leqslant c$, откуда по предположению индукции $p \leqslant c$ или $q \leqslant c$, и значит, ввиду (12) $p \wedge q \leqslant c$. Двойственно, если $a \leqslant b \leqslant p \wedge q = c$ или $a \leqslant b \leqslant \leqslant p \vee q = c$, то разложением неравенств для $p \wedge q$ или $p \vee q$ мы докажем, что $a \leqslant p \wedge q$ или $a \leqslant p \vee q$ соответственно.

Остается случай, когда оба неравенства $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$ подлежат редукции, так как $b = p \vee q$ (или $b = p \wedge q$). Если $a \leqslant p \vee q$, как в (12′), и $p \vee q \leqslant c$, как в (11), то $a \leqslant p$ или $a \leqslant q$, а также $p \leqslant c$ и $q \leqslant c$. Значит, $a \leqslant p \leqslant c$ или $a \leqslant q \leqslant c$; в обоих случаях, по предположению индукции, $a \leqslant c$. Случай $a \leqslant p \wedge \wedge q \leqslant c$ рассматривается двойственно, и этим завершается доказательство.

Используя теперь теорему I.3, получаем

Следствие. *Если в $FL(r)$ положить $a = b$ тогда и только тогда, когда одновременно $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, то $FL(r)$ становится упорядоченным множеством.*

Лемма 2. *$FL(r)$ является решеткой, в которой выражение $a \wedge b$ представляет собой точную нижнюю грань, а выражение $a \vee b$ — точную верхнюю грань для пары элементов a, b.*

Доказательство. Согласно (12) и лемме 1, $a \wedge b \leqslant a$ и $a \wedge b \leqslant b$. Виду (11′), если $x \leqslant a$ и $x \leqslant b$, то $x \leqslant a \wedge b$. Значит, $a \wedge b$ будет точной нижней гранью для $\{a, b\}$. Двойственно, $a \vee b$ будет точной верхней гранью для $\{a, b\}$.

Доказательство теоремы. Выберем элементы g_α в произвольной решетке L по одному для каждого x_α. Прямой подстановкой убеждаемся, что каждый элемент $a \in FL(r)$ определяет единственный элемент $a^* \in L$. По лемме 2 это соответствие является гомоморфизмом решетки $FL(r)$ на подрешетку решетки L, порожденную элементами g_α.

Используя аналогичную технику, Дилуорс [2] доказал замечательное обобщение теоремы Уитмена, которое показывает, в частности, что теорема V.18 не может быть перенесена на неатомные решетки.

Теорема 15. *В свободной решетке с дополнениями $F_r(\wedge, \vee, ')$ с r порождающими каждый элемент имеет в точности одно дополнение; при этом $F_2(\wedge, \vee, ')$ содержит $F_d(\wedge, \vee, ')$, где d — счетный кардинал, в качестве подрешетки.*

(В этой теореме предполагаются заданными законы L1—L4, универсальные грани O и I, а также тождества $x \wedge x' = O$ и $(x')' = x$. *Не* предполагается, что из $x \leqslant y$ следует $x' \geqslant y'$.) В этой же работе Дилуорс показал еще, что любая решетка может быть расширена до решетки с единственными дополнениями.

Проблема тождества слов. Проблема выяснения в конечное число шагов, будут ли два многочлена $p, q \in W_r(F)$ иметь одно и то же значение $p(\boldsymbol{x})$ для всех наборов $x_1, \ldots, x_r$ в каждой алгебре A_γ некоторого класса Г, называется «проблемой тождества слов» для Г. Понятно, что она равносильна проблеме установления истинности равенства $p(\boldsymbol{x}) = q(\boldsymbol{x})$ в F_r (Г). Теорема 14 решает проблему тождества для решеток; Дилуорс [2] решил проблему тождества для решеток с дополнениями. Проблемы тождества для дистрибутивных решеток, булевых алгебр и для многочленов («слов»), имеющих $\leqslant 3$ переменных, в модулярных решетках были решены в главе III [1]).

Нетрудно понять, что если построены алгебры F_r (Г) для всех конечных r, то $F_\aleph$ (Г) для любого кардинального числа $\aleph$ может быть получена трансфинитным продолжением на «индуктивный предел» простейшего вида (см. главу VIII). Это поясняет

Теорема 16 [2]). *Пусть* θ — *некоторое вложение множества* X *порождающих алгебры* F_r (Г) *в множество* Y *порождающих алгебры* F_s (Г), $r \leqslant s$. *Тогда* θ *можно продолжить до гомоморфного вложения* μ: F_r (Г) $\to F_s$ (Г).

В самом деле, θ имеет обратную справа проекцию ψ: $Y \to X$, которую можно продолжить до гомоморфного наложения $\overline{\psi}$: F_s (Г) $\to F_r$ (Г), по определению «свободной алгебры». Тогда искомым продолжением $\overline{\theta}$: F_r (Г) $\to F_s$ (Г) будет функция, имеющая обратной справа для себя $\overline{\psi}$; понятно, что она и осуществляет требуемое гомоморфное вложение.

Пример 8. При помощи этого результата легко можно построить *свободную булеву алгебру* F_ω (Г) со счетным числом порождающих. Рассмотрим множество 2^ω всех бесконечных *двоичных «десятичных»* дробей: 0,010010111... и т. д. Пусть S_k — множество всех таких дробей, у которых k-я цифра после запятой равна 1, а S'_k — дополнение этого множества. Используя дизъюнктивную нормальную форму, можно представить F_r (Г), где Г — класс всех булевых алгебр, как кольцо таких подмножеств множества 2^ω, где первые r цифр после запятой принадлежат некоторому заданному множеству последовательностей $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_r)$. Ясно, что имеет место включение F_1 (Г) $\subset F_2$ (Г) $\subset F_3$ (Г) $\subset \ldots$ и потому, согласно сделанному замечанию, F_ω (Г) $= \bigcup F_r$ (Г). В главах IX—X мы увидим, что полученное представление изоморфно (i) полю *всех* открыто-замкнутых подмножеств канторова дисконтинуума (т. е. множества троичных десятичных дробей вида $0, n_1n_2n_3 \ldots$, в которых цифрами являются 0 или 1) и (ii) полю подмножеств отрезка [0, 1], порожденному интервалами с двоично рациональными концами, по модулю конечных множеств.

---

[1]) По поводу проблемы тождества для других алгебраических систем см. работу Холла (Hall P. — J. London Math. Soc., 1958, **33**, p. 482—496).

[2]) См. следствие 2 из теоремы 13'. — *Прим. перев.*

Свободные модулярные решетки. Свободная модулярная решетка M_{28} с тремя порождающими подробно обсуждалась в § III.6, и мы уже видели (§ III.7 и в частности, упр. 8), что свободная модулярная решетка, порожденная двумя конечными цепями, дистрибутивна. Однако проблема тождества для свободных модулярных решеток с $n=4$ порождающими не решена и представляется очень трудной. Известно лишь, что такая решетка бесконечна и имеет бесконечную длину.

Не пытаясь представить здесь все известные результаты, касающиеся этой проблемы, отошлем читателя к интересному обзору Уитмена [**Symp**, p. 17—22] [1]).

Упражнения

1. (а) Покажите, что $FL(1+2)$ имеет 9 элементов и плоскую диаграмму.

(б) Покажите, что $FL(1+3)$ имеет 20 элементов и плоскую диаграмму.

$*$2. Покажите, что свободная модулярная решетка, порожденная у-множеством $2+1+1$, содержит в точности 238 элементов [2]).

$*$3. Покажите, что $FL(2+2)$ и $FL(1+4)$ бесконечны (Рольф, Ю. И. Соркин [3])).

4. (а) Покажите, что $FL(3)$ бесконечна.

(б) Покажите, что $FL(3)$ содержит бесконечную цепь.

5. (а) В $FL(4)$ пусть $p_i=\bigvee_{j\neq i} x_j$. Покажите, что $p_1\vee p_2<(p_1\vee p_2\vee p_3)\wedge\wedge(p_1\vee p_2\vee p_4)$.

(б) Покажите, что атомы решетки $FL(n)$ порождают дистрибутивную решетку тогда и только тогда, когда $n\leqslant 3$.

(в) Покажите, что атомы решетки $FL(4)$ порождают подрешетку, содержащую 22 элемента.

(Упр. 5(а)—(в), 6, 9 содержат результаты Уитмена [1].)

6. Покажите, что группа автоморфизмов решетки $FL(n)$ является симметрической группой степени n и что φ-подрешетка решетки $FL(n)$ получается из нее исключением порождающих.

7. (а) Покажите, что $FL(3)$ содержит в качестве подрешетки решетку $FL(n)$, каково бы ни было конечное или счетное n.

($*$б) Покажите, что любая бесконечная подрешетка свободной решетки имеет бесконечную длину [4]).

---

[1]) Обзор последних результатов приведен в работе Фриза (Freese R. — Trans. AMS, 1980, **261**, № 1, p. 81—91), где доказана также неразрешимость проблемы тождества для свободной модулярной решетки с пятью порождающими $FM(5)$. — *Прим. перев.*

[2]) Такеути (Takeuchi K. — Tôhoku Math. J., 1959, **11**, p. 1—12). [Описание этой решетки (решив тем самым проблему 29 из [**LT2**]) еще раньше получили Трол и Данкен (Thrall R. M., Duncan D. G. — Amer. J. Math, 1953, **75**, № 3, p. 627—632). — *Прим. перев.*]

[3]) Соркин Ю. И. — Матем. сб., 1952, **30**, p. 677—694.

[4]) См. работы Йонссона (Jonsson B. — Canad. J. Math., 1961, **13**, p. 256—264), Йонссона и Кифера (Jonsson B., Kiefer J. E. — Canad. J. Math., 1962, **14**, p. 487—497), Гелвина и Йонссона (Galvin F., Jonsson B. — Canad. J. Math., 1961, **13**, p. 265—272) — по этим и связанным с ними вопросам. Отметим также статью Дина (Dean R. A.) [**Symp**, p. 31—42, теоремы 6, 8].

∗8. (а) Покажите, что свободная решетка $FL(P)$, порожденная любым конечным или счетным у-множеством P допускает вложение в $FL(3)$ [1]).

(б) Покажите, что если все решетки с тремя порождающими можно вложить в некоторую решетку L, то L несчетная [2]).

∗9. Покажите, что из всех элементов алгебры слов $W_{\aleph}(\wedge, \vee)$, равных данному элементу решетки $FL(\aleph)$, любые два элемента наименьшей длины эквивалентны уже в силу L2—L3.

10. Покажите, что свободная модулярная орторешетка, порожденная цепью длины r, есть 2^r (см. также § IV.3, упр. 9).

∗11. Покажите, что в любой конечной решетке, допускающей вложение в свободную решетку, $x \wedge \bigvee_{i=1}^{5} y_i = \bigvee_{j=1}^{5}\left(x \wedge \bigvee_{i=1,\, j\neq i}^{5} y_i\right)$, но что это тождество истинно не во всех решетках (Йонссон).

9. Постулаты

Как было отмечено в § 1, в наиболее привычных классах абстрактных алгебр эти последние определяются как множества элементов, замкнутые относительно некоторых операций, удовлетворяющих определенным *постулатам*. Эти постулаты весьма различны по своему характеру, но среди них выделяются по крайней мере четыре типа предложений [3]).

1. Тождество. Пусть (A, F) — алгебра и p, q — многочлены из (P_r, F) [4]). Предложение

(13) $$p(a_1, \ldots, a_r) = q(a_1, \ldots, a_r) \text{ для всех } a_i \in A$$

называется *тождеством*. Для бинарных операций примером тождества являются коммутативный ($r = 2$) и ассоциативный ($r = 3$) законы, закон идемпотентности ($r = 1$), а для систем с двумя бинарными операциями $\wedge$ и $\vee$ — законы поглощения ($r = 2$):

$$x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x.$$

2. Квазитождество. Пусть $p_0, p_1, \ldots, p_s$ и $q_0, q_1, \ldots, q_s$ — конечные множества многочленов из (P_r, F). Предложение

(14) $$\text{если } p_i(a_1, \ldots, a_r) = q_i(a_1, \ldots, a_r) \text{ при } i = 1, \ldots, s,$$
$$\text{то } p_0(a_1, \ldots, a_r) = q_0(a_1, \ldots, a_r)$$

называется *квазитождеством*. Если $s = 0$, то предложение (14) превращается в (13) и поэтому каждое тождество является квазитождеством.

---

[1]) О решетках, свободно порожденных у-множествами, см. § 5 в книге Л. А. Скорнякова [1]. — *Прим. перев.*

[2]) По поводу упр. 8 см. работу Кроули и Дина (Crawley P., Dean R. A. — Trans. AMS, 1959, 92, p. 35—47, теоремы 6, 8).

[3]) Обсуждение этих вопросов с логической точки зрения см. у Линдона (Lyndon R. — Bull. AMS, 1959, 65, p. 287—299).

[4]) P_r обозначает множество всех многочленов ранга r. — *Прим. перев.*

Закон сокращения в группах («если $ax = ay$, то $x = y$») является примером квазитождества. Другой пример: «если $a \wedge x = a \wedge y$ и $a \vee x = a \vee y$, то $x = y$» — в дистрибутивных решетках. И еще: «если $a \wedge x = a \wedge y = O$ и $a \vee x = a \vee y = I$, то $x = y$»; это квазитождество истинно в любой дистрибутивной решетке и в любой решетке с единственными дополнениями.

3. **Дизъюнктивная импликация.** Если в (14) для краткости положить $(a_1, \ldots, a_r) = \boldsymbol{a}$, то предложение

(15) если $p_i(\boldsymbol{a}) = q_i(\boldsymbol{a})$ при $i = 2, \ldots, s$, то $p_0(\boldsymbol{a}) = q_0(\boldsymbol{a})$

или $p_1(\boldsymbol{a}) = q_1(\boldsymbol{a})$

можно было бы назвать *дизъюнктивной импликацией*. Например, закон сокращения в целостном кольце («если $ax = ay$, то $x = y$ или $a = 0$») является дизъюнктивной импликацией.

4. **Экзистенциальное тождество.** В обозначениях из (15) предложение вида «$(Qa_1) \ldots (Qa_r)\,(p\,(a_1, \ldots, a_r) = q\,(a_1, \ldots, a_r))$», где Qa_i означает «для всех $a_i \in A$» или «существует $a_i \in A$» и по крайней мере один из кванторов является квантором существования, можно назвать *экзистенциальным тождеством*. Например, предложение «для всех a, b уравнение $xa = b$ имеет решение» является экзистенциальным тождеством.

Постулаты различных типов, описанные выше, по-разному ведут себя в смысле сохранения при образовании подалгебр, гомоморфных образов и прямых произведений.

Теорема 17. *Тождества сохраняются при переходе к подалгебрам, гомоморфным образам и прямым произведениям.*

Доказательство. Если (13) выполняется в A и S — подалгебра алгебры A, то (13) *тем более* выполняется в S. То же справедливо и если заменить A на A/θ, т. е. равенство $=$ заменить на θ (точнее, на сравнение $\equiv$ по mod θ). Наконец, если тождество (13) истинно в каждом сомножителе прямого произведения ΠA_γ, то оно выполняется и в ΠA_γ, поскольку выполняется для каждой компоненты $a_{i\gamma}$ любых элементов $a_i \in \Pi A_\gamma$.

Теорема 18. *Квазитождества сохраняются при переходе к подалгебрам и прямым произведениям.*

Доказательство. Если (14) выполняется в A и S — подалгебра алгебры A, то (14) *тем более* выполняется в S. Далее, если (14) истинно в каждом сомножителе A_γ прямого произведения ΠA_γ и $p_i\,(\boldsymbol{a}) = q_i\,(\boldsymbol{a})$ в ΠA_γ при $i = 1, \ldots, s$, то $p_i\,(a_\gamma) = q_i\,(a_\gamma)$ истинно в каждом A_γ при $i = 1, \ldots, s$ по определению ΠA_γ. Значит, $p_0\,(a_\gamma) = q_0\,(a_\gamma)$ в каждом A_γ, согласно (14), примененному к A_γ. Поэтому $p_0\,(\boldsymbol{a}) = q_0\,(\boldsymbol{a})$ истинно в ΠA_γ по определению ΠA_γ.

Следствие. *Любое тождество или квазитождество, истинное в каком-нибудь классе однотипных алгебр A_γ, истинно и в свя-*

занной с этим классом свободной алгебре с r порождающими для любого кардинального числа r.

Квазитождества не обязательно сохраняются при гомоморфизмах. Пусть, например, A — аддитивная полугруппа неотрицательных целых чисел и $\theta = \theta(N, m)$ отождествляет n с $n + km$ при $n \geqslant N$. Тогда закон сокращения (если $a + x = a + y$, то $x = y$) выполняется в A, то не выполняется в A/θ при $N > 0$.

Дизъюнктивные импликации сохраняются при переходе к подалгебрам, но не сохраняются ни в гомоморфных образах, ни при образовании прямых произведений. Например, закон сокращения для областей целостности, выполняющийся в кольце $\mathbf{Z}$ положительных целых чисел, не выполняется ни в кольце $\mathbf{Z}_n$ вычетов по mod n, если только n не является простым, ни в прямом произведении $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

Экзистенциальные тождества не сохраняются при переходе к подалгебрам, если не вводить дополнительных операций. Бейкер построил (бесконечную) систему с бинарным (неассоциативным) умножением, в которой уравнение $xa = b$ имеет решение при любых a, b, но в которой множество всех подалгебр, удовлетворяющих этому условию, *не* замкнуто относительно пересечения.

Упражнения

1. Покажите, что в любом подпрямом произведении копий пятиэлементной немодулярной решетки

(а) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge [(y \wedge z) \vee (z \wedge x) \vee (x \wedge y)]$ (Левиг);

(б) если $x \vee y = y \vee z = z \vee x$, то $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) = y$ [1]) (Уотермен).

2. Покажите, что свободная решетка с тремя порождающими, в которой истинны все тождества, выполняющиеся в решетке N_5, содержит 99 элементов (Уотермен).

3. Рассмотрите для коммутативного кольца R условие: «для любого $a \in R$ найдется $n = n(a) \in \mathbf{Z}^+$ такое, что $a^n = 0$». Сохраняется ли это условие в подалгебрах? В произвольных прямых произведениях? В гомоморфных образах?

*4. Покажите, что не существует решеточного квазитождества, не выводимого из L1—L4 и выполняющегося во всех симметрических решетках разбиений; то же для всех решеток подгрупп.

5. Опишите свободные алгебры Ньюмена с одним и двумя порождающими соответственно.

6. В решетке L с более чем одним элементом пусть α обозначает предложение «если $x \geqslant z$, то $p(x, y, z) = q(x, y, z)$». Покажите, что либо α выполняется во всех решетках, либо из α следует L5. (Указание. Изучите упр. 1 из § 8.)

7. В модулярной решетке L с более чем одним элементом пусть β обозначает тождество $f(x, y, z) = g(x, y, z)$. Покажите, что либо β выполняется во всех модулярных решетках, либо из β следует L6.

*8. Покажите, что существует не выводимое из L5 тождество, которое истинно в любой решетке нормальных подгрупп [2]).

---

[1]) В оригинале тождество в правой части импликации не дописано, и здесь приводится один из возможных вариантов. — *Прим. перев.*

[2]) Йонссон (Jónsson B.). — Math. Scand., 1953, 1, p. 193—206. В упр. 9 имеется в виду результат Линдона (Lyndon R. C. — Proc. AMS, 1954, 5, p. 8—9); см. еще Bull. AMS, 1959, 65, p. 287—299.

*9. Постройте семиэлементную алгебру, которая не имела бы конечного базиса тождеств.

*10. Покажите, что если тождество $p = q$ истинно в решетке L, то $p = q$ будет тождеством и в полной решетке $\widehat{L}$ идеалов решетки L.

10. Многообразия алгебр

В каждом классе $\mathcal{F}$ однотипных (§ 6) алгебр с заданным множеством F операций можно выделить различные «многообразия» алгебр, каждое из которых характеризуется множеством полиноминальных тождеств $p = q$, которые выполняются на всех его алгебрах. Чтобы уточнить это понятие, введем играющую здесь основную роль полярность [1]).

Определение. Для F-равенства $p = q$ и F-алгебры $A = (S, F)$ пусть $(p = q)\,\rho A$ означает, что $p = q$ тождественно истинно в A. Имея в виду *полярность*, определяемую отношением ρ при заданном F, назовем *замкнутыми* множествами F-алгебр и F-тождеств *многообразия* $\Gamma = (\Gamma^+)^*$ и совокупности Γ^+ соответственно.

Из результатов §§ 7, 9 следует, что любое многообразие алгебр (i) замкнуто относительно подалгебр, прямых произведений и гомоморфных образов и (ii) содержит для любого кардинального числа r «свободную алгебру» $F_r(\Gamma)$ с r порождающими. *Тождества от r* переменных из Γ^+ (поляра для Γ) — это в точности *равенства* между многочленами от порождающих алгебры $F_r(\Gamma)$. В этом разделе мы докажем несколько сильных обращений этих результатов.

Пусть $A = (S, F)$ — *произвольная* алгебра с r порождающими, в которой выполняются все тождества из Γ. По только что сказанному, $F_r(\Gamma)$ допускает гомоморфизм на A и, в свою очередь, $F_r(\Gamma)$ является гомоморфным образом алгебры слов $W_r(F)$. Таким образом, доказана

Теорема 19. *Пусть A — произвольная F-алгебра с r порождающими, в которой выполняются все тождества, истинные в некотором классе F-алгебр, замкнутом относительно подалгебр и прямых произведений. Тогда A является гомоморфным образом алгебры $F_r(\Gamma)$. Более того,*

$$A \cong W_r(F)/\theta_1 \text{ и } F_r(\Gamma) \cong W_r(F)/\theta, \text{ где } \theta_1 \leqslant \theta. \tag{16}$$

(В доказательстве используется еще следствие 1 из теоремы 13′.)

Зафиксируем некоторое множество Δ равенств для данного множества F операций и пусть $\Delta^* = \Gamma$ — соответствующее мно-

---

[1]) Биркгоф [3, § 10]. Доказываемая ниже теорема 22 выступает там как теорема 10; доказательство проходит и для бесконечноместных операций. Заметим, что хотя $\mathcal{F}$ является классом (мощности входящих в него алгебр не ограничены), F предполагается множеством.

гообразие алгебр. Тогда *свободную* алгебру с r порождающими $x_1, \ldots, x_r$ часто можно построить, используя следующий результат.

Теорема 20. *Допустим, что каждый элемент $p = p(x_1, \ldots, x_r)$ алгебры слов $W_r(F)$ можно преобразовать путем повторного применения тождеств из Δ в один из многочленов p_j подмножества $C \subset W_r(F)$. Пусть, далее, в многообразии Δ^* существует алгебра $A = (S, F)$ с порождающими $x_1, \ldots, x_r$ такими, что если $p_j \neq p_k$ и $\{p_j, p_k\} \subset C$, то $p_j(x_1, \ldots, x_r) \neq p_k(x_1, \ldots, x_r)$. Тогда A является свободной алгеброй с r порождающими в многообразии Δ^*.*

Доказательство. Пусть заданы алгебра $B = (T, F)$, принадлежащая Δ^*, и функция $\varphi\colon X \to T$, где $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$. Определим продолжение $\bar\varphi$ функции φ, полагая

$$\bar\varphi(a_j) = p_j(x_1\varphi, \ldots, x_r\varphi), \tag{17}$$

где p_j — *единственный* F-многочлен такой, что $p_j(x_1, \ldots, x_r) = a_j$ в (S, F). Мы должны показать, что $\bar\varphi$ — гомоморфизм, т. е. что для любой операции $f_\alpha \in F$

$$f_\alpha(\bar\varphi(a_1), \ldots, \bar\varphi(a_{n(\alpha)})) = \bar\varphi(f_\alpha(a_1, \ldots, a_{n(\alpha)})). \tag{18}$$

Ввиду соотношения (17) левая часть в (18) есть $f_\alpha(p_1(\boldsymbol{x}\varphi), \ldots, p_{n(\alpha)}(\boldsymbol{x}\varphi))$, где $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_r)$. Но правая часть в (18) равна $\bar\varphi(q(\boldsymbol{x}))$, где $q(\boldsymbol{x}) = f_\alpha(p_1(\boldsymbol{x}), \ldots, p_{n(\alpha)}(\boldsymbol{x}))$ — тот единственный многочлен в C, к которому при помощи Δ приводится данное выражение.

Каждое равенство $f_\alpha(\boldsymbol{a}) = c$ в каждой «таблице умножения» алгебры A можно получить из Δ как

$$f_\alpha(p_1(\boldsymbol{x}), \ldots, p_{n(\alpha)}(\boldsymbol{x})) = q(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_r), \tag{19}$$

где p_i и q — однозначно определенные F-многочлены из C такие, что $p_i(\boldsymbol{x}) = a_i$ и $q(\boldsymbol{x}) = c$. Поэтому доказываемое тождество (18) равносильно тождеству

$$f_\alpha(p_1(\boldsymbol{x}\varphi), \ldots, p_{n(\alpha)}(\boldsymbol{x}\varphi)) = q(x_1\varphi, \ldots, x_r\varphi), \tag{20}$$

которое, поскольку $(T, F) \in \Delta^*$, получается применением тождеств из Δ к многочленам от $y_i = x_i\varphi$. Ч. т. д.

Теперь докажем одну изящную теорему Неймана [1]).

Теорема 21. *Пусть A — свободная алгебра с порождающими x_i. Тогда алгебра A/θ свободно порождается классами эквивалентности $\tilde x_i$, содержащими элементы x_i, в том и только в том случае, если θ является вполне характеристической [2]) конгруэнцией.*

---

[1]) Neumann B. H. Special topics in algebra. — N. Y. University, 1962, p. 58—62. См. также работу Шмидта (Schmidt J. — Math. Ann., 1965, 158, p. 131—157).

[2]) То есть совместимой со всеми эндоморфизмами алгебры A. — *Прим. перев.*

Доказательство этого результата опирается на следующую очевидную лемму. (Заметим, что классы $\tilde{x}_i$ в любом случае порождают A/θ.)

Лемма 1. *Эндоморфизм φ алгебры A индуцирует эндоморфизм алгебры A/θ тогда и только тогда, когда из $x\theta y$ следует, что* $(x\varphi)\ \theta\ (y\varphi)$.

Доказательство теоремы. Предположим, что θ — вполне характеристическая конгруэнция на A. Если $\tilde{x}_i \to \tilde{y}_i$ — какое-то отображение множества классов $\tilde{x}_i$ в A/θ, то пусть $x_i \to y_i$ будет *одно из* соответствующих отображений $A \to A$, а φ — единственное его продолжение до эндоморфизма алгебры A. Для любых элементов $p(x_1, \ldots, x_r)$ и $q(x_1, \ldots, x_r)$ алгебры A, если $p\theta q$ в A, то обязательно будет и $[p(x_1\varphi, \ldots, x_r\varphi)]\ \theta\ [q(x_1\varphi, \ldots, x_r\varphi)]$, поскольку θ вполне характеристическая конгруэнция. По лемме 1 это как раз и означает, что φ индуцирует некоторый эндоморфизм $\bar{\varphi}$ алгебры A/θ. Следовательно, A/θ свободна.

Обратно, если алгебра A/θ свободно порождена классами $\tilde{x}_i$, то существует эндоморфизм φ алгебры A, переводящий $\tilde{x}_i$ в $\tilde{y}_i$, и он индуцирует эндоморфизм $\bar{\varphi}$ на A/θ. Поэтому для любых многочленов p и q из $p\theta q$ в A (т. е. из $[p(x_1, \ldots, x_r)]\ \theta\ [q(x_1, \ldots, x_r)]$) следует

$$\varphi(p(x_1, \ldots, x_r)) = p(x_1\varphi, \ldots, x_r\varphi) = p(y_1, \ldots, y_r) \equiv q(y_1, \ldots, y_r) = \\ = q(x_1\varphi, \ldots, x_r\varphi) = \varphi(q(x_1, \ldots, x_r)).$$

Значит, по лемме 1, если $x\theta y$, то $(x\varphi)\ \theta\ (y\varphi)$. Но в силу произвольности элементов y_i каждый эндоморфизм φ алгебры A будет индуцироваться подобным образом, и следовательно (по определению) θ является вполне характеристической конгруэнцией. Этим и завершается доказательство.

Следствие. *При заданных F и r свободные алгебры с r порождающими являются фактор-алгебрами $W_r(F)/\theta$ алгебры слов $W_r(F)$ по вполне характеристическим конгруэнциям.*

Лемма 2. *Множество Γ^+ всех тождеств, истинных в алгебре A или в множестве Γ однотипных алгебр $A_\gamma = (S_\gamma, F)$, замкнуто относительно следующих правил вывода:*

(i) *если $p_h = q_h$ — тождество для $h = 1, \ldots, n$, то $f_i(p_1, \ldots, p_n) = f_i(q_1, \ldots, q_n)$ для любой n-арной операции $f_i \in F$;*

(ii) *если $p = q$ — тождество в Γ, то при подстановке любого многочлена $\eta(x_j)$ вместо переменной x_j во всех ее вхождениях в $p = q$ снова получится тождество для Γ.*

Указанные правила вывода очевидны и столь же очевидно, что они устанавливают определенную связь класса Γ с алгеброй слов $W_r(F)$. Именно, правило подстановки (i) утверждает, что любое отношение эквивалентности θ является конгруэнцией на каждой алгебре слов $W_r(F)$. Подстановки же вида (ii) — это в точности эндоморфизмы алгебры слов $W_r(F)$. Поэтому в силу теоремы 21 замкнутость относительно правила подстановки (ii) означает, что $W_r(F)/\theta$ является *свободной алгеброй*. Таким образом, доказана

Теорема 22. *Для произвольного заданного множества F операций рассмотрим полярность между алгебрами $A = (S, F)$ и тождествами $p = q$, определяемую следующим отношением:*

$$(p = q)\,\rho A \text{ означает, что } p \equiv q \text{ в } A. \tag{21}$$

«Замкнутыми» относительно этой полярности будут множества алгебр, замкнутые относительно подалгебр, прямых произведений и гомоморфных образов, и совокупности тождеств, являющиеся отношениями эквивалентности, замкнутыми в смысле правил вывода (i)—(ii).

Тарский назвал классы алгебр, определяемые указанной полярностью, «эквационально определимыми».

11. Полиморфизмы. Криптоизоморфизмы

В идеале универсальная алгебра должна бы дать систематическую классификацию и описание всех мыслимых алгебр. Выполнение этой программы начинается с логической классификации алгебр *по типам* в соответствии с числом их различных нульарных, унарных, бинарных, тернарных и т. д. операций и по минимальному числу их образующих. (Это число всегда существует, поскольку кардинальные числа вполне упорядочены (см. главу VIII).) Таким образом с каждой алгеброй $A = (S, F)$ связывается единственная алгебра слов $W_r(F)$ и конгруэнция θ. Действуя в этом духе, можно легко перечислить, например, все алгебры с *одним* порождающим и *одной унарной* операцией [1]) σ. Сначала вспомним упр. 7 из § 6, где высказано следующее утверждение.

Лемма 1. (*Свободная*) *алгебра слов $W_1(\sigma)$ с одной унарной операцией σ и одним порождающим x изоморфна множеству* $\mathbf{N}$ *неотрицательных целых чисел с операцией следования $\sigma(k) = k + 1$. Алгебра слов $W_r(\sigma)$ является дизъюнктным объединением r копий алгебры* $\mathbf{N}$.

Лемма 2. *Собственная конгруэнция θ самого общего вида на алгебре слов $W_1(\sigma)$ задается выбором двух положительных целых чисел m и n и условием*

$$k\theta l \text{ тогда и только тогда, когда } k \equiv l\ (n) \text{ и } k,\ l \geqslant m. \tag{22}$$

Классификация унарных алгебр с r порождающими x_i производится аналогично. Каждому i сопоставляется либо пустое множество $\varnothing$, либо два положительных целых числа $m(i)$ и $n(i)$, наименьшие со свойством $\sigma^m(x_i) = \sigma^{m+n}(x_i)$. Кроме того,

[1]) Детальное обсуждение алгебр с одной унарной операцией, по существу, повторило бы соответствующую часть классической монографии Дедекинда «Was sind und was sollen die Zahlen». [Русский перевод: Что такое числа и для чего они служат. — Казань, 1905. — *Прим. перев.*]

каждой паре i, j соотносится либо пустое множество, либо наименьшая пара положительных целых чисел h, k таких, что $\sigma^h(x_i) = \sigma^k(x_j)$.

Аналогичная задача для *бинарных* алгебр, даже с одной операцией, уже невероятно усложняется. Здесь мы не будем ее рассматривать. И вместо этого закончим пессимистическим замечанием о том, что, даже решив эту задачу для *каждой* алгебры слов $W_r(F)$, мы не получим полного решения проблемы классификации алгебр. Это объясняется двумя трудностями, связанными с понятиями полиморфизма и криптоизоморфизма. Сейчас мы обсудим эти понятия, первое из которых ввел Бурбаки.

Определение. *Полиморфизмом* алгебры $A = (S, F)$ в алгебру $B = (T, G)$ называется пара функций, состоящая из взаимно однозначного соответствия θ: $F \leftrightarrow G$ такого, что

$$\text{если } g_\beta = \theta(f_\alpha), \text{ то } n(\beta) = n(\alpha), \tag{23}$$

и отображения φ: $S \to T$, для которого

$$g_\beta(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) \equiv \varphi(f_\alpha(x_1, \ldots, x_n)), \quad n = n(\alpha) = n(\beta). \tag{24}$$

Полиморфизм, у которого φ — тоже взаимно однозначное соответствие, называется *полиизоморфизмом*.

Например, дуальный изоморфизм между решетками является полиизоморфизмом, при котором $\theta(\wedge) = \vee$ и $\theta(\vee) = \wedge$. Очевидным образом детализируя понятие полиизоморфизма, приходим к полиавтоморфизму. Важным примером полиавтоморфизмов являются невырожденные *полулинейные* преобразования n-мерного (правого) векторного пространства над телом D — мы имеем в виду отображения $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}$ вида

$$y_i = \sigma\left(\sum a_{ij}x_j\right), \tag{25}$$

где σ — автоморфизм тела D, а $\|a_{ij}\|$ — невырожденная квадратная матрица с элементами из D.

Гораздо более серьезное затруднение связано с тем, что *одна и та же* абстрактная алгебра часто может быть определена различными неполиизоморфными способами. Например, группа в § 1 была введена как алгебра с одной бинарной и одной унарной операцией. Ее можно определить и как множество с одной бинарной операцией xy, одной унарной операцией $x \to x^{-1}$ *и* одной нульарной операцией, выбирающей постоянный «единичный элемент» e, причем для этих операций выполняются тождества

$$x(yz) = (xy)z, \quad xx^{-1} = x^{-1}x = e, \quad ey = ye = y. \tag{26}$$

Группу можно задать и как множество с *двумя* бинарными операциями $x/y = xy^{-1}$ и $x \diagdown y = x^{-1}y$ (как кольцо или решетку), подчиненными тождествам

$$x/x = y \diagdown y, \quad y/(y \diagdown x) = x, \quad x \diagdown (y/z) = (x \diagdown y)/z \text{ и т. д.} \tag{27}$$

для всех x, y, z.

Наконец, группу можно определить одной ассоциативной бинарной операцией xy такой, что уравнения $xa = b$ и $ay = b$ всегда разрешимы относительно x и y (экзистенциальные тождества).

Поэтому, если задана какая-то группа (X, F), где $F = \{\cdot, {}^{-1}\}$, то из нее можно получить три другие группы (X, F_i) $(i = 1, 2, 3)$ с различными множествами операций, причем они не будут полиизоморфными. Но все они криптоизоморфны (от греческого слова «скрытый, тайный») в следующем смысле.

Определение. Пусть $A = (X, F)$ и $B = (X, G)$ — алгебры с одними и теми же элементами. *Криптоизоморфизм* между A и B состоит из двух наборов равенств: (i) для каждой операции $f_\alpha \in F$ задаются G-полиномиальные равенства $q_i^\alpha(\boldsymbol{x}, y) = \bar{q}_i^\alpha(\boldsymbol{x}, y)$, равносильные равенствам $y = f_\alpha(\boldsymbol{x})$ в A, и (ii) для каждой операции $g_\beta \in G$ указаны F-полиномиальные равенства $p_i^\beta(\boldsymbol{x}, y) = \bar{p}_i^\beta(\boldsymbol{x}, y)$, равносильные равенствам $y = g_\beta(\boldsymbol{x})$ в B.

Например, булева решетка криптоизоморфна подходящей булевой алгебре и (очевидно) наоборот. В несколько более общем смысле любая решетка L криптоизоморфна *полурешетке*, задаваемой на том же множестве элементов одной лишь операцией $\vee$. Это потому, что равенство $y = x_1 \wedge x_2$ равносильно следующему набору из двух равенств и одного условного равенства: (i) $x_1 \vee y = x_1$; (ii) $x_2 \vee y = x_2$; (iii) если $x_1 \vee z = x_1$ и $x_2 \vee z = x_2$, то $y \vee z = y$.

Упражнения к §§ 10—11

1. Покажите, что в полной решетке, элементами которой являются «замкнутые» множества тождеств, I будет замыканием тождества $x \equiv y$. Опишите для заданного F двойственное многообразие I^+ алгебр.

2. Пусть θ — конгруэнция на некоторой алгебре A и $\bar\theta$: $A \to A/\theta$ — связанное с ней «естественное» наложение. Покажите, что для гомоморфизма φ: $A \to B$ (i) существует гомоморфизм ψ: $(A/\theta) \to B$ такой, что $\bar\theta\psi = \varphi$ тогда и только тогда, когда из $a\theta a_1$ в A следует $a\varphi = a_1\varphi$ (φ «совместим» с θ), и (ii) этот гомоморфизм ψ является единственным в данном случае.

3. Убедитесь в справедливости леммы 1 из § 11.

4. Покажите, что решетка всех многообразий решеток дистрибутивна. (Указание. Используйте теоремы 9 и 21.)

5. (а) Докажите, что решетка всех многообразий групп модулярна.

(б) Покажите, что каждое многообразие абелевых групп состоит из таких групп, в которых $nx \equiv 0$ для некоторого подходящего натурального n.

(в) Покажите, что решетка всех многообразий абелевых групп дистрибутивна.

6. Покажите, что решетка всех многообразий алгебр с одной унарной операцией и одним порождающим дистрибутивна.

7. Покажите, что если алгебры A и B криптоизоморфны, то $\mathrm{Aut}\, A \cong \mathrm{Aut}\, B$, но A и B не обязательно имеют изоморфные решетки подалгебр или решетки конгруэнций.

8. (а) [1]) Для произвольной группы G пусть $A = (G, T)$, где T — множество всех левых трансляций $f_a(x) = ax$, $a \in G$. Покажите, что решетка конгруэнций алгебры A изоморфна решетке всех подгрупп группы G.

---

[1]) Это задание повторяет упр. 8 к § 4. — *Прим. перев.*

(б) Покажите, что алгебра A не будет криптоизоморфной группе G.

9. Покажите, что соответствие между дистрибутивной решеткой $(L, \wedge, \vee)$ и тернарной алгеброй A, задаваемой на L операцией медианы, иногда является криптоизоморфизмом, но что это бывает далеко не всегда.

10. Покажите, что если A — конечно порожденная алгебра, то каждое множество ее порождающих содержит конечное подмножество, порождающее A.

11. Докажите, что полиизоморфизм и криптоизоморфизм являются отношениями эквивалентности между алгебрами.

12. Постройте криптоизоморфизм булевой алгебры (i) с булевым кольцом, (ii) с алгеброй Шефера [1]).

13. Решите проблему тождества для свободной алгебры Шефера с r порождающими.

14. Покажите, что любые две криптоизоморфные алгебры (S, F) и (S, G) имеют криптоизоморфные свободные алгебры.

15. Покажите, что в решетке решеточных эквациональных теорий совокупность всех тождеств, истинных в пятиэлементной немодулярной решетке N_5, покрывается совокупностью тождеств, истинных в дистрибутивных решетках. (Указание. Все собственные подрешетки и все гомоморфные образы решетки N_5 дистрибутивны.)

16. Установите криптоизоморфизм между алгеброй Ли и «обертывающей» линейной ассоциативной алгеброй [2]).

*12. Функторы и категории

Многие из рассмотренных конструкций определяют *функторы* из одного класса однотипных алгебр в другой класс алгебр того же самого или иного типа. Под функтором мы понимаем функцию ψ, которая переводит множества в множества, отображения в отображения и сохраняет суперпозицию и тождественное отображение:

$$(28) \qquad \psi(1_S) = 1_{\psi(S)} \quad \text{и} \quad \psi(f \circ g) = \psi(f) \circ \psi(g)$$

для любых множества S и отображений $f\colon S \to T$, $g\colon T \to U$.

Более того, большинство из упомянутых конструкций являются соответствиями, сопоставляющими гомоморфизмам класса алгебр данного типа гомоморфизмы класса $\psi(\Gamma)$ (некоторые переводят только изоморфизмы в изоморфизмы).

Любой типовой класс алгебр определяет *конкретную категорию*, объектами которой являются алгебры этого класса, а $\mathrm{Hom}(A, B)$ для двух его алгебр состоит из всех гомоморфизмов $\varphi\colon A \to B$. Очевидно, что 1_A является изоморфизмом и что множество гомоморфизмов замкнуто относительно суперпозиции функций.

Так же как понятие упорядоченного множества обобщает (путем абстракции) упорядоченность в совокупности *подмножеств* данного множества, так и идея категории является естественной абстракцией от взаимосвязей в какой-нибудь совокупности *функ-*

---

[1]) Под алгеброй Шефера понимается алгебра с одной унарной операцией $|$, удовлетворяющей тождествам I и II из § II.10. — *Прим. перев. и ред.*

[2]) Это теорема Биркгофа — Витта (см. Кон [1, с. 308]).

ций между множествами[1]). Но в отличие от у-множеств, категории не обязаны быть «множествами» (их мощность может быть неопределимой); и даже если они являются множествами, они будут лишь «частичными» алгебрами. Поэтому техника этой главы к категориям не приложима.

Из быстро развивающейся теории категорий мы позаимствуем лишь два относящихся к нашим рассмотрениям понятия: инъективная и проективная категории. Конкретная категория всех множеств и функций (отображений) имеет следующие два свойства:

(i) для любого заданного *вложения* μ: $A \to B$ существует правое обратное *наложение* ν: $B \to A$, такое, что $\mu\nu = 1_A$;

(ii) для любого заданного *наложения* ν: $B \to A$ существует левое обратное *вложение* μ: $A \to B$ такое, что $\mu\nu = 1_A$.

Этими свойствами не обладает, однако, категория всех абелевых групп и их гомоморфизмов. Так, вложение μ: $\mathbf{Z}_2 \to \mathbf{Z}_4$, где $\mu(n) = 2n$, не имеет правого обратного, а наложение ν: $\mathbf{Z}_4 \to \mathbf{Z}_2$, где $\nu(n) \equiv n \pmod 2$, не имеет левого обратного.

Определение. (Конкретная) категория Г называется *инъективной*, если в Г выполняется условие (i), и называется *проективной*, если в ней выполняется условие (ii).

Для многообразия Ф алгебр возникают два важных вопроса: является ли Ф инъективным? будет ли Ф проективным? Классическим результатом является тот факт, что категория всех векторных пространств (или «D-модулей») над фиксированным полем или телом D инъективна и проективна. Точно так же обстоит дело для категории всех конечных булевых алгебр[2]) и для категории всех цепей. (А что можно сказать о категории всех конечных дистрибутивных решеток? о категории всех булевых решеток?)[3])

Теорема 23. *Любая свободная алгебра F проективна.*

Это означает, что если заданы гомоморфизм μ: $F \to B$ и наложение ν: $A \to B$, то существует гомоморфизм θ: $F \to A$ такой, что $\mu = \nu\theta$[4]). Пусть $\{x_\alpha\}$ есть множество канонических порож-

---

[1]) По поводу общей теории категорий и функторов см. статью Маклейна (Maclane S. — Bull. AMS, 1965, 71, p. 40—106) и книгу Фрейда (Freyd P. Abelian Categories. — Harper and Row, 1964). Некоторые приложения этих понятий к универсальной алгебре указаны в книге Кона [1]; многие же более глубокие теории двойственности в категориях применимы лишь к специальным алгебраическим структурам на абелевых группах. [См. также Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г. Основы теории категорий. — М.: Наука, 1974; Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. — М.: Мир, 1972. — *Прим. ред.*]

[2]) Любой *обратимый* функтор, такой как, например, функтор из категории $\mathbf{Z}_2$-модулей в категорию обобщенных булевых алгебр, очевидно, переводит инъективные или проективные конкретные категории в категории с тем же свойством.

[3]) Правильнее ставить вопрос о наличии достаточно большого числа инъективных и проективных алгебр в данном многообразии Ф. Эта задача явилась предметом многочисленных исследований. — *Прим. ред.*

[4]) Это и есть определение проективной алгебры. — *Прим. ред.*

дающих алгебры F. Выберем $y_\alpha \in A$ таким образом, чтобы $\nu(y_\alpha) = \mu(x_\alpha)$. Это возможно, поскольку ν — наложение. Тогда отображение, переводящее каждый x_α в выбранный y_α, можно продолжить до гомоморфизма θ: $F \to A$, так как F свободна. Ввиду того, что $\mu(x_\alpha) = \nu(x_\alpha) = \nu(\theta(x_\alpha))$ и x_α порождают F, теорема доказана.

ПРОБЛЕМЫ

38. Будет ли теорема Фунаямы выполняться в коммутативных моноидах, в которых из $a + b = 0$ следует $a = b = 0$, т. е. в коммутативных моноидах «без центра» в смысле Йонссона и Тарского? (Ответ отрицательный (Йонссон).)

39. Найти необходимые и достаточные условия для решетки L, чтобы ее конгруэнции образовывали булеву алгебру [1]).

40 [2]). Какие конечные решетки допускают вложение в $FL(3)$? Какие счетные решетки обладают этим свойством? Какие конечные решетки являются интервалами решетки $FL(n)$?

41. Описать подрешетку решетки $FL(n)$, состоящую из элементов, инвариантных при всех ее автоморфизмах. Что представляют из себя модулярные пары в $FL(n)$ (Уотермен)?

*42. Решить проблему тождества слов для свободной модулярной решетки с четырьмя порождающими, с n порождающими [3]).

43 [4]). Описать свободную модулярную решетку, порожденную четырьмя элементами a, a', b, b' такими, что $a \wedge a' = b \wedge b' = O$ и $a \vee a' = b \vee b' = I$.

44 [5]). Описать свободную модулярную решетку, порожденную у-множеством $\mathbf{1} + \mathbf{1} + \boldsymbol{n}$ (см. упр. 2 к § 8).

45 [6]). Показать, что модулярная решетка тогда и только тогда разложима в подпрямое произведение копий решеток $\mathbf{2}$ и M_3, когда она тождественно удовлетворяет неравенству $a \vee (x \wedge b) \vee (y \wedge b) \geqslant b \wedge (a \vee x) \wedge (a \vee y) \wedge (x \vee y)$ и двойственному ему.

---

[1]) Проблема 72 из [LT2]. См. работы Гретцера и Шмидта (Grätzer G., Schmidt E. T. — Acta Math. Acad. Sci. Hung., 1958, 9, p. 137—175), Икбалуннсы (Iqbalunissa. — J. Madras Univ., 1963, 33, p. 113—128), Кроули (Crawley P. — Pacific J. Math., 1960, 10, p. 787—795).

[2]) Ответ на первый вопрос получил Нейшн (Nation J. B. — Trans. AMS, 1982, 269, p. 311—337). Описание планарных подрешеток свободных решеток см. у Райвела и Сэндса (Rival I., Sands B. — Canad. J. Math., 1979, 31, № 1, p. 17—34). — *Прим. перев.*

[3]) Проблема 28 из [LT2]. См. примечание [1]) на с. 195. Звездочка отмечает «неприступные» проблемы. — *Прим. перев.*

[4]) Эту проблему решил Херман (Herrman C. — Houston J. Math., 1976, 2, № 4, p. 513—523). — *Прим. перев.*

[5]) Эту проблему решил Вилле (Wille R. — Algebra univers., 1973, 3, № 2, p. 131—138). — *Прим. перев.*

[6]) Эту проблему решил Йонссон (Jonsson B. — Math. Scand., 1968, 22, № 1, p. 187—196). — *Прим. перев.*

46 [1]. Найти свободные решетки с четырьмя порождающими в многообразии, порожденном решеткой M_3, и в многообразии, порожденном решеткой N_5.

47. Для каждых n, p построить свободную (модулярную) решетку с четырьмя порождающими в многообразии, порожденном решеткой $PG_{n-1}(\mathbf{Z}_p)$.

48. Решить проблему тождества слов для свободной орторешетки с двумя порождающими, с n порождающими, с n ортогональными порождающими [2].

49. Пусть $F(m, k)$ обозначает свободную примитивную алгебру с m унарными операциями и k порождающими. Будет ли $F(m, k)$ при $m = 1$ криптоизоморфной свободной полугруппе с k порождающими? Какова решетка конгруэнций алгебры $F(m, k)$? Какие конгруэнции на ней будут строго характеристическими [3]?

50. Охарактеризовать (как решетку) полную решетку всех строго характеристических подалгебр алгебры слов с двумя порождающими и одной унарной операцией [4].

*51. Описать решетку всех групповых эквациональных теорий.

*52 [5]. Описать решетку всех решеточных эквациональных теорий; всех решеточных эквациональных теорий, содержащих модулярный закон L5.

*53. Пусть I — класс всех алгебр с одной бинарной операцией и I^* — множество всех тождеств для одной бинарной операции. Пусть $A\rho L$ (где $A \in I$, $L \in I^*$) означает, что тождество L истинно в алгебре A. Изучить полную решетку, определяемую получающейся полярностью.

54. Как, используя «клоны» (Кон [1, глава III]), распознавать возможность изоморфного вложения одной (свободной) алгебры слов в другую?

55. Если ρ — бинарное отношение между элементами множеств X и Y, то пусть $(x, y)\,\rho\,(x^*, y^*)$ в кардинальном произведении XY означает, что $x\rho x^*$ и $y\rho y^*$. Для каких операций $x \circ x^*$, определяемых при помощи ρ, в XY будет $(x, y) \circ (x^*, y^*) = (x \circ x^*, y \circ y^*)$? [6]

*56. Решить проблему тождества слов для операций сложения, умножения и суперпозиции в $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ и $\mathbf{Z}^{\mathbf{Z}}$.

---

[1] Берман и Уолк (Berman J., Wolk B. — Algebra univers., 1980, **10**, № 3, p. 269—289) установили, что $FM_3(4)$ содержит 19 982 элемента, а $FN_5(4)$ состоит из 540 792 672 элементов. — *Прим. перев.*

[2] Разрешимость проблемы тождества для свободных орторешеток установил Брунс (Bruns G. — Canad. J. Math., 1976, **28**, № 5, p. 977—985). — *Прим. перев.*

[3] То есть совместимыми со всеми эндоморфизмами этой алгебры на себя. — *Прим. перев.*

[4] Калицкий и Скотт (Kalicki J., Scott D. — Indag. Math., 1955, **17**, p. 650—652).

[5] Проблема, поставленная А. И. Мальцевым на Международном конгрессе математиков в Москве в 1966 г. — *Прим. перев.*

[6] Проблема 10 из [LT2]. — *Прим. перев.*

ГЛАВА VII

ПРИЛОЖЕНИЯ В АЛГЕБРЕ

1. Модули. Группы с операторами

Абелевы группы, векторные пространства, линейные алгебры, кольца и представления групп и колец линейными операторами на векторных пространствах можно рассматривать как специального вида «модули» в смысле, который мы уточним ниже. Первая половина этой главы будет посвящена анализу строения таких модулей [1]) и более общих групп и луп с операторами. Основным инструментом при этом является теория модулярных решеток и «универсальная алгебра», как она представлена в главе VI.

Модулем (или «Ω-модулем») называется аддитивная абелева группа A вместе с некоторым (может быть, пустым) множеством Ω ее эндоморфизмов. Такой модуль является «алгеброй» в смысле главы VI: множеством операций можно считать $F = \{-, \Omega\}$ (т. е. вычитание и «умножение на ω» для каждого $\omega \in \Omega$ или $F^* = \{+, -, \Omega\}$. С точки зрения своего устройства модули отличаются одним очень специальным свойством.

Теорема 1. *Решетка конгруэнций и решетка подалгебр любого модуля являются изоморфными модулярными решетками.*

Набросок доказательства. Конгруэнции на M являются разбиениями модуля M на классы сопряженности по различным его Ω-подмодулям, т. е. по таким аддитивным подгруппам $S \subset M$, для которых если $x \in S$, то $\omega x \in S$ при всех $\omega \in \Omega$. Но этими Ω-подмодулями будут в точности «подалгебры» модуля M, рассматриваемого как «алгебра».

Эти «подалгебры», наконец, образуют подрешетку модулярной решетки (теорема I.11) всех подгрупп (абелевой) группы M: в любой алгебре A подалгебры, замкнутые относительно некоторого набора эндоморфизмов, образуют подрешетку решетки всех подалгебр (глава VI, § 3).

Пример 1. Пусть R — кольцо с единицей 1. Если в качестве Ω выбрать множество левых мультипликативных трансляций α: $x \to ax$, то решеткой, о которой говорится в теореме 1, будет решетка левых идеалов кольца R. Решетки его правых идеалов и двусторонних идеалов могут аналогичным образом рас-

---

[1]) Получение подобных структурных и декомпозиционных теорем было одной из первых целей теории решеток. См., например, работы Дедекинда [1], Биркгофа [1], [3] и Оре [1]. Заметим, что приводимое здесь определение «модуля» является более общим, чем то, которое обычно используется, — мы не требуем, чтобы Ω было кольцом эндоморфизмов.

сматриваться как подмодули при соответствующей понятной модификации Ω.

Пример 2. Пусть $f\colon G \to L_n(D)$ — какой-нибудь гомоморфизм группы G в полную линейную группу невырожденных $n \times n$-матриц над телом D. Возьмем в качестве Ω множество линейных операторов T_g на D^n, которые соответствуют элементам группы G при отображении f, и всевозможные умножения на скаляры $\lambda \in D$. Тем самым задается модуль, Ω-подмодулями которого будут подпространства в D^n, которые отображаются в себя под действием всех указанных линейных операторов.

С подобных позиций можно подходить и к декомпозициям представлений колец.

Группы с операторами. Существенная часть теоремы 1 остается справедливой и для неабелевых групп с операторами [1]) (т. е. с заданным множеством эндоморфизмов). Именно, имеет место

Теорема 1'. *Пусть G — какая-нибудь группа с множеством Ω операторов (эндоморфизмов группы G). Тогда Ω-инвариантные нормальные подгруппы группы G образуют модулярную решетку.*

Доказательство — как в теореме 1. Ясно, что если Ω содержит все внутренние автоморфизмы, то решетка Ω-подалегбр алгебры $\{G, -, \Omega)\}$ будет изоморфна решетке всех конгруэнций этой алгебры. Однако в общем случае неабелевых групп без операторов это уже не верно [2]).

2. Квазигруппы и лупы

Некоторые результаты § 1 и их важные следствия можно перенести на лупы с операторами. Мы наметим основы этого обобщения.

Определение. *Квазигруппой* называется алгебра с бинарным умножением, в которой любые два из трех членов уравнения $ab = c$ однозначно определяют третий. Таким образом, в квазигруппе деление однозначно и имеет место следующий двусторонний закон сокращения:

(1) если $ax = ay$ или $xb = yb$, то $x = y$.

Отсюда видно, что класс квазигрупп может быть определен квазитождествами.

---

[1]) Важное понятие «группы с операторами» было развито Эмми Нётер и ее сотрудниками для унификации структурных теорий для систем вышеуказанных типов. См. работу Крулля (Krull W. — Math. Z., 1925, 23, S. 161—196) и книгу ван дер Вардена [1, § 38 и далее]. [В настоящее время теория модулей выросла в большую самостоятельную теорию, отраженную в многочисленных монографиях (см. Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир, 1971; Каш Д. Кольца и модули. — М.: Мир, 1981; Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории, т. 1—2. — М.: Мир, 1977—1979). — *Прим. ред.*]

[2]) Ср. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. — М.: Наука, 1973, гл. III, § 2. — *Прим. ред.*

Если в квазигруппе ввести дополнительные бинарные операции левого деления $\diagdown$ и правого деления $/$, полагая $x = a\diagdown c$ тогда и только тогда, когда $ax = c$, и $y = c/a$ тогда и только тогда, когда $ya = c$, то, как легко убедиться, будут выполняться следующие тождества:

EQ1 $$a\,(a\diagdown c) = c \text{ и } (c/b)\,b = c;$$

EQ2 $$a\diagdown(ab) = b \text{ и } (ab)/b = a;$$

EQ3 $$c/(a\diagdown c) = a \text{ и } (c/b)\diagdown c = b.$$

Обратно, любая *эквазигруппа*, т. е. система $(S, \cdot, \diagdown, /)$ с тождествами EQ1—EQ3, будет квазигруппой в смысле основного определения. Таким образом, квазигруппы и эквазигруппы являются *криптоизоморфными* классами алгебр.

С общеалгебраической точки зрения понятие эквазигруппы представляется более естественным по двум причинам. Во-первых, непустое подмножество квазигруппы Q является квазигруппой тогда и только тогда, когда оно будет подалгеброй (в смысле главы VI) *эквазигруппы* $(Q, \cdot, \diagdown, /)$. А во-вторых, если θ — конгруэнция на Q, то Q/θ будет квазигруппой тогда и только тогда, когда θ является конгруэнцией на Q как на эквазигруппе, т. е. тогда и только тогда, когда для θ выполняется свойство подстановки не только относительно умножения, но и относительно обоих делений.

Лупой называется квазигруппа с двусторонней «единицей» 1, удовлетворяющей тождествам $1x = x1 = x$ для всех x, так что $x/x = x\diagdown x = 1$. Лупы тоже можно определить двумя способами в соответствии с двумя рассмотренными способами определения квазигруппы.

Определение. Мультипликативная (т. е. относительно умножения) конгруэнция θ называется *нормальной* конгруэнцией лупы G, если из того, что $ux \equiv x\ (\theta)$ или $xu \equiv x\ (\theta)$ для всех x, следует, что $u \equiv 1\ (\theta)$. Лупа, по определению, *нормальна*, когда все ее (мультипликативные) конгруэнции нормальны.

Любое отношение эквивалентности на лупе, обладающее свойством подстановки по отношению ко всем трем эквазигрупповым операциям, очевидно, будет нормальной конгруэнцией, если его рассматривать относительно одного лишь умножения: действительно, из $ux \equiv x$ следует, что $u \equiv x/x = 1$.

Теорема 2. *Лупа G нормальна, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:* (i) *G является группой*; (ii) *$(yx)\,x^{-1} = y = x^{-1}\,(xy)$ для всех $x, y \in G$ и некоторого x^{-1}*; (iii) *G конечна.*

Доказательство. Ясно, что (ii) следует из (i). В случае (ii), если $ux = x$, то $u = (ux)\,x^{-1} \equiv xx^{-1} = 1\ (\theta)$, и симметрично. Пусть, наконец, выполняется условие (iii). В любой лупе, если $x \equiv y\ (\theta)$, то $xb \equiv yb\ (\theta)$. Так как отображение $x \to xb$ переводит различные элементы в различные, то число элементов в классе, содержащем xb, во всяком случае не меньше числа элементов в классе, содержащем x. Но уравнение $xb = y$. имеет решение при любом x, поэтому все классы эквивалентности имеют одинаковую мощность. Если G конечна, то отсюда следует нормальность конгруэнции θ: множества элементов вида xu, соответственно ux, при $u \equiv 1\ (\theta)$ должны содержать *все* $y \equiv x\ (\theta)$.

Лупы с операторами. Точно так же, как и в случае групп, эндоморфизмы лупы можно назвать «операторами». При этом решетка конгруэнций лупы с операторами оказывается замкнутой подрешеткой решетки конгруэнций лупы как таковой [1]).

3. Перестановочные конгруэнции

Общее понятие конгруэнции для алгебр было введено в § VI.4. Там было показано, что конгруэнции любой алгебры $A = (S, F)$ образуют замкнутую подрешетку решетки $E(S)$ всех отношений эквивалентности между элементами множества S. Теперь мы рассмотрим свойство *перестановочности* [2]) конгруэнций; оно будет играть ключевую роль во многих построениях настоящей главы.

В общем виде (см. § XIV.13) *произведение* $\theta\theta'$ двух бинарных отношений θ и θ' на множестве S определяется следующим правилом:

(2) $a \equiv b\ (\theta\theta')$ тогда и только тогда, когда существует элемент $x \in S$ такой, что $a \equiv x\ (\theta)$ и $x \equiv b\ (\theta')$.

Умножение отношений ассоциативно. Кроме того, поскольку отношения эквивалентности рефлексивны и транзитивны, оно для отношений эквивалентности и идемпотентно, в том смысле, что $\theta^n = \theta$ при любом $n = 2, 3, 4, \ldots$

Определение. Два отношения θ и θ' на множестве S *перестановочны*, если $\theta\theta' = \theta'\theta$. Это означает, что если $a \equiv x\ (\theta)$ и $x \equiv b\ (\theta')$ для некоторого $x \in S$, то $a \equiv y\ (\theta')$ и $y \equiv b\ (\theta)$ для некоторого $y \in S$, и обратно.

Лемма. *Любые две конгруэнции эквазигруппы перестановочны.*

Доказательство. Пусть θ и φ — конгруэнции на эквазигруппе и пусть $a\theta x$ и $x\varphi b$. Определим элемент y формулой

$$y = (b/u)((x/u)a).$$

Тогда

$$a = (b/u)((b/u)\backslash a)\,\varphi y,$$

$$y\theta\,(b/u)((a/u)\backslash a) = (b/u)u = b.$$

---

[1]) Ср. Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. — М: Наука, 1967. — *Прим. ред.*

[2]) Перестановочные отношения эквивалентности впервые изучали Дюбрей и Дюбрей-Жакотен, назвавшие их «содружественными» (Dubreil, P., Dubreil-Jacotin M.-L. — J. de Math., 1939, 18, p. 63—95).

Более того, каждая конгруэнция на эквазигруппе определяется любым своим классом.

Чтобы получить аналог доказанной леммы для луп (и квазигрупп), нам придется ограничиться нормальными конгруэнциями, определенными в § 2.

Теорема 3. *Всякая нормальная конгруэнция на лупе перестановочна с любой конгруэнцией.*

Доказательство. Предположим, что $a \equiv x\,(\theta)$ и $x \equiv b\,(\theta')$, и пусть $a = ux$, $b = xv$ и $y = u\,(xv) = ub$. Поскольку $x \equiv b\,(\theta')$, то $y = ub \equiv ux = a\,(\theta')$. Так как $ux = a \equiv x = 1x\,(\theta)$ и θ нормальна, то $u \equiv 1\,(\theta)$, и значит, $y = ub \equiv b\,(\theta)$. Этим доказано, что $\theta\theta' \leqslant \theta'\theta$. Для доказательства обратного включения достаточно всюду изменить порядок сомножителей.

Следствие. *В любой нормальной лупе конгруэнции перестановочны.*

В самом деле, если мы присоединяем к алгебре новые операции, решетка конгруэнций становится меньше. Поэтому если конгруэнции на группе (или другой лупе) G нормальны, то они остаются нормальными и на той же группе, рассматриваемой как группа с операторами.

Теорема 4. *Конгруэнции алгебры с перестановочными конгруэнциями образуют модулярную решетку, в которой* $\theta \vee \theta' = \theta\theta' = \theta'\theta$.

Косвенное доказательство. По теоремам VI.8 и IV.13 любые две перестановочные конгруэнции алгебры A образуют модулярную пару в решетке, двойственной решетке конгруэнций алгебры A. Отсюда непосредственно следует теорема 4.

Прямое доказательство. По определению $a \equiv b\,(\theta \vee \theta')$ тогда и только тогда, когда

$$a = x_0\theta x_1\theta' x_2\theta x_3 \ldots x_n = b$$

для некоторой конечной последовательности. Другими словами, $\theta \vee \theta'$ является теоретико-множественным объединением всех конечных произведений $\theta\theta'\theta\theta'\ldots$ Но поскольку, по условию, конгруэнции перестановочны, их умножение будет идемпотентным, коммутативным и ассоциативным, и следовательно, определит структуру полурешетки на множестве всех конгруэнций. Значит, все указанные произведения совпадают с $\theta\theta' = \theta'\theta$, что и доказывает требуемые в теореме равенства.

Согласно модулярному неравенству, чтобы доказать модулярность решетки конгруэнций, достаточно убедиться в том, что

$$\text{если } \theta'' \leqslant \theta', \text{ то } \theta' \wedge (\theta\theta'') = (\theta' \wedge \theta)\,\theta''. \tag{3}$$

Предположим, что $a \equiv b\,(\theta')$ и $a \equiv b\,(\theta\theta'')$, т. е. что $a \equiv b\,(\theta' \wedge (\theta\theta''))$. Тогда для некоторого x будет $a \equiv x\,(\theta)$ и $x \equiv b\,(\theta'')$. Но $\theta'' \leqslant \theta'$, поэтому $x \equiv b\,(\theta')$. Так как $a \equiv b\,(\theta')$ и θ'

транзитивно, отсюда следует, что $a \equiv x\,(\theta \wedge \theta')$. Поскольку $x \equiv b\,(\theta'')$, мы получаем (3). Ч. т. д.

На самом деле, как заметил Йонссон, достаточно предположить, что $\theta\theta'\theta = \theta \vee \theta'$ для всех θ, θ'.

Обобщения. Многообразия, все алгебры которых имеют перестановочные конгруэнции, чрезвычайно редки, как показывает следующее замечательное обобщение теоремы 3, принадлежащее А. И. Мальцеву [1]).

Теорема Мальцева. *Для того чтобы любые две конгруэнции на всех алгебрах многообразия были перестановочны, необходимо и достаточно, чтобы существовал тернарный многочлен $p(x, y, z)$ такой, что $p(x, x, y) \equiv p(y, x, x) \equiv x$.*

Как показал Тревизан[2]), на квазигруппах существуют неперестановочные конгруэнции. Точно так же, хотя по теореме Фунаямы VI.9 конгруэнции на любой решетке образуют дистрибутивную решетку, конгруэнции на решетке, вообще говоря, не перестановочны. Якубик нашел необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять решетка, чтобы все ее конгруэнции были перестановочны (см. ниже упр. 10).

Упражнения к §§ 1—3

1. Покажите, что ассоциативная квазигруппа является группой.

2. Покажите, что группу можно определить (с точностью до криптоизоморфизма) как квазигруппу, которая удовлетворяет тождеству $(x/y)\backslash z = y/(z\backslash x)$. (Указание. См. Кон [1, с. 180, упр. 4—6].)

3. Покажите, что класс луп замкнут относительно прямых произведений, но не замкнут относительно подалгебр и гомоморфных образов. (Киокемейстер и Бейтс).

4. Покажите, что если все конгруэнции алгебры A перестановочны, то это верно и для любого ее гомоморфного образа.

5. Покажите, что в алгебре, имеющей только унарные операции, все конгруэнции перестановочны тогда и только тогда, когда общее число конгруэнций этой алгебры не превышает трех [3]).

6. Покажите, что решетка конгруэнций цепи **4** является булевой, хотя конгруэнции на решетке **4** не перестановочны.

Упр. 7—8 содержат результаты Вана (Wang S.-C. — Acta Math. Sinica, 1953, **3**, p. 133—141).

*7. Покажите, что конгруэнции модулярной решетки с дополнениями L образуют булеву алгебру тогда и только тогда, когда все нейтральные идеалы решетки L — главные.

---

[1]) Матем. сб., 1954, **35**, p. 3—20. См. также работы Терстона (Thurston H. A. — Proc. London Math. Soc., 1958, **8**, p. 127—134) и Пиксли (Pixley A. F. — Proc. AMS, 1963, **14**, p. 105—109). [См. также Smith J. D. H. Mal'cev varieties. — Lect. Notes. Math., vol. 554, 1976. — *Прим. ред.*]

[2]) Trevisan G. — Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1953, **22**, p. 11—22. [Из теоремы Мальцева следует перестановочность конгруэнций на любой эквазигруппе. — *Прим. перев.*]

[3]) Как отметил Якубик (Jakubík J. — Časop. pěstov. mat., 1956, **81**, p. 43—54), указанное условие не является необходимым. — *Прим. перев.*

8. Покажите, что конгруэнции любой решетки с относительными дополнениями перестановочны [1]).

9. Покажите, что если конгруэнции дистрибутивной решетки перестановочны, то она обладает относительными дополнениями (Хасимото).

10. Покажите, что конгруэнции на решетке L перестановочны тогда и только тогда, когда для любых $\theta, \varphi \in \Theta(L)$ и $a < x < b$, таких, что $a\theta x$ и $x\varphi b$, в $L/(\theta \wedge \varphi)$ существует относительное дополнение для x в $[a, b]$ [2]) (Якубик).

11. Покажите, что теорема 4 не обязательно выполняется в частичных алгебрах с бесконечноместными операциями (например, в топологических абелевых группах).

4. Прямые разложения

Покажем теперь, как можно отыскать прямые разложения алгебры с перестановочными конгруэнциями, зная ее решетку конгруэнций.

Лемма. *Пусть* θ_1, θ_2 — *перестановочные конгруэнции на алгебре* A, *причем* $\theta_1 \wedge \theta_2 = O$ *и* $\theta_1 \vee \theta_2 = I$. *Тогда* A *изоморфна прямому произведению* $A_1 \times A_2$, *где* A_i *является гомоморфным образом* A/θ_i *алгебры* A $(i = 1, 2)$.

Доказательство. Пусть $x\theta_i$ обозначает класс конгруэнции θ_i, содержащий x. Тогда соответствие $x \to (x\theta_1, x\theta_2)$ является гомоморфизмом алгебры A на подалгебру прямого произведения $A_1 \times A_2$. Если $x\theta_1 = y\theta_1$ и $x\theta_2 = y\theta_2$, то $x = y$, поскольку $\theta_1 \wedge \theta_2 = O$. Значит, это соответствие взаимно однозначно. Если x и y заданы в A, то поскольку $\theta_1\theta_2 = \theta_1 \vee \theta_2 = I$, найдется элемент z такой, что $x \equiv z \ (\theta_1)$ и $z \equiv y \ (\theta_2)$. Так что $z \to (x\theta_1, y\theta_2)$, т. е. наше отображение будет наложением.

Теорема 5. *Прямые разложения* $A \cong A_1 \times \ldots \times A_n$ *алгебры* A *определяются совокупностями конгруэнций* θ_i *такими, что* $\bigwedge_{i=1}^{n} \theta_i = O$ *и для* $i = 2, \ldots, n$

$$\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_{i-1} \text{ перестановочна с } \theta_i; \tag{4а}$$

$$(\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_{i-1}) \vee \theta_i = I. \tag{4б}$$

Доказательство. Если задано прямое разложение и $x\theta_i y$ означает, что x и y имеют одинаковую i-компоненту, то требуемые соотношения выполняются очевидным образом. Обратно, если выполнены условия теоремы, то $B = A/(\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_{n-1}) \cong A_1 \times \ldots \times A_{n-1}$ (мы действуем индукцией по n) и $A \cong B \times A_n$ по предыдущей лемме.

Следствие 1. *Если все конгруэнции алгебры* A *перестановочны, то ее прямые разложения определяются имеющими нулевое пересечение множествами двойственно независимых* [3]) *элементов в (модулярной) решетке конгруэнций алгебры* A.

---

[1]) См. упр. 3 к § VI.4. — *Прим. перев.*

[2]) Понятно, что речь идет о соответствующих классах конгруэнции $\theta \wedge \varphi$. — *Прим. перев.*

[3]) То есть независимых в двойственной решетке. — *Прим. перев. и ред.*

Предостережение. В теореме 5 нельзя ограничиться перестановочностью конгруэнций θ_i, условиями $\bigwedge \theta_i = O$ и (4б). В самом деле, пусть A — (тривиальная) алгебра с пятью элементами 0, 1, 2, 3, 4 и без операций. Пусть, далее,

$$\theta_1 = (0,\ 1)\ (2,\ 3,\ 4),\ \theta_2 = (0,\ 2)\ (1,\ 3,\ 4),\ \theta_3 = (0,\ 3)\ (1,\ 2,\ 4).$$

Тогда $\theta_i\theta_j = \theta_j\theta_i = I$ при $i \neq j$, $\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3 = O$ и, тем не менее, A не будет изоморфной прямому произведению $(A/\theta_1) \times \times (A/\theta_2) \times (A/\theta_3)$.

Вспоминая теперь, что все конгруэнции нормальной лупы с операторами или без операторов перестановочны, получаем

Следствие 2. *Прямые разложения любой группы или лупы с операторами или без операторов определяются множествами двойственно независимых элементов* $\theta_i \in \Theta(G)$ *такими, что* $\bigwedge \theta_i = O$.

5. Теоремы Жордана—Гёльдера

Цепное условие Жордана—Дедекинда (§ II.8) и понятия перспективности и проективности (глава III, §§ 11—12) возникли под влиянием идей, использованных при доказательстве теоремы Жордана—Гёльдера в теории групп. Сейчас мы докажем обобщенную теорему Жордана—Гёльдера для групп и луп с операторами.

Доказательство проходит для любой алгебры A с перестановочными конгруэнциями и с одноэлементной подалгеброй 1. Имея в виду эту подалгебру 1, с каждой конгруэнцией θ на A можно связать подалгебру $S(\theta)$, состоящую из всех $u \equiv 1\ (\theta)$, и соответствующую фактор-алгебру A/θ. Эти обозначения мы и будем использовать в дальнейшем.

Теорема 6. *Пусть A — алгебра с одноэлементной подалгеброй 1 и перестановочными конгруэнциями. Тогда для любых конгруэнций θ_1, θ_2 на A алгебры $S(\theta_1 \vee \theta_2)/\theta_2$ и $S(\theta_1)/(\theta_1 \wedge \theta_2)$ изоморфны.*

Доказательство. Рассмотрим алгебру $T = S(\theta_1 \vee \vee \theta_2)/(\theta_1 \wedge \theta_2)$. На ней θ_1 и θ_2 будут конгруэнциями, удовлетворяющими условиям леммы, предшествующей теореме 5. Поэтому теорема 6 превращается в утверждение, что если $B = B_1 \times B_2$, то B/B_2 изоморфна B_1.

Этот результат обобщает то, что иногда называют Первой теоремой об изоморфизме. В случае, когда A — группа или нормальная лупа (с операторами или без операторов), доказанной теореме можно придать более сильную формулировку. Если a^{-1} — правый обратный элемент для a, то «трансляции» $T_a(x) = = a(xa^{-1})$ и $U_a(x) = (ax)a^{-1}$ (в группах, являющиеся внутренними автоморфизмами), очевидно, оставляют неподвижным элемент 1. Тогда, если θ — конгруэнция на A, то она будет конгруэнцией и относительно унарных операций T_a и U_a, и потому T_a и U_a

будут оставлять инвариантной нормальную подлупу, состоящую из элементов $x\theta 1$.

Следовательно, в теореме 6 изоморфизм должен сохранять операции T_a и U_a для всех $a \in A$, а не только для $a \in S(\theta_1 \vee \theta_2)$. Поэтому если назвать две фактор-лупы *центрально-изоморфными*, когда они изоморфны как по умножению, так и относительно всех операций T_a и U_a (и относительно всех операторов), то получится

Следствие 1. *Если в теореме 6 алгебра A является группой или нормальной лупой, то алгебры $S(\theta_1 \vee \theta_2)/\theta_2$ и $S(\theta_1)/(\theta_1 \wedge \theta_2)$ центрально изоморфны.*

Если в условиях теоремы 6 две конгруэнции связаны неравенством $\theta' \leqslant \theta$, то фактор-алгебра $S(\theta)/\theta'$ имеет своим теоретико-решеточным аналогом интервал $[\theta', \theta]$. И тогда теорема 6 утверждает, что фактор-алгебры, соответствующие транспонированным интервалам $[\theta_2, \theta_1 \vee \theta_2]$ и $[\theta_1 \wedge \theta_2, \theta_1]$, изоморфны. Из определения перспективности и ввиду транзитивности изоморфизма, получается

Следствие 2. *Если A — алгебра с одноэлементной подалгеброй и перестановочными конгруэнциями, то проективные интервалы в решетке конгруэнций алгебры A соответствуют изоморфным фактор-алгебрам.*

Применяя это соответствие к проективности, установленной в следствии из теоремы III.9, мы получим следующий результат.

Теорема 7. *Пусть A — алгебра с одноэлементной подалгеброй и перестановочными конгруэнциями. Если*

$$O = \theta_0 < \ldots < \theta_m = I \text{ и } O = \theta'_0 < \ldots < \theta'_n = I$$

— конечные цепи конгруэнций на A, то эти цепи можно уплотнить, включая новые элементы $\theta_{i,j} = \theta_{i-1} \vee (\theta'_j \wedge \theta_i)$ и $\theta'_{i,j} = \theta'_{j-1} \vee (\theta_i \wedge \theta'_j)$ так, что соответствующие факторы $S(\theta_{i,j})/\theta_{i,j-1}$ и $S(\theta'_{i,j})/\theta'_{i-1,j}$ будут изоморфными.

Следствие 1. *Пусть $O = \theta_0 < \ldots < \theta_m = I$ и $O = \theta'_0 < \ldots < \theta'_n = I$ — конечные максимальные цепи конгруэнций алгебры A, в которой имеется одноэлементная подалгебра и все конгруэнции перестановочны. Тогда $m = n$ и факторы $S(\theta_i)/\theta_{i-1}$ попарно изоморфны соответствующим факторам $S(\theta'_j)/\theta'_{j-1}$.*

Следствие 2. *В условиях теоремы 7 и следствия 1, если A — группа или нормальная лупа с операторами, то получающиеся изоморфизмы будут центральными изоморфизмами.*

Дальнейшие результаты. Полученные результаты можно обобщить в разных направлениях. Так старейшая форма теоремы Жордана—Гёльдера относится к *композиционным рядам*, в которых каждая θ_{i-1} является максимальной конгруэнцией в подалгебре $S(\theta_i)$, причем предполагается, что все конгруэнции на $S(\theta_i)$ так же, как и на A, перестановочны. Поскольку классы алгебр, рассматривавшиеся в теореме 2, замкнуты относительно подалгебр, для них эти условия выполняются. Из результатов § II.8 получается

Следствие 3. *Если A — группа (с операторами или без операторов) или лупа, удовлетворяющая одному из условий теоремы 2, то фактор-группы любых двух конечных композиционных рядов попарно изоморфны.*

Важная теорема Виландта [1]) утверждает, что «композиционные» подгруппы любой конечной группы (т. е. подгруппы, входящие в композиционные ряды) образуют подрешетку решетки всех подгрупп.

По поводу других обобщений см. ссылки в сносках на с. 132—133 в [LT2]. Обобщения на бесконечные цепи нормальных подгрупп рассматриваются ниже в главе VIII.

Упражнения к §§ 4—5

1. Покажите, что каждая лупа имеет единственную одноэлементную подалгебру.

2. Дайте прямые доказательства теорем 5 и 7 для колец, отправляясь от первоначальных постулатов.

3. Примените теорему 5 и следствие 2 из теоремы 7 (а) к кольцам; (б) к векторным пространствам над телами; (в) к инвариантным подпространствам представлений колец.

4. Выведите «инвариантность размерности» векторного пространства из следствия 1 к теореме 7.

5. Покажите, что соответствие $\theta \to S(\theta)$, определенное в начале § 5, является вложением решетки $\Theta(A)$ в решетку подалгебр алгебры A.

6. Выведите лемму § 3 из следствия 2 к теореме IV.13.

7 [2]). Покажите, что существует алгебра A с одноэлементной подалгеброй и перестановочными конгруэнциями, допускающая тем не менее две конгруэнции $\theta \neq \theta'$ такие, что $S(\theta) = S(\theta')$.

8. Пусть A — алгебра, имеющая только унарные операции, которые распределены по парам α_i, β_i так, что

$$\alpha_i(\beta_i(x)) = \beta_i(\alpha_i(x)) = x \text{ для всех } x.$$

Покажите, что алгебра A проста тогда и только тогда, когда группа перестановок, порожденная операциями α_i, примитивна.

9. Назовем трансляцию алгебры A «обратимой», если она имеет обратную трансляцию. Покажите, что обратимые трансляции на A образуют группу Γ и что если Γ действует транзитивно на A, то все конгруэнции на A коммутируют (А. И. Мальцев).

6. Теорема Куроша—Оре. Принцип Ремака

Вернемся теперь к введенному в § IV.5 понятию подпрямого произведения. Мы уже видели в следствии 1 из теоремы VI.11, что подпрямые произведения абстрактной алгебры A задаются множествами конгруэнций на A такими, что $\bigwedge \theta_i = O$.

---

[1]) Доказательство см. в книге Холл М. Теория групп. — М.: ИЛ, 1962, с. 153.

[2]) Якубик (Jakubík J. — Czechosl. Math. J., 1954, 4, p. 314—317). [Это решает проблему 33 из [LT2]. Несколько раньше она была решена А. И. Мальцевым (Матем. сб., 1954, 35, с. 3—20). — *Прим. перев.*]

В случае алгебр с перестановочными конгруэнциями теорема 5 показывает, что если r конечно, то прямое произведение получается тогда и только тогда, когда

$$(\theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_{k-1}) \vee \theta_k = I$$

для $k = 2, \dots, r$.

Теорема 8. *Пусть A — алгебра с перестановочными конгруэнциями. Число сомножителей в любом несократимом представлении алгебры A в виде конечного подпрямого произведения подпрямо неразложимых алгебр одно и то же для всех таких представлений.*

Доказательство. Это утверждение немедленно следует из теоремы Куроша—Оре (§ III.12) и того факта (теорема 4), что конгруэнции на любой алгебре с перестановочными конгруэнциями образуют модулярную решетку.

По теоремам 2—3 приведенный результат имеет место для нормальных луп, включая все конечные лупы, лупы с условием $x^{-1}(xu) = (ux)x^{-1} = u$ и группы с операторами. Так как он проходит для групп с операторами, то можно применить его, в частности, к нормальным подгруппам произвольной группы и идеалам кольца.

Принцип Ремака. Пусть x_1, x_2, x_3 — конгруэнции на алгебре A, имеющей одноэлементную подалгебру и перестановочные конгруэнции. Обращаясь к помещенной в § III.7 диаграмме свободной модулярной решетки M_{28} с тремя порождающими, мы видим, что

$$e \wedge f = f \wedge g = g \wedge e = o, \quad e \vee f = f \vee g = g \vee e = i.$$

Поэтому факторы e/o и g/o оба перспективны с i/f, и значит, ввиду следствия из теоремы 6, они изоморфны. Аналогично e/o и f/o изоморфны, и по лемме из § 4 фактор-алгебра $S(i)/o$ изоморфна их прямому произведению. Отсюда следует

Теорема 9 (принцип Ремака). *Пусть θ_1, θ_2, θ_3 — конгруэнции на алгебре A, имеющей одноэлементную подалгебру и перестановочные конгруэнции. Пусть, далее, $\alpha_1 = (\theta_2 \vee \theta_3) \wedge \wedge [\theta_1 \vee (\theta_2 \wedge \theta_3)]$ и циклически для α_2, α_3; введем еще $\delta = (\theta_1 \wedge \wedge \theta_2) \vee (\theta_2 \wedge \theta_3) \vee (\theta_3 \wedge \theta_1)$ и двойственно определим γ. Тогда все шесть фактор-алгебр $S(\alpha_j)/\delta$ и $S(\gamma)/\alpha_j$ изоморфны, а фактор-алгебра $S(\gamma)/\delta$ изоморфна прямому квадрату любой из них.*

Заметим, что в случае нормальных луп указанные изоморфизмы являются *центральными* ввиду следствия 2 из теоремы 7. Кроме того, для любых элементов [1] $(a, 1)$ алгебры $S(\alpha_1)/\delta$ и $(1, y)$ алгебры $S(\alpha_3)/\delta$ в алгебре $S(\alpha_1)/\delta \times S(\alpha_3)/\delta$, очевидно, будет

$$((a, 1)^{-1}(1, y))(a, 1) = ((a^{-1}1)a, 1^{-1}y1) = (1, y).$$

В силу центральности изоморфизма, $((a^{-1}x)a, 1^{-1}1) = (x, 1)$ для элемента $(x, 1)$ алгебры $S(\alpha_1)/\delta$, соответствующего элементу

[1] Читатель отметит своеобразие последующих обозначений. — *Прим. перев.*

$(1, y)$ алгебры $S(\alpha_3)/\delta$. Но каждый элемент $(x, 1)$ соответствует некоторому $(1, y)$, поэтому $(a^{-1}x)\,a = x$ для всех x, a. Мы получаем

Следствие 1. *В любой нормальной лупе фактор-алгебры $S(\alpha_i)/\delta$ из теоремы 9 будут лупами, в которых все трансляции $x \to (a^{-1}x)\,a$ и $x \to a^{-1}(xa)$ являются тождественными.*

Следствие 2. *В любой группе все факторы $S(\alpha_i)/\delta$, рассматриваемые в теореме 9, коммутативны.*

Теорема 9 имеет много других аналогичных следствий, из которых мы докажем только одно

Следствие 3. *Пусть S, T и U — идеалы алгебры Ли. Если порожденная ими подрешетка решетки всех иделов алгебры Ли не дистрибутивна, то алгебра*

$$(S \vee T) \wedge (T \vee U) \wedge (U \vee S)/(S \wedge T) \vee (T \wedge U) \vee (U \wedge S)$$

является нуль-алгеброй.

Доказательство. Эти идеалы алгебры Ли удовлетворяют условиям теоремы 9, если положить $S = S(\alpha_1)$, $T = S(\alpha_2)$ и $U = S(\alpha_3)$. Любой элемент из $S(\alpha_2)/\delta$ можно записать в виде (x, x) как элемент алгебры $S(\gamma)/\delta = S(\alpha_1)/\delta \times S(\alpha_3)/\delta$. Но теперь, если $(a, 0)$ является элементом алгебры $S(\gamma)/\delta$, мы видим, что $(a, 0)(x, x) = (ax, 0)$, и в то же время элемент $(ax, 0)$, находясь в $S(\alpha_2)/\delta$, должен иметь вид (y, y). Значит, $ax = 0$. Это выполняется для всех x и a из $S(\gamma)/\delta$ и потому $S(\gamma)/\delta$ будет нуль-алгеброй.

7. Теорема Оре

Теперь докажем принадлежащую Оре [2, p. 272] теорему о модулярных решетках, следствием которой является единственность разложения группы или нормальной лупы с операторами в случае, когда ее решетка конгруэнций имеет конечную длину. Чтобы сформулировать этот теоретико-решеточный результат, назовем элемент e модулярной решетки *прямым объединением* элементов $a_1, \ldots, a_n$ (в обозначениях $e = a_1 \times \ldots \times a_n$), если эти элементы независимы и дают в объединении e.

Теорема 10 (Оре). *Пусть L — модулярная решетка конечной длины. Если I имеет два представления $a_1 \times \ldots \times a_m$ и $b_1 \times \ldots \times b_n$ в виде прямого объединения неразложимых элементов, то $m = n$ и при подходящей нумерации элементы a_i и b_i проективны.*

Доказательство. Пусть $a_i' = a_1 \times \ldots \times a_{i-1} \times \times a_{i+1} \times \ldots \times a_m$ и $b_j' = b_1 \times \ldots \times b_{j-1} \times b_{j+1} \times \ldots \times b_n$; тогда $I = a_i \times a_i' = b_j \times b_j'$ при всех i, j. Если $I = b_j \times a_i'$ для некоторых i, j, мы будем говорить, что a_i *заменим* на b_j. Покажем индукцией по длине решетки L, что каждый элемент a_i заменим некоторым b_j. Не теряя общности, предположим, что $i = 1$.

Случай I. Допустим, что $a_1 \vee b_j' \lessdot 1$ при некотором j, скажем, при $j = 1$. Пусть q_h обозначает $(a_1 \vee b_h') \wedge b_h$. Так как при $a_1 \vee b'_1 \geqslant b_1$ было бы $a_1 \vee b'_1 \geqslant b_1 \vee b'_1 = I$, что противоречит предположению, то, очевидно, что $q_1 = (a_1 \vee b'_1) \wedge b_1 < b_1$. Кроме того, так как элементы b_h независимы и $q_h \leqslant b_h$, то $c = \bigvee_{h=1}^{n} q_h$ будет прямым объединением элементов q_h, и потому $d[c] = \Sigma\, d[q_h] < \Sigma\, d[b_h] = d[I]$, откуда $c < 1$.

Далее, полагая $a_1 \vee b'_h = d_h$ и действуя индукцией по n, получаем:

$$c = \bigvee_{h=1}^{n} q_h = (b_1 \wedge d_1) \vee \left[\bigvee_{k=2}^{n} b_k \wedge \bigwedge_{k=2}^{n} d_k\right]$$

$$= d_1 \wedge \left(b_1 \vee \left[\bigvee_{k=2}^{n} b_k \wedge \bigwedge_{k=2}^{n} d_k\right]\right) \quad \text{(согласно L5)} \quad ,$$

$$= d_1 \wedge \left(\bigvee_{k=1}^{n} b_k\right) \wedge \bigwedge_{k=2}^{n} d_k \quad \left(\text{ввиду L5 с учетом } \bigwedge_{k\neq 1} d_k \geqslant b_1\right)$$

$$= d_1 \wedge I \wedge \bigwedge_{k=2}^{n} d_k = \bigwedge_{k=1}^{n} (a_1 \vee b'_k) \geqslant a_1.$$

Следовательно, $(c \wedge a'_1) \vee a_1 = c \wedge (a'_1 \vee a_1) = c$ согласно модулярному закону, и $c \wedge a'_1 \wedge a_1 = O$, откуда $c = a_1 \times (c \wedge a'_1)$.

Отсюда индукцией по длине решетки L получается, что элемент a_1 заменим некоторым множителем $e_{h1} > O$ некоторого q_h в любом представлении элемента $c = q_1 \times \ldots \times q_h = a_1 \times (c \wedge a'_1)$ в виде прямого объединения неразложимых множителей e_{hk} элементов q_k. Для краткости пусть $e = e_{h1}$. Тогда, по определению, $c = e \times (c \wedge a'_1)$, откуда

$$e \vee a'_1 = e \vee (c \wedge a'_1) \vee a'_1 \quad \text{(в силу L4)}$$
$$= a_1 \vee (c \wedge a'_1) \vee a'_1 = c \vee a'_1 = I \quad \text{(ввиду доказанного выше).}$$

Но $d[e] = d[a_1]$ вследствие заменяемости в $c = a_1 \times (c \wedge a'_1)$; поэтому $e \wedge a'_1 = O$ и $I = e \times a_1$. Кроме того, $e = b_h$. В самом деле, $e \wedge (b_h \vee a'_1) \leqslant e \wedge a'_1 = O$, а в силу модулярного закона

$$e \vee (b_h \wedge a'_1) = (e \vee a'_1) \wedge b_h = I \wedge b_h = b_h,$$

откуда получается, что e будет прямым множителем в представлении $b_h = e \times (b_h \times a'_h)$. Но по предположению, элемент b_h неразложим, следовательно, $e = b_h$ и, значит, $I = b_h \times a'_1$. Таким образом, элемент a_1 заменим элементом b_h, где $h \neq 1$.

Случай II. Предположим, что $a_1 \vee b'_j = I$ для всех j, но $a'_1 \vee b < I$ при всех j, — остается рассмотреть только эту возможность. Тогда, как в случае 1, но со взаимной заменой a_1 и b_1, мы получаем, что b_1 можно заменить некоторым $a'_k \neq a_1$, скажем, элементом a_m (нумерация может измениться). Тогда отображение $x \to (x \vee a_m) \wedge a'_m$ будет устанавливать проективность интервалов $[O, b'_1]$ и $[O, a'_m]$. Поэтому если обозначить $(b_j \vee a_m) \wedge a'_m$ через b^*_j, то $a'_m = a_1 \times \ldots \times a_{m-1} = b^*_2 \times \ldots \times b^*_n$. В силу индукции по длине решетки элемент a_1 заменим некоторым b^*_j в $[O, a'_m]$. Кроме того, $b_j \vee a'_1$ содержит

$$b_j \vee a_m = (b_j \vee a_m) \wedge (a'_m \vee a_m) = [(b_j \vee a_m) \wedge a'_m] \vee a_m = b^*_j \vee a_m.$$

Следовательно, $b_j \vee a'_1$ содержит $b^*_j \vee a_2 \vee \ldots \vee a_{m-1} \vee a_m = a'_m \vee a_m$ (так как a_1 заменим в a'_m на b^*_j), т. е. $b_j \vee a'_1 = I$. Но $d[a_1] = d[b^*_j] = d[b_j]$, поскольку эти три элемента проективны. Значит, $I = b_j \times a'_1$ и элемент a_1 заменим на b_j. Этим завершается доказательство.

Используя теорему 4 и следствие из теоремы 5, мы получаем

Следствие 1. *Пусть $A = A_1 \times \ldots \times A_m = B_1 \times \ldots \times B_n$ — два представления алгебры A в виде прямого произведения неразложимых сомножителей, причем* (i) *A имеет одноэлементную подалгебру;* (ii) *все конгруэнции на A перестановочны и* (iii) *решетка конгруэнций алгебры A имеет конечную длину. Тогда $m = n$ и при подходящей нумерации алгебры A_j и B_j изоморфны.*

Следствие 2. *Пусть G — нормальная лупа с операторами или без операторов и пусть решетка конгруэнций на G имеет конечную длину. Тогда сомножители в любых двух представлениях лупы G в виде прямого произведения неразложимых в прямое произведение сомножителей при подходящей нумерации являются попарно центрально изоморфными.*

Обобщения. Известны различные важные обобщения теоремы Оре. Так, Йонссон и Тарский доказали теорему об однозначности разложения для алгебр с бинарной операцией $+$, элементом 0 таким, что $0 + x = x + 0 = x$ для всех x, и с решеткой конгруэнций конечной длины. Томпсон показал, однако, что требование, чтобы элемент 0 был просто идемпотентом, недостаточно [1]).

Далее, Голди [2]) перенес обычное доказательство для групп, основанное на лемме Фиттинга, на алгебры с коммутирующими конгруэнциями и с решеткой конгруэнций конечной длины.

---

[1]) См. дополнение Йонссона и Тарского к книге Tarski A. Cardinal algebras. — Oxford, 1949. См. также работы Томпсона (Thompson F. B. — Bull. AMS, 1949, **55**, p. 1137—1141) (по поводу нижеследующего упр. 5), Чэна, Йонссона и Тарского (Chang C. C., Jonsson B., Tarski A. — Fund. Math., 1964, **55**, p. 249—281), Йонссона (Jonsson B. — Colloq. Math., 1966, **14**, p. 1—32).

[2]) Goldie A. W. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1952, **48**, p. 1—34; см. также работы Бэра (Baer R. — Trans. AMS, 1947, **62**, p. 62—98; Bull. AMS, 1948, **54**, p. 167—174).

Упражнения к §§ 6—7

1. Обобщите следствие 3 из теоремы 9 на произвольные линейные алгебры.

2. (а) Покажите, что для нормальных подлуп S, T, U нормальной лупы G будет $S \cap T = T \cap U = U \cap S = 1$ и $S \vee T = T \vee U = U \vee S = G$ тогда и только тогда, когда существует изоморфизм φ: $S \to T$ такой, что U состоит из пар $(s, \varphi(s))$ в $S \times T$.

(*б) Найдите необходимые условия для лупы S, чтобы элементы (s, s) образовывали нормальную подлупу в $S \times S$.

3. (а) Покажите, что если в теореме 10 решетка L дистрибутивна, то при подходящей нумерации элементы a_j и b_j будут равны (а не только проективны).

(б) Покажите, что подобное утверждение верно и в случае, когда a_i и b_j являются нейтральными элементами решетки L.

4. Пусть A и B — двухэлементные алгебры с унарной операцией $'$ такой, что $0' = 0$ и $1' = 1$ в A, в то время как $0' = 1$ и $1' = 0$ в B. Покажите, что $A \times B \cong B \times B$, хотя A и B неразложимы в прямое произведение и не изоморфны (Йонссон).

5. Покажите, что теорема об однозначности разложения на множители справедлива не для всех конечных алгебр, имеющих одноэлементную подалгебру [1]) (Томпсон).

6. В аддитивной группе кольца $\mathbf{Z}[i]$ гауссовых целых чисел пусть A, A', B, B' будут циклическими подгруппами, порожденными соответственно элементами 1, i, $3+4i$, $4+5i$. Покажите, что хотя $G = A \times A' = B \times B'$, причем A, A', B, B' все неразложимы в прямое произведение, все же A не «заменимо» ни на B, ни на B'.

7. Покажите, что если решетка $\Theta(G)$ изоморфна проективной геометрии размерности $n > 1$, то группа G абелева (Холл).

*8. Постройте 12-элементную коммутативную полугруппу, для которой не выполняется свойство однозначности разложения на множители (Маккензи). [2])

8. Решетки подгрупп

«Структурная решетка» $\Theta(G)$ всех нормальных подгрупп данной группы G, определяющая ее прямые и подпрямые разложения, изучалась в предыдущих разделах. Теперь обратимся к решетке $L(G)$ всех подгрупп группы G.

Хотя у всех простых групп структурные решетки одинаковы, все же кажется правдоподобным, что никакие две неизоморфные простые группы не имеют изоморфных решеток подгрупп. И в самом деле [3]), решетка подгрупп $L(G)$ характеризует группу G намного лучше, чем решетка $\Theta(G)$.

Например, легко показать, что $L(G)$ конечна тогда и только тогда, когда конечна G. Действительно, пусть группа G бесконечна. Если какой-нибудь элемент $a \in G$ имеет бесконечный порядок, то циклическая подгруппа, порожденная им, имеет бесконечно много подгрупп. Если же каждый элемент группы G имеет конечный порядок, выберем произвольным образом $a \in G$.

---

[1]) Это решает проблему 34 из [LT2]. — *Прим. перев.*

[2]) McKenzie R. — Trans. AMS, 1968, 133, № 1, p. 115—129. — *Прим. перев.*

[3]) Вопрос о том, насколько решетка $L(G)$ характеризует группу G, впервые рассматривал Бэр (Baer R. — Bull. AMS, 1938, 44, p. 817—820). Теперешнее состояние вопроса освещено в книге Судзуки [1].

Поскольку циклическая подгруппа, порожденная элементом a, конечна, то в G найдется бесконечно много элементов, не входящих в эту циклическую подгруппу. Возьмем любой из них и повторим процесс. Таким образом можно получить бесконечно много подгрупп группы G. Значит, всякий раз, когда решетка $L(G)$ конечна, группа G также должна быть конечной. Обратное тривиально.

Более глубоким результатом является тот факт, что решетки подгрупп не удовлетворяют никакому решеточному тождеству или квазитождеству, не выводимому из L1—L4. Первым шагом в этом направлении является

Теорема 11. *Любая подрешетка решетки всех подгрупп произвольной группы изоморфна некоторой решетке разбиений, и обратно.*

Доказательство. С каждой подгруппой S группы G связано разбиение $\pi(S)$ множества S на правые классы смежности Sx по подгруппе S. Тогда, очевидно, $\pi(S \wedge T) = \pi(S) \wedge \pi(T)$. Кроме того, $x \equiv y(\pi(S) \vee \pi(T))$ тогда и только тогда, когда для некоторой конечной последовательности $x_0 = x, \ldots, x_{2n} = y$ будет $x_{2k+1} \in Sx_{2k}$ и $x_{2k} \in Tx_{2k-1}$, откуда $y \in (TS \ldots TS)\, x$ или, другими словами, $y \in (T \vee S)\, x$. Значит, $\pi(S) \vee \pi(T) = \pi(S \vee T)$.

Обратно, с каждым разбиением π произвольного множества I связана подгруппа [1] $K(\pi)$, состоящая из таких перестановок f множества I, которые (i) переставляют лишь конечное число символов и (ii) «сохраняют» π в том смысле, что $x\pi f(x)$ для всех $x \in I$. Тогда, очевидно, $K(\pi \wedge \pi') = K(\pi) \wedge K(\pi')$ и $K(\pi) \vee K(\pi') \subset K(\pi \vee \pi')$. Кроме того, за исключением тривиального случая $\pi = \pi'$, перестановка $K(\pi) \vee K(\pi')$ содержит одну транспозицию и все циклы длины три (pqr), сохраняющие $\pi \vee \pi'$. В самом деле, если цикл (pqr) сохраняет $\pi \vee \pi'$, то будет $p\pi q\pi r$, или $p\pi q\pi' r$, или одно из соотношений, получающихся из этих взаимной заменой π и π'. В первом случае $(pqr) \in K(\pi)$, а во втором $(pqr) = (pr)(rq) \in K(\pi) \vee K(\pi')$. Так как $K(\pi \vee \pi')$ порождается любой транспозицией и своими циклами длины три [2], то отсюда следует, что $K(\pi \vee \pi') = K(\pi) \vee K(\pi')$, чем и завершается доказательство.

Теперь сформулируем без доказательства гораздо более глубокий результат Уитмена [3].

Теорема Уитмена. *Каждая решетка изоморфна некоторой решетке разбиений.*

Из этих результатов сразу выводится

---

[1] Симметрической группы на I. — *Прим. перев.*

[2] Холл М. Теория групп. — М.: ИЛ, 1962, с. 73, лемма 5.4.1. Заметим, что любая перестановка, удовлетворяющая условию (i), является конечным произведением циклов.

[3] Whitman P. M. — Bull. AMS, 1946, 52, p. 507—522.

Следствие 1. *Каждая решетка изоморфна подрешетке решетки всех подгрупп некоторой группы.*

Отсюда и из теоремы VI.17 получаем:

Следствие 2. *Если $p(x_1, \ldots, x_r) \equiv q(x_1, \ldots, x_r)$ тождественно истинно во всех решетках подгрупп, то это тождество истинно во всякой решетке.*

Теперь применим конструкцию теоремы 11 для характеризации перестановочности подгрупп в группе.

Две подгруппы S и T группы G называются *перестановочными*, если $ST = TS$, что равносильно условию $S \vee T = ST$ и, следовательно (для конечных групп), равенству $o(S)\,o(T) = o(S \wedge T)\,o(S \vee T)$.

Лемма. *Пусть S и T — подгруппы группы G, а $\pi(S)$ и $\pi(T)$ — разбиения группы G на правые классы смежности по S и по T соответственно. Тогда $\pi(S)$ и $\pi(T)$ перестановочны тогда и только тогда, когда $ST = TS$.*

Доказательство. Из определения вытекает, что $x \equiv y \pmod{\pi(S)\,\pi(T)}$ тогда и только тогда, когда $y \in Tz \subset TSx$ для некоторого $z \in Sx$, и значит, тогда и только тогда, когда $y \in TSx$. Отсюда $\pi(S)\,\pi(T) = \pi(T)\,\pi(S)$ тогда и только тогда, когда $TSx = STx$ для всех $x \in G$, т. е. тогда и только тогда, когда $ST = TS$.

Следствие. *Если S и T — перестановочные подгруппы группы G, то соответствующие элементы решетки $L(G)$ образуют дуально модулярную пару.*

В самом деле, по лемме и по теореме IV.13, $\pi(S)$ и $\pi(T)$ образуют дуально модулярную пару в решетке $E(G)$ всех разбиений множества G, но так как $L(G)$ является подрешеткой решетки $E(G)$ — это было показано при доказательстве теоремы 11 — то отсюда и получается доказываемое утверждение.

9. Подгруппы абелевых групп

Если группа G абелева, то по теореме 1 $L(G) \cong \Theta(G)$: решетка конгруэнций и решетка подгрупп группы G совпадают. Мы исследуем теперь решетки подгрупп конечных абелевых групп. Так как любая конечная абелева группа является прямым произведением циклических групп (с порядками, равными степеням простых чисел), естественно начать с рассмотрения следующего примера.

Пример 3. Пусть Z_r — конечная циклическая группа порядка r с порождающим элементом a. Тогда (Холл М. Теория групп. — М.: ИЛ, 1962, с. 45) каждая подгруппа в Z_r является циклической с порождающим элементом a^s при некотором $s \mid r$. Поэтому решетка $L(Z_r)$ изоморфна идеалу дистрибутивной решетки натуральных чисел (относительно делимости $m \mid n$), состоящему из делителей числа r. Это показывает, что решетка всех подгрупп конечной циклической группы дистрибутивна.

Точнее, если $r = p_1^{e_1} \ldots p_k^{e_k}$, то $L(Z_r)$ является произведением $C_1 \ldots C_k$ цепей с длинами $e_1, \ldots, e_k$ (или, что равносильно $L(Z_r) \cong 2^{e_1+\cdots+e_k}$). Теперь мы обобщим этот результат.

Теорема 12. *Пусть $G = M \times N$, где M и N — конечные группы взаимно простых порядков. Тогда $L(G) \cong L(M) \times L(N)$.*

Доказательство. Так как $M \wedge N = 1$ и $M \vee N = G$, то достаточно доказать, что $S = (S \wedge M) \vee (S \wedge N)$ для любой подгруппы S из G. Но, очевидно, $(S \wedge M) \vee (S \wedge N) \subset S$, а с другой стороны, $S \subset (S \wedge M) \vee (S \wedge N)$, поскольку каждый элемент $g \in S$ является произведением своих степеней $g^a \in M$ и $g^b \in N$, где $a|n$ и $b|m$. Требуемое равенство доказано.

Обращение теоремы 12 также справедливо [1]) (см. ниже теорему 16). Кроме того, используя теорему 12, нетрудно доказать:

Теорема 13. *Если G — конечная абелева группа, то решетка $L(G)$ допускает инволюцию (т. е. дуальный автоморфизм периода 2).*

Доказательство. Так как G является прямым произведением силовских подгрупп взаимно простых порядков, теорема 12 сводит доказательство к случаю силовских подгрупп, каждая из которых будет прямым произведением циклических групп порядков $p^{h_1}, \ldots, p^{h_i}$, где $h_1 \geqslant h_2 \geqslant \ldots \geqslant h_i$. В любой такой подгруппе с порождающими, скажем, $g_1, \ldots, g_i$ будем писать

(5) $g_1^{x_1} \ldots g_i^{x_i} \perp g_1^{y_1} \ldots g_i^{y_i}$ тогда и только тогда, когда

$$x_1y_1 + x_2y_2p^{h_1-h_2} + \ldots + x_iy_ip^{h_1-h_i} = 0.$$

Тогда полярность, индуцируемая отношением $\perp$, и будет инволюцией решетки $L(G)$, — мы опускаем детали [2]).

Дистрибутивные решетки подгрупп. Представляет интерес классификация групп по свойствам решетки их подгрупп. В этом направлении мы сначала выясним, какие конечные группы имеют дистрибутивную решетку подгрупп.

Лемма 1. *В группе G пусть A, B, C будут циклическими подгруппами, порожденными элементами a, b и $c = ab$ соответственно. Тогда если $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$, то $ab = ba$.*

Доказательство. Так как $C = \{ab\}$ [3]), то $C \leqslant A \vee B$ и, значит, $(A \vee B) \wedge C = C$. Поэтому условие леммы сводится к равенству $C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$. Поскольку каждая подгруппа циклической группы является циклической, то $A \wedge C$

---

[1]) Цаппа (Zappa G. — Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli, 1951, **18**, p. 1—7).

[2]) Биркгоф (Birkhoff G. — Proc. London Math. Soc., 1935, **38**, p. 389). Эта полярность отображает, кроме того, характеристические подгруппы на характеристические подгруппы.

[3]) Здесь и далее $\{a\}$ означает подгруппу, порожденную элементом a. — *Прим. ред.*

порождается некоторой степенью $a^r = c^h$ элемента a, которая будет и степенью элемента c, и точно так же $B \wedge C$ порождается некоторой степенью $b^s = c^k$. Если $C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$, то обязательно должно $c \in \{c^h\} \vee \{c^k\}$, и потому h, k можно сделать взаимно простыми: $mh + nk = 1$ для подходящих целых чисел m, n. Следовательно,

$$ab = c = c^{mh}c^{nk} = c^{nk}c^{mh} = b^{ns}a^{mr} = a^{mr}b^{ns},$$

и, значит, $a^{mr-1} = b^{1-ns}$. Тогда для коммутатора элементов a и b получаем:

$$aba^{-1}b^{-1} = b^{ns}a^{mr}a^{-1}b^{-1} = b^{ns}a^{mr-1}b^{-1} = b^{ns}b^{1-ns}b^{-1} = 1,$$

т. е. $ab = ba$, что и требовалось доказать.

Теорема 14. *Решетка L (G) всех подгрупп конечной группы G дистрибутивна тогда и только тогда, когда G — циклическая группа.*

Доказательство. Рассуждения, проведенные в примере 3, показывают, что достаточно из дистрибутивности решетки L (G) вывести цикличность группы G. Кроме того, лемма 1 показывает, что если L (G) дистрибутивна, то G должна быть абелевой. Поэтому, ввиду основной теоремы для конечных абелевых групп, G должна быть прямым произведением циклических групп с порядками, равными степеням простых: $q_1 = p_1^{k_1}, \ldots, q_r = p_r^{k_r}$, и с порождающими, например, $a_1, \ldots a_r$ соответственно. Если бы два числа p_i оказались равными, скажем $p_i = p_j = p$, то G содержала бы два элемента $b_i = a_i^{q_i/p}$ и $b_j = a_j^{q_j/p}$, которые породили бы элементарную абелеву группу, решетка подгрупп которой (ее длина равна 2) была бы недистрибутивной. Значит, все p_i различны; но в этом случае элемент $a = a_1 a_2 \ldots a_r$ имеет порядок $q_1 q_2 \ldots q_r$ и порождает группу G, которая, таким образом, оказывается циклической. Ч. т. д.

Упражнения к §§ 8—9

1. Покажите, что для любого простого числа p диэдральная группа порядка $2p$ и нециклическая группа порядка p^2 имеют изоморфные решетки подгрупп.

2. Для циклических групп G и H найдите необходимые и достаточные условия изоморфности решеток L (G) и L (H).

3. Покажите, что если G — диэдральная группа порядка 10, то решетка L (G) модулярна, но что это не так для диэдральной группы порядка 30.

4. (а) Пусть группа G определеяется соотношениями $x^7 = y^6 = 1$, $yx = x^3y$. Покажите, что решетка L (G) удовлетворяет цепному условию Жордана—Дедекинда, но не является полумодулярной ни сверху, ни снизу.

(б) Пусть группа G определяется соотношениями $x^5 = y^4 = 1$, $yx = x^2y$. Покажите, что решетка L (G) полумодулярна, но не модулярна.

5. (а) Покажите, что если решетка L (G) модулярна и H—гомоморфный образ какой-нибудь подгруппы группы G, то решетка L (H) также модулярна.

(б) Найдите группы G и H такие, что решетки L (G) и L (H) модулярны, но L ($G \times H$) не модулярна.

6. (а) Покажите, что если A — абелева группа нечетного порядка, то характеристические подгруппы группы A соответствуют нейтральным элементам решетки $L(A)$.

(б) Покажите, что решетка характеристических подгрупп группы A порождается двумя цепями: цепью подгрупп, состоящих из элементов x таких, что $p^{\alpha}x = 0$, и цепью подгрупп, состоящих из элементов y таких, что $y = p^{\beta}t$ для некоторого t; показатели α и β определяют эти подгруппы [1].

7. Элемент q решетки L с O назовем примарным, если интервал $[O, q]$ является цепью. Покажите, что если G — конечная группа, то каждый элемент решетки $L(G)$ является объединением подходящих примарных элементов.

8. Покажите, что если элемент $a \in L(G)$ инвариантен относительно всех решеточных автоморфизмов решетки $L(G)$, то он соответствует характеристической подгруппе группы G.

9. (а) Покажите, что если порядок группы G является произведением $k \leq 4$ простых сомножителей, то длина решетки $L(G)$ равна k.

(б) Укажите группу порядка 1092, длина решетки подгрупп которой равна лишь 4 (Паркер).

10. Покажите, что если G и H — конечные абелевы группы, не имеющие циклических силовских подгрупп, то из $L(G) \cong L(H)$ следует изоморфизм $G \cong H$.

10. Нейтральные элементы. Центр

Рассмотрение решетки подгрупп конечной неабелевой группы мы начнем с двух примеров.

Пример 4. Группа кватернионов — это восьмиэлементная мультипликативная группа кватернионных единиц ± 1, $\pm i$, $\pm j$, $\pm k$. Все ее подгруппы нормальны, (модулярная) решетка ее подгрупп изображена на рис. 17, *а*.

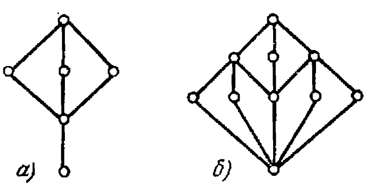


Рис. 17.

Пример 5. Решетка всех подгрупп группы октаэдра полумодулярна снизу, её диаграмма приведена на рис. 17, *б* (Биркгоф и Маклейн [1], р. 141).

Легко доказывается следующий результат.

Лемма. *Если $L(G) \cong 2^2$ — булева алгебра порядка 4, то G является циклической группой порядка pq, где p и q различные простые.*

Доказательство. Так как решетка $L(G)$ дистрибутивна, группа G циклическая. Поскольку G — абелева группа, длина решетки $L(G)$ равна числу (равных или различных) простых множителей в разложении числа $o(G)$ — порядка группы G. Поэтому $o(G) = pq$ или $o(G) = p^2$. Но ни у одной из абелевых групп порядка p^2 решетка $L(G)$ не изоморфна булевой алгебре 2^2. Отсюда и следует требуемое заключение.

Теорема 15. *Если подгруппа A группы G соответствует нейтральному элементу $a \in L(G)$, то A является характеристической подгруппой в G.*

---

[1]) Биркгоф (B i r k h o f f G. — Proc. London Math. Soc., 1935, 38, p. 389).

Доказательство. Действуя индукцией по $o(G)$, предположим, что наше утверждение истинно для любой собственной подгруппы и любого собственного гомоморфного образа группы G и, кроме того, для любого нейтрального элемента $c < a$ из $L(G)$. При этом допущении докажем теорему 15 от противного.

В самом деле, пусть $\alpha(A) = B \neq A$ для некоторого автоморфизма α группы G. Так как каждый автоморфизм группы G индуцирует некоторый автоморфизм решетки $L(G)$, элемент $b \in L(G)$, соответствующий подгруппе B, должен быть нейтральным. Кроме этого, поскольку нейтральные элементы любой решетки образуют (дистрибутивную) подрешетку, элемент $a \wedge b = c < a$ тоже должен быть нейтральным. Тогда, по предположению индукции, подгруппа $C = A \wedge B$ группы G, соответствующая элементу $c \in L(G)$, должна быть *характеристической* (и следовательно, нормальной) подгруппой группы G. Наконец, α отображает изоморфно интервал $[c, a]$ решетки $L(G)$ на интервал $[c, b]$, т. е.

$$L(A/C) \cong L(B/C).$$

Пусть теперь $P \leqslant A$ покрывает C в $L(G)$ и пусть $\alpha(P) = Q \leqslant B$. Так как $A \wedge Q \leqslant A \wedge B = C < A$, то A не может содержать Q. Кроме того, так как a и b являются нейтральными элементами решетки $L(G)$, независимыми над c, то $(a \vee b)/c \cong (a/c) \times (b/c)$ и потому $(p \vee q)/c \cong (p/c) \times (q/c) \cong 2^2$. Значит, по предыдущей лемме, группа $(P \vee Q)/C$ должна быть циклической. Это противоречит существованию в ней различных подгрупп P/C и $Q/C = \alpha(P/C)$ с одинаковым порядком. Теорема доказана.

Теорема 16. *Центр решетки $L(G)$ состоит из характеристических подгрупп группы G, порядки и индексы которых взаимно просты.*

Доказательство. Если элемент c принадлежит центру решетки $L(G)$, то он нейтрален и имеет нейтральное дополнение c'. Соответствующие подгруппы C и C' группы G будут взаимно дополнительными характеристическими подгруппами в G, и значит, $G \cong C \times C'$. Если бы $o(C)$ и $o(C')$ имели общий простой множитель p, то C и C' содержали бы по теореме Коши подгруппы P и P_1 порядка p, откуда было бы $o(P \vee P_1) = p^2$. Но так как $L(G) \cong L(C) \times L(C')$, мы получили бы, что $L(P \vee P_1) = 2^2$, откуда по лемме $o(P \vee P_1) = p^2$. Но это противоречит взаимной простоте порядков $o(C)$ и $o(C')$.

Обратное утверждение было доказано в теореме 12.

11. Модулярные решетки подгрупп

Очевидно, что решетка $L(A)$ подгрупп любой абелевой группы A модулярна. Как мы сейчас увидим, из неабелевых групп лишь немногие обладают этим свойством.

Согласно следствию из леммы, доказанной в § 8, решетка $L(G)$ будет модулярной, если, например, любые две подгруппы группы G перестановочны. Поэтому, называя *квазигамильтоновой* группу G, все подгруппы которой перестановочны, мы получаем следующий результат.

Теорема 17. *Решетка подгрупп квазигамильтоновой группы модулярна.*

Группа G называется *гамильтоновой*, если все ее подгруппы нормальны. Так как нормальная подгруппа перестановочна с любой подгруппой, то очевидно, что любая гамильтонова группа будет квазигамильтоновой. Группа кватернионов из примера 4 § 10 гамильтонова. С другой стороны [1], любая гамильтонова группа либо абелева, либо является прямым произведением абелевой группы и группы кватернионов.

Теорема 18. *Если G — конечная группа с полумодулярной (сверху) решеткой $L(G)$, то G разрешима.*

Доказательство. Мы докажем более сильный результат: если p — наибольший простой делитель числа $o(G)$, то элементы порядка p образуют (вместе с 1) характеристическую элементарную абелеву подгруппу P группы G. В самом деле, пусть $X=\{x\}$ и $Y=\{y\}$ — две различные циклические подгруппы порядка p в G (случай, когда такая подгруппа только одна, тривиален). Тогда $L(X\times Y)$ имеет длину 2. Теперь нам потребуется следующая

Лемма. *Если $L(G)$ имеет длину 2, то $o(G)$ является произведением двух простых чисел.*

Доказательство. Если число $o(G)$ является произведением различных простых («свободно от квадратов»), то группа G разрешима [2] и лемма доказана для $o(G)$, свободных от квадратов. Если же $o(G)=mp^2$ (содержит квадрат), то в G найдется подгруппа S порядка p^2, решетка $L(S)$ будет иметь длину 2, и значит, будет $G=S$, откуда $o(G)=p^2$. Ч. т. д.

По этой лемме $o(X\vee Y)\geqslant p^2$ является произведением двух простых, ни одно из которых не может превосходить p, поскольку $o(X\vee Y)\mid o(G)$, а p есть наибольший простой делитель числа $o(G)$. Отсюда следует, что $o(X\vee Y)=p^2$, и значит, $X\vee Y$ — *абелева* группа. Таким образом, любые два элемента порядка p из группы G перестановочны, и потому требуемая неединичная подгруппа P существует. Но решетка $L(G/P)$ является интервалом в $L(G)$ и, таким образом, будет полумодулярной.

Если действовать индукцией по порядку $o(G)$, то в силу предположения индукции группа G/P разрешима (так как $o(G/P)<o(G)$). Но тогда разрешима и сама группа G.

---

[1] Холл М. Теория групп. — М.: ИЛ, 1962, теорема 12.5.4.

[2] Там же, теорема 9.2.3.

Теорема 19. *Если группа G конечна и решетка $L(G)$ модулярна, то G разрешима.*

Эта теорема является ключом к описанию всех конечных групп, имеющих модулярную решетку подгрупп, — проблеме, которую решили Ивасава и Джонс [1]). Это решение выглядит достаточно сложно (см. упр. 6—8 после § 12). Мы приведем здесь описание меньшего класса конечных групп, состоящего из групп G, для которых $L(G)$ является *модулярной решеткой с дополнениями*.

Так как каждая такая решетка $L(G)$ является прямым произведением неразложимых модулярных решеток с дополнениями, то по теореме 15 достаточно выделить те группы G, для которых $L(G)$ будет неразложимой модулярной решеткой с дополнениями. Этими группами (так называемыми P-группами) будут:

(i) прямые произведения циклических групп простого порядка p и

(ii) полупрямые произведения $C_q S_p$ циклической группы порядка q на нормальную подгруппу типа (i), причем $c^{-1}ac = a^r$ (где $r \neq 1$, $r^q \equiv 1 \pmod p$) для некоторого порождающего элемента c группы C_q.

Некоторые более общие условия для случая, когда $L(G)$ является (не обязательно модулярной) решеткой с дополнениями, нашел Цахер [2]).

12. Условие Жордана—Дедекинда и сверхразрешимость

Следующий результат получается достаточно просто.

Теорема 20. *Если G — конечная p-группа порядка p^n, то $L(G)$ является полумодулярной снизу решеткой длины n.*

Доказательство. Любая максимальная подгруппа S группы G имеет простой индекс p. Если S и T — различные максимальные подгруппы в G, то, поскольку $S \vee T \geqslant ST$ и $o(ST) = o(S)\,o(T)/o(S \wedge T)$, будет

$$p^{2n-2} = o(S)\,o(T) \leqslant o(S \wedge T)\,o(S \vee T) = p^n o(S \wedge T),$$

так что $o(S \wedge T) \geqslant p^{n-2}$. Следовательно, S и T покрывают $S \wedge T$. Так как любая подгруппа p-группы сама является p-группой, мы доказали выполнимость условия (ξ'), определяющего полумодулярность снизу.

Следствие 1. *Если G — конечная нильпотентная группа, то решетка $L(G)$ полумодулярна снизу и размерность в ней любой подгруппы S группы G равна числу простых делителей порядка $o(S)$ этой подгруппы.*

---

[1]) Iwasawa K. — J. Fac. Sci. Tokyo, 1941, 4, p. 171—194; Japan J. Math., 1943, 18, p. 709—728; Jones A. W. — Duke J. Math., 1945, 12, p. 541—560. См. Судзуки [1, p. 31].

[2]) Zacher G. — Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1953, 22, p. 111—122.

В самом деле, $L(G) \cong L(P_1) \times \ldots \times L(P_r)$ по теореме 17 и по теореме 10.3.4 из книги Холла, где все P_i являются силовскими подгруппами группы G.

Следствие 2. *Если G — конечная нильпотентная группа, то решетка $L(G)$ удовлетворяет условию Жордана—Дедекинда.*

Последний результат можно обобщить.

Теорема 21. *Если G — конечная группа, то решетка $L(G)$ тогда и только тогда удовлетворяет условию Жордана—Дедекинда, когда G сверхразрешима.*

Напомним, что группа называется *сверхразрешимой*, если она содержит цепь нормальных подгрупп N_i с циклическими фактор-группами N_{i-1}/N_i, и что если G конечна, можно считать эти фактор-группы имеющими простой порядок. Отсюда сразу следует, что

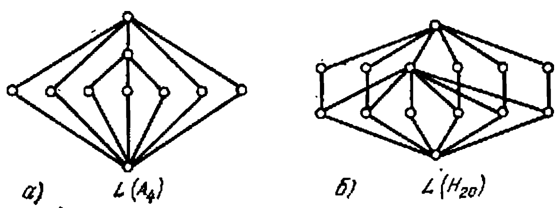


Рис. 18.

для любой подгруппы S группы G подгруппы вида $S \vee N_i$ образуют цепь, длина которой равна числу (равных или различных) простых делителей числа $[G : S]$, и что S максимальна тогда и только тогда, когда $[G : S]$ — простое число. Но это обеспечивает выполнимость цепного условия Жордана—Дедекинда.

Гораздо более сложное доказательство обратного утверждения, принадлежащее Ивасаве, см. в книге Судзуки. Это обратное утверждение связано с теоремой Хуперта (Холл М. Теория групп. — М.: ИЛ, 1962, теорема 10.5.8).

Пример 6. Решетка подгрупп разрешимой (но не сверхразрешимой) знакопеременной группы A_4 степени 4 не удовлетворяет цепному условию Жордана—Дедекинда (рис. 18, *а*).

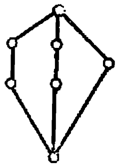
Пример 7. Пусть H_{20} обозначает (метациклический сверхразрешимый) голоморф циклической группы порядка 5 с определяющими соотношениями $a^5 = b^4 = 1$, $b^{-1}ab = a^2$. Решетка $L(H_{20})$ не является полумодулярной снизу (рис. 18, *б*).

Упражнения к §§ 10—12

1. (а) Найдите все группы G, для которых решетка $L(G)$ имеет длину 3.

(б) Найдите все группы G, для которых решетка $L(G)$ имеет длину 4.

(в) Покажите, что решетка с диаграммой



допускает вложение в решетку подгрупп группы S_4^3 (Уотермен).

2. Пусть $C(G)$ обозначает решетку композиционных подгрупп конечной разрешимой группы G. Покажите, что $C(G)$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда каждая силовская подгруппа группы G является циклической (Цаппа).

3. Покажите, что для любой конечной дистрибутивной решетки вида 2^P существует конечная группа с решеткой конгруэнций $\Theta(G) \cong 2^P$ (Кунцман).

4. (а) Покажите, что решетка, двойственная решетке всех подгрупп p-группы конечного порядка, полумодулярна.

(б) Покажите, что она не будет геометрической решеткой, если только эта p-группа не является элементарной абелевой.

5. Покажите, что если G — p-группа, имеющая хотя бы одну подгруппу порядка p, то все простые интервалы решетки $L(G)$ проективны (Барнс).

6. Назовем «модулярной p-группой» конечную группу $G = \{M, b\}$, порожденную абелевой нормальной подгруппой M, элементы которой удовлетворяют соотношению $y^{p^m} = 1$, где p — простое, и элементом b порядка p^r, причем $xb = bx^{1+p^s}$ для всех $x \in M$ и $s > 1$, если $p \geqslant 2$. Покажите, что решетка $L(G)$ модулярна для любой модулярной p-группы G.

7. Назовем «модулярной pq-группой» конечную группу $H = \{N, a\}$, порожденную абелевой нормальной подгруппой N, элементы которой удовлетворяют соотношению $x^p = 1$ для некоторого простого p, и элементом a порядка q^β, где q — простое число, причем $a^{-1}xa = x^n$ для всех $x \in N$, где $n^q \equiv 1 \pmod p$. Покажите, что решетка $L(H)$ модулярна для любой модулярной pq-группы H.

*8. Покажите, что если решетка $L(G)$ модулярна, то группа G является прямым произведением гамильтоновых групп, модулярных p-групп и модулярных pq-групп (Ивасава).

*9. Пусть G — конечная неабелева p-группа. Покажите, что если $L(G) \cong L(H)$, то H также является p-группой.

*10. (Паркер) Пусть G — конечная группа, решетка $L(G)$ подгрупп которой обладает относительными дополнениями. Докажите, что

(а) каждый элемент группы G имеет свободный от квадратов порядок;

(б) если S — подгруппа группы G, M — нормальная подгруппа в S, а N — нормальная подгруппа в M, то N будет нормальной подгруппой в S;

(в) каждая силовская подгруппа группы G элементарна;

(г) группа G метабелева и ее коммутант является прямым произведением всех силовских подгрупп, не лежащих в централизаторах своих нормализаторов.

11. Пусть G — конечная простая группа составного порядка. Покажите, что решетка, двойственная $L(G)$, не является решеткой подгрупп ни для какой группы (Цаппа).

*12. Пусть G — конечная разрешимая группа. Покажите, что если $L(G) \cong L(H)$, то группа H разрешима [1]) (Судзуки).

13. Покажите, что если группа G совпадает со своим коммутантом, то любой изоморфизм $L(G) \cong L(H)$ переводит центр группы G в центр группы H (Судзуки).

14. Покажите, что если группа G простая и нециклическая и $L(G) \cong L(H)$, то порядок группы H не превосходит числа автоморфизмов решетки $L(G)$ [2]).

---

[1]) Частичное решение проблемы 40 из [LT2]. Справедливость этого утверждения для произвольных групп установил Б. В. Яковлев (Алгебра и логика, 1970, 9, № 3, с. 349—369). — *Прим. перев.*

[2]) Частичное решение проблемы 41 из [LT2]. — *Прим. перев.*

15. (а) Покажите, что правые смежные классы любой группы G образуют решетку («решетка смежных классов» группы G).

(б) Укажите две неизоморфные конечные группы с изоморфными решетками смежных классов [1]) (Курцио).

ПРОБЛЕМЫ

57. (См. проблему 38.) Выполняется ли теорема об однозначности разложения на множители для любой конечной полугруппы? для любого конечного моноида? [2])

58. Верна ли теорема Оре для модулярных элементов (т. е. для элементов a таких, что пара (a, b) модулярна при всех b) в произвольной полумодулярной решетке конечной длины? в произвольной геометрической решетке?

59. Найти необходимые и достаточные условия для группы G, чтобы решетка $L(G)$ ее подгрупп была (а) самодвойственной; (б) решеткой с дополнениями. [3])

60. Для каких конечных групп смежные классы по нормальным подгруппам образуют полумодулярную решетку?

61. Каким подгруппам конечной группы G соответствуют «стандартные» элементы решетки $L(G)$? [4])

62. Для каких эквазигрупп решетка всех подэквазигрупп дистрибутивна? модулярна? полумодулярна?

63. Верно ли, что решетка конгруэнций любой группы допускает вложение в решетку конгруэнций некоторой абелевой группы (Йонссон)?

---

[1]) Это решает проблему 42 из [LT2]. — *Прим. перев.*

[2]) Чэн, Йонссон, Тарский (Chang C. C., Jónsson B., Tarski A. — Fund. Math., 1964, 55, p. 249—281). [Ответ на первый вопрос содержится в упр. 8 к § 7, утвердительный ответ на второй вопрос был дан в работе Йонссона и Тарского [1]. — *Прим. перев. и ред.*]

[3]) Проблемы 37 и 38 из [LT2]. — *Прим. перев.*

[4]) На этот вопрос ответил Цаппа (Zappa G. — Period. math., 1968, 46, p. 395—398). — *Прим. перев.*

ГЛАВА VIII

ТРАНСФИНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

1. Условия обрыва возрастающих и убывающих цепей

Процессы предельного перехода в топологии и в анализе, непосредственно обращающиеся к нашей интуиции, дают необходимые средства для изучения бесконечных множеств и функций на них. Их можно различными способами перенести на бесконечные упорядоченные множества — мы займемся этим в главах IX—X.

Еще более важными, но и менее ясными (см. § 16) являются разного рода общие аргументы *индуктивного* характера, которые применяются к конкретным у-множествам бесконечной длины (например, к совокупностям подмножеств, упорядоченным включением). К числу этих аргументов относятся лемма Цорна и аксиома выбора, ставшие уже нормой, а также более тонкие, хотя и менее известные, понятия $\bigvee$-недостижимости и «компактной порожденности». Этим связанным с индукцией понятиям и их приложениям к упорядоченным множествам и решеткам посвящается настоящая глава. Мы начнем с самого простого: с условий обрыва возрастающих и убывающих цепей.

Определение. Говорят, что у-множество P удовлетворяет условию обрыва *возрастающих* цепей (УВЦ), и в этом случае оно называется *нётеровым* [1]), если каждое непустое подмножество у-множества P имеет максимальный элемент. У-множество P, по определению, удовлетворяет условию обрыва *убывающих* цепей (УУЦ), если в двойственном ему у-множестве выполняется УВЦ.

Очевидно, что любое подмножество нётерова у-множества будет снова нётеровым. Двойственно, если у-множество удовлетворяет УУЦ, то это условие выполняется и во всех его подмножествах (относительно индуцированного порядка). Аналогично, если у-множество Q получается из нётерова у-множества P *ослаблением* порядка [2]), то Q также нётерово.

Понятно, что натуральные числа удовлетворяют УУЦ относительно естественного порядка $\leqslant$. Так как при $m \mid n$ будет

---

[1]) Хотя Гильберт и применял равносильные понятия в теории идеалов, все же именно Эмми Нётер первой осознала эффективность УВЦ и УУЦ. См. ван дер Варден [1, § 80]. УВЦ в квазиупорядоченных множествах рассматривал Хигмен (Higman G. — Proc. London Math. Soc., 1952, 2, p. 326—336).

[2]) То есть уменьшением числа сравнимых пар. — *Прим. перев.*

$m \leqslant n$, то УУЦ выполняется и для натуральных чисел, упорядоченных делимостью $m \mid n$. Поскольку решетка идеалов кольца $\mathbf{Z}$ двойственна этому последнему у-множеству, то значит, решетка идеалов в $\mathbf{Z}$ является нётеровой.

Особый интерес представляют цепи, удовлетворяющие УВЦ или УУЦ. Это, как следует из определения, такие цепи, в которых каждое непустое подмножество имеет *наибольший*, соответственно *наименьший* элементы. Непустые цепи, в которых выполняется УУЦ, называются *вполне упорядоченными*[1]) множествами или *ординалами*. Самым известным из ординалов является ω — порядковый тип множества натуральных чисел с их естественной упорядоченностью; другие примеры встретятся в § 13.

Легко доказывается

Теорема 1. *Следующие утверждения об у-множестве P равносильны:* (i) *P нётерово;* (ii) *каждая цепь в двойственном у-множестве $\breve{P}$ вполне упорядочена;* (iii) *каждое вполне упорядоченное подмножество в P конечно.*

Доказательство. Если (i) не выполняется, то P содержит непустое подмножество X, которое не имеет максимального элемента. Выберем $a_1 \in X$; так как a_1 не является максимальным, существует элемент $a_2 \in X$ такой, что $a_2 > a_1$. Но и a_2 не будет максимальным, и значит, в X можно найти $a_3 > a_2$. Этот процесс можно продолжать неограниченно, и мы получим бесконечную возрастающую цепь $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$, изоморфную ординалу ω, и таким образом (iii) нарушается. Но если не выполняется (iii), то у-множество P содержит цепь, изоморфную ω, а двойственное для ω у-множество не будет вполне упорядоченным, что нарушает (ii). Наконец, если не имеет места (ii), то в $\breve{P}$ найдется не вполне упорядоченная цепь, но тогда некоторая ее подцепь не будет иметь наименьшего элемента или, что равносильно, когда мы говорим о цепях, не будет иметь минимального элемента, т. е. в $\breve{P}$ нарушается УУЦ. Это означает, что у-множество P не нётерово, (i) не выполняется — круг замкнулся.

Тесно связан с условием обрыва возрастающих цепей (УВЦ) следующий

Обобщенный принцип индукции. Пусть P — нётерово у-множество и Φ — некоторое свойство. Тогда при доказательстве выполнимости Φ для всех элементов у-множества P достаточно предполагать, что для каждого $a \in P$ все $x > a$ обладают свойством Φ.

Доказательство. Пусть существует элемент $a \in P$, не обладающий свойством Φ. Тогда ввиду УВЦ среди элементов,

---

[1]) Понятие вполне упорядоченного множества принадлежит Кантору. Строго говоря, ординал — это класс эквивалентности на множестве вполне упорядоченных множеств, или «порядковый тип».

для которых Ф не выполняется, должен найтись *максимальный* элемент $a \in P$. В силу этой максимальности элемента a свойство Ф присуще всем $x > a$. Последние два утверждения противоречат исходному предположению.

Следствие. *В любой нётеровой решетке L каждый элемент представим в виде пересечения конечного числа $\wedge$-неразложимых элементов и двойственно.*

Доказательство. Если дан элемент $a \in L$, то либо a $\wedge$-неразложим, и тогда утверждение тривиально выполняется, либо $a = b \wedge c$ для некоторых $b > a$, $c > a$. Применяя обобщенный принцип индукции к b и c, завершаем доказательство.

Теорема Куроша—Оре, которая утверждает, что число $r = r(a)$ одно и то же для всех несократимых представлений $a = x_1 \wedge \ldots \wedge x_r$ элемента a в виде пересечения $\wedge$-неразложимых элементов x_i, выполняется в любой модулярной нётеровой решетке [1]).

Упражнения

1. (а) Покажите, что любая нётерова решетка с O полна.

(б) Пусть L — нётерова решетка. Покажите, что каждое непустое подмножество решетки L имеет точную верхнюю грань.

2. Пусть P — у-множество, в котором (i) каждая цепь конечна и (ii) каждая антицепь конечна. Покажите, что P конечно.

3. Покажите, что любой $\vee$-гомоморфный образ нётеровой решетки также является нётеровой решеткой.

4. Покажите, что если P и Q — у-множества, то каждое из у-множеств $P + Q$ и PQ будет нётеровым тогда и только тогда, когда оба P и Q нётеровы.

5. Покажите, что каждая нётерова булева решетка конечна.

6. (а) Покажите, что любое конечное у-множество удовлетворяет обоим условиям обрыва цепей.

(б) Покажите, что у-множество P удовлетворяет обоим условиям обрыва цепей, если у-множество $\widehat{P}$ [2]) нётерово.

7. Покажите, что два условия: (i) у-множество P удовлетворяет УУЦ и (ii) P не содержит бесконечных антицепей — вместе равносильны условию (iii) любое бесконечное подмножество множества P содержит бесконечную возрастающую цепь (Капланский).

8. Покажите, что если решетка всех конгруэнций алгебры A удовлетворяет УВЦ и УУЦ, то любое представление алгебры A в виде прямого произведения может быть «уплотнено» до представления алгебры A в виде прямого произведения неразложимых сомножителей.

9. В модулярной решетке L пусть $x \equiv y\ (\theta)$ означает, что существует конечная связная цепь, соединяющая $x \wedge y$ и $x \vee y$. Покажите, что тем самым определена конгруэнция на L и что два элемента конгруэнтны относительно нее тогда и только тогда, когда они находятся в одной и той же связной компоненте диаграммы решетки L [3]).

---

[1]) По поводу обобщений на случай полумодулярных нётеровых решеток см. работу Дилуорса ([**Symp**, p. 40]).

[2]) $\widehat{P}$ обозначает множество всех полуидеалов (M-замкнутых подмножеств) у-множества P. — *Прим. перев.*

[3]) Об алгебраических приложениях упр. 9 см. у Оре [1, р. 421—424]. [Хотя понятие диаграммы вводилось для конечных у-множеств (§ 1.3), подобными рисунками выражают интуитивное представление и об упорядоченностях бесконечных совокупностей, и здесь чаще всего получаются несвязные «диаграммы». — *Прим. перев.*]

•10. Пусть M — модулярная решетка с максимальными элементами [1] m_α, причем $\bigwedge m_\alpha = O$. Докажите, что если решетка M удовлетворяет УУЦ, то она имеет конечную длину.

2. Нётеровы дистрибутивные решетки

Любая нётерова дистрибутивная решетка L определяется нётеровым у-множеством $P(L)$ своих $\bigwedge$-неразложимых элементов. Это обобщает взаимно однозначное соответствие $L \leftrightarrow 2^P$, установленное в § III.3 между дистрибутивными решетками L длины n и n-элементными у-множествами P.

Определение. Если P — у-множество, то *ограниченной степенью* $2^{(P)}$ называется упорядоченное теоретико-множественным включением семейство всех полуидеалов (M-замкнутых подмножеств) у-множества P, которые имеют *конечное* множество максимальных элементов (эти полуидеалы называются «коронами»).

Понятно, что $2^{(P)}$ изоморфно у-множеству конечных антицепей C у-множества P, где $C \leqslant \tilde{C}$ означает, что для любого $x \in C$ существует $\tilde{x} \in \tilde{C}$ такой, что $x \leqslant \tilde{x}$. Теперь мы докажем один нетривиальный результат.

Теорема 2. *Если у-множество P удовлетворяет УУЦ, то это условие выполняется и в* $2^{(P)}$.

Доказательство. Пусть $C_1 \geqslant C_2 \geqslant C_3 \geqslant \ldots$ — какая-нибудь убывающая цепь антицепей в P. Каждый элемент $x_j^i \in C_i$ либо в конечном счете будет заменен некоторым $x_{j'}^{i'} < x_j^i$, либо этого не произойдет. (В последней ситуации будет $x_j^i \in C_l$ для всех $l \geqslant i$ или x_j^i просто исчезнет на каком-то шаге.) В первом случае определим $\nu(i, j)$ как *наименьшее* i' такое, что некоторый $x_{j'}^{i'} < x_j^i$, а во втором — пусть $\nu(i, j) = 0$. Положим теперь $i(0) = 1$, $i(n+1) = \sup\limits_j \nu(i(n), j)$ и $\Gamma_n = C_{i(n)}$. Тогда $\Gamma_0 > \Gamma_1 > \Gamma_2 > \ldots$. Далее, пусть $\lambda(m, j)$ обозначает наибольшее λ такое, что

$$y_j^m > y_{f(1,j)}^{m+1} > \ldots > y_{f(\lambda,j)}^{m+\lambda}, \text{ где } y_{f(k,j)}^{m+k} \in \Gamma_{m+k}.$$

Для «терминальных» элементов (упомянутая в предыдущем абзаце ситуация) будет $\lambda(m, j) = 0$. Для остальных же, очевидно,

$$(1)\quad \lambda(m, j) = \sup_k \lambda(m+1, k) \text{ по всем таким } k, \text{ что } y_j^m > y_k^{m+1},$$

и это число *конечно*, если конечно $\lambda(m+1, k)$ для всех $y_k^{m+1} < y_j^m$. Теперь покажем, что имеет место следующая

---

[1] Максимальные элементы (дуальные атомы) решетки — это элементы, покрываемые ее наибольшим элементом I. — *Прим. перев.*

Лемма 1. *Если у-множество P удовлетворяет УУЦ, то все $\lambda(m, j) < +\infty$.*

Доказательство. Если бы $\lambda(m, j) = +\infty$, то поскольку Γ_{m+1} конечно, было бы $\lambda(m+1, k) = \infty$ для некоторого $y_k^{m+1} < y_j^m$. Поэтому мы смогли бы построить бесконечную убывающую цепь $y_j^m > y_k^{m+1} > y_l^{m+2} > \ldots$, что противоречит условию.

Пусть теперь $\lambda = \max \lambda(0, j)$. При этом Γ_λ состоит только из «терминальных» элементов; допустим, что их имеется s штук. Тогда если $\Gamma_\lambda \equiv C_{i(\lambda)} > C_{r(1)} > \ldots > C_{r(q)}$, то обязательно $q < s$. Это и доказывает теорему 2.

Теперь установим замечательный факт: каждая дистрибутивная решетка, которая удовлетворяет УУЦ, может быть получена применением описанной конструкции. Но сначала вспомним один результат из § III.3.

Лемма 2. *Если в дистрибутивной решетке элемент p $\bigvee$-неразложим и $p \leqslant \bigvee_{i=1}^{r} x_i$, то $p \leqslant x_i$ при некотором $i = 1, \ldots, k$.*

Теперь мы усилим следствие из этой леммы, упомянутое в § III.3.

Лемма 3. *В дистрибутивной решетке L каждый элемент не более чем одним способом представим в виде конечного несократимого объединения $\bigvee$-неразложимых элементов (или двойственно).*

Доказательство. Рассмотрим для элемента $a \in L$ два такие представления:

$$a = x_1 \vee \ldots \vee x_r = y_1 \vee \ldots \vee y_s. \tag{2}$$

По лемме 2 для каждого x_i найдется $y_j \geqslant x_i$ и аналогично некоторый $x_k \geqslant y_j$. В силу несократимости представлений элементы x_i и y_j должны быть попарно равны.

Теорема 3. *Пусть L — дистрибутивная решетка, удовлетворяющая УУЦ, и P — у-множество всех ее $\bigvee$-неразложимых элементов. Тогда $L = 2^{(P)}$.*

Доказательство. Согласно следствию из § 1 каждый элемент $a \in L$ имеет по крайней мере одно представление вида (2), и значит, по лемме 3, точно одно. Поэтому существует взаимно однозначное соответствие между «коронами» у-множества P и элементами решетки L: $(x_1, \ldots, x_r) \leftrightarrow x_1 \vee \ldots \vee x_r$. Остается доказать, что $x_1 \vee \ldots \vee x_r \leqslant y_1 \vee \ldots \vee y_s$ для двух таких объединений тогда и только тогда, когда каждый x_i содержится в некотором y_j, но это следует из леммы 2, чем и завершается доказательство.

Двойственный для теоремы 2 результат дает

Следствие. *Каждый элемент нётеровой дистрибутивной решетки может быть единственным образом представлен в виде несократимого конечного пересечения $\bigwedge$-неразложимых элементов.*

3. Конечно порожденные подалгебры

В 20-е годы было показано, что теорема Гильберта о конечном базисе для идеалов в кольцах многочленов эквивалентна различным важным обобщениям принципа конечной индукции [1]. Для произвольных алгебр она равносильна условию, что каждая подалгебра является конечно порожденной (т. е. имеет конечное множество порождающих).

Теорема 4. *Решетка подалгебр $L(A)$ алгебры A является нётеровой тогда и только тогда, когда каждая подалгебра S алгебры A конечно порождена.*

Доказательство. Если решетка $L(A)$ нётерова, то определим в A рекурсивно подалгебры S_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, полагая $S_0 = \varnothing$ и присоединяя к S_{k-1} некоторый элемент из подалгебры S, не принадлежащий S_{k-1}. Это возможно, если $S_{k-1} \neq S$. Теперь рассмотрим цепь σ: $S_0 < S_1 < S_2 < \ldots$. Согласно УВЦ она конечна, следовательно, $S = S_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$, так что S конечно порождена.

С другой стороны, если решетка $L(A)$ не нётерова, то в A найдется бесконечная последовательность подалгебр $S_1 < S_2 < < S_3 < \ldots$. Поскольку операции алгебры A конечноместны, $S = \bigcup S_k$ будет подалгеброй. Если подалгебра S является конечно порожденной, т. е. $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$, и $x_i \in S_{k(i)}$, то S_k при $k = \max k(i)$ будет содержать все x_i, откуда $S_k = S$, что невозможно. Это означает, что если $L(A)$ не нётерова, то A содержит подалгебру S, которая не является конечно порожденной. Теорема доказана.

Следствие. *Решетка L нётерова тогда и только тогда, когда каждый ее непустой идеал является главным* [2] (*т. е. тогда и только тогда, когда $\hat{L} = L$*). *Поэтому каждая нётерова решетка полна.*

Приложения. Следствие из теоремы 3 и следствие 1 из теоремы VI.11 приводят к следующему результату.

Теорема 5. *Пусть A — алгебра, конгруэнции которой образуют нётерову дистрибутивную решетку. Тогда сама A и все ее гомоморфные образы однозначно представимы в виде несократимых конечных подпрямых произведений подпрямо неразложимых сомножителей.*

Можно указать и более новые применения — в алгебраической геометрии. *Алгебраическим многообразием* V в аффинном n-пространстве над полем F называется (см. пример 8 из § V.7) множество всех точек $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, которые удовлетворяют некоторому

---

[1] См. ван дер Варден [1, § 80]. Обобщение в виде теоремы 4 получили Кребтри (Crabtree B.) и автор (Proc. 1 Canad. Math. Congress, 1945, p. 313).

[2] Это следствие не самой теоремы 4, а конструкции, примененной в ее доказательстве. — *Прим. перев.*

заданному множеству $J(V)$ полиномиальных уравнений $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$ с коэффициентами из F. Если V и W — алгебраические многообразия, определяемые r уравнениями $p_i = 0$ и s уравнениями $q_j = 0$ соответственно, то легко показать, что rs уравнений $p_i q_j = 0$ удовлетворяются точками множества $V \cup W$ и только ими, а $r + s$ уравнений $p_i = 0$, $q_j = 0$ — точками множества $V \cap W$ и только ими. Поэтому алгебраические многообразия образуют кольцо множеств (дистрибутивную решетку).

Кроме того, классическая теорема (ван дер Варден [1, § 93]) утверждает, что идеалы кольца многочленов $F[x_1, \ldots, x_n]$ удовлетворяют УВЦ, и поэтому, как следует из результатов § V.7, решетка алгебраических многообразий, «полярная» решетке идеалов, будет удовлетворять УУЦ. Значит, можно применить теорему 3: *каждое алгебраическое многообразие однозначно представимо в виде несократимой суммы конечного числа неразложимых компонент.*

Пусть, наконец, L — произвольная модулярная решетка, удовлетворяющая УУЦ. Последовательно применяя конструкцию упр. 9 § 1, мы получим последовательность гомоморфных образов $L \to L_1 \to L_2 \to \ldots$ и двойственную последовательность конгруэнций θ_k, которую впервые рассматривал Оре [1, р. 421—424]. В случае алгебраических многообразий можно показать, что *размерность* многообразия V есть наименьшее k такое, что $V \equiv 0 \pmod{\theta_k}$. Двойственно, если $J(V)$ обозначает идеал полиномиальных уравнений, которым удовлетворяют все $\boldsymbol{x} \in V$, и $F[x_1, \ldots, x_n]$ есть кольцо многочленов от x_i с коэффициентами в F, то k является *степенью трансцендентности* фактор-кольца $F[x_1, \ldots, x_n]/J(V)$.

Упражнения к §§ 2—3

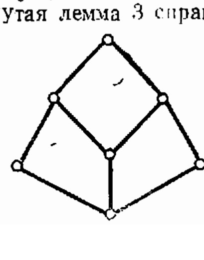
1. Покажите, что в $2^{(P)}$ каждая корона, покрывающая данную корону $C = (x_1, \ldots, x_r)$, может быть получена присоединением к C некоторого элемента y, который либо покрывает некоторый x_i, либо минимален, — с последующим исключением лишних элементов.

2. Покажите, что подгруппы бесконечной циклической группы Z удовлетворяют УВЦ, а для подгрупп «обобщенной» циклической группы рациональных чисел со сложением по mod 1 это условие не выполняется.

*3. Покажите, что у-множество P изоморфно у-множеству простых идеалов решетки $2^{(P)}$.

*4. (а) Пусть L — модулярная недистрибутивная решетка, удовлетворяющая УУЦ. Покажите, что лемма 3 из § 2 для нее не выполняется.

(б) Покажите, что упомянутая лемма 3 справедлива для немодулярной решетки с диаграммой



(в) Покажите, что если L — решетка конечной длины, то лемма 3 выполняется в ней тогда и только тогда, когда L полумодулярна и каждая ее модулярная подрешетка дистрибутивна [1]).

5. (а) Покажите, что если конгруэнции алгебры A перестановочны и удовлетворяют УВЦ, но образуемая ими решетка не дистрибутивна, то заключение теоремы 4 для A не выполняется. (Указание. См. упр. 4 (а).)

(б) Пусть A — группа с операторами, «структурная» решетка (т. е. решетка конгруэнций) которой имеет конечную длину. Покажите, что заключение теоремы 5 выполняется для A, если только A не имеет гомоморфного образа с двумя Ω-изоморфными «независимыми» Ω-подгруппами S и T (см. [**LT1**, в конце § 103]).

6. Пусть P — множество всех конечных последовательностей $\xi = (x_1, \ldots, x_m)$, $\eta = (y_1, \ldots, y_n)$, ... положительных целых чисел. Будем считать $\xi \leqslant \eta$ тогда и только тогда, когда ξ может быть получена из η конечным числом «редукций», каждая из которых либо исключает какую-нибудь компоненту y_j, либо заменяет ее меньшим числом. Докажите, что P удовлетворяет УУЦ.

7. Насколько сохранятся построения § 3, связанные с алгебраическими многообразиями, для областей целостности?

***8.** Покажите, что идеалы любого кольца главных идеалов образуют нётерову решетку.

9. (а) Покажите, что подгруппы конечно порожденной абелевой группы образуют нётерову модулярную решетку.

(б) Постройте группу с двумя порождающими, подгруппы которой не удовлетворяют УВЦ. (Указание. Каждая конечная симметрическая группа порождается двумя подходящим образом выбранными порождающими.)

***10.** Покажите, что теорема Оре (теорема VII.10) выполняется не во всех нётеровых модулярных решетках.

4. Алгебраические замыкания

Свойство замыкания Φ, связанное с операцией замыкания $S \to \bar{S}$ на подмножествах некоторого множества I, называется *алгебраическим*, если $S \in \Phi$ [2]) тогда и только тогда, когда $\overline{K} \subset S$ для любого *конечного* $K \subset S$. Равносильная формулировка: если $\bar{S} = \bigcup \overline{K_\gamma}$, т. е. если $\bar{S}$ совпадает с теоретико-множественным объединением замыканий $\overline{K_\gamma}$ *конечных* подмножеств K_γ множества S.

Среди примеров алгебраических свойств замыкания можно выделить следующие: (i) быть *подалгеброй* алгебры A с конечноместными операциями и (ii) быть *конгруэнцией* на A, причем конгруэнция θ на A рассматривается как подмножество множества $A \times A$, состоящее из всех пар (a, b) таких, что $a\theta b$. С другой стороны, топологическое замыкание на T_1-пространствах никогда не бывает алгебраическим, кроме тривиального случая дискретного пространства (см. главу IX).

Сейчас мы докажем, что (i) допускает обращение.

---

[1]) Дилуорс (Dilworth R. P. — Ann. Math., 1940, 41, p. 771—777; Trans. AMS, 1941, 49, p. 325—353). По поводу упр. 4 (а) см. [**LT2**, с. 203, упр. 2 (а)].

[2]) Здесь Φ обозначает и совокупность всех подмножеств множества I, обладающих свойством Φ. — *Прим. перев.*

Теорема 6. *Пусть Φ — алгебраическое свойство замыкания на множестве S. Тогда на S можно задать структуру алгебры, подалгебрами которой будут в точности Φ-замкнутые подмножества множества S.*

Доказательство. Чтобы построить требуемую алгебру, для каждой пары $\alpha = (F, y)$, где $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $y \in \bar{F}$, определим операцию f_α таким образом, что $f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = y$ и $f_\alpha(z_1, \ldots$ $\ldots, z_n) = z_1$, если $z \neq x$. Тогда подмножество X из S будет *подалгеброй* в том и только в том случае, если $F \subset X$ и $y \in X$ при $y \in \bar{F}$.

Теперь определим *направленное множество* как такое у-множество, в котором любая пара элементов, и следовательно, любое конечное подмножество имеет верхнюю грань.

Лемма 1. *Для любой алгебраической операции замыкания, если множество D, состоящее из замкнутых подмножеств S_δ, направлено относительно теоретико-множественного включения, то теоретико-множественное объединение $\bigcup\limits_D S_\delta$ замкнуто.*

Доказательство. Для любого конечного подмножества K элементов этого объединения найдется некоторое S_K, которое содержит их все. Но это S_K *содержится* в рассматриваемом объединении, которое, таким образом, оказывается замкнутым.

Определение. Элемент a решетки L называется *$\bigvee$-недостижимым*[1]), если для любого направленного D из $\bigvee\limits_D x_\delta = a$ следует, что $x_\delta = a$ при некотором конкретном x_δ. Элемент a называется *компактным*, если при $\bigvee\limits_J x_j \geqslant a$ будет $\bigvee\limits_F x_\varphi \geqslant a$ для некоторого конечного подмножества $F \subset J$.

Лемма 2. *В любой полной решетке каждый компактный элемент $\bigvee$-недостижим.*

Доказательство. По определению компактности, если элемент c компактен, D направлено и $\bigvee\limits_D x_\delta = c$, то $\bigvee\limits_F x_\varphi \geqslant c$ для некоторого конечного подмножества F из D. Но тогда, если α — какая-нибудь верхняя грань множества F в D (такая верхняя грань существует, поскольку D направлено), то

$$c \geqslant \bigvee_D x_\delta \geqslant x_\alpha \geqslant \bigvee_F x_\varphi \geqslant c.$$

Следовательно, $x_\alpha = c$, т. е. элемент c $\bigvee$-недостижим.

Обратное утверждение справедливо в следующем очень важном случае.

Теорема 7. *Пусть L — решетка всех подмножеств множества I, замкнутых относительно некоторого алгебраического*

---

[1]) Понятие $\bigvee$-недостижимости принадлежит Биркгофу и Фринку [1], компактность ввел Нахбин (N a c h b i n L. — Fund. Math., 1949, 36, p. 137—142). Отметим аналогию со свойством покрытия Гейне—Бореля для компактных множеств.

свойства замыкания Φ. *Тогда для элемента* $c \in L$ *следующие условия равносильны*: (i) c *компактен*; (ii) c $\bigvee$*-недостижим*; (iii) c *представляет замыкание* $C = \bar{F}$ *некоторого конечного множества* F.

Доказательство. Мы уже показали, что в любой полной решетке из (i) следует (ii). Теперь докажем от противного, что из (ii) следует (iii). В самом деле, если C не является конечно порожденным, рассмотрим замыкания $\bar{F}_\delta$ конечных подмножеств F_δ множества C. Эти $\bar{F}_\delta$ образуют направленное вверх множество, $\bigvee \bar{F}_\delta = C$ и в то же время, по предположению, C не совпадает ни с каким $\bar{F}_\delta$; значит, c не является $\bigvee$-недостижимым. Докажем, наконец, что из (iii) следует (i). Пусть множество $C = \bar{F}$ конечно порождено и $\bigvee_K \bar{S}_k \supset C$. Образуем $U_\Delta = \bigvee_\Delta \bar{S}_k$ для каждого конечного подмножества $\Delta \subset K$. Понятно, что $C \subset \bigvee_K \bar{S}_k = \bigcup U_\Delta$. Но тогда каждый элемент $x \in F$ входит в некоторое множество U_Δ. Объединение конечного числа таких множеств U_Δ снова является множеством вида U_Δ; оно содержит F и, следовательно, $\bar{F} = C$. Это доказывает компактность элемента c, и значит, из (iii) следует (i). Ч. т. д.

5. Полные алгебраические решетки

Назовем решетку L «компактно порожденной» или *алгебраической*, если каждый элемент $a \in L$ является объединением компактных элементов решетки L. Этот раздел посвящен изучению полных алгебраических решеток.

Лемма 1. *Решетка* $L(A)$ *всех подалгебр алгебры* A *с конечноместными операциями является полной алгебраической решеткой* [1]).

Доказательство. Очевидно, что каждая подалгебра алгебры A является объединением «главных» (т. е. с одним порождающим) подалгебр, содержащихся в ней. По теореме 7 главные подалгебры алгебры A соответствуют компактным элементам решетки $L(A)$. Остается заметить, что решетка $L(A)$ полна.

Теорема 8. *Пусть* L — *полная алгебраическая решетка и* K — *множество всех ее компактных элементов. Тогда* K *является* $\bigvee$*-полурешеткой и* L *изоморфна решетке* $\hat{K}$ *всех непустых идеалов полурешетки* K.

Доказательство. Пусть c и k — компактные элементы решетки L. Если $c \vee k \leqslant \bigvee_S x_i$, то $c \leqslant \bigvee_S x_i$ и $k \leqslant \bigvee_S x_i$, откуда $c \leqslant \bigvee_F x_i$ и $k \leqslant \bigvee_G x_i$ для некоторых конечных подмножеств F

[1]) То же самое верно и для решетки конгруэнций алгебры A — это было установлено Биркгофом и Фриником [1, теорема 6].

и G из S. Поэтому $c \vee k \leqslant \bigvee_H x_i$ для конечного подмножества $H = F \cup G$ множества S, и значит, элемент $c \vee k$ компактен. Этим доказано, что K является $\vee$-полурешеткой.

Для любого $a \in K$ множество K_a всех компактных элементов $c \leqslant a$, очевидно, будет идеалом полурешетки K, и притом непустым, поскольку $O \leqslant a$; кроме того, отображение $a \to K_a$ изотонно. Обратно, для произвольного идеала J $\vee$-полурешетки K пусть $a(J) = \bigvee_J k_j$ в L. Тогда $a(K_a) = a$, так как L — алгебраическая решетка, $J \subset K_a$ очевидным образом, а отображение $J \to a(J)$ изотонно. Далее, если элемент $c \leqslant a(J)$ компактен, то по определению компактности $c \leqslant \bigvee_F k_j$ для некоторого конечного подмножества F из J. Но поскольку J — идеал, отсюда следует, что $c \in J$, и значит, $K_{a(J)} = J$. В заключение заметим, что изотонные отображения $a \to K_a$ и $J \to a(J)$ являются взаимно обратными и потому оба будут изоморфизмами.

Теорема 8 вместе с леммой 1 дают следующий важный результат.

Т е о р е м а 8'. *Решетка L изоморфна решетке всех подалгебр подходящей алгебры с конечноместными операциями тогда и только тогда, когда она является полной алгебраической решеткой.*

О п р е д е л е н и е. Говорят, что полная решетка L *$\wedge$-непрерывна*, если для любого направленного множества $D \subset L$

$$a \wedge \bigvee_D x_\delta = \bigvee_D (a \wedge x_\delta). \tag{3}$$

Согласно этому определению, любая полная брауэрова решетка $\wedge$-непрерывна. Теперь докажем более сильный результат.

Л е м м а 2. *Всякая полная алгебраическая решетка L $\wedge$-непрерывна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку неравенство $a \wedge \bigvee_D x_\delta \geqslant \bigvee_D (a \wedge x_\delta)$ выполняется всегда, достаточно показать, что $a \wedge \bigvee_D x_\delta \leqslant \bigvee_D (a \wedge x_\delta)$. Так как решетка L компактно порождена, то $a \wedge \bigvee_D x_\delta = \bigvee_S c_\sigma$, где каждый элемент c_σ компактен. Значит, чтобы доказать нужное нам неравенство, достаточно убедиться в его справедливости для любого *компактного* элемента $c = c_\sigma$, содержащегося в $a \wedge \bigvee_D x_\delta$, т. е. убедиться в том, что $\bigvee_D (a \wedge x_\delta) \geqslant c$. Но по определению компактности, если $c \leqslant a \wedge \bigvee_D x_\delta \leqslant \bigvee_D x_\delta$, то $c \leqslant \bigvee_F x_\varphi$ для какого-то *конечного* подмножества F множества D. А так как D направлено, то это означает, что $c \leqslant x_\varphi$ для некоторого элемента $x_\varphi \in D$, откуда $c \leqslant \leqslant a \wedge x_\varphi$, ввиду неравенства $c \leqslant a \wedge \bigvee_D x_\delta \leqslant a$. Тогда $c \leqslant \leqslant \bigvee_D (a \wedge x_\delta)$, поскольку $x_\varphi \in D$. Этим и завершается доказательство леммы 2.

Лемма 3 (Уотермен). *В полной $\wedge$-непрерывной решетке L элемент компактен тогда и только тогда, когда он $\vee$-недостижим.*

Доказательство. Если D направлено и $c \leqslant \bigvee_D x_\delta$, то вследствие (3)

$$c = c \wedge \bigvee_D x_\delta = \bigvee_D (c \wedge x_\delta).$$

Так что если элемент c $\vee$-недостижим, то существует элемент $x_0 \in D$ такой, что $c = c \wedge x_0$, т. е. $c \leqslant x_0$, и значит, c компактен. Обратно, если $c = \bigvee_D x_\delta$, где D — направленное множество, то $c \leqslant \bigvee_D x_\delta$, и если c компактен, то должен найтись элемент $x_0 \in D$ такой, что $c \leqslant x_0$. Поскольку $x_0 \in D$, то $x_0 \leqslant \bigvee_D x_\delta = c$ и, следовательно, $c = x_0$; значит, элемент c будет $\vee$-недостижимым.

Леммы 2—3 показывают, что теорема 8 равносильна следующему результату.

Теорема 9. *Решетка L изоморфна решетке подалгебр некоторой алгебры тогда и только тогда, когда L полна, $\wedge$-непрерывна и каждый элемент решетки L является объединением $\vee$-недостижимых элементов.*

Доказательство. Согласно леммам 2—3 любая полная алгебраическая решетка обладает перечисленными свойствами. А по лемме 3 любая решетка, обладающая этими свойствами, является полной и алгебраической.

Историческая справка. Теорема 9 была основным результатом работы Биркгофа и Фринка [1, теорема 2]. Несколько позже Нахбин [1]) ввел понятие «компактного» элемента и доказал бóльшую часть теоремы 8. Термин «компактно порожденная решетка» впервые появился у Дилуорса и Кроули [1] для частного случая атомно порожденной полумодулярной решетки. Равносильность этого понятия и условий теоремы 9 установлена Уотерменом и автором. Приведенная формулировка теоремы 8 принадлежит Бейкеру и автору.

---

[1]) Nachbin L. — Fund. Math., 1949, 36, p. 137—142, теорема 1. Связанные с этим результаты см. у Кроули (Crawley P. — Proc. AMS, 1962, 13, p. 748—752). Дополнения к результатам Биркгофа и Фринка имеются в работе Балачандрана (Balachandran K. — Proc. AMS, 1955, 9, p. 548—553) и Динера (Diener K. H. — Arch. Math., 1956, 7, p. 339—345).

Намного сложнее, чем теоремы 8—8′—9 доказывается следующий очень важный аналогичный результат.

Теорема Гретцера и Шмидта. *Решетка L изоморфна решетке $\Theta(A)$ всех конгруэнций алгебры A с конечноместными операциями тогда и только тогда, когда она является полной и алгебраической* [1]).

Упражнения к §§ 4—5

1. (а) Покажите, что идеальное пополнение $\hat{L}$ произвольной решетки L является алгебраической решеткой.

(б) Покажите, что каждая решетка изоморфна подрешетке некоторой полной решетки.

2. (а) Выведите из основных аксиом, что если в решетке подалгебр $L(A)$ алгебры A (с конечноместными операциями) $S_\alpha \uparrow S$ (как направленное множество), то $S_\alpha \sqcap T \uparrow S \sqcap T$ [2]).

(б) Покажите, что полная решетка $\bigwedge$-непрерывна, если в ней условие (3) выполняется для всех цепей D (Фринк).

3. Докажите, что свойство замыкания на подмножествах произвольного множества I является алгебраическим тогда и только тогда, когда теоретико-множественное объединение любого направленного (вверх) семейства замкнуто.

4. (а) Покажите, что в решетке подалгебр произвольной алгебры A подалгебра S $\bigvee$-недостижима тогда и только тогда, когда она конечно порождена.

(б) Покажите, что полная алгебраическая решетка изоморфна решетке подалгебр унарной алгебры тогда и только тогда, когда эта решетка вполне дистрибутивна.

5. Докажите, что идеал J решетки L является главным тогда и только тогда, когда он $\bigvee$-недостижим в решетке всех идеалов решетки L.

6. Покажите, что каждая полная решетка изоморфна решетке всех подалгебр некоторой алгебры с *бесконечноместными* операциями [3]).

7. Пусть $\Theta(A)$ обозначает решетку всех конгруэнций алгебры A (с конечноместными операциями).

(а) Покажите, что $\Theta(A)$ — полная алгебраическая решетка.

(б) Представьте $\Theta(A)$ как решетку подалгебр.

*8. Пусть L — полная алгебраическая решетка и $[a \wedge b, b] \cong [a, a \vee b]$ для всех $a, b \in L$. Покажите, что L модулярна (Кроули).

*9. Покажите, что любая полная алгебраическая решетка является брауэровой.

10. Пусть $\Theta(A)$ — решетка всех конгруэнций алгебры A с конечноместными операциями. Покажите, что если алгебра B получается из A введением дополнительных конечноместных операций, то $\Theta(B)$ будет замкнутой подрешеткой решетки $\Theta(A)$.

*11. Докажите, что если решетка подалгебр некоторой алгебры с конечноместными операциями булева, то она изоморфна булевой алгебре всех подмножеств подходящего множества (см. § V.5).

*12. Покажите, что для любого заданного у-множества P существует решетка с начальными дополнениями L, решетка конгруэнций $\Theta(L)$ которой изоморфна решетке 2^P (Гретцер и Шмидт [4])).

---

[1]) Grätzer G., Schmidt E. T. — Acta Sci. Math., 1963, **24**, p. 34—59; Schmidt E. T. — Acta Sci. Math., p. 251—254. Одно важное обобщение содержится в работе Шмидта в Acta Math. Acad. Sci. Hung., 1964, **15**, p. 37—45.

[2]) См. § X.9. — *Прим. перев.*

[3]) См упр. 7 к § VI.2. — *Прим. перев.*

[4]) Grätzer G., Schmidt E. T. — Acta Math. Acad. Sci. Hung., 1962, **13**, p. 179—185.

6. Регулярные кольца

Класс «регулярных колец» был изобретен фон Нейманом для «координатизации» модулярных решеток с дополнениями, имеющих неограниченную длину. Теория регулярных колец хорошо иллюстрирует некоторые из рассмотренных нами идей, и сейчас мы представим краткий ее эскиз.

Определение. *Регулярным кольцом* называется ассоциативное кольцо R с единицей 1, в котором каждый элемент a имеет псевдообратный элемент x, такой, что $axa = a$.

Из этого определения следует, что элементы ax и xa являются идемпотентами, при этом ни один из них не равен 0, если только a не равняется 0. Поэтому радикал любого регулярного кольца есть 0, и кроме того, каждый главный левый или правый идеал идемпотентен. Теперь рассмотрим решетки левых идеалов, правых идеалов и двусторонних идеалов произвольного регулярного кольца R, принимая без доказательства следующий результат [**Neu**, теорема 2.3].

Теорема о главных идеалах. *Объединение любых двух главных правых (левых) идеалов регулярного кольца R является главным правым (левым) идеалом.*

Другими словами, в регулярном кольце R любые два элемента a, b имеют «наибольший общий левый делитель» $d = ar + bs$ (где $r, s \in R$) такой, что (i) $a = dx$, $b = dy$ и (ii) если $a = cx'$, $b = cy'$ для некоторых $x', y' \in R$, то необходимо $c = dz$ для некоторого $z \in R$. Аналогично, любые $a, b \in R$ имеют наибольший общий правый делитель в R.

Очевидной индукцией получается

Следствие. *Правый (левый) идеал регулярного кольца конечно порожден тогда и только тогда, когда он является главным.*

Применяя теорему 7, выводим следующий основной результат.

Теорема 10. *В решетке всех правых (левых) идеалов любого регулярного кольца элемент компактен ($\vee$-недостижим) тогда и только тогда, когда он соответствует главному идеалу.*

С другой стороны, для любого элемента $a \in R$ главный правый идеал $aR = axaR \subset axR \subset R$; отсюда $aR = eR$, где $e = ax$ является *идемпотентом*, поскольку $ee = axax = ax = e$. Кроме того, для любого идемпотента e будет $b \in eR$ тогда и только тогда, когда $eb = eex = ex = b$, и аналогично, $b \in (1 - e) R$ тогда и только тогда, когда $eb = e(1 - e) x = 0x = 0$, откуда $eR \cap (1 - e) R = 0$. Далее, $b = eb + (1 - e) b$ для любого $b \in R$, так что $eR + (1 - e) R = R$. Мы приходим к выводу, что каждый главный правый идеал eR имеет *дополнение* $(1 - e) R$ в решетке всех правых идеалов регулярного кольца R. Понятно, что то же самое справедливо и для левых идеалов.

Теперь рассмотрим *полярность* (§ V.7), связанную с соотношением $xy = 0$. Для любого множества X множество X^* всех $y \in R$

таких, что $xy = 0$ при любом $x \in X$, является правым идеалом, поскольку если $xy = 0$, то $xyR = 0$. Аналогично для любого множества Y множество Y^+ всех $x \in R$ таких, что $xy = 0$ при любом $y \in Y$, является левым идеалом. Поэтому указанная полярность устанавливает дуальный изоморфизм между некоторыми левыми и некоторыми правыми идеалами.

Далее, для любого идемпотента e, как было показано выше,

$$(1 - e) R = e^* \quad \text{и} \quad e^+ = R (1 - e). \tag{4}$$

Следовательно, поскольку $e^* = (Re)^*$, то обсуждаемая полярность переводит *главные* левые идеалы Re в главные правые идеалы $(1 - e) R$. Так как, согласно (11) из главы V,

$$(J + K)^* = J^* \cap K^* \text{ и } (J + K)^+ = J^+ \cap K^+, \tag{5}$$

мы заключаем, что множество главных правых (и множество главных левых) идеалов замкнуто не только относительно объединения (по теореме о главных идеалах), но и относительно пересечения: оно образует подрешетку решетки всех правых (левых) идеалов. Это означает, что в регулярном кольце любые два элемента имеют наименьшее общее левое кратное и наименьшее общее правое кратное. Имея в виду теорему 10, мы получаем следующий результат.

Теорема 11. *В решетках, упоминаемых в теореме* 10, *компактные элементы образуют подрешетки, которые дуально изоморфны между собой относительно полярности, определяемой соотношением* $xy = 0$.

Теперь вспомним, что правые и левые идеалы любого кольца образуют модулярные решетки. Кроме того, для идемпотентов e, f кольца R будет $eR \subset fR$ тогда и только тогда, когда $e = fx$ для некоторого $x \in R$ (т. е. когда f делит e слева).

Поэтому имеет место

Теорема 12. *Идемпотенты регулярного кольца образуют дуально изоморфные модулярные решетки с дополнениями, упорядоченные отношениями левой и правой делимости, и при этом в обеих решетках* $1 - e$ *является дополнением для* e.

(Предостережение. Если $eR = fR$, то не обязательно $e = f$: в теореме 12 имеются в виду упорядоченные множества, определяемые квазипорядками, соответствующими левой и правой делимостям.)

В частном случае, когда вышеупомянутые решетки имеют *конечную длину*, можно сказать значительно больше. В этой ситуации каждый из элементов, о которых говорится в теореме 10, (очевидным образом) компактен, поэтому каждый левый или правый идеал является главным. Но тогда *центр* $Z(R)$ кольца R будет прямой суммой подполей F_k. Единицы 1_k этих подполей (являющиеся, конечно, идемпотентами) образуют центр в *обеих* модулярных решетках с дополнениями, о которых говорится в теореме 11. Указанные подполя порождают двусторонние идеалы кольца R, которое, таким образом, оказывается прямой суммой $R = \bigoplus R_k$ этих идеалов. Каждое кольцо R_k является *простым* и (по хорошо известному результату Веддербарна) изоморфно полной матричной алгебре $M_n(D_k)$ всех $n \times n$-матриц с элементами из некоторого тела D_k, имеющего центром F_k.

Мы уже видели (глава IV, §§ 7, 13, 14), что каждая дезаргова модулярная решетка с дополнениями, имеющая конечную длину, изоморфна одной из только что описанных решеток. Важной проблемой теории решеток является описание (дезарговых) модулярных решеток с дополнениями, которые имели бы неограниченную длину и находились бы в подобном вышеописанному отношении с некоторым (не ограниченным иными условиями) регулярным кольцом. Выдающимся достижением фон Неймана [**Neu**, теорема 14.4 [1])] являются обнаруженные им достаточные условия: решетка должна иметь «базис», состоящий из не менее чем четырех попарно перспективных элементов, которые независимы и в объединении дают I.

Упражнения (см. также упражнения к § IV. 15)

1. Покажите, что конечномерные подпространства гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ образуют модулярную решетку с относительными дополнениями, которая удовлетворяет УУЦ. Покажите, что эти подпространства являются компактными элементами (орто)решетки $L(\mathfrak{H})$ всех подпространств пространства $\mathfrak{H}$.

2. Рассмотрите $\mathfrak{H}$ с точки зрения полярности, определяемой отношением $x \perp y$.

3. Сформулируйте и докажите аналоги упр. 1—2 для решетки $L_c(\mathfrak{H})$ всех замкнутых подпространств пространства $\mathfrak{H}$.

Определим *бэровскую* полугруппу как мультипликативную полугруппу с 0, в которой правый (соответственно левый) аннулятор каждого элемента является главным правым (соответственно левым) идеалом, порожденным некоторым идемпотентом [2]).

*4. Покажите, что у-множества правых и левых аннуляторов элементов любой бэровской полугруппы являются решетками.

*5. Покажите, что если каждый правый аннулятор eS содержит идемпотент e_0 такой, что $eS = e_0S$, и Se_0 при этом является левым аннулятором, то решетки, получающиеся в упр. 4, дуально изоморфны.

7. Цорновское свойство. Аксиома Хаусдорфа

Промежуточным между понятием алгебраического замыкания и непосредственными проявлениями аксиомы выбора (которую до сих пор мы старались не использовать) является следующее цорновское свойство.

Определение. Говорят, что семейство Φ подмножеств множества I обладает *цорновским свойством*, если теоретико-

---

[1]) Л. А. Скорняков [II, 1, теорема 10]. — *Прим. перев.*

[2]) Это определение принадлежит Яновицу (Janowitz M. F. — Duke Math. J., 1963, 32, p. 85—96); из его работы и взяты упр. 4—5. (См. также книгу Блиса и Яновица [1]. — *Прим. ред.*).

множественное объединение $\bigcup_C S_\alpha$ любой цепи C множеств $S_\alpha \in \Phi$ снова принадлежит Φ.

Цорновское свойство тривиально выполняется, если Φ удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей, поскольку цепь C в этом случае имеет наибольший элемент S_μ и тогда автоматически $S_\mu = \bigcup_C S_\alpha$.

З а м е ч а н и е. Очевидно, что любое пересечение $\bigcup \Phi_\tau$ семейств подмножеств множества I, имеющих цорновское свойство, само им обладает. Таким образом, цорновское свойство является свойством *замыкания* в смысле § V.1. Бóльшая часть приложений понятия цорновского свойства опирается на следующий связанный с ним результат.

Т е о р е м а 13. *Семейство всех подмножеств множества I, имеющих некоторое заданное свойство алгебраического замыкания, обладает цорновским свойством* [1]).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть C — какая-нибудь цепь множеств S_α, имеющих данное алгебраическое свойство замыкания, $U = \bigcup_C S_\alpha$ и K — некоторое конечное подмножество множества U с элементами $x_1, \ldots, x_n$. Тогда каждый $x_i \in S_{\alpha(i)}$ для некоторого $S_{\alpha(i)} \in C$. Пусть S_μ будет наибольшим из этих $S_{\alpha(i)}$, $i = 1, \ldots, n$. Ясно, что $K \leqslant S_\mu$, откуда $\overline{K} \leqslant \overline{S}_\mu = S_\mu \leqslant U$. Значит, $U \in \Phi$, поскольку наше свойство замыкания является алгебраическим. Ч. т. д.

С л е д с т в и е 1. *Подалгебры любой алгебры A обладают цорновским свойством, так же как и конгруэнции на A, рассматриваемые как подалгебры алгебры $A \times A$.*

С л е д с т в и е 2. *Для любых подмножества X и подалгебры T произвольной алгебры A семейство подалгебр S алгебры A таких, что $S \cap X \subset T$, обладает цорновским свойством.*

Особый интерес представляет случай, когда $X = 1$ и $T = \varnothing$ (пустое множество) в кольце R с единицей. Тогда идеалы S кольца R такие, что $S \wedge 1 = \varnothing$, будут идеалами $S \prec R$.

С л е д с т в и е 3. *Если $a \neq b$ — элементы алгебры A, то семейство конгруэнций θ таких, что $a \not\equiv b\ (\theta)$ обладает цорновским свойством.*

Цорновское свойство имеет много других приложений. Например, его можно использовать для перенесения трансфинитной индукцией теоремы Жордана—Гёльдера на вполне упорядоченные *возрастающие* ряды нормальных подгрупп [2]). Более сложно

---

[1]) Верно и обратное (Кон [1, теорема 1.2, с. 59]).

[2]) См. работы Биркгофа (B i r k h o f f G. — Bull. AMS, 1934, 40, p. 847—850) и А. Г. Куроша (Math. Ann., 1935, 111, p. 13—18). Первоначальная формулировка Цорна содержится в его работе Z o r n M. — Bull. AMS, 1935, 41, p. 667—670.]

выглядят обобщения теоремы Оре, полученные Курошем, Бэром и др.[1]).

Затронутые идеи можно по-разному обобщить на случай произвольных у-множеств [2]).

Пусть, например, B — *полная решетка*. Будем говорить, что подмножество P из B обладает свойством Z, если $\bigvee_C c_\alpha \in P$ для всякой цепи $C \subset P$. Очевидно, что когда B является полной булевой алгеброй всех подмножеств множества I, упорядоченной теоретико-множественным включением, свойство Z превращается в цорновское свойство.

Лемма. *Если у-множество P обладает свойством Z, то каждая цепь в P имеет в P верхнюю грань.*

У-множества с указанным свойством для цепей называются *индуктивными*. Это свойство имеет много применений, если принять следующий вариант аксиомы выбора.

Принцип максимальности Хаусдорфа. Каждая цепь C произвольного упорядоченного множества P может быть расширена до некоторой *максимальной* цепи M в P.

Используя это допущение, нетрудно доказать следующий (тривиальный для нётеровых у-множеств P) результат.

Теорема 14. *Если у-множество P индуктивно, то P имеет максимальные элементы.*

Доказательство. Если M — *какая-нибудь* максимальная цепь в P и $m = \bigvee_M x_\alpha$, то $\{m\} \cup M$ является максимальной цепью с наибольшим элементом m, который, таким образом, будет максимальным в P.

Следствие 1. *Если у-множество P обладает свойством Z, то P имеет максимальные элементы.*

Этот результат, в сочетании со следствиями 1 и 2 из теоремы 13, соответственно, приводит к двум важным заключениям.

Следствие 2. *Если X и Y — подмножества алгебры A, то в A существует подалгебра, максимальная среди подалгебр M, обладающих свойством $M \cap X \leqslant Y$ (т. е. $M \leqslant Y \cup X'$).*

Пусть, например, R — кольцо с единицей 1 и J — какой-нибудь собственный идеал в R. Тогда существует *максимальный* идеал $M \geqslant J$ кольца R такой, что $M \cap 1 = \varnothing$ (т. е. $1 \notin M$): любой собственный идеал кольца R может быть расширен до максимального собственного идеала.

Следствие 3. *Если $a \neq b$ — элементы алгебры A, то существует максимальная среди конгруэнций θ таких, что $a \not\equiv b\ (\theta)$.*

---

[1]) См., например, работы Бэра (Baer R. — Trans. AMS, 1947, **62**, p. 62—98; Trans. AMS, 1948, **64**, p. 519—551).

[2]) См. [LT2, § III.6], а также [Kel, с. 350—352].

8. Теорема о подпрямом разложении

Используя последнее следствие, можно доказать фундаментальную теорему о разложении для абстрактных алгебр.

Но сначала нам потребуется

Лемма. *Конгруэнция θ, построенная в следствии 3 из теоремы 14, строго неразложима, т. е. множество Θ конгруэнций $\varphi > \theta$ на алгебре A имеет наименьший элемент λ.*

Доказательство. Если $\varphi > \theta$, то $a \equiv b\ (\varphi)$. Поэтому если λ обозначает пересечение всех конгруэнций μ таких, что $a\mu b$ и $\mu > \theta$ (см. теорему VI.8), то $\varphi \geqslant \lambda > \theta$.

Эта конструкция и дает искомую конгруэнцию λ.

Следствие. *Для любых элементов $a \neq b$ алгебры A существует конгруэнция $\theta = \theta(a, b)$ такая, что алгебра A/θ подпрямо (строго) неразложима и $a \not\equiv b\ (\theta)$.*

Применяя этот результат к множеству *всех* пар $a \neq b$ различных элементов, мы получаем множество конгруэнций $\theta(a, b)$, пересечение которых, очевидно, равняется O. Ввиду следствия 1 из теоремы VI.11 мы выводим отсюда следующую основную теорему о подпрямых разложениях [1]).

Теорема 15. *Любая алгебра A разложима в подпрямое произведение подпрямо неразложимых алгебр.*

Следствие 1. *Любая дистрибутивная решетка изоморфна подпрямому произведению решеток* **2**.

Доказательство. Достаточно показать, что **2** является единственной нетривиальной подпрямо неразложимой решеткой (тривиальной мы считаем решетку **1**). Но в самом деле, если дистрибутивная решетка L отлична от **1** и **2**, она содержит элемент c, не равный ни O, ни I. Эндоморфизмы $x \to x \wedge c$ и $x \to x \vee c$ определяют собственные конгруэнции θ и θ', причем $\theta \wedge \theta' = O$ (по теореме I.10). Следовательно, L подпрямо разложима.

Следствие 2. *Любая дистрибутивная решетка изоморфна кольцу множеств.*

В самом деле, L можно рассматривать как подрешетку решетки $\mathbf{2}^I$ для подходящего множества конгруэнций I на L, сопоставляя каждому $c \in L$ подмножество $S(c)$ множества I, которое состоит из таких отображений [2]) φ, что $\varphi(c)$ является наибольшим элементом решетки **2**. Нетрудно проверить, что $c \to S(c)$ будет изоморфизмом.

В частности, если L обладает дополнениями (т. е. является булевой решеткой), то дополнениями будет обладать и построенное кольцо множеств. Тем самым доказано

---

[1]) Биркгоф (Birkhoff G. — Bull. AMS, 1944, 50, p. 764—768).

[2]) Точнее, из конгруэнций, соответствующих гомоморфизмам φ. — *Прим. перев.*

Следствие 3. *Любая булева решетка изоморфна полю множеств.*

Отсюда следует, что любая из описанных в главе II систем аксиом для булевой алгебры будет полной системой аксиом для алгебры классов по отношению к конечному объединению, конечному пересечению и взятию дополнения.

Следствие 4. *Любое булево кольцо изоморфно подпрямому произведению булевых колец* $\mathbf{Z}_2$.

Доказательство. Любое булево кольцо криптоизоморфно обобщенной булевой алгебре (§ II.12).

Можно доказать, используя при этом лишь теорему 15, что, аналогично, любое векторное пространство V над телом R изоморфно подпрямому произведению копий тела R. На самом деле V изоморфно ограниченному *прямому* произведению копий тела R — мы поясним это в следующем разделе.

Рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 15, можно применить, как мы сейчас покажем, к произвольным полным алгебраическим решеткам.

Определение. Элемент a решетки называется *строго* $\wedge$*-неразложимым*, если множество всех $x > a$ имеет наименьший элемент.

Теорема 16. *В любой полной алгебраической решетке L каждый элемент является пересечением строго $\wedge$-неразложимых элементов.*

Доказательство. Пусть a и $b \nleqslant a$ — элементы решетки L. Тогда, поскольку решетка L алгебраическая, существует *компактный* элемент $c \in L$, содержащийся в b и не содержащийся в a. Пусть K обозначает множество всех $k \in L$, которые содержат a и не содержат c. Тогда $a \in K$ и объединение любого направленного подмножества из K снова принадлежит K, поскольку элемент c компактен. Значит, K содержит *максимальный* элемент m. По определению, *любой* элемент $x > m$ должен содержать c, следовательно, $m \vee c$ будет *наименьшим* элементом решетки L, который собственным образом содержит c, а тогда элемент *c строго неразложим.*

Пусть задан элемент $a \in L$. Рассмотрим пересечение $\bigwedge m_\alpha$ всех строго неразложимых элементов, которые содержат a. Очевидно, что $\bigwedge m_\alpha$ содержит a. Но, как показано в предыдущем параграфе, для любого $b > a$ существует строго неразложимый элемент m, который содержит a, но не содержит некоторый элемент $c \ll b$, и следовательно, не содержит b. Поэтому $\bigwedge m_\alpha = a$ (т. е. не может быть, чтобы $\bigwedge m_\alpha > a$). Ч. т. д.

Наконец, усовершенствовав конструкцию, использованную при доказательстве теоремы 15, Брунс[1]) получил следующую

[1]) Bruns G. — Duke Math. J., 1965, **32**, p. 555—556. См. также работу Гретцера (Grätzer G. — Duke Math. J., 1963, **30**, p. 469—474).

теорему о представлении для стоуновых решеток (§ V.11): *любая стоунова решетка S изоморфна подрешетке с псевдодополнениями (или «$*$-подрешетке») решетки $\hat{A}$ всех идеалов некоторой полной атомно порожденной булевой алгебры A. Именно, при любом решеточном вложении α: $S \to p(E)$, представляющем S как поле подмножеств некоторого множества E и таком, что если $a \not\leqslant b$ (где $a, b \in L$), то $(a\alpha) \cap (b\alpha)'$ бесконечно, можно взять в качестве A множество $P(E)$.*

Упражнения к §§ 7—8

1. Дайте детальное доказательство следствий 2—3 из теоремы 14.

2. Докажите, что решетка L полна, если полна каждая максимальная цепь в L (Ренни).

3. Покажите, что если соотношение (3) выполняется для любой цепи D полной решетки, то оно выполняется и для любого направленного множества ее элементов [1]).

4. (а) Покажите, что каждое упорядочение можно усилить до линейной упорядоченности. (Шпильрайн (Szpilrajn E.). — Fund. Math., 1930, **16**, p. 386—389.)

(б) Покажите, что упорядочение тогда и только тогда можно усилить до полного упорядочения, когда оно удовлетворяет УУЦ.

5. Покажите, что дистрибутивная решетка L тогда и только тогда обладает относительными дополнениями, когда не сравнимы никакие два ее различные простые идеала (Гретцер и Шмидт).

6. Покажите, что любой идеал булевой решетки L является пересечением содержащих его простых идеалов.

7. Покажите, что дистрибутивная решетка с O и I является булевой тогда и только тогда, когда каждый ее простой идеал максимален (Нахбин).

8. Покажите, что в дистрибутивной решетке $2^{(\omega)}$ всех конечных подмножеств бесконечного множества каждый простой дуальный идеал максимален.

9. Покажите, что идеал J решетки L вполне $\wedge$-неразложим тогда и только тогда, когда для некоторого подмножества $S \subset L$ идеал J является максимальным относительно условия $J \cap S = \varnothing$.

10. Покажите, что полная решетка изоморфна полному кольцу множеств (§ V.5) тогда и только тогда, когда она вполне дистрибутивна и каждый ее элемент является объединением вполне $\vee$-неразложимых элементов (Рейни и Балачандран).

11. (а) Покажите, что в произведении $2\mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ — множество действительных чисел) идеал, состоящий из всех пар $(0, x)$, $x \in \mathbf{R}$, не может быть расширен до максимальной собственной подрешетки (Такеути).

(б) Докажите, что каждая собственная подрешетка дистрибутивной решетки с относительными дополнениями может быть расширена до максимальной собственной подрешетки (Хасимото [1]).

$*$ 12. (а) Покажите, что если (e) — главный идеал булевой алгебры A, то существует подалгебра S в A, которая содержит в точности по одному представителю из каждого класса разбиения, соответствующего идеалу (e).

(б) Найдите булеву алгебру A и не главный идеал $J \subset A$, для которого такая подалгебра не существует [2]).

---

[1]) Сасаки (Sasaki U. — J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A, 1950, **14**, p. 100—101).

[2]) Упр. 12 содержит результаты фон Неймана и Стоуна (Neumann J. von, Stone M. H. — Fund. Math., 1935, **25**, p. 353—378), упр. 13 — результат Сикорского (Sikorski R. — Ann. Polon. Math., 1948, **21**, p. 332—335): полные булевы алгебры *инъективны*.

13. (а) Пусть $\varphi: S \to B$ — булев гомоморфизм подалгебры $S \subset A$ булевой алгебры A в булеву алгебру B. Покажите, что если задан элемент $x \in A$, то φ можно продолжить до гомоморфизма $\varphi^*: \{S, x\} \to B$ тогда и только тогда, когда для некоторого $y \in B$ будет $\varphi([0, x] \cap S) \subset [0, y] \cap \varphi(S)$, $\varphi([x, I] \cap S) \subset [y, I] \cap \varphi(S)$.

(б) Покажите, что если булева алгебра A полна, то такой y существует. (Указание. $\sup \varphi([0, x] \cap S) \leqslant \inf \varphi([x, I] \cap S)$.)

(в) Покажите, что если булева алгебра A полна, то любой гомоморфизм φ: $S \to B$ подалгебры $S \subset A$ в булеву алгебру B можно продолжить до гомоморфизма $\bar{\varphi}: A \to B$.

14. Пусть A — некоторая алгебра с одной бинарной операцией, удовлетворяющей тождествам $x(yx) = x$, $x(xy) = y(yx)$, $(xy)z = (xz)(yz)$. Покажите, что A изоморфна алгебре множеств с операцией вычитания [1]).

15. Покажите, что если совокупность Φ подмножеств множества I обладает цорновским свойством, то она содержит теоретико-множественное объединение любого своего направленного семейства [2]).

9. Атомно порожденные алгебраические решетки

Атомно порожденной называется решетка L, каждый элемент которой является объединением атомов (точек), которые он содержит. Из теоремы 16 немедленно получается

Теорема 17. *Решетка, двойственная полной алгебраической решетке с относительными дополнениями, является атомно порожденной.*

Мы уже знаем (теорема V.18), что полная атомно порожденная булева решетка изоморфна решетке $2^{\aleph}$, где $\aleph$ — мощность множества ее точек. В качестве следствия выводим, что (i) в любой (полной) атомно порожденной булевой решетке каждый атом компактен и что (ii) любая (полная) атомно порожденная булева решетка является алгебраической.

В общем случае полные атомно порожденные решетки не обязаны быть алгебраическими: так, $\wedge$-непрерывность (§ 5, (3)) не выполняется в (атомно порожденной) ортомодулярной решетке всех замкнутых подпространств гильбертова пространства; она не имеет места и в (атомно порожденной) модулярной решетке с дополнениями всех замкнутых подпространств гильбертова пространства, имеющих конечную размерность *или* конечную коразмерность; наконец, $\wedge$-непрерывными не будут T_1-решетки (§ IX.5).

Мы определим сейчас одно обобщение класса геометрических решеток, которое включает в себя все атомно порожденные булевы решетки.

Определение. *Атомно порожденной матроидной решеткой* называется полная алгебраическая атомно порожденная полумодулярная решетка.

---

[1]) Келман (Kalman J. A. — Indag. Math., 1960, 22, p. 402—405).

[2]) Майер-Калькшмидт и Стейнер (Mayer Kalkschmidt J., Steiner E. — Duke Math. J., 1964, 31, p. 287—289).

Основы теории атомно порожденных матроидных решеток были заложены (в другой терминологии) в работах Маеды [1], Дилуорса и Кроули [1] и Сасаки[1]). Модулярный случай еще раньше исследовал Фринк [2].

Мы отметим сначала одно простое следствие из теоремы 8.

Лемма 1. *В полной атомно порожденной алгебраической решетке L компактными элементами являются объединения конечных множеств точек.*

Доказательство. Так как решетка L атомно порожденная, каждый компактный элемент $c \in L$ является объединением атомов, причем такое (возможно бесконечное) множество атомов может быть заменено вследствие компактности элемента c некоторым конечным набором. Обратно, если $a = \bigvee_F p_\varphi$ — конечное объединение атомов, то элемент a компактен, поскольку компактен каждый атом p_φ, а компактные элементы решетки L образуют $\bigvee$-полурешетку.

Теперь привлечем предположение о полумодулярности.

Лемма 2. *Во всякой полумодулярной решетке L*

(π) *для любого $a \in L$ и любой точки $p \in L$ либо $p \leqslant a$, либо $p \vee a$ покрывает a.*

Доказательство. Во всякой решетке L пара (b, p) модулярна при любом $b \in L$ и при любой точке $p \in L$. Действительно, если $p \wedge b = O$, то для $x = O$ и p (а это единственные элементы в интервале $[p \wedge b, p]$) очевидно, что $x = (x \vee b) \wedge p$; если же $p \leqslant b$, то проверка еще более тривиальна. Предположим теперь, что $p \vee a$ не покрывает элемент a, и $a < b < p \vee a$. Тогда $a \in [O, b]$ и хотя $(a \vee p) \wedge b > a$; следовательно, пара (p, b) не модулярна, что противоречит полумодулярности решетки L.

Лемма 3. *Во всякой полумодулярной атомно порожденной решетке L множество J объединений $x = \bigvee_F p_\varphi$ конечных наборов точек образует идеал — идеал всех (компактных) элементов конечной высоты.*

Доказательство. По лемме 2 любой $x \in J$ имеет конечную высоту, и очевидно, J $\bigvee$-замкнут. Обратно, если решетка L атомно порожденная, каждый элемент $a \in L$ является объединением точек. Если высота $h[a] = r$ конечна, то, по индукции, существует r точек $p_i \leqslant a$ таких, что $\left(\bigvee_{i=1}^{k-1} p_i\right) \wedge p_k = O$ при $k = 1, \ldots, r$. Поскольку по лемме 2 $h\left[\bigvee_{i=1}^{r} p_i\right] = r$ и, конечно,

---

[1]) Sasaki U. — J. Sci. Hiroshima Univ., 1953, **A16**, p. 223—228, 409—416. См. также работу Маеды (Maeda F.) — J. Sci. Hiroshima Univ., 1963, **A27**, p. 73—84, 86—96. О пополнении сечениями атомно порожденных модулярных решеток см. у Маклафлина (McLaughlin J. E.) в [Symp, p. 78—80].

$\bigvee_{i=1}^{r} p_i \leqslant a$, то отсюда получается, что $a = \bigvee_{i=1}^{r} p_i \in J$. Следовательно, J — идеал.

Из леммы 3 и теоремы 8 немедленно вытекает

Теорема 18. *Любая атомно порожденная матроидная решетка L изоморфна решетке $\hat{J}$ всех идеалов идеала J, состоящего из всех элементов решетки L, имеющих конечную высоту (т. е. из всех конечных объединений точек).*

Таким образом, L изоморфна решетке всех «замкнутых» подмножеств множества точек $p_\alpha \in L$ относительно некоторого алгебраического абстрактного отношения зависимости, обладающего свойством замены Штейница—Маклейна (глава IV, (5)).

Теперь обратимся к модулярному случаю. В точности, как в § IV.6, мы можем распределить точки любой *модулярной* атомно порожденной решетки M на классы эквивалентности E_k, состоящие из взаимно перспективных точек. «Плоские» (т. е. замкнутые) подмножества любого класса E_k взаимно перспективных точек удовлетворяют условию PG3 и их совокупность можно было бы назвать *атомно порожденной проективной геометрией*. Нетрудно показать, что M является идеалом в прямом произведении этих P_k, т. е. что имеет место

Теорема 19. *Любая модулярная атомно порожденная матроидная решетка изоморфна некоторому идеалу в прямом произведении атомно порожденных проективных геометрий.*

Независимо от рассуждений главы IV, касающихся некоторых конечных проективных прямых и недезарговых проективных плоскостей, можно ввести координатизацию при помощи подходящего тела и в атомно порожденных проективных геометриях, определенных выше, — используя «алгебру вурфов» фон Штаудта (§ IV.14). Фринк [2] показал, что в случае бесконечной длины атомно порожденная проективная геометрия — это в точности решетка $PG_\aleph(D)$ всех подпространств векторного пространства $D^\aleph$. Мы приходим к следующему результату.

Теорема 20. *Каждая атомно порожденная проективная геометрия длины $h > 3$ изоморфна решетке всех подпространств векторного пространства $D^\aleph$, где D — некоторое тело, а $\aleph$ — кардинальное число.*

Наконец, пусть L — *какая-нибудь* модулярная решетка с дополнениями, не обязательно атомно порожденная или полная. Сначала напомним, что по теореме V.6 решетка всех идеалов решетки L модулярна, и тогда модулярной будет решетка всех дуальных идеалов решетки L. Далее заметим, что дуальный идеал решетки L тогда и только тогда является собственным, когда он не содержит O, а это свойство конечного характера — алгебраическое. Поэтому каждый собственный дуальный идеал можно расширить до максимального собственного дуального идеала, «покрываемого» несобственным дуальным идеалом, которым является сама решетка L. В частности, для любого $a \neq I$ главный дуальный идеал, состоящий из элементов $x \geqslant a'$, можно расширить до максимального собственного дуального идеала Q, который не будет содержать a (иначе он содержал бы $a \wedge a' = O$). Поэтому пересечение всех максимальных дуальных идеалов есть элемент I — наименьший дуальный идеал. Эти рассуждения показывают, что *дуальные* идеалы *произвольной* модулярной решетки с дополнениями M, упорядоченные отношением, обратным включению, образуют атомно порожденную модулярную решетку $\check{M}$.

Однако мы не можем вывести отсюда соотношение (3) из § 5 (хотя двойственное ему соотношение выполняется). Но если считать «точкой» максимальный дуальный идеал, а «прямую» определить как пересечение двух различных максимальных дуальных идеалов, то PG1—PG2 доказываются несложно. «Плоские множества» тогда образуют полную атомно порожденную модулярную решетку.

Каждому элементу $a \in L$ можно сопоставить множество $S(a)$ всех максимальных дуальных идеалов P таких, что $a \in P$. Легко показать, что $S(a)$ всегда является «плоским множеством», что из $a > b$ следует $S(a) > S(b)$ и что $S(a \wedge b)$ совпадает с пересечением $S(a)$ и $S(b)$. Фринк установил, кроме того, что $S(a \vee b)$ является объединением $S(a)$ и $S(b)$. Здесь не так просто из принадлежности $a \vee b \in P$ вывести существование Q и R таких, что $a \in Q$, $b \in R$ и P содержит теоретико-множественное пересечение Q и R.

Поскольку «плоские множества» образуют прямое объединение атомно порожденных проективных геометрий, из наших рассуждений получается следующий окончательный результат.

Теорема 21. *Любая атомно порожденная модулярная решетка изоморфна подрешетке прямого объединения атомно порожденных проективных геометрий.*

Теория полных не атомно порожденных алгебраических модулярных решеток развита в гораздо меньшей степени [1]).

10. Ординальные суммы и произведения

Мы определим теперь две бинарные операции: — *ординальное* сложение и *ординальное* умножение, аналогичные соответствующим *кардинальным* операциям, введенным в § III.1, с которыми их не следует смешивать. Относительно этих операций множество всех ординальных типов конечных у-множеств образует алгебру, в которой конечные цепи составляют подалгебру, изоморфную алгебре $(\mathbf{Z}^+, +, \cdot)$. Более существенным для нас является то, что счетные ординалы также образуют алгебру, представляющую

---

[1]) См. работу Джонсона (Johnson R. E. — Trans. AMS, 1957, **84**, p. 508—549), где рассматриваются приложения в теории идеалов.

собой подалгебру алгебры всех ординальных типов счетных у-множеств. Операции, о которых идет речь, определяются следующим образом [1]).

Определение. Пусть X и Y — (непересекающиеся) у-множества. *Ординальной суммой* $X \oplus Y$ у-множеств X и Y называется множество, состоящее из всех $x \in X$ и всех $y \in Y$, в котором $x < y$ для любых $x \in X$, $y \in Y$, а отношения $x \leqslant x_1$ и $y \leqslant y_1$ (где x, $x_1 \in X$ и y, $y_1 \in Y$) сохраняют свое значение. *Ординальное произведение* $X \circ Y$ у-множеств X и Y — это множество всех упорядоченных пар (x, y) (где $x \in X$, $y \in Y$), упорядоченное *лексикографически* правилом: $(x, y) < (x_1, y_1)$ тогда и только тогда, когда $x < x_1$ или когда $x = x_1$ и $y < y_1$.

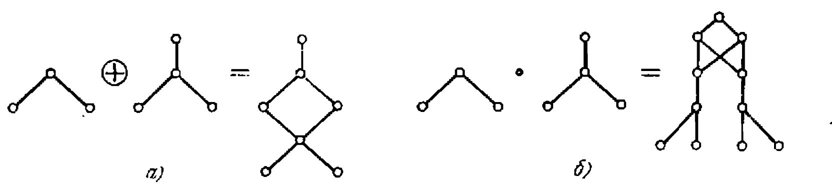


Рис. 19.

Нетрудно показать, что ординальная сумма и ординальное произведение любых двух цепей снова будут цепями и что ординальная сумма и ординальное произведение любых двух ординалов являются ординалами. (Рассмотрите, например, $\omega \circ \omega$ или $2 \circ \omega = \omega \oplus \omega$.) Ординальные сложение и умножение, вообще говоря, не коммутативны. Так,

$$1 \oplus \omega = \omega \neq \omega \oplus 1,$$
$$\omega\ 2 = \omega \neq 2 \circ \omega = \omega \oplus \omega.$$

Для конечных у-множеств диаграмма у-множества $X \oplus Y$ получается, если расположить диаграмму для Y над диаграммой для X и соединить прямолинейным отрезком каждый минимальный элемент у-множества Y с каждым максимальным элементом у-множества X; это показано на рис. 19, *а*.

Аналогично, если X и Y конечны, то диаграмму для $X \circ Y$ можно построить, используя следующие легко доказываемые результаты: в $X \circ Y$ элемент (x_1, y_1) покрывает (x, y) тогда и только тогда, когда (i) $x = x_1$ и y_1 покрывает y, или (ii) x_1 покрывает x и y_1 минимален, а y максимален в Y. См., например, рис. 19,*б*. На этих двух примерах хорошо видно, что операции $\oplus$ и $\circ$

---

[1]) Более глубокое исследование обобщений этих операций см. в книге Тарского (Tarski A. Ordinal Algebras. — Amsterdam, 1956) и в добавлениях к ней Чэна (Chang C. C.) и Йонссона (Jonsson B.).

в общем случае некоммутативны. Однако нетрудно проверить следующие тождества для них:

$$X \oplus (Y \oplus Z) = (X \oplus Y) \oplus Z \text{ и } X \circ (Y \circ Z) = (X \circ Y) \circ Z; \tag{6}$$

$$(X \oplus Y) \circ Z = (X \circ Z) \oplus (Y \circ Z); \tag{7}$$

$$\overbrace{X \oplus Y} = \breve{Y} \oplus \breve{X} \text{ и } \overbrace{X \circ Y} = \breve{X} \circ \breve{Y}, \tag{8}$$

причем в (8) $\smile$ обозначает унарную операцию *дуализации*, соотносящую каждому у-множеству P двойственное ему у-множество $\breve{P}$.

11. Подцепи в Q и R

Классификация конечных цепей проводится по теореме I.5 очевидным образом. Мы рассмотрим сейчас счетные цепи и, вообще, произвольные подцепи цепи $\mathbf{R}$ всех действительных чисел. Как и раньше, пусть ω обозначает цепь всех положительных чисел, $\mathbf{Z}$ — множество всех целых чисел, а $\mathbf{Q}$ — цепь всех рациональных чисел. Многие цепи можно представить как подцепи в $\mathbf{Q}$ или в $\mathbf{R}$ и, следовательно, изобразить в виде наборов точек на прямой. Эту возможность мы и исследуем в оставшейся части раздела.

Теорема 22. *Любая счетная цепь допускает порядковое вложение* (*т. е. изоморфна некоторой подцепи*) *в* $\mathbf{Q}$.

Доказательство. Если $r_1, r_2, \ldots$ — произвольная нумерация рациональных чисел, а $a_1, a_2, \ldots$ — нумерация данной цепи C, то положим $f(a_1) = 0$. Далее, по индукции определим $f(a_n)$. Так как C — цепь, то элемент a_n должен удовлетворять одному из следующих условий: (i) a_n превосходит все элементы $a_1, \ldots, a_{n-1}$; (ii) a_n меньше, чем $a_1, \ldots, a_{n-1}$; (iii) a_n лежит между a_i и a_j для некоторых наибольшего a_i и наименьшего a_j, где $i, j < n$. В случае (i) положим $f(a_n) = n$, в случае (ii) пусть $f(a_n) = -n$, наконец, в случае (iii) $f(a_n)$ полагаем равным первому r_k, находящемуся в той же упорядоченности по отношению к $f(a_1), \ldots, f(a_{n-1})$, в какой a_n находится по отношению к $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Тогда f и будет изотонным взаимно однозначным отображением цепи C в $\mathbf{Q}$.

Поскольку множество $\mathbf{Q}$ само счетно, теорема 22 показывает, что $\mathbf{Q}$ является «универсальной» счетной цепью.

Теперь обратимся к топологическому понятию «плотности». Топологические аспекты этого понятия будут обсуждаться в § X.8.

Определение. Цепь C называется *плотной в себе*, если для любых заданных ее элементов $a < b$ существует элемент $c \in C$ такой, что $a < c < b$. Подмножество S цепи C называется *порядково плотным* в C, если для любых элементов $a < b$ из C, не принадлежащих S, найдется элемент $s \in S$ такой, что $a < s < b$.

Теорема 23. *Любая плотная в себе счетная цепь C изоморфна одной из цепей* $\mathbf{Q}$, $\mathbf{1} \oplus \mathbf{Q}$, $\mathbf{Q} \oplus \mathbf{1}$ *или* $\mathbf{1} \oplus \mathbf{Q} \oplus \mathbf{1}$.

Доказательство. Пусть D состоит из всех элементов цепи C за исключением $\sup C$ и $\inf C$, если эти элементы существуют. Поскольку C является плотной в себе, D не может иметь ни наибольшего, ни наименьшего элемента, и кроме того, D плотно в себе. Отобразим D в $\mathbf{Q}$ при помощи конструкции, использованной при доказательстве теоремы 22. Пусть m, n — некоторые целые числа из области значений функции f, указанным образом отображающей D в $\mathbf{Q}$. Тогда каждое рациональное число, лежащее между m и n, принадлежит области значений функции f. Если бы это было не так, то существовало бы первое k, для которого r_k не находилось бы в рассматриваемой области. Тогда мы нашли бы a_i и a_j такие, что $m \leqslant f(a_i) < r_k < f(a_j) \leqslant n$ и при этом из $f(a_i) < r_l < f(a_j)$ следует, что $l \geqslant k$. Так как D плотно в себе, то можно было бы выбрать первое a_s со свойством $a_i < a_s < a_j$, и для него было бы $f(a_s) = r_k$, что невозможно.

Поскольку у-множество D не ограничено, существуют сколь угодно большие целые числа m и n такие, что $-m$ и n лежат в области значений функции f. Таким образом, f является изоморфизмом цепи D на $\mathbf{Q}$. Но цепь C изоморфна одной из цепей D, $1 \oplus D$, $D \oplus 1$ или $1 \oplus D \oplus 1$ и, следовательно, она изоморфна одной из цепей $\mathbf{Q}$, $1 \oplus \mathbf{Q}$, $\mathbf{Q} \oplus 1$ или $1 \oplus \mathbf{Q} \oplus 1$.

Заметим, что множество $\mathbf{Q}$ является порядково плотным в $\mathbf{R}$. Этот результат можно обобщить следующим образом.

Теорема 24. *Цепь C изоморфна подцепи цепи* $\mathbf{R}$ *тогда и только тогда, когда C содержит счетное порядково плотное подмножество.*

Доказательство. Предположим, что C содержит счетное порядково плотное подмножество $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Не теряя общности, можно считать, что в A находятся наибольший и наименьший элементы у-множества C, если они существуют. По теореме 22 можно отобразить A на подцепь цепи $\mathbf{Q}$. По определению «порядковой плотности» каждый элемент c из C, не принадлежащий A, однозначно определяется сечением, которое он задает в A, т. е. разбиением множества A на множество элементов $a_i < c$ и множество элементов $a_i > c$. Пусть $r_1 = \sup f(a_i)$, где $a_i < c$, а $r_2 = \inf f(a_i)$, где $a_i > c$; положим $f(c) = r_1 + r_2$. Этим определяется изоморфизм между C и некоторым подмножеством в $\mathbf{R}$. Мы опускаем детали, поскольку они легко восстанавливаются.

Обратно, если цепь C изоморфна подмножеству цепи $\mathbf{R}$, мы можем найти в C счетное плотное подмножество путем нумерации интервалов I_i: $[m_i/n_i, m_i'/n_i']$ множества $\mathbf{R}$, имеющих рациональные концы, с последующим выбором по одному c_i из каждого I_i, за исключением тех случаев, когда ни один элемент из c не соответствует элементу из I_i.

Упражнения к §§ 10—11

1. Докажите тождества (6)—(8).

2. (а) Покажите, что любая цепь, не являющаяся ординалом, содержит в качестве подцепи двойственное для ω у-множество $\breve{\omega}$.

(б) Покажите, что если цепь C и двойственная ей цепь $\breve{C}$ вполне упорядочены, то C конечна.

(в) Пусть C — условно полная цепь, в которой каждый элемент имеет непосредственно предшествующий ему и непосредственно следующий за ним элемент. Покажите, что $C \cong \mathbf{Z}$.

3. Покажите, что каждая вполне упорядоченная подцепь в $\mathbf{R}$ счетна.

4. Покажите, что у-множество $\mathbf{R} \circ \mathbf{R}$ не допускает порядкового вложения в $\mathbf{R}$.

5. Каков наименьший ординал α, для которого $\alpha \circ \omega = \alpha$?

6. Дайте подробное доказательство того, что если у-множества V и W являются цепями или ординалами, то соответственно цепями или ординалами будут у-множества $V \oplus W$ и $V \circ W$.

7. Покажите, что у-множество $P \oplus Q$ нётерово тогда и только тогда, когда оба P и Q являются нётеровыми, и аналогично для $P \circ Q$.

8. Покажите, что $\mathbf{Q} \oplus \mathbf{Q} = \mathbf{Q}$ в смысле изоморфности.

9. Покажите, что если плотное подмножество T плотного подмножества S цепи C плотно в себе, то оно будет плотным в C.

10. Покажите, что если L и M — полные решетки, то полными решетками будут также $L \oplus M$ и $L \circ M$.

11. Получите необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять у-множества P и Q, чтобы $P \oplus Q$ было полной решеткой.

12. Покажите, что ординальное произведение $L \circ M$ является решеткой тогда и только тогда, когда L и M — решетки и к тому же L — цепь или M имеет универсальные грани (Дей).

*13. Покажите, что если A, B, C — полные цепи и $A \circ B = A \circ C$, то $B = C$ (Глисон).

12*. Однородные континуумы. Проблема Суслина

Цепь $\mathbf{Z}$ всех целых чисел и цепь $\mathbf{R}$ всех действительных чисел замечательны своей однородностью: они имеют транзитивную группу автоморфизмов. Хотя можно построить и другие однородные цепи (как, например, упорядоченные группы, см. главу XII), очень немногие из них являются условно полными. На самом деле имеет место

Т е о р е м а 25. *Цепи* $\mathbf{Z}$ *и* $\mathbf{R}$ *являются единственными условно полными цепями, которые* (i) *однородны* (*т. е. имеют транзитивную группу автоморфизмов*) *и* (ii) *содержат счетное плотное подмножество.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 24 C[1]) изоморфна некоторому подмножеству в $\mathbf{R}$, поэтому можно считать, что $C \subset \mathbf{R}$. Внутренность [2]) S дополнения $C' \cap \mathbf{R}$ множества C в $\mathbf{R}$ будет тогда открытым подмножеством, состоящим из счетного множества неперекрывающихся открытых интервалов. Из условия (i) следует, что по крайней мере один конец каждого конечного

[1]) Цепь, удовлетворяющая условиям (i) и (ii). — *Прим. перев.*

[2]) Здесь мы предвосхищаем топологические идеи глав IX—X.

такого интервала должен принадлежать C. Если окажется, что у какого-нибудь интервала концы a, b принадлежат C, то некоторый элемент $a \in C$ покрывается другим элементом $b \in C$; из (i) тогда следует, что *каждый* $x \in C$ должен покрываться некоторым $y \in C$, и аналогично, каждый x *покрывает* некоторый $z \in C$. Поэтому можно найти в C подинтервал J, изоморфный $\mathbf{Z}$, — мы опускаем детали. Наконец, если бы некоторый элемент $a \in C$ не принадлежал J, мы согласно (i) могли бы образовать $\sup J$ или $\inf J$, но такие элементы не могут одновременно покрывать и быть покрываемыми. Значит, $C = J \cong \mathbf{Z}$.

Пусть теперь только один конец каждого открытого интервала принадлежит C. В этом случае, если мы сдвинем каждую точку p из C в сторону начала на величину, равную сумме длин интервалов, лежащих между p и началом, то получим изоморфное отображение цепи C на $\mathbf{R}$ или на некоторый интервал цепи $\mathbf{R}$. Поскольку, если бы $x \in C$ был наибольшим или наименьшим элементом, (в силу (i)) таковым был бы и каждый элемент из C, то C либо состоит из одного 0 (исключительный случай), либо C изоморфна открытому интервалу цепи $\mathbf{R}$ и, следовательно, самой $\mathbf{R}$.

Возможны различные модификации условий теоремы. Так (i) можно заменить предположением (i′) отношение покрытия не имеет места *ни для каких* элементов (т. е. что цепь является плотной в себе), и тогда получается $\mathbf{R}$; можно также это условие заменить условием (i″) каждый элемент $a \in C$ покрывает некоторый элемент и сам покрывается каким-то элементом, тогда получаем $\mathbf{Z}$.

Очень интересным видоизменением условия (ii) является условие Суслина: (ii′) каждое множество непересекающихся открытых интервалов цепи C счетно. Используя теоремы 23 и 24, нетрудно показать, что (ii′) следует из (ii). Для любого положительного целого числа n имеется не более $n+1$ непересекающихся интервалов длины, большей или равной $1/n$, середины которых x удовлетворяли бы неравенству $m \leqslant x \leqslant m+1$; поэтому $\mathbf{R}$ допускает лишь счетное множество непересекающихся интервалов ненулевой длины. Гипотеза Суслина [1]) состоит в том, что в любой цепи из условия (ii′) следует (ii).

Другие интересные условия для цепей предложил Дж. Биркгоф. В их числе включающее условие Суслина (ii′) условие *сильной однородности*: (i*) все непустые интервалы изоморфны, и условие, состоящее в том, что объединение счетной последовательности $I_1 < I_2 < I_3 < \ldots$ открытых интервалов является открытым интервалом. Примеры линейных однородных континуумов, не изоморфных цепи $\mathbf{R}$, нашли Васкес и Субьета, а также Аренс [2]).

[1]) Высказана М. Я. Суслиным в Fund. Math., 1920, 1, p. 223.

[2]) Vazquez R., Zubieta F. — Bol. Soc. Mat. Mex., 1944, 1, p. 1—18; 1945, 2, p. 91—94; Arens R. — Bol. Soc. Mat. Mex., 1946, 2, p. 33.

13. Полное упорядочение. Ординалы

Из § 1 вспомним, что *вполне упорядоченным множеством* или *ординалом* называется у-множество W, в котором каждое непустое подмножество имеет наименьший элемент. (Другими словами, это цепь, удовлетворяющая УУЦ.) Отсюда сразу следует, что всякое вполне упорядоченное множество является цепью, что каждая конечная цепь вполне упорядочена и что любое подмножество вполне упорядоченного множества вполне упорядочено.

Множество ω всех положительных целых чисел, рассматриваемое со своей естественной упорядоченностью, является наименьшим бесконечным ординалом: оно вкладывается во все другие ординалы. Среди других счетных ординалов, если определить ${}^nW$ как

$$(9)\qquad {}^nW = W \circ {}^{n-1}W = W \circ \ldots \circ W \quad (n \text{ сомножителей}),$$

можно выписать все *ординальные многочлены* от ω, имеющие вид

$$(10)\qquad (m_n \circ {}^n\omega) \oplus (m_{n-1} \circ {}^{n-1}\omega) \oplus \ldots \oplus (m_1 \circ \omega) \oplus m_0,$$

где $m_n, \ldots, m_0$ — произвольные конечные ординалы и $m_n \neq 0$. Это множество ординалов замкнуто относительно ординальных сложения и умножения — в этом нетрудно убедиться при помощи тождеств (6)—(7).

Обобщенный принцип индукции из § 1 в двойственной формулировке (с заменой УВЦ на УУЦ) приводит к следующему обобщению принципа конечной индукции.

Первый принцип трансфинитной индукции. Пусть $\{P_\alpha\}$ — некоторое вполне упорядоченное множество предложений. Чтобы доказать истинность всех P_α, достаточно установить, что каждое P_α истинно в предположении, что истинны все P_β при $\beta < \alpha$.

Более интересной и поучительной является специализация этого принципа, связанная с использованием предельных чисел.

Предельным числом называется элемент α вполне упорядоченного множества такой, что для любого $\beta < \alpha$ существует элемент γ, удовлетворяющий условию $\beta < \gamma < \alpha$.

Теперь как следствие вышеуказанного Первого принципа получается

Второй принцип трансфинитной индукции. Пусть $\{P_\alpha\}$ — некоторое вполне упорядоченное множество предложений. Чтобы доказать истинность всех P_α, достаточно установить, что (i) P_1 истинно; (ii) если P_α истинно, то истинно $P_{\alpha+1}$; (iii) если α — предельное число и все P_β при $\beta < \alpha$ истинны, то P_α истинно.

Однако самые яркие результаты об ординальных числах получаются не так просто; они требуют существенного использования аксиомы выбора. Среди них отметим следующий факт:

сами ординальные числа вполне упорядочены. Точнее, мы можем доказать, что имеет место [1])

Теорема 26. *Любое множество ординалов вполне упорядочено, если $V \leqslant W$ понимать как изоморфизм ординала V на некоторый идеал ординала W.*

Доказательство. Сначала заметим, что «идеал» цепи — это ее начальный интервал. Доказательство выводится из последовательности лемм.

Лемма 1. *Идеалами произвольного ординала W являются W и для каждого $a \in W$ множество всех $x < a$.*

Доказательство. В любой цепи множество элементов $x < a$ является идеалом. Обратно, если J — собственный идеал некоторого ординала W, то должен существовать наименьший элемент $a \in W$, не принадлежащий J; ясно, что J содержит все $x < a$, но не содержит ни a, ни какой-либо элемент $c > a$.

Лемма 2. *Существует не более одного изоморфизма между заданными идеалами J и K ординалов V и W.*

Доказательство. Пусть θ и θ^* — такие изоморфизмы. Так как у-множество J вполне упорядочено, найдется первый элемент $a \in J$ со свойством $\theta(a) \neq \theta^*(a)$. Пусть $\theta(a) > \theta^*(a)$. Образ $\theta(J)$ не может содержать $\theta^*(a)$, поскольку $\theta(b) > \theta^*(b)$ для $b \geqslant a$ и $\theta(b) = \theta^*(b) < \theta^*(a)$, если $b < a$. Но $\theta(a) > \theta^*(a)$, значит, $\theta(V)$ не идеал, что противоречит условию.

Заметим теперь, что если θ_α для каждого α является функцией, определенной на множестве $S_\alpha \subset X$ со значениями в Y, и если $\theta_\alpha(x) = \theta_\beta(x)$ для всех α, β, определенных в x, то эти функции θ_α допускают наибольшее общее продолжение θ, определяемое равенствами $\theta(x) = \theta_\alpha(x)$ для всех элементов x, принадлежащих области определения хотя бы одной из функций θ_α. Из леммы 2 следует, что существует самый большой в этом смысле изоморфизм между идеалами двух любых заданных ординалов V и W. По лемме 1 он захватывает либо все множество V, либо все множество W, либо, наконец, он отображает множество элементов $x < a$ на множество элементов $y < b$ при некоторых $a \in V$, $b \in W$. Но в этом последнем случае мы могли бы существенно расширить наш изоморфизм, полагая $\theta(a) = b$. Из сказанного вытекает

Лемма 3: *Из любых двух вполне упорядоченных множеств V, W одно изоморфно некоторому идеалу (начальному отрезку) другого.*

Отсюда следует, что отношение $\leqslant$, введенное в теореме 26, удовлетворяет P4. Но P1, P3 выполняются для этого отношения очевидным образом, а P2 (если $=$ понимать как изоморфизм)

---

[1]) Хаусдорф [1]. Хаусдорф приписывает этот результат Гессенбергу (Hessenberg G.). Заметим, что класс всех ординалов, хотя и вполне упорядочен, сам ординалом не будет, поскольку не является множеством.

выводится из леммы 2. Наконец, если Ω — некоторое непустое множество ординалов, выберем $W \in \Omega$. Тогда множество ординалов $V \not> W$ состоит по лемме 3 из ординалов, изоморфных идеалам ординала W, а эти последние образуют по лемме 1 вполне упорядоченное множество. Этим завершается доказательство теоремы 26.

Упражнения к §§ 12—13

1. (а) Покажите, что в любой непустой цепи C, удовлетворяющей условию (i''), для любых $a < b$ найдется x такой, что $a < x < b$.

(б) Убедитесь, что для любого $a \in C$ неравенства $x < a$ и $x > a$ имеют решения. (Указание. Используйте изоморфность интервалов $(-\infty, +\infty)$ и $(a, +\infty)$.)

2. (а) Покажите, что любой линейный однородный континуум C «секвенциально компактен» в том обычном топологическом смысле, что каждая последовательность элементов множества C содержит сходящуюся подпоследовательность.

(б) Покажите, что любое такое непустое множество C имеет мощность, не меньшую мощности континуума (Субьета и Васкес).

3. Докажите, что если у-множество P изоморфно подмножеству некоторого ординала W, то оно изоморфно некоторому идеалу в W.

4. (а) Покажите, что для ординалов неравенство $V < W$ равносильно тому, что $W = V \oplus X$ для некоторого X и что этот X однозначно определен.

(б) Выведите, что, таким образом, мы имеем односторонний закон сокращения и определено вычитание.

(в) Покажите, что, однако, из $X \oplus V = Y \oplus V$ не следует $X = Y$.

5. Покажите, что из $X \circ V = Y \circ V$ следует $X = Y$, если только V отлично от 0, но что $\omega \circ 2 = \omega \circ 1$.

6. (а) Какие ординальные многочлены вида (10) изоморфны всем своим дуальным идеалам? (Такие ординалы называют *неразложимыми*.)

(б) Покажите, что каждый ординал допускает единственное представление в виде ординальной суммы невозрастающей последовательности неразложимых ординалов (Серпинский).

7. (а) Какие ординальные многочлены вида (10) обладают свойством: существует ординал T такой, что $W = T \circ X$ для всех $X \leqslant W$?

(б) Какие из них таковы, что $W = W \circ X$ для всех $X < W$?

(в) Покажите, что никакой ординальный многочлен не изоморфен всем своим конфинальным подмножествам, но что наименьший несчетный ординал этим свойством обладает.

8. (а) Покажите, что 2 и ω не имеют общих правых кратных.

(б) Покажите, что множество всех левых делителей любого ординала конечно.

9. (а) Пусть θ — какой-нибудь порядковый эндоморфизм ординала W. Покажите, что $\theta(x) \geqslant x$ для всех x (Хаусдорф).

(б) Покажите, что для ординалов выполняется условие: если $V < W$, то ${}^{V}2 < {}^{W}2$.

10. (а) Пусть V, W — ординалы и $V < W$. Покажите, что существуют единственные X, R такие, что $W = (X \circ V) \oplus R$, $O \leqslant R < V$. (Это алгоритм левого деления.)

(б) Покажите, что любой ординал можно представить как ординальное произведение конечного числа неразложимых в произведение ординалов.

(в) Покажите, что $\omega \circ (\omega \oplus 1) = \omega \circ \omega$, — теорема об однозначности разложения на множители не имеет места.

*11. (а) Используя трансфинитную индукцию, определите ординальную арифметику правилами Кантора:

$$V \oplus (W \oplus 1) = (V \oplus W) \oplus 1, \quad (V \oplus 1) \circ W = V \circ W \oplus W,$$

а для предельных ординалов

$$V \oplus (\lim W_\alpha) = \lim (V \oplus W_\alpha), \quad (\lim V_\alpha) \circ W = \lim (V_\alpha \circ W).$$

Покажите, что она совпадает с ординальной арифметикой из § 10.

(б) Покажите, что $(\lim V_\alpha) \oplus W \geqslant \lim (V_\alpha \oplus W)$, $V \circ (\lim W_\alpha) \geqslant \geqslant \lim (V \circ W_\alpha)$, но что равенства в общем случае не имеют места.

14. Аксиома выбора

Покажем теперь, что принцип максимальности Хаусдорфа (§ 7) равносилен различным формам аксиомы выбора, и представим некоторые результаты, для доказательства которых требуется эта аксиома. Сначала (вместе с Цорном) заметим, что из ПМХ вытекает следующее теоретико-решеточное обобщение цорновского свойства:

(Z) если каждая цепь C у-множества P имеет верхнюю грань $u(C) \in P$, то P содержит максимальный элемент.

В самом деле, верхняя грань $u(M)$ любой максимальной цепи M в P будет таким элементом, а ПМХ обеспечивает существование максимальной цепи M в P. Теперь рассмотрим аксиому выбора Цермело в ее первоначальном виде [1]):

(АВ) Если I — произвольное множество, то существует функция f, которая выбирает из каждого непустого подмножества $S \subset I$ элемент $f(S) \in S$.

Лемма 1. *Из принципа максимальности Хаусдорфа следует аксиома выбора Цермело.*

Доказательство. Рассмотрим класс Γ всех функций, которые приписывают некоторым непустым подмножествам $S \subset I$ элемент $g(S) \in S$. Положим $g \leqslant h$, если h является продолжением функции g, тем самым Γ превращается в у-множество. Выберем, ссылаясь на ПМХ, *максимальную цепь* $M \subset \Gamma$ и образуем общее продолжение g_m всех $g \in \Gamma$ (§ 13, перед леммой 3). Тогда функция g_m должна быть определена для всех непустых подмножеств S: в противном случае существует непустое подмножество T_0 такое, что $g_m(T_0)$ не определено, и тогда, выбирая некоторый элемент $t_0 \in T_0$, положим

$$g^*(S) = \begin{cases} g_m(S), & \text{если } g_m(S) \text{ определено}, \\ t_0 \in T_0, & \text{если } S = T_0; \end{cases}$$

эта функция будет собственным продолжением функции g_m, что противоречит определению последней. Следовательно, в качестве f можно взять g_m. Ч. т. д.

---

[1]) Zermelo E. — Math. Ann., 1904, 59, p. 514; 1908, 65, p. 261. Более основательное обсуждение вариантов аксиомы выбора можно найти в [LT2, с. 72—75]; см. также [Kel, с. 350—352].

Лемма 2. *Из аксиомы выбора Цермело следует, что любое множество I можно вполне упорядочить.*

Доказательство. Рассмотрим отношения ρ, которые вполне упорядочивают *подмножества* $S(\rho)$ множества I *совместимо* с функцией выбора f (см. (АВ)) в том смысле, что первым относительно ρ элементом *дополнения* A' любого ρ-идеала $A \subset \subset S(\rho)$ является $f(A')$. Как в лемме 3 из § 13, показывается, что эти отношения образуют цепь. Их максимальное общее продолжение $\bar{\rho}$ и будет вполне упорядочивать I — мы опускаем детали.

Лемма 3. *Из возможности полного упорядочения любого множества следует принцип максимальности Хаусдорфа.*

Доказательство. Если в у-множестве P задана цепь C, то вполне упорядочим $P - C = C' = W$. Пусть функция ψ приписывает каждому $a \in W$ значение $\psi(a) = 1$, если для всех $b < a$ таких, что $\psi(b) = 1$, и для всех $b \in C$ выполняется одно из неравенств $a \geqslant b$ или $a \leqslant b$, а в противном случае пусть $\psi(a) = 0$. Эта функция однозначно определяется трансфинитной индукцией. Присоединяя к C все элементы $a \in W$, для которых $\psi(a) = 1$, мы получим максимальную цепь.

Объединяя леммы 1—3, мы приходим к следующему результату.

Теорема 27. *Принцип максимальности Хаусдорфа, аксиома Цермело и утверждение о возможности вполне упорядочить любое множество равносильны.*

Теорема 28. *Если $S \leqslant T$ означает, что существует вложение множества S в множество T, то это отношение вполне упорядочивает кардинальные числа.*

Доказательство. Пусть $W \to n(W)$ — отображение, которое каждому ординалу W приписывает его кардинальное число. Это отображение изотонно и по лемме 2 является наложением. Но ординалы вполне упорядочены (теорема 26), поэтому вполне упорядоченными будут и кардинальные числа.

Используя аксиому выбора, мы можем доказать еще, что

$$\alpha + \beta = \alpha\beta = \mathrm{Max}(\alpha, \beta) \tag{11}$$

для кардинальных чисел α и β, по крайней мере одно из которых бесконечно. Это означает, что арифметика бесконечных кардиналов (в отличие от кардинальной арифметики бесконечных у-множеств!) тривиальна. В качестве следствия получается, что $\alpha + \alpha = \alpha^2 = \alpha$ для любого бесконечного кардинального числа α. Различные другие результаты содержатся в упражнениях.

Упражнения

1. Не используя аксиому выбора, докажите, что кардинальные числа удовлетворяют P2. (Теорема Шредера—Бернштейна).

2. Покажите, что «первый» из ординалов, имеющих данное бесконечное кардинальное число, всегда является предельным.

3. Покажите, что каждая цепь имеет вполне упорядоченное конфинальное подмножество.

4. Пусть P — у-множество, в котором каждое вполне упорядоченное подмножество имеет точную верхнюю грань. Пусть f — любое отображение множества P в себя такое, что $f(x) \geqslant x$ для всех $x \in P$. Не привлекая ни одной из форм аксиомы выбора, покажите, что $f(m) = m$ для некоторого $m \in P$ (Бурбаки).

*5. Покажите, что в любой полной алгебраической решетке любые элементы $a < b$ можно связать цепью с плотным отношением покрытия.

*6. Покажите, что аксиома выбора вытекает из предположения о линейной упорядоченности кардинальных чисел [1]).

*7. Покажите, что законы $\alpha + \alpha = \alpha$ и $\alpha^2 = \alpha$ для бесконечных кардиналов нельзя доказать без использования аксиомы выбора.

8. Пусть C — какая-нибудь условно полная цепь с O, в которой (i) каждое непустое множество, ограниченное снизу, имеет точную нижнюю грань, (ii) каждый элемент a, не являющийся верхней гранью множества C, покрывается некоторым $s(a) \in C$. Покажите, что цепь C вполне упорядочена (Лемон и Уотермен).

9. (а) В произвольной цепи C сравните следующие три числа: (i) наименьшее из кардинальных чисел для плотных множеств (Кантор); (ii) точная верхняя грань множества кардинальных чисел, соответствующих совокупностям непересекающихся открытых интервалов (Суслин); (iii) точная верхняя грань множества кардинальных чисел, соответствующих (бесконечным) последовательностям

$$(a_1, b_1) > (a_2, b_2) > (a_3, b_3) > \cdots > (a_\omega, b_\omega) > (a_{\omega+1}, b_{\omega+1}) > \cdots$$

вложенных открытых интервалов.

(б) Убедитесь, что для $\mathbf{R} \circ \mathbf{R}$ число (ii) больше числа (iii).

*10. Покажите, что цепь C допускает порядковое вложение в $\mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда каждое несчетное множество ее интервалов содержит несчетное подмножество, состоящее из интервалов, любые два из которых имеют общий элемент [2]).

15*. Ординальные степени

Не вполне ясно, как определить понятие ординальной степени для у-множеств бесконечной длины. Кантор делал это индукцией по показателю степени (см. ниже упр. 3). Однако при таком определении ${}^{\omega}2$ оказывается счетным, хотя гораздо более естественным было бы, наверное, отождествить ${}^{\omega}2$ с канторовым дисконтинуумом, состоящим из двоичных десятичных дробей в их обычной лексикографической упорядоченности. Мы обобщим это определение следующим образом [3]).

Определение. *Ординальной степенью* ${}^{X}Y$ *двух у-множеств* X и Y называется множество всех функций $f\colon X \to Y$, в котором $f \leqslant g$ означает, что для любого $a \in X$ такого, что $f(a) \nleqslant g(a)$, существует элемент $b \lhd a$ со свойствами $f(b) < g(b)$ и $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \leqslant b$.

---

[1]) Упр. 6 принадлежит Хартогсу (H a r t o g s F. — Math. Ann., 1915, 76, p. 443), упр. 7 — Тарскому (T a r s k i A. — Fund. Math., 1924, 5, p. 147—154).

[2]) Кнастер (K n a s t e r B. — Матем. сб., 1945, 16, с. 281—290).

[3]) Хаусдорф [1], Уайтхед и Рассел [1], Биркгоф [5, §§ 8—9], Дей [1, § 7]. Приводимое определение отличается от всех указанных в случае произвольных у-множеств, но все определения равносильны (и очень удобны!) для ординалов.

Если $X = W$ является ординалом, то $f < g$ в ${}^{W}Y$ в этом смысле будет означать, что $f(m) < g(m)$ для *наименьшего* $m \in X$ такого, что $f(x) \neq g(x)$. Если X удовлетворяет УУЦ, то $f < g$ в ${}^{X}Y$ означает, что $f(m) < g(m)$ для каждого минимального $m \in X$ со свойством $f(x) \neq g(x)$. В ${}^{\mathbf{R}}\mathbf{R}$ (для действительных функций) $f < g$ равносильно неравенствам $f(m) < g(m)$ для некоторого m и $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \leqslant m$, впрочем, так будет в ${}^{C}Y$ для любой цепи C.

Ординальное возведение в степень удовлетворяет нескольким простым тождествам («степенные законы»), таким как

$$(12)\qquad {}^{X\oplus Y}Z = ({}^{X}Z)\circ({}^{Y}Z), \quad {}^{X+Y}Z = ({}^{X}Z)({}^{Y}Z), \quad \breve{{}^{X}Y} = {}^{X}\breve{Y}.$$

Кроме того, ${}^{X}({}^{Y}Z)$ допускает порядковый гомоморфизм на ${}^{(X\circ Y)}Z$, хотя в общем случае порядкового изоморфизма не будет. Обсуждение других тождеств ординальной и кардинальной арифметики читатель найдет в указанных выше работах [1]).

Для любых ординала W и цепи C у-множество ${}^{W}C$ является цепью: если $f \neq g$, то найдется первый $x = x_0$ такой, что $f(x_0) \neq g'(x_0)$, и будет $f \gtrless g$ в соответствии с $f(x_0) \gtrless g(x_0)$. Однако линейно упорядочить естественным образом ${}^{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}$, ${}^{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}$ и ${}^{\mathbf{R}}\mathbf{R}$ нельзя — это показывает следующий результат.

Теорема 29 (Бейкер). *Не существует линейного упорядочения множества всех функций f: $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, «естественного» в смысле инвариантности относительно группы $A = \mathrm{Aut}\,\mathbf{Z}$ всех порядковых автоморфизмов у-множества $\mathbf{Z}$. Точно так же обстоит дело, если $\mathbf{Z}$ заменить на $\mathbf{Q}$ или $\mathbf{R}$.*

Доказательство. Пусть μ обозначает автоморфизм $n \to n + 1$ и рассмотрим функцию f, определенную равенствами

$$f(2k) = 2k + 1, \quad f(2k + 1) = 2k \text{ для всех } k \in \mathbf{Z}.$$

Пусть $g = \mu f \mu^{-1}$. Ясно, что $g \neq f$. Поэтому при любом линейном упорядочении будет $f < g$ или $f > g$. Но если этот порядок является «естественным», то (в первом случае) $g = \mu f \mu^{-1} < \mu g \mu^{-1} = \mu^2 f \mu^{-2} = f$ — очевидное противоречие.

Чтобы подобным же образом рассмотреть случай у-множеств $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$, достаточно продолжить f до функции f_1, полагая $f_1(x) \equiv x$ для нецелых x. Интересно было бы получить соответствующий результат для непрерывных функций из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$, если, конечно, этот результат на самом деле имеет место.

Ординальная степень Хана. Хотя в ${}^{\mathbf{R}}\mathbf{R}$ и не существует естественного линейного порядка, тем не менее удается линейно упорядочить довольно большое подмножество у-множества ${}^{C}\mathbf{R}$,

[1]) См. еще книги Бахмана (Bachmann H. Transfinite Zahlentheorie.— Springer, 1955), Тарского (Tarski A. Ordinal algebras. — Amsterdam: North-Holland, 1956), Куратовского (Kuratowski C. Cardinal and ordinal numbers. — Warszawa, 1958).

где C — произвольная цепь. Это достигается при помощи следующей конструкции Хана [1]. Она играет особенно важную роль в изучении упорядоченных и решеточно упорядоченных абелевых групп (включая векторные решетки).

Определение. *Ординальной степенью* ${}^{(C)}\mathbf{R}$ в смысле *Хана* называется множество всех функций f: $C \to \mathbf{R}$ (где C — цепь) таких, что $f(x) = 0$ всюду за исключением некоторого вполне упорядоченного подмножества $W(f) \subset C$. Смысл неравенства $f \leqslant g$ тот же, что и в ${}^{C}\mathbf{R}$.

Упражнения

1. Покажите, что конгруэнция, определенная в упр. 9 к § 1 выделяет из ${}^{\omega}2$ поле действительных чисел $\mathbf{R}$.
2. Докажите справедливость законов (12).
3. Следуя Кантору, определим ординальное возведение в степень индукцией:

$$ {}^{1}V = V, \quad {}^{W \oplus 1}V = {}^{W}V \circ V, \quad {}^{(\lim W_\alpha)}V = \lim \left({}^{W_\alpha}V\right). $$

Покажите, что при таком определении ${}^{\omega}2$ и ${}^{\omega}\omega$ будут иметь смысл, не равносильный тому, который придается им в тексте.

4. Для функций f: $X \to Y$ (где X и Y — у-множества) пусть $f \lhd g$ означает, что если $f(a) \nleqslant g(a)$, то существует $x < a$, при котором $f(x) < g(x)$. Будет ли $\lhd$ отношением порядка?
5. Покажите, что ${}^{X}L$ является решеткой тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий: (i) L — решетка, а X тривиально упорядочено; (ii) L — решетка с O и I; (iii) L — цепь, а X двойственно дереву (т. е. для любого $a \in X$ интервал $[a, \infty)$ является цепью).

16*. Гипотеза континуума. Некоторые сомнения

Исследование оснований теории множеств привело к появлению трех вызвавших сомнения гипотез: аксиомы выбора, гипотезы континуума и гипотезы Суслина. Они играют известную роль и в теории решеток, поэтому желательно иметь некоторый обзор связанного с ними положения дел.

На сегодняшний день аксиома выбора признается в принципе безвредной и необходимой в математической практике. Халмош [1]) свел ее к утверждению, от которого, по-видимому, невозможно отказаться: «Декартово произведение непустого семейства непустых множеств непусто».

Тем не менее, принятие аксиомы выбора ведет, например, к весьма специфическому заключению о том, что $\mathbf{R}$ можно вполне упорядочить, а это, по-видимому, невозможно сделать в каком-нибудь конструктивном смысле. Хотя можно построить сколько угодно *счетных* ординальных «многочленов» от ω путем ординальных операций сложения и умножения (используя и конечное ординальное возведение в степень), никому до сих пор не удалось

---

[1]) Halmos P. Naive set theory. — Van Nostrand, 1960, p. 59.

«построить» какую-нибудь явно заданную функцию, которая бы вполне упорядочивала несчетное множество; мы совершенно не представляем себе, как «выглядит» несчетное вполне упорядоченное множество. *Проблема «конструктивного» вполне упорядочения несчетного множества является основной проблемой теории множеств* [1]).

Наше незнание, впрочем, идет гораздо дальше. Каждое бесконечное множество содержит счетное подмножество, поэтому $\aleph_0$ является *наименьшим* бесконечным кардинальным числом. Но мы не имеем ни малейшего представления о втором по счету бесконечном кардинальном числе, а оно по теореме 28 (предполагающей аксиому выбора) существует. Знаменитым предположением является следующая

Гипотеза континуума. Вторым бесконечным кардинальным числом $\aleph_1$ является мощность континуума.

Серпинский показал, что это предложение равносильно большому числу других интересных (не доказанных и не опровергнутых) предложений [2]), а Гёдель установил ее совместимость с обычными формальными системами аксиом теории множеств и даже доказал, что с этими системами аксиом совместима обобщенная гипотеза континуума:

$$\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}.$$

Недавно Коэн показал, что она не зависит от них [3]).

Другими словами, при существующих формализациях логики и аксиоматики теории множеств нельзя установить, истинна или ложна гипотеза континуума (если, конечно, она вообще «имеет смысл»). Та же ситуация, похоже, имеет место и для гипотезы Суслина: кажется правдоподобным, что она не зависит от других аксиом теории множеств и, что еще вероятнее, от аксиомы выбора и гипотезы континуума [4]).

Эти вопросы в последующих разделах книги по большей части останутся в тени. Так, основные построения в главах IX—XI ограничиваются счетными операциями и потому они в определенном смысле более «конструктивны». (Любопытно, что теорема

---

[1]) Содержательный обзор по этой проблеме см. у Крейдера и Роджерса (Kreider D. L., Rogers H. — Trans. AMS, 1961, **100**, p. 325—369).

[2]) Sierpinski W. L'hypothese du continu. — Paris, 1927.

[3]) Gödel K. The consistency of the continuum hypothesis. — Princeton, 1940; Коэн П. (Cohen P.). Теория множеств и континуум-гипотеза. — М.: Мир, 1969. Заметим, что при теперешних формализациях логики и теории множеств эту независимость можно доказать при помощи *счетных* моделей!

[4]) В выходящей работе Тененбаум (Tennenbaum S.) показывает, что существуют «модели» теории множеств (включающие аксиому выбора), в которых каждый суслинский континуум *изоморфен* множеству действительных чисел, и «модели», в которых это не так. (Работа Тененбаума вышла в Proc. Nat. Acad. Sci., 1968, **59**, p. 60—63. О независимости гипотезы Суслина см. в книге Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. — М.: Мир, 1973. — *Прим. перев.*)

XI.13 зависит от гипотезы континуума.) Однако следует помнить, что аксиома выбора необходима для доказательства теоремы о подпрямом разложении (§ 8), а к этой теореме мы будем постоянно взывать в главах XIII и следующих за ней.

Дополнительные упражнения

*1. Пусть L — булева решетка всех подмножеств счетного множества по модулю конечных множеств. Покажите, что любая максимальная цепь в L содержит вполне упорядоченную несчетную подцепь (Глисон, Мойс).

*2. Покажите, что счетная бесконечная булева алгебра не может быть нётеровой. (Указание. Если бы она была нётеровой, она должна была бы содержать бесконечное множество дизъюнктных атомов.)

*3. Покажите, что каждая полная счетная бесконечная булева алгебра допускает вложение в 2^{ω}.

*4. Пусть $B_0 \subset B$ — булевы алгебры и A — *полная* булева алгебра. Покажите, что каждый гомоморфизм μ: $B_0 \to A$ можно продолжить до гомоморфизма $\bar{\mu}$: $B \to A$ (Сикорский [1])).

*5. Найдите дистрибутивную решетку L, имеющую цепь, которую нельзя расширить до максимальной подрешетки [2]).

*6. Опишите свободную дистрибутивную решетку с $\aleph$ порождающими, где $\aleph$ — произвольное кардинальное число [3]).

*7. Покажите, что дистрибутивная решетка может быть вложена в булеву алгебру с сохранением бесконечных объединений и пересечений тогда и только тогда, когда она вполне дистрибутивна [4]).

*8. Покажите, что никакое тождество, не выводимое из L1—L4, не может выполняться во всех конечных решетках разбиений [5]).

*9 (лемма Ивамуры). Покажите, что каждое направленное множество D является объединением $D = \bigcup D_{\aleph}$ цепи направленных множеств, каждое из которых имеет меньшую мощность, чем D.

ПРОБЛЕМЫ

64. Существует ли бесконечная группа, для которой решетка подгрупп имеет конечную длину [6]) (Капланский)?

65. Существует ли тождество, которое выполняется в каждой конечной модулярной решетке, но не в каждой модулярной решетке? [7])

66. Каждый ли эквациональный класс решеток порождается своими конечными членами [8]) (Йонссон)?

---

[1]) Люксембург (Luxemburg W. A. J. — Fund. Math., 1964, **55**, p. 239—247). [См. упр. 13-(в) к § 8. — *Прим. перев.*]

[2]) Такеути (Takeuchi K. — J. Math. Soc. Japan, 1951, **2**, p. 228—230).

[3]) Арешкин Г. Я. — Матем. сб., 1953, **33**, с. 133—156; Нероуд (Nerode A. — Trans. AMS, 1959, **91**, p. 139—151).

[4]) Фунаяма (Funayama N. — Nagoya Math. J., 1959, **15**, p. 71—81).

[5]) Сакс (Sachs D. — Proc. AMS, 1961, **12**, p. 944—945).

[6]) Проблема 43 из [LT2]. Такую группу указал А. Ю. Ольшанский (Изв. АН СССР, сер. мат., 1980, **44**, с. 309—321). — *Прим. перев.*

[7]) Утвердительный ответ на этот вопрос дал Фриз (Freese R. — Trans AMS, 1979, **255**, p. 277—300). — *Прим. перев.*

[8]) Первый пример многообразия (модулярных) решеток, не порождаемого своими конечными членами, привел Бейкер (Baker K. A. — Pacif. J. Math., 1969, **28**, p. 9—15). — *Прим. перев.*

67. Построить две неизоморфные конечные подпрямо неразложимые алгебры, которые порождают одно и то же многообразие алгебр [1]) (Йонссон).

68. Получить теорему об однозначности разложения на множители для «канонических» ординальных произведений [2]) (Чэн [**Symp**, p. 123]).

69. Найти явную конструкцию, которая представляла бы любой гомоморфный образ решетки разбиений (т. е. подрешетки решетки Π_n) как решетку разбиений.

* **70.** Построить вложение (взаимно однозначное отображение) множества **R** в (на) множество всех счетных ординалов (т. е. ординалов α_0 таких, что множество всех $\alpha < \alpha_0$ счетно). (Первая проблема Гильберта [3]))

* **71.** Кардинальное число $\aleph$ называется недостижимым снизу, если существует $\aleph$ различных кардинальных чисел, меньших чем $\aleph$. Существует ли несчетное недостижимое кардинальное число [4]) (Серпинский)?

---

[1]) Две такие унарные алгебры указал Баррис (Burris S. — Colloq. math., 1971, **22**, p. 195—196). См. также Lee Sin Min. — Com. Math. Univ. Carol, 1980, **21**, p. 313—318. — *Прим. перев. и ред.*

[2]) Каноническим Чэн называет разложение, в котором ординалы располагаются в некотором предписанном порядке. — *Прим. перев.*

[3]) В первом (из 23) разделе своего знаменитого доклада Гильберт наряду с гипотезой континуума обсуждает и проблему эффективного полного упорядочения совокупности всех действительных чисел (Проблемы Гильберта. — М.: Наука, 1969). В теории множеств Цемерло — Френкеля такое полное упорядочение невозможно. См. проблему 12 в [**LT2**]. — *Прим. перев.*

[4]) Проблема 17 из [**LT2**]. Утверждение о существовании несчетных недостижимых кардинальных чисел не зависит от обычных аксиом теории множеств (см. в книге Йеха, упоминавшейся в примечании [4]) на с. 273). — *Прим. перев*

ГЛАВА IX

ПРИЛОЖЕНИЯ В ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ

1. Метрические пространства

До сих пор мы рассматривали главным образом *дискретные* решетки и их обобщение — *алгебраические* решетки. Многие из очень глубоких результатов теории решеток касаются связи между понятиями *предела* и *порядка* в *неалгебраических* решетках. В последующих трех главах мы и займемся изучением этих взаимосвязей и их приложениями.

Отправляясь от результатов, установленных в главах V и VIII, мы обнаружим новые возможности в теории решеток, совершенно отличные от того, что можно получить, основываясь на материале более ранних разделов.

В настоящей главе рассматриваются различные приложения теоретико-решеточных понятий к общей топологии, т. е. к общей теории топологических пространств. Идеи общей топологии можно проще всего ввести через понятие метрического пространства.

Определение. *Метрическое пространство* — это множество элементов («точек») с заданной на нем действительнозначной функцией расстояния $\delta(x, y)$, для которой выполняются условия

M1 $\delta(x, x) = 0$, причем $\delta(x, y) > 0$, если $x \neq y$;

M2 $\delta(x, y) = \delta(y, x)$ (симметричность);

M3 $\delta(x, y) + \delta(y, z) \geqslant \delta(x, z)$ (неравенство треугольника).

В метрическом пространстве M последовательность $\{x_n\}$ точек называется *сходящейся* к предельной точке a (в обозначениях $x_n \to a$), если $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(x_n, a) = 0$. Множество $S \subset M$, по определению, *замкнуто* (в M), если из того, что $\{x_n\} \subset S$ и $x_n \to a$ следует, что $a \in S$. Множество $U \subset M$ называется *открытым*, если его дополнение замкнуто. Равносильное условие: для любого $a \in U$ существует положительная постоянная $\varepsilon = \varepsilon(a, U)$ такая, что если $\delta(x, a) < \varepsilon$, то $x \in U$.

Обратно, можно показать, что $x_n \to a$ в метрическом пространстве M тогда и только тогда, когда каждое открытое подмножество $U \subset M$, которое содержит a, содержит все x_n с номерами $n > N(U)$, где $N(U)$ — некоторое положительное целое, зависящее от U (и от $\{x_n\}$). Другими словами, $x_n \to a$ тогда и только тогда, когда каждое замкнутое множество $S \subset M$, содержащее некоторую бесконечную подпоследовательность из $\{x_n\}$, содержит a.

Эти наблюдения показывают, что в метрическом пространстве M понятия замкнутого множества, открытого множества и сходящейся последовательности взаимно заменяемы: каждое из них можно определить в терминах любого другого, не используя понятие расстояния. Свойства пространства M, которые определимы в терминах любого (а значит, и всех) из этих трех понятий, называются *топологическими* свойствами. Само расстояние *не* является топологическим объектом.

Сопоставление сходящейся последовательности ее предела можно рассматривать как выполнение некоторой не всегда определенной («частичной») бесконечноместной (в смысле § VI.1) операции. Таким образом, любое метрическое пространство можно воспринимать как *частичную алгебру с бесконечноместными операциями*, «подалгебрами» которой будут тогда в точности замкнутые множества из M. Аналогом отношений конгруэнции при этом являются «расслоения» пространства M на непересекающиеся замкнутые подмножества; при помощи них строятся все непрерывные наложения $\alpha\colon M \twoheadrightarrow X$ пространства M на другие метрические и топологические пространства [1]).

Из теоремы VI.1 следует, что свойство быть метрически замкнутым для подмножеств является свойством *замыкания* в смысле § V.1: условия C1—C3, сформулированные там, удовлетворяются, и значит, замкнутые подмножества любого метрического пространства M образуют *муровское семейство*.

Теперь изучим более детально полную решетку $L(M)$ всех замкнутых подмножеств множества M и двойственную ей решетку $\breve{L}(M)$ всех *открытых* множеств, т. е. всех дополнений замкнутых множеств.

Лемма. *В любом метрическом пространстве*

(α) *теоретико-множественное объединение любых двух замкнутых множеств замкнуто;*

(β) *любое пересечение замкнутых множеств замкнуто;*

(γ) *любая точка является замкнутым множеством.*

Доказательство. Истинность утверждения (β) следует из того, что замкнутые подмножества образуют муровское семейство. Условие (α) вытекает из того факта, что любая последовательность точек в $S \cup T$ обязательно содержит бесконечную подпоследовательность точек из S или бесконечную подпоследовательность точек из T, а все такие последовательности должны сходиться к одному и тому же пределу. Что касается (γ), то вследствие (M1) последовательность $\{f, f, f, \dots\}$ сходится именно к f, а не к какой-либо другой точке.

---

[1]) Однако поскольку M является лишь «частичной алгеброй», образ $\alpha(M)$ не определяется с точностью до гомеоморфизма соответствующим расслоением.

2. Топологические пространства

Вместо того, чтобы рассматривать метрическое пространство как частичную алгебру относительно бесконечноместной операции «предел», можно трактовать замыкание как первоначально заданную унарную операцию на булевой алгебре (множестве-степени) 2^M всех подмножеств множества M, порождающую муровское семейство замкнутых множеств. Эта точка зрения приводит к определению топологического пространства, введенному в § V.4.

Определение. *Топологическим пространством* называется множество X вместе с выделенным в нем семейством замкнутых подмножеств, причем

R1 теоретико-множественное объединение любых двух замкнутых множеств замкнуто;

R2 любое пересечение замкнутых множеств замкнуто;

R3 само множество X и пустое множество $\varnothing$ замкнуты.

Мы уже видели (лемма 1 § 1), что любое метрическое пространство является топологическим пространством, в котором согласно (γ)

S1 любая точка есть замкнутое множество (условие Риса).

T_0-пространство, которое удовлетворяет условию S1, называется T_1-пространством.

В любом метрическом пространстве M выполняются дополнительные условия отделимости (мы опускаем доказательства):

S2 если p и q — различные точки, то M содержит непересекающиеся открытые множества U и V такие, что $p \in U$ и $q \in V$ (условие Хаусдорфа);

S3 если U — открытое множество, содержащее точку p, то существует открытое множество V, содержащее p и такое, что $\bar{V} \subset U$ (условие регулярности);

S4 если A и B — непересекающиеся множества в M, то M содержит открытые множества $U \supset A$ и $V \supset B$ такие, что $U \cap V = \varnothing$ (условие нормальности).

Топологическое пространство, которое удовлетворяет условию S2, называется *хаусдорфовым* пространством; если оно, кроме того, удовлетворяет S3, — *регулярным*; а если в нем выполняется S4, — *нормальным*. В [Kel] доказывается, что S2 влечет S1, из S3 и S1 следует S2, и что из S4 и S2 вытекает S3. Итак, любое метрическое пространство является *хаусдорфовым нормальным* (и следовательно, регулярным) пространством.

Оказывается, перечисленными условиями отделимости (в особенности S4) достаточно полно характеризуются кольца «замкнутых» множеств в метрических пространствах (точнее об этом см. в §§ 4—5). Содержание этих параграфов дополняет и углубляет результаты § V.4, где уже были установлены некоторые общие свойства решетки $L(X)$ замкнутых и решетки $\breve{L}(X)$ открытых множеств в T_1-пространствах.

3. Направленные множества и сети

В изучении общих свойств T_1-пространств как бесконечноместных частичных алгебр относительно подходящих операторов «сходимости» можно решающим образом использовать *направленные множества* индексов [1]).

С этой целью определим *сеть* [2]) $\{x_\alpha\}$ точек (может быть, топологического) пространства X как функцию из направленного множества A индексов α в X. (В случае $A = \omega$ получаются обычные бесконечные последовательности.) Тогда понятие сходимости для последовательностей метрического пространства обобщается следующим образом.

Определение. Говорят, что в T_1-пространстве X сеть $\{x_\alpha\}$ *сходится* к точке a (обозначается: $x_\alpha \to a$), если для любого открытого множества U, содержащего α, существует $\gamma(U)$ такое, что $x_\alpha \in U$ для всех $\alpha \geqslant \gamma(U)$.

Следующий основной результат подтверждает полезность введенного определения сходимости.

Теорема 1. *В T_1-пространстве X замыкание $\bar{S}$ произвольного множества S состоит из пределов сходящихся сетей точек множества S.*

Доказательство. Пусть $\{x_\alpha\} \subset S$ и $x_\alpha \to a$. Тогда $\bar{S}' = S^{-\prime} \subset S$ является открытым множеством, не содержащим ни одного x_α, а значит, по определению сходимости $x_\alpha \to a$, оно не может содержать и a. Следовательно, $a \in \bar{S}$. Напротив, если дано $a \in \bar{S}$, в качестве множества индексов возьмем совокупность всех открытых множеств U_α, которые содержат a, а в качестве упорядочения этого множества примем отношение, *обратное* включению. Тогда каждое $U_\alpha \cap S$ не пусто (иначе $U'_\alpha \supset S$, откуда $U'_\alpha \supset \bar{S}$ в противоречие предположению, что $a \in U_\alpha$), и можно выбрать $x_\alpha \in U_\alpha \cap S$ (это потребует аксиомы выбора). Ясно, что $x_\alpha \to a$, чем и завершается доказательство.

---

[1]) Пределы направленных множеств впервые рассматривал Мур (Moore E. H. — Proc. Nat. Acad. Sci., 1915, p. 628—632); см. также работу Мура и Смита (Moore E. H., Smith L. H. — Amer. J. Math., 1922, **44**, p. 102—121). К общей топологии они были применены Биркгофом [4]. Настоящее изложение содержит некоторые усовершенствования, предложенные Келли [1].

[2]) В русском переводе книги Келли [Kel] принят термин «направленность». — *Прим. перев.*

Это означает, что замкнутые подмножества любого T_1-пространства являются его «подалгебрами», если рассматривать пространство как бесконечноместную частичную алгебру относительно «операции» предельного перехода над подходящими направленными множествами (см. теорему VI.1).

Теперь поставим обратный вопрос: для каких операторов «предельного перехода» (на сетях над подходящими направленными множествами) соответствующие «подалгебры» определяют T_1-пространство? Автор [4] первоначально пытался найти ответ на этот вопрос обобщением привычного понятия «подпоследовательности», определив *конфинальное подмножество* сети $\{x_\alpha\}$ как сеть $\{x_\beta\}$ над таким подмножеством $B \subset A$ направленного множества индексов A сети $\{x_\alpha\}$, которое содержит вместе с любым α_0 и некоторое $\beta \geqslant \alpha_0$. Келли (см. [1] и [**Kel**, с. 101]) предложил обобщить понятие подпоследовательности до более широкого класса «подсетей», определяемых следующим образом.

Определение. Если даны сети $\{x_\alpha\}$ над A и $\{y_\beta\}$ над B, то $\{y_\beta\}$ называется *подсетью* сети $\{x_\alpha\}$, когда существует отображение π: $B \to A$ такое, что: (i) $y_\beta = x_{\pi(\beta)}$ для всех $\beta \in B$ и (ii) для любого $\alpha_0 \in A$ найдется $\beta_0 \in B$, при котором $\pi(\beta) \geqslant \alpha_0$, как только $\beta \geqslant \beta_0$.

Очевидно, что каждое конфинальное подмножество сети является подсетью, где π — естественное вложение. Подсети имеют то преимущество, что с ними обычное определение компактности (§ 7) получает следующий эквивалент: T_1-пространство компактно тогда и только тогда, когда каждая сеть в нем содержит сходящуюся подсеть [1]).

Лемма 1. *Сети любого T_1-пространства удовлетворяют следующим условиям:*

T1 *если $x_\alpha = a$ для всех $\alpha \in A$, то $x_\alpha \to a$;*

T2 *если $x_\alpha \to a$ и $\{x_\beta\}$ — подсеть в $\{x_\alpha\}$, то $x_\beta \to a$.*

Доказательство тривиально (см. [**Kel**, с. 107]).

Теперь покажем, что любая «сходимость», которая удовлетворяет условиям T1—T2, определяет топологическое пространство, если в качестве замкнутых множеств взять «подалгебры». Условие R1 ((β) леммы из § 1) выводится, как в теореме VI.1; условие R3 тривиально выполняется ((γ) следует из T1). Для завершения доказательства потребуется еще

Лемма 2. *Условие* T2 *влечет условие* (α) *леммы из* § 1.

Доказательство. Пусть $\{x_\alpha\} \subset S \cup T$, где S и T замкнуты. Тогда одно из подмножеств $\{x_\alpha\} \cap S$ или $\{x_\alpha\} \cap T$ обязательно конфинально, и значит, является подсетью в $\{x_\alpha\}$.

---

[1]) См. [**Kel**, с. 184]. О другом преимуществе сетей см. [**Kel**, с. 111, пример Д]. [В русском переводе книги [**Kel**] термину «компактность» соответствует «бикомпактность». — *Прим. перев.*]

Тогда, если $x_\alpha \to a$, то существует подсеть сети $\{x_\alpha\}$ в S или в T, которая вследствие T2 также сходится к a. Так как S и T замкнуты, то $a \in S \cup T$ в обоих случаях. Итак, $S \cup T$ замкнуто, если замкнуты S и T, что и требовалось.

Таким образом, при любом определении сходимости, лишь бы она удовлетворяла условиям T1—T2, замкнутые подмножества задают некоторую топологию. Однако в топологических пространствах общего вида такая сходимость имеет очень мало хороших свойств. Пусть, например, X — вырожденное топологическое пространство с континуумом точек, но лишь с двумя замкнутыми (или открытыми) множествами $\varnothing$ и X. В этом случае $x_\alpha \to a$ для *всех* $\{x_\alpha\}$ и a!

Чтобы исключить подобные патологические случаи, следует предположить выполнимость по крайней мере одного из условий отделимости S1—S4, упомянутых в конце § 1. Например, имеет место

Лемма 3. *Топологическое пространство X является хаусдорфовым тогда и только тогда, когда сходимость сетей в нем удовлетворяет условию*

T3 *если $x_\alpha \to a$ и $x_\alpha \to b$, то $a = b$.*

Доказательство см. в [Kel, с. 98]. С этой леммой связан следующий результат.

Лемма 4. *Хаусдорфово пространство регулярно тогда и только тогда, когда его сходящиеся сети удовлетворяют условию*

T4 *если $x_\beta^\alpha \to x_\alpha$ для любого α и $x_{\beta(\alpha)}^\alpha \to x$ при любом выборе $\beta(\alpha)$, то $x_\alpha \to x$.*

Доказательство см. в работе Биркгофа [4, теорема 7] [1]).

Даже всех условий T1—T4 недостаточно для того, чтобы вывести совпадение «замыкания» («подалгебры», порождаемой элементами) множества S с совокупностью всех пределов сходящихся сетей $\{x_\alpha\} \subset S$. Для этого необходимо постулировать (Биркгоф [4, теорема 5], [Kel, с. 100])

Закон повторных пределов. Пусть A — направленное множество, $B_\alpha = \{x_{\alpha,\beta}\}$ — направленное множество для любого $\alpha \in A$ и C — декартово произведение $C = A \prod_A B_\alpha$, причем по определению $(\alpha, \beta) \geqslant (\alpha', \beta')$ означает, что $\alpha \geqslant \alpha'$ и $\beta'(\alpha) \geqslant \beta(\alpha)$ для всех $\alpha \in A$. Пусть $x_\alpha \to p$ и $x_{\alpha,\beta} \to x_\alpha$ для любого фиксированного α. Тогда $x_{\alpha,\beta(\alpha)} \to p$.

(Заметим, что даже если A и все B_α будут копиями ω, для C это не так: указанный закон не может быть сформулирован в терминах *только* последовательностей.)

---

1) См. также работы Гримайзена (Grimeisen G. — Math. Ann., 1960, **141**, p. 318—342; 1961, **144**, p. 386—417; 1962, **147**, p. 95—109).

Упражнения к §§ 1—3

1. Покажите, что если пространство X является объединением двух взаимно дополнительных множеств X_1 и X_2, то $L(X) \cong L(X_1)\,L(X_2)$ (кардинальное произведение).

2. Сформулируйте лемму 1 для случая «L-пространств» Фреше, т. е. для множеств с «оператором сходимости» $x_n \to x$ для последовательностей таким, что
L1 если каждый $x_n = a$, то $x_n \to a$;
L2 если $\{x_{n(i)}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ и $x_n \to a$, то $x_{n(i)} \to a$.

3. Покажите, что если в метрическом пространстве $x_n \to a$ и $\varphi(n)$ — некоторая перестановка индексов, то $x_{\varphi(n)} \to a$.

4. Покажите, что если X — конечное T_1-пространство, то $L(X) \cong 2^X$.

5. Покажите, что если D — направленное множество, то терминальные отрезки $[a, \infty)$ из D образуют базис *фильтра* подмножеств.

6. Покажите, что если подмножество направленного множества не является конфинальным, то его дополнение обязательно конфинально.

7. (а) Покажите, что в топологическом пространстве X будет $a \in \overline{S}$ тогда и только тогда, когда каждое открытое подмножество $U = \overline{T}'$, содержащее a, содержит точку из S.

(б) Покажите, что для доказательства этого результата требуется только R2 (Оре).

8. Пусть X — такое T_0-пространство, в котором множество S замкнуто, если оно содержит все пределы *счетных* сетей из точек S. Покажите, что множество $T \subset X$ замкнуто, когда оно содержит все пределы сходящихся *последовательностей* точек из T с индексным множеством Z^+.

9. Определим *башню* как у-множество, изоморфное направленному множеству $2^{(C)}$ всех конечных подмножеств некоторого множества C. Покажите, что каждое направленное множество содержит конфинальное подмножество $\{x_\alpha\}$, где индексы образуют башню и $\alpha > \beta$ влечет $x_\alpha \gg x_\beta$ (Краснер).

10. В примере 1 § 6 выберем из каждого конечного множества $F \subset X$ какой-нибудь элемент $y_F \in F$. Покажите, что если эти F образуют направленное относительно теоретико-множественного включения множество, то $y_F \to a$ для любого $a \in X$.

4. Регулярные открытые множества

По теореме V.12 замкнутые множества любого T_1-пространства X образуют полную атомно порожденную дистрибутивную решетку $L(X)$; дуальная для нее решетка $\breve{L}(X)$ всех открытых множеств из X является полной (неатомной) *брауэровой* решеткой (§ V.10). Изучим более подробно эту решетку, заметив сперва, что так как двойственной к замыканию $\overline{S}$ множества S (относительно взятия дополнения) является его внутренность[1] $S'^{-'}$, множество S открыто тогда и только тогда, когда $S'^{-'} = S$.

Определение. Открытое множество S называется *регулярным*, если оно совпадает с внутренностью своего замыкания, т. е. если $S = \overline{S}'^{-'} = S^{-'-'}$; множество T называется *нигде не плотным*, если $T^{-'-} = X$.

[1] $S'^{-'}$ — это дополнение к замыканию дополнения множества S: горизонтальная черта обозначает замыкание. — *Прим. перев.*

Нигде не плотное открытое множество S в T_1-пространстве пусто, поскольку оно должно удовлетворять соотношению $S \subset \bar{S}'^{-\prime} = X' = \varnothing$.

Лемма 1. *В решетке $\breve{L}(X)$ открытых множеств любого T_1-пространства X множество $\bar{S}'$ является псевдодополнением S^* множества S* (в смысле § V.10).

Доказательство. Так как $S \subset \bar{S}$, то $S \cap \bar{S}' \subset \bar{S} \cap \bar{S}' = \varnothing$, а с другой стороны, если $S \cap T = \varnothing$ (T — открытое), то $\bar{S} \cap T = \varnothing$, откуда $T \subset \bar{S}'$. Значит, $\bar{S}' = S^*$ является наибольшим открытым множеством, которое не пересекается с S, что и требовалось.

Следствие. *Открытое множество S регулярно тогда и только тогда, когда $S = (S^*)^*$, т. е. тогда и только тогда, когда S замкнуто в $\breve{L}(X)$ относительно симметричной полярности, определяемой отношением $S \cap T = \varnothing$.*

Заметим, что в § 2 T_1-пространство было названо *регулярным*, если для каждого заданного $a \in A$, где A открыто, можно указать открытое множество B такое, что $a \in B \subset \bar{B} \subset A$. Но поскольку операция $S \to S'^{-\prime}$ изотонна, отсюда следует соотношение $\bar{B}'^{-\prime} \subset A'^{-\prime} = A$, т. е. A должно содержать *регулярное* открытое множество $B = B^{-\prime-\prime} = B^{**}$ такое, что $a \in B$.

Теорема Гливенко (V.26) для (брауэровых) решеток открытых множеств звучит следующим образом.

Теорема 2. *Пусть X — топологическое пространство. Соответствие $S \to \bar{S}'^{-\prime}$ является гомоморфизмом решетки $\breve{L}(X)$ всех открытых множеств пространства X на полную булеву решетку $B(X)$ всех его регулярных открытых множеств.*

Этот результат справедлив вообще для любых алгебр с замыканием, поскольку в них «открытые» элементы образуют брауэрову решетку [1]).

Теорема Гливенко имеет и другие следствия. Так, плотные открытые множества, т. е. те, которые удовлетворяют равенству $S^{**} = X$, образуют дуальный идеал в $\breve{L}(X)$. Далее, замкнутое множество T нигде не плотно тогда и только тогда, когда $T'^{-} = X$, т. е. тогда и только тогда, когда его открытое дополнение T' плотно. Значит, нигде не плотные замкнутые множества образуют в $\breve{L}(X)$ идеал. Наконец, множество T нигде не плотно тогда и только тогда, когда его замыкание обладает этим свойством; следовательно, все нигде не плотные множества образуют идеал.

Лемма 2. *Если S и T — открытые множества, то $S^{**} = T^{**}$ тогда и только тогда, когда разность множеств S и T является нигде не плотной.*

---

[1]) См. ниже теорему 5. — *Прим. ред.*

Доказательство. По теореме Гливенко $S^{**} = T^{**}$ тогда и только тогда, когда $S \cap D = T \cap D$, где D — некоторое плотное открытое множество. Согласно алгебраическим свойствам булева кольца это означает, что $S \cap D + T \cap D = (S + T) \cap \cap D$, т. е. что (симметрическая) разность $S + T$ множеств S и T лежит в нигде не плотном дополнении множества D или, равносильно, что $S + T$ нигде не плотно.

Следствие. *Непустое открытое множество X не может быть нигде не плотным.*

Теорема 3. *Если X — подмножество евклидова пространства, не имеющее изолированных точек, то булева алгебра A «регулярных» открытых множеств из X является пополнением сечениями свободной булевой алгебры B_∞ со счетным числом порождающих.*

Доказательство. Доказательство проходит вообще для любого T_1-пространства со счетным базисом регулярных открытых множеств, скажем a_i. В самом деле, a_i и их псевдодополнения a_i^* порождают копию свободной булевой алгебры B_∞ со счетным числом порождающих, которая может быть также определена (согласно следствию 4 из теоремы VI.13) как предел последовательности $2 \subset 2^2 \subset 2^4 \subset \ldots \subset 2^{2^n} \subset \ldots$. Ясно, что каждое $a \in A$ задает сечение в B_∞, причем x лежит в нижней половине сечения тогда и только тогда, когда $x \leqslant a$, и в верхней его половине тогда и только тогда, когда $x \geqslant a$. Далее, если в A не будет $b \leqslant \bar{a}$, то $b - \bar{a}$ оказывается непустым (так как a и b регулярны) открытым множеством, которое содержит некоторое $a_i > 0$, входящее в b, но не в a. Следовательно, различные элементы из A задают различные сечения в B_∞. Наконец, каждое сечение L, U в B_∞ соответствует некоторому $a \in A$. Действительно, возьмем множество всех $x_i \leqslant b$ для всех b из верхней половины U сечения. Тогда регулярная оболочка $(\bigvee x_i)^{**} \leqslant b$ для всех $b \in U$. Но $x_i \in L$ в B_∞ тогда и только тогда, когда $x \leqslant b$ для $b \in U$, т. е. тогда и только тогда, когда $x \leqslant \left(\bigvee\limits_L x_i\right)^{**} \in \in A$, чем и завершается доказательство.

Компактные элементы. В $\check{L}(X)$ элемент u является «компактным» (§ VIII.4) тогда и только тогда, когда соответствующее открытое множество U компактно (условие Гейне—Бореля). Значит, любое U, которое соответствует «компактному» элементу решетки $\check{L}(X)$ некоторого T_2-пространства, должно иметь открытое дополнение $U' \subset X$: каждый «компактный» элемент $u \in \check{L}(X)$ имеет дополнение. Следовательно, если $\check{L}(X)$ — полная *алгебраическая* решетка, то каждое открытое множество должно быть объединением компактных открытых множеств. Обратное тоже верно, так что $\check{L}(X)$ является полной алгебраической решеткой тогда и только тогда, когла X — стоуново пространство (§ 9). В этом случае теорема VIII.8 срабатывает особенно изящно: K оказывается булевой алгеброй открыто-замкнутых множеств, а $\widehat{K} \cong \breve{L}(X)$ — решеткой всех ее идеалов.

5. T_1-решетки

Почти очевидно, что любое T_1-пространство X определяется с точностью до гомеоморфизма решеткой $L(X)$ своих замкнутых множеств (а значит, и решеткой $\breve{L}(X)$).

Теорема 4. *Любое T_1-пространство X определяется с точностью до гомеоморфизма атомно порожденной дуально брауэровой решеткой $L(X)$ всех своих замкнутых множеств, упорядоченных включением* [1]).

Доказательство. Точки пространства X являются элементами, которые покрывают 0 («атомами») решетки $L(X)$. Замыкание $\bar{S}$ любого множества S из X состоит из таких $p \in X$, которые представляются атомами решетки $L(X)$, содержащимися в объединении (в смысле решетки $L(X)$) атомов из S.

Лемма. *Для любой точки p в T_1-пространстве X главный дуальный идеал $J(p)$ всех замкнутых множеств, которые содержат p, является максимальным идеалом в решетке $L(X)$, и обратно, если главный дуальный идеал максимален, то он имеет вид $J(p)$ для некоторой точки $p \in X$.*

Действительно, если K — некоторый бо́льший дуальный идеал, то K должен содержать $0 = a \wedge p$ для некоторого a, не содержащего p. Обратно, пусть: J — некоторый главный дуальный идеал в $L(X)$ с наименьшим элементом m, соответствующим замкнутому множеству $S(J)$. Если некоторая точка p содержится в $S(J)$, а $S(J)$ имеет еще другие точки, то дуальный идеал всех замкнутых $T \geqslant p$ будет бо́льшим, чем J, и значит, J не может быть максимальным.

Предшествующие замечания позволяют легко охарактеризовать те решетки, которые изоморфны решеткам всех замкнутых подмножеств в T_1-пространствах. Это просто такие полные атомно порожденные решетки, что решетки, дуальные к ним, являются брауэровыми. За исключением тривиальных случаев они *не* будут алгебраическими (хотя атомно порожденные брауэровы решетки являются алгебраическими!).

Теперь определим T_1-решетку как такую полную атомно порожденную решетку, что двойственная к ней решетка является

[1]) Перенесение этого результата на T_0-пространства осуществили Трон (Thron W. J. — Duke Math. J., 1962, 29, p. 671—680) и Дрейк и Трон (Drake D., Thron W. J. — Trans. AMS, 1965, 120, p. 57—71). Для T_2-пространств и т. д. см. в работе Керстана (Kerstan J. — Math. Nachr., 1958, 17, p. 16—18, 27—46).

брауэровой. Мы только что видели, что решетка является T_1-решеткой тогда и только тогда, когда она изоморфна решетке $L(X)$ всех замкнутых подмножеств подходящего T_1-пространства X. Очевидно также, что любая T_1-решетка обладает свойством дизъюнктивности Уолмена:

(W) если $s > t$, то существует точка $p \in L$ такая, что $s \wedge p > 0$, но $t \wedge p = 0$.

Алгебры с замыканием. Если опустить предположение об атомной порожденности, то получается интересное обобщение понятия T_1-решетки, названное Маккинси и Тарским, которые его изучали [1]), «алгеброй с замыканием».

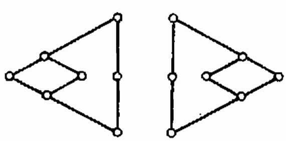


Рис. 20.

Определение. *Алгеброй с замыканием* называется булева алгебра с операцией замыкания, удовлетворяющей условиям C1, C2, C3* из § V.4, а также условию $\bar{0} = 0$.

Алгебры с замыканием имеют много интересных свойств, часть из которых рассматривается в [**LT2**, глава XI, § 7]. Особенно существенной является

Теорема 5. *«Открытые» элементы любой алгебры с замыканием C образуют брауэрову решетку.*

Доказательство. Если $a, b \in C$, то из $a \wedge x \leqslant b$ очевидным образом следует, что $x \leqslant b \vee a'$. Для *открытого* $x = x'^{-\prime}$, вследствие изотонности отображения $y \to y'^{-\prime}$, это соотношение равносильно тому, что $x \leqslant (b \vee a')'^{-\prime} = (b' \wedge a)^{-\prime}$. Значит, открытые элементы алгебры C образуют брауэрову решетку, в которой $b : a = (a \wedge b')^{-\prime}$.

Понятие «алгебра с замыканием» определяется тождествами для конечноместных операций. Следовательно (глава VI), можно построить *свободную* алгебру с замыканием с любым числом порождающих. Тарский и Маккинси установили, что свободная алгебра с замыканием со счетным числом порождающих может быть реализована в евклидовом пространстве. Куратовский на много лет раньше показал [2]), что свободная алгебра с замыканием с одним порождающим бесконечна, в то время как, если ограничиться унарной операцией взятия дополнения и операциями замыкания, свободная алгебра будет содержать точно 14 элементов. Ее диаграмма как у-множества изображена на рис. 20.

---

[1]) McKinsey J. C. C., Tarski A. — Ann. Math., 1944, **45**, p. 141—191; 1946, **47**, p. 122—162. Независимо и раньше аналогичные исследования провел Терасака (Terasaka H. — Math. Revs., 1950, **11**, p. 310). Об алгебрах с замыканием на булевых σ-алгебрах см. работу Сикорского (Sikorski R. — Fund. Math., 1949, **36**, p. 165—206).

[2]) Kuratowski K. — Fund. Math., 1922, **3**, p. 182—199.

Упражнения к §§ 4—5

1. Покажите, что в полной решетке $L(R)$ всех замкнутых подмножеств действительной прямой, если $c_\alpha \downarrow c$[1]), то $a \vee c_\alpha \downarrow a \vee c$ для любого $a \in L(R)$, но не двойственно.

2. Покажите, что топологическое пространство X является (хаусдорфовым) T_2-пространством тогда и только тогда, когда в $L(X)$ для любых заданных атомов p, q существуют элементы a, $b \in L(X)$ такие, что $a \wedge q = O$, $b \wedge q = O$, $a \vee b = I$.

3. Найдите аналогичные условия для того, чтобы X было нормальным или регулярным (T_2-пространством или T_4-пространством соответственно).

4. Покажите, что множество N нигде не плотно тогда и только тогда, когда из того, что S имеет непустую внутренность, следует, что $S \cap N'$ также имеет непустую внутренность.

5. Покажите, что пересечение двух «регулярных» открытых множеств регулярно, но их теоретико-множественное объединение регулярным может не быть.

6. Покажите, что булева алгебра изоморфна решетке всех регулярных открытых множеств подходящего T_1-пространства тогда и только тогда, когда она полна[2]).

7. Покажите, что множество S в топологическом пространстве X удовлетворяет равенству $S^{-\prime-\prime} = S^{\prime-\prime-}$ тогда и только тогда, когда S лишь на нигде не плотное множество отличается от некоторого открыто-замкнутого множежества[3]).

8. Покажите, что свободная булева алгебра со счетным числом порождающих изоморфна полю всех открыто-замкнутых подмножеств канторова дисконтинуума[4]) (Стоун [2, р. 303]).

9. (а) Покажите, что в T_1-решетке $L(X)$ точка p является компактным элементом тогда и только тогда, когда она изолирована (т. е. $p \notin p'^{-}$).

б) Убедитесь, что $L(X)$ не является алгебраической решеткой, если X не дискретно (тогда $L(X) \cong 2^X$).

*10. Покажите, что существуют негомеоморфные T_0-пространства X и Y, для которых $L(X) \cong L(Y)$[5]).

6. Решетка топологий. Теорема Арнольда

Если даны две топологии на множестве («пространстве») X, определяемые соответственно $\cap$-кольцами[6]) Γ и Λ замкнутых множеств, то говорят, что первая топология *слабее* второй, если $\Gamma \subset \Delta$. Аналогично (см. § 7) для сходимостей: σ считается *сильнее*, чем τ, если из $x_\alpha \to {}^\sigma a$ следует, что $x_\alpha \to {}^\tau a$ (чем сильнее топология, тем больше в ней замкнутых множеств и тем меньше сходящихся последовательностей).

Так как $\cap$-кольца подмножеств пространства X являются подалгебрами в 2^X, рассматриваемой как $\cap$-решетка, мы видим, что различные *топологии* на множестве X образуют замкнутый *дуальный* идеал. Далее, хаусдорфовы топологии образуют $\vee$-полу-

---

[1]) См. пояснение в § X.9. — *Прим. перев.*
[2]) Ответ на первый вопрос проблемы 82 из [LT2]. — *Прим перев.*
[3]) Левин (L e v i n e N. — Amer. Math. Monthly, 1961, **68**, p. 474—477).
[4]) Это решает проблему 79 из [LT2]. — *Прим. перев.*
[5]) Блейр (B l a i r R. L. — Duke Math. J., 1955, **22**, p. 271—280).
[6]) То есть с бесконечноместной операцией пересечения. — *Прим. перев.*

решетку — подмножество, которое вместе с любой входящей в него топологией содержит и все более сильные топологии [1]).

Пример 1. В самой слабой T_1-топологии на X замкнутыми множествами являются в точности все конечные подмножества и само X.

Пример 2. Для любой псевдометрики ([Kel, с. 162]) $\delta(x, y)$ пусть $x_\alpha \to {}^\delta a$ означает, что $\delta(x_\alpha, a) \to 0$. Тогда объединение множества Φ получающихся топологий определяется правилом $x_\alpha \to {}^\delta a$ для всех $\delta \in \Phi$.

Третий пример возникает в связи с понятием *L-пространства Фреше*, которое представляет собой первую попытку охарактеризовать топологии на языке сходимости. Это понятие определяется следующими последовательностными аналогами условий T1—T3 из § 3:

F1 если каждый $x_n = a$, то $x_n \to a$;

F2 если $x_n \to a$ и $\{x_{n(k)}\}$ — бесконечная подпоследовательность в $\{x_n\}$, то $x_{n(k)} \to a$;

F3 если $x_n \to a$ и $x_n \to b$, то $a = b$.

Урысон [2]) показал, что любое определение сходимости, удовлетворяющее условиям F1—F3, можно расширить до *звездной сходимости*, также удовлетворяющей F1—F3, следующим образом.

Теорема Урысона. *Пусть $x_n \to {}^*a$ означает, что каждая подпоследовательность $\{x_{n(k)}\}$ последовательности $\{x_n\}$ содержит подпоследовательность $\{x_{n(k(i))}\}$, сходящуюся к a. Тогда сходимость $x_n \to {}^*a$ удовлетворяет условиям* F1—F3 *и, кроме того, условию*

F4 *если каждая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ содержит подпоследовательность, звездно сходящуюся к a, то $x_n \to {}^*a$.*

Мы опускаем доказательство теоремы Урысона, приведенной здесь лишь для общей ориентации. Ее можно обобщить на конфинальные подмножества сетей [3]).

Если $f: X^r \to Y$ — функция от r переменных из L-пространства Фреше X в L-пространство Фреше Y, *непрерывная* в том смысле, что при $x^j_\alpha \to x_j$ для $j = 1, \ldots, r$ всегда $f(x^1, \ldots, x^r) \to$

---

[1]) Эти понятия были введены автором в Fund. Math., 1936, **26**, p. 156—166, где, к сожалению, имеется несколько неточностей, исправляемых здесь. Дальнейшие обобщения см. в работе Хьюита (Hewitt E. — Duke Math. J., 1943, **10**, p. 309—333).

[2]) Урысон П. С. — Einseignement Math., 1926, **25**, p. 77—83.

[3]) О недавних обобщениях теоремы Урысона см. работы Кисинского (Kisynski J. — Colloq. Math., 1959—1960, 7, p. 205—211) и Дадли (Dudley R. M. — Trans. AMS, 1964, **112**, p. 483—507).

$\to f(x_1, \ldots, x_r)$, то она остается непрерывной и для L^*-сходимости (т. е. если заменить $\to$ всюду на $\to^*$) [1].

Если в произвольном пространстве Фреше F будем считать, что множество X замкнуто, когда из $\{x_n\} \subset X$ и $x_n \to a$ следует принадлежность $a \in X$, мы, очевидно, превратим F в топологическое пространство. Так как это определение, будучи примененным к отношению $x_n \to {}^*a$ звездной сходимости, приводит к тому же самому классу замкнутых множеств, часто говорят, что F и F^* имеют одну и ту же топологию. Другая возможность заключается в том, чтобы ввести «замкнутые множества» и «сходящиеся сети» на данном пространстве X, отправляясь от следующего бинарного отношения.

(A) *замкнутость* подмножества $S \subset X$ по отношению к сходимости $x_\alpha \to a$ (где $\{x_\alpha\}$ — сеть) по определению означает, что если S содержит некоторое конфинальное подмножество из $\{x_\alpha\}$, то S содержит a (записывают $S\rho\,(x_\alpha \to a)$).

Можно показать, что класс всех сходящихся сетей любого топологического пространства обладает, кроме T1—T2, еще следующими общими свойствами [2]:

T2′ если из каждого конфинального подмножества $\{x_\beta\}$ сети $\{x_\alpha\}$ можно извлечь множество точек, которое после подходящей переиндексации сходится к a, то $x_\alpha \to a$;

T3′ если $x^\beta \to a$ и, для любого индекса β, $x^\beta_\alpha \to x^\beta$ над некоторым направленным множеством индексов A_β, то существует «диагональная» сеть $\{x^{\beta(\gamma)}_{\alpha(\gamma)}\}$ с направленным множеством C индексов γ, которая сходится к a (закон повторных пределов).

Очевидно, что условие T2′ является в некотором смысле обратным для условия T2, тесно связанного с идеей звездной сходимости. Условие T3′ соотносится с C2, которое утверждает, что замыкание множества X состоит из самого X и его предельных точек. Но истинное значение предыдущих условий выясняет следующий результат Арнольда.

Теорема Арнольда. *Для бинарного отношения* ρ *из* (A) *поляры* Γ^+ *семейств* Γ *«сходящихся» сетей являются* $\bigcap$*-кольцами «замкнутых» множеств, а поляры* Δ^* *семейств множеств являются сходящимися сетями, удовлетворяющими условиям* T1, T2, T2′, T3′. *При этом взаимно однозначное соответствие* $\Delta^* \leftrightarrow$

---

[1] Этот результат содержится в докторской диссертации (Гарвард) Джералда Эдгара (Edgar G.) «Сходимость с алгебраической точки зрения» (1973).

[2] См. Биркгоф [4, условия (4ε), (4δ)] и работу Арнольда (Arnold B. H.— Ann. Math., 1951, 54, p. 320). [Теорема Арнольда решает проблему 20 из [LT2]. — *Прим. перев.*]

$\leftrightarrow (\Delta^*)^+$ *вместе с обратным ему* $\Gamma^+ \leftrightarrow (\Gamma^+)^*$ *будет взаимно однозначным соответствием между сходящимися сетями и замкнутыми множествами в топологических пространствах.*

Келли [1, § 13] получил близкий результат, где место конфинальных подмножеств занимают подсети. В обеих теоремах не вполне ясен класс получающихся направленных множеств.

Упражнения

1. Докажите в деталях, что T_1-топологии на множестве X образуют полную решетку, в которой O состоит из X и всех его конечных подмножеств.

2. Докажите, что метризуемые топологии на X образуют полную $\wedge$-полурешетку, в которой $(\delta \wedge \delta')(x, y) = \max(\delta(x, y), \delta'(x, y))$.

3. Пусть M — множество всех метрических «функций расстояния» на X и пусть $\delta \leqslant \delta'$ означает, что $\delta(x, y) \leqslant \delta'(x, y)$ для всех $x, y \in X$. Покажите, что M — условно полная $\vee$-полурешетка, имеющая дуально гомоморфным образом $\wedge$-полурешетку из упр. 2.

4. Покажите, что точная нижняя грань любого множества регулярных топологий на пространстве X сама регулярна (Норрис [1])).

5. Докажите аналогичный результат для вполне регулярных топологий (Левин).

*6. Покажите, что среди всех локально связных (локально линейно связных) топологий, содержащих данную топологию, есть наименьшая (Кеннисон).

7. Базисы и предбазисы. Компактность

Напомним, что в § V.10 полная брауэрова решетка была определена как полная решетка, в которой

$$\text{L6}^* \qquad a \wedge \bigvee x_\alpha = \bigvee (a \wedge x_\alpha) \text{ для любого множества } \{x_\alpha\}.$$

Продолжим дальнейшее изучение таких решеток.

Определение. В полной брауэровой решетке L *базисом* называется подмножество B из L такое, что каждый элемент решетки L является объединением некоторых элементов из B. *Предбазисом* называется подмножество $S \subset L$ такое, что каждый элемент $a \in L$ является объединением *конечных* пересечений элементов из S. Двойственно определяются понятия базиса и предбазиса в полных дуально брауэровых решетках [2]).

Например, когда L является брауэровой решеткой $\breve{L}(X)$ всех открытых подмножеств T_1-пространства X, приведенное определение базиса превращается в обычное понятие *базиса* открытых множеств. В обычном евклидовом пространстве в качестве B можно взять множество всех шаров с рациональными

---

[1]) Norris M. J. — Proc. AMS, 1950, 1, p. 754—755. По поводу упр. 5 см. работу Levine M. — Amer. Math. Monthly, 1963, p. 284, а упр. 6 содержит результат из диссертации Кеннисона (Гарвард, 1963).

[2]) Это приводит к некоторой двусмысленности в полных брауэровых решетках, двойственные к которым решетки тоже брауэровы (например, в полных булевых алгебрах).

радиусами, имеющих центры с рациональными координатами (*счетный базис окрестностей*).

Двойственно можно определить *базис* замкнутых множеств топологического пространства X как произвольное семейство B замкнутых множеств такое, что

(B*) любое замкнутое множество является пересечением замкнутых множеств из B.

Аналогично *предбазис* замкнутых множеств определяется как семейство G замкнутых множеств такое, что каждое замкнутое множество является пересечением конечных объединений множеств S_α из G. Для действительных чисел замкнутые интервалы $[a, b]$ вместо с полубесконечными интервалами $[a, +\infty)$ и $(-\infty, a]$ образуют базис замкнутых множеств в обычной топологии.

Лемма. *Подмножество S полной брауэровой решетки L является предбазисом в L тогда и только тогда, когда S порождает L относительно бинарных пересечений и произвольных объединений.*

Доказательство. Как в главе VI (но допуская *бесконечноместную* операцию объединения), мы замечаем, что подалгебра $\overline{S}$, порожденная множеством S, содежит все объединения конечных пересечений:

(1) $\bigvee_{\Sigma}\left\{\bigwedge_{F(\sigma)} x_{\sigma i}\right\} \in \overline{S}$, если все $x_{\sigma i} \in S$, а $\sum$ индексирует совокупность конечных множеств $F(\sigma)$ с элементами $x_{\sigma i}$ $(i = 1, \ldots, n(\sigma))$.

Далее, согласно обобщенному ассоциативному закону L^* множество элементов вида (1) замкнуто относительно бесконечных объединений. Наконец, пересечение двух выражений вида (1) при $f_\sigma = \bigwedge_{F(\sigma)} x_{\sigma i}$ и $g_\tau = \bigwedge_{G(\tau)} y_{\tau j}$ (где $y_{\tau j} \in S$) также имеет вид (1), поскольку

(2) $$\bigvee_{\Sigma} f_\sigma \wedge \bigvee_{T} g_\tau = \bigvee_{\Sigma\times T} (f_\sigma \wedge g_\tau) -$$

почти как в главе V, (4′).

Отсюда следует, что пересечения конечных объединений любого семейства множеств образуют $\cap$-кольцо. Значит, любое семейство множеств пространства Q, содержащее само Q и имеющее пустое пересечение, является предбазисом замкнутых множеств *некоторой* топологии на Q.

Компактность. Наиболее важные приложения понятия предбазиса относятся к проблеме «компактификации» — вложения данного топологического пространства в качестве всюду плотного подмножества в некоторое компактное пространство, Топологическое пространство X называется *компактным*, если из любого семейства Ψ открытых множеств S_ψ такого, что $\bigcup_\Psi S_\psi = X$, можно извлечь *конечное* подсемейство Φ, для которого $\bigcup_\Phi S_\varphi = X$ (условие покрытия Гейне—Бореля—Лебега (ГБЛ)). Ясно, что это равносильно тому, что пространство X является компактным (или, что в данном случае по лемме 3 из § VIII.5 равнозначно, $\bigvee$-недостижимым) элементом в (алгебраической) брауэровой решетке $\breve{L}(X)$ всех открытых множеств пространства X.

Двойственно, X компактно, когда $L(X)$ обладает тем свойством, что из равенства $\bigwedge_\Psi y_\psi = O$ в $L(X)$ следует, что $\bigwedge_\Phi y_\varphi = O$ для некоторого конечного подсемейства $\Phi \subset \Psi$. Или, равносильно: если дуальный идеал $D(\Psi)$, порожденный подмножеством Ψ решетки $L(X)$, является собственным, то $\bigwedge_\Psi y_\psi > O$, поскольку $D(\Psi)$ состоит из элементов x таких, что $x \geqslant \bigwedge_\Phi y_\varphi$ для некоторого конечного подсемейства Φ из Ψ.

Теорема 6. *T_1-пространство X компактно тогда и только тогда, когда в $L(X)$ каждый максимальный (собственный) дуальный идеал является главным.*

Доказательство. Предположим, что в $L(X)$ каждый максимальный собственный дуальный идеал является главным, и пусть Ψ — некоторое множество замкнутых множеств, имеющих свойство конечных пересечений[1]). Расширим дуальный идеал, порожденный Ψ, до максимального собственного дуального идеала (это возможно, поскольку $L(X)$ имеет O (см. § VIII.7)). Он будет главным и соответствует точке, содержащейся в каждом множестве из Ψ, что и доказывает компактность пространства X. Обратно, если X — компактное T_1-пространство, то любой собственный дуальный идеал H в $L(X)$ представляет семейство замкнутых множеств со свойством конечных пересечений. Если p — точка, общая для всех этих множеств, то главный дуальный идеал $J(p)$ является собственным дуальным идеалом, содержащим H; если H максимален, то $H = J(p)$, чем и завершается доказательство.

Локальная компактность. T_1-пространство называется *локально компактным*, если любая его точка p имеет окрестность с компактным замыканием. В *регулярном* T_1-пространстве это равносильно требованию, чтобы точка p содержалась во внутренности регулярного замкнутого (т. е. совпадающего с замыканием своей внутренности) множества, которое компактно. Это дает

Следствие. *Регулярное T_1-пространство локально компактно тогда и только тогда, когда в решетке $L(X)$ каждый*

---

[1]) См. начало § 8. — *Прим. перев.*

атом является внутренностью некоторого регулярного элемента $c = c^{**}$, т. е. такого, что в идеале, состоящем из всех $x \leqslant c$, каждый максимальный дуальный идеал является главным.

8. Теоремы Александера и Тихонова. Компактификация

Скажем теперь двойственно, что подмножество K полной брауэровой решетки L имеет *свойство конечных объединений*, если $\bigvee_F x_\alpha < I$ для любого *конечного* подмножества F из K. Это, очевидно, свойство алгебраического характера. Будем говорить, что подмножество S из L имеет *ГБЛ-свойство*, если из того, что $\bigvee_T x_\alpha = I$ и $T \subset S$, следует равенство $\bigvee_F x_\alpha = I$ для некоторого конечного подмножества $F \subset T$.

Теорема. 7. *Если некоторый предбазис S полной брауэровой решетки L обладает ГБЛ-свойством, то им обладает и сама решетка L.*

Доказательство. Достаточно показать, что если $K \subset L$ имеет свойство конечных объединений, то $\bigvee_K x_\alpha < I$ (т. е. что $\bigvee_K x_\alpha = I$ влечет равенство $\bigvee_F x_\alpha = I$ для некоторого конечного $F \subset K$). Но любое $K \subset L$ со свойством конечных объединений может быть расширено до *максимального* M с этим свойством: $K \subset M \subset L$, так как это свойство носит алгебраический характер. Поскольку S — предбазис, каждое $x_\mu \in M$ удовлетворяет равенству $x_\mu = \bigwedge_{F(\mu)} s_{\mu, i}$, где $s_{\mu, i} \in S$.

Далее, если $s_{\mu, i} \triangledown \bigvee_{G(i)} x_{i, j} = I$ для всех $s_{\mu, i} \in F(\mu)$ и подходящего конечного подмножества $G(i) \subset M$, то для $u_i = \bigvee_{G(i)} x_{i, j}$ вследствие L6 будет

$$x_\mu \vee u_i = \left\{\bigwedge_{F(\mu)} s_{\mu, i}\right\} \vee u_i = \bigwedge_{F(\mu)} \{s_{\mu, i} \vee u_i\},$$

где $s_{\mu, i} \triangledown u_i = I$ по предположению.

Итак, $x_\mu \triangledown u_i = x_\mu = \bigvee_{G(i)} x_{i, j} = I$. Но это невозможно, так как $x_\mu \in M$, все $x_{i, j} \in G(i) \subset M$, множество элементов $x_{i, j}$ конечно, а M имеет свойство конечных объединений.

Следовательно, если дано $x_\mu \in M$, можно присоединить к M некоторый элемент $s_{\mu, i} \in F(\mu)$, не нарушая свойства конечных объединений. Так как M максимально, то $s_{\mu, i} \in M$, причем $s_{\mu, i} \geqslant \bigwedge_{F(\mu)} s_{\mu, j} = x_\mu$. Таким образом, для любого $x_{\mu, i} \in M$ мы можем указать элемент $s_\mu = s_{\mu, i} \in M \wedge S$ такой, что $s_\mu \geqslant x_\mu$. Поскольку эти элементы s_μ входят в M, они обладают свойством конечных объединений, а ввиду того, что $s_\mu \in S$ и в S выполняется ГБЛ-свойство, будет $\bigvee_M s_\mu < I$. Так как $K \subset M$, то тем более $\bigvee_K x_\alpha \ll \bigvee_M x_\mu \ll \bigvee_M s_\mu < I$, чем и завершается доказательство.

Самым важным выводом из теоремы 7 является следующее

Следствие (теорема Александера[1]). *T_1-пространство X компактно, если оно содержит предбазис Σ замкнутых множеств K_β со следующим свойством компактности:*

(C) *если $\bigcap_\Psi K_\psi = \varnothing$ для некоторого множества $\Psi \subset \Sigma$, то $\bigcap_F K_\varphi = \varnothing$ для некоторого конечного подмножества $F \subset \Psi$.*

Доказательство. По предположению, решетка $\breve{L}(X)$ имеет предбазис S (состоящий из множеств K_β') с ГБЛ-свойством. Следовательно, по теореме 7 сама решетка $\breve{L}(X)$ обладает ГБЛ-свойством. Снова используя двойственность, получаем, что X компактно.

Определение. *Топологическим произведением $P = \Pi X_\alpha$* семейства топологических пространств X_α называется декартово произведение этих X_α с предбазисом замкнутых множеств, состоящим из декартовых произведений ΠC_α замкнутых множеств пространств X_α.

Пример 3. Для любого кардинального числа $\aleph$ *канторово $\aleph$-пространство* есть топологическое произведение $\aleph$ экземпляров дискретного пространства на двухточечном множестве. Канторово $\aleph_0$-пространство гомеоморфно *канторову множеству* в $[0, 1] \subset \mathbf{R}$, состоящему из всех чисел, троичное десятичное разложение которых состоит только из нулей и единиц, и поэтому оно метризуемо.

Пример. 4. Топологическое произведение $[0, 1]^\omega$ счетного числа экземпляров отрезка $[0, 1]$ называется *гильбертовым кубом*. Это универсальное сепарабельное метрическое пространство.

В общем случае сеть $\{x_\beta\} \subset \Pi X_\alpha$ сходится к пределу c, если α-компоненты $x_{\beta,\alpha}$ сходятся к c_α при любом α. Это вполне согласуется с упомянутой в § 1 идеей, что топологическое пространство является бесконечноместной частичной алгеброй относительно соответствующих операций сходимости.

Из теоремы Александера в качестве почти очевидного следствия получается следующий важный результат.

Теорема 8 (Тихонов). *Произведение компактных топологических пространств компактно.*

---

[1]) Это обобщает классическую теорему Александера (Alexander J. W.— Proc. Nat. Acad. Sci., 1939, **25**, p. 52—54, 296—298). См. также Ann. Math., 1938, **39**, p. 883—912.

Предостережение. Произведение любых двух локально компактных топологических пространств локально компактно, но, например, произведение счетного числа экземпляров действительной прямой $\mathbf{R}$ не будет локально компактным, хотя сама $\mathbf{R}$ обладает этим свойством.

Когда пространство X компактно, теорема 2 может быть значительно усилена. Именно, имеет место

Теорема 9. *Любое компактное T_1-пространство X определяется с точностью до гомеоморфизма любым кольцом B замкнутых подмножеств, представляющим собой базис замкнутых множеств в X.*

Доказательство. Каждая точка из X соответствует некоторому максимальному дуальному идеалу в B, как в § 5. Обратно, пусть M — некоторый максимальный (собственный) дуальный идеал в B. Будучи собственным, M должен обладать свойством конечных пересечений; в самом деле, легко показать, что максимальные дуальные идеалы решетки — это *в точности* максимальные носители свойства конечных пересечений среди ее подмножеств. Так как X компактно, то отсюда следует, что существует точка $p \in X$, общая для всех (замкнутых) подмножеств из M. Но больше одной такой точки не может быть — иначе дуальный идеал M не был бы максимальным: если $p \neq q$, то кольцо B (будучи базисом) должно содержать замкнутое множество, содержащее p, но не содержащее q, и тогда можно присоединить это множество к M, не нарушая свойства конечных пересечений.

Теорема 10 (Уолмен[1]). *Пусть L — дистрибутивная решетка со свойством дизъюнктивности* (W) *из* § 5. *Тогда L изоморфна подрешетке решетки $L(X)$ всех замкнутых подмножеств некоторого компактного T_1-пространства X.*

Доказательство. В качестве точек пространства X возьмем максимальные дуальные идеалы решетки L, а за базис B его замкнутых подмножеств примем множества $S(a)$, состоящие из таких точек $p = p(M)$, что $a \in M$. Нетрудно проверить следующие факты: (i) $S(a \wedge b) = S(a) \cap S(b)$; (ii) $S(a \vee b) = S(a) \cup S(b)$; (iii) указанные $S(a)$ обладают свойством компактности. В самом деле, (i) и (ii) являются свойствами простых идеалов в дистрибутивных решетках, а всякий максимальный идеал прост. Свойство дизъюнктивности показывает, что так определенное пространство X является T_1-пространством.

Чтобы доказать (iii), допустим, что J есть произвольное семейство множеств из B, обладающих свойством конечных пересечений, и пусть M является расширением соответствующего $a > 0$ в L до максимального собственного дуального идеала.

---

[1]) Wallman H. — Ann. Math., 1938, 39, p. 112—126. См. также работу Самуэля (Samuel P. — Trans. AMS, 1948, 94, p. 100—132).

Такое расширение существует, поскольку быть собственным дуальным идеалом в решетке с 0 есть свойство алгебраического характера (глава VIII). Ясно, что $p(M) \in S(a)$ для любого $a \in M$, и следовательно, указанные $S \in J$ имеют непустое пересечение. Это завершает доказательство теоремы 10.

Пусть теперь L — дистрибутивная решетка, определяемая подмножествами какого-нибудь *базиса* замкнутых множеств (нормального) T_1-пространства X, причем этот базис является также *кольцом* подмножеств пространства X. Мы можем использовать теорему 10 для построения из L компактного пространства X^*, содержащего X в качестве плотного подмножества. Это будет компактификация Уолмена—Чеха для X, причем X^* имеет те же размерность (в смысле Чеха) и группу гомологий, что и X [1]).

Упражнения к §§ 7—8

1. Покажите, что условие дизъюнктивности (W) Уолмена равносильно тому, что если $s > t$, то $s^* > t^*$ в $L(X)$.

2. Покажите, что если топологическое пространство регулярно, то его регулярные открытые множества составляют базис пространства.

3. Пусть $\mathcal{N}$ и $\mathcal{U}$ — открытые базисы топологий на пространстве X. Покажите, что топология, определяемая на X базисом $\mathcal{N}$, слабее, чем топология, определяемая базисом $\mathcal{U}$, тогда и только тогда, когда для $N \in \mathcal{N}$ и $x \in N$ существует $U \in \mathcal{U}$ такое, что $x \in U \subset N$.

4. (а) Покажите, что каждое компактное подмножество T_2-пространства замкнуто.

(б) Покажите, что каждое замкнутое подмножество компактного топологического пространства компактно.

5. Покажите, что каждое компактное хаусдорфово пространство нормально.

*6. Покажите, что нормальная [вполне регулярная] топология на множестве X компактна тогда и только тогда, когда она минимальна в у-множестве всех нормальных [вполне регулярных] топологий на X (Берри [2]).

7. Покажите, что непрерывные образы («гомоморфы») компактного хаусдорфова пространства X определяются его разбиениями на (непересекающиеся) замкнутые подмножества («подалгебры»).

8. Покажите, что хаусдорфово пространство X компактно тогда и только тогда, когда каждая сеть в X имеет сходящуюся подсеть (Келли).

9. Пусть $X = \Pi X_i$ (декартово произведение). Докажите, что $x_\alpha \to a$ в X тогда и только тогда, когда $x_{\alpha,\, i} \to a_i$ в каждом X_i.

*10. Назовем сеть $\{x_\alpha\}$ в множестве X *универсальной*, если для любого $S \subset X$ она с некоторого момента (т. е. для всех $\alpha \geqslant \sigma(S)$) вся находится в S или вся находится в S'. Докажите, что каждая сеть имеет универсальную подсеть (Келли).

*11. Из топологического пространства X образуем множество $X^* = X \cup \{\infty\}$, открытыми множествами в котором будем считать открытые множества из X и такие подмножества Y множества X, дополнение которых в X^* является замкнутым компактным подмножеством в X. Покажите, что X^* компактно и является хаусдорфовым пространством тогда и только тогда, когда X — локально компактное хаусдорфово пространство (П. С. Александров).

---

[1]) Фринк (Frink O. — Amer. J. Math., 1964, **86**, p. 602—607).

[2]) Berri M. P. — Trans. AMS, 1963, **108**, p. 97—105.

12. Покажите, что в у-множестве всех вполне регулярных топологий на множестве X элемент минимален тогда и только тогда, когда он является компактной топологией [1]).

13. Покажите, что произведение любых двух локально компактных топологических пространств само локально компактно.

9. Теорема Стоуна о представлении

По теореме 9 компактное T_1-пространство X определяется с точностью до гомеоморфизма любым *кольцом* замкнутых множеств, образующим базис, которое рассматривается как дистрибутивная решетка. С другой стороны, замкнутое подмножество из X имеет замкнутое дополнение тогда и только тогда, когда оно определяет несвязность [2]) пространства X. Таким образом, пространство X обладает *полем* замкнутых множеств, образующим базис, тогда и только тогда, когда это пространство *вполне несвязно* в том смысле, что любые две различные его точки лежат во взаимно дополняющих друг друга замкнутых множествах.

Обратно, множество *всех* открыто-замкнутых подмножеств любого вполне несвязного компактного T_1-пространства образует поле замкнутых множеств, являющееся базисом. Это показывает, что рассуждения § 8 в случае вполне несвязных пространств приводят к булевым алгебрам. Теперь мы охарактеризуем эти пространства с другой точки зрения.

Лемма. *Компактное пространство X вполне несвязно тогда и только тогда, когда оно нульмерно.*

Доказательство. Пусть X вполне несвязно, точка $p \in X$ и $U(p)$ — произвольное открытое множество, содержащее p. Для любого $q \in U'$ существует открыто-замкнутое множество $S(q)$, содержащее q, но не содержащее p. Так как множество U' компактно (вследствие компактности пространства X), то оно должно содержаться в некотором конечном объединении $S(q_1) \cup \ldots$ $\ldots \cup S(q_n)$, дополнение которого $V = \bigcap S'(q)$ есть окрестность точки p, содержащаяся в U и имеющая пустую границу. Существование такой окрестности для любого $U(p)$ и означает, по определению, нульмерность пространства X. Обратно, любое нульмерное пространство очевидным образом вполне несвязно (и хаусдорфово).

Понятно, что любая булева алгебра обладает свойством дизъюнктивности (W) Уолмена и, следовательно (теорема 10), ее можно рассматривать как базис замкнутых множеств некоторого (вполне несвязного) компактного T_1-пространства; обратное уже отмечалось. Тем самым доказана основная часть следующего классического результата Стоуна [2, теорема 4].

---

[1]) Вада (Wada J. — Osaka Math. J., 1953, 5, p. 1—12).

[2]) В оригинале disconnects. — *Прим. перев.*

Теорема 11. *Существует взаимно однозначное соответствие между булевыми алгебрами A и вполне несвязными (т. е. нульмерными) компактными T_2-пространствами X, при котором элементы алгебры A соответствуют открыто-замкнутым подмножествам из X, а точки пространства X — простым (= максимальным) идеалам в A.*

Имея в виду этот результат, Стоун назвал нульмерные компактные T_2-пространства «булевыми пространствами». Однако, отмечая фундаментальный вклад самого Стоуна в исследования по этим вопросам (Стоун [1], [2]), «булево» пространство, ассоциированное с данной булевой алгеброй A, обычно называют *стоуновым пространством* для A, а теорема 11 называется теоремой Стоуна о представлении.

Предшествующие рассмотрения могут быть расширены на случай нульмерных локально компактных T_2-пространств. В любом таком пространстве X *компактные открытые* множества образуют обобщенную булеву алгебру (§ II.12). Существует также обобщение и на случай компактных T_0-пространств [1]).

10. Решетки непрерывных функций

Если X — *вполне регулярное* T_1-пространство, то, по определению, для любой окрестности U произвольной точки $x \in X$ существует функция f: $X \to [0, 1]$ такая, что $f(x) = 0$ и $f \equiv 1$ на U' — дополнении для U. Множество всех действительных непрерывных функций на данном вполне регулярном T_1-пространстве X образует решетку $C(X)$ относительно обычного порядка: $f \leqslant g$ в $C(X)$ означает, что $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in X$. Множество $C(X)$ является также *кольцом* при естественном определении сложения и умножения, и это кольцо весьма интенсивно изучалось [2]); мы будем исследовать $C(X)$ как решеточно упорядоченное кольцо в главе XVII, а как векторную решетку — в главе XV.

Здесь отметим только одно, чисто теоретико-решеточное, свойство для $C(X)$.

Теорема 12 (Капланский [3])). *Любое компактное хаусдорфово пространство K с точностью до гомеоморфизма определяется решеткой $C(K)$ своих непрерывных функций.*

Набросок доказательства. Будем говорить, что простой идеал $P \subset C(K)$ *ассоциирован* с точкой $x \in K$, если из $f \in P$ и $g(x) < f(x)$ следует, что $g \in P$. Доказательство опирается на следующие три леммы.

Лемма 1. *Каждый простой идеал P ассоциирован с одной и только с одной точкой из K.*

---

[1]) Стоун [3] и Ригер (Rieger L.). — Čas. Math. Fys., 1949, 74, p. 56—61.

[2]) См. в книге Гилмана и Джерисона (Gillman L., Jerison M. Rings of continuous functions. — Van Nostrand, 1976).

[3]) Kaplansky I. — Bull. AMS, 1947, 53, p. 617—622.

Лемма 2. *Два простые идеала P, Q ассоциированы с одной и той же точкой $x \in K$ тогда и только тогда, когда $P \wedge Q$ содержит простой идеал.*

Лемма 3. *Пусть f_0 — фиксированная функция в $C(K)$ и S — подмножество в K. Точка x находится в замыкании $\bar{S}$ множества S тогда и только тогда, когда некоторый простой идеал $P(x)$, ассоциированный с x, содержит пересечение $A(S)$ простых идеалов, содержащих f_0 и ассоциированных с точками множества S.*

Принимая эти три леммы (они доказаны в [LT2, с. 245]), назовем два простые идеала в $C(K)$ *эквивалентными*, если их пересечение содержит третий простой идеал. Леммы 1—2 показывают, что классы эквивалентных простых идеалов можно интерпретировать как точки пространства K. Лемма 3 дает возможность описать топологию в K в терминах отношения включения между простыми идеалами.

Теорема Капланского была перенесена на некомпактные пространства Сиротой и Хенриксеном [1]).

Упражнения к §§ 9—10

1. Покажите, что любое булево пространство нормально.

2. Охарактеризуйте (с точностью до булева изоморфизма) булеву алгебру всех регулярных открытых множеств гильбертова пространства (а) в «сильной» и (б) в «слабой» топологии.

3. Назовем топологическое пространство экстремально несвязным, если замыкание *любого* открытого множества открыто. Докажите, что булево пространство является стоуновым пространством *полной* булевой алгебры тогда и только тогда, когда оно экстремально несвязно [2]).

4. Покажите, что в экстремально несвязном компактном пространстве открытое множество регулярно тогда и только тогда, когда оно является и замкнутым (*открыто-замкнутое* множество) (Фринк).

5. Покажите, что если A — булева алгебра и $S(A)$ — ее стоуново пространство, то группа $\operatorname{Aut} A$ изоморфна группе гомеоморфизмов пространства $S(A)$ (Стоун).

6. Пусть B — полная брауэрова решетка всех замкнутых подмножеств рациональной прямой $\mathbf{Q}$ в естественной топологии. Покажите, что центр решетки B состоит из всех открыто-замкнутых подмножеств пространства $\mathbf{Q}$ и *не* является полным.

7. Покажите, что если решетки неотрицательных полунепрерывных сверху функций на двух вполне регулярных топологических пространствах X и Y изоморфны, то X и Y гомеоморфны [3]).

8. Покажите, что пополнение сечениями (векторной) решетки $C_b(X)$ всех ограниченных непрерывных функций на регулярном T_1-пространстве X изоморфно решетке $C(K)$, где K — стоуново пространство булевой алгебры всех регулярных открытых множеств пространства X [4]).

[1]) Shirota T. — Osaka Math. J., 1952, 4, p. 121—132; Henriksen M. — Proc. AMS, 1956, 7, p. 959—960.

[2]) Глисон (Gleason A. — Illinois J. Math., 1958, 2, p. 482—489).

[3]) Нагата (Nagata J. — Osaka Math. J., 1949, 1, p. 166—181).

[4]) По поводу упр. 8 см. работы Дилуорса (Dilworth R. P. — Trans. AMS, 1950, 68, p. 427—438), Хорна (Horn A. — Pacif. J. Math., 1953, 3, p. 143—152), Пирса (Pierce R. S. — Canad. J. Math., 1953, 5, p. 95—100).

ПРОБЛЕМЫ

72. Найти необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять булева решетка, чтобы быть изоморфной решетке всех регулярных открытых множеств некоторого метрического пространства [1]).

73. (а) Получить условия на сходимость сетей, необходимые и достаточные для полярности окрестностям в хаусдорфовом пространстве; (б) тот же вопрос для сходимости последовательностей в метрическом пространстве.

74. Как связаны между собой непрерывность функции $f(x, y)$ на произведении $X \times Y$ двух хаусдорфовых пространств и требование для сетей, чтобы из $x_\alpha \to x$ и $y_\alpha \to y$ следовало $f(x_\alpha, y_\alpha) \to f(x, y)$?

75. Как наилучшим образом представить произвольную полную брауэрову решетку множествами? Чему будут соответствовать в этом представлении компактные элементы решетки?

76. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы брауэрова решетка была изоморфна решетке всех замкнутых элементов подходящей алгебры с замыканием [2]). Будет ли класс всех таких решеток многообразием?

77. Расширить топологическую теорию размерности на алгебры с замыканием. (Ср. [**LT2**, проблема 83]).

78. Если направленные множества («конфинальные порядковые типы») квазиупорядочить вложением, то будет ли возникающее в результате у-множество (§ II.1) направленным? Будет ли оно полной решеткой? [3])

79. (а) Исследовать разрешимость проблемы тождества слов для свободных брауэровых решеток с n порождающими (в частности, для $n = 1, 2$).

(б) Та же проблема для свободной алгебры с замыканием с n порождающими.

80. Будет ли решетка всех T_0-топологий на несчетном множестве решеткой с дополнениями? [4])

---

[1]) Это может оказаться связанным с проблемой Мура: всякое ли нормальное пространство Мура метризуемо? По поводу этой последней проблемы см. работу Бинга (Bing R. H. — Proc AMS, 1965, **16**, p. 612—619). [Проблема 72 — это второй вопрос проблемы 82 из [**LT2**]. См примечание 2 на с. 287.— *Прим. перев.*]

[2]) McKinsey J. C. C., Tarski A. — Ann. Math., 1944, **45**, в особенности с. 146.

[3]) Тьюки (Tukey J. W. Convergence and uniformity in topology. — Ann. Math. Study, 1940, **2**, p. 15), Исбел (Isbell J. R. — Trans. AMS, 1965, **116**, p. 394—416).

[4]) Для счетных множеств см. работу Гейфмана (Gaifman H. — Canad. J. Math., 1966, **18**, p. 83—88). Примечание при корректуре: Проблема 80 решена положительно Стейнер (Steiner A. K. — Trans. AMS, 1966, **122**, p. 379—398).

ГЛАВА X

МЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ

1. Оценки. Квазиметрические решетки

Многие из самых важных приложений теории решеток в математике связаны с процессами предельного перехода, подобными тем, которые рассматриваются в действительном анализе. Такие процессы, как это будет показано в настоящей главе, можно определять по-разному. Самый простой путь — при помощи «оценок» в следующем смысле.

Определение. Под *оценкой* на решетке L понимается действительнозначная функция (функционал) $v[x]$ на L такая, что

V1 $$v[x] + v[y] = v[x \vee y] + v[x \wedge y].$$

Оценка называется *изотонной*, если

V2 $$\text{из } x \geqslant y \text{ следует, что } v[x] \geqslant v[y],$$

и *положительной*, если $x > y$ влечет $v[x] > v[y]$.

Пример 1. В любой модулярной решетке конечной длины функция *высоты* $h[x]$ является положительной оценкой, ввиду § II.8, (21).

Пример 2. В любом действительном конечномерном векторном пространстве $\mathbf{R}^n$, решеточно упорядоченном отношением «$(x_1, \ldots, x_n) \leqslant (y_1, \ldots, y_n)$ тогда и только тогда, когда $x_k \leqslant y_k$», всякий функционал $c[x] = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$ является оценкой. Эта оценка будет положительной тогда и только тогда, когда все c_k положительны.

Для прикладной математики наиболее важными оценками на решетках являются *мера* и *вероятность*, определенные на полях множеств. Более глубоко они будут рассматриваться в главе XI, здесь же мы будем иметь дело в основном с общими свойствами предельных переходов в решетках. С этой точки зрения первым, что следует отметить, является связь между оценками и метрическими пространствами.

Теорема 1. *В любой решетке L с изотонной оценкой функция расстояния*

(1) $$d(x, y) = v[x \vee y] - v[x \wedge y]$$

удовлетворяет для всех $a, x, y, z \in L$ условиям

(2) $$d(x, x) = 0, \quad d(x, y) \geqslant 0, \quad d(x, y) = d(y, x);$$

(3) $$d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z) \quad (\textit{неравенство треугольника});$$

(4) $$d(a \vee x, a \vee y) + d(a \wedge x, a \wedge y) \leqslant d(x, y).$$

Доказательство. Используя L1, изотонность оценки v и L2 соответственно, получаем три соотношения из (2). Докажем (4). По определению, левая часть в (4) есть

$$v[a \vee x \vee y] - v[(a \vee x) \wedge (a \vee y)] + v[(a \wedge x) \vee (a \wedge y)] - v[a \wedge x \wedge y].$$

В силу одностороннего дистрибутивного закона это выражение не превосходит числа

$$v[a \vee x \vee y] - v[a \vee (x \wedge y)] + v[a \wedge (x \vee y)] - v[a \wedge x \wedge y].$$

Переставляя средние слагаемые и дважды используя V1, мы видим, что полученная сумма равна $v[a] + v[x \vee y] - v[a] - v[x \wedge y] = d(x, y)$, что и доказывает (4).

Наконец, используя (4), можно доказать (3). В самом деле,

$$d(x, y) + d(y, z) = d(x \vee y, y) + d(y, x \wedge y) + d(y \vee z, y) + d(y, y \wedge z) \geqslant d(x \vee y \vee z, y \vee z) + d(y \vee z, y) + d(y, x \wedge y) + d(x \wedge y, x \wedge y \wedge z),$$

поскольку, согласно (4), $d(x \vee y \vee z, y \vee z) \leqslant d(x \vee y, y)$ и

$$d(x \wedge y, x \wedge y \wedge z) \leqslant d(y, y \wedge z).$$

Но последняя сумма есть

$$d(x \vee y \vee z, x \wedge y \wedge z) \geqslant d(x \vee y, x \wedge y) = d(x, y),$$

и, тем самым, (3) доказано.

Любое множество M, на котором определено расстояние, или метрика $d(x, y)$ со свойствами (2) и (3), называется *псевдометрическим* (или квазиметрическим) пространством; поэтому решетка с изотонной оценкой называется *псевдометрической* (или квазиметрической) решеткой. Часто оказывается удобным следующий тест для выяснения, будет ли оценкой функционал на решетке с относительными дополнениями.

Лемма. *Действительнозначный функционал $v[x]$ на решетке с O и с относительными дополнениями является оценкой, если*

V1* $\quad v[x \vee y] = v[x] + v[y]$, *как только* $x \wedge y = O$.

Доказательство. Для произвольных x, y пусть t обозначает относительное дополнение элемента $x \wedge y$ в интервале $[O, y]$. По определению, $(x \wedge y) \wedge t = O$ и $(x \wedge y) \vee t = y$, поэтому $v[y] = v[x \wedge y] + v[t]$. Кроме того, поскольку $t \leqslant x$, то $x \wedge t = x \wedge (y \wedge t) = (x \wedge y) \wedge t = O$, в то время как

$$x \vee t = [x \vee (x \wedge y)] \vee t = x \vee [(x \wedge y) \vee t] = x \vee y.$$

Значит, $v[x \vee y] = v[x] + v[t]$. Вычитая, получаем, что

$$v[x \vee y] - v[y] = v[x] + v[t] - v[x \wedge y] - v[t],$$

чем и завершается доказательство.

2. Метрические решетки. Метрическое пополнение

Если в псевдометрическом пространстве M из $d(x, y) = 0$ следует равенство $x = y$, то M называется *метрическим пространством*. В псевдометрической решетке это условие ввиду V1—V2 равносильно тому, что из $x \vee y > x \wedge y$ следует неравенство $v[x \vee y] > v[x \wedge y]$. Так что псевдометрическая решетка становится метрическим пространством относительно расстояния (1) тогда и только тогда, когда оценка, определяющая это расстояние *положительна*. Поэтому решетки с положительной оценкой называются *метрическими решетками*. Основным свойством метрических решеток является следующее обращение факта, приведенного в примере 1 из § 1.

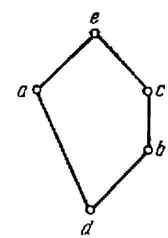


Рис. 21.

Теорема 2. *Любая метрическая решетка модулярна.*

Доказательство. Если $x \leqslant z$, то, повторно используя V1, получаем:

$$v[x \vee (y \wedge z)] - v[(x \vee y) \wedge z] =$$
$$= v[x] - v[x \wedge y] + v[y \wedge z] + v[y \vee z] - v[x \vee y] -$$
$$- v[z] = v[x] - v[x \wedge y] - v[x \vee y] + v[y \wedge z] +$$
$$+ v[y \vee z] - v[z] = -v[y] + v[y] = 0.$$

Поскольку оценка v положительна и всегда (модулярное неравенство) $x \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee y) \wedge z$, мы доказали, что $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$. Ч. т. д.

Более простое, но не столь прямое доказательство можно получить, используя тот факт, что любая немодулярная решетка содержит пятиэлементную подрешетку N_5 с диаграммой, изображенной на рис. 21. Так как $d = a \wedge b = a \wedge c$ и $e = a \vee b = a \vee c$, мы получаем, что $v[a] + v[b] = v[e] + v[d] = v[a] + v[c]$ и, следовательно, $v[b] = v[c]$.

(Но равенства $v[a] = v[b] = v[c] = \frac{1}{2}$, $v[e] = 1$, $v[d] = 0$ задают на N_5 нетривиальную изотонную оценку.)

Указанное соображение можно обобщить следующим образом.

Теорема 3. *В метрической решетке никакой интервал не может быть проективным своему собственному подинтервалу.*

Доказательство. В решетке с оценкой назовем *величиной* интервала $[a, b]$ число $v[b] - v[a]$.

Лемма. *В любой решетке с оценкой все проективные интервалы имеют одинаковую величину.*

Действительно, это верно для транспонированных интервалов в силу V1, а отношение равенства транзитивно.

Отсюда следует, что если $[a, b]$ и $[c, d]$ проективны, то

$$(*) \qquad v[b] - v[a] = v[d] - v[c] \text{ при } \textit{любой} \text{ оценке.}$$

Если, кроме того, $[a, b] \subset [c, d]$, так что $c \leqslant a \leqslant b \leqslant d$, то для любой положительной оценки будет $v[c] \leqslant v[a]$ и $v[b] \leqslant v[d]$, что совместимо с $(*)$ только в том случае, когда все вышеуказанные неравенства и включения являются равенствами. Теорема доказана.

Существует стандартный метод построения метрического пространства по заданному псевдометрическому пространству с сохранением метрических свойств последнего. Он состоит в следующем. Определим отношение $x \sim y$ на M условием $d(x, y) = 0$. Тогда (2) показывает, что это отношение симметрично и рефлексивно, а (3) и неравенство $d(x, z) \geqslant 0$ обеспечивают транзитивность введенного отношения, которое, таким образом, является отношением эквивалентности. Пусть M^* обозначает множество классов эквивалентности множества M и, если $x \in M$, то пусть x^* обозначает класс, содержащий x. Положим $d(x^*, y^*) = d(x, y)$. Вследствие (3) эквивалентные элементы множества M равноудалены от любого другого элемента, поэтому отображение $M \to M^*$, задаваемое соответствием $x \to x^*$, изометрично и в M^* выполняются условия (2)—(3). Но если $x^* \neq y^*$, то $0 < d(x, y) = d(x^*, y^*)$, так что M^* в самом деле является метрическим пространством.

Теперь применим описанную конструкцию к произвольной псевдометрической решетке.

Теорема 4. *Любая псевдометрическая решетка L является псевдометрическим пространством, в котором объединения и пересечения равномерно непрерывны. Отношение $d(x, y) = 0$ является конгруэнцией, отображающей L изометрично и решеточно-гомоморфно на некоторую метрическую решетку.*

Доказательство. Остается доказать равномерную непрерывность пересечений и объединений и то, что $d(x, y) = 0$ является конгруэнцией на L. Мы установим равномерную непрерывность обеих операций одновременно и в более сильной форме:

$$(5) \quad d(a \vee b, c \vee d) + d(a \wedge b, c \wedge d) \leqslant d(a \vee b, c \vee b) + d(c \vee b, c \vee d) + d(a \wedge b, c \wedge b) + d(c \wedge b, c \wedge d) \quad \text{(ввиду (3))} \leqslant d(a, c) + d(b, d)$$

(здесь неравенство (4) применялось к первому и третьему, а также ко второму и четвертому слагаемым). Теперь (5) показывает, что отношение $d(x, y) = 0$ обладает свойством подстановки относительно пересечения и объединения и, следовательно, является конгруэнцией. Решеточно-гомоморфный образ решетки L по этой конгруэнции и будет метрическим пространством L^*, получаемым из L, рассматриваемой как псевдометрическое пространство.

Далее, если M — какое-нибудь метрическое пространство, мы можем определить

(6) $$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

для последовательностей Коши $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, превращая таким образом множество всех последовательностей Коши решетки M в псевдометрическое пространство. Применяя к последнему конструкцию, предшествующую теореме 4, мы получаем метрическое пространство $\overline{M}$, которое будет *полным*. Соответствие, сопоставляющее каждому x класс эквивалентности, содержащий последовательность $x, x, \ldots$, отображает M изометрично на плотное подмножество в $\overline{M}$, и $\overline{M}$ определяется этим и своей полнотой с точностью до изометрии. Если M — метрическая решетка, а $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — последовательности Коши, то $\{x_n \vee y_n\}$ и $\{x_n \wedge y_n\}$ ввиду (5) будут также последовательностями Коши. Мы будем рассматривать их как $\{x_n\} \vee \{y_n\}$ и $\{x_n\} \wedge \{y_n\}$ соответственно. Тогда переходом к пределу можно доказать выполнимость L1—L4. Кроме того, $\{v[x_n]\}$ сходится к пределу, который мы будем рассматривать как $v[\{x_n\}]$ и докажем затем, что тем самым определена изотонная оценка. Это превращает определенную выше величину $d(\{x_n\}, \{y_n\})$ в расстояние между двумя последовательностями Коши. Так что почти очевидным образом из теоремы 4 следует

Теорема 5. *Любая метрическая решетка M имеет однозначно определенную метрическую оболочку, в которой она является (метрически) плотной.*

Эта оболочка будет, кроме того, условно полной решеткой (мы увидим это в § 10).

Упражнения к §§ 1—2 (см. также § III. 12, упр. 5)

1. Покажите, что каждый действительный функционал на цепи удовлетворяет условию V1.

2. Покажите, что в метрической дистрибутивной решетке $d(x, y) + d(y, z) = d(x, z)$ тогда и только тогда, когда $y \in [x \wedge z, x \vee z]$ (Питчер и Смайли).

3. (а) Пусть $v[x]$ и $w[y]$ — положительные оценки на решетках X и Y соответственно. Покажите, что сумма $v[x] + w[y]$ определяет положительную оценку на произведении XY.

(б) Покажите, что, имея положительную ограниченную оценку на решетке X, можно построить подобную оценку на X^ω (ω — бесконечное счетное множество).

4. Пусть $v\colon L \to G$ — «оценка», удовлетворяющая условиям V1—V2, где L — решетка, а G — (линейно) упорядоченная коммутативная группа. Дока-

жите аналоги теорем 1—2. Укажите, где используется предположение о коммутативности.

5. В двухмерном пространстве-времени обычное упорядочение устанавливается условием $(x, t) \leqslant (x_1, t)$ тогда и только тогда, когда $r \leqslant r_1$ и $s \leqslant s_1$, где $r = t + x$, $s = t - x$. Покажите, что функция $v(x, t)$ удовлетворяет волновому уравнению $v_{tt} = v_{xx}$ тогда и только тогда, когда она является оценкой на решетке, определяемой указанным порядком.

3. Дистрибутивная оценка

Охарактеризуем теперь те оценки, которые определяют *дистрибутивные* метрические решетки.

Это несложно сделать: так как $x \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ в любой решетке, то метрическая решетка дистрибутивна тогда и только тогда, когда $v[x \vee (y \wedge z)] = v[(x \vee y) \wedge (x \vee z)]$ тождественно. Но в любой метрической решетке, ввиду V1,

$$v[x \vee (y \wedge z)] = v[x] + v[y] + v[z] - v[y \vee z] - v[x \wedge y \wedge z],$$

$$v[(x \vee y) \wedge (x \vee z)] = v[x \vee y] + v[x \vee z] - v[x \vee y \vee z].$$

Подстановкой и изменением порядка слагаемых мы получаем эквивалентное симметричное условие

$$v[x \vee y \vee z] - v[x \wedge y \wedge z] = v[x \vee y] + v[y \vee z] + v[x \vee z] - v[x] - v[y] - v[z].$$

Это условие не является самодвойственным, но снова, ввиду V1,

$$v[x \vee y] + v[y \vee z] + v[x \vee z] - v[x] - v[y] - v[z] = v[x] + v[y] + v[z] - v[x \wedge y] - v[y \wedge z] - v[x \wedge z].$$

И мы получаем равносильное самодвойственное условие

$$2\{v[x \vee y \vee z] - v[x \wedge y \wedge z]\} = v[x \vee y] + v[y \vee z] + v[x \vee z] - v[x \wedge y] - v[y \wedge z] - v[x \wedge z]. \tag{7}$$

Оценки, удовлетворяющие условию (7), назовем *дистрибутивными* оценками. Мы приходим к следующему результату.

Теорема 6. *Метрическая решетка дистрибутивна тогда и только тогда, когда дистрибутивна ее оценка.*

С другой стороны, *каждая дистрибутивная решетка L допускает нетривиальную изотонную оценку*. Действительно, пусть $\theta: x \to S(x)$ будет изоморфным представлением решетки L в виде кольца множеств, построенным в главе VIII. Для каждой точки p функция

$$v_p[x] = \begin{cases} 1 & \text{при } p \in S(x), \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{8}$$

является нетривиальной изотонной оценкой на L.

Однако *не* каждая модулярная решетка допускает нетривиальную изотонную оценку. Контрпример будет приведен ниже (§ 4) (см. также пример 3 в § III.12).

4. Оценки на модулярных решетках

Используя методы § II.8, мы определим все возможные оценки на модулярной решетке конечной длины. Назовем интервал $[a, b]$ решетки простым, если b покрывает a. По лемме из § 2 проективные интервалы имеют одинаковую величину. Но отношение проективности между интервалами является отношением эквивалентности. Отсюда вытекает

Лемма 1. *Каждая оценка приписывает какое-то одно значение λ_p каждому классу проективных простых интервалов.*

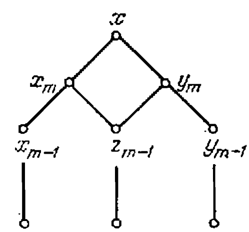


Рис. 22.

Далее, если γ: $O = x_0 < \ldots < x_n = x$ — произвольная цепь, связывающая 0 с x, то $v[x] = v[O] + \sum v[x_{i-1}, x_i]$.

Поэтому если $p[x, \gamma]$ обозначает число вхождений в γ простых интервалов, проективных простому интервалу p, то

(9) $$v[x] = v[O] + \sum \lambda_p p[x, \gamma].$$

Докажем теперь, что число $p[x, \gamma]$ — одно и то же для всех цепей γ, соединяющих O с x. Доказательство проведем индукцией по длине связующих цепей, как и в теореме Жордана—Гёльдера (§ II.8).

Пусть $P(m)$ обозначает утверждение о том, что наше предположение истинно для всех x, связанных с O цепью длины m. Тогда $P(1)$ тривиально выполняется, и мы, допустив, что $P(m)$ истинно, докажем $P(m+1)$. Рассмотрим две связные цепи γ: $O = x_0 < \ldots < x_{m+1} = x$ и γ': $O = y_0' < \ldots < y_{m+1} = x$ (рис. 22). Поскольку решетка модулярна и x покрывает y_m и x_m, то x_m и y_m оба покрывают $x_m \wedge y_m = z_{m-1}$. Мы можем связать O и z_{m-1} цепью γ'': $O = z_0 < \ldots < z_{m-1}$. Тогда цепи γ_1: $O = x_0 < \ldots < x_m$ и γ_2: $O = z_0 < \ldots < z_{m-1} < x_m$ связывают O с x_m, а цепи γ_1': $O = y_0 < \ldots < y_m$ и γ_2': $O = z_0 < \ldots < z_{m-1} < y_m$ связывают O с y_m. Согласно $P(m)$, будет $p[x_m, \gamma_1] = p[x_m, \gamma_2]$ и $p[y_m, \gamma_1'] = p[y_m, \gamma_2']$. Замечая, что интервалы $[x_m, x]$ и $[z_{m-1}, y_{m-1}]$ проективны, так же как и интервалы $[y_m, x]$ и $[z_{m-1}, x_m]$, и используя очевидные соотношения между числом $p[z_{m-1}, \gamma'']$ и числами $p[x_m, \gamma_2]$ и $p[y_m, \gamma_2']$ (зависящие от классов проективности интервалов $[z_{m-1}, x_m]$ и $[z_{m-1}, y_m]$ соответственно), простым вычислением получаем равенство $p[x, \gamma] = p[x, \gamma']$. Теперь определим $p[x]$ как общую для всех γ величину $p[x, \gamma]$. Так как решетка L модулярна, то интервалы $[x, x \vee y]$ и $[x \wedge y, y]$ изоморфны при любых x, y. Поэтому

(10) $$p[x \vee y] - p[x] = p[y] - p[x \wedge y].$$

Тем самым нами доказана

Лемма 2. *Если в модулярной решетке конечной длины $p[x]$ обозначает число простых интервалов, проективных интервалу p, в некоторой (и значит, в каждой) цепи, связывающей 0 с x, то $p[x]$ является оценкой.*

Далее, очевидна

Лемма 3. *Любая линейная комбинация $\lambda_0 + \sum \lambda_k v_k[x]$ оценок сама является оценкой.*

Отсюда следует, что (9) является оценкой при любом выборе коэффициентов λ_p. Все это дает следующий результат.

Теорема 7. *Различные оценки на модулярной решетке L конечной длины находятся во взаимно однозначном соответствии с наборами значений λ_p, приписываемых классам проективных простых интервалов решетки L, и $v[0]$:*

$$v[x] = v[0] + \sum \lambda_p p[x],$$

где $p[x]$ обозначает число простых интервалов, проективных простому интервалу p, в любой максимальной цепи, соединяющей 0 с x.

Теорема 7 в сочетании с результатами § III.10 позволяет полностью описать строение конечномерных модулярных решеток.

Теорема 8. *Пусть L — произвольная модулярная решетка конечной длины. Конгруэнции на L находятся во взаимно однозначном соответствии с классами аннулируемых ими проективных простых интервалов*[1]) *и, следовательно, образуют булеву алгебру.*

(Ср. с теоремой Фунаямы VI.9, которая утверждает, что конгруэнции на любой решетке образуют полную брауэрову решетку.)

Доказательство. Пусть θ — конгруэнция на L. Если $x \equiv x \vee y \pmod\theta$, то $x \wedge y \equiv (x \vee y) \wedge y \equiv y \pmod 0$ и двойственно. Поэтому если 0 аннулирует некоторый (простой) интервал, то она аннулирует все проективные ему (простые) интервалы (мы используем здесь транзитивность отношения θ). Обратно, пусть $S = S(\theta)$ — какое-то множество классов эквивалентности проективных простых интервалов. Определим $v_S[x]$ как сумму чисел $p[x]$ для p, не входящих в классы из S. По теореме 7 это будет оценка и притом изотонная. Вследствие теоремы 4 оценка $v_S[x]$ определяет некоторую конгруэнцию $\theta(S)$. При этом $x \equiv y \pmod\theta$ тогда и только тогда, когда каждый простой интервал в любой максимальной цепи, соединяющей $x \wedge y$ с $x \vee y$, находится в S. Значит, θ определяется множеством $S(\theta)$ и соответствие $\theta \mapsto S(\theta)$ взаимно однозначно. Понятно, что оно изотонно[2]), и потому является изоморфизмом.

Следствие. *Модулярная решетка конечной длины является простой (т. е. не имеет собственных конгруэнций)*

[1]) Конгруэнция, по определению, аннулирует интервал, если она отождествляет его концы. — *Прим. перев.*

[2]) И обратно изотонно. — *Прим. перев.*

тогда и только тогда, когда все ее простые интервалы проективны.

Теперь приведем пример (простой и обладающей дополнениями) модулярной решетки бесконечной длины, которая не имеет нетривиальных оценок. Это решетка $L(Z_2^\omega)$ всех подгрупп прямого произведения $G = Z_2^\omega$ счетного множества экземпляров циклической группы Z_2 порядка 2. В G *любые* две подгруппы S и T, имеющие бесконечные порядок *и* индекс, проективны, —мы опускаем доказательство. Кроме того, в G можно построить цепь $1 < S < U < G$, для которой все факторы $S/1, U/S$ и G/U бесконечны. По лемме из § 2 отсюда следует, что[1])

$$v[1, S] = v[1, U] = v[1, S] + v[S, U] = 2v[1, S],$$

т. е. $v[1, S] = 0$ для любой подгруппы S конечного порядка и индекса. Теперь нетрудно заключить, что $v[S] = v[1]$ для *всех* подгрупп S группы G.

Упражнения к §§ 3—4

1. Обобщите теорему 7 на модулярные решетки, в которых все ограниченные цепи конечны.

2. Обобщите теорему 7 на «оценки» со значениями в коммутативной группе.

3. Пусть $L(F^\omega)$ — атомно порожденная модулярная решетка с дополнениями всех подпространств счетномерного векторного пространства F^ω. Пусть интервалы $[O, a]$, $[a, I]$, $[O, b]$ и $[b, I]$ имеют бесконечную длину.

(а) Покажите, что $[O, a]$ и $[O, b]$ проективны.

(б) Убедитесь, что $L(F^\omega)$ не допускает нетривиальной оценки. (Указание. См. теорему 3.)

*4. Найдите решеточное тождество, истинное в каждой метрической решетке и в каждом подпрямом произведении таких решеток, но не в $L(F^\omega)$ (Леман).

5. Покажите, что любая конечная метрическая дистрибутивная решетка изоморфна кольцу множеств относительно изоморфизма, который отождествляет $v[x]$ с мерой множества, соответствующего элементу x.

6. Покажите, что решетка L дистрибутивна тогда и только тогда, когда для любых заданных элементов $a < b$ существует *дистрибутивная* оценка v на L такая, что $v[a] < v[b]$ (Вайда[2])).

*7. Найдите необходимые и достаточные условия, при выполнении которых метрическое пространство изометрично некоторой метрической решетке[3]).

8. Пусть A — полугруппа относительно операции $\vee$, в которой заданы, кроме того, унарная операция $'$ и действительнозначная функция v, такие, что

(i) $v[a \vee b] \geqslant \max(v[a], v[b])$;

(ii) $v[a \vee b] + v[a \vee b'] = v[a] + v[b \vee b']$.

Покажите, что свободная алгебра с указанными постулатами[4]) является булевой алгеброй. (Леман (Lehman A. — SIAM Revs., 1965, 7, p. 253—273).)

---

[1]) $v[a, b]$ обозначает величину интервала $[a, b]$. — *Прим. перев.*

[2]) См. также работы Тревизана (Trevisan G. — Rend. Math. Univ. Padova, 1951, 20, p. 386—400) и Хасимото (Hashimoto J. — Proc. AMS, 1952, 3, p. 1—2). Для доказательства необходимости используйте следствие 1 из теоремы VIII. 15.

[3]) См. главу XV в книге Блюменталя (Blumental L. M. — Theory and applications of distance-geometry. — Oxford, 1953) и работу Келли (Kelly L. M. — Duke Math. J., 1952, 19, p. 661—670).

[4]) Смысл термина «свободная алгебра» для этой ситуации остается неясным. — *Прим. ред.*

5. Непрерывные геометрии

Теперь построим открытый фон Нейманом [1] замечательный класс метрических (модулярных) решеток с дополнениями, которые являются непрерывномерными аналогами проективных геометрий.

Пусть F — некоторое поле или тело. Рассмотрим проективные геометрии $PG_{n-1}(F) = PG(F,\ n-1)$ длины n над F.

Лемма 1. *Существует вложение проективной геометрии $PG(F,\ n-1)$ в $PG(F,\ 2n-1)$, которое отображает O в O, I в I и вдвое увеличивает высоту.*

Доказательство. Если a и a' — два взаимно дополнительных элемента высоты n в $PG(F,\ 2n-1)$, то интервалы $[0,\ a]$ и $[0,\ a']$ в $PG(F,\ 2n-1)$ перспективны (теорема IV.11), изоморфны друг другу (пусть α будет этот изоморфизм) и изоморфны проективной геометрии $PG(F,\ n-1)$. Кроме того, по теореме III.15 подрешетка, порожденная этими интервалами в $PG(F,\ 2n-1)$, изоморфна их произведению. Следовательно, отображение $x \longmapsto [x,\ \alpha(x)]$ интервала $[O,\ a]$ в интервал $[O,\ I]$ и будет искомым вложением.

Мы получаем, что $PG(F,\ n-1)$ допускает вложение в $PG(F, 2n-1)$, при котором сохраняется «нормированная функция высоты» $h[x]/h[I]$. Повторяя этот процесс, мы получим последовательность расширений проективных геометрий:

$$PG(F,\ 1) \subset PG(F,\ 3) \subset PG(F,\ 7) \subset \ldots \subset PG(F,\ 2^m-1) \subset \ldots,$$

в которой сохраняются обе решеточные операции и оценка $v[x] = h[x]/h[I]$.

Объединяя эти расширения, мы получаем объемлющую *метрическую решетку*, которая содержит элементы любой двоичной относительной высоты $k/2^m$. По теореме 5 она будет метрически плотной подрешеткой полной метрической решетки и, следовательно, будет содержать элементы *каждой* размерности $d = \lim h[x_n]/h[I]$, $0 \leqslant d \leqslant 1$. Эта полная метрическая решетка и есть *непрерывная геометрия* $CG(F)$ над F, впервые построенная фон Нейманом.

Теорема 9. *Непрерывная геометрия над полем или телом F является полной модулярной решеткой с дополнениями, в которой любые два элемента одинаковой размерности перспективны.*

Набросок доказательства. Сначала покажем, что метрическое пополнение $\overline{M}$ любой метрической (модулярной) решетки с дополнениями M является решеткой с дополнениями.

Лемма 2. *Пусть L — метрическая решетка с дополнениями и x' — какое-нибудь дополнение элемента x из L. Если $d(x,\ y) < \varepsilon$, то y имеет дополнение y' такое, что $d(x',\ y') < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $t = x \wedge y \leqslant x$. Для дополнения t' элемента t и любого дополнения x' элемента x элементы

t, $t' \wedge x$, x' независимы и в объединении дают I. Следовательно, $t^* = (t' \wedge x) \vee x'$ также будет дополнением для t. Но ввиду (4) при замене x на t в $(t' \wedge x) \vee x$ произойдет сдвиг не более чем на $d(t, x)$ и при этом получится $(t' \wedge t) \vee x' = x'$, значит, $d(t^*, x') \leqslant d(t, x)$. Аналогично можно подобрать дополнение y^* для y такое, чтобы было $d(y^*, t^*) \leqslant d(y, t)$. Положив $y' = y^*$, завершаем доказательство ссылкой на неравенство треугольника (3):

$$d(y^*, x') \leqslant d(x, x \wedge y) + d(y, x \wedge y) =$$
$$= v[x] - v[x \wedge y] + v[y] - v[x \wedge y] \quad (\text{так как } x, y \geqslant x \wedge y)$$
$$= v[x \vee y] - v[y] + v[y] - v[x \wedge y] \quad (\text{ввиду V1})$$
$$= d(x, y) \quad (\text{по определению}).$$

Лемма 2 доказана.

Отсюда следует, что любой последовательности Коши $\{a_n\}$ в M с пределом a соответствует в $\overline{M}$ последовательность Коши, составленная из дополнений a'_n, предел которой a' в $\overline{M}$ будет ввиду (4) удовлетворять условиям $a \wedge a' = O$, $a \vee a' = I$, так что $\overline{M}$ оказывается решеткой с дополнениями.

Полнота ее будет установлена в следствии из теоремы 16.

Чтобы доказать перспективность любых двух элементов одинаковой размерности, построим сходящуюся последовательность осей перспективы c_n в $\overline{M}$ для данных последовательностей Коши $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ в M. Как в лемме 2, мы сводим все к случаю a_{n+1} и ему двойственному. Предположим, что a и b перспективны посредством c в M и что $a > a_1$, $b > b_1$, причем $d(a, a_1) = d(b, b_1) = \delta_1$. Тогда по предположению, $c \vee a_1$ и $c \vee b_1$ будут иметь общее дополнение q, для которого $d[q] = \delta_1$; следовательно, a_1 и b_1 перспективны посредством $c \vee q$, причем $d(c \vee q, c) = \delta_1$. Двойственно, пусть $a_2 > a$, $b_2 > b$ и $d(a, a_2) = d(b, b_2) = \delta_2$. Тогда $d[a_2 \wedge c] = d[b_2 \wedge c] = \delta_2$, и любое общее *относительное* дополнение r элементов $a_2 \wedge c$ и $b_2 \wedge c$ в c будет удовлетворять условию $d(c, r) = \delta_2$. Мы заключаем, что a_2 и b_2 перспективны посредством r.

Упражнения

1. Пусть $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \ldots$ — последовательность метрических решеток. Покажите, что $\bigcup M_k$ — метрическая решетка.

2. (а) Покажите, что конечномерная проективная геометрия имеет по существу только одну нетривиальную оценку.

(б) Покажите, что если v — какая-нибудь оценка на $CG(F)$, то $v[x] = v[O] + \lambda d[x]$ для некоторой постоянной λ.

3. Дайте детальное доказательство того, что если любые два элемента одинаковой размерности перспективны в метрической решетке M, то то же самое верно и в ее метрическом пополнении $\overline{M}$.

4. Покажите, что каждый автоморфизм любой из проективных геометрий $PG(F, n-1) \subset CG(F)$ можно продолжить до автоморфизма непрерывной геометрии $CG(F)$.

*5. Покажите, что если **Qu** — кольцо действительных кватернионов и **R** — действительное поле, то $CG(\mathbf{Qu}) \cong CG(\mathbf{R})$ (фон Нейман).

*6. Пусть M — проективная геометрия конечной длины $n > 3$, которая, кроме того, является относительно некоторой внешней топологии компактной топологической решеткой с $n+1$ связными компонентами. Покажите, что если координатное кольцо для M имеет характеристику нуль, то оно совпадает [1] с **R**, с **C** (поле комплексных чисел) или с **Qu**.

6. Жорданово разложение

Классическое жорданово разложение функций ограниченной вариации на монотонные слагаемые было обобщено Рисом на аддитивные функции множеств. Его можно обобщить и на случай оценок на решетках [2]. Говорят, что оценка $v[x]$ имеет *ограниченную вариацию*, если для некоторого конечного числа K и всех цепей $x_0 < \ldots < x_n$ будет

$$\sum_{i=1}^{n} |v[x_i] - v[x_{i-1}]| < K.$$

Мы начнем с некоторых определений. Рассмотрим на решетке L оценки $v[x]$, которые удовлетворяют условию $v[a] = 0$ для некоторого фиксированного a. Они, очевидно, образуют векторное пространство, поскольку любая линейная комбинация таких оценок будет оценкой того же типа. В этом векторном пространстве оценки ограниченной вариации образуют подпространство.

Мы упорядочим это векторное пространство отношением

(11) $v \geqslant v_1$ тогда и только тогда, когда функция $v[x] - v_1[x]$ изотонна.

Тогда P1, P3 выполняются очевидным образом, а P2 вытекает из требования $v[a] = 0$. Кроме того,

(12) если $v \geqslant v_1$, то $v + v_2 \geqslant v_1 + v_2$ для всех v_2, и для положительных λ будет $\lambda v \geqslant \lambda v_1$, как только $v \geqslant v_1$.

(Замечание. Указанные условия означают, что эти оценки образуют упорядоченное векторное пространство (см. § XV.1).)

Далее, мы отождествим оценки с функциями интервалов: если $x \leqslant y$, положим $v[x, y] = v[y] - v[x]$. Тогда условие V1

---

[1]) А. Н. Колмогоров (Ann. Math., 1931, 33, p. 162—176). — *Прим. перев.*

[2]) Жорданово разложение впервые появилось в Jordan C.—Course d'Analyse v. 1, p. 54; название введено Саксом. По поводу обобщения, предложенного Рисом, см. его работу [1] и Verh. Zurich Congr., v. I, p. 258—260. Теорема, приводимая в тексте, была доказана в [**LT1**, p. 45].

из § 1 попросту утверждает, что перспективные, и следовательно, проективные интервалы имеют одинаковую величину. С любой цепью γ: $x = x_0 < \ldots < x_n = y$ в $[x, y]$ связывается *положительная вариация* оценки $v[x]$ на γ, определяемая как сумма положительных приращений оценки $v[x]$ вдоль γ:

$$v^+[x, y; \gamma] = \sum_{i=1}^{n} \max\{v[x_{i-1}, x_i], 0\}. \tag{13}$$

Мы определим теперь *положительную вариацию* оценки v на $[x, y]$ как предел

$$v^+[x, y] = \sup_{\gamma} v^+[x, y; \gamma]. \tag{14}$$

Отрицательная вариация $v^-[x, y]$ для v на $[x, y]$ определяется двойственно. Ясно, что $v[x]$ будет функцией ограниченной вариации тогда и только тогда, когда каждая $v^+[x, y]$ и каждая $v^-[x, y]$ конечны. Очевидно, что если γ'' — произвольная подцепь цепи γ, то $v^+[x, y; \gamma''] \geqslant v^+[x, y; \gamma]$. Далее, если γ' — какая-нибудь цепь $x = x_0' < x_1' < \ldots < x_n' = y$ в $[x, y]$, то в силу модулярности цепь γ будет иметь уплотнение γ'', интервалы которого проективны соответствующим интервалам некоторого уплотнения γ''' цепи γ'; следовательно, такое уплотнение γ'', что $v^+[x, y; \gamma''] = v^+[x, y; \gamma'''] \geqslant v^+[x, y; \gamma']$. Мы получаем отсюда, что

$$v^+[x, y] = \sup_{\gamma''} v^+[x, y; \gamma''] \text{ для уплотнения } \gamma'' \text{ цепи } \gamma. \tag{15}$$

Если $v[x]$ имеет ограниченную вариацию, то поскольку проективные интервалы имеют находящиеся в соответствии цепи и (как было отмечено выше) поэтому у них равны положительные вариации $v^+[x, y; \gamma]$ для соответствующих цепей, — проективные интервалы имеют равные положительные вариации. Поэтому

$$v^+[x] = v^+[a, a \vee x] - v^+[a \wedge x, a] \tag{16}$$

является оценкой на L. Кроме того, поскольку подстановка $x_1 \geqslant x$ вместо x расширяет интервал $[a, a \vee x]$ и сужает интервал $[a \wedge x, a]$, то $v^+ \geqslant 0$, а по построению всегда $v^+ \geqslant v$. Обратно, если $v_1 \geqslant v$ и $v_1 \geqslant 0$, то для каждой цепи γ будет $v_1[x, y] \geqslant v^+[x, y; \gamma]$; следовательно, $v_1[x, y] \geqslant v^+[x, y]$ и потому $v_1 \geqslant v^+$. Итак, имеет место

Теорема 10. *Если оценка $v[x]$ имеет ограниченную вариацию на решетке L, то $v \vee 0$ существует и совпадает с v^+, определенной формулами* (13)—(14).

Отсюда следует, что оценки ограниченной вариации на L такие, что $v[a] = 0$, образуют *векторную решетку* (глава XV): упорядочение, превращающее совокупность всех таких оценок в упорядоченное векторное пространство, задает на этой совокупности структуру решетки.

Упражнения

1. Дайте определение для $v^-[x]$ — отрицательной части произвольной оценки ограниченной вариации.

2. Покажите, что если $v[x]$ имеет ограниченную вариацию, то $v[x] = v^+[x] + v^-[x]$ для всех x.

3. Покажите, что если функция f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ имеет ограниченную вариацию, то $f^+[x]$ и $f^-[x]$ — монотонные функции («положительная» и «отрицательная» вариации функции f).

4. Покажите, что если $w[x, y]$ — какая-нибудь функция на множестве интервалов решетки L, удовлетворяющая условию $w[x, y] + w[y, z] = w[x, z]$, где $x \leqslant y \leqslant z$, и приписывающая одинаковые значения перспективным интервалам, то $v[x] = w[a, a \vee x] - w[a \wedge x, a]$ будет оценкой.

5. Пусть v — оценка на решетке с O и I, обладающей относительными дополнениями, такая, что $v[O] = 0$. Покажите, что v изотонна тогда и только тогда, когда $v[x] \geqslant 0$ для всех x, и имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда $v[x]$ ограничена.

7. Внутренняя топология цепей

Классическим фактом является то, что топология действительной прямой определяется отношением порядка на этой прямой. Посмотрим теперь, в какой мере это можно обобщить на произвольные условно полные решетки и даже упорядоченные множества. В случае же цепей мы можем действовать следующим образом [1]).

Определение. В цепи C *открытыми интервалами* считаются: (i) сама C; (ii) для любого $a \in C$ множество $(a, +\infty]$ всех $x > a$; (iii) для любого $a \in C$ множество $[-\infty, a)$ всех $x < a$ и (iv) для любых $a < b$ множество (a, b) всех x таких, что $a < x < b$.

Внутренняя топология цепи C получается, если взять указанные открытые интервалы в качестве базиса открытых множеств. Отсюда мы получаем следующий результат.

Лемма 1. *Подмножество цепи C открыто в ее внутренней топологии тогда и только тогда, когда оно является объединением открытых интервалов.*

В цепи замкнутым множеством самого общего вида будет пересечение дополнений открытых интервалов. Далее, в любой цепи с универсальными гранями $-\infty$ и $+\infty$ дополнение любого открытого интервала является замкнутым интервалом или объединением двух замкнутых интервалов. Поэтому замкнутым множеством самого общего вида будет пересечение конечных объединений замкнутых интервалов. Тем самым доказана

Лемма 2. *В любой цепи C с универсальными гранями $-\infty$ и $+\infty$ замкнутые интервалы образуют предбазис семейства замкнутых множеств.*

---

[1]) Хаар и Кениг (Haar A., König D. — Crelle's J., 1910, **139**, p. 16—28). По поводу других ссылок см. [LT2, с. 68].

Теорема 11. *Любая цепь является нормальным хаусдорфовым пространством относительно своей внутренней топологии, а эта последняя инвариантна при всех автоморфизмах и дуальных автоморфизмах.*

Доказательство. Ясно, что любой элемент $p \in C$ имеет окрестность (например, C); далее, пересечение любых двух окрестностей элемента p снова будет окрестностью для p; и наконец, любая окрестность элемента p будет также окрестностью всех своих точек; следовательно, «открытые интервалы» можно взять в качестве базиса открытых множеств. При этом, если $p \neq q$ в C, то либо p покрывает q, либо $p > a > q$ для некоторого a, или двойственно. В первом случае $[-\infty, p)$ и $(q, +\infty]$ образуют непересекающуюся пару окрестностей, во втором такой парой будут $[-\infty, a)$ и $(a, +\infty]$; двойственная ситуация имеет место в последних двух случаях. Значит, C — хаусдорфово пространство.

Пусть теперь S и T — непересекающиеся замкнутые подмножества в C. Тогда множество $S \cup T$ будет замкнутым и потому его дополнение можно представить в виде объединения открытых интервалов I_α. В каждом I_α выберем x_α (тут нужна аксиома выбора). Любая точка $p \in S$, не являющаяся внутренней для S, может быть отделена от T с обеих сторон подходящим I_α, поскольку T замкнуто и $S \cap T = \varnothing$. Мы присоединим к S открытый интервал (p, x_α) или (x_α, p) в зависимости от того, какой представится случай. После аналогичного увеличения множества T мы получим непересекающиеся открытые множества, вмещающие S и T, чем и завершается доказательство теоремы 11.

Теперь обратимся к *полным* цепям. Каждая конечная цепь полна; полной будет и система действительных чисел $\mathbf{R}$, если к ней присоединить $-\infty$ и $+\infty$ (т. е. O и I). Вообще, если X и Y — полные цепи, то полными цепями будут их ординальная сумма $X \oplus Y$ и ординальное произведение $X \circ Y$. Таким путем можно построить много разных типов полных цепей.

Полные цепи топологически отличаются от других цепей своей компактностью, как показывает следующая теорема.

Теорема 12. *Цепь C полна тогда и только тогда, когда она компактна в своей внутренней топологии.*

Доказательство. Пусть C — полная цепь. По теореме Александера (следствие из теоремы 7 в § IX.8) C компактна, если предбазис замкнутых интервалов в ней (лемма 2) обладает свойством компактности. Таким образом, достаточно показать, что если $[a_\gamma, b_\gamma]$, где $\gamma \in \Gamma$, — некоторая совокупность замкнутых интервалов такая, что $\bigcap_F [a_\varphi, b_\varphi]$ не пусто для любого конечного подмножества $F \subset \Gamma$, то $\bigcap_\Gamma [a_\gamma, b_\gamma]$ не пусто. Но из первого утверждения следует, что не пусто

$$[a_\gamma, b_\gamma] \cap [a_\delta, b_\delta] = [a_\gamma \vee a_\delta, b_\gamma \wedge b_\delta]$$

для всех γ, $\delta \in \Gamma$, где $a_\gamma \leqslant b_\delta$ при любых γ, $\delta \in \Gamma$. Значит, $c = \bigvee a_\gamma \in \bigcap\limits_{\Gamma} [a_\gamma, b_\gamma]$, и это множество оказывается непустым.

Обратно, пусть X — произвольное подмножество компактной цепи C. Для каждого конечного подмножества F из X определим x_F как наименьший из $x \in F$. Понятно, что никакое из конечных пересечений $[-\infty, x_F]$ замкнутых интервалов $[-\infty, x]$, где $x \in X$, не пусто; поэтому $\bigcap\limits_{x \in X} [-\infty, x]$ не пусто и, значит, X имеет нижнюю грань, скажем a. Теперь рассмотрим множество всех замкнутых интервалов вида $[a, x]$, где $x \in X$, а a пробегает множество нижних граней для X. Никакое конечное пересечение этих интервалов не может быть пустым; следовательно, $\bigcap [a, x]$ содержит некоторый элемент b. Но любой такой элемент, конечно, является для X нижней гранью, содержащей каждую нижнюю грань множества X; поэтому $b = \inf X$, т. е. точная нижняя грань для X существует. Двойственно доказывается существование $\sup X$, чем и завершается доказательство теоремы.

8*. Плотные подмножества цепей

Теперь мы сделаем отступление, чтобы показать, что понятия «плотности», введенные в § VIII.11, равносильны соответствующим топологическим понятиям.

Теорема 13. *Пусть C — цепь с не менее, чем тремя элементами. Каждая порядково плотная подцепь в C тогда и только тогда является топологически плотной, когда C не имеет изолированных точек.*

Доказательство. Предположим, что C имеет изолированную точку a. Тогда дополнение S точки a будет порядково плотным в C; но поскольку $\{a\}$ является окрестностью точки a, эта точка не будет лежать в замыкании множества S. Таким образом, S не плотно в C. Предположим теперь, что C не имеет изолированных точек, и пусть S — какое-нибудь порядково плотное подмножество в C. Возьмем элемент a в C, не принадлежащий S, и некоторую окрестность (b, c) этого элемента. Так как a не является изолированной точкой, то найдется элемент $d \in (b, c)$ такой, что $d \neq a$. Если d не принадлежит S, то существует элемент $e \in S$, который будет лежать между a и d. Так что S пересекает интервал (b, c). Поскольку элемент a и его окрестность (b, c) выбирались произвольно, этими рассуждениями доказана плотность подмножества S в C.

Теорема 14. *Цепь C является топологически связной тогда и только тогда, когда она условно полна и плотна в себе.*

Доказательство. Предположим, что цепь C является связной. Для любых $a < b$ в C интервалы $[-\infty, b)$ и $(a, +\infty]$ будут открытыми множествами с объединением, равным C; поэтому они имеют непустое пересечение и найдется элемент, лежащий между a и b. Значит, C плотна в себе. Для доказательства условной полноты цепи C возьмем подмножество B из C, имеющее верхнюю грань x_0, но не имеющее точной верхней грани. Положим $A = \{x \in C \mid x \geqslant B\}, D = \{x \in C \mid x \notin A\}$. Если $x \in A$, то найдется $y < x$ такой, что $y \in A$; очевидно, что $(y, +\infty]$ содержится в A и, значит, A является открытым. Если $x \in D$, то найдется $y \in B$ такой, что $y > x$; очевидно, что $[-\infty, y)$ содержится в D, и следовательно, D будет открытым. Но A и D имеют пустое пересечение и объединение, равное C, что противоречит предположению о связности C. Следовательно, должна существовать точная верхняя грань для B и двойственно, чем и завершается доказательство условной полноты цепи C.

Предположим теперь, что цепь C условно полна и является плотной в себе. Пусть $C = A \cup B$, где A и B — открытые, непересекающиеся и непустые множества. Можно считать, что существуют $x_1 \in A$, $y_1 \in B$, связанные неравенством $x_1 < y_1$. Положим y_0 равным точной нижней грани таких элементов $y \in B$, что $y > x_1$. Пусть, кроме того, x_0 будет точной верхней гранью элементов $x \in A$ таких, что $x < y_0$. Предположим, что $x_0 < y_0$. Тогда существует элемент a со свойством $x_0 < a < y_0$; но неравенства $x_1 \leqslant x_0 < a < y_0$ означают, что a не принадлежит множеству B, поэтому этот элемент должен лежать в A, что противоречит определению элемента x_0. Следовательно, мы должны принять, что $x_0 = y_0$. Допустим теперь, что $x_0 \in A$ и пусть (a, b) будет некоторой окрестностью элемента x_0, содержащейся в A. По определению элемента y_0 должно быть $y_0 \geqslant b > x_1$, но это противоречит равенству $x_0 = y_0$. Аналогичным образом получается противоречие и при допущении, что $x_0 \in B$. Следовательно, $C \neq A \cup B$. Таким образом, для C не существует разложения предположенного вида, и значит, C связна.

Упражнения к §§ 7—8

1. Пусть C — произвольная цепь, плотная в себе.

(а) Покажите, что подмножество S из C порядково плотно тогда и только тогда, когда $\overline{S} = C$.

(б) Покажите, что внутренняя топология любого плотного подмножества цепи C индуцируется внутренней топологией цепи C, но что для произвольных подмножеств цепи C это не так.

2. Покажите, что если $x_\alpha \to a$ во вполне упорядоченном множестве, то при некотором α будет $x_\beta \leqslant a$ для всех $\beta \geqslant \alpha$.

3. Бесконечный ординал α называется *предельным* ординалом, если ни для какого β не может быть $\alpha = \beta \oplus 1$. Покажите, что предельные ординалы — это те, которые являются топологическими пределами других ординалов.

4. Покажите, что если C — цепь и $X \subset C$, то $a \in \overline{X}$ тогда и только тогда, когда a является пределом монотонной вполне упорядоченной цепи $\{x_\alpha\} \subset X$.

5. Покажите, что любой изотонный образ полной цепи является полной цепью.

6. (а) Покажите, что в полной цепи каждое открытое множество можно однозначно представить в виде теоретико-множественного объединения непересекающихся открытых интервалов.

(б) Покажите, что любая цепь C, имеющая счетное порядково плотное подмножество, имеет счетный базис открытых множеств.

7. Покажите, что в $C = \mathbf{R} \circ 2$ для счетного подмножества S, состоящего из пар $(q, 1)$ и $(q, 2)$, где q рационально, будет $\overline{S} = C$, но это S не является порядково плотным (ср. с упр. 1 (а), 6 (б)).

8. Покажите, что любая цепь в своей внутренней топологии является вполне нормальным хаусдорфовым пространством.

9. Порядковая и звездная сходимости

Известно, что в $\mathbf{R}$ условие $x_n \to a$ (т. е. сходимость последовательности $\{x_n\}$ к пределу a) равносильно условию $\limsup \{x_n\} = \liminf \{x_n\} = a$. Именно это последнее условие, а не выбор открытых интервалов в качестве базиса открытых множеств определяет устраивающую нас внутреннюю порядковую топологию в решетках (и у-множествах) общего вида. Мы можем следующим образом обобщить его, заменяя последовательности сетями.

Определение. Пусть $\{x_\alpha\}$ — произвольная сеть элементов полной решетки. По определению

$$\liminf \{x_\alpha\} = \sup_\beta \{\inf_{\alpha \geqslant \beta} x_\alpha\}, \tag{17}$$

$$\limsup \{x_\alpha\} = \inf_\beta \{\sup_{\alpha \geqslant \beta} x_\alpha\}. \tag{17'}$$

Будем говорить, что $\{x_\alpha\}$ *порядково сходится* к a, если

$$\liminf \{x_\alpha\} = \limsup \{x_\alpha\} = a. \tag{18}$$

Заметим, что всегда $\liminf \{x_\alpha\} \leqslant \limsup \{x_\alpha\}$.

Следствие. *Если $x_\alpha \to a$ в полной решетке, то существуют сети $t_\alpha \uparrow a$ и $u_\alpha \downarrow a$ такие, что $t_\alpha \leqslant x_\alpha \leqslant u_\alpha$, и обратно.*

Пояснение. Под $t_\alpha \uparrow a$ мы понимаем, что функция $\alpha \to t_\alpha$ изотонна и что $\sup t_\alpha = a$; запись $u_\alpha \downarrow a$ имеет двойственный смысл [1]).

Как обычно, назовем множество X *замкнутым в порядковой топологии*, если при $\{x_\alpha\} \subset X$ и $x_\alpha \to a$ всегда $a \in X$; т. е. если предел любой порядково сходящейся сети элементов множества X сам принадлежит X.

Теорема 15. *В любой полной цепи порядковая топология совпадает с (построенной с помощью открытых интервалов) внутренней топологией из § 7.*

Доказательство. $x_\alpha \to a$ тогда и только тогда, когда каждый открытый интервал (b, c), содержащий a, содержит для

---

[1]) Запись $t_\alpha \uparrow$ означает изотонность функции $\alpha \to t_\alpha$ и существование $\sup t_\alpha$. — *Прим. перев.*

некоторого β все x_α при $\alpha \geqslant \beta$. Но если это так, то $\inf_{\alpha\geqslant\beta} x_\alpha \geqslant b$, а поскольку это выполняется для всех $b < a$, то $\limsup \{x_\alpha\} = \liminf \{x_\alpha\}$. Обратно, если $\liminf \{x_\alpha\} = a = \limsup \{x_\alpha\}$ и $a \in (b, c)$, то $\inf\limits_{\alpha\geqslant\beta} x_\alpha > b$ и $\sup\limits_{\alpha\geqslant\gamma} x_\alpha < c$ для некоторых β, γ; поэтому если $\delta \geqslant \beta$ и $\delta \geqslant \gamma$, то $x_\alpha \in (b, c)$ для всех $\alpha \geqslant \delta$. Значит, $x_\alpha \to a$.

Наконец, используя приведенное выше следствие, мы можем естественным образом расширить определение порядковой сходимости, данное для полных решеток, на случай произвольных у-множеств.

Определение. В произвольном у-множестве P сеть $\{x_\alpha\}$ называется *порядково сходящейся* к пределу a (записывают: $x_\alpha \to a$), если существуют сети $t_\alpha \uparrow a$ и $u_\alpha \downarrow a$ такие, что $t_\alpha \leqslant x_\alpha \leqslant u_\alpha$.

Ввиду упомянутого следствия, $x_\alpha \to a$ в P тогда и только тогда, когда $x_\alpha \to a$ в $\overline{P}$ — в пополнении у-множества P сечениями (§ V.9). Другими словами, порядковая сходимость в у-множестве P индуцируется порядковой сходимостью в полной решетке $\overline{P}$. Очевидно, что любое у-множество P является L-пространством Фреше (§ IX.6) по отношению к порядковой сходимости.

Звездная сходимость. В общем случае порядковая сходимость не обязана подчиняться условию Урысона F4 из § IX. 6. Однако, как было там показано, мы всегда можем получить это свойство, введя подходящую звездную сходимость. Как мы увидим, во многих важных случаях достаточно перейти к *секвенциальной* звездной сходимости в смысле следующего определения.

Определение. В произвольном заданном у-множестве P последовательность $\{x_n\}$ называется *звездно сходящейся* к пределу a (обозначение: $x_n \to {}^*a$), если каждая подпоследовательность $\{x_{n(k)}\}$ последовательности $\{x_n\}$ содержит подпоследовательность $\{x_{n(k(i))}\}$, которая порядково сходится к a.

Как было показано в § IX.6, отсюда следует, что каждое у-множество относительно звездной сходимости является L-пространством, удовлетворяющим условию F4.

Упражнения

1. Покажите, что каждая σ-решетка является (секвенциальным)L-пространством Фреше по отношению к секвенциальной сходимости, а также будет L пространством по отношению к порядковой сходимости сетей.

2. Докажите, что каждое у-множество P является T_1-пространством, если замыкание $\overline{X}$ произвольного множества X определить как совокупность пределов порядково сходящихся сетей, состоящих из элементов множества X.

3. Определите в произвольном у-множестве звездную сходимость для сетей.

4. Покажите, что в (векторной) решетке всех функций на $[0, 1]$, интегрируемых вместе с квадратом, звездная сходимость не равносильна порядковой.

5. Покажите, что если $P = Q \circ R$ как у-множество является ординальным произведением у-множеств Q и R, то как топологическое пространство (относи-

тельно порядковой топологии) P будет топологическим произведением пространств Q и R.

6. Покажите, что любая решетка является топологически плотным подмножеством в своем пополнении сечениями с его порядковой топологией, но что это не верно для произвольных у-множеств.

7. Покажите, что решетка, компактная в своей порядковой топологии, необходимо полна.

*8. Постройте полную решетку, которая не является компактной в своей порядковой топологии.

9. Покажите, что элемент a полной решетки L изолирован в порядковой топологии решетки L тогда и только тогда, когда ни для какой цепи $C \subset L - \{a\}$ он не является точной верхней или точной нижней гранью [1]) (С. А. Коган).

10. Покажите, что решетка не обязательно является хаусдорфовым пространством в своей порядковой топологии (Нортем).

*11. Покажите, что хаусдорфово пространство X регулярно тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно подмножеству некоторой полной решетки L в ее порядковой топологии [2]).

10. Звездная сходимость в метрических решетках

В этом разделе изучается связь между *метрической* топологией в метрической решетке M и порядковой топологией на M. Прежде всего мы установим, что метрическая полнота и полнота порядковая по существу равносильны [3]).

Теорема 16. *Любая метрически полная решетка M условно полна и в ней*

(19) *если* $x_n \uparrow x$, *то* $v[x_n] \uparrow v[x]$, *и двойственно;*

обратно, любая σ-полная метрическая решетка, удовлетворяющая условию (19), *метрически полна.*

Доказательство. Пусть M — полная метрическая решетка и S — любое ограниченное подмножество в M. Рассмотрим точные верхние грани $\sup X$ всевозможных конечных подмножеств X множества S. Поскольку S ограничено, а $v[x]$ изотонна, множество действительных чисел вида $v[\sup X]$ будет ограниченным, и следовательно, будет иметь точную верхнюю грань v_S. Поэтому можно найти подмножества $X_1, X_2, \ldots$ такие, что $v[\sup X_n] \geqslant v_S - 2^{-n}$. Тогда, обозначая через U (конечное) теоретико-множественное объединение подмножеств X_m и X_n, мы получим ввиду (3), что

$$d(\sup X_m, \sup X_n) \leqslant v[\sup U] - v[\sup X_m] + v[\sup U] - v[\sup X_n] \leqslant$$
$$\leqslant 2^{-m} + 2^{-n} \quad \text{(по построению).}$$

---

[1]) Ответ на первый вопрос проблемы 21 из [LT2]. — *Прим. перев.*

[2]) де Мар (de Marr R. A. — Proc. AMS, 1965, 16, p. 588—590).

[3]) Результаты § 10 принадлежат фон Нейману и автору (Neumann J. von, Birkhoff G. — Ann. Math., 1937, 38, p. 56), некоторые из них независимо получил Л. В. Канторович [1]. См. [LT2, с. 99].

Вследствие метрической полноты элементы $\sup X_n$ метрически сходятся к некоторому $s \in M$. Пусть теперь задан элемент $x \in S$. Согласно (4) имеем

$$v[x \vee s] - v[s] = \lim_{n\to\infty} \{v[x \vee \sup x_n] - v[\sup x_n]\} \leqslant 2^{-m}$$

для всех m. Поэтому $x \vee s = s$, т. е. s будет верхней гранью для S; но если u — какая-нибудь верхняя грань для S, то $u \geqslant \sup x_n$ для всех n и потому $u \vee s = u$ вследствие непрерывности (см. (4)). Таким образом, s является наименьшей верхней гранью для S. Существование точной нижней грани $\inf S$ выводится двойственно. Итак, решетка M условно полная.

Чтобы доказать (19), заметим, что если $x_n \uparrow x$, то $v[x_n]\uparrow$, и в то же время $v[x_n] \leqslant v[x]$ для всех n; следовательно, $v[x_n] \uparrow c$ для некоторого действительного числа c. Отсюда вытекает, что $d(x_m, x_n) = |v[x_n] - v[x_m]| \to 0$ при $m, n \to \infty$; значит, $d(x_m, y) \to 0$ при $m \to \infty$ для некоторого y, ввиду метрической полноты. Очевидно, что $v[x_n] \uparrow v[y]$; кроме того, $y \wedge x_m = (\lim x_n) \wedge x_m = \lim x_m = x_m$ (метрические пределы). Значит, y является верхней гранью для $\{x_n\}$. Но по определению $x = \sup\{x_n\}$, поэтому $x \leqslant y$ и $v[x] \leqslant v[y]$. Однако мы уже показали, что $v[x_n] \uparrow v[y]$ и $v[x_n] \leqslant v[x]$ для всех n; отсюда $v[x_n] \uparrow v[x]$, что и доказывает (19).

Обратно, пусть M — σ-полная метрическая решетка, в которой выполняется (19). Из любой последовательности Коши можно извлечь подпоследовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющую условиям $d(x_n, x_{n+1}) < 2^{-n}$ для $n = 1, 2, \ldots$. Покажем теперь, что $d(x_n, y) \to 0$ для некоторого y, откуда и следует метрическая полнота. В самом деле, образуем $y_{n,r} = x_n \vee \ldots \vee x_{n+r}$. Для фиксированного n будет $y_{n,r}\uparrow$. Вследствие σ-полноты $y_{n,r} \uparrow y_n$, причем, ввиду (19), $d(y_{n,r}, y_n) \to 0$ при $r \to \infty$. Поэтому, используя (4), мы получаем, что

$$d(x_n, y_n) \leqslant \sum_{r=0}^{\infty} d(y_{n,r}, y_{n,r+1}) = \sum_{r=0}^{\infty} d(y_{n,r} \vee x_{n+r}, y_{n,r} \vee x_{n+r+1}) <$$

$$< \sum_{r=0}^{\infty} 2^{-n-r} = 2\cdot 2^{-n}.$$

Двойственно, положим $z_{n,r} = x_n \wedge \ldots \wedge x_{n+r}$; тогда $z_{n,r} \downarrow z_n$, причем $d(x_n, z_n) < 2\cdot 2^{-n}$. Кроме того, $y_n \geqslant x_n \geqslant z_n$; поскольку $y_n \geqslant y_{n,r+1} \geqslant y_{n+1,r}$ для всех r, то $y_n \geqslant y_{n+1}$, и двойственно, $z_n \leqslant z_{n+1}$. Далее, в силу σ-полноты, $x_n \downarrow y$ и $z_n \uparrow x$, причем

$$d(y, z) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n) = \lim_{n\to\infty} [d(y_n, x_n) + d(x_n, z_n)] = 0,$$

поскольку $d(y_n, x_n) + d(x_n, z_n) < 2^{2-n}$ для любого n. Значит, $y = z$. Кроме того,

$$d(x_n, y) = v[x_n \vee y] - v[x_n \wedge y] \leqslant v[y_n] - v[z_n] < 2^{2-n},$$

так что $x_n \to y$ метрически. Ч. т. д.

Поскольку в решетке с O и I условная полнота влечет полноту мы получаем

Следствие. *В любой метрической решетке с универсальными гранями, которая удовлетворяет условию* (19), *метрическ полнота, (порядковая) полнота и σ-полнота являются равносильными свойствами.*

Пусть теперь M будет метрически полной метрической решеткой и последовательность $\{x_n\}$ в ней звездно сходится к x, т. е. каждая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ содержит подпоследовательность, порядково сходящуюся к x. Если мы сможем доказать, что любая порядково сходящаяся подпоследовательность и метрически сходится к тому же пределу, то тем самым мы докажем метрическую сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x. Предположим, что $u_n \downarrow y$, $w_n \uparrow y$ и $u_n \geqslant y_n \geqslant w_n$. Тогда

$$d(y_n, y) = v[y_n \vee y] - v[y_n \wedge y] \leqslant v[u_n] - v[w_n] \downarrow 0$$

ввиду (19) и значит, $y_n \to y$ метрически, что и требовалось.

Обратно, пусть $d(x_n, x) \to 0$. Тогда можно выбрать подпоследовательность $\{y_n\}$ такую, что $d(y_n, y_{n+1}) < 2^{-n}$, и, значит, такую, что $d(y_n, x) < 2^{-n+1}$. Теперь положим $z_n = y_1 \vee \ldots \vee y_n$; тогда $z_1 \leqslant z_2 \leqslant z_3 \leqslant \ldots$ и, вследствие (4),

$$(20) \qquad d(z_n, z_{n+1}) = d(z_n \vee y_n, z_n \vee y_{n+1}) \leqslant d(y_n, y_{n+1}) < 2^{-n}.$$

В силу метрической полноты найдется элемент z такой, что $d(z_n, z) \to 0$; этот z будет тогда верхней гранью (на самом деле точной верхней гранью) для $\{z_n\}$ и, следовательно, верхней гранью для $\{y_n\}$. Аналогично, $\{y_n\}$ ограничена снизу. Вследствие условной полноты метрических решеток (теорема 16) можно построить последовательности $t_n = \bigwedge_{k \geqslant n} y_k$ и $s_n = \bigvee_{k \geqslant n} y_k$, которые будут ограничены теми же гранями, что и $\{y_n\}$, а поэтому

$$(21) \qquad \bigvee_n t_n = \bigvee_n \Bigl(\bigwedge_{k \geqslant n} y_k\Bigr) \geqslant \bigwedge_n \Bigl(\bigvee_{k \geqslant n} y_k\Bigr) = \bigwedge_n s_n, \text{ где } s_n \downarrow, t_n \uparrow.$$

Далее, ввиду (19) и (4),

$$d(t_n, x) = v[t_n] - v[x] = \sup_k v[y_n \vee \ldots \vee y_k] - v[x] \leqslant$$

$$\leqslant \sup_k d(y_n \vee \ldots \vee y_k, x) \leqslant \sup_k \sum_{m=n}^{k} d(y_m, x) \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} d(y_m, x) = 2^{-m+1}.$$

Таким образом, $d(t_n, x) \to 0$. Аналогично $d(s_n, x) \to 0$, так что

$$(22) \qquad \bigvee_n \Bigl(\bigwedge_{k \geqslant n} y_k\Bigr) = x = \bigwedge_n \Bigl(\bigvee_{k \geqslant n} y_k\Bigr).$$

Следовательно, нами доказана

Теорема 17. *В метрически полной метрической решетке метрическая сходимость и звездная сходимость равносильны.*

11. Топологические решетки

В общем случае *топологической алгеброй* называется алгебра (определение см. в главе VI), которая, кроме того, является топологическим пространством (в смысле главы IX) и операции которой непрерывны в заданной топологии. Можно было бы построить теорию топологических алгебр вообще («универсальная топологическая алгебра»)[1]), аналогичную «универсальной алгебре», как она изложена в главах VI→VII, но мы сосредоточимся на частном случае топологических решеток.

Определение. *Топологической решеткой* называется решетка с такой топологией сходимости, в которой

(23) если $x_\alpha \to x$ и $y_\beta \to y$, то $x_\alpha \wedge y_\beta \to x \wedge y$,

и

(23′) если $x_\alpha \to x$ и $y_\beta \to y$, то $x_\alpha \vee y_\beta \to x \vee y$.

Мы уже показали (см. (5)), что *любая метрическая решетка является топологической решеткой в своей метрической топологии.* На самом деле решеточные операции в этом случае *равномерно* непрерывны, поскольку для них выполняется условие Липшица с константой Липшица, равной единице. Из этого факта легко вывести следующее важное утверждение.

Теорема 18. *Любая полная метрическая решетка является топологической решеткой относительно порядковой сходимости.*

Лемма. *Для того, чтобы условия* (23) *и* (23′) *выполнялись в полной решетке, достаточно, чтобы соответственно выполнялись в ней условия*

(24) *если* $x_\alpha \uparrow x$, *то* $a \wedge x_\alpha \uparrow a \wedge x$,

и

(24′) *если* $x_\alpha \downarrow x$, *то* $a \vee x_\alpha \downarrow a \vee x$.

Доказательство. (Эти условия, разумеется, необходимы.) В (23) пусть u_α будет пересечением всех следующих за x_α элементов, а v_β — пересечением всех следующих за y_β элементов. Мы докажем, что $u_\alpha \wedge v_\beta \uparrow x \wedge y$. Поскольку $u_\alpha \wedge v_\beta$ является изотонной сетью, достаточно показать, что $\bigvee (u_\alpha \wedge v_\beta) = x \wedge y$; этим мы сейчас и займемся. Так как $x \geqslant u_\alpha$ и $y \geqslant v_\beta$, то, очевидно,

$$x \wedge y \geqslant u_\alpha \wedge v_\beta \text{ для всех } \alpha, \beta \text{ и потому } x \wedge y \geqslant \bigvee (u_\alpha \wedge v_\beta).$$

Обратно, из (24) для каждого α следует, что

$$\bigvee (u_\alpha \wedge v_\beta) \geqslant u_\alpha \wedge \left(\bigvee v_\beta\right) = u_\alpha \wedge y.$$

---

[1]) Первоначальные идеи в этом направлении см. у ван Данцига (Dantzig D. van. — Math. Ann., 1933, 107, p. 587—626) и Биркгофа [3, § 26].

Поэтому, беря объединение по α, получаем, что

$$\bigvee (u_\alpha \wedge v_\beta) \geqslant \bigvee (u_\alpha \wedge y) = x \wedge y,$$

ввиду L2 и снова (24). Доказательство завершается двойственными рассуждениями.

Доказательство теоремы. Предположим, что $x_\alpha \uparrow x$ и $s = \sup\limits_\alpha v\,[x_\alpha]$. Мы можем выбрать элементы $t_n = x_{\alpha(n)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ такие, что $\alpha(n) \leqslant \alpha(n+1)$ и $v\,[t_n] > s - 2^{-n}$. Поскольку $\alpha(n) \leqslant \alpha(n+1)$, то $d(t_n, t_{n+1}) < 2^{-n}$; поэтому, в силу метрической полноты, $t_n \to t$ метрически для некоторого t, где $v\,[t] = s$. Теперь покажем, что $t \geqslant x_\alpha$ для всех α. Если это не так, то для некоторого n будет $v\,[t \vee x_\alpha] - v\,[t] > 2^{-n}$, откуда $v\,[t_m \vee x_\alpha] - s < 2^{-n}$ при подходящих m, n, и значит, $v\,[x_\beta] > s + 2^{-n}$ для некоторого x_β, следующего одновременно за $x_{\alpha(m)} = t_m$ и за x_α, а это противоречит определению числа s. Отсюда получается, что $t \geqslant x$. Но $v\,[t] = s \leqslant v\,[x]$, так что $t = x$ и $d(x_\alpha, x) \downarrow 0$. Ввиду (5), однако, $d(x_\alpha \wedge a, x \wedge a) \downarrow 0$ для всех a. Значит, элемент $a \wedge x$, который, конечно, является верхней гранью изотонной сети $\{a \wedge x_\alpha\}$, будет ее *наименьшей* верхней гранью и, следовательно, (порядковым) пределом. Снова доказательство завершается ссылкой на двойственность.

Теорема 19. *Полная дистрибутивная решетка является топологической решеткой относительно порядковой сходимости тогда и только тогда, когда в ней*

(25) $$a \wedge \left(\bigvee x_\alpha\right) = \bigvee (a \wedge x_\alpha)$$

и, двойственно,

(25′) $$a \vee \left(\bigwedge x_\alpha\right) = \bigwedge (a \vee x_\alpha).$$

Это бесконечные дистрибутивные законы (1)—(1′) из § V.5. Сопоставляя с теоремой V.16, мы получаем

Следствие 1. *Любая полная булева решетка является топологической решеткой относительно порядковой сходимости.*

Теорема 19 вместе с определением из § V.10 дает

Следствие 2. *Любая полная топологическая дистрибутивная решетка является полной брауэровой решеткой.*

Доказательство теоремы. Для изотонной сети $\{x_\alpha\}$ условие (25) равносильно условию (24); поэтому в любом случае из (25) следует (24). Двойственно, из (25′) следует (24′), и поэтому в силу леммы *любая* полная решетка, удовлетворяющая бесконечным дистрибутивным законам (25)—(25′), является топологической.

Обратно, пусть полная дистрибутивная решетка L является топологической, и значит, удовлетворяет условиям (24)—(24′). Тогда для любого множества A элементов $x_\alpha \in L$ можно построить изотонную сеть, состоящую из $y_F = \bigvee\limits_F x_\varphi$, где F — произвольные конечные подмножества множества A. В силу дистрибутивности, $a \wedge y_F = a \wedge \bigvee_F x_\varphi = \bigvee_F (a \wedge x_\varphi)$ и, следовательно, сеть $y_F \uparrow \bigvee_A x_\alpha = b$. Отсюда по лемме $a \wedge y_F \uparrow a \wedge b$, иными словами,

$$(26) \quad a \wedge (\bigvee x_\alpha) = a \wedge (\bigvee y_F) = \bigvee (a \wedge y_F) = \\ = \bigvee \left(a \wedge \bigvee_F x_\varphi\right) = \bigvee (a \wedge x_\alpha).$$

Выполнимость (25′) доказывается двойственно.

Дальнейшие результаты о решетках, являющихся топологическими решетками относительно своей порядковой топологии, приводятся в нижеследующих упражнениях.

Упражнения к §§ 10—11

1. Покажите, что (19) не обязательно выполняется для положительных оценок даже в цепях.

2. Покажите, что (19) выполняется в метрической решетке тогда и только тогда, когда из порядковой сходимости последовательностей следует их метрическая сходимость.

3. (а) Постройте метрически полную метрическую решетку, которая не является полной решеткой.

(б) Покажите, что в метрически полной метрической решетке подрешетка метрически ограничена тогда и только тогда, когда она порядково ограничена.

4. Покажите, что в полных метрических решетках для изотонных сетей $\{x_\alpha\}$ метрическая сходимость равносильна порядковой сходимости.

5. Покажите, что полная решетка является топологической решеткой относительно порядковой сходимости тогда и только тогда, когда она является топологической относительно звездной сходимости.

6. Покажите, что в полной (браузровой) решетке всех замкнутых подпространств действительной прямой из $x_\alpha \downarrow x$ следует, что $(a \vee x_\alpha) \downarrow (a \vee x)$, но не двойственно: эта решетка не является топологической [1]).

7. Установите тот же результат для подгрупп аддитивной группы Z целых чисел. (См. § VIII.5, (3).)

* 8. Покажите, что при $n > 2$ свободная решетка $FL(n)$ не полна, но является топологической решеткой [2]).

9. Покажите, что каждый «полный гомоморфизм» (т. е. гомоморфизм, сохраняющий произвольные объединения и пересечения) непрерывен в порядковой топологии.

10. Пусть L — произвольная полная решетка, в которой счетно каждое возрастающее вполне упорядоченное множество и двойственно. Покажите, что если $x_\alpha \to a$ (порядковая сходимость), то можно найти счетную *последовательность* $\{x_{\alpha(n)}\} \subset \{x_\alpha\}$ такую, что $x_{\alpha(n)} \to a$.

11. Пусть $P = \prod L_\alpha$ будет (кардинальным) произведением решеток L_α. Покажите, что сходимость в P является декартовым произведением сходимостей в сомножителях L_α.

* 12. (а) Пусть L — булева решетка всех регулярных открытых подмножеств отрезка $[0, 1]$. Покажите, что на L не существует хаусдорфовой топологии, в которой из $x_n \uparrow a$ следовало бы, что $x_n \to a$ топологически.

---

[1]) Это задание повторяет упр. 1 к § IX.5. — *Прим. перев.*

[2]) В оригинале предлагается доказать противоположное утверждение. — *Прим. перев.*

(б) Покажите, что если $x_{i,j} \to x_i$ для всех i и $x_i \to a$, то не обязательно существует $j(i)$ такое, чтобы $x_{i,j(i)} \to a$ в L [1]).

13. (а) Покажите, что локально компактная связная топологическая решетка является цепью тогда и только тогда, когда ее топологическая размерность равняется 0 или 1.

(б) Покажите, что любая локально компактная связная топологическая решетка обладает базисом, состоящим из открытых выпуклых подмножеств [2]).

14. Покажите, что центр любой компактной топологической решетки является вполне несвязным.

15. (а) Покажите, что если топологическая решетка гомеоморфна связному локально компактному подмножеству плоскости, то она дистрибутивна.

(б) Покажите, что в случае трехмерного евклидова пространства это не так.

12. Интервальная топология

Замечательное свойство *порядковой топологии*, определяемой в (полных) решетках порядковой или звездной сходимостью,— ее внутренний характер, т. е. устойчивость относительно (порядковых) изоморфизмов: любой изоморфизм решеток необходимо является гомеоморфизмом их порядковых топологий.

Но в решетках можно определить и другие заслуживающие внимания внутренние топологии. Одной из самых интересных является следующая интервальная топология, введенная Финком [3]).

Определение. Пусть P — у-множество с универсальными гранями O и I. *Интервальной топологией* на P называется топология, в которой в качестве предбазиса замкнутых множеств выбраны замкнутые интервалы $[a, b]$.

Основной интерес к интервальной топологии обусловлен следующим общим результатом.

Теорема 20 (Фринк). *Решетка компактна в своей интервальной топологии тогда и только тогда, когда она полна.*

Доказательство основывается на теореме Александера (следствие из теоремы IX.7): замкнутые интервалы $[a_\alpha, b_\alpha]$ любой полной решетки L обладают свойством компактности. В самом деле, зададим *направленность* в множестве конечных пересечений

$$[a_F, b_F] = \bigcap_{\alpha \in F} [a_\alpha, b_\alpha] = \left[\bigvee_F a_\alpha, \bigwedge_F b_\alpha\right] \tag{27}$$

обращением теоретико-множественного включения (другими словами, рассмотрим *фильтр* интервалов $[a_F, b_F]$). Если никакой

---

[1]) Упр. 12 содержит результаты Флойда (Floyd E. E. — Pacif. J. Math. 1955, 5, p. 687—689). [Решение проблемы 77 из [LT2]. — *Прим. перев.*]

[2]) Упр. 13—15 содержат результаты Андерсона (Anderson L. W.) и Уоллеса (Wallace A. D.). См. в [Symp, p. 195—197] более детальные ссылки.

[3]) Фринк [1]. Модификация для случая бинаправленных множеств без универсальных граней была предложена автором (Birkhoff G. — Revista Math. Tucuman, 1962, A14, p. 325—331).

из интервалов $[a_F, b_F]$ не пуст, то сети $\{a_F\}$ и $\{b_F\}$ существуют и $a_F \uparrow a$, $b_F \downarrow b$ при некоторых $a = \bigvee a_F \leqslant b = \bigwedge b_F$; поэтому пересечение

$$(28) \qquad \bigcap [a_\alpha, b_\alpha] = \bigcap [a_F, b_F] \supset [a, b]$$

не пусто. Поскольку интервалы $[a_\alpha, b_\alpha]$ обладают свойством компактности и образуют предбазис замкнутых множеств, решетка L компактна.

Обратно, предположим, что решетка L не является полной, так что некоторое множество $S \subset L$ не имеет точной верхней грани (или двойственно). Рассмотрим интервалы $[s, u]$, где $s \in S$— произвольный элемент, а u — произвольная верхняя грань множества [1]) S. Эти интервалы имеют непустые конечные пересечения, поскольку

$$\bigcap [s_\alpha, u] = \left[\bigvee_F s_\alpha, \bigwedge_F u_\alpha\right],$$

и в то же время их пересечение пусто, так как любой элемент пересечения был бы точной верхней гранью для S.

Интервальная топология может быть определена и в терминах *бинаправленных* множеств, возможно, не имеющих универсальных граней. (Напомним, что у-множество D называется бинаправленным, если любые $a, b \in D$ имеют верхнюю и нижнюю грани в D.)

Определение. В бинаправленном множестве D пусть $\mathscr{C}$ — $\bigcap$-кольцо всех пересечений конечных объединений замкнутых интервалов $[a, b]$ из D. Множество $S \subset D$ называется *замкнутым в интервальной топологии* на D, если для любого $C \in \mathscr{C}$ будет $S \cap C \in \mathscr{C}$.

Покажем теперь, что в решетках интервальная топология всегда *не сильнее* порядковой топологии (во многих важных случаях эти топологии равносильны).

Теорема 21. *Каждое подмножество направленного множества, замкнутое в интервальной топологии, замкнуто и в порядковой топологии.*

Доказательство. Предположим, что $x_\alpha \to c$, где $x_\alpha \in [a, b]$ для всех α. Тогда $t_\alpha \leqslant x_\alpha \leqslant u_\alpha$, где $\bigvee t_\alpha = \bigwedge u_\alpha = c$. Но для всех α справедливо $u_\alpha \geqslant x_\alpha \geqslant a$; поэтому $c = \bigcap u_\alpha \geqslant a$. Двойственно, $c \leqslant b$, откуда $c \in [a, b]$, т. е. замкнутые интервалы оказываются замкнутыми подмножествами. Поскольку замкнутые интервалы образуют предбазис замкнутых множеств, доказательство закончено.

Теорему Фринка можно расширить, показав, что в любой *условно полной* решетке замкнутое множество *компактно* тогда

[1]) Если S не имеет верхних граней, будем рассматривать главные дуальные идеалы $[s, \infty)$.

и только тогда, когда оно *ограничено*. По поводу доказательства отошлем читателя к цитируемой выше статье автора.

Предлагались и различные другие интересные внутренние топологии на решетках. Мы отсылаем читателя к журнальной литературе [1]).

Упражнения

1. (а) Покажите, что в поле действительных чисел $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (модифицированная) интервальная топология совпадает с обычной топологией.

(б) Обобщите этот результат на $\mathbf{R}^n$.

2. (а) Покажите, что в любой цепи интервальная топология равносильна порядковой топологии [2]).

(б) Покажите, что то же самое верно для любой решетки конечной $\wedge$-ширины [3]).

3. Покажите, что в декартовом произведении $\mathbf{R}^2$ интервальная и порядковая топологии равносильны обычной топологии.

4. Покажите, что если $\mathbf{R}^2$ пополнить присоединением универсальных граней $-\infty$ и $+\infty$, то полученное пространство уже не будет хаусдорфовым ни в своей интервальной, ни в порядковой топологии, которые тем не менее останутся равносильными.

5. Покажите, что в полной атомной булевой алгебре 2^{ω} порядковая и интервальная топологии равносильны и приводят к канторову дисконтинууму.

6. Пусть $L(X)$ — полная (дуально брауэрова) решетка всех замкнутых множеств отрезка $[0, 1]$. Покажите, что $L(X)$ *не* является компактной в порядковой топологии, которая, таким образом, оказывается «сильнее» интервальной топологии.

7. Пусть L — решетка. Покажите, что для идеалов $J \subset L$ следующие условия равносильны: (i) множество J замкнуто в порядковой топологии; (ii) множество J замкнуто в интервальной топологии; (iii) J является замкнутым идеалом в смысле § V.9.

$*$ 8. Покажите, что прямое произведение P семейства решеток L_α, имеющих универсальные грани, *гомеоморфно* в интервальной топологии их декартову произведению.

9. Покажите, что если L — бесконечная решетка длины 2, то на L не существует *внутренней* (т. е. инвариантной относительно всех автоморфизмов и дуальных автоморфизмов) хаусдорфовой топологии.

10. Покажите, что булева решетка является хаусдорфовым пространством в своей интервальной топологии тогда и только тогда, когда она атомная [4]).

$*$ 11. Покажите, что решетка L с универсальными гранями тогда и только тогда будет хаусдорфовым пространством в своей интервальной топологии, когда для любых заданных $a < b$ в L дополнение C пересечения $[O, a] \cap [b, I]$ содержит конечное подмножество F такое, что каждый элемент $c \in C$ сравним с некоторым $x \in F$ [5]).

---

[1]) Фринк [1, §§ 12, 13]; Ренни (R e n n i e B. C. The theory of lattices.— Cambridge: Foister and Jagg, 1952; Proc. London Math. Soc., 1951, **52**, p. 386—400), Уорд (W a r d A. J — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, **51**, p. 254—261), Папангелу (P a p a n g e l o u L. F. — Math. Ann., 1964, **155**, p. 81—107; Pacific J. Math., 1965, **15**, p. 1347—1364).

[2]) Упр. 2 (а), 3, 6, 8 содержат результаты Фринка [1].

[3]) По поводу упр. 2 (б) см. работы Найто (N a i t o T. — Proc. AMS, 1960, **11**, p. 156—158), Мацусимы (M a t s u s h i m a Y. — Proc. AMS, 1960, **11**, p. 233—235) и Уолка (W o l k E. S. — Proc. AMS, 1960, **11**, p. 487—492).

[4]) Катетов (K a t e t o v M. — Colloq. Math., 1951, **2**, p. 229—235).

[5]) См. работы Нортема (N o r t h a m E. S. — Proc. AMS, 1953, **4**, p. 824—827) и С. А. Когана (УМН, 1956, **11**, с. 185—190).

*12. Постройте решетку L такую, чтобы ее квадрат L^2 со своей интервальной топологией не был гомеоморфен квадрату интервальной топологии на L.

*13. (а) Постройте бесконечную цепь C, которая компактна и нульмерна в своей интервальной топологии, но не имеет собственных порядковых автоморфизмов.

(б) Покажите, что в этом случае C является стоуновым пространством бесконечной булевой алгебры, не имеющей собственных автоморфизмов [1]).

ПРОБЛЕМЫ

81. Пусть M — нетривиальная модулярная решетка, в которой никакой фактор не проективен своей собственной части. Обязательно ли M имеет нетривиальную (действительную) оценку?

82. Существует ли простая (модулярная) решетка с двумя линейно независимыми оценками?

*83. Доказать, что каждая цепь является хаусдорфовым пространством в своей внутренней топологии, не используя аксиому выбора, или показать, что такое доказательство невозможно. [2])

84. Когда решетка является нормальным пространством в своей внутренней порядковой топологии? [3])

85. Каждый ли полный (т. е. относительно произвольных объединений и пересечений) гомоморфизм полных решеток непрерывен относительно звездной сходимости? в интервальной топологии?

86. Найти простые необходимые и достаточные условия, при выполнении которых бинаправленное множество будет компактно в своей интервальной топологии.

87. Может ли решетка бесконечной $\wedge$-ширины быть хаусдорфовым пространством в своей интервальной топологии?

88. Описать геометрические решетки, имеющие локально евклидову внутреннюю топологию, в которой элементы данной высоты образовывали бы связное множество [4]).

89. В каком случае и как можно было бы расширить локально дезаргову действительную гиперболическую геометрию до аффинной геометрии?

---

[1]) Йонссон (Jónsson B. — Proc. AMS, 1951, 2, p. 766—770), Ригер (Rieger L. — Fund. Math., 1951, 38, p. 209—216). См. упр. 5 к § IX.10.

[2]) Проблема 15 из [LT2]. — *Прим. перев.*

[3]) Проблема 23 из [LT2]. — *Прим. перев.*

[4]) См. работы Уилкокса (Wilcox L. R. — Duke J. Math., 1941, 8, p. 273—285), Хаупта, Небелинга и Паука (Haupt O., Nöbeling G., Pauc Chr. — Crelle's J. Math., 1940, 181, p. 193—217). В модулярном дезарговом случае используйте работу А. Н. Колмогорова (Ann. Math., 1932, 33, p. 163—176).

90. Если непрерывная кривая является дистрибутивной решеткой $\wedge$-ширины n, то можно ли ее как топологическую решетку вложить в n-клетку? [1])

91. Построить теорию (а) топологических, (б) дифференцируемых [2]), (в) аналитических плоских решеток и соответствующих решеток $\wedge$-ширины 2.

92. Построить общую теорию дифференцируемых и аналитических решеток.

---

[1]) Дайер и Шилдс (D y e r E., S h i e l d s A. — Pacif. J. Math., 1959, **9**, p. 443—448), Андерсон (A n d e r s o n L. W. — J. London Math. Soc., 1962, **37**, p. 60—62).

[2]) Предполагая, например, что интервалы $[a, b]$ являются дифференцируемыми многообразиями, ограниченными дифференцируемыми гранями, ребрами и т. д.

ГЛАВА XI

БОРЕЛЕВСКИЕ АЛГЕБРЫ И РЕШЕТКИ ФОН НЕЙМАНА

1. Борелевские алгебры

Некоторые из наиболее глубоких идей теории решеток возникли в связи со специальными разделами действительного анализа такими, как теория меры и интегрирования, теория операторов, функциональный анализ, эргодическая теория и т. п. Настоящая глава и посвящена этим идеям.

Многие из них используют техническое понятие σ-решетки, которое мы сейчас определим. *σ-решеткой* называется решетка, в которой каждое конечное или счетное множество $X = \{x_n\}$ имеет пересечение $\inf X$ и объединение $\sup X$. Назовем булеву σ-решетку *борелевской решеткой*, а σ-решетку, которая является булевой алгеброй относительно конечных объединений и пересечений, — *борелевской алгеброй*.

Подмножество S σ-решетки L называется *σ-подрешеткой* решетки L, если оно вместе со всяким своим конечным или счетным подмножеством X содержит $\inf X$ и $\sup X$. *Борелевской подалгеброй* борелевской алгебры, по определению, будет ее булева подалгебра, являющаяся также σ-подрешеткой.

Пример 1. Пусть X — топологическое пространство, а 2^X — (полная атомно порожденная) булева алгебра *всех* подмножеств множества X; она, очевидно, будет борелевской алгеброй. *Борелевским множеством* в X назовем любое подмножество, которое принадлежит борелевской алгебре, порожденной замкнутыми (или, равносильно, открытыми) подмножествами из X. Эти борелевские множества, таким образом, сами образуют борелевскую алгебру $2^{[X]}$.

Понятно, что σ-подрешетка — это в точности «подалгебра» σ-решетки, если последнюю рассматривать как бесконечноместную алгебру относительно счетных объединений и пересечений. Допуская повторное вхождение переменных, мы включаем в эту схему, как частный случай, и конечные объединения и пересечения. Так что любая борелевская подалгебра борелевской алгебры сама является борелевской алгеброй и любое пересечение борелевских подалгебр борелевской алгебры A снова будет борелевской подалгеброй в A.

Борелевская подалгебра в 2^X называется *σ-полем* подмножеств множества X, а σ-подрешетка в 2^X называется *σ-кольцом* подмножеств множества X. Эти понятия играют основную роль в теории меры и в теории вероятностей.

σ-гомоморфизмом σ-решетки L в σ-решетку M называется функция h: $L \to M$ такая, что

$$\bigwedge_n h(x_n) = h\left(\bigwedge_n x_n\right) \text{ и } \bigvee_n h(x_n) = h\left(\bigvee_n x_n\right) \tag{1}$$

для любого конечного или счетного подмножества $\{x_n\} \subset L$.

Наконец, *σ-идеал* $J \subset L$ определяется двумя условиями:

(i) если $a \in J$ и $x \leqslant a$, то $x \in J$, и

(ii) если $X \subset J$ и X конечно или счетно, то $\bigvee X = \sup X \in J$.

Теорема 1. *Ядро всякого σ-гомоморфизма σ-решеток является σ-идеалом. Обратно, если J — некоторый σ-идеал борелевской алгебры A, то A/J — борелевская алгебра, и булево наложение $A \to A/J$ будет σ-наложением.*

Доказательство проводится прямой проверкой, мы опускаем его.

Теорема 2. *В любой борелевской алгебре все булевы операции непрерывны относительно порядковой сходимости.*

Доказательство. Ввиду следствия 1 из теоремы X.19 достаточно доказать, что при $x_n \to a$ всегда $x'_n \to a'$. Но это очевидно, поскольку определение порядковой топологии самодвойственно.

Упражнения

1. Докажите теорему 1.
2. Дайте подробное доказательство того, что борелевские подалгебры любой борелевской алгебры образуют полную решетку.
3. Докажите, что любой σ-идеал σ-решетки является σ-решеткой.
4. Покажите, что любая атомно порожденная борелевская решетка со счетным множеством точек (атомов) полна.

*5. Покажите, что (атомно порожденная) борелевская алгебра всех борелевских множеств числовой прямой $\mathbf{R}$ равномощна $\mathbf{R}$.

*6. Покажите, что борелевская алгебра всех борелевских множеств на $\mathbf{R}$ не является полной. (Указание. См. теорему V.18.)

*7. Покажите, что в борелевской алгебре A каждое множество дизъюнктных элементов $a_i > 0$ счетно тогда и только тогда, когда каждое вполне упорядоченное подмножество в A счетно («σ-цепное» условие), но что для произвольной булевой алгебры это не так (Халмош [1, р. 62—63]).

2. Представления борелевских алгебр

В следствии 3 из теоремы VIII.15 было показано, что любая булева алгебра изоморфна (с сохранением дополнений и конечных объединений и пересечений) некоторому полю множеств. А по теореме V.17, любая полная булева алгебра, удовлетворяющая неограниченным дистрибутивным законам, изоморфна булевой алгебре всех подмножеств множества своих атомов (с сохранением *произвольных* объединений и пересечений). Теперь рассмотрим случай счетных объединений и пересечений. Следующие теоремы 3—4 устанавливают важные связанные с этим результаты.

Теорема 3 (Лумис—Сикорский[1]). *Любая борелевская алгебра A является σ-гомоморфным образом σ-поля множеств.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{S}$ обозначает «пространство представлений», состоящее из всех тех подмножеств $S \subset A$, которые содержат точно один элемент из каждой пары $\{a, a'\}$ взаимно дополнительных элементов борелевской алгебры A. В множестве $P(\mathcal{S})$ всех подмножеств множества $\mathcal{S}$ каждому $a \in A$ соотнесем множество $\tau(a) \subset \mathcal{S}$, состоящее из тех $S \subset A$, которые содержат a. Ясно, что если $S \in \mathcal{S}$, то $S' \in \mathcal{S}$, где S' обозначает дополнение для S в $P(A)$; кроме того, $a \in S$ тогда и только тогда, когда $a' \in S'$. Поэтому $[\tau(a)]' = \tau(a')$.

Пусть теперь $\Phi \subset P(\mathcal{S})$ будет σ-полем подмножеств множества $\mathcal{S}$, порожденным множествами $\tau(a)$ относительно счетных объединений и пересечений. Обозначим через N множество всех таких счетных пересечений $\bigcap \tau(a_j)$, для которых $\bigwedge a_j = O$ в A. Если J — σ-идеал, порожденный N, то он состоит из элементов $t \leqslant \bigcup n_i$ для счетных подмножеств из N. Мы докажем, что соответствие $a \mapsto \tau(a)$ является изоморфизмом τ: $A \to \Phi/J$. Прежде всего, τ — гомоморфизм алгебры A на Φ/J. В самом деле, если $a = \bigvee a_i$, то $a' \wedge a_i \leqslant a' \wedge a = 0$ для всех i и $0 = a \wedge a' = a \wedge (\bigvee a_i)' = a \wedge \bigwedge a_i'$. Следовательно, по определению N и J, каждое пересечение $\tau(a') \cap \tau(a_i) \in N$ и $\tau(a) \cap \bigcup \tau(a_i') \in N$. Из первого соотношения следует, что

$$\tau(a') \cap \bigcup \tau(a_i) = \bigcup [\tau(a') \cap \tau(a_i)] \in J.$$

Из второго же получаем, что $\tau(a) \cap [\bigcup \tau(a_i)]' = \tau(a) \cap \bigcap \tau(a_i') \in N$. Следовательно, симметрическая разность между $\tau(a) = \tau(\bigvee a_i)$ и $\bigcup \tau(a_i)$ лежит в J. Для пересечений нужно провести двойственные рассуждения.

Рассматриваемое σ-наложение будет изоморфизмом, если при $\tau(a) \in J$ обязательно $a = O$. Выполнимость этого условия мы проверим с помощью «диагонального процесса» и тем самым завершим доказательство теоремы.

Если $\tau(a) \in J$, то, как показано выше, $\tau(a) \subset \bigcup_i \left(\bigcap_j \tau(a_{ij})\right)$, где $\bigwedge_j a_{ij} = O$ для всех $i \in I$. Следовательно, для любой функции $j(i)$, в силу изотонности,

$$\tau(a) \subset \bigcup_i \tau(a_{i,j(i)}), \text{ откуда } \tau(a') \supset \bigcap_i \tau(a'_{i,j(i)}). \tag{2}$$

[1] Loomis L. — Bull. AMS, 1947, 53, p. 757—760; Sikorski R. — Fund. Math., 1948, 35, p. 247—256.

Теперь предположим, что $a \neq O$. Тогда $a' < I$ и потому

$$I > a' = a' \vee O = a' \vee \bigwedge a_{ij} = \bigwedge (a' \vee a_{ij}).$$

Значит, какое-нибудь из объединений $a' \vee a_{i,\,j(i)} < I$. Повторяя эти рассуждения, получаем:

$$I > a' \vee a_{1,\,j} = a' \vee a_{1,\,j(1)} \vee O =$$
$$= (a' \vee a_{1,\,j(1)}) \vee \bigwedge a_{2,\,j} = \bigwedge (a' \vee a_{1,\,j(1)} \vee a_{2,\,j}).$$

Наш «диагональный процесс» дает функцию $j(i)$ такую, что при всех n

$$I > a' \vee a_{1,\,j(1)} \vee \dots \vee a_{n,\,j(n)}.$$

Эта последовательность не может содержать ни a, ни какой-нибудь пары взаимно дополнительных элементов; поэтому можно найти «точку» $S \in \mathcal{S}$, которая содержит a и все $a'_{i,\,j(i)}$. Понятно, что $S \in \tau(a)$, и в то же время $S \notin \bigcup \tau(a_{i,\,j(i)})$ (поскольку никакое множество вида $\tau(a_{i,\,j(i)})$ не содержит S, а объединение в Φ теоретико-множественное). Это противоречие и завершает доказательство.

Используя более тонкие понятия общей топологии, этот результат можно усилить.

Теорема 3′ (Сикорский). *Пусть A — произвольная борелевская алгебра и $S(A)$ — ее стоуново пространство. Пусть F — σ-алгебра всех борелевских подмножеств в $S(A)$ и Δ—σ-идеал всех борелевских множеств первой категории. Тогда A изоморфна F/Δ.*

Точнее, если θ — изоморфизм алгебры A на подполе открыто-замкнутых подмножеств пространства $S(A)$, установленный в § IX.9, то произведение $\theta\varphi\psi$: $A \to A\theta \to F \to F/\Delta$ является изоморфизмом. Доказательство см. в книге Сикорского [1, с. 189].

Теперь воспользуемся усиленной и расширенной формой следствия 3 из теоремы IV.13′, доказательство которой проходит без изменений и для бесконечноместных алгебр. А именно, что свободная алгебра с $\aleph$ порождающими в многообразии, порожденном алгеброй A, изоморфна подалгебре алгебры $A^{(A^{\aleph})}$, порожденной «координатными проекциями».

С другой стороны, по теореме Лумиса—Сикорского свободная борелевская алгебра с $\aleph$ порождающими изоморфна свободной борелевской алгебре $FB(\aleph)$ с $\aleph$ порождающими, порожденной борелевской алгеброй [1]) $A = 2$. В силу результата из предыдущего параграфа отсюда следует, что $FB(\aleph)$ изоморфна борелевской подалгебре (полной) борелевской алгебры $2^{2^{\aleph}}$ *всех* подмножеств канторова $\aleph$-пространства (пример 3 из § IX.8), порож-

[1]) Эта изящная интерпретация теоремы Лумиса—Сикорского была сообщена автору Хейлсом.

даемой открыто-замкнутыми множествами точек, одна из координат которых равна 0 или 1. Таким образом, нами установлена

Теорема 4. *Свободная борелевская алгебра с $\aleph$ порождающими изоморфна σ-полю (борелевской алгебре) «бэровских множеств» канторова $\aleph$-пространства, порожденному открыто-замкнутыми множествами.*

Следствие (Ригер [1]). *Свободная борелевская алгебра $FB(\omega)$ со счетным числом порождающих изоморфна алгебре всех борелевских подмножеств канторова дисконтинуума.*

Доказательство. Полагая в теореме 4 $\aleph = \aleph_0 = \omega$, мы приходим к требуемому заключению, если заметить, что борелевские множества канторова дисконтинуума порождаются открыто-замкнутыми множествами.

К сожалению, аналог теоремы 3 для борелевских $\aleph$-алгебр при $\aleph > \aleph_0$ в общем случае не верен (см. у Ригера [1] и Чэна (Chang C. C. — Trans. AMS, 1957, **85**, p. 208—218.)).

3. Стандартные борелевские алгебры

Хотя, по-видимому, существует огромное разнообразие неизоморфных борелевских алгебр, многие из тех, которые наиболее естественно возникают в действительном анализе, оказываются изоморфными той или иной из небольшого числа «стандартных» борелевских алгебр [2]. Впечатляющим подтверждением этому является следующий результат.

Теорема 5 (Куратовский). *Пусть X — произвольное несчетное борелевское подмножество полного сепарабельного метрического пространства. Тогда борелевская алгебра всех борелевских подмножеств множества X является свободной борелевской алгеброй со счетным числом порождающих.*

Доказательство. В силу замечания 1 на с. 462 книги: Куратовский К. Топология, т. 1. — М.: Мир, 1966, алгебра, о которой идет речь, одна и та же для всех таких X и в том числе для канторова дисконтинуума. Доказательство завершается ссылкой на теорему 4.

Следствие. *Свободная борелевская алгебра со счетным числом порождающих «однородна»: как борелевская решетка она изоморфна каждому своему интервалу, который равномощен ей.*

В силу этой однородности, нигде не плотные подмножества множества X можно охарактеризовать при помощи их свойств как элементов борелевской алгебры *всех* борелевских подмножеств

---

[1]) Ригер [1]. См. также работы Сикорского (Sikorski R. — Ann. Soc. Polon. Math., 1950, **23**, p. 1—20) и Такеути (Takeuchi K. — J. Math. Tokyo, 1953, **1**, p. 77—79) и [**LT2**, проблема 79].

[2]) В этой связи см. наблюдения Пирса в [**Symp**, p. 129—140].

множества X. Впрочем, изучение нигде не плотных множеств приводит к другой интересной «стандартной» борелевской фактор-алгебре, тесно связанной с борелевской алгеброй из теоремы 5.

Напомним, что подмножество топологического пространства X называется множеством *первой категории*, если оно допускает покрытие, являющееся счетным объединением нигде не плотных множеств. Вспомним еще следующий классический результат.

Лемма (Бэр). *Пусть X — полное псевдометрическое или локально компактное регулярное пространство. Тогда множества первой категории в X образуют собственный σ-идеал Z в борелевской алгебре всех борелевских подмножеств пространства X, который не содержит открытых множеств.*

Доказательство см. в [Kel, с. 264, теорема 34]; следуя Бурбаки, Келли называет множества первой категории «худыми».

Следствие. *В полном псевдометрическом или локально компактном регулярном пространстве каждое борелевское множество отличается лишь на множество первой категории от одного и только одного регулярного открытого множества.*

Это показывает, что регулярные открытые множества в борелевской фактор-алгебре борелевской алгебры всех борелевских множеств пространства X по модулю множеств первой категории образуют полный набор представителей. Обратимся теперь к теореме IX.3. Небольшим изменением, позволяющим расширить лемму Бэра, из нее получается

Теорема 6. *Пусть X — произвольное борелевское подмножество евклидова n-пространства, имеющее непустую внутренность. Тогда борелевская алгебра B/Z всех борелевских множеств из X по модулю множеств первой категории изоморфна $\bar{B}_\omega$ — пополнению сечениями свободной булевой алгебры B_ω со счетным числом порождающих* [1]).

Все ли определимые множества являются борелевскими? Борель считал, что лишь борелевские множества являются «определимыми» [2]), — это утверждение связано с основаниями теории

---

[1]) Этот результат Улам и автор установили примерно в 1935 г. (см. [LT1, p. 103]). О лемме Бэра и ее обобщениях см. также в кн. Куратовского (Куратовский К. Топология, т. I. — М.: Мир, 1966, § 11).

[2]) «Множество B-измеримых множеств имеет мощность континуума, поэтому существуют измеримые множества, отличные от B-измеримых; но это не означает, что можно ... произнести некоторый конечный набор слов, который описывал бы одно и только одно множество, не являющееся B-измеримым». (Lebesgue H. Leçons sur l'Integration. — Paris, 1904, p. 109.) (В русском переводе Лебег А. Интегрирование и отыскание примитивных функций. — М.—Л.: ГТТИ, 1934, сделанном со второго французского издания (1928 г.), это рассуждение изложено в другой редакции (с. 98). Проблеме существования неизмеримых множеств специально посвящен § 2 Прибавления III, написанного Н. Н. Лузиным. О связи этой проблемы с аксиомами теории множеств см. в книге Йеха, цитированной в примечании [4]) с. 273 — *Прим. перев.*)

множеств (§ VIII.16). В этой связи заметим, что $\mathbf{R}$ имеет только $2^{\aleph_0} = c$ борелевских подмножеств и что только $\aleph_0$ множеств можно определить конечными словесными выражениями! Таким образом, из утверждения Бореля следует «неопределимость» неизмеримых множеств, и тогда приводимая далее теорема 13 теряет смысл.

Связанный с этим вопрос касается определимости неборелевских взаимно однозначных соответствий пространства $\mathbf{R}$ с другими топологическими пространствами. По этому поводу заметим, что любое борелевское взаимно однозначное соответствие β: $\mathbf{R} \leftrightarrow X$ определяет изоморфизм $2^{[\mathbf{R}]} \leftrightarrow 2^{[X]}$ (см. ниже упр. 3—8).

Упражнения к §§ 2—3

1. Покажите, что булева алгебра счетных множеств по модулю конечных множеств не является борелевской алгеброй.

2. Покажите, что борелевская алгебра всех подмножеств множества $\mathbf{R}$ по модулю счетных множеств не изоморфна никакому σ-полю множеств.

3. Покажите, что алгебра борелевских множеств в T_1-пространстве X «стандартна» тогда и только тогда, когда существует борелевское взаимно однозначное соответствие между X и канторовым дисконтинуумом 2^{ω}.

4. Покажите, что 2^{ω} гомеоморфно своему декартову квадрату.

5. Постройте борелевское взаимно однозначное соответствие между 2^{ω} и действительной прямой $\mathbf{R}$.

6. Постройте борелевское взаимно однозначное соответствие между $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^n$, где n — произвольное положительное целое число, а также между $\mathbf{R}$ и гильбертовым кубом $\mathbf{I}^{\omega}$.

7. Пусть X и Y — произвольные T_1-пространства, а f и g — борелевские вложения X в Y и Y в X соответственно. Постройте борелевское взаимно однозначное соответствие между X и Y. (Указание. Используйте конструкцию Кантора—Бернштейна.)

*8. Покажите, что если X и Y — нетривиальные топологические комплексы, то между ними существует борелевское взаимно однозначное соответствие. (Указание. Используйте упр. 6 и 7.)

*9. Для каких T_1-пространств X существует σ-эндоморфизм борелевской алгебры всех борелевских подмножеств множества X, отображающий ее на полную булеву алгебру регулярных открытых подмножеств из X. (Указание. Рассмотрите «бэровские» пространства.)

4. Булевы ($\aleph$, $\aleph'$)-алгебры

Было предпринято много попыток перенести предшествующие результаты со счетной бесконечности $\aleph_0$ на другие бесконечные кардинальные числа. Но поскольку книга Сикорского [1]) содержит ясное и полное изложение этих исследований, я упомяну лишь некоторые ключевые результаты.

Определение. Булева алгебра A называется $\aleph$-*полной* (или «булевой $\aleph$-алгеброй») для данного кардинального числа $\aleph$, если каждое ее подмножество, содержащее $\aleph$ (или меньше) эле-

---

[1]) Сикорский [1, гл. II]. См. также статьи Пирса и Дингера в [Symp].

ментов, имеет пересечение и объединение в A. Полная булева алгебра, по определению, $(\aleph, \aleph')$-*дистрибутивна*, если тождество

$$\bigwedge_S \left[\bigvee_T a_{s,\,t}\right] = \bigvee_{S^T} \left[\bigwedge_S a_{s,\,\varphi(s)}\right] \tag{3}$$

выполняется в ней для любых множеств S и T с мощностями, не превышающими $\aleph$ и $\aleph'$ соответственно.

Мы уже доказали, что $\aleph$-полные булевы алгебры являются $(m, \aleph)$-дистрибутивными для любого конечного кардинального числа m. Однако неожиданный результат Ригера [1] показывает, что теорему Лумиса—Сикорского нельзя перенести на несчетные кардинальные числа. Именно, для $\aleph$, не меньшего мощности континуума, существует $\aleph$-полная булева алгебра, которая *не* изоморфна никакой фактор-алгебре F/Δ $\aleph$-поля множеств по $\aleph$-идеалу.

Для любых кардинальных чисел $\aleph$ и $\aleph'$ можно построить *свободную* $\aleph$-полную булеву алгебру с $\aleph'$ (свободными) порождающими (Ригер [1]). Методы, развитые в главе VI, применимы без существенных изменений и к бесконечноместным операциям.

Однако Гейфман и Хейлс [1]) доказали, что *нельзя* построить свободную *полную* булеву алгебру даже со счетным множеством порождающих. Если бы такая алгебра существовала, она имела бы мощность, превосходящую любое предписанное кардинальное число! Аналогичными рассуждениями Хейлс, используя технику, развитую Кроули и Дином, показал, что не существует свободной полной решетки даже с тремя порождающими! [2])

Упражнения

1. Покажите, что для любого конечного n существует свободная полная булева алгебра с n порождающими.

2. Покажите, что булеву алгебру можно вложить в полную булеву алгебру с сохранением произвольных объединений и пересечений тогда и только тогда, когда она $(2, \aleph)$-дистрибутивна для всех $\aleph$ [3]).

3. Покажите, что для каждого бесконечного $\aleph$ существует $\aleph$-поле множеств, пополнение которого сечениями не является $\aleph$-дистрибутивным (Пирс).

4. Покажите, что булева $\aleph$-алгебра изоморфна $\aleph$-полю множеств тогда и только тогда, когда для любого ее элемента $a > 0$ существует простой дуальный $\aleph$-идеал, содержащий a.

5. Покажите, что для любого кардинального числа $\aleph$ свободная булева σ-алгебра с $\aleph$ порождающими изоморфна σ-полю множеств.

*6. Покажите, что свободная $\aleph$-полная булева алгебра с $\aleph$ свободными порождающими не будет $\aleph$-изоморфной $\aleph$-полю множеств, если $\aleph$ — мощность континуума (Ригер).

---

[1]) Hales A. W. — Fund. Math., 1964, 54, p. 45—66; Gaifman H. — Fund. Math., 1964, 54, p. 229—250.

[2]) Ср. Скорняков Л. А. Элементы теории структур. — М.: Наука, 1982, § 5. — *Прим. перев.*

[3]) Упр. 2—3 содержат результаты Пирса (Pierce R. S. — Pacif. J. Math., 1958, 8, p. 133—140), а упр. 4—5 — результаты Такеути (Takeuchi K. — Tokyo J. Math., 1953, 1, p. 77—79).

7. Обобщите теорему V.17 Тарского на булевы $\aleph$-алгебры, где $\aleph$ — произвольное кардинальное число[1]).

$*$8. (а) Покажите, что для любого счетного у-множества P решетка, свободно порожденная этим у-множеством, является подрешеткой свободной решетки с тремя порождающими.

(б) Обобщите результат упр. (а) на произвольное кардинальное число $\aleph$.

$*$9. Покажите, что если $\aleph$ — бесконечное кардинальное число такое, что $\aleph^{\omega} = \aleph$, то существует полная однородная булева алгебра мощности $\aleph$ (Пирс [2])).

5. Конечные меры. Алгебры с мерой

Если B — борелевская алгебра, то *конечной мерой* на B называется *неотрицательная* оценка m на B, которая *σ-аддитивна* (или «счетно-аддитивна») в том смысле, что

(4) $$m\left[\bigvee_{n-1}^{\infty} x_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} m[x_n], \text{ если каждое пересечение}$$

$$x_n \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{n-1} x_i\right) = 0.$$

Отсюда очевидным образом следует, что $m\,[O] = 0$. «Меры» общего вида на B, допускающие (положительное) бесконечное значение, мы не будем обсуждать.

Конечная мера с условием $m\,[I] = 1$ называется *вероятностной* мерой. Из любой нетривиальной конечной меры можно построить вероятностную меру, полагая $p\,[x] = m\,[x]/m\,[I]$; поэтому понятия конечной меры и «вероятности» взаимно заменяемы.

В §§ 5—7 мы сделаем обзор свойств и конструкций, связанных с конечными мерами на борелевских алгебрах, подчеркивая теоретико-решеточные аспекты, обычно не выделяемые в руководствах по теории меры или интегрирования [3]).

Сначала мы вспомним два хорошо известных факта.

Лемма 1. *Пусть m — конечная мера на борелевской алгебре B. Тогда множество всех $x \in B$ таких, что $m\,[x] = 0$, образует σ-идеал N в B. При этом m определяет конечную меру на борелевской фактор-алгебре B/N.*

Мы опускаем доказательство, которое очень несложно. Заметим, что в B/N из $x < y$ следует, что $m\,[x] < m\,[y]$: мера определяет *положительную* оценку на B/N.

---

[1]) По поводу упр. 7 см. книгу Сикорского [1] или работу Эномото (Enomoto S. — Osaka Math. J., 1953, **5**, p. 99—115). Упр. 8 содержит результат Кроули и Дина (Crawley P., Dean R. A. — Trans. AMS, 1959, **92**, p. 35—47; [**Symp**, p. 31—42]).

[2]) Pierce R. S. — Proc. AMS, 1958, **9**, p. 892—896; [**Symp**, p. 129—140].

[3]) Примечательным исключением является книга Каратеодори [1], где проводится детальное обсуждение вопросов, связанных с мерами на борелевских алгебрах.

Определение. *Алгебра с мерой* есть борелевская алгебра с заданной на ней положительной конечной мерой. *Алгеброй вероятностей* называется алгебра с мерой p, удовлетворяющей условию $p[I] = 1$.

Лемма 2. *Алгебра с мерой является полной метрической булевой алгеброй с условием $m[O] = 0$, и обратно.*

Это следствие результатов § X.10; мы опускаем детали.

Нетрудно построить алгебру с мерой самого общего вида, имеющую конечное число элементов. Любая конечная булева алгебра F состоит из объединений наборов S ее точек p. Ввиду (4) для самой общей положительной меры на F должно быть $m\left[\bigvee_S p_k\right] = \sum_S m_k$, где $m_k = m[p_k]$ — положительные постоянные. Обратно, любой выбор таких m_k определяет конечную алгебру с мерой.

На самом деле, каждый элемент p_k может быть поставлен в соответствие полуоткрытому интервалу $[m_1 + \ldots + m_{k-1}, m_1 + \ldots + m_k)$ оси x. Используя (4), это соответствие можно однозначно продолжить до метрического изоморфизма (изоморфизма, сохраняющего меру) булевой алгебры F в поле элементарных подмножеств оси x. Это показывает, что добавляя (4) к любой системе аксиом для булевой алгебры, мы получим *полную систему аксиом для конечной теории меры* относительно обычных булевых операций [1]).

Пример 2. Пусть $B_\sigma = 2^{[I]}$ — (стандартная) борелевская алгебра всех борелевских подмножеств интервала $I = [0, 1]$ и m — обычная мера (Бореля—Лебега) на B_σ. Тогда B_σ/N есть алгебра вероятностей, и следовательно, полная метрическая булева алгебра.

Теорема 7. *Алгебра B_σ/N, построенная в примере 2, сепарабельна (т. е. имеет счетное всюду плотное подмножество).*

Доказательство. По лемме 2 B_σ/N — метрическая решетка. Кроме того, в силу теорем 3 и 5 у B_σ счетное множество порождающих. Доказательство завершает следующая простая

Лемма 3. *Пусть C — счетное подмножество алгебры с мерой M. Тогда борелевская подалгебра, которую C порождает в M, является сепарабельным замкнутым подмножеством в M.*

Доказательство. Пусть S — булева (*не* борелевская) подалгебра в M, порождаемая C. Так как S состоит из булевых многочленов $p(c_1, \ldots, c_r)$ от конечных наборов элементов из C, то S счетна. Метрическое замыкание $\bar{S}$ для S также будет булевой подалгеброй в M (так как $\wedge$, $\vee$, $'$ равномерно непрерывны). Эта подалгебра сепарабельна, поскольку S счетна, и

---

[1]) Биркгоф (Birkhoff G.) — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1934, **30**, p. 115—122; Эванс (Evans H. P.), Клини (Kleene S. C.). — Amer. Math. Monthly, 1939, **46**, p. 141—148.

будет борелевской алгеброй, ибо каждая замкнутая булева подалгебра алгебры с мерой является борелевской подалгеброй. Наконец ввиду того, что она содержится в любой борелевской подалгебре из M, содержащей C, и сама является борелевской подалгеброй в M, содержащей C, то $\bar{S}$ и будет искомой борелевской подалгеброй.

Теперь докажем обращение теоремы 7, которое, между прочим, обнаруживает, что фактор-алгебра B_σ/N, построенная в примере 2, для $X = (-\infty, +\infty)$ является стандартной алгеброй вероятностей, подобной алгебре B/Z из теоремы 6.

Теорема 8. *Пусть M — сепарабельная алгебра вероятностей, не имеющая атомов (т. е. точек с ненулевой мерой). Тогда M изометрически изоморфна алгебре вероятностей B_σ/N, введенной в примере 2.*

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots$ — счетное, всюду плотное подмножество в M, а S_n — конечная булева подалгебра в M, порожденная элементами $x_1, \ldots, x_n$. Мы уже показали, что S_n можно представить как поле подмножеств отрезка $[0, 1] = \mathrm{I}$ с мерой m. Теоретико-множественное объединение $\bigcup S_n = U$ является тогда булевой подалгеброй в $2^{[\mathrm{I}]}$ с положительной оценкой. Так как M не имеет атомов с ненулевой мерой, то *каждый* полуинтервал $[0, a)$ из I будет метрическим пределом элементов множества U. Поэтому образ $\bar{U}$ множества M содержит каждое борелевское подмножество отрезка I по модулю множества нулевой меры. Поскольку различные элементы из M находятся друг от друга на ненулевом расстоянии, отсюда следует, что $M \cong B_\sigma/N$, что и требовалось.

Так как условиям теоремы 8 с точностью до множителя $m\,[I]$ удовлетворяет любая алгебра с мерой, мы получаем

Следствие. *Пусть M — нетривиальная сепарабельная алгебра с мерой, не имеющая атомов. Тогда M изометрически изоморфна алгебре с мерой измеримых подмножеств отрезка $[0, m\,[I]]$ по модулю множеств меры нуль. Кроме того, изометрические автоморфизмы алгебры M транзитивны на элементах, для которых $m\,[x] = c$, при любом конечном c. Наконец, алгебра с мерой M однородна: она изоморфна каждому своему нетривиальному главному идеалу.*

6. Внешняя мера. Регулярная мера

Внешняя мера на борелевской алгебре A определяется как изотонная расширенная[1]) действительнозначная функция m^* на A такая, что $m^*\,[O] = 0$ и

(5) $$m^*\left[\bigvee_{k=1} a_k\right] \leqslant \sum_{k=1} m^*[a_k] \text{ (субаддитивность).}$$

[1]) То есть мы допускаем и значение ∞, в то время как в § 5, чтобы подчеркнуть связь с оценками, рассматривались конечные меры.

Мы покажем теперь, что любую меру на борелевских множествах можно продолжить до внешней меры, определенной на всех множествах. (Понятно, что каждая мера является внешней мерой.)

Пусть B — произвольная борелевская подалгебра некоторой борелевской алгебры A и пусть m — какая-нибудь мера на B. Для любого $a \in A$ положим

$$m^*[a] = \inf_{b \geqslant a;\ b \in B} m[b]. \tag{6}$$

Назовем *нулевым* элемент $a \in A$, для которого $m^*[a] = 0$.

Лемма 1. *Функция m^* является внешней мерой на A; нулевые элементы образуют в A σ-идеал. Следовательно, множество $C \subset A$ всех $c \in A$, отличающихся от некоторого $b \in B$ на нулевой элемент, является борелевской подалгеброй в A, а ограничение μ функции m^* на C будет мерой на C. Наконец, $\mu^* = m^*$.*

Мы опускаем доказательство[1]). Функцию μ назовем *лебеговым пополнением* для m, имея в виду следующий пример. (Если $C = B$, будем называть m *полной* по тем же причинам.)

Пример 3. Пусть $A = 2^E$, где E — евклидово n-пространство, и пусть $B = 2^{[E]}$ — борелевская подалгебра, состоящая из всех борелевских подмножеств пространства E. Пусть, наконец, m — борелевская мера на B. Тогда C будет классом измеримых по Лебегу множеств.

Покажем теперь, как, с другой стороны, можно по внешней мере m^* на борелевской алгебре A построить меру на борелевской подалгебре $C \subset A$. Будем считать, что $c \in C$, если

$$m^*[a] = m^*[a \wedge c] + m^*[a \wedge c'] \text{ для всех } a \in A, \tag{7}$$

и определим $\nu = (m^*)^+$ как ограничение m^* на C.

Лемма 2. *Для любой внешней меры m^* функция $(m^*)^+ = \nu$ является полной мерой. Если m^* — внешняя мера на A, получающаяся из меры m на $A = B$ по формуле* (6), *то $(m^*)^+$ будет лебеговым пополнением для m.*

Следствие. *Если m^* — внешняя мера, получающаяся из меры m на A по формуле* (6), *то функция $\nu = (m^*)^+$ удовлетворяет условию*

$$m^*[a] = \inf_{c \geqslant a,\ c \in C} \nu[c] \text{ для всех } a \in A, \tag{8}$$

т. е. $((m^*)^+)^* = m^*$.

Каратеодори[2]) постулировал условие (8) и назвал удовлет-

---

[1]) См. теорему В в книге Халмош П. Теория меры. — М.: ИЛ, 1953. Бо́льшую часть из опущенных в §§ 5—6 доказательств можно найти в этой прекрасной книге.

[2]) Carathéodory C. Vorlesungen über reelle Funktionen. — Leipzig, 1927, p. 258. Понятия внешней меры и регулярной меры восходят к работе Каратеодори в Gött. Nachr., Math. — Phys. Kl., 1914, p. 1—23.

воряющую ему внешнюю меру замкнутой. Полученные результаты позволяют установить следующий факт.

Теорема 9. *В любой борелевской алгебре функции $m \mapsto m^*$ и $m^* \mapsto (m^*)^+$ осуществляют взаимно однозначное соответствие между полными мерами и замкнутыми внешними мерами.*

Регулярные меры. Пусть X — топологическое пространство, $A = 2^X$ — (полная) борелевская алгебра всех подмножеств множества X и $B = 2^{[X]}$ — (атомно порожденная) борелевская подалгебра всех борелевских подмножеств множества X. Мера называется *регулярной* на X, если она совпадает с лебеговым пополнением своего ограничения на B. Следующий результат непосредственно выводится из установленных ранее фактов.

Теорема 10. *Пусть X — стандартное несчетное борелевское пространство, так что $2^{[X]}$ является свободной борелевской алгеброй с $\aleph_0 = \omega$ порождающими. Пусть m — конечная регулярная мера на X, причем $m[I] > 0$, но $m[p] = 0$ для каждой точки $p \in X$. Тогда алгебра с мерой, определяемая мерой m, изоморфна алгебре B_σ/N, определенной в примере 2, относительно изоморфизма, умножающего все меры на постоянный множитель $m[I]$.*

Жорданова емкость и мера Лебега. На фоне введенных определений можно следующим образом построить меру Лебега из жордановой емкости [1]). Жорданова емкость — это неотрицательная оценка с условием $v[O] = 0$, определенная на *булевом подкольце* S булевой алгебры 2^E, состоящем из «элементарных подмножеств» [2]) конечного объема в евклидовом n-пространстве E. Мы можем определить *внешнюю меру* m на A, заменяя (6) на

$$(9) \qquad m^*[a] = \inf_{\bigvee x_i \geqslant a} \sum_{i=1}^{\infty} v[x_i], \quad i = 1, 2, 3, \ldots;$$

т. е. $m^*[a]$ является точной нижней гранью «суммарных значений» оценки для *счетных покрытий* элемента a. Задача состоит в том, чтобы показать, что эта внешняя мера *в самом деле* является замкнутой внешней мерой и что $m^*[a] = v[a]$ для всех $a \in A$.

Упражнения к §§ 5—6

1. Докажите лемму 1.
2. Докажите лемму 2.
3. Покажите, что неотрицательная оценка с условием $v[O] = 0$ на борелевской алгебре B является (конечной) *мерой* тогда и только тогда, когда она *непрерывна* в порядковой топологии на B.

---

[1]) Об элементарных свойствах жордановой емкости см. в книге Apostol T. A. Mathematical analysis. — Addison—Wesley, 1960, p. 225.

[2]) То есть элементов булевой алгебры, порожденной n-мерными параллелепипедами. — *Прим. ред. и перев.*

4. Покажите, что борелевская алгебра с конечной мерой не может иметь несчетного подмножества, состоящего из дизъюнктных элементов ненулевой меры.

5. Проведите подробное доказательство теоремы 9.

6. Проведите подробное доказательство теоремы 10.

7. Покажите, что если (9) применить к жордановой емкости на $\mathbf{R}$, то $m^*[a] = v[a]$ для любого интервала. (Указание. Используйте теорему Гейне—Бореля.)

8. В условиях упр. 7 покажите, что если применить (7) к m^* на $2^{\mathbf{R}}$, то C будет содержать каждый интервал и, следовательно, каждое борелевское множество.

7*. Существование мер

В § 5—6 мы предполагали меры и внешние меры уже заданными во всех случаях за исключением конечных булевых алгебр 2^n. На самом деле вопрос о *существовании* мер на данной борелевской алгебре является одним из самых основных вопросов теории меры.

Трансфинитной индукцией можно доказать, что на любой булевой алгебре существуют нетривиальные изотонные *оценки*. Наиболее тонким моментом является следующая теорема Тарского [1]).

Теорема 11. *Любая изотонная оценка с условием $v[O] = 0$, определенная на подалгебре S булевой алгебры A, может быть продолжена до такой же оценки на всей A.*

Доказательство. Поскольку наши условия имеют алгебраический характер (глава VIII), достаточно показать, что возможно расширение на некоторую подалгебру $T > S$. Но в самом деле, если дан элемент $a \notin S$, то элементы вида $(a \wedge b) \vee (a' \wedge c)$ (где $b, c \in S$) и будут образовывать такую подалгебру. Положим

$$(10)\qquad \begin{aligned} m_1[a \wedge b] &= \inf m[s] \text{ для } s \geqslant a \wedge b \text{ в } S,\\ m_1[a' \wedge c] &= \sup m[t] \text{ для } t \leqslant a' \wedge c \text{ в } S,\\ m_1[(a \wedge b) \vee (a' \wedge c)] &= m_1[a \wedge b] + m_1[a' \wedge c]. \end{aligned}$$

Покажем, что это и есть требуемое расширение. Действительно,

$$m_1[a \wedge b] + m_1[a' \wedge c] = \inf_s \left\{m[s] + \sup_t m[t]\right\}.$$

Но если $s \geqslant a \wedge b$, то элемент $s' \wedge b \leqslant (a' \vee b') \wedge b = a' \wedge b$ можно взять в качестве t. Следовательно, при любом допустимом s будет

$$m[s] + \sup_t m[t] \geqslant m[s] + m[s' \wedge b] \geqslant m[s \vee (s' \wedge b)] = m[s \vee b] \geqslant m[b].$$

[1]) Tarski A. — Fund. Math., 1930, 15, p. 42—50; Fund. Math., 1938, 32, p. 45—63; 1945, 33, p. 51—65.

Поэтому $m_1[a \wedge b] + m_1[a' \wedge b] \geqslant m[b]$ для любого $b \in S$. В силу двойственности мы получаем обратное неравенство, и значит, $m_1[b] = m[b]$.

Остается доказать, что m_1 аддитивна. Для этого достаточно установить аддитивность a-компонент, т. е. что для всех $b, c \in S$ при $(a \wedge b) \wedge (a \wedge c) = O$ будет

$$m_1[(a \wedge b) \vee (a \wedge c)] = m_1[a \wedge b] + m_1[a \wedge c].$$

Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $t \geqslant a \wedge b$, $u \geqslant a \wedge c$ в S такие, что $m[t] < m_1[a \wedge b] + \varepsilon$, $m[u] < m_1[a \wedge c] + \varepsilon$, так что

$$m[t \vee u] \leqslant m[t] + m[u] \leqslant m_1[a \wedge b] + m_1[a \wedge c] + 2\varepsilon.$$

Так как $t \vee u \geqslant (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, то $m_1[(a \wedge b) \vee \vee (a \wedge c)] \leqslant m_1[a \wedge b] + m_1[a \wedge c]$. Обратно, для любого элемента $v \geqslant (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c)$ в S будет $m[v] \geqslant \geqslant m[v \wedge b \wedge c'] + m[v \wedge c]$, поскольку эти два элемента дизъюнктны. Как и в любой булевой алгебре, $v \wedge b \wedge c' \geqslant \geqslant a \wedge b$, а так как $a \wedge c \wedge c' = 0 = a \wedge b \wedge c$, то

$$v \wedge b \wedge c' \geqslant a \wedge (b \vee c) \wedge (b \wedge c') =$$
$$= (a \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge b \wedge c) = a \wedge b.$$

Значит, $m[v \wedge b \wedge c'] \geqslant m_1[a \wedge b]$ и аналогично $m[v \wedge c] \geqslant m_1[a \wedge c]$. Поэтому всегда $m[v] \geqslant m_1[a \wedge b] + + m_1[a \wedge c]$ и, следовательно,

$$m_1[(a \wedge b) \vee (a \wedge c)] =$$
$$= \inf m[v] \geqslant m_1[a \wedge b] + m_1[a \wedge c]. \text{ Ч. т. д.}$$

Как показывает следующий результат [1]), не каждую борелевскую алгебру можно превратить в алгебру с мерой (см. также выше упр. 4).

Теорема 12. *Любая алгебра с мерой слабо счетно дистрибутивна в том смысле, что если $a_{ij} \uparrow a_i$ для любого фиксированного i (где $i, j = 1, 2, 3, \ldots$), то существует последовательность функций $j_n(i) = j(n, i)$ такая, что*

$$\bigwedge_i \Big(\bigvee_j a_{ij}\Big) = \bigwedge_i a_i = \bigvee_n \Big(\bigwedge_i a_{i,\, j(n,\, i)}\Big). \tag{11}$$

---

[1]) Теоремы 12—13 по существу принадлежат Банаху и Куратовскому. (Banach S., Kuratowski K. — Fund. Math., 1929, **14**, p. 127—131). См. также у Банаха (Fund. Math., 1930, **15**, p. 97—101) и Улама (Ulam S. — Fund. Math., 1931, **16**, p. 140—150). На общий вопрос о том, какие борелевские алгебры можно превратить в алгебры с мерой, ответили Махарам (Maharam D. — Ann. Math., 1947, **48**, p. 154—167) и Келли (Kelley J. L. — Pacif. J. Math., 1959, **9**, p. 1165—1177).

Доказательство. Так как $a_{ij} \uparrow a_i$, то мы можем выбрать $j(n, i)$ так, чтобы было $m[a_i] - m[a_{i, j(n, i)}] \leqslant 2^{-n-i}$. Поскольку объединения и пересечения удовлетворяют условию Липшица с константой 1, то для любого $j(n, i)$ будет

$$m\left[\bigwedge_i a_i\right] - m\left[\bigwedge_i a_{i, j(n, i)}\right] \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-n-i} = 2^{-n}.$$

Следовательно, $m[\bigwedge a_i] - m\left[\bigvee_n \left(\bigwedge_i a_{i, j(n, i)}\right)\right] \leqslant 2^{-n}$ для всех n; но первое выражение содержит второе в силу изотонности решеточных операций, поэтому на самом деле имеет место равенство, что и доказывает (11).

Теорема 13. *Если гипотеза континуума верна, то никакая нетривиальная счетно аддитивная мера не может быть определена на всех подмножествах континуума таким образом, чтобы каждая точка имела меру нуль.*

Доказательство. Рассмотрим множество всех (однозначных) функций α: $\alpha(i) = j$, определенных на множестве положительных целых чисел и принимающих значения в нем же. Таких функций будет $2^{\aleph_0}$; поэтому если справедлива гипотеза континуума, то мы можем вполне упорядочить множество A, состоящее из таких α, которые имеют счетное множество предшествующих. Теперь отбросим все α такие, что для некоторого $\beta < \alpha$ в A будет $\alpha(i) < \beta(i)$ при подходящем i. Элементы β оставшегося множества B таковы, что каждому $\alpha \in A$ соответствует $\beta \in B$ со свойствами $\beta < \alpha$ и $\alpha(i) \leqslant \beta(i)$ для всех i (в силу транзитивности и поскольку A вполне упорядочено). Далее, если бы множество B было счетным, мы могли бы перенумеровать его элементы: $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ и, полагая $\beta^*(k) = \beta_k(k) + 1$, получили бы новый неотброшенный элемент β^*, что невозможно. Следовательно, B несчетно. Снова ссылаясь на гипотезу континуума, получаем, что существует взаимно однозначное соответствие, позволяющее представить точки континуума в виде p_β (где $\beta \in B$). Пусть теперь X_k^i обозначает множество всех точек p_β таких, что $\beta(i) = k$; ясно, что $\bigvee_{k=1}^{\infty} X_k^i = I$ для всех i, поскольку $\beta(i)$ имеет какое-нибудь значение. Следовательно, ввиду (10), при некотором $r(i)$ будет $m\left[\bigwedge_i \left(\bigwedge_{j=1}^{r(i)} X_j^i\right)\right] > 0$. Но существует элемент $\beta_0 \in B$ такой, что $\beta_0(i) \geqslant r(i)$ при всех i. А если $\beta(i) \leqslant \beta_0(i)$ для всех i, то $\beta \leqslant \beta_0$ в B; однако множество элементов, предшествующих β_0, всегда счетно. Значит, $\bigwedge_i \left(\bigvee_{j=1}^{r(i)} X_j^i\right)$ содержит лишь *счетное* множество точек p_β и, следовательно, имеет меру нуль. Это противоречие и доказывает теорему.

Упражнения

1. Пусть C — произвольная цепь в дистрибутивной решетке L с универсальными гранями, содержащая O и I, и пусть v — изотонный (действительный) функционал на C с условием $v[O] = 0$. Покажите, что v можно продолжить до изотонного функционала на L и что это продолжение единственно, если C является максимальной цепью.

2. Покажите, что в 2^{I} можно построить неотрицательную оценку с условиями $v[O] = O$ и $v[\mathrm{I}] = 1$.

3. Покажите, что метрическое пополнение метризованной свободной булевой алгебры со счетным числом порождающих не изоморфно ее пополнению сечениями.

*4. В примере 2 из § 5 покажите, что $2^{[X]}$ содержит подалгебру [1]), имеющую точно по одному представителю в каждом смежном классе по N.

5. (а) Покажите, что в безатомной алгебре с мерой для любой последовательности положительных x_i будет

$$\inf_{0<y_i\leqslant x_i}\left(\bigvee_i y_i\right) = 0.$$

(б) Покажите, что алгебра B_σ/Z борелевских множеств по модулю множеств первой категории не изоморфна никакой алгебре с мерой.

(в) Покажите, что B_σ/Z не допускает нетривиальной меры.

6. Пусть C — подмножество единичного интервала $\mathrm{I} = [0, 1]$, гомеоморфное канторову дисконтинууму 2^{ω}. Покажите, что на I существует мера m такая, что $m[p] = 0$ для любой точки p и в то же время $m[C] = m[\mathrm{I}] = 1$. (В случае, когда C имеет нулевую меру Лебега, такая мера называется *сингулярной*.)

7. Покажите, что $\mathrm{I} = [0, 1]$ содержит континуальное множество непересекающихся «канторовых дисконтинуумов» C_x.

8. Решетки фон Неймана

Решетка фон Неймана — это (по определению) полная модулярная топологическая решетка с дополнениями. Поскольку любая решетка конечной длины очевидным образом является полной топологической решеткой, отсюда следует, что любая модулярная геометрическая решетка (§ IV.6) будет решеткой фон Неймана. Точно так же и любая полная метрическая решетка является решеткой фон Неймана. Направляющей идеей фон Неймана было освободить теорию модулярных геометрических и полных метрических решеток от ограничений, накладываемых цепными условиями. Он имел перед собой достаточное число стимулирующих примеров, из которых мы упомянем два.

Пример 4. Любое (кардинальное) произведение $\Pi\Gamma_j$ непрерывных геометрий $\Gamma_j = CG(D_j)$ является решеткой фон Неймана.

Пример 5. Любая полная булева алгебра является решеткой фон Неймана. В частности, M/N — решетка фон Неймана [2]).

---

[1]) фон Нейман (Neumann J. von. — Crelle's J., 1931, **165**, p. 109—115), Махарам (Maharam D. — Proc. AMS, 1958, 9, p. 987—994).

[2]) Фактор-алгебра измеримых множеств по модулю множеств меры нуль. — *Прим. перев.*

Вспомним теперь определение центра решетки, данное в § III.8. В примере 4 центром произведения $\Pi\Gamma_j$ является полная *атомно порожденная* алгебра всех подмножеств множества индексов j. Гальперин [1]) показал, как вообще из *произвольной* полной булевой алгебры B и непрерывной геометрии Γ можно построить решетку фон Неймана, имеющую B своим центром, и «локальные компоненты» которой содержат в качестве подрешеток копии решетки Γ.

Как было показано в § III.9, элемент решетки (фон Неймана) L лежит в ее центре тогда и только тогда, когда этот элемент дистрибутивен. Кроме того, по теореме III.18 элемент $a \in L$ принадлежит центру решетки L тогда и только тогда, когда его дополнение a' *единственно*. В этом случае и дополнение a' находится в центре.

Далее, в силу непрерывности, если элементы a_α принадлежат центру решетки L и $a_\alpha \uparrow a$, то дополнения a'_α тоже все лежат в центре решетки L и $a'_\alpha \downarrow$. Если L полна, то $a'_\alpha \downarrow b$ для некоторого $b \in L$, и в силу непрерывности

$$a \wedge b = (\sup a_\alpha) \wedge (\inf a'_\alpha) = \sup [a_\alpha \wedge (\inf a'_\alpha)] = O.$$

Двойственно $a \vee b = I$, и нами доказана

Теорема 14. *Центр любой решетки фон Неймана L является полной булевой алгеброй.*

На самом деле центр решетки L есть не что иное как *решетка конгруэнций* для L, рассматриваемой как бесконечноместная алгебра (относительно неограниченных объединений и пересечений).

Определение. Решетка фон Неймана называется *неразложимой*, если ее центр состоит только из O и I.

Мы оставляем читателю доказательство важного факта, что для любого тела D метрическая решетка $CG(D)$, построенная в § X.5, является неразложимой решеткой фон Неймана.

В теореме 14 можно избавиться от предположения о непрерывности и следующим образом вывести ее заключение для любой полной (не обязательно модулярной) решетки с относительными дополнениями M [2]). Пару (a, b) назовем *дистрибутивной парой* в модулярной решетке M, если каждая тройка (a, b, x), где $x \in M$, порождает в M дистрибутивную подрешетку. Ссылкой на лемму Яновица (§ III.10, лемма 2) получается

Лемма 1. *В модулярной решетке $a \nabla b$ тогда и только тогда, когда $a \wedge b = O$ и $(a, b) D$.*

---

[1]) Halperin I. — Trans. AMS, 1963, **107**, p. 347—359. По поводу понятия «локальной компоненты» см. работу Ивамуры (Iwamura T. — Japan. J. Math., 1944, **19**, p. 54—71).

[2]) Автор признателен Сэмьюэлу Холанду за содержание оставшейся части этого параграфа.

Мы опускаем простое доказательство.

Из этой леммы и упомянутой леммы Яновица непосредственно следует

Лемма 2. *В любой модулярной решетке с дополнениями*

(12) $$a \wedge b = O \quad и \quad (a, b) D$$

тогда и только тогда, когда

(13) *из* $a_1 \leqslant a$, $b_1 \leqslant b$ *и* $a_1 \sim b_1$ *следует, что* $a_1 = b_1 = O$.

Доказательство. Сравните условия (i) и (iii) леммы Яновица и используйте лемму 1. (Напомним, что любая модулярная решетка с дополнениями обладает относительными дополнениями.)

Наконец, используя условие (ii) леммы Яновица, мы немедленно получаем следующий результат.

Лемма 3. *В любой полной решетке L с относительными дополнениями из $a \bigtriangledown b_\beta$ для всех b следует $a \bigtriangledown (\bigvee b_\beta)$.*

Отсюда следует

Теорема 14' (Яновиц). *Пусть L — произвольная решетка с O и I, обладающая относительными дополнениями. Тогда ее центр замкнут относительно произвольных точных граней.*

Следствие 1. *Центр любой σ-полной решетки с O и I, обладающей относительными дополнениями, является борелевской алгеброй.*

Следствие 2. *Центр любой полной решетки с относительными дополнениями является полной булевой алгеброй.*

Упражнения

1. Пусть модулярная решетка с дополнениями содержит максимальную подцепь C. Покажите, что она содержит и максимальную подцепь, дуально изоморфную C. (Указание. Используйте аксиому выбора.)

2. Покажите, что если решетка фон Неймана удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей, то она является модулярной геометрической решеткой.

3. Покажите, что центр кардинального произведения $\Pi\Gamma_J$ из примера 4 есть 2^J, где J — множество индексов.

4. (а) Покажите, что любой интервал решетки фон Неймана L сам является решеткой фон Неймана.

(б) Сформулируйте и докажите аналогичный результат для гомоморфных образов решетки L относительно *полных* (т. е. по произвольным объединениям и пересечениям) решеточных гомоморфизмов.

*5. Покажите, что каждый нетривиальный интервал неразложимой решетки фон Неймана неразложим [1]).

6. Покажите, что центр любой полной топологической решетки является полной булевой алгеброй.

7. Покажите, что решетка $CG(F)$ *не* является метрически компактной. Убедитесь, что метрическая топология в $CG(F)$ не совпадает с интервальной топологией.

*8. Покажите, что неразложимая решетка фон Неймана компактна в своей метрической топологии тогда и только тогда, когда она конечна (Ремси).

---

[1]) В конкретном случае $CG(D)$ эта «однородность» доказывается легко. Общий случай см. в [Neu, p. 39].

9. Перспективность транзитивна

Напомним (§ III.12), что два элемента a и b модулярной решетки с дополнениями M называются *перспективными* (в обозначениях $a \sim b$), если они имеют *общее дополнение* d, т. е. если

$$a \wedge d = b \wedge d = O \text{ и } a \vee d = b \vee d = I. \tag{14}$$

Напомним также (§ IV.6, лемма 2), что перспективность транзитивна в любой модулярной геометрической решетке, т. е. в любой решетке фон Неймана конечной длины. Блестяще используя комбинаторные методы и соображения, связанные с непрерывностью (предельные переходы), фон Нейман показал, что этот результат остается справедливым и *без* предположения о цепных условиях (см. ниже теорему 18).

Поскольку его доказательство является длинным и сложным технически, даже если учесть существенные упрощения, сделанные Гальпериным и Маедой, мы наметим здесь лишь основные этапы. Детальное доказательство читатель может найти в книгах (особенно в [**Neu**], Маеда [1] и Скорняков [II, 1]), посвященных специально непрерывным геометриям и их обобщениям.

В части доказательства мы снова не предполагаем непрерывности.

Теорема 15. *Если a, b, c — ненулевые элементы модулярной решетки с дополнениями M и $a \sim b \sim c$, то в M существуют $a_1 \sim c_1$ такие, что $0 < a_1 \leqslant a$, $0 < c_1 \leqslant c$.*

Доказательство. Если $a \wedge c > 0$, положим $a_1 = c_1 = a \wedge c$ и утверждение становится очевидным; так что пусть $a \wedge c = 0$.

Итак, предположим, что $a \wedge c = 0$, но элементы a_1, c_1, удовлетворяющие условию теоремы, не существуют. Тогда выполняется условие (iii) леммы Яновица и $b = (b \vee a) \wedge (b \vee c)$. Если x — общее дополнение для a и b, а y — для b и c, положим $z = [x \wedge (a \vee b)] \vee [y \wedge (b \vee c)]$. Тогда, используя L5, имеем:

$$\begin{aligned} a \vee z = a \vee [x \wedge (a \vee b)] \vee [y \wedge (b \vee c)] &= \\ = [(a \vee x) \wedge (a \vee b)] \vee [y \wedge (b \vee c)] &= \\ = a \vee b \vee [y \wedge (b \vee c)] &= \\ = a \vee [(b \vee y) \wedge (b \vee c)] &= a \vee b \vee c. \end{aligned}$$

Аналогично, $c \vee z = a \vee b \vee c = a \vee z$. Далее,

$$\begin{aligned} a \wedge z = a \wedge \{[x \wedge (a \vee b)] \vee [y \wedge (b \vee c)]\} &\leqslant \\ \leqslant (a \vee b) \wedge \{[x \wedge (a \vee b)] \vee [y \wedge (b \vee c)]\} &= \\ = [x \wedge (a \vee b)] \vee [(a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge y] &= \\ = [x \wedge (a \vee b)] \vee (b \wedge y) &= x \wedge (a \vee b). \end{aligned}$$

Таким образом, $a \wedge z \leqslant x \wedge (a \vee b)$ и, значит $a \wedge z \leqslant \leqslant a \wedge x \wedge (a \vee b) = a \wedge x = 0$. Аналогично $c \wedge z = 0$, и следовательно, $a \sim c$, что противоречит предположению, поскольку $0 < a \leqslant a$ и $0 < c \leqslant c$.

Далее определим понятие независимости для произвольных (не обязательно конечных) множеств. Множество S элементов полной модулярной решетки M называется *независимым* (как в § IV.4), если $a_\sigma \wedge \bigvee_{\tau \neq \sigma} a_\tau = O$ при любом σ. Легко получаются следующие леммы.

Лемма 1. *В любой решетке фон Неймана* (i) *если S и T— независимые подмножества и $\bigvee_S a_\sigma \wedge \bigvee_T a_\tau = 0$, то $S \cup T$ независимо*; (ii) *если каждое конечное подмножество множества S независимо, то S независимо.*

Условие (ii) означает, что независимость в решетках фон Неймана является алгебраическим свойством (глава VIII). Оно получается из комбинаторных результатов § IV.4 простым переходом к пределу. То же самое относится и к следующим двум леммам, содержащим результаты из [**Neu**, p. 20—21].

Лемма 2. *Если множество $\{a, b, c\}$ независимо и $a \sim b$, то $a \vee c \sim b \vee c$.*

Лемма 3. *Пусть $\{a_\sigma\} = A$ и $\{b_\sigma\} = B$ (где $\sigma \in J$) — подмножества решетки фон Неймана такие, что $a_\sigma \sim b_\sigma$ для всех σ и $A \cup B$ независимо. Тогда $\bigvee a_\sigma \sim \bigvee b_\sigma$.*

Теперь переходим к одной из самых технических частей доказательства (детали можно найти в [**Neu**, p. 264—265]; здесь используются лемма 2, теорема 15 и трансфинитная индукция). Основные результаты выглядят следующим образом.

Лемма 4. *Пусть $a \wedge b = 0$ в решетке фон Неймана L. Тогда существуют элементы a', a'' и b', b'', являющиеся относительными дополнениями друг для друга в интервалах $[0, a]$ и $[0, b]$ соответственно и такие, что* (i) $a' \sim b'$ *и* (ii) $(a'', b'')D$.

Теорема 16. *Для любых заданных $a, b \in L$ существуют элементы a', a'' и b', b'', являющиеся относительными дополнениями друг для друга в интервалах $[O, a]$ и $[O, b]$ соответственно и такие, что* (i) $a' \sim b'$; (ii) $(a'', b'')D$ *и* (iii) $a'' \wedge b'' = = O$.

Другая, тоже технически сложная часть доказательства приводит к установлению того факта, что *в решетке фон Неймана никакой интервал не может быть проективным своей собственной части*; ситуация, возникающая в примере 3 из § III.12 и в § X.4, не может иметь места в *топологических* полных модулярных решетках с дополнениями. В частности, справедлива

Теорема 17. *Если в решетке фон Неймана $a < b$, то интервалы $[O, a]$ и $[O, b]$ не могут быть проективными.*

Доказательство приводится в [**Neu**, часть 1, глава IV].

Основная идея состоит в использовании перспективности по разложению: тройка (a, b, c) называется *перспективной по разложению*, если существуют три независимые последовательности $\{a_i\}$, $\{b_i\}$, $\{c_i\}$ такие, что $a_i \sim b_i \sim c_i \sim a_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ и

$$a = \bigvee a_i, \quad b = \bigvee b_i, \quad c = \bigvee c_i. \tag{15}$$

При помощи теорем 16 и 17 без особого труда доказывается [1])

Теорема 18 (фон Нейман). *В любой модулярной полной топологической решетке с дополнениями перспективность транзитивна: если интервал $[O, a]$ проективен интервалу $[O, b]$, то $a \sim b$.*

Перспективность транзитивна и в некоторых важных *не*модулярных ортомодулярных решетках, например, в решетке проекций любой w^*-алгебры [2]). В этой связи отметим неопубликованный результат Топинга: решетка проекций любой алгебры фон Неймана полумодулярна [3]).

Упражнения

1. Покажите, что если e принадлежит центру решетки фон Неймана и $e \sim e_1$, то $e = e_1$.

2. Имея в виду данное в тексте определение независимости, покажите, что в любой полной решетке каждое подмножество независимого множества независимо.

3. Докажите лемму 1. (По поводу (ii) см. [Neu, p. 10, теорема 2.3].)

4. Докажите лемму 2.

5. Покажите, что подмножество R решетки фон Неймана независимо тогда и только тогда, когда для любых подмножеств $S \subset R$ и $T \subset R$ имеет место равенство $\sup S \wedge \sup T = \sup (S \cap T)$.

6. Покажите, что если R — независимое подмножество в L, то $\bigwedge_\alpha \sup S_\alpha = \sup \bigcap S_\alpha$ для любых подмножеств $S_\alpha \subset R$. (Замечание. Упр. 5—6 совпадают с теоремами 2.5—2.6 из [Neu].)

7. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — бесконечная независимая последовательность в решетке фон Неймана такая, что $a_i \sim a_{i+1}$ для всех i. Докажите, что все $a_i = 0$. ([Neu, p. 21, теорема 3.8.])

8. Используя упр. 7, но не ссылаясь на теорему 17, докажите, что если $a \sim c \sim b$, $b \wedge c = 0$ и $a \leqslant b$, то $a = b$. ([Neu, p. 22, теорема 3.9.])

9. Используя упр. 3, но не ссылаясь на теорему 17, покажите, что если $a \sim b \sim c$, $a \wedge b = b \wedge c = 0$ и $b \leqslant a \vee c$, то $a \sim c$.

---

[1]) [Neu, p.265, теоремы 2.2—2.3], Маеда [1, p. 91, теорема 2.2], [Скорняков [II, 1, с. 117, теорема 17]. — *Прим. перев.*], Гальперин (Halperin I.— Trans. AMS, 1938, 44, p. 537—562); Гальперин показал, что нужно предположить только σ-полноту и σ-непрерывность.

[2]) Филмор (Fillmore P. A. — Proc. AMS, 1965, 16, p. 383—387). Эта статья содержит и некоторые другие важные результаты.

[3]) Topping D. M. — Pacif. J. Math., 1967, 20, p. 317—325. — *Прим. перев.*

10. Функции размерности

Отношение $a \sim b$ перспективности по теореме 18 является отношением эквивалентности в любой решетке фон Неймана L; поэтому определено естественное отображение решетки L на множество P ее классов эквивалентности $A = (a)$, $B = (b)$, ... по модулю $\sim$. Мы назовем это отображение d: $L \to P$ *функцией размерности* на L и покажем, что область ее значений P имеет свою интересную алгебраическую структуру при подходящем определении отношения порядка и операций взятия дополнения и (частичного) сложения. Сначала займемся дополнениями.

Лемма 1. *Если $a_1 \sim a_2$, то $a_1' \sim a_2'$ для любых дополнений a_1' и a_2' элементов a_1 и a_2 соответственно.*

Доказательство. По предположению $c \wedge a_j = a_j' \wedge a_j = O$ и $c \vee a_j = a_j' \vee a_j = I$ при $j = 1, 2$ и некотором $c \in L$. Но тогда $a_1' \sim c \sim a_2'$, откуда по теореме 18 $a_1' \sim a_2'$, что и требовалось.

Следствие. *Если $A \in P$, то множество A' всех дополнений элементов $a \in A$ является классом эквивалентности* [1].

Определение. Пусть P — область значений функции размерности для решетки фон Неймана L. Тогда $A \trianglelefteq B$ по определению означает, что $a \leqslant b$ для некоторых $a \in A$ и $b \in B$, если A и B рассматривать как подмножества в L.

Лемма 2. *Если $A \trianglelefteq B$, то $B' \trianglelefteq A'$.*

Доказательство. Если $a \leqslant b$ для некоторых $a \in A$ и $b \in B$ и a' — произвольное дополнение элемента a, то $a' \vee b \geqslant a' \vee a = I$. Следовательно (§ I.9 или § IV.6), если c — какое-нибудь относительное дополнение элемента $a' \wedge b$ в a', то $c \wedge b = O$ и $c \vee b = I$. Поэтому $c \in B'$, но $c \leqslant a' \in A'$, что и доказывает лемму.

Так как в лемме 2 a' было *произвольным* дополнением элемента a, а в лемме 1 элементы a_j' *произвольными* дополнениями элементов a_j, мы легко получаем

Следствие. *Каждое из следующих условий необходимо и достаточно для того, чтобы было $A \trianglelefteq B$:*

(i) *$a' \vee b = I$ для некоторого $b \in B$ и подходящего дополнения a' некоторого элемента $a \in A$;*

(i′) *$a \wedge b' = O$ для некоторого $a \in A$ и подходящего дополнения b' некоторого элемента $b \in B$;*

(ii) *$a' \vee b = I$ для каждого $b \in B$ и подходящего дополнения a' некоторого элемента $a \in A$;*

(ii′) *$a \wedge b' = O$ для каждого $a \in A$ и подходящего дополнения b' некоторого элемента $b \in B$.*

Доказательство. Очевидно, что если $A \trianglelefteq B$, то выполняется (i), поскольку тогда $a' \vee b \geqslant a' \vee a = I$. Обратно,

[1] То есть A' является элементом множества P. — *Прим. перев.*

если имеет место (i), то для любого относительного дополнения d элемента $a' \wedge b$ в b будет $d \wedge a' = O$ и $d \vee a' = I$; следовательно, a' имеет дополнение $d \leqslant b$, т. е. $a \sim d$ для некоторого $d \leqslant b$. Так как из $a \sim d$ следует, что $d \in A$, то $A \trianglelefteq B$. Но, как в доказательстве леммы 2, отсюда следует, что *каждый* элемент $a' \in A'$ имеет $b' \leqslant a'$ такой, что $b' = c \in B'$, и потому $b' \wedge a = O$ и $b \vee a' = I$ для некоторых взаимно дополнительных элементов $b \in B$, $b' \in B'$, а это и есть условие (ii').

Остальное легко получается применением принципа двойственности (и леммы 1).

Лемма 3. *Отношение $\trianglelefteq$ квазиупорядочивает множество P.*

Доказательство. Очевидно, что $A \trianglelefteq A$. Как было показано, если $A \trianglelefteq B$, то $a \leqslant b$ для каждого $a \in A$ и некоторого $b \in B$, и в то же время, если $B \trianglelefteq C$, то $b \leqslant c$ для некоторого $c \in C$. Следовательно, из $A \trianglelefteq B$ и $B \trianglelefteq C$ следует, что $A \trianglelefteq C$.

Теорема 19. *Область изменения функции размерности любой решетки фон Неймана, рассматриваемая вместе с отношением $\trianglelefteq$ и операцией взятия дополнения, образует орторешетку.*

Доказательство. Ввиду следствия из леммы 2, если $A \trianglelefteq B$ и $B \trianglelefteq A$, то $a \leqslant b$ для каждого $a \in A$ и некоторого $b \in B$ и в то же время этот элемент $b \leqslant a_1$ для некоторого $a_1 \in A$. Следовательно, $a \leqslant b \leqslant a_1$ для некоторых a, $a_1 \in A$ и $b \in B$. Но в модулярной решетке, если $a < a_1$, то a и a_1 не могут иметь общего дополнения (быть перспективными); значит, $a = b = a_1$ и $A = B$. Таким образом, P является у-множеством. То, что P — решетка, показано в [Neu, p. 269] и в книге Маеды [1, p. 96—97].

Теорема 20. *Решетка фон Неймана неразложима тогда и только тогда, когда область изменения ее функции размерности линейно упорядочена.*

По поводу доказательства этого факта отсылаем читателя к [**Neu**, p. 39—40] и к книге Маеды [1, p. 96—97].

Дизъюнктные суммы. В любой решетке определим *дизъюнктную сумму* $a \sqcup b$ как объединение $a \vee b$ для таких a, b, что $a \wedge b = O$. С помощью дизъюнктных сумм можно ввести в P частичное сложение; существенную роль играет при этом

Лемма 4 (Маеда). *В любой решетке фон Неймана*

(i) *если* $a_1 \sqcup a_2 = b_1 \sqcup b_2$ *и* $a_1 \sim b_1$, *то* $a_2 \sim b_2$;

(ii) *если* $a_1 \sqcup a_2 \sim b_1 \sqcup b_2$ *и* $a_1 \sim b_1$, *то* $a_2 \sim b_2$;

(iii) *если* $a_i \sim b_j$ *(где* $j = 1, 2$*) и* $a_1 \sqcup a_2$, $b_1 \sqcup b_2$ *существуют, то* $a_1 \sqcup a_2 \sim b_1 \sqcup b_2$.

Доказательство см. в книге Маеды [1, p. 91, лемма 2.2]. Используя этот результат и теорему 19, можно доказать следующую теорему.

Теорема 21. *Пусть P — область изменения функции размерности решетки фон Неймана L. Если $A \trianglelefteq B'$ (или, что* *равносильно,* $B \leqslant A'$), *то положим* $A + B$ *равным множеству всех* $a \sqcup b$ (*где* $a \in A$, $b \in B$). *Это частичное сложение коммутативно и ассоциативно и при фиксированном* A *отображение* $X \mapsto X + A$ *является порядковым изоморфизмом интервала* $[O, A]$ *на интервал* $[A', I]$ *в* P.

На самом деле можно доказать гораздо больше: можно доказать, что P является *полной* решеткой (см. Маеда [1, p. 117]), что P удовлетворяет σ-цепному условию и что сложение является *архимедовым* [1]). Но мы не будем обсуждать результаты, вытекающие из этих фактов, а рассмотрим обобщение на случай *ортомодулярных решеток* (§ II.14).

11. Орторешетки с размерностью

За последние десятилетия было развито очень важное обобщение идей фон Неймана на случай ортомодулярных решеток. В этой связи отметим, что если предположить существование ортодополнений и модулярность, то требовать непрерывность уже не нужно, поскольку имеет место следующая замечательная

Теорема Капланского. *Любая полная модулярная решетка с ортодополнениями является решеткой фон Неймана* [2]).

Но нашей главной целью является не столько исключение избыточных аксиом для орторешеток фон Неймана, сколько развитие теории, применимой к *не*модулярной ортомодулярной решетке всех замкнутых подпространств гильбертова пространства, которая уже рассматривалась в § II.14. Для этой цели наиболее подходящим представляется понятие «решетка с размерностью» [3]). В теории решеток с размерностью *постулируется* существование абстрактной функции размерности вместе с (симметричным) ортодополнением $a \mapsto a^\perp$. Это резко отличается от теории (модулярных) решеток фон Неймана, где все понятия однозначно определяются в терминах одного лишь упорядочения.

Определение. Пусть L — *полная ортомодулярная* решетка. Отношение эквивалентности $\sim$ на L называется *размерностным,* если

D1 из $a \sim O$ следует, что $a = O$;

D2 из $a \perp b$ (т. е. $a \leqslant b^\perp$) и $c \sim a \vee b$ следует существование $d \perp e$ таких, что $d \sim a$, $e \sim b$, $c = d \vee e$;

D3 если $\{a_\alpha\}$ и $\{b_\alpha\}$ — семейства, элементы которых с одинаковыми индексами α попарно ортогональны, и $a_\alpha \sim b_\alpha$ для всех α, то $\bigvee a_\alpha \sim \bigvee b_\alpha$;

---

[1]) То есть если $A + A + \cdots + A \leqslant I$ для любого числа слагаемых, то $A = O$. См. ниже упр. 2.

[2]) Капланский [1]. То, что мы называем «решеткой фон Неймана», Капланский называл «непрерывной геометрией».

[3]) Это понятие независимо появилось у Лумиса [2] и С. Маеды (M a e d a S.— J. Sci. Hiroshima Univ., 1955, A19, p. 211—237); см. также работу Ф. Маеды (M a e d a F. — J. Sci. Hiroshima Univ., 1959, A 23, p. 151—170).

D4 если a и b перспективны (т. е. имеют в L общее дополнение), то $a \sim b$.

(Заметим, что D4 тривиально выполняется, когда L — булева алгебра, поскольку в этом случае из $a' = b'$ следует, что $a = b$.) Полная ортомодулярная решетка с размерностным отношением эквивалентности называется *ортоорешеткой с размерностью* [1]).

Из результатов §§ 8—9 следует, что непрерывная геометрия $CG(\mathbf{R})$ может быть превращена в орторешетку с размерностью, если

(i) ортодополнения перенести в $CG(\mathbf{R})$ при помощи предельного перехода, отправляясь от евклидовых ортодополнений во всех $\mathbf{R}^{2n}$;

(ii) в качестве $\sim$ взять перспективность (или, что равносильно, равенство $d[a] = d[b]$).

Укажем и другие примеры орторешеток с размерностью.

Пример 6. Пусть L — решетка всех замкнутых подпространств гильбертова пространства, инвариантных относительно данного самосопряженного линейного оператора A, и пусть $S \sim T$ означает, что существует унитарное преобразование U, отображающее подпространство S на подпространство T, такое, что $(\xi U) A = (\xi A) U$ для всех $\xi \in S$.

Пример 7. Пусть L — решетка, определяемая данной алгеброй с мерой, и $a \sim b$ означает, что интервалы $[O, a]$ и $[O, b]$ изоморфны и как решетки, и метрически [2]).

В некоторых разделах теории орторешеток с размерностью D4 можно заменить следующим более слабым условием, которое вытекает из D1—D4:

D4′ если неверно, что $a \perp b$, то существуют a_1, b_1 такие, что $O < a_1 \leqslant a$, $O < b_1 \leqslant b$ и $a_1 \sim b_1$.

В следующем примере выполняются условия D1—D3 и D4′, но не D4 (за исключением случая, когда $A = cI$ является скалярной матрицей).

Пример 8. Пусть M — ортомодулярная решетка всех подпространств n-мерного евклидова пространства E_n. При данной положительно определенной симметричной матрице A назовем относительным следом [3]) $d_A[S]$ подпространства S сумму $\sum (\alpha_k A, \alpha_k)$ для любого ортонормального базиса в S. Пусть $S \sim T$ означает, что $d_A[S] = d_A[T]$. Тогда выполняются условия D1—D3 и D4′.

---

[1]) Вместо D4 Лумис [2] постулировал D4′, приведенное ниже, и называл решеткой с размерностью получающуюся при этом систему.

[2]) См. работу Махарама (Maharam D. — Trans. AMS, 1949, **65**, p. 279—330), где это понятие используется для классификации алгебр с мерой.

[3]) Интересная теорема Глисона (Gleason A. — J. Math. Mech., 1957, **6**, p. 885—893) утверждает, что при $n > 2$ все действительнозначные размерности на M (и на $L_c(\aleph)$) являются такими «относительными следами».

В орторешетке с размерностью элемент e называется *инвариантным*, если из $a \leqslant e$, $b \leqslant e^{\perp}$ и $a \sim b$ следует, что $a = b = O$. Можно показать, что инвариантные элементы любой орторешетки с размерностью L образуют *полную булеву алгебру*, которая лежит в центре решетки L (Лумис [2], теорема 2). *Фактором* называется орторешетка с размерностью, в которой единственными инвариантными элементами являются O и I; для орторешеток фон Неймана (таких как CG (**R**) и ее степени) именно так определенные факторы неразложимы («непрерывные геометрии»).

В орторешетке с размерностью L элемент b называется *конечным*, если из $a \sim b$ и $a \leqslant b$ следует, что $a = b$, и *простым*, если его единственными подэлементами являются пересечения, которые он образует с инвариантными элементами. Орторешетка с размерностью L, по определению, имеет тип I, если $I \in L$ является объединением простых элементов; тип II, если I есть объединение конечных элементов, но не содержит ненулевых простых элементов; тип III, если O является единственным конечным элементом в L.

Маеда и Лумис показали, что в любой орторешетке с размерностью типа II_1 можно ввести действительнозначную оценку («функция размерности») d такую, что $a \sim b$ тогда и только тогда, когда $d[a] = d[b]$, откуда следует модулярность. Любая орторешетка с размерностью типа I_n также модулярна [1]).

Макларен [2]) назвал элемент a решетки L «модулярным», если: (i) интервал $[O, a]$ является модулярной решеткой и (ii) (x, a) — модулярная пара при любом $x \in L$. Он доказал, что полная симметричная орторешетка L является орторешеткой с размерностью, в которой каждый элемент представим в виде объединения конечных элементов, тогда и (Ремси) только тогда, когда L «почти модулярна», т. е. полумодулярна и любой элемент $a \in L$ является объединением модулярных элементов.

Наконец, Ремси [3]) исследовал вопрос о том, в каких полных орторешетках существуют нетривиальные размерностные отношения эквивалентности. Он показал, что это имеет место тогда и только тогда, когда выполняется условие (ξ) из главы II: если a покрывает $a \wedge b$, то $a \vee b$ покрывает b.

Упражнения (любезность д-ра Н. Цирлера)

Пусть L — ортомодулярная решетка, в которой для любой ортогональной последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ существует $\bigvee a_i$.

1. Покажите, что L σ-полна.
2. Покажите, что если L не содержит несчетного множества дизъюнктных элементов, то L полна.

---

[1]) Тип I_n присваивается орторешеткам, в которых функция размерности имеет областью значений множество $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$, а тип II_1 — орторешеткам, значения функции размерности которых лежат в $[0, 1]$. — *Прим. перев.*

[2]) MacLaren M. D. — Trans. AMS, 1965, **114**, p. 401—416.

[3]) Ramsay A. — Trans. AMS, 1965, **116**, p. 9—31.

Пусть P — у-множество (с O и I), обладающее ортодополнениями и такое, что для $a \leqslant b$ существует $a^{\perp} \wedge b$ и при этом $b = (a^{\perp} \wedge b) \vee a$. Пусть $\overline{P}$ — пополнение у-множества P сечениями.

3. Обозначим через $S^{\perp}$ множество элементов a таких, что $a \leqslant s^{\perp}$ для всех $s \in S \subset P$. Покажите, что $S \mapsto S^{\perp}$ есть операция взятия ортодополнения в $\overline{P}$.

4. Покажите, что если P — решетка, то P — симметричная орторешетка.

5. Покажите, что если P — не решетка, то ортомодулярная решетка $\overline{P}$ не будет симметричной.

6. Покажите, что $S \mapsto S^{\perp}$ является единственной операцией взятия ортодополнения в P, превращающей $\overline{P}$ в ортомодулярную решетку, в которой $(a)^{\perp} = (a^{\perp})$ для главных (замкнутых) идеалов.

ПРОБЛЕМЫ

93. Найти необходимые и достаточные условия, которым должно удовлетворять (сепарабельное, регулярное) T_1-пространство, чтобы его борелевские множества составляли «стандартную» борелевскую алгебру из теоремы 5.

94. Найти необходимые и достаточные условия, при выполнении которых атомно порожденная борелевская алгебра является алгеброй всех борелевских множеств некоторого T_1-пространства.

95. Исследовать произвольную оценку на метрической решетке, выделив в ней «дискретную», «абсолютно непрерывную» и «вырожденную» части.

96. Если борелевская алгебра A порождается подмножеством G, то каждый ли ее элемент $a > 0$ необходимо содержит некоторое конечное или счетное пересечение $\bigwedge g_i > 0$ элементов $g_i \in G$? [1])

97. Охарактеризовать абстрактно как алгебры с мерой: (а) естественное продолжение меры Даниеля на тор несчетной размерности, (б) алгебру с мерой, образуемую множествами, имеющими конечную p-мерную меру Хаусдорфа в q-мерном евклидовом пространстве [2]).

*98. Не привлекая гипотезу континуума, доказать, что на борелевской алгебре всех подмножеств континуума не существует нетривиальной меры, относительно которой все точки имели бы меру нуль.

99. *Построить* максимальные идеалы в следующих булевых фактор-алгебрах: (i) счетных множеств по модулю конечных множеств; (ii) $2^{\aleph_1}/\aleph_0$; (iii) M/N (измеримых множеств по модулю множеств меры нуль); (iv) B/C (борелевских множеств по модулю множеств первой категории). Что можно сказать о строго подпрямо не разложимых идеалах?

---

[1]) Проблема 78 из [LT2]. Опровергающий пример указал Ригер (Rieger L. — Fund. Math., 1951, 38, p. 35—52). Проблемы 97, 98 — это соответственно проблемы 84 и 86 из [LT2]. — *Прим. перев.*

[2]) Hausdorff F. — Math. Ann., 1919, 79, S. 157—179.

100. В решетке L пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ состоят из всех подмножеств, имеющих подходящим образом ограниченные мощности, и пусть точные грани $\bigvee M$ и $\bigwedge N$ существуют для всех $M \in \mathcal{M}$, $N \in \mathcal{N}$. Назовем вложение φ решетки L в произведение $\prod C_k$ полных цепей $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-представлением решетки L, если $\varphi(\bigvee M) = \bigvee \varphi(M)$ и $\varphi(\bigwedge N) = \bigwedge \varphi(N)$ для всех $M \in \mathcal{M}$, $N \in \mathcal{N}$. В каком случае существование такого $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-представления равносильно некоторому (m, n)-дистрибутивному закону

$$\bigwedge_{i \in I} \left(\bigwedge_{j \in J_i} a_{ij} \right) = \bigwedge_{\alpha \in \prod J_i} \left(\bigvee_{i \in I} a_{i\alpha(i)} \right)$$

и двойственному (m', n')-дистрибутивному закону (Брунс)?

101. Всякая ли полная модулярная решетка с дополнениями является топологической решеткой (Горн)?

102. В каждой ли модулярной орторешетке перспективность транзитивна? В каждой ли ортомодулярной решетке? [1]

103. Имеет ли орторешетка всех замкнутых подпространств гильбертова пространства конечную подорторешетку (Ремси)?

104. Если непрерывная геометрия $CG(\mathbf{R})$ представлена как подпрямое произведение атомно порожденных проективных геометрий, то все ли эти сомножители будут проективными геометриями над $\mathbf{R}$ (Фринк)?

105. Найти необходимые и достаточные условия, при выполнении которых неразложимая решетка фон Неймана будет изоморфна непрерывной геометрии $CG(D)$ над некоторым телом D.

106. Построить как подходящий «прямой интеграл» [2] решетку фон Неймана, имеющую своим центром произвольно заданную борелевскую алгебру и в качестве основы — произвольно заданную непрерывную геометрию $CG(D)$ (Ремси).

107. Найти необходимые и достаточные условия, при которых решетка фон Неймана допускает положительную оценку. Может ли неразложимая решетка фон Неймана иметь две линейно независимые положительные оценки? (См. проблему 82.) (См. также работу Сикорского (S i k o r s k i R. — Colloq. Math., 1963, **11**, p. 25—28), где содержатся девять нерешенных проблем, связанных с бесконечными булевыми алгебрами.)

---

[1] Из теоремы Капланского (§ 11) следует, что перспективность транзитивна в любой полной модулярной орторешетке. — *Прим. перев.*

[2] В смысле конструкции Ремси (R a m s a y A. — J. Math. Anal. Applic., 1967, **20**, p. 480—506). — *Прим. перев. и ред.*

ГЛАВА XII

ПРИЛОЖЕНИЯ В ЛОГИКЕ И В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Булев изоморфизм

Алгебра Буля и, следовательно, теория решеток возникла 125 лет назад в связи с попытками «исследовать фундаментальные законы тех операций, которые совершает разум в процессе рассуждений; записать их в символическом языке Исчисления и на этой основе создать науку Логики и построить ее метод; использовать сам этот метод в качестве исходного пункта для развития общего метода применения математической теории к исследованию Вероятностей...» (Буль [1, § 1]).

Буль осознавал, что множества, или «классы» образуют булеву алгебру относительно теоретико-множественных операций пересечения, объединения и взятия дополнения. Он допускал (Буль [1, p. 42]) существование универсального класса, так что (например) классы «камней» и «не-камней» были оба определены. Он принимал также, что понятие «класс» равнозначно понятию «свойство» или «признак» и, по существу, считал возможным взаимно заменять эти понятия (Буль [1, p. 49]). Два его основных предположения можно резюмировать следующим образом.

Первый закон Буля. Пусть свойства обозначаются буквами, слова «и», «или» и «не» — символами $\wedge$, $\vee$, $'$ соответственно, а выражение «из x следует y» — как $x \leqslant y$. Тогда свойства образуют булеву алгебру[1]).

Второй закон Буля. Соответствие $x \to \hat{x}$ между свойством и классом объектов, обладающих данным свойством, является *изоморфизмом* между булевой алгеброй свойств и булевой алгеброй классов:

$$(1)\qquad \widehat{x \wedge y} = \hat{x} \cap \hat{y}, \quad \widehat{x \vee y} = \hat{x} \cup \hat{y}, \quad \widehat{(x')} = (\hat{x})'.$$

Буль показал, что важная часть комбинаторной логики свойств и классов может быть получена алгебраическим путем

---

[1]) В [LT1] и [LT2] была дана двойственная интерпретация; в силу принципа двойственности обе интерпретации полиизоморфны. Принятая здесь интерпретация принадлежит Булю; двойственная интерпретация выражает тот факт, что класс камней, которые являются «красными или круглыми», образуется, если взять класс «красных» камней и класс «круглых» камней. Возможно, по этой причине логики часто используют знак & вместо $\wedge$.

[Термин Boolean algebra имеет в оригинале двоякий смысл: символическое исчисление, введенное Булем (алгебра Буля), и совокупность объектов, удовлетворяющая законам этого исчисления (булева алгебра). — *Прим. перев.*]

из этих фактов. Некоторые предложения даются ниже в качестве упражнений. Отметить, что обратный результат — то, что каждая булева алгебра изоморфна алгебре классов («полю множеств») — был доказан лишь в 1933 году (теорема VIII.15, следствие 3) и что для его доказательства требуется аксиома выбора!

На самом деле Буль не считал вышеуказанные «законы» ни предположениями, касающимися логики, ни постулатами для теории множеств или классов алгебраических систем. Для него они были научными законами (человеческого) *мышления*, и он рассматривал булеву алгебру как инструмент, который можно *применять* для решения задач логики.

Вопрос о возможной противоречивости этих законов, разумеется, у него не возникал. Однако сейчас общепризнано, что из них выводим следующий парадокс Кантора [1]), открытый почти через пятьдесят лет после смерти Буля. Пусть A обозначает предполагаемый существующим «универсальный класс» всех свойств. С каждым множеством $S \subset A$ свойств можно связать класс всех (реальных или воображаемых) объектов, обладающих свойствами из S; это дает $2^{n(A)}$ классов, где $n(A)$ — мощность класса A. С другой стороны, пусть U — также существующий по предположению «универсальный класс» всех объектов. С каждым подклассом $X \subset U$ можно связать свойство быть элементом класса X. Это дает $2^{n(U)}$ различных свойств. Отсюда следует, что

(2) $$n(U) \geqslant 2^{n(A)} \quad \text{и} \quad n(A) \geqslant 2^{n(U)},$$

что противоречит хорошо известной теореме Кантора.

Этот парадокс является еще одной иллюстрацией неясностей, которые отягощают теорию бесконечных множеств и о которых говорилось в § VIII.16. Целью же настоящей главы будет не дальнейшее обсуждение этих сомнений, а краткий обзор некоторых интересных приложений алгебры Буля и теории решеток, приложений, которые были найдены за время, прошедшее после публикации книги Буля.

2. Пропозиционное исчисление. Критика

Алгебра Буля применима и к высказываниям (Буль [1, гл. XI]). Именно, для любых двух высказываний P и Q высказывания «P и Q», «P или Q» и «не-P» можно обозначить как $P \wedge Q$, $P \vee Q$ и P' соответственно. Имея в виду это истолкование, мы получаем

Третий закон Буля. Высказывания образуют булеву алгебру.

Так что алгебру Буля можно использовать в исчислении высказываний в направлении, указанном в § 1. Кроме того, в клас-

---

[1]) Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. — М.: Мир, 1966, с. 19.

сической («двузначной») логике каждое высказывание либо истинно, либо ложно. Далее, $P \wedge Q$ истинно тогда, когда P и Q оба истинны; $P \vee Q$ истинно, когда истинно P или истинно Q; из высказываний P и P' одно истинно, а другое ложно. Отсюда вытекает

Четвертый закон Буля. Истинные высказывания образуют (собственный) *простой дуальный идеал* в булевой алгебре всех высказываний; дополняющий его простой идеал состоит из *ложных* высказываний.

При этих предположениях составное высказывание «из P следует Q» (т. е. «если P, то Q»), обозначаемое $P \rightarrow Q$, имеет особое значение. Оно истинно или ложно в зависимости от того, будет ли истинным или ложным «Q или не-P»; поэтому $P \rightarrow Q$ можно истолковывать как $P' \vee Q$, уменьшая таким образом число неопределяемых операций в алгебре логики.

В двузначной логике можно подобным же образом высказывание «P равносильно Q» записать в символах как «$P \sim Q$» и заменить его на «из P следует Q и из Q следует P», т. е. операцией симметрической разности $(P' \vee Q) \wedge (Q' \vee P) = (P + Q)'$ — *дополнением* суммы, вычисленной в булевом *кольце* (§ II.12).

Можно показать также, что многие составные высказывания P являются «тавтологиями», т. е. истинными уже в силу самой их логической структуры. Это выражается алгебраически как $P \rightarrow I$. Простейшей тавтологией является $P \vee P'$ («P или не-P»). В качестве легкого упражнения в алгебре Буля можно доказать, что следующие предложения будут тавтологиями двузначной логики:

$$(3)\quad O \rightarrow P,\quad P \rightarrow I,\quad P \rightarrow P,\quad P \sim P,\quad P \rightarrow (Q \rightarrow P),$$
$$(P \sim Q) \sim (Q \sim P),\quad (P \sim Q) \vee (P \sim I),\quad (P \rightarrow Q) \vee$$
$$\vee (Q \rightarrow P).$$

Читатель без труда придумает и другие примеры.

С другой стороны, можно выдвинуть много интуитивных возражений против вышеуказанных логических правил, доведенных до крайности. Так, тавтология $O \rightarrow P$ из (3) утверждает, что «из ложного высказывания следует любое высказывание», но что это означает на самом деле? [1])

Интуиция заставляет нас относиться скептически и к законности доказательств от противного. Почему, в самом деле, опро-

---

[1]) Здесь уместно вспомнить следующий анекдот. От Рассела будто бы требовали доказать, что из (ложного) высказывания $2 + 2 = 5$ следует, что он, Рассел, является папой римским. Вот, что он ответил: «Вы признаете, что $2 + 2 = 5$, я же могу доказать, что $2 + 2 = 4$; значит, $5 = 4$. Вычтем из обеих частей по два и получим, что $3 = 2$; вычитая еще по единице, приходим к равенству $2 = 1$. Но Вы ведь предполагаете, что я и папа римский это два человека. Следовательно, я и папа римский это один человек. Ч. т. д.»

вержение (или «reductio ad absurdum») высказывания «не-P» должно доказывать истинность P? Такие отрицательные доказательства кажутся особенно неудовлетворительными, когда P утверждает, например, существование числа с заданными свойствами: мы доказываем, что «не-P» ведет к противоречию, но не можем *построить* ни одного числа с нужными свойствами.

Нетрудно придумать логические системы, в которых существуют неразрешимые предложения. Так, Сколем и Гёдель[1]) построили достаточно естественную и непротиворечивую логическую систему, в которой существуют неразрешимые высказывания о натуральных числах. Однако доказательство их существования требует принятия некоей фиксированной логической системы, включающей аксиомы Цермело—Френкеля для теории множеств. Автор же считает, что математики, одаренные (как Кантор) воображением, опираясь на интуицию и даже на физические аналогии, смогут найти новые логические алгоритмы, которые «разрешат» вопросы, рассматривавшиеся ранее как неразрешимые. Это замечание относится и к «сомнительным гипотезам», обсуждавшимся в § VIII.16. Здесь оно кажется (автору) особенно уместным, поскольку стандартные логические системы имеют замкнутые счетные реализации, в то время как наиболее трудные математические вопросы касаются *континуума*.

Как бы то ни было, но сейчас общее мнение, по-видимому, склоняется в пользу идеи о существовании многих в самом деле недоказуемых предложений, истинность которых можно принять *или* отвергнуть, не вступая в противоречие с другими предложениями. В терминах главы VI каждое множество аксиом «порождает» дуальный идеал доказуемых предложений и (*не* обязательно дополняющий его) идеал ложных высказываний. Как правило (парадокс Ришара) оба идеала счетны; следовательно, в некотором смысле «почти все» предложения формально не доказуемы (или лишены смысла!).

Упражнения

1. (а) Используя алгебру Буля, докажите, что формулы в (3) на самом деле являются тавтологиями, так же как и $(x' \to O) \to x$.

(б) Докажите то же самое для $[(x \to y) \wedge (y \to z)] \to (x \to z)$.

2. Что можно сказать о равносильности высказываний «P, если только не Q», «P и/или Q», «если не Q, то P»? Какой булевой операции соответствует конструкция «P или Q, но не оба»?

3. (а) Найдите систему аксиом для булевой алгебры в терминах операций x' и $x \to y$.

(б) Покажите, что $\vee$ или $'$ нельзя выразить только через $\to$.

4. Покажите, как по заданной произвольной конечной булевой алгебре A и простому идеалу $P \subset A$ построить пропозиционное исчисление, высказываниями которого являлись бы различные элементы $a \in A$, а истинными высказываниями — в точности элементы $x \in P$.

[1]) Gödel K. — Monatsh. Math. Phys., 1931, 38, p. 173—198.

5. Покажите, что гомоморфизмы булевой алгебры A высказываний на двузначную таблицу истинности с обычными свойствами находятся во взаимно однозначном соответствии с собственными простыми идеалами алгебры A.

3. Брауэрова и модальная логики

Как уже говорилось, пропозиционное исчисление Буля—Уайтхеда применяется к *двузначной* дедуктивной логике, в которой каждое предложение предполагается или доказуемым или доказуемо ложным. На алгебраическом языке это означает существование *гомоморфизма* булевой алгебры «всех» высказываний на булеву алгебру 2. Но *многозначные* логики (так называемые «модальные логики») возвращают нас к весьма давним временам. Так, например, аристотелева логика различала четыре модуса [1]: необходимость, случайность, возможность, невозможность.

Достаточно современные алгебраические системы для описания пропозиционных исчислений предложили Лукасевич и Тарский, а также Пост [2].

Мы ни в какой мере не собираемся обсуждать их; наш основной вопрос касается возможности такого обобщения, которое допускало бы естественный (однозначный) *гомоморфизм* булевой алгебры «всех» высказываний на заданную алгебру значений истинности. (В качестве таковой Лукасевич и Тарский предлагали, например, интервал $[0, 1]$, а Пост — множество целых чисел $0, \ldots, n-1$ $(n > 2)$.) Эта трудность становится особенно понятной, если рассматривать свойства вероятности (см. § 5): естественные функции (вероятностные меры) от высказываний, принимающие значения в $[0, 1]$, *не* являются гомоморфизмами для операций $\wedge$, $\vee$ или $\rightarrow$, хотя *являются* таковыми для $'$, поскольку $p[x'] = 1 - p[x]$.

Более плодотворная модификация двузначной логики, *не* предполагающая законность доказательства от противного, была предложена Брауэром. В пропозиционном исчислении Брауэра импликация $P \rightarrow (P')'$ принимается, но $(P')' \rightarrow P$ не признается. Поэтому для «не-P» в брауэровой логике мы будем вместо записи P' использовать символ P^*.

Стоун [3] и Тарский [3]) осознавали наличие далеко идущей аналогии между брауэровой логикой и дистрибутивной решеткой

---

[1]) См. книгу Льюиса и Ленгфорда (L e w i s C. I., L a n g f o r d C. H. Symbolic logic. — N. Y., 1932), а также заключительную часть работы Мойсила (M o i s i l G. C. — Ann. Sci. de Jassy, 1936, 22, p. 1—118).

[2]) L u k a s i e w i c z J., T a r s k i A. — C. R. Soc. Sci. Lettres Varsovie, 1930, 23, p. 1—21; краткое изложение в работе Фринка (F r i n k O. — Amer. Math. Monthly, 1938, 45, p. 210—219). См. также работы Поста (P o s t E. — Amer. J. Math., 1921, 43, p. 163—185), Розенблума (R o s e n b l o o m P. C.— Amer. J. Math., 1942, 64, p. 167—188), Россера и Туркета (R o s s e r J. B., T u r q u e t t e A. R. — J. Symb. Logic, 1945, 10, p. 61—82).

[3]) T a r s k i A. — Fund. Math., 1938, 31, p. 103—134, особенно с. 132.

открытых множеств топологического пространства. Однако точная связь с брауэровыми решетками (§ II.11) была, по-видимому, впервые установлена в [LT1, §§161—162]. При этом подходе относительное «псевдодополнение» или «частное» $Q : P$ (см. главу XIV) выступает в качестве операции $P \to Q$ «импликации» [1]), которая в булевой алгебре равносильна $P' \vee Q$. И упомянутая связь устанавливается тогда следующим образом.

Определение. *Брауэровой логикой* называется пропозиционное исчисление, которое является решеткой с O и I такой, что в ней

B1 $\quad P \to Q = I$ тогда и только тогда, когда $P \leqslant Q$;

B2 $\quad P \to (Q \to R) = (P \wedge Q) \to R$ для всех P, Q, R.

Высказывание $P \to O$ обозначается через P^* («не-P»), а отношение $P = I$ («P истинно») как $\vdash P$. (Таким образом, B1 означает, что $\vdash (P \to Q)$ тогда и только тогда, когда $P \leqslant Q$.)

Теорема 1. *Брауэрова логика L является брауэровой решеткой с $Q : P$, переобозначенным в $P \to Q$.*

Доказательство. В силу B1, $t \leqslant (x \to y)$ равносильно тому, что $\vdash t \to (x \to y)$; но ввиду B2, это эквивалентно соотношению $\vdash (t \wedge x) \to y$. Снова привлекая B1, получаем равносильность утверждению $t \wedge x \leqslant y$. Итак, $t \wedge x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда $t \leqslant (x \to y)$, т. е. $(x \to y) = y : x$ в смысле § V.10. Поскольку $x \to y$ существует по предположению для всех $x, y \in L$, отсюда следует, что любая брауэрова логика является брауэровой решеткой. Ч.т.д.

Интересно посмотреть, как из B1—B2 выводится дистрибутивность решетки L.

Ввиду соотношений (5)—(5′) и теоремы 9 из главы 1 достаточно показать, что $x \wedge (y \vee z) \leqslant u$, где u обозначает $(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. Но, очевидно, что $x \wedge y \leqslant u$ и $x \wedge z \leqslant u$; следовательно, по предположению, $y \leqslant x \to u = u : x$ и $z \leqslant x \to u$. Значит, $y \vee z \leqslant x \to u$, т. е. $x \wedge (y \vee z) \leqslant u$. Ч. т. д.

Интересно также рассмотреть «брауэровы логики» как многообразие алгебр. Это можно сделать, взяв в качестве базиса подходящую систему аксиом для $\to$, $\wedge$, $\vee$, скажем, предложенную Гейтингом [2]). Наиболее значительные исследования в этом направлении принадлежат Маккинси и Тарскому. У них, как и в [LT1] и в [LT2], использовались обозначения, двойственные к принятым здесь.

---

[1]) О понятии «алгебра с импликацией» см. у Эббота и Клейндорфера (Abbot J. C., Kleindorfer P. R. — Amer. Math. Monthly, 1961, 68, p. 697—698).

[2]) Heyting A.-S.-B. — Preuss. Akad. Wiss., 1930, p. 42—56; Гейтинг А. Интуиционизм. — М.: Мир, 1965. Об исследованиях Маккинси (McKinsey M. C. C.) и Тарского (Tarski A.) см. их работу в Ann. Math., 1946, 47, p. 122—162.

Цилиндрические и полиадические алгебры. Следует подчеркнуть, что лишь очень небольшая часть логики имеет теоретико-решеточный характер. Даже для двузначной логики введение *кванторов* привлекает операции, не выразимые в терминах включения [1]) и потому не являющиеся в чистом виде теоретико-решеточными. Это и приводит к появлению «полиадических алгебр», введенных Халмошем и «цилиндрических алгебр», рассмотренных Хенкиным и Тарским [2]).

4. Свойства в классической механике

Обсуждение в §§ 1—3 касалось идей, связанных главным образом с чистой логикой: с анализом лингвистических традиций, уходящих в далекую древность. Совершенно иной источник идей представляют собой математические модели окружающей Вселенной. Одна из самых удовлетворительных моделей базируется на детально изучаемом в классической механике понятии консервативной *динамической системы* с конечным числом степеней свободы [3]).

Рассмотрим к примеру систему n тел, которая служит моделью и (ньютоновской) небесной механики, и кинетической теории (Максвелла—Больцмана) газов. «Состояние» любой такой системы Σ в произвольный момент времени t_0 выражается при помощи $6n$ действительных чисел: каждое тело имеет три пространственные координаты и три скорости (или момента). Следовательно, $\mathbf{R}^{6n}$ ($6n$-мерное евклидово пространство) является фазовым пространством всех возможных состояний системы Σ. Далее, если $x(t_0)$ — начальное состояние, то состояние $x(t)$ в любой другой момент времени t определяется действием подходящих силовых законов: система является *детерминистской*.

Каждое (мгновенно наблюдаемое) «свойство» системы Σ очевидным образом определяет множество в заданном фазовом пространстве $\mathbf{R}^{6n}$: множество всех «состояний», находясь в которых Σ обладает данным свойством. В соответствии с классической булевой логикой (§ 1) обратное также должно иметь место: каждому подмножеству S из $\mathbf{R}^{6n}_t$ можно сопоставить свойство $x(t_0) \in S$.

---

[1]) Кванторы бегло рассматривались еще Булем [1, p. 63]. Некоторые их свойства можно вывести из теоретико-решеточных истолкований таких как, например, «$x > O$» (для некоторого x).

[2]) Halmos P. — Proc. Nat. Acad. Sci., 1954, 40, p. 296—301; Algebraic logic. — N. Y., 1962 (и здесь же ссылки); [Symp, p. 114—122]. По поводу идей Хенкина и Тарского см. [Symp, p. 83—113] и Henkin L. La structure algebrique des théories mathématiques. — Paris, 1956.

[3]) См., например, книгу Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. — М.—Л.: ОНТИ, 1937 или любую другую хорошую книгу по статистической механике или динамике частиц.

Это выглядит подозрительным уже с чисто логических позиций: как было отмечено в § XI.3, сомнение вызывает сама возможность эффективной определимости каких-либо множеств в $\mathbf{R}^{6n}$, отличных от борелевских. Понятно, что лишь *счетное* число множеств можно определить при помощи конечных предложений в конечном или счетном словаре. Кроме того, ввиду теоремы XI.13 кажется очень неправдоподобным, чтобы можно было приписать нетривиальную счетно аддитивную меру каждому такому свойству; мы вернемся к этому еще раз в § 5.

Идея сопоставить каждому подмножеству из $\mathbf{R}^{6n}$ некоторое «свойство» системы Σ имеет еще меньше смысла с физической точки зрения. Так, в силу того, что точность измерения ограничена, мы никогда не сможем *установить* прямым экспериментом, выражается или нет кинетическая энергия системы Σ в данный момент t_0 рациональным числом: даже не все борелевские подмножества в $\mathbf{R}^{6n}$ соответствуют «наблюдаемым» в простом физическом смысле. Однако все свойства, которые имеют общепринятый физический смысл (такие, как например, для газа иметь температуру и давление в данных пределах), *в самом деле* соответствуют борелевским множествам физического пространства $\mathbf{R}^{6n}$.

Фон Нейман [1]) предложил в качестве модели для алгебры физических свойств взять борелевскую фактор-алгебру M/N алгебры всех борелевских множеств в $\mathbf{R}^{6n}$ по модулю множеств меры нуль. В соответствии с этой моделью можно сказать, что утверждение «$\Sigma m_i x_i^2$ в момент времени t_0 является рациональным числом» почти наверное (т. е. с вероятностью единица) ложно. Эта модель имеет то большое преимущество, что вследствие теоремы Лебега о плотности, производя достаточно точные измерения, мы можем судить о наличии или отсутствии какого-либо свойства с уверенностью, *сколь угодно близкой к достоверности*.

Заметим, что описанная модель отличается от модели из § 1 отказом от полной дистрибутивности в смысле расширенных дистрибутивных законов (4)—(4′) из главы V. В самом деле, допустив их, мы, вследствие теоремы V.17, получили бы, что алгебра (наблюдаемых) свойств изоморфна *атомно порожденной* алгебре *всех* подмножеств некоторого класса. Вместо этого модель фон Неймана допускает лишь (слабо) счетную дистрибутивность (11) из главы XI.

Таким образом, алгебра свойств является *топологической решеткой* — свойство, присущее всем борелевским алгебрам (теорема XI.2).

---

[1]) Neumann J. von. — Ann. Math., 1932, 33, p. 587—642 (особенно с. 595—598).

5. Классическая вероятность

Подобно логике, теория вероятностей покоится на не вполне ясном философском основании [1]. В качестве отправной точки математики чаще всего принимают следующее

Определение. *Вероятностью* называется вероятностная мера на некоторой борелевской алгебре свойств.

По теореме Лумиса (§ XI.2) любая такая борелевская алгебра реализуется как σ-поле множеств по модулю некоторого σ-идеала; поэтому лебеговское продолжение данной вероятностной меры можно предполагать заданным на σ-поле множеств. В большинстве работ так и делается [2].

Что касается *конечных* алгебр вероятностей, то приведенное определение реализуется очень просто, если использовать теорему о представлении из § XI.5 [3]. Именно, любую конечную алгебру вероятностей можно представить подходящими элементарными множествами, интерпретируя каждое атомное (минимальное собственное) свойство α, скажем, в виде сектора $S(\alpha)$, опирающегося на дугу в $2\pi p[\alpha]$ радианов на диске рулетки. Тогда вероятность того, что вращающийся диск остановится так, чтобы фиксированная стрелка указывала на точку из $S(\alpha)$, будет равна $p[\alpha]$.

Основная философская проблема заключается в совместимости вышеуказанного определения вероятности с простейшим *статистическим* определением вероятности как частоты.

Пример. Пусть допускающий возможность повторения эксперимент состоит в случайном выборе точки единичной окружности E и пусть имеется некоторая (счетная) последовательность его реализаций. Для произвольного заданного борелевского подмножества $S \subset E$ пусть $p_n[S]$ обозначает долю тех из первых n испытаний, которые дают точку множества S. Пусть $p_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} p_n[S]$, если этот предел существует. Тогда для любого *фиксированного* $S \subset E$ число $p_\infty[S]$ существует и равняется $m[S]/2\pi$ с априорной вероятностью единица согласно закону больших чисел.

К сожалению, мера $p_\infty[S]$, даже когда она определена, ни для какой заданной последовательности испытаний не обладает

---

[1] Эта неясность хорошо проиллюстрирована в Math. Rev., 1946, 7, p. 186—193. См. также книгу Кейнса (Keynes J. M. A treatise on probabilities. — London, 1929).

[2] Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. — М.—Л.: 1936; Крамер Г. Математические методы статистики. — М.: ИЛ, 1948; Лоэв М. Теория вероятностей. — М.: ИЛ, 1962. Подход с точки зрения борелевских алгебр см. в книге Каппоса (Kappos D. Strukturtheorie der Wahrscheinlichkeitsfelder. — Springer, 1960).

[3] Точнее, рассуждения после леммы 2 в указанном параграфе. — *Прим. перев.*

свойством счетной аддитивности (имеет место лишь конечная аддитивность). Кроме того, мы можем без труда указать (счетное) подмножество S_c такое, что $m[S_c] = 0$, и тем не менее, $p_\infty[S_c] = 1$.

К счастью, эти явные несообразности можно устранить, используя понятие сепарабельной *регулярной* вероятностной меры, введенное в § XI.6. Именно, выберем заранее счетный базис (или предбазис) $\mathscr{C}$ открытых множеств, скажем, множество всех интервалов $[\alpha, \beta]$ с рациональными концами. Тогда с априорной вероятностью единица будет $p_\infty[C] = m[C]/2\pi = (\beta - \alpha)/2\pi$ для всех $C \in \mathscr{C}$. (Эта вероятность соответствует «произведению мер» на пространстве всех последовательностей испытаний.)

Кроме того, борелевская подалгебра, порожденная множествами $C \in \mathscr{C}$, включает *все* борелевские подмножества окружности E. Далее, апостериорная вероятность $p_\infty[C] = m[C]/2\pi$ может быть продолжена до *вероятностной меры* на этой борелевской подалгебре одним и только одним способом — борелевским расширением. *Лебегово пополнение* этой вероятностной меры даст обычную регулярную вероятностную меру на E. Наконец, описанная конструкция может быть применена к любому топологическому пространству X, которое имеет счетное порождающее семейство борелевских множеств. Таким образом, мы приходим к следующему заключению.

Теорема 2. *Пусть p — какая-нибудь регулярная вероятностная мера на топологическом пространстве X со стандартной борелевской структурой. Пусть $\mathscr{C}$ — произвольная счетная булева подалгебра борелевских множеств $C_k \subset X$, которая порождает борелевскую алгебру $\mathscr{B}$ всех борелевских множеств на X. Тогда $p_\infty[C_k]$ является априорной вероятностью множества C_k для почти каждой последовательности независимых испытаний, т. е. с вероятностью единица в смысле меры на пространстве-произведении.*

Следствие. *Лебегово пополнение борелевского продолжения для p_∞ с подалгебры $\mathscr{C}$ на алгебру $\mathscr{B}$ возможно, и с априорной вероятностью единица дает p.*

6. Логика квантовой механики

С самого начала было признано, что квантовая механика допускает отклонения от положений классической логики. Среди этих отклонений наиболее разительными являются «принцип неопределенности» и связанный с ним принцип некоммутативности физических наблюдений (главным образом в атомных масштабах). Поскольку простейшая проверка законов дистрибутивности для булевой алгебры свойств основывается на перестановочности и повторяемости физических наблюдений, дистрибутивность (обобщения которой на бесконечные случаи уже рассматривались критически в § 4), похоже, становится очень подозрительным свойством.

Кроме того, «наблюдаемые» в квантовой механике обычно [1]) считаются эрмитовыми операторами, действующими в (комплексном) гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Отсюда следует, что если определить (наблюдаемое) свойство квантово-механического «состояния» ψ как утверждение вида «наблюдение H над ψ дает величину λ в борелевском множестве $S \subset \mathbf{R}$», то ψ будет иметь свойство (H, S) с вероятностью единица тогда и только тогда, когда ψ принадлежит замкнутому подпространству X в $\mathfrak{H}$. Если S' обозначает дополнение множества S, то отрицание свойства (H, S) имеет место тогда и только тогда, когда ψ принадлежит $X^{\perp}$ — ортодополнению подпространства X.

Если каждая такая пара (H, S) предполагается соответствующей некоторому наблюдаемому свойству, то отсюда следует, что *каждое* замкнутое подпространство X гильбертова пространства представляет свойство, «наблюдаемое с достоверностью», тогда и только тогда, когда $\psi \in X$. Это предположение довольно часто принималось и из него вытекает следующая гипотеза [2]).

Гипотеза А. Наблюдаемые квантово-механические свойства образуют полную атомно порожденную решетку, которая изоморфна решетке всех замкнутых подпространств (сепарабельного) гильбертова пространства.

Более слабым является предположение о том, что пересечение $X \cap Y$ двух замкнутых подпространств X и Y, соответствующих наблюдаемым свойствам, само соответствует такому свойству. Из него вытекает равенство $(X^{\perp} \cap Y^{\perp})^{\perp} = \overline{X + Y}$, означающее, что замыкание линейной суммы двух таких подпространств снова будет подпространством указанного вида. Следовательно, наблюдаемые свойства образуют ортомодулярную решетку, изоморфную подорторешетке орторешетки всех замкнутых подпространств пространства $\mathfrak{H}$.

Заметим, что $\psi \in X \cap Y$ означает, что последовательные измерения системы, находящейся в состоянии ψ, *с несомненностью* подтверждают предсказания (H, S) и (H_1, S_1), определяемые подпространствами X и Y соответственно. Таким образом, пересечение $X \cap Y$, как и $X^{\perp}$, имеет прямое физическое истолкование. Смысл подпространства $\overline{X + Y}$ интерпретировать несколько сложнее, а *импликация* (в отличие от классической логики) вообще не выступает в качестве операции.

Отправляясь от эвристических соображений об аналогии с решеткой всех (замкнутых) подпространств конечномерного гильбертова пространства (т. е. евклидова пространства) и о естествен-

---

[1]) Нейман И. фон. Математические основы квантовой механики. — М.: ИЛ, 1964; Макки (MacKey G. — Amer. Math. Monthly, 1957, 64, p. 45—58).

[2]) См. работу Биркгофа и фон Неймана [1], где впервые были высказаны обсуждаемые идеи.

ности допущения существования положительных оценок, подобных вероятности [1]) (или размерности в непрерывных геометриях), фон Нейман и автор предположили, что решетка (наблюдаемых) свойств квантово-механической системы должна быть *модулярной*. Как решеточное свойство, это предположение можно рассматривать (в отличие от гипотезы А) в качестве *исследовательской гипотезы*, допускающей экспериментальное доказательство или опровержение (см. [Symp, p. 160—163], где проводится более детальное обсуждение). Однако недавно Пирон [2]) показал, что решетка $L_c(\mathfrak{H})$, порожденная замкнутыми подпространствами, инвариантными относительно операторов координат и моментов свободной частицы, уже не будет модулярной; поэтому справедливость гипотезы о модулярности становится весьма неправдоподобной.

С другой стороны, решетка $L_c(\mathfrak{H})$ почти модулярна в смысле § XI.11. Именно, как было сказано в § V.9, $L_c(\mathfrak{H})$ содержит плотную модулярную подорторешетку $J \cup J^{\perp}$, состоящую из идеала J элементов конечной высоты и их ортодополнений (элементов конечной дуальной высоты). Кроме того, $L_c(\mathfrak{H})$ есть не что иное, как пополнение сечениями орторешетки $J \cup J^{\perp}$. По поводу деталей, касающихся этой и связанных с ней характеризаций решетки $L_c(\mathfrak{H})$ и подобных ей, мы отсылаем читателя к работе Макларена [3]).

ПРОБЛЕМЫ (см. также проблемы в главе XI)

*108. Являются ли аксиома выбора, гипотеза континуума и гипотеза Суслина «в самом деле» вполне независимыми? [4])

109. Не является ли проблема 99 неразрешимой? В каких случаях предположение о существовании такого идеала равносильно аксиоме выбора?

110. Создать алгебру вероятностей для квантовой механики на классе симметричных орторешеток общего вида, не обращаясь к гильбертову пространству или w^*-алгебре.

---

[1]) Их можно истолковывать, например, как «априорные термодинамические веса состояний». Об аналогичных вероятностных идеях см. работы Бодиу (B o d i o u G. — Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, 1955, 6, p. 11—25) и Макларена (M a c L a r e n D. — Report ANL-7065, Argonne National Laboratory, 1965).

[2]) P i r o n C. — Helv. Physica Acta, 1964, 37, p. 439—468.

[3]) M a c L a r e n M. D. — Pacif. J. Math., 1964, 14, p. 597—612.

[4]) См. Заключительную часть § 2. — *Прим. перев.*

ГЛАВА XIII

РЕШЕТОЧНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ ГРУППЫ

1. У-группы

В оставшейся части книги мы будем иметь дело главным образом с *группами* (впрочем, также и с полугруппами и квазигруппами), которые одновременно являются *решетками* (иногда просто у-множествами) и в которых *каждая групповая трансляция изотонна*. Такие системы называются *решеточно упорядоченными группами* или *l-группами*. Для групповой операции будут использоваться аддитивные обозначения, так что, например, групповые трансляции будут записываться в виде $x \to a + x + b$, единица группы — как 0, обратный для x — как $-x$, наконец, $a + \ldots + a$ (n слагаемых) кратко будет обозначаться na. Поэтому предположение об изотонности групповых трансляций принимает следующий вид:

(1) если $x \leqslant y$, то $a + x + b \leqslant a + y + b$ для всех a, b.

В более общем случае *упорядоченная группа* (для краткости *у-группа*) определяется как группа, которая одновременно является у-множеством и в которой выполняется условие (1). Прежде всего заметим, что справедлива

Лемма 1. *В любой у-группе G всякая групповая трансляция является порядковым автоморфизмом.*

Доказательство. В самом деле, групповая трансляция $x \to (-a) + x + (-b)$ в силу (1) изотонна и является обратной для $x \to a + x + b$:

(1′) для всех a, b из $a + x + b \leqslant a + y + b$ следует, что $x \leqslant y$.

Следствие. *За исключением тривиального случая $G = \{0\}$ у-группа не может иметь универсальных граней.*

Действительно, по лемме 1, если I — универсальная верхняя грань для G, то $a + I = I$ для любого $a \in G$, откуда $a = 0$ для всех a. Аналогичные рассуждения для нижних граней показывают, что использование символа 0 для обозначения групповой единицы у-группы не приводит к путанице.

Приведенные почти очевидные результаты имеют два важные следствия. Во-первых, символы x, x' теперь можно использовать для обозначения произвольных элементов l-группы, поскольку, как видим, дополнений ее элементы не имеют. Во-вторых, l-группа не может быть «полной решеткой» в обычном смысле (если только она не есть $\{0\}$). По этой причине *полной l-группой* называется l-группа, которая как решетка *условно полна*. Эти соглашения не вносят никакой двусмысленности.

В остальном терминология и обозначения, относящиеся к различным ситуациям в у-множествах, очевидным образом переносятся на у-группы. Так, *направленной группой* называется у-группа, которая направлена, если ее рассматривать как у-множество. Группа, являющаяся *цепью* относительно своего естественного порядка, называется *линейно упорядоченной группой*.

Элемент x у-группы G называется *положительным*, если $x \geqslant 0$; множество $P = G^+$ всех положительных элементов у-группы G называется ее *положительным конусом*. Сразу получаем, что $P \cap -P = 0$, $P + P \subset P$, $(-a) + P + a = P$ для всех $a \in G$.

Происхождение введенных выше терминов становится понятным, если обратиться к l-группе (векторной решетке (см. главу XV)) всех действительных трехмерных векторов $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, где $\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{y}$ означает, что $x_i \leqslant y_i$ для $i = 1, 2, 3$.

Следующие результаты вполне очевидны.

Лемма 2. *В любой у-группе*

(2) $$\text{если } x \leqslant y \text{ и } x_1 \leqslant y_1, \text{ то } x + x_1 \leqslant y + y_1.$$

Кроме того, множество P инвариантно относительно всех внутренних автоморфизмов группы G.

Понятно, что любая подгруппа у-группы сама является у-группой относительно тех же группового сложения и порядка. Аналогично свойство быть у-группой сохраняется при переходе к двойственному порядку и к двойственной групповой операции. Укажем несколько известных у-групп.

Пример 1. Любая упорядоченная область целостности является у-группой относительно сложения и естественного порядка. Множество P в этом случае совпадает с множеством неотрицательных элементов.

Таким образом, аддитивная группа $(\mathbf{Z}, +, \leqslant)$ целых чисел является у-группой, так же как и аддитивная группа $(\mathbf{Q}, +, \leqslant)$ рациональных чисел и т. д.

Пример 2. Пусть $G = C\,[0, 1]$ — множество всех непрерывных действительных функций $f(x)$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ и пусть P — множество всех таких неотрицательных функций. Тогда G — (коммутативная) l-группа.

Теорема 1. *Любая у-группа G с точностью до изоморфизма определяется своим положительным конусом $P = G^+$, поскольку*

(3) $a \leqslant b$, $b - a \in P$ *и* $-a + b \in P$ *являются равносильными условиями.*

Кроме того, (i) $0 \in P$; (ii) *если* $x, y \in P$, *то* $x + y \in P$; (iii) *если* $x, y \in P$ *и* $x + y = 0$, *то* $x = y = 0$; (iv) $a + P = P + a$ *для всех* $a \in G$. *Обратно, если G — какая-нибудь группа и P —*

ее подмножество, удовлетворяющее условиям (i)—(iv), *то условие* (3) *задает на* G *структуру у-группы.*

Доказательство. Условие (3) легко получается из (1); так, если $a \leqslant b$, то $0 = a - a \leqslant b - a$. Выполнимость (i) очевидна. Далее, так как при $s \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ будет

$$s + t \geqslant s + 0 \geqslant 0 + 0 = 0,$$

то истинно (ii). Если теперь выполнена посылка условия (iii), то $0 = x + y \geqslant x$, $y \geqslant 0$, вследствие (3), откуда $x = y = 0$, что доказывает (iii). Наконец, ввиду (3) множества $a + P$ и $P + a$ оба состоят из всех элементов $x \geqslant a$, откуда вытекает (iv).

Обратно, пусть G — какая-нибудь группа, а P — ее подмножество, удовлетворяющее перечисленным условиям. Положим в соответствии с (3) $y \leqslant x$. Тогда из (i), (ii), (iii) следуют законы P1, P3, P2, а из условия (iv), представленного в виде (iv′) $P = -a + P + a$, получаем:

$$(a + x + b) - (a + y + b) =$$
$$= a + x + b - b - y - a = a + (x - y) - a \in P,$$

откуда получается (1), и значит, G является у-группой.

Замечание. Условия (i)—(ii) означают, что P является подмоноидом в G, условие (iv) в форме (iv′) утверждает, что подмножество P инвариантно относительно всех внутренних автоморфизмов группы G.

Пример 3. Пусть Φ — некоторое множество у-групп G_φ и Γ — их (неограниченное) прямое произведение как у-множеств *и* как групп. Тогда Γ является у-группой.

Например, если все G_φ будут копиями действительного поля $\mathbf{R}$ с его естественной упорядоченностью, то Γ — это у-группа всех действительных функций на множестве Φ с их естественным (уже не линейным) порядком. (См. пример 3 из § I.1.)

У-подгруппой прямого произведения $\Gamma = \prod_{\Phi} G_\varphi$ из примера 3 является *ограниченное прямое произведение* у-групп G_φ, по определению состоящее из всех таких элементов f (функций $f\colon \varphi \to f(\varphi) = g_\varphi \in G_\varphi$), которые имеют лишь *конечное* число ненулевых компонент $g_\varphi \neq 0$.

Определение. Пусть G и H — у-группы. *Лексикографическим произведением* $G \circ H$ называется множество всех пар (x, y), где $x \in G$, $y \in H$, для которых (i) $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ и (ii) $(x, y) \geqslant 0$ [1]) тогда и только тогда, когда либо $x > 0$, либо $x = 0$ и $y \geqslant 0$. При этом всегда получается у-группа.

Как у-множество $G \circ H$ является *ординальным* произведением G и H, а как группа — их прямой суммой (в точности как в примере 3).

[1]) Символ 0 обозначает здесь пару (0, 0). — *Прим. перев.*

Лемма 3. *Лексикографическое произведение* $G \circ H$ *двух нетривиальных у-групп тогда и только тогда является l-группой, когда* G — *цепь, а* H — *решетка.*

Набросок доказательства. Так как $(x, y) \vee (x, y') = (x, y \vee y')$, то H должна быть решеткой. Далее, если x, x' — не сравнимые элементы в G, то $(x, y) \vee (x', y) = (x \vee x', -\infty)$, где $-\infty$ обозначает универсальную нижнюю грань в H; значит, как показывает следствие из леммы 1, $H = \{0\}$.

Вообще, пусть N — какая-нибудь нормальная подгруппа некоторой группы G, причем G/N и N обе являются у-группами с положительными конусами P_1 и P_2 соответственно. Пусть $P \subset G$ состоит из таких элементов $g \in G$, которые удовлетворяют одному из условий: (i) $g \in P_2 \subset N$ или (ii) $g + N \in P_1$. Это превращает G в у-группу, которую можно назвать *лексикографическим расширением* у-группы N при помощи G/N. Если G — такое лексикографическое расширение, то отображение $G \to G/N$ будет o-гомоморфизмом в смысле следующего определения.

Определение. Изотонный групповой гомоморфизм у-группы G в у-группу H называется *o-гомоморфизмом.*

Лемма 4 (Фукс). *Ядро любого o-гомоморфизма* θ: $G \to H$ *у-групп является выпуклой нормальной подгруппой в* G. *Обратно, если* N — *произвольная выпуклая нормальная подгруппа у-группы* G *и положительный конус в* G/N *определен как множество всех* $g + N$, *где* $g \in P$, *то отображение* $g \to gN$ *является o-гомоморфизмом у-группы* G *на* G/N.

Доказательства сформулированных утверждений см. в книге [**Fu**, с. 36]. Хотя «ядро» N определяет конгруэнцию (см. глава II, §§ 3—4), оно *не* определяет отношение порядка на образе G/N. Существуют взаимно однозначные o-гомоморфизмы, которые не являются изоморфизмами, как например, естественное отображение $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \circ \mathbf{R}$ прямого квадрата действительного поля $\mathbf{R}$ на его лексикографический квадрат.

2. Направленные группы

Направленной группой называется у-группа G, удовлетворяющая свойству Мура—Смита

(4) для любых $a, b \in G$ существует элемент $c \in G$ такой, что $a, b \leqslant c$.

Лемма 1. *В любой у-группе свойство Мура—Смита равносильно утверждению о том, что каждый элемент является разностью положительных элементов.*

Доказательство. Полагая в (4) $b = 0$, мы получаем, что $a = c - (-a + c)$, где $0 \leqslant c$ и $-a + c = -a + (c - a) + a \geqslant -a + 0 + a = 0$. Обратно, если $a = a' - a''$ и $b = b' - b''$, где a', a'', b', b'' положительны, то $c = a' + b'$ будет верхней гранью для a и b.

Лемма 2. *В любой у-группе G отображение $x \mapsto -x$ является дуальным порядковым автоморфизмом.*

В самом деле, если $x \geqslant 0$, то $0 = x + (-x) \geqslant 0 + (-x) = -x$, и, обратно, если $0 \geqslant -x$, то $x = x + 0 \geqslant x + (-x) = 0$.

Следствие 1. *В любой у-группе G*

(5) *если $x \geqslant y$, то $a + (-x) + b \leqslant a + (-y) + b$ для всех $a, b \in G$.*

Следствие 2. *Любая направленная группа бинаправлена.*

Если задана у-группа G (например, состоящая из действительных функций со сложением), можно спросить: какие подгруппы D направлены в G? Очевидно, что если $f \in D$, где D — направленная подгруппа в G, то множество $\{f, 0\}$ должно иметь верхнюю грань. Но если u — верхняя грань множества $\{f, 0\}$ и v — верхняя грань множества $\{g, 0\}$, то $u + v$ будет верхней гранью множества $\{f + g, f, g, 0\}$. Аналогичные замечания проходят и для нижних граней, и следовательно, имеет место

Лемма 3. *В любой у-группе G совокупность $B(G)$ всех $f \in G$ таких, что множество $\{f, 0\}$ ограничено, образует направленную подгруппу, содержащую любую другую направленную подгруппу у-группы G.*

Пример 4. Пусть L — решетка и $a \in L$ — фиксированный элемент. Пусть, далее, $V_a(L)$ обозначает коммутативную у-группу всех (действительных) *оценок* $v[x]$ на L таких, что $v[a] = 0$. Если положительный конус P_a в $V_a(L)$ состоит из всех таких *изотонных* оценок, то элементами множества $B(P_a)$ являются оценки, имеющие *ограниченную вариацию на конечных интервалах*. По теореме X.10 и лемме 1 из следующего § 3 $V_a(L)$ будет даже l-группой.

Определение. Элемент a у-группы G называется *несравненно меньшим*, чем данный элемент $b \in G$ (в обозначениях $a \ll b$), если $na \leqslant b$ для каждого целого n. У-группа G называется *архимедовой*, если при $a \ll b$ всегда $a = 0$. Она называется *целозамкнутой* [1]), если

(6) из $na \leqslant b$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ следует, что $a \leqslant 0$.

Лемма 4. *Любая целозамкнутая у-группа G является архимедовой.*

Доказательство. Если $na \leqslant b$ для всех $n \in \mathbf{Z}$, то $na \leqslant b$ для всех $n \in \mathbf{Z}^+$, откуда $a \leqslant 0$; кроме того, $n(-a) = (-n)a \leqslant b$ для всех $n \in \mathbf{Z}^+$, откуда $(-a) \leqslant 0$, и значит, $a \geqslant 0$. Следовательно, $a = 0$.

Заметим, что у-группа $G \circ H$ *не* является архимедовой (и следовательно, целозамкнутой) за исключением тривиальных случаев, когда $G = \{0\}$ и H — архимедова или $H = \{0\}$ и G — архи-

---

[1]) В другой терминологии — *вполне целозамкнутой*. — *Прим. перев.*

медова. В § 3 будет доказано, что l-группа целозамкнута тогда и только тогда, когда она архимедова. В § 13 мы установим гораздо более сильный результат: *любая целозамкнутая направленная группа коммутативна*. Пока же удовольствуемся меньшим.

Прежде всего, напомним, что в § 1 *полной l-группой* была названа l-группа, в которой каждое ограниченное подмножество имеет точные грани, т. е. l-группа, *условно полная* как решетка. Тогда получается

Лемма 5. *Любая подгруппа полной l-группы G целозамкнута (и следовательно, архимедова).*

Доказательство. По определению полноты, если $na \leqslant b$ для всех $n \in \mathbf{Z}^+$, то существует $c = \bigvee \{na\}$. Но тогда $c + a = \bigvee \{(n+1)a\} \leqslant \bigvee \{na\} = c = c + 0$, поскольку $\{(n+1)a\} \subset \{na\}$. Отсюда ввиду (1') следует, что $a \leqslant 0$.

Теперь рассмотрим важный пример Эверета и Улама [1], который показывает различные неожиданные возможности, возникающие в y-группах, не являющихся l-группами[1]).

Пример 5. Пусть G состоит из всех изотонных гомеоморфизмов действительной прямой с операцией их суперпозиции и пусть $f \leqslant g$ означает, что $f(x) \leqslant g(x)$ для всех x. Тогда элементами положительного конуса P являются функции, удовлетворяющие условию $x \leqslant f(x)$ для всех x; при этом $f^+(x) = \max\{f(x), x\}$. Пусть $p(x)$ — периодическая функция периода единица на $(-\infty, +\infty)$ в обычном смысле теории функций, причем $|p'(x)| \leqslant 1/2$. Если $h(x) = x + p(x)$ и $g(x) = x + 1/2$, то для функции $f = -h + g + h$ будет $nf = ng$, но $f \neq g$. Функция φ, определенная на отрезке $[0, 1]$ двузвенной ломаной с вершиной в точке $\varphi(3/8) = 3/4$, и функция ψ, определяемая ломаной с вершинами в точках $\psi(1/4) = 1/4$, $\psi(5/16) = 11/16$ и $\psi(3/4) = 3/4$, таковы, что $0 < \psi^2 < \varphi^2$, но $\varphi \nleqslant \psi$.

Теперь рассмотрим подгруппу A в G, содержащую все порядковые автоморфизмы отрезка $[0, 1]$, определяемые *алгебраическими функциями*. Они образуют направленную подгруппу в G, являющуюся архимедовой y-группой, которая, однако, не целозамкнута. Этот последний факт можно доказать, изменяя функции φ и ψ, указанные в примере 5, и наклоны соответствующих отрезков на достаточно малую величину, что возможно вследствие теоремы Вейерштраса о приближении.

Упражнения к §§ 1—2

1. Докажите, что любую группу можно превратить в y-группу, считая положительный конус состоящим лишь из 0.

2. Докажите, что в группе, являющейся и решеткой, (1) равносильно следующим двум дистрибутивным законам:

$$a + (x \vee y) = (a + x) \vee (a + y) \quad \text{и} \quad (x + y) \vee b = (x + b) \vee (y + b).$$

---

[1]) l-группой не будет y-группа из второй части примера. — *Прим. перев.*

3. Покажите, что l-группу можно определить как группу с еще одной бинарной операцией $\vee$, которая идемпотентна, коммутативна, ассоциативна и удовлетворяет дистрибутивным законам, приведенным в упр. 2.

4. Покажите, что следующие группы, хотя в общем и не являются решетками, представляют собой у-группы или «почти» у-группы:

(а) G, состоящая из целых чисел с операцией сложения, когда в качестве P берется множество целых чисел $n > 2$;

(б) G — мультипликативная группа ненулевых рациональных чисел, P — все целые числа;

(в) G — аддитивная группа некоторого поля характеристики нуль, являющегося «формально действительным» в том смысле, что при $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0$ всегда $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Здесь P — подмножество, состоящее из сумм квадратов.

5. Дайте подробное доказательство того, что в примерах 1—2 получаются l-группы, а в примере 3 — всегда у-группа.

6. Докажите, что лексикографическое произведение двух у-групп является у-группой.

7. Докажите, что лексикографическое произведение $G \circ H$ любой направленной группы G и любой у-группы H всегда будет направленной группой.

8. (а) Докажите, что в любой у-группе отношение $\ll$ антисимметрично и транзитивно.

(б) Докажите, что любая подгруппа архимедовой у-группы сама является архимедовой у-группой относительно данного порядка.

* 9. Постройте направленную группу, содержащую элементы порядка два. (Указание. Используйте упр. 1 и 7.)

* 10. Покажите, что подгруппа A в примере 5 имеет (2,2)-интерполяционное свойство Риса [1]). (См. [LT2, с. 86, упр. 4].)

3. Свойства l-групп

По определению, l-группа — это просто у-группа, в которой любые два элемента имеют точную верхнюю и точную нижнюю грани. Понятно, что любая l-группа является направленной группой, поэтому все результаты §§ 1—2 справедливы и для l-групп.

Дистрибутивные законы. Поскольку групповые трансляции в любой у-группе являются изотонными, взаимно однозначными и обратимыми преобразованиями, они будут порядковыми автоморфизмами. Следовательно, сложение в любой l-группе дистрибутивно относительно и пересечений, и объединений:

$$(7)\quad a + (x \vee y) = (a + x) \vee (a + y),\quad (x \vee y) + b = (x + b) \vee (y + b),$$

$$(7')\quad a + (x \wedge y) = (a + x) \wedge (a + y),\quad (x \wedge y) + b = (x + b) \wedge (y + b).$$

---

[1]) У-множество P, по определению, имеет (m, n)-интерполяционное свойство (Риса), если для любых $a_1, \ldots, a_m \in P$ и $b_1, \ldots, b_n \in P$ таких, что $a_i \leqslant b_j$ при всех i, j, существует элемент $c \in P$, удовлетворяющий неравенствам $a_i \leqslant c \leqslant b_j$ при всех i, j. — *Прим. перев.*

Вообще, любая групповая трансляция является автоморфизмом относительно неограниченных объединений и пересечений, так что

$$(8)\qquad a + (\bigvee x_\sigma) + b = \bigvee (a + x_\sigma + b),$$

$$(8')\qquad a + (\bigwedge x_\sigma) + b = \bigwedge (a + x_\sigma + b),$$

причем в каждом из равенств, если объединение (соответственно пересечение) в левой части существует, то существует и объединение (соответственно пересечение) в правой части.

Поскольку при $x \geqslant 0$ будет $0 = x - x \geqslant 0 - x = -x$ и обратно, то отображение $x \mapsto -x$ является дуальным порядковым автоморфизмом в любой у-группе. Поэтому если $-a \vee -b$ существует, то существует и

$$(9)\qquad a \wedge b = -(-a \vee -b) = -(-b \vee -a).$$

Следовательно, отображение $x \mapsto a - x + b$ будет дуальным автоморфизмом при любых a, b во всякой у-группе. Значит, в l-группе тождественно

$$(10)\qquad a - (x \vee y) + b = (a - x + b) \wedge (a - y + b).$$

Кроме того, так же, как в (8)—(8′),

$$(11)\qquad a - (\bigvee x_\sigma) + b = \bigwedge (a - x_\sigma + b) \text{ и двойственно.}$$

Следующие две леммы и дальнейшие теоремы существенно опираются на предыдущие результаты.

Лемма 1. *У-группа является l-группой тогда и только тогда, когда $a \vee 0 = a^+$ существует в G для любого $a \in G$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Обратно, пусть H — у-группа, в которой для любого $c \in H$ существует $c^+ \in H$. Тогда, вследствие (7),

$$(12)\qquad (a - b)^+ + b = [(a - b) \vee 0] + b = a \vee b \text{ для всех } a, b \in H.$$

Так как $(a - b)^+ + b$ по предположению существует, то существует и $a \vee b$. Существование $a \wedge b$ в H следует теперь из (9).

Лемма 2. *Если алгебра $(A, +, \vee)$ является группой по сложению, $\vee$-полурешеткой по объединению и каждая групповая трансляция изотонна, то $(A, +, \vee)$ — l-группа.*

Доказательство. И здесь пересечения существуют вследствие (9).

Теорема 2. *Алгебра $(A, +, \vee)$ тогда и только тогда является l-группой, когда она группа по сложению, $\vee$-полурешетка по объединению и имеют место дистрибутивные законы* (7).

Доказательство. Применим лемму 2 и заметим, что из дистрибутивных законов (7) уже следует устойчивость порядка данной полурешетки относительно групповых трансляций.

Теперь, привлекая понятия из § VI.10, получаем важное

Следствие 1. *Класс l-групп эквационально определим.*

Применением теоремы VIII.15 отсюда вытекает

Следствие 2. *Каждая l-группа изоморфна l-подгруппе неограниченного прямого произведения* (*пример* 3) *подпрямо неразложимых l-групп.*

Если в (10) положить $x = a$ и $y = b$, получается

Лемма 3. *В любой l-группе*

(13) $$a - (a \wedge b) + b = b \vee a \text{ для всех } a,\ b.$$

Следствие. *В любой коммутативной l-группе*

(14) $$a + b = (a \vee b) + (a \wedge b) \text{ для всех } a,\ b.$$

Пример 6. Пусть G — мультипликативная группа всех положительных рациональных чисел и пусть G^+ состоит из всех положительных целых чисел. В этом случае r^+ оказывается числителем в представлении r в виде несократимой дроби.

В примере 6 *модулярный закон* (14) превращается в известное из теории чисел тождество $rs = (r, s)\ [r, s]$ [1]).

Определение. Если a — элемент l-группы G, то $a^+ = a \vee 0$ и $a^- = a \wedge 0$ называются соответственно *положительной и отрицательной частями* элемента a.

Полагая в (13) $b = 0$, получаем, что $a - a^- + 0 = a^+$, откуда

(15) $$a = a^+ + a^- \text{ для всех } a \in G,$$

т. е. каждый элемент l-группы является суммой своей положительной и своей отрицательной частей. В примере 4 это дает жорданово разложение из § X.6.

Теорема 3. *Если в l-группе $na \geqslant 0$, то $a \geqslant 0$.*

Доказательство. n-кратное применение (8′) дает

$$n(a \wedge 0) = na \wedge (n-1)a \wedge \ldots \wedge a \wedge 0.$$

Но если $na \wedge 0 = 0$, то полученное выражение сводится к

$$(n-1)a \wedge (n-2)a \wedge \ldots \wedge a \wedge 0 = (n-1)(a \wedge 0).$$

Сокращая, получаем $a \wedge 0 = 0$, что и требовалось.

Следствие 1. *В любой l-группе каждый элемент за исключением* 0 *имеет бесконечный порядок* (*т. е. любая l-группа «свободна от кручения»*).

Доказательство. Если $na = 0$, то $na \geqslant 0$ и $na \leqslant 0$. Теперь воспользуемся теоремой 3 и двойственным ей утверждением.

Этот результат верен не для всех направленных групп (см. упр. 9 к § 2).

---

[1]) Наибольший общий делитель умножается на наименьшее общее кратное.— *Прим. перев.*

Следствие 2. *Если в коммутативной l-группе $na \geqslant nb$, то $a \geqslant b$.*

Доказательство. Если $na \geqslant nb$, то $na - nb = n(a-b) \geqslant 0$. Отсюда, по теореме 3, $a - b \geqslant 0$. Прибавляя к обеим частям b, получаем, что $a \geqslant b$.

Этот результат, как показывает пример 5, верен не для всех некоммутативных l-групп.

4. Дальнейшие алгебраические свойства

В общем алгебраическая теория l-групп имеет мало сходства с теорией решеток. Прежде всего, как мы уже видели, нетривиальные l-группы не имеют дополнений. Во-вторых, как мы сейчас покажем, не существует недистрибутивных l-групп.

Теорема 4. *Каждая l-группа является дистрибутивной решеткой.*

Доказательство. По теореме I.10 достаточно показать, что если $a \wedge x = a \wedge y$ и $a \vee x = a \vee y$, то $x = y$. Но в самом деле, в силу (13) при этих предположениях

$$x = (a \wedge x) - a + (x \vee a) = (a \wedge y) - a + (y \vee a) = y.$$

Важными алгебраическими понятиями, относящимися именно к l-группам, а не к решеткам вообще, являются дизъюнктность и модуль элемента. Первое из них в каком-то смысле аналогично независимости в модулярных решетках. Сначала мы установим следующий результат.

Теорема 5. *В любой l-группе*

(16) *если* $a \wedge b = 0$ *и* $a \wedge c = 0$, *то* $a \wedge (b + c) = 0$;

(16′) *если* $a \vee b = 0$ *и* $a \vee c = 0$, *то* $a \vee (b + c) = 0$.

Доказательство. Поскольку a, b, c положительны, ясно, что $a \wedge (b + c) \geqslant 0$. Но тогда, дважды используя (7′), получаем:

$$0 = 0 + 0 = (a \wedge b) + (a \wedge c) = ((a \wedge b) + a) \wedge ((a \wedge b) + c) =$$
$$= (a + a) \wedge (b + a) \wedge (a + c) \wedge (b + c) \geqslant a \wedge (b + c),$$

поскольку $a + a$, $b + a$, $a + c$ все содержат a. Отсюда следует формула (16), а (16′) двойственна ей.

Определение. Два положительные элемента a и b называются *дизъюнктными*[1]) (в обозначениях $a \perp b$), если $a \wedge b = 0$.

В примере 6 дизъюнктность означает взаимную простоту. Теорема 5 утверждает, что множество положительных элементов, дизъюнктных с каким-нибудь элементом a, замкнуто относи-

[1]) В другой терминологии *ортогональными*, но это слово уже использовалось в ином смысле в § III.14. — *Прим. перев.*

тельно сложения. Если $a \wedge b = 0$, то, поскольку $b \vee a = a \vee b$, из (13) следует

Теорема 6. *Дизъюнктные положительные элементы перестановочны*:

(17) $$\text{если } a \wedge b = 0, \text{ то } a + b = b + a.$$

Лемма. *Если* $b \wedge c = 0$, *то* $(b - c)^+ = b$ *и* $(b - c)^- = -c$.

Доказательство. Из предыдущей формулы

$$(b - c) \vee 0 = (b \vee c) - c = b - (b \wedge c) + c - c = b$$

и двойственно.

Теперь введем важное и открывающее новые возможности понятие *модуля* $|a|$ элемента a l-группы:

(18) $$|a| = a \vee (-a).$$

Теорема 7. *В любой l-группе для всех* a

(19) $$|a| \geqslant 0, \text{ причем } |a| > 0 \text{ при } a \neq 0;$$

(20) $$a^+ \wedge (-a)^+ = 0;$$

(21) $$|a| = a^+ - a^-.$$

Доказательство. Из определения и в силу принципа двойственности

$$|a| = a \vee (-a) \geqslant a \wedge (-a) = -[(-a) \vee a] = -|a|,$$

откуда $2|a| = |a| + |a| \geqslant |a| - |a| = 0$. Тогда по теореме 3 $|a| \geqslant 0$, что доказывает (19). Если $|a| = 0$, то $0 = 2|a|$ и в выделенной выше строчке будет $a \vee -a = a \wedge -a$, откуда $a = -a$, и значит (следствие 1 из теоремы 3), $a = 0$.

Из двойственного для (19) соотношения $a \wedge (-a) \leqslant 0$, и следовательно,

$$0 = 0 \vee (a \wedge -a) = (a \vee 0) \wedge (-a \vee 0) \text{ (решеточная дистрибутивность)}$$

и (20) доказано. Наконец, снова используем (19):

$$\begin{aligned} |a| = 0 \vee |a| \vee 0 &= [0 \vee a] \vee [(-a) \vee 0] \quad \text{(ввиду L3)} \\ &= a^+ \vee (-a)^+ \quad \text{(по определению)} \\ &= a^+ + (-a)^+ \quad \text{(в силу (20) и (17))}. \end{aligned}$$

Так как $(-a)^+ = -a^-$, доказательство закончено.

Подставляя в (21) $a - b$ вместо a, получаем:

$$\begin{aligned} |a - b| &= (a - b)^+ - (a - b)^- = \\ &= [(a - b) \vee 0 + b] - [(a - b) \wedge 0 + b], \end{aligned}$$

причем последнее равенство есть элементарное тождество в l-группах. И теперь к полученному выражению применяем (7) — (7'):

(22) $$|a-b| = (a \vee b) - (a \wedge b).$$

Теорема 8. *В любой l-группе для модулей имеют место следующие соотношения:*

(23) $$|na| = |n|\,|a| \quad \textit{для каждого целого } n;$$

(24) $$|(a \vee b) - (a^* \vee b)| \leqslant |a - a^*| \quad \textit{и двойственно};$$

(25) $$|(a \vee c) - (b \vee c)| + |(a \wedge c) - (b \wedge c)| = (a \vee b) - (a \wedge b).$$

Доказательство. Согласно (20) элементы a^+ и $a^- = (-a)^+$ дизъюнктны и, следовательно, по теореме 6 перестановочны. Значит, $na = na^+ + na^-$ (элементарная теория групп); кроме того, na^+ и $na^- = n(-a^-)$ дизъюнктны (теорема 5 и индукция). (Отсюда независимо получается перестановочность na^+ и na^-.) Но na^+ и $n(-a^-)$, кроме того, положительны; значит, по лемме, $(na)^+ = n(a^+)$ и $(na)^- = n(a^-)$. Отсюда следует (23) для положительных n. Для отрицательных n (23) получается теперь, если заметить, что $|-x| = |x|$.

Так как из (25) очевидным образом следует (24), остается доказать лишь (25), чем мы и займемся сейчас[1]).

Прежде всего,

$$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = (a \wedge b) \vee [(a \vee b) \wedge c] =$$
$$= a \wedge b - (a \wedge b) \wedge c + (a \vee b) \wedge c =$$
$$= [a \wedge b - a \wedge b] + (a \wedge b) \vee c - c + (a \vee b) \wedge c.$$

Двойственно,

$$(a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) = (a \vee b) \wedge c - c + (a \wedge b) \vee c.$$

Вследствие теорем 4 и II.8 отсюда получается, что

(25') $$(a \wedge b) \vee c - c + (a \vee b) \wedge c = (a \vee b) \wedge c - c + (a \wedge b) \vee c.$$

[1]) Следуя Калману (Kalman J. A. — Proc. AMS, 1956, 7, p. 931—932).

Используя (25′), прямыми вычислениями находим:

$$|(a \vee c) - (b \vee c)| + |(a \wedge c) - (b \wedge c)| =$$
$$= (a \vee c) \vee (b \vee c) - (a \vee c) \wedge (b \vee c) +$$
$$+ (a \wedge c) \vee (b \wedge c) - (a \wedge c) \wedge (b \wedge c) =$$
$$= (a \vee b) \vee c - (a \wedge b) \vee c + (a \vee b) \wedge c - (a \wedge b) \wedge c =$$
$$= a \vee b - (a \vee b) \wedge c + c - (a \wedge b) \vee c + (a \vee b) \wedge c -$$
$$- c + (a \wedge b) \vee c - a \wedge b =$$
$$= a \vee b - [(a \wedge b) \vee c - c + (a \vee b) \wedge c] +$$
$$+ [(a \vee b) \wedge c - c + (a \wedge b) \vee c] - a \wedge b =$$
$$= a \vee b - a \wedge b \text{ (в силу (25′))}.$$

Заметим, наконец, что в любой l-группе

$$|b + c| \leqslant |b| + |c| + |b|, \tag{26}$$

поскольку $-|b| - |c| - |b| \leqslant b + c + 0 = b + c \leqslant |b| + |c| + |b|$.

Упражнения к §§ 3—4

1. Дайте подробное доказательство того, что в примерах 1—2 и 4—5 в самом деле получаются l-группы.

2. Докажите, что у-группа из примера 3 является l-группой тогда и только тогда, когда каждый множитель G_φ является l-группой, и что то же самое верно для ограниченных прямых произведений.

3. Покажите, что если в l-группе $x, y \geqslant 0$, то $a \wedge (x + y) \leqslant (a \wedge x) + (a \wedge y)$.

4. Покажите, что в любой коммутативной l-группе отображение $x \longmapsto nx$ при любом положительном целом n является вложением группы A в себя по отношению ко всем операциям l-группы.

5. Дайте подробное доказательство равенства $2a^+ = 0 \vee a \vee 2a$ в произвольной l-группе.

6. Докажите, что $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ с порождающим $(1, -1)$ является свободной l-группой с одним порождающим.

*7. Покажите, что из равенства $2f = 2g$ (в мультипликативном обозначении $f^2 = g^2$) в l-группе, рассмотренной в примере 5, не следует, что $f = g$.

8. Докажите, что центр любой l-группы является l-группой и что централизатор $Z(S)$ любой l-подгруппы произвольной l-группы G сам является l-подгруппой в G.

9. Покажите, что если в l-группе $x \leqslant a + b$, где a, b, x положительны, то $x = s + t$, где $s \in [0, a]$ и $t \in [0, b]$.

*10. Покажите, что формулы (16)—(16′) выполняются в любой у-группе, удовлетворяющей свойству, сформулированному в упр. 9[1]).

*11. Пусть в группе G унарная операция $x \longmapsto x^+$ удовлетворяет условиям $0^+ = 0$, $x = x^+ - (-x)^+$, $x + y^+ - x = (x + y - x)^+$ и $(x^+ - y)^+ + y = (y^+ - x)^+ + x$. Покажите, что G — l-группа (Вайда).

---

[1]) Упр. 9—10 связаны с интерполяционным свойством Риса — см. работы Риса [1] и Биркгофа [6, теоремы 49—50].

5*. Решеточно упорядоченные лупы

Некоторые разделы теории l-групп не связаны с ассоциативностью сложения. Поэтому мы определим *у-квазигруппу* [1]) как у-множество G, которое одновременно является квазигруппой (§ VII.2), причем все квазигрупповые трансляции $x \mapsto a + x$ и $x \mapsto x + b$ представляют собой порядковые *автоморфизмы*. Здесь уже недостаточно требовать изотонности (см. ниже упр. 10). У-квазигруппа называется *у-лупой*, если как квазигруппа она является лупой (т. е. имеет единицу и все ее элементы обратимы). У-квазигруппа (у-лупа), являющаяся как у-множество решеткой, называется l-квазигруппой (соответственно l-лупой).

Пример 7. Пусть функция F: $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ непрерывна и удовлетворяет условиям $F(x, 0) = F(0, y) = 0$ и $-1 < \partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y < 0$. Тогда $\mathbf{R}$ является l-лупой относительно «сложения» $x \circ y = x + y + F(x, y)$.

Можно показать, что при подходящей расстановке скобок тождества (7)—(11) выполняются в любой l-квазигруппе.

Теорема 9. *Любая l-лупа является дистрибутивной решеткой, в которой выполняются свойства* (16)—(16′). *В любой коммутативной l-лупе имеет место* (14).

Различные другие свойства l-луп приведены в упражнениях.

Упражнения

1. Пусть φ — порядковый автоморфизм действительного поля $\mathbf{R}$. Покажите, что операция $a \circ b = \varphi^{-1}(\varphi(a) + \varphi(b))$ определяет на $\mathbf{R}$ структуру l-лупы.

2. Покажите, что в примере 7 в самом деле получается l-лупа.

3. Докажите обращение результатов упр. 1—2 (если необходимо, предполагая сложение в лупе непрерывно дифференцируемым).

4. Покажите, что любая полная дискретная линейно упорядоченная l-лупа изоморфна $\mathbf{Z}$ и, следовательно, является l-группой.

5. Докажите, что в любой l-квазигруппе выполняются подходящие варианты свойств (7)—(11).

6. Докажите, что любая l-лупа является дистрибутивной решеткой, в которой выполняются условия (14) и (16)—(16′). Верно ли это для каждой l-квазигруппы?

7. Докажите, что в любой l-лупе [2]) $a \vee b = [a - (a \wedge b)] + b$ и $(a \vee b) - (a \wedge b) = (a - b) \vee (b - a)$.

8. Докажите, что в любой l-лупе дизъюнктные положительные элементы перестановочны и их объединение совпадает с их суммой.

*9. Покажите, что l-лупы образуют эквациональный класс алгебр. А что можно сказать об l-квазигруппах?

*10. На кардинальном произведении $H \times K$ двух l-групп определите равенством $(h, k) \oplus (h', k') = (h + h', k + k' + f(h, h'))$ «сложение» $\oplus$, превращающее $H \times K$ в лупу, трансляции которой были бы изотонны, но *не* являлись бы порядковыми автоморфизмами.

---

[1]) Теория l-квазигрупп была основана Зелинским (Zelinski D. — Bull. AMS, 1948, 54, p. 175—183) и Капланским (Kaplanski I.). Приводимые здесь результаты были получены Ингрехемом (Ingraham E. C.) при консультациях с автором.

[2]) Минус обозначает левый (или правый) противоположный элемент. — *Прим. ред. и перев.*

6. Дискретные l-группы

Можно рассмотреть класс всех «дискретных» или «атомных»[1]) l-групп, в которых, по определению, положительный конус удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей (УУЦ) из § VIII.1:

(УУЦ) каждое непустое множество положительных элементов имеет минимальный элемент.

Например, для любого кардинального числа $\aleph$ *ограниченное прямое произведение* (§ 1) $\aleph$ экземпляров аддитивной группы $\mathbf{Z}$ целых чисел является l-группой $(\mathbf{Z}^{\aleph})$, положительный конус которой удовлетворяет УУЦ. Теперь мы покажем, что других дискретных l-групп нет.

В любой дискретной l-группе L минимальные элементы множества всех *строго* положительных элементов будут покрывать 0; мы назовем их *простыми*. Поскольку любые два простые элемента p и q дизъюнктны, они перестановочны (теорема 6). Отсюда:

Л е м м а 1. *Простые элементы порождают абелеву подгруппу, состоящую из всех элементов, которые можно представить в виде сумм $n_1p_1 + \cdots + n_sp_s$ конечного числа различных простых элементов, умноженных на целые коэффициенты n_i.*

Если $a > 0$, то множество положительных разностей $a - \sum n_ip_i$ содержит a и потому не пусто. Вследствие УУЦ это множество имеет минимальный элемент m. Далее, ввиду УУЦ каждый строго положительный элемент a содержит простой элемент, а именно некоторый минимальный x такой, что $0 < x \leqslant a$. Если q было бы таким простым элементом для m, то мы получили бы, что

$$0 \leqslant m - q = a - (\sum n_ip_i + q) < m,$$

а это противоречит минимальности m. Значит, элемент m должен равняться 0, так что $a = \sum n_ip_i$ для любого $a \in L$.

Но каждый элемент можно представить в виде разности положительных элементов: $c = c^+ - (-c)^+$ для всех c. Следовательно, имеет место

Л е м м а 2. *Каждый элемент $a \in L$ принадлежит подгруппе, описанной в лемме* 1.

Случай $a = 0$ тривиален.

Теперь любой элемент $a \neq 0$ в L можно записать в виде

$$a = m_1p_1 + \cdots + m_rp_r - n_1q_1 - \cdots - n_sq_s, \tag{27}$$

где все числа m_i и n_j *положительны*, а p_i, q_j — различные простые элементы. При этом $a \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда множество элементов q_j пусто, поскольку

$$(m_1p_1 + \cdots + m_rp_r) \perp (n_1q_1 + \cdots + n_sq_s).$$

---

[1]) В другой терминологии — *l-группы с условием минимальности*. — *Прим. перев.*

Наконец, порядок в L совпадает с порядком в ограниченном прямом произведении копий l-группы $\mathbf{Z}$, взятых по одной для каждого простого элемента (атома) p из L. Этим доказана

Теорема 10. *Положительный конус l-группы удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей тогда и только тогда, когда она является ограниченным прямым произведением* $(\mathbf{Z}^{\aleph})$ *подходящего множества экземпляров l-группы* $\mathbf{Z}$.

7. Линейно упорядоченные группы [1]

В любой линейно упорядоченной группе (§ 1) каждый элемент a, очевидно, является либо положительным, либо отрицательным, либо, наконец, равняется 0. В силу следствия 1 из теоремы 3 в любой l-группе G каждый элемент имеет бесконечный порядок. Докажем, что в случае *коммутативных* l-групп этот результат допускает очень сильное обращение.

Теорема 11 (Леви). *Любую свободную от кручения* [2] *абелеву группу A можно превратить в линейно упорядоченную группу.*

Доказательство. В группе, удовлетворяющей условию, уравнение $nx = mx$ имеет не более одного решения. В самом деле, если $nx = ny$, то $n(x - y) = 0$, откуда $x = y$. Если же $nx = mx$ имеет решение, то, обозначив его через $(m/n)\,a$, заметим, что все законы векторной алгебры выполняются для умножения на так определенные *рациональные* скаляры.

Под вполне упорядоченным *рациональным базисом* для A будем понимать вполне упорядоченное (конечное или бесконечное) подмножество множества A, состоящее из элементов a_α таких, что каждый ненулевой элемент группы A является рациональной комбинацией

$$n_1a_{\alpha(1)} + \cdots + n_ra_{\alpha(r)} \qquad (\text{где } \alpha(1) < \cdots < \alpha(r))$$

этих элементов a_α, причем если $\sum n_ia_{\alpha(i)} = 0$, то каждое $n_i = 0$, или, что равносильно, если $\sum (m_i/n_i)\,a_{\alpha(i)} = 0$, то каждое $m_i/n_i = 0$. Существование вполне упорядоченного рационального базиса можно доказать непосредственно, поскольку, например, любое максимальное вполне упорядоченное рационально независимое подмножество будет базисом. Наконец, по отношению к такому базису любой элемент из A, отличный от 0, можно назвать положительным или отрицательным в зависимости от знака первого ненулевого коэффициента m_i/n_i. Это лексикографическое упорядочение группы A и определяет на ней структуру линейно упорядоченной группы.

---

[1] См. монографию: Кокорин А. И., Копытов В. М. Линейно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1972. — *Прим. ред.*

[2] Напомним, что абелева группа называется *свободной от кручения*, если все ее элементы, кроме 0, имеют бесконечный порядок.

Следствие. *Коммутативная группа тогда и только тогда является аддитивной группой некоторой l-группы, когда она свободна от кручения.*

Заметим, что описанная выше конструкция дает *архимедову* линейно упорядоченную группу (см. § 2) тогда и только тогда, когда исходная группа A изоморфна подполю рационального поля $\mathbf{Q}$. Но есть много и других архимедовых линейно упорядоченных групп, даже несчетных. Например, любая подгруппа действительного поля $\mathbf{R}$ является архимедовой линейно упорядоченной группой. Сейчас мы докажем, что других архимедовых линейно упорядоченных групп нет. Доказательство это, по существу, пересказывает абстрактную теорию «величин»[1]).

Лемма 1. *l-группа G является архимедовой тогда и только тогда, когда она целозамкнута.*

Доказательство. По лемме 4 из § 2 любая целозамкнутая l-группа архимедова. Обратно, пусть G архимедова и $na \leqslant b$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$. Тогда, как в доказательстве теоремы 8, $na^+ = (na)^+ = na \vee 0 \leqslant b \vee 0$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$. Но $na^+ \leqslant 0 \leqslant b^+$ для $n = 0, -1, -2, \ldots$; значит, $na^+ \leqslant b^+$ для $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Так как G архимедова, мы заключаем отсюда, что $a^+ = 0$, и следовательно, $a = a^+ + a^- \leqslant 0$. Ч. т. д.

Теперь определим *сильную единицу* у-группы G как элемент e такой, что для любого $a \in G$ и подходящего $n = n(a)$ выполняется неравенство $ne > a$.

Лемма 2. *Линейно упорядоченная группа G тогда и только тогда архимедова, когда каждый ее элемент $e > 0$ является сильной единицей.*

Доказательство. Если $e > 0$ — сильная единица, то при $a \neq 0$ для каждого b и подходящего n будет $n|a| > b$, но $|a| = \pm a$, поэтому $(\pm n)a > b$ при некотором n, откуда следует архимедовость группы G. Обратно, если G архимедова, то, по лемме 1, невозможно, чтобы было $ne \leqslant b$ для всех n, поэтому для любого $e > 0$ будет $ne > b$ при подходящем n, и следовательно, e — сильная единица.

Лемма 3. *В любой линейно упорядоченной группе, если $na \geqslant nb$, то $a \geqslant b$, и следовательно, если $na = nb$, то $a = b$.*

Доказательство. Если не будет $a \geqslant b$, то $a < b$, откуда $na < nb$, поскольку сложение сохраняет порядок. Получили противоречие с условием.

Напомним, что в примере 5 § 2 $2a \geqslant 2b$ не влечет $a \geqslant b$. Поскольку квазитождества сохраняются при образовании подпрямых произведений (теорема VI.18), отсюда следует, что l-группа из упр. 5 *не* может быть представлена в виде подпрямого произведения линейно упорядоченных групп. Это тем более примечатель-

[1]) Гёльдер [1, р. 1—64; особенно с. 13—14]. Более поздние источники указаны в [LT2, сноска на с. 312].

но, поскольку каждая коммутативная l-группа является подпрямым произведением линейно упорядоченных групп (см. § 11).

Теорема 12 (Гёльдер [1]). *Любая линейно упорядоченная архимедова группа G изоморфна подгруппе аддитивной группы всех действительных чисел и потому коммутативна.*

Доказательство. Пусть $e > 0$ — произвольный элемент. Для любого $a \in G$ определим $L(a)$ как множество всех рациональных дробей m/n (где $n > 0$) таких, что $me \leqslant na$, и $U(a)$ как множество всех m/n с условием $me \geqslant na$.

Лемма 4. *Для любого $a \in G$ имеют место следующие соотношения: $L(a) \neq \varnothing$, $U(a) \neq \varnothing$, $L(a) \cup U(a) = \mathbf{Q}$ (рациональное поле) и если $r \in L(a)$, $r' \in U(a)$, то $r \leqslant r'$. Другими словами, $L(a)$ и $U(a)$ определяют дедекиндово сечение.*

Доказательство. Поскольку G линейно упорядочена, то $me \leqslant na$ или $me \geqslant na$; следовательно, каждое число $m/n = r \in \mathbf{Q}$ лежит в $L(a)$ или в $U(a)$. Поэтому, если $L(a) = \varnothing$, то $U(a) = \mathbf{Q}$ и $-me \leqslant a$ для всех $-m \in \mathbf{Z}$, что невозможно для $e \neq 0$, так как G архимедова. Наконец, при $me \leqslant na$ и $m'e \geqslant n'a$ будет $mn'e \leqslant n'na = nn'a \leqslant nm'e$, или $mn' \leqslant nm'$, поскольку $e > 0$.

Но тогда $m/n \leqslant m'/n'$, так как $nn' > 0$.

Следствие. *Существует изотонное отображение $a \mapsto x(a)$ группы G в аддитивную группу $(\mathbf{R}, +)$, при котором $x(a)$ является действительным числом, соответствующим дедекиндову сечению, построенному в лемме 4.*

Лемма 5. *Отображение $a \mapsto x(a)$ является групповым вложением.*

Доказательство. Для доказательства неравенства $x(a+b) \geqslant x(a) + x(b)$ достаточно установить, что если $m/n \in L(a)$ и $m'/n \in L(b)$, то $(m+m')/n \in L(a+b)$. Но в самом деле, если $me \leqslant na$ и $m'e \leqslant nb$, то

$$(*) \qquad (m+m')e \leqslant na + nb \text{ и } (m'+m)e \leqslant nb + na.$$

С другой стороны, если $a + b \leqslant b + a$, то $na + nb \leqslant n(a+b)$, и в то же время, если $b + a \leqslant a + b$, то $nb + na \leqslant n(a+b)$. Следовательно, в любом случае $(m'm)e = (m'+m)e \leqslant n(a+b)$ и, таким образом, $(m+m')/n \in L(a+b)$.

Значит, $x(a+b) \geqslant x(a) + x(b)$. Двойственно доказывается, что $x(a+b) \leqslant x(a) + x(b)$. Для этого нужно сначала установить включение $U(a) + U(b) \subset U(a+b)$. В результате мы получаем заключение леммы 5: $x(a+b) = x(a) + x(b)$.

Чтобы завершить доказательство теоремы 12, достаточно показать, что ядром гомоморфизма является 0, т. е. что если $x(a) = 0$, то $a = 0$. Но если $x(a) = 0$, то для любого положительного целого n будет $-e \leqslant na \leqslant e$, откуда $a = 0$ в силу архимедовости G.

Упражнения к §§ 6—7

1. Покажите, что l-группа линейно упорядочена тогда и только тогда, когда любые два ее строго положительных элемента имеют строго положительную нижнюю грань.

2. Покажите, что l-группа дискретна тогда и только тогда, когда она локально конечна (т. е. каждый ее интервал $[a, b]$ конечен).

*3. Покажите, что если l-группа G архимедова и ее коммутант содержится в центре, то G коммутативна (Эверет и Улам [1, р. 210]).

*4. Покажите, что в любой линейно упорядоченной группе $-a-b+a+b \ll |a|+|b|$, но что это неравенство не имеет места в примере 5 из § 2.

*5. Покажите, что любая абелева группа, содержащая элемент бесконечного порядка, может быть превращена в направленную группу (Е. П. Шимбирева).

6. Докажите, что в любой линейно упорядоченной группе смежные классы по подгруппе, которая *не* является нормальной, образуют бесконечную цепь.

*7. Докажите, что автоморфизмы любой архимедовой линейно упорядоченной группы образуют группу, изоморфную подгруппе группы $(\mathbf{R}, +)$.

*8. Докажите, что из каждой счетной линейно упорядоченной группы можно построить абелеву линейно упорядоченную группу, имеющую тот же порядковый тип (т. е. порядково изоморфную ей) [1]).

*9. Группа G называется циклически линейно упорядоченной, если на тройках (a, b, c) различных элементов определено тернарное отношение β такое, что (i) имеет место в точности одно из соотношений $(a, b, c)\ \beta$ или $(a, c, b)\ \beta$; (ii) если $(a, b, c)\ \beta$, то $(c, b, a)\ \beta$; (iii) если $(a, b, c)\ \beta$ и $(a, c, d)\ \beta$, то $(a, b, d)\ \beta$; (iv) отношение β устойчиво относительно групповых трансляций. Докажите, что в любой циклически линейно упорядоченной группе G элементы конечного порядка образуют подгруппу центра группы G, изоморфную подгруппе циклически линейно упорядоченной группы рациональных чисел по mod 1 (Ригер).

8*. Линейно упорядочиваемые группы

Линейно упорядоченная группа не обязана быть коммутативной. Например, группа всех линейных преобразований $f\colon x \mapsto ax+b$ (где $a>0$; $a, b \in \mathbf{R}$) с операцией их умножения становится линейно упорядоченной группой, если задать ее положительный конус P условием

$f \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда либо $a>1$, либо $a=1$ и $b \geqslant 0$.

Другую (не архимедову ввиду теоремы 12) некоммутативную линейно упорядоченную группу описывает следующий

Пример 8. Пусть G — нильпотентная группа с тремя порождающими a, b, c бесконечного порядка и определяющими соотношениями $a+c=c+a$, $b+c=c+b$ и $b+a=a+b+c$. Тогда каждый $x \in G$ может быть однозначно представлен в виде $x=ma+nb+rc$ (где $m, n, r \in \mathbf{Z}$). Пусть $x \geqslant 0$ означает, что либо $m>0$, либо $m=0$ и $n>0$, либо, наконец, $m=n=0$ и $r \geqslant 0$. При этом выборе положительного конуса G превращается в линейно упорядоченную группу.

---

[1]) Мальцев А. И. — Изв. АН СССР, 1949, 13, с. 473—482. Ответы на многие из приводимых упражнений можно найти в книге [Fu].

Интересный вопрос, которым занимались Леви, Нейман и Фукс [1]), состоит в следующем. Какие абстрактные группы G можно превратить в линейно упорядоченные группы подходящим выбором положительного конуса $G^+ = P$? Такие группы называются *линейно упорядочиваемыми* (или *O-группами*).

По лемме 3 из § 7 группа G не является линейно упорядочиваемой, если она содержит два различные элемента a и b такие, что $na = nb$ для некоторого ненулевого $n \in \mathbf{Z}$. Такова группа, описанная в примере 6. Зато в силу теоремы 11 каждая свободная от кручения абелева группа допускает линейную упорядоченность. На самом деле можно доказать большее: что любая свободная от кручения абелева у-группа может быть превращена в линейно упорядоченную группу усилением имеющегося в ней порядка [2]).

Следовательно, абелева группа линейно упорядочиваема тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию

(28) $$\text{если } na = nb \text{ (где } n \neq 0\text{), то } a = b.$$

Однако это условие (хотя и необходимое) не является достаточным для линейной упорядочиваемости неабелевой группы.

Лемма (Нейман). *В линейно упорядочиваемой группе*

(29) *если* $ma + nb = nb + ma$ *(где* $m, n \in \mathbf{Z} - \{0\}$*), то* $a + b = b + a$.

Доказательство. Пусть в у-группе $a + b > b + a$. Тогда по лемме 1 из § 1 подстановка в некоторое выражение суммы $a + b$ вместо $b + a$ *увеличит* его значение. В частности, mn такими подстановками, где m и n — произвольные *положительные* числа, можно из $nb + ma$ получить $ma + nb$; следовательно, если $a + b > b + a$, то $ma + nb > nb + ma$ для любых положительных целых m, n. С другой стороны, если $a + b > b + a$, то $b + (-a) > (-a) + b$ и т. д.; значит, из $a + b > b + a$ следует, что $ma + nb \neq nb + ma$ для любых ненулевых $m, n \in \mathbf{Z}$.

В *линейно* упорядоченной группе, если $a + b \neq b + a$, то $a + b > b + a$ или $b + a > a + b$. В обоих случаях рассуждения из предыдущего абзаца показывают, что $ma + nb \neq nb + ma$, каковы бы ни были ненулевые $m, n \in \mathbf{Z}$.

Следствие. *Пусть группа G имеет два порождающих a и b бесконечного порядка и пусть $(-a) + b + a = -b$. Тогда G не допускает линейной упорядоченности.*

Дело в том, что в такой группе, если $nx = ny$, то $x = y$ при любом ненулевом $n \in \mathbf{Z}$. Мы опускаем детали.

---

[1]) Levi F. W. — Proc. Ind. Acad. Sci., 1942, **16**, p. 256—263; 1943, **17**, p. 199—201; Neumann B. H. — Amer. J. Math., 1949, **71**, p. 1—18; Fuchs L. — Fund. Math., 1958, **46**, p. 168—174.

[2]) Эта теорема принадлежит Лоренцену (Lorenzen P. — Math. Z., 1939, **45**, p. 533—553). Доказательство ее и ссылки см. в [Fu, § III.4].

Теорема 13 (Шимбирева[1]), Нейман). *Если группа G обладает вполне упорядоченным центральным рядом, заканчивающимся единицей и таким, что все фактор-группы $G_\alpha/G_{\alpha+1}$ свободны от кручения, то G линейно упорядочиваема.*

Мы дадим лишь набросок доказательства для теорем 13 и 14 (детали см. в книге [Fu, § IV.2]).

Набросок доказательства. Фактор-группы $G_\alpha/G_{\alpha+1}$ абелевы и свободны от кручения, поэтому они линейно упорядочиваемы. Выберем положительный конус $P_\alpha/G_{\alpha+1}$ в каждой $G_\alpha/G_{\alpha+1}$. Тогда, каков бы ни был ненулевой $x \in G$, найдется первое α такое, что $x \in G_\alpha$, поскольку $\bigcap G_\alpha = 0$. Положим $x > 0$, если $x \in P_\alpha$ для $\alpha = \alpha(x)$, и $x < 0$ в противном случае (т. е. положим $P = \bigcap (P_\alpha - G_{\alpha+1})$). Тем самым G превращается в линейно упорядоченную группу.

Теорема 14. *Каждая свободная группа линейно упорядочиваема.*

Набросок доказательства. Пусть в свободной группе G с $\aleph$ порождающими $[G, G] = G_1$ и $G_{n+1} = [G, G_n]$, где $[H, K]$ обозначает подгруппу, порожденную всеми коммутаторами $x^{-1}y^{-1}xy$, где $x \in H$, $y \in K$. Тогда по теореме Магнуса и Витта[2]) $\bigcap G_n = 0$ (групповая единица). Доказываемое утверждение следует теперь из теоремы 13.

Упражнения

1. Покажите, что любая линейно упорядоченная группа G, решетка конгруэнций которой имеет конечную длину n, изоморфна аддитивной подгруппе лексикографически упорядоченного векторного пространства ${}^n\mathbf{R}$.

2. Покажите, что если линейно упорядоченная группа G связна в интервальной топологии, то она изоморфна $(\mathbf{R}, +)$ (Исеки).

3. Покажите, что каждая линейно упорядоченная группа G является порядково-гомоморфным образом линейно упорядоченной свободной группы.

4. (а) Покажите, что каждая счетная линейно упорядоченная группа вкладывается в линейно упорядоченную группу с двумя порождающими (Нейман[3]).

(б) Покажите, что каждая разрешимая счетная линейно упорядоченная группа, коммутантный ряд которой имеет длину l, вкладывается в разрешимую линейно упорядоченную группу с двумя порождающими, коммутантный ряд которой имеет длину не большую, чем $l + 2$.

*5. (а) Постройте линейно упорядоченную группу, совпадающую со своим коммутантом (Нейман).

(б) Постройте простую линейно упорядоченную группу (Чехата).

6. Покажите, что группа Aut C всех порядковых автоморфизмов цепи C линейно упорядочиваема тогда и только тогда, когда она является абелевой[4]).

---

[1]) Шимбирева Е. П. — Матем. сб., 1947, **20**, с. 145—178. Эта работа содержит еще несколько важных результатов.

[2]) Курош А. Г. Теория групп. — М.: Наука, 1967, с. 230. — *Прим. ред.*

[3]) Упр. 4 содержит результаты Неймана (Neumann B. H. — J. London Math. Soc., 1960, **35**, p. 503—512); по поводу упр. 5 (а) см. его работу в Amer. J. Math., 1949, **71**, p. 1—18, а по поводу упр. 5 (б) — в Proc. London. Math Soc., 1952, **2**, p. 183—197.

[4]) Кон (Cohn P. M. — Mathematika, 1957, **4**, p. 41—50).

9. Конгруэнции. l-идеалы

Теперь рассмотрим l-гомоморфизмы $\varphi: G \to H$ l-группы G в l-группу H. Как и в §§ 2—3 главы II, любой l-гомоморфизм является o-гомоморфизмом, но o-гомоморфизм не обязан быть l-гомоморфизмом. Поскольку класс l-групп эквационально определим, образ $\varphi(G)$ l-группы при любом l-гомоморфизме определяется с точностью до *изоморфизма* (как группа *и* как решетка) самой G и конгруэнцией, индуцируемой отображением φ. Следовательно (теория групп), он определяется *ядром* этого отображения: полным прообразом $N = \varphi^{-1}(0)$ нейтрального элемента $0 \in N$; при этом N обязательно будет нормальной подгруппой в G.

Прежде всего охарактеризуем нормальные подгруппы данной l-группы G, которые являются ядрами ее l-гомоморфизмов.

Определение. *l-идеалом* l-группы G называется нормальная подгруппа в G, которая вместе со всяким элементом a содержит и все x такие, что $|x| \leqslant |a|$.

Понятно, что G и 0 являются l-идеалами в G. Это несобственные l-идеалы, а все другие l-идеалы l-группы называются ее собственными l-идеалами. Пусть теперь N — некоторый l-идеал в G и $a, b \in N$. Если $a \wedge b \leqslant x \leqslant a \vee b$, то

$$|x| = x \vee -x \leqslant (a \vee b) \vee -(a \wedge b) = a \vee b \vee -b \vee -a = \\ = |a| \vee |b| \leqslant |a| + |b|.$$

Следовательно, $x \in N$ и, таким образом, любой l-идеал l-группы яляется ее *выпуклой* l-подгруппой. Обратно, поскольку любая нормальная l-подгруппа в G содержит вместе с элементом a также 0, $-a$ и $a \vee -a = |a|$, то любая выпуклая нормальная l-подгруппа будет l-идеалом. Итак, l-идеалы l-группы G совпадают с ее выпуклыми нормальными l-подгруппами.

Теорема 15. *Конгруэнциями l-группы G являются в точности разбиения, определяемые ее различными l-идеалами.*

Доказательство. Пусть N — множество элементов, конгруэнтных с 0. Тогда, если $a \in N$ и $|x| \leqslant |a|$, то $a \wedge -a \leqslant x \leqslant a \vee -a$; следовательно, $0 \wedge 0 \leqslant x \leqslant 0 \vee 0 \equiv 0 \pmod N$, так что $x \in N$. Обратно, если N — l-идеал и $x \equiv x' \pmod N$, то $|(x \vee y) - (x' \vee y)| \leqslant |x - x'|$ в силу (24) и потому $x \vee y \equiv x' \vee y \pmod N$. Используя симметричность и двойственность, заключаем, что разбиение l-группы G, определяемое l-идеалом N, обладает свойством подстановки относительно обеих решеточных операций, чем и завершается доказательство.

Теорема 16. *Конгруэнции любой l-группы G образуют полную алгебраическую брауэрову решетку $\Theta(G)$.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из теоремы 15 и результатов § VIII.5. Его можно вывести также из того факта (теорема VI.9), что конгруэнции на G как на решетке образуют полную брауэрову решетку $\Theta(G, \wedge, \vee)$, а конгруэнции на G как на l-группе составляют, по теореме VI.8, замкнутую подрешетку $\Theta(G)$ решетки $\Theta(G, \wedge, \vee)$, т. е. тоже брауэрову решетку [1]).

Следствие 1. *l-идеалы любой l-группы G образуют полную алгебраическую брауэрову решетку.*

Заметим, что поскольку $\Theta(G)$ является подрешеткой решетки $\Theta(G, +)$ всех нормальных подгрупп группы G, то

$$J \vee K = J + K = \{x + y\}, \text{ где } x \in J,\ y \in K, \tag{30}$$

для любых двух l-идеалов J и K l-группы G.

Следствие 2. *Дополняемые l-идеалы любой l-группы G образуют булеву подрешетку решетки всех l-идеалов — центр решетки $\Theta(G)$.*

Из следующего результата выводятся многие теоремы теории оценок [2]); поскольку сформулированное в нем условие (*) очевидным образом выполяется для взаимно простых идеалов (так как тогда $N_i + N_j = G$), из него получается также обобщенная китайская теорема об остатках.

Следствие 3 (Накано). *Пусть $N_1, \ldots, N_r$ — l-идеалы -группы G и $a_1, \ldots, a_r$ — такие ее элементы, что*

$$(*) \qquad a_i \equiv a_j \pmod{(N_i + N_j)} \text{ для каждой пары } i, j.$$

Тогда существует элемент $a \in G$ такой, что $a \equiv a_i \pmod{N_i}$ при $i = 1, \ldots, r$.

Доказательство ведется индукцией. Случай $r = 1$ очевиден. Предположим, что G содержит элемент b такой, что $b \equiv a_i \pmod{N_i}$ при $i = 1, 2, \ldots, r-1$. Тогда в силу (*)

$$b \equiv a_i \equiv a_r \pmod{(N_i + N_r)} \text{ для } i = 1, \ldots, r-1;$$

т. е. $a_r - b \in N_i + N_r$ для $i = 1, \ldots, r-1$. Значит, по теореме 16, $a_r - b \in \bigcap_{i=1}^{r-1} (N_i + N_r) = \left(\bigcap_{i=1}^{r-1} N_i\right) + N_r$. Следовательно, существует элемент $c \in \bigcap_{i=1}^{r-1} N_i$ такой, что $a_r - b - c \in N_r$. Полагая $a = c + b$, получаем очевидное $a \equiv a_r \pmod{N_r}$ и $a \equiv b \equiv a_i \pmod{N_i}$ для $i = 1, \ldots, r-1$. Ч. т. д.

---

[1]) Другое доказательство см. у Лоренца (Lorenz K. — Acta Math. Acad. Sci. Hung., 1962, 13, p. 55—67).

[2]) Накано (Nakano T. — Math. Z., 1964, 83, S. 140—146) и там же ссылки.

Теперь будем рассматривать G, главным образом, как группу $(G, +)$. Как в главе VII, представления группы $(G, +)$ в виде конечных прямых объединений *групп* находятся во взаимно однозначном соответствии с конечными булевыми алгебрами нормальных подгрупп относительно операций $\wedge = \cap$, $\vee = +$, с наименьшим элементом 0 и наибольшим G. Но $\Theta(G) = \Theta(G, +, \vee)$ является *замкнутой подрешеткой* решетки $\Theta(G, +)$ (снова теорема VI.8). Таким образом, имеет место

Теорема 17. *Представления любой l-группы G в виде конечного кардинального произведения*

$$G = G_1 \oplus \ldots \oplus G_r \tag{31}$$

находятся во взаимно однозначном соответствии с конечными (булевыми) подалгебрами центра решетки $\Theta(G)$.

Следствие. *Любые два конечные представления l-группы G в виде прямого произведения* (31) *имеют общее уплотнение.*

Представления вида (31) называются «конечными прямыми разложениями» группы G. Что касается *бесконечных* прямых разложений, то мы сформулируем без доказательства следующий результат.

Теорема Шимбиревой. *Любые два прямые разложения направленной группы G имеют общее уплотнение.*

Для лексикографических разложений (определяемых аналогично) имеет место подобный же результат.

Теорема Фукса. *Любые два лексикографические разложения направленной группы имеют общее уплотнение.*

Доказательства этих теорем и связанные с ними обсуждения см. в книге [**Fu**, §§ II. 6—7]. Для случая линейно упорядоченных групп второй из этих результатов был ранее получен А. И. Мальцевым (Изв. АН СССР, 1949, **13**, с. 473—482).

10. Главные l-идеалы

Не представляет труда описать в произвольной l-группе «главные» l-идеалы — те, которые порождаются одним элементом.

Лемма 1. *В любой l-группе G наименьший l-идеал, содержащий данный элемент a, совпадает с множеством всех $x \in G$ таких, что*

$$|x| \leqslant \sum_{i=1}^{n} [-g_i + |a| + g_i] \text{ *для некоторых* } g_1, \ldots, g_n \in G. \tag{32}$$

Набросок доказательства. Если элемент x удовлетворяет неравенству (32), то он должен принадлежать любому l-идеалу l-группы G, содержащему элемент a. Обратно, множество всех x, которые удовлетворяют (32), является l-идеалом в G, ввиду (26) и неравенств из § 4.

Определение. l-идеал, определенный в лемме 1, называется *главным* l-идеалом, порожденным элементом a; он обозначается символом (a). *Главными l-идеалами* l-группы G называются l-идеалы вида (a) для $a \in G$.

Понятно, что $(a) = (|a|)$ для любого $a \in G$. Кроме того, в линейно упорядоченной группе, если $(a) < (b)$, то $|a| \ll |b|$. Обратное утверждение верно в линейно упорядоченных абелевых группах, но не имеет места, например, в линейно упорядоченной группе с порождающими b и a_k (где $k \in \mathbf{Z}$), определяющими соотношениями

(33) $$a_i + a_j = a_j + a_i, \quad -b + a_k + b = a_{k+1} \text{ для всех } k \in Z$$

и упорядоченностью, задаваемой условиями

(33′) $$a_k \gg a_{k+1} > 0 \text{ и } b \gg a_k \text{ для всех } k \in Z.$$

Лемма 2. *Объединение любых двух главных l-идеалов l-группы G является главным l-идеалом в G:*

(34) $$(a) + (b) = (|a| + |b|).$$

Доказательство. Очевидно, что $|a| + |b| \in (a) + (b) = (a) \vee (b)$, откуда $(|a| + |b|) \subset (a) \vee (b)$. Обратно, $(a) \subset (|a| + |b|)$ и $(b) \subset (|a| + |b|)$, и значит, $(a) \vee (b) \subset (|a| + |b|)$.

Теорема 18. *Компактными элементами решетки $\Theta(G)$ являются главные l-идеалы l-группы G.*

Доказательство. Как в теореме VIII.7, компактными элементами будут *конечно порожденные* l-идеалы[1]) в G. Но по предыдущей лемме 2 таковыми будут в точности главные l-идеалы l-группы G.

Теперь применим результаты § V.11 к полной брауэровой (алгебраической) решетке $\Theta(G)$. Назовем два l-идеала J и K l-группы G *независимыми* (в обозначениях $J \perp K$), если $J \wedge K = 0$. Положим J^* равным объединению $\bigvee K_\alpha$ всех l-идеалов K_α таких, что $J \wedge K_\alpha = 0$; очевидно, что J^* является множеством всех $x \in G$ таких, что $|a| \wedge |x| = 0$ для всех $a \in J$. По теореме Гливенко V.26 отображение $J \mapsto (J^*)^*$ является *решеточным гомоморфизмом* решетки $\Theta(G)$ на муровское семейство всех «замкнутых» l-идеалов l-группы G. Другими словами, нами доказана

Теорема 19. *Для любого l-идеала J l-группы G пусть J^* обозначает множество всех $x \in G$ таких, что $|a| \wedge |x| = 0$ при всех $a \in J$. Тогда соответствие $J \mapsto J^*$ будет инволютивной связью Галуа на $\Theta(G)$ и дуальным решеточным гомоморфизмом решетки $\Theta(G)$ на решетку всех «замкнутых» l-идеалов l-группы G.*

Упражнения к §§ 9—10

1. (а) Докажите, что если H и K — l-идеалы l-группы G, то $H \cap K$ и $H + K$ также будут ее l-идеалами.

[1]) Заметим, что l-идеал l-группы G является «подалгеброй» в G относительно унарных операций $x \mapsto |x|$, $x \mapsto -x$, $x \mapsto (-g) + x + g$ (где $g \in G$) и бинарной операции $x + y$.

(б) Проверьте тождества $H \cap K = H \wedge K$ и $H + K = H \vee K$.

2. Дайте прямое доказательство следующего утверждения; если H, J, K — произвольные l-идеалы l-группы G, то $H \cap (J + K) = (H \cap J) + (H \cap K)$. (Указание. Используйте упр. 3 к § 4.)

3. Покажите, что для решеток конгруэнций l-групп выполняются равенства

$$\Theta(GH) = \Theta(G)\,\Theta(H) \text{ и } \Theta(G \circ H) = \Theta(G) \oplus \Theta(H)$$

(здесь GH обозначает прямое произведение групп и решеток).

4. Покажите, что в $\Theta(\mathbf{R} \circ \mathbf{R}^2)$ множество замкнутых l-идеалов не будет центром: они образуют булеву решетку, не являющуюся подрешеткой.

5. Покажите, что подмножество l-группы является l-идеалом тогда и только тогда, когда оно представляет собой подалгебру относительно бинарной операции $+$ и унарных операций $x \mapsto |x|$, $x \mapsto -x$ и (для каждого $g \in G$) $x \mapsto T_g(x) = (-g) + x + g$.

6. Докажите, что выпуклая нормальная подгруппа l-группы является l-идеалом тогда и только тогда, когда она направлена.

7. Покажите, что l-идеалы любой атомной l-группы образуют атомно порожденную булеву алгебру.

8. Покажите, что каждый дополняемый l-идеал замкнут.

9. Назовем направленную l-группу *нормальной*, если для любого $a > 0$ множество всех x таких, что $|x| \leqslant na$ при некотором $n \in \mathbf{Z}^+$, является нормальной подгруппой. Покажите, что l-группа нормальна тогда и только тогда, когда каждый элемент $a > 0$ является сильной единицей некоторого (главного) l-идеала.

*10. Постройте простую l-группу, не являющуюся линейно упорядоченной [1]).

11. Коммутативные l-группы. Единицы

Многие из наиболее важных l-групп коммутативны. Например (§ 14), *каждая* полная l-группа коммутативна. Коммутативные l-группы обладают некоторыми специфическими свойствами и упрощающими их изучение особенностями.

Лемма 1 (Келман). *l-группа G коммутативна тогда и только тогда, когда*

(35) $$|a + b| \leqslant |a| + |b| \text{ для всех } a, b \in G.$$

Доказательство. В любой l-группе $a + b \leqslant |a| + |b|$, вследствие изотонности, и $-(a + b) = (-b) + (-a) \leqslant |b| + |a|$. Если G коммутативна, то $|a| + |b| = |b| + |a|$, и отсюда следует (35). Обратно, если (35) выполняется для всех отрицательных $a = -c$, $b = -d$ (где $c, d \geqslant 0$), то $-(a + b) = d + c \leqslant c + d$ для всех $c, d \in G^+$. Аналогично $c + d \leqslant d + c$, откуда $c + d = d + c$: все положительные элементы перестановочны. Следовательно,

$$x + y = x^+ - (-x)^+ + y^+ - (-y)^+ = \\ = y^+ - (-y)^+ + x^+ - (-x)^+ = y + x$$

для всех $x, y \in G$, и значит, G коммутативна.

---

[1]) Холанд (Holland C. — Proc. AMS, 1965, **16**, p. 326—329).

Лемма 2. *В коммутативной l-группе G для любого $a \in G$ главный идеал (a) совпадает с множеством всех $x \in G$ таких, что для некоторого положительного целого n*

(36) $$|x| \leqslant n|a| = |a| + \ldots + |a| \text{ (}n\text{ слагаемых).}$$

Доказательство. Если G коммутативна, то для всех $g_i \in G$ имеем $-g_i + |a| + g_i = |a|$. А затем используется (32).

Следствие. *В коммутативной l-группе $(a) \wedge (b) = 0$ тогда и только тогда, когда $|a| \wedge |b| = 0$.*

Лемма. 3. *В коммутативной l-группе G для любого $a \in G$ множество $\perp a$ всех x таких, что $|a| \wedge |x| = 0$, является l-идеалом.*

Доказательство. По теореме 4, если $x \in \perp a$ и $y \in \perp a$, то

$$0 \leqslant |a| \wedge |x \pm y| \leqslant |a| \wedge (|x| + |y|) = 0.$$

Значит, $\perp a$ является подгруппой в G. Кроме того, если $x \in \perp a$ и $|y| \leqslant |x|$, то очевидно, что

$$0 \leqslant |a| \wedge |y| \leqslant |a| \wedge |x| = 0.$$

Следовательно, $\perp a$ является l-идеалом в G.

Пусть в произвольной l-группе $a \perp b$ (читают: a и b *дизъюнктны*) означает, что $|a| \wedge |b| = 0$. Мы только что показали, что если *G коммутативна*, то множество $\perp a$ всех $x \perp a$ является l-идеалом. Теперь покажем, что $\perp a$ — *замкнутый* l-идеал, и установим связь отношения $a \perp b$ с результатами § 10.

В самом деле, множество $\perp(\perp a) = J(a)$ является в точности псевдодополнением (глава V) l-идеала $\perp(a)$ в смысле теоремы 19; следовательно, оно будет *замкнутым* l-идеалом. Вообще, *полярой* (глава V) произвольного множества $A \subset G$ относительно симметричного отношения $a \perp b$ является пересечение $A^{\perp} = \bigcap \perp a_\alpha$ l-идеалов $\perp a_\alpha$ по всем $a_\alpha \in A$; понятно, что это будет l-идеал, а $(A^{\perp})^{\perp}$ — дополняемый l-идеал. Следовательно, l-идеалом является и $((A^{\perp})^{\perp})^{\perp} = A^{\perp}$ и нами доказана

Теорема 20. *В любой коммутативной l-группе G множества, «замкнутые» относительно полярности, определяемой симметричным отношением $a \perp b$, образуют булеву решетку.*

Мы уже определили *сильную единицу* у-группы G как элемент $e \in G$ такой, что для любого $a \in G$ существует положительное целое n, для которого $a < ne$. Теперь назовем *слабой единицей* l-группы G элемент $c > O$ такой, что если $c \wedge |x| = 0$, то $x = 0$.

Лемма. 4. *Любая сильная единица является слабой единицей.*

Доказательство. По теореме 3 любая сильная единица положительна. По теореме 4 для любого e, если $e \wedge a = 0$, то $ne \wedge a = 0$ для всех n. Но если e — сильная единица, то

$a \leqslant ne$ при некотором n и потому из $e \wedge a = 0$ следует, что $a = ne \wedge a = 0$, и значит, e — слабая единица.

Не всякая слабая единица будет сильной. Например, в аддитивной l-группе всех непрерывных действительных функций, определенных на $0 \leqslant x < +\infty$, слабой единицей будет $f(x) = 1$, а сильных единиц нет совсем, поскольку ни для каких n и $f(x) \geqslant 0$ не может быть $(f(x) + x)^2 \leqslant nf(x)$ при всех x. С другой стороны, в l-группе всех ограниченных действительнозначных функций на области целостности функция $f(x) = 1$ будет сильной единицей.

Лемма 2 очевидным образом связывает с каждым положительным элементом a коммутативной l-группы G наибольший l-идеал (a), для которого a является *сильной* единицей, в то время как теорема 20 сопоставляет элементу a наибольший l-идеал $J = \perp(\perp a)$, для которого a является *слабой* единицей.

Пусть теперь A — абелева l-группа. Если только A не является линейно упорядоченной, в ней, в силу инвариантности порядка относительно групповых трансляций, должен найтись элемент a такой, что не будут выполняться ни неравенство $a \geqslant 0$, ни неравенство $0 \geqslant a$. Для этого a элементы $a^+ > 0$ и $-a^- > 0$ должны быть дизъюнктными в силу (20). Поэтому $(a^+) \cap (a^-) = 0$, так как если $c \leqslant (a^+) \cap (a^-)$, то $|c| \leqslant na^+$ и $|c| \leqslant n(-a^-)$ для некоторого n, так что

$$|c| \leqslant na^+ \wedge (-na^-) = n(a^+ \wedge (-a^-)) = n0 = 0.$$

Поскольку $(a^+) > 0$ и $(-a^-) > 0$, из теоремы 15 выводится

Теорема 21. *Коммутативная l-группа либо линейно упорядочена, либо подпрямо разложима.*

Из этого результата и теоремы VIII.15 следует

Теорема 22 (Клиффорд). *Всякая коммутативная l-группа является подпрямым произведением линейно упорядоченных l-групп.*

Подпрямые произведения линейно упорядоченных l-групп называются *векторными группами*; теорема Клиффорда утверждает, что каждая коммутативная l-группа является векторной группой. Недавно Холанд доказал [1]), что каждая подпрямо неразложимая *не*коммутативная l-группа изоморфна транзитивной l-подгруппе l-группы всех автоморфизмов некоторой цепи.

Теорема Хана. Пусть A — произвольная линейно упорядоченная абелева группа и пусть $\Theta(A) = C$ — решетка всех ее l-идеалов.

Сначала покажем, что C является цепью. В самом деле, если J, J_1 — какие-нибудь l-идеалы в A и $J \not\subset J_1$, то J содержит положительный элемент $a \notin J_1$. Тогда, каким бы ни был элемент $b \in J_1$, элемент a не может быть ограничен никаким $n|b|$, и значит, $b \ll a$ для всех $b \in J_1$. Поэтому если $J \not\subset J_1$, то $J_1 < J$.

---

[1]) Holland C. — Mich. Math. J., 1963, 10, p. 399—408.

Согласно результатам § VIII.5 C является полной алгебраической цепью (заметим, что C является как решеткой конгруэнций для A, так и решеткой подалгебр l-группы с унарными операциями σ_s: $a \mapsto |a| \wedge |s|$ для каждого $s \in A$). Теперь установим один специальный факт.

Лемма 5. *l-идеал J линейно упорядоченной абелевой группы A компактен в полной алгебраической цепи $C = \Theta(A)$ тогда и только тогда, когда он является главным l-идеалом.*

Доказательство. Мы знаем из теоремы VIII.7, что J компактен тогда и только тогда, когда он конечно порожден. Но главный l-идеал, конечно, является конечно порожденным. С другой стороны, по теореме 18 конечно порожденный l-идеал с порождающими $g_1, \ldots, g_n$ будет и главным l-идеалом, который определяется элементом $|g_1| + \ldots + |g_n|$.

Следствие. *Если K — цепь главных l-идеалов в A, то $\Theta(A) \cong K$.*

Лемма 6. *В любой цепи C элемент c компактен тогда и только тогда, когда он покрывает некоторый другой элемент c_1.*

Мы опускаем доказательство. Элемент c_1, понятно, подпрямо вполне неразложим, и цепь K изоморфна решетке *простых факторов* цепи C (если 0 *не* считать компактным элементом).

Если (a) — какой-нибудь главный l-идеал в A и J — максимальный идеал, не содержащий a, то (a) покрывает $(a) \wedge J$. Отсюда следует, что «разрывы» (или «скачки») плотны в C; по определению, эти разрывы составляют *скелет* K в $C = (a)$. В своей замечательной основополагающей работе [1] Хан показал, что любая линейно упорядоченная абелева группа допускает вложение в ординальную степень с показателем K действительной группы $\mathbf{R}$. Точная формулировка основных результатов Хана, а также недавние усиления и обобщения их, полученные Хауснером, Венделем, Конрадом и другими авторами, содержатся в книге [**Fu**, § IV.5]; см. также § XV.4.

12*. Строение l-групп

Теорема 21 дает ключ к описанию строения коммутативных l-групп с конечной решеткой конгруэнций $\Theta(G)$. Сделаем сначала следующее замечание.

Лемма. *В дистрибутивной решетке всех l-идеалов коммутативной l-группы G l-идеалы, содержащие произвольный заданный $\wedge$-неразложимый l-идеал J, образуют цепь.*

Доказательство. Поскольку идеал J $\wedge$-неразложим, фактор-группа G/J линейно упорядочена в силу теоремы 21, а поэтому $\Theta(G/J)$ — цепь. Но (глава VI) решетка конгруэнций l-группы G/J изоморфна интервалу $[J, G]$ решетки $\Theta(G)$. Отсюда и следует требуемое заключение.

Теорема 23. *Пусть G—коммутативная l-группа, решетка l-идеалов которой имеет конечную длину. Тогда G либо разлагается в прямое произведение (т. е. в кардинальное произведение), либо содержит максимальный l-идеал M, который включает в себя все другие собственные l-идеалы.*

Доказательство. По лемме множества $\wedge$-неразложимых l-идеалов, содержащихся в различных максимальных (собственных) l-идеалах l-группы G, не сравнимы. Поэтому либо (i) G имеет в точности один максимальный собственный l-идеал M, либо (ii) у-множество X $\wedge$-неразложимых l-идеалов является кардинальной суммой не связанных друг с другом компонент X_i. В последнем случае по теореме III.3 (с дуализацией) $\Theta(G) = 2^{X}$ и, следовательно, $\Theta(G) = 2^X = 2^{X_1 + \dots + X_r} = \prod 2^{X_i}$ имеет нетривиальный центр. Теперь для завершения доказательства применяется теорема 17.

Носители. Теорема 23 была частично перенесена на некоммутативные l-группы Конрадом, использовавшим следующее введенное Жафаром понятие носителя.

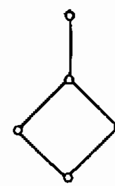


Рис. 23.

Определение. Пусть в произвольной l-группе G для $a, b \in G^+$

(37) $$a \sim b \text{ означает, что } a^* = b^*,$$

т. е. что $a \perp x$ тогда и только тогда, когда $b \perp x$. Классы эквивалентности отношения (37) называются *носителями*.

Если l-группа G коммутативна, то (ввиду § 9) ее носители образуют булеву алгебру, изоморфную центру решетки $\Theta(G)$. Однако, как мы сейчас увидим, в некоммутативных l-группах это не всегда так.

Пример 9. Пусть группа G имеет три порождающих a, b, c бесконечного порядка и определяющие соотношения

$$a + b = c + a, \quad a + c = b + a, \quad b + c = c + b.$$

Пусть G^+ содержит $ma + nb + n'c'$ тогда и только тогда, когда либо $m > 0$, либо $m = 0$, но $n \geqslant 0$ и $n' \geqslant 0$. В этом случае решетка носителей l-группы G имеет диаграмму, изображенную на рис. 23. Эта решетка порядково изоморфна решетке $\Theta(\mathbf{R} \circ \mathbf{R}^2)$.

В заключение этого параграфа мы приведем без доказательства две теоремы о носителях.

Теорема Жафара—Пирса. *Отображение φ, сопоставляющее элементам $a \in G^+$ их носители, является решеточным гомоморфизмом с ядром 0, причем*

(38) $$\varphi(a + b) = \varphi(a) \vee^{*} \varphi(b).$$

Более того, φ является максимальным решеточным гомоморфизмом положительного конуса G, имеющим ядро 0.

Доказательство см. в книге [Fu, § V.3].

Развивая намеченные идеи, можно доказать следующее обобщение теоремы 24.

Теорема Конрада. *Если решетка носителей l-группы G имеет конечную длину, то G либо разлагается в прямое произведение, либо содержит единственный максимальный l-идеал M.*

Во втором случае G является *лексикографическим расширением* l-группы M при помощи *линейно упорядоченной группы* G/M. Доказательство см. в [Fu, § V.6]; первоначальное доказательство Конрада (Conrad P.) см. в Mich. Math. J., 1960, 7, p. 171—180.

Упражнения к §§ 11—12

1. (а) Покажите, что l-идеалы линейно упорядоченной группы образуют цепь.

(б) Покажите, что если l-идеалы коммутативной l-группы G образуют цепь, то G линейно упорядочена.

2. Покажите, что в примере 7 l-идеалы образуют цепь.

3. (а) Покажите, что в примере 8 $J(c)$ не является l-идеалом.

б) Покажите, что в примере 9 l-идеалы образуют цепь, хотя l-группа и не является линейно упорядоченной.

(в) Убедитесь, что теорема 22 не может быть перенесена на некоммутативные l-группы.

*4. Пусть G обозначает аддитивную группу $C[0, +\infty)$ всех непрерывных действительных функций на $[0, +\infty)$ и l-идеал J состоит из функций, имеющих компактную область ненулевых значений.

(а) Покажите, что G архимедова, но в G/J архимедовость нарушается.

(б) Покажите, что $f \ll g$ в G/J тогда и только тогда, когда $f = o(g)$.

(в) Покажите, что для счетной последовательности $f_1 \leqslant f_2 \leqslant f_3 \leqslant \ldots$ всегда можно построить функцию g такую, что каждая $f_i \ll g$ в G/J (теорема Дюбуа—Реймона).

*5. Покажите, что если G — архимедова l-группа и если центр ее содержит коммутант, то G коммутативна (Эверет и Улам [1, p. 210])[1]).

6. (а) Покажите, что любая простая коммутативная l-группа изоморфна l-подгруппе аддитивной группы действительного поля $\mathbf{R}$.

(б) Покажите, что коммутативная группа без кручения может быть превращена в архимедову линейно упорядоченную группу тогда и только тогда, когда ее мощность не превосходит мощности действительной группы $\mathbf{R}$.

7. Докажите, что в любой коммутативной l-группе G для всех a, b, c

$$2|a-b| \leqslant |a-(b+c)| + |a-(b-c)|,$$

$$2(a \vee b) \leqslant a \vee (b+c) + a \vee (b-c),$$

$$2(a \wedge b) \geqslant a \wedge (b+c) + a \wedge (b-c).$$

(Указание. По отдельности рассматривая случаи $a \geqslant b$ и $a \leqslant b$, докажите, что неравенства выполняются в любой линейно упорядоченной абелевой группе.)

8. Покажите, что в теореме 23, если $a \notin M$, то $a > 0$ или $a < 0$.

9. Покажите, что каждая *конечная* решетка конгруэнций коммутативных l-групп имеет вид $1 = 2^0$, $1 \circ L = 2^{1 \circ P}$ или $LM = 2^{P+Q}$, где $L = 2^{P}_{3}$ и $M = 2^Q$ — решетки конгруэнций l-групп.

---

[1]) Это задание повторяет упр. 3 к § 7. — *Прим. перев.*

13. Полные l-группы

В §§ 13—16 мы займемся более глубоким изучением класса (условно) *полных* l-групп, т. е. l-групп, в которых каждое ограниченное множество имеет верхнюю и нижнюю точные грани. Такой, например, является аддитивная группа $\mathbf{R} = (\mathbf{R}, +)$ всех действительных чисел.

Общий результат устанавливает

Лемма 1. *Любое прямое произведение $G = \Pi G_\alpha$ полных l-групп является полной l-группой.*

Доказательство. Пусть в G будет $\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{x}_\sigma \leqslant \boldsymbol{b}$ для всех

$$\boldsymbol{x}_\sigma = (x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, x_{\sigma_3}, \ldots) \in S \subset G.$$

Тогда существует $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots)$, где $u_\alpha = \bigvee_S x_{\sigma\alpha}$ для каждого α, и $\boldsymbol{u} = \sup_S \boldsymbol{x}_\sigma$ в G, и двойственно.

Отсюда следует полнота l-группы $\mathbf{R}^n$. Векторные решетки $L_p [0, 1]$ и $L_p [-\infty, +\infty]$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, также являются полными l-группами. Они будут более детально изучаться в главе XV.

Теперь опишем направленные группы, которые допускают вложение (как у-группы) в полные l-группы. (Заметим, что любая (условно) полная направленная группа очевидным образом является полной l-группой.) По лемме 5 из § 2 такая направленная группа должна быть целозамкнутой и потому архимедовой. Замечательным фактом является то, что это необходимое условие оказывается и достаточным [1]).

Теорема 24. *Пополнение непустыми сечениями любой целозамкнутой направленной группы является полной l-группой.*

Доказательство. Пусть G — произвольная направленная группа. Для любого непустого подмножества X, ограниченного в G сверху, пусть $U(X)$ обозначает непустое множество его верхних граней и пусть $X^\# = L(U(X)) \supset X$ будет множество всех нижних граней множества $U(X)$ в G. Тогда множества вида $X^\#$ образуют условно полную решетку $\overline{G}$ — условное пополнение группы G непустыми сечениями (см. главу V).

Теперь в $\overline{G}$ определим сложение $\dot{+}$ правилом

$$X^\# \dot{+} Y^\# = (X^\# + Y^\#)^\#, \tag{39}$$

где $X^\# + Y^\#$ обозначает, как обычно, множество всех сумм $x + y$ (где $x \in X^\#$, $y \in Y^\#$). Ясно, что это сложение *изотонно* и ассоциативно; оно, кроме того, согласуется со сложением в G при порядково изоморфном погружении $x \mapsto L(U(x))$ группы G в $\overline{G}$. В частности, отрицательный конус $0^\#$ будет *единицей* (ней-

---

[1]) По поводу источников см. [LT2, с. 317] и [Fu, сноска на с. 149].

тральным элементом) в $\overline{G}$, и таким образом, $\overline{G}$ будет *полной l-группой* (см. § XIV.5) относительно $\dot{+}$, $\subset$.

Далее докажем, что

$$(40)\quad X^{\#} \dot{+} L(-X^{\#}) = X^{\#} \dot{+} [-U(X^{\#})] \subset 0^{\#} \text{ для всех } X^{\#} \in \overline{G}.$$

В самом деле, поскольку $x \mapsto -x$ является антиавтоморфизмом, то, очевидно,

$$L(-X^{\#}) = L(U(L(-X^{\#}))) = -U(L(U(X^{\#}))) = -U(X^{\#}),$$

что доказывает равенство в (40). Далее, если $x \in X^{\#}$ и $y \in L(-X^{\#})$, то, по предположению, $y \leqslant -x$ и, таким образом, $x + y \leqslant 0$. Это показывает, что $0 \in U(X^{\#} + L(-X^{\#}))$, откуда

$$0^{\#} = L(0) \supset L(U(X^{\#} + L(-X^{\#}))) = (X^{\#} + L(-X^{\#}))^{\#},$$

и (40) доказано.

Заметим, что эти результаты справедливы для любой направленной группы.

Следующим шагом является

Л е м м а 2. *Если G целозамкнута, то*

$$(40')\qquad U(X^{\#}) + L(-X^{\#}) \subset U(0).$$

Отсюда будет следовать, что в (40) включение можно заменить равенством, следовательно, $\overline{G}$ будет l-группой, и мы закончим доказательство теоремы 24.

Д о к а з а т е л ь с т в о   л е м м ы 2. Пусть $c \in U(X + L(-X))$, где X ограничено и не пусто. Для любого фиксированного $y_j \in U(X) = L(-X)$, поскольку $c \geqslant x - y$ для всех $x \in X$ и $y \in L(-X)$, будет $c + y_j \geqslant x$ при всех $x \in X$, и следовательно (по определению), $c + y_j \in U(X)$. Отсюда следует, что $nc + y_j \in U(X)$ при любом положительном целом n. Поскольку G целозамкнута, такое множество может быть ограниченным снизу лишь при $c \geqslant 0$. Это и доказывает, что $U(X + L(-X)) \subset U(0) = P$ (положительный конус у-группы G).

У Фукса [**Fu**, § V.10] доказано несколько больше. Следуя Эверету (E v e r e t t C. J. — Duke Math. J., 1944, **11**, p. 109—119), он характеризует те элементы в $\overline{G}$, которые имеют обратные, и замечает, что они образуют l-подгруппу G_D в $\overline{G}$. Он называет эту l-подгруппу *дедекиндовым расширением* для G (см. главу XIV). Очевидно, что G изоморфно вкладывается в G_D в качестве l-подгруппы.

С л е д с т в и е 1. *Направленная группа допускает вложение в полную l-группу (в качестве у-подгруппы) тогда и только тогда, когда она целозамкнута.*

С помощью леммы 1 из § 7 отсюда выводится

С л е д с т в и е. 2. *l-группа тогда и только тогда допускает вложение в полную l-группу, когда она архимедова.*

14. Бесконечная дистрибутивность. Замкнутые l-идеалы

Покажем теперь, что бесконечные дистрибутивные законы (8)—(8′) и (11) имеют далеко идущие аналоги, которые можно истолковывать в том смысле, что все полные l-группы являются топологическими решетками и топологическими группами [1].

Теорема 25. *Бесконечные дистрибутивные законы*

(41) $$a \wedge \bigvee x_\alpha = \bigvee (a \wedge x_\alpha) \text{ и } a \vee \bigwedge x_\alpha = \bigwedge (a \vee x_\alpha)$$

выполняются в любой полной l-группе.

Доказательство. Пусть $v = \bigvee x_\alpha$. Тогда для всех a

$$0 \leqslant (a \wedge v) - (a \wedge x_\alpha) \leqslant v - x_\alpha,$$

в силу (24). Значит, $0 \leqslant \bigwedge [(a \wedge v) - (a \wedge x_\alpha)] \leqslant \bigwedge (v - x_\alpha)$, где ввиду (11), $\bigwedge (v - x_\alpha) = v - \bigvee x_\alpha = v - v = 0$. Следовательно,

$$0 = \bigwedge [(a \wedge v) - (a \wedge x_\alpha)] = a \wedge v - \bigvee (a \wedge x_\alpha);$$

что доказывает первое тождество из (41). Второе выводится двойственно.

Чтобы дать топологическое истолкование нашим результатам, вспомним, что в главе X сеть $\{x_\alpha\}$ элементов условно полной решетки называлась *порядково сходящейся* к пределу x, если

(42) $$\bigvee_\beta \left[\bigwedge_{\alpha \geqslant \beta} x_\alpha\right] = \bigwedge_\beta \left[\bigvee_{\alpha \geqslant \beta} x_\alpha\right] = x.$$

В других обозначениях это условие выглядит так:

(42′) $$\liminf \{x_\alpha\} = \limsup \{x_\alpha\} = x.$$

Теорема 26. *В любой полной l-группе, если $x_\alpha \to x$ и $y_\beta \to y$ (в смысле порядковой сходимости), то*

(43) $$x_\alpha \wedge y_\beta \to x \wedge y,\ x_\alpha \vee y_\beta \to x \vee y,\ x_\alpha + y_\beta \to x + y.$$

Доказательство. В (43) имеется в виду декартово произведение сетей (глава IX). По предположению, $u'_\alpha \leqslant x_\alpha \leqslant u_\alpha$ и $v'_\beta \leqslant y_\beta \leqslant v_\beta$, где $u'_\alpha \uparrow x$, $u_\alpha \downarrow x$, $v'_\beta \uparrow y$, $v_\beta \downarrow y$. Кроме того, в силу изотонности

(44) $$u'_\alpha \circ v'_\beta \leqslant x_\alpha \circ y_\beta \leqslant u_\alpha \circ v_\beta \quad (\text{где } \circ = \wedge, \vee \text{ или } +).$$

Таким образом, достаточно показать, что $u_\alpha \circ v_\beta \downarrow x \circ y$ и двойственно. Далее, снова ввиду изотонности, $u_\alpha \circ v_\beta \geqslant x \circ y$ для всех α, β, где $u_\alpha \circ v_\beta$ антиизотонно относительно α, β. Значит, достаточно доказать, что $\bigwedge_{\alpha, \beta} (u_\alpha \circ v_\beta) = x \circ y$ для $\circ = \wedge, \vee, +$.

[1] Хотя и не в обычном смысле (см. § X.11).

Но, очевидно, что в силу ассоциативности

$$\bigwedge_{\alpha,\beta}(u_\alpha \wedge v_\beta) = \left(\bigwedge u_\alpha\right) \wedge \left(\bigwedge v_\beta\right) = x \wedge y.$$

Далее, дважды используя (41), получаем:

$$\bigwedge_{\alpha,\beta}(u_\alpha \vee v_\beta) = \bigwedge_\alpha \left[\bigwedge_\beta (u_\alpha \vee v_\beta)\right] = \bigwedge_\alpha \left[u_\alpha \vee \bigwedge_\beta v_\beta\right] =$$

$$= \bigwedge_\alpha [u_\alpha \vee y] = \left(\bigwedge_\alpha u_\alpha\right) \vee y = x \vee y.$$

Наконец, аналогичным образом дважды используя (8′), имеем:

$$\bigwedge_{\alpha,\beta}(u_\alpha + v_\beta) = \bigwedge_\alpha \left[\bigwedge_\beta (u_\alpha + v_\beta)\right] = \bigwedge_\alpha \left[u_\alpha + \bigwedge_\beta v_\beta\right] =$$

$$= \bigwedge_\alpha [u_\alpha + y] = \left(\bigwedge_\alpha u_\alpha\right) + y = x + y.$$

Этим завершается доказательство.

Теорема 26 показывает, что операции $\wedge$, $\vee$ и $+$ непрерывны относительно порядковой сходимости. Теперь рассмотрим l-идеалы, замкнутые в порядковой топологии.

Замкнутые l-идеалы. Мы знаем (теорема 17), что дополняемые l-идеалы любой l-группы G соответствуют ее прямым сомножителям. Мы также знаем (теоремы 19—20), что если G коммутативна, то ее дополняемые l-идеалы «замкнуты» относительно полярности, определяемой дизъюнктностью.

Теперь покажем, что если G — *полная* l-группа, то l-идеал $J \subset G$ «замкнут» в указанном смысле (т. е. $\perp(\perp J) = J$) тогда и только тогда, когда он дополняем, и тогда и только тогда, когда он замкнут в следующем топологическом понимании.

Определение. l-идеал J полной l-группы G называется *замкнутым*, если он содержит вместе с любым ограниченным подмножеством $\{x_\alpha\}$ также и $\bigvee x_\alpha$.

Замечание. Поскольку отображение $x \mapsto -x$ l-группы G на себя оставляет J инвариантным и обращает порядок, то J будет также содержать и $\bigwedge x_\alpha$. Теперь мы в состоянии доказать следующий результат.

Теорема 27. *В полной l-группе G следующие условия для l-идеала J равносильны:*

(i) J *дополняем*; (ii) $J = \perp(\perp J)$; (iii) J *замкнут*.

Доказательство. Импликации (i) $\to$ (ii) и (i) $\to$ (iii) очевидным образом следуют из теоремы 19, если положить $J^* = \perp J$. Импликация (ii) $\to$ (iii) также очевидна, поскольку $\perp(\perp J)$ в силу (41) «замкнут» в смысле введенного определения. Чтобы завершить доказательство, остается показать, что если J «замкнут» в полной l-группе, то $J + \perp J = G$ (соотношение $J \cap \perp J = 0$ очевидно), откуда последует справедливость импликации (iii) $\to$ $\to$ (i). Но в самом деле, для любого $a \geqslant 0$ из G определим J-компоненту элемента a как $b = \sup_{x \in J} (a \wedge x)$. По условию $b \in J$. Кроме того, ясно, что $0 \leqslant b \leqslant a$. Положим еще $c = -b + a$; конечно, $0 \leqslant c \leqslant a$. Теперь для любого положительного $y \in J$, поскольку $b + y \in J$, будет

$$b \geqslant a \wedge (b + y) = (b + c) \wedge (b + y) = b + (c \wedge y).$$

Поэтому $c \wedge y = 0$ для всех положительных $y \in J$, и значит, $c \in \perp J$. Это показывает, что $J + \perp J$ содержит все положительные элементы l-группы G. Поскольку элементы l-идеала J перестановочны с элементами l-идеала $\perp J$, то J и $\perp J$ будут *нормальными* подгруппами в G, и следовательно, $J + \perp J$ содержит все элементы $d = d^+ + d^-$ l-группы G. Итак, $J + \perp J = G$.

Поскольку любое пересечение замкнутых l-идеалов замкнуто, мы получаем

Следствие. *Дополняемые (т. е. замкнутые) l-идеалы полной l-группы образуют полную булеву алгебру.*

Историческая справка. Теорему 27 впервые получил Рис [1], в предположении коммутативности. Автор [**LT2**, теорема 19 главы XIV] снял это ограничение.

Упражнения к §§ 13—14

1. Покажите, что направленная группа является σ-полной l-группой тогда и только тогда, когда каждое счетное множество ее положительных элементов имеет точную нижнюю грань.

2. Покажите, что группа линейных функций $f(x) = ax + b$ (где $a > 0$) может быть превращена в l-группу, но не в целозамкнутую l-группу (групповая операция — суперпозиция).

3. Пусть S — какое-нибудь подмножество полной l-группы G. Покажите, что $G \cong S^{\perp} \oplus S^{\perp\perp}$.

Определим *последовательность Коши* в l-группе G как последовательность $\{x_n\}$ такую, что $|x_n - x_m| \leqslant u_n$ для некоторой *нулевой* (т. е. порядково сходящейся к 0) *последовательности* $\{u_n\}$ и всех $m \geqslant 0$.

*4. Покажите, что если G — l-группа, то ее последовательности Коши по модулю нулевых последовательностей образуют l-группу $\overline{G}$, в которую G вкладывается [1]).

5. Пусть в l-группе G для любой двойной последовательности $\{a_{kn}\}$ такой, что $a_{kn} \downarrow 0$ при фиксированном k, существует «диагональная» последовательность $a_{k, n(k)} \to 0$. Покажите, что $\overline{\overline{G}} \cong \overline{G}$, где $\overline{G}$ определена в упр. 4.

6. Укажите архимедову коммутативную l-группу, не являющуюся подпрямым произведением l-подгрупп действительной группы $\mathbf{R}$ (Капланский [2])).

15. Теорема Ивасавы

Анализ доказательства теоремы 27 показывает, что для замкнутого l-идеала J полной l-группы требование, чтобы он был нормальной подгруппой, избыточно.

---

[1]) Упр. 4—5 содержат результаты Эверета (Everett C. J. — Duke Math. J., 1944, **11**, p. 109—119), см. [Fu, § V. 11].

[2]) См. пример 4 на с. 166 в работе Конрада, Харви и Холанда (Conrad P., Harvey J., Holland C. — Trans. AMS, 1963, **108**, p. 143—169).

Лемма 1. *Если в полной l-группе G подгруппа S*

(i) *содержит вместе с любым a также все $x \in G$ такие, что $|x| \leqslant |a|$;*

(ii) *содержит вместе с любым ограниченным множеством элементов a_α и объединение $\bigvee a_\alpha$;*

то S является нормальной подгруппой и, следовательно, l-идеалом в G.

Доказательство. Для любого $a \geqslant 0$ из G определим b и c, как в доказательстве теоремы 27. Тогда, как там показано, и J и $\perp J$ будут нормальными подгруппами в G.

Используя этот факт, мы можем доказать замечательный результат: *любая полная l-группа коммутативна.* Идея доказательства состоит в том, чтобы для любого элемента c получить разложение такой группы на подпрямые сомножители $G/(c^+)^\perp$ и $G/(c^+)^{\perp\perp}$, в которых соответственно $c \leqslant 0$ и $c \geqslant 0$. Чтобы упростить доказательство, выделим следующее замечание.

Лемма 2. *Если все положительные элементы l-группы G перестановочны, то G коммутативна.*

Доказательство. $a + b = a^+ + a^- + b^+ + b^-$, $b + a = b^+ + b^- + a^+ + a^-$. Если положительные элементы перестановочны, то a^+ и a^- перестановочны с b^+ и b^-; значит, $a^+ + a^- + b^+ + b^- = b^+ + a^+ + a^- + b^- = b^+ + b^- + a^+ + a^-$, чем и завершается доказательство.

Теорема 28 (Ивасава). *Любая полная l-группа коммутативна* [1]).

Доказательство. По лемме 2 достаточно показать, что если $a > 0$ и $b > 0$, то $a + b = b + a$. Далее в силу сделанного выше замечания о разложении G, мы можем сосредоточиться на случаях $a - b \geqslant 0$ и $b - a \geqslant 0$ и на случаях $-a - b + a + b \geqslant 0$ и $-a - b + a + b \leqslant 0$. Таким образом, возникают четыре возможности, из которых ввиду симметрии типовыми являются $a \geqslant b \geqslant 0$ и $b + a \geqslant a + b$. Определим t из условия $-a + b + a = b + t$; ясно, что $t \geqslant 0$. Далее положим $b_n = -na + b + na$, $t_n = -na + t + na$ для каждого целого n, так что b_n и t_n являются образами элементов b и t относительно действия группы внутренних автоморфизмов, порожденной преобразованием $x \mapsto -a + x + a$. Заметим, что поскольку $0 \leqslant b \leqslant a$ и интервал $[0, b]$ инвариантен при всех этих внутренних автоморфизмах, то $0 \leqslant b_n \leqslant a$ для всех a. Далее, мы можем доказать индукцией, что $b_{n+1} = b + t + t_1 + \ldots + t_n$, так как

$$-a + (b + t + t_1 + \ldots + t_{n-1}) + a = -a + b + a + (-a + t + a) + \sum_{i=1}^{n-1} (-a + t_i + a) = (b + t) + t_1 + t_2 + \ldots + t_n.$$

[1]) Iwasawa K. — Japan J. Math., 1943, 18, p. 777—789.

Предположим теперь, что $t_1 = -a + t + a \geqslant t$. Тогда для любого целого n будет $t_{n+1} - t_n = -na + (t_1 - t) + na \geqslant 0$, поскольку внутренние автоморфизмы сохраняют порядок. Поэтому получается, что $0 \leqslant t \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant \ldots$, и для любого положительного целого n будет $nt \leqslant t + t_1 + t_2 + \ldots + t_{n-1} = -b + b_{n+1} \leqslant a$.

Следовательно, по лемме 5 из § 2 $t \leqslant 0$. Но, по предположению, $t \geqslant 0$, значит, $t = 0$.

Аналогично рассматривается случай $t_1 \leqslant t$. Здесь, как и выше, получается $0 \leqslant t \leqslant t_{-1} \leqslant t_{-2} \leqslant t_{-3} \leqslant \ldots$, и

$$b = a + (b + t) - a = a + b - a + a + t - a = \\ = a + b - a + t_{-1},$$

так что $a + b - a = b - t_{-1}$. Индукцией по n можно показать, что

$$b_{-n-1} = a + (b - t_{-1} - t_{-2} - \ldots - t_{-n}) - a = \\ = b - t_{-1} - t_{-2} - \ldots - t_{-(n-1)}.$$

Следовательно, для любого положительного целого n будет

$$nt \leqslant t_{-n} + t_{-(n-1)} + \ldots + t_{-2} + t_{-1} = -a - b_{-(n-1)} + a + b = \\ = b_{-n} + b \leqslant b.$$

Таким образом, если $t_1 \leqslant t$, то $t \leqslant 0$ и, значит, $t = 0$, как и прежде.

Используя компоненты [1]), мы можем свести общий случай к случаям $t_1 \geqslant t$ и $t_1 \leqslant t$ проекциями на $[(t_1 - t)^+]^\perp$ и $[(t_1 - t)^+]^{\perp\perp}$. Итак, в любом случае $t = 0$, т. е. $a + b = b + a$, чем и завершается доказательство.

Следствие. *Любая архимедова направленная группа коммутативна.*

Упражнения

1. Дайте подробное доказательство леммы 1.

2. (а) *Компонентой* положительного элемента e l-группы A называется элемент f такой, что $f \wedge (e - f) = 0$. Докажите, что компоненты любого положительного e образуют булеву алгебру.

(б) Покажите, что если A — полная l-группа со слабой единицей e, то булева алгебра в (а) изоморфна центру решетки $\Theta(A)$.

3. Покажите, что e является слабой единицей полной l-группы A тогда и только тогда, когда $(x \wedge ne) \to x$ для каждого $x \in A$.

4. Покажите, что полная l-группа, не изоморфная ни $\mathbf{R}$, ни $\mathbf{Z}$, разложима в прямое произведение.

5. Покажите, что полная l-группа, решетка конгруэнций которой имеет длину n, изоморфна $\mathbf{R}^k\mathbf{Z}^{n-k}$ для некоторого $k = 0, 1, \ldots, n$.

6. Покажите, что полная l-группа, не являющаяся атомной (§ 6), имеет мощность, не меньшую мощности континуума.

---

[1]) См. ниже упр. 2. — *Прим. перев.*

ПРОБЛЕМЫ (см. также [Fu, с. 303—307])

111. Найти условия, которым должна удовлетворять группа, решетка, соответственно, l-группа, чтобы быть изоморфной l-группе всех порядковых автоморфизмов подходящей цепи. [1]) (Указание. Автоморфизмы любой цепи C порождают автоморфизмы ее пополнения $\bar{C}$. Рассмотрите их неподвижные точки.)

112. Найти необходимые и достаточные условия, при которых абстрактная группа G изоморфна как группа l-группе [2]).

113. Описать все возможные способы решеточного упорядочения (линейного упорядочения) свободной группы с n порождающими [3]).

114. Какие направленные группы являются топологическими группами и топологическими решетками в («новой») интервальной топологии?

115. Построить общую абстрактную конструкцию, которая как частные случаи включала бы в себя булевы алгебры (кольца) и l-группы [4]).

116. Найти систему аксиом для действительного аффинного пространства в терминах тернарной операции $a - b + c$ [5]).

117. Существуют ли неполные l-группы, в которых (а) каждый «замкнутый» l-идеал дополняем, или (б) соответствие $K \to (K^*)^*$, рассмотренное в теореме 19, является решеточным эндоморфизмом? Если да, то каковы они? Как это отражается на решетке конгруэнций $\Theta(G)$?

118. Построить общую теорию коммутативных l-групп с операторами (например, l-модулей) [6]).

119. Перенести результаты теоремы 10 и т. д. на l-лупы.

120. Что представляют собой (конечные) решетки конгруэнций l-групп?

121. Могут ли проявиться патологические черты, описанные в примере 5, в l-группе конечной $\wedge$-ширины? В tl-группе Ли? [7])

---

[1]) Проблемы 111, 112 — это соответственно проблемы 95, 106 из [LT2].

[2]) Условия для того, чтобы G была изоморфна линейно упорядоченной группе, нашел Ивасава (I w a s a w a K. — J. Math. Soc. Japan, 1948, **1**, p. 1—9) [и А. И. Мальцев [1]. — *Прим. перев.*]

[3]) Литературу см. в книге [Fu, с. 79]. [Проблема 102 из [LT2]. В классе абелевых групп ее решение для случая решеточного упорядочения нашел А. И. Кокорин [1], а для случая линейного упорядочения — М. И. Зайцева [1]. — *Прим. перев.*]

[4]) Проблема 105 из [LT2]. Одно из решений см. у Рамо Рао (R a m a R a o V. V. — Monatsh. Math., 1969, **73**, p. 411—421). — *Прим. перев.*

[5]) См. работу Сертена (C e r t a i n e J. — Bull. AMS, 1943, **49**, p. 869—877), а также работу Беренда и Греве (B e h r e n d F. A., G r e v e W. — Math. Z., 1962, **78**, p. 298—318), где вводится отношение «между»: (x, y, z), если $y = \tau x + (1 - \tau) z$ при $0 \leqslant \tau \leqslant 1$.

[6]) См. Л. А. Скорняков, А. В. Михалев [1] и В. Т. Марков и др. [1]. — *Прим. ред.*

[7]) По поводу понятий l-группы Ли и tl-группы см. работу Биркгофа (B i r k h o f f G. — Comm. Math. Helv., Speiser Festschrift, p. 209—217). [Положительный ответ на первый вопрос дал Якубик (J a k u b i k J. — Coll. Math., 1973, **27**, № 1, p. 13—20). — *Прим. перев.*

РЕШЕТОЧНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ МОНОИДЫ

1. У-группоиды

Понятие решеточно упорядоченного моноида (или l-моноида) естественно возникает в теории идеалов, где его корни обнаруживаются в одной работе Дедекинда; впервые оно детально изучалось Крулем [1]). Современная теория l-моноидов начинается с основополагающих статей Уорда и Дилуорса [1] и Дилуорса [1], результаты которых позднее обобщил и усилил Сертен [1]. Эта теория находит применения не только при исследовании решеток идеалов, но она полезна также для брауэровых решеток, алгебр отношений и l-групп [2]). Мы начнем эту главу с рассмотрения понятия, еще более общего, чем l-моноид.

Определение. *У-группоидом* (или m-у-множеством) называется у-множество M с бинарным умножением, удовлетворяющим условию *изотонности:*

(1) если $a \leqslant b$, то $xa \leqslant xb$ и $ax \leqslant bx$ для всех $a, b, x \in M$.

Когда умножение коммутативно или ассоциативно, M называется *коммутативным* у-группоидом или *у-полугруппой* соответственно. У-полугруппа с единицей (или «нейтральным элементом») такой, что

$$x1 = 1x = x \text{ для всех } x, \tag{1'}$$

называется упорядоченным моноидом, или *у-моноидом. Нуль* m-у-множества M есть, по определению, элемент $0 \in M$ такой, что

$$0 \leqslant x \text{ и } 0x = x0 = 0 \text{ для всех } x \in M. \tag{2}$$

Очевидно, что у-группоид может иметь не более одного нуля.

Пример 1. Любая у-группа G является у-моноидом. Положительный конус $P = G^+$ и отрицательный конус $-P = G^-$ любой у-группы также будут у-моноидами.

---

[1]) Dedekind R. — Ges. Werke, v. III, S. 62—71; Krull W. — S.-B. Phys. Med. Soc. zu Erlangen, 1924, 56, S. 47—63.

[2]) О связях между понятиями l-моноида с одной стороны и l-группы, брауэровой решетки и алгебры отношений с другой, см. статью Биркгофа [6, § 27], а также [LT2, гл. XIII], книгу Дюбрей-Жакотен, Лезье, Круазо [1, часть II], [Fu, часть III]. По поводу более ранних работ Уорда и Дилуорса см. те же источники и ссылки в тексте.

Договоримся для аддитивных у-групп главы XIII, когда они рассматриваются как у-моноиды, использовать мультипликативные обозначения. Так, имея в виду пример 1, мы будем обычно записывать групповую операцию в G, G^+ и G^- как умножение, нейтральный элемент — как 1 и будем писать x^n вместо употреблявшейся в главе XIII записи nx. Это по разным причинам оказывается более удобным. Заметим, что G^+имеет *нуль* в отличие от G и G^-. «Единица» отрицательного конуса G^-является также его универсальной верхней гранью, поэтому обозначение ее в виде 0 привело бы к большой путанице.

В § 2 мы опишем те у-моноиды, которые выступают в качестве положительных (или отрицательных) конусов направленных групп.

Пример 2. В любой полугруппе[1]) S «множество-степень» $P(S) = 2^S$ всех ее подмножеств X, Y, Z, ... образует у-полугруппу с нулем $\varnothing$, будучи упорядоченным включением и снабженным умножением в смысле «исчисления комплексов», так что XY есть множество всех произведений xy (где $x \in X$, $y \in Y$). Если S — моноид с 1, то $P(S)$ будет моноидом с единицей $\{1\}$.

Пример 3. В любом кольце R аддитивные подгруппы X, Y, Z, ... образуют m-у-множество с нулем относительно включения, если XY определить как множество всех конечных сумм $\sum x_i y_i$ (где $x \in X$, $y \in Y$). Если R — ассоциативное кольцо с единицей 1, то эта у-полугруппа будет у-моноидом, единицей которого является аддитивная подгруппа, порожденная элементом 1.

2. Естественно упорядоченные моноиды

Теперь введем важный класс у-моноидов, в которых, по определению, порядок определяется мультипликативной операцией; такие у-моноиды называются *естественно* упорядоченными.

Определение. *Естественно упорядоченным моноидом* называется у-моноид M, в котором $a \leqslant b$ равносильно тому, что $b \in Ma$ и $b \in aM$. *Двойственным* для естественно упорядоченного моноида называется моноид, в котором то же самое справедливо, если рассматривать отношение $a \geqslant b$.

Заметим, что любая $\vee$-полурешетка с O очевидным образом является *коммутативным* естественно упорядоченным моноидом относительно «умножения» $\vee$; двойственно, любая $\wedge$-полурешетка с I будет моноидом, двойственным для естественно упорядоченного коммутативного моноида, и единицей здесь является I. В этих у-моноидах умножение определяется порядком.

---

[1]) По поводу общей теории полугрупп см. книгу Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. — М.: Мир, 1972.

Лемма 1. *В любом естественно упорядоченном моноиде, если $ab = 1$, то $a = b = 1$.*

Доказательство. Очевидно, что $1 \leqslant a$ и $1 \leqslant b$, а если $ab = 1$, то $a \geqslant 1$ и $b \geqslant 1$. Ввиду P2 отсюда следует, что $a = b = 1$.

Таким образом, в любом естественно упорядоченном моноиде мультипликативная единица является универсальной нижней гранью.

Лемма 2. *Пусть G — произвольная (мультипликативная) у-группа с положительным конусом P. Тогда*

(i) *P — естественно упорядоченный моноид;*

(ii) *в P выполняется закон сокращения: если $ax = ay$ или $xb = yb$, то $x = y$.*

Если G — направленная группа, то, кроме того,

(iii) *любые a, $b \in P$ имеют в P верхнюю грань;*

(iv) *любой элемент $g \in G$ можно представить в виде $g = ab^{-1}$ (где a, $b \in P$);*

(v) *$ab^{-1} \leqslant cd^{-1}$ (где a, b, c, $d \in P$) в G тогда и только тогда, когда $ax = cy$ и $bx = dyz$ для подходящих x, y, $z \in P$.*

Доказательства пунктов (i)—(iv) тривиальны.

Докажем (v). Пусть $ab^{-1} \leqslant cd^{-1}$ в G и u — произвольная верхняя грань для a, b, c, d. Положим $ax = cy = u$ и $b' = bx$, $d' = dy$. Тогда

$$ub'^{-1} = ab^{-1} \leqslant cd^{-1} = ud'^{-1},$$

откуда $d' \leqslant b'$ и, значит, $b' = d'z$ для некоторого $z \in P$. Подстановкой получаем $bx = dyz$, что и требовалось. Обратно, если выполнены все соответствующие условия из (v), то

$$ab^{-1} = (ax)(bx)^{-1} = (cy)(dyz)^{-1} \leqslant (cy)(dy)^{-1} = cd^{-1}.$$

Следствие. *Пусть G и H — любые направленные группы с положительными конусами G^+ и H^+. Тогда любой полугрупповой изоморфизм между G^+ и H^+ можно однозначно продолжить до у-группового изоморфизма между G и H.*

Теперь покажем, что условия леммы 1 и (i)—(iii) вполне характеризуют как у-полугруппы класс положительных конусов направленных групп.

Теорема 1. *Полугруппа S тогда и только тогда является положительным конусом некоторой направленной группы G, когда в ней (α) выполняется закон сокращения, (β) $Sa = aS$ для всех $a \in S$, (γ) если $ab = 1$, то $a = b = 1$.*

Набросок доказательства (см. [**LT2**, с. 302], [**Fu**, с. 27]). Если задана полугруппа S, удовлетворяющая условиям теоремы, то, как нетрудно проверить, уравнение $db_d = bd$ определяет гомоморфизм φ_d: $b \to b_d$ этой полугруппы в группу ее автоморфизмов. Тогда множество G пар (a, b), где $a, b \in S$ становится группой, если положить

(3) $(a, b) = (c, d)$ тогда и только тогда, когда $ad = cb_d$;

(4) $$(a, b)(c, d) = (ac_b, db);$$

мы оставляем детали в качестве упражнения [1]).

Следствие 1. *У-моноид P является положительным конусом некоторой направленной группы G тогда и только тогда, когда он естественно упорядочен, в нем выполняется закон сокращения и любые два элемента имеют общее кратное.*

Следствие 2 (фон Нейман). *Моноид M, удовлетворяющий условиям теоремы 1, тогда и только тогда является положительным конусом некоторой l-группы G, когда любые $a, b \in M$ имеют в M общее кратное.*

Упражнения к §§ 1—2

1. (а) Пусть G — какой-нибудь у-группоид с 1. Покажите, что множество G^+ элементов $x \geqslant 1$ является в G у-подгруппоидом так же, как и множество G^- всех $x \leqslant 1$.

(б) Покажите, что $a \in G^+$ тогда и только тогда, когда $ay \geqslant y$ для всех $y \in G$, а также тогда и только тогда, когда $ya \geqslant y$ для всех $y \in G$.

2. (а) Определите прямое (кардинальное) произведение PQ двух у-группоидов P и Q и докажите, что оно всегда является у-группоидом.

(б) Всегда ли естественное определение лексикографического произведедения $P \circ Q$ у-группоидов P и Q дает у-группоид?

3. Докажите в деталях, что в примере 2 в самом деле получается у-моноид.
4. То же задание для примера 3.
5. Докажите утверждения (i)—(iv) леммы 2 из § 2.
6. Докажите теорему 1 из § 2.
7. Докажите, что аддитивный у-моноид P состоит из положительных элементов некоторой у-группы тогда и только тогда, когда [2])

(а) из $x < y$ следует $a + x < a + y$ и $x + b < y + b$ для всех $a, b \in P$ и

(б) $x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда $s + x = y$ для некоторого $s \in P$, и тогда и только тогда, когда $x + t = y$ для некоторого $t \in P$ (т. е. P естественно упорядочен).

3. Аксиомы для понятия величины

Первые исследования естественно упорядоченных моноидов относились к случаю *линейной упорядоченности:* они стимулировались попытками построить подходящую систему аксиом для понятия *величины*. *Архимедов* случай, когда из того, что $a^n \leqslant b$ для всех положительных n, следует, что $a = 1$, не представляет затруднений.

---

[1]) Заметим, что вообще любая реверсивная справа полугруппа с сокращением вложима в группу (Клиффорд и Престон [1, т. 1, с. 57]).

[2]) Накада (Nakada O. — J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 1951, **11**, p. 181—189; 1952, **12**, p. 73—86); [Fu, с. 224].

Лемма 1. *В любом архимедовом естественно линейно упорядоченном моноиде выполняется закон сокращения.*

Доказательство. Предположим, что $ab = ac$, где $b \neq c$. В силу линейной упорядоченности $b < c$ или $c < b$; пусть выполняется первое неравенство. Тогда $c = bx$ для некоторого $x \neq 1$, откуда $ab = abx$. Повторяя этот процесс, получим, что $ab = abx^n \geqslant x^n$ для всех n. Ввиду архимедовости $x = 1$, откуда $c = b$ в противоречие с предположением.

Теорема 2 (Гёльдер [1]). *Любой архимедов естественно линейно упорядоченный моноид вкладывается в* ($\mathbf{R}$, $+$) *и, следовательно, коммутативен.*

Набросок доказательства. Используем старинный метод Евдокса. Зафиксируем $a > 1$ и для произвольного x рассмотрим множество L рациональных чисел m/n таких, что $x^n \geqslant a^m$, и множество U рациональных чисел m/n таких, что $x^n \leqslant a^m$. Так же,как и в теореме XIII.12 доказывается, что L и U определяют дедекиндово сечение; кроме того, используя закон сокращения, можно показать, что соответствие $x \longmapsto (L, U)$ будет порядковым вложением, которое произведения переводит в суммы. Так как из $a \leqslant b$ следует $ax = b$, то образ исходного моноида при так построенном вложении будет состоять из положительных элементов («образует положительный конус») некоторой *подгруппы* аддитивной группы действительного поля $\mathbf{R}$.

Были получены остроумные результаты, которые позволяют перенести только что доказанные утверждения на *слабо архимедовы* естественно линейно упорядоченные моноиды и полугруппы, определяемые условием: если $a^n < b$ для всех положительных целых n, то $a \leqslant 1$. Они не обязаны подчиняться закону сокращения. В качестве примера для любого $n \in \mathbf{N}$ определим *циклический* естественно упорядоченный моноид $\mathbf{N}_n$ порядка $n+1$: он состоит из степеней a^k (где $k \in \mathbf{N}$) некоторого a и при этом $a^k a^l = a^m$, где $m = \min(k+l, n)$.

Лемма 2. *Любой слабо архимедов естественно линейно упорядоченный моноид M с минимальным элементом $a > 1$ изоморфен* ($\mathbf{N}$, $+$, $\leqslant$) *или некоторому* $\mathbf{N}_n$ *и, следовательно, коммутативен.*

Доказательство. Пусть даны $b \neq 1$ и a. Поскольку M слабо архимедов, найдется наибольшее положительное целое k такое, что $a^k < b \leqslant a^{k+1}$; а так как M — естественно упорядоченная полугруппа, то $b = a^k x$ для некоторого $x \in M$. Вследствие минимальности a отсюда получается, что $a^k a \leqslant a^k x = b$. Но $b \leqslant a^{k+1}$, значит, $b = a^{k+1}$. Оставшаяся часть доказательства тривиальна.

Лемма 2 принадлежит Гёльдеру [1] и Фуксу. В [**Fu**, глава XI] выводятся различные свойства слабо архимедовых естественно линейно упорядоченных моноидов, включая и то, что они всегда коммутативны. (Предостережение. То, что мы называем «слабой архимедовостью», выступает в [Fu] как «архимедовость».)

Современная теория абстрактных «величин» развивалась в других направлениях и обращается главным образом к естественным *не обязательно* линейным порядкам в моноидах. Один заслуживающий внимания подход, основанный на понятии *кардинальной алгебры*, предложил Тарский [4]. Другие построения используют понятия меры или решетки с размерностью — они излагались в главе XI. К сожалению, в этих последних случаях мы *не* получаем замкнутости относительно «сложения», и приходится иметь дело с «частичными алгебрами» в терминологии главы VI.

4. Примеры l-группоидов и l-моноидов

l-группоид — это не просто группоид, являющийся решеткой относительно имеющегося в нем порядка: нужно еще, чтобы произведения были дистрибутивными относительно объединений. Хотя в у-группах это требование автоматически обеспечивается изотонностью, оно, вообще говоря, не выполняется в произвольных у-группоидах и даже в у-моноидах. Так что наше основное определение выглядит следующим образом.

Определение. Мультипликативной полурешеткой, или *m-полурешеткой* [1]) называется $\vee$-полурешетка M с умножением, причем

$$a(b \vee c) = ab \vee ac \text{ и } (a \vee b)c = ac \vee bc \tag{5}$$

для всех $a, b, c \in M$. Если M — решетка с умножением и выполняется (5), то M называется m-решеткой или *l-группоидом*. l-группоид, являющийся полугруппой (моноидом) относительно умножения, называется *l-полугруппой* (соответственно *l-моноидом* — сокращение вместо «решеточно упорядоченный моноид»).

Заметим, что (1) очевидным образом следует из (5): если $b \leqslant c$, то $ac = a(b \vee c) = ab \vee ac$, откуда $ab \leqslant ac$. Другими словами, m-полурешетка тривиально является у-группоидом (m-у-множеством).

Отметим также, что любая $\vee$-полурешетка с O является не только естественно упорядоченным моноидом, если $\vee$ считать умножением, но и l-моноидом, поскольку $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee (a \vee c)$. Двойственное утверждение уже не верно: $\wedge$-полурешетка с I, хотя и будет всегда моноидом, двойственным для естественно упорядоченного моноида относительно умножения $\wedge$, l-моноидом относительно этого умножения быть не обязана, если только она не является дистрибутивной решеткой, поскольку иначе нарушается (5).

---

[1]) Впервые это понятие было введено в книге Дюбрей-Жакотен, Лезье, Круазо [1]; французское слово «gerbier» (скирд).

Любая у-группа, являющаяся решеткой, удовлетворяет и условию (5) и двойственному ему условию

$$a(b \wedge c) = ab \wedge ac \text{ и } (a \wedge b)c = ac \wedge bc; \tag{5'}$$

следовательно, при дуализации она остается l-группой. Однако это *не всегда* так для l-полугрупп вообще.

Нетрудно проверить, что подмножества любого моноида (пример 2) образуют l-моноид с нулем $\varnothing$, который как решетка является *булевой алгеброй*. Это показывает, что l-моноиды (в отличие от l-групп) в своей упорядоченности могут быть решетками с дополнениями; с другой стороны, они не обязательно дистрибутивны или модулярны (как решетки).

Пример 4. $\vee$-эндоморфизмы α, β, γ, ... любой полурешетки S образуют m-полурешетку относительно операций, определяемых равенствами

$$a(\alpha\beta) = (a\alpha)\beta \text{ и } a(\alpha \vee \beta) = a\alpha \vee a\beta. \tag{6}$$

Другой типичный пример — аддитивные подгруппы произвольного кольца R (пример 3 из § 1) образуют l-группоид, модулярный как решетка. Если R — ассоциативное кольцо с единицей 1, то этот l-группоид будет l-моноидом.

Заметим, что класс всех l-группоидов *эквационально определим* в смысле главы VI. Поэтому алгебраические понятия подалгебры, гомоморфного образа, прямого произведения сохраняют для l-группоидов обычный смысл. В частности, любая m-подрешетка или гомоморфный образ l-группоида, а также прямое произведение l-группоидов будут сами l-группоидами. Аналогичными свойствами обладают l-полурешетки, l-полугруппы и l-моноиды.

Сделанные наблюдения позволяют построить различные представляющие интерес m-полурешетки *действительных функций* с их обычной упорядоченностью. Так, *полунепрерывные сверху* функции n переменных образуют интересную коммутативную l-полугруппу; другую l-полугруппу составляют *субгармонические* функции.

Ввиду слишком большой общности понятия у-группоида и даже l-моноида, основная часть более или менее глубоких результатов относится лишь к специальным типам у-группоидов (например, таким, как l-группы). Один из таких типов у-группоидов представляют собой целостные у-группоиды, которые мы сейчас определим.

Определение. Элемент a у-группоида с единицей 1 называется *целым*, если $a \leqslant 1$. *Целостным* называется у-группоид, в котором $a \leqslant 1$ для всех a.

Таким образом, отрицательный конус любой l-группы является *целостным* у-группоидом. Двусторонние идеалы любого кольца образуют другой целостный у-группоид (см. пример 3), для которого представляет интерес следующая

Теорема 3. *В любом l-группоиде*

(7) $$(a \wedge b)(a \vee b) \leqslant ba \vee ab \text{ для всех } a,\ b.$$

Если M — целостный l-группоид, то

(8) $$\text{из } a \vee b = 1 \text{ следует, что } a \wedge b = ba \vee ab,$$

и

(9) $$\text{из } a \vee b = a \vee c = 1 \text{ следует, что } a \vee bc = a \vee (b \wedge c) = 1.$$

Если M имеет элемент $z \leqslant 1$ такой, что $zx = xz = z$ для всех $x \in M$, то этот z является нулем в M как в группоиде.

Доказательство. Ввиду (1) $(a \wedge b)(a \vee b) = [(a \wedge b)a] \vee [(a \wedge b)b] \leqslant ba \vee ab$, т. е. справедливо (7). Далее, если $a \vee b = 1$, то $a \wedge b \leqslant ba \vee ab$, ввиду (7); но в силу (1) в целостной m-решетке $ba \leqslant 1a = a$ и, аналогично, $ba \leqslant b1 = b$. Значит, $ba \leqslant a \wedge b$ и точно так же $ab \leqslant a \wedge b$. Теперь (8) получается, если применить P2. Докажем (9). В любой целостной m-решетке $a, b, c \leqslant 1$. Поэтому $a \vee bc \geqslant a \geqslant aa$ и

$$1 = 1 \vee 1 \cdot 1 \geqslant a \vee bc \geqslant aa \vee bc \geqslant$$
$$\geqslant aa \vee ba \vee ac \vee bc = (a \vee b)(a \vee c) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Аналогично, поскольку $b \geqslant bc$, $c \geqslant bc$, то будет $b \wedge c \geqslant bc$, так что $1 \geqslant a \vee (b \wedge c) \geqslant a \vee bc = 1$, что и доказывает (9). Наконец, утверждение относительно z получается сразу: z является универсальной нижней гранью для M, поскольку для всех $x \in M$ будет $z = zx \leqslant 1 \cdot x = x$, а тогда $z = z \wedge x = x \wedge z$.

Упражнения

1. Покажите, что если G — l-моноид, то $ax \geqslant x$ для всех $x \in G$ тогда и только тогда, когда $a \in G^+$, и $ax \leqslant x$ для всех $x \in G$ тогда и только тогда, когда $a \in G^-$.

2. Покажите, что $\vee$-эндоморфизмы любой цепи C образуют дистрибутивный l-моноид относительно их умножения и обычного упорядочения (т. е. $\varphi \leqslant \psi$ означает, что $x\varphi \leqslant x\psi$ для всех $x \in C$).

3. Покажите, что в любом l-моноиде с сокращением из $a^n \geqslant 1$ следует, что $a \geqslant 1$, и из $a^n = 1$ следует, что $a = 1$ [1]).

4. Если в коммутативной l-полугруппе с сокращением $a^n \leqslant b^n$, и элемент b обратим, то $a \leqslant b$. (Указание. Используйте упр. 3.)

5. (а) В решетке **2** пусть $00 = 0$ и $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 1 \cdot 1 = 1$. Покажите, что этим определена структура l-моноида.

(б) Покажите, что 0, 1, ∞ образуют относительно умножения l-моноид независимо от того, считать ли произведение $0 \cdot \infty$ равным 0, 1 или ∞.

6. Покажите, что любая конечная m-полурешетка с 0 является l-группоидом.

*7. Постройте [2]) l-моноид, имеющий не более 10 элементов и такой, что в нем $a \vee b = 1$, но $ab \neq ba$.

---

[1]) Дюбрей-Жакотен, Лезье, Круазо [1, p. 139]; используйте доказательство теоремы XIII.3.

[2]) Упр. 7—8 содержат результаты Сертена [1].

*8. Постройте коммутативный l-моноид с 5 элементами, в котором $(a \wedge b) \times (a \vee b) < ab$.

9. При каких условиях произведения PQ и $P \circ Q$ (см. упр. 2 к § 2) будут l-группоидами?

5. Деление

Одним из самых важных понятий теории l-группоидов является частное в смысле следующего определения.

Определение. Пусть L — у-группоид. *Правым частным* $a. \cdot b$ элемента a по b называется наибольший x (если он существует) такой, что $bx \leqslant a$ [1]; *левое частное* $a \cdot .b$ элемента a по b определяется как наибольший y такой, что $yb \leqslant a$. *Решеткой с делением* называется l-группоид L, в котором $a. \cdot b$ и $a \cdot .b$ существуют для любых $a, b \in L$. Наконец, *l-моноид (полугруппа) с делением* — это решетка с делением, являющаяся моноидом (полугруппой).

Пример 5. В любом кольце R двусторонние идеалы образуют решетку с делением относительно умножения, введенного в примере 3 (§ 1).

Следствие. *Решетка L является решеткой с делением относительно умножения xy, совпадающего с пересечением $x \wedge y$, тогда и только тогда, когда она брауэрова. В этом случае L будет целостной коммутативной l-полугруппой.*

Доказательство почти тривиально, поскольку при $xy = x \wedge y$ определенное в главе V относительное псевдодополнение $b : a$ совпадает с частными $b \cdot . a = b . \cdot a$, введенными выше, а псевдодополнение a^* есть не что иное, как $0 : a$ (в коммутативных решетках с делением мы будем вместо $a . \cdot b$ и $a \cdot . b$ писать $a : b$).

В любой у-лупе оба деления определены; при этом $x . \cdot y$ совпадает с x/y, введенным в главе VII, а $x \cdot . y = x \backslash y$. Поэтому в любой у-группе будет $x . \cdot y = y^{-1} x$, $x \cdot . y = xy^{-1}$ и $x (z . \cdot y) = xy^{-1}z = (x \cdot . y) z$. Отсюда следует, что в у-лупах и у-группах частные выражаются через одну лишь мультипликативную операцию, их изучение относится к чистой теории луп (соответственно групп) — и здесь мы этим заниматься не будем. Важной задачей является нахождение простого критерия для распознавания у-групп среди у-полугрупп. Один из таких критериев дает

Лемма 1. *У-моноид G тогда и только тогда является у-группой, когда в нем определены оба деления и при этом $x (1 . \cdot x) = (1 \cdot . x) x = 1$.*

Доказательство тривиально: если указанные тождества выполняются, то каждый элемент $x \in G$ имеет правый и левый обратные.

---

[1] В [LT2] и в [Fu] это называется левым частным элемента a по b. — *Прим. перев.*

Теорема 4. *В любой решетке с делением*

(10) $(a \wedge b) \,.\cdot\, c = (a \,.\cdot\, c) \wedge (b \,.\cdot\, c)$ *и симметрично;*

(11) $a \,.\cdot\, (b \vee c) = (a \,.\cdot\, b) \wedge (a \,.\cdot\, c)$ *и симметрично;*

(12) *неравенства* $ab \leqslant c$, $b \leqslant c \,.\cdot\, a$ *и* $a \leqslant c \,\cdot.\, b$ *равносильны;*

(13) $(ab) \,.\cdot\, a \geqslant b$ *и* $(ab) \,\cdot.\, b \geqslant a$.

В любой полугруппе с делением

(14) *элемент* $(a \,.\cdot\, b) \,\cdot.\, c = (a \,\cdot.\, c) \,.\cdot\, b$ *является наибольшим среди таких* x, *что* $bxc = a$;

(15) $a \,.\cdot\, (bc) = (a \,.\cdot\, b) \,.\cdot\, c$ *и* $a \,\cdot.\, (bc) = (a \,\cdot.\, c) \,\cdot.\, b$.

Доказательства этих утверждений несложны, и мы оставляем их в качестве упражнений (см. Дилуорс [1] или Дюбрей-Жакотен, Лезье, Круазо [1, р. 153—154]). В равенствах (10) и (11) существование левой части обеспечивает существование выражения, стоящего справа.

Почти очевиден и следующий результат.

Лемма 2. *В любом у-группоиде функции* $a \,.\cdot\, b$ *и* $a \,\cdot.\, b$ *изотонны по* a *и антиизотонны по* b.

Отсюда получается, что $a \,.\cdot\, (b \wedge c) \geqslant a \,.\cdot\, b$ и $a \,.\cdot\, (b \wedge c) \geqslant a \,.\cdot\, c$. Из определения $\vee$ как точной верхней грани сразу следует неравенство (16) в следующей лемме.

Лемма 3. *В любой решетке с делением*

(16) $a \,.\cdot\, (b \wedge c) \geqslant (a \,.\cdot\, b) \vee (a \,.\cdot\, c)$ *и симметрично;*

(17) $b \leqslant a \,.\cdot\, (a \,\cdot.\, b)$ *и* $b \leqslant a \,\cdot.\, (a \,.\cdot\, b)$.

Поскольку $(a \,\cdot.\, b)\, b \leqslant a$ (по определению элемента $a \,\cdot.\, b$), то первое из неравенств (17) вытекает из определения элемента $a \,.\cdot\, (a \,\cdot.\, b)$. Истинность второго обеспечивается симметрией.

Следствие. *Всякий целый элемент* a *решетки с делением, имеющей единицу, удовлетворяет неравенствам*

(18) $a \leqslant 1 \,.\cdot\, (1 \,\cdot.\, a) \leqslant 1$ *и* $a \leqslant 1 \,\cdot.\, (1 \,.\cdot\, a) \leqslant 1$.

Доказательство. Так как $a \leqslant 1$, то

$$1 \,\cdot.\, a \geqslant 1 \,\cdot.\, 1 = 1.$$

Значит, по лемме 2,

$$1 \,.\cdot\, (1 \,\cdot.\, a) \leqslant 1 \,.\cdot\, 1 = 1.$$

С другой стороны, так как $(1 \,\cdot.\, a)\, a \leqslant 1$, то $1 \,.\cdot\, (1 \,\cdot.\, a) \geqslant a$, чем и завершается доказательство первого неравенства. Истинность второго следует из соображений симметрии.

Полные l-группоиды. Большинство решеток с делением, появляющихся в приложениях, являются полными и удовлетворяют бесконечным дистрибутивным законам

$$a\left(\bigvee b_\beta\right)=\bigvee (ab_\beta), \quad \left(\bigvee a_\alpha\right)b=\bigvee (a_\alpha b). \tag{19}$$

Это приводит нас к следующему определению.

Определение. *Полным* l-группоидом (*cl-группоидом*) называется полная решетка с бинарным умножением, обладающим свойством (19). cl-группоид с ассоциативным умножением называется cl-полугруппой, а если он к тому же имеет 1 — *cl-моноидом*.

Подмодули кольца[1]) (пример 3 из § 1) образуют типичный cl-группоид; (19) здесь следует из того, что участвующие операции все являются конечноместными (бинарными), — мы опускаем детали. Далее, обобщая теорему V.24, касающуюся полных брауэровых решеток, мы покажем, что в большинстве cm-решеток деления определены.

Теорема 5. *В любом cl-группоиде $a\,.\cdot\,b$ существует, если $bx \leqslant a$ для некоторого x, и $a\,\cdot .\,b$ существует, если $yb \leqslant a$ для некоторого y.*

Доказательство. Пусть u — точная верхняя грань множества всех x_α таких, что $bx_\alpha \leqslant a$. Тогда

$$bu=b\left(\bigvee x_\alpha\right)=\bigvee bx_\alpha \leqslant a$$

в силу (19); значит,

$$u=a\,.\cdot\,b.$$

Существование $v=b\,\cdot .\,a$ при сделанных предположениях устанавливается аналогично.

Следствие 1. *Любой cl-группоид с нулем допускает деление.*

Используя теорему 3, получаем

Следствие 2. *Если R — какое-нибудь ассоциативное кольцо, то как cl-полугруппа всех его подмодулей, так и cl-полугруппа всех двусторонних идеалов кольца R допускают деление.*

В самом деле, если H и K — подкольца в R, то $H\,.\cdot\,K$ и $H\,\cdot .\,K$ будут правым и левым частными для H по K в смысле теории идеалов. Случай $H=0$ особенно важен; $0\,.\cdot\,K$ называется правым аннулятором для K. Мы обсудим эти идеи несколько позже.

Упражнения

1. Покажите, что каждая цепь является l-группоидом относительно любого изотонного умножения.

2. (а) Покажите, что положительные целые числа образуют решетку с делением относительно обычного умножения и порядка $m \mid n$ (делимость).

(б) Докажите тот же результат для неотрицательных целых чисел.

---

[1]) Рассматриваемого как модуль над собой. — *Прим. ред. и перев.*

3. Покажите, что неотрицательные целые числа образуют решетку с делением относительно обычной упорядоченности и, все равно, сложения или умножения.

4. Покажите, что положительный конус, состоящий из элементов $x \geqslant 1$, в любом l-моноиде является l-подмоноидом, не допускающим, за исключением тривиальных случаев, деления.

5. Покажите, что в любом коммутативном l-моноиде $b \leqslant a$: $(a : b)$.

6. Покажите, что любой l-группоид, удовлетворяющий условию обрыва возрастающих цепей, допускает деления, если неравенства $xa \leqslant b$ и $ay \leqslant b$ имеют решения x, y при всех a, b.

7. Постройте трехэлементный у-группоид с делением, не являющийся решеткой (Дюбрей-Жакотен, Лезье, Круазо [1, p. 152]).

8. Пусть G — коммутативный cl-моноид. Покажите, что наибольшая решетка с делением, содержащаяся в G, состоит из всех $a \in G$ таких, что $xa \leqslant 1$ для некоторого $x \in G$.

9. Пусть $\overline{G}$ обозначает пополнение непустыми сечениями направленной группы G, построенное, как в теореме XIII.24. Покажите, что $\overline{G}$ является решеткой с делением и l-моноидом.

10. Пусть M — коммутативный мультипликативный моноид с сокращением такой, что в нем из $ab = 1$ следует $a = b = 1$, и G — его обычное расширение до группы. Определим «v-идеал» в G как подмножество V, которое с любым $g \in G$ содержит и все gx (где $x \in M$).

(а) Покажите, что v-идеалы группы G образуют полную l-группу тогда и только тогда, когда в M справедливо: если $a^n | b^n c$ для фиксированных a, b, c и каждого положительного n, то $a | b$.

(б) Обобщите на некоммутативный случай.

6. Простейшие приложения

Нетрудно указать несколько простейших приложений рассмотренных идей. Например, l-моноиды идеалов (левых, правых и двусторонних) любого ассоциативного кольца довольно просто получаются из l-группоидов его аддитивных подгрупп («модулей») при помощи следующих понятий.

Определение. В у-группоиде M элемент a называется *подидемпотентным*, если $aa \leqslant a$; он называется *левоидеальным* элементом, если $xa \leqslant a$ для всех $x \in M$, и *правоидеальным* элементом, если $ax \leqslant a$ для всех $x \in M$. Элемент, который одновременно является лево- и правоидеальным, будем называть *идеальным элементом*.

Теорема 6. *Пусть L — произвольная l-полугруппа. Тогда правоидеальные элементы, левоидеальные элементы, а также (двусторонне) идеальные элементы l-полугруппы L образуют ее l-подполугруппы (подполугруппы и подрешетки).*

Доказательство. Случай правоидеальных элементов является типичным. Если a и b — правоидеальные элементы, то вследствие (1)

$$(a \wedge b)\, x \leqslant ax \leqslant a \quad \text{и} \quad (a \wedge b)\, x \leqslant bx \leqslant b$$

для всех $x \in L$; значит, $(a \wedge b)\, x \leqslant a \wedge b$. Далее, ввиду (5)

$$(a \vee b)\, x = ax \vee bx \leqslant a \vee b.$$

Наконец, в силу ассоциативности

$$(ab)\,x = a\,(bx) \leqslant ab.$$

Бинарные операции левого и правого деления определяют класс связей Галуа, имеющих разнообразные приложения [1]). Например, имеет место

Теорема 7. *Для любого фиксированного элемента c произвольной решетки L с делением соответствия $x \longmapsto c \mathbin{.\cdot} x = x^*$ и $y \longmapsto c \mathbin{\cdot.} y = y^+$ определяют на L связь Галуа.*

Доказательство. По определению связи Галуа (глава V) это означает, что указанные соответствия антиизотонны и что

$$x \leqslant c \mathbin{.\cdot} (c \mathbin{\cdot.} x) \quad \text{и} \quad x \leqslant c \mathbin{\cdot.} (c \mathbin{.\cdot} x) \text{ для всех } x.$$

Но эти неравенства уже были установлены нами.

Определение. Для любого $c \in L$, где L — решетка с делением, элемент $x \in L$ называется *c-замкнутым справа*, если $x = c \mathbin{.\cdot} (c \mathbin{\cdot.} x)$ и *c-замкнутым слева*, если $x = c \mathbin{\cdot.} (c \mathbin{.\cdot} x)$.

Следствие 1. *Элемент $x \in L$ c-замкнут справа тогда и только тогда, когда $x = c \mathbin{.\cdot} y$ для некоторого y, и c-замкнут слева тогда и только тогда, когда $x = c \mathbin{\cdot.} y$ для некоторого y.*

Из равенства $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$ сразу следует, что пересечение любых двух c-замкнутых справа элементов является c-замкнутым справа элементом. С другой стороны, объединение двух таких элементов уже не обязательно будет c-замкнутым справа.

Отметим еще условие Дюбрея [2]): правое и левое c-замыкания элемента x определяются у него равенствами $\bar{x} = cx \mathbin{.\cdot} x$ и $\bar{x} = cx \mathbin{\cdot.} c$ соответственно.

Эти определения можно применить к l-полугруппе L всех подмодулей A, B, C, ... некоторого ассоциативного кольца (пример 3 из § 1). В этом случае связь Галуа, определяемая соответствиями $X \to C \mathbin{.\cdot} X$ и $Y \to C \mathbin{\cdot.} Y$, может быть получена из *полярности* (глава V), определяемой бинарным отношением $xy \in C$. Если C — правый идеал, то правым идеалом будет и $C \mathbin{.\cdot} X$, и, аналогично, $C \mathbin{\cdot.} X$ будет левым идеалом, если левым идеалом является C. Таким образом, мы имеем

Следствие 2. *Если C — (двусторонний) идеал ассоциативного кольца R, то C-замкнутые справа [слева] подмодули кольца R, рассматриваемого как модуль над собой, являются его правыми [левыми] идеалами.*

Понятие c-замыкания можно применить к аддитивной решетке с делением ограниченных субгармонических функций (см. § 4), определенных в некоторой области R. Тогда 0-замкнутыми функциями $0 : x$ будут в точности *гармонические* функции на R.

[1]) Дюбрей (Dubreil P.), Круазо (Croisot R.). — Collect. Math., 1954, 7, p. 193—203.

[2]) Dubreil P. — Bull. Soc. Math. France, 1953, 81, p. 289—306; и там же, 1955, 83, p. 166, заметка Лезье (Lesieur L.).

7. Целостные l-группоиды

Мы определим *целостный* l-группоид как l-группоид L, имеющий единицу e, являющуюся универсальной верхней гранью в L, так что $x \leqslant e$ для всех $x \in L$. Например, отрицательный конус любой l-группы является целостной в этом смысле m-решеткой. Более типичным представляется следующий

Пример 6. Пусть R — какое-нибудь кольцо с единицей 1 (мы не предполагаем ассоциативности[1])). Тогда (двусторонние) идеалы кольца R образуют целостную m-решетку с единицей $e = R$ и «нулем» $z = 0$.

Следующие результаты обобщают некоторые хорошо известные определения и теоремы об идеалах. (Заметим, что в целостном l-группоиде, определяемом отрицательным конусом l-группы, два элемента «взаимно просты» тогда и только тогда, когда они *дизъюнктны* в смысле главы XIV.)

Определение. *Максимальным* элементом целостного l-группоида называется всякий его элемент, покрываемый единицей e; *простой* элемент — это такой элемент p, что из $xy \leqslant p$ следует $x \leqslant p$ или $y \leqslant p$. Два элемента a, b l-группоида L называются *взаимно простыми*, если $a \vee b = e$.

Лемма 1. *Если элементы a и b взаимно просты, то*

$$x = xa \vee xb = (x \wedge a) \vee (x \wedge b) \text{ для всех } x. \tag{20}$$

Доказательство. Начнем с замечания о том, что поскольку $xy \leqslant xe = x$ и $xy \leqslant ey \leqslant y$, то

$$xy \leqslant x \wedge y \text{ для всех } x, y. \tag{21}$$

После этого (20) выводится из последовательности неравенств

$$x = xe = x(a \vee b) = xa \vee xb \leqslant (x \wedge a) \vee (x \wedge b) \leqslant x.$$

Лемма 2. *Если элементы a и b взаимно просты и $a \wedge b \leqslant x$, то*

$$x = (x \vee a) \wedge (x \vee b) = (x \wedge a) \vee (x \wedge b). \tag{22}$$

Доказательство. В любой решетке $(x \wedge a) \vee (x \wedge b) \leqslant x \leqslant (x \vee a) \wedge (x \vee b)$. При сделанных предположениях и с учетом (20) и (5)

$$(x \vee a) \wedge (x \vee b) = a[(x \vee a) \wedge (x \vee b)] \vee b[(x \vee a) \wedge (x \vee b)] \leqslant a(x \vee b) \vee b(x \vee a) = (ax \vee ab) \vee (bx \vee ba).$$

Далее, поскольку $ax \leqslant a \wedge x$ и $ab \leqslant a \wedge b = a \wedge (a \wedge b) \leqslant a \wedge x$, то $ax \vee ab \leqslant a \wedge x$. Аналогично, $bx \vee ba \leqslant b \wedge x$. Подстановкой получаем $(x \vee a) \wedge (x \vee b) \leqslant (a \wedge x) \vee (b \wedge x)$, чем и завершается доказательство.

[1]) Ассоциативный случай см. у Круля (Krull W. — Math. Z., 1928, 28, S. 481—503).

Лемма 3. *Если элементы x и y взаимно просты с a, то $x \wedge y$ и xy также взаимно просты с a.*

Это простая переформулировка того факта, что если $a \vee b = a \vee c = e$, то $a \vee bc = a \vee (b \wedge c) = e$.

Теорема 8. *Если элементы a и b взаимно просты, то интервал $[a \wedge b, e]$ изоморфен как решетка кардинальному произведению $[a, e] \times [b, e]$.*

Доказательство. Если $a \wedge b \leqslant x \leqslant e$, то положим $t = x \vee a$ и $u = x \vee b$; ясно, что $t \in [a, e]$ и $u \in [b, e]$. Обратно, если $t \in [a, e]$ и $u \in [b, e]$, определим $\varphi(t, u) = t \wedge u$. Это и будут взаимно однозначные соответствия между $[a \wedge b, e]$ и $[a, e] \times [b, e]$ и обратно. По лемме 2 $\varphi(x \vee a, x \vee b) = x$, а с другой стороны, так как $a \leqslant t$, то

$$t \leqslant (t \wedge u) \vee a \leqslant (t \vee a) \wedge (u \vee a) = t \vee a = t$$

$$(\text{так как } u \vee a = e).$$

Аналогично, $u = (t \wedge u) \vee b$. Следовательно, построенные отображения будут обратными друг для друга. Но они оба очевидным образом изотонны, и значит, являются изоморфизмами.

Теорема 9. *Каждый целостный l-группоид с дополнениями L является булевой алгеброй и при этом в нем $xy = x \wedge y$.*

Доказательство. Пусть $a \in L$ — произвольный элемент и a' — его дополнение. Тогда по теореме 8 a и a' лежат в центре решетки L; следовательно, L — булева алгебра. Далее, ввиду (20) и (5),

$$x \wedge a = (xa \vee xa') \wedge (xa \vee x'a) = xa \vee (x \wedge x')\, a \vee$$

$$\vee\, x(a' \wedge a) \vee (xa' \wedge x'a).$$

Все члены, кроме первого, равны 0, и значит, $x \wedge a = xa$. Ч. т. д.

Условие обрыва возрастающих цепей. Теперь предположим, что L — целостный l-группоид, в котором выполняется условие обрыва возрастающих цепей из § VIII.1. В примере 6 это имеет место в том случае, когда R является конечным расширением коммутативного (ассоциативного) кольца, удовлетворяющего условию обрыва возрастающих цепей, или когда R — кольцо многочленов над таким кольцом.

Каждому максимальному элементу m_i l-группоида L сопоставим множество M_i всех элементов x, которые взаимно просты со всеми максимальными $m_j \neq m_i$. По лемме 3 это будет дуальный идеал в L (в теоретико-решеточном смысле), замкнутый относительно умножения. Следовательно, он будет целостным l-группоидом. В теории идеалов идеалы объединения $\bigcup M_i$ называются «однократными». В алгебраической теории чисел это будут степени простых идеалов. Поэтому следующий результат можно рассматривать как частичное обобщение основной теоремы теории идеалов.

Теорема 10. *Если L — целостный l-группоид, удовлетворяющий условию обрыва возрастающих цепей, то подрешетка S, порожденная в нем множествами M_i однократных элементов, является ограниченным кардинальным произведением $M_1 \times M_2 \times M_3 \times \ldots$ подрешеток M_i.*

Доказательство. Ввиду (9) каждое M_i является интервалом (дуальным идеалом), замкнутым относительно умножения. Далее, если $x \in M_i$ и $y \in M_j$ (где $i \neq j$), то $x \vee y$ не содержится ни в каком максимальном элементе и потому $x \vee y = e$. То же самое в силу (9) будет иметь место и для $x = x_1 \ldots x_n$ (где $x_i \in M_i$) и $y \in M_{n+1}$. Используя теорему 8 и индукцию, получаем, что подрешетка (интервал), порожденная в L интервалами M_i, является их кардинальным произведением. При наличии условия обрыва возрастающих цепей мы можем перенести этот результат и на бесконечное число множителей при условии, что лишь конечное число компонент отлично от e.

Предостережение. Хотя все M_i замкнуты относительно умножения, их кардинальное произведение может оказаться не замкнутым.

Упражнения к §§ 6—7

1. Пусть G — l-группоид с универсальной нижней гранью O. Покажите, что из выполнимости в нем дистрибутивного закона $a \bigvee_{\varnothing} x_\alpha = \bigvee_{\varnothing} a x_\alpha$ для пустого множества $\varnothing$ следует, что O является мультипликативным нулем.

2. Покажите, что группоид с делением является квазигруппой с делением тогда и только тогда, когда в нем $x (y \,.\!\cdot\, x) = (y \cdot\!.\, x)\, x$ для всех x, y.

3. Покажите, что в группоиде с делением G, имеющем e, частные $a \,.\!\cdot\, a$ и $a \cdot\!.\, a$ являются неотрицательными идемпотентами.

4. Назовем у-группоид с e *целозамкнутым*, если в нем $a \,.\!\cdot\, a = a \cdot\!.\, a = e$ для всех a. Покажите, что любой моноид с делением, в котором выполняются законы сокращения, целозамкнут [1]).

5. Покажите, что идеалы $K > \{0\}$ рационального поля $\mathbf{Q}$ образуют коммутативный cl-моноид, в котором для идеала H, состоящего из всех дробей со знаменателями, являющимися степенями некоторого фиксированного простого p, частное $E : H$ не существует.

*6. Покажите, что свободную модулярную решетку с тремя порождающими нельзя превратить в целостный l-группоид (Уорд и Дилуорс).

*7. Покажите, что в целостном l-группоиде следующие условия равносильны и обеспечивают дистрибутивность: $a : b \vee b : a = e$, $a : (b \wedge c) = (a : b) \vee \vee (a : c)$, $(b \vee c) : a = (b : a) \vee (c : a)$.

*8. Покажите, что если в целостном группоиде с делением L будет $e : (e : : x) = x$ и $e : (xy) = (e : x)(e : y)$, то L — коммутативная l-группа [2]) (Сертен).

---

[1]) Упр. 3—4 содержат результаты, впервые доказанные в книге Дюбрей-Жакотен, Лезье, Круазо [1, р. 161—162]. Упр. 9 — это теорема 10 в книге Дюбрей-Жакотен, Лезье, Круазо [1, р. 165].

[2]) Упр. 7 и 8 — это соответственно упр. 5 и 8 к § XIII.3 из [LT2], где двоеточием (как и в [Fu]) обозначается правое (левое в смысле настоящего издания) деление. — *Прим. перев.*

*9. Покажите, что в условно полной полурешетке с делением условия $a\ .\cdot\ a = e$ и $a \cdot .\ a = e$ равносильны.

*10. (а) Покажите, что $aa' \equiv 0$ в любом целостном l-группоиде G с дополнениями, имеющем единицу e и наименьший элемент 0.

(б) Убедитесь, что G является алгеброй Ньюмена (§ II.13), а если G — l-моноид, то булевой алгеброй.

8*. Коммутационные решетки

Прежде чем приступить к обобщению более глубоких свойств идеалов алгебраических чисел, мы набросаем некоторые контуры алгебры коммутации в группах и алгебрах Ли, имеющей естественную связь с теорией решеток.

Определение. *Коммутационной решеткой* называется полная алгебраическая решетка L, которая является *y-группоидом* с нулем 0 относительно *коммутативного* (но не обязательно ассоциативного) $\vee$*-непрерывного* умножения $[ab]$ такого, что

(23) $$[ab] \leqslant a \vee b;$$

(24) $$[a(b \vee c)] \leqslant [ab] \vee [ac] \vee [[ab]c];$$

(25) $$\text{если } [ab] \leqslant b \text{ и } [ac] \leqslant c, \text{ то } [a[bc]] \leqslant [bc],$$

для всех $a, b, c \in L$. Здесь «$\vee$-непрерывность» означает, что

(26) если $b_\delta \uparrow b$ (как *направленное множество*),

то $[ab_\delta] \uparrow [ab]$.

Пример 7. Пусть G — произвольная группа и $L(G)$ — решетка всех ее подгрупп. Для любых $S, T \in L(G)$ пусть $[S, T]$ обозначает подгруппу группы G, порожденную всеми коммутаторами $[s, t] \doteq s^{-1}t^{-1}st$, где $s \in S$, $t \in T$. Тогда $L(G)$ является коммутационной решеткой относительно включения и «умножения» $[S, T]$.

Набросок доказательства. Поскольку $[t, s] = [s, t]^{-1}$, мы получаем (23). Так как $[a, bc] = [a, c][c, [a, b]]$, то отсюда следует (24). Наконец, (25) выполняется ввиду того, что $[S, T] \leqslant T$ означает инвариантность T относительно всех внутренних автоморфизмов, индуцируемых подгруппой S. ($\vee$-непрерывность (26) обеспечивается алгебраичностью участвующих операций — все они представляют собой зависимости конечного характера).

Теперь покажем, что различные свойства коммутации в группах выполняются в произвольных коммутационных решетках, например, в любой такой решетке, связанной с подалгебрами кольца Ли или алгебры Ли [1]).

[1]) Мы обобщаем рассуждения на с. 284 в [LT2], переходя от коммутантов нормальных подгрупп к коммутантам подгрупп общего вида.

Лемма 1. *В любой коммутационной решетке*

(27) *если* $[ab] \leqslant b$ *и* $[ac] \leqslant c$, *то* $[a(b \vee c)] \leqslant b \vee c$;

(27′) *если* $[ab] \leqslant a$ *и* $[ac] \leqslant a$, *то* $[a(b \vee c)] \leqslant a$.

Доказательство. При выполнении указанных условий подстановкой в (24) получаем:

$$[a(b \vee c)] \leqslant [ab] \vee [ac] \vee [[ab]c] \leqslant b \vee c \vee [bc] \leqslant b \vee c$$

(ввиду (23)),

$$[a(b \vee c)] \leqslant [ab] \vee [ac] \vee [[ab]c] \leqslant a \vee a \vee [ac] \leqslant a \vee a = a$$

(ввиду P1).

(Хотя условие (25) и не использовалось здесь, кажется неправдоподобным, чтобы его можно было аналогичным образом вывести из (23) и (24).)

Лемма 2. *Идеальные элементы любой коммутационной решетки L образуют подрешетку и подгруппоид, который является l-группоидом со свойством* (21).

Доказательство. По определению (§ 6) идеальные элементы в L — это такие элементы $a \in L$, что $[Ia] = [aI] \leqslant a$. В примере 7 ими являются нормальные подгруппы группы G, и в этом случае доказываемое утверждение хорошо известно. В произвольном у-группоиде, если $[Ib] \leqslant b$ и $[Ic] \leqslant c$, то $[I(b \wedge c)] = [Ib] \wedge [Ic]$ в силу изотонности. Поэтому идеальные элементы образуют $\wedge$-полурешетку. Кроме того, ввиду (24) и (23) для них в любой коммутационной решетке

$$[I(b \vee c)] \leqslant [Ib] \vee [Ic] \vee [[Ib]c] \leqslant b \vee c \vee [bc] \leqslant b \vee c,$$

и значит, идеальные элементы составляют подрешетку. Но (24) показывает, что она будет и подгруппоидом (т. е. замкнута относительно умножения). Наконец, поскольку $[ab] \leqslant [aI]$ (в силу изотонности) и $[ab] \leqslant [Ib]$, то $[ab] \leqslant [aI] \wedge [Ib] \leqslant a \wedge b$ для идеальных элементов, — мы получаем (21).

Лемма 3. *В любой коммутационной решетке $a \,.\!\cdot\, a$ и $O \,.\!\cdot\, a$ определены для всех a; кроме того, идеальные элементы образуют решетку с делением, в которой*

(28) $$[ab] \leqslant a \wedge b.$$

Доказательство. В силу (27′), если $[ab] \leqslant a$ и $[ac] \leqslant a$, то $[a(b \vee c)] \leqslant a$; поэтому множество элементов $x \in L$ таких, что $[ax] \leqslant a$, является идеалом. Ввиду (26) объединение всех элементов x этого идеала также не превосходит a, и значит, оно и есть $a \,.\!\cdot\, a$. Аналогичные рассуждения доказывают существование $O \,.\!\cdot\, a$. Далее, (28) выполняется в решетке идеальных элементов, поскольку вследствие изотонности будет $[ab] \leqslant [aI] \leqslant a$ и $[ab] \leqslant$

$\leqslant [Ib] \leqslant b$. Наконец, в этой решетке определено деление, так как если в ней $[ab] \leqslant d$ и $[ac] \leqslant d$, то

$$[a(b \vee c)] \leqslant [ab] \vee [ac] \vee [[ab]c] \leqslant d \vee d \vee [ac] \leqslant d \vee d = d,$$

и мы можем применить (26) к идеалу, состоящему из элементов $b \in L$ таких, что $[ab] = d$, чтобы построить $d \mathrel{.\cdot} a$ для произвольных $a, d \in L$.

Теперь в коммутационной решетке общего вида рекурсивно определим: $I^1 = I$ и $I^{n+1} = [I^n I]$, а также ${}^0I = O$ и ${}^{n+1}I = ({}^nI) : : I$. Будем говорить, что L *нильпотентна*, если $I^n = O$ для некоторого n. Последовательность элементов I^n назовем *нижним* центральным рядом, а двойственную ей последовательность элементов ${}^mI$ — *верхним* центральным рядом в L.

Теорема 11. *В любой нильпотентной коммутационной решетке верхний и нижний центральные ряды имеют одинаковую длину r. Если $I = a_0 > a_1 > a_2 > \ldots > a_r = O$ — какая-нибудь нильпотентная цепь и $a_iI \leqslant a_{i+1}$, то*

(29) $$I^{i+1} \leqslant a_i \leqslant {}^{r-i}I \text{ для всех } i = 1, \ldots, r.$$

Упражнения

1. Докажите в деталях, что в примере 7 $L(G)$ всегда будет коммутационной решеткой.

2. Покажите, что аддитивная подгруппа любого кольца Ли образует коммутационную решетку относительно умножения, определенного в примере 3.

3. Докажите, что в примере 7 $S \mathrel{.\cdot} S$ существует и совпадает с нормализатором подгруппы S и что $1 \mathrel{.\cdot} S$ существует и является централизатором подгруппы S (здесь S — произвольная подгруппа).

4. Докажите, что если в примере 7 G является свободной группой с двумя порождающими, то $L(G)$ не будет l-группоидом.

5. Пусть L — коммутационная решетка конечной длины. Покажите, что $O \mathrel{.\cdot} a$ и $a \mathrel{.\cdot} a$ существуют для всех $a \in L$.

6. Покажите, что идеальные элементы любой коммутационной решетки удовлетворяют тождеству Ф. Холла: $[a[bc]] = [[ab]c] \vee [[ac]b]$.

7. Пусть в коммутационной решетке $c^1 = [II]$ и рекурсивно $c^{m+1} = [c^m c^m]$. Докажите, что если $c^n = O$, то $I^{2^n} = O$ (Ф. Холл).

(По поводу других свойств коммутационных решеток см. работы Маклейна (McLain D. H. — Proc. Glasgow Math. Ass., 1956, 3, p. 38—44), И. В. Стеллецкого (Докл. АН СССР, 1959, 128, с. 680—683), Шенкмана (Schenkman E. — Proc AMS, 1958, 9, p. 375—381).)

Назовем *кольцоидом* алгебру R с бинарным умножением и (может быть) другими бинарными операциями f_α такими, что $af_\alpha(b, c) = f_\alpha(ab, ac)$ и $f_\alpha(a, b)c = f_\alpha(ac, bc)$ для всех $a, b, c \in R$. *Модуль* над кольцоидом R определим как подмножество $H \subset R$, для которого если $b, c \in H$, то $f_\alpha(b, c) \in H$, а *идеал* — как подмножество K, такое, что если $b \in K$ и $a \in R$, то $\{ab, ba\} \subset K$.

8. Докажите, что если в кольцоиде R $Oa = aO = O$ для всех a, то $f_\alpha(O, O) = O$ для всех f_α.

9. Покажите, что «мультипликативные идеалы» можно рассматривать как идеалы кольцоида.

10. Покажите, что модули над кольцоидом образуют cm-решетку с делением, в которой идеалы составляют cm-подрешетку с делением.

11. Перенесите результаты упр. 10 на S-модули, т. е. на модули H, которые для заданного подмножества $S \subset R$ содержат все произведения sx и xs (где $x \in H$, $s \in S$).

9. Максимальные и простые элементы

Бо́льшая часть коммутативной теории идеалов без труда переносится на целостные l-группоиды общего вида. В §§ 9—10 мы проиллюстрируем это на примере теории *делимости* (разложение на простые множители). С этой целью введем три необходимые понятия, которые оказываются равносильными в любой естественно упорядоченной полугруппе, допускающей теорему об однозначности разложения на множители.

Определение. Пусть M — произвольный целостный у-группоид. Элемент $m \in M$ называется *максимальным*, если он покрывается элементом 1; элемент $p < 1$ такой, что из $ab \leqslant p$ следует $a \leqslant p$ или $b \leqslant p$, называется *простым*; элемент $p < 1$ такой, что из $ab = p$ следует $a = p$ или $b = p$, называется *неразложимым*.

Лемма 1. *В любом целостном у-группоиде всякий максимальный элемент является простым и неразложимым.*

Доказательство. Пусть элемент m максимален и $xy = m$. Тогда $x = m$ или $x = 1$, поскольку $m = xy \leqslant x \cdot 1 = x$, а m максимален. Аналогично, $y = m$ или $y = 1$. Так как при $x = y = 1$ будет $m = xy = 1$, то либо $x = m$, либо $y = m$, так что m неразложим.

Далее, если не будет $x \leqslant m$, то $x \vee m = 1$. Следовательно, если $xy \leqslant m$, но $x \nleqslant m$, то

$$y = 1 \cdot y = (x \vee m)\, y \leqslant xy \vee my = m \vee m \cdot 1 = m,$$

так что m — простой элемент.

Теперь применим введенные определения к коммутативным моноидам с сокращением, имея в виду в первую очередь целостные кольца.

Лемма 2. *Пусть G — коммутативный моноид с сокращением. Тогда отношение $a \mid b$ определяет на множестве $P(G)$ классов ассоциированных элементов структуру целостного у-моноида. Для любого $a \in P(G)$ отображение $x \mapsto ax$ является порядковым изоморфизмом у-моноида $P(G)$ на решеточный идеал A, состоящий из элементов $c \leqslant a$.*

Для того чтобы доказать, что $P(G)$ является у-моноидом, нужно из $ax \sim ay$ вывести $x \sim y$. Но если $ax \mid ay$, то $ay = ya = xaz = axz$ для некоторого $z \in G$, откуда $y = xz$ вследствие закона сокращения.

Пусть теперь G — мультипликативный моноид ненулевых элементов коммутативной *области целостности* D. Тогда $a \sim b$ означает, что a и b порождают один и тот же ненулевой главный идеал $(a) = (b)$ в D. Отсюда получается

Следствие 1. *Ненулевые главные идеалы любой коммутативной области целостности D образуют коммутативный естественно упорядоченный моноид $S(D)$.*

Поскольку $(ab) \subset (a)(b)$, срабатывает следствие 1 из теоремы 1, и мы получаем

Следствие 2. *Ненулевые главные идеалы любой коммутативной области целостности образуют y-моноид, изоморфный отрицательному конусу некоторой направленной группы.*

Лемма 3. *В любом целостном y-моноиде, удовлетворяющем условию обрыва возрастающих цепей, каждый элемент $c \neq 1$ представим в виде произведения неразложимых сомножителей.*

Доказательство. Если это не так, то непустое множество всех элементов, *не* разложимых в произведение указанного вида, должно содержать максимальный элемент c. Этот элемент c не может быть неразложимым (т. е. покрываться элементом 1), поскольку иначе заключение леммы, конечно, выполнялось бы. Но если c разложим, то $c = ab$, где $a > c$ и $b > c$. Поскольку c является максимальным среди элементов, не представимых в виде произведения неразложимых сомножителей, должно быть $a = p_1 \ldots p_r$ и $b = q_1 \ldots q_s$, откуда $c = p_1 \ldots p_r q_1 \ldots q_s$, что невозможно.

Следующий пример показывает, что большего получить без дополнительных ограничений не удастся.

Пример 8. Пусть G — аддитивный моноид пар (m, n) неположительных целых чисел, сумма которых $m + n$ четна. Тогда $(-2, 0) + (0, -2) \leqslant (-1, -1)$, и таким образом, элемент $(-1, -1)$ является максимальным, но не простым. Далее, так как $(-2, -2) = (-2, 0) + (0, -2) = (-1, -1) + (-1, -1)$, теорема об однозначности разложения не получается.

Как мы сейчас покажем, необходимое дополнительное ограничение носит именно *решеточный* характер.

Теорема 12. *Пусть L — l-моноид, изоморфный отрицательному конусу направленной группы и удовлетворяющий условию обрыва возрастающих цепей. Тогда каждый элемент $c \neq 1$ в L однозначно представим в виде произведения простых сомножителей.*

Доказательство следует из результатов § XIII.6.

Следствие (Жафар [1]). *Для ненулевых целых элементов поля алгебраических чисел $F = \mathbf{Q}(\theta)$ тогда и только тогда выполняется теорема об однозначности разложения на множители, когда образуемая ими естественно упорядоченная полугруппа является решеткой.*

Доказательство. Целые элементы образуют в F подкольцо. Далее, так как решетка всех идеалов поля F удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей (глава VIII), ему будет удовлетворять и множество главных идеалов. Теперь мы привлекаем следствие 2 из леммы 2.

На самом деле достаточно, чтобы упомянутая естественно упорядоченная полугруппа была *полурешеткой* относительно операции

---

[1]) Jaffard P. Les systèmes d'idéaux. — Paris, 1960, p. 81, теорема 4.

взятия наибольшего общего делителя. Необходимые и достаточные условия для этого см. в книге Поларда (Pollard H. The theory of algebraic numbers. — Wiley, 1950, теорема 9.5).

Эквивалентность Артина. Теперь рассмотрим одну интересную конгруэнцию, введенную Артином в коммутативном l-моноиде с делением, имеющем 1 (например, в l-моноиде идеалов коммутативного кольца R с единицей 1). Она тесно связана с равенством $x(1:x) = 1$, которое тогда и только тогда выполняется в l-моноиде с делением, когда он является l-группой!

Два элемента a, b такого l-моноида L называются *эквивалентными в смысле Артина*, если $1:a = 1:b$. По теореме 7 это равносильно тому, что $a^{**} = b^{**}$, где по определению $x^* = 1:x$, так что получается полная аналогия с отношением эквивалентности, изучавшимся в теореме V.26 Гливенко. Здесь в самом деле имеется связь с тождеством $x(1:x) = 1$, поскольку из него выводится

$$a = a1 = a(1:a)(1:(1:a)) = 1(1:(1:a)) = 1:(1:a).$$

Если бы эквивалентность Артина была конгруэнцией относительно всех операций, то эквивалентные в смысле Артина элементы образовывали бы l-группу. При выполнении условия обрыва возрастающих цепей можно доказать однозначность разложения на простые множители (см. § XIII.6).

По теореме Гливенко эквивалентность Артина будет конгруэнцией по объединениям. Она также будет конгруэнцией и по умножению, поскольку если $a^* = b^*$, то

$$1:ax = (1:a):x = (1:b):x = 1:bx.$$

Для того чтобы она была конгруэнцией по пересечениям, необходима и достаточна *целозамкнутость* l-моноида L в том смысле, что $a:a = 1$ для всех $a \in L$; это доказано в книге Дюбрей-Жакотен, Лезье, Круазо [1, p. 243].

10. Абстрактная теория идеалов

Общая теория идеалов в нётеровых кольцах концентрируется вокруг понятий примарного и неприводимого идеалов и радикала кольца. Как было впервые установлено Уёрдом и Дилуорсом [1, глава IV], бо́льшая часть этой теории сохраняется в нётеровых l-моноидах общего вида. Развитию этой идеи и посвящен настоящий раздел [1]).

Определение. Целостный коммутативный l-моноид называется *нётеровым*, если он является нётеровым как решетка.

---

[1]) Эту идею имел в виду Круль (Krull W. — S.-B. Phys.-Med. Soc. zu Erlangen, 1924, **56**, S. 47—63), развивавший ее впоследствии во многих более поздних работах.

Элемент q l-моноида L называется (правым) *примарным*, если из $ab \leqslant q$ следует, что $a \leqslant q$ или $b^n \leqslant q$ для некоторого целого n. *Радикалом* [1]) $\sqrt{a}$ элемента $a \in L$ называется объединение всех $x \in L$ таких, что $x^n \leqslant a$ для некоторого $n = n(x, a)$.

Лемма 1. *В любом целостном коммутативном l-моноиде L, если $x^m \leqslant a$ и $y^n \leqslant a$, то $(x \vee y)^{m+n} \leqslant a$.*

Доказательство. Вследствие дистрибутивности

$$(x \vee y)^{m+n} = \bigvee_{k=0}^{m+n} x^k y^{m+n-k}.$$

Если $k \leqslant m$, то $y^{m+n-k} \leqslant ay^{m-k} \leqslant a$, а если $k > m$, то, аналогично, $x^k \leqslant a$; значит, $x^k y^{m+n-k} \leqslant a$ для всех $k = 0, 1, \ldots, m+n$. Отсюда и следует требуемое заключение.

Следствие 1. *В любом целостном коммутативном l-моноиде L множество элементов $x \in L$ таких, что $x^m \leqslant a$ для некоторого $m \in \mathbf{Z}^+$, является (решеточным) идеалом.*

В нётеровой решетке каждый идеал главный и потому содержит объединение всех своих элементов. Мы получаем

Следствие 2. *В любом нётеровом l-моноиде $(\sqrt{a})^n \leqslant a$ для некоторого наименьшего положительного целого n — «показателя» элемента a. Следовательно, $\sqrt{a}$ является своим собственным радикалом.*

Лемма 2. *В нётеровом l-моноиде элемент q примарен тогда и только тогда, когда*

(30) *из $ab \leqslant q$ и $a \nleqslant q$ следует, что $b \leqslant \sqrt{q}$.*

Доказательство. Если элемент q является примарным, то (30) очевидно, поскольку $b^n \leqslant q$ равносильно неравенству $b \leqslant \sqrt{q}$. Обратно, из (30) следует, что $b^n \leqslant (\sqrt{q})^n \leqslant q$, где n — показатель элемента q, а тогда q примарен по определению.

Лемма 3. *Радикал $\sqrt{q}$ любого примарного элемента q нётерова l-моноида является простым элементом.*

Доказательство. Если $ab \leqslant \sqrt{q}$, то $(ab)^n = a^n b^n \leqslant q$ для некоторого n. Поэтому либо $a^n \leqslant q$ либо $(b^n)^k = b^{nk} \leqslant q$ для некоторого конечного k. В первом случае $a \leqslant \sqrt{q}$, а во втором $b \leqslant \sqrt{q}$, и значит, по определению (§ 9) элемент $\sqrt{q}$ является простым.

В общем случае лемма 3 не допускает обращения даже для идеалов: степени простых идеалов не обязаны быть примарными —

---

[1]) По поводу других теоретико-решеточных подходов к понятию радикала см. работы Амицура (Amitsur S. A. — Amer. J. Math., 1952, **74**, p. 775—786; 1954, **76**, p. 100—136) и Беренса (Behrens E.-A. — Math. Z., 1956, **64**, p. 169—182).

см. контрпример в книге Зарисский О., Самюэль П. Коммутативная алгебра, т. 1. — М.: ИЛ, 1963, с. 180.

Однако имеет место

Лемма 4. *Если m — максимальный элемент нётерова l-моноида, то любая степень $m^k = q$ элемента m является примарным элементом.*

Доказательство. Допустим, что $ab \leqslant q$, но $b \nleqslant m = \sqrt{q}$. Тогда $m \vee b = 1$, поскольку элемент m максимален; следовательно,

$$1 = (m \vee b)^k = m^k \vee cb, \quad \text{где} \quad c = \bigvee_{j=1}^{k} m^{j-1} b^{k-j}.$$

Значит, $a = a \cdot 1 = am^k \vee c(ab) \leqslant m^k \vee m^k = q$.

Лемма 5. *Любое конечное пересечение примарных элементов q_j, имеющих одинаковый радикал $p = \sqrt{q_j}$, является примарным элементом с радикалом p.*

Доказательство. Пусть $c = q_1 \wedge \ldots \wedge q_r$; ясно, что $\sqrt{c} = \bigwedge \sqrt{q_j} = p$. Предположим, что $ab \leqslant c$, но $a \nleqslant c$. Тогда $a \nleqslant q_j$ для некоторого j и в то же время $ab \leqslant c \leqslant q_j$; значит, по лемме 2 $b \leqslant \sqrt{q_j} = p = \sqrt{c}$. Ч. т. д.

Лемма 6. *Пусть $c = q_1 \wedge \ldots \wedge q_r$ — несократимое пересечение примарных элементов q_j, имеющих различные радикалы p_j. Тогда элемент c не является примарным.*

Доказательство. Какой-нибудь из радикалов $p_j = \sqrt{q_j}$, скажем, p_1 будет минимальным. Тогда $p_j \nleqslant p_1$ для $j > 1$; пусть n — максимальный из показателей элементов q_j. Поскольку элемент p_1 простой, $(p_2 \ldots p_r)^n \nleqslant p_1$; в то же время $(p_2 \ldots p_r)^n \leqslant q_2 \wedge \ldots \wedge q_r$. Отсюда

$$q_1 (p_2 \ldots p_r)^n \leqslant q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_r = c,$$

где $q_1 \nleqslant c$ и $((p_2 \ldots p_r)^n)^m \nleqslant p_1$ для *любого* m. Теперь положим $b = (p_2 \ldots p_r)^n$; мы показали, что $q_1 b \leqslant c$, но $b^m \leqslant q_1$ не может быть ни при каком m, поскольку отсюда получилось бы, что $b^m \leqslant p_1$, а это, как мы показали, не так. Таким образом, элемент c *не* является примарным.

Идеалы в нётеровых кольцах. Хотя некоторые части теории идеалов нётеровых колец сохраняются и в общих (коммутативных) нётеровых целостных l-моноидах, к ним не относится классический результат о том, что *каждый неприводимый идеал примарен.* Это связано с некоторыми специальными свойствами идеалов нётеровых колец. Назовем элемент q коммутативного l-моноида M *главным*, если из $b \leqslant q$ следует, что $qc = b$ для некоторого $c \in M$. Во всяком (коммутативном) нётеровом кольце R l-моноид $M = J(R)$ всех его идеалов содержит *подмоноид* S, состоящий из главных элементов (главных идеалов), такой, что каждый идеал $a \in M$ является объединением конечного числа идеалов $x_i \in S$. Уорд и Дилуорс [1, теорема 11.2] показали, что каждый неприводимый элемент примарен в любом нётеровом модулярном l-моноиде, содержащем такой подмоноид S (см. ниже упр. 4).

В решетках связь между делимостью с одной стороны и модулярностью или дистрибутивностью с другой, в общем, оказывается удивительно слабой. Все же интересно было бы выяснить, для каких колец решетка всех идеалов дистрибутивна [1]). Известно, что для максимальных порядков полей алгебраических чисел, порожденных одним алгебраическим числом, это равносильно целозамкнутости [2]).

Можно также отметить, что свойства дистрибутивной решетки всех *алгебраических многообразий* в аффинном или проективном пространстве, введенной в § VIII.3, определяют свойства радикальных идеалов в соответствующем кольце многочленов, поскольку поляра любого алгебраического многообразия является радикальным идеалом (обратное имеет место над комплексным полем).

11. Основная теорема теории идеалов

Теперь выясним, в какой мере основная теорема теории идеалов, впервые доказанная Дедекиндом, может быть получена в теории l-полугрупп. Мы имеем в виду разложение на простые множители в любом конечном расширении $F = \mathbf{Q}(\theta)$ рационального поля $\mathbf{Q}$ — в *поле алгебраических чисел*. Если E — подкольцо всех целых алгебраических чисел в F, то *дедекиндовым идеалом* в F называется E-модуль $A > 0$ над F такой, что

(i) $nA \subset E$ для некоторого рационального целого $n \in Z$.

Простые соображения показывают, что дедекиндовы идеалы в F образуют коммутативный моноид с делением $S(F)$, единицей которого является E, а нулем — 0. Кроме того, элементами «отрицательного конуса», состоящего из дедекиндовых идеалов J, содержащихся в E, являются в точности обычные идеалы кольца E, а для них выполняется условие обрыва возрастающих цепей (глава VIII). Чтобы дать простую формулировку этих результатов, введем еще одно необходимое понятие.

Определение. *Дедекиндовым* l-моноидом называется коммутативный l-моноид с делением, отрицательный конус которого удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей. Любой нётеров l-моноид является целостным дедекиндовым l-моноидом.

---

[1]) Новейшие результаты по этой теме отражены в обзоре Маркова В. Т. и др. [2]. — *Прим. ред.*

[2]) Биркгоф (Birkhoff G. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1934, 20, p. 571—573).

Лемма 1. *Дедекиндовы идеалы любого поля алгебраических чисел F образуют дедекиндов l-моноид.*

Лемма 1 подытоживает результаты двух последних параграфов. С другой стороны, переформулировкой леммы 1 из § 5 получается

Лемма 2. *Дедекиндов l-моноид S является атомной l-группой тогда и только тогда, когда в нем $x(1:x) = 1$ для всех x.*

В силу результатов главы XIII целые элементы любой атомной l-группы однозначно разлагаются в произведение простых элементов. Поэтому, чтобы доказать теорему об однозначности разложения на множители для идеалов произвольного поля алгебраических чисел, достаточно показать, что $A(E:A) = E$ для любого дедекиндова идеала A. Посмотрим, какая часть доказательства этого факта может быть проведена в рамках общей теории дедекиндовых l-моноидов.

Теорема 13. *Пусть в дедекиндовом l-моноиде L*

(I) *если $0 < a < 1$, то все цепи между a и 1 конечны;*

(II) *$p(1:p) = 1$ для любого собственного максимального целого элемента p.*

Тогда каждый элемент $a \in L$ такой, что $0 < a < 1$, допускает однозначное разложение в произведение максимальных $p_i < 1$.

Доказательство предваряется серией из трех лемм.

Лемма 1. *Если $1 > p$ и $p(1:p) = 1$, то*

$$(31) \qquad 1 > p > p^2 > p^3 > \dots \text{ и } 1 < (1:p) < (1:p)^2 < \dots .$$

Доказательство. Поскольку $p \leqslant 1$, то $p^{r+2} \leqslant p^r$ для $r = 1, 2, 3, \dots$. Если $p^{r+1} = p^r$, то

$$p = p^{r+1}(1:p)^r = p^r(1:p)^r = 1,$$

что невозможно. Доказательство неравенств $1 < (1:p) < (1:p)^2 < \dots$ проводится аналогично.

Лемма 2. *Если $1 > p > a > 0$, то $1 > (1:p)\,a > a$.*

Доказательство. Поскольку $p > a$, то $1 = (1:p)\,p \geqslant (1:p)\,a$. Кроме того, если бы $1 = (1:p)\,a$, то было бы $p = p \cdot 1 = p(1:p)\,a = 1a = a$, что невозможно. Аналогично, так как $(1:p) > 1$, то $(1:p)\,a \geqslant 1a = a$. При этом если допустить равенство $(1:p)\,a = a$, то будет $a = 1a = p(1:p)\,a = pa$, откуда

$$a = pa = p(pa) = p^2a = p^2(pa) = p^3a = \dots .$$

Так как $a \leqslant 1$, это означало бы, что $a = p^r a \leqslant p^r \cdot 1 = p^r$ для всех r. Следовательно, ввиду (31) мы получили бы *бесконечную* цепь $\{p^r\}$, состоящую из элементов, заключенных между 1 и a, а это противоречит условию теоремы.

Следствие. *В предположениях теоремы* 13 *каждый ненулевой простой целый элемент максимален.*

Доказательство. Пусть a — какой-нибудь ненулевой максимальный целый элемент. Тогда для некоторого максимального $p < 1$ будет $a < p < 1$. Значит, $q = (1 : p)\, a > a$ по лемме 2, так что $p > a$. Но $pq = p\,(1 : p)\, a = a$, поскольку $p\,(1 : p) = 1$, — элемент a не является простым.

Лемма 3. *Если* $0 < a < 1$, *то элемент* a *представим в виде произведения элементов* p_i, *покрываемых элементом* 1 (*т. е. простых*).

Доказательство. В силу конечности цепей, либо будет выполняться требуемое заключение, либо найдется максимальный элемент a, для которого оно нарушается. Этот максимальный элемент не может покрываться элементом 1, поскольку для таких элементов утверждение леммы очевидно. Значит, ввиду следствия из леммы 2 будет $a = pr$, где $1 > p > a$ и $1 > r > a$. По индукции $p = p_1 \ldots p_r$ и $q = q_1 \ldots q_s$, где все p_i и q_j покрываются элементом 1. Следовательно, $a = p_1 \ldots p_r q_1 \ldots q_s$, что и требовалось доказать.

Теперь для доказательства теоремы 13 остается установить единственность разложения (с точностью до порядка сомножителей). Это доказывается обычным путем. Если $a = p_1 \ldots p_r$ и $a = q_1 \ldots q_s$, где все p_i и q_j покрываются элементом 1, то $p_1 \geqslant a = q_1 \ldots q_s$. Ввиду следствия из леммы 2 и по индукции $p_1 \geqslant q_j$ для некоторого j. Так как p_1 и q_j максимальны, $p_1 = q_j$. Тогда

$$p_2 \ldots p_r = (1 : p_1)\, p_1 p_2 \ldots p_r = (1 : p_1)\, a = (1 : q_j)\, a =$$
$$= q_1 q_2 \ldots q_{j-1} (1 : q_j)\, q_j \ldots q_r = q_1 \ldots q_{j-1} q_{j+1} \ldots q_s,$$

и единственность следует из предположения индукции для r.

Обсуждение. Хотя следствие из теоремы 12 выглядит изящнее, теорема 13 более полезна для алгебраической теории чисел. Достаточно примерно пяти страниц[1]), чтобы доказать, что в дедекиндовом l-моноиде всех дедекиндовых идеалов произвольного поля алгебраических чисел F выполняются условия I—II:

I. если A — ненулевой целостный E-модуль, то все цепи между A и E имеют конечную длину (условие конечности цепей);

II. если P — максимальный собственный целостный E-модуль над F, то $P\,(E : P) = E$.

На самом деле можно доказать непосредственно утверждение более сильное, чем условие I: поскольку решетка E-модулей модулярна, все связные цепи между a и 1 имеют одну и ту же длину.

Потребуется, наверное, еще страниц пять технических выкладок, связанных собственно с алгебраическими числами, прежде чем основная теорема теории идеалов будет окончательно установ-

---

[1]) Нужно доказать леммы 8.21—8.23 из § 9 книги Поларда (Pollard H. The theory of algebraic numbers. —Wiley, 1950). В доказательстве используется его же теорема 8.7 («каждый простой идеал максимален»), которую тоже нужно доказывать, поскольку привлечение следствия из леммы 3 (§ 8) привело бы к порочному кругу.

лена, *если*, конечно, мы согласимся считать известными первоначальные сведения из теории l-моноидов. Может быть, кто-нибудь и сможет сделать все это лучше, но все же очень сомнительно, чтобы условие I удалось заменить условием обрыва возрастающих цепей.

Упражнения к §§ 9—11

1. Покажите, что в естественно упорядоченном моноиде любой простой элемент максимален и что элемент максимален тогда и только тогда, когда он неразложим.

2. Покажите, что в любом естественно упорядоченном l-моноиде понятия простого, неразложимого и максимального элемента равносильны.

3. Покажите, что идеалы $K > 0$ рационального поля $\mathbf{Q}$ образуют cl-моноид, в котором для идеала H, состоящего из всех дробей со знаменателями, являющимися степенями некоторого фиксированного простого p, частное $E : H$ не существует [1]).

4. Пусть M — нётеров модулярный l-моноид, в котором $a^k \wedge b \leqslant ab$ для любых $a, b \in M$ и подходящего k. Покажите, что каждый $\wedge$-неразложимый элемент в M является примарным (Уорд и Дилуорс [1, теорема 11.1]).

5. Постройте нётеров модулярный l-моноид M, в котором не каждый $\wedge$-разложимый элемент был бы примарным.

6. Пусть G — целостный коммутативный у-группоид, в котором для любых заданных $a \leqslant b$ можно найти элемент c такой, что $a = bc$. Покажите, что каждый неразложимый элемент в G максимален (Дюбрей-Жакотен, Лезье, Круазо [1, p. 219]).

7. Пусть G — коммутативный целостный у-группоид, в котором для любых заданных $a \leqslant b < 1$ существует элемент $c > a$ такой, что $a = bc$. Покажите, что в G каждый простой элемент максимален (Дюбрей-Жакотен, Лезье, Круазо [1, p. 221]).

8. Докажите, что в нётеровом l-моноиде радикал любого элемента a является пересечением минимальных простых элементов $p_i \geqslant a$ (Лезье [1, теорема 2.2]).

9. Покажите, что для любой дистрибутивной решетки L существует линейная алгебра, имеющая L решеткой своих идеалов (Беренс (Behrens E.-A. — Math. Ann., 1957, **133**, S. 79—90)).

12. Фробениусовы l-моноиды

Теперь обратим внимание на деление в *некоммутативных* l-моноидах. Рассмотрим *полную матричную алгебру* $M_n(F)$ всех $n \times n$-матриц с элементами из данного поля F. Линейная ассоциативная алгебра $M_n(F)$ изоморфна кольцу всех эндоморфизмов n-мерного векторного пространства $V_n(F)$ над полем F. Кроме того, в силу классической теоремы Веддербарна [2]) $M_n(F)$ представляет собой регулярное кольцо (§ VIII.6), в котором каждый левый или правый идеал является главным.

Характерной особенностью алгебры $M_n(F)$ является и то, что если ее правый идеал B содержит хотя бы один эндоморфизм с нуль-пространством $S \subset V_n(F)$, то он содержит каждый эндоморфизм, нуль-пространство которого включает S, и множество всех таких эндоморфизмов пространства $V_n(F)$ образует в $M_n(F)$

---

[1]) Это задание повторяет упр. 5 к § 7. — *Прим. перев.*

[2]) Wedderburn J. H. M. — Proc. London Math. Soc., 1907, **6**, p. 77—118.

правый идеал $J(S)$. Двойственно, если левый идеал C алгебры $M_n(F)$ содержит хотя бы один эндоморфизм с областью значений S, то C содержит каждый эндоморфизм, область значений которого включается в S, и множество всех таких эндоморфизмов будет левым идеалом $K(S)$ в $M_n(F)$ при любом выборе подпространства S. Наконец, $0 .\cdot K(S) = J(S)$, $0 \cdot. J(S) = K(S)$. Таким образом, $M_n(F)$ является фробениусовым кольцом в смысле следующего определения.

Определение. Кольцо, в котором $0 .\cdot (0 \cdot. J) = J$ для любого правого идеала J и $0 \cdot. (0 .\cdot K) = K$ для любого левого идеала K, называется *фробениусовым кольцом*. Если оно к тому же является линейной ассоциативной алгеброй, то оно называется *фробениусовой алгеброй* [1]).

Лемма. *Любая полупростая линейная ассоциативная алгебра A конечного порядка над произвольным полем F является фробениусовой.*

Эта лемма непосредственно выводится из результатов Веддербарна, доказавшего, что A является прямой суммой полных матричных алгебр $A_i = M_{n(i)}(D_i)$, где D_i — алгебры с делением над F. Правые идеалы в A являются прямыми суммами правых идеалов алгебр A_i и аналогично для левых идеалов; аннуляторы $0 \cdot. J$ и $0 .\cdot K$ также разлагаются в прямые суммы своих A_i-компонент. Наконец, утверждения, относящиеся к $M_n(F)$, имеют место и для полной матричной алгебры $M_n(D)$ над произвольным телом D при условии, если привлекать в соответствующих местах левые или правые D-подпространства (D-модули).

Определение. У-группоид с делением, в котором $0 .\cdot (0 \cdot. h) = h$ для каждого правоидеального элемента h и $0 \cdot. (0 .\cdot k) = k$ для каждого левоидеального элемента k, называется *фробениусовым у-группоидом*.

Теорема 14. *Линейные подпространства любой фробениусовой алгебры образуют фробениусов l-моноид $M(A)$, который как решетка является проективной геометрией.*

Доказательство. Первое утверждение следует из самого определения, а второе уже отмечалось в § I.9.

Теорема 15. *В любом фробениусовом l-моноиде M право- и левоидеальные элементы образуют дуально изоморфные подрешетки.*

Доказательство. По условию эти подмножества дуально изоморфны; по теореме 6 они являются подрешетками.

Замечание. В полупростой линейной ассоциативной алгебре эти подрешетки (модулярны и) обладают дополнениями, но доказательство этого факта, видимо, требует существенного использования теории колец.

---

[1]) Теория фробениусовых алгебр была развита Накаямой (Nakayama T. — Ann. Math., 1939, 40, p. 611—633; 1941, 42, p. 1—21). [См. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. — М.: Наука, 1969. — *Прим. ред.*]

Упражнения

1. Пусть A_1, A_2 — фробениусовы кольца, в которых

$$A_j.\cdot A_j = A_j\colon .A_j = 0 \quad (\text{где } j = 1, 2).$$

Покажите, что $A_1 \oplus A_2$ — фробениусово кольцо.

2. Покажите, что любое регулярное кольцо главных идеалов является фробениусовым кольцом.

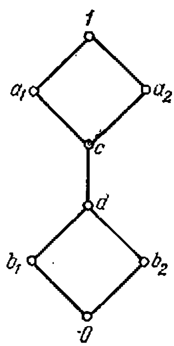
3. Докажите, что никакая нильпотентная линейная ассоциативная алгебра не является фробениусовой [1]).

4. Покажите, что для любого поля F фактор-кольцо $F[x]/(x^n)$ является фробениусовым кольцом с линейно упорядоченной решеткой идеалов.

5. Образуют ли фробениусовы кольца многообразие?

6. Как можно рассмотрение частных в фробениусовом кольце связать с полярностью, определенной в примере 2 из § V.7?

7. Пусть приводимая диаграмма задает целостный l-моноид, в котором $a_ib_i = b_i$, $c^2 = d$, $a_1b_2 = b_2a_1 = cd = 0$.



Покажите, что это фробениусов l-моноид (Нормен).

13. Алгебра отношений

Алгебра всех бинарных отношений на произвольном множестве J, состоящем из элементов α, β, γ, ..., будет у нас последним примером применения теории l-моноидов. Бинарное отношение r на J можно задать его *булевой матрицей* $\| r_{\alpha\beta} \|$, полагая $r_{\alpha\beta} = 1$, если α и β находятся в отношении r, и $r_{\alpha\beta} = 0$ в противном случае. Просто проверяется

Лемма 1. *Булевы матрицы образуют булеву решетку, если* $\| r_{\alpha\beta} \| \leqslant \| s_{\alpha\beta} \|$ *определить как* $r_{\alpha\beta} \leqslant s_{\alpha\beta}$ *для всех* α, β. *Относительно умножения, задаваемого правилом*

$$(32) \qquad rs = t \text{ тогда и только тогда, когда } t_{\alpha\beta} = \bigvee_{\gamma} r_{\alpha\gamma}s_{\gamma\beta},$$

они составляют l*-моноид* $\mathfrak{R}_n$, *где* n *— мощность множества* J.

[1]) См. работы М. Холла (Hall M. — Ann. Math., 1938, 3, p. 220—234; 1939, 40, p. 360—369), где доказаны и другие связанные с этим результаты.

l-моноид $\mathscr{R}_n$ изоморфен l-моноиду всех $\vee$-эндоморфизмов булевой алгебры $\mathbf{2}^n$. Отметим также связь с примером 2 из § 1. Пусть G — моноид, состоящий из элементов e_{ij} и 0, перемножаемых по правилам умножения для *матричных единиц*:

$$e_{ij}e_{kl} = \begin{cases} e_{il}, & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k; \end{cases} \tag{33}$$

и $e_{ij}0 = 0e_{ij} = 0$. Тогда $\mathscr{R}_n$ изоморфен l-моноиду всех подмножеств моноида G, содержащих 0; это выявляет аналогию с полной матричной алгеброй. Наконец, $\mathscr{R}_n$ определяется и как l-моноид всех l-модулей над l-кольцом действительных $n\times n$-матриц.

Неотрицательные матрицы. Каждой неотрицательной $n \times n$-матрице A, элементы которой $a_{ij} \geqslant 0$, можно сопоставить булеву матрицу $R = r(A)$, полагая $r_{ij} = 0$, если $a_{ij} = 0$, и $r_{ij} = 1$ в противном случае.

Теорема 16. *Отображение $A \mapsto r(A)$ является гомоморфизмом l-полукольца (глава XVII) неотрицательных $n\times n$-матриц в алгебру отношений $\mathscr{R}_n$:*

$$\begin{gathered} r(AB) = r(A)\,r(B), \quad r(A \wedge B) = r(A) \wedge r(B), \\ r(A \vee B) = r(A + B) = r(A) \vee r(B). \end{gathered} \tag{34}$$

Мы оставляем доказательство формул (34) читателю.

По определению, матрица A является *положительной*, если булева матрица $r(A) = I$, т. е. состоит из одних единиц, *неприводимой*, если $\bigvee_n r(A^n) = I$. Если мы назовем *циклом длины m* булевой матрицы функцию f: $\mathbf{Z}_m \to i(m)$ такую, что $r_{i(m-1),\, i(m)} = 1$, а *индексом $i(B)$* булевой матрицы $\|r_{ij}\|$ — наибольший общий делитель длин всех ее циклов, то неприводимая матрица будет *примитивной* тогда и только тогда, когда $i(R) = 1$. В противном случае R называется *циклической* и R^n в конечном счете оказывается периодической с периодом $i(R)$.

Фробениус получил классические результаты об асимптотическом поведении для $r(A^n) = [r(A)]^n$ при больших n. Он показал, что $r(A^n) = I$ для всех достаточно больших n тогда и только тогда, когда A неприводима и примитивна.

14. Постулаты для алгебр отношений

Хотя алгебра отношений разрабатывалась еще в девятнадцатом веке как часть алгебры логики, систематическое изучение систем аксиом для алгебр отношений началось лишь с 1940 г [1]).

---

[1]) См. работы Пирса (Peirce C. S. — Mem. Acad. Arts Sci., 1870, **9**, p. 317—378); Шредера [1, v. 3]; Маккинси (McKinsey J. C. C. — J. Symbol. Logic, 1940, **5**, p. 85—97); Тарского (Tarski A. — J. Symbol. Logic, 1941, **6**, p. 73—89).

Мы охарактеризуем алгебры отношений как l-моноиды специального вида (см. [**LT2**, с. 290—296]).

l-моноид $\mathcal{R}_n$ имеет своим нулем матрицу $0=\|0\|$, единицей — $e=\|\delta_{ij}\|$ и наибольшим элементом — $I=\|1\|$. Далее, каждое отношение $r=\|r_{ij}\|\in\mathcal{R}_n$ обладает *обратным* $\breve{r}=\|r_{ji}\|$. Покажем, что операцию обращения можно определить в терминах деления и булевых операций.

Лемма. *В алгебре отношений $\mathcal{R}_n$ обращение и деление могут быть выражены друг через друга:*

$$(35)\qquad e'\,.\cdot\,r'=e'\,\cdot.\,r'=\breve{r}\quad (\textit{для всех } r);$$

$$(36)\qquad r\,.\cdot\,s=(\breve{s}r')'\ \textit{и}\ r\,\cdot.\,s=(r'\breve{s})'\quad (\textit{для всех } r,s).$$

Доказательство формулы (35). Неравенство $r's\leqslant e'$ означает, что $\bigvee_k (1-r_{ik})\,s_{kj}=0$, если $i=j$, т. е. что при $r_{ik}=0$ будет $s_{ki}=0$. Но это утверждение равносильно неравенству $s\leqslant\breve{r}$, и значит $\breve{r}$ является наибольшим s таким, что $r's\leqslant e'$, иначе говоря, $e'\,.\cdot\,r'=\breve{r}$. Другое равенство в (35) следует из соображений симметрии.

Мы опускаем доказательство формул (36) (это неопубликованный результат Девидсона).

Приведенная лемма дает основание определить *алгебру отношений* как l-моноид L с делением, обладающий нулем 0 и единицей e, который как решетка является булевой алгеброй, причем

$$(37)\qquad e'\,.\cdot\,s=e'\,\cdot.\,s\quad \text{для всех } s$$

и, если обозначить $e'\,.\cdot\,r'=e'\,\cdot.\,r'$ через $\breve{r}$,

$$(38)\qquad \breve{\breve{r}}=r\ \text{и}\ \breve{(rs)}=\breve{s}\breve{r}.$$

Из этих постулатов выводятся различные другие свойства. Поскольку $e'\,.\cdot\,s$ является антиизотонной унарной операцией в любом l-моноиде с делением, то преобразование $e'\,.\cdot\,r'$ изотонно в любой алгебре отношений. Кроме того, в силу равенства $\breve{\breve{r}}=r$ оно будет изотонным взаимно однозначным соответствием. Отсюда следуют формулы

$$(39)\qquad \breve{(r\vee s)}=\breve{r}\vee\breve{s},\quad \breve{(r\wedge s)}=\breve{r}\wedge\breve{s},\quad (\breve{r})'=\breve{r'}.$$

Чтобы применить понятия универсальной алгебры (глава VI) к алгебрам отношений в том виде, как они определены нами, нужно в качестве основных операций рассматривать также взятие дополнения и деление (или, что равносильно, обращение), добавляя их к обычным основным операциям для l-моноидов. Тогда соответствующим образом изменятся и понятия подалгебры алгебры отношений и гомоморфизмов.

Для алгебр отношений предлагались и другие равносильные системы аксиом. Так, в любом l-моноиде из тождеств $\breve{\widetilde{rs}} = \breve{s}\breve{r}$ и $\breve{\breve{r}} = r$ следует, что $\breve{e} = e$. Используя этот факт и то, что из $\widetilde{r \vee s} = \breve{r} \vee \breve{s}$ выводятся два другие тождества в (39), мы получаем следующий результат.

Теорема 17. *Алгебра отношений есть l-моноид L с унарными операциями обращения и взятия дополнения такими, что взятие дополнения превращает L в булеву алгебру и при этом*

$$\breve{\widetilde{rs}} = \breve{s}\breve{r}, \quad \breve{\breve{r}} = r, \quad \widetilde{r \vee s} = \breve{r} \vee \breve{s}, \tag{40}$$

а формулы (36) *определяют деления.*

Далее, Тарский показал, что единственного тождества

$$[\breve{r}\,(rs)'\,] \vee s' = s' \tag{41}$$

достаточно для того, чтобы вывести все свойства деления. С точки зрения формул (40) это равенство (если положить $r = \breve{x}$ и $s = y'$) равносильно равенству $[x\,(\breve{x}y')'\,] \vee y = y$ или (используя (36)) равенству $x\,(x\ .\cdot\ y) \leqslant y$.

Таким образом, имеет место

Теорема 18 (Тарский). *Алгебра отношений есть l-моноид, являющийся булевой алгеброй с унарной операцией обращения, удовлетворяющей условиям* (40) *и* (41).

Конкретные алгебры отношений. Под *конкретной* или *собственной* алгеброй отношений имеется в виду любая подалгебра (в вышеуказанном смысле) «полной» алгебры отношений $\mathcal{R}_{\aleph}$ (где $\aleph$ — произвольное кардинальное число). Линдон [1]) показал, что не каждая алгебра отношений, определяемая рассмотренными способами, является конкретной алгеброй отношений (т. е. допускает вложение в некоторую $\mathcal{R}_{\aleph}$). Именно, он установил, что атомы p_{ij} любой конкретной алгебры отношений должны удовлетворять условию

(42) если $p_{13}p_{32} \wedge p_{14}p_{42} \wedge p_{15}p_{52} > 0$, то

$$(p_{41}p_{15} \wedge p_{42}p_{25}) \vee (p_{41}p_{13} \vee p_{42}p_{23})\,(p_{31}p_{15} \wedge p_{32}p_{25}) > 0,$$

и построил алгебру отношений порядка 2^{56}, атомы которой этому условию не удовлетворяют.

Упражнения к §§ 13—14

1. Покажите, что бинарное отношение r на произвольном множестве тогда и только тогда является

(а) симметричным, когда $\breve{r} = r$, и транзитивным, когда $r^2 \leqslant r$;

---

1) Lyndon R. C. — Ann. Math., 1950, 51, p. 707—729; 1956, 63, p. 294—307; Michigan Math. J., 1961, 9, p. 21—28.

(б) упорядоченностью, когда $r \wedge \breve{r} = e$ и $r^2 = r$;

(в) отношением строгого порядка, когда $r \wedge \breve{r} = e$ и $r^2 \leqslant r$;

(г) отношением эквивалентности, когда $r^2 = r = \breve{r} = e$.

2. Для отношения r положим $F(r) = r \vee e$, $S(r) = r \vee \breve{r}$ и $T(r) = \bigvee_n r^n$. Покажите, что относительно суперпозиции и упорядочения операторы F, S и T порождают девятиэлементную у-полугруппу [1]).

3. (а) Покажите, что равенство $\breve{r} = r'$ в нетривиальной (т. е. имеющей более одного элемента) алгебре отношений невозможно.

(б) Покажите, что в алгебре отношений из $ax = xa = e$ следует, что $x = \breve{a}$.

4. Докажите, что $rs \wedge t = 0$ в $\mathcal{R}_n$ тогда и только тогда, когда $rst \leqslant e'$. Выведите отсюда равенство $r \wedge st = 0$.

5. Докажите, что результаты упр. 4 имеют место в любой алгебре отношений.

6. Докажите, что в $\mathcal{R}_n$ (i) если $rs \leqslant e'$, то $sr \leqslant e'$; (ii) если $r > 0$, то $IrI = I$ и (iii) если $r > 0$, то $r\breve{r} > 0$.

7. Покажите, что (прямое) произведение двух нетривиальных алгебр отношений является алгеброй отношений, в которой $IrI < I$ для некоторого $r > 0$.

8. Покажите, что алгебра отношений $\mathcal{R}_n$ является простой (т. е. не имеет собственных конгруэнций).

Булевым l-моноидом называется l-моноид, как решетка являющийся булевой решеткой.

*9. Покажите, что любой булев l-моноид представим множествами.

*10. Перенесите предыдущий результат на булевы алгебры с любым заданным множеством $\vee$-эндоморфизмов [2]).

ПРОБЛЕМЫ

122. Развить теорию подпрямо неразложимых целостных l-группоидов [3]).

123. Развить теорию l-группоидов, в которых

$$a(x \wedge y) = ax \wedge ay \text{ и } (x \wedge y)a = xa \wedge ya\ ^{4)}.$$

124. Построить свободный коммутативный l-моноид с n порождающими! Существует ли свободный *полный* коммутативный l-моноид с n порождающими?

125. Построить свободную l-лупу с одним порождающим.

126. Для каких групп подгруппы образуют l-группоид относительно включения и коммутации?

127. Развить теорию непрерывных алгебр отношений, применимую к непрерывным булевым алгебрам B/Z и B_0/N главы XI.

128. Определить тензорное произведение для алгебр отношений так, чтобы было $\mathcal{R}_m \otimes \mathcal{R}_n = \mathcal{R}_{mn}$.

---

[1]) Тамура (Tamura T. — Bull. AMS, 1964, 70, p. 113—120).

[2]) По поводу результатов, приведенных в упр. 9—10, см. [LT2, с. 293—296] и работы Йонссона и Тарского (Jónsson B., Tarski A. — Amer. J. Math., 1951, 73, p. 891—939; 1952, 74, p. 127—162).

[3]) Проблемы 122 и 123 — это соответственно проблемы 91 и 92 из [LT2]. — *Прим. перев.*

[4]) См. работу Чоудхури (Choudhury C. — Bull. Calcutta Math. Soc., 1957, 49, p. 71—74).

ГЛАВА XV

ВЕКТОРНЫЕ РЕШЕТКИ

1. Основные понятия

Действительные векторные пространства, если их рассматривать как аддитивные (абелевы) группы, часто являются у-группами и даже l-группами. По определению, *упорядоченное векторное пространство* V — это у-группа, в которой если $x \geqslant 0$ в V и $\lambda \geqslant 0$ в $\mathbf{R}$, то $\lambda x \geqslant 0$ в V. Согласно этому определению, $x \mapsto \lambda x$ при любом $\lambda > 0$ будет сохраняющим порядок групповым автоморфизмом с сохраняющим порядок обратным для него преобразованием $y \mapsto \lambda^{-1} y$; следовательно, $x \mapsto \lambda x$ является *автоморфизмом* для V как у-группы при любом положительном скаляре λ.

Теория абелевых у-групп, развитая в главе XIII, конечно, применима к любому упорядоченному (действительному) векторному пространству V. Так, V называется *направленным векторным пространством*, если оно направлено как у-группа, т. е. если $V = P - P$ [1]), где P — «положительный конус», состоящий из всех $x \geqslant 0$ в V. Если V (рассматриваемое как аддитивная у-группа) является l-группой, оно называется *векторной решеткой*. Точно так же, если V (условно) полно или σ-полно как l-группа, оно называется *полной* (соответственно *σ-полной*) *векторной решеткой* [2]).

Основы теории векторных решеток заложили Рис [1], Л. В. Канторович [1] и Фрейденталь [1]. Ввиду важности ее для функционального анализа, эта теория энергично развивалась различными авторами, и здесь мы изложим полученные ими основные результаты. Но мы никоим образом не будем пытаться дать обзор результатов об упорядоченных *топологических* векторных пространствах, снабженных (внутренней) топологией, не определяемой в терминах сложения и упорядоченности. В частности, в стороне останутся многие факты, установленные Накано, Нахбином, Бонселом, Намиокой и Шефером.

Это объясняется тем, что, как подчеркивалось в [**LT1**, §§ 126—127], многие фундаментальные свойства наиболее важных действительных функциональных пространств можно выразить, используя в качестве первоначальных понятий лишь сложение и упорядоченность. В частности, к ним относятся целый ряд

[1]) Каждый элемент является разностью положительных элементов. — *Прим. перев.*

[2]) В советской математической литературе применяется также термин K-пространство (соответственно K_σ-пространство). — *Прим. перев.*

свойств, касающихся ограниченности, дуальных пространств, многих (внутренних) топологий, и бо́льшая часть теории положительных линейных операторов (излагаемой в главе XVI).

Пример 1. Для любого кардинального числа $\aleph$ пространство $\mathbf{R}^{\aleph}$ будет векторной решеткой, если под $x \geqslant 0$ понимать, что все $x_i \geqslant 0$.

В примере 1 при $\aleph = 3$ «положительным конусом» будет первый октант — бесконечный трехгранник. Сейчас мы обобщим это наблюдение.

Лемма 1. *В любом упорядоченном векторном пространстве V «положительный конус» P является выпуклым конусом, удовлетворяющим условию $P \cap -P = 0$. Обратно, если P — какой-нибудь выпуклый конус в действительном векторном пространстве V и $P \cap -P = 0$, то V упорядочивается отношением*

(1) *$x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда $y - x \in P$.*

Доказательство. Если $x \in P$ и $y \in P$, то $\lambda x \in P$ для любого $\lambda > 0$, по определению, и $x + y \in P$ в силу (2) из главы XIII. Эти условия характеризуют действительные выпуклые конусы. В частности, если $0 < \alpha < 1$, то при $\{x, y\} \subset P$ получаем $\lambda x + (1 - \alpha) y \in P$.

Обратно, если P — выпуклый конус в V, то по условию λx и $x + y = 2\,[(x + y)/2]$ лежат в P вместе с x и y и при $\lambda > 0$.

Пример 2. Для любого положительного целого n конус в $\mathbf{R}^n$, определяемый неравенствами

$$\sum x_i \geqslant 0 \text{ и } \sum_{i<j} x_i x_j \geqslant 0, \tag{2}$$

является положительным конусом упорядоченного векторного пространства, которое при $n > 2$ *не* будет векторной решеткой. (Если этот конус определить равносильной системой неравенств $(\Sigma\, x_i)^2 \geqslant \Sigma\, x_i^2$ и $\Sigma x_i \geqslant 0$, то видно, что он имеет круговое сечение.)

Лемма 2. *Прямая сумма (объединение) векторных решеток является векторной решеткой.*

Мы опускаем (тривиальное) доказательство; см. пример 3 из главы XIII.

Лемма 3. *Если V — векторная решетка, то лексикографическое объединение $\mathbf{R} \circ V$ также будет векторной решеткой.*

Мы снова опускаем доказательство, которое представляет собой очевидное перенесение на данный случай доказательства леммы 3 из § XIII.1. Отсюда следует, что $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{R} \circ \mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}\,(\mathbf{R} \bullet \mathbf{R})$ и ${}^3\mathbf{R} = \mathbf{R} \bullet (\mathbf{R} \circ \mathbf{R})$ будут трехмерными векторными решетками; в § 2 мы покажем, что этот список является полным.

Векторные решетки имеют важные приложения в функциональном анализе потому, что *большинство стандартных действительных функциональных пространств являются векторными решетками* и притом по самой своей сути.

Пример 3. Пусть X — топологическое пространство и $C(X)$ — множество всех непрерывных действительнозначных функций на X. Тогда $C(X)$ будет векторной решеткой, если в качестве P взять множество всех неотрицательных функций.

Пример 4. Пусть Ω — произвольная алгебра с мерой (§ XI.5) и $M^p(\Omega)$ — множество измеримых действительных функций на Ω, для которых $\int |f(x)|^p\, d\mu < +\infty$. Тогда $M^p(\Omega)$ будет векторной решеткой, если в качестве P выбрать множество всех неотрицательных $f(x)$.

Обычное пространство $L^p(\Omega)$ является фактор-алгеброй $M^p(\Omega)/N(\Omega)$, где $N(\Omega)$ представляет собой L-идеал функций равных нулю всюду за исключением множества меры нуль (см. § 7).

Поскольку любая векторная решетка является абелевой l-группой, бо́льшая часть формул главы XIII автоматически применима и к векторным решеткам. Чтобы удобнее было ссылаться, мы приведем некоторые из них еще раз.

Теорема 1. *В любой векторной решетке*

$$a + (x \vee y) = (a + x) \vee (a + y), \quad a + (x \wedge y) = (a + x) \wedge (a + y); \tag{3}$$

$$a + b = a \wedge b + a \vee b; \tag{4}$$

$$\textit{если } a \wedge b = a \wedge c = 0, \textit{ то } a \wedge (b + c) = 0; \tag{5}$$

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|, \textit{ где } |a| = a^+ - a^- > 0, \textit{ если } a \neq 0; \tag{6}$$

$$|\lambda a| = |\lambda||a| \textit{ для любых } \lambda \in \mathrm{R},\ a \in V; \tag{7}$$

$$\lambda(x \wedge y) = \lambda x \wedge \lambda y \textit{ и } \lambda(x \vee y) = \lambda x \vee \lambda y, \quad \textit{если } \lambda \geqslant 0. \tag{8}$$

Доказательство. Для вывода формул (3)—(6) см. соответственно формулы (9), (14) и (16) и теорему 9 в главе XIII. Что касается (7), то для $\lambda = |\lambda| > 0$ по определению будет $|\lambda a| = |\lambda||a|$, а при $\lambda = 0$ все очевидно. Если же $\lambda < 0$, то

$$|\lambda| \cdot (a) = -\lambda(a^+ - a^-) = \lambda a^- - \lambda a^+ = (\lambda a)^+ - (\lambda a)^- = |\lambda a|,$$

поскольку при $\lambda < 0$ соответствие $a \mapsto \lambda a$ является *дуальным* автоморфизмом, взаимно заменяющим $\vee$ и $\wedge$.

Упражнения

1. В произвольной векторной решетке докажите тождества

$$-(-x \vee -y) = x \wedge y, \quad -(x \wedge y) = -x \vee -y.$$

2. Докажите, что любая векторная решетка дистрибутивна как решетка.
3. В произвольной векторной решетке докажите тождества

(а) $f \vee g = f + (g - f)^+$, $f \wedge g = f + (g - f)^-$;

(б) $f \vee g = {}^1/_2 (f + g + |f - g|)$.

4. В произвольной векторной решетке докажите тождества

(а) $$(f+g)^+ \leqslant f^+ + g^+;$$

(б) $$||f|-|g|| \leqslant |f-g| = |f^+-g^+| + |f^- - g^-|.$$

5. В действительном векторном пространстве V пусть P обозначает множество, удовлетворяющее условиям: (i) $P \cap -P = 0$; (ii) $P + P \subset P$; (iii) $\lambda P = P$ для любого скаляра $\lambda > 0$. Покажите, что P является положительным конусом для некоторой упорядоченности в V, которая превращает V в направленное векторное пространство тогда и только тогда, когда $P - P = V$.

6. На плоскости $\mathbf{R}^2$ пусть P будет множество всех точек (x, y) таких, что $x \geqslant 0$ и $y \geqslant \sqrt{x}$. Какой из постулатов для векторной решетки здесь нарушается?

7. (а) Пусть действительное векторное пространство V будет l-группой относительно сложения и некоторой упорядоченности. Покажите, что для любого положительного рационального скаляра λ отображение $x \mapsto \lambda x$ является решеточным автоморфизмом.

(б) Покажите, что это не всегда выполняется для иррациональных λ, даже если V является полным как l-группа.

2. l-идеалы

Как мы выяснили в главе XIII, §§ 9—12, конструкция l-идеала является ключевой для понимания строения l-групп. Сейчас мы увидим, что точно так же обстоит дело с векторными решетками, и первым шагом в этом направлении будет

Лемма 1. *В любой векторной решетке V l-идеалами являются в точности подпространства, которые вместе с каждым x содержат и все y такие, что $|y| \leqslant |x|$; таким образом, они задают конгруэнции относительно операций векторной решетки.*

Доказательство. Пусть J — какой-нибудь l-идеал, т. е. подгруппа в V, содержащая вместе с x и все y такие, что $|y| \leqslant |x|$. Если $a \in J$, то $na \in J$ для любого положительного целого n. Если λ — произвольное действительное число, выберем положительное целое n, превосходящее $|\lambda|$; тогда $|\lambda a| = |\lambda||a| \leqslant n|a|$, так что $\lambda a \in J$. Следовательно, J является линейным подпространством. Обратное очевидно.

Следствие. *Любой l-групповой гомоморфизм φ: $V \to W$ между векторными решетками является линейным* [1]).

Действительная теория функций изобилует примерами l-идеалов векторных решеток. Пусть, например, $\mathbf{R}^{\aleph}$ будет множество всех действительных функций на произвольном множестве X, имеющем мощность $\aleph$. Тогда множество $B(X)$ всех таких ограниченных функций на X образует в $\mathbf{R}^{\aleph}$ l-идеал. Точно так же для любого подмножества $S \subset X$ множество действительных функций, равных нулю всюду вне S, является l-идеалом в $\mathbf{R}^{\aleph}$.

---

[1]) Контрпример к этому утверждению указал А. И. Векслер (XII Всесоюзн алгебр. коллоквиум. Тезисы сообщений. — Свердловск, 1973, тетрадь II, с. 263). — *Прим. перев.*

Пусть $M(\Omega)$ — множество всех (действительных) функций, измеримых на данном пространстве с мерой Ω. Тогда $M^p(\Omega)$, определенное в примере 4, является l-идеалом в M. Аналогично, множество $N(\Omega)$ так называемых нуль-функций, отличных от нуля лишь на множествах меры нуль, образует в $M(\Omega)$ l-идеал.

Теорема 2. *Любая простая (т. е. без собственных конгруэнций) векторная решетка изоморфна действительной векторной решетке* $\mathbf{R}$.

Доказательство. Для любого элемента $a \neq 0$ простой векторной решетки V главный l-идеал (a) (§ VIII.10), порожденный элементом a, должен совпадать с V; поэтому решетка V архимедова. Аналогично, будучи простой, V подпрямо неразложима и потому, в силу теоремы XIII.21, линейно упорядочена.

Но тогда, как всякая архимедова линейно упорядоченная группа, V по теореме XIII.12 изоморфна подгруппе действительного поля $\mathbf{R}$. Ввиду следствия из леммы 1 этот порядковый изоморфизм должен быть линейным[1]; значит, $V = \mathbf{R}$. Ч. т. д.

Теорема 2 является усиленным аналогом теоремы XIII.12. Из нее вытекает

Следствие. *Решетка конгруэнций $\Theta(L)$ любой n-мерной векторной решетки L имеет длину n.*

Теперь еще раз используем теорему XIII.21. Вместе с леммой 1 она дает следующий аналог теоремы XIII.22.

Теорема 3. *Всякая векторная решетка является подпрямым произведением линейно упорядоченных векторных решеток.*

Следующим шагом применим лемму 1 к теореме XIII.23. В сочетании с теоремой 2 это приводит к следующему результату.

Лемма 2. *Пусть V — n-мерная векторная решетка. Тогда либо V разлагается в прямую сумму векторных решеток меньшей размерности, либо содержит наибольший собственный l-идеал M такой, что фактор-решетка V/M проста.*

По теореме 2 $V/M \cong \mathbf{R}$, так что имеет место

Следствие. *В лемме 2 l-идеал M является $(n-1)$-мерным подпространством в V.*

Далее, поскольку M содержит каждый собственный l-идеал из V, то главный l-идеал $(a) = V$, если $a \notin M$. Кроме того, если ни (a^+), ни (a^-) не совпадают с V, то $(a^+) \subset M$ и $(a^-) \subset M$, что невозможно, так как $(a) = (a^+) \vee (a^-)$, а $(a) = V > M$. Пусть $(a^+) = V$; тогда ввиду того, что $(a^+) \wedge (a^-) = 0$ для любого a, будет $(a^-) = 0$ и, значит, $a = a^+ \geqslant 0$. Аналогично, если $(a^-) = V$, то $a \leqslant 0$. Но равенство $a = 0$ невозможно, так что в итоге получается

Лемма 3. *В лемме 2, если $a \notin M$, то $a > 0$ или $-a > 0$.*

---

[1] В данном случае линейность можно доказать, не используя указанное следствие. — *Прим. перев.*

В обоих случаях, выбирая $b \notin M$ положительным, мы получим, что элементы вида $\lambda b + m = x$ (где $\lambda \in \mathbf{R}$, $m \in M$) исчерпывают все V и что $x > 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda > 0$ или $\lambda = 0$ и $m > 0$. Тем самым доказана [1])

Теорема 4. *Любая n-мерная векторная решетка V либо является прямой суммой векторных решеток меньшей размерности, либо лексикографическим объединением $V = \mathbf{R} \circ M$ действительного поля $\mathbf{R}$ с наибольшим собственным l-идеалом из V, имеющим размерность $n - 1$.*

Следствие 1. *Каждая конечномерная векторная решетка может быть построена из некоторого множества экземпляров действительного поля $\mathbf{R}$ прямым или лексикографическим объединением.*

Следствие 2[2]). *Каждая архимедова векторная решетка линейной размерности n (где n конечное) изоморфна векторной решетке $\mathbf{R}^n$.*

3. Функциональные решетки

Наиболее важные векторные решетки представляют собой совокупности действительных *функций* или гомоморфные образы таких совокупностей. По определению, функциональная решетка — это векторная решетка, изоморфная векторной решетке функций, определенных на некотором множестве, с поточечными операциями $\pm$, $\vee$, $\wedge$, т. е. являющаяся подпрямым произведением экземпляров действительного поля $\mathbf{R}$. Другими словами, функциональная решетка — это векторная решетка, изоморфная векторной подрешетке в $\mathbf{R}^{\aleph}$ для некоторого кардинального числа $\aleph$, или, короче, векторная решетка, вложимая в некоторую степень $\mathbf{R}^{\aleph}$ (как векторная решетка). На вопрос, является ли данная векторная решетка V функциональной решеткой, можно ответить, зная ее максимальные l-идеалы. Это объясняется следующим вытекающим из теоремы 2 результатом.

Лемма. *Гомоморфизмы данной векторной решетки V на $\mathbf{R}$ однозначно с точностью до положительного скалярного множителя определяются совокупностями отображений $V \to V/M_\alpha$ на ее факторы по максимальным (собственным) l-идеалам M_α.*

Доказательство. Если M — максимальный собственный l-идеал в V, то векторная решетка V/M проста и, следовательно, изоморфна $\mathbf{R}$.

Следствие (Накаяма). *Векторная решетка V изоморфна подпрямому произведению экземпляров действительного поля $\mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда пересечение всех ее максимальных собственных l-идеалов равно 0.*

---

[1]) Другой подход см. в [**LT2**, с. 331, упр. **2**].

[2]) Юдин А. И. — ДАН СССР, 1939, **23**, с. 418—422. — *Прим. перев.*

Доказательство. Пусть V — векторная подрешетка в $\mathbf{R}^I$, где I — некоторое множество индексов. Для каждого элемента из I ядро соответствующей проекции $\mathbf{R}^I \to \mathbf{R}$ является максимальным собственным l-идеалом в V, и очевидно, что пересечение этих ядер есть 0. Обратно, предположим, что пересечение всех максимальных собственных l-идеалов в V равно 0. Из общей алгебраической теории следует, что V изоморфна подпрямому произведению простых векторных решеток, так что по теореме 2 V изоморфна подпрямому произведению некоторого множества экземпляров действительного поля $\mathbf{R}$.

Капланский заметил, что действительные функции на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$, определенные и непрерывные всюду за исключением конечного числа простых полюсов второго порядка $\alpha_i/(x - a_i)^2$, образуют архимедову векторную решетку, в которой пересечение максимальных l-идеалов состоит из всех непрерывных функций и, значит, отлично от 0.

Максимальные l-идеалы в $C(K)$. Нетрудно выделить максимальные l-идеалы в $C(K)$ — векторной решетке всех действительных непрерывных функций на компактном (и значит нормальном) хаусдорфовом пространстве K. Очевидно, что для любой точки $x \in K$ множество M_x всех $f \in C(K)$ таких, что $f(x) = 0$, либо совпадает с $C(K)$, либо является максимальным l-идеалом в $C(K)$. Покажем, что $C(K)$ не имеет других максимальных (собственных) l-идеалов.

Пусть J — какой-нибудь собственный l-идеал в $C(K)$, не содержащийся ни в каком M_x. Тогда для любого $x \in K$ найдется некоторая функция $f \in J$ такая, что $f(x) \neq 0$, и следовательно, такая, что $f(y) \neq 0$ во всех точках некоторой открытой окрестности $U(x)$ точки x. Так как пространство K компактно, то должно существовать конечное множество таких открытых окрестностей $U_1, \ldots, U_n$, которое образует покрытие для K. Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — соответствующие функции $f_i \in J$, т. е. $f_i(y) \neq 0$ для всех $y \in U_i$. Тогда функция $g = |f_1| + \ldots + |f_n| \in J$ положительна всюду на $K = \bigcup U_i$ и следовательно, отделяется на этом пространстве от нуля. Таким образом, для *любой* функции $h \in C(K)$ будет $|h| \leqslant \lambda g$ при всех достаточно больших действительных λ, так что $J = C(K)$. Мы приходим к выводу, что каждый собственный l-идеал содержится в некотором M_x, и значит, l-идеалами M_x исчерпываются максимальные l-идеалы в $C(K)$.

Замкнутые l-идеалы. Мы можем дать общее описание замкнутых l-идеалов (глава XIII, §§ 9—10) векторной решетки $C(X)$ всех непрерывных функций на произвольном нормальном хаусдорфовом пространстве X: они образуют булеву решетку, изоморфную решетке всех регулярных открытых множеств в X. Этот изоморфизм соотносит каждому регулярному открытому множеству A из X множество A'^{+} всех функций $f \in C(X)$, тождественно равных нулю на его замкнутом дополнении A' (такие множества можно было бы назвать «регулярными замкнутыми»).

Для доказательства рассмотрим полярность (глава V), связанную с бинарным отношением $f(x) = 0$ между $C(X)$ и X: для любого l-идеала (на самом деле, для любого подмножества!) J из $C(X)$ «поляра» $J^* = S$ является замкнутым подмножеством в X (по определению, J^* состоит из всех $x \in X$ таких, что $f(x) = 0$ для любой функции $f \in J$). Далее, по определению, $g \in J^{\perp}$ тогда и только тогда, когда $g(y) = 0$ для всех $y \in S'$, или — что равносильно, поскольку g непрерывна, — для всех $y \in S'^{-}$. При этом S'^{-}, будучи замыканием открытого множества, регулярно. Это доказывает, что для любого l-идеала J из $C(X)$ будет $J^{\perp} = (S'^{-})^* = ((J^*)'^{-})^*$, где $S = J^*$ — регулярное замкнутое множество в X.

Обратно, пусть T — какое-нибудь регулярное замкнутое множество с регулярным открытым дополнением T' и пусть $T'^{-\prime} = K \cdot . T' = U$ будет (регулярное открытое) *псевдодополнение* для T в брауэровой решетке всех открытых множеств пространства X. Тогда множества $T^+ = F$ и $(T'^{-})^+ = G$ будут замкнутыми l-идеалами в $C(X)$, причем, как мы сейчас увидим, $F^{\perp} = G$ и $G^{\perp} = F$. В самом деле, очевидно, что $G \subset F^{\perp}$. Пусть теперь $h \in \in F^{\perp}$. Так как X нормально, то для любого $y \in T'$ существует функция $f \in C(X)$ такая, что $f(y) = 1$ и $f \in F$, т. е. $f(t) = 0$ для всех $t \in T$. Но $h \wedge f = 0$, а тогда $h(y) = 0$ для всех $y \in T'$. Значит, $F^{\perp} \subset G$, откуда $F^{\perp} = G$. Аналогично, $G^{\perp} = F$. Таким образом, для любого регулярного замкнутого множества T из X множество $F = T^* = (F^{\perp})^{\perp}$ является замкнутым l-идеалом. Доказательство закончено.

Поскольку любое компактное хаусдорфово пространство нормально и, значит, регулярно, а регулярные открытые множества образуют базис открытых множеств в любом регулярном топологическом пространстве, мы получаем в качестве следствия из доказанных результатов, что любое компактное хаусдорфово пространство K с точностью до гомеоморфизма определяется векторной решеткой $C(K)$ своих непрерывных функций: точки p_α из K отождествляются с максимальными идеалами $M_\alpha \subset C(K)$, а окрестности любой точки — с замкнутыми l-идеалами F из $C(K)$: точка p_α лежит в окрестности U_F тогда и только тогда, когда $F \not\subset M_\alpha$.

Упражнения к §§ 2—3

1. Покажите, что l-идеалы в $\mathbf{R}^n$ образуют булеву решетку, изоморфную 2^n, и отождествите каждый l-идеал с множеством всех векторов, ненулевые компоненты которых имеют номера, являющиеся элементами некоторого подмножества из n.

2. Покажите, что l-идеалы любой векторной решетки образуют алгебраическую брауэрову решетку.

3. Покажите, что каждая трехмерная векторная решетка изоморфна одной и только одной из векторных решеток $\mathbf{R}^3$, ${}^3\mathbf{R}$, $\mathbf{R} \circ \mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}(\mathbf{R} \circ \mathbf{R})$.

4. Нарисуйте диаграмму решетки конгруэнций каждой из четырех векторных решеток, перечисленных в упр. 3.

5. Пусть $\varphi(n)$ обозначает число неизоморфных векторных решеток размерности n, а $\psi(n)$ — число тех из них, которые неразложимы в прямую сумму. Покажите, что $\varphi(n) = \psi(n+1)$ и проверьте правильность следующей таблицы:

$n =$	1	2	3	4	5	6
$\psi(n) =$	1	1	2	4	9	19
$\varphi(n) =$	1	2	4	9	19	47.

6. В направленном векторном пространстве V определим l-идеал как подпространство S, которое содержит (i) с любым $a > 0$, также и $[0, a]$ и (ii) с любым b, также и некоторые $c > 0$ и $d < 0$ такие, что $b = c + d$.

(а) Покажите, что в случае, когда V — векторная решетка, это определение равносильно принятому в тексте.

(б) Что можно сказать о V/S? А об у-множестве всех l-идеалов в V (порядок — теоретико-множественное включение)?

*7. Покажите, что векторная решетка $C(X)$ всех непрерывных функций на нормальном топологическом пространстве X σ-полна тогда и только тогда, когда X — стоуново пространство борелевской алгебры [1]).

*8. (а) Пусть J — любой идеал в произвольной абелевой l-группе A. Покажите, что множество всех трансляций идеала J замкнуто относительно конечных пересечений.

(б) Докажите, что если A — действительное векторное пространство, то верно и обратное [2]).

4. Линейно упорядоченные векторные решетки

Теорема 3 вызывает интерес к изучению строения *линейно* упорядоченных векторных решеток. Из теоремы 4 следует, что каждая конечномерная линейно упорядоченная векторная решетка изоморфна некоторой ординальной степени ${}^n\mathbf{R}$ действительного поля. Важным шагом к обобщению этого результата является

Лемма 1. *Пусть элементы $a \neq 0$ и b порождают в линейно упорядоченной векторной решетке V один и тот же главный l-идеал $(a) = (b)$. Тогда существует единственное действительное число λ такое, что $|\lambda a - b| \ll a$.*

Доказательство. Предположим, что $a > 0$. Пусть L и U — множества действительных чисел β таких, что соответственно $\beta a \lessdot b$ и $\beta a \geqslant b$. Так как V линейно упорядочена, $L \cup U = \mathbf{R}$. Поскольку $a > 0$, то для $\beta \in L$ и $\gamma \in U$ будет $\beta \lessdot \gamma$. Кроме того, $L \neq \varnothing$ и $U \neq \varnothing$, так как $(a) = (b)$. Пусть теперь λ обозначает *сечение*, определяемое в $\mathbf{R}$ парой (L, U), и $c = \lambda a - b$. Тогда $-a/n < c < a/n$ для любого $n \in \mathbf{Z}^+$. Следовательно, $n|c| < a$ и, значит, $|c| = |\lambda a - b| \ll |a|$.

---

[1]) Стоун (Stone M. H. — Canad. J. Math., 1949, 1, p. 176—186). По поводу обобщений см. работу Пирса (Pierce R. S. — Canad. J. Math., 1953, 5, p. 95—100).

[2]) По поводу упр. 8 см. работу Маккарти (MacCarthy J. C. — Trans. AMS, 1961, 100, p. 241—251).

Следствие. *Линейно упорядоченное векторное пространство V либо изоморфно действительному полю* $\mathbf{R}$, *либо неархимедово.*

В бесконечномерном случае анализ строения линейно упорядоченных векторных решеток требует тонкого применения трансфинитной индукции. Простым результатом является

Лемма 2. *Пусть V — линейно упорядоченное векторное пространство. Тогда главные l-идеалы образуют в V цепь, плотную в (линейно упорядоченной) решетке конгруэнций $\Theta(V)$ векторного пространства V.*

Доказательство. Очевидно, что $(a) < (b)$ тогда и только тогда, когда $|a| \ll |b|$, и что каждый l-идеал J в V является объединением главных l-идеалов, содержащихся в J. Но что более существенно, в каждом главном l-идеале (a), где $a \neq 0$, содержится максимальный собственный l-подидеал: он состоит из всех $x \in V$ таких, что $|x| \ll |a|$. Это показывает, что в $\Theta(V)$ имеется плотное множество «разрывов» (дискретных скачков).

Теорема 5. *Если решетка $\Theta(V) = W$ вполне упорядочена, то V изоморфно ограниченной ординальной степени* $({}^{W}\mathbf{R})$.

Доказательство. Используя трансфинитную индукцию, мы можем выбрать вполне упорядоченное множество положительных элементов $e_1 \ll e_2 \ll e_3 \ll \ldots$ таких, чтобы каждый главный идеал $(e_{\alpha+1})$ был наименьшим l-идеалом, собственным образом содержащим (e_α), и для любого предельного ординального числа ω, чтобы (e_ω) был наименьшим l-идеалом, собственно содержащим $\bigcup_{\alpha<\omega} (e_\alpha)$. Используя лемму 1, индукцией можно показать, что так построенные элементы e_α образуют *базис* в V, рассматриваемом просто как векторное пространство. При этом конечная линейная комбинация $\sum \lambda_\alpha e_\alpha > 0$ тогда и только тогда, когда ненулевое λ_α с «наибольшим» индексом положительно. Но это и определяет $({}^{W}\mathbf{R})$.

Если V имеет *счетный* базис, то можно доказать без дополнительных предположений, что $V \cong ({}^{W}\mathbf{R})$, где W является скелетом главных идеалов [1]). Но самой важной теоремой о линейно упорядоченных векторных пространствах остается следующий классический результат Хана [1].

Теорема Хана о вложении. *Каждое линейно упорядоченное векторное пространство V изоморфно подпространству лексикографического объединения, состоящего из функций над скелетом, образуемым скачками в $\Theta(V)$.*

По поводу точного смысла этого предложения и его доказательства (в котором используется ординальная степень Хана (§ VIII.15)) см. книгу [**Fu**, § IV. 4—IV.5].

[1]) [**Fu**, с. 93]; этот результат принадлежит Эрдешу (Erdös J. — Publ. Math. Debrecen, 1956, **4**, p. 334—343). См. также работы Конрада (Conrad P. — J. Indian Math. Soc., 1958, **22**, p. 1—25, 27—32).

5. Свободные векторные решетки

В этом разделе мы построим свободную векторную решетку $FVL(n)$ с n порождающими, существование которой следует из общих результатов главы VI [1]). Из теоремы 3 мы знаем, что $FVL(n)$ является подпрямым произведением линейно упорядоченных векторных решеток S_α, каждая из которых (будучи гомоморфным образом векторной решетки $FVL(n)$) должна сама иметь n порождающих $x_1, \ldots x_n$.

Лемма 1. *Любое линейно упорядоченное векторное пространство с n порождающими $x_1, \ldots, x_n$ является гомоморфным образом ординальной степени ${}^n\mathbf{R}$.*

Доказательство. Не теряя общности, мы можем предположить, что $x_1 > x_2 > \ldots > x_n > 0$. Далее, по лемме 1 из § 3 элементы x_i можно заменить элементами $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 - \alpha_{21}x_1 \ll x_1$, $y_3 = x_3 - \alpha_{31}x_1 - \alpha_{32}x_2 \ll x_2$ и т. д. Но эти y_i порождают ${}^n\mathbf{R}$, если все они отличны от нуля, и порождают гомоморфный образ пространства ${}^n\mathbf{R}$ в любом другом случае.

Лемма 2. *Векторная решетка ${}^n\mathbf{R}$ является гомоморфным образом векторной подрешетки из $\mathbf{R}^\omega$.*

Доказательство. В $\mathbf{R}^\omega$ пусть $f^j = (1^j, 2^j, 3^j, \ldots)$, и пусть T — векторная подрешетка в $\mathbf{R}^\omega$, натянутая на $f^1, f^2, \ldots, f^n$. В T положим

(9) $\quad f \equiv g\ (\theta)$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{r\to\infty} f_r/g_r = 1$.

Так как для всех $f \in T$ будет

(10) $\quad f_r = \lambda_0 + \lambda_1 r + \ldots + \lambda_n r^n$ для некоторого конечного набора $\lambda_i \in \mathbf{R}$ и всех достаточно больших r,

то отношение эквивалентности (9) является *конгруэнцией* на T. Понятно, что $0 < f^1 \ll f^2 \ll \ldots \ll f^n$ в T/θ; следовательно, T/θ (которое порождено $f^1, \ldots, f^n$, поскольку ими порождается T) изоморфно ${}^n\mathbf{R}$. Этим и завершается доказательство.

Таким образом, $FVL(n)$ оказывается подпрямым произведением линейно упорядоченных векторных решеток S_α с n порождающими, каждая из которых представляет собой гомоморфный образ подходящей векторной подрешетки из $\mathbf{R}^\omega$. Но тем самым доказана

Теорема 6. *Свободная векторная решетка $FVL(n)$ с n порождающими принадлежит многообразию векторных решеток, порожденному векторной решеткой $\mathbf{R}$.*

Следствие. *Любое тождество для операций векторной решетки, выполнимое в $\mathbf{R}$, выполняется в каждой векторной решетке.*

---

[1]) Weinberg E. C. — Math. Ann., 1963, **151**, p. 187—199; 1965, **159**, p. 217—222; Topping D. — Canad. J. Math. 1965, **17**, p. 411—428; Baker K. — Canad. J. Math., 1968, **20**, p. 58—66.

Применяя конструкцию из § VI.7, мы можем *построить* $FVL(n)$ как подрешетку, состоящую из действительных функций, областью определения которых является множество $\mathbf{R}^n$ всех действительных векторов $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, и порожденную координатными проекциями π_i: $\boldsymbol{x} \to x_i$, т. е. как векторную подрешетку в $\mathbf{R}^{\mathbf{R}^n}$. Но все эти функции непрерывны и кусочно линейны. Этим доказывается следующий результат.

Теорема 7. *Функции* $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ *в векторном пространстве* $\mathbf{R}^n$ *порождают свободную векторную решетку с* n *порождающими, которая состоит в точности из непрерывных функций, кусочно линейных и однородных в конических многогранных секторах пространства* $\mathbf{R}^n$, *имеющих общую вершину* $\mathbf{0}$.

Эти функции полностью определяются своими значениями на *единичной сфере*, и, таким образом, кусочно линейны на сферических полиэдрах. При $n = 1$ единичная сфера имеет всего две точки, и мы получаем

Следствие 1. $FVL(1) \cong \mathbf{R}^2$.

Следствие 2. *Каждая свободная векторная решетка является подпрямым произведением экземпляров действительного поля* $\mathbf{R}$.

Упражнения к §§ 4—5

1. Покажите, что $^n_c\mathbf{R}$ не имеет порождающего множества с $m < n$ элементами.

2. Покажите, что ординальное произведение (лексикографическое объединение) $V \circ W$ двух векторных решеток V и W тогда и только тогда является векторной решеткой, когда V линейно упорядочена.

3. Докажите в деталях, что $FVL(1) \cong \mathbf{R}^2$.

4. Установите изоморфизм между $FVL(2)$ и векторной решеткой всех действительных непрерывных функций на единичной окружности, имеющих вид $f(\theta) = a_i \cos\theta + b_i \sin\theta$ на каждом из конечного числа сегментов окружности.

*5. Покажите, что любой полиэдральный комплекс с точностью до гомеоморфизма определяется векторной решеткой всех непрерывных функций, которые кусочно линейны на некотором его симплициальном разбиении (Глисон).

*6. Пусть V — множество всех действительных непрерывных «кусочно полиномиальных» функций f на $(0, \infty)$, т. е. непрерывных функций, совпадающих с некоторыми многочленами на конечном множестве подинтервалов (x_{i-1}, x_i), где $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n(f)} = \infty$.

(а) Покажите, что V — векторная решетка.

(б) Пусть $f\theta g$ означает на V, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$. Докажите, что $V/\theta \cong {}^{\omega}\mathbf{R}$, где ω — первый счетный ординал.

*7. Докажите[1]), что существует функция $\alpha \to f_\alpha$, сопоставляющая каждому счетному ординату α действительную функцию на $(0, \infty)$, такая, что если $\alpha < \beta$, то $f_\alpha \gg f_\beta$.

*8. Покажите, что каждая векторная решетка является гомоморфным образом подпрямого произведения экземпляров действительного поля $\mathbf{R}$.

*9. Покажите, что полная векторная фактор-решетка L_1/N решетки всех интегрируемых функций по модулю нуль-функций не имеет максимальных

---

[1]) Это обобщает одну старую теорему Дюбуа—Реймона; см. книгу Харди (Hardy G. H. Orders of Infinity. — Cambridge, 1924, p. 8).

l-идеалов и потому не является подпрямым произведением экземпляров действительного поля $\mathbf{R}$ (Топинг).

*10. (а) Покажите, что каждая свободная абелева l-группа является подпрямым произведением некоторого множества экземпляров l-группы $\mathbf{Z}$.

(б) Покажите, что тождества, выполнимые во всех коммутативных l-группах, это в точности тождества, истинные в l-группе $\mathbf{Z}$ (Вейнберг).

6. Целозамкнутые направленные векторные пространства

В некоторых случаях более существенной оказывается не решеточная структура упорядоченного векторного пространства, а его целозамкнутость и направленность.

Например, упорядоченное векторное пространство, рассмотренное в примере 2, встречается во многих важных приложениях, но оно не является решеткой. Та же ситуация имеет место и в следующем примере.

Пример 5. Пусть V — векторное пространство всех симметричных $n\times n$-матриц и пусть конус P определяется в нем условием

$$\sum a_{ij}x_ix_j \geqslant 0 \text{ для всех } \boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n). \tag{11}$$

То, что векторные пространства в примерах 2 и 5 (так же, впрочем, как и в примерах 1, 3 и 4) являются целозамкнутыми (и следовательно, архимедовыми) и направленными, вытекает из следующего результата.

Теорема 8. *Конечномерное упорядоченное векторное пространство V тогда и только тогда направлено, когда его положительный конус P имеет непустую внутренность*[1]), *а если оно направлено, то необходимым и достаточным условием его целозамкнутости является топологическая замкнутость положительного конуса P.*

Доказательство. Если P имеет непустую внутренность и a — ее элемент, то $P - P$ содержит $(a+U)-(a+U)=2U$ для некоторого шара U: $\|a\|<\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Следовательно, $P - P \supset \lambda U$ для всех $\lambda>0$ (поскольку P конус), и значит, $P - P = V$. Наоборот, если внутренность конуса P пуста, то (как следует из элементарных свойств выпуклых множеств [2])) P содержится в $(n-1)$-мерном аффинном подпространстве, которое включает и начало; поэтому $P \neq P - P$, что противоречит равенству $P - P = V$. Доказательство первого утверждения теоремы 8 завершается ссылкой на лемму 1 из § XIII.2.

Пусть теперь V — n-мерное направленное векторное пространство с положительным конусом P. В силу результатов предыдущего параграфа, P также будет n-мерным. Кроме того, почти

---

[1]) Мы используем здесь естественную евклидову топологию в V, не зависящую от выбора базиса.

[2]) Valentine F. A. Convex sets. — McGraw—Hill, 1959, глава VI.

по определению (глава XIII, (6)) (V, P) целозамкнуто тогда и только тогда, когда

(12) из $\left(a - \frac{1}{n} b\right) \in P$ для всех $n \in \mathbf{Z}^{+}$ следует, что $a \in P$.

Очевидно, что (12) выполняется, если P топологически замкнуто. Вспомним теперь «принцип линейной достижимости» для выпуклых множеств [1]): если c — какая-нибудь внутренняя точка, а a — граничная точка выпуклого множества S, то интервал (a, c) «прямой» $\lambda a + (1 - \lambda) c$, $0 \leqslant \lambda < 1$, целиком лежит в S. Если теперь в (12) положить $c = a - b$, то отсюда следует, что в случае, когда (V, P) целозамкнуто и направлено, P будет топологически замкнутым выпуклым конусом. Ч. т. д.

Следствие 1. *Если положительный конус P архимедовой векторной решетки имеет непустую внутренность, то P замкнут.*

Следствие 2. *Пусть в целозамкнутом направленном векторном пространстве $f > 0$, $g > 0$, $\alpha_n f \geqslant g$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$, и при этом $\alpha_n \to \alpha$. Тогда $\alpha f \geqslant g$* [2]).

Мы уже видели (теорема XIII.24), что пополнение непустыми сечениями любой целозамкнутой направленной группы является полной l-группой. В любом целозамкнутом направленном векторном пространстве отображения $x \mapsto \lambda x$ будут порядковыми автоморфизмами или дуальными автоморфизмами в зависимости от того, будет ли $\lambda > 0$ или $\lambda < 0$, и в то же время групповыми автоморфизмами. Эти автоморфизмы естественно продолжаются на пополнение сечениями такого пространства, и следовательно, имеет место

Теорема 9. *Пополнение непустыми сечениями любого целозамкнутого направленного векторного пространства является (условно) полной векторной решеткой.*

В общем случае представить себе наглядно результаты этих пополнений сечениями не так просто. Но вот Уотермен недавно доказал следующую теорему: пополнения сечениями (i) свободной векторной решетки с n порождающими; (ii) направленного векторного пространства из примера 2 и (iii) направленного векторного пространства из примера 5 все изоморфны решетке нормальных полунепрерывных сверху функций на $(n - 1)$-сфере.

Сильные единицы. М. Г. Крейн показал, что бо́льшая часть теоремы 8 выполняется в любом целозамкнутом направленном векторном пространстве с сильной единицей [3]). В произвольном

---

[1]) Klee V. C. (Клее) — Duke Math. J., 1951, **18**, p. 443—466, 875—883.

[2]) Биркгоф [7, p. 38, лемма 1]; подпространство, натянутое на f и g, двухмерно.

[3]) Крейн М. Г. — Докл. АН СССР, 1940, **28**, с. 13—17; Крейн М. Г., Крейн С. Г. — Матем. сб., 1943, **13**, с. 1—38. По поводу теоремы Крейна—Мильмана см. их работу: Krein M., Milman D. — Studia Math., 1940, **9**, p. 133—137.

таком пространстве V пусть M_e будет множество «экстремальных» выпуклых векторных подпространств пространства V, а $\overline{M}_e$ — «W^*-замыкание» (слабыми пополнениями) для M_e. Тогда применением теоремы Крейна—Мильмана к замкнутому выпуклому конусу V^+ (который имеет непустую внутренность) получается следующий результат.

Теорема Крейна о представлении. *Существует (естественное) вложение любого целозамкнутого направленного векторного пространства V с сильной единицей в пространство $C(\overline{M}_e)$ всех непрерывных действительных функций на $\overline{M}_e$.*

Заметим, что как только выбрана сильная единица e, точная нижняя грань $\| x \|_e$ всех λ таких, что $| x | \geqslant \lambda_e$, определяет «равномерную норму» на V. Если V — (архимедова) *векторная решетка* (с сильной единицей e), то из $x \wedge y = 0$ следует, что $\| x \vee y \|_e = \| x \|_e \vee \| y \|_e$; поэтому V будет (M)-пространством в смысле § 15.

7. Дуальные пространства

Понятие пространства, *дуального* (или «сопряженного») для направленного векторного пространства, имеет много приложений; общее определение выглядит следующим образом ([**LT1**, § 146]).

Пусть (V, P) — направленное векторное пространство и пусть P^* — множество линейных функционалов на V, которые неотрицательны на P. Тогда P^* представляет собой выпуклый конус в множестве V^* всех *разностей* неотрицательных линейных функционалов $f, g \in P^*$. Следовательно, (V^*, P^*) является направленным векторным пространством; это и есть *дуальное* для (V, P) пространство, а его элементы называются *ограниченными* линейными функционалами на V.

Если (V, P) целозамкнуто и *конечномерно*, то (V^*, P^*) имеет те же свойства (и ту же линейную размерность). Кроме того, существует естественный изоморфизм $(V, P) \cong (V^{**}, P^{**})$ между (V, P) и дважды сопряженным ему пространством, рассматриваемыми как направленные векторные пространства. Эта двойственность играет важную роль в теории линейного программирования. Но мы сосредоточим внимание на *векторных решетках* неограниченной размерности.

На векторных решетках любой линейный функционал $v[x]$ вследствие тождества $x + y = (x \wedge y) + (x \vee y)$ удовлетворяет соотношению

$$v[x] + v[y] = v[x + y] = v[(x \wedge y) + (x \vee y)] = \\ = v[x \wedge y] + v[x \vee y] \tag{13}$$

и при этом $v[0] = 0$. Это доказывает первое утверждение в следующей лемме.

Лемма. *На любой векторной решетке V каждый линейный функционал является оценкой со свойством $v[0]=0$ и каждая изотонная оценка представляет собой положительный функционал.*

Обратное уже неверно: на линейно упорядоченном векторном пространстве *каждый* функционал является оценкой, но очень немногие функционалы линейны.

Некоторые изотонные линейные функционалы являются гомоморфизмами решетки V в $\mathbf{R}$, но они встречаются крайне редко. Например, на $\mathbf{R}^2$ среди изотонных линейных функционалов $ax + by$ с неотрицательными a, b лишь те, у которых $a = 0$ или $b = 0$, будут решеточными гомоморфизмами.

Из леммы следует, что *жорданово разложение*, которое рассматривалось в § X.6, применимо к линейным функционалам на любой векторной решетке V. Поэтому для любого *ограниченного* линейного функционала можно построить положительную и отрицательную части v^+ и v^-. Этим доказана

Теорема 10. *Ограниченные линейные функционалы на любой векторной решетке V сами образуют векторную решетку V^*.*

Для произвольного ограниченного линейного функционала φ на V обозначим через $Z(\varphi)$ подпространство, состоящее из всех $f \in V$ таких, что $\varphi(f) = 0$. Назовем *абсолютным нуль-пространством* векторной решетки V пересечение $Z = \bigcap Z(\varphi)$. Это аналог подпространства $\bigcap K_\alpha$ — пересечения всех максимальных собственных l-идеалов в V («радикала» V), рассматривавшихся в начале § 3. Оно состоит из векторов, принадлежащих нуль-пространству каждого ограниченного линейного функционала.

Теперь назовем векторную решетку $\mathbf{R}$-*сепарабельной*, если ее абсолютным нуль-пространством является 0. Намиока (см. в книге Келли, Намиоки и др. [1, p. 266]) показал, что если множество P замкнуто в самой сильной из локально выпуклых топологий на V, то (V, P) будет $\mathbf{R}$-сепарабельной.

Теорема 11. *$\mathbf{R}$-сепарабельная векторная решетка V естественно изоморфна векторной подрешетке в $(V^*)^*$.*

Доказательство. Если $f \in V$, то положим $\psi_f(\varphi) = \varphi(f)$ для всех $\varphi \in V^*$. Ясно, что ψ_f — линейный функционал на V^*. Мы покажем, что ψ_f — ограниченный линейный функционал, представив его в виде разности двух положительных линейных функционалов. (По свойству жорданова разложения оценка ограничена тогда и только тогда, когда она является разностью двух изотонных оценок.) Но в самом деле, $\psi_f(\varphi) = \varphi(f) = \varphi(f^+) - \varphi(-f^-) = \psi_{f^+}(\varphi) - \psi_{f^-}(\varphi)$. Так как $f^+ \geqslant 0$, то при $\varphi \geqslant 0$ будет $\varphi(f^+) \geqslant 0$, так что функционал ψ_{f^+} положителен. Точно так же положителен и функционал ψ_{-f^-}, и следовательно, ψ_f ограничен для каждого $f \in V$.

Поскольку из $f \geqslant 0$ следует, что $\psi_f \geqslant 0$, функционал ψ_f является изотонным. Он взаимно однозначен, потому что если $\psi_f(\varphi) =$

$= 0$ для всех $\varphi \in V^*$, то $\varphi(f) = 0$ для всех φ и, таким образом, $f \in \bigcap Z(\varphi) = \{0\}$. Чтобы доказать, что линейное отображение γ^2: $f \to \psi_f$ является *l-групповым вложением*, как это требуется в теореме, остается, ввиду § XIII.3, установить, что $\psi_{f^+} = (\psi_f)^+$. Но поскольку γ^2 изотонно (как было показано выше), очевидно, что $\psi_{f^+} \geqslant \psi_f$ и $\psi_f \geqslant 0$, откуда $\psi_{f^+} \geqslant \psi_f \vee 0 = (\psi_f)^+$. Так что остается доказать неравенство $(\psi_f)^+ \geqslant \psi_{f^+}$, чем мы сейчас и займемся.

По теореме XIII.20 f^+ и f^- принадлежат дополняющим в V друг друга l-идеалам J и $J^\perp$. Поэтому из любого функционала $\varphi \geqslant 0$ в V^* можно построить $\varphi_J \geqslant 0$, полагая

$$\varphi_J(g) = \begin{cases} \varphi(g) \text{ для всех } g \in J, \\ 0 \text{ для всех } g \in J^\perp. \end{cases} \tag{14}$$

В частности, $\varphi_J(f^+) = \varphi(f^+)$, $\varphi_J(f^-) = 0$ и поэтому $\varphi \geqslant \varphi_J \geqslant \geqslant 0$. Пусть теперь $\psi \geqslant \psi_f$ и $\psi \geqslant 0$. Тогда для любого $\varphi \geqslant 0$ имеем

$$\psi(\varphi) \geqslant \psi(\varphi_J) \geqslant \psi_f(\varphi_J) = \varphi_J(f) = \varphi_J(f^+) = \varphi(f^+) = \psi_{f^+}(\varphi).$$

Следовательно, $(\psi_f)^+(\varphi) \geqslant \psi(\varphi) \geqslant \psi_{f^+}(\varphi)$ для всех $\varphi \geqslant 0$, или все равно, что $(\psi_f)^+ \geqslant \psi_{f^+}$. Ч. т. д.

Таким образом, $V \subset (V^*)^*$ для любой $\mathbf{R}$-сепарабельной векторной решетки V и поэтому любая такая решетка представима как векторная решетка ограниченных линейных функционалов. Векторные решетки V, для которых абсолютным нуль-пространством является 0 и которые удовлетворяют равенству $V = (V^*)^*$, называются *рефлексивными*.

Упражнения к §§ 6—7

1. Покажите, что векторная решетка архимедова тогда и только тогда, когда она целозамкнута.

2. Покажите, что если $(x, y) > (0, 0)$ по определению означает, что $x > 0$ и $y > 0$, то действительная плоскость является архимедовым векторным пространством, которое не будет целозамкнутым.

3. Пусть V — упорядоченное топологическое векторное пространство, положительный конус P которого топологически замкнут. Покажите, что (V, P) целозамкнуто.

4. Покажите, что любое подпространство архимедова упорядоченного векторного пространства архимедово.

5. Покажите, что любое подпрямое произведение архимедовых направленных векторных пространств является архимедовым направленным векторным пространством.

***6.** Пусть $C = C(0, 1)$ — векторная решетка всех непрерывных на $0 < x \leqslant \leqslant 1$ функций. Покажите, что множество B всех ограниченных непрерывных функций является l-идеалом в C. Покажите, что C целозамкнута, в то время как C/B не архимедова.

7. Используя базис Гамеля по отношению к рациональным скалярам, постройте аддитивную функцию $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, которая не была бы ограниченной.

8. Не используя результатов § X.6, покажите, как можно разложить произвольный (ограниченный) действительный функционал на векторной решетке на его положительную и отрицательную компоненты.

8. Полные векторные решетки

Многие из очень важных векторных решеток являются (условно) полными. Например, имеет место

Лемма 1. *Любая прямая сумма* (= *кардинальное произведение*) *полных* (σ-*полных*) *векторных решеток будет полной* (*соответственно*, σ-*полной*) *векторной решеткой.*

Мы опускаем доказательство. Поскольку l-идеалы являются выпуклыми, а любое выпуклое подмножество условно полной решетки само будет условно полным, мы получаем следующий результат.

Теорема 12. *Любой l-идеал полной* (σ-*полной*) *векторной решетки сам является полным* (*соответственно*, σ-*полным*).

Отсюда следует, что пространство $B(X)$ всех функций, ограниченных на произвольной области X, будет полной векторной решеткой. Таким образом, банахово пространство ограниченных последовательностей является полной векторной решеткой, как l-идеал в $\mathbf{R}^d$.

Но векторная решетка $C[0, 1]$ всех функций, непрерывных на $0 \leqslant x \leqslant 1$, не полна; не будет полной и векторная решетка $M[0, 1]$ всех функций, измеримых на $[0, 1]$; более того, ситуация не изменится, если $[0, 1]$ заменить любым другим пространством с мерой Ω. С другой стороны, по лемме 1, множество $N[0, 1]$ всех функций, обращающихся в нуль всюду вне множества меры нуль, будучи l-идеалом полной векторной решетки $\mathbf{R}^c$ *всех* действительных функций на $[0, 1]$ (заметим: и l-идеалом в $M[0, 1]$), является полной векторной решеткой.

Но что гораздо важнее, фактор-пространство (и векторная фактор-решетка) $V(\Omega) = M(\Omega)/N(\Omega)$ всех измеримых функций по модулю нуль-функций тоже будет полным. Мы докажем этот результат для случая, когда Ω является алгеброй с мерой борелевски измеримых подмножеств прямой $(-\infty, +\infty)$, а фактор-алгебра $\overline{M} = M(-\infty, \infty)/N(-\infty, \infty)$ — полной алгеброй с мерой таких множеств по модулю нуль-множеств. Пусть $X(f, a)$ обозначает множество, на котором $f(x) < a$. Тогда $X(f, a)$ будет сохраняющей порядок функцией, определенной на бесконечном интервале $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$, со значениями в полной булевой алгебре B_σ/N из теоремы XI.10. При этом, если $X(f, a) = X(g, a)$ для всех a, то множество, на котором $|f(x) - g(x)| < \frac{1}{n}$ при всех n, имеет меру нуль; следовательно, $f(x) - g(x)$ будет нуль-функцией и $\bar{f} = \bar{g}$ в B_σ/N. Далее, для любой $f \in V(-\infty, \infty)$ обязательно $\inf\limits_a X(f, a) = \varnothing$, а $\sup\limits_a X(f, a) = \mathbf{R}$. Обратно, любое множество $X(a)$, обладающее указанными свойствами, представимо в виде $X(f, a)$, и функция $f(x)$ строится с помощью приближения ступенчатыми функциями со счетным множеством различных значений. Поскольку, наконец, $f \geqslant g$ равносильно неравенству $X(f, a) \leqslant X(g, a)$ для всех a, то получается

Лемма 2. *Пространство* $V(-\infty, \infty) \cong M(-\infty, \infty)/N(-\infty, \infty)$ *решеточно изоморфно множеству функций, определенных на* $\mathbf{R}$, *со значениями в* B_σ/N, *которые изотонны и удовлетворяют условиям* $\inf_a X(a) = 0$ *и* $\sup_a X(a) = 1$.

Но это будет выпуклое подмножество решетки $(B_\sigma/N)^{\mathbf{R}}$ (в обозначениях § III.1), а эта последняя полна, поскольку полна B_σ/N. Отсюда вытекает

Теорема 13. *Пространство измеримых функций по модулю нуль-функций является полной векторной решеткой.*

Из этого следует, что векторные решетки L^p и $M \cap B/N \cap B$ полны, так как они представляют собой l-идеалы (выпуклые множества) пространства $M(\Omega)/N(\Omega)$.

Упражнения

1. Выведите лемму 1 из первоначальных допущений.

2. Докажите, что любая выпуклая подрешетка условно σ-полной решетки сама условно σ-полна.

3. Покажите, что в любой σ-полной векторной решетке операция умножения на действительное число λ может быть выражена в терминах сложения и упорядоченности и поэтому может быть исключена из неопределяемых первоначальных понятий.

4. Покажите, что следующие условия равносильны для конечномерной векторной решетки V: (i) V полна; (ii) V σ-полна; (iii) V архимедова.

5. В $\mathbf{R}^{\omega}$ определите l-идеалы l^p по аналогии с $L^p(0, 1)$. (Указание. Постройте подходящее атомно порожденное пространство с мерой.)

6. Покажите, что векторная решетка $C(X)$ из примера 3 не является σ-полной за исключением случая, когда пространство X дискретно.

7. (*а) Покажите, что векторная решетка $M(0, 1)$ (условно) σ-полна, но не полна.

(б) Покажите, что фактор-решетка $M(0, 1)/N(0, 1)$ имеет максимальные l-идеалы, но не имеет максимальных (собственных) *замкнутых* l-идеалов.

8. Покажите, что $L^2(0, 1)$ и $L^2(-\infty, \infty)$ изоморфны как векторные решетки.

9. Покажите, что $L^2(0, 1)$ и l^2, хотя и изоморфны как евклидовы векторные пространства (пространства со скалярным произведением), но не изоморфны как векторные решетки. (Указание. Обратите внимание на минимальные l-идеалы и максимальные замкнутые l-идеалы.)

9. Порядковая сходимость. Компоненты слабых единиц

Теперь мы займемся перенесением на случай векторных решеток результатов теоремы XIII.26 о непрерывности всех операций l-группы относительно порядковой сходимости. Поскольку топология в $\mathbf{R}$ секвенциальна, мы рассматриваем только последовательности.

Лемма. *В любой σ-полной векторной решетке*

$$\text{(15)} \qquad \text{если } \lambda_n \to \lambda \text{ и } f_n \to f, \text{ то } \lambda_n f_n \to \lambda f.$$

Доказательство. $|\lambda_n f_n - \lambda f| \leqslant (\sup|\lambda_n|)|f_n - f| + |\lambda_n - \lambda||f|$. Первое слагаемое стремится к нулю, поскольку умножение на постоянную $\sigma = \sup|\lambda_n|$ является при $\sigma > 0$ автоморфизмом векторной решетки V, сохраняющим все внутренние топологии; случай $\sigma = 0$ тривиален. Следовательно, по теореме XIII.26 достаточно показать, что второе слагаемое стремится к нулю. Так как случай $|f| = 0$ тривиален, остается убедиться, что

(16) $$\text{если } g > 0 \text{ и } \mu_n \to 0, \text{ то } \mu_n g \to 0.$$

Но если $h \leqslant \mu_n g$ для последовательности $\{\mu_n\}$, сходящейся к нулю, то $h \ll g$ и потому $h = 0$, так как V (будучи σ-полной) архимедова. Итак, в (16) $\mu_n g \to 0$, чем и завершается доказательство.

Таким образом, нами установлена

Теорема 14. *В любой σ-полной векторной решетке все (конечноместные) векторно-решеточные операции непрерывны относительно порядковой сходимости.*

Предостережение. Хотя из приведенного результата вытекает непрерывность и относительно звездной сходимости, для эквивалентной ей топологии окрестностей этого может и *не* быть [1]). Непрерывность всех векторно-решеточных операций по отношению к звездной сходимости получается по теореме Эдгара (с. 288 после теоремы Урысона).

Теперь применим некоторые результаты из § XIII.11 к произвольной *σ-полной векторной решетке V со слабой единицей e* и построим борелевскую алгебру «компонент» этой единицы e. Если S — произвольный замкнутый l-идеал в V, то $V \cong S \oplus S^*$, где $S^* = \perp S$ является дополнением для S в решетке $\Theta(V)$ [2]). Для данной слабой единицы e пусть e_S будет ее компонента в S при прямом разложении $V \cong S \oplus S^*$. Именно,

(17) $$e_S = \sup\{e \wedge s \mid s \in S\} \in S.$$

Очевидно также, что при этом разложении $e_{S^*} = e - e_S$.

Теорема 15. *В любой σ-полной векторной решетке отображение $S \mapsto e_S$ является решеточным изоморфизмом борелевской алгебры замкнутых l-идеалов на булеву решетку всех «компонент» единицы e.*

Доказательство. По смыслу разложения $e_S \wedge e_{S^*} = 0$ и $e_S + e_{S^*} = e_S \vee e_{S^*} = e$. Далее, по теореме I.10 до-

---

[1]) Флойд (Floyd E. E. — Pacif. J. Math., 1955, 5, p. 687—689); см. также § X.11.

[2]) Как отметил А. И. Векслер, для произвольного замкнутого l-идеала указанное разложение имеет место лишь в случае полноты V. Поэтому в дальнейших рассуждениях под S следует понимать замкнутый l-идеал, являющийся прямым слагаемым в V. — *Прим. перев.*

полняемые элементы дистрибутивной решетки, определяемой интервалом $[0, e]$, образуют булеву решетку. Из (17) очевидным образом следует изотонность отображения $S \mapsto e_S$ борелевской алгебры замкнутых l-идеалов в булеву решетку компонент единицы e. Чтобы завершить доказательство, достаточно установить, что отображение (17) взаимно однозначно. Но это так, поскольку для любой компоненты f единицы e такой, что $f \wedge (e - f) = 0$, множество всех элементов $x \in V$, для которых

$$\lim_{n\to\infty} nf \wedge |x| = |x|, \tag{18}$$

является замкнутым l-идеалом $S(f)$ в V с дополнением $S(e-f)$, — мы опускаем детали. Наконец, $e_{S(f)} = f$ и $S(e_S) = S$.

10. Представление в виде интеграла Стилтьеса

Пусть V — σ-полная векторная решетка со слабой единицей e, как в § 9. *Разложением* слабой единицы e назовем семейство ее компонент e_λ таких, что

$$\text{если } \lambda \leqslant \mu, \text{ то } e_\lambda \leqslant e_\mu, \tag{19}$$

и во внутренней порядковой топологии

$$\lim_{\lambda\to-\infty} e_\lambda = \bigwedge e_\lambda = 0, \quad \lim_{\lambda\to\infty} e_\lambda = \bigvee e_\lambda = e. \tag{20}$$

Ввиду результатов § 8 это равносильно выбору для каждого действительного λ замкнутого l-идеала E_λ такого, что

$$\text{если } \lambda < \mu, \text{ то } E_\lambda \subset E_\mu; \ \bigcap E_\lambda = 0, \ \bigcup E_\lambda = V. \tag{21}$$

Имея такое разложение для e, мы можем следующим образом определить *интеграл Стилтьеса* $\int \lambda\, de_\lambda$. Для произвольных конечного числа M и разбиения π интервала $[-M, M]$ на подинтервалы $[\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ положим

$$u_\pi = \sum_i \lambda_{i-1}\left(e_{\lambda_i} - e_{\lambda_{i-1}}\right), \quad v_\pi = \sum_i \lambda_i \left(e_{\lambda_i} - e_{\lambda_{i-1}}\right).$$

Представляя себе эти элементы соответственно как нижнюю и верхнюю интегральные суммы, легко показать, что для любых π, π' имеем

$$u_\pi \leqslant u_{\pi\wedge\pi'} \leqslant v_{\pi\wedge\pi'} \leqslant v_{\pi'};$$

кроме того, $0 \leqslant v_{\pi'} - u_\pi \leqslant 2\varepsilon e$, где ε — наибольшая из длин подинтервалов, входящих в π или в π'. Так как $2\varepsilon e \downarrow 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$, то u_π и v_π сходятся к одному и тому же пределу g, который мы и будем *считать* значением символа $\int\limits_{-M}^{M} \lambda\, de_\lambda$. И далее, по определению,

$$(22)\qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, de_\lambda = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} \lambda\, de_\lambda$$

(в смысле порядковой сходимости), *если* этот предел существует.

Покажем теперь, что любой элемент $f \in V$ имеет стилтьесовское интегральное представление указанного вида. Впервые этот факт установил Фрейденталь [1], сделавший, однако, множество ненужных допущений. Его конструкция аналогична самосопряженным операторам гильбертова пространства в терминах подходящего «разложения единицы».

Для заданного $f \in V$ пусть $E_\lambda^\perp(f)$ обозначает замкнутый l-идеал в V, имеющий $(\lambda e - f)^+$ слабой единицей, а $E_\lambda(f)$ — его дополнение. Нетрудно доказать выполнимость условий (21) (они следуют из того, что e — слабая единица). Тогда эти $E_\lambda(f)$ образуют разложение единицы. При этом

$$(23)\qquad \lambda e \leqslant f \leqslant (\lambda + \Delta\lambda)\, e \text{ на } E_{\lambda+\Delta\lambda}(f) \cap E'(f).$$

Пусть теперь $\lambda_k = k/2^n$, где n — фиксированное положительное целое число; $J_k = E_{\lambda_{k-1}} \cap E_{\lambda_k}^\perp$ и $\Delta e_k(f) = e_{\lambda_k} - e_{\lambda_{k-1}}$ для соответствующих компонент единицы e. Тогда на компоненте J_k (а на ней $e = \Delta_k$) будет

$$(24)\qquad f - 2^{-n}e \leqslant \lambda_{k-1}\, \Delta e_k(f) \leqslant f \leqslant \lambda_k\, \Delta e_k(f) \leqslant f + 2^{-n}e.$$

Теперь, беря счетную линейную сумму по непересекающимся компонентам J_k векторной решетки V (эта сумма существует, поскольку крайние суммы в (24) ограничены), мы для разбиения π_n получаем, что $f - 2^{-n}e \leqslant u_{\pi_n} \leqslant v_{\pi_n} \leqslant f + 2^{-n}e$. Следовательно,

$$(25)\qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, de_\lambda(f) = \lim_{n\to\infty} \sum \lambda_k\, \Delta e_k(f) = f \quad \text{для любого } f \in V.$$

Итак, нами доказана

Теорема 16. *Для любой слабой единицы e σ-полной векторной решетки V каждый элемент f имеет стилтьесовское интегральное представление вида* (25).

Стоуновское представление. Поскольку замкнутые l-идеалы векторной решетки V образуют булеву алгебру, их можно отождествить с открыто-замкнутыми подмножествами (нульмерного компактного) пространства — *стоуновского пространства* $S(V)$ для V. Естественно попытаться истолковать представление (25) в терминах подходящих функций на этом пространстве. Компоненты единицы e становятся при этом непрерывными функциями на V, а если e отождествить с функцией $e(x) \equiv 1$, то сходимость в (25) становится равномерной.

Можно было бы подумать, что в таком случае каждый элемент f представим в виде непрерывной функции. Но это на самом деле невозможно, поскольку непрерывные функции на компактных пространствах должны быть ограниченными. К тому же упомянутая «равномерная» сходимость *зависит* от выбора слабой единицы e (см. § 12). Поэтому единого естественного представления σ-полных векторных решеток непрерывными функциями не существует.

Однако все становится намного проще, когда V имеет *сильную единицу*. «Равномерная» сходимость получает один и тот же смысл для всех сильных единиц, а каждая функция будет ограниченной относительно представления (25), если единицу e отождествить с функцией $e(x) \equiv 1$ на $S(V)$. И тогда получаются разнообразные теоремы о представлении (см. ниже §§ 15—17).

Упражнения к §§ 9—10

1. Покажите, что если e — слабая (сильная) единица упорядоченного векторного пространства, то слабыми (сильными) единицами будут и все ее кратные относительно положительных скаляров.

2. (а) Покажите, что $L^p(-\infty, \infty)$ имеет слабую единицу при любом p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

(б) Докажите, что $L^p(0, 1)$ имеет сильную единицу тогда и только тогда, когда $p = \infty$.

3. Покажите, что если $V_1, V_2, V_3, \ldots$ — векторные решетки со слабыми единицами, то таким же будет и их неограниченное произведение (= полная прямая сумма как векторных пространств).

4. Покажите, что ограниченное кардинальное произведение $(\mathbf{R}^\omega)$ счетного числа экземпляров действительного поля $\mathbf{R}$ не имеет слабых единиц.

5. Докажите, что любая σ-полная векторная решетка удовлетворяет следующему обобщенному условию Коши: последовательность $\{f_n\}$ порядково сходится тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{m,\,n} |f_m - f_n| = 0$.

$*$ 6. Покажите, как можно построить *канторово* пополнение произвольной векторной решетки, состоящее из ее последовательностей Коши по модулю нуль-последовательностей [1]).

7. Назовем векторную решетку *«σ-наполненной»*, если $\bigvee a_i$ существует, когда $a_i \wedge a_j = 0$ для всех $i \neq j$. Покажите, что векторная решетка измеримых по Лебегу функций на $(-\infty, \infty)$ является σ-наполненной.

8. Какой смысл имеет в $L^p(0, 1)$ представление (25) при $e(x) \equiv 1$? Что получается при изменении p?

11. Ограниченные линейные функции

Одна из фундаментальных теорем алгебры утверждает, что множество *всех* линейных функций $\varphi\colon V \to W$ между двумя (действительными) векторными пространствами V и W само является

---

[1]) См. работы Эверета (E v e r e t t C. J. — Duke Math. J., 1944, **11**, p. 109—119), Банашевского (B a n a s c h e w s k i B. — Math. Nachr., 1957, **16**, p. 51—71) и [**Fu**, § V.11].

векторным пространством; его часто обозначают как $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V, W)$. Если V и W — упорядоченные векторные пространства, то полагая

(26) $\varphi \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда φ изотонна,

мы превращаем $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V, W)$ в упорядоченное векторное пространство; доказательство здесь непосредственное (см. **[LT2**, с. 336, теорема 6]), и мы его опускаем.

Для нужд действительного анализа это векторное пространство слишком велико; более подходящее множество функций во многих случаях состоит из функций, *ограниченных* в следующем смысле.

Определение. Линейная функция φ: $V \to W$ между направленными векторными пространствами называется *ограниченной*, если множество $\{\varphi, 0\}$ ограничено в $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V, W)$.

Лемма 1. *Любая ограниченная линейная функция отображает ограниченное множество на ограниченное множество.*

Доказательство. Пусть $S \subset [a, b] \subset V$ и ψ, ψ' — верхняя и нижняя грани для $\{\varphi, 0\}$ в $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V, W)$. Тогда для всех $x \in [a, b]$ будет

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \varphi(x - a) \leqslant \varphi(a) + \psi(x - a) \leqslant \varphi(a) + \psi(b - a)$$

и двойственно $\varphi(x) \geqslant \varphi(b) + \psi'(b - a)$. Следовательно, образ $\varphi(S)$ множества S относительно φ: $V \to W$ будет подмножеством интервала $[\varphi(b) + \psi'(b - a), \varphi(a) + \psi(b - a)]$ и потому ограничен.

Теперь обратимся к частному случаю ограниченных линейных функций φ: $V \to W$, где V — векторная решетка, а W — *полная* векторная решетка. (Сюда включается и случай $W = \mathbf{R}$ дуального пространства векторной решетки (§ 7).)

Определение. Для вышеуказанной функции φ определим φ^+ следующим образом:

(27) $$\varphi^+(f) = \sup_{x \in [0, f]} \varphi(x), \text{ если } f \geqslant 0,$$

и

(27′) $$\varphi^+(g) = \varphi^+(g^+) - \varphi^+(-g^-) \text{ для любого } g \in V.$$

Покажем теперь, что так определенная функция φ^+ есть не что иное, как $\varphi \vee 0$. В самом деле, если ψ — какая-нибудь аддитивная верхняя грань для $\{\varphi, 0\}$, то, очевидно, $\psi \geqslant \varphi^+$, понимаемой в смысле (27)—(27′). Обратно, если $f \geqslant 0$ в V, то, понятно, $(\varphi^+ - \varphi)(f) \geqslant \varphi(f) - \varphi(f) = 0$ и $(\varphi^+ - 0)(f) \geqslant \varphi(0) - 0(f) = 0$, и значит, $\varphi^+ = \varphi \vee 0$ в упорядоченности, определяемой в множестве $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V, W)$ условием (26), если только определенная формулами (27)—(27′) функция φ^+ линейна.

Таким образом, остается установить линейность φ^+. Очевидно, что $(\lambda\varphi)^+ = \lambda\varphi^+$ для любого $\lambda \geqslant 0$. Дальше заметим (снова оставляя доказательство читателю), что справедлива

Лемма 2. *Любая функция ψ: $V \to W$, линейная на положительном конусе P векторной решетки V, может быть продолжена по формуле (27') до функции, линейной на всей V.*

После этого достаточно показать, что φ^+ аддитивна на положительных элементах. Но в силу результата упражнения 9 к § XIII.4, множество элементов $x \in [0, g+h]$ совпадает с множеством сумм $y+z$ (где $y \in [0, g]$, $z \in [0, h]$). Поэтому

$$\sup_{[0,\, g+h]} \varphi(x) = \sup_{y \in [0,\, g],\, z \in [0,\, h]} \varphi(y+z)$$

и, поскольку φ линейна и аддитивно непрерывна на $\mathbf{R}$,

$$\sup_{[0,\, g+h]} \varphi(x) = \sup_{[0,\, g]} \varphi(y) + \sup_{[0,\, h]} \varphi(z).$$

Возвращаясь к (26), получаем, что $\varphi^+(y+z) = \varphi^+(y) + \varphi^+(z)$ для любых положительных x, y, z, что и требовалось. Этим и завершается доказательство равенства $\varphi^+ = \varphi \vee 0$.

По лемме 1 из § XIII.3 существование $\varphi \vee 0 = \varphi^+$ для всех ограниченных линейных функций φ: $V \to W$ приводит к следующему результату.

Теорема 17. *Ограниченные линейные функции, определенные на векторной решетке со значениями в полной векторной решетке, образуют векторную решетку относительно упорядоченности* (26) [1].

Следствие. *Для любых функций φ: $V \to W$, где V — векторная решетка, а W — полная векторная решетка, ограниченность равносильна каждому из следующих условий:* (i) *φ переводит ограниченные множества в ограниченные множества;* (ii) *φ является разностью неотрицательных функций.*

Доказательство. По лемме 1 из ограниченности следует (i). Ввиду теоремы 17 и результатов главы XIII из (i) следует (ii). Наконец, если $\varphi \geqslant 0$ и $\psi \geqslant 0$, то

$$-\varphi - \psi \leqslant \varphi - \psi \leqslant \varphi + \psi,$$

и значит, (ii) влечет ограниченность.

Упражнения

1. (а) Обозначим упорядоченное векторное пространство всех линейных функций φ: $X \to Y$ (где X, Y — упорядоченные векторные пространства) через $\mathrm{Hom}(X, Y)$. Что можно сказать о дистрибутивности Hom относительно прямых произведений?

(б) Тот же вопрос для случая, когда X и Y — полные векторные решетки, а $\mathrm{Hom}(X, Y)$ обозначает векторную решетку всех ограниченных линейных функций φ: $X \to Y$.

---

[1] И эта векторная решетка является полной. Теорема 17 принадлежит Л. В. Канторовичу (ДАН СССР, 1936, 4, с. 271—274). — *Прим. перев.*

2. Определим *«обобщенную оценку»* на решетке L как функцию $v\colon L \to X$ (где X — коммутативная l-группа) такую, что $v[x] + v[y] = v[x \wedge y] + v[x \vee y]$.

(а) Покажите, что если решетка L имеет строго изотонную обобщенную оценку, то она модулярна.

(б) Для произвольной изотонной обобщенной оценки v определите *«обобщенное расстояние»* $|x - y| = v[x \vee y] - v[x \wedge y]$ и рассмотрите его свойства.

(в) Пусть $x_n \to a$ означает, что $|x_n - a| \to 0$ в X. Рассмотрите получающуюся секвенциальную топологию [1]).

3. В упр. 2 допустим, что X является полной решеткой, и назовем v *ограниченной*, если $v = v' - v''$, где v', v'' изотонны. Постройте «обобщенное жорданово разложение» $v = v^+ + v^-$, аналогичное разложению в § X.6.

12. Банаховы решетки

Действительное банахово пространство — это действительное векторное пространство V с действительной нормой — функцией $\|f\|$ такой, что (i) $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ и (ii) «расстояние» $\|f - g\|$ превращает V в полное метрическое пространство. Все привычные примеры банаховых пространств являются в естественном смысле и векторными решетками. Кроме того, в них

(28) $$\text{если } |f| \leqslant |g|, \text{ то } \|f\| \leqslant \|g\|.$$

Эти свойства мотивируют следующее определение (Л. В. Канторович [1, § 9]).

Определение. *Банаховой решеткой* называется действительное банахово пространство, которое является также и векторной решеткой с порядком и нормой, связанными импликацией (28).

Из условия (28) сразу следует, что

(29) $$\|f\| = \||f|\| \text{ для всех } f.$$

Теперь докажем несколько фактов о банаховых решетках.

Лемма 1. *Если векторная решетка V содержит последовательность $\{f_n\}$ такую, что все последовательности $\{\lambda_n f_n\}$ порядково ограничены, то V нельзя превратить в банахову решетку.*

Доказательство. Предположим, что на V можно задать структуру банаховой решетки, и пусть $\lambda_n = n/\|f_n\|$. (Не теряя общности, можно считать, что $f_n \neq 0$.) Если $|\lambda_n f_n| \leqslant u$ для всех n, то $n = |\lambda_n| \|f_n\| = \|\lambda_n f_n\| = \||\lambda_n f_n|\| \leqslant \|u\|$ для всех n, что невозможно.

Следствие. *Векторные решетки $\mathbf{R}^\omega$ и $\mathbf{R}^c$ нельзя превратить в банаховы решетки.*

Лемма 2. *Операции $f + g$, $f \wedge g$, $f \vee g$ непрерывны по Липшицу в любой банаховой решетке.*

---

[1]) По поводу дальнейших результатов см. работы Блюменталя (Blumenthal L. M. — Palermo Rend., 1952, 1, p. 343—360; 1961, 10, p. 175—192).

Доказательство. Из коммутативности и формулы (25) главы XIII

$$|(f\circ h)-(g\circ h_1)|\leqslant|f-g|,$$

где $\circ$ обозначает $+$, $\wedge$ или $\vee$. В силу (28) отсюда следует соответствующее метрическое неравенство; поэтому все три операции непрерывны по Липшицу с модулем непрерывности единица в обычной метрике $\|f-g\|$.

Следствие. *В любой банаховой решетке V положительный конус P и все интервалы $[a, b]$ являются метрически замкнутыми множествами. При этом если $a_n\to a$, $b_n\to b$, $x_n\to x$ и $a_n\leqslant x_n\leqslant b_n$ для всех n, то $a\leqslant x\leqslant b$ (здесь имеется в виду метрическая сходимость).*

Лемма 3. *Любая сепарабельная банахова решетка имеет слабую единицу e.*

Доказательство. Сепарабельность решетки V означает, что в ней существует счетное метрически полное подмножество $\{f_n\}$. Положим

$$e=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f_n|}{2^n\|f_n\|},\ \text{где во всех слагаемых } f_n\neq 0.$$

Это корректно определенный элемент из V, поскольку последовательность частичных сумм является последовательностью Коши, а V — полное метрическое пространство. Пусть элемент $g>0$. Поскольку последовательность $\{f_n\}$ плотна в V, найдется n такое, что $\|g-f_n\|<\|g\|$. Если $g\wedge e=0$, то $g\wedge\lambda e=0$ для любого действительного числа λ. Следовательно, $0\leqslant g\wedge|f_n|\leqslant g\wedge(2^n\|f_n\|)e=0$, и значит, $g\wedge f_n^+=0$. Но это вступает в противоречие с тем фактом, что ввиду леммы 2

$$g\|=\|(g\wedge g)-(g\wedge f_n^+)\|\leqslant\|(g\vee 0)-(f_n\vee 0)\|\leqslant\|g-f_n\|<\|g\|.$$

Итак, если $g>0$, то $g\wedge e>0$, так что e — слабая единица.

Теперь посмотрим, как в банаховых решетках связаны между собой метрическая ограниченность и порядковая ограниченность.

Лемма 4. *В любой банаховой решетке L каждое порядково ограниченное подмножество является метрически ограниченным.*

Доказательство. Если x и y лежат в интервале $[a, b]$, то ему принадлежат также $x\wedge y$ и $x\vee y$. Поэтому $|x-y|\leqslant|b-a|$ и, значит, $\|x-y\|\leqslant\|b-a\|$. Это показывает, что диаметр любого интервала $[a, b]$ конечен и совпадает он с $\|b-a\|$.

Лемма 5. *В банаховой решетке L положительный элемент e является сильной единицей тогда и только тогда, когда некоторый кратный для $[-e, e]$ интервал $[-ne, ne]=n[-e, e]$ содержит единичный шар U.*

Доказательство. Если $U \subset n[-e, e]$, то $|f| \leqslant \leqslant n\|f\|e$ для всех $f \in L$, поскольку $|f|/\|f\| \in U$. Следовательно, e — сильная единица.

Обратно, предположим, что $n\ [-e, e]$ не содержит U ни при каком n. Тогда можно найти последовательность элементов $f_k \in U$ такую, что $2^{-2k}|f_k|$ не будет ограничено элементом e. Построим $g = \sum 2^{-k}|f_k|$, — в силу полноты L этот элемент существует и он содержит все $|f_k|$. Поэтому элемент $2^{-k}g \geqslant 2^{-2k}|f_k|$ ни при каком k не содержится в e, и значит, e не является сильной единицей.

Следствие. *Банахова решетка L имеет сильную единицу тогда и только тогда, когда ее единичный шар U порядково ограничен.*

Доказательство. Если $U \subset [a, b]$, то по лемме 2 $|a| + |b|$ будет сильной единицей в L. Обратно, если U имеет сильную единицу e, то $U \subset [-ne, ne]$.

Сопряженные пространства. Линейный функционал φ на банаховом пространстве B называется (метрически) *ограниченным*, если существует такая константа C, что $|\varphi(f)| \leqslant C\|f\|$ для всех $f \in B$. Классическим фактом является то, что все такие ограниченные линейные функционалы на данном банаховом пространстве образуют *сопряженное* банахово пространство B^* и что $B \subset (B^*)^*$ (теорема Хана — Банаха).

Теперь покажем, что если B — банахова решетка [1]), то это B^* совпадает с порядково сопряженной векторной решеткой B^*, уже построенной в теореме 10.

Теорема 18. *Для линейных функционалов φ на банаховой решетке метрическая ограниченность и порядковая ограниченность равносильны.*

Доказательство. Если линейный функционал φ метрически ограничен, то для любого $a > 0$ в данной банаховой решетке B, если $|x| \leqslant a$, то в силу (28) будет $\|x\| \leqslant \|a\|$ и, следовательно, $|\varphi(x)| \leqslant C\|x\| \leqslant C\|a\|$. Это показывает, что φ переводит порядково ограниченные множества из B в порядково ограниченные множества из $\mathbf{R}$, т. е. что φ порядково ограничен. Обратно, если φ — метрически неограниченный линейный функционал, то существует последовательность $\{x_n\}$ такая, что $\|x_n\| < < 2^{-n}$ и в то же время $\|\varphi(x_n)\| \to +\infty$. Ввиду следствия из леммы 2 элементы $a = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ и $b = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ ограничивают множество элементов y, на которых $\varphi(y)$ метрически неограничен и, следовательно, порядково неограничен. Таким образом, φ не является порядково ограниченным. Теорема доказана.

[1]) Предположение о метрической полноте излишне — см. в книге Келли, Намиоки и др. [1, теорема 24.3]. Но для простоты мы сохраняем его и в дальнейшем.

Отсюда следует, что, как мы уже отмечали, (сопряженное пространство) B^* для B как для векторной решетки и как для банахова пространства — одно и то же. Но любое банахово пространство $\mathbf{R}$-сепарабельно, поскольку для любого заданного $x \neq 0$ по теореме Хана — Банаха существует ограниченный линейный функционал φ такой, что $\varphi(x) \neq 0$. Мы получаем

Следствие 1. *Любая банахова решетка $\mathbf{R}$-сепарабельна. Любое рефлексивное банахово пространство, являющееся банаховой решеткой, будет рефлексивной векторной решеткой.*

Объединяя теоремы 18 и 10, мы заключаем:

Следствие 2. *Векторная решетка, сопряженная для банаховой решетки, также является банаховой решеткой.*

Упражнения

1. Дайте подробное доказательство следствия из леммы 1.

2. Покажите, что векторную решетку $M(-\infty, \infty)/N(-\infty, \infty)$ всех измеримых функций по модулю нуль-функций нельзя превратить в банахову решетку.

3. Покажите, что никакую «наполненную» векторную решетку со счетным множеством дизъюнктных положительных элементов нельзя превратить в банахову решетку.

4. В σ-полной векторной решетке V с сильной единицей e положим

$$(*) \qquad \|f\|_e = \inf\{\lambda \mid f \in [-\lambda e, \lambda e]\}.$$

Покажите, что тем самым мы превращаем V в банахову решетку [1]).

5. (а) Покажите, что если f_n — убывающая последовательность элементов банаховой решетки, сходящаяся метрически к 0, то она и порядково сходится к 0.

(б) Покажите, что в любой банаховой решетке метрически сходящаяся последовательность звездно сходится к тому же пределу.

6. Пусть V — любая банахова решетка, в которой если $u_n \downarrow 0$, то некоторая последовательность $\{ku_{n(k)}\}$ порядково ограничена. Покажите, что из порядковой сходимости в V следует метрическая сходимость и что звездная сходимость равносильна метрической сходимости.

*7. Докажите, что для полной банаховой решетки следующие три условия равносильны: (i) каждый ограниченный линейный функционал порядково непрерывен; (ii) если $f_n \downarrow 0$, то $\|f_n\| \to 0$; (iii) если $f_\alpha \downarrow 0$, то $\|f_\alpha\| \to 0$, — для сетей [2]).

13. Относительно равномерная сходимость

Порядковая сходимость в векторных решетках обсуждалась в § 9; расширение ее до звездной сходимости в произвольных решетках изучалось в главе X, а еще более общая топологическая структура рассматривалась в § IX.6. В § X.12 мы построили внутреннюю интервальную топологию в произвольном бинаправленном множестве. В случае векторных решеток это приводит к еще одной интересной внутренней топологии, которая, вообще говоря,

---

[1]) Обобщения см. у Стоуна (Stone M. H. — Ann. Math., 1947, **48**, p. 851—856).

[2]) Результат упр. 7 принадлежит Огасаваре (Ogasawara T.); см. также у Накамуры (Nakamura M. — Tôhoku Math. J., 1949, **1**, p. 100—108).

является более слабой, чем топология, определяемая порядковой сходимостью, и по-видимому, аналогична «слабой» топологии Банаха [1].

Сейчас, следуя основной идее Мура, мы определим третью внутреннюю топологию для архимедовых направленных векторных пространств. Будем говорить, что последовательность $\{f_n\}$ элементов направленного векторного пространства сходится относительно равномерно к элементу f, если $|f_n - f| \leqslant \lambda_n u$ для некоторых u и $\lambda_n \downarrow 0$.

Лемма 1. *В любом архимедовом направленном векторном пространстве, если $f_n \to f$ и $g_n \to g$, то $f_n \circ g_n \to f \circ g$, — в относительно равномерной сходимости (здесь через $\circ$ обозначается $\wedge$, $\vee$ или $+$).*

Доказательство. Пусть $|f_n - f| \leqslant \lambda_n u$ и $|g_n - g| \leqslant \leqslant \mu_n v$. Тогда $(\lambda_n + \mu_n)(u+v)$ ограничивает соответствующие разности.

Теперь установим связь между относительно равномерной сходимостью и порядковой сходимостью.

Лемма 2. *В σ-полной векторной решетке последовательность $\{f_n\}$ порядково сходится к f тогда и только тогда, когда $|f_n - f| \leqslant w_n$ для некоторой последовательности $w_n \downarrow 0$.*

Доказательство. Так как $x \mapsto x - f$ является решеточным автоморфизмом, сохраняющим абсолютные величины и разности, мы можем считать, что $f = 0$. В этом случае $w_n = \bigvee_{k \geqslant n} |f_k|$ и будет нужной последовательностью. Обратное очевидно, поскольку $\limsup |f_n| \leqslant \lim w_n = 0$ и двойственно.

Теорема 19. *В любой архимедовой векторной решетке V из относительно равномерной сходимости следует порядковая сходимость. Они равносильны, когда из $u_n \to 0$ вытекает ограниченность в V некоторой последовательности $\{ku_{n(k)}\}$.*

Доказательство. Если $|f_n - f| \leqslant \lambda_n u$ и $\lambda_n \downarrow 0$, то $\{f_n\}$ порядково сходится к f. Обратно, если $|f_n - f| \leqslant u_n$ и u верхняя грань для $ku_{n(k)}$, то $|f_n - f| \leqslant u/k$ для всех $n > n(k)$.

Относительно равномерная звездная сходимость определяется (подобно построениям § IX.6) как относительно равномерная сходимость некоторой подпоследовательности в каждой последовательности.

Теорема 20. *В любой банаховой решетке метрическая сходимость равносильна относительно равномерной звездной сходимости.*

Доказательство. В силу однородности обеих топологий нам нужно рассмотреть лишь случай сходимости к 0. Но если $|f_n| \leqslant \lambda_n u$ и $\lambda_n \downarrow 0$, то $\|f_n\| \leqslant \lambda_n \|u_n\| \downarrow 0$. Таким образом, из относительно равномерной звездной сходимости следует метри-

[1]) В этой топологии $f_\alpha \to f$ тогда и только тогда, когда $\varphi(f_\alpha) \to \varphi(f)$ для каждого $\varphi \in V^*$.

ческая звездная сходимость, а значит, и метрическая сходимость (поскольку если последовательность действительных чисел x_n не сходится к y, то существует подпоследовательность $x_{n(k)}$, отделяемая от y, и значит, каждая подпоследовательность $x_{n(k(i))}$ будет отделена от y). Обратно, если $\| f_n \| \to 0$, то можно выбрать $n(k)$ так, чтобы $k^3 \| f_{n(k)} \| \to 0$, и построить $V = \sum_{k=1}^{\infty} kf_{n(k)}$, для которого $| f_{n(k)} | \leqslant | V |/k$.

Отсюда следует, что с точностью до линейной топологической эквивалентности норма в любой банаховой решетке определяется уже одними ее векторно-решеточными свойствами! Таким образом, порядок можно использовать как *заменитель* нормы!

Относительно равномерная топология. Как показал Гордон [1], относительно равномерная *сходимость* тесно связана со следующей относительно равномерной *топологией*, введенной Намиокой [1].

Определение. В произвольном целозамкнутом направленном векторном пространстве определим *относительно равномерную топологию* как самую тонкую из локально выпуклых топологий, в которых каждое порядково ограниченное множество топологически ограничено. Гордон [1, р. 421] показал, что эта относительно равномерная топология является самой тонкой из *локально выпуклых* топологий таких, что если $f_n \to f$ относительно равномерно, то $f_n \to f$ топологически. Таким образом, она будет топологией Макки, связанной с множеством V^* ограниченных линейных функционалов на V. (Заметим, что если не требовать локальной выпуклости, то это была бы как раз «поляра» для относительно равномерной сходимости в смысле § IX.6.) В этой топологии базис окрестностей для 0 состоит из тех выпуклых симметричных множеств, которые для каждого порядкового интервала $[-a, a]$ содержат и некоторый кратный ему относительно положительного скаляра интервал $[-\varepsilon a, \varepsilon a]$.

Намиока [1, теорема 8.5] показал, что в архимедовых векторных решетках операции $\wedge$, $\vee$, $+$ всегда непрерывны в относительно равномерной топологии (мы это доказали для банаховых решеток).

Если (V, P) — σ-полная $\mathbf{R}$-сепарабельная векторная решетка, то она является «тоннельной» (t-пространством) в относительно равномерной топологии. В этом случае Гордон [1, теорема 5.14] показал, что относительно равномерная топология на (V, P) — это топология, индуцируемая на (V, P) дважды сопряженным векторным пространством $(V, P)^{**}$.

14. Равномерно монотонные нормы

В оставшихся параграфах этой главы мы будем иметь дело со специальными классами банаховых решеток, которые играют центральную роль в приложениях. Среди них следует отметить банаховы решетки $L^p(\Omega)$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и Ω — алгебра с мерой) и $C(X)$, где X — топологическое пространство общего вида. Случай $p = 2$ и $\Omega = B_\sigma/N$ (§ XI.5) — алгебры измеримых множеств по модулю нуль-множеств, приводящий к самому обычному *гильбертову пространству* $L^2(-\infty, \infty) \cong L^2[0, 1]$, пожалуй, наиболее важен, но мы в основном будем рассматривать случаи $p = 1$ и $p = \infty$ пространств $L(\Omega)$ и двойственных («сопряженных») им.

При $1 \leqslant p < \infty$ нормы в $L^p(\Omega)$ и $l^p(\mathbf{N})$, где $\mathbf{N}$ — множество неотрицательных целых чисел, удовлетворяют условиям, аналогичным равномерной выпуклости (см. ниже упр. 4).

Определение. Норма в банаховой решетке $B = (V, P)$ называется *равномерно монотонной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ столь малое, что

(30) если $f, g \in P$, $\|f\| = 1$ и $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \delta$, то $\|g\| < \varepsilon$.

Банахова решетка с равномерно монотонной нормой называется UMB-*решеткой*.

Почти очевидно, что любая метрически замкнутая векторная подрешетка UMB-решетки снова является UMB-решеткой. UMB-решетки имеют и менее тривиальные привлекательные свойства, такие, как например, следующее.

Теорема 21. *В UMB-решетке любая метрически ограниченная сеть, направленная в решеточной (или в двойственной ей) упорядоченности, метрически сходится.*

Доказательство. Мы можем сосредоточиться на элементах, следующих за некоторым фиксированным элементом $f_\alpha = a$; при этом, поскольку $f \mapsto f - a$ является изометрическим автоморфизмом, можно, не теряя общности, считать все f_β (где $\beta \geqslant \alpha$) неотрицательными. Точно так же, изменив, если нужно, масштаб, мы можем предположить, что $\sup\limits_{\beta \geqslant \alpha} \|f_\beta\| = 1$. Но в этом случае, выбирая β так, чтобы было $\|f_\beta\| > 1 - \delta$, мы будем иметь $\|f_\gamma - f_\beta\| < \varepsilon$ для всех $\gamma \geqslant \beta$. Ч. т. д.

Следствие. *Любая UMB-решетка V (условно) полна как векторная решетка.*

Это потому, что если множество $S \subset V$ имеет верхнюю грань, то ее имеет и множество конечных объединений $\bigvee\limits_F x_i$ (где $F \subset S$), а они образуют метрически ограниченное направленное множество.

Теорема 22. *В любой UMB-решетке порядковая сходимость и относительно равномерная сходимость равносильны.*

Доказательство. Пусть $u_n \downarrow 0$. По теореме 21 $\{u_n\}$ метрически сходится к некоторому элементу a. В силу леммы 2 из § 12, $a \wedge 0 = 0$ и $a \vee u_n = u_n$ для всех n; значит, $0 \leqslant a \leqslant u_n$ для всех n, так что $a = 0$. Отсюда получается, что

(31) если $u_n \downarrow 0$, то $\|u_n\| \downarrow 0$,

в любой UMB-решетке. Но из (31) следует, что для некоторого $n(k)$ будет $\| u_{n(k)} \| \leqslant 1/k2^k$; поэтому бесконечная линейная сумма $\sum_{i=1}^{\infty} ku_{n(k)}$ существует и (лемма 2 из § 12) является верхней гранью для последовательности $\{ku_{n(k)}\}$. Ссылка на теорему 19 завершает доказательство.

Следствие. *В любой UMB-решетке звездная сходимость и метрическая сходимость равносильны.*

Пусть теперь V — произвольная UMB-решетка и φ — ограниченный аддитивный функционал на V. Мы покажем, что φ разбивает V на три замкнутых l-идеала («компоненты»), на которых φ является соответственно положительным, отрицательным или обращается в нуль.

Лемма 1. *Пусть N^+, N^- и N^0 обозначают множества, состоящие из элементов f таких, что при $0 < x \leqslant |f|$ соответственно $\varphi(x) > 0$, $\varphi(x) < 0$ и $\varphi(x) = 0$. Тогда N^+, N^- и N^0 являются независимыми l-идеалами.*

Доказательство. Пусть $f, g \in N^+$. Тогда если $0 < x \leqslant |f+g|$, то $0 < x \leqslant |f| + |g|$, откуда $x = y+z$, где $0 \leqslant y \leqslant |f|$, $0 \leqslant z \leqslant |g|$ и $y > 0$ или $z > 0$; следовательно, $\varphi(x) = \varphi(y) + \varphi(z) > 0$. Значит, множество N^+ замкнуто относительно сложения. Далее, если $f \in N^+$ и $|h| \leqslant |f|$, то при $0 < x \leqslant |h|$ будет $0 < x \leqslant |f|$, откуда $\varphi(x) > 0$, так что $h \in N^+$. Таким образом, N^+ является l-идеалом. Аналогично, l-идеалами будут N^- и N^0. Они очевидным образом независимы, поскольку если $f \neq 0$, то из принадлежности $f \in N^+$ следует, что $\varphi(|f|) > 0$, для $f \in N^-$ будет $\varphi(|f|) < 0$, а при $f \in N^0$ получаем, что $\varphi(|f|) = 0$.

Лемма 2. *Функционал $\varphi(f)$ достигает своей точной верхней грани M на любом интервале $0 \leqslant x \leqslant f$.*

Доказательство. Выберем $x_m \in [0, f]$ так, чтобы $\varphi(x_m) > M - 3^{-m}$, и покажем, что для $g = \limsup \{x_m\}$ (этот предел существует ввиду следствия из теоремы 21 и при этом $g \in [0, f]$) будет $\varphi(g) = M$. В самом деле,

$$\varphi(x_m \vee x_n) = \varphi(x_m) + \varphi(x_n) - \varphi(x_m \wedge x_n) > M - 3^{-m} - 3^{-n},$$

откуда

$$\varphi\left(\bigvee_{i=m}^{m+r} x_i\right) > M - (3^{-m} + \ldots + 3^{-m-r}) > M - 2\cdot 3^{-m}.$$

Переходя к пределу, имеем:

$$M \geqslant \varphi\left(\bigvee_{k \geqslant m} x_k\right) \geqslant M - 2\cdot 3^{-m}.$$

Снова переходя к пределу (при $m \to \infty$), в силу непрерывности в метрической и, значит (следствие из теоремы 22), в порядковой топологии, получаем, что $\varphi(g) = M$.

Лемма 3. *Пусть в лемме 2 u обозначает точную нижнюю грань множества элементов x, лежащих между 0 и f и таких, что $\varphi(x) = M$; v определяется двойственно и $w = f - u - v$. Тогда $u \in N^+$, $v \in N^-$, $w \in N^0$ и $f = u + v + w$.*

Доказательство. Существование u и v (а значит, и w) следует из полноты UMB-решетки V. Далее, если $\varphi(x) = \varphi(y) = M$, то $\varphi(x \wedge y) + \varphi(x \vee y) = 2M$. Но $\varphi(x \wedge y) \leqslant M$ и $\varphi(x \vee y) \leqslant M$ по предположению; значит, $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x \vee y) = M$. Из теоремы 19 в силу непрерывности следует, что $\varphi(u) = \varphi\left(\bigvee_X x\right) = M$, где X—множество всех $x_\alpha \in [0, f]$, для которых $\varphi(x_\alpha) = M$. Кроме того, если $0 < x \leqslant u$, то по лемме 1 $\varphi(u - x) < u \wedge v = 0$, откуда $u + v = u \vee v \leqslant f$ и $0 \leqslant w \leqslant f$. Наконец, если $0 < x \leqslant w$, то $\varphi(x) + \varphi(u) = \varphi(x + u) \leqslant \varphi(u)$ и значит, $\varphi(x) \leqslant 0$; двойственно получается, что $\varphi(x) \geqslant 0$, так что $\varphi(x) = 0$. Следовательно, $w \in N^0$. Равенство $f = u + v + w$ очевидно. Доказательство закончено.

Теорема 23. *Если φ — произвольный ограниченный аддитивный функционал на UMB-решетке V, то V является прямым произведением замкнутых l-идеалов N^+, N^- и N^0, определенных в лемме 1.*

Доказательство. По лемме 1 указанные l-идеалы независимы, а по лемме 3 их сумма совпадает с V.

Упражнения к §§ 13—14

1. Покажите, что лемма 1 из § 14 справедлива в любой векторной решетке, в то время как леммы 2—3 не имеют места, например, в $C[0, 1]$.

2. Покажите, что (31) нарушается в банаховой решетке (b) всех ограниченных последовательностей $f = (f_1, f_2, f_3, \ldots)$ с нормой $\|f\| = \sup |f_i|$.

3. (а) Докажите в деталях, что $L^p(-\infty, \infty)$ является UMB-решеткой, если $1 \leqslant p < +\infty$.

(б) Покажите, что (30) нарушается в пространствах $C[0, 1]$ и (b).

* 4. Банахово пространство по определению «равномерно выпукло», если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из $\|f\| = \|g\| = 1$ и $\|f - g\| \geqslant \varepsilon$ следует неравенство $\|(f + g)/2\| \leqslant 1 - \delta$. Покажите, что любая равномерно выпуклая банахова решетка является UMB-решеткой.

5. Пусть φ — линейный функционал на полной банаховой решетке V, обладающий тем свойством, что из $x_\alpha \downarrow 0$ следует сходимость $\varphi(x_\alpha) \to 0$. Покажите, что φ разлагает V, как в теореме 23 [1]).

* 6. Пусть V — направленное векторное пространство с положительным конусом P. Покажите, что следующие условия равносильны: (i) C замкнуто в самой тонкой локально выпуклой топологии на V; (ii) C замкнуто в каждой топологии на V, в которой любой положительный линейный функционал непрерывен; (iii) элемент $f \in V$ положителен тогда (и только тогда), когда $\varphi(f) \geqslant 0$ для каждого положительного линейного функционала φ на V.

* 7. Докажите, что для выпуклого симметричного подмножества $S = -S$ в целозамкнутом направленном векторном пространстве V следующие утверждения равносильны:

(i) S является окрестностью элемента 0 в относительно равномерной топологии на V;

---

[1]) Накамура (Nakamura M. — Proc. Japan Acad., 1950, 26, p. 9—10).

(ii) если $f_n \to 0$ относительно равномерно, то все за исключением, быть может, конечного их числа члены последовательности $\{f_n\}$ лежат в S.

$*$ **8.** Докажите, что в упр. 6 линейный функционал φ на V непрерывен в относительно равномерной топологии тогда и только тогда, когда при $f_n \to 0$ (относительно равномерно) будет $\varphi(f_n) \to 0$. [1]

$*$ **9.** (а) Покажите, что любое нормированное пространство можно упорядочить так, чтобы метрическая сходимость сетей в нем оказалась равносильной порядковой сходимости.

(б) Покажите, что если топологическое линейное пространство можно упорядочить так, чтобы сходимость сетей оказалась в нем равносильной порядковой сходимости, то это пространство допускает норму.

(в) Покажите, что утверждение в (б) не проходит, если рассматривать только последовательности.

15. (L)-пространства

Нетрудно проверить, что известные банаховы решетки $L^1(0, 1)$, $L^1(-\infty, \infty)$ и (l) удовлетворяют следующему условию:

(32) если $f > 0$ и $g > 0$, то $\|f+g\| = \|f\| + \|g\|$.

Банаховы решетки со свойством (32) называются (абстрактными) (L)-*пространствами*; этот класс банаховых решеток детально рассматривал Какутани [1] [2].

Очевидно, что из (32) следует равномерная монотонность нормы, если положить $\delta = \varepsilon$. Поэтому любое (L)-пространство является UMB-решеткой и, значит (следствие из теоремы 21), полной векторной решеткой.

Замечание. Пусть в произвольной векторной решетке, являющейся и банаховым пространством, задана норма, удовлетворяющая условию (32). Тогда *производная норма*, определяемая как

(33) $\|f\|' = \|f^+\| + \|f^-\| = \| |f| \|$ (в силу (32)),

тоже удовлетворяет условию (32). Кроме того, как показал Какутани [1, теорема 1], она задает равносильную топологию. Следовательно, требование (27), что из $|f| \leqslant |g|$ следует $\|f\| \leqslant \|g\|$, для (L)-пространств становится почти излишним.

Теперь мы построим обширный класс «конкретных» (L)-пространств. В произвольной булевой алгебре A рассмотрим множество $V(A)$ всех ограниченных оценок на A, удовлетворяющих условию $v[O] = 0$ (т. е. таких, что из $x \wedge y = O$ следует равенство $v[x \vee y] = v[x] + v[y]$). При любом изоморфном представлении A в виде поля Φ множеств $V(A)$ становится множеством всех ограниченных аддитивных функций множеств на A.

---

[1]) Упр. 6—8 содержат результаты Гордона [1, p. 420—422], упр. 9 принадлежит де Мару (Marr R. E. de — Pacif. J. Math., 1964, **14**, p. 17—20).

[2]) Само понятие было введено автором в Proc. Nat. Acad. Sci., 1938, **24**, p. 154—159.

Теорема 24. *Если положить*

$$\|v\| = \sup_{x,\,y} \{v[x] - v[y]\} = \sup_{x} \{v[x] - v[x']\}, \tag{34}$$

то ограниченные оценки на любой булевой алгебре A, удовлетворяющие условию $v[O] = 0$, образуют (L)-пространство $V(A)$.

Доказательство. Вспомним из § X.6, что оценки *ограниченной вариации* на любой решетке образуют векторную решетку (формулы (11)—(12) и теорема 10 из главы X). Если L — булева алгебра, то для любой конечной цепи γ: $O = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_n = I$ пусть $a = \bigvee_P (x_i \wedge x'_{i-1})$ и $a' = \bigvee_{P'} (x_i \wedge x'_{i-1})$, где P — множество всех i таких, что $v[x_i] > v[x_{i-1}]$, а P' — дополнительное для P множество, состоящее из индексов i, для которых $v[x_i] \leqslant v[x_{i-1}]$; мы имеем:

$$v^+[O, I] = \sup v[a] \quad \text{и} \quad v^-[O, I] = \inf v[a'].$$

Таким образом, для оценки на L иметь ограниченную вариацию — это то же самое, что быть *ограниченной*, так что норма $\|v\|$, определяемая формулой (34), — это в точности полная вариация оценки v на $[O, I]$. Следовательно, для $v > 0$ будет $\|v\| = v[I]$, откуда (32) следует очевидным образом.

Рассмотрим подмножество $V_\sigma(B)$ всех σ-аддитивных оценок на борелевской алгебре B, для которых $v[O] = 0$. Отметим без доказательства [1]) следующие результаты.

Лемма. *Для ограниченной оценки v на борелевской алгебре B каждое из следующих условий равносильно ее σ-аддитивности:* (i) *если $x_n \downarrow 0$, то $v[x_n] \to 0$;* (ii) *если $x_n \to x$ в порядковой топологии, то $v[x_n] \to v[x]$.*

Теорема 25. *Если B — борелевская алгебра, то $V_\sigma(B)$ является метрически замкнутым l-идеалом в $V(B)$.*

Следствие 1. *Для любой борелевской алгебры B множество $V_\sigma(B)$ всех σ-аддитивных оценок со свойством $v[O] = 0$ является (L)-пространством.*

Следствие 2. *Вероятностные распределения на B образуют метрически замкнутое выпуклое подмножество в $V(B)$.*

Ясно, что неотрицательные σ-аддитивные оценки на B — это в точности «конечные меры» в смысле § XI.5; σ-аддитивные оценки общего вида часто называются «относительными мерами». В применении к рассматриваемой ситуации теорема 16 дает следующий классический результат.

Теорема Лебега — Радона — Никодима. *Пусть e и f — произвольные конечные меры на борелевской алгебре B и пусть при $e[a_n] \downarrow 0$ всегда $f[a_n] \downarrow 0$. Тогда f допускает представление в виде* (25).

---

[1]) Доказательства см. у Какутани [1] или в [**LT2**, с. 347].

Обратно, пусть V — произвольное (L)-пространство и A — полная булева алгебра его замкнутых l-идеалов J, K, ... (см. § XIII.13). Если задан элемент $f \in V$, то для его компонент f_J, f_K, ... будет $f_0 = 0$ (откуда $\|f_0\| = 0$) и, ввиду (33),

$$\text{если } J \wedge K = 0, \text{ то } \|f_{J \vee K}\| = \|f_J\| + \|f_K\|, \tag{35}$$

т. е. фу́нкция $f(J) = \|f_J\|$ является *оценкой* на A со свойством $f(0) = 0$. Нетрудно проверить, что соответствие $f \mapsto f(J)$ будет сохраняющим норму l-вложением пространства V в $V(A)$. Этим доказана

Теорема 26. *Любое* (L)-пространство V *допускает l-изоморфное представление оценками на полной булевой алгебре своих замкнутых l-идеалов.*

Особый интерес для приложений в теории вероятностей, включая эргодическую теорию и теорию мультипликативных процессов (глава XVI), представляет частный случай решетки $V_\sigma(A)$ всех *σ-аддитивных* оценок на булевой σ-алгебре A, удовлетворяющих условию $f[0] = 0$. Эта решетка изучалась в главе XI. Мы приведем без доказательства следующий важный результат Какутани [1].

Теорема 27 (Какутани). *Любое сепарабельное* (L)-*пространство V l-изоморфно и изометрично замкнутой векторной подрешетке «конкретного»* (L)-*пространства* $L^1(0, 1)$.

Мы приведем лишь набросок доказательства — детали см. у Какутани [1] или в [**LT2**, с. 351—353].

Прежде всего построим, как в лемме 3 из § 12, слабую единицу e, а затем (см. конец § 10) — полную булеву алгебру $L_c(V)$ всех замкнутых l-идеалов пространства V. Имея такой произвольный замкнутый l-идеал J и выбранную слабую единицу e, мы можем использовать *оценку* $\|f\|$ на V^+, чтобы построить *компоненту* $e_J \in V$ для e в J, а также $e'_J = e_{J^+} = e - e_J$, — и установить тем самым изоморфизм между $L_c(V)$ и компонентами единицы e, причем, не теряя общности, можно считать, что $\|e\| = 1$. Относительно меры $\|e_J\|$, как показывает непосредственное обобщение теоремы XI.8, $L_c(V)$ становится подалгеброй алгебры с мерой всех измеримых подмножеств (открытого или замкнутого) единичного интервала по модулю множеств меры нуль, причем $m(S) = \|e_S\|$.

Доказательство после этого завершается обращением к теореме 16 — представлению в виде интеграла Стилтьеса (25). Для любого $f \in V$ будет $\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|\, de_\lambda(f) = \|f^+\| + \|f^-\|$, откуда следует изометричность представления. В частности, f^+ имеет нужный смысл и потому построенное соответствие оказывается l-вложением. Наконец, поскольку норма и решеточные операции сохраняются, бесконечные объединения в метрических решетках совпадают с метрическими пределами конечных объединений, а любое (L)-пространство является полной решеткой, мы получаем, что образом пространства V при представлении (25) будет *замкнутая* подрешетка пространства $L^1(0, 1)$, которое, таким образом, предстает в качестве универсального сепарабельного (L)-пространства.

16. (M)-пространства

Банаховы решетки B всех ограниченных (действительных) функций и (b) всех ограниченных последовательностей, обе с равномерной нормой, обладают свойствами, двойственными свойствам (L)-пространств. То же самое имеет место и для банаховой решетки $C^*(X)$ всех ограниченных непрерывных функций на произвольном топологическом пространстве. Указанные свойства характеризуют эти пространства как (M)-пространства в смысле следующего определения.

Определение. *(M)-пространством* называется банахова решетка $\boldsymbol{M}$, норма которой подчиняется условию:

(36) если $f > 0$ и $g > 0$, то $\|f \vee g\| = \|f\| \vee \|g\|$.

Если единичный шар в $\boldsymbol{M}$ имеет наибольший элемент u, то u называется *единицей* (M)-пространства $\boldsymbol{M}$; понятно, что это будет сильная единица.

В (M)-пространствах с такой единицей имеет место замечательная теорема о представлении, принадлежащая М. Г. и С. Г. Крейнам и Какутани [1]).

Теорема 28. *Любое (M)-пространство с единицей изоморфно решетке всех непрерывных функций на подходящем компактном пространстве $K(\boldsymbol{M})$. Если $\boldsymbol{M} = C(X)$ для некоторого вполне регулярного X, то $K(\boldsymbol{M})$ совпадает со стоун-чеховской компактификацией пространства X.*

Приведем набросок доказательства этой теоремы о представлении.

Лемма 1. *Если J — собственный l-идеал (M)-пространства $\boldsymbol{M}$ с единицей u и $x \in J$, то $\|u - x\| \geqslant 1$.*

Доказательство. Допустим, что $\|u - x\| < 1$. Тогда $u - x \leqslant \alpha u$ для некоторого $\alpha < 1$, откуда $x \geqslant \beta u$ для $\beta = 1 - \alpha > 0$. Отсюда следовало бы, что $\boldsymbol{M} = (u) \subset (x) \subset J$, а это невозможно.

Лемма 2. *Пусть задано некоторое (M)-пространство $\boldsymbol{M}$ с единицей u и в нем элемент $a > 0$. Тогда $\boldsymbol{M}$ содержит собствен-*

[1]) Крейн М. Г., Крейн С. Г. — Докл. АН СССР, 1940, 27, с. 427—430; Какутани [2]. Другой подход применен в книге Келли, Намиоки и др. [1, теорема 24.5]. «Спектр» Намиоки — это максимальные (собственные) метрически замкнутые l-идеалы, а его «действительные» решеточные гомоморфизмы (р. 238) — суть l-гомоморфизмы на $\mathbf{R}$.

ный (метрически) замкнутый l-идеал J такой, что $\| a - x \| \geqslant \| a$ *для всех* $x \in J$, *если только* $\boldsymbol{M}$ *не совпадает с* $\mathbf{R}$, *т. е. не является одномерным.*

Доказательство. Случай $a = \lambda u$ содержится в лемме 1. В других ситуациях неравенство $\alpha u \leqslant a \leqslant \beta u$ удовлетворяется некоторыми наибольшим α и наименьшим $\beta = \| a \| > \alpha$; пусть $\gamma = (\alpha + \beta)/2$. Тогда метрическое замыкание главного l-идеала $(\alpha - \alpha u)$ будет иметь требуемые свойства.

Следствие. *В условиях леммы 2* $\boldsymbol{M}$ *содержит максимальный (метрически) замкнутый l-идеал J такой, что*

$$\inf_{x \in J} \| a - x \| = \| a \|; \tag{37}$$

при этом пространство $\boldsymbol{M}/J \cong \mathbf{R}$ *одномерно.*

Это потому, что замыкание теоретико-множественного объединения любой цепи замкнутых l-идеалов, удовлетворяющих (37), само удовлетворяет (37).

Относительно нормы (37) фактор-пространство $\boldsymbol{M}/J$, конечно, будет (M)-пространством с единицей $(u + J)/J$, где J — любой (метрически) замкнутый l-идеал.

Следовательно, $\boldsymbol{M}$ изоморфно банаховой подрешетке (M)-пространства *всех* ограниченных действительных функций на множестве его максимальных замкнутых l-идеалов. Остается задать подходящую (компактную) топологию на этом множестве. Лучше всего для этого использовать слабую топологию (см. § 17).

Лемма 3. *Банахова решетка с единицей u является (M)-пространством.*

Доказательство. При сделанных предположениях из $f \geqslant 0$ и $g \geqslant 0$ следует, что $f \leqslant \| f \| u$ и $g \leqslant \| g \| u$, откуда

$$\| f \vee g \| \leqslant \| (\| f \| u \vee \| g \| u) \| \leqslant \| (\| f \| \vee \| g \|) u \| = \| f \| \vee \| g \|.$$

Так как противоположное неравенство очевидно, лемма доказана.

17. Двойственность между (L)- и (M)-пространствами

Предвестником двойственности между (L)-пространствами и (M)-пространствами является интеграл (Римана —) Стилтьеса. Пусть A — булева алгебра «элементарных подмножеств» ([**LT2**, § XI.1]) единичного гиперкуба K, $\boldsymbol{M} = C(K)$ — образуемое всевозможными непрерывными на K функциями $f(x)$ (M)-пространство, а $\boldsymbol{L} = L(A)$ — (L)-пространство, состоящее из всех ограниченных на A оценок μ с условием $\mu[0] = 0$ («относительные меры»). Тогда интеграл Римана — Стилтьеса

$$\int f(\boldsymbol{x})\, d\mu(\boldsymbol{x}) = \lim_{|\pi| \to 0} \sum f(\boldsymbol{x}_i)\, \mu(\Delta \boldsymbol{x}_i), \quad \boldsymbol{x}_i \in \Delta \boldsymbol{x}_i, \tag{38}$$

является непрерывным линейным функционалом на M при фиксированном μ и на L при фиксированной f. На самом деле, как утверждает классическая теорема Риса и Штейнгауза[1]), $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{M}$ являются *сопряженными* банаховыми решетками.

Аналогично, полагая $\boldsymbol{L} = L_1(0, 1)$ и $\boldsymbol{M} = L_\infty(0, 1)$, мы получаем другую классическую пару сопряженных пространств. Частичным обобщением[2]) является

Теорема 29. *Дуальное (сопряженное) пространство $\boldsymbol{L}^*$ для любого (L)-пространства $\boldsymbol{L}$ является (M)-пространством, единицей которого будет функционал*

$$\varepsilon(f) = \|f^+\| - \|f^-\|. \tag{39}$$

Доказательство. Сперва отметим, что $\varepsilon(-f) = -\varepsilon(f)$, поскольку

$$\|(-f) \vee 0\| - \|(-f) \wedge 0\| = \|-(f \wedge 0)\| - \|-(f \vee 0)\| = \|f^-\| - \|f^+\|.$$

Чтобы доказать *линейность* функционала ε, заметим, что

$$f = (f+g)^+ + (f \mathbin{\underline{\wedge}} -g), \quad g = (f+g)^- + (g \mathbin{\underline{\vee}} -f), \tag{40}$$

так как $(f+g) \mathbin{\underline{\vee}} 0 = f + (g \mathbin{\underline{\vee}} -f) = f - (f \mathbin{\underline{\wedge}} -g)$, и двойственно. Теперь разложим $\boldsymbol{L}$ в прямую сумму замкнутых l-идеалов, на которых соответственно $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$, $f < 0$, $g < 0$, $f \geqslant 0 > g$ и $g \geqslant 0 > f$. Это возможно по теореме 23. Линейность ε в первых двух случаях следует из (32). В третьем случае, используя (40) и (32), получаем:

$$\|f\| = \|(f+g)^+\| + \|f \wedge (-g)\|, \quad \|g\| = \|(f+g)^-\| + \|g \vee (-f)\|,$$

так как $f \mathbin{\underline{\wedge}} (-g) = 0$ и двойственно. Следовательно,

$$\|(f+g)^+\| - \|(f+g)^-\| = \|f\| - \|f \wedge (-g)\| - \|g\| + \|g \vee (-f)\|,$$

где левая часть совпадает с $\varepsilon(f) + \varepsilon(g)$, поскольку $\|f \mathbin{\underline{\wedge}} (-g)\| = \|(-f) \mathbin{\underline{\vee}} g\|$, — линейность доказана.

Наконец, если φ — линейный функционал на $\boldsymbol{L}$ с нормой $\|\varphi\| \leqslant 1$, то для любого $f \geqslant 0$ будет $\varphi(f) \leqslant \|f\| = \varepsilon(f)$; поэтому ε является единицей в пространстве, сопряженном к $\boldsymbol{L}$. Отсюда по лемме 3 из § 15 следует, что это сопряженное пространство будет (M)-пространством.

Обратно, пусть $\boldsymbol{M} = C(K)$ будет (M)-пространством всех непрерывных (ограниченных) действительных функций на хаусдорфовом пространстве K; двойственное ему пространство $\boldsymbol{M}^*$ является (L)-пространством мер Радона на K. (Естественное)

[1]) Riesz F. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1909, 149, p. 974—977; Steinhaus M. H. — Math. Z., 1918, 5, S. 186—221.

[2]) В полной общности см. у Какутани [2, p. 1021] или в книге Келли, Намиоки и др. [1]. Приводимое доказательство следует [LT2, с. 352].

вложение $\overline{M}$ в $(M^*)^*$ имеет много интересных свойств, по поводу которых мы отсылаем читателя к работам Каплана[1]), недавно показавшего, что $(M^*)^*$ является множеством всех пределов сходящихся сетей точек из M.

Абстрактные (L^p)-пространства. Промежуточными между (L)-пространствами и (M)-пространствами являются абстрактные (L^p)-пространства. По определению, это банаховы решетки, в которых

$$(41)\qquad \text{если } |f|\wedge|g|=0, \text{ то } \|f+g\|=\varphi(\|f\|, \|g\|),$$

где $\varphi(x, y)$ — однозначная функция двух переменных. В изящной работе Боненбласта[2]) показано, что при этих условиях обязательно $\varphi(x, y) = (x^p + y^p)^{1/p}$ для некоторого p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Причем по крайней мере для конечных p всякое такое (абстрактное) (L^p)-пространство определяется с точностью до жесткого l-изоморфизма решеткой своих замкнутых l-идеалов, которая является булевой алгеброй. С известной долей уверенности можно предположить, что $L^p(A)$ и $L^q(A)$ будут сопряженными[3]) при условии, что $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Упражнения к §§ 15—17

1. Покажите, что в теореме 24

$$\|v\| = 2v^+[I] - v[I] = v^+[I] - v^-[I] = |f|[I] = \||f|\|.$$

2. Покажите, что в любом (L)-пространстве множество положительных элементов с нормой единица («распределений») образует метрически замкнутое выпуклое множество диаметра самое большее два.

3. Пусть $v[x]$ — оценка на решетке с относительными дополнениями L. Покажите, что вариация $v[a, b; \gamma]$ оценки v вдоль любой цепи от a до b равна вариации $v[a, b; \gamma^*]$ вдоль некоторой такой цепи γ^* длины два.

4. Докажите, что оценка v на борелевской алгебре B является σ-оценкой тогда и только тогда, когда из $x_i \wedge x_j = 0$ (для всех $i \neq j$) следует, что

$$v\left[\bigvee_{i=1}^{\infty} x_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} v[x_i].$$

5. Покажите, что диаметр множества распределений на булевой алгебре равен 0 или 2.

6. Покажите, что каждая σ-аддитивная оценка на борелевской алгебре B ограничена.

7. Покажите, что двойственным для (L)-пространства $L_1(0, 1)$ является (M)-пространство $L_\infty(0, 1) \cong V_\sigma(B_\sigma/N)$.

*8. Покажите, что двойственным для $C[0, 1]$ является (L)-пространство $V_\sigma(B_\sigma)$ всех σ-аддитивных оценок («относительных мер») на B_σ.

9. Покажите, что хотя $L_\infty(0, 1)$ сепарабельно, $V_\sigma(B_\sigma)$ таковым не является.

---

[1]) Kaplan S. — Trans. AMS, 1957, **86**, p. 70—90; 1959, **93**, p. 320—350; Proc. AMS, 1966, **17**, p. 401—406.

[2]) Bohnenblust F. H. — Duke J. Math., 1940, **6**, p. 627—640.

[3]) При $A = B_\sigma$ это классический результат; см. работу Риса (Riesz F. — Math. Ann., 1910, **69**, S. 475).

ПРОБЛЕМЫ

129. Построить общую теорию векторных решеток над упорядоченными полями.

130. Найти необходимые и достаточные условия, при выполнении которых (алгебраическая брауэрова) решетка является решеткой конгруэнций подходящей векторной решетки [1].

131. Для целозамкнутого направленного векторного пространства найти необходимые и достаточные условия, при выполнении которых положительные линейные функционалы этого пространства «разделяли» бы любые две различные точки [2]. (Замечание. Достаточно, например, чтобы оно было банаховой решеткой.)

132. Какие целозамкнутые направленные векторные пространства V изоморфны своим дважды сопряженным пространствам $(V^*)^*$ (т. е. рефлексивны)? Необходима ли для этого в случае векторных решеток полнота? [3] А какие допускают изоморфное вложение?

133. Доказать в деталях, что каждая σ-полная векторная решетка с сильной единицей является подпрямым произведением экземпляров действительного поля $\mathbf{R}$.

134. Обобщив теорему 16, доказать, что любая σ-полная векторная решетка с сильной единицей может быть расширена до «наполненной» векторной решетки, до «функциональной решетки» непрерывных функций на подходящем стоуновском пространстве.

135. Любую ли σ-полную l-группу можно расширить до наполненной, до полной векторной решетки? [4]

136. Построить теорию «прямых интегралов» [5] для σ-полных векторных решеток. Прямые интегралы наполненных векторных решеток должны быть наполненными.

* **137.** Построить вполне $\wedge$-неразложимый l-идеал в векторной решетке L $(-\infty, \infty)$ или доказать, что такой l-идеал «построить» нельзя (см. § VIII.16).

138. В каких банаховых решетках слабая топология является новой интервальной топологией?

139. В каких целозамкнутых направленных векторных пространствах относительно равномерная топология (Гордона) совпа-

---

[1] Отметим необходимое условие Конрада, Харви и Холанда: простые элементы должны образовывать «систему корней» (Conrad P., Harvey J., Holland S. — Trans. AMS, 1963, **108**, p. 143—169).

[2] Некоторые относящиеся к этому условия приведены у Келли и Намиоки [1].

[3] Необходима. См. примечание к теореме 17. — *Прим. перев.*

[4] Проблема 108 из [LT2]. — *Прим. перев.*

[5] См. примечание к проблеме 106. — *Прим. перев. и ред.*

дает с топологией, определяемой (по теоремам Арнольда—Келли) порядковой сходимостью? [1])

140. Какие σ-полные дистрибутивные решетки (и орторешетки) допускают нетривиальные σ-оценки со значениями в некоторой σ-полной векторной решетке? (З а м е ч а н и е. Это связано с условиями, при которых σ-полная решетка является алгеброй с мерой.)

141. Обобщить, возможно используя теорему Лумиса, теорему 27 на случай произвольных абстрактных (L)-пространств [2]).

142. Построить общую теорию двойственности между (L)-пространствами и (M)-пространствами, связывающую $L(\Omega)$ с $L^\infty(\Omega)$. Какова связь между пространством $C(K)$ с «равномерной» нормой $\|x \vee y\| = \|x\| \vee \|y\|$ и пространством $L^\infty(\Omega)$? Другими словами, что представляют собой $K(\Omega)$ и $\Omega(K)$?

---

[1]) Установить также связь с L-топологией Ренни (R e n n i e B. C. — Proc. London Math. Soc., 1951, 52, p. 386—400).

[2]) О решении этой проблемы А. Г. Пинскером сообщалось в примечании на с. 353 русского перевода [LT2]. — *Прим. перев.*

ГЛАВА XVI

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

1. Введение

Многие величины по самой своей сути *неотрицательны*: масса, моли химических веществ, количество людей, плотность нейтронов и т. д. Такие величины *сохраняются* при конвекции, диффузии (или миграции) и мутации, а процессы гибели или единичного воспроизводства (рождения) часто оказываются для них *линейными*. Подобные простые наблюдения дают основание предположить, что положительные линейные операторы преобладают в природе. Эта глава будет посвящена установлению их наиболее важных общих свойств. Но сначала мы подробно разберем два типичных примера, взятых соответственно из теории нейтронных цепных реакций и из статистической механики.

Представим себе активную зону ядерного реактора с не зависящими от времени физическими характеристиками, занимающую в физическом пространстве компактную область D. *Ядро миграции* $K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ реактора определяется как вероятность (на единицу объема) того, что нейтрон, «рожденный» (т. е. появившийся в результате деления) в точке $\boldsymbol{x} \in D$, вызовет деление в некоторой другой точке $\boldsymbol{y} \in D$, будучи поглощенным в ней. Ясно, что $K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqslant 0$ и $\int K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} \leqslant 1$, — здесь знак «меньше» учитывает возможность потери нейтронов при утечке или при поглощении без деления.

Если $f_0(\boldsymbol{x})$ обозначает начальное пространственное распределение нулевого поколения нейтронов, то пространственное распределение $f_r(\boldsymbol{x})$ для r-го поколения будет выражаться формулой

$$(1) \qquad f_r(\boldsymbol{y}) = \nu(\boldsymbol{y}) \int f_{r-1}(\boldsymbol{x}) K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{x} = \int f_{r-1}(\boldsymbol{x}) P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{x},$$

где $\nu(\boldsymbol{y})$ — среднее количество нейтронов, испускаемых при одном делении в $\boldsymbol{y}$, а $P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \nu(\boldsymbol{y}) K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqslant 0$ из физических соображений.

В кинетической теории газов совсем иная картина. Предполагается, что n «молекул» образуют консервативную (обратимую) лагранжеву систему, «состояние» которой в фазовом пространстве описывается при помощи $6n$ канонических координат $q_1, \ldots, q_{3n}$, $p_1, \ldots, p_{3n}$. Изменяясь во времени, такая система — она считается автономной — образует установившееся течение в фазовом пространстве, сохраняя при этом по классической теореме Лиувиля фазовый объем [1]). Следовательно, она определяет однопараметрическую группу положительных линейных преобразований T_t банаховой решетки $L^p(X)$ при любом p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Наконец, все эти T_t являются изометрическими l-автоморфизмами каждой $L^p(X)$.

В обоих рассмотренных примерах мы имели дело с *неотрицательными* линейными операторами на некотором направленном векторном пространстве V с выпуклым положительным *конусом* $V^+ = C$. Для этого C по определению будет

$$C \cap -C = 0, \quad C + (-C) = V, \quad C + C \subset C, \tag{2}$$

а соответствующие операторы P (или T_t) линейны и *положительны*: они удовлетворяют условию $CP \subset C$.

В настоящей главе будут изучаться следствия из этих условий, наложенных на (V, C) и P. Как было показано в главе XV, (V, C) становится бинаправленным, если положить $f \leqslant g$ в случае, когда $g - f \in C$. Далее, поскольку оператор P положителен и линеен, он будет и *изотонным* (т. е. при $f \leqslant g$ всегда $fP \leqslant gP$), что в общем не имеет места для нелинейных операторов.

Изотонные линейные операторы. Понятно, что линейный оператор P на упорядоченном векторном пространстве тогда и только тогда *положителен*, когда он является *изотонным*, т. е. когда

$$\text{из } f \leqslant g \text{ следует, что } fP \leqslant gP. \tag{1'}$$

Нелинейные изотонные (и антиизотонные) операторы также имеют много интересных приложений, особенно при решении дифференциальных и интегральных уравнений итерацией и приближенными методами. Обзор таких приложений недавно сделали М. А. Красносельский и Колатц [2]).

2. Гильбертова проективная псевдометрика

Положительные линейные операторы на векторных решетках обладают рядом замечательных свойств, самые типичные из которых связаны с доминантными положительными собственными векторами. Эти положительные собственные векторы лучше всего

---

[1]) См. книги Хопфа (H o p f E. Ergodentheorie. — Springer, 1937), Халмоша (Лекции по эргодической теории. — М.: ИЛ, 1959), Якобса (J a c o b s K. Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie. — Springer, 1960), Кальдиролы (C a l d i r o l a P. Ergodic theories. — Academic Press, 1962). По поводу теоретико-решеточного подхода см. [Symp, p. 172—178].

[2]) К р а с н о с е л ь с к и й М. А. Положительные решения операторных уравнений. — М.: Физматгиз, 1962; C o l l a t z L. Functional analysis and numerical analysis. — N. Y., 1966.

изучать с помощью специальной проективной псевдометрики, впервые предложенной Гильбертом[1]. В общем виде ее можно определить следующим образом.

Пусть V — произвольное упорядоченное векторное пространство с положительным конусом C. Элементы $f, g \in C$ называются *сравнимыми*, если

(3) $\lambda f \lhd g \lhd \mu f$ для подходящих положительных скаляров λ, μ.

Так как из (3) следует, что $\mu^{-1}g \lhd f \lhd \lambda^{-1}g$, то отношение сравнимости симметрично; понятно, что оно рефлексивно. Оказывается, это отношение и транзитивно, но мы докажем более сильный результат.

Именно, если f и g сравнимы, определим $\alpha = \alpha(f, g)$ и $\beta = \beta(f, g)$ следующим образом:

(4) $\alpha(f, g) = \sup \lambda$ и $\beta(f, g) = \inf \mu$ по всем λ, μ таким, что $\lambda f \lhd g \lhd \mu f$

(ясно, что $\alpha \leqslant \beta$).

Исходя из этого, назовем *проективным расстоянием* от f до g величину

(5) $$\theta(f, g) = \ln[\beta(f, g)/\alpha(f, g)] \geqslant 0.$$

Так как (3) равносильно неравенству $\mu^{-1}g \lhd f \lhd \lambda^{-1}g$, то, очевидно, что $\alpha(f, g) = [\beta(f, g)]^{-1}$ и $\beta(f, g) = [\alpha(f, g)]^{-1}$. Следовательно, $\theta(f, g) = \theta(g, f)$. Далее, если $\lambda_n f \leqslant g \leqslant \mu_n f$ и $\lambda'_n g \leqslant h \leqslant \mu'_n g$, где $\lambda_n \uparrow \alpha$, $\mu_n \downarrow \beta$, $\lambda'_n \uparrow \alpha'$ и $\mu'_n \downarrow \beta'$, то $\lambda_n\lambda'_n f \leqslant h \leqslant \mu_n\mu'_n f$, где $\lambda_n\lambda'_n \uparrow \alpha\alpha'$ и $\mu_n\mu'_n \downarrow \beta\beta'$.

Отсюда получается неравенство треугольника $\theta(f, g) + \theta(g, h) \geqslant \theta(f, h)$, из которого следует транзитивность отношения сравнимости.

Наконец, поскольку $(\lambda - \varepsilon) f \lhd \lambda f + h \lhd (\lambda + \varepsilon) f$ для любых $\lambda \geqslant 0$, $f > 0$ и $h \ll f$, то ясно, что для таких λ, f и h будет $\theta(f, f + h) = 0$. Обратно, если $\theta(f, g) = 0$, то $\alpha(f, g) = \beta(f, g)$, и можно найти такое α, чтобы было $(\alpha - \varepsilon) f \lhd g \lhd (\alpha + \varepsilon) f$ при любом $\varepsilon > 0$. Тогда $-\varepsilon f \lhd g - \alpha f \lhd \varepsilon f$ для всех $\varepsilon > 0$, так что $g - \alpha f \ll f$. В итоге нами доказана

Теорема 1. *Функция $\theta(f, g)$ является псевдометрикой (т. е. $\theta \in [0, \infty]$[2]), $\theta(f, f) = 0$, $\theta(f, g) = \theta(g, f)$ и выполняется неравенство треугольника). При этом $\theta(f, g) = 0$ тогда и только тогда, когда $g - \alpha f \ll f$ для некоторого $\alpha > 0$.*

---

[1]) Math. Ann., 1903, 57, S. 137—150. К положительным линейным операторам ее первым применил автор (Trans. AMS, 1957, 85, p. 219—227; 1962, 104, p. 37—51). В §§ 1—3 настоящего изложения использованы и некоторые неопубликованные идеи Островского (личное сообщение).

[2]) Читателя, по-видимому, уже не смущают подобные вольности. — *Прим. перев.*

Пример 1. Пусть $V = \mathbf{R}^n$ и C — множество всех неотрицательных f. Тогда $f > 0$ и $g > 0$ сравнимы в том и только в том случае, если они имеют общий носитель (множество ненулевых компонент [1])). При этом $\theta(f, g) = \ln\sup(f_i g_j / g_i f_j)$ — мы опускаем доказательство. В частности, при $n = 2$ будет $\theta(f, g) = |\ln(f_1 g_2 / g_1 f_2)|$. Следовательно, в *проективных* координатах $x = f_2/f_1$, $\theta(x, x') = |\ln(x'/x)|$.

Пример 2. В (L)-пространстве $L_1(-\infty, \infty)$ аналогично получаем, что

$$\theta(f, g) = \ln\{\operatorname*{ess\,sup}_{x,\,y}[f(x)\,g(y)/g(x)\,f(y)]\}.$$

Два элемента f и g сравнимы тогда и только тогда, когда $\operatorname{ess\,sup}[f(x)/g(x)]$ и $\operatorname{ess\,sup}[g(x)/f(x)]$ оба конечны [2]).

Пример 3. В $V = \mathbf{R}^n$ положим

$$B(x, y) = (x_1 + \ldots + x_n)(y_1 + \ldots + y_n) - (x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n), \tag{6}$$

и пусть C будет подмножеством в V таким, где $B(x, x) \geqslant 0$ и $x_1 + \ldots + x_n \geqslant 0$. Тогда проективная псевдометрика в (V, C) определяет гильбертову модель неевклидовой (т. е. гиперболической) геометрии.

Теперь мы будем рассматривать на (V, C) *положительные* линейные операторы, т. е. линейные операторы P, для которых из $f > 0$ следует, что $fP > 0$.

Теорема 2. *В произвольном направленном векторном пространстве любой положительный линейный оператор представляет собой сжатие в проективной псевдометрике*:

$$\theta(fP, gP) \leqslant \theta(f, g), \text{ если } \theta(f, g) < +\infty. \tag{7}$$

Доказательство. Если $\lambda f < g < \mu f$, то $\lambda fP < gP < \mu fP$ при положительном P. Значит, $\alpha(fP, gP) \geqslant \alpha(f, g)$ и $\beta(fP, gP) \leqslant \beta(f, g)$, откуда $\theta(fP, gP) \leqslant \theta(f, g)$, что и требовалось.

Заметим, что эти рассуждения проходят и для *неотрицательных* линейных операторов при условии, что $fP \neq 0$ и $gP \neq 0$.

Целозамкнутые векторные пространства. Все эти идеи с особым эффектом применимы к целозамкнутым направленным векторным пространствам. Можно вспомнить, например, некоторые результаты из главы XV (и работы Биркгофа [7]).

Лемма 1. *Если в целозамкнутом направленном векторном пространстве $\alpha_n f \geqslant g$ (где $f > 0$, $g > 0$) для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ и $\alpha_n \to \alpha$ при $n \to \infty$, то $\alpha f \geqslant g$.*

---

[1]) Точнее, множество номеров ненулевых компонент. — *Прим. перев.*

[2]) Существенный (или истинный) супремум ess sup обозначается также символом vrai sup. — *Прим. ред. и перев.*

Следствие. *В условиях леммы 1, если $f \gg 0$ и $g \gg 0$ линейно независимы, то плоскость, натянутая на f и g, изоморфна $\mathbf{R}^2$.*

Лемма 2. *В целозамкнутом векторном пространстве $\theta(f, g) = 0$ тогда и только тогда, когда $g = \alpha f$ для некоторого $\alpha > 0$.*

Доказательство. Из рассуждений, предшествующих теореме 1, получается, что $g = \alpha f$, поскольку $g - \alpha f \ll f$; обратное доказано в теореме 1.

Упражнения к §§ 1—2

1. Покажите, что в примере 1 матрица $P = \| p_{ij} \|$ определяет неотрицательный линейный оператор тогда и только тогда, когда все $p_{i,j} \geqslant 0$, и положительный линейный оператор тогда и только тогда, когда все $p_{i,j} \geqslant 0$ и $\sum_j p_{ij} > 0$ для всех i.

2. Докажите, что в примере 1 при $n = 2$ будет $\theta(f, g) = |\ln(f_1 g_2 / g_1 f_2)|$.

* 3. Покажите, что пример 3 дает модель гиперболического n-пространства. (Указание. Рассмотрите группу жестких движений этого пространства.)

4. Покажите, что в примере 3 для $\varepsilon = (1, 0, \ldots, 0)$ и $x = (1, x_1, \ldots, x_r)$ проективная псевдометрика задается условиями

$$\theta(\varepsilon, x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right), \quad r = \left(\sum x_i^2\right)^{1/2}, \quad \text{где все } x_i > 0.$$

5. Покажите, что если векторное пространство (V, C) конечномерно и направлено, то C имеет непустую внутренность.

* 6. Покажите, что направленное *топологическое* векторное пространство V с положительным конусом C целозамкнуто тогда и только тогда [1], когда C топологически замкнут в V.

3. Теорема Перона

В случае, рассмотренном в примере 1, теорема 2 допускает усиление, приводящее к замечательному результату Перона о *положительных* матрицах [2], обобщенному Фробениусом описанным в § 4 путем. В этом примере, если матрица $P = \| p_{ij} \|$ положительна, то для любых $f, g \in C$

$$\theta(fP, gP) = \ln\left\{\sup_{i,\, j} \sum_{k,\, l} (f_k p_{ki} g_l p_{lj} / f_k p_{kj} g_l p_{li})\right\}.$$

Поэтому проективный диаметр $\Delta = \Delta(P)$ множества CP равен

$$\Delta = \ln\left\{\sup_{i,\, j,\, f > 0,\, g > 0} \sum_{k,\, l} (f_k p_{ki} g_l p_{lj} / f_k p_{kj} g_l p_{li})\right\}. \tag{8}$$

---

[1] Birkhoff G. — J. Math. Mech., 1965, 14, p. 507—512, особенно теорема 1.

[2] Perron O. — Math. Ann., 1907, 64, S. 248—263; Frobenius G.- S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1912, p. 456—477 (и здесь же ссылки).

Выбирая в качестве f и g подходящие единичные векторы $f_k = \delta_{ki}$ и $g_l = \delta_{lj}$, мы можем найти предел

$$\Delta(P) = \ln\left\{\sup_{i,\, j,\, k,\, l} (p_{ki}p_{lj}/p_{kj}p_{li})\right\}, \tag{9}$$

который, конечно, не достигается, поскольку усреднение (при помощи положительных весовых множителей $f_k g_l$) всегда уменьшает отношения. В частности, при $n = 2$ будет

$$\Delta(P) = |\ln (p_{11}p_{22}/p_{12}p_{21})|. \tag{9'}$$

Определение. (Положительный) линейный оператор P называется *равномерно положительным*, если проективный диаметр образа CP положительного конуса C относительно P конечен.

Мы только что показали, что в примере 1 каждый положительный линейный оператор равномерно положителен. И вот теперь мы докажем усиленную форму теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть P — произвольный равномерно положительный линейный оператор на целозамкнутом направленном* [1]) *векторном пространстве V и пусть проективный диаметр множества CP равен Δ. Тогда*

$$\sup_{0<\theta(f,\, g)<\infty} [\theta(fP,\, gP)/\theta(f,\, g)] = \tanh(\Delta/4)\ ^{2)}. \tag{*}$$

Доказательство. Случаи $\theta(f, g) = 0$ и $\theta(f, g) = \infty$ проходят тривиально, как в теореме 2. Так что ввиду следствия из леммы 1 § 2 достаточно рассмотреть случай положительного линейного преобразования пространства $V_2 = \mathbf{R}^2$. Оно представляется 2×2-матрицей

$$\|p_{ij}\| = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$$

с положительными элементами. Иначе говоря, достаточно рассмотреть *проективное* преобразование $x' = (ax + b)/(cx + d)$ (где a, b, c, d положительны), которое отображает положительную полуось $[0, \infty]$ в интервал $[b/d, a/c]$ или $[a/c, b/d]$ с проективным диаметром $\Delta = |\ln (ad/bc)|$, — почти как в (9'); см. также пример 1.

Сделанные замечания позволяют свести нахождение максимума коэффициента сжатия $\theta(fP, gP)/\theta(f, g)$ к прямому вычислению. В проективных координатах дифференциал «проективного расстояния» равен $|dx/x|$, как в примере 1. Следовательно, максимум *коэффициента сжатия* совпадает с максимумом величины

$$|x\, dx'/x'\, dx| = |(ad - bc)\, x/(ax + b)(cx + d)|, \tag{10}$$

---

[1]) Как заметил профессор Островский, достаточно предполагать, что V является упорядоченным векторным пространством.

[2]) Гиперболический тангенс. — *Прим. перев.*

поскольку

$$|\ln (y'/x')| = \int\limits_{x'}^{y'} |d\xi'/\xi'| \leqslant \max \left|\frac{\xi\, d\xi'}{\xi'\, d\xi}\right| \int\limits_{x}^{y} |d\xi/\xi|.$$

Но это будет обратной величиной для минимума выражения $[acx + (ad + bc) + bdx^{-1}]/(ad - bc)$. Этот минимум достигается при $x^2 = bd/ac$; подставляя в (10), мы находим, что коэффициент сжатия для инфинитезимальных элементов имеет минимум

$$\tau(P) = |ad - bc| / [2(abcd)^{1/2} + (ad + bc)].$$

Деля числитель и знаменатель на $(abcd)^{1/2}$, получаем (так как $\Delta = \Delta(P) \geqslant 0$), что

$$\begin{aligned} \tau(P) &= (e^{\Delta/2} - e^{-\Delta/2})/(e^{\Delta/2} + 2 + e^{-\Delta/2}) = \\ &= (e^{\Delta/4} - e^{-\Delta/4})/(e^{\Delta/4} + e^{-\Delta/4}) = \tanh(\Delta/4). \end{aligned} \tag{10'}$$

Теорема доказана.

Поскольку коэффициент сжатия $\tanh(\Delta/4) < 1$, мы можем применить теорему Пикара о неподвижной точке для равномерных сжатий метрических пространств, и тогда получится

Теорема 4. *Пусть P — равномерно положительный линейный оператор на целозамкнутом направленном векторном пространстве V. Тогда для любого $f \in C$ образы fP^r при повторном действии P образуют последовательность Коши в проективной псевдометрике $\theta(f, g)$. При этом для любых $f, g \in C$ будет $\theta(fP^r, gP^r) \to 0$.*

Доказательство. По теореме 3 образы CP^r (где $r = 1, 2, 3, \ldots$) образуют в C последовательность вложенных (замкнутых) подмножеств, а диаметр подмножества CP^r не превосходит величины $\Delta\,[\tanh(\Delta/4)]^{r-1}$. После этого доказываемые утверждения становятся очевидными.

Заметим теперь, что во *внутренности* положительного конуса C, как следует из формулы, приведенной в примере 1, проективная *псевдометрическая* топология пространства $\mathbf{R}^n$ совпадает с естественной проективной топологией и θ в CP на самом деле лишь на ограниченный множитель отличается от расстояния на единичной сфере. Следовательно, CP будет *полным* метрическим пространством, а последовательность fP^r, построенная в теореме 4, будет сходиться к *положительному собственному вектору*.

Таким образом, мы получили

Следствие 1 (Перон). *Всякая положительная матрица P допускает единственный положительный собственный вектор: $eP = \lambda e$.*

Матрица P^T, транспонированная для P, будучи сама положительной, тоже допускает положительный собственный вектор

$c = (c_1, \ldots, c_n)$. При этом гиперплоскость H: $\sum c_i x_i = 0$ инвариантна относительно P и будет дополнительной для одномерного подпространства, натянутого на собственный вектор e матрицы P, поскольку $\sum c_i e_i > 0$. Наконец, если μ является спектральным радиусом ограничения оператора P на H, то теорема 4 показывает, что $|\mu| \leqslant \tau(P)\lambda$. Этим доказано

Следствие 2. *В условиях следствия 1 собственное значение λ является простым и доминантным: для любого другого собственного значения λ_i будет*

$$|\lambda_i| \leqslant \tau(P)\lambda, \ \tau(P) = \frac{\sigma - \sigma^{-1}}{\sigma + \sigma^{-1}}, \quad \sigma = \left[\sup_{i,\,j,\,k,\,l} \frac{p_{kl}p_{ij}}{p_{kj}p_{il}}\right]^{1/4}.$$

4. Примитивные неотрицательные матрицы

Фробениус существенно обобщил результаты Перона о положительных матрицах, остроумными комбинаторными методами перенеся их на более широкий класс *неотрицательных* матриц. Его комбинаторные результаты можно переформулировать следующим образом.

Лемма 1. *Неотрицательные $n \times n$-матрицы в своей естественной упорядоченности образуют коммутативный l-моноид относительно матричного сложения и некоммутативный l-моноид относительно матричного умножения.*

Это утверждение выделяет следующие легко проверяемые соотношения изотонности:

(11) если $A \leqslant B$, то $A + C \leqslant B + C$ и $C + A \leqslant C + B$;

(12) если $A \leqslant B$, то $AC \leqslant BC$ и $CA \leqslant CB$,

выполняющиеся для всех неотрицательных матриц A, B, C.

В точности, как теорема XIV.16, получается

Лемма 2. *Для произвольной неотрицательной $n \times n$-матрицы A пусть $r(A) = \| r_{ij} \|$ обозначает булеву матрицу, получающуюся заменой каждого ненулевого (и значит, положительного) элемента матрицы A на 1. Тогда соответствие $A \mapsto r(A)$ является l-гомоморфизмом:*

$$r(AB) = r(A)\,r(B), \quad r(A \wedge B) = r(A) \wedge r(B),$$
(13)
$$r(A \vee B) = r(A + B) = r(A) \vee r(B).$$

Отсюда следует, что все рассуждения § XIV.13 о неприводимых, примитивных и полупримитивных булевых матрицах сохраняют смысл и для неотрицательных матриц. В частности, некоторая *степень Q^s примитивной* (т. е. неприводимой ациклической) *неотрицательной матрицы Q* (равномерно) *положительна*. Соображения, использованные при доказательстве теоремы 4 и следствия из нее, с незначительными изменениями применимы к таким матрицам, и таким образом, получается

Теорема 5. *Любая примитивная неотрицательная матрица имеет положительный доминантный собственный вектор.*

Неприводимые *циклические* неотрицательные матрицы ведут себя иначе. Фробениус показал, что любая неприводимая *k-циклическая* неотрицательная матрица N имеет *неотрицательный* собственный вектор, собственное значение λ_1 для которого является простым и удовлетворяет неравенству $\lambda_1 \geqslant |\lambda_j|$ для всех других собственных значений. Но этот собственный вектор *не* будет доминантным: если ω — примитивный k-й корень из единицы, то $\omega\lambda_1, \ldots, \omega^{k-1}\lambda_1$ также будут собственными значениями для N.

Теорема 5 не является «наилучшей». Так, если назвать *полупримитивной* неотрицательную квадратную матрицу N вида

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & P \end{pmatrix},$$

где P — примитивная квадратная подматрица, то можно доказать, что N имеет неотрицательный *доминантный* собственный вектор, для которого собственное значение λ_1 будет простым и бóльшим по модулю, чем все другие собственные значения [1]).

В последние десятилетия фундаментальные результаты Перона и Фробениуса были перенесены на широкий класс «положительных» и «неотрицательных» линейных операторов в действительных векторных пространствах V с «неотрицательными конусами» C. Однако комбинаторные методы упомянутых авторов должны были подвергнуться существенной модификации, даже в случае конечномерных векторных пространств. Так, в примере 3 жесткое вращение вокруг оси «положительного конуса» хотя и будет «положительным» в том смысле, что из $f > 0$ следует $fP > 0$, но, конечно, оно не допускает (строго) *доминантного* положительного собственного вектора.

В аналогичных ситуациях удобнее использовать понятие *равномерной* положительности и *равномерной* (полу)примитивности, которые по самой своей сути не зависят от размерности. Поэтому мы и обратимся к направленным векторным пространствам произвольной размерности.

Историческая справка. Первое обобщение теоремы Перона на бесконечномерные функциональные пространства получил Йенч в 1912 г. Дальнейшие далеко идущие обобщения были сделаны М. Г. Крейном и М. А. Рутманом в серии работ, написанных в 1938—1948 гг. [2]).

---

[1]) По поводу этого и близких результатов см. работу Биркгофа и Варги (Birkhoff G., Varga R. S. — J. SIAM, 1958, **6**, p. 354—377).

[2]) Jentzsch F. — Crelle's J., 1912, **141**, p. 235—244. М. Г. Крейн и М. А. Рутман (УМН, 1948, **3**, с. 3—95) в доказательствах существования использовали *компактность*.

Упражнения к §§ 3—4

1. Покажите, что матрица

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $a \geqslant 0$, имеет доминантный неотрицательный собственный вектор тогда и только тогда, когда $a < 1$.

2. Покажите, что если неотрицательная матрица имеет доминантный собственный вектор, то соответствующее собственное значение должно быть положительным.

*3. Покажите, что если матрица N неотрицательна, то для некоторой ее степени N^s множество CN^s будет иметь конечный проективный диаметр тогда и только тогда, когда N полупримитивна.

4. Покажите, что *непрерывная* однопараметрическая полугруппа e^{tQ}, где $t \geqslant 0$, тогда и только тогда состоит из *положительных* матриц, когда Q неприводима и *существенно* неотрицательна в том смысле, что $q_{ij} > 0$ при $i \neq j$.

5. Покажите, что если $\Delta(P) < +\infty$ в гильбертовой проективной псевдометрике, то теорема 4 выполняется для любого конуса $C \subset \mathbf{R}^n$, удовлетворяющего условию (2), но что одно условие $CP \subset P$ само по себе не достаточно для существования собственного вектора в C.

*6. Пусть T — произвольный линейный оператор на $\mathbf{R}^n = V$ такой, что $CT \subset C$ для некоторого замкнутого собственного выпуклого конуса C с непустой внутренностью. Покажите[1]), что C содержит собственный вектор f оператора T такой, что соответствующее ему собственное значение является спектральным радиусом для T.

5. Равномерно полупримитивные операторы

В соответствии со сказанным мы определим теперь на произвольном направленном векторном пространстве V с положительным конусом C *равномерно полупримитивные* линейные операторы как такие линейные операторы P, которые не являются нильпотентными и для которых $\Delta(CP^s) < +\infty$ при некотором конечном s. Такой оператор называется *равномерно примитивным*, если он равномерно полупримитивен и положителен; это равносильно «равномерной положительности» (§ 3) некоторой степени оператора P.

Чтобы эффективно использовать эти понятия, сначала внимательнее рассмотрим геометрию направленного векторного пространства.

Лемма. *Пусть P — произвольный равномерно положительный линейный оператор на направленном векторном пространстве (V, C). Тогда любой ненулевой элемент $f \in CP$ является сильной единицей для VP.*

Доказательство. Пусть в VP задано $(g - h)P = gP - hP$ (где $g \in C$, $h \in C$). По определению равномерной положительности $gP < \beta f$ и $hP < \gamma f$ для некоторых β, γ; следовательно, $(g - h)P < (\beta + \gamma) f$.

---

[1]) Биркгоф (Birkhoff G. — Bull. AMS, 1965, 16, p. 14—16).

Теперь установим факт, геометрически очевидный в конечномерном случае Перона — Фробениуса, где замыкание множества, ограниченного в проективной псевдометрике, является (псевдометрически) компактным.

Теорема 6. *Пусть (V, C) — произвольное целозамкнутое направленное векторное пространство, полное в смысле относительно равномерной сходимости* (§ XV.13). *Тогда C является полным в гильбертовой проективной псевдометрике.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\} \subset C$ будет последовательностью Коши в псевдометрике (5), т. е. пусть $\theta(f_m, f_n) \to 0$ при $m, n \to \infty$. Тогда из нее можно извлечь подпоследовательность $\{g_k\} = \{f_{n(k)}\}$ такую, что $\theta(g_k, g_{k+1}) < 4^{-k}$. Следовательно, существуют $h_k = \lambda_k g_k$ с $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_k > 0$ при всех k такие, что $h_k \leqslant h_{k+1} \leqslant (1 + 4^{-k}) h_k$. Отсюда $h_1 \leqslant h_k \leqslant 4h_1/3$ для всех k, причем

$$0 \leqslant h_k - h_j \leqslant 4^{1-k}h_1/3, \quad \text{если} \quad j > k.$$

Из полноты пространства (V, C) и замкнутости C в относительно равномерной топологии следует существование (относительно равномерного) предела $h \in C$ последовательности $\{h_k\}$. При этом $0 \leqslant h_k - h \leqslant 4^{1-k}h_1/3$, откуда $\theta(g_k, h) = \theta(h_k, h) \to 0$ при $k \to \infty$. Наконец, для всех k будет $\theta(f_m, h) \leqslant \theta(f_m, f_{n(k)}) + \theta(h_k, h)$ в силу неравенства треугольника (так как $\theta(f_{n(k)}, h_k) = 0$), и значит, $\theta(f_m, f_{n(k)}) \to 0$; мы заключаем, что $\theta(f_m, h) \to 0$ при $m \to \infty$. Этим завершается доказательство.

Следствие. *В любой банаховой решетке (B, C) положительный конус C является полным псевдометрическим пространством.*

Доказательство. В (B, C) относительно равномерная сходимость равносильна метрической сходимости (теорема XV.20). Следовательно, из метрической полноты вытекает относительно равномерная полнота.

Теорема 7. *Пусть Q — произвольный равномерно примитивный линейный оператор на целозамкнутом направленном векторном пространстве (V, C), которое относительно равномерно полно. Тогда Q допускает единственное положительное собственное значение μ и для каждого $g \in C$ будет $\theta(gQ^r, f) \to 0$ при $r \to \infty$.*

Доказательство. Как и в теореме 4, элементы вида fQ^r образуют последовательность Коши для любого $f \in C$. В силу полноты конуса C (в гильбертовой псевдометрике) $fQ^r \to e$ для некоторого $e \in C$. Так как оператор Q непрерывен (на самом деле он является сжатием — см. (7)), то $\theta(fQ^{r+1}, eQ) \to 0$, откуда $\theta(e, eQ) = 0$, и значит, $eQ = \mu e$ для некоторого $\mu > 0$.

В дальнейшем через $\mu = \mu(Q)$ мы будем обозначать положительное собственное значение, соответствующее положительному собственному вектору f для Q. Покажем, что μ является *наибольшим* (по модулю) собственным значением оператора Q, т. е.

что f является доминантным собственным вектором. С этой целью определим *проективную норму* неотрицательного линейного оператора T как

(14) $\quad \|T\| = \sup\{\theta(gT, hT)/\theta(g, h)\}$ для $0 < \theta(g, h) < \infty$.

По теореме 2 $\|T\| \leqslant 1$, а по теореме 3, если проективный диаметр множества CP равен Δ, то

(14′) $$\|T\| \leqslant \tanh(\Delta/4).$$

Чтобы получить более сильные результаты, удобно ввести для T еще (асимптотический) *коэффициент доминантности* $\rho(T)$, полагая

(15) $$\ln \rho(T) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \|T^n\|.$$

Если оператор $T = Q$ равномерно полупримитивен, так что некоторое CQ^s имеет конечный проективный диаметр Δ, то, поскольку при $r \geqslant ks$ проективный диаметр множества CQ^r не превосходит величины $\Delta\,[\tanh(\Delta/4)]^{k-1}$, мы получаем, что

(16) $$\rho(Q) \leqslant [\tanh(\Delta/4)]^{1/s} < 1.$$

По определению $\rho(Q)$ отсюда следует, что если $\sigma > \rho(Q)$, то для любого $g \in C$ и всех достаточно больших n будет $|(g - \gamma f)Q^n| \leqslant \sigma^n f$, где $\gamma = \gamma(g)$ выбирается так, чтобы

$$(\gamma - \varepsilon) fQ^m \leqslant g \leqslant (\gamma + \varepsilon) fQ^m$$

при любом $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших $m = m(\varepsilon)$. Поскольку любой элемент $h \in V$ можно записать в виде разности положительных элементов, мы получаем требуемое заключение.

Теорема 8. *В условиях теоремы 7 для каждого $h \in V$ существует постоянная $\gamma = \gamma(h)$ такая, что при любом $\sigma > \rho(Q)$, включая некоторое $\sigma < 1$, будет*

(17) $\quad |(h - \gamma f) Q^m| \leqslant \sigma^m \mu^m f$ *для всех достаточно больших m.*

Очевидно, что $\gamma(h)$, введенное в теореме 8, будет (однозначно определенным) *линейным функционалом*, нуль-пространство которого (т. е. где $\gamma(h) = 0$) является замкнутым *подпространством* в V, дополнительным для собственного пространства собственного значения μ. При этом указанное нуль-пространство (состоящее из всех h таких, что $|hQ^m| \leqslant \sigma^m \mu^m f$ при всех $\sigma > \rho(Q)$) инвариантно относительно Q. Наконец, спектральный радиус ограничения оператора Q на этом подпространстве в случае конечномерного V не превосходит $\rho(Q)\,\mu$. Мы получаем

Следствие. *Пусть Q — равномерно полупримитивная матрица с доминантным собственным значением μ и коэффициентом доминантности $\rho(Q)$. Тогда модули остальных ее собственных значений не превосходят $\rho(Q)\,\mu$.*

6. Равномерно полупримитивные мультипликативные процессы

Процессы, рассмотренные в §§ 2—5, все были *стационарными* во времени, — мы имеем в виду (циклические) полугруппы, получаемые итерацией единственного основного неотрицательного линейного оператора. Теперь мы распространим затронутые идеи на *зависящие от времени мультипликативные процессы*, которые определим следующим образом.

Определение. Пусть V — целозамкнутое направленное векторное пространство с замкнутым выпуклым положительным конусом C, удовлетворяющим условию (2) и полным в своей проективной квазиметрике. *Мультипликативным процессом* на (V, C) называется двухпараметрическое семейство неотрицательных ненулевых линейных операторов $P_{s,t}$ на (V, C), определенных для всех $s < t$ из неограниченного подмножества S интервала $(-\infty, \infty)$ и удовлетворяющих условию

(18) $$P_{s,t}P_{t,u} = P_{s,u} \text{ для всех } s < t < u \text{ в } S.$$

Мультипликативный процесс называется *равномерно полупримитивным при* $t\uparrow$, если для некоторого $\alpha < +\infty$ и для любого $K > 0$ существует некоторое s такое, что $K < s < t$ и $\Delta(P_{s,t}) < \alpha$, и называется *равномерно полупримитивным при* $t\downarrow$, если для некоторого $\alpha < +\infty$ и для любого $K < 0$ можно найти s такое, что $s < t < K$ и $\Delta(P_{s,t}) < \alpha$.

Теорема 9. *Пусть семейство $P_{s,t}$ определяет мультипликативный процесс на (V, C), равномерно полупримитивный при $t\downarrow$. Тогда существует единственная (с точностью до положительного постоянного множителя) функция $f(s)$ со значениями в C, совместимая с этим процессом в том смысле, что $f(s)P_{s,t} = f(t)$ для всех $s, t \in S$.*

Доказательство. Единственность доказывается несложно. По предположению можно найти бесконечную последовательность отрицательных целых чисел $s(k) \in S$ такую, что $\Delta(P_{s,t}) < \alpha$ для некоторого $s(k) < s < t < s(k-1)$, где k произвольное. Ввиду теоремы 2 и по индукции $\Delta(P_{s(k+n),\, s(k)}) \leqslant \alpha\,[\tanh(\alpha/4)]^{n-1}$ для всех n. Но отсюда следует, что проективный диаметр множества возможных $f_{s(k)}$ равен нулю, что и требовалось.

Для доказательства существования эти рассуждения требуют дальнейшей детализации. При любом выборе элемента $g_h > 0$ функция $g_k P_{s(k),t} = g_k(t)$ совместима с процессом для всех $t > s(k)$ из S. Но из результатов предыдущего параграфа следует, что элементы $g_k(t)$, которые можно представить в таком виде, образуют последовательность Коши в проективной квазиметрике на C. Поскольку C полно (по условию), предел этой последовательности существует и он-то и будет искомой функцией со значениями в C.

Теорема 10. *Пусть семейство $P_{s,t}$ определяет мультипликативный процесс на (V, C), равномерно полупримитивный при $t\uparrow$. Тогда существует (в точности один) положительный линейный не зависящий от времени функционал φ_s на (V, C), который совместим с этим процессом в том смысле, что $\varphi_s(f(s)) = \varphi_t(f(t))$ для любой функции $f(s)$, совместимой с процессом.*

Таким образом, обращение времени приводит к *двойственному* результату, доказательство которого читатель найдет в соответствующей литературе [1]).

Упражнения к §§ 5—6

1. Покажите, что в примере 1 из § 2 примитивный линейный оператор всегда равномерно примитивен.

2. (а) Покажите, что в $V = \mathbf{R} \circ \mathbf{R} = {}^2\mathbf{R}$ метрическое пространство, определяемое проективной псевдометрикой, имеет в точности одну точку.

(б) Покажите, что для положительного линейного оператора $(x, y) \mapsto (x, x + y)$ на ${}^2\mathbf{R}$ наибольшее собственное значение не будет простым.

3. Покажите, что в примере 1 для положительного P будет

$$\min_i (\Sigma_j p_{ij}) \leqslant \lambda(P) \leqslant \max_i (\Sigma_j p_{ij}) \quad \text{и} \quad \rho(P) \leqslant \ln\left[\max_{i,j} (p_{ij}p_{lk}/p_{lj}p_{ik})\right].$$

4. Покажите, что если P — положительная матрица, а Q неотрицательна и неприводима, то матрицы PQ и QP положительны.

5. Пусть функция $K(x, y)$ непрерывна и положительна на $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Покажите, что уравнение

$$f(x) = \mu \int_0^1 K(x, y) f(y)\, dy$$

имеет единственное положительное решение, (положительное) собственное значение которого μ таково, что $\mu \leqslant |\lambda_j|$ при любом другом собственном значении λ_j этого уравнения (Йенч).

6. Покажите, что для равномерно примитивного оператора T функция $\varphi(n) = \ln\|T^n\|$ удовлетворяет неравенству $\varphi(m+n) \leqslant \varphi(m) + \varphi(n)$, т. е. является субаддитивной (и отрицательной). Докажите, что $\lim_{n\to\infty} n^{-1}\|T^n\|$ существует и равен $\ln\rho(T)$.

7. (а) Пусть $dx_j/dt = \Sigma q_{jk}(t)x_k$, где $q_{jk}(t) \geqslant \varepsilon > 0$ при всех $j \neq k$. Покажите [2]), что эта система имеет единственное положительное решение $\mathbf{x}(t)$.

(б) Покажите, что если $\psi(t) = \inf_{i \neq j} [q_{ij}(t) q_{jk}(t)]^{1/2}$ и $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ — произвольные решения уравнения (1), положительные на $[0, t)$, то $\theta(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) \leqslant$

$$\leqslant \theta(x(0), y(0)) \exp\left[-2\int_0^t \psi(s)\, ds\right].$$

---

[1]) Birkhoff G. — J. Math. Mech., 1965, **14**, p. 507—512.

[2]) Биркгоф и Котин (Birkhoff G., Kotin L. — Bull. AMS, 1965, **71**, p. 771—772). Подобные результаты для дифференциальных уравнений с запаздыванием см. у тех же авторов в J. Differ. Equat., 1966, **2**, p. 320—327.

7. Операторы перехода

Очень важный специальный класс положительных линейных операторов возникает в эргодической теории и в теории стационарных марковских процессов. Независимо от размерности [1]) их можно определить следующим образом.

Определение. *Оператором перехода на* (L)-пространстве (V, C) называется линейный оператор T, переводящий вероятностные распределения (т. е. такие p, что $p > 0$ и $\|p\| = 1$) в вероятностные распределения. Заданное вероятностное распределение p называется *устойчивым* относительно T, если $pT = p$.

Если $f > 0$ — положительный собственный вектор оператора перехода T, то положительным собственным вектором для T будет и $p = f/\|f\|$, так что собственное значение для f (и для p) должно равняться 1, поскольку $\|pT\| = 1$.

Теорема 11. *Для любого оператора перехода* T

$$\|fT - gT\| \leqslant \|f - g\|. \tag{19}$$

Доказательство. Поскольку $fT - gT = (f - g)T$ вследствие линейности, нам остается показать, что $\|hT\| \leqslant \|h\|$. Но $\|h^+T\| = \|h^+\|$ и $\|h^-T\| = \|h^-\|$, так как T переводит положительные элементы с нормой единица в такие же элементы, и аналогично для отрицательных элементов. Следовательно,

$$\|hT\| = \|h^+T + h^-T\| \leqslant \|h^+T\| + \|h^-T\| = \|h^+\| + \|h^-\| = \|h\|.$$

Теорема 12. *Множество F точек произвольного (L)-пространства, неподвижных относительно какого-нибудь оператора перехода T, метрически замкнуто, оно является подпространством и подрешеткой.*

Доказательство. Так как оператор T непрерывен, указанное множество метрически замкнуто. Поскольку T переводит верхние (нижние) грани в верхние (нижние) грани и является сжатием, он оставляет неподвижной точную верхнюю грань $x = f \vee g$ для f и g, которая удовлетворяет неравенству $\|f - x\| + \|x - g\| \leqslant \|f - g\|$. Аналогично для $f \wedge g$.

Следствие. *Множество F замкнуто в слабой топологии данного (L)-пространства.*

Это потому, что любое метрически замкнутое подпространство банахова пространства очевидным образом слабо замкнуто (Банах [1, р. 133], Данфорд и Шварц [1, с. 465]).

Особенно просто выглядит все для аналогичных «равномерно полупримитивным» линейным операторам (см. ниже упр. 3) операторов перехода, удовлетворяющих следующей гипотезе.

---

[1]) Конечномерный случай рассматривается в книге: Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: Мир, 1964.

Гипотеза Маркова. Для некоторого s множество всех образов pT^s вероятностных распределений p имеет положительную нижнюю грань $d \gg 0$, так что $d \ll pT^s$ для всех p.

Теорема 13. *При выполнении гипотезы Маркова существует единственное устойчивое распределение p_0. При этом pT^k сходятся к p_0 таким образом, что*

$$\|pT^k - p_0\| \leqslant (1 - \|d\|)^{(k-s)/s}. \tag{20}$$

Доказательство. Пусть заданы вероятностные распределения $p, q \in C \cap S$ (где S — единичная сфера, состоящая из всех p таких, что $\|p\| = 1$). Положим $h = p \wedge q$, $f = p - h$, $g = q - h$, $\mu = 1 - \|h\|$. Тогда $f, g \geqslant 0$, $\|f\| = \|g\| = \mu$ и $\|p - q\| = \|f\| + \|g\| = 2\mu$, поскольку любое (L)-пространство является метрической решеткой. Далее, так как оператор T аддитивен, то $pT^s - qT^s = fT^s - gT^s$. В силу аддитивности нормы в (L)-пространствах

$$\|fT^s - gT^s\| = \|fT^s\| + \|gT^s\| - 2\|fT^s \wedge gT^s\| = 2\mu - 2\|fT^s \wedge gT^s\|.$$

Очевидно, $f = \mu p_1$ для некоторого распределения p_1, следовательно, ввиду гипотезы Маркова $fT^s \geqslant \mu d$. Аналогично, $gT^s \geqslant \geqslant \mu d$; значит, $fT^s \wedge gT^s \geqslant \mu d$. Подставляя в предыдущие равенства, мы видим, что

$$\|pT^s - qT^s\| = \|fT^s - gT^s\| \leqslant 2\mu - 2\mu\|d\| = (1 - \|d\|)\,2\mu.$$

Но $2\mu = \|p - q\|$, так что $\|pT^s - qT^s\| \leqslant (1 - \|d\|)\,\|p - q\|$. Неравенство (20) получается теперь индукцией по целой части числа $(k - s)/s = (k/s) - 1$.

8. Эргодическая теорема

В важном *детерминистском* случае классической статистической механики (см. § 1) $\|pT^{r+1} - pT^r\| = \|pT - p\|$ для всех r. Поэтому гипотеза Маркова не выполняется и образы вероятностных распределений, не являющихся устойчивыми с самого начала, вовсе не сходятся, не говоря уже об устойчивости предельного распределения. Однако их *временные средние* часто сходятся к устойчивым распределениям, и в этом разделе будут даны достаточные условия для такой сходимости [1]).

В соответствии со сказанным, пусть $\{T^r\}$ — произвольная дискретная или непрерывная однопараметрическая полугруппа линейных операторов (например, изометрий) на банаховом пространстве B. Элемент $f \in B$ называется *эргодическим*, если

[1]) Ссылки на оригинальные источники см. в [LT2, сноска на с. 363].

его *средние* $g(s)=s^{-1}(f+fT+\ldots+fT^{s-1})$, соответственно $s^{-1}\int\limits_0^s fT^t\,dt$, метрически сходятся к неподвижной точке оператора T, т. е. к некоторой точке из E [1]). Как показывает следующий пример, нетривиальных эргодических элементов может вообще не быть.

Пример 4. Оператор «сдвига» T на $L_1(0, \infty)$, переводящий $f(x)$ в $f(x+1)$, является оператором перехода с единственной неподвижной точкой 0.

Теорема 14. *Множество E элементов, эргодических относительно какой-нибудь циклической полугруппы $\{T^r\}$ линейных изометрий или сжатий в произвольном банаховом пространстве B, является слабо замкнутым подпространством в B, содержащим все свои образы и прообразы относительно преобразований вида T^r.*

Доказательство. Прежде всего, E является подпространством, так как если средние $g_i(s)$ для f_i сходятся к a_i при $i=1, 2$, то средние для f_1+f_2 и λf_1 сходятся соответственно к a_1+a_2 и к λa_1. Во-вторых, E метрически замкнуто. В самом деле, средние $g_n(s)$ для f_nT^r на $[0, s)$ удовлетворяют неравенству $\|g_n(s)-g(s)\|\leqslant\|f_n-f\|$. Следовательно, при $\|f_n-f\|\to 0$ будет $\|g_n(s)-g(s)\|\to 0$ для любого s, так что если $\{g_n(s)\}\to a_n$ для каждого n при $s\to\infty$ (т. е. если каждый элемент f_n является эргодическим), то эти a_n образуют последовательность Коши с пределом a, и значит, $g(s)\to a$. Наконец, очевидно, что E содержит все свои образы и прообразы относительно преобразований вида T^r, поскольку средние $g(s)$ для любого fT^r имеют тот же предел (если вообще имеют), что и средние для f:

$$\left\|(ks)^{-1}\left[\int\limits_0^{ks}(fT^r)T^t\,dt-\int\limits_0^{ks}fT^t\,dt\right]\right\|\leqslant 2\|f\|/k. \tag{21}$$

Остается заметить, что метрически замкнутое подпространство любого банахова пространства слабо замкнуто, — и доказательство закончено.

Теперь получим общее достаточное условие эргодичности элемента банахова пространства B.

Теорема 15. *Если средние $g(s)$ элементов fT^r лежат в слабо компактном множестве, то f является эргодическим элементом.*

Доказательство. В силу предположенной компактности некоторая подпоследовательность $\{g(s(k))\}$ последовательности $\{g(s)\}$ слабо сходится к пределу a. С другой стороны, каждый элемент $f-fT^r$ является эргодическим, поскольку при

[1]) См. теорему 14. — *Прим. перев.*

$s > r$ будет, как в (21),

$$\left\| \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{s-1} (f - fT^r) T^k \right\| = \frac{1}{s} \left\| \sum_{k=0}^{s-1} fT^k - \sum_{k=r}^{s+r-1} fT^k \right\| \leqslant 2r \|f\|/s, \tag{21}$$

так что средние метрически сходятся к 0.

Поэтому, для краткости обозначая $g_k = g(s(k))$, мы получаем, что каждая из разностей $f - g_k$ принадлежит множеству E эргодических элементов, будучи средним для $f - fT^r$. Так как E слабо замкнуто в B, то $f - a = \lim\limits_{k \to \infty} (f - g_k) \in E$. Но для любого линейного функционала φ на B и каждого k

$$|\varphi(a - aT)| \leqslant |\varphi(a - g_k)| + |\varphi(g_k - g_k T)| + |\varphi(g_k T - aT)|.$$

При $k \to \infty$ первое и последнее слагаемые справа стремятся к нулю, поскольку $g_k \to a$; среднее слагаемое стремится к нулю в силу (21′). Значит, $\varphi(a) = \varphi(aT)$ для всех $\varphi \in B^*$ (дуальное для B). Отсюда следует равенство $a = aT$, и значит, $a \in E$. Ч. т. д.

Следствие 1. *Если $a \leqslant fT^r \leqslant b$ для всех r в банаховых решетках L_1 и l_1, то элемент f эргодический.*

Попросту говоря, элемент f является эргодическим, если его образы относительно T^r равномерно порядково ограничены. Это следует из теоремы 15 и слабой компактности замкнутых интервалов $[a, b]$ в упомянутых векторных решетках (Данфорд и Шварц [1, с. 314]).

Следствие 2. *Если в L_1 функция $f(x) \equiv 1$ инвариантна относительно оператора T, то каждый элемент этого пространства будет эргодическим.*

В самом деле, условие $f \in [-M, M]$ инвариантно относительно T, поскольку операторы перехода линейны и сохраняют порядок; поэтому в силу следствия 1 каждая ограниченная функция $f \in L_1$ эргодична. Но ограниченные функции образуют плотное множество в L_1 — и доказательство завершается ссылкой на теорему 15.

Следствие 2, в частности, применимо к любой динамической системе, фазовое пространство которой имеет *конечную тотальную меру*, например, к компактным фазовым пространствам.

Теперь мы используем теорему о представлении Какутани для абстрактных (L)-пространств (теорема XV.27). Пусть T^n — произвольная дискретная полугруппа операторов перехода на абстрактном (L)-пространстве L. Для любого $f \in L$ его образы fT^n порождают относительно конечных линейных комбинаций и метрического замыкания *сепарабельное* замкнутое подпространство $F \subset L$. По теореме Какутани—Иосиды его можно изоморфно и изометрично вложить в $L_1[0, 1]$. Следовательно, элементы fT^n, *если* только они равномерно порядково ограничены в F, будут таким же образом ограничены и в некотором слабо компактном подмножестве из L, которому они будут все принадлежать. Поэтому следствие 1 применимо и к дискретным полугруппам операторов перехода в произвольном абстрактном (L)-пространстве. Чтобы включить в эту схему и случай непрерывных полугрупп, нужно просто посмотреть на поведение средних для $f_1 = \int_0^1 fT^s\,ds$ при действии дискретной полугруппы $\{T, T^2, T^3, \ldots\}$. Таким образом, нами получена

Теорема 16. *В произвольном абстрактном (L)-пространстве L любой элемент, образы которого относительно циклической полугруппы операторов перехода порядково ограничены, является эргодическим.*

Этот результат можно было бы назвать эргодической теоремой о среднем для операторов перехода: в случае пространства $L_1(M)$, где M — произвольное пространство с мерой, она утверждает, что средние $g(s)$ для элементов fT^r сходятся *в среднем, при условии*, что fT^r образуют порядково ограниченное множество.

Упражнения к §§ 7—8

1. Пусть A — квадратная матрица со спектральным радиусом единица. Покажите, что

(а) если A диагонализируема, то $(f + fA + \ldots + fA^{n-1})/n \to Ef$, где E проектирует f на подпространство неподвижных точек для A;

(б) если A не диагонализируема, то это не всегда так.

2. Покажите, что неотрицательная квадратная матрица P тогда и только тогда представляет оператор перехода на $\mathbf{R}^n$, когда $\sum_j p_{ij} = 1$ для всех i. Такие неотрицательные матрицы называются *стохастическими*.

3. Покажите, что для стохастической матрицы T следующие условия равносильны (все участвующие векторы — вероятностные): (а) равномерная полупримитивность; (б) гипотеза Маркова; (в) $\|pT^n - p_0\| \leqslant M\rho^n$ для некоторых фиксированных $\rho < 1$ и p_0 и для всех p; (г) $\|pT^r - qT^r\| \leqslant (1-d)\|p-q\|$ для некоторого $d > 0$, конечного r и произвольных p, q.

4. Покажите, что результаты упр. 3 не верны для операторов перехода на бесконечномерных пространствах.

5. Покажите, что если элемент f банахова пространства эргодичен, то все его средние лежат в слабо компактном множестве.

6. Покажите, что в любом абстрактном (L)-пространстве множество всех элементов, эргодичных относительно данного оператора перехода, является замкнутым l-идеалом.

7. Покажите, что если в банаховом пространстве последовательность $\{g(s(k))\}$ средних $g(s)$ для элементов fT^r слабо сходится к пределу a, то a является неподвижной точкой оператора T.

* 8. Неотрицательная квадратная матрица P такая, что и сама P, и ее транспонированная матрица P^T являются стохастическими, называется *дважды стохастической*. Докажите, что каждая дважды стохастическая матрица представляет собой взвешенное среднее для подстановочной матрицы[1]).

---

[1]) Непрерывные аналоги этого результата см. у Рифа (Ryff J. W. — Trans. AMS, 1965, 117, p. 92—100). Случай бесконечных матриц рассмотрен Кенделом (Kendall D. G. — J. London Math. Soc., 1960, 35, p. 81—84) и Исбелом (Isbell J. R. — Canad. Math. Bull., 1962, 5, p. 1—4).

9. Метрическая транзитивность. Поточечная эргодическая теорема

Эргодическая теорема из § 8 была связана с *существованием* неподвижных точек для заданного оператора перехода T и со сходимостью первых чезаровских средних $(f + fT + \ldots + fT^{n-1})/n$ для образов данного f к таким неподвижным точкам. Для приложений в статистической механике столь же важна *единственность* получающегося таким образом инвариантного вероятностного распределения. В самом деле, в статистической механике обычно *предполагается* (из физических соображений), что существует в точности одно инвариантное («устойчивое») вероятностное распределение, — это так называемая гипотеза о метрической транзитивности.

Метрическая транзитивность не очень интересна в применении к детерминистским процессам с конечными фазовыми пространствами и вот по каким причинам. Говорят, что стохастическая матрица представляет собой *детерминистский* процесс, если за каждым i следует однозначно определенное j (i) такое, что

$$(22) \qquad P_{i,\,j(i)} = 1 \text{ и } P_{ik} = 0 \text{ при } k \neq j(i).$$

Чтобы быть «обратимым», детерминистский процесс должен определяться подстановочной матрицей (чтобы она имела обратную матрицу). Во всяком случае, поскольку множество матриц, удовлетворяющих (22), конечно при любом n, детерминистские процессы на конечных фазовых пространствах должны быть *дискретными* во времени. При этом, поскольку каждая подстановочная матрица является прямой суммой циклических подстановочных матриц, то обратимый детерминистский оператор перехода может быть *метрически транзитивным* лишь в том случае, когда он задается *циклической* подстановочной матрицей порядка n. И наконец, устойчивое распределение для такого оператора никогда не может быть «доминантным»!

С другой стороны, гипотеза Маркова — и точно так же гипотеза о равномерной полупримитивности — обе имеют своим следствием метрическую транзитивность, как мы уже видели раньше.

Поточечная эргодическая теорема. Теорема 15 часто называется эргодической теоремой о среднем, поскольку она имеет в виду сходимость в среднем «временны́х средних» при итерации. Более сильным является следующий результат, впервые доказанный Дж. Биркгофом [1]) для сохраняющих меру течений, подобных тем, которые возникают в динамике.

---

[1]) Birkhoff G. D. — Proc Nat. Acad. Sci., 1931, 17, p. 650—665. См. [LT2, с. 363—364], где указываются литературные источники.

Теорема 17. *Пусть T — произвольный оператор перехода на $L_1(X)$, где X — пространство с вероятностной мерой. Тогда с вероятностью единица (почти для всех $x \in X$) существует*

$$\lim \frac{1}{n}(f + fT + \cdots + fT^{n-1}). \tag{23}$$

Доказательство. Поскольку lim inf и lim sup существуют для любой последовательности измеримых функций, множество, где lim inf < lim sup, измеримо. Если бы оно имело положительную меру, мы получили бы, что

$$\liminf \frac{1}{n}(f + fT + \cdots + fT^{n-1}) < a < b < \limsup \frac{1}{n}(f + fT + \cdots + fT^{n-1}) \tag{23'}$$

на множестве положительной меры m в X. Но это несовместимо со следующей, принадлежащей Хопфу [1]) максимальной эргодической теоремой, очень короткое доказательство для которой недавно нашел Гарсиа [1]).

Максимальная эргодическая теорема. *Пусть P — неотрицательный линейный оператор на $L_1(X)$ такой, что $\|gP\| \leqslant \|g\|$ для всех g. Пусть, далее, $fS_n = f + fP + \ldots + fP^{n-1}$ и R_n — сублинейный оператор*

$$fR_n \equiv 0 \vee f \vee (f + fP) \vee \ldots \vee fS_n = 0 \vee \bigvee_{k=1}^{n} fS_k. \tag{24}$$

Тогда если M_n обозначает множество, на котором $fR_n > 0$ (т. е. некоторый элемент $fS_k > 0$), то

$$\int_{M_n} f(x)\,dm(x) \geqslant 0. \tag{24'}$$

Доказательство. Поскольку оператор P неотрицателен, мы получаем из (24), что

$$fR_nP \geqslant \bigvee_{k=1}^{n} fS_kP, \tag{25a}$$

откуда

$$f + fR_nP \geqslant f + \bigvee_{k=1}^{n} fS_kP. \tag{25б}$$

---

1) Hopf E. — J. Rat. Mech. Anal., 1954, 3, p. 13—45; Garsia A. M. — J. Math. Mech., 1965, 14, p. 381—382. См. также работу Рота (Rota G.-C. — Proc. AMS, 1963, 14, p. 722—723).

Но по определению оператора S_k будет $f+\bigvee_{k=1}^{n} fR_kP \geqslant \bigvee_{k=1}^{n} fS_k$. Следовательно,

$$f+fR_nP \geqslant \bigvee_{k=1}^{n} fS_k. \tag{26}$$

На множестве M_n, где $fR_n > 0$, в силу (24) мы имеем, что $fR_n = \bigvee_{k=1}^{n+1} fS_k$, поскольку $fS_0 \geqslant 0$; значит, из (26) следует, что

$$f \geqslant fR_n - fR_nP \text{ на } M_n. \tag{26'}$$

Интегрируя (26′), мы получаем первое неравенство соотношения

$$\int_{M_n} f\,dm \geqslant \int_{M_n} (fR_n - fR_nP)\,dm \geqslant \int_X (fR_n - fR_nP)\,dm. \tag{27}$$

Второе неравенство следует из того, что по построению $fR_n \leqslant 0$ на дополнении множества M_n и (в силу положительности P) $fR_nP \geqslant 0$ на X. Наконец, обращаясь к вычитаемому в (26′), замечаем, что $\int_X fR_n\,dm = \|fR_n\|$, хотя $\int_X (-fR_nP)\,dm = = \|fR_nP\| \leqslant \|fR_n\|$, поскольку P — сжатие. Так что последний интеграл в (27) неотрицателен, чем и завершается доказательство неравенства (24). Мы не будем доказывать, что из (24′) следует (23′), — об этом см. в указанной работе Рота.

ПРОБЛЕМЫ [1]

143. Установить соответствие между понятиями (совместимого) однопараметрического семейства операторов перехода на $L^1(R)$ и «стохастическим процессом» в смысле Дуба [2]).

144. Линейный оператор Q называется *существенно положительным*, если из $e \wedge f = 0$ следует, что $e \wedge fQ = 0$. Доказать, что если Q *ограничен* (т. е. $fQ \leqslant \lambda f$ для некоторого фиксированного $\lambda = \lambda(Q)$) и действует на полной векторной решетке, то $\{e^{tQ}\}$ будет полугруппой положительных линейных операторов [3]).

---

[1]) В оригинале проблемы к главам XVI—XVII имеют увеличенные на 10 номера. — *Прим. ред. и перев.*

[2]) Дуб Д. Л. Вероятностные процессы. — М.: ИЛ, 1956. Ср. [**LT2**, проблема 110].

[3]) Это утверждение доказали Конрад и Дьем (Conrad P., Diem J.E. — Ill. J. Math., 1971, **15**, № 2, p. 222—240). — *Прим. перев.*

145. Установить теоремы существования и единственности для положительных распределений, совместимых с бинаправленными группами (и направленными полугруппами) положительных линейных операторов [1].

146. Пусть $K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{v})$ обозначает ядро «эластичного» рассеяния нейтронов. Показать, что в ограниченном реакторе получающееся «ядро миграции» будет равномерно примитивным [2].

---

[1] То есть проделать для положительных линейных операторов все то, что было сделано для операторов перехода Биркгофом и Алаоглу (Birkhoff G., Alaoglu L. — Ann. Math., 1940, **41**, p. 293—309).

[2] См. работу Биркгофа (Birkhoff G. — Rend. Math., 1963, **22**, p. 102—126).

ГЛАВА XVII

РЕШЕТОЧНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ КОЛЬЦА

1. У-кольца и l-кольца

Многие кольца являются упорядоченными или даже решеточно упорядоченными в смысле следующих определений.

Определения. *У-кольцом* называется кольцо R, которое представляет собой упорядоченное отношением $\geqslant$ множество, причем

(1) если $x \geqslant y$, то $a + x \geqslant a + y$ для всех $a \in R$;

(2) если $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, то $xy \geqslant 0$ в R.

l-кольцо — это такое у-кольцо R, которое является решеткой относительно порядка $\geqslant$.

Замечание. В у-кольце без делителей нуля условие (2) равносильно условию

(2′) если $x > 0$ и $y > z$, то $xy > xz$.

Поскольку каждое кольцо является коммутативной группой по сложению, мы видим, что относительно $+$ и $\geqslant$ любое у-кольцо будет абелевой у-группой, а любое l-кольцо — абелевой l-группой. Обратно, любая абелева у-группа (или l-группа), являющаяся кольцом, будет и у-кольцом (соответственно l-кольцом), если в ней выполняется (2). В частности, любая l-группа G становится l-кольцом, если положить $ab \equiv 0$, превращая ее в нуль-кольцо.

Пример 1. Пусть R — произвольное коммутативное ассоциативное [1]) кольцо, в котором всякая сумма ненулевых квадратов отлична от нуля. Тогда, полагая $a \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда a представляет собой сумму квадратов, мы превращаем R в у-кольцо.

Пример 2. Пусть $M_n(K)$ — *полное матричное кольцо* всех $n \times n$-матриц $A = \| a_{ij} \|$ с элементами из некоторого упорядоченного поля K. Тогда, считая $A \geqslant B$, если и только если $a_{ij} \geqslant b_{ij}$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$, мы получаем l-кольцо.

Пример 3. Векторная решетка $C[0, 1]$ всех непрерывных на $[a, b]$ функций с обычными операциями $f + g$ и fg является l кольцом.

[1]) В главе XVII кольца, за исключением специально оговоренных случаев, не предполагаются ассоциативными.

Заметим, что векторные решетки $L_p\,[0, 1]$, где $1 \leqslant p < \infty$, l-кольцами *не* будут, поскольку классы функций, из которых они состоят, не замкнуты относительно умножения.

Существует много различных типов у-колец и l-колец, имеющих между собой мало общего. Однако справедлива

Лемма. *Условие* (2) *в любой у-группе равносильно условию*

(3) *если* $x \geqslant 0$ *и* $y \geqslant z$, *то* $xy \geqslant xz$ *и* $yx \geqslant zx$.

Доказательство. Ввиду (1) и элементарных свойств у-групп, $y \geqslant z$ тогда и только тогда, когда $y - z \geqslant 0$, а $xy \geqslant xz$, если и только если $x(y-z) = xy - xz \geqslant 0$, и аналогично для неравенства $yx \geqslant zx$. Отсюда и следует равносильность рассматриваемых условий.

Теорема 1. *В любом l-кольце R*

(4) *если* $a \geqslant 0$, *то* $a(b \vee c) \geqslant ab \vee ac$, $(a \vee b)c \geqslant ac \vee bc$,

$$a(b \wedge c) \leqslant ab \wedge ac \text{ и } (a \wedge b)c \leqslant ac \wedge bc;$$

(5) $$|ab| \leqslant |a||b|.$$

Доказательство. Неравенства (4) следуют из леммы, поскольку $b \vee c \geqslant b$ и $b \vee c \geqslant c$ и т. д. Неравенство (5) также вытекает из этой леммы, так как

$$\begin{aligned}-|a||b| &= -a^+b^+ + a^+b^- + a^-b^+ - a^-b^- \leqslant \\ &\leqslant a^+b^+ + a^+b^- + a^-b^+ + a^-b^- = ab \leqslant \\ &\leqslant a^+b^+ - a^+b^- - a^-b^+ + a^-b^- = |a||b|.\end{aligned}$$

Теорема 2. *Класс l-колец эквационально определим, и следовательно, эквационально определим класс коммутативных l-колец.*

Доказательство. Класс абелевых l-групп эквационально определим (следствие 1 из теоремы XIII.2), так же как и класс всех колец. Но, как было отмечено выше, l-кольцо — это в точности абелева группа, являющаяся кольцом, в котором выполняется (2). Остается отметить, что в каждой такой системе импликация (2) равносильна тождеству

$$[(a \vee 0)(b \vee 0)] \wedge 0 = 0,$$

откуда и следует эквациональная определимость класса l-колец. Отсюда очевидным образом вытекает второе утверждение теоремы.

2. Линейно упорядоченные кольца и поля

Теория линейно упорядоченных колец и полей весьма обширна. Прекрасное ее изложение можно найти в книге [Fu, гл. VII—VIII]. Мы ограничимся здесь лишь несколькими простыми результатами. Прежде всего, Лемма 1. *В любом линейно упорядоченном кольце неравенства теоремы 1 можно заменить равенствами.*

Доказательство. В (4) следует заметить, что $b \vee c$ — это в точности больший из элементов b и c, и т. д., а в (5) — что $|a| = \pm a$. Мы опускаем очевидные детали.

Теперь назовем у-кольцо *архимедовым*, если оно архимедово как аддитивная у-группа. Имеет место следующий результат Пиккерта и Я. В. Хиона[1]).

Теорема 3. *Архимедово линейно упорядоченное кольцо R либо является нуль-кольцом, либо же оно l-изоморфно однозначно определенному подкольцу действительного поля* $\mathbf{R}$.

Доказательство. По теореме Гёльдера XIII.12 R изоморфно относительно $\geqslant$ и $+$ аддитивной подгруппе в $\mathbf{R}$; при этом каждый элемент $e > 0$ в R будет сильной единицей. Далее, либо $e^2 = 0$ (и тогда R — нуль-кольцо), либо $e^2 > 0$ удовлетворяет для некоторого положительного скаляра α условию

(6) $ne^2 \geqslant me$ тогда и только тогда, когда $m/n \geqslant \alpha$.

Снова возвращаясь к конструкции Гёльдера, мы получаем отсюда, что отображение $\lambda e \mapsto \lambda\alpha$ является изоморфизмом нашего R на линейно упорядоченное подкольцо в $\mathbf{R}$, — мы опускаем детали.

Неархимедовы линейно упорядоченные поля легко строятся как поля *формальных степенных рядов* с показателями из $\mathbf{Z}$ или некоторой другой линейно упорядоченной группы Γ.

Пример 4. Пусть Γ — произвольная линейно упорядоченная группа и K — линейно упорядоченное поле. Определим $K[[\Gamma]]$ как множество всех «формальных степенных рядов» вида

(7) $$f = \sum_W a_\gamma x^\gamma, \text{ где } a_\gamma \in K,\ \gamma \in W,$$

для некоторого вполне упорядоченного подмножества W из Γ. Суммы и произведения определяются правилами

(7а) $$\sum_W a_\gamma x^\gamma + \sum_W b_\gamma x^\gamma = \sum_W (a_\gamma + b_\gamma) x^\gamma,$$

(7б) $$\left(\sum_W a_\gamma x^\gamma\right)\left(\sum_W b_\gamma x^\gamma\right) = \sum_{W+W} (a_\gamma b_{\gamma'}) x^{\gamma+\gamma'},$$

вставляя, если нужно, «пустые» члены (с нулевыми коэффициентами). Поскольку $W \cup W_1$ вполне упорядочено вместе с W и W_1, то мы получаем замкнутость относительно $+$. Упорядочение устанавливается по первому отличному от нуля коэффициенту a_γ — как в $[{}^\Gamma K]$, определенном в § VIII.15; следовательно, $K[[\Gamma]]$ является линейно упорядоченной (абелевой) группой.

---

[1]) Хион Я. В. — УМН, 1954, **9**, с. 237—242.

Множество элементов γ таких, что $\gamma + \gamma' = \delta$ (фиксированное), вполне упорядочено и (полагая $\gamma = -\gamma' + \delta$) двойственно вполне упорядочено, и значит, оно конечно. Поэтому определение (7б) корректно.

Лемма 2. *$K[[\Gamma]]$ является линейно упорядоченным кольцом.*

Доказательство мы оставляем читателю.

Теорема 4 (Хан [1]). *Кольцо $K[[\Gamma]]$ является полем* [1].

Доказательство. Достаточно показать, что при заданном в (7) $f \neq 0$ уравнение $fg = 1 = 1x^0$ имеет решение. Так как $f \neq 0$, мы можем найти $\sum\limits_B a_\alpha^{-1} x^{-\alpha} = h$ такое, что

$$fh = 1 + \sum_B b_\beta x^\beta \quad (\text{все } \beta > 0),$$

где B — *вполне упорядоченная* подгруппа положительных элементов из Γ. Теперь уравнение $\left(1 + \sum\limits_B b_\beta x^\beta\right)\left(1 + \sum\limits_B c_\beta x^\beta\right) = 1 = 1 + \sum\limits_B 0 \cdot x^\beta$ можно решать индукцией по β для вполне упорядоченного множества неизвестных коэффициентов c_β — мы опускаем детали.

В упорядоченном поле или теле (косом поле) F можно определить отношение $\ll$, как в линейно упорядоченных группах. При этом, так как отображение $a \mapsto |a|$ является гомоморфизмом по умножению, мы можем, рассматривая архимедовы классы в F (т. е. классы эквивалентности $a \sim b$ [2]), ограничиться лишь положительными элементами.

Теорема 5. *В любом линейно упорядоченном поле или теле архимедовы классы ненулевых элементов образуют линейно упорядоченную группу.*

Доказательство. Так как $nx \leqslant y$ тогда и только тогда, когда $n(ax) = a(nx) \leqslant ay$ и симметрично, то отношение эквивалентности $\sim$ и порядок $\ll$ сохраняются при преобразованиях $x \mapsto axb$, каковы бы ни были a, b.

В примере 4 группа, о которой идет речь, совпадает с Γ. В архимедовом поле это будет тривиальная одноэлементная группа.

Упражнения к §§ 1—2

1. Покажите, что в любом (линейно) упорядоченном кольце каждый квадрат положителен.

---

[1]) Рассматриваемая конструкция была перенесена на произвольные тела (некоммутативные поля) Нейманом (Neumann B. H. — Trans. AMS, 1949, **66**, p. 202—252), — см. [**Fu**, с. 201—206]. Частный случай рассматривался в [**LT2**, с. 315, пример 11].

[2]) $a \sim b$ означает существование таких натуральных m и n, что $|a| \leqslant m|b|$ и $|b| \leqslant n|a|$. — *Прим. перев.*

2. Покажите, что действительное поле $\mathbf{R}$ и рациональное поле $\mathbf{Q}$ можно превратить в линейно упорядоченные поля единственным образом, но для $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ это уже не верно.

Назовем *l-алгеброй* l-кольцо, которое является действительной векторной решеткой относительно умножения на скаляры в его аддитивной l-группе.

3. Покажите, что в любой двумерной l-алгебре A множество A^+ всех $a > 0$ является сектором одного из следующих двух типов: (i) $\alpha \leqslant \arg a \leqslant \beta$, $0 < \beta - \alpha < \pi$ (архимедов случай); (ii) $\alpha < \arg a \leqslant \alpha + \pi$ или $\alpha \leqslant \arg a < \alpha + \pi$ (неархимедов случай).

4. Покажите, что комплексное поле $\mathbf{C}$ нельзя превратить в l-алгебру.

5. Пусть A — алгебра действительных *дуальных чисел* $a = x + ye$ (где $x, y \in \mathbf{R}$), причем $e^2 = 0$. Пусть A^+ будет сектором $|(\pi/4) - \arg a| \leqslant \pi/8$. Покажите, что A является l-алгеброй.

6. Постройте l-алгебру с единицей 1, где $1 \not> 0$. (Указание. См. упр. 5.)

$*$ 7. Найдите все двумерные l-алгебры. (Указание. См. работу Биркгофа и Пирса [1, § 4, примеры 9a—9g].)

$*$ 8. Покажите, что поле F «линейно упорядочиваемо» тогда и только тогда, когда оно является «формально действительным» в том смысле, что уравнения вида $\sum x_i^2 = -1$ не разрешимы в F[1].

3. L-идеалы. Радикал

Пусть R — произвольное l-кольцо и θ — конгруэнция на R. Так как R является l-группой, то θ определяется l-идеалом J, состоящим из $x \equiv 0\ (\theta)$ в R. При этом, как известно из теории колец, l-идеалы, соответствующие конгруэнциям по умножению,— это те, для которых из $x \in J$ и $a \in R$ следует, что $ax \in J$ и $xa \in J$. Эти наблюдения можно суммировать следующим образом.

Определение. *L-идеалом* l-кольца R называется непустое подмножество $J \subset R$ такое, что (i) если $x \in J$ и $y \in J$, то $x \pm y \in J$; (ii) если $x \in J$ и $|t| \leqslant |x|$, то $t \in J$; (iii) если $x \in J$ и $a \in R$, то $ax \in J$ и $xa \in J$.

Теорема 6. *Конгруэнции любого l-кольца — это в точности разбиения его на смежные классы по его различным L-идеалам.*

l-кольцо R без собственных L-идеалов (т. е. единственными L-идеалами которого являются 0 и R) можно поэтому назвать *простым*. Используя лемму Цорна (глава VIII), нетрудно показать, что любое l-кольцо $R \neq 0$ с мультипликативной единицей 1 имеет по крайней мере один *максимальный* собственный L-идеал M т. е. такой, что фактор-кольцо R/M является простым.

Определим *L-радикал* произвольного l-кольца R как пересечение $\bigcap M_\alpha$ его максимальных собственных l-идеалов. Ясно, что $R/\bigcap M_\alpha$ является подпрямым объединением простых l-колец, и обратно; такое l-кольцо называется *полупростым*.

Легко убедиться, что l-кольцо в примере 2 из § 1 является простым, а в примере 3 — полупростым.

---

[1]) Артин и Шрейер (Artin E., Schreier O. — Hamb. Abh., 1926, 5, S. 83—100). Более поздние результаты см. у Дюбуа (Dubois D. W. — Proc. AMS, 1956, 7, p. 918—930).

Для $x \in [0, 1]$ множество всех $f \in C[0, 1]$ таких, что $f(x) = 0$, является максимальным собственным идеалом M_x и при этом $\bigcap M_x = 0$. Покажем, что $C[0, 1]$ не имеет других максимальных собственных l-идеалов, не говоря уже о максимальных собственных L-идеалах.

Лемма. *Пусть J — произвольный собственный l-идеал в $C[0, 1]$. «Носителем» для J назовем множество $S(J)$ всех x таких, что $f(x) \neq 0$ для некоторой функции $f \in J$. Тогда $S(J) < [0, 1]$.*

Доказательство. Допустим, что $S(J) = [0, 1]$. Тогда для любого $x \in [0, 1]$ должна найтись функция $f \in J$ такая, что $f(x) \neq 0$, и следовательно, функция $h = |f| \in J^+$, для которой $h(x) > 0$. По теореме Гейне—Бореля о покрытии мы можем выбрать конечное множество функций $h_1, \ldots, h_n \in J^+$ такое, чтобы объединение открытых множеств S_i, на которых $h_i(y) > 0$, покрывало $[0, 1]$. Но тогда сумма $h^* = h_1 + \ldots + h_n \in J^+$ тождественно положительна на всем $[0, 1]$, и следовательно, является сильной единицей в $C[0, 1]$. Отсюда получается равенство $J = C[0, 1]$, что противоречит условию. Теорема доказана.

Пусть теперь M — *максимальный* собственный l-идеал в $C[0, 1]$. По доказанной лемме существует $x \in [0, 1]$ такой, что $f(x) = 0$ для всех $f \in M$. Следовательно, $M \subset M_x$, а в силу максимальности M это означает, что $M = M_x$. Мы доказали

Следствие. *В $C[0, 1]$ максимальные собственные l-идеалы — это в точности множества вида M_x, состоящие из функций таких, что $f(x) = 0$ для некоторого фиксированного $x \in [0, 1]$; они все являются L-идеалами.*

Другой тип радикала представляет собой l-радикал, следующим образом определяемый для *ассоциативных* колец.

Определение. *l-радикалом* l-кольца R называется множество N всех $a \in R$ таких, что для некоторого положительного целого $n = n(a)$ и всех $x_0, \ldots, x_n \in R$ выполняется условие

$$x_0 |a| x_1 |a| x_2 \ldots x_{n-1} |a| x_n = 0. \tag{8}$$

Теорема 7. *l-радикал l-кольца R является L-идеалом, представляющим собой объединение нильпотентных L-идеалов в R. Каждый элемент в N нильпотентен.*

Доказательство. Если J — нильпотентный L-идеал и, скажем, $J^n = 0$, то, очевидно, (8) выполняется для всех $a \in J$. Обратно, если $a \in N$ удовлетворяет условию (8), то

$$(|a| R)^{n+1} = (R|a|)^{n+1} = (R|a|R)^n =$$
$$= (|a| + |a|R + R|a| + R|a|R)^{2n+1} = 0.$$

Значит, a содержится в нильпотентном L-идеале. Наконец, из (8) очевидным образом следует, что $|a^{2n+1}| = 0$, — каждый элемент $a \in N$ нильпотентен.

Различные следствия из теоремы 7 получены Биркгофом и Пирсом [1, § 3].

4. Представления. Регулярные l-кольца

Во многих l-кольцах «положительный конус» имеет важные свойства, не вытекающие из условия (2). Одно из таких свойств — *регулярность*, которую мы определим чуть позже. Это свойство тесно связано с понятием l-представления, с которого мы и начнем. Но для этого нам потребуется

Пример 5. Пусть G — произвольная аддитивная абелева у-группа. В кольце $E(G)$ всех ее групповых эндоморфизмов положим $\theta \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда из $g \geqslant 0$ следует $g\theta \geqslant 0$. Этим мы превращаем $E(G)$ в у-кольцо. (Например, если $G = \mathbf{R}^n$, то $E(G)$ будет l-кольцом, введенным в примере 2, § 1.)

Определение. Под *l-представлением* l-кольца R понимается его l-кольцевой гомоморфизм в у-кольцо $E(G)$ всех эндоморфизмов некоторой l-группы G.

Для произвольного l-кольца $R = (R, +, \cdot, \vee)$ рассмотрим кольцевой гомоморфизм, сопоставляющий каждому элементу $a \in R$ эндоморфизм θ_a: $x \to xa$ группы $(R, +)$, — так называемое регулярное представление [1]). Отображение $a \mapsto \theta_a$ является *p-представлением* в том смысле, что если $a \geqslant 0$ в R, то $\theta_a \geqslant 0$ в $E(R, +, \vee)$. Оно точно (т. е. взаимно однозначно), если R имеет единицу или, более общо, если $0: R = 0$.

Определение. l-кольцо R называется *регулярным справа*, если его регулярное p-представление является точным l-представлением; *регулярным слева*, если регулярно справа противоположное ему l-кольцо; *регулярным*, когда оно одновременно регулярно справа и слева.

Таким образом, в регулярном справа l-кольце

(9) $$\theta_a + \theta_b = \theta_{a+b}, \quad \theta_a\theta_b = \theta_{ab}, \quad \theta_a \wedge \theta_b = \theta_{a \wedge b}.$$

Полагая $b = 0$, из последнего тождества получаем, что

(10) если $xa \geqslant 0$ для всех $x \geqslant 0$, то $a \geqslant 0$ в R.

Обратное, т. е. что из (10) следует правая регулярность, кажется неправдоподобным. Аналогичные замечания можно сделать и для регулярных слева l-колец. Поскольку $\theta_1 > \theta_0$ в $E(R)$, ясно, что правая единица 1 будет положительным элементом любого регулярного справа l-кольца.

---

[1]) См., например, Джекобсон Н. Теория колец. — М.: ИЛ, 1947, с. 34. Под «противоположным» для R понимается кольцо, получаемое из R изменением порядка сомножителей в умножении.

Хотя большинство l-колец не регулярны в указанном смысле [1], по-видимому, в наиболее важных случаях это свойство присутствует. Например, имеет место

Лемма 1. *Полное матричное кольцо $M_n(K)$ из примера 2 регулярно для любого линейно упорядоченного поля K.*

Доказательство. Пусть E_{hk} обозначает матрицу, у которой (h, k)-элемент равен 1, а все остальные — 0. Пусть, далее, $A = \sum a_{hk}E_{hk}$ и $B = \sum b_{hk}E_{hk}$ — произвольные элементы из $M_n(K)$. Тогда

$$(11)\qquad E_{hk}A \wedge E_{hk}B = (\sum a_{kj}E_{hj}) \wedge (\sum b_{kj}E_{hj}) > 0$$

в том и только в том случае, если для некоторого j будет $a_{kj} \wedge \wedge b_{kj} > 0$. Отсюда следует, что если $A \wedge B = 0$, то $E_{hk}A \wedge \wedge E_{hk}B = 0$. Значит, если $A \wedge B = 0$ и $\theta \leqslant \theta_A \wedge \theta_B$ в $E(M_n(K))$, то $\theta \leqslant 0$ в $E(M_n(K))$. Таким образом,

$$(12)\qquad \text{если } A \wedge B = 0 \text{ в } M_n(K), \text{ то } \theta_A \wedge \theta_B = 0 \text{ в } E(M_n(K)).$$

Доказательство правой регулярности для $M_n(K)$ завершает

Лемма 2. *l-кольцо R регулярно справа тогда и только тогда, когда в нем из $a \wedge b = 0$ следует, что $\theta_a \wedge \theta_b = 0$ в $E(R)$.*

Доказательство. Необходимость очевидна ввиду (9). Чтобы доказать достаточность, заметим, что при $a \wedge b = c$ в R будет $\theta_a \wedge \theta_b = \theta_c$ в $E(R)$, если

$$(12')\qquad \text{из } (a - c) \wedge (b - c) = 0 \text{ в } R \text{ следует, что } \theta_{a-c} \wedge \theta_{b-c} = 0 \text{ в } E(R).$$

Это получается в силу однородности (инвариантности порядка в R и $E(R)$ при групповых трансляциях).

Наконец, поскольку $M_n(K)$ совпадает со своим противоположным кольцом (при соответствии $A \mapsto A^T$), его правая регулярность влечет левую регулярность. Ч. т. д.

Отметим еще, что поскольку соответствия $a \mapsto -a$ и $\theta \mapsto -\theta$ являются дуальными автоморфизмами в R и в $E(R)$, имеет место

Лемма 3. *l-кольцо R регулярно справа тогда и только тогда, когда отображение $a \mapsto \theta_a$ является его l-гомоморфизмом в l-кольцо $E(R)$.*

Отсюда следует, что положительный конус любого регулярного l-кольца является l-полугруппой относительно умножения и объединения. Обратное, по-видимому, неверно.

Упражнения к §§ 3—4

1. (а) Покажите, что l-идеалы любого l-кольца R образуют полную брауэрову решетку.

(б) Докажите то же самое для L-идеалов.

---

[1] См. работу Биркгофа и Пирса [1, § 4]. Настоящее изложение является переработкой §§ 6—7 этой работы.

2. Покажите, что если решетка всех l-идеалов l-кольца R нётерова, то R однозначно представимо в виде прямого произведения (суммы) неразложимых сомножителей.

3. Пусть все $c_{ij}^k \geqslant 0$ и пусть $\sum \gamma_i e_i \geqslant 0$ означает, что каждое $\gamma_i \geqslant 0$. Покажите, что множество всех $\sum \gamma_i e_i$ с умножением $\left(\sum \lambda_i e_i\right)\left(\sum \mu_j e_j\right) = \sum \lambda_i \mu_j c_{ij}^k e_k$ является l-алгеброй.

4. Покажите, что если L-идеалы l-кольца R удовлетворяют условию обрыва возрастающих или убывающих цепей, то его l-радикал нильпотентен.

5. (а) Покажите, что если N является l-радикалом *коммутативного* l-кольца R, то l-радикалом для R/N будет $N/N \cong 0$.

(б) Покажите, что в произвольных l-кольцах это не так[1]).

i-радикалом (действительной) векторной решетки с сильной единицей u называется множество $i(V)$ всех $x \in V$ таких, что $n|x| \leqslant u$ для каждого положительного целого n. (N.B. Выбор u несуществен.)

6. (а) Пусть A — конечномерная действительная l-алгебра. Покажите, что $i(A) \subset N$, где N обозначает l-радикал для A. (б) Выведите, что если $N = 0$, то A архимедова и изоморфна одной из l-алгебр, описанных в упр. 3.

5. Функциональные кольца

Решеточно упорядоченные кольца функций со значениями в линейно упорядоченном поле имеют характеристическое свойство, намного более сильное, чем регулярность: их замкнутые l-идеалы являются и L-идеалами. Хотя, как мы покажем, из этого свойства следует регулярность, «регулярное» l-кольцо $M_n(K)$ им не обладает, так что обратное не верно.

Определение. Функциональным кольцом, или *f-кольцом* называется l-кольцо, в котором

(13) если $a \wedge b = 0$ и $c \geqslant 0$, то $ca \wedge b = ac \wedge b = 0$.

Ясно, что любое линейно упорядоченное кольцо является f-кольцом, поскольку в любом линейно упорядоченном кольце из $a \wedge b = 0$ следует, что $a = 0$ или $b = 0$; в любом случае для каждого $c \geqslant 0$ будет, как легко проверить, $ca \wedge b = 0$ и $ac \wedge b = 0$.

Лемма 1. *В любом f-кольце*

(14) *если* $a \wedge b = 0$, *то* $ab = 0$.

Доказательство. В силу (13), если $a \wedge b = 0$, то $ab \wedge b = 0$, и значит, $ab \wedge ab = 0$, т. е. (14) доказана.

Важный класс f-колец дает следующая просто доказываемая

Лемма 2. *Пусть R будет l-кольцом с единицей* 1. *Если* 1 — *сильная единица, то R является f-кольцом. Обратно, если R является f-кольцом, то* 1 *будет слабой единицей.*

Доказательство. Пусть $a \wedge b = 0$ и $c \geqslant 0$. Если 1 — сильная единица, то $0 \leqslant c \leqslant n \cdot 1$ для некоторого положитель-

---

[1]) Доказательства этих и большинства других результатов, приведенных в упражнениях к §§ 1—6, можно найти у Биркгофа и Пирса [1].

ного целого n. Поэтому, как следует из теории l-групп, $0 \leqslant \leqslant ca \wedge b \leqslant na \wedge b = 0$. Аналогично, $ac \wedge b = 0$. Обратно, в произвольном f-кольце, если $a \wedge 1 = 0$, то $0 = a \wedge (1a) = = a \wedge a = a$.

Лемма 3. *l-кольцо тогда и только тогда является f-кольцом, когда его элементы удовлетворяют тождествам*

$$(15)\quad (a \vee 0) \wedge [(-a \vee 0)(c \vee 0)] = 0 = \\ = (a \vee 0) \wedge [(c \vee 0)(-a \vee 0)].$$

Доказательство. В силу формул из § XIII.4, множество пар $\{a, b\}$ таких, что $a \wedge b = 0$, совпадает с множеством пар $\{d \vee 0, -d \wedge 0\}$ (достаточно взять $d = a - b$).

В качестве следствия из леммы 3 и теоремы 2 получается

Теорема 8. *Класс f-колец эквационально определим.*

Следствие. *Любое f-кольцо является подпрямым произведением подпрямо неразложимых f-колец.*

Лемма 4. *Любое подпрямо неразложимое f-кольцо F линейно упорядочено.*

Доказательство. Сначала рассмотрим F как аддитивную абелеву l-группу. Тогда можно повторить рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы XIII.21. Мы получаем, что F либо линейно упорядочено, либо содержит два элемента $a > 0$ и $b > 0$ такие, что $a \wedge b = 0$. Пусть A будет замкнутым l-идеалом $(b^{\perp})$ и $B = A^{\perp} = (b^{\perp})^{\perp}$. Тогда $A \cap B = 0$, причем $a \in A$ и $b \in B$. При этом A и B являются L-идеалами, будучи в силу (13) пересечениями L-идеалов. Следовательно, если F не линейно упорядочено, оно подпрямо разложимо. Ч. т. д.

Из сформулированного выше следствия вытекает, что каждое f-кольцо является подпрямым произведением линейно упорядоченных колец. Обратно, (13) тривиально выполняется в любом линейно упорядоченном кольце, и значит, по теореме 8, в каждом подпрямом произведении линейно упорядоченных колец. Таким образом, нами доказана

Теорема 9. *l-кольцо тогда и только тогда является f-кольцом, когда оно представляет собой подпрямое произведение линейно упорядоченных колец.*

Следствие 1. *В любом f-кольце тождественно выполняются следующие равенства:*

$$(16)\quad \text{если } a \geqslant 0, \text{ то } a(b \vee c) = ab \vee ac,\ a(b \wedge c) = ab \wedge ac, \\ (b \vee c)a = ba \vee ca,\quad (b \wedge c)a = ba \wedge ca;$$

$$(17)\qquad |ab| = |a||b|.$$

Следствие 2. *Любое f-кольцо регулярно.*

Интересно отметить, что любое l-кольцо R с l-радикалом 0, удовлетворяющее равенствам (16), является f-кольцом. Вообще

(Биркгоф и Пирс [1, теорема 14]), если $0 .\cdot R = 0 \cdot . R = 0$ и выполняется (16), то R будет f-кольцом.

Теорема 10. *Любое архимедово f-кольцо коммутативно и ассоциативно.*

Доказательство. Сначала докажем, что в произвольном f-кольце, если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то

(18) $n|ab - ba| \leqslant a^2 + b^2$ для любого положительного целого n.

По теореме 9 для этого достаточно рассмотреть случай линейно упорядоченного кольца, где можно считать, что $a \geqslant b$. Тогда для некоторого неотрицательного целого k будет $nb = ka + r$, где $0 \leqslant r < a$. Следовательно, $n|ab - ba| = |ka^2 + ar - ka^2 - ra| = |ar - ra| \leqslant a^2 \leqslant a^2 + b^2$. Если R архимедово, то из (18) по определению получается, что $ab - ba = 0$; так что каждое архимедово f-кольцо коммутативно.

Напомним, что в доказательстве теоремы 9 ассоциативность умножения не предполагалась. Так что рассуждая, как при доказательстве (18), можно, без использования ассоциативности, показать, что если a, b, c — неотрицательные элементы f-кольца R и n — произвольное положительное целое число, то

(19) $$n\cdot|(ab)c - a(bc)| \leqslant ab(a + b + ab) + a(a + a^2 + ba) + cb(c + b + cb) + c(c + c^2 + bc).$$

Следовательно, если R — архимедово f-кольцо, то $(ab)c - a(bc) = 0$. Этим и завершается доказательство.

Дополнительно о свойствах l-радикалов f-колец можно прочитать в работах Биркгофа и Пирса [1, § 10], Пирса (Pierce R. S. — Duke Math. J., 1956, **23**, p. 253—261), Джонсона (Johnson D. G. — Acta Math., 1960, **104**, p. 163—215) и в книге [**Fu**, § IX.3]. Отметим еще следующий результат.

Теорема Фукса. *l-кольцо тогда и только тогда будет f-кольцом, когда все его замкнутые l-идеалы являются L-идеалами.*

6. Почти f-кольца

Ассоциативное l-кольцо, удовлетворяющее условию (14), можно было бы назвать *почти f-кольцом*. Такие почти f-кольца не обязаны быть f-кольцами (см. пример 16 в работе Биркгофа и Пирса [1]). В этом разделе мы опишем класс почти f-колец с положительной единицей 1. Прежде всего,

Теорема 11. *Пусть R будет l-кольцом с положительной единицей 1, которая является слабой единицей в смысле порядка. Тогда если элемент $a > 0$ и нильпотентен, то $a \ll 1$.*

Доказательство. Пусть $B(R)$ обозначает множество всех «ограниченных» элементов $x \in R$, т. е. таких, что $|x| \leqslant n$ для некоторого целократного n единицы 1. Ясно, что $B(R)$ является l-идеалом и подкольцом в R. Кроме того, по лемме 2 из § 5,

$B(R)$ будет f-кольцом с сильной единицей 1. Пусть теперь элемент $a > 0$ нильпотентен; конечно, $a \wedge 2 \in B(R)$.

Допустим, что неравенство $a \wedge 2 \leqslant 1$ не выполняется. В этом случае по теореме 9 можно найти l-гомоморфизм $b \mapsto b'$ f-кольца $B(R)$ на линейно упорядоченное кольцо, в котором $a' \wedge 2' > 1'$, и тогда элемент $(a \wedge 1)' = 1'$ не будет нильпотентным. Это невозможно, поскольку $a \wedge 1$ — нильпотентный элемент. Значит, $a \wedge 2 \leqslant 1$.

Отсюда следует, что $(a - 1) \wedge 1 \leqslant 0$ (мы вычли 1 из обеих частей), или $0 = 0 \vee [(a-1) \wedge 1] = [0 \vee (a-1)] \wedge 1$. Так как 1 по предположению является слабой единицей, то $0 \vee (a - 1) = 0$, или $a - 1 \leqslant 0$, откуда $a \leqslant 1$.

Наконец, если элемент $a > 0$ нильпотентен, то нильпотентным будет и элемент $na = n|a|$ при любом положительном целом n; следовательно, $na \leqslant 1$ для каждого такого n — если повторить проведенные выше рассуждения. Так что $a \ll 1$. Ч. т. д.

Используя теорему 11 и некоторые, по существу уже затронутые соображения, — мы не будем воспроизводить их здесь,— можно получить следующий результат (Биркгоф и Пирс [1, теорема 15]).

Т е о р е м а 12. *Пусть R — (ассоциативное) l-кольцо с положительной единицей* 1. *В R выполняется* (14) *тогда и только тогда, когда* 1 *является слабой единицей в смысле порядка.*

Название «почти f-кольцо» можно мотивировать следующими доводами, показывающими, что почти f-кольца, не являющиеся f-кольцами, должны обладать весьма специальными свойствами.

Л е м м а 1. *Если почти f-кольцо R не содержит ненулевых положительных нильпотентных элементов, то оно является f-кольцом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $a \wedge b = 0$ и $c \geqslant 0$, то

$$0 \leqslant (ac \wedge b)^2 \leqslant b(ac) = (ba)c = 0$$

в силу (14). Так что $ac \wedge b = 0$. Аналогично $ca \wedge b = 0$.

С л е д с т в и е. *Если в архимедовом ассоциативном l-кольце R (положительная) кольцевая единица* 1 *является слабой единицей в смысле порядка, то R будет f-кольцом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку R архимедово, оно по теореме 11 не содержит положительных нильпотентных элементов. Кроме того, R по теореме 12 удовлетворяет условию (14) (т. е. является почти f-кольцом). Следовательно, по лемме 1, R будет f-кольцом.

Л е м м а 2. *В почти f-кольце каждый квадрат положителен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого a

$$a^2 = (a^+ - (-a)^+)^2 = (a^+)^2 + ((-a)^+)^2 = (a^+)^2 + (-a^-)^2,$$

поскольку $a^+ \wedge (-a)^+ = 0$, откуда $a^+(-a)^+ = (-a)^+ a^+ = 0$.

Упражнения к §§ 5—6

1. Покажите, что любую векторную решетку можно превратить в l-кольцо, полагая $ab \equiv 0$ (нуль-кольцо).

2. Докажите, что l-кольцо тогда и только тогда будет f-кольцом, когда все его замкнутые l-идеалы являются L-идеалами. ([Fu, § IX.3]).

3. Покажите, что в любом f-кольце, если $a \wedge b \geqslant 0$, то

$$|ab - ba| \ll a^2 \vee b^2.$$

4. Покажите, что следующие три условия равносильны в произвольном f-кольце R: (i) R является подпрямым произведением конечного числа линейно упорядоченных колец; (ii) решетка $L_c(R)$ всех замкнутых L-идеалов f-кольца R удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей; (iii) $L_c(R)$ удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей [1]).

7*. Полные l-кольца

Мы уже показали (см. § XV. 10), что σ-полные l-группы общего вида с подходящими единицами можно представить как аддитивные группы непрерывных функций на некоторых стоуновых пространствах. Эти теоремы о представлении имеют аналоги и для (σ-полных) l-колец — мы приведем их без доказательства. Но сначала отметим следующий результат.

Теорема 13. *Пусть R — произвольное σ-полное (ассоциативное) l-кольцо с положительной единицей* 1, *являющейся слабой единицей в смысле порядка. Тогда R будет коммутативным f-кольцом с нулевым радикалом.*

Доказательство. Из σ-полноты следует архимедовость l-кольца R. В силу следствия предыдущего параграфа, R будет f-кольцом. Тогда по теореме 10 оно коммутативно. (Доказательство утверждения о том, что l-радикал в рассматриваемом случае будет нулевым, см. у Биркгофа и Пирса [1, § 10].)

Полученные результаты можно использовать для доказательства теорем о представлении для σ-полных l-колец, имеющих кольцевую единицу 1, являющуюся слабой единицей. Как уже говорилось, ситуация здесь аналогична случаю σ-полных l-групп и векторных решеток.

И снова результаты упрощаются, если предположить, что 1 является сильной единицей.

Теорема 14 (Стоун и фон Нейман). *Пусть R будет σ-полным l-кольцом, кольцевая единица* 1 *которого является сильной единицей в смысле порядка. Пусть, далее, X — стоуново пространство булевой алгебры компонент единицы* 1. *Тогда существует единственное замкнутое подпространство S в X такое, что R изоморфно f-кольцу $C(X, S)$ всех непрерывных действитель-*

---

[1]) Упр. 3 принадлежит Бернау (Bernau S. J. — Proc. Cambridge Philoc. Soc., 1965, 61, p. 613—616), а упр. 4 — Андерсону (Anderson F. W. — Proc. AMS, 1962, 13, p. 715—721).

нозначных функций на X, целозначных на S. Если R полно, то S будет открыто-замкнутым.

Случай, когда кольцевая единица 1 является слабой единицей, рассматривался Биркгофом и Пирсом [1, теорема 21] [1]).

8. Усредняющие операторы

Понятие (взвешенного) *среднего* ограниченной борелевской функции $f(x)$ на пространстве X стало уже классическим. Это функция $A\colon B(X) \to \mathbf{R}$, определяемая как

$$A(f) = \int\limits_X f(x)\, dm(x) \tag{20}$$

для некоторой вероятностной меры на X. Очевидно, что A *линейна* и удовлетворяет условиям

A1 $$A1 = 1;$$

A2 $$\text{если } f \geqslant 0, \text{ то } Af \geqslant 0.$$

Поскольку A линейна и ее значения действительны, а $Af = \lambda$ и $Ag = \mu$ влечет $A(fAg) = A(f\mu) = \lambda\mu = (Af)(Ag)$, то

A3 $$A(fAg) = (Af)(Ag).$$

Мы рассмотрим теперь одно далеко идущее обобщение понятия усредняющего оператора, принадлежащее Кампе де Ферье [2]).

Определение. *Усредняющим оператором* на архимедовой f-алгебре F с единицей 1 называется линейный оператор A: $F \to F$, удовлетворяющий условиям A1—A3.

Для многих основных результатов об усредняющих операторах гипотеза A2 о положительности оказывается (как мы сейчас увидим) излишней. Достаточно, чтобы F было коммутативным и ассоциативным кольцом с единицей и чтобы оператор A удовлетворял условиям A1 и A3. (Напомним, что по теореме 10 любое архимедово f-кольцо коммутативно и ассоциативно.)

Лемма 1. *Любой усредняющий оператор идемпотентен:*

$$A^2 f = Af \text{ для всех } f \in F. \tag{21}$$

Доказательство. Ввиду A1 и A3 будет $A(Af) = A(1Af) = (A1)(Af) = Af$.

Следствие. *Область определения F любого усредняющего оператора является прямой суммой его области изменения $R = AF$ и его нуль-пространства $N = 0 : A$.*

---

[1]) По поводу других недавних результатов о полных l-кольцах и l-алгебрах см. работы Хенриксена и Джонсона (Henriksen M., Johnson D. G. — Fund. Math., 1961, 50, 1961, p. 73—94) и Хенриксена, Исбела, Джонсона (Fund. Math., 1961, 50, p. 107—117).

[2]) Kampé de Feriet M. — Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 1939, 59, p. 145—154. Обсуждение моих собственных идей см. в [Symp, p. 163—172].

Это следует из элементарной линейной алгебры (над произвольным полем); кроме того, область изменения оператора A является множеством его неподвижных точек.

Лемма 2. *Область изменения любого усредняющего оператора A является в F подкольцом, содержащим* 1.

Доказательство. В силу A1 будет $1 \in R$. Далее, если $Af = f$ и $Ag = g$, то $A(fg) = A(fAg) = (Af)(Ag) = fg$, по условию и ввиду A3.

Теорема 15. *В любой f-алгебре F с 1 каждый усредняющий оператор удовлетворяет тождеству Рейнольдса*[1]

$$A(fg) = AfAg + A((f - Af)(g - Ag)). \tag{22}$$

Доказательство. Раскрывая в (22) второе слагаемое, мы вследствие коммутативности получаем:

$$A(fg) - A(fAg) - A(gAf) + A(AfAg) =$$
$$= A(fg) - AfAg - AgAf + A(A(fAg)).$$

Но $A(A(fAg)) = A(fAg)$ (по лемме 1) $= AfAg$. Следовательно, второе слагаемое в (22) равно $A(fg) - AgAf$. Так как $AgAf = AfAg$, тождество Рейнольдса доказано.

Теорема 16. *В произвольной f-алгебре F с 1 пусть e будет собственный идемпотент такой, что $Ae = e$. Тогда F является (как f-кольцо с оператором A) прямой суммой подкольца E, состоящего из всех таких f, что $ef = f$, и подкольца E', состоящего из $f \in F$ таких, что $ef = 0$.*

Доказательство. Поскольку F коммутативно,

$$E = eF = 0 : (1 - e) \text{ и } E' = (1 - e)F = 0 : e, \tag{23}$$

так что $E \cap E' = 0$, $E + E' = F$. Кроме того,

$$[ea + (1 - e)a][eb + (1 - e)b] = (ea)(eb) + (1 - e)a(1 - e)b,$$

поскольку $e(1 - e) = 0$. Значит, как кольцо F является прямой суммой E и E'. Далее, для любого $f \in F$

$$A(fe) = A(fAe) = (Af)(Ae) = (Af)e \in E$$

и, аналогично, $A(f - fe) = (Af)(1 - e) \in E'$. Следовательно, F отображает E и E' в себя.

Чтобы завершить доказательство, достаточно вспомнить, что по лемме 2 из § 6, $e \geqslant 0$ и $1 - e \geqslant 0$; поэтому $f \geqslant 0$ в F тогда и только тогда, когда $ef \geqslant 0$ и $(1 - e)f \geqslant 0$.

[1] Общую теорию «операторов Рейнолдса», определяемых условием (22), см. в работах Рота (Rota G.-C. — Proc. AMS Symp. Appl. Math., v. XVI, 1963, p. 70—83), Аткинсона (Atkinson F. V. — J. Math. Anal. Appl., 1963, 7, p. 1—30), Миллера (Miller J. B. — J. Math., 1965, **218**, S. 1—16; J. Math. Anal. Appl., 1966, **14**, p. 527—548), Стара (Starr N. — Trans. AMS, 1966, **121**, p. 90—116).

Лемма 3. *В $\mathbf{R}^n$ решетка l-идеалов является булевой алгеброй, криптоизоморфной булеву кольцу идемпотентов относительно криптоизоморфизма из* § II.12.

Мы опускаем доказательство, более уместное в главе VI, и вместо этого установим один тесно связанный с полученным результат, необходимый для наших целей.

Лемма 4. *Пусть A — усредняющий оператор на $\mathbf{R}^n$ и $Af=g$ не является «скаляром» $(\lambda, \ldots, \lambda)$. Тогда A допускает собственный инвариантный идемпотент.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — *различные* значения для $f_1, \ldots, f_n$. Тогда (сравните с интерполяцией по Лагранжу)

$$e^{(j)}=\prod_{i\neq j}(f_i-\lambda_j)\Big/\prod_{i\neq j}(\lambda_i-\lambda_j)$$

является идемпотентом, где

$$e_i^{(j)}=\begin{cases}1, & \text{если } f_i=\lambda_j,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Теорема 17. *Усредняющий оператор A самого общего вида на f-кольце $\mathbf{R}^n$ задается следующим образом. Для некоторого разбиения $\pi=\pi(A)$ множества индексов на (непересекающиеся) подмножества $S_1, \ldots, S_m$ и некоторого множества взвешивающих коэффициентов w_k^j для каждого S_j таких, что*

$$w_k^j\geqslant 0,\quad \sum_k w_k^j=1,\quad w_k^j=0 \text{ при } k\notin S_j, \tag{24}$$

имеем

$$(Af)_i=\sum_{S_{j(i)}} w_k^j f_k, \text{ где } i\in S_{j(i)}. \tag{25}$$

Другими словами, существует прямое разложение f-кольца $\mathbf{R}^n$ на A-инвариантные подкольца (L-идеалы), на каждом из которых A является *скалярным* усредняющим оператором вида (20).

Обобщения. Используя теорему Стоуна—Вейерштраса, приведенный результат можно обобщить на случай усредняющих операторов на f-кольце $C(K)$ непрерывных функций на произвольном компактном хаусдорфовом пространстве K. Мы опускаем доказательство [1]; основная идея состоит в разложении пространства K на замкнутые «T-редуцирующие подмножества» (идемпотентов обычно не хватает).

Дальнейшие важные обобщения идей, затронутых в § 8, были получены мадам Дюбрей и ее сотрудниками, а также Рота. Мы приведем только два результата.

[1] См. §§ 9—10 в работе Биркгофа в книге Algebre et théorie des nombres. — Paris, 1950, p. 143—154 и диссертацию Сопки (Sopka J. — Harvard, 1950).

Теорема Рота. *Непрерывный оператор на (М-пространстве и f-кольце) $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ тогда и только тогда является усредняющим, когда он имеет замкнутую область значений.*

Следствие. *Если $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ конечномерно, то каждый оператор Рейнольдса на нем является усредняющим.*

ПРОБЛЕМЫ [1]

147. Не является ли ассоциативность излишней в условии теоремы 12?

148. Построить теорию йордановых l-алгебр и направленных алгебр, которая включала бы спектральную теорию ограниченных симметричных операторов в действительном гильбертовом пространстве.

149. Можно ли действительное поле превратить в l-кольцо при помощи какого-нибудь упорядочения, отличного от обычного? Можно ли комплексное поле превратить в l-кольцо?

150. Сколькими способами можно на кватернионах задать структуру l-кольца? l-алгебры? направленной алгебры?

151. Решить проблему тождества слов для свободной коммутативной l-алгебры с n порождающими.

152. Та же проблема для свободного l-кольца с n порождающими.

153. Та же проблема для свободного f-кольца с n порождающими.

154. Каждое ли фактор-кольцо регулярного l-кольца регулярно?

155. Каждое ли l-кольцо, имеющее нулевой l-радикал и кольцевую единицу, являющуюся слабой единицей в смысле порядка, будет f-кольцом?

156. Какие абстрактные кольца изоморфны как кольца l-кольцам (Фукс)?

---

[1] См. примечание [1] на с. 509. — *Прим. ред. и перев.*

БИБЛИОГРАФИЯ

I. ПОСТОЯННО ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ИСТОЧНИКИ

[LT1] Birkhoff G. Lattice theory. — N. Y., 1940.

[LT2] Birkhoff G. Lattice theory (revised edition). — N. Y., 1948. [Русский перевод: Биркгоф Г. Теория структур. — М.: ИЛ, 1952.]

[Fu] Fuchs L. Partially ordered algebraic systems. — N. Y.: Pergamon Press, 1963. [Русский перевод: Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.]

[Kel] Kelley J. L. General topology. — N. Y.: Van Nostrand, 1957. [Русский перевод: Келли Дж. Л. Общая топология. — 2-е изд. — М.: Наука, 1981.]

[Neu] Neumann J. von. Continuous geometry. — N. Y.: Princeton, 1960.

[Symp] Lattice theory. — Proc. Symp. Pure Math., vol. 2, 1961.

II. ДРУГИЕ ИСТОЧНИКИ

Александров П. С. и Хопф (Hopf H.)
[1] Topology. — Berlin: Springer, 1935.

Банах (Banach S.)
[1] Théorie des opérations linéaires. — Warszawa, 1933.

Биркгоф (Birkhoff G.)
[1] On the combination of subalgebras. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1933, 29, p. 441—464.
[2] Combinatorial relations in projective geometries. — Ann. Math., 1935, **36**, p. 743—748.
[3] On the structure of abstract algebras. — Proc. Cambcidge Philos. Soc., 1935, **31**, p. 433—454.
[4] Moore—Smith convergence in general topology. — Ann. Math., 1937, **38**, p. 39—56.
[5] Generalized arithmetic. — Duke Math. J., 1942, **9**, p. 283—302.
[6] Lattice ordered groups. — Ann. Math., 1942, **43**, p. 298—331.
[7] Uniformly semi-primitive multiplicative processes. — Trans. AMS, 1962, **104**, p. 37—51.

Биркгоф (Birkhoff G.) и Маклейн (MacLane S.)
[1] A survey of modern algebra. — N. Y.: Macmillan, 1965.

Биркгоф (Birkhoff G.) и фон Нейман (Neumann J. von)
[1] On the logic of quantum mechanics. — Ann. Math., 1936, 37, p. 823—843.

Биркгоф (Birkhoff G.) и Пирс (Pierce R. S.)
[1] Lattice-ordered rings. — An. Acad. Brasil. Ci., 1956, **28**, p. 41—69.

Биркгоф (Birkhoff G.) и Фринк (Frink O.)
[1] Representations of lattices by sets. — Trans AMS, 1948, **64**, p. 299—316.

Буль (Boole G.)
[1] An investigation into the laws of thought. — London, 1854. (Reprinted by Open Court Publishing Co., Chicago, 1940.)

ван дер Варден (van der Waerden B. L.)
[1] Moderne Algebra, 2 vol. — Berlin: Springer, 1930. [Русский перевод восьмого издания первого тома и пятого издания второго тома: ван дер Варден Б. Л. Алгебра. — М.: Наука, 1979.]

Гёльдер (Hölder O.)
[1] Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass. — Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, Math. Phys. Cl., 1901, **53**, S. 1—64.
Гордон (Gordon H.)
[1] Relative uniform convergens. — Math. Ann., 1964, **153**, S. 418—427.
Данфорд (Dunford N.) и Шварц (Schwartz J.)
[1] Theory of linear operators, part I. — N. Y.: Interscience Publishers, 1958. [Русский перевод: Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. — М.: ИЛ, 1962.]
Дедекинд (Dedekind R.)
[1] Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre grössten gemeinsamen Teiler. — Festschrift Techn. Hochsch. Braunschweig, 1897.
[2] Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe. — Math. Ann., 1900, **53**, S. 371—403.
Дей (Day M. M.)
[1] Arithmetic of ordered systems. — Trans. AMS, 1945, **58**, p. 1—43.
Дилуорс (Dilworth R. P.)
[1] Non-commutative residuated lattices. — Trans. AMS, 1939, **46**, p. 426—444.
[2] Lattices with unique complements. — Trans. AMS, 1945, **57**, p. 123—154.
Дилуорс (Dilworth R. P.) и Кроули (Crawley P.)
[1] Decomposition theory for lattices without chain conditions. — Trans. AMS, 1960, **96**, p. 1—22.
Дюбрей-Жакотен (Dubreil-Jacotin M. L.), Лезье (Lesieur L.), Круазо (Croisot R.)
[1] Leçons sur la théorie des treillis. — Paris: Gauthier-Villars, 1953.
Йонссон (Jónsson B.)
[1] Representations of complemented modular lattices. — Trans. AMS, 1960, **97**, p. 64—94.
Йонссон (Jónsson B.) и Тарский (Tarski A.)
[1] Direct decompositions of finite algebraic systems. — Notre Dame Mathematical Lectures, 1947, 5.
Йосида (Yosida K.) и Какутани (Kakutani S.)
[1] Operator-theoretical treatment of Markoff's process and mean ergodic theorem. — Ann. Math., 1941, **42**, p. 188—228.
Кадисон (Kadison R. V.)
[1] A representation theorem for commutative topological algebra. — Mem. AMS, 1951, 7.
Какутани (Kakutani S.)
[1] Concrete representation of abstract (*L*)-spaces and the mean ergodic theorem. — Ann. Math., 1941, **42**, p. 523—537.
[2] Concrete representation of (*M*)-spaces. — Ann. Math., 1941, **42**, 994—1024.
Канторович Л. В.
[1] Линейные полуупорядоченные пространства. — Матем. сб., 1937, **2**, с. 121—168.
Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.
[1] Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1950.
Капланский (Kaplansky I.)
[1] Any orthocomplemented complete modular lattice is a continuous geometry. — Ann. Math., 1955, **61**, p. 524—541.
Каратеодори (Carathéodory C.)
[1] Mass und Integral und ihre Algebraisierung. — Basel: Birkhäuser, 1956.
[2] Measure and Integration. — London: Chelsea, 1963.
Келли (Kelley J. L.)
[1] Convergence in topology. — Duke Math. J., 1950, **17**, p. 277—283.

Келли (Kelley J. L.), Намиока (Namioka I.) и др.
[1] Linear topological spaces. — N. Y.: Van Nostrand, 1963.
Клиффорд (Clifford A. H.) и Престон (Preston G. B.)
[1] The algebraic theory of semigroups, 2 vols. — Providence: American Mathematical Society, 1964. [Русский перевод: Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп, т. 1—2.—М. Мир, 1972.]
Кон (Cohn P. M.)
[1] Universal algebra. — London: Harper and Row, 1965. [Русский перевод: Кон П. Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968.]
Крейн М. Г. и Рутман М. А.
[1] Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха. — УМН, 1948, 3, с. 3—95.
Лезье (Lesieur L.)
[1] Sur les demigroupes réticulés satisfaisant à une condition de chaine. — Bull. Soc. Math. France, 1955, 83, p. 161—193.
Либер (Lieber L. R.)
[1] Lattice theory. — N. Y.: Galois Institute of Mathematics and Art, 1963.
Лумис (Loomis L.)
[1] On the representation of σ-complete Boolean algebras. — Bull. AMS, 1947, 53, p. 757—760.
[2] The lattice theoretic background of the dimension theory. — Mem. AMS, 1955, 18.
Маеда (Maeda F.)
[1] Kontinuierliche Geometrien. — Berlin: Springer, 1958.
[2] Matroid lattices of infinite length. — J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A, 1952, 15, p. 177—182.
Маклейн (MacLane S.)
[1] A lattice formulation for transcendence degrees and p-bases. — Duke Math. J., 1938, 4, p. 455—468.
Макнил (MacNeille H.)
[1] Partially ordered sets. — Trans. AMS, 1937, 42, p. 416—460.
Менгер (Menger K.), Альт (Alt F.) и Шрейбер (Schreiber O.)
[1] New foundations of projective and affine geometry. — Ann. Math., 1936, 37, p. 456—482.
Мур (Moore E. H.)
[1] Introduction to a form of general analysis. — AMS Colloq. Publ., 1910, 2.
Намиока (Namioka I.)
[1] Partially ordered linear topological spaces. — Mem. AMS, 1957, 24.
фон Нейман (Neumann J. von)
[1] Continuous geometries and Examples of continuous geometries. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1936, 22, p. 707—713.
Ньюмен (Newman M. H. A.)
[1] A characterization of Boolean lattices and rings. — J. London Math. Soc., 1941, 16, p. 256—272.
Огасавара (Ogasawara T.)
[1] Theory of vector lattices, 1. — J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A, 1942, 12, p. 37—100.
[2] Theory of vector lattices, 2. — J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A, 1944, 13, p. 41—161.
Оре (Ore O.)
[1] On the foundations of abstract algebra, 1. — Ann. Math., 1935, 36, p. 406—437.
[2] On the foundations of abstract algebra, 2. — Ann. Math., 1936, 37, p. 265—292.
Пирс (Peirce C. S.)
[1] On the algebra of logic. — Amer. J. Math., 1880, 3, p. 15—57.

Р и г е р (Rieger L.)
[1] On the free ℵ-complete Boolean algebras. — Fund. Math., 1951, **38**, p. 35—52.
Р и с (Riesz F.)
[1] Sur la théorie générale des opérations linéaires. — Ann. Math., 1940, **41**, p. 174—206.
Р о т а (Rota G.-C.)
[1] On the foundations of combinatorial theory, 1. Theory of Möbius functions. — Z. Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1964, **2**, S. 340—368.
С а с (Szász G.)
[1] Introduction to lattice theory — Budapest: Akademiai Kiado, 1963.
С е р т е н (Certaine J.)
[1] Lattice-ordered groupoids and some related problems. Harvard Doctoral Thesis, 1943.
С и к о р с к и й (Sikorski R.)
[1] Boolean Algebras. — Berlin: Springer, 1964. [Русский перевод: С и к о р с к и й Р. Булевы алгебры. — М.: Мир, 1969.]
С к о л е м (Skolem Th.)
[1] Om konstitutionen ov den identiske kalkuls grupper. — 3 Scand. Math. Congr., 1913, p. 149—163.
С к о р н я к о в Л. А.
[1] Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца. — М.: Физматгиз, 1961.
С т о у н (Stone M. H.)
[1] The theory of representations for Boolean algebras. — Trans. AMS, 1936, **40**, p. 37—111.
[2] Applications of the theory of Boolean rings to general topology. — Trans. AMS, 1937, **41**, p. 375—481.
[3] Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics. — Čas. Mat., Fyz., 1937, **67**, p. 1—25.
[4] A general theory of spectra. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1941, **27**, p. 83—87.
С у д з у к и (Suzuki M.)
[1] Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups. — Berlin: Springer, 1956. [Русский перевод: С у д з у к и М. Строение группы и строение структуры ее подгрупп. — М.: ИЛ, 1960.]
Т а р с к и й (Tarski A.)
[1] Sur les classes closes par rapport à certaines opérations élémentaires. — Fund. Math., 1929, **16**, p. 181—305.
[2] Zur Grundlagung der Booleschen Algebra. — Fund. Math., 1935, **24**, S. 177—198.
[3] Grundzüge des Systemencalkulus. — Fund. Math., 1936, **25**, S. 503—526; 1936, **25**, S. 283—301.
[4] Cardinal algebras. — Oxford Univ. Press, 1949.
У а й т х е д (Whitehead A. N.) и Р а с с е л (Russel B.)
[1] Principia Mathematica, 3 vols. — Cambridge Univ. Press, 1925, 1927.
У и т м е н (Whitman P.)
[1] Free lattices, 1. — Ann. Math., 1941, **42**, p. 325—329.
[2] Free lattices, 2. — Ann. Math., 1942, **43**, p. 104—115.
У и т н и (Whitney H.)
[1] The abstract properties of linear dependence. — Amer. J. Math., 1935, **57**, p. 507—533.
У о р д (Ward M.) и Д и л у о р с (Dilworth R. P.)
[1] Residuated lattices. — Trans. AMS, 1939, **45**, p. 335—354.
Ф р е й д е н т а л ь (Freudenthal H.)
[1] Teilweise geordneten Moduln. — Proc. Acad. Wet. Amsterdam, 1936, **39**, p. 641—651.
Ф р и н к (Frink O.)
[1] Topology in lattices. — Trans. AMS, 1942, **51**, p. 569—582.

[2] Complemented modular lattices and projective spaces of infinite dimension. — Trans. AMS, 1946, **60**, p. 452—467.

Халмош (Halmos P.)

[1] Lectures on Boolean algebras. — N. Y.: Van Nostrand, 1963.

Хан (Hahn H.)

[1] Über din nichtarchimedische Grössensysteme. — S.-B. Akad. Wiss. Wien IIa, 1907, **116**, S. 601—655.

Хантингтон (Huntington E. V.)

[1] Sets of independent postulates for the algebra of logic. — Trans. AMS, 1904, **5**, p. 288—309.

Хасимото (Hashimoto J.)

[1] Ideal theory for lattices. — Math. Japonica, 1952, **2**, p. 149—186.

Хаусдорф (Hausdorff F.)

[1] Grundzüge der Mengenlehre. — Leipzig, 1927. [Русский перевод: Хаусдорф Ф. Теория множеств. — М.: ОНТИ, 1937.]

Хейлс (Hales A.)

[1] On the non-existence of free complete Boolean algebras. — Fund. Math., 1964, **54**, p. 45—66.

Хенриксон (Henrikson M.) и Исбел (Isbell J. R.)

[1] Lattice-ordered rings and function rings. — Pacif. J. Math., 1962, **12**, p. 533—565.

Холанд (Holland S. S., Jr.)

[1] A Radon-Nikodym theorem for dimension lattices. — Trans. AMS, 1963, **108**, p. 66—87.

Шредер (Schröder E.)

[1] Algebra der Logik, 3 vols. — Leipzig, 1890—1895.

Эверет (Everett C. J.) и Улам (Ulam S.)

[1] On ordered groups. — Trans. AMS, 1945, **57**, p. 208—216.

III. РАБОТЫ, ДОБАВЛЕННЫЕ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

Акилов Г. П., **Кутателадзе** С. С.

[1] Упорядоченные векторные пространства. — Новосибирск: Наука, 1978.

Артамонов В. А.

[1] Решетки многообразий линейных алгебр. — УМН, 1978, **33**, № 2, с. 135—167.

Аршинов М. Н., Садовский Л. Е.

[1] Некоторые теоретико-структурные свойства групп и полугрупп. — УМН, 1972, 27, № 6, с. 139—180.

Беран (Beran L.)

[1] Grupy a svāzy. — Praha: SNTL, 1974.

Бигар (Bigard A.),純 Кеймель (Keimel K.), Вольфенштейн (Wolfenstein S.)

[1] Groupes et anneaux réticulés. — Berlin: Springer, 1977.

Блис (Blyth T. S.) и Яновиц (Janowitz M. F.)

[1] Residuation theory. — Oxford: Pergamon Press, 1972.

Бухвалов А. В., Векслер А. И., Гейлер В. А.

[1] Нормированные решетки. — В кн.: Итоги науки. Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1980, с. 125—184.

Векслер А. И.

[1] Реализационные частичные умножения в линейных структурах. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1967, **31**, № 6, с. 1203—1228.

Виноградов А. А.

[1] Упорядоченные алгебраические системы. — В кн.: Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М.: ВИНИТИ, 1967, с. 83—132.

[2] Упорядоченные алгебраические системы. — В кн.: Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1966, М.: ВИНИТИ, 1968, с. 91—108.

Владимиров Д. А.
[1] Булевы алгебры. — М.: Наука, 1969.
Вулих Б. З.
[1] Введение в теорию полуупорядоченных пространств. — М.: Физматгиз, 1961.
Гермес (Hermes. H.)
[1] Einführung in die Verbandstheorie. — Berlin: Springer, 1967.
Гирц (Gierz G.), Хофман (Hofmann K. H.), Киймель (Keimel K.), Лоусон (Lawson J. D.), Мислав (Mislove M.), Скотт (Scott D. S.)
[1] A compendium of continuous lattices. — Berlin: Springer, 1980.
Глухов М. М., Стеллецкий И. В., Фофанова Т. С.
[1] Теория структур. — В кн.: Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1968, М.: ВИНИТИ, 1970, с. 101—156.
Гретцер (Grätzer G.)
[1] Lattice theory. First concepts and distributive lattices. — San Francisco: Freeman and Co., 1971.
[2] General lattice theory. — Basel: Birkhäuser Verlag, 1978. [Русский перевод: Гретцер Дж. Общая теория решеток. — М.: Мир, 1982.]
Двингер (Dwinger Ph.)
[1] Introduction to Boolean algebras. — Würzburg: Physica-Verlag, 1971.
Доннелан (Donnellan Th.)
[1] Lattice theory. — Oxford: Pergamon Press, 1968.
Зайцева М. И.
[1] О совокупности упорядочений абелевой группы. — УМН, 1953, 8, с. 135—137.
Казанова (Casanova G.)
[1] L'algèbre de Boole. — Paris: Press. univ. France, 1967.
Кальмбах (Kalmbach G.)
[1] Orthomodular lattices. — Berlin: Springer, 1983.
Канторович Л. В., Акилов Г. П.
[1] Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977.
Карвальо (Carvallo M.)
[1] Monographie des treillis et algébre de Boole. — Paris: Gauthier-Villars, 1966.
Кокорин А. И.
[1] Способы структурного упорядочения свободной абелевой группы с конечным числом образующих. — Матем. зап. Уральск. ун-та, 1963, 4, с. 45—48.
Кокорин А. И., Копытов В. М.
[1] Линейно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1972.
Конрад (Conrad P.)
[1] Introduction à la théorie des groupes réticulés. — Paris, 1967.
Копытов В. М.
[1] Упорядоченные группы. — Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия. М.: ВИНИТИ, 1981.
Красносельский М. А.
[1] Положительные решения операторных уравнений. — М.: Физматгиз, 1962.
Кроули (Crawley P.) и Дилуорс (Dilworth R. P.)
[1] Algebraic theory of lattices. — Prentice-Hall: Englewood Cliffs, 1973.
Курош А. Г.
[1] Лекции по общей алгебре. — М.: Наука, 1973.
Маеда (Maeda F.) и Маеда (Maeda S.)
[1] Theory of symmetric lattices. — Berlin: Springer, 1970.
Мальцев А. И.
[1] Об упорядоченных группах. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1949, 13, с. 473—482.

Марков В. А., Михалев А. В., Скорняков Л. А., Туганбаев А. А.
[1] Модули. — В кн.: Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия. т. 19, М.: ВИНИТИ, 1981, с. 31—134.
[2] Кольца эндоморфизмов модулей и структуры подмодулей. — В кн.: Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия. т. 21, М.: ВИНИТИ, 1983, с. 183—254.
Невё (Neveu J.)
[1] Bases mathématiques du calcul des probabilités. — Paris: Masson et Cie, 1964. [Русский перевод: Невё Ж. Математические основы теории вероятностей. — М.: Мир, 1969.]
Резерфорд (Rutherford D. E.)
[1] Introduction to lattice theory. — Edinburgh: Oliver and Boyd, 1965.
Риги (Righi R.)
[1] Algebra di Boole ed applicazioni, vol. 1. — Roma: Siderea, 1967.
Салий В. Н.
[1] Лекции по теории решеток. — Саратов: изд-во Саратовск. ун-та, 1970.
[2] Теория решеток. — «Очерки развития математики в СССР». Киев: Наукова Думка, 1983, с. 100—105.
Скорняков Л. А.
[1] Теория структур. — В кн.: Итоги науки. Алгебра. 1964, М.: ВИНИТИ, 1966.
[2] Элементы теории структур. — М.: Наука, 1982.
Скорняков Л. А., Михалев А. В.
[1] Модули.— В кн.: Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия. т. 14, М.: ВИНИТИ, 1976, с. 57—190.
Тенденции в теории решеток. Trends in lattice theory. Ed. Abbott J. C. — N. Y.: Van Nostrand, 1970.
Теория решеток. — Братислава, 1983 (серия обзоров под редакцией Л. А. Скорнякова и М. Колибиара).
Упорядоченные множества и решетки, вып. 3. — Саратов: изд-во Саратовск. ун-та, 1975 (серия обзоров под редакцией Л. А. Скорнякова и В. Н. Салия).
Упорядоченные множества и решетки, вып. 7. — Саратов: изд-во Саратовск. ун-та, 1983 (серия обзоров под редакцией Л. А. Скорнякова и В. Н. Салия).
Шмидт (Schmidt E. T.)
[1] Kongruenzrelationen algebraischer Strukturen. — Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1969.
[2] A survey on congruence lattice representations. — Leipzig: Teubner, 1982.

ДОБАВЛЕНИЕ

В. Н. Салий

ПРОБЛЕМЫ БИРКГОФА

Во втором издании своей «Теории решеток» (1948 г., русск. перев., 1952 г., далее сокращенно **LT2**) Гаррет Биркгоф выделил свыше ста нерешенных к тому времени задач, непосредственно связанных с излагавшимся в книге материалом. Собственно проблемы имеют номера от 1 до 111 (при этом номер 9 повторяется дважды, а проблемы 14 и 62 по содержанию пересказывают соответственно вторую и часть пятьдесят пятой). Кроме того, в некоторых упражнениях были поставлены вопросы, для решения которых потребовались отнюдь не тривиальные усилия.

Задачи, предложенные Биркгофом, не были равноценными ни по сложности, ни по значимости. С одной стороны, в их числе мы видим, например, первую проблему Гильберта (12), проблемы Суслина (19) и Серпинского (17), целый ряд оказавшихся действительно трудными и важными теоретико-решеточных проблем (27, 28, 48, 50, 55, 59, 70, 73, 74, 95), вопросы, связанные с тонкими свойствами групп, выраженными в терминах решеток (37, 38, 40, 41, 43, 101), а с другой — несложные упражнения (18, 32, 33, 65, 103) или сомнения, разрешаемые уже при самых непосредственных наблюдениях (24, первая часть в 82, 87, 93). В целом же это были содержательные исследовательские задачи, продиктованные внутренней логикой развития теории решеток и ее прикладных аспектов. Именно поэтому они привлекли такое внимание алгебраистов, и в течение почти десяти лет работы, связанные с проблемами Биркгофа, вызывали широкий интерес.

В третьем издании «Теории решеток» (1967 г., настоящий русск. перев., далее сокращенно **LT3**) приводится уже 156 проблем, но автор ничего не говорит о судьбе проблем из предыдущего издания. Некоторые из оставшихся нерешенными задач получили здесь новые номера и часто новую интерпретацию, а что касается решенных, то во многих случаях соответствующие предложения приведены в качестве упражнений — без указания на связь с проблемами из **LT2** (в русском переводе сделаны необходимые примечания).

Учитывая ту роль, которую сыграли проблемы Биркгофа в развитии исследований по теории решеток, и то, что до сих пор еще время от времени предлагаются решения той или иной из них, представляется полезным воспроизвести полный список проблем из **LT2** с указанием их теперешнего статуса.

Читатель, вероятно, заметит, что приводимые формулировки не вполне соответствуют первоначальному авторскому тексту. Это вызвано разными причинами: устранены неточности, не относящиеся к сути дела и исправленные авторами решений, «темные места» в постановках задач, разъясненные впоследствии самим Биркгофом в его обзоре 1950 г. или в рефератах в «Mathematical Reviews», отклонения от современной терминологии, конкретные привязки к тексту книги.

В комментарии к каждой решенной проблеме дается краткий ответ на поставленный в ней вопрос и указывается первая публикация решения. В списке литературы, кроме библиографического описания работ, сообщаются также номера их рефератов в РЖ «Математика» и в «Mathematical Reviews».

Я благодарен Л. А. Скорнякову за ценные указания, а также Е. Т. Шмидту и А. Хуну за интересное обсуждение проблем из **LT3**.

1. Найти полную и независимую систему аксиом для тернарного отношения «между» в упорядоченных множествах: $(xyz)\,\beta$ тогда и только тогда, когда $x \leqslant y \leqslant z$ или $x \geqslant y \geqslant z$.

— Такую систему аксиом указал Альтвег [1].

2. Существует ли «естественное» линейное упорядочение кольца всех действительных функций от одной переменной? Что можно сказать в этом смысле о кольце всех преобразований множества целых чисел? множества рациональных чисел?

— Формулировка этой проблемы не вполне ясна (даже в приводимой здесь авторской редакции 1950 г. (Биркгоф [1])). О линейно упорядочиваемых кольцах см., например, в книге Фукса [1].

3. Охарактеризовать комбинаторно все упорядоченные множества, которые соответствуют полиэдральным разбиениям n-сферы.

— Проблема 25 в **LT3**.

4. Получить эффективный тест для распознавания ориентируемости конфигураций.

— Проблема 26 в **LT3**.

5. Определить все симметричные конфигурации, имеющие малую длину и небольшое число элементов.

— Проблема 19 в **LT3**.

6. Какие конечные упорядоченные множества с единицей, удовлетворяющие условию Жордана — Дедекинда, с точностью до изоморфизма определяются характеристическим многочленом единицы? Множеством всех характеристических многочленов?

— Проблема 27 в **LT3**. Ответ на первый вопрос дал Сокол [1]: высота у-множества не должна превышать 1. Ответ на второй вопрос для у-множеств длины 2 содержится в работе Фрухта [1].

7. Что получится, если в стандартной системе аксиом для решеток идемпотентность операций заменить тождеством $x \wedge$

$\wedge x = x \vee x$, а законы поглощения — тождеством $x \wedge (x \vee \vee y) = x \vee (x \wedge y)$?

— Такие алгебры изучали Кимура [2], Матусима [1] и Мартич [1].

8. Перечислить все конечные решетки, которые однозначно (т. е. с точностью до изоморфизма) определяются своей диаграммой, рассматриваемой как (неориентированный) граф?

— Проблема 5 в **LT3**. Для модулярных решеток ее решил Якубик [1].

9. Для данного n каким будет наименьшее целое $\psi(n)$ такое, что любая решетка порядка $\geqslant \psi(n)$ содержит n-элементную подрешетку?

— Проблема 1 в **LT3**. Хейвес и Уорд [1] показали, что $\psi(n)$ существует для любого $n > 0$ и что $\psi(n) \leqslant n^{3^n}$ для $n > 1$. Некоторых аспектов этой проблемы касался Курцио [2].

9. Будут ли удовлетворять бесконечному дистрибутивному закону $x \wedge \bigvee x_i = \bigvee (x \wedge x_i)$ конгруэнции произвольной «алгебры без центра» в смысле Йонссона и Тарского?

— В **LT3** этот вопрос (проблема 38) отнесен уже к частному случаю коммутативных моноидов, в которых $x + y = 0$ влечет $x = y = 0$, и в примечании указано, что Йонссон дал отрицательный ответ.

10. В декартовом произведении $X \times Y$ двух множеств, снабженных бинарным отношением ρ, пусть $(x, y)\ \rho\ (x^*, y^*)$ означает, что $x \rho x^*$ и $y \rho y^*$. Для таких операций $x \circ x^*$, определяемых на X и Y при помощи ρ, в $X \times Y$ будет $(x, y) \circ (x^*, y^*) = (x \circ x^*, y \circ y^*)$?

— Проблема 55 в **LT3**.

11. Верно ли, что любые два прямых разложения произвольной решетки имеют общее уплотнение? Справедливо ли это для упорядоченных множеств с O, но без I?

— Как показал Хасимото [1], любые два прямых разложения у-множества, неразложимого в кардинальную сумму, имеют общее уплотнение. Отсюда следует утвердительный ответ на оба вопроса. См. также Хьюз [1].

12. Вполне упорядочить при помощи специальной конструкции какое-нибудь несчетное множество, например множество действительных чисел.

— Часть первой проблемы Гильберта. В теории множеств Цермело — Френкеля не существует эффективного полного упорядочения континуума (Леви [1]).

13. Разработать каноническую форму для представления ординальных произведений.

— Для случая конечных типов проблему решил Чэн [2].

14. Переформулировка проблемы 2.

15. Не используя аксиому выбора, доказать, что каждая цепь является нормальным хаусдорфовым пространством, или показать, что такое доказательство невозможно.

— Проблема 83 в **LT3**.

16. Стандартные доказательства равносильности аксиомы выбора, теоремы Цермело, леммы Куратовского — Цорна и принципа Хаусдорфа рассмотреть с точки зрения теории типов Уайтхеда и Рассела.

17. Существует ли несчетное недостижимое кардинальное число? (Серпинский.)

— Проблема 71 в **LT3**. Существование недостижимого кардинала недоказуемо в теории множеств Цермело — Френкеля (Йех [2]).

18. Верно ли, что любая собственная подрешетка произвольной решетки может быть расширена до максимальной собственной подрешетки? (Ответ может оказаться положительным для дистрибутивных решеток.)

— Нет, не верно даже для дистрибутивных решеток. Для булевых решеток ответ положительный (Такеути [1]).

19. Решить одну из форм проблемы Суслина — или в общем случае или для случая линейных однородных континуумов.

— Проблема Суслина неразрешима в теории множеств Цермело — Френкеля (Йех [1], Соловей и Тенненбаум [1]).

20. Для подмножества X непустого множества I и направленного множества $\{x_\alpha\}$, сходящегося к $a \in I$, пусть $X\rho\ (\{x_\alpha\} \to a)$ означает, что если X содержит каждое достаточно далекое x_α, то X содержит a. Показать, что полярность, связанная с отношением ρ, дает обычное соответствие между замкнутыми подмножествами и сходимостью в топологических пространствах.

— Арнольд [1] показал, что в определении отношения ρ «каждое достаточно далакое x_α» необходимо заменить на «некоторое конфинальное подмножество из $\{x_\alpha\}$» и тогда получающаяся полярность действительно обладает требуемым свойством. См. также Зоннер [1].

21. Найти необходимое и достаточное условия для того, чтобы элемент полной решетки был изолированным: а) в порядковой топологии, б) в интервальной топологии.

— Часть б) решена Нортемом [1], часть а) — Гуань Чжао-Чжи [1], полное решение получил С. А. Коган [1].

22. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы компактное хаусдорфово пространство было гомеоморфно подходящей полной решетке в ее интервальной топологии.

23. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы решетка в своей интервальной топологии была хаусдорфовым пространством, для того, чтобы она была в своей порядковой топологии нормальным пространством.

— Для случая интервальной топологии решение нашли С. А. Коган [1], Бэр [1] и Уорд [1]. Для порядковой топологии — это проблема 84 в **LT3**.

24. В каких решетках каждый замкнутый идеал является пересечением главных идеалов?

— В любом у-множестве идеал замкнут тогда и только тогда, когда он является пересечением главных идеалов. Очевидность этого факта отметил сам автор (Биркгоф [1]).

25. Найти простые достаточные условия эквивалентности звездной и интервальной топологий в решетке. (Эквивалентны ли они в метрических решетках? Не будут ли они эквивалентными всегда?)

— См. Уорд [1].

26. Рассмотреть порядковую, интервальную и звездную топологии для частного случая решеток $\wedge$-ширины 2, решеток конечной $\wedge$-ширины. Намного ли это упростит формулировки и доказательства?

— В решетках конечной $\wedge$-ширины порядковая и интервальная топологии совпадают (Найто [1]).

27. а) Удовлетворяет ли (модулярная) решетка всех подгрупп коммутативной группы какому-нибудь нетривиальному решеточному тождеству с четырьмя переменными? б) с $n > 4$ переменными? в) Те же вопросы для (модулярной) решетки нормальных подгрупп произвольной группы.

— Как показал Йонссон [2], в решетке нормальных подгрупп любой группы выполняется дезаргово тождество (от шести переменных). См. также Йонссон [3].

28. Решить проблему тождества для свободной модулярной решетки с четырьмя порождающими, с n порождающими.

— Алгоритмическую неразрешимость проблемы тождества слов для свободной модулярной решетки $FM(4)$ установил Херрман [1], а для $FM(5)$ — Фриз [1].

29. Описать свободную модулярную решетку, порожденную у-множеством $\mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{2}$.

— Это описание получили Такеути [2] и Трол и Данкен [1].

30. Известно, что σ-полная метрическая решетка тогда и только тогда метрически полна, когда в ней из $x_n \uparrow x$ следует $v(x_n) \uparrow v(x)$ — и двойственно, и что в метрически полной метрической решетке метрическая и звездная сходимости равносильны. Получить аналоги этих фактов для произвольных метрических решеток. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы метрическая решетка была топологической решеткой (относительно порядковой сходимости).

31. Существует ли квазигруппа с неперестановочными конгруэнциями? Может ли такая квазигруппа быть лупой или быть конечной

— Да, существует. Конгруэнции на конечных квазигруппах перестановочны (Тревизан [2]). Конгруэнции на любой эквазигруппе перестановочны (А. И. Мальцев [2]).

32. Верно ли, что конгруэнция θ на лупе такая, что $ux \equiv x\ (\theta)$ влечет $u \equiv 1\ (\theta)$, перестановочна со всеми конгруэнциями?

— Да, верно (Тревизан [2]).

33. Пусть в алгебре A с перестановочными конгруэнциями элемент e образует одноэлементную подалгебру. Может ли A иметь две разные конгруэнции с совпадающими e-классами?

— Да, может (А. И. Мальцев [2], Якубик [2]).

34. Для всех ли конечных алгебр, имеющих одноэлементную подалгебру, справедлива теорема об однозначности разложения на множители?

— Нет, не для всех (Томпсон [1]).

35. Описать нейтральные элементы решетки подгрупп конечной группы.

— Эту проблему решили независимо Судзуки [1] и Цаппа [1].

36. Описать группы с полумодулярной решеткой подгрупп, с дуально полумодулярной решеткой подгрупп.

— Для конечных групп эти задачи решили соответственно Сато [1] и Ито [1].

37. Описать группы, решетка подгрупп у которых самодвойственна.

— Проблема 59а в **LT3**.

38. Описать группы, у которых решетка подгрупп обладает дополнениями.

— Проблема 59б в **LT3**.

39. Определить наибольшее целое k такое, чтобы у каждой группы с порядком, являющимся произведением k (не обязательно различных) простых чисел, решетка всех подгрупп имела длину k.

— Паркер [1] показал, что таким наибольшим целым числом является 4.

40. Если группы G и H имеют изоморфные решетки подгрупп и группа G разрешима, то будет ли разрешимой H?

— Да, будет (Б. В. Яковлев [1]).

41. а) Показать, что если решетка $L(G)$ всех подгрупп группы G изоморфна решетке всех подгрупп простой группы H, то центр группы G одноэлементен. Установить, что порядок группы G не превышает числа автоморфизмов решетки $L(G)$. б) Будет ли группа G изоморфной группе H?

— Если группа H не циклическая, то порядок группы G не превышает числа автоморфизмов решетки $L(G)$. (Упр. 14 к § VII.12 в **LT3**.)

42. Верно ли, что группа с точностью до изоморфизма определяется полной решеткой своих смежных классов по всем подгруппам?

— Отрицательный ответ на этот вопрос А. Г. Куроша дал Курцио [1]. Положительный ответ для случая смешанных абелевых групп можно найти у Н. В. Лойко [1].

43. Существует ли бесконечная группа, решетка подгрупп которой имела бы конечную длину? (Капланский.)

— Существует бесконечная группа, решетка подгрупп которой имеет длину 2 (А. Ю. Ольшанский [1]).

44. В произвольной решетке рассматриваются следующие условия: (α) отношение модулярности для пар элементов симметрично; (γ) если (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) — произвольная максимальная цепь в прямом произведении $[x \wedge y, x] \times [x \wedge \wedge y, y]$, то $x_1 \vee y_1$, $x_2 \vee y_2$, ..., $x_n \vee y_n$ — максимальная цепь в $[x \wedge y, x \vee y]$. Вытекает ли (α) из (γ)? Что можно сказать, если имеет место одно из условий обрыва цепей? Не следует ли из (γ) и двойственного ему условия модулярность?

— Условия (α) и (γ) независимы даже в полных решетках. В решетке с условием обрыва возрастающих цепей из (γ) следует (α), в решетке с условием обрыва убывающих цепей из (α) следует (γ) (Круазо [1]).

45. Можно ли теорему Оре о прямых объединениях в модулярных решетках конечной длины подходящей модификацией распространить на симметричные элементы полумодулярных решеток?

— Проблема 58 в **LT3**.

46. Прямое произведение, $\vee$-гомоморфный образ и выпуклая подрешетка для полумодулярных решеток конечной длины являются полумодулярными решетками. Останутся ли справедливыми эти утверждения, если полумодулярность для решеток бесконечной длины определить, исходя из условия (α); из условия (γ)?

— Оба условия (α) и (γ) сохраняются при переходе к выпуклым подрешеткам; (α) сохраняется при образовании прямых произведений; для (γ) это справедливо лишь при условии обрыва убывающих цепей. Ни (α), ни (γ) не сохраняются при $\vee$-гомоморфизмах ни в каких интересных классах решеток (Круазо [4]).

47. Для решеток бесконечной длины полумодулярность может быть введена условием Маклейна

$$y \wedge z < x < z < y \vee x \Rightarrow (\exists\, t)\,(y \wedge z < t \leqslant y \ \&\ (x \vee t) \wedge z = x).$$

Установить связь этого условия со стандартным определением полумодулярности и условиями (α) и (γ).

— Выяснению этих связей посвящена работа Круазо [2].

48. Всякая ли конечная решетка вложима в решетку разбиений конечного множества?

— Положительный ответ на этот вопрос Уитмена дали Пудлак и Тума [1].

49. Каждую ли решетку конечной длины можно вложить в геометрическую решетку конечной длины? В геометрическую решетку той же длины?

— Проблема 17 в **LT3**. Каждая конечная решетка вложима в конечную геометрическую решетку (этот результат Дилуорса опубликован в книге Кроули и Дилуорса [1]).

50. Какие полные решетки изоморфны решетке всех конгруэнций подходящей абстрактной алгебры?

— Компактно порожденные решетки и только они (Гретцер и Шмидт [5]).

51. Перечислить все конечные геометрии на плоскости и определить, для каких n существуют проективные плоскости, имеющие $n^2 + n + 1$ точек.

— Проблемы 21 и 22 в **LT3**. Если свободная от квадратов часть числа n делится на простое число вида $4k + 3$ и если $n \equiv 1$ или 2 (mod 4), то не существует проективной плоскости с $n^2 + n + 1$ точками (Брак и Райзер [1]).

52. Какие конечные проективные геометрии на плоскости самодвойственны? Какие имеют группу автоморфизмов, транзитивную 1) на точках; 2) на прямых? Влечет ли какое-нибудь из этих условий теорему Дезарга?

— См. проблемы 22 и 23 в **LT3**. Остром и Вагнер [1] показали, что конечная проективная плоскость с дважды транзитивной группой автоморфизмов — дезаргова.

53. Для заданных m, n какие (m, n)-системы допускают группу автоморфизмов, транзитивную на точках?

— Проблема 20 в **LT3**.

54. Исследовать топологические полумодулярные решетки с относительными дополнениями, в частности, в случае, когда они являются локально компактными топологическими решетками конечной длины.

55. Какие модулярные решетки вложимы в модулярные решетки с дополнениями? Если для данной решетки такое вложение возможно, то нельзя ли ее вложить в модулярную решетку с дополнениями, имеющую такую же, как у нее, длину?

— Проблема 18 в **LT3**.

56. Какие недезарговы проективные геометрии на плоскости допускают ортодополнения?

— См. проблему 22 в **LT3**.

57. Всегда ли пополнение при помощи сечений модулярной решетки с дополнениями будет модулярной решеткой?

— Нет, не всегда (В. В. Пашенков [1]).

58. Обязательно ли полная модулярная решетка с дополнениями является топологической решеткой (относительно порядковой сходимости)? (Горн.)

— Проблема 101 в **LT3**. Полная модулярная решетка с ортодополнениями является непрерывной геометрией (Капланский [1]) и, следовательно, топологической решеткой относительно порядковой сходимости.

59. Транзитивна ли перспективность во всякой модулярной решетке с ортодополнениями?

— Проблема 102 в **LT3**. Перспективность транзитивна в любой полной модулярной решетке с ортодополнениями (Капланский [1]).

60. Охарактеризовать абстрактно группу изометрических преобразований непрерывной геометрии как группу и как метрическую группу. Будет ли она связной, если основное поле действительно?

61. Пусть $L(R)$ обозначает решетку левых идеалов регулярного кольца R. Возможно ли синтетическое определение решетки $L(R \times S)$ в терминах решеток $L(R)$ и $L(S)$? (фон Нейман.)

62. Переформулировка первой части проблемы 55.

63. Если непрерывная геометрия $CG(\mathbf{R})$ представлена как подпрямое произведение атомно порожденных проективных геометрий, то все ли эти сомножители будут проективными геометриями над $\mathbf{R}$? (Фринк.)

— Проблема 104 в **LT3**.

64. В дистрибутивных решетках с O и I тернарная самодвойственная операция медианы $[xyz] = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee \vee (z \wedge x)$ абстрактно характеризуется тождествами $[OxI] = x$, $[xyx] = x$, $[xyz] = [yxz] = [yzx]$ (симметрия), $[[xyz]\ uv] = [[xuv]\ y\ [zyv]]$. Нельзя ли подходящей перестановкой переменных в последнем тождестве добиться исключения хотя бы одного из тождеств симметрии?

— Василиу [1] показал, что если последнее тождество заменить тождеством $[x\ [yzu]\ v] = [[vxu]\ z\ [vxy]]$, то тождества симметрии становятся излишними. А. И. Черемисин [1] заметил, что тождество $[yxz] = [yzx]$ выводимо уже в исходной системе аксиом.

65. Независима ли следующая система аксиом для дистрибутивной решетки с единицей I: I. $x \wedge x = x$. II. $x \vee I = I$. III. $I \vee x = I$. IV. $x \wedge I = x$. V. $I \wedge x = x$. VI. $x \wedge (y \vee \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. VII. $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$?

— Да, независима (Вуенака [1], Круазо [3]). В разные годы решение этой проблемы было опубликовано десятью авторами.

66. На множестве L с выделенным элементом O и тернарным отношением (xyz) пусть $a < b$ для $a \neq b$ означает, что (Oab). Введенное соотношение тогда и только тогда определяет на L структуру модулярной решетки с нулем O, когда 1) $(xyz) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (zyx)$, 2) (xyz) & $(xzy) \Rightarrow y = z$, 3) (xyz) & $(xty) \Rightarrow (tyz)$, 4) (xyz) & $(xty) \Rightarrow (xtz)$, 5) (Oxz) & (Oyz) & $(xty) \Rightarrow (Otz)$, 6) $(\forall x, y \in \in L)$ $(\exists u, v)$ $((uxv)$ & (uyv) & (xuy) & (xvy) & $(Ouv))$. При этом исходное отношение превращается в решеточное отношение «между»: $(xyz) \Leftrightarrow (x \wedge y) \vee (y \wedge z) = y = (x \vee y) \wedge (y \vee z)$. Распространить этот результат Смайли и Трансю на случай, когда отсутствует «эталонный» элемент O.

67. Пусть X обозначает множество простых интервалов решетки L, квазиупорядоченное отношением $[p, q] \leqslant [r, s]$, означающим, что $u \leqslant r < s \leqslant v$ в L для некоторого интервала $[u, v]$, проективного интервалу $[p, q]$. Если решетка L имеет конечную длину, то решетка Con L ее конгруэнций изоморфна решетке $\mathbf{2}^X$. Обобщить этот результат Фунаямы на случай решеток, удовлетворяющих какому-нибудь одному из условий обрыва цепей.

— Якубик [3] показал, что теорема Фунаямы справедлива для дискретных (все ограниченные цепи конечны) решеток. Гретцер и Шмидт [4] указали общий критерий для изоморфности $\mathrm{Con}\, L \cong \mathbf{2}^X$.

68. Свободная дистрибутивная решетка с n порождающими, если к ней присоединить O и I, изоморфна кольцу всех мажорантно насыщенных подмножеств решетки $\mathbf{2}^n$ всех подмножеств n-элементного множества. Найти аналог этого результата для бесконечного множества порождающих — возможно, используя условия обрыва цепей.

— Пусть A — непустое множество, W_x — совокупность всех его подмножеств, содержащих элемент x, W — множество всех подмножеств в A, имеющих вид W_x, $x \in A$. Тогда дистрибутивная подрешетка, порожденная множеством W в решетке всех подмножеств булеана множества A, является свободной над W (Нероуд [1]).

69. Попытаться охарактеризовать решетки, в которых выполняются оба закона полной дистрибутивности.

— Рейни [1] показал, что каждый из законов полной дистрибутивности влечет двойственный закон и что решетка тогда и только тогда вполне дистрибутивна, когда она является полным гомоморфным образом полного кольца множеств.

70. Какова наиболее общая дистрибутивная решетка с псевдодополнениями, в которой истинно тождество $x^* \vee x^{**} = I$? (Стоун.)

— В дистрибутивной решетке с единицей и с псевдодополнениями $x^* \vee x^{**} = I$ для всех x тогда и только тогда, когда объединение любых двух различных минимальных простых идеалов дает всю решетку (Гретцер и Шмидт [3]).

71. Действительнозначная функция $v(x)$ на решетке называется дистрибутивной оценкой, если $2[v(x \vee y \vee z) - v(x \wedge \wedge y \wedge z)] = v(x \vee y) + v(y \vee z) + v(z \vee x) - v(x \wedge y) - - v(y \wedge z) - v(z \wedge x)$ для всех $x, y, z \in L$. Показать, что если на решетке L имеется дистрибутивная оценка, не постоянная ни на каком неодноэлементном интервале, то L дистрибутивна.

— Доказательство этого утверждения нашли независимо Тревизан [1] и Хасимото [2].

72. Найти необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять решетка, чтобы ее конгруэнции образовывали булеву алгебру.

— Проблема 39 в **LT3**. Решения, основанные на различных подходах к этой задаче, предложили Танака [1], Гретцер и Шмидт [4], Кроули [1], Икбалуниса [1] и Ван Ши-цян [2].

73. Найти необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять решетка, чтобы ее конгруэнции находились во взаимно однозначном соответствии с (нейтральными) идеалами.

— Такие условия нашли Г. Я. Арешкин [1], Хасимото [3] и Гретцер и Шмидт [2], [4].

74. Каждая ли бесконечная булева алгебра обладает собственным автоморфизмом?

— Нет, не каждая. Примеры жестких бесконечных булевых алгебр указали Йонссон [1], Катетов [1] и Ригер [2]. См. проблему 37 в **LT3**.

75. Существует ли недезаргова проективная геометрия, обладающая дуальным автоморфизмом периода два, перестановочным с каждым решеточным автоморфизмом?

— См. проблему 24 в **LT3**.

76. Верно ли, что в полной булевой алгебре порядковая и интервальная топологии совпадают?

— Отрицательный ответ на этот вопрос дали независимо Ренни [1] и Катетов [1]. См. также Нортем [1].

77. Пусть в произвольной σ-полной булевой алгебре двойная последовательность x_{ij} такова, что $x_{ij} \to x_i$ для всех i и $x_i \to 0$.

Обязательно ли существует последовательность $\{j(i)\}$, для которой $x_{i,j(i)} \to 0$?

— Нет, не обязательно (Флойд [1], Эллис и Спринкл [1]).

78. Доказать (или опровергнуть), что если булева σ-алгебра порождена своим подмножеством, то всякий ее ненулевой элемент содержит некоторое конечное или счетное пересечение элементов этого подмножества.

— Проблема 96 в **LT3**. Опровергающий пример указал Ригер [1].

79. Доказать (или опровергнуть), что свободная булева σ-алгебра со счетным множеством порождающих изоморфна полю всех борелевских подмножеств канторова дисконтинуума.

— Доказательство указанного факта получили Ригер [1] и Такеути [3].

80. Известно, что любая булева σ-алгебра является σ-гомоморфным образом σ-поля множеств. Обобщить этот результат на несчетные кардинальные числа.

— Ригер [1] указал, что ни для какого несчетного кардинала аналогичный факт не имеет места. Чэн [1] нашел необходимое и достаточное условия для того, чтобы α-полная булева алгебра была α-гомоморфным образом α-полного поля множеств (α — произвольный кардинал).

81. Найти необходимые и достаточные условия, при выполнении которых решетка изоморфна решетке всех непрерывных действительнозначных функций на компактном хаусдорфовом пространстве.

— Такие условия нашли А. Г. Пинскер [2] и Хейдер [1].

82. Найти необходимые и достаточные условия, при выполнении которых булева алгебра изоморфна булевой алгебре регулярных открытых множеств подходящего T_1-пространства или подходящего метрического пространства.

— Для случая T_1-пространств очевидным необходимым и достаточным условием является полнота булевой алгебры (Дилуорс [2]). Случай метрического пространства — проблема 72 в **LT3**.

83. Перенести топологическую теорию размерности на алгебры с замыканием.

— Проблема 77 в **LT3**.

84. Охарактеризовать абстрактно как алгебры с мерой: 1) естественное продолжение меры Даниэля на тор несчетной размерности, 2) алгебру с мерой, образуемую множествами, имеющими конечную p-мерную меру Хаусдорфа в q-мерном евклидовом пространстве.

— Проблема 97 в **LT3**.

85. Найти необходимые и достаточные условия для булевой алгебры, чтобы она была изоморфна алгебре с мерой по модулю элементов меры нуль.

86. Не предполагая гипотезу континуума, доказать невозможность нетривиальной счетно аддитивной меры на множестве всех подмножеств континуума, при которой все точки имели бы меру нуль.

— Проблема 98 в **LT3**.

87. Можно ли в системе Льюиса ввести кванторы, подходящим образом интерпретируя $\vdash \Diamond p$?

— Формулировка проблемы не вполне ясна. О кванторах в модальных системах Льюиса см., например, в книге Фейса [1].

88. Разработать алгебру вероятностей для квантовой механики.

— Проблема 110 в **LT3**.

89 Во всякой нильпотентной решетке с делением верхний и нижний центральные ряды имеют одну и те жу длину r. Если $I = a_0 > a_1 > \ldots > a_r = O$ — любая нильпотентная цепь, то $I^{i+1} \leqslant a_i \leqslant {}^{r-i}I$ для всех i (здесь ${}^0I = O$, ${}^{n+1}I = {}^nI \cdot I$) (теорема 6 из § XIII.2). Получить аналог этого результата для бесконечных r.

— См. проблему 90.

90. Получить аналог теоремы 6 из § XIII.2 (см. проблему 89) для некоммутативного и неассоциативного случаев.

— Решение проблем 89 и 90 получено И. В. Стеллецким [1].

91. Развить теорию подпрямо неразложимых целостных l-группоидов.

— Проблема 122 в **LT3**.

92. Развить теорию l-группоидов, в которых $a(x \wedge y) = ax \wedge ay$ и $(x \wedge y)a = xa \wedge ya$.

— Проблема 123 в **LT3**. Такие l-группоиды рассматривал Чоудхури [1].

93. Не будет ли полумодулярной решетка всех $\vee$-эндоморфизмов произвольной решетки?

— В общем случае не будет (Дилуорс [2]). Якубик [4] и Гретцер и Шмидт [1] указали примеры решеток, для которых совокупность всех $\vee$-эндоморфизмов вообще не будет решеткой.

94. Получить систему аксиом, которым алгебра отношений удовлетворяла бы тогда и только тогда, когда она является подалгеброй алгебры бинарных отношений на некотором множестве.

— Систему тождеств, характеризующую класс алгебр бинарных отношений, нашел Линдон [1].

95. Охарактеризовать абстрактно l-группу порядковых автоморфизмов цепи как группу, как решетку и как l-группу.

— Проблема 111 в **LT3**.

96. Дать абстрактное описание свободной решеточно упорядоченной группы с двумя порождающими.

— Абстрактное описание свободных абелевых l-групп дал Вейнберг [1]. В общем случае решение получил В. М. Копытов [1].

97. Направленная группа может быть определена как расширение до группы такой полугруппы S, в которой: 1) имеет место закон сокращения; 2) $S + x = x + S$ для всех $x \in S$; 3) $x + y = 0$ влечет $x = y = 0$. l-группа получается, если при этом 4) любые два элемента из S имеют в S наименьшее общее кратное. Обобщить этот результат на случай произвольной l-лупы.

98. Верно ли, что в l-группе Ли: 1) из $nx \leqslant ny$ вытекает неравенство $x \leqslant y$? 2) Множество всех элементов, дизъюнктных некоторому фиксированному элементу, является l-идеалом? 3) Любой l-идеал l-идеала сам является l-идеалом исходной l-группы Ли? 4) Если решетка l-идеалов имеет конечную длину, то каждый l-идеал — главный? Является ли каждая l-группа Ли односвязной?

99. Верно ли, что l-идеал l-идеала свободной l-группы с конечным числом порождающих является ее l-идеалом? Верно ли, что если решетка всех l-идеалов свободной l-группы с конечным числом порождающих имеет конечную длину, то каждый l-идеал этой l-группы главный?

— Отрицательный ответ на оба вопроса дал Якубик [5].

100. Верно ли, что в l-группе Ли: 1) $-x - y + x + y \ll \ll |x| + |y|$, 2) из $mx + ny = nx + my$ следует равенство $x + y = y + x$?

101. Найти необходимые и достаточные условия линейной упорядочиваемости группы.

— Такие условия нашли А. И. Мальцев [1], Ивасава [1] и Лоренцен [1].

102. Описать все способы линейного упорядочения свободной группы с n порождающими, все способы ее решеточного упорядочения. Те же вопросы для свободной абелевой группы с n порождающими.

— См. проблему 113 в **LT3**. Мацусита [1] показал, что существует континуум способов линейного упорядочения свободной группы с n порождающими. М. И. Зайцева [1] и Тревизан [3] нашли все способы линейного, а А. И. Кокорин [1] — решеточного упорядочения свободной абелевой группы с n порождающими.

103. Можно ли лексикографически упорядоченную прямую сумму двух аддитивных групп действительных чисел превратить в линейно упорядоченное кольцо?

— Да, можно (Ван Ши-цян [1]). Все кольца, дающие решение проблемы, описаны Лендерсом [1].

104. Любая ли упорядоченная группа является топологической группой и топологической решеткой в своей интервальной топологии?

— Нет, не любая (Нортем [1], Уолк [1]). См. проблему 114 в **LT3**.

105. Существует ли абстрактная конструкция, объединяющая булевы алгебры (кольца) и решеточно упорядоченные группы?

— Проблема 115 в **LT3**. Конструкции, удовлетворяющие указанным условиям, предложили Уайлер [1], Накано [1] и Рама Рао [1]. См. также Эллис [1] и Свами [1].

106. Дать абстрактное описание решеточно упорядочиваемых групп.

— Проблема 112 в **LT3**. Критерий решеточной упорядочиваемости группы в терминах решетки подполугрупп группы дал К. М. Кутыев [1].

107. Всякая ли векторная решетка является гомоморфным образом подалгебры прямого произведения копий действительной прямой?

— Положительный ответ на этот вопрос дали Хенриксен и Исбел [1], его можно также извлечь из результатов Амемии [1].

108. Любая ли σ-полная решеточно упорядоченная группа может быть расширена до наполненной, полной векторной решетки?

— Проблема 135 в **LT3**. Положительный ответ дает работа А. Г. Пинскера [1].

109. Теорию представлений сепарабельных абстрактных (L)-пространств обобщить на произвольные абстрактные (L)-пространства.

— Это сделано в § XIII.4 книги Л. В. Канторовича, Б. З. Вулиха и А. Г. Пинскера [1].

110. Установить соответствие между понятиями однопараметрического семейства операторов перехода на $L^1(\mathbf{R})$ и «стохастическим процессом» в смысле Дуба.

— Проблема 143 в **LT3**.

111. Известно, что матрица с неотрицательными элементами из линейно упорядоченного поля, в которой сумма элементов в каждой строке и в каждом столбце равна единице, является средним взвешенным подстановочных матриц. Распространить этот результат на бесконечномерный случай — при подходящих ограничениях.

— Решению этой задачи посвящены работы Исбела [1] и Ревеса [1].

Упр. 3 к § II.3. Являются ли шесть тождеств, выражающих коммутативность и ассоциативность операций и законы поглощения, независимой системой аксиом для решетки?

— Да, являются (Кимура [1], Ю. И. Соркин [1]).

В упр. 5 к § II.4 предлагается доказать, что, сопоставляя каждому элементу конечной решетки совокупность всех содержащихся в нем $\bigvee$-неразложимых элементов, мы получаем порядковое вложение данной решетки в упорядоченное включением множество всех подмножеств множества ее $\bigvee$-неразложимых элементов. При таком представлении решетки точные нижние грани переходят в теоретико-множественное пересечение. «Интересно было бы найти подобное представление конечной решетки, сводящее к минимуму число необходимых точек».

— Такое представление нашел К. А. Зарецкий [1].

Упр. 9 к § II.4. Определим подрешетку $\Phi(L)$ решетки L как пересечение всех ее максимальных подрешеток. Найти необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять решетка L, чтобы $\Phi(L)$ оказалась пустой.

— Проблема 8 в LT3.

Упр. 2 б) к § V.8. Каждое ли тождество, истинное в решетке, истинно в решетке ее идеалов?

— Утвердительный ответ на этот вопрос дал Сакс [1].

Упр. 3 к § VI.1. Доказать (или опровергнуть) утверждение о том, что конгруэнции на любой решетке относительными дополнениями перестановочны.

— Перестановочность конгруэнций решетки с относительными дополнениями установил Дилуорс [1].

В теореме 18 из § IX.13 доказывается, что действительнозначная функция тогда и только тогда удовлетворяет волновому уравнению в двумерном пространстве-времени, когда она является оценкой для решетки, определяемой естественным упорядочением релятивистского времени. Ставится задача обобщить этот результат на n-мерный случай.

— Решение несколько модифицированной задачи предложил Бенадо [1].

Альтвег (Altwegg M.)
[1] Zur Axiomatik der teilweise geordneten Mengen. — Comment. Math. Helv., 1950, **24**, S. 149—155 (MR **12**, 237).

Амемия (Amemiya I.)
[1] A general spectral theory in semiordered linear spaces. — J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I, 1953, **12**, p. 111—156 (РЖМат, 1955, 1379; MR **15**, 137).

Арешкин Г. Я.
[1] Об отношениях конгруэнции в дистрибутивных структурах с нулевым элементом. — Докл. АН СССР, 1953, **90**, № 4, с. 485—486 (РЖМат, 1953, 1112; MR **15**, 193).

А р н о л ь д (Arnold B. H.)
[1] Birkhoff's problem 20. — Ann. Math., 1951, **54**, № 2, p. 319—324 (MR **13**, 216).
Б е н а д о (Benado M.)
[1] Asupra unei probleme a lui Garrett Birkhoff. — Bull. ştiint. Acad. R. P. Romine, Sec. mat. si fiz., 1954, **6**, № 4, p. 703—739 (РЖМат, 1957, 2121; MR **17**, 341).
Б и р к г о ф (Birkhoff G.)
[1] Some problems of lattice theory. — Proc. Intern. Congr. Math., Cambridge, Mass., 1950, **2**, p. 4—7. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1952 (MR **13**, 718).
Б р а к и Р а й з е р (Bruck R. H., Ryser H. T.)
[1] The nonexistence of certain finite projective planes. — Canad. J. Math., 1949, **1**, p. 88—93 (MR **10**, 319).
Б э р (Baer R. M.)
[1] A characterization theorem for lattices with Hausdorff interval topology. — J. Math. Soc. Japan, 1955, **7**, № 2, p. 177—181 (РЖМат, 1956, 3717; MR **17**, 121).
В а н Ш и - ц я н
[1] Об упорядоченных кольцах вещественных векторов (кит.). — Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1955, **5**, № 1, p. 65—80 (РЖМат, 1956, 3710; MR **17**, 121).
[2] Замечания о перестановочности конгруэнтных отношений (кит.). — Шусюэ сюэбао, 1953, № 2, с. 133—141 (РЖМат, 1954, 5477; MR **17**, 121).
В а с и л и у (Vassiliou Ph.)
[1] A set of postulates for distributive lattices. — Publ. Nat. Techn. Univ. Athens, 1950, **5** (MR **12**, 472).
В е й н б е р г (Weinberg E. C.)
[1] Free lattice-ordered abelian groups. — Math. Ann., 1963, **151**, p. 187—199 (РЖМат, 1964, 1A253; MR **27** # 3720).
В у е н а к а (Wooyenaka Y.)
[1] Remark on a set of postulates for distributive lattices. — Proc. Japan Acad., 1951, **27**, p. 162—165 (MR **13**, 718).
Г р е т ц е р и Ш м и д т (Grätzer G., Schmidt E. T.)
[1] On the lattice of all join-endomorphisms of a lattice. — Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 5, p. 722—726 (РЖМат, 1959, 7824; MR **20** # # 2295).
[2] On ideal theory for lattices. — Acta scient. math., 1958, **19**, № 1—2, p. 82—92 (РЖМат, 1959, 9838; MR **20** # 2296).
[3] On a problem of M. H. Stone. — Acta math. Acad. sci. hung., 1957, **8**, № 3—4, p. 455—460 (РЖМат, 1959, 176; MR **19**, 1154).
[4] Ideals and congruence relations in lattices. — Acta math. Acad. sci. hung., 1958, **9**, № 1—2, p. 137—175 (РЖМат, 1960, 186; MR **20** # 6990).
[5] Characterization of congruence lattices of abstract algebras. — Acta sci. math., 1963, **24**, № 1—2, p. 34—59 (РЖМат, 1964, 5А225; MR **27**, 1391).
Г у а н ь Ч ж а о - Ч ж и
[1] Несколько замечаний о топологиях, определяемых на структуре (кит.).— Шусюэ цзиньчжань, 1957, **3**, № 4, с. 662—669 (РЖМат, 1959, 1290).
Д и л у о р с (Dilworth R. P.)
[1] The structure of relatively complemented lattices. — Ann. Math., 1950, **51**, № 2, p. 348—359 (MR **11**, 489).
[2] Review of the «Lattice Theory» by G. Birkhoff. — Bull. Amer. Math. Soc., 1950, **56**, № 2, p. 204—206.
З а й ц е в а М. И.
[1] О совокупности упорядочений абелевой группы. — УМН, 1953, **8**, № 1, с. 135—137 (РЖМат, 1953, 98; MR **14**, 721).

Зарецкий К. А.
[1] О представлении структур множествами. — УМН, 1961, **16**, № 1, с. 153—154 (РЖМат, 1961, 10А266; MR **26** # 55).
Зоннер (Sonner H.)
[1] Die Polarität zwischen topologischen Räumen und Limesräumen. — Arch. Math., 1953, **4**, № 5—6, S. 461—469 (РЖМат, 1955, 117).
Ивасава (Iwasawa K.)
[1] On linearly ordered groups. — J. Math. Soc. Japan, 1948, **1**, p. 1—9 (MR **10**, 428).
Икбалуниса (Iqbalunnisa)
[1] Lattice translates and congruences. — J. Indian Math. Soc., 1962, **26**, № 1—2, p. 81—96 (РЖМат, 1964; 9А250; MR **26** # 6084).
Исбелл (Isbell J. R.)
[1] Birkhoff's problem 111. — Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 2, p. 217—218 (РЖМат, 1957, 4186; MR**16**, 893).
Ито (Ito N.)
[1] Note on (*LM*)-groups of finite orders. — Kodai Math. Sem. Repts., 1951, p. 1—6 (MR 13, 317).
Йех (Jech T.)
[1] Nonprovability of Suslin's Hypothesis. — Comment. Math. Univ. carol., 1967, **8**, p. 291—305 (РЖМат, 1968, 5А144; MR **35** # 6564).
[2] Lectures in set theory with particular emphasis on the method of forcing. — Berlin: Springer, 1971. [Русский перевод: Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. — М.: Мир, 1973.]
Йонссон (Jónsson B.)
[1] A Boolean algebra without proper automorphisms. — Proc. Amer. Math. Soc., 1951, **2**, p. 766—770 (MR **13**, 201).
[2] On the representation of lattices. — Math. Scand., 1953, **1**, № 2, p. 193—206 (РЖМат, 1954, 5476; MR **15**, 389).
[3] Modular lattices and Desargues' theorem. — Math. Scand., 1954, **2**, p. 295—314 (РЖМат, 1956, 6461; MR, **16**, 787).
Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.
[1] Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. — М.; Л: Гостехиздат, 1950.
Капланский (Kaplansky I.)
[1] Any orthocomplemented complete modular lattice is continuous geometry. — Ann. Math., 1955, **61**, № 3, p. 524—541 (РЖМат, 1956, 5763; MR **19**, 524).
Катетов (Katetov M.)
[1] Remarks on Boolean algebras. — Coll. Math., 1951, **2**, p. 229—235 (MR **14**, 237).
Кимура (Kimura N.)
[1] Independency of axioms of lattices. — Kodai Math. Sem. Repts, 1950, **14** (MR **12**, 387).
[2] On latticoids. — J. Sci. Gakugei Fac. Tokushima Univ., 1950, **1**, p. 11—16 (MR **13**, 425).
Коган С. А.
[1] Решение трех проблем теории структур. — УМН, 1956, **11**, № 2, с. 185—190 (РЖМат, 1957, 2120; MR **17**, 1176).
Кокорин А. И.
[1] Способы структурного упорядочения свободной абелевой группы с конечным числом образующих. — Матем. зап. Уральск. ун-та, 1963, **4**, № 1, с. 45—48 (РЖМат, 1963, 9А185; MR **29** # 5937).
Копытов В. М.
[1] О свободных решеточно упорядоченных группах. — Сибирск. матем. ж., 1983, **24**, № 1, 120—124.

Кроули (Crawley P.)
[1] Lattices whose congruences form a Boolean algebra. — Pacif. J. Math., 1960, **10**, p. 787—798 (РЖМат, 1961, 6А306; MR 22 # 4648).
Кроули и Дилуорс (Crawley P., Dilworth R. P.)
[1] Algebraic theory of lattices. — Prentice-Hall: Englwood Cliffs, 1973.
Круазо (Croisot R.)
[1] Axiomatique des treillis semi-modulaires. — C. r. Acad. Sci. Paris, 1950, **231**, p. 12—14 (MR 12, 4).
[2] Diverses caractérisations des treillis semi-modulaires, modulaires et distributifs. — C. r. Acad. Sci. Paris, 1950, **231**, p. 1399—1401 (MR 12, 473).
[3] Axiomatique des lattices distributives. — Canad. J. Math., 1951, **3**, p. 24—27 (MR 12, 472).
[4] Sous-treillis, produits cardinaux et treillis semi-modulaires. — C. r. Acad. Sci. Paris, 1951, **232**, p. 27—29 (MR 13, 7).
Курцио (Curzio M.)
[1] Su di un particolare isomorfismo di structura. — Ricerche Mat., 1953, **2**, p. 288—300 (РЖМат, 1956, 2808; MR **15**, 673 ДЕП).
[2] Su di una questione proposta da G. Birkhoff. — Ricerche Mat., 1957, **6**, № 1, p. 27—33 (РЖМат, 1958, 7549).
Кутыев К. М.
[1] Решеточно подполугрупповая характеристика l-группы. — Уральск. лесотехн. ин-т. Свердловск, 1979 (РЖМат, 1980, 1А235 ДЕП).
Леви (Lévy A.)
[1] Definability in axiomatic set theory II. — In: Mathematical Logic and Foundations of Set Theory. Amsterdam; London, 1970, p. 129—145 (РЖМат, 1972, 3А39; MR **42** # 2936).
Лендерс (Leenders J. H.)
[1] Birkhoff's problem 103. — Simon Stevin, 1958, **32**, № 1, p. 1—22 (РЖМат, 1959, 2409; MR **20**, 3797).
Линдон (Lyndon R. C.)
[1] The representation of relation algebras II. — Ann. Math., 1956, **63**, p. 294—307 (РЖМат, 1959, 9716; MR **18**, 106).
Лойко Н. В.
[1] S-изоморфизмы смешанных абелевых групп ранга $r \geqslant 2$. — Матем. зап. Уральск. ун-та, 1963, **4**, № 1, с. 57—59 (РЖМат, 1963, 11А158).
Лоренцен (Lorenzen P.)
[1] Über halbgeordnete Gruppen. — Math. Z., 1949, **52**, S. 483—526 (MR **11**, 497).
Мальцев А. И.
[1] Об упорядоченных группах. — ИАН СССР, сер. матем., 1949, **13**, № 6, с. 473—482 (MR 11, 323).
[2] К общей теории алгебраических систем. — Матем. сб., 1954, **35**, № 1, с. 3—20 (РЖМат, 1957, 209; MR **16**, 440).
Мартич (Martić L.)
[1] Sur les généralisations du treillis libre. — C. r. Acad. sci. Paris, 1957, **244**, № 12, p. 1593—1595 (РЖМат, 1958, 5566; MR **19**, 243).
Матусима (Matusima Y.)
[1] On some problems on Birkhoff. — Proc. Japan Acad., 1952, **28**, p. 19—24 (MR **14**, 9).
Мацусита (Matsushita S.-I.)
[1] Sur la puissance des ordres dans un groupe libre. — Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., A, 1953, **56**, № 1, p. 15—16; Indag. math., 1953, **15**, № 1, p. 15—16 (РЖМат, 1953, 90; MR 15, 284).
Найто (Naito T.)
[1] On a problem of Wolk in interval topologies. — Proc. Amer. Math. Soc., 1960, **11**, p. 156—158 (РЖМат, 1961, 2А189; MR **22** # 1528).

Н а к а н о (Nakano T.)
[1] Rings and partially ordered systems. — Math. Z., 1967, **99**, № 5, p. 335—376 (РЖМат, 1968, 3А277, MR 35 # 6600).
Н е р о у д (Nerode A.)
[1] Composita, equations and freely generated algebras. — Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **91**, № 1, p. 139—151 (РЖМат, 1960, 7328; MR **21** # # 3362).
Н о р т е м (Northam E. S.)
[1] The interval topology of a lattice. — Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 5, p. 824—827 (РЖМат, 1955, 1686; MR **15**, 244).
О л ь ш а н с к и й А. Ю.
[1] Бесконечная группа с подгруппами простых порядков. — ИАН СССР, сер. матем., 1980, **44**, № 2, с. 309—321 (РЖМат, 1980, 8А182, MR 82a : 20035).
О с т р о м и В а г н е р (Ostrom T. G., Wagner A.)
[1] On projective and affine planes with transitive collineation groups. — Math. Z., 1959, **71**, № 2, p. 186—199 (РЖМат, 1960, 9436; MR **22** # # 1843).
П а р к е р (Parker E. T.)
[1] On a question raised by Garrett Birkhoff. — Proc. Amer. Math. Soc., 1951, **2**, p. 901 (MR **13**, 529).
П а ш е н к о в В. В.
[1] О структуре подпространств гильбертова пространства. — ДАН СССР, 1961, **138**, с. 1016—1019 (РЖМат, 1963, 5Б432; MR **24** # A1634).
П и н с к е р А. Г.
[1а] Разложение полуупорядоченных групп и пространств. — Уч. зап. пед. инст. им. Герцена, 1949, **86**, с. 235—284.
[1б] Расширение полуупорядоченных групп и пространств. — Уч. зап. пед. инст. им. Герцена, 1949, **86**, с. 285—315.
[2] Структурная характеризация функциональных пространств. — УМН, 1957, **12**, № 1, с. 226—229 (РЖМат, 1957, 6496; MR **19**, 8).
П у д л а к и Т у м а (Pudlák P., Tůma J.)
[1] Every finite lattice can be embedded in a finite partition lattice. — Algebra Univers., 1980, **10**, № 1, p. 74—95 (РЖМат, 1980, 10А227; MR **81e** : 06013).
Р а м а Р а о (Rama Rao V. V.)
[1] On a common abstraction of boolean rings and lattice ordered groups. — Monatsh. Math., 1969, **73**, p. 411—421 (РЖМат, 1970, 7А224; MR **42** # # 1738).
Р е в е с (Révész R.)
[1] A probabilistic soultion of problem 111 Birkhoff. — Acta. Math. Acad. Sci. Hungar., 1962, **13**, № 1—2, p. 187—198 (РЖМат 1963, 8А138; MR **25**, 3055).
Р е й н и (Raney G. N.)
[1] Completely distributive complete lattices. — Proc. Amer. Math. Soc., 1952, **3**, p. 677—680 (MR **14**, 612).
Р е н н и (Rennie B.)
[1] The theory of lattices. — Cambridge, 1951 (MR **13**, 901).
Р и г е р (Rieger L.)
[1] On free $\aleph_\xi$ -complete Boolean algebras (with an application to logic). — Fund. math., 1951, **38**, p. 35—52 (MR **14**, 347).
[2] Some remarks on automorphisms of boolean algebras. — Fund. math., 1951, **38**, p. 209—216 (MR **14**, 238).
С а к с (Sachs D.)
[1] Identities in finite partition lattices. — Proc. Amer. Math. Soc., 1961, **12**, p. 944—945 (РЖМат, 1962, 6А223; MR **24** # A3101).

С а т о (Sato S.)
[1] On groups and lattices of subgroups. — Osaka Math. J., 1949, **1**, p. 135—149 (MR **11**, 78).

С о к о л (Sokól J.)
[1] О 27-й проблеме Биркгофа. — Упорядоченные множества и решетки (Саратов), 1977, № 4, с. 113—123 (РЖМат, 1978, 2А241; MR **58** # 403).

С о л о в е й и Т е н н е н б а у м (Solovay R., Tennenbaum S.)
[1] Iterated Cohen extensions and Suslin's problem. — Ann. Math., 1971, **94**, p. 201—245 (РЖМат, 1972, 6А57; MR **45** # 3212).

С о р к и н Ю. И.
[1] Независимые системы аксиом, определяющие структуру. — Укр. матем. ж., 1951, **3**, с. 85—97 (MR **14**, 612).

С т е л л е ц к и й И. В.
[1] Нильпотентные структуры. — ДАН СССР, 1959, **128**, № 4, с. 680—683 (РЖМат, 1960, 8690; MR **22** # 682).

С в а м и (Swamy K. L. N.)
[1] Dually residuated lattice ordered semigroups. — Math. Ann., 1965, **159**, № 2, p. 105—114 (РЖМат, 1965, 12А253).

С у д з у к и (Suzuki M.)
[1] On the L-homomorphisms of finite groups. — Trans. Amer. Math. Soc., 1951, **70**, p. 372—386 (MR **12**, 587).

Т а к е у т и (Takeuti K.)
[1] On maximal proper sublattices. — J. Math. Soc. Japan, 1951, 2, p. 28—32 (MR 13, 100).
[2] On free modular lattices II. — Tohoku Math. J., 1959, **11**, № 1, p. 1—12 (РЖМат, 1961, 12А343; MR **21** # 5589).
[3] The free Boolean σ-algebra with countable generators. — J. Math., 1953, **1**, № 2—3, p. 77—79 (РЖМат, 1958, 9627).

Т а н а к а (Tanaka T.)
[1] Canonical subdirect factorization of lattices. — J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A, 1952, **16**, p. 239—246 (MR 15, 675).

Т о м п с о н (Thompson F. B.)
[1] A note on the unique factorization of abstract algebras. — Bull. Amer. Math. Soc., 1949, **55**, p. 1137—1141 (MR **11**, 309).

Т р е в и з а н (Trevisan G.)
[1] Sulla distributivita delle structure che posseggono una valutizione distributiva. — Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1951, 20, p. 396—400 (MR 13, 901).
[2] Construzione di quasigruppi con relazioni di congruenza non permutabili. — Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1953, **22**, № 1, p. 11—22 (РЖМат, 1954, 5466; MR **15**, 681).
[3] Classificazione dei semplici ordinamenti di un gruppo libero commutativo con N generatori. — Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1953, **22**, № 1, p. 143—157 (РЖМат, 1955, 3106; MR **15**, 8).

Т р о л и Д а н к е н (Thrall R. M., Duncan D. G.)
[1] Note on free modular lattices. — Amer. J. Math., 1953, **75**, № 3, p. 627—632 (РЖМат, 1954, 2533; MR **15**, 4).

У а й л е р (Wyler O.)
[1] Clans. — Compositio math., 1966, **17**, p. 172—189 (РЖМат, 1967, 9А172, MR **33** # 5533).

У о р д (Ward A. J.)
[1] On relations between certain intrinsic topologies in partially ordered sets. — Proc. Cambr. Phil. Soc., 1955, **51**, № 2, p. 254—261.

У о л к (Wolk E. S.)
[1] On the interval topology of an l-group. — Proc. Amer. Math. Soc., 1961, **12**, № 2, p. 304—307 (РЖМат, 1963, 12А317).

Фейс (Feys R.)
[1] Modal logics. — Paris, 1965. [Русский перевод (с добавлениями): Фейс Р. Модальная логика. — М.: Наука, 1974.]
Флойд (Floyd E. E.)
[1] Boolean algebras with pathological order topologies. — Pacif. J. Math., 1955, 5, suppl. № 1, p. 687—689 (РЖМат, 1956, 5764; MR 17, 450).
Фриз (Freese R.)
[1] Free modular lattices. — Trans. Amer. Math. Soc., 1980, **261**, № 1, p. 81—91 (РЖМат, 1981, 5A249; MR **81k** : 06010).
Фрухт (Frucht W. R.)
[1] Sobre el problema 6 de Birkhoff. — Scientia (Chile), 1964, **31**, № 124, p. 5—21 (РЖМат, 1965, 8A245; MR **34** # 103).
Фукс (Fuchs L.)
[1] Partially ordered algebraic systems. — Oxford: Pergamon Press, 1963. [Русский перевод: Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.]
Хасимото (Hashimoto J.)
[1] On direct product decomposition of partially ordered sets. — Ann. Math., 1951, **54**, № 2, p. 315—318 (MR **13**, 201).
[2] On a lattice with a valuation. — Proc. Amer. Math., Soc., 1952, 3, p. 1—2 (MR **13**, **901**).
[3] Ideal theory for lattices. — Math. Japan, 1952, **2**, p. 149—186 (MR **15**, 192).
Хейвес и Уорд (Havas G., Ward M.)
[1] Lattices with sublattices of a given order. — J. Combin. Theory, 1969, 7, № 3, p. 281—282 (РЖМат, 1970, 6A259; MR **40** # 1308).
Хейдер (Heider L. J.)
[1] A characterization of function lattices. — Duke. Math. J., 1956, 23, № 2, p. 297—301 (РЖМат, 1960, 9162).
Хенриксен и Исбел (Henriksen M., Isbell J. R.)
[1] Lattice-ordered rings and function rings. — Pacif. J. Math., 1962, **12**, № 2, p. 533—565 (РЖМат, 1963, 10A233; MR 27 # 3670).
Херрман (Herrman Ch.)
[1] On the world problem for the modular lattice with four free generators. — Darmstadt, 1982 (preprint).
Хьюз (Hughes N. J. S.)
[1] Refinement and uniqueness theorems for decompositions of algebraic systems with a regularity condition. — J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 3, p. 259—273 (РЖМат, 1957, 1214).
Цаппа (Zappà G.)
[1] Determinazione degli elementi neutri nel reticolo dei sottogruppi di un gruppo finito. — Rend. Acad. Sci., Fis. Mat., Napoli, 1951, **18**, p. 22—28 (MR **14**, 446).
Черемисин А. И.
[1] Решение одной проблемы Биркгофа. — Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та, 1958, **18**, с. 205—207 (РЖМат, 1959, 6689).
Чоудхури (Choudhuri A. C.)
[1] The doubly distributive m-lattice. — Bull. Calcutta Math. Soc., 1957, **49**, № 2, p. 71—74 (РЖМат, 1958, 7552; MR 20 # 5152).
Чэн (Chang C. C.)
[1] On the representation of α-complete Boolean algebras. — Trans. Amer. Math. Soc., 1957, **85**, № 1, p. 208—218 (РЖМат, 1958, 3583; MR **19**, 243).
[2] Ordinal factorization of finite relations. — Trans. Amer. Math. Soc., 1961, **101**, № 2, p. 259—293 (РЖМат, 1963, 2A255; MR **24** # A3073).
Эллис (Ellis D.)
[1] Note on the foundations of lattice theory. — Arch. Math., 1953, 4, № 4, p. 257—260 (РЖМат, 1954, 4365).

Эллис, Спринкл (Ellis D., Sprinkl H. D.)
[1] Topology of B-metric spaces. — Compositio math., 1956, **12**, № 3, p. 250—262 (РЖМат, 1957, 7739).
Яковлев Б. В.
[1] Решеточные изоморфизмы разрешимых групп. — Алгебра и логика, 1970, **9**, № 3, с. 349—369 (РЖМат, 1971, 1А193; MR **44** # 6847).
Якубик (Jakubik J.)
[1] О графическом изоморфизме структур. — Чехосл. матем. ж., 1954, **4**, с. 131—141 (РЖМат, 1955, 4924; MR **16**, 440).
[2] Об отношениях конгруэнтности на абстрактных алгебрах. — Чехосл. матем. ж., 1954, **4**, № 4, с. 314—317 (РЖМат, 1957, 1216; MR **16**, 787).
[3] Relácie kongruentnosti a slabá projektivnosť vo sväzoch. — Časop. pěstov. mat., 1955, **80**, № 2, S. 206—216 (РЖМат, 1956, 5765; MR **17**, 1177).
[4] Poznámka o endomorfizmoch na sväzoch. — Časop. pěstov. mat., 1958, **83**, № 2, S. 226—229 (РЖМат, 1959, 1286; MR **20**, 6366).
[5] О главных идеалах в структурно упорядоченных группах. — Чехосл. матем. ж., 1959, **9**, № 4, с. 528—543 (РЖМат, 1960, 12527; MR **22** # # 12144).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

УКАЗАТЕЛЬ ФОРМУЛ

Гаррет Биркгоф

ТЕОРИЯ РЕШЕТОК

Редактор *Т. А. Панькова*

Технический редактор *С. Я. Шкляр*

Корректор *А. Л. Ипатова*

ИБ № 11241

Сдано в набор 25.10.82. Подписано к печати 24.02.84.
Формат $60 \times 90^{1}/_{16}$. Бумага тип. № 2. Литературная гарнитура.
Высокая печать. Условн. печ. л. 35,5. Условн. кр.-отт. 35,5.
Уч.-изд. л. 40,37. Тираж 9400 экз. Заказ № 14. Цена 3 р. 10 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 6 ордена Трудового
Красного Знамени Ленинградского объединения
«Техническая книга» им. Евгении Соколовой
Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
193144, г. Ленинград, ул. Моисеенко, 10