

**METHODS IN COMPUTATIONAL
PHYSICS**

Advances in Research and Applications

Volume 16

CONTROLLED FUSION

**Volume Editor
JOHN KILLEEN**

*Department of Applied Science — Davis/Livermore
and CTR Computer Center
Lawrence Livermore Laboratory
University of California
Livermore, California*

**1976
ACADEMIC PRESS
NEW YORK SAN FRANCISCO LONDON**

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ
В ФИЗИКЕ**

**УПРАВЛЯЕМЫЙ
ТЕРМОЯДЕРНЫЙ
СИНТЕЗ**

под редакцией
Дж. КИЛЛИНА

Перевод с английского

под редакцией
д-ра физ.-мат. наук
Ю. Н. ДНЕСТРОВСКОГО
и д-ра физ.-мат. наук
Д. П. КОСТОМАРОВА

**Издательство «Мир»
МОСКВА 1980**

Книга на известной американской серии «Вычислительные методы в физике» посвящена высокотемпературной плазме. Коллективная монография, в которой рассматриваются математические модели и численные методы применительно к исследованию свойств плазмы и особенностей ее поведения в термоядерных установках. Обсуждаются алгоритмы, программы и результаты расчетов для магнитогидродинамических, диффузионных и кинетических моделей.

Книга рассчитана на физиков и математиков, работающих в области физики плазмы и управляемого термоядерного синтеза; может быть использована аспирантами и студентами старших курсов.

Редакция литературы по физике

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ ПЕРЕВОДА

В 1974 г. в издательстве «Мир» вышел русский перевод книги «Вычислительные методы в физике плазмы» (т. 9 серии «Вычислительные методы в физике», выпускаемой американским издательством «Академик пресс»). Теперь мы представляем читателю перевод т. 16 той же серии, посвященного управляемому термоядерному синтезу. Разница в названиях томов отражает не только различие в их содержании, но и в конечном счете различие в состоянии исследований по физике плазмы в шестидесятые и семидесятые годы.

В прошлом десятилетии эксперименты проводились, как правило, на небольших лабораторных установках. Изучались общие свойства плазмы и шел отбор основных путей продвижения к управляемому термоядерному синтезу. Однако к началу семидесятых годов обстановка радикально изменилась. Существенные достижения теории и эксперимента привели к созданию в СССР и США уникальных установок (токамаки T-10 и PLT, 1975 г.). Подтверждение теории на большом экспериментальном материале стимулировало дальнейшее развитие работ. Быстро строятся токамаки следующего поколения (T-15 в СССР, TFTR в США, JET в Европе, JT-60 в Японии). В начале восьмидесятых годов они должны вступить в строй. Началась разработка международного проекта реактора-токамака Intor с участием Советского Союза, США и других стран, обсуждаются физические, инженерные и экономические аспекты устройства термоядерных электростанций.

Проектирование и строительство новых установок требуют больших затрат, продолжаются 7—10 лет, и каждый следующий шаг представляет собой экстраполяцию наших знаний на условия, которые не могут быть изучены экспериментально на установках предыдущего поколения. Детальную информацию о поведении плазмы в таких условиях может дать только «вычислительный эксперимент». Это существенно изменило требования к работам по численному моделированию. Вместо изучения общих свойств плазмы в некоторых идеализированных условиях, характерного для большинства статей т. 9, теперь на первое место выдвигаются разработка и анализ математических моделей процессов в конкретных установках с учетом их геометрии, конфигурации магнитного поля и других

конструктивных особенностей. Теперь важно не только рассчитать процесс, но и найти оптимальные физические и инженерные решения проблем. Работы подобного типа с подробным описанием моделей, алгоритмов и программ и составляют основное содержание настоящей книги.

Как и во всех предыдущих выпусках серии, в книге собраны статьи различных авторов. Статьи имеют обзорный характер, написаны на высоком профессиональном уровне и в основном отражают современное состояние проблем. Однако за последние годы был разработан ряд новых моделей, не успевших найти отражение в книге, на которые нам хотелось бы обратить внимание читателя:

1. МГД-модели с конечной проводимостью. Малая диссипация приводит к возможности изменения топологии магнитных поверхностей в окрестности резонансных точек. На важность этого эффекта было указано Кадомцевым [1]. В дальнейшем численное моделирование подтвердило возможность перезамыкания магнитных поверхностей и перемешивания плазмы [2, 3].

2. МГД-модели в приближении большого продольного магнитного поля («приближение токамака») [4—6]. В этой модели отсутствуют быстрые альвеновские волны, связанные с продольным полем, и условия Куранта на временной шаг значительно облегчаются. Расчеты с помощью трехмерных программ [6] позволили понять динамику развития неустойчивости срыва в токамаке.

3. Гибридные модели.

а. Диффузионное описание плазмы с учетом МГД-перемешивания [7, 8]. С помощью этой модели удается разумно описать релаксационные колебания на внутренних модах и стадию подъема тока в токамаке.

б. Диффузионное описание плазмы совместно с двумерной задачей об эволюции равновесия [9, 10].

в. Диффузионное описание плазмы совместно с системой кинетических уравнений Ландау — Фоккера — Планка для горячих инжектированных ионов [11].

Продолжается также совершенствование моделей, описанных в разных главах книг. Для транспортных одномерных программ улучшено описание излучения примесей при расчете энергетического баланса [12], выяснена роль рекомбинации в уравнениях для плотности нейтралов [13]. На основе кинетических уравнений пересматривается роль суперзапертых надтепловых частиц в переносе энергии в гофрированном токамаке [14].

Как и в предыдущем выпуске, в настоящем томе остался незатронутым круг вопросов, связанных с импульсным нагре-

вом мишеней за счет лазерного излучения или пучков частиц высокой энергии.

Перевод книги выполнен кандидатами физ.-мат. наук В. В. Паранюком (гл. 1, 2, 6, 7), Г. В. Переверзевым (гл. 3—5) и И. Н. Иповенковым (гл. 8—11).

Ю. Н. Днестровский
Д. П. Костомаров

Литература

- 1 Кадомцев Б. Б., Физика плазмы, 1, 710 (1975).
- 2 Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П., Попов А. М., Физика плазмы, 2, 167 (1976).
- 3 Waddell B. V., Rosenbluth M. N., Monticello D. A., White R. B., Nuclear Fusion, 16, 528 (1976).
- 4 Кадомцев Б. Б., Погуде О. П., ЖЭТФ, 65, 575 (1973).
- 5 Strauss H. R., Phys. Fluids, 19, 134 (1976).
- 6 Hlicks H. R., Carreras B., Holmes J. A., Waddell B. V., ORNL/TM-6096, 1977, Oak-Ridge National Laboratory.
- 7 Днестровский Ю. Н., Лысенко С. Е., Смит Р., Физика плазмы, 3, 18 (1977).
- 8 Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П., Переверзев Г. В., Тарасян К. Н., Физика плазмы, 4, 1001 (1978).
- 9 Hogan J. T. Препринт ORNL/TM-6049, 1978, Oak-Ridge National Laboratory.
- 10 Захаров Л. Е., Шафранов В. Д., Препринт ИАЭ-3076, 1978.
- 11 Mirin A. A. et al., J. Comp. Phys., 28, 23 (1977).
- 12 Post D. E., Jensen R. V., Tarter C. B., Grassberger W. H., Lokke W. A., Atomic Data and Nuclear Tables, 20, 397 (1977).
- 13 Dnestrovskii Y. N., Kostomarov D. P., Lysenko S. E., VIII European Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, 1, 141 (1977), Prague.
- 14 Гуревич А. В., Димант Я. С., Днестровский Ю. Н., Разумова К. А., Письма в ЖЭТФ, 26, 733 (1977).

ПРЕДИСЛОВИЕ

Численные расчеты стали играть важную роль в исследованиях по управляемому термоядерному синтезу с самого их начала на заре 50-х годов. Особенно резко возросло применение ЭВМ в физике плазмы за последние несколько лет. Это связано с усложнением математических моделей, которые, используя возможности увеличившихся скорости и памяти ЭВМ, позволили осуществить более реалистическое численное моделирование плазмы. В ближайшие несколько лет следует ожидать существенного развития численных моделей и еще более широкого их использования в термоядерной энергетике.

Поведение плазмы, удерживаемой магнитным полем, можно описать с помощью большого набора численных моделей. В некоторых из них рассчитывается макроскопическая динамика плазмы. Для моделирования временной эволюции плазмы в системах магнитного удержания на масштабах порядка энергетического времени плазмы — от десятков до сотен миллисекунд — необходимо решить систему дифференциальных уравнений в частных производных диффузионного типа. Основными переменными здесь являются плотность плазмы, температура каждой компоненты, плотности токов и магнитные поля. С другой стороны, в кинетических программах (кодах) уже на микроскопических временных масштабах рассчитывается движение частиц под действием самосогласованных, а также внешних электрических и магнитных полей. Эти коды дают наиболее детальные данные, например, функцию распределения в фазовом пространстве, спектры флуктуаций и колебаний, орбиты отдельных частиц, а также информацию о скоростях роста, насыщении сильных неустойчивостей и эффектах турбулентности. До 1973 г. большинство расчетов было связано с кинетическими кодами, которые моделировали бесстолкновительную плазму, и основной их целью было объяснить неустойчивости в пространстве скоростей и взаимодействия воли с частицами. В т. 9 этой серии, опубликованном в 1970 г., рассматривалось решение уравнения Власова или бесстолкновительного уравнения Больцмана с помощью метода укрупненных частиц, а также других методов.

Настоящий том отличается от т. 9 тем, что здесь рассматривается полный набор численных моделей, необходимых для

моделирования существующих термоядерных систем. Чтобы моделировать поведение плазмы в таких системах, было разработано множество новых макроскопических кодов, таких, как магнитогидродинамические коды, коды для явлений переноса в токамаках и коды МГД-равновесия. Они помогли понять ряд экспериментальных результатов на системах с низким и высоким бета. В этом томе рассматриваются следующие типы вычислительных моделей:

1. Временная магнитная гидродинамика.
2. Перенос плазмы в магнитном поле.
3. МГД-равновесие и равновесие в дрейфовом приближении.
4. МГД-устойчивость систем магнитного удержания.
5. Модели, основанные на уравнении Власова, и другие кинетические модели.

6. Коды Фоккера — Планка для многокомпонентной плазмы.

Первые три главы охватывают различные аспекты численного решения уравнений магнитной гидродинамики (МГД). Существует множество таких МГД-кодов, разработанных с различной степенью сложности. Так называемые идеальные МГД-коды соответствуют приближению бесконечной проводимости. В некоторых моделях давление является скалярной функцией, в других оно рассматривается как тензор с различными компонентами вдоль и поперек магнитного поля. Наиболее адекватные модели учитывают явления переноса, т. е. теплопроводность, электрическое сопротивление, и также могут быть скалярными и тензорными. В настоящее время стандартными стали двумерные коды, и уже имеются попытки разработать трехмерные. В расчетах обычно выбирается неподвижная эйлерова сетка, однако в некоторых задачах, как это описано Поттером, оказывается полезным лагранжево описание, в частности, с использованием магнитных поверхностей в качестве координатных. В главе, написанной Брекбиллом, используется движущаяся сетка, которая, однако, не является лагранжевой. Бёрис и Бук посвятили свою главу описанию в эйлеровом представлении конвективных членов.

В последние несколько лет значительные усилия ряда лабораторий были направлены на численное решение уравнений переноса для тороидальной плазмы. Эти усилия обеспечили блестящее совпадение результатов теории и эксперимента. В настоящее время развитие этих кодов идет по пути учета в вычислительных моделях нейтралов и примесей и использования эмпирических коэффициентов переноса. Эти модели и их применение к токамакам описаны в главе Хогана и др.

Для разработки конструкции и моделирования управления каждого большого термоядерного эксперимента необходимы также стационарные коды. С их помощью исследуются

возможные равновесные плазменные конфигурации и их устойчивость. При изучении устойчивости вычисляются собственные значения линеаризованных уравнений для возмущения. Обзор последних исследований в этой области дан в главах, написанных Макнамарой, а также Гриммом с соавторами.

Кинетические коды обычно подразделяются на «электростатические» и «электромагнитные». В кодах первого типа с помощью уравнения Пуассона рассчитывается только самосогласованное электрическое поле, а магнитное поле считается отсутствующим или постоянным во времени. На ранних стадиях разработки вычислительных методов в физике плазмы доминировали электростатические коды, как они в основном рассмотрены в гл. 9 этой серии. В настоящем сборнике в главе, написанной Даусоном и др., приведены некоторые важнейшие новейшие результаты, касающиеся коллективных переносов поперек заданного магнитного поля в двух- и трехмерных конфигурациях. В главе Лэнгдона и Лазински описаны полные электромагнитные коды, в которых движение частиц считается релятивистским, а электрические и магнитные поля рассчитываются на основе полных (волновых) уравнений Максвелла. Электромагнитные коды в безызлучательном пределе, когда уравнения являются нерелятивистскими, а токи смещения пренебрежимо малы (модель Дарвина), обсуждаются в главе Нельсона и Льюиса.

При моделировании плазмы в магнитном поле, когда ионы немаксвелловские и важно знание функций распределения, необходимо решать кинетические уравнения. Соответствующими уравнениями являются уравнения Больцмана со столкновительным членом в форме Фоккера — Планка. Обзор численных методов для решения многокомпонентных уравнений Фоккера — Планка дан в последней главе Киллином с соавторами.

*Дж. Киллин
Б. Олдер
С. Фернбах*

Глава I

ЧИСЛЕННАЯ МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА ДЛЯ ПЛАЗМЫ С БОЛЬШИМ БЕТА

Дж. Брекбилл¹⁾

I. ВВЕДЕНИЕ

Для плазмы в магнитном поле магнитная гидродинамика (МГД) является наиболее простой моделью, которая самосогласованно описывает взаимодействие плазмы с этим полем. В МГД-модели плазма рассматривается как электрически нейтральная жидкость, находящаяся в локальном термодинамическом равновесии, и тем самым из всех плазменных явлений учитывается лишь небольшая их часть. Тем не менее эта модель правильно описывает обмен импульсом и энергией между плазмой и магнитным полем и этого достаточно для описания влияния геометрии поля на макроскопическое равновесие и устойчивость плазмы с большим бета.

Даже в своей простейшей форме МГД-уравнения представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, которую трудно или просто невозможно решить аналитически. В отдельных случаях при наличии симметрии или малого параметра МГД-уравнения можно свести к одному обыкновенному дифференциальному уравнению, решение которого описывает линейную устойчивость плазмы, находящейся в равновесии с магнитным полем. Чаще же уравнения нельзя упростить и приходится решать двух- а часто и трехмерные МГД-уравнения. В таких случаях только с помощью численного решения уравнений можно предсказать, будет ли плазма в рамках МГД-модели устойчивой в том или ином конкретном эксперименте.

Достаточно взглянуть на составленный Бодином [5] список наиболее интересных в настоящее время проблем, чтобы увидеть, что многие из них допускают решение только численными методами. Две проблемы связаны с удержанием плазмы в осесимметричных и несимметричных тороидальных конфигурациях. Для осесимметричного случая уже выполнены некоторые

¹⁾ J. U. Brockbill, University of California, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, New Mexico.

двумерные численные расчеты [25, 32], и, как стало ясно, для моделирования неустойчивостей в такой геометрии необходимы также и полные трехмерные расчеты. При современном интересе к термоядерным исследованиям трехмерное моделирование, которое во многом является делом престижа, может пользоваться поддержкой, но только если результаты оправдывают себя.

Чтобы оценить, смогут ли численные расчеты сыграть существенную роль в решении проблемы управляемого термоядерного синтеза (УТС), необходимо проанализировать не только новые возможности, которые открывают численные работы, но и возникающие проблемы. Одно из препятствий состоит в том, что как в настоящее время, так и в ближайшем будущем имеющиеся в распоряжении исследователя вычислительные мощности едва лишь достаточны для хранения и обработки информации, необходимой для описания систем магнитного удержания, которые изучаются в настоящее время. И если уже в двумерных численных расчетах количество информации сравнимо с возможностями ЭВМ, то в трехмерном случае для получения надежных результатов, например, во временной задаче требуется еще большая точность аппроксимаций, чем в двумерном.

Анализ точности множества современных алгоритмов обнаруживает, что в уравнениях, описывающих магнитогидродинамическое течение, вычисление конвективного переноса является существенно менее точным, чем вычисление остальных членов. Более того, как следует из работ по численным методам для течений в обычной гидродинамике, конвективный перенос давно стал признанной проблемой. Вопрос о том, почему аппроксимация конвективной производной должна вызывать трудности, обсуждается в разд. III, где внимание читателя обращено на соответствующую литературу и сделан обзор современных работ по улучшению точности и устойчивости численных аппроксимаций конвективного члена. В разд. IV, V рассмотрен метод, который, насколько это возможно, вообще устраняет необходимость аппроксимации конвективной производной.

Аппроксимация конвективного переноса является главной темой данной главы, и это связано как с тем, что методика, описанная в разд. III -V, существенно улучшила точность численных решений МГД-уравнений, так и с тем, что эта проблема является фундаментальной и в общем виде еще не решенной.

Настоящая глава начинается с краткого введения в численные методы магнитной гидродинамики, включающего обзор опубликованных работ и применений.

II. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

К настоящему времени разработаны стандартные методы численного решения дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих нестационарное магнитогидродинамическое течение. В случае конечно-разностной аппроксимации дифференциальных уравнений решение ищется на заданной вычислительной сетке для последовательности временных шагов. Для моделирования эксперимента по плазменному фокусу [10, 41] и решения задачи о торцевых потерях в θ -пинче [46] использовались и другие методы, такие, как описание жидкости частицами. Однако в настоящее время ввиду повышенного интереса к вопросам гидромагнитной устойчивости различных магнитных конфигураций [3] и к процессам переноса в плазме, как правило, применяются только конечно-разностные методы.

Имеется стандартный подход и к другой задаче. Например, в пинчах основная часть плазмы стягивается к центру набегающим магнитным полем, оставляя за собой плазму низкой плотности в сильном магнитном поле. В плазме низкой плотности характерная скорость сигнала, которой является альвеновская скорость, очень велика, и поэтому условие Куранта [38] на шаг по времени является очень жестким. Для решения этой проблемы было предложено несколько способов. Борнс [6] выдвинул предложение о применении квазирелятивистской поправки к массе, в которой вместо скорости света подставляется искусственная низкая предельная скорость сигнала. Выбором подходящей величины скорости сигнала можно установить желаемую величину минимального шага по времени. Лю и Чу [33] при расчете пинча решают эту же проблему путем задания допустимой минимальной плотности в каждой ячейке на уровне 15% от первоначальной средней плотности. В настоящее время, по общему мнению, наилучший результат дает неявная аппроксимация уравнений движения. При неявной схеме величина временного шага уже не связана с максимальной скоростью сигнала в ячейке, так как уравнения являются безусловно устойчивыми. Неявные уравнения требуют совместного решения систем уравнений, для чего используются различные итерационные методы, такие, как метод дробных шагов, неявный метод переменных направлений и даже методы последовательных сверхрелаксаций [38]. Очевидно, все эти методы являются достаточно экономичными.

Наконец, существует проблема точного расчета конвективного переноса. Как будет показано в разд. III, имеются некоторые указания на то, что для устранения нелинейных неустойчивостей точность многих аппроксимаций конвективной производной необходимо умышленно уменьшить. Часто схемы получаются устойчивыми лишь при добавлении в разностные

уравнения значительной диффузии, что при современном уровне вычислительной техники еще более затрудняет проведение осмысленных трехмерных расчетов. В разд. III описаны такие более точные аппроксимации, являющиеся нелинейно устойчивыми. В разд. IV и V обсуждается другой подход, в котором конвективный перенос и, следовательно, необходимость добавления стабилизирующей диффузии существенно уменьшены за счет использования обобщенной сетки, описанной в следующем пункте. Там же приведены уравнения для эйлеровой, лагранжевой и обобщенной сеток, а также дан обзор МГД-расчетов, использующих все виды сеток, с тем чтобы в последующем обсуждение проходило уже на достаточно подготовленном основе.

А. ОПИСАНИЕ ЭЙЛЕРОВОЙ, ЛАГРАНЖЕВОЙ И ОБОБЩЕННОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СЕТОК

В разработке численного алгоритма для решения МГД уравнений первым шагом является выбор способа описания плазмы. Обычно плазму описывают с помощью конечного набора чисел, которые задают положение, скорость, плотность, температуру и напряженность магнитного поля в рассматриваемом физическом объеме. Эти числа запоминаются для массивов точек, которые образуют вычислительную сетку и называются узловыми. Каждая узловая точка связана с ячейкой, которая используется как контрольный объем при построении консервативных разностных схем. Вычислительная сетка может быть эйлеровой, лагранжевой или обобщенной. Один тип отличается от другого относительным движением точек сетки и жидкостями, а также сложностью разностных уравнений, аппроксимирующих пространственные производные.

Эйлерова сетка неподвижна в лабораторной системе координат, лагранжева неподвижна в системе координат, связанной с плазмой. Обобщенная сетка может быть эйлеровой, лагранжевой или ни той, ни другой: движение точек сетки по отношению к лабораторной системе координат и к плазме произвольно. Движение сетки и определяет величину конвективного переноса, который следует вычислить.

Ниже дано краткое описание эйлеровой, лагранжевой и обобщенной сеток вместе с соответствующими уравнениями для каждой из них. Затем приведен краткий обзор расчетов, использующих каждый тип сеток.

1. Эйлерова сетка

Эйлеровы сетки просты и во многих случаях экономичны. Поскольку сетка неподвижна, ее структура может быть выбрана так, чтобы упростить численную аппроксимацию пространственных производных.

ственных производных. Например, если сетка ортогональна, то может использоваться такой быстрый алгоритм, как метод дробных шагов [38]. Наиболее важно то, что для получения разностных уравнений используется консервативная форма МГД-уравнений, что обеспечивает точное сохранение массы, импульса, магнитного потока и энергии. В консервативной форме уравнения непрерывности, индукции, импульса и энергии записываются следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} - \mathbf{Q}) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{u} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}) = 0, \quad (4)$$

где ρ — массовая плотность плазмы, $\mathbf{u}$ — скорость плазмы, $\mathbf{B}$ — напряженность магнитного поля, $\mathbf{Q}$ — тензор напряжений, e — удельная полная энергия плазмы. Тензор напряжений $\mathbf{Q}$ и энергия плазмы в системе МКС имеют вид

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \mathbf{B} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} + P \right] \mathbf{I}, \quad (5)$$

$$e = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} / \mu + i, \quad (6)$$

где μ — магнитная проницаемость, i — удельная внутренняя энергия плазмы, P — давление плазмы, являющееся функцией ρ и i . При наличии больших градиентов скорости в тензор напряжений следует добавить вязкость [49]. Формула для вязкости дана Ландау и Лифшицем [28]. Иногда нужно учитывать и другие члены, связанные с переносом, такие, как диффузия вещества, теплопроводность, диффузия поля. Подробное обсуждение проблем, связанных с добавлением этих членов, содержится в обзорных статьях Робертса и Поттера [41] и Киллина [26].

2. Лагранжева сетка

Лагранжева сетка может быть образована из ячеек произвольной формы и размера. Двумерные ячейки, однако, обычно являются четырехугольными, поскольку такие ячейки связаны друг с другом простыми логическими связями. Некоторые преимущества имеют треугольные ячейки; они всегда выпуклы и внутри них интерполяция линейна. Однако при работе с треугольными зонами необходимо запоминать таблицу ближайших

соседних ячеек, поскольку между физическим и логическим расположением ячейки по отношению к ее окружению простой связи уже нет.

Получение разностных уравнений для лагранжевой сетки настолько тривиально, как для регулярной эйлеровой сетки. Чтобы получить аналоги обычных разностных уравнений, теперь требуется преобразование координат из криволинейного физического пространства к евклидову логическому пространству. Ввод обобщенных разностных уравнений для трехмерного МГД течения дан в разд. IV.

Для идеальной магнитной гидродинамики лагранжевы уравнения, соответствующие эйлеровым (1) — (4), записываются в виде

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0, \quad (8)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \nabla \cdot \mathbf{Q} = 0 \quad (9)$$

и

$$\rho \frac{dI}{dt} + P (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0. \quad (10)$$

Наиболее явное различие между этими уравнениями и эйлеровыми проявляется в отсутствии членов, соответствующих конвективному переносу. Это характерная черта лагранжевых уравнений, в которой проявляется то, что они описывают эволюцию отдельного элемента жидкости, а не изменение во времени параметров жидкости в выделенной точке пространства.

3. Обобщенная сетка

В методе обобщенной сетки относительное движение плазмы и вычислительной сетки может быть произвольным, т. е. скорость сетки можно выбирать независимо от скорости плазмы. Уравнения для обобщенной сетки получаются либо добавлением к лагранжевым вычислениям фазы перестройки ячеек, во время которой вычисляется конвективный перенос, связанный с относительным движением плазмы и сетки, либо с помощью записи эйлеровых уравнений (1) — (4) в движущейся системе координат.

Использование обобщенной сетки может давать большие преимущества. С помощью преобразования, предложенного Робертсом и Поттером [41], во многих важных задачах можно исключить движение плазмы как целого и тем самым уменьшить конвективный перенос. В рамках обобщенной сетки с по

мощью лагранжевой поверхности могут быть легко выделены границы раздела, например, между плазмой и вакуумом. В других случаях узловые точки можно расположить на поверхностях равного потока, что позволяет точно вычислить анизотропную теплопроводность [21]. Наконец, в области, где требуется хорошее разрешение, узловые точки можно «сгустить», даже если эта область движется в пространстве [24]. Короче говоря, обобщенная сетка обладает необычайной гибкостью, что позволяет приспособить вычисления к конкретной задаче.

Как уже упоминалось выше, уравнения на обобщенной сетке можно получить путем преобразования эйлеровых уравнений к движущейся системе координат. В системе отсчета, движущейся со скоростью u' , уравнения, которые соответствуют (1)–(4), записываются в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho(u - u')] + \rho(\nabla \cdot u') = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \cdot (u - u')B - \nabla \cdot Bu + B(\nabla \cdot u') = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho u(u - u') - Q] + \rho u(\nabla \cdot u') = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho e(u - u') - Q \cdot u] + \rho e(\nabla \cdot u') = 0. \quad (14)$$

В уравнении индукции слагаемые типа $\nabla \cdot (AB)$ означают, что оператор ∇ скалярно умножается на A , но дифференцирование распространяется как на A , так и на B . Если u' равно нулю, эти уравнения сводятся к консервативным уравнениям (1)–(4), а при u' , равном u , они переходят в лагранжевы уравнения (7)–(10).

Хирт и др. [24] предложили разделить уравнения на лагранжеву фазу и фазу конвективного переноса. При таком подходе изменение во времени в движущейся системе отсчета вычисляется в два этапа. В лагранжевой фазе решаются уравнения (7)–(10), а в конвективной фазе вычисляется конвективный перенос из интегральных уравнений

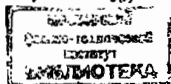
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_{s(V)} [\hat{n} \cdot (u - u') \rho] ds, \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u dV = \int_V \rho \frac{du}{dt} dV - \int_{s(V)} [\hat{n} \cdot (u - u') \rho u] ds, \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V B dV = \frac{d}{dt} \int_V B dV - \int_{s(V)} [\hat{n} \cdot (u - u') B] ds, \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho e dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho e dV - \int_{s(V)} [\hat{n} \cdot (u - u') \rho e] ds, \quad (18)$$

489431



где V — контрольный объем, $s(V)$ — его граница, $\hat{n}$ — внешняя единичная нормаль к ней. Как консервативная, так и двухфазная формы допускают произвольное движение плазмы и сетки, и обе переходят в лагранжеву форму при совпадении этих скоростей. В действительности, однако, двухфазная формулировка допускает неявную схему для уравнений движения и явную для конвективных членов. Поскольку наиболее сильные ограничения обусловлены устойчивостью уравнений движения, записи последних в неявной форме, даже если конвективные члены аппроксимируются явной схемой, дает выигрыш в скорости счета.

В. ОБЗОР ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

1. Эйлеровы вычисления

Со времени появления обзора Робертса и Поттера [41] метод эйлеровых сеток многократно применялся для моделирования МГД-процессов. Фримен и Лейн [14] в расчетах двумерных осесимметричных течений использовали метод, основанный на явном алгоритме продвижения по времени Лакса — Вендрофа [37] с добавлением в каждое разностное уравнение, соответствующее (1) — (4), диффузионного члена Лапидуса [29]. Позже этот метод применялся к моделированию взаимодействия плазменных сгустков с осесимметричным магнитным полем [13]. Робертс и Борис [40] сообщили о методе расчета трехмерного течения, в котором в явную схему продвижения по времени была введена процедура автоматической конечно-разностной аппроксимации пространственных производных. Линдемут и Киллин [31] опубликовали алгоритм для двумерного осесимметричного течения, в котором все члены уравнения, включая переносные члены, аппроксимируются неявной схемой. Решение таких уравнений осуществляется с помощью неявного метода переменных направлений [35]. Как и в более раннем коде Фримена и Лейна, для сглаживания решения в каждое уравнение добавляются диффузионные члены. Однако чисто численным оказывается только коэффициент диффузии вещества¹⁾.

Дюкс [11] сделал анализ двумерного вращения θ -пинча, вызываемого поперечными мультипольными полями. Уравнения движения в плоскости $z = \text{const}$ для осесимметричного θ -пинча решались с учетом эффекта Холла, но в пренебрежении эффектами анизотропии давления и инерции электронов. Лю и Чу [33] применили двумерный численный метод для ре-

¹⁾ I. Lindemuth, частное сообщение, 1975 г.

шения нестационарной задачи с граничными условиями в осесимметричном торе. Движение плазмы в полоидальной плоскости рассчитывается с помощью уравнений, учитывающих диффузию магнитного поля и тепла, но без учета вязкости. На границе считается заданной величина магнитного потока как функция времени. По мере того как плазма сжимается из-за нарастающего внешнего магнитного поля, за ее границей остается область плазмы с низкой плотностью. Чтобы избежать трудностей, связанных с большой альвееновской скоростью и соответствующими ограничениями на максимальный шаг по времени, в «вакуумной» области не допускалось падения плотности ниже 15% от первоначальной плотности. Диффузионные уравнения решаются с помощью двухшаговой схемы, в которой изменения коэффициентов диффузии вычисляются на первом шаге, а на втором шаге для определения зависимых переменных применяются уравнения в неявном виде. Уравнения движения также записываются неявно. Как уравнения диффузии, так и уравнения движения решаются с помощью неявного метода переменных направлений.

Вагнер и Мангеймер [47] сообщили о двумерном многожидкостном МГД-коде, который учитывает перенос, связанный с микротурбулентностью. В модель включены также анизотропная теплопроводность и термоэлектрическая генерация магнитных полей. Этот код был применен для моделирования обратного тока, образующегося при прохождении через плазму релятивистского электронного пучка.

О трехмерных нелинейных расчетах для идеальной магнитной гидродинамики сообщили Вутен и др. [49]. Они выполнили расчеты нелинейной эволюции винтовых мод с закрепленной границей, использующие алгоритм «с перешагиванием». Этот метод является обобщением метода численного решения линеаризованных МГД-уравнений, который рассматривали Бейтман и др. [4].

2. Лагранжевы вычисления

Если одномерные лагранжевы вычисления для пинчей выполняются уже в течение многих лет [18], то лишь недавно было сообщено о первом лагранжевом расчете в двух измерениях. В расчете нелинейной эволюции винтовой моды в токамаке, выполненном Уайтом и сотр. [48], прослеживалось движение границы несжимаемой плазмы, возникающее при возмущении неустойчивого равновесия. Использовалось цилиндрическое приближение тороидальной конфигурации плазмы и предполагалась винтовая симметрия. В такой геометрии из-за несжимаемости плазмы магнитное поле и скорость могут быть

вычислены с помощью потенциалов. Лагранжеву вычислительную сетку здесь образует замкнутая последовательность отрезков прямых линий, лежащих на поверхности плазмы.

3. Численные расчеты с помощью обобщенной сетки

Гертвек и Шнейдер [21] сообщили о методе расчета торцевых потерь в θ -плечах с использованием потоковых координат. В осевом направлении сетка стационарна, а по радиусу движется так, что в случае бесконечной проводимости относительная скорость между сеткой и магнитными поверхностями равна нулю. Для получения разностных уравнений дифференциальные уравнения сначала записываются в неортогональных и нестационарных координатах. В этих координатах дифференциальные уравнения кажутся довольно сложными, но они являются просто уравнениями (11)–(14) в движущейся системе отсчета. Как указывают Гертвек и Шнейдер [21], точное вычисление теплопроводности, направленной в основном вдоль поля, возможно только при использовании таких натуральных координат. Позднее Шнейдером [43] были представлены результаты расчета торцевых потерь с учетом теплопроводности.

Натуральные потоковые координаты используются также в методе, разработанном Андерсоном [3]. Однако вычислительная сетка в нем является ортогональной. Координатные линии перпендикулярны магнитным поверхностям, на каждом шаге по времени корректируются, что дает возможность для продвижения по времени использовать метод дробных шагов [38]. С помощью метода дробных шагов многомерный расчет можно выполнять как последовательность одномерных операций, причем для уменьшения численной диффузии удобно применить метод коактивного переноса с коррекцией потока, развитый Борсом и Буком [7].

Брекбилл и Прехт [9] для МГД-расчетов применили новую схему, в которой вычисления состоят из лагранжевой фазы и фазы конвективного переноса. С использованием квазилагранжевой сетки были выполнены двумерные расчеты z -плеча в координатах $r - 0$, а также осесимметричные расчеты разлета горячей диамагнитной таблетки в магнитном поле. В квазилагранжевой сетке относительное движение между сеткой и плазмой поддерживается на минимальном уровне, с тем чтобы уменьшить численную диффузию. В работе [8] были проведены осесимметричные расчеты θ -плеча с резкой границей, которых решение для вакуумного поля было сшито с течением плазмы через лагранжеву поверхность раздела.

Аналогичный метод для выделения поверхности плазма-вакуум содержится в работе Лю [32]. Чтобы воспроизвест

криволинейные границы области, он использовал эйлерову сетку с ячейками неправильной формы, а для выделения границы плазма — вакуум использовал лагранжевы узлы. Этот метод был применен для изучения отражения и фокусировки ударных волн на криволинейных стенках.

В разд. IV представлен метод расчета на обобщенной сетке трехмерного МГД-течения и там же даны результаты его применения для расчета вращающегося θ -пинча и внутренней винтовой моды.

III. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОНВЕКТИВНОГО ПЕРЕНОСА

А СВОЙСТВА АППРОКСИМАЦИИ КОНВЕКТИВНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

При использовании эйлеровой сетки основную трудность представляет точное вычисление конвективного переноса. Независимо от того, как записаны уравнения на эйлеровой сетке — в консервативной форме (i) — (4) или в неконсервативной форме (7) — (10), (15) — (18), — именно аппроксимация конвективной производной $u \cdot \nabla$ определяет общую точность и устойчивость решения. Может возникнуть вопрос: каким образом вносит ошибки вычисление конвективной производной, если для ее аппроксимации можно составить простые разностные схемы с той же формальной точностью, что и в других разностных уравнениях? Ответ заключается в том, что если разностные члены, соответствующие конвективной производной, записаны простым образом, то уравнения часто оказываются неустойчивыми. Вместо них должны использоваться другие, менее точные, но устойчивые разностные уравнения [37].

1. Нелинейная устойчивость

Анализ линейной устойчивости не всегда несет информацию об устойчивости разностных аппроксимаций конвективной производной. Необходимо, чтобы разностные аппроксимации были линейно устойчивыми, однако часто линейно устойчивые разностные уравнения являются нелинейно неустойчивыми. Например, Рихтмайер и Мортон [38] обсуждают применение разностной аппроксимации с перешагиванием к уравнению нелинейного конвективного переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0. \quad (19)$$

Аппроксимация с перешагиванием для этого уравнения записывается в виде

$$u_{i+1}^n = u_i^n + \frac{1}{2} (\delta t / \delta x) [(u_{i+1}^n)^2 - (u_{i-1}^n)^2] \quad (20)$$

и является линейно устойчивой [37]. Однако при численном решении она приводит к взрывной неустойчивости, когда в некоторых случаях решение возрастает экспоненциально с погрешностью, который ведет себя как $(\delta t)^{-1}$. Анализ проблемы показал, что аппроксимация с перешагиванием устойчива, если величина δt достаточно мала, когда «ошибки обрезания в разностных уравнениях генерируют достаточно малые возмущения». Разница между линейной и нелинейной проблемами, которая вызывает различие в устойчивости, заключается в том, что «поведение решения существенно зависит от относительной амплитуды возмущений» [38]. Аналогичные заключения при анализе аппроксимации с перешагиванием и аппроксимации Кунда-Никольсона для уравнения (19) сделал Форнберг [12].

2 Устойчивость численных аппроксимаций линейных дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. Теорема Крейса

При определении устойчивости численных аппроксимаций нелинейных уравнений следующим за анализом линейной устойчивости шагом является исследование численных аппроксимаций линейных дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. таких, как, например, уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Итогом этому исследованию подводит важная теорема Крейса [27], отношение которой к рассматриваемым вопросам будет видно в следующем пункте. Для наших целей содержание теоремы Крейса можно изложить следующим образом. Рассмотрим линейно устойчивую разностную аппроксимацию уравнения (21). Если в уравнение (21) подставить правильное решение, то правая и левая части будут различаться на величину порядка δx^m и δt^n , где δx — пространственный, а δt — временной шаг. Эти члены представляют собой ошибки обрезания аппроксимации. Тогда если в разностном уравнении существует или добавляется член диффузионного типа (с положительным коэффициентом диффузии), порядок которого по крайней мере на единицу ниже, чем ошибки обрезания, т. е. порядка δx^m и δt^{n-1} или ниже, то уравнение будет устойчивым. Уравнение с таким диффузионным членом Рихтмайер [37] назвал по-настоящему устойчивым. Очевидно, роль диффузии состоит в добавлении сглаживания в решение, так что возмущения, вызванные в разностном уравнении ошибками обрезания, поддерживаются на достаточно низком уровне.

3. Эвристическая теория устойчивости

Теорема Крейса показывает, что необходимым и достаточным условием устойчивости разностной аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами является наличие достаточной диффузии, которая подавляет возмущения, вызванные ошибками обрезания. Для разностных аппроксимаций нелинейных уравнений это условие является по крайней мере необходимым, как это следует из работы Хирта [22], где развивается эвристическая теория устойчивости. В ней с помощью разложения каждого члена в ряд Тейлора конечно-разностные уравнения сведены к дифференциальным уравнениям. В этих разложениях члены низшего порядка представляют исходные дифференциальные уравнения, которые нужно аппроксимировать. Члены высшего порядка по Δx и Δt являются ошибками обрезания. Именно Хирт установил, что некоторые ошибки обрезания связаны с нелинейными неустойчивостями разностных уравнений. Он указал, в частности, случаи, когда для течения жидкости устойчивость всей системы уравнений определяется скорее всего коэффициентом при второй пространственной производной плотности в дифференциальном уравнении, которое получается из разностной аппроксимации уравнения непрерывности. А именно когда коэффициент отрицателен, в уравнении непрерывности появляется антидиффузия, которая дестабилизирует всю систему уравнений. Для нелинейных уравнений, по-видимому, справедлива и обратная теорема Крейса, выведенная для линейных уравнений. Без добавления положительной диффузии того же порядка, что и ошибки обрезания, разностные уравнения являются неустойчивыми. Для устойчивости эти уравнения должны быть диссипативными или положительно устойчивыми в смысле теоремы Крейса. Эвристическая теория устойчивости Хирта с очевидностью указывает на существование второго необходимого условия устойчивости разностных уравнений: разностные уравнения должны быть не только линейно устойчивы, но и должны также удовлетворять теореме Крейса.

Хирт [22] дал анализ ошибок обрезания для различных разностных аппроксимаций конвективной производной плотности. Среди них имеются три типа аппроксимаций, которые линейно устойчивы [38]: дифференцирование против течения или дифференцирование по доворским ячейкам, дифференцирование с перешагиванием и неявное дифференцирование с пространственной центровкой. Список этих разностных аппроксимаций вместе с порядком точности дан в табл. 1. В табл. 2 приведены соответствующие коэффициенты при вторых производных плотности, включая нелинейные члены. В каждом случае нелинейные

члены пропорциональны градиентам скорости, а форма уравнения непрерывности, для которого составляется аппроксимация, по-видимому, не должна иметь значения. (Справедливо также и то, что в каждом случае нелинейные члены пропорциональны градиентам относительной скорости u'' между плазмой и численной сеткой. Поэтому есть возможность перейти к системе координат, где нелинейные члены пренебрежимо малы, что может использоваться в методе обобщенной сетки

Таблица

Разностные аппроксимации уравнения непрерывности

Название	Разностное уравнение	Ошибка обрезания
а. Дифференцирование вверх по потоку	${}^n\rho_I = {}^{n-1}\rho_I - \frac{\delta t}{\delta x} \left(({}^n\rho_{I+\frac{1}{2}}) \times \right. \\ \left. \times {}^n u_{I+\frac{1}{2}} - ({}^n\rho_{I-\frac{1}{2}}) {}^n u_{I-\frac{1}{2}} \right) \\ ({}^n\rho_{I+\frac{1}{2}}) = \begin{cases} {}^n\rho_{I+1}, & u_{I+\frac{1}{2}} \leq 0, \\ {}^n\rho_I, & u_{I+\frac{1}{2}} > 0 \end{cases} $	$O(\delta x^2, \delta t^2)$
б. Дифференцирование с перешагиванием	${}^{n+1}\rho_I = {}^{n-1}\rho_I - \\ - \frac{\delta t}{\delta x} ({}^n(\rho u)_{I+1} - {}^n(\rho u)_{I-1}) $	$O(\delta x^2, \delta t^2)$
в. Неявное дифференцирование с пространственной центровкой	${}^{n+1}\rho_I = {}^n\rho_I - \\ - \frac{\delta t}{2\delta x} ({}^{n+1}(\rho u)_{I+1} - {}^{n+1}(\rho u)_{I-1}) $	$O(\delta x^2, \delta t^2)$

Таблица

Коэффициенты диффузии вещества, связанные с ошибками обрезания

Название	Коэффициент диффузии вещества ¹⁾
а. Дифференцирование вверх по потоку	$\frac{\delta x}{2} u'' - \frac{\delta t}{2} u''^2 - \frac{\delta x^2}{2} \frac{\partial u''}{\partial x} - \frac{\delta x^4}{8} \frac{\partial^2 u''}{\partial x^2} - \frac{\delta x^4}{24} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} $
б. Дифференцирование с перешагиванием	$- \frac{\delta x^2}{2} \frac{\partial u''}{\partial x} - \frac{\delta x^4}{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} $
в. Неявное дифференцирование с пространственной центровкой	$\frac{\delta t}{2} u''^2 - \frac{\delta x^2}{2} \frac{\partial u''}{\partial x} - \frac{\delta x^4}{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} $

¹⁾ u'' — относительная скорость между узлами сетки и плазмой ($u'' = u - u'$).

Как видно из табл. 2, при достаточно больших градиентах скорости коэффициенты диффузии вещества становятся отрицательными. Этот результат находится в согласии с данными Рихтмайера [37]. Он помогает также понять, каким образом добавление вязкости в уравнение для импульса увеличивает устойчивость разностных уравнений, поскольку влияние вязкости состоит в уменьшении градиентов скорости.

Аналогичные ошибки обрезания были найдены в разностных аппроксимациях конвективных производных импульса, магнитного потока и энергии в уравнениях (16) — (18).

Очевидно, что трудности с большинством аппроксимаций конвективного переноса состоят в том, что последние не удовлетворяют второму необходимому условию устойчивости, определяемому теоремой Крейса. Как показывает анализ Хирта, нарушение предположений теоремы Крейса часто приводит к нелинейным численным неустойчивостям.

Б. НЕЛИНЕЙНО УСТОЙЧИВЫЕ АППРОКСИМАЦИИ КОНВЕКТИВНОГО ПЕРЕНОСА

1. Коррекция ошибок обрезания

Амслен и Хирт [2], а также Ривард и др. [39] применили эвристическую теорию устойчивости Хирта к коррекции ошибок обрезания разностных уравнений для течения жидкости. Например, для стабилизации аппроксимации с перешагиванием для уравнения непрерывности (табл. 1, п. «б») был добавлен диффузионный член с коэффициентом диффузии

$$\kappa = \alpha \frac{1}{2} \delta x^2 \frac{\partial u''}{\partial x}, \quad (22)$$

где величина α обычно равна 2. Диффузия, добавленная для стабилизации разностного уравнения, не уменьшает порядка точности первоначальной разностной аппроксимации. Эта диффузия должна быть достаточно заметной, чтобы компенсировать ошибки обрезания низшего порядка и добавить некоторую положительную диффузию, аннулирующую также ошибки и высшего порядка. Такой подход удовлетворяет требованиям теоремы Крейса, полученной для линейных уравнений с переменными коэффициентами, и это вызывает к нему определенное доверие.

Ривард и соотр. [39] применили аналогичную коррекцию ошибок обрезания ко всем уравнениям жидкости. Несколько аналогичный подход, в котором диффузия добавлялась в каждое уравнение, выбран Лапидусом [29]. Однако в его подходе и приложениях к МГД-расчетам [14, 31] добавлявшаяся диффузия определялась не из анализа ошибок обрезания.

2. Перенос с коррекцией потока

Один из методов аппроксимации конвективного переноса был развит Борисом и Буком [7]. Детально он обсуждается в гл. III. Их метод основан на требовании, чтобы решение р-ного уравнения для конвективного переноса массы и энергии всюду было положительным. Метод включает два шага. В первом шаге в разностную аппроксимацию конвективной производной добавляется большая, не зависящая от скорости диффузия. Добавление диффузии обеспечивает положительное решение, полученное на первом шаге. На втором шаге диффузия, добавленная на первом шаге, вычитается, но с условием, чтобы полученное решение было всюду положительным.

В одномерном случае конвективная производная в уравнении непрерывности аппроксимируется на первом шаге уравнением

$$\begin{aligned} \bar{p}_I = & p_I - \frac{1}{2} \left(u'' \frac{\delta t}{\delta x} \right) (p_{I+1} - p_{I-1}) + \\ & + \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \left(u'' \frac{\delta t}{\delta x} \right)^2 \right] (p_{I+1} - 2p_I + p_{I-1}), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\bar{p}$ обозначает решение, получаемое на этом шаге. Это разностное уравнение является уравнением Лакса — Вендроса [37], к которому добавлена не зависящая от скорости диффузия. С точностью до первого порядка по δx и δt разностное уравнение аппроксимирует дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -u'' \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{8} \left(\frac{\delta x^2}{\delta t} \right) \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right). \quad (2)$$

Таким образом, коэффициент диффузии в не зависящем от скорости диффузионном члене равен $(1/8)(\delta x)^2/\delta t$. На втором шаге алгоритма, когда вычисляется отрицательная диффузия, этот член вычитается. Отрицательная диффузия (или антидиффузия) вычисляется при условии, что второй шаг не создает в решении новых максимумов и минимумов и что он не выделяет уже существующие экстремумы. На антидиффузионном шаге потоки вещества и энергии между парами ячеек вычисляются с сохранением общей массы и энергии. Антидиффузионные потоки вещества f определяются из уравнения

$$f_{I+1/2} = \text{sign } \Delta_{I+1/2} \max \{0, \min (\Delta_{I-1/2} \text{sign } \Delta_{I+1/2}, \frac{1}{8} |\Delta_{I+1/2}|, \Delta_{I+1/2} \text{SGN } \Delta_{I+1/2})\}, \quad (3)$$

где

$$\Delta_{I+1/2} = \bar{p}_{I+1} - \bar{p}_I$$

Символ « $!/\delta$ » означает, что производится коррекция высшего порядка, так чтобы на втором шаге антидиффузия компенсировала добавленную на первом шаге диффузию вплоть до четвертого порядка по δx и δt , если это возможно. Новая плотность затем вычисляется из уравнения

$$^{n+1}\bar{\rho}_I = \bar{\rho}_I - f_{I+\frac{1}{2}} + f_{I-\frac{1}{2}}. \quad (26)$$

Аналогичные уравнения записываются и для энергии.

Уравнение потока (25) не перераспределяет локальные минимумы и максимумы на втором шаге. Там, где изменения $\bar{\rho}_I$ монотонны, антидиффузия продолжается до тех пор, пока либо $\Delta_{I-\frac{1}{2}}$, либо $\Delta_{I+\frac{1}{2}}$ не станут нулями, т. е. пока $\bar{\rho}_I$ не будет равно $\bar{\rho}_{I+1}$ или $\bar{\rho}_{I-1}$. Поскольку минимальная по всей области величина $\bar{\rho}_I$ не может быть сведена к нулю, а никакая другая величина не может быть сделана меньше минимальной, видно, каким образом сохраняется положительность решения $^{n+1}\rho$.

Приближения конвективной производной с коррекцией потоков применялись также для расчета двух- и трехмерного течения, где для развития решения во времени использовался алгоритм с расщеплением временного шага. В таких вычислениях вдоль каждого ортогонального направления координат циклическим образом решаются одномерные разностные уравнения. При этом можно использовать одномерную формулировку переноса с коррекцией потока.

IV. МЕТОД ОБОБЩЕННОЙ СЕТКИ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

В этом разделе представлен метод вычисления трехмерных МГД-потоков на обобщенной сетке. Уравнения движения, как предложил Хирт и др. [24] и как уже отмечалось в разд. II, включают две фазы. В первой фазе точно решаются лагранжевы уравнения движения (7)—(10), как их следовало бы решать при чисто лагранжевых вычислениях. На второй фазе перенос вещества, импульса, потока и энергии, связанный с относительным движением плазмы и сетки, вычисляется на основе уравнений (15)—(18). (Вторая фаза характеризуется как фаза подстройки сетки, где подстройка производится по отношению к лагранжевой системе координат, а не к фиксированной эйлеровой.)

Закон распределения скоростей u' точек сетки совершенно произволен. При определенном выборе u' обобщенная сетка может быть сделана эйлеровой, лагранжевой, соответствующей потоковым координатам [21] или квазилагранжевой [9]. В общих чертах квазилагранжев закон для u' будет описан в одном из пунктов этого раздела.

Содержание этого раздела посвящено разработке обобщенных разностных уравнений для лагранжевой фазы вычисления. Эти уравнения описывают динамическую эволюцию системы, должны быть решены независимо от того, какой алгоритм используется в фазе подстройки. Здесь будет показано, как вводятся эти уравнения, как они решаются, как ставятся граничные условия и каковы их свойства.

А. РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЛАГРАНЖЕВОЙ ФАЗЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ НА ОБОБЩЕННОЙ СЕТКЕ

Разностные уравнения для непрямоугольных сеток могут быть выведены с помощью метода конечных элементов. Согласно Зенкевичу [52], область течения подразделяется на элементы, причем каждый элемент связан с несколькими точками сетки, в которых хранятся значения переменных течения. В данных точках каждого элемента переменные определяются интерполяцией, так что между элементами они являются непрерывными. Для вывода уравнений движения записывается функционал, который минимизируется в области течения, причем значения переменных в точках сетки выступают как параметры минимизации. Для МГД-течения подходящим функционалом является лагранжиан.

В противоположность этому подходу вывод, представленный здесь, исходит непосредственно из уравнений движения. Как в методе конечных элементов, переменные определяются на сетке, но кинематические уравнения аппроксимируются с помощью преобразования координат, подобно тому как это делал Шульц [44]. Формулировка лагранжевых разностных уравнений завершается выводом динамических уравнений с использованием принципа Даламбера и принципа виртуальной работы по Галу [16].

1. Кинематические уравнения

Кинематическая эволюция термодинамических переменных содержится в уравнениях непрерывности, индукции и уравнениях для внутренней энергии (7), (8), (10). Эти уравнения описывают эволюцию термодинамических переменных ρ , B и I при расширении и прокручивании плазмы. Для описания полной динамики системы необходимо совместно с кинематическими уравнениями решать и уравнение (9) для импульса. При вводе полной системы разностных уравнений кинематические динамические уравнения удобно рассматривать отдельно. Разностную аппроксимацию уравнений (7), (8), (10) получим независимо от разностного уравнения для (9).

Разностные уравнения решаются на вычислительной сетке, которая состоит из шестигранных ячеек, описанных Прехтом [36]. Эти ячейки голоморфны единичному кубу. Преобразование координат точки единичного куба (ξ, η, ν) в точку физического пространства x является кубическим и имеет вид

$$x = [x^1 \xi (1 - \eta) + x^2 \xi \eta + x^3 (1 - \xi) \eta + \\ + x^4 (1 - \xi) (1 - \eta)] (1 - \nu) + [x^5 \xi (1 - \eta) + \\ + x^6 \xi \eta + x^7 (1 - \xi) \eta + x^8 (1 - \xi) (1 - \eta)] \nu, \quad (27)$$

где x^i — положение i -й вершины вычислительной ячейки, внутри которой лежит x . Если известны как x^i , так и $\dot{x}^i = u^i$, то элементы тензора деформаций $S_{\alpha\beta}$ внутри ячейки определяются как

$$S_{\alpha\beta} = \partial u_\alpha / \partial x_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \quad (28)$$

Кинематическое описание течения становится самосогласованным, если термодинамические переменные считать постоянными внутри каждой ячейки и разрывными на ее границах, а $S_{\alpha\beta}$ в уравнениях (7), (8), (10) заменить средней по ячейке величиной. Средняя величина $S_{\alpha\beta}$ по ячейке вычисляется из уравнения

$$\langle S_{\alpha\beta} \rangle = \frac{1}{V} \int_V dV S_{\alpha\beta}, \quad (29)$$

и, если вместо $S_{\alpha\beta}$ подставить $\langle S_{\alpha\beta} \rangle$, кинематические уравнения принимают вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \langle S_{ii} \rangle = 0, \quad (30)$$

$$\rho \frac{di}{dt} + P \langle S_{ii} \rangle = 0, \quad (31)$$

$$\frac{dB_\alpha}{dt} + B_\alpha \langle S_{ii} \rangle - B_i \langle S_{ia} \rangle = 0, \quad (32)$$

где по повторяющимся индексам i, j, k предполагается суммирование. Временные производные или временные уровни других членов, появляющихся в этих уравнениях, пока не указываются и поэтому не аппроксимируются.

Интеграл в (29) вычисляется с помощью записи подынтегрального выражения в переменных ξ, η и ν :

$$dV \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) = d\xi d\eta d\nu \frac{\partial (u_\alpha, x_{I_1}, x_{I_2})}{\partial (\xi, \eta, \nu)} J, \quad (33)$$

где $\beta j k$ — циклическая перестановка 1, 2, 3. Объемом интегрирования в пространстве ξ, η, ν является единичный куб.

Интегрирование по нему уравнения (29) дает линейное выражение для каждого элемента тензора деформаций

$$\langle S_{\alpha\beta} \rangle = \frac{1}{V} \sum_{l=1}^8 c_{\beta}^l u_{\alpha}^l \quad (1)$$

где l отмечает вершины ячеек, а c_{β}^l — коэффициенты, которые зависят только от геометрии ячеек.

Геометрические коэффициенты c_{β}^l , число которых для каждой ячейки равно 24, представляют геометрию ячейки в форме, пригодной для хранения в памяти ЭВМ. Они появляются во всех уравнениях, которые связаны с геометрией, как, например, при вычислении объема ячейки

$$V = \sum_{l=1}^8 c_{\alpha}^l x_{\alpha}^l, \quad \alpha = 1, 2 \text{ или } 3, \quad (2)$$

или при вычислении градиентов термодинамических переменных в вершинах ячеек. Заново они вычисляются и запоминаются только в том случае, когда вычислительная сетка движется.

В компактной векторной форме геометрические коэффициенты записаны в приложении.

2. Динамические уравнения

После аппроксимации уравнения для импульса (9) с помощью обобщенного метода Гюда [16], предложенного для получения разностных уравнений в двумерной гидродинамической системе разностных уравнений становится замкнутой. Для получения связи между изменением потенциальной энергии в числительных ячейках и соответствующим ускорением их вершин в этом методе используются вычисление виртуальной работы принципа Даламбера.

Рассмотрим небольшое уточнение разработанного в предыдущем пункте описания течения. Каждой вершине теперь приписывается масса m^l , которая будет вычисляться по некоторому, пока еще не определенному правилу в соответствии с распределением масс по соседним с вершиной l ячейкам. Определим потенциальную энергию ячейки уравнением

$$W = \int dV p w, \quad (3)$$

где w — удельная потенциальная энергия:

$$w = I + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} / 2\mu_0. \quad (4)$$

Уравнение эволюции для w , соответствующее уравнению (10) для внутренней энергии, записывается в виде

$$\rho \frac{dw}{dt} - (\mathbf{Q} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (38)$$

Оно будет использовано для вычисления изменений потенциальной энергии ячейки, соответствующих смещениям вершины с номером l .

Интегрированием уравнения (38) по объему ячейки и по интервалу δt вычисляется изменение W за время δt :

$$\delta W = W(t + \delta t) - W(t) = \int dV' \int_t^{t+\delta t} dt' Q_{lt} S_{lt}. \quad (39)$$

Тензор деформаций постоянен внутри ячейки и может быть вынесен из объемного интеграла. Комбинируя (34) и (39), получаем выражение для остающегося объемного интеграла, так что

$$\delta W = \int_t^{t+\delta t} dt' \left(Q_{lt} \sum_{i=1}^n c_i' u_i^t \right). \quad (40)$$

Если заменить Q_{lt} и c_i' некоторыми средними по временному интервалу величинами, то получится выражение, связывающее изменения в W со смещениями вершин:

$$\delta W = \left(\bar{Q}_{lt} \sum_{i=1}^n c_i^t \right) \delta s_i^t, \quad (41)$$

где δs_i^t определяются из

$$\delta s_i^t = \int_t^{t+\delta t} dt' u_i^t. \quad (42)$$

Уравнение (41) означает, что изменение в потенциальной энергии равно со знаком минус произведению силы $\mathbf{F}^l$, с которой ячейка действует на каждую вершину l , и смещения этой вершины:

$$\delta W = - \sum_{l=1}^n \mathbf{F}^l \cdot \delta \mathbf{s}^l. \quad (43)$$

Действующая на вершину сила связана с ускорением вершины уравнением Даламбера

$$(\mathbf{F}^l - m^l \ddot{\mathbf{u}}^l) \cdot \delta \mathbf{s}^l = 0. \quad (44)$$

Поэтому компоненты ускорения вершины l , обусловленные внутренними напряжениями в ячейке, определяются отношением δW к произведению массы m_l^i на компоненты δs^i :

$$\dot{u}_a^l = -\frac{1}{m_l^i} \bar{Q}_{ai} c_i^l. \quad (1)$$

Результирующее ускорение вычисляется с помощью суммирования вкладов всех восьми соседних ячеек и выражается формулой

$$\dot{u}_a^l = -\frac{1}{m_l^i} \sum_k (\bar{Q}_{ai} c_i^{lk}), \quad (2)$$

где c_i^{lk} — компоненты геометрических коэффициентов, относящихся к l -й вершине k -й ячейки.

Легко продемонстрировать некоторые свойства уравнений движения. Например, можно показать, что если просуммировать геометрические коэффициенты по вершинам ячеек l , в результате будет нуль. Таким образом, вклад внутренних напряжений ячейки в изменение импульса плазмы равен нулю и импульс сохраняется. Аналогично легко показать, что в суммировании геометрических коэффициентов в заданной вершине по всем окружающим ячейкам получается нуль. Так образом, вершина не испытывает ускорения, когда напряжения постоянны.

3. Дифференцирование по времени и сохранение энергии

Разностные уравнения по времени являются безусловными устойчивыми, если они неявные. Если они во времени центрируются, то точно сохраняются магнитный поток и энергия. Так как эволюция внутренней энергии вычисляется отдельно, между магнитным полем и плазмой нет ложного обмена энергией тем самым достигается локальное сохранение энергии в смысле Фромма [15].

Однако центрированные во времени уравнения не используются. В одномерных исследованиях, которые предшествовали формулировке двух- и трехмерных алгоритмов, было установлено, что неявные уравнения с первым порядком аппроксимации обладают меньшей дисперсией, чем уравнения со вторым порядком, причем не являются заметно более диффузными. Чтобы получить точное сохранение энергии в уравнениях с первым порядком аппроксимации, вместо уравнения (31) для внутренней энергии плазмы решается уравнение для потенциальной энергии (38). Для уравнений непрерывности, потенциальной энергии и магнитной индукции записываются неявные в

меньшая пространственная аппроксимации:

$$^{n+1}p - ^np + ^{n+1}p^{n+1} \langle S_{ii} \rangle \delta t = 0, \quad (47)$$

$$^{n+1}p (^{n+1}w - ^nw) - \bar{Q}_{ii}^{n+1/2} \langle S_{ii} \rangle \delta t = 0, \quad (48)$$

$$^{n+1}B_a - ^nB_a + (^{n+1}B_a^{n+1} \langle S_{ii} \rangle - ^{n+1}B_i^{n+1} \langle S_{ii} \rangle) \delta t = 0, \quad (49)$$

где компоненты тензора напряжений даются выражением

$$\mu \bar{Q}_{\alpha\beta} = ^{n+1/2}B_\alpha ^{n+1/2}B_\beta - (^{n+1}P_\mu + ^{n+1}B_i ^nB_i) \delta_{\alpha\beta}. \quad (50)$$

Временной слой каждого члена в этих уравнениях обозначен левым верхним индексом, причем n обозначает временной слой t , $n+1$ — временной слой $t + \delta t$. Временные слои элементов тензора деформаций соответствуют временным слоям содержащихся в них скоростей. Члены, центрированные во времени, обозначены $n + 1/2$ и вычисляются как средние арифметические слоев n и $n+1$. Уравнение для импульса (46) аппроксимировано следующим образом:

$$^{n+1}u_a^i - ^nu_a^i = - \sum_k (\bar{Q}_{ai}^k c_i^{ik}) \frac{\delta t}{m^i}, \quad (51)$$

где массы вершины m^i равны средним арифметическим масс восьми соседних ячеек.

Полная энергия при этом сохраняется точно так, как сумма изменений потенциальной энергии δW по всем ячейкам равна сумме по всем вершинам изменений кинетической энергии δKE . Действительно, рассмотрим изменение кинетической энергии вершины i :

$$\delta KE^i = ^{n+1/2}u_i^i \sum_k (\bar{Q}_{ii}^k c_i^{ik}) \delta t. \quad (52)$$

Сумма соответствующих изменений потенциальной энергии в восьми соседних ячейках равна

$$\delta W = \sum_k (\bar{Q}_{ii}^k V^{n+1/2} \langle S_{ii} \rangle^k) \delta t. \quad (53)$$

Если учесть уравнение (34), то видно, что сумма δW и δKE равна нулю:

$$\delta W + \delta KE = \sum_k \bar{Q}_{ii}^k (- ^{n+1/2}u_i^i c_i^{ik} + V^{n+1/2} \langle S_{ii} \rangle^k) \delta t = 0. \quad (54)$$

Таким образом, полная энергия по вычислительной сетке точно сохраняется.

Внутренняя энергия плазмы получается вычитанием энергии магнитного поля из всей потенциальной энергии:

$$^{n+1}I = ^{n+1}w - \frac{1}{2} ^{n+1}[(B \cdot B)/\mu\mu]. \quad (55)$$

Так как положение вершины меняется в соответствии с уравнением первого порядка точности

$$^{n+1}x_a^i = ^n x_a^i + ^{n+1}u_a^i \delta t, \quad (4)$$

а не в соответствии с центрированным по времени уравнением внутренней энергии накапливается ошибка порядка δt^2 . Там где это вызывает неудобство, эту ошибку можно устранить, если уравнения (47) — (49) и (55) центрировать по времени. В теории напряжений (50) временные слоны уже выбраны в соответствующей форме.

4. Решение неявных уравнений движения

В несжимаемом потоке поле скоростей бездивергентно. Если $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ в начальный момент, то распределение давления, которое обеспечивает равенство нулю $\nabla \cdot \mathbf{u}$ и в дальнейшем, является решением уравнения Пуассона

$$\nabla^2 P' = R, \quad (5)$$

где величина P' равна P/ρ , а R содержит объемные силы вязкие напряжения, если они имеются. В методе, разработанном Харлоу и Уэлчем [20], перед решением явного разностного уравнения для импульса в каждом цикле решается уравнение для P' . В результате поле скоростей получается бездивергентным.

Несколько позже было отмечено [19], что в уравнениях, которые могут быть использованы для потока с произвольными скоростями, требуются относительно небольшие изменения сравнительно с уравнениями для несжимаемого потока. В методе, использующем эти уравнения, плотность в уравнении сохраняется, а также плотность и скорость в уравнении непрерывности рассматриваются неявно. Для несжимаемой жидкости получающиеся при этом уравнения сводятся к обычным уравнениям несжимаемого потока. Для сжимаемого потока они представляют собой просто неявную формулировку обычных уравнений Эйлера.

В одном из вариантов эйлера метода для потока с произвольными скоростями [24] решение уравнения Пуассона для давления получается в результате совместного решения уравнений непрерывности и движения. Этот метод можно применить и к лагранжевым разностным уравнениям. Кроме того, его легко распространить и на МГД-поток.

При использовании этого метода в магнитной гидродинамике магнитное поле в уравнениях индукции и движения рассматривается неявным образом. Согласованное решение уравнений непрерывности, индукции и движения получают итерационно.

схеме последовательных сверхрелаксаций, разработанной Хиртом и др. [24]. Итерационными переменными в этой схеме являются плотность и напряженность магнитного поля. В пределах ячейки каждая из этих переменных подбирается так, чтобы уменьшить невязку в уравнениях непрерывности и индукции (7), (8). Соответственно изменения скорости вершины ячейки, обусловленные изменениями в тензоре напряжений, вычисляются из уравнения движения. Изменения в скорости вершины ячейки через тензор деформаций влияют на невязку в соседних ячейках так, что в процессе итераций она распространяется от ячейки к ячейке, как при итерациях Гаусса — Зайделя.

Подгонка внутри каждой ячейки выполняется итерациями Ньютона — Рафсона. При этом аналитически, формальным дифференцированием уравнений движения вычисляются производные невязки по итерационным переменным и затем решается полная система четырех уравнений. Производные учитывают не только прямую зависимость невязки от итерационных переменных, но также и неявные зависимости через тензор деформаций. Как отмечали Хирт и др. [24], учет неявных зависимостей ограничивает диапазон изменений итерационных переменных и делает итерации устойчивыми для всех скоростей сигнала. В явном виде при совместном решении нескольких уравнений необходимо по ряду причин вычислять все элементы матрицы.

Несмотря на то что неявные уравнения устойчивы и допускают увеличение шага по времени, на практике шаг ограничен неравенством

$$|u|\delta t < f\delta x, \quad 0 < f < 1/4. \quad (58)$$

Относительные изменения термодинамических величин за временной шаг δt при выполнении условий (58) имеют порядок f . Если f равно или меньше 0,25, то, например, в случае сжимаемых потоков с низкой плотностью, чтобы достичь относительную ошибку в решениях уравнений непрерывности и индукции до величин $\sim 10^{-5}$, достаточно десяти итераций.

5 Граничные условия

Если граница представляет собой замкнутую проводящую поверхность и нормальная компонента магнитного поля на границе равна нулю, то граничным условием является

$$u \cdot \hat{n} < 0, \quad (59)$$

где $\hat{n}$ — внешняя нормаль к поверхности, а u — скорость граничной вершины. Обычно, однако, недостаточно, чтобы нормаль-

ная скорость просто удовлетворяла уравнению (59). Во-первых, на границе при одностороннем вычислении напряжений на ионичные вершины действуют фиктивные тангенциальные напряжения, связанные с ошибками обрезания. Во-вторых, уравнение движения имеет только первый порядок точности по величине порядка δt^2 за каждый шаг по времени. Поэтому и дается более общая трактовка границы, которая является оценкой условий свободной поверхности на границу со своим проскальзыванием [23]. Граница плазмы рассматривается как свободная поверхность, на которую со стороны проводящей стенки действуют силы связей.

В случае свободной поверхности соответствующее граничное условие для напряжений имеет вид

$$\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0.$$

Для того чтобы удовлетворить (60), сетку несколько расширяют, как это описано у Хирта и др. [23], а тензор напряжений $\mathbf{Q}$ экстраполируют на некоторое расстояние от границы. Экстраполяция компонент поля проводится с использованием того, что произведение $\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ на границе равно нулю, а при числении $\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{n}}$ вне сетки необходимо учитывать геометрические поправки на кривизну границы.

Граничное условие для нормальной компоненты скорости (59) удовлетворяется путем вычисления нормальных сил со стороны связей. Если уравнение границы имеет вид

$$f(\mathbf{x}) = 0,$$

то смещение граничной вершины $\hat{\mathbf{n}}\lambda$, связанное с действием сил связей, определяется решением уравнения

$$f(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{u}}\delta t + \lambda\hat{\mathbf{n}}) = 0,$$

где $\hat{\mathbf{u}}$ включает вклады всех внутренних напряжений, действующих на границу. Например, если граница представляет собой прямой цилиндр круглого сечения, то λ определяется уравнением

$$\lambda^2 + 2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u} - R/\delta t)\lambda + [\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}} 2R(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}})]/\delta t = 0,$$

в котором корень $\lambda \leq 0$ соответствует уравнению (59). Все выбирается корень меньшей величины. Большой корень соответствует перемещению вершины в диаметрально противоположную точку поверхности.

В ФАЗА ПОДСТРОЙКИ В ВЫЧИСЛЕНИЯХ НА ОБОБЩЕННОЙ СЕТКЕ

Перенос вещества, импульса, магнитного потока и энергии от ячейки к ячейке вычисляется из уравнений (15) — (18). Хирт с сотр. [24] и Прехт [36] вывели двумерные разностные уравнения для конвекции. Обобщение на случай переноса магнитного потока описано Брекбиллом и Прехтом [9]. Амсден и Хирт [2], кроме того, дали описание двумерного вычислительного кода. Эти подробные работы касаются в основном стандартного и хорошо известного метода расчета конвективного переноса, и здесь нет надобности в дополнительном его описании.

Если в методе обобщенных сеток скорость точек сетки u' равна нулю и сетка является эйлеровой, то он страдает всеми недостатками, присущими любым другим эйлеровым расчетам. При этом численная диффузия, связанная с дифференцированием по донорским ячейкам, сильно уменьшает общую точность вычислений. Применение методики коррекции ошибок обрезания, разработанной для расчета конвективного переноса Ривардом и др. [39], должно существенно улучшить точность на фазе подстройки. Эта методика сравнительно просто переносится на двух- и трехмерные МГД-расчеты.

Наше рассмотрение проблемы точности на фазе подстройки будет по возможности кратким. При уменьшении относительной скорости между плазмой и сеткой ошибки обрезания для всех приведенных в разд. III аппроксимаций конвективной производной уменьшаются. Таким образом, квазилагранжев алгоритм для скоростей узлов сетки, когда разность $u - u'$ всюду мала, по существу, уменьшает перенос настолько, что ошибки связанные с его аппроксимацией, становятся несущественными. Ниже в общих чертах описан квазилагранжев алгоритм, использующий сглаживание.

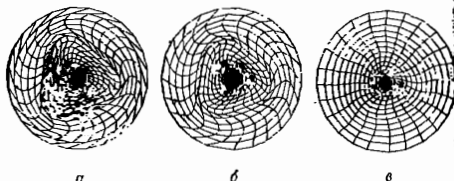
1. Квазилагранжева сетка

Квазилагранжевы вычисления используют способность лагранжевой сетки искажаться, не влияя на точность обобщенных разностных уравнений. После некоторого исследования преобразования координат, даваемого уравнением (27), читатель может убедиться, что формальная точность разностных уравнений сохраняется до тех пор, пока каждая ячейка сетки выпуклая. Формальная точность теряется, когда сетка становится вогнутой, так как для вогнутой сетки нет отображения в натуральные координаты. Таким образом, в любом квазилагранжевом вычислении смысл подстройки заключается в устранении вогнутых ячеек. Для большинства течений это требует небольшого относительного движения между плазмой и сеткой с усло-

вием, что для сетки используется подходящий алгоритм. Один из таких алгоритмов является сглаживание, которое в общих чертах описывается в следующем пункте.

2. Алгоритм сглаживания

Наиболее удачным нашим алгоритмом для квазилагранжевых вычислений является алгоритм сглаживания, впервые предложенный в 1972 г. П. Брауном (неопубликовано) и описанный



Фиг. 1. Влияние алгоритма сглаживания на искаженную лагранжеву сетку.

Лагранжева сетка показана на фиг. 1, а, сетка после 10- и 50-кратного использования алгоритма показана на фиг. 1, б, в. Все ячейки сетки, показанной на фиг. 1, б, в, выпуклые. Это показывает, что лагранжева сетка преобразуется в пригодную для расчетов сетку с помощью малого числа подстроек.

в работе Брекбилла и Прехта [9]. Этот алгоритм выводит сетку с помощью минимизации интеграла

$$I = \int dV' [(\nabla \xi)^2 + (\nabla \eta)^2 + (\nabla \psi)^2] \quad (6)$$

по вычислительной сетке. Уравнение Эйлера, соответствующее такой минимизации, может быть решено непосредственно на установочной зависимых и независимых переменных [45].

Наш подход состоит в применении метода конечных элементов. Интеграл I вычисляется с помощью образования элементов, в которых ξ , η , ψ являются кусочно-непрерывными функциями физических координат x , y , z . Затем интеграл минимизируется по отношению к координатам каждой точки сетки как параметрам. В результате одного перебора ячеек получается пробная величина для смещения δx каждой вершины от положения, в котором интеграл I должен быть минимальным. Особенностью квазилагранжевой сетки является то, что на каждом цикле в качестве смещения берут дробную часть ω от δx :

$$\omega = \delta x / \tau, \quad (6)$$

где τ — время релаксации сетки, составляющее в типичных случаях десять или более временных шагов. Таким образом, в каждой точке сетки скорость узла, которая должна быть поставлена в уравнения (15) — (18) для вычисления переноса, определяется выражением

$$u' = \delta x / \tau. \quad (66)$$

Если τ велико по сравнению с δt (разд. IV, А, п. 4), то эта скорость мала по сравнению со скоростью, определяемой временным шагом.

Результат применения алгоритма сглаживания к искаженной сетке лучше всего продемонстрировать на примере. На фиг. 1 показано применение алгоритма к искаженной лагранжевой сетке. На фиг. 1, а сетка является, очевидно, патологичной. Некоторые зоны на ней даже перекрываются. После десяти итераций алгоритма с $\omega = 0,25$ каждая ячейка сетки стала выпуклой (фиг. 1, б). В конце концов после пятидесяти итераций сетка, показанная на фиг. 1, в, должна, по-видимому, сходиться к симметричной, полярной сетке.

У. ПРИЛОЖЕНИЯ

Здесь представлены результаты расчетов с использованием метода обобщенных сеток, демонстрирующие гибкость этого метода. Например, в расчетах сжатия осесимметричного θ -пинча лагранжевы характер сетки используется для выделения границы между плазмой и вакуумом и, таким образом, для определения границ области, в которой вычисляется вакуумное поле. Кроме того, с помощью прямого сравнения линейной теории и нелинейного расчета для вращающегося θ -пинча эти результаты демонстрируют достигаемую точность.

А. РАСЧЕТ θ -ПИНЧА С РЕЗКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Сжатие θ -пинча обусловлено азимутальным током, пропускаемым по окружающей плазму цилиндрической проводящей стенке. Ток создает магнитное поле, которое сжимает плазму по направлению к оси симметрии. Часть магнитного поля диффундирует в плазму, а часть плазмы не захватывается набегующим полем. Это означает, что граница между плазмой и областью поля не резкая. Однако как инерция незахваченной плазмы, так и токи, протекающие по ней, несущественны. Поэтому может быть использована модель с резкой границей, о которой упоминали Робертс и Поттер [41]. В этой модели имеется поверхность раздела, отделяющая плазму от вакуума. В вакуумной области решаются уравнения для азимутальной

компоненты векторного потенциала [30]. В области плазмы решаются обычные МГД-уравнения, учитывающие диффузию поля, но без диффузии вещества. На поверхности с точностью до первого порядка по временному шагу Δt поддерживается условие непрерывности напряжений поперек свободной поверхности плазмы.

Уравнение для векторного потенциала решается с помощью метода конечных элементов. Интеграл, который подлежит минимизации, имеет вид [34]

$$I = \int_V [(V A_\theta)^2 + (A_\theta/r)^2] r dr dz, \quad (6)$$

где r и z — радиальная и продольная координаты. Интеграл минимизируется по отношению к значению A_θ в каждой точке. Получающаяся в результате система линейных уравнений решается методом последовательных сверхрелаксаций [50], может быть использован также неявный метод переменных направлений.

Граничными условиями для вакуумной области являются значения A_θ на вакуумной поверхности раздела и либо A_θ , либо dA_θ/dn в каждой точке стенки, где n — нормальная к стенке координата. Векторный потенциал на границе раздела определяется интегрированием от оси изменения A_θ :

$$d(r A_\theta) = r (B_z dr - B_r dz). \quad (7)$$

Компоненты поля B_r , B_z внутри плазмы известны. Произведение $\mathbf{B} \cdot \hat{n}$ непрерывно при переходе через границу раздела, поскольку величина нормальной компоненты магнитного поля в обеих сторонах раздела определяется изменением A_θ вдоль этой поверхности.

На фиг. 2 показаны некоторые результаты расчета θ -пинча с резкой границей. В этих расчетах ток на стенке определяется формулой

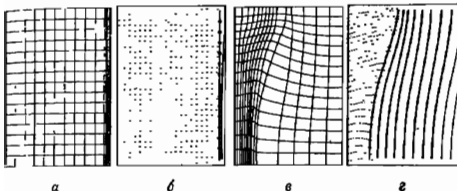
$$\frac{\partial A_\theta}{\partial n} = (\alpha + \beta \cos^2 kz) I + \gamma, \quad (8)$$

где α , β , γ — константы порядка единицы. Рассчитывалась одна половина длины волны, а при $z=0$ и $z=\pi/k$ ставились периодические граничные условия.

Первоначальная вычислительная сетка с большими ячейками в плазме и малыми в вакууме показана на фиг. 2, а. О θ -пинча находится слева, а проводящая стенка расположена справа. На фиг. 2, б плазма отмечена точками, а поверхность потока — линиями в вакуумной области. Вычислительная сетка в последующий момент времени показана на фиг. 2, в. Повер-

ность, которая совпадает с левой границей пятого справа пояса, сдвинулась влево. По мере сжатия плазмы магнитным полем сетка фактически следует за плазмой, что в некоторый момент времени показано на фиг. 2, г. (Величина магнитного потока, связанного с каждым контуром, постоянна.)

В этих расчетах преимущества обобщенных лагранжевых сеток очевидны. Во-первых, за счет движения узлов границы раздела с локальной скоростью жидкости легко выделяется эта поверхность раздела. Во-вторых, поскольку плазма при движе-



Фиг. 2. Результаты расчета θ -пинча с резкой границей.

Вычислительная сетка и силовые линии магнитного поля в начальный момент (а, б), и сразу после максимального сжатия (в, г). Точками на фиг. 2, б, в отмечена плазма, которая сжимается к расположенной слева от оси симметрии набегающим справа магнитным полем. Самая левая силовая линия на фиг. 2, г приблизительно совпадает с широтной координатной линией на фиг. 2, и, которая очерчивает границу раздела плазма—вакуум.

нии увлекает за собой слои сетки, она хорошо описывается даже на конечной стадии, когда занимает все меньшую и меньшую часть всей области. В обычном методе для выделения поверхности раздела в принципе можно было бы использовать маркеры в жидкости [1], но трудно было бы осуществить это выделение столь же просто и хорошо.

В ВРАЩАЮЩИЙСЯ θ -ПИНЧ

Внутри цилиндрической проводящей оболочки находится однородно вращающийся θ -пинч. Одномерное равновесие определяется уравнением

$$\frac{d}{dr} \left(P + \frac{B^2}{2\mu} \right) = \frac{\Omega^2}{r}, \quad (70)$$

где Ω — угловая скорость плазмы, B — продольное поле. По отношению к радиальным смещениям

$$\xi(r) = \sum_m \sum_k \xi_{k,m} \cos(kz + m\theta) \quad (71)$$

равновесие является неустойчивым при $0 \leq |k| < k_c$ и $m \neq$ вые числа. Если $\xi(r)$ — радиальная собственная функция, определяемая решением линеаризованных МГД-уравнений, то изменение во времени определяется выражением

$$\xi(t) = \xi(0) \exp(\gamma t), \quad (7)$$

где γ — инкремент неустойчивости.

Рассмотрим область, периодическую по θ и z , окруженную при $r = R$ проводящей цилиндрической оболочкой.

Если $k = 0$, градиенты вдоль осевого направления равны нулю и потоки протекают в плоскости $r - 0$. Расчет двумерного потока можно произвести в трехмерной схеме, если в осевом направлении оставить только один слой.

С помощью меченых частиц [36], которые движутся с локальной скоростью жидкости, так что их траектория совпадает с траекторией элемента жидкости, можно провести детальное сравнение между линейной теорией и результатами вычисления. В расчетах устойчивости меченые координаты образуют сетку, являющуюся следом лагранжевых координат, которые в начальный момент совпадают с вычислительной сеткой, но затем уже не идентичны ей, так как во время фазы подстройки между жидкостью и сеткой имеется относительное движение. Если обозначить начальную радиальную цилиндрическую координату меченой частицы через R_0 , то ее положение в любой момент t можно записать в виде

$$R(R_0, \theta, z) = R_0 + \sum_{k,m} \xi_{k,m} \exp[i(kz + m\theta + \Phi_{k,m})], \quad (8)$$

где $\xi_{k,m}$ и $\Phi_{k,m}$ — амплитуда и фаза смещения, соответственно.

Если R известно, амплитуда и фаза вычисляются из уравнений

$$\xi_{k,m} = (I^*)^{1/2} \quad (9)$$

и

$$|\Phi_{k,m} = \arctg [Im(I)/Re(I)], \quad (10)$$

где I определяется выражением

$$I = \frac{1}{2\pi L} \int_0^{2\pi} \int_0^L d\theta dz [R(R_0, \theta, z) - R_0] \cdot \hat{r} \exp[-i(kz + m\theta)]. \quad (11)$$

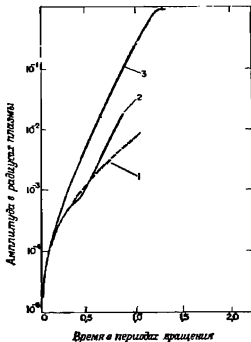
Смещения $\xi_{k,m}$, вычисленные из (74), можно сравнить с ξ_k , которые предсказываются линейной теорией (72). На фиг. для трех различных методов расчета показан рост во времени гармоники $\xi_{0,s}$.

Кривая 1, самая нижняя, является результатом эйлеровых вычислений с дифференцированием конвективного члена по донорским ячейкам. Этот метод дифференцирования имеет точность только первого порядка, вносит большую диффузию и поэтому, очевидно, непригоден для расчетов устойчивости, в которых возникает течение.

Этот метод сильно занижает инкремент по сравнению с тем, который получается при более точных вычислениях. Например, результаты, представленный кривой 2, промежуточной на фиг. 3, был получен с помощью интерполяционного метода донорского дифференцирования конвективных членов [1], т. е. схемы второго порядка точности. После одного полу периода вращения инкремент приблизительно постоянен и сравним с инкрементом, который получается в результате квазилагранжева расчета (верхняя кривая 3). В квазилагранжевом расчете для конвективных членов применялось приближение донорской ячейки, а параметр релаксации сетки τ составлял приблизительно 20 δt . В интервале от 0,25 до 1,2 в единицах периода вращения можно наблюдать линейную фазу роста,

когда последний носит экспоненциальный характер с очень слабым изменением инкремента. После момента 1,2 наблюдается насыщение, когда инкремент быстро падает до нуля.

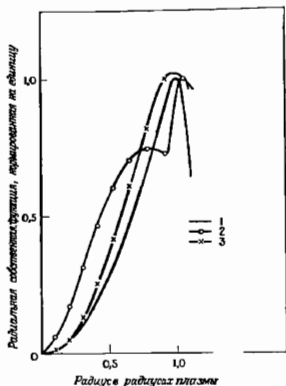
Радialная собственная функция в момент, соответствующий одному периоду вращения, показана на фиг. 4. Кривая, полученная из квазилагранжева расчета, несколько шире, но по форме похожа на первоначальное возмущение. С другой стороны, в эйлеровом расчете радиальная функция приобрела двугорбую форму, которая свидетельствует о том, что дисперсионные ошибки пространственно разделили моды, присутство-



Фиг. 3. Рост возмущения для неустойчивого равновесия вращающегося в-пняча, рассчитанный с помощью эйлеровой (1 — расчет первого порядка, 2 — расчет второго порядка) и квазилагранжевой (3) вычислительных сеток.

вавшие в первоначальном возмущении. Эйлеров расчет дал правильные результаты в пределах примерно одного периода вращения и ограничен неустойчивостью того же типа, что в разд. III.

В трехмерных расчетах главная трудность состоит в том, что количество информации, которое может запомнить ЭВМ, ее



Фиг. 4. Рассчитанные амплитуды возмущений и амплитуда, предсказываемая линейной теорией устойчивости, для вращающегося θ -пинча в момент, соответствующий одному периоду вращения.

1 — теоретическая кривая, 2 — кривая из эйлерова расчета, 3 — кривая из квазилагранжевого расчета.

достаточно для хорошего выделения деталей потока. В случае возмущений моды $m=3$ радиальная собственная функция лучше всего выделяется с помощью группировки точек по радиусу около $r=1$. При использовании квазилагранжевой сетки собственная функция хорошо разрешима в любой момент, так как точки сетки движутся с потоком. В противоположность этому эйлерова сетка обеспечивает хорошее выделение особенностей потока только до тех пор, пока последняя не вышла из области с достаточным разрешением. На эйлеровой сетке оптимально

суммарное разрешение получается, вообще говоря, при однородном распределении точек в пространстве, хотя в любой заданный момент расчета такое распределение не оптимально.

В. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВНУТРЕННЕЙ ВИНТОВОЙ МОДЫ

Неустойчивость внутренней винтовой моды в диффузном скрю-пинче обсуждалась Гудблудом и Хербеком [17]. В работе Розенблюта и сотр. [42] учитывают как линейные, так и нелинейные эффекты.

Здесь представлены результаты вычисления роста возмущения для неустойчивого равновесия. Возмущение взято в виде

$$\xi_r = \xi_0 \exp[i(kz + m\theta)]. \quad (77)$$

Равновесие плазмы определяется уравнением баланса радиальных сил

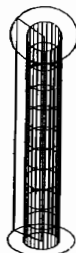
$$\frac{\partial P}{\partial r} = I_z B_\theta, \quad (78)$$

где I_z — плотность продольного тока в плазме, B_θ — азимутальное поле. Идеально проводящая плазма заполняет внутренность проводящего цилиндра. Радиальный профиль плотности тока берется в виде

$$I_z = \begin{cases} I_0 \left(\frac{r}{a} \right), & r \leq a, \\ 0, & r > a, \end{cases} \quad (79)$$

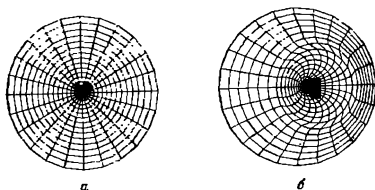
где a — радиус токового канала в плазме, составляющего половину радиуса цилиндра. Волновое число k выбирается таким образом, чтобы минимальная величина запаса устойчивости q была равна 0,65. Запас устойчивости равен единице при $r = 0,65a$ и $r = (0,65)^{1/2}$. Полное бета, т. е. отношение давления плазмы на оси к полному давлению магнитного поля на поверхности плазмы, равно 0,4.

На фиг. 5—9 показаны некоторые результаты трехмерных расчетов эволюции возмущения с $m = 1$. На фиг. 5 первоначальная форма плазменного шнура представлена одной из внутренних сеточных поверхностей. На фиг. 6 показано поперечное сечение сетки. На фиг. 7, а и 8, а даны уровни постоянной плотности и векторы скорости в этом сечении. Величины плотности



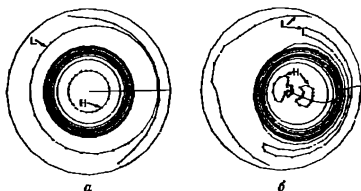
Фиг. 5. Внутренняя поверхность вычислительной сетки, представляющая поверхность цилиндрической равновесной плазмы.

Внешние по отношению к плазме линии указывают границу вычислительной сетки.



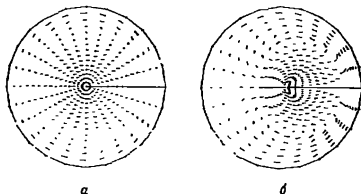
Фиг. 6. Поперечное сечение вычислительной сетки для расчета внутри винтовой моды.

a—исходная сетка; *б*—сетка в момент, когда возмущение $m=1$ вынесло для завышающую девять внутренних поясов, почти к стенке.



Фиг. 7. Контуры постоянной плотности для сеток, показанных на фиг. 6.

Контуры, отмеченные буквами *H* и *L*, соответствуют плотностям 1,0 и 0,01 (в отдельных единицах). Значения плотности на промежуточных контурах образуют геометрическую прогрессию.



Фиг. 8. Векторы скорости для сеток, показанных на фиг. 6.

Каждый вектор начинается в узле и указывает направление потока. Максимум скорости на фиг. 6, *б* примерно в 20 раз больше максимума на фиг. 8, *а*.

на контурах образуют геометрическую прогрессию от минимального значения $\rho = 10^{-2}$ до максимальной плотности $\rho = 1$. Скорости, которые представлены векторами, направленными от точки сетки вдоль потока, в начальный момент отличны от нуля. Как отмечают Бейтман и др. [4], согласованное начальное возмущение легко образовать с помощью возмущения скорости. Картина векторов скорости представляет типичное возмущение несжимаемого потока модой $m = 1$, когда внутренность сингулярной поверхности ($q = 1$) движется как целое в направлении стенки, а внешняя по отношению к сингулярной поверхности плазма движется согласованно с этим смещением.

На фиг. 7, б и 8, б показана полностью развитая неустойчивость в момент, соответствующий альвееновскому пролетному времени. На фиг. 9 поверхность плазмы, соответствующая фиг. 5, имеет круглое сечение, но испытывает винтовое смещение от геометрической оси. На фиг. 6, б показано разрушение квазилагранжиской сетки (фиг. 6, а) из-за течения плазмы. Токовый канал плазмы, который первоначально занимал одиннадцать внутренних рядов ячеек сетки, при своем движении к стенке увлекает эти ячейки за собой. На фиг. 7, б показан градиент плотности на краю токового канала. Объем последнего, как следует из расположения контуров, существенно не уменьшился по сравнению с первоначальной величиной, показанной на фиг. 7, а. Векторы скорости на фиг. 8, б дают картину течения, сходную с первоначальной (фиг. 8, а).

Мы не имеем возможности детально проанализировать результаты, однако из них можно сделать вывод, что неустойчивость большой амплитуды качественно не отличается от неустойчивости малой амплитуды. Запирание магнитного потока между стенкой и плазмой в конце концов будет замедлять движение плазмы по направлению к стенке. Других очевидных механизмов насыщения, по-видимому, нет. Планируется более тщательный анализ неустойчивости внутренней винтовой моды в связи с корпускулярной диагностикой плазмы.



Фиг. 9. Внутренняя поверхность сетки, воспроизводящая границу плазмы, как на фиг. 5, а, в момент, соответствующий фиг. 6, б, 7, б, 8, б.

Ясно видно винтовое искривление плазменного шнура, характерное для возмущения $m=1$.

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой главе основной упор был сделан на одну фундаментальную проблему в решении уравнений для идеального магнитогидродинамического потока. Эта проблема, а именно точное вычисление конвективного переноса, возникает, очевидно из-за нелинейных неустойчивостей численных аппроксимаций конвективной производной. Имеются соображения, что эти неустойчивости обязаны своим происхождением определенным ошибкам обрезаия, которые вызывают отрицательную диффузию. Эти ошибки могут быть вычислены, а их влияние может быть подавлено либо добавлением компенсирующей положительной диффузии, либо уменьшением относительного движения между вычислительной сеткой и плазмой с помощью обобщенной сетки. Сравнение результатов линейной теории устойчивости, расчетов с обобщенной сеткой и нескорректированных эйлеровых расчетов подтверждает вывод, что более точное вычисление конвективного переноса ведет к заметному увеличению общей точности. На аналогичное улучшение можно надеяться при использовании эйлеровых вычислений с коррекцией.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Барнс¹⁾ получил компактную векторную форму для геометрических коэффициентов c_a^i , которые обсуждались в разд. IV, А, п. 1. Если $\mathbf{r}^i$ — вектор положения вершины i , геометрический коэффициент, соответствующий вершине 1 [вершины ячейки пронумерованы, как в уравнении (27)], записывается в виде

$$c^1 = \frac{1}{12} (\mathbf{r}^2 \times \mathbf{r}^5 + \mathbf{r}^5 \times \mathbf{r}^4 + \mathbf{r}^4 \times \mathbf{r}^2 + \mathbf{r}^2 \times \mathbf{r}^6 + \mathbf{r}^6 \times \mathbf{r}^5 + \mathbf{r}^6 \times \mathbf{r}^8 + \\ + \mathbf{r}^8 \times \mathbf{r}^4 + \mathbf{r}^4 \times \mathbf{r}^3 + \mathbf{r}^2 \times \mathbf{r}^3).$$

Коэффициенты для вершин с номерами 2—4 получаются циклической перестановкой индексов в пределах двух групп 1—4 и 5—8. Аналогично геометрические коэффициенты для вершин 5 записываются в виде

$$c^5 = \frac{1}{12} (\mathbf{r}^1 \times \mathbf{r}^6 + \mathbf{r}^6 \times \mathbf{r}^8 + \mathbf{r}^8 \times \mathbf{r}^1 + \mathbf{r}^1 \times \mathbf{r}^2 + \mathbf{r}^2 \times \mathbf{r}^6 + \\ + \mathbf{r}^6 \times \mathbf{r}^7 + \mathbf{r}^7 \times \mathbf{r}^3 + \mathbf{r}^6 \times \mathbf{r}^4 + \mathbf{r}^4 \times \mathbf{r}^1).$$

Коэффициенты для вершин 6—8 получаются из c^5 циклической перестановкой индексов в группах 1—4 и 5—8.

¹⁾ D. C. Barnes, неопубликованное сообщение, 1975.

БЛАГОДАРНОСТИ

При написании этой статьи и разработке методов, описанных в ней, автор получил существенную помощь со стороны многих коллег. Среди них: У. Прехт, чья хорошо обеспеченные трехмерные программы для гидродинамики в огромной степени облегчили задачу написания кода для магнитной гидродинамики; Д. Барнс, который проверил и сделал много улучшений и обобщений в уравнениях, описанных в разд. IV; Д. Фрайдберг, предложивший много задач, к которым был применен метод обобщенной сетки; К. Нельсон, который критически прочитал рукопись и сделал много полезных замечаний. Автор благодарит также У. Гоуда и К. Хирта за очень полезные обсуждения и предложения.

Работа поддержана Управлением энергетических разработок и исследований США, Контракт № W-7405-ENG-36.

Литература

1. Amsden A. A., Harlow F. H., Rep. LA-4370, Los Alamos Sci. Lab., Los Alamos, New Mexico, 1970.
Метод SMAC: Методика численного расчета несжимаемых течений плазмы.
2. Amsden A. A., Hirt C. W., Rep. LA-5100, Los Alamos Sci. Lab., Los Alamos, New Mexico, 1973.
YA QUI: Лагранжево-Эйлера программа для течения жидкости с произвольными скоростями.
3. Anderson D. V., J. Comput. Phys., 17, 246 (1975).
4. Bateman G., Schneider W., Grossmann W., Nucl. Fusion, 14, 669 (1974).
5. Bodin N. A. B., Nucl. Fusion, 12, 721 (1972).
6. Boris J. P., Memo. Rep. 2167, Naval Res. Lab., Washington, D. C., 1970.
Физически обоснованное решение проблемы Альвена.
7. Boris J. P., Book D. L., J. Comput. Phys., 11, 38 (1973).
8. Brackbill J. U., Proc. Conf. Numer. Simul. Plasmas, 6th, 1973, Lawrence Livermore Lab. Conf. Rep. 730804, 1973.
9. Brackbill J. U., Pracht W. E., J. Comput. Phys., 13, 455 (1973).
10. Butler T. D. et al., Phys. Fluids, 12, 1904 (1969).
11. Duchs D., Phys. Fluids, 11, 2010 (1968).
12. Fornberg B., Math. Comput., 27, 45 (1973).
13. Freeman J. R., Nucl. Fusion, 11, 425 (1971).
14. Freeman J. R., Lane F. O., Proc. APS Top. Conf. Numer. Simul. Plasmas, 1968, Los Alamos Sci. Lab. Rep. LA-3990, 1968.
15. Fromm J. E., Rep. № LA-2535, Los Alamos Sci. Lab., Los Alamos, New Mexico, 1961.
Разностные лагранжевы аппроксимации в гидродинамике
16. Goud W. B., Rep. LAMS-2365, Los Alamos Sci. Lab., Los Alamos, New Mexico, 1960.
Численный метод для двумерного нестационарного течения жидкости.
17. Goodblood J. P., Hagebeek H. J. L., Phys. Fluids, 15, 1090 (1972).
18. Hain K. et al., Z. Naturforsch., A15, 1039 (1960).
19. Harlow F. H., Amsden A. A., J. Comput. Phys., 8, 197 (1971).
20. Harlow F. H., Welch J. E., Phys. Fluids, 8, 842 (1965).
21. Hertweck F., Schneider W., Rep. IPP 1/110, Inst. Plasma Phys., Garching, 1970.
Двумерная программа для решения МГД-уравнений θ -пинча в записывающей от времени системе координат
22. Hirt C. W., J. Comput. Phys., 2, 339 (1968).
23. Hirt C. W., Cook J. L., Butler T. D., J. Comput. Phys., 5, 103 (1970).
24. Hirt C. W., Amsden A. A., Cook J. L., J. Comput. Phys., 14, 227 (1974).

25. Hofmann J., Nucl. Fusion, 14, 438 (1974).
26. Killeen J., в кн. Information Processing 71, C. V. Freeman, J. E. Griffin J. L. Rosenfeld eds., North-Holland Publ., Amsterdam, 1972, p. 1191.
27. Kretss H. O., Comm. Pure Appl. Math. 17, 335 (1964).
28. Ландау Л. Д., Lifshitz E. M., Механика сплошных сред, Гостехтеоризд М., 1953.
29. Lapidus A., J. Comput. Phys., 2, 154 (1967).
30. Lewis H. R., J. Appl. Phys., 37, 2541 (1966).
31. Lindemuth I., Killeen J., J. Comput. Phys., 13, 181 (1973).
32. Lui H. C., Lab. Rep. 60, Columbia University, New York, 1973.
Коды FLIC для расчета фокусировки ударных волн в коаксиальной электромагнитной ударной трубе.
33. Lui H. C., Chu C. K., 4th Int. Conf. Numer. Methods Fluid Dyn., 19 p. 263.
34. Morse P. M., Feshbach H., Methods of Theoretical Physics, Wiley Interscience, New York, 1953, Chapter 3. (Имеется перевод Ф. М. Морса, Г. Фейшбаха. Методы теоретической физики. — М.: ИЛ, 1958.)
35. Peaceman D. W., Rachford H. H., J. Soc. Ind. Appl. Math., 3, 28 (1955).
36. Pracht W. E., J. Comput. Phys., 17, 132 (1975).
37. Richtmyer R. D., NCAR Techn. Note 63-2, Nat. Cent. Atmos. Res., Boulder Colorado, 1963.
Обзор разностных методов для нестационарной гидродинамики.
38. Richtmyer R. D., Morton K. W., Difference Methods for Initial Value Problems, Wiley Interscience, New York, 1967. (Имеется перевод: Р. Рихтмайер, К. Мортон. Разностные методы решения краевых задач. — М.: Мир, 1972.)
39. Rivard W. et al., Rep. LA-5426-MS, Los Alamos Sci. Lab., Los Alamos New Mexico, 1973.
Метод для повышения точности в эйлеровых гидродинамических расчетах
40. Roberts K. V., Boris J. P., 3th Annu. Numer. Plasma Simul. Conf., 19 Paper 32.
41. Roberts K. V., Potter D. E., Methods Comput. Phys., 9, 339, (1966) (Имеется перевод в сб.: Вычислительные методы в физике плазмы. — Мир, 1974, стр. 335)
42. Rosenbluth M. N., Dagazian R. Y., Rutherford P. H., Phys. Fluids, 16, 16 (1973).
43. Schneider W., Z. Phys., 252, 147 (1972).
44. Schulz W., Methods Comput. Phys., 3, 1 (1964). (Имеется перевод в сб.: Вычислительные методы в гидродинамике. — М.: Мир, 1967.)
45. Thompson J. F., Thames F. C., Mastin C. W., J. Comput. Phys., 15, 1 (1974).
46. Tuck J., 2th Eur. Conf. Controlled Fusion Plasma Phys. Res., 1968, Vol. 595.
47. Wagner C. E., Manheimer W. M., Proc. Conf. Numer. Simul. Plasma, 6 1973, Lawrence Livermore Lab. Conf. Rep. 730804, 1973.
48. White R. et al., Plasma Phys. Fusion Res., IAEA, Vienna, 1974, Vol. 1, p. 495.
49. Wooten J. et al., ORNL TM 4784, Hollifield Nat. Lab., Oak Ridge, Tennessee, 1974.
Предварительные результаты трехмерного нелинейного кода для идеальной магнитоидродинамики.
50. Young D. M., в кн. A Survey of Numerical Analysis, J. Todd, ed McGraw-Hill, New York, 1962, Chapter 11.
51. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П., Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, «Наука», М., 1966.
52. Zienkiewicz O. C., The Finite-Element Method in Engineering Science McGraw-Hill, New York, 1971.

Глава 2

МЕТОД ВОДЯНОГО МЕШКА В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Д. Поттер ¹⁾

1. ОСНОВЫ МЕТОДА ВОДЯНОГО МЕШКА

За последние пятнадцать лет исследования магнитогидродинамических явлений необычайно расширились. Интерес к ним был обусловлен успехами астрофизики и особенно управляемого термоядерного синтеза. Магнитогидродинамические уравнения имеют очень широкую область применимости и охватывают такие, казалось бы, несвязанные явления, как, например, солнечные вспышки, генерацию магнитного поля в земном ядре, явления в магнитосфере, магнитное удержание плазмы в лабораторных установках. Магнитогидродинамические уравнения можно рассматривать как общую систему законов, которая в зависимости от выбора конкретных начальных и граничных условий или величины определенных членов уравнений может иметь самое разнообразное поведение. В соответствии с этим как для аналитического, так и для численного исследования МГД-явлений должен быть разработан широкий набор различных методов.

До недавнего времени положение в МГД-моделировании было далеко от этого. Имеющиеся в распоряжении коды целиком основывались на общепринятых консервативных эйлеровых методах. В настоящей главе описывается новая методика для МГД-моделирования, в которой выделяются силовые линии магнитного поля или магнитные поверхности (если они существуют) и их эволюция прослеживается непосредственно. Как известно, магнитное поле может быть описано контурами или поверхностями функций магнитных потоков. В системе с высокой проводимостью в отсутствие турбулентности такие поверхности хорошо определены и часто ведут себя подобно несжимаемым, но деформируемым «водяным мешкам». Такой подход оказался особенно плодотворным при описании квазистатической плазмы, что представляет интерес для магнитного удержания применительно к термоядерному синтезу.

¹⁾ D. Potter, University of California at Los Angeles, Los Angeles, California.

25. *Hofmann J.*, Nucl. Fusion, 14, 438 (1974).
26. *Killeen J.*, в кн. Information Processing 71, C. V. Freeman, J. E. Griffith, J. L. Rosenfield eds., North-Holland Publ., Amsterdam, 1972, p. 1191.
27. *Kreiss H. O.*, Comm. Pure Appl. Math. 17, 335 (1964).
28. *Ландау Л. Д., Lifshitz E. M.*, Механика сплошных сред, Гостехтеориздат, М., 1953.
29. *Lapidus A.*, J. Comput. Phys., 2, 164 (1967).
30. *Lewis H. R.*, J. Appl. Phys., 37, 2641 (1966).
31. *Lindemuth I., Killeen J.*, J. Comput. Phys., 13, 181 (1973).
32. *Lui H. C.*, Lab. Rep. 60, Columbia University, New York, 1973.
Коды FLIC для расчета фокусировки ударных волн в коаксиальной электромагнитной ударной трубе.
33. *Lui H. C., Chu C. K.*, 4th Int. Conf. Numer. Methods Fluid Dyn., 1974, p. 263.
34. *Morse P. M., Feshbach H.*, Methods of Theoretical Physics, Wiley Interscience, New York, 1953, Chapter 3. (Имеется перевод: Ф. М. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики. — М.: ИЛ, 1958.)
35. *Peaceman D. W., Rachford H. H.*, J. Soc. Ind. Appl. Math., 3, 28 (1955).
36. *Pracht W. E.*, J. Comput. Phys., 17, 132 (1975).
37. *Richtmyer R. D.*, NCAR Techn. Note 63-2, Nat. Cent. Atmos. Res., Boulder, Colorado, 1963.
Обзор разностных методов для нестационарной гидродинамики.
38. *Richtmyer R. D., Morton K. W.*, Difference Methods for Initial Value Problems, Wiley Interscience, New York, 1967. (Имеется перевод: Р. Рихтмайер, К. Мортон. Разностные методы решения краевых задач. — М.: Мир, 1972.)
39. *Rivard W. et al.*, Rep. LA-5426-MS, Los Alamos Sci. Lab., Los Alamos, New Mexico, 1973.
Метод для повышения точности в эйлеровых гидродинамических расчетах.
40. *Roberts K. V., Boris J. P.*, 3th Annu. Numer. Plasma Simul. Conf., 1969, Paper 32.
41. *Roberts K. V., Poller D. E.*, Methods Comput. Phys., 9, 339, (1967). (Имеется перевод в сб.: Вычислительные методы в физике плазмы. — М.: Мир, 1974, стр. 335.)
42. *Rosenbluth M. N., Dagazian R. Y., Rutherford P. H.*, Phys. Fluids, 16, 1894 (1973).
43. *Schneider W.*, Z. Phys., 252, 147 (1972).
44. *Schulz W.*, Methods Comput. Phys., 3, 1 (1964). (Имеется перевод в сб.: Вычислительные методы в гидродинамике. — М.: Мир, 1967.)
45. *Thompson J. F., Thames F. C., Mastin C. W.*, J. Comput. Phys., 15, 299 (1974).
46. *Tuck J.*, 2th Eur. Conf. Controlled Fusion Plasma Phys. Res., 1968, Vol. 2, 595.
47. *Wagner C. E., Munheimer W. M.*, Proc. Conf. Numer. Simul. Plasma, 6th, 1973, Lawrence Livermore Lab. Conf. Rep. 730804, 1973.
48. *White R. et al.*, Plasma Phys. Fusion Res., IAEA, Vienna, 1974, Vol. 1, p. 495.
49. *Woolen J. et al.*, ORNL TM 4784, Hollifield Nat. Lab., Oak Ridge, Tennessee, 1974.
Предварительные результаты трехмерного нелинейного кода для идеальной магнитогазодинамики.
50. *Young D. M.*, в кн. A Survey of Numerical Analysis, J. Todd, ed. McGraw-Hill, New York, 1962, Chapter 11.
51. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.*, Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, «Наука», М., 1966.
52. *Zienkiewicz O. C.*, The Finite-Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, New York, 1971.

Глава 2

МЕТОД ВОДЯНОГО МЕШКА В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Д. Поттер¹⁾

1. ОСНОВЫ МЕТОДА ВОДЯНОГО МЕШКА

За последние пятнадцать лет исследования магнитогидродинамических явлений необычайно расширились. Интерес к ним был обусловлен успехами астрофизики и особенно управляемого термоядерного синтеза. Магнитогидродинамические уравнения имеют очень широкую область применимости и охватывают такие, казалось бы, несвязанные явления, как, например, солнечные вспышки, генерацию магнитного поля в земном ядре, явления в магнитосфере, магнитное удержание плазмы в лабораторных установках. Магнитогидродинамические уравнения можно рассматривать как общую систему законов, которая в зависимости от выбора конкретных начальных и граничных условий или величины определенных членов уравнений может иметь самое разнообразное поведение. В соответствии с этим как для аналитического, так и для численного исследования МГД-явлений должен быть разработан широкий набор различных методов.

До недавнего времени положение в МГД-моделировании было далеко от этого. Имеющиеся в распоряжении коды пеликом основывались на общепринятых консервативных эйлеровых методах. В настоящей главе описывается новая методика для МГД-моделирования, в которой выделяются силовые линии магнитного поля или магнитные поверхности (если они существуют) и их эволюция прослеживается непосредственно. Как известно, магнитное поле может быть описано контурами или поверхностями функций магнитных потоков. В системе с высокой проводимостью в отсутствие турбулентности такие поверхности хорошо определены и часто ведут себя подобно несжимаемым, но деформируемым «водяным мешкам». Такой подход оказался особенно плодотворным при описании квазистатической плазмы, что представляет интерес для магнитного удержания применительно к термоядерному синтезу.

¹⁾ D. Potter, University of California at Los Angeles, Los Angeles, California.

А. ЭЙЛЕРОВЫ И ЛАГРАНЖЕВЫ РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ

Общепринятый разностный подход к МГД-моделированию оказался полезным при изучении динамики околосвукового и сверхзвукового движения. В течение некоторого времени одномерные расчеты, использующие точечные эйлеровы и лагранжевы разностные методы, стали стандартными (см. например [6, 8, 11]). Сравнительно недавно при интерпретации реальных экспериментов, в частности для дозвуковой жидкости и жидкости с большим бета [7, 18, 19], был достигнут успех и в двумерных расчетах, использующих консервативные эйлеровы разностные схемы. Их обзор и обширная библиография даны Робертсом и Поттером [22].

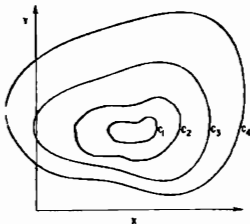
Однако во многих интересных случаях при использовании общепринятых разностных методов появляются определенные трудности. Например, в случае сильного магнитного поля, представляющего наибольший интерес в магнитном удержании, важную роль играют векторные свойства магнитного поля. При низком бета уравнения принимают эллиптическую форму, причем магнитное поле в основном определяется границами или внешними проводниками. Известно, что распространение альвеновских волн анизотропно, и при низких плотностях волны кручения распространяются вдоль силовых линий, которые на эйлеровой сетке из-за своего переменного направления воспроизводятся плохо. Кроме того, при следовании вдоль силовых линий процессы диффузии становятся сильно анизотропными.

Вообще говоря, эйлеровы сетки приводят к возникновению численной диффузии [19], которая для дозвуковой или «доманнитозвуковой» плазмы может полностью исказить решения. В случае одного измерения эти трудности преодолеваются использованием точечных лагранжевых методов [17]. Учитывая простоту, разрешающую способность и точность, достигаемую лагранжевым методом, многие авторы предприняли попытки распространить этот подход также на случай двух и трех измерений. Однако в многомерных задачах при наличии широкого движения жидкости быстро дает искажению неортогональную сетку, что ведет к большим неточностям, так как точки с последовательными номерами становятся все более и более удаленными друг от друга.

Б. ЛАГРАНЖЕВЫ КОНТУРЫ И ПОВЕРХНОСТИ

Идея точечного лагранжева метода, весьма полезная для одного измерения, не может быть непосредственно распространена на два или более измерения. В случае двух измерений, вместо того чтобы определять набор лагранжевых точек, естественнее определить набор лагранжевых контуров, которые дадут

жуются вместе с жидкостью. Аналогично в случае трех измерений могут быть определены лагранжевы поверхности. Точнее, если нас интересует какая-то функция состояния f на плоскости, мы можем задать f с помощью набора контуров или «водяных мешков», вдоль которых функция f не меняется (фиг. 1). Таким образом, если f движется со скоростью жидкости, можно написать уравнения движения для точек, которые составляют контуры, в результате чего функция f будет эволюционировать во времени в соответствии с уравнениями движения. Однако, поскольку вдоль контура функция f не меняется, движение точек вдоль контура не влияет на описание f . Поэтому в выборе распределения точек на каждом контуре остается определенная степень свободы. Такой подход является лагранжевым, но в то же время устраняет искажения или неточности сетки. В случае трех измерений используются поверхности и остаются в силе эти же аргументы.



Фиг. 1. Дискретное представление заданной на плоскости функции $f(x, y)$ с помощью конечного набора контуров $c_1, c_2, \dots, c_J$.

Как и в разностном методе, для использования ЭВМ необходима точечная модель водяного мешка. Число контуров, отмечаемых индексом j ($1 \leq j \leq J$), должно выбираться в зависимости от возможностей ЭВМ. Аналогично каждый контур представляется конечным набором точек, отмечаемых индексом i , $1 \leq i \leq I$ (фиг. 2). Координаты каждой из этих точек $x(i, j)$, $y(i, j)$ запоминаются в ЭВМ. На каждом шаге вычислений точки движутся в соответствии с уравнениями движения контура и переходят в точки $x(\bar{i}, j)$, $y(\bar{i}, j)$. Оставляя неизменным положение контуров, можно точки данного контура двигать вдоль него. Другими словами, когда определена лишь одна координата j , другая координата i может быть выбрана произвольным образом.

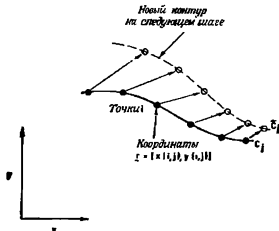
При этом возникает вопрос, чем руководствоваться при выборе второй координаты. Существует много возможностей, и оптимальный выбор зависит от исследуемой проблемы. Например, в одной из задач Уайт и др. [25] выбрали равномерное распределение точек i по контуру. Это устранило появление малых пространственных интервалов.

1. Ортогонализация

Особенно важным является случай, когда используется ортогональная система координат с метрикой

$$ds^2 = (h^i di)^2 + (h^j dj)^2, \quad (1)$$

где h^i , h^j — элементы длины между соседними кривыми i и j соответственно. В этом случае точки i выбираются так, что они лежат на кривых, ортогональных контурам j . Такой метод однозначен и наиболее точен, так как в нем расстояние между со-



Фиг. 2. Каждый контур j определен конечным числом точек i с координатами $x(i, j)$ на плоскости.

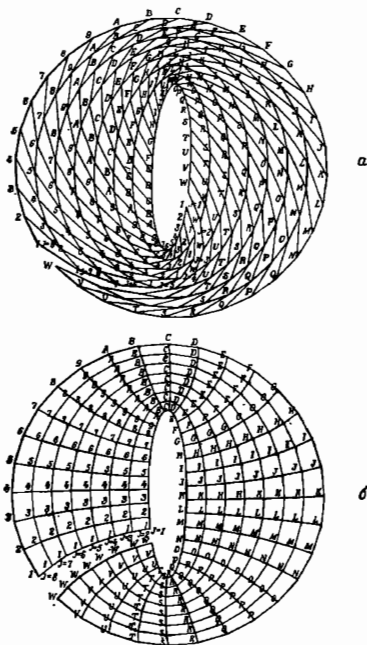
Функция меняется во времени в соответствии с динамикой точек.

седними точками i на плоскости (x, y) минимально. Хотя математическое представление уравнений из-за ортогональности координат является совсем простым, однако при изменении топологии могут возникнуть некоторые трудности. Очевидно, что этот метод имеет преимущества, так как он ортогонален и лагранжев.

Детально методика составления ортогональной системы уже обсуждалась Поттером и Татлом [21]. Она основана на решении системы уравнений Лапласа в интегральной форме, записанных для каждой пары контуров. Пример такой ортогонализации, оставляющей контуры неизменными, показан на фиг. 3.

2. Выбор контуров

Первостепенное значение в этом методе имеет определение наиболее интересных контуров. В простых задачах выбор может быть самоочевидным. Например, в двумерном фазовом про-



Фиг. 3. Ортогонализация (б) набора концентрических эллипсов с прокручивающимися расположением точек (а).

Точки 1 отмечены индексами от 1 до 9 и от А до W.

странстве «фазовая жидкость», очевидно, определяется контурами функции распределения [2]. Аналогично в двумерной гидродинамике несжимаемой жидкости движение может быть описано плотностью вихря и контуры распределения вихря являются хорошо определенными и полностью описывают систему [16]. Однако уже в гидродинамике сжимаемой жидкости состояние системы описывается несколькими связанными переменными (плотностью, давлением, магнитным полем и т. д.), и выбор менее ясен. В магнитной гидродинамике, и особенно в случае низкого бета, свойства плазмы тесно связаны с магнитными силовыми линиями. В двумерном случае силовые линии на плоскости подчиняются условию

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2)$$

так что магнитное поле можно определить с помощью псевдоскалярного потенциала

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3)$$

При этом в зависимости от метрики на плоскости можно определить функцию потока ψ , связанную с векторным потенциалом. Контур функции потока являются силовыми линиями на плоскости, и естественно использовать их в методе водяного мешка. Если существует сильное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости, то различные точки на контурах являются следами силовых линий, которые в трехмерном пространстве образуют магнитные поверхности. Контур ψ являются проекциями на плоскость этих магнитных поверхностей.

Альевновские волны и свисты распространяются преимущественно по таким контурам, так же как и диффузия, которая в сильном поле происходит быстро только вдоль контуров, а поперек контуров является слабой. В отсутствие электрического сопротивления магнитный поток внутри замкнутого контура сохраняется и, таким образом, при наличии сильного перпендикулярного поля на площадь каждого контура налагаются ограничения, в результате чего он ведет себя подобно водяному мешку.

В. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод водяного мешка имеет широкую область применимости во многих задачах многомерной магнитной гидродинамики. В настоящей работе упор в применении этого метода сделан на задачи квазистатического равновесия и задачи с низким бета. Многие свойства плазмы, находящейся в равновесии, могут

быть продемонстрированы на примере одной свободной поверхности. В разд. II исследуются свойства одного свободного водяного мешка, находящегося в равновесии, и продемонстрировано интересное применение его к трехмерной задаче. В разд. III для осесимметричных задач равновесия проведено обобщение модели на несколько поверхностей, которые описывают уже и профиль тока. При наличии силового равновесия между плазмой и полем вследствие диффузии, приложенного внешнего напряжения и слабых неустойчивостей в конфигурации могут происходить медленные изменения, которые деформируют и меняют магнитные поверхности и в то же время удовлетворяют магнитогидродинамическим законам сохранения. Эти законы, обсуждаемые в разд. IV, имеют интегральную форму и в отсутствие диффузии представляют собой набор условий адиабатичности, определяющих плотность, давление и магнитные потоки на каждой поверхности. Применение этих уравнений иллюстрируется на примере адиабатического сжатия и развития магнитных островов.

В разд. V коротко обсуждаются дальнейшие приложения метода водяного мешка к конвективным МГД-уравнениям. Здесь уже больше нельзя пренебрегать инерцией плазмы, и этот подход применяется для изучения высокочастотных МГД-неустойчивостей в токамаке.

II. РАВНОВЕСНЫЕ СВОЙСТВА ОТДЕЛЬНОГО ВОДЯНОГО МЕШКА

A. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

В этом и последующих разделах описывается последовательность постепенно усложняющихся моделей МГД-уравнений [12]. Простой и наиболее важной подсистемой МГД-уравнений является система, описывающая статическую жидкость или плазму в равновесии с магнитным полем:

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}. \quad (6)$$

Уравнение (4) соответствует сохранению импульса без учета инерционных сил. Баланс между давлением плазмы и магнитными силами остается справедливым и для системы, эволюционирующей во времени, при условии, что любые изменения происходят достаточно медленно (разд. IV). С другой стороны, использование скалярного давления справедливо для достаточно медленных изменений системы.

Некоторые свойства уравнений (4)–(6) видны непосредственно:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (7)$$

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0, \quad (8)$$

$$\mathbf{J} \cdot \nabla p = 0. \quad (9)$$

Если магнитостатические уравнения удовлетворены, то из (8) следует, что давление плазмы должно быть постоянным вдоль силовой линии. Удержание плазмы подразумевает замкнутые поверхности постоянного давления, которые соответственно полностью содержат данную силовую линию. Если такая силовая линия является эргодической, то она составляет «магнитную поверхность». Можно показать из топологических соображений, что единственным решением такой системы является набор вложенных тороидов [14], а частными примерами служат токамак [1] и стелларатор.

Обычно уравнения равновесия (4)–(6) решались с помощью их переформулировки в задачу с граничными условиями. Получающиеся в результате эллиптические уравнения записываются на Эйлеровой разностной сетке и решаются итерациями [5].

Альтернативная процедура, использующая метод водяного мешка, способна описать равновесие непосредственно в координатах, связанных с конечным набором магнитных поверхностей, каждая из которых отмечается, скажем, величиной давления

$$p = p_1, p_2, \dots, p_J. \quad (10)$$

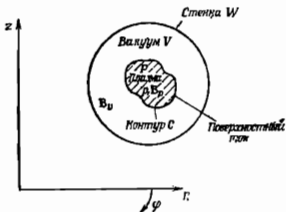
Теперь можно говорить о получении решения с помощью создания набора поверхностей или водяных мешков, которые движутся до тех пор, пока не останутся в равновесии. Не говоря уже о простоте формулировки и возможности непосредственного описания задачи, преимущество этой методики заключается в том, что она ведет к точному и быстрому решению задачи. Более того, когда выражения для магнитных поверхностей получены явным образом, можно вычислить и медленные изменения вследствие адиабатических изменений или диффузии (разд. IV).

В этом разделе для иллюстрации общей идеи рассмотрим равновесие одного свободного водяного мешка. В осесимметричном случае (простейший класс тороидов, не зависящий от тороидального направления φ) контур определяется пересечением магнитной поверхности с полоидальной плоскостью (плоскостью $R-Z$ в цилиндрических обозначениях). Сначала мы рассмотрим свойства и метод решения для одного такого

контура. Бетанкур и Гарабедиан [4] получили решения для отдельной поверхности в трех измерениях, и их метод обсуждается ниже (разд. II, Г).

Б. МОДЕЛЬ РАВНОВЕСИЯ ОДНОГО КОНТУРА

Модель равновесия одного контура в поперечной плоскости показана на фиг. 4. Считается, что некоторая область окружена проводящей стенкой W (нормальная компонента магнитного поля подразумевается равной нулю). Предполагается, что эта область содержит торондаальный плазменный шнур, который



Фиг. 4. Модель отдельного водяного мешка для равновесия плазмы и поля.

Область однородной плазмы P ограничена поверхностным током, текущим через контур C . Между стенкой W и границей плазмы C имеется вакуумная область V .

пересекает плоскость по площадке P , ограниченной контуром C . В пределах области P , если предположить, что плазма имеет однородное давление p и что токи отсутствуют, уравнение равновесия (4) будет удовлетворено. Между C и W подразумевается вакуумная область, в которой нет тока. По поверхности, соответствующей контуру C , который отделяет плазму от вакуумной области, протекает поверхностный ток. Если обозначить поля в плазме и в вакууме соответственно B_p и B_v , то легко видеть, что условием равновесия между плазмой и вакуумной областью является

$$\frac{1}{2} B_v^2 = \frac{1}{2} B_p^2 + p \quad (11)$$

в каждой точке контура C . Это уравнение равновесия и определяет положение поверхности.

Чтобы в каждой точке контура использовать уравнение равновесия, как в плазме, так и в вакууме должны быть определены магнитные поля. В соответствии с выбранной моделью поле в плазме и в вакуумной области должно удовлетворять уравнениям (5) и (6):

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0, \quad (12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (13)$$

с граничным условием, что нормальная компонента магнитного поля должна исчезать на W и S . Эти уравнения легко решаются в «односвязной» области плазмы:

$$\mathbf{B}_p = (I_p/2\pi R) \mathbf{e}_\varphi, \quad (14)$$

где I_p — константа, а $\mathbf{e}_\varphi$ — единичный вектор в тороидальном направлении. Полоидальное поле отсутствует, так как в области плазмы нет токов, а граничные условия исключают какой-либо полоидальный поток.

С другой стороны, в области вакуума вследствие поверхностных токов, текущих по S , могут существовать как тороидальное поле $B_\varphi \mathbf{e}_\varphi$, так и полоидальное поле, которое мы обозначим $\mathbf{B}_x$. Вакуумные поля, удовлетворяющие законам Ампера (12), могут быть выражены в виде

$$\mathbf{B}_{\varphi 0} = (I_0/2\pi R) \mathbf{e}_\varphi, \quad (15)$$

$$\mathbf{B}_{x0} = K \nabla \alpha, \quad (16)$$

где I_0 и K — константы, а α — многозначный потенциал с единственным периодом. Разность между I_0 и I_p представляет текущий по поверхности полоидальный ток, в то время как K является текущим по поверхности тороидальным током, поскольку

$$\oint \mathbf{B}_x \cdot d\mathbf{l} = \oint K \nabla \alpha \cdot d\mathbf{l} = K. \quad (17)$$

Путь интегрирования в области вакуума выбран так, что он охватывает плазменный шнур. Далее можно отметить, что поток полоидального поля выражается объемным интегралом

$$\psi = \iiint_V \mathbf{B}_x \cdot \nabla \alpha \, d\tau. \quad (18)$$

Чтобы определить α и посредством этого полоидальное поле, можно использовать условие бездивергентности магнитного поля, что дает уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \alpha = 0. \quad (19)$$

Это уравнение должно быть решено в вакуумной области с граничными условиями Неймана (нормальные компоненты

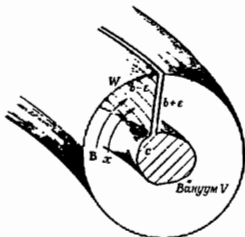
поля равны нулю на S и W). Так как вакуумная область не является односвязной, между S и W используется боковой разрез b . Граничными условиями на нем являются непрерывность производных α и скачок α на единицу (фиг. 5) при пересечении бокового разреза.

Уравнение Лапласа (19) для потенциала α в вакуумной области может быть записано в интегральной форме с помощью теоремы Грина. В дискретной форме это уравнение становится матричным уравнением для α , во всех точках i на поверхностях S и W . Затем в каждой точке i контура S вычисляется потенциалное поле

$$B_x(C, i) = \frac{K}{h^i} \frac{\partial \alpha}{\partial i}. \quad (20)$$

Теперь можно отметить, что эта задача [уравнения (19), (20)] идентична задаче, возникающей в процедуре ортогонализации Поттера и Татла [21]. Функция $\bar{p}(i)$ в их обозначениях играет точно такую же роль, что и α , так что процедура ортогонализации непосредственно определяет потенциалное поле на контуре S .

Таким образом, равновесие простого водяного мешка на плоскости полностью определяется следующими константами: p — давлением, K — тороидальным током, а также I_o и I_p . Выражение (14) в явном виде дает поле плазмы, а вакуумные поля задаются выражениями (15) и (20). Положение водяного мешка определяется после того, как удовлетворено уравнение (11).



Фиг. 5. Разрез, введенный между плазмой и стенкой, чтобы сделать вакуумную область односвязной

В. ВАРИАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА

Решение для равновесного положения контура S может быть получено с помощью итерационной процедуры. Для иллюстрации методики можно представить мысленный эксперимент, в котором область, ограниченная W , рассматривается как изолированная в электромагнитном смысле система. На какой-то стадии вариаций имеется дисбаланс сил поперек контура S . Сдвигая контур S , эти силы могут совершать работу, уменьшая при этом свою потенциальную энергию. Мы можем положить,

что система является абсолютно вязкой, так что потенциальная энергия, превращенная в кинетическую энергию, немедленно диссипирует и исчезает из системы. Поэтому равновесие может быть найдено, когда потенциальная энергия минимизирована.

Пусть полоидальный поток на стенке Ψ будет ψ , а торoidalный поток на Ψ равен Π . Требование электромагнитной изолированности системы может быть выполнено, если на стенке отсутствует вектор Пойнтинга. Таким образом, в процессе вариаций требуется, чтобы $\delta\psi$ и $\delta\Pi$ были нулями. Торoidalный и полоидальный потоки между C и стенкой равны

$$\Pi = I_0 \iint_V dS / 2\pi R, \quad (21)$$

$$\psi = K \iint_V (\nabla \alpha)^2 2\pi R dS, \quad (22)$$

где интегралы берутся по поверхности V (18). Интегралы (21) и (22) являются индуктивностями L , L' системы:

$$\Pi_0 = LI_0, \quad (23)$$

$$\psi = L'K, \quad (24)$$

так что в процессе вариации при вычислении индуктивностей L и L' определяются те токи I_0 и K , которые поддерживают постоянными потоки Π_0 и ψ . Давление плазмы p и ток I_0 могут считаться постоянными.

На любом шаге вариаций сила F вдоль внешней нормали к контура дается [см. (11)] выражением

$$F = \left(p + \frac{1}{2} B_p^2 - \frac{1}{2} B_\phi^2 \right) n. \quad (25)$$

Если каждая точка l контура смещается в плоскости на расстояние δr_l , то потери потенциальной энергии равны

$$\delta E = - \oint_C F_l \cdot \delta r_l 2\pi R h^l dl. \quad (26)$$

За счет выбора подходящего смещения δr_l контура всегда можно обеспечить отрицательно определенное изменение потенциальной энергии. Одним из таких выборов [4] является

$$\delta r_l = -\omega F_l, \quad (27)$$

где ω — релаксационный параметр. При этом величина δE равна

$$\delta E = -\omega \oint_C F_i^2 2\pi R h^i dt \quad (28)$$

и отрицательно определена. Так как поток потенциальной энергии сквозь границу W отсутствует, потенциальная энергия с помощью такой процедуры минимизируется и таким образом может быть получено равновесие.

Учитывая выражение для силы (25) и определение $\mathbf{n}$ в координатах контура (R, Z) , новые координаты на каждом шаге итераций можно определить [см. (27)] соотношениями

$$\delta R_i = -\omega \left[p + \frac{I_p^2}{(2\pi R_i)^2} - \frac{I_c^2}{(2\pi R_i)^2} - \frac{K^2}{h^{i/2}} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)^2 \right] \frac{\partial Z}{h^i \partial i} \quad (29)$$

$$\delta Z_i = \omega \left[p + \frac{I_p^2}{(2\pi R_i)^2} - \frac{I_c^2}{(2\pi R_i)^2} - \frac{K^2}{h^{i/2}} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)^2 \right] \frac{\partial R}{h^i \partial i} \quad (30)$$

В течение отдельного шага вариаций силу F_i можно предполагать постоянной и пару уравнений по R и Z можно решать, например, методом Лакса и Лакса — Вендрофа. Параметр ω должен быть выбран малым, чтобы удовлетворить предположению о малой величине вариаций. Если уравнения (29) и (30) разрешаются явным образом, то параметр ω должен, безусловно, удовлетворять условию типа Куранта — Фридрихса — Леви

$$\omega \simeq \text{Min} (h^i / F_i). \quad (31)$$

Г. РАВНОВЕСИЕ ОТДЕЛЬНОГО ВОДЯНОГО МЕШКА В СЛУЧАЕ ТРЕХ ИЗМЕРЕНИЙ

Общие представления, изложенные для водяного мешка на плоскости, естественно распространяются и на отдельный водяной мешок в трех измерениях. Бетанкур и Гарабедян [4] недавно получили такие решения с помощью этого метода.

1. Поля в трех измерениях

Модель здесь такая же, как и в двумерной задаче, которая иллюстрировалась фиг. 4 и 5. Однако из-за отсутствия торондальной симметрии мы не можем больше определить торон-

дальное поле аналитически, и для него теперь должно решаться уравнение Лапласа. Опять как в плазме, так и в вакуумных областях токи отсутствуют, так что поля удовлетворяют уравнениям (12) и (13). Следовательно, магнитные поля как в плазме, так и в вакуумной области могут быть описаны с помощью многозначных потенциалов:

$$\mathbf{B} = \nabla \varphi. \quad (32)$$

В области плазмы объем не является односвязным, так что потенциал не гармоничен в тороидальном направлении. Полезно явно ввести период потенциала:

$$\mathbf{B}_p = I_p \nabla \beta, \quad (33)$$

где β — потенциал единичного периода, а I_p — константа, физически идентичная эквивалентному току, создающему тороидальное поле.

В области вакуума пространство не является односвязным как в тороидальном, так и в полоидальном направлениях, и поэтому мы вводим две константы I_0 и K :

$$\mathbf{B}_0 = I_0 \nabla \beta + K \nabla \alpha, \quad (34)$$

где потенциал β гармоничен в полоидальной плоскости и имеет единичный период в тороидальном направлении. Потенциал β гармоничен в тороидальной плоскости и имеет единичный период при обходе плазмы в полоидальной плоскости. Из интегральной формы закона Ампера следует, что I_0 является полоидальным током, создающим тороидальное поле в вакуумной области, в то время как K представляет тороидальный ток на поверхности S раздела плазма — вакуум, который создает полоидальное поле. Как и ранее, тороидальный поток Π_p в плазменной области дается объемным интегралом

$$\Pi_p = \iiint_V \mathbf{B}_p \cdot \nabla \beta d\tau, \quad (35)$$

тогда как тороидальный поток Π_0 и полоидальный поток Ψ_0 равны соответственно

$$\Pi_0 = \iiint_V \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \beta d\tau, \quad (36)$$

$$\Psi_0 = \iiint_V \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \alpha d\tau. \quad (37)$$

Магнитное поле на свободном водяном мешке может быть вычислено из потенциалов, которые в свою очередь получаются

при использовании условия бездивергентности магнитных полей (13):

$$\text{в } P: \quad \nabla^2 \beta = 0, \quad (38)$$

$$\text{в } V: \quad \nabla^2 \beta = 0, \quad (39)$$

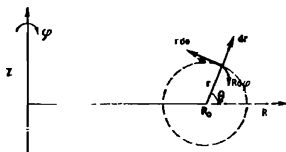
$$\nabla^2 \alpha = 0. \quad (40)$$

В области плазмы граничные условия Неймана ставятся на поверхности S , а в вакуумной области (39), (40) граничные условия Неймана ставятся как на S , так и на W (фиг. 5).

Эти уравнения Лапласа, записанные в интегральной форме, можно решить, используя в случае трех измерений теорему Грина аналогично тому, как это было описано для плоского случая в разд. II, Б. Преимуществом такой процедуры является то, что при этом не вводится никакой промежуточной сетки и потенциалы определяются только на поверхности S , т. е. там, где они и требуются. Другой процедурой является метод отображения, описанный Бетанкуром [3], и мы продемонстрируем его здесь.

2. Отображение вакуумной и плазменной областей

Поверхность водяного мешка и стенки удобно описывать в торондальных координатах (фиг. 6). Предполагается, что ось



Фиг. 6. Торондальные координаты (r, θ, ϕ) .

торондальных координат $r=0$ лежит внутри плазменной области. Уравнение для поверхности водяного мешка может быть записано в виде

$$r = c(\theta, \phi) \quad (41)$$

и аналогично уравнение для стенки может быть записано с помощью функции w :

$$r = w(\theta, \phi). \quad (42)$$

Бетанкур отображает вакуумную область V в прямоугольник ($0 \leq s \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$):

$$s = [r - c(\theta, \varphi)]/[w(\theta, \varphi) - c(\theta, \varphi)] \quad (43)$$

$$\theta = \theta, \quad \varphi = \varphi.$$

В новых неортогональных координатах $x'_\mu = (s, \theta, \varphi)$ уравнения Лапласа для потенциалов α, β (38)–(40) преобразуются в уравнения (см., например, [15])

$$\frac{\partial}{\partial x'_\nu} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} g^{\nu\lambda} \frac{\partial \alpha}{\partial x'_\lambda} \right] = 0, \quad (44)$$

где $g^{\nu\lambda}$ — контравариантный метрический тензор

$$g^{\nu\lambda} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\lambda} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu},$$

а g — детерминант $g^{\nu\lambda}$. Вводя функцию

$$f(\theta, \varphi) = c(\theta, \varphi)(s - 1) - sw(\theta, \varphi),$$

мы можем контравариантный метрический тензор определить из преобразования (43):

$$g^{\nu\lambda} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(w-c)^2} + \frac{f_\theta^2}{(w-c)^2 r^2} + \frac{f_\varphi^2}{(w-c)^2 R^2} & \frac{f_\theta}{(w-c)r} & \frac{f_\varphi}{(w-c)R^2} \\ \frac{f_\theta}{(w-c)r^2} & \frac{1}{r^2} & 0 \\ \frac{f_\varphi}{(w-c)R^2} & 0 & \frac{1}{R^2} \end{bmatrix}.$$

откуда

$$\frac{1}{\sqrt{g}} = (w - c) r R. \quad (45)$$

Граничные условия на S и $\mathbb{W}$ преобразуются в

$$g^{\nu\lambda} \frac{\partial \alpha}{\partial x'_\lambda} = 0.$$

Преимуществом этого отображения является то, что вакуумная область довольно сложной формы отображена в параллелепипед, который легко логически пронумеровать на ЭВМ и на котором легко поставить граничные условия. Этот параллелепипед с помощью регулярной прямоугольной дискретной решетки затем делится на элементы, и на образовавшейся сетке уравнение Лапласа (44) записывается в виде конечных разностей. Одна из трудностей заключается в том, что преобразованное уравнение, описывающее потенциалы, содержит смешанные производные, и нужно использовать пятнадцатиточечную (а не семиточечную) разностную схему. В вакуумной области полученное разностное уравнение для обоих потенциалов α и β решается методом последовательных сверхрелаксаций [19]. Эквивалентное отображение выполняется в области плазмы, и затем определяется потенциал β .

Имея решения для потенциалов, теперь можно определить магнитное поле на поверхности водяного мешка и затем, как и ранее, использовать вариационную процедуру разд. II, В. Пример такого решения для стелларатора приведен на фиг. 7.



Плазма



Парабедиа

Фиг. 7. Решение Бесскура и Парабедиа [4] для равновесия в стеллараторе, представленного отдельным водяным мешком.

III. РАВНОВЕСИЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ТОКОВ

Модели одиночного водяного мешка в двух и трех измерениях, описанные в разд. II, формулируются просто и легко для решения на современных ЭВМ. Однако в известном смысле они являются соответственно одно- и двумерной моделями, так как описывают лишь линию или поверхность и не содержат информации о профиле давления и тока. Тем не менее естественным

образом идею можно распространить на последовательность вложенных поверхностей, поперек которых давление и токи меняются. Здесь мы обсудим взаимодействие набора вложенных поверхностей, которые пересекают полоидальную плоскость осесимметричного тора.

А. ФОРМУЛИРОВКА ОСЕСИММЕТРИЧНОГО РАВНОВЕСИЯ В НАТУРАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Составим набор вложенных магнитных поверхностей. При простейшей топологии имеется одна вырожденная поверхность, представленная одиночной тороидальной силовой линией (магнитная ось). Между магнитной поверхностью и магнитной осью полоидальное магнитное поле (B_χ) пересекает радиальную плоскость и образует полоидальный поток $\psi = RA_\phi$, где A_ϕ — тороидальный векторный потенциал. Таким образом, каждая поверхность может быть отмечена координатой ψ . При этом «потокосное пространство» (ψ, χ, ϕ) образует правую ортогональную систему координат с метрикой

$$ds^2 = (h^\psi d\psi)^2 + (h^\chi d\chi)^2 + (R d\phi)^2. \quad (46)$$

1. Непрерывные уравнения

Как и ранее (разд. II), из уравнений (5), (8), (9) можно получить

$$p = p(\psi), \quad (47)$$

$$J_\phi = 0, \quad (48)$$

$$\mathbf{B} = B_\phi \mathbf{e}_\phi - \frac{1}{Rh^\psi} \mathbf{e}_\chi, \quad (49)$$

т. е. давление постоянно на поверхности, отсутствует нормальный к поверхности ток и поле бездивергентно. Из закона Ампера (6) определяются токи в полоидальной плоскости:

$$J_\psi = \frac{1}{Rh^\chi} \frac{\partial}{\partial \chi} (RB_\phi) = 0,$$

$$J_\chi = -\frac{1}{Rh^\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} (RB_\phi).$$

Отсюда следует, что можно ввести полоидальный ток в виде поверхностной функции $I'(\psi) = RB_\phi$ и, следовательно,

$$J_\chi = -\frac{1}{Rh^\psi} \frac{dI'}{d\psi}. \quad (50)$$

Из нормальной к поверхности компоненты уравнения баланса давления (4) с использованием уравнений (47), (49), (50) можно найти тороидальный ток J_ψ :

$$\frac{1}{h^\psi} \frac{dp}{d\psi} = J_\psi \frac{1}{Rh^\psi} - \frac{1}{Rh^\psi} \frac{dI'}{d\psi} B_\psi. \quad (51)$$

Связывая плотность тороидального тока J_ψ с тороидальным векторным потенциалом A_ψ или полоидальным потоком ψ , можно получить эллиптическое уравнение

$$\nabla^2 \left(\frac{\psi}{R} \right) = - \left(R \frac{dp}{d\psi} + \frac{I'(\psi)}{R} \frac{dI'}{d\psi} \right). \quad (52)$$

Оператор ∇^2 возникает из тороидальной компоненты оператора rot rot .

Уравнение (52) имеет форму нелинейного уравнения Пуассона. Решение ψ можно получить, если заданы функции «источника» $p(\psi)$ и $I'(\psi)$ и значение ψ на границе интересующей нас области. Общепринятым подходом является решение уравнения (52) итерациями на эйлеровой разностной сетке [5].

В методе водяного мешка эллиптическое уравнение (52) преобразуется к собственно потоковым натуральным координатам (ψ, χ) . Оператор Лапласа, действующий на ψ , превращается в

$$\nabla^2 \left(\frac{\psi}{R} \right) = \frac{1}{h^\psi h^\chi} \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{h^\chi}{Rh^\psi}. \quad (53)$$

Замечая, что дифференциальная площадь в натуральных координатах $h^\psi h^\chi$ является якобианом эйлеровой декартовой системы координат, уравнение равновесия (52) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{h^\chi}{Rh^\psi} \right) = - \frac{\partial (R, Z)}{\partial (\psi, \chi)} \left(R \frac{dp}{d\psi} + \frac{I'(\psi)}{R} \frac{dI'}{d\psi} \right). \quad (54)$$

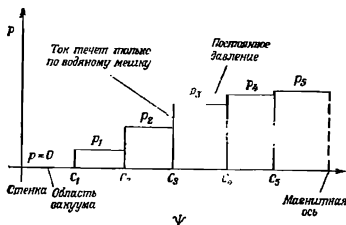
Его можно рассматривать как уравнение для h^χ/h^ψ , которое вместе с уравнениями ортогональности [21] определяет равновесные натуральные координаты. Однако для расчетов на ЭВМ непрерывная система должна быть представлена конечным набором водяных мешков, и, поскольку задача является нелинейной, для получения решения должна использоваться вариационная процедура.

2. Модель водяного мешка для распределенного давления

В дискретной модели водяного мешка распределение представляется с помощью нескольких (J) вложенных поверхностей с заданными потоками:

$$\psi = (c_1, c_2, \dots, c_J).$$

В пространстве между поверхностями давление предполагается постоянным, а ток заменяется поверхностными токами, текущими по поверхности водяного мешка (фиг. 8). Водяные



Фиг. 8. Использование конечного числа вложенных водяных мешков для описания профилей тока и давления.

Между водяными мешками давление плазмы постоянно.

мешки перемещаются в соответствии с вариационной процедурой, пока они не придут в равновесие (разд. III, Б).

С помощью такой модели можно определить точное равновесие для конечного набора поверхностей безотносительно к ошибкам обрезания. Уравнение равновесия (54) между контурами удовлетворится, так как нет градиента давления и отсутствуют какие-либо токи. Поперек поверхности каждого водяного мешка уравнение (54) можно проинтегрировать, что дает

$$\frac{1}{h^2 h^\psi} \delta \left(\frac{h^x}{R h^\psi} \right) = -R \delta p - \frac{1}{R} \delta \left(\frac{l^2}{2} \right),$$

где δf представляет скачкообразное изменение функции f при пересечении водяного мешка. Необходимо отметить, что h^ψ имеет разрывы, в то время как h^x и R непрерывны, так что

можно получить

$$\delta \left(\frac{1}{2} \frac{R^2}{R^2} \right) = -\delta p - \delta \frac{I^2}{2R^2}. \quad (55)$$

Левую часть можно отождествить с магнитным давлением полоидального поля, тогда как члены в правой части являются скачками газокINETического давления и магнитного давления тороидального поля.

Б. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Здесь принят подход, аналогичный тому, который был описан для одной поверхности (разд. II). Поддерживая в течение итераций постоянными давление p и полоидальный ток I' , водяные мешки перемещают до тех пор, пока все они не придут в равновесие. Возникает вопрос о выборе конкретного алгоритма, с помощью которого следует перемещать водяные мешки.

Как и прежде, контуры должны сдвигаться так, чтобы на каждой итерации потенциальная энергия уменьшалась, и тогда, если существует ее минимум, будет найдено равновесие. Рассмотрим поэтому потенциальную энергию такой системы. Во время движения контуров объем и площадь между парой контуров изменяются. Однако $p(\psi)$ и $I'(\psi)$ поддерживаются постоянными. Считая удерживаемую жидкость идеальным газом с $pV^\gamma = \text{const}$, мы видим, что для такого газа $\gamma = 0$, так как давление при изменениях объема не меняется. Далее, внутренняя энергия идеального газа с давлением p и объемом V равна $pV/(\gamma - 1)$. Отсюда следует, что внутренняя энергия такого газа в торе равна

$$E_p = \iint_D -p 2\pi R dS,$$

где интеграл берется по площади области D , ограниченной стенкой W . Аналогично, как можно показать из первых принципов, магнитная энергия тороидального поля отрицательна, так как $I'(\psi)$ поддерживается постоянным. Таким образом, полная потенциальная энергия системы равна

$$E = 2\pi \iint_D \left[-p(\psi) - \frac{I'^2(\psi)}{2R^2} + \frac{B_z^2}{2} \right] R dS. \quad (56)$$

При изменении положения поверхностей, а значит, и магнитного потока, энергия также меняется

$$\delta E = -2\pi \iint_D \left[\frac{dp}{d\psi} \delta\psi + \frac{I'}{R^2} \frac{dI'}{d\psi} \delta\psi - \mathbf{B}_x \cdot \delta \mathbf{B}_x \right] R dS. \quad (57)$$

Используя теорему Грина, третий член в полоидальной магнитной энергии можно выразить через поток ψ и тороидальный ток J_φ :

$$\delta E_z = 2\pi \oint_D \delta\psi J_\varphi dS - 2\pi \oint_W \delta\psi B_z \cdot dl,$$

где контурный интеграл берется вдоль стенки W , ограничивающей область D . Так как поток на стенке в течение итераций держится постоянным, вклад границы исчезает, и мы получаем для вариации полной потенциальной энергии выражение

$$\delta E = -2\pi \iint_D \left(\frac{dp}{d\psi} R + \frac{I'}{R} \frac{dl}{d\psi} - J_\varphi \right) \delta\psi dS. \quad (58)$$

Очевидно, что энергия будет минимизирована, когда подынтегральное выражение в (58) равно нулю, что соответствует уравнению равновесия, уже полученному ранее (52). В неравновесном состоянии, однако, тороидальный ток J_φ , соответствующий магнитным поверхностям, не обращает в нуль подынтегральное выражение, и величину $\delta\psi$ нужно выбрать так, чтобы обеспечить отрицательно определенное изменение энергии E .

Направливается множество возможностей для выбора $\delta\psi$, которые определяют различные вариационные методы. Можно применить тот же метод, который был использован для одной поверхности (разд. II).

1. Явная схема движения поверхностей

Интеграл (58) может быть записан в натуральных координатах

$$\delta E = -2\pi \int_0^{\psi_m} d\psi \oint_{c=\psi} \left(\frac{dp}{d\psi} R + \frac{I'}{R} \frac{dl'}{d\psi} - J_\varphi \right) \delta\psi h^{1/2} d\chi, \quad (59)$$

куда входят интегралы вдоль каждой магнитной поверхности (переменная χ) и по магнитным поверхностям $(0, \psi_m)$. Величину $\delta\psi h^{1/2}$ можно рассматривать как смещение каждой точки на поверхности вдоль единичной нормали $\mathbf{n}$ к поверхности:

$$\delta \mathbf{r} = \delta\psi h^{1/2} \mathbf{n}.$$

Обозначая элемент длины вдоль поверхности $dl = h^{1/2} d\chi$, мы получаем

$$\delta E = -2\pi \int_0^{\psi_m} d\psi \oint_c \left(\frac{dp}{d\psi} + \frac{I'}{R^2} \frac{dl'}{d\psi} - \frac{J_\varphi}{R} \right) \delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} R dl, \quad (60)$$

Если на каждой поверхности выбрать перпендикулярную вариацию δr каждой точки в виде (25), (27):

$$\delta r = \omega \left(\frac{d\rho}{d\psi} + \frac{I'}{R^2} \frac{dI'}{d\psi} - \frac{I_\varphi}{R} \right) n, \quad (61)$$

то изменение энергии будет отрицательно определено

$$\delta E = -2\pi \int_0^{\psi_m} d\psi \oint_{\Gamma} \frac{1}{\omega} (\delta r)^2 R dI, \quad (62)$$

обеспечивая таким образом сходимость к какому-либо минимуму энергии и равновесию, если оно существует. Параметр релаксации ω является малой положительной величиной.

Для рассмотренной выше (фиг. 8) дискретной модели водяных мешков уравнения (61) становятся дискретными и соответствуют локальным условиям скачка поперек каждой поверхности [уравнение (55)]. На $(\mu+1)$ -м шаге водяные мешки перемещаются в положение

$$r^{(\mu+1)} = r^{(\mu)} + \omega \left[\delta r + \delta \left(\frac{I'^2}{2R^2} \right) - \delta \left(\frac{1}{2R^2 h^2} \right) \right]^{(\mu)} n. \quad (63)$$

После того как они сдвинуты в соответствии с этим алгоритмом, пространство подвергается ортогонализации, что в свою очередь определяет торондальный ток и величину I_φ .

2. Неявная схема вариации контуров

Существуют и другие вариационные алгоритмы, которые обеспечивают минимизацию потенциальной энергии [уравнение (58)]. Существенно более быструю сходимость обеспечивает метод, который связан с неявной вариацией потока. Из уравнения (58) выберем вариацию потока $\delta\psi$ в соответствии с формулой

$$\nabla^2 \left(\frac{\delta\psi}{R} \right) = -\omega_2 \left[\left(\frac{d\rho}{d\psi} \right) R + \frac{I'}{R} \frac{dI'}{d\psi} - I_\varphi \right], \quad (64)$$

где ω_2 , как и раньше, представляет параметр релаксации, а ∇^2 — торондальная компонента оператора rot rot . Вариация энергии (58) равна при этом

$$\delta E = \frac{2\pi}{\omega_2} \iint_D \nabla^2 \left(\frac{\delta\psi}{R} \right) \delta\psi dS.$$

С помощью теоремы Грина подынтегральное выражение может быть представлено в квадратичной форме

$$\delta E = -\frac{2\pi}{\omega_2} \iint_D (\nabla \delta\psi)^2 \frac{1}{R} dS + \frac{2\pi}{\omega_2} \oint_{\Gamma} \delta\psi B_z \cdot dI. \quad (65)$$

И вновь, если во время итераций поток на стенке сохраняется, второй член исчезает, и вариационный метод минимизирует энергию.

Вариационный алгоритм (64) определяет итерации, в которых на каждом шаге μ получаются существенно улучшенные решения для потока $\psi = \psi^{(\mu)}$:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left(\frac{\psi^{(\mu)}}{R} \right) &= (1 - \omega_2) \nabla^2 \left(\frac{\psi^{(\mu-1)}}{R} \right) - \\ &- \omega_2 \left(R \frac{d\rho^{(\mu-1)}}{d\psi} + \frac{I'}{R} \frac{dI'^{(\mu-1)}}{d\psi} \right). \end{aligned} \quad (66)$$

На шаге $(\mu - 1)$ существующие поверхности j являются поверхностями постоянного потока $\psi^{(\mu-1)} = c_1, \dots, c_j, \dots, c_J$. Считая поверхности фиксированными, определим новый поток $\psi^{(\mu)}(i, j)$ на этих поверхностях. Записывая уравнение (66) в существующих координатах (i, j) , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial j} \left(\frac{h^i}{Rh^j} \frac{\partial \psi^{(\mu)}}{\partial j} \right) + \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{h^i}{Rh^j} \frac{\partial \psi^{(\mu)}}{\partial i} \right) &= \\ &= (1 - \omega_2) \frac{\partial}{\partial j} \left(\frac{h^i}{Rh^j} \frac{dc}{dj} \right) - \\ &- \omega_2 \frac{h^i h^j}{dc/dj} \left[R \frac{d\rho}{dj} + \frac{1}{R} \frac{d}{dj} \left(\frac{I'^2}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (67)$$

Это уравнение можно представить в разностном виде, используя пятиточечную схему, а решение $\psi^{(\mu)}(i, j)$ получить с помощью неявного метода переменных направлений (НМПН) [19]. Из-за слабой зависимости решения $\psi^{(\mu)}(i, j)$ от координаты i в схеме НМПН требуется очень мало итераций. В пределе

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \psi^{(\mu)}(i, j) = c_j.$$

Конечно-разностная форма уравнения (67) взята в таком виде, что в пределе обеспечивается точное выполнение уравнения равновесия (55).

3. Интерполяция контуров в неявном методе

На каждом шаге μ неявного метода определяется улучшенное решение $\psi^{(\mu)}(i, j)$ для полондального потока. Отклонение ψ от предписанной постоянной величины c_j на каждом контуре j является мерой отклонения контуров от равновесия. Затем контуры в полондальной плоскости сдвигают так, чтобы они совпали с линиями постоянного потока $\psi = c_1, \dots, c_J$. Это можно сделать с помощью интерполяции, производимой в «предше-

ствующем» пространстве $r^{(u-1)}(i, j)$, когда каждая точка контура движется вдоль линии постоянного i . Вектор $r = (R, Z)$ в полойдальной плоскости получает перпендикулярное к контуру приращение, пока для каждого контура j значение потока в точке не станет равно c_j . При этом используют интерполяцию четвертого порядка:

$$\delta r = \left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)_i \delta \psi + \left(\frac{\partial^2 r}{\partial \psi^2}\right)_i \frac{\delta \psi^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 r}{\partial \psi^3}\right)_i \frac{\delta \psi^3}{6} + \left(\frac{\partial^4 r}{\partial \psi^4}\right)_i \frac{\delta \psi^4}{24} + o(\delta \psi^4). \quad (68)$$

Выразим эту сумму через координату j . Удобно ввести искомое изменение величины j :

$$\Delta j = \frac{\psi^{(u)}(i, j) - c_j}{dc/dj},$$

тогда

$$r^{(u)}(\tilde{i}, j) = r^{(u-1)}(i, j) + \left[\frac{\partial r^{(u-1)}}{\partial j}\right]_i \Delta j + \left[\frac{\partial^2 r^{(u-1)}}{\partial j^2}\right]_i \frac{\Delta j^2}{2} + \left[\frac{\partial^3 r^{(u-1)}}{\partial j^3}\right]_i \frac{\Delta j^3}{6} + \left[\frac{\partial^4 r^{(u-1)}}{\partial j^4}\right]_i \frac{\Delta j^4}{24}. \quad (69)$$

Производные определяются с помощью соответствующих центральных разностей.

Как только контуры будут сдвинуты в соответствии с этой интерполяцией, кривые i уже не будут ортогональны j . Поэтому при фиксированных контурах j точки i перераспределяют с помощью ортогонализационной процедуры. Итерация на этом завершается и можно выполнять новый шаг с вариацией потока (п. III, Б, 2).

В ПРИМЕРЫ НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЙ

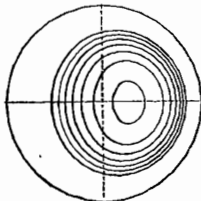
Примеры равновесных решений, полученных неявным вариационным методом, представлены на фиг. 9 и 10. На фиг. 9 показаны равновесные решения для тора круглого поперечного сечения с большим полойдальным бета. На фиг. 10 представлено решение для грушевидного поперечного сечения.

В показанных решениях использовалось восемь свободных контуров, каждый из которых содержал 32 точки. Хотя можно использовать и значительно большее число поверхностей, благодаря применению натуральных координат уже по сравнению с эйлеровым методом с тем же числом точек достигнута значительно большая точность. Для получения показанных решений требовалось в типичных случаях 10 итераций и время 45 с на IBM 360/91. Скорость сходимости зависит от принятой ве-

личины параметра релаксации ω_2 . Обычно сходимость достигалась для

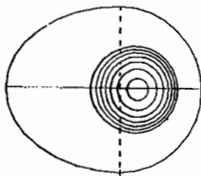
$$0, 0 < \omega < 0,5,$$

а оптимальная величина оказалась порядка 0,3. Уменьшение требуется только, чтобы обеспечить малость изменения положений контуров на каждой итерации. Величина ω_2 играет роль



Фиг. 9. Равновесное решение для конечного числа магнитных поверхностей в токамаке.

Аспектное отношение тора равно 2, $\beta_{\text{пол}} = 1,3$. Между стеной круглого сечения и первой плазменной поверхностью имеется вакуумная область. Главная ось тора находится слева.



Фиг. 10. Равновесие конечного числа магнитных поверхностей в токамаке с грушевидным поперечным сечением кожуха.

Профиль давлений линейный, а последней поверхностью располагается вакуумная область.

переменного шага, а в вариационной процедуре изменения предполагаются малыми. Кроме того, поскольку контуры сдвигаются с помощью явной интерполяции, слишком большие шаги будут неудовлетворительными для тейлоровского разложения.

IV. УСЛОВИЯ АДИАБАТИЧНОСТИ

А. АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИЗМЕНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Равновесие между полем и плазмой, которое описывается магнитостатическими уравнениями, справедливо не только в идеальной, полностью статической ситуации. Действительно, можно поставить вопрос, каков смысл статических уравнений при описании плазмы, которая существенно меняется во времени. Равновесие между плазмой и полем, описываемое уравнением (4), получено из уравнения для количества движения, в котором пренебрегают инерционными силами. Поэтому такая модель справедлива, если, во-первых, равновесные течения

слабы. Это означает, что вращательные движения в пределах магнитной поверхности достаточно медленные, так что соответствующие кориолисовы и центробежные силы можно не учитывать. Второе требование состоит в том, что любое возможное меняющееся во времени движение должно протекать достаточно медленно, чтобы можно было пренебречь ускорениями.

Выражение «достаточно медленно» можно представить количественно, вспомнив условие, налагаемое уравнениями равновесия, а именно что магнитная поверхность является поверхностью постоянного давления. Предположим, что в некоторой точке поверхности происходит возмущение давления. В случае низкого бета напряженность магнитного поля препятствует распространению импульса давления перпендикулярно полю. Уравновешивание давления на поверхности может быть достигнуто только за счет распространения импульса параллельно силовой линии. Таким образом, время уравновешивания давления на поверхности равно пролетному времени звуковой волны вдоль силовой линии. В тороидальных задачах характерной длиной вдоль силовой линии является $2\pi qR$, где q — коэффициент запыта устойчивости. Величина $2\pi qR$ — это длина силовой линии после того, как она один раз обернется вокруг поперечного сечения. Поэтому время уравновешивания равно

$$\tau_A = 2\pi qR/v_s$$

где v_s — скорость звука. Отсюда следует, что если частота завихряющихся от времени процессов меньше, чем $2\pi/\tau_A = v_s/qR$, то силовое равновесие между плазмой и полем остается справедливым.

Подобные изменения могут иметь место вследствие диффузии, медленных неустойчивостей (таких, как тиринг-мода) или за счет электромагнитных полей на границе, как это происходит, например, в эксперименте по тороидальному адиабатическому сжатию. В каждом случае при наличии первоначального равновесного состояния вследствие происшедших изменений образуется новое равновесное состояние. Поэтому всякое промежуточное состояние описывается уравнениями равновесия.

Диффузия изменяет давление и поперечный и тороидальный потоки и этим самым изменяет правую часть в уравнениях равновесия. Однако адиабатические изменения могут происходить даже в отсутствие диффузии. Например, приложенные извне электрические поля изменяют граничные условия эллиптической задачи.

Поэтому прежде чем обсуждать диффузию, полезно рассмотреть математическое описание этих адиабатических изменений. Можно представить мысленный эксперимент, когда на границе меняются потоки. В результате меняются поверхности,

и в соответствии с этим изменяются функции источника для давления и потока. Поэтому необходимо найти самосогласованное решение.

Сначала можно исследовать магнитные потоки. С помощью векторного потенциала $\mathbf{A}$ и электростатического потенциала ϕ электрическое поле может быть выражено в виде

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{E} = -\nabla \phi. \quad (70)$$

Предположим, что выполняется простейший идеальный закон Ома, так что электрическое поле является лоренцевым, т. е.

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \mathbf{B} = -\nabla \phi. \quad (71)$$

Проинтегрируем уравнение (71) по замкнутому контуру l , окружающему поверхность S :

$$\oint_l \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} - \oint_l \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (72)$$

Используя теорему Стокса, получаем

$$\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_l \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) = 0 \quad (73)$$

или

$$\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (74)$$

т. е. в отсутствие электрического сопротивления магнитный поток сквозь любую поверхность сохраняется. Таким образом, магнитные потоки через каждую магнитную поверхность при таких адиабатических изменениях сохраняются:

$$\frac{d\psi}{dt} = 0. \quad (75)$$

$$\frac{d\Pi}{dt} = 0. \quad (76)$$

В уравнении (75) предполагается, что жидкость движется вместе с поверхностью. Поэтому мы можем заключить, что масса плазмы $M(\psi)$, содержащаяся в каждой поверхности:

$$M = \iiint_{V(\psi)} \rho dV, \quad (77)$$

где ρ — плотность плазмы, сохраняется:

$$\frac{dM}{dt} = 0. \quad (78)$$

Аналогично могут быть определены изменения в давлении. Предполагая, что уравнением состояния является уравнение состояния идеального газа с отношением удельных теплот γ , определим интеграл $e(\psi)$ в виде

$$e(\psi) = \iiint_{V(\psi)} p^{1/\gamma} dV. \quad (79)$$

Тогда

$$\frac{de}{dt} = 0 \quad (80)$$

для каждой поверхности ψ .

Б. АДИАБАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В ПРИМЕНЕНИИ К ОСЕСИММЕТРИЧНЫМ ТОРАМ

Очевидно, что адиабатические законы (75)–(80) в равной степени применимы и в дифференциальной форме между парами соседних поверхностей. Используя обозначение геометрических величин натурального пространства в пологоидальной плоскости (ψ, χ) , полезно ввести дифференциальный объем $V(\psi)$ между поверхностями и величину $A(\psi)$, связанную с дифференциальной площадью:

$$V(\psi) = \oint_{\psi} R h^{\psi} h^{\chi} d\chi, \quad (81)$$

$$A(\psi) = \oint_{\psi} (h^{\psi} h^{\chi} / R) d\chi. \quad (82)$$

Условия адиабатичности записываются тогда в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= 0, & \frac{d(I/A)}{dt} &= 0, \\ \frac{d}{dt}(\rho V) &= 0, & \frac{d}{dt}(p^{1/\gamma} V) &= 0, \end{aligned} \quad (83)$$

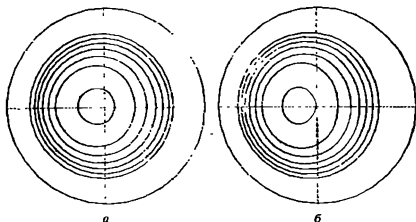
поскольку пологоидальный ток I , а также ρ и p являются поверхностными функциями.

Функция источника в уравнении равновесия зависит только от давления $p(\psi)$ и пологоидального тока $I(\psi)$. Таким образом, в отсутствие диффузии для определения нового состояния равновесия требуются только ограничения на пологоидальный ток и давление p . Если известно начальное равновесное состояние $\psi^{(0)}$ с функциями источника $p^{(0)}$ и $I^{(0)}$, то новое состояние равновесия может быть получено с помощью вариационных процедур, рассмотренных в разд. V, где из условий (83) определяются новые давление и пологоидальный ток. Например, в неявном методе (разд. III, Б, п. 2) на каждом шаге μ итераций

можно использовать самосогласованные давление и полоидальный ток:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left(\frac{\psi}{R} \right)^{(u+1)} &= (1 - \omega_2) \nabla^2 \left(\frac{\psi}{R} \right)^{(u)} - \omega_2 \left(R \frac{dp^{(u)}}{d\psi} + \frac{I^{(u)}}{R} \frac{dI^{(u)}}{d\psi} \right), \\ r^{(u+1)} &= r(\psi^{(u+1)}, \chi^{(u+1)}), \\ I^{(u+1)} &= I^{(0)} A^{(0)} / A^{(u+1)}, \\ p^{(u+1)} &= p^{(0)} (V^{(0)} / V^{(u+1)})^\gamma, \end{aligned} \quad (84)$$

где «площадь» A и объем V между каждой парой поверхностей определяются двойными интегралами (81), (82), в которых для якобиана $h\chi h\psi$ используется подходящая разностная форма.



Фиг. 11. Адиабатическое изменение равновесия за счет увеличения полоидального потока на стенке.

Первоначальное равновесие (а) имеет параболический профиль давления в $\beta_{\text{пол}} = 0,7$. Добавление потока (б) поджимает тороидальный шнур влево по направлению к главной оси симметрии. Аспектное отношение тора равно 3, главная ось тора расположена слева.

В пределе итераций ($\mu \rightarrow \infty$) итерационная схема (84) удовлетворяет условиям адиабатичности (83).

Пример такого адиабатического изменения равновесия продемонстрирован на фиг. 11. На фиг. 11, а показано равновесие в токамаке круглого поперечного сечения с аспектным отношением 3 и полоидальным бета 0,7. За счет приложенного тороидального электрического поля изменен полоидальный ток ψ на стенке, что привело к увеличению полоидального поля в торе. Видно, что новое равновесие (фиг. 11, б), в котором плазменный шнур поджат в направлении главной оси симметрии, определено однозначно.

Необходимо отметить, что допустимые величины параметра релаксаций ω_2 , при которых достигается сходимость, являются

здесь более ограниченными. В случае малого бета тороидальное поле, создаваемое плазмой, мало по сравнению с вакуумным тороидальным полем

$$\delta I \ll I. \quad (85)$$

Чтобы быть уверенным, что не возникнут большие ошибки в тороидальном поле, ведущие к расходимости, изменение площади между каждой парой поверхностей должно быть малым. Это можно обеспечить, если параметр релаксации ω_2 достаточно мал:

$$\omega_2 < \beta.$$

Особенно интересная система уравнений равновесия с адиабатическими условиями получается в пределе большого аспектного отношения и низкого бета. Для большого аспектного отношения можно предположить постоянство большого радиуса R_0 , в результате чего тороидальный ток I в равновесии является функцией только потока ψ :

$$R_0^2 \frac{dp}{d\psi} + I \frac{dI}{d\psi} = I(\psi).$$

Таким образом, уравнение равновесия сводится к

$$\nabla^2 \psi = -I(\psi). \quad (86)$$

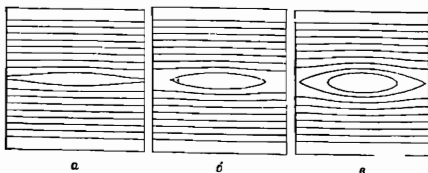
Далее, для большого аспектного отношения и низкого бета адиабатическое условие сохранения магнитных потоков [уравнения (76), (82)] сводится к

$$\oint_{\psi} h^x h^x d\chi = 0. \quad (87)$$

Условие (87) применяется к каждой магнитной поверхности с потоком ψ и определяет изменение тока I для каждой поверхности ψ .

Примером применения этой простой модели [уравнения (86), (87)] является образование токовых нитей в равновесном токовом слое и образование магнитных островов (фиг. 12) [20]. На фиг. 12, а показано возмущенное первоначально однородного слоя с гауссовым распределением тока, содержащим нейтральную линию. Согласно линейной теории устойчивости [9], такой слой неустойчив по отношению к резистивной тиринг-моду, являющейся следствием разрывания силовых линий поперек нейтральной линии из-за конечной проводимости. В условиях высокой проводимости неустойчивость развивается достаточно медленно, так что уравнение равновесия (86) всегда выполняется. Условия адиабатичности (87) применимы в случае высокой (но не идеальной) проводимости, поскольку они сохра-

няют магнитный поток, но в отличие от идеальных МГД-уравнений допускают изменения топологии.



Фиг. 12. Нелинейное развитие магнитных островов, иллюстрирующее образование нитевидной структуры в первоначально однородном токовом слое.

В направлении слева направо конфигурация периодична, распределение тока взято гауссовым. Контуры, описывающие силовые линии, выбраны равноудаленными во «вх». а — малое возмущение первоначально однородного распределения; б, в — дальнейшее развитие «равновесия» островных состояний.

Нелинейное развитие магнитных островов показано на фиг. 12, б, в.

В. ОТКЛОНЕНИЯ ОТ АДИАБАТИЧНОСТИ ЗА СЧЕТ ДИФФУЗИИ

Условия адиабатичности (83) — это интегральные соотношения, которые применяются к каждой магнитной поверхности ψ , так как в равновесии торондальный поток Π , плотность ρ и давление p являются поверхностными величинами, постоянными на магнитных поверхностях. Определим на каждой поверхности плотность вещества $m(\psi)$, плотность потока $\pi(\psi)$ и плотность внутренней энергии $u(\psi)$:

$$\begin{aligned} m(\psi) &= \rho(\psi) V(\psi), \\ \pi &= d\Pi/d\psi = IA, \\ u(\psi) &= \rho(\psi) V(\psi)/(\gamma - 1), \end{aligned} \quad (88)$$

где $V(\psi)$ — дифференциальный объем (81), а $A(\psi)$ — дифференциальная «площадь» магнитных поверхностей (82). Тогда в отсутствие диффузии адиабатические условия запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\pi}{dt} &= 0, \\ \frac{dm}{dt} &= 0, \\ \frac{du}{dt} + p(\psi) \frac{dV}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (89)$$

где лагранжевы производные по времени связаны движущимися натуральными координатами $d\psi/dt = 0$.

При наличии столкновений частиц адиабатические ограничения нарушаются вследствие диффузии поперек поверхности. Очевидно, что на каждой поверхности диффузия протекает с различной скоростью. Однако если скорость диффузии много меньше, чем адиабатическая частота, требуемая для восстановления равновесия (разд. IV, А), вдоль каждой поверхности будет протекать быстрый плазменный поток и восстанавливать равновесие давления $p(\psi)$, плотности $\rho(\psi)$ и полоидального тока $I(\psi)$ на каждой поверхности [10]. Поэтому диффузия поперек каждой поверхности является усредненной по поверхности, или поверхностной функцией. Независимо от формы магнитных поверхностей диффузию поперек магнитных поверхностей всегда можно точно описать одномерными диффузионными уравнениями. Диффузионные коэффициенты при этом являются интегралами по каждой магнитной поверхности и зависят от геометрии поверхностей.

Здесь приведены диффузионные уравнения для столкновительного режима. В этом случае можно использовать закон Ома в системе координат, связанной с магнитными поверхностями:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \cdot \mathbf{J}, \quad (90)$$

где $\mathbf{v}$ — скорость плазмы относительно поверхности $\psi = \text{const}$, $\mathbf{E}$ — электрическое поле в этой системе координат. В частности, при осевой симметрии торoidalное электрическое поле в этой системе координат равно нулю:

$$E_\phi = -\frac{1}{R} \frac{d\psi}{dt} = 0.$$

Рассматривая параллельную магнитному полю компоненту уравнения для закона Ома и интегрируя один раз электрическое поле по полоидальной плоскости, можно получить диффузионное уравнение для плотности торoidalного потока:

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\eta_\parallel \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\mathcal{P}}{A} \right) \right], \quad (91)$$

где $\eta_\parallel$ — коэффициент параллельного сопротивления, а $\mathcal{P}$ — поверхностный интеграл, определяемый формулой

$$\mathcal{P} = \oint_\psi \frac{h^2}{R h^\psi} d\chi. \quad (92)$$

Используя торoidalную компоненту уравнения для закона Ома, можно получить выражения для перпендикулярной к маг-

нитной поверхности скорости плазмы относительно поверхности потока

$$v_{\psi} = (\eta_{\perp} - \eta_{\parallel}) \frac{B_z}{B^2} R \frac{\partial p}{\partial \psi} + \frac{\eta_{\parallel}}{B_z} \left(R \frac{\partial p}{\partial \psi} + \frac{I'}{R} \frac{\partial I'}{\partial \psi} \right),$$

где $\eta_{\perp}$ — перпендикулярный коэффициент сопротивления, а во втором члене использовано уравнение равновесия для тороидального тока (51). С помощью поперечной скорости v_{ψ} может быть вычислен поток плазмы через каждую поверхность, что дает консервативное диффузионное уравнение для массы на каждой поверхности

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left[(\eta_{\perp} - \eta_{\parallel}) \lambda \frac{\partial p}{\partial \psi} + \eta_{\parallel} \Gamma \frac{\partial p}{\partial \psi} + \eta_{\parallel} m \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\pi^2}{2A^2} \right) \right],$$

где λ и Γ — поверхностные интегралы:

$$\lambda(\psi) = \rho(\psi) \oint_{\psi} \frac{R h^2}{B^2 h^{\psi}} d\chi, \quad (93)$$

$$\Gamma(\psi) = \rho(\psi) \oint_{\psi} R^2 h^2 h^{\psi} d\chi. \quad (94)$$

Первый член соответствует классической диффузии, в то время как второй связан со слагаемым Пфирша — Шлюттера. Последний член является результатом направленной внутрь диффузии магнитных поверхностей, связанной с полоидальным током.

Совершенно аналогичным путем [23] могут быть получены диффузионные уравнения для внутренней энергии одной или нескольких компонент плазмы. Эти уравнения дают модель для самосогласованной постановки задачи равновесия и диффузии в произвольных осесимметричных торах. Эволюция массы, внутренней энергии и тороидального потока определяет правую часть в уравнении равновесия (52). В свою очередь решение уравнения равновесия (разд. III) дает геометрические переменные, которые определяют интегралы, фигурирующие в диффузионных коэффициентах.

V. ДАЛЬНЕЙШИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

A. О «РАВНОВЕСИИ» И ИНЕРЦИОННЫХ МОДЕЛЯХ

В этом обзоре основной упор был сделан на применение метода водяного мешка для низкочастотных явлений при тороидальном удержании. При этих условиях плазма и магнитное поле всегда остаются в силовом равновесии, так что координаты магнитных поверхностей или водяные мешки определяются эллиптическим уравнением (52). Конфигурация, конечно, может

эволюционировать во времени в соответствии с зависящими от времени уравнениями для внутренней энергии, плотности и магнитного потока (разд. IV) на каждой поверхности.

Метод водяного мешка, однако, применяется в равной степени и к высокочастотным явлениям, когда предположение о балансе между полем и плазмой уже становится несправедливым. В этом случае должны быть явно учтены инерция жидкости и поле скоростей. Уравнения становятся гиперболическими и по форме более традиционными. Однако остается справедливым то, что свойства плазмы при следовании вдоль магнитной поверхности анизотропны, и метод водяного мешка представляет многомерный лагранжев метод для изучения такой плазмы. Уравнения жидкости выражаются в локально ортогонализированной лагранжевой системе координат и решаются с помощью общепринятых гиперболических разностных методов. С точки зрения вопросов удержания этот подход особенно плодотворен для изучения нелинейного развития магнитогидродинамических неустойчивостей в плазме с низким бета. Для полноты обзора некоторые аспекты формулировки уравнений для низкого бета приводятся ниже.

Б. КВАЗИНЕСЖИМАЕМОСТЬ В ПРИБЛИЖЕНИИ НИЗКОГО БЕТА

В пределе низкого бета динамику жидкости можно упростить с самого начала, если заметить, что движение жидкости в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, не является свободным. Ситуация совершенно аналогична несжимаемому течению медленно движущейся жидкости в гидродинамике. В магнитогидродинамическом случае у жидкости нет достаточной энергии, чтобы сжать вакуумное поле. В токамаке вакуумным полем является торондальное поле B_ϕ :

$$B_\phi = I/2\pi R,$$

причем плазменные токи малы:

$$\delta I \ll I. \quad (95)$$

Рассматривая закон Фарадея для торондального потока в проводящей жидкости

$$\frac{dI}{dt} + I \left[R^2 \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{v}}{R^2} \right) \right] = 0,$$

в пределе низкого бета (95) можно получить условие квазинесжимаемости [24]

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{v}}{R^2} \right) = 0. \quad (96)$$

Лежащее в основе этого условия предположение заключается в том, что альфеновская скорость, связанная с тороидальным полем, считается бесконечной.

Уравнение (96) может быть проинтегрировано, так что скорость будет выражена через псевдоскалярную функцию потока Φ и параллельную скорость:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{e}_\phi \times R \nabla \Phi + v_\parallel \frac{\mathbf{B}}{B} + O(\beta_0), \quad (97)$$

где $\mathbf{e}_\phi$ — единичный вектор в тороидальном направлении. Первый член можно рассматривать как дрейф « E/B », так как функция потока пропорциональна элементаростатическому потенциалу.

Искомое эллиптическое уравнение для функции потока может быть получено с помощью применения соответствующей операции rot к уравнениям для поперечного импульса, что исключает силы, связанные с тороидальным магнитным полем. Определим «псевдоскалярный» вихрь ξ следующим соотношением:

$$\xi = (\nabla \times R^2 \rho \mathbf{v})_\phi. \quad (98)$$

Тогда система уравнений, которая описывает динамику жидкости в осесимметричном тороидальном случае, сводится к следующей:

$$\frac{d\xi}{dt} = \partial \left(R^2 \rho, \frac{1}{2} v^2 \right) + \partial (R^2, \rho) + \partial (\psi, R J_\phi), \quad (99)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \eta \nabla^2 \psi, \quad (100)$$

$$\nabla^2 \psi = -R J_\phi, \quad (101)$$

$$\nabla R^2 \rho \nabla \Phi = -\xi, \quad (102)$$

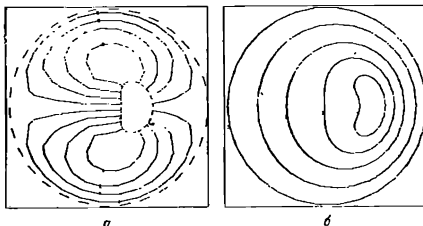
где оператор ∇^2 (101) обусловлен тороидальной компонентой оператора rot rot , а из (97) и (98) получается второе эллиптическое уравнение. Слагаемые в правой части уравнения (99) для вихря представляют собой якобианы, взятые по полоидальным координатам, и описывают центробежные силы, тороидальный дрейф, связанный с кривизной, и силы, связанные с полоидальным магнитным полем.

Эти уравнения описывают динамику жидкости и магнитных поверхностей в полоидальной плоскости. К ним добавляются упрощенные с помощью условия несжимаемости (96) уравнения для плотности, внутренней энергии и параллельной скорости. Звуковые волны, параллельные магнитному полю, остаются в системе, но их влияние на перпендикулярные к полю процессы сводится к симметричным колебаниям тороидального шнура, которые могут возникнуть из второго члена в (99).

Эти уравнения можно записать и в натуральных координатах (ψ, χ) . Если топология не изменяется, водяные мешки движутся со скоростью c_ψ в соответствии с уравнениями (100) и (53) [24]:

$$c_\psi = \frac{R}{h^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} - \eta \frac{R}{h^2} \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{h^2}{Rh^2}.$$

Эллиптическое уравнение (102) решают неявным методом переменных направлений [19]. Пример решения, иллюстрирующего



Фиг. 13. Контуры функции потока (а) в токамаке с аспектным отношением 3, иллюстрирующие дипольный поток в тороидальном плазменном шнуре во время конвективного колебания вдоль большого радиуса; искажение магнитных поверхностей, связанное с колебаниями (б).

торондальные колебания плазменного шнура, приведен на фиг. 13.

В. НЕУСТОЙЧИВОСТИ С ВИНТОВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Одним из особенно важных приложений инерционных уравнений с низким бета является описание нелинейных винтовых МГД-неустойчивостей [25]. В тороидальной камере неустойчивости, вообще говоря, трехмерные. Однако если аспектное отношение велико, тор может быть приближенно представлен периодическим цилиндром длиной $2\pi/k$, где k — волновое число в тороидальном направлении. Таким образом, если первоначальное равновесие в периодическом цилиндре зависит только от радиальной координаты r , то для отдельного неустойчивого винтового возмущения в течение всего нелинейного развития будет поддерживаться винтовая симметрия.

Неустойчивость можно характеризовать азимутальным волновым числом m и осевым волновым числом k , кратным величине $2\pi/R_0$, где R_0 — длина цилиндра. Можно ввести винтовые координаты

$$\begin{aligned} r' &= r, \\ \theta' &= \theta + \frac{k}{m} z, \\ \psi' &= \frac{1}{R_0} \left[z - \frac{kr^2}{m} \theta \right]. \end{aligned} \quad (103)$$

Первоначальное равновесие не зависит от ψ' . Неустойчивость зависит только от r' и θ' , так что поддерживается винтовая симметрия, а двумерная задача решается в винтовой плоскости (r', θ') , которая, как отмечалось выше (разд. V, Б), играет роль полоидальной плоскости. Длина элемента длины, соответствующего ψ' (аналогично торондальной кривизне R), равна

$$R = R_0 \left[1 + \left(\frac{kr}{m} \right)^2 \right].$$

Величина R в соответствии с предположением о большом аспектном отношении R_0/r и малом kr/m предполагается постоянной. Уайт и сотр. [25], предположив, что плазменный шнур имеет постоянную плотность ρ_0 , свели уравнения (99) — (102) к следующим:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \partial(\psi, \nabla^2 \psi), \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \eta \nabla^2 \psi, \\ \nabla^2 \Phi &= - \frac{\xi}{\rho_0 R_0}, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{e}_\psi \times \nabla \Phi. \end{aligned} \quad (104)$$

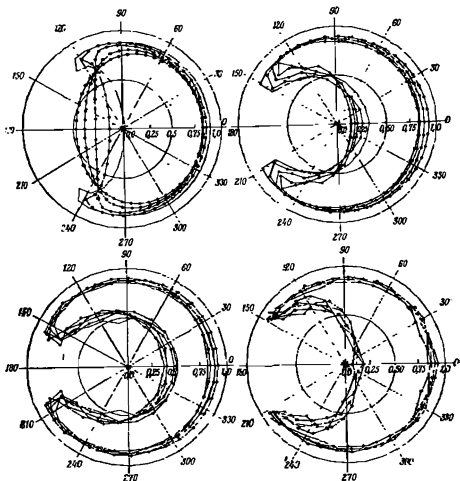
В вакуумной области не протекает никаких реальных токов. Однако, если рассмотреть закон Ампера в винтовой плоскости (r', θ') , линейный контур в трех измерениях не будет замкнут из-за разреза в винтовой плоскости. Учитывая соотношение на разрезе

$$\int_0^{2\pi} B_\theta r' d\theta' = \int_0^{2\pi} B_\theta d\theta + B_z 2\pi \frac{kr^2}{m}.$$

можно видеть, что в полоидальной плоскости существует компонента осевого поля. Таким образом, вакуумной области можно приписать эффективную плотность тока

$$\nabla^2 \psi = - B_z \frac{2kR_0}{m}. \quad (105)$$

Плазменная область представляется в виде набора вложенных водяных мешков, удовлетворяющих уравнениям (104). Плазма ограничивается крайней поверхностью S , вне которой



Фиг. 14. Модель отдельного водяного мешка с винтовой симметрией, иллюстрирующая стремление периодического цилиндра образовывать «пузыри» при наличии резонансной поверхности ($q_{\text{вак}} = 1$).

Схемы иллюстрируют нелинейную эволюцию одной поверхности во времени [26].

удовлетворяется вакуумное уравнение (105). На границе раздела плазма — вакуум ставятся граничные условия, а именно что нормальные компоненты поля и тока исчезают, а полное давление является непрерывным. В соответствии с этим параллельная скорость на границе плазма — вакуум может быть вы-

ражена через скачок полоидальных полей поперек поверхности:

$$\rho_0 \frac{dv_{\chi}}{dt} = - \frac{1}{R_0^2 h^2} \frac{\partial}{\partial \chi} [(V\psi)_{\chi}^2 - (V\psi)_{\chi}^2] \quad (106)$$

Чтобы определить на поверхности вакуумное поле, Уайт и др. [25] решили уравнение (105) в интегральной форме. Это позволяет определить на поверхности параллельную скорость (106). Она дает граничные условия Неймана для решения эллиптического уравнения (104) для потенциала. Это в свою очередь дает перпендикулярное лагранжево смещение поверхности водяного мешка.

На фиг. 14 показан пример применения модели к образованию «магнитных пузырей». В этом примере отсутствовали сопротивление и шир. В более общем случае используется много поверхностей, описывающих распределение тока.

Г. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Здесь были продемонстрированы различные применения метода водяного мешка к задачам удержания в замкнутых магнитных поверхностях. Метод особенно полезен для изучения равновесия и процессов с низким бета. Очевидно, что в звуковых и сверхзвуковых МГД-явлениях, где может иметь место турбулентность, возрастающая сложность структуры поля не позволяет использовать данный метод.

В настоящее время рассмотрены только поверхности с простейшей топологией. Важное значение имеет распространение подхода на две магнитные оси и более. При условии, что топология остается относительно простой, дополнительные магнитные оси и влияние сепаратрисс может быть учтено с помощью введения дополнительных разрезов в потоковом пространстве [21].

БЛАГОДАРНОСТИ

Большая часть этого обзора была выполнена в течение годового отпуска, проведенного автором в Калифорнийском университете в Лос-Анджелесе. Мне приятно поблагодарить проф. Б. Фрида и Дж. Даусона за их гостеприимство и поддержку в этот период.

Над различными вопросами, обсуждаемыми в этом обзоре, я работал вместе с рядом коллег. Особенно хотелось бы отметить вклад в развитие этих идей д-ра А. Вильсона, д-ра Дж. Триппета и д-ра Г. Татла.

Идеи и алгоритмы, аналогичные описанным в разд. IV, были развиты независимо Г. Гредом.

Литература

1. Арцимович Л. А., Nucl. Fusion, 12, 215 (1972).
2. Berk H. L., Roberts K. V., Methods Comput. Phys., 9, 88 (1970). (Имеется перевод в сб.: Вычислительные методы в физике плазмы. — М.: Мир, 1974, стр. 96.)

3. Betancourt O., Courant Inst. Math. Sci., Rept. MF-67 and COO-3077-49, New York University, New York, 1974.
4. Betancourt O., Garabedian P., Amer. Phys. Soc. Conf. Plasma Phys., 1974.
5. Callan J. D., Dory R. A., Phys. Fluids, **15**, 1523 (1972).
6. Chu C. K., Taussig R. T., Phys. Fluids, **10**, 249 (1967).
7. Duchs D., Phys. Fluids, **11**, 2010 (1968).
8. Duchs D., Furth H. P., Rutherford P. H., Proc. 4th IAEA Conf. Plasma Phys. Control. Nucl. Fusion Res., 1971, p. 369.
9. Furth H. P., Killeen J., Rosenbluth M. N., Phys. Fluids, **6**, 459 (1963).
10. Grad H., Hogan J., Phys. Rev. Lett., **24**, 1337 (1971).
11. Hain K. et al., Z. Naturforsch., **A15**, 1039 (1960).
12. Jeffrey A., Magnetohydrodynamics, Wiley Interscience, New York, 1966.
13. Killeen J., Lindemuth I. R., J. Comput. Phys., **13**, 181 (1973).
14. Kruskal M. D., Kulsrud R. M., Phys. Fluids, **1**, 265 (1958).
15. McConnell A. J., Application of Tensor Calculus, Dover, New York, 1957, p. 155.
16. Navet M., Bertrand P., Phys. Rev. Lett., **A34**, 117 (1971).
17. Oliphant T. A., Rept. LAMS-2944, Los Alamos Sci. Lab., Los Alamos, New Mexico, 1963.
18. Potter D. E., Phys. Fluids, **14**, 1911 (1971).
19. Potter D. E., Computational Physics, Wiley Interscience, New York, 1973. (Имеется перевод: Д. Поттер, Вычислительные методы в физике. — М.: Мир, 1974.)
20. Potter D. E., Kamimura T., в печати, 1976.
21. Potter D. E., Tuttle G. H., J. Comput. Phys., **13**, 483 (1973).
22. Roberts K. V., Potter D. E., Methods Comput. Phys., **9**, 1970, p. 340. (Имеется перевод в сб.: Вычислительные методы в физике плазмы. — М.: Мир, 1974.)
23. Шафранов В. Д., Атомная энергия, **19**, 120 (1965).
24. Tuttle G. H., Potter D. E., Haines M. G., 5th IAEA Conf. Plasma Phys. Control. Nucl. Fusion Res., 1974, Paper CN-33/A17-3, 1974.
25. White R. et al., 5th IAEA Conf. Plasma Phys. Control. Nucl. Fusion Res., 1974, Paper CN-33/A13-3, 1974.

Глава 3

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ МЕТОДОМ КОРРЕКЦИИ ПОТОКОВ

Док. П. Борис, Д. Л. Бук¹⁾

I. ВВЕДЕНИЕ

A. УРАВНЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ В ФИЗИКЕ

В настоящей работе описан метод решения уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (1)$$

с помощью новой численной методики, которую мы назвали методом коррекции потоков FCT (flux corrected transport). Уравнение (1), которое можно записать и в консервативной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}), \quad (2)$$

описывает два одновременно протекающих процесса: конвекцию и сжатие. Сжатие, описываемое членом $\rho \nabla \cdot \mathbf{V}$, в действительности не приводит к таким численным трудностям, как конвекция, т. е. распространение вдоль характеристик. Конвективный член $\mathbf{V} \cdot \nabla \rho$ в уравнении (1) делает это уравнение одним из наиболее трудных для точного и устойчивого численного решения среди уравнений в частных производных физики сплошных сред.

Разрабатываемые нами конечно-разностные алгоритмы вычисления зависимости функции «плотности» $\rho(\mathbf{x}, t)$ от времени имели определенную цель: создания универсальных моделей на неподвижной сетке для задач гидродинамики, но они столь же хорошо применимы и для лагранжевых моделей. FCT-методика использует физическое свойство уравнения непрерывности, а именно положительность решения, более точно и правильно, чем это может дать прямое математическое разложение. Сформулировав семь требований, которым должен удовлетворять наилучший метод решения уравнения непрерывности, мы выводим основные идеи одномерного метода FCT, а затем проводим некоторые обобщения и усовершенствования. Эти FCT-алгоритмы

¹⁾ J. P. Boris, D. L. Book, Plasma Physics Division, Naval Research Laboratory, Washington, D. C.

строятся путем введения переменных коэффициентов, которые затем используются в качестве свободных параметров для минимизации остаточной численной погрешности. Для выбора «наилучшего» метода решения уравнения непрерывности всевозможные оптимизации сравниваются друг с другом и с «оптимальным» (но довольно частным) алгоритмом. В заключение обсуждаются приложения новой FCT-методики к некоторым задачам УТС и физики плазмы. Авторы имеют в своем распоряжении и могут предоставить одномерный FCT-код, иллюстрирующий данную методику. Этот код содержит решение трех консервативных уравнений непрерывности для массы, импульса и энергии с помощью единственного довольно общего FCT-модуля, который легко можно перестроить оптимальным образом для любой ЭВМ.

Б. ТРЕБОВАНИЯ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ К КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫМ АЛГОРИТМАМ

В последние годы было испытано множество схем с целью совершенствования методов численного решения уравнения непрерывности. Использовались характеристические методы [4], спектральные методы [5], методы конечных элементов [6], сплайны [7] и конечно-разностные методы [8]. Характеристические и спектральные методы в некоторых случаях дают великолепные результаты, но они, как правило, неприменимы к сложным нелинейным системам обобщенных уравнений непрерывности, содержащим наряду с конвекцией и сжатием еще и процессы диффузии. Подходы, использующие конечные элементы и сплайны, также дают превосходные результаты в большинстве случаев, допускающих их применение, но сложность и машинная стоимость этих подходов часто бывают недоступно высокими. В связи с этим предпринимались неоднократные попытки вернуться к простым, широко применимым, экономичным конечно-разностным методам.

Так как конечно-разностные алгоритмы обладают простотой и быстродействием, не удивительно, что при данном пространственном разрешении они часто проигрывают в точности другим методам, которые могли бы быть использованы, если бы программист обладал большим терпением или бюджетом. Метод коррекции потоков является довольно естественным шагом на пути последовательного улучшения основных конечно-разностных схем без существенной потери их простоты и быстродействия. Основные идеи, ведущие к методу FCT, можно вывести из семи требований, предъявляемых к «наилучшему» конечно-разностному алгоритму. Эти требования, обсуждаемые в работе [3], приводятся ниже.

1. Точные законы сохранения, следующие из физического уравнения, должны быть отражены в конечно-разностной аппроксимации.
2. Алгоритм должен обеспечить устойчивость всех гармоник в используемых на практике диапазонах шагов сетки δx и временных шагов δt .
3. Должно быть сохранено свойство положительности (неотрицательности) решения $\rho(x, t)$ уравнения (1). Таким образом, если плотность ρ положительна и уменьшается (во времени), то она перестает изменяться, достигнув нулевого значения.
4. Алгоритм не должен основываться на частных свойствах, как, например, получение точного решения при $V\delta t/\delta x = 1$.
5. Алгоритм в целом должен иметь второй порядок аппроксимации в тех задачах, где порядок аппроксимации влияет на точность. Это требование включено в список, чтобы обеспечить минимальную асимптотическую точность, свободную по крайней мере от худших типов секулярности.
6. Алгоритм должен сохранять неискаженным численный профиль плотности $\{\rho_i\}$, когда скорость потока равна нулю.
7. Алгоритм должен быть одно- или двухшаговым для обеспечения простоты, скорости и экономичности расчета.

Эти требования перечислены приблизительно в порядке убывания важности. Четыре последних относятся к довольно неопределенным представлениям о гибкости и точности, поэтому, возможно, они будут несколько ослаблены, если возникнет необходимость и если их выполнение можно будет обеспечить слишком дорогой ценой. Первые три требования, обуславливающие консервативность, устойчивость и положительность, представляются абсолютно необходимыми для получения надежного алгоритма решения уравнения непрерывности общего вида. Тем не менее в прошлом обычно пренебрегали свойством неотрицательности ради решения уравнений с некоторым заданным асимптотическим порядком точности. Аргументом служило то, что достаточно хорошее разрешение всегда устраняет нефизические эффекты типа тех, которые возникают при строгом разложении в ряд Тейлора с точностью до второго порядка. На деле требования 3 и 5 оказываются взаимоисключающими в областях больших градиентов или малых плотностей. Если градиенты становятся очень крутыми, то можно надеяться получить положительно определенный алгоритм для уравнения не-

прерывности, только пожертвовав требованием второго порядка точности.

Уравнение непрерывности в форме (1) предполагает использование лагранжевых методов, в которых конечно-разностная сетка движется со скоростью среды, что позволяет обойти проблему положительности решения. Скорость изменения плотности в движущейся системе координат обычно легко вычисляется, так как в такой системе конвективный член отсутствует. Такой лагранжев подход часто бывает успешным, а иногда и необходимым. Напротив, эйлеровы методы нужны в продолжительных расчетах, когда запутанные течения невероятно искажают лагранжеву сетку, или в расчетах стационарной стадии, когда предпочтительнее выбрать неподвижную сетку, допустив, что течение на ней выходит на стационарную стадию. Мы сосредоточили внимание на эйлеровом решении уравнения (1), так как лагранжевы методы часто имеют серьезные вычислительные недостатки и, кроме того, при решении систем уравнений гидродинамики лагранжев подход неизбежно содержит характерные эйлеровы признаки [3].

Например, в идеальной гидродинамике с отличным от нуля давлением поле скоростей для плотности не совпадает с полем скоростей для энергии. Таким образом, в системе отсчета, движущейся вместе со средой, энергия и импульс протекают через границы ячеек сетки. Конвекцию некоторых характеристик среды через границы ячеек нельзя исключить, поэтому хорошее описание конвекции, необходимое в эйлеровом подходе, существенно также и в лагранжевых моделях.

Все это подчеркивает эйлерову природу большинства задач гидродинамики и заставляет отказаться от надежды на то, что лагранжева методика окажется универсальным средством описания конвективных течений, но сказанное не следует истолковывать как нарек на ограниченность FCT-алгоритма. Метод коррекции потоков применялся в лагранжевых расчетах без потери точности; при этом в нем сохранялись хорошие особенности лагранжевых сеток. Тем не менее развитие идей метода FCT сильно упрощается, если сначала рассматривать только эйлеровы задачи.

В. ВИДЫ ОШИБОК, ПОДЛЕЖАЩИХ МИНИМИЗАЦИИ

Алгоритмы аппроксимации той части уравнения непрерывности в эйлеровой форме, которая описывает сжатие, вообще говоря, гораздо более точны и просты, чем алгоритмы аппроксимации конвективной части, поэтому мы в основном будем проводить рассмотрение с нулевой дивергенцией скорости. В этом случае уравнение становится линейным, с постоянными коэффи-

числителями. Сделанные ограничения позволяют немедленно найти аналитическое решение уравнения (1):

$$\rho(x, t) = \rho(x - V_0 t, 0), \quad (3)$$

где задан начальный профиль $\rho(x, 0)$ и V_0 — постоянная скорость. Допустим, что наши сведения $\rho(x, 0)$ ограничены лишь набором N начальных значений ρ на дискретной сетке с шагом δx . Эти значения мы обозначим $\{\rho_j^0\}$ ($0 \leq j \leq N$), где $\rho_N^0 = \rho_0^0$. Более того, мы потребуем от нашего конечно-разностного алгоритма, чтобы он давал приближенные значения $\rho(x, n\delta t)$ лишь на дискретном множестве моментов времени $t = 0, \delta t, 2\delta t, \dots$ в узлах той же самой пространственной сетки. Это множество приближенных значений (3) мы обозначим через $\{\rho_j^n\}$.

В настоящей главе для иллюстрации свойств разных алгоритмов и их видоизменений мы используем введенную в [1] пробную задачу о распространении прямоугольного импульса. Как показано на фиг. 1, а, прямоугольный импульс описывается на сетке из 100 узловых точек с периодическим продолжением. Импульс шириной в 20 точек распространяется с постоянной скоростью. Для начального момента времени показано 100 значений $\{\rho_j^0\}$ ($j = 1, 2, \dots, 100$). На каждом шаге пробного расчета должны быть явно определены 100 новых значений $\{\rho_j^n\}$. Ошибка на каждом временном шаге выражается средней абсолютной ошибкой

$$\Delta = \frac{1}{100} \sum_{j=1}^{100} |\rho_j^n - \rho_j^{\text{точн}}|, \quad (4)$$

которая характеризует отклонение численно найденного решения от известного точного решения.

При сделанных выше предположениях и упрощениях, используя дискретное преобразование Фурье по пространству, функцию $\rho(x, t)$ можно представить в виде

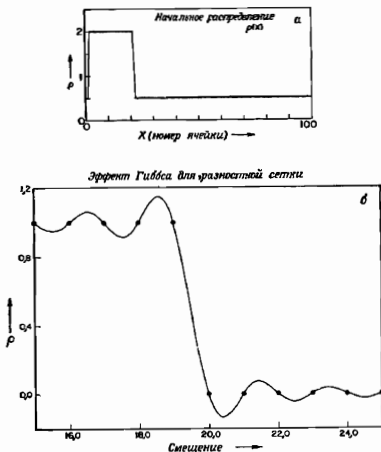
$$\rho_j^n = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} \hat{\rho}_k^n e^{i\pi k j \delta x / L}, \quad (5)$$

где $L = N\delta x$ — длина системы. Обратное дискретное преобразование имеет вид

$$\hat{\rho}_k^n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \rho_j^n e^{-i\pi j k \delta x / L}, \quad (6)$$

где использовано требование вещественности фурье-образа $\hat{\rho}_k^n = (\hat{\rho}_{-k}^n)^*$. Поскольку на временном шаге n имеется только N независимых вещественных значений $\{\rho_j^n\}$, то равенство (6) мо-

жет определить только N разных линейных комбинаций. Вещественные и мнимые части дискретных гармоник Фурье $\{\delta_k^n\}$ на самом деле независимы лишь для $0 \leq k \leq N/2$.



Фиг. 1. а — начальное условие для пробной задачи о прямоугольном импульсе. Скорость постоянна в пространстве и времени; для сетки из 100 узловых точек ставятся периодические граничные условия. Ширина импульса 20 ячеек, величина плотности в прямоугольном импульсе равна 2. Фоновая плотность составляет 0,5. Импульс должен распространяться вдоль сетки без изменения формы.

б — зависимость плотности $\rho(x)$ от координаты вблизи скачка плотности.

Численные значения на сетке показаны точками. Осцилляции, обусловленные явлением Гиббса как указано, могут привести к отрицательным значениям плотности.

Преимущество преобразования Фурье состоит в особенно простой замкнутой форме решения (3) в k -пространстве с дискретным временем

$$\hat{\rho}_k^n = \hat{\rho}_k^0 e^{-2\pi i k V_n n \Delta t / L}. \quad (7)$$

Соотношение (7), конечно, справедливо, только если алгоритм «оптимален». Иными словами, равенство (7) после n временных шагов выполняется для всех гармоник, только если алгоритм описывает движение фазы гармоник точно со скоростью V_0 и оставляет амплитуды гармоник неизменными во времени.

Вообще говоря, конечно-разностный алгоритм не удовлетворяет равенству (7), поэтому полезно перечислить типы возможных ошибок. Мы установили три потенциальных источника линейных ошибок:

1. Амплитудные ошибки, называемые затуханием, если величина гармоник уменьшается, и называемые неустойчивостью, если она возрастает.
2. Фазовые ошибки, называемые обычно дисперсией. При этом гармоники распространяются с неправильной скоростью, а ошибки обычно растут с увеличением волнового числа k .
3. Ошибки, обусловленные эффектом Гиббса, — вид сеточной неопределенности, возникающей из-за того, что профиль плотности численно неизвестен на масштабе длин, меньших шага сетки Δx . Следствием этих ошибок будут нефизические осцилляции в фурье-представлении.

Первый тип ошибок, затухание, преобладает во множестве методов численного решения уравнения непрерывности, призванных давать устойчивое неотрицательное решение. Численная диффузия в алгоритмах решения уравнения непрерывности — это частный вид затухания, который является результатом нежелательных ошибок, возникающих из-за усреднения по пространству. Эти ошибки называются численной диффузией, так как соответствующие им члены обычно можно записать в виде трехточечной аппроксимации диффузионного члена

$$D \frac{\delta^2}{\delta x^2} (\rho_{i+1} - 2\rho_i + \rho_{i-1}). \quad (8)$$

Главным следствием численного затухания, или диффузии, является сглаживание коротковолновых деталей, хотя некоторые из них могут быть физически существенными.

Затухание, соответствующее данному алгоритму, обычно измеряется величиной, называемой множителем перехода. Это как раз и есть величина $|A_k|$ передаточной функции алгоритма на одном шаге по времени:

$$A_k = \frac{\hat{\rho}_k^1}{\hat{\rho}_k^0}, \quad (9)$$

которая определяется для каждой гармоники. Если гармоника затухает, $|A_k| < 1$. Если гармоника неустойчива, $|A_k| > 1$. Если алгоритм не дает остаточного затухания (ZRD-алгоритм —

zero residual damping), то $|A_k| = 1$ для всех гармоник. Если затухание целиком обусловлено явным диффузионным членом типа (8), то множитель перехода принимает вид

$$A_k = 1 - 2D(1 - \cos k\delta x), \quad (10)$$

Затухание здесь постепенно увеличивается с уменьшением длины волны.

Почему численное затухание становится такой серьезной проблемой для множества алгоритмов? Дело в том, что неустойчивость имеет губительные последствия, и поэтому ее следует избегать любой ценой. Обычно $|A_k|$ существенно меньше единицы для больших k , при этом едва обеспечиваются условия устойчивости для всех k . Алгоритм донорской ячейки [9], называемый также односторонним алгоритмом, алгоритмом «вверх по течению» или «против ветра», был использован в качестве теста в [1] и [3] и служит хорошим примером чрезмерного численного затухания. Как будет показано ниже, метод FCT базируется в основном на использовании этого чрезмерного затухания, а не принятии его в качестве неизбежного зла.

Численная дисперсия является вторым источником ошибок, причиняющим массу неприятностей численным методам решения уравнения непрерывности. Дисперсионные ошибки возникают, когда фазовая скорость некоторых гармоник отличается от скорости потока V_0 в (7). Этот тип ошибок обусловлен тем, что пространственные и временные производные в уравнении непрерывности аппроксимируются конечными разностями, в результате чего фазовая скорость становится неправильной и приобретает зависимость от номера гармоники k . Фазовые ошибки кратко обсуждались в работе [1], где было указано, что диффузия и антидиффузия в некоторых алгоритмах метода FCT оказывают полезное воздействие на фазовые ошибки, уменьшая их в 4 раза. Для дальнейшего изучения численных фазовых ошибок в настоящей главе мы введем определение относительной фазовой ошибки для каждой гармоники в данном алгоритме

$$R(k) \equiv |V_\phi(k) - V_0|/V_0, \quad (11)$$

где $V_\phi(k)$ — численная фазовая скорость, V_0 — истинная фазовая скорость.

Третий тип ошибок — явление Гиббса — показан на фиг. 1, б. Подставив в соотношение (5) x вместо $j\delta x$, получим непрерывную функцию $\rho^n(x)$, которая в узлах сетки удовлетворяет равенству $\rho^n(x_f) = \rho_f^n$. Осцилляции обусловлены тем, что в дискретном разложении отброшены коротковолновые гармоники. Более того, эти осцилляции не исчезают и при улучшении разрешения.

Если $V_0 \delta t$ равно δx с целым множителем, то, согласно (7), распространение точно описывается дискретным вариантом соотношения (3). Если, однако, за один шаг по времени профиль смещается на дробную часть ячейки, значения ρ_j^i на сетке обнаруживают ложные колебания. Эти колебания являются ошибками в том смысле, что они могут приводить к отрицательным значениям плотности. Поскольку они на самом деле появляются в конечно-разностном представлении, а не являются следствием какого-либо конкретного алгоритма, их можно рассматривать как неустранимое свойство эйлера подхода, т. е. представления на неподвижной сетке.

Перед выводом основных принципов метода FCT мы дадим краткое описание используемых обозначений. Последовательность ρ_j^i характеризует значения вычисляемого профиля плотности на i -м шаге по времени в j -м узле сетки. Здесь ρ — произвольная сохраняющаяся величина, как, например, масса, импульс или энергия. Так как наше исследование часто будет касаться только одного шага по времени, мы будем обозначать через ρ_j^0 и ρ_j^1 соответственно начальный и конечный профили величины ρ на данном временном шаге. Величины $\bar{\rho}_j$ и ρ_j^* используются для обозначения некоторого промежуточного или вспомогательного значения плотности. Везде, где k появляется в индексе или в аргументе, оно указывает на волновое число конкретной рассматриваемой гармоники. Обычно мы будем использовать $v \approx V_0 \delta t / \delta x$, γ и μ соответственно как безразмерные коэффициенты переноса, диффузии и антидиффузии.

II. ЭЛЕМЕНТЫ АЛГОРИТМОВ FCT

A. ОСНОВНЫЕ ИДЕИ

Используя семь требований, сформулированных в разд. 1, можно вывести основные концепции метода коррекции потоков достаточно прямым путем. Для простоты начнем с явной трехточечной аппроксимации уравнения непрерывности

$$\bar{\rho}_j = a_j \rho_{j-1}^0 + b_j \rho_j^0 + c_j \rho_{j+1}^0. \quad (12)$$

Сохранение массы (в данном случае сетка предполагается однородной) налагает условие

$$a_{j+1} + b_j + c_{j-1} = 1, \quad (13)$$

в то время как положительность означает, что a_j , b_j и c_j должны быть неотрицательными при любом j . Уравнение (12) можно переписать в простой консервативной форме, автоматически вы-

полняющей условие (13):

$$\bar{\rho}_j = \rho_j^0 - \frac{1}{2} [\epsilon_{j+\frac{1}{2}} (\rho_{j+1}^0 + \rho_j^0) - \epsilon_{j-\frac{1}{2}} (\rho_j^0 + \rho_{j-1}^0)] + \\ + [\nu_{j+\frac{1}{2}} (\rho_{j+1}^0 - \rho_j^0) - \nu_{j-\frac{1}{2}} (\rho_j^0 - \rho_{j-1}^0)]. \quad (14)$$

Для каждого узла сетки уравнение (14) содержит только два независимых параметра. Сопоставление выражений (12) и (14) дает

$$a_j = \nu_{j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \epsilon_{j-\frac{1}{2}}, \\ b_j = 1 - \frac{1}{2} \epsilon_{j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \epsilon_{j-\frac{1}{2}} - \nu_{j+\frac{1}{2}} - \nu_{j-\frac{1}{2}}, \\ c_j = \nu_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \epsilon_{j+\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

В уравнении (14) величины $\{\nu_{j+\frac{1}{2}}\}$ имеют смысл безразмерных коэффициентов диффузии, введенных для того, чтобы обеспечить положительность новых вспомогательных значений плотности $\{\bar{\rho}_j\}$ при условии положительности $\{\rho_j^0\}$. Условие положительности, вытекающее из (15), имеет вид

$$\nu_{j+\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2} |\epsilon_{j+\frac{1}{2}}| \quad \text{для всех } j. \quad (16)$$

Если условие (16) выполнено, то вспомогательные новые значения $\{\bar{\rho}_j\}$ будут неотрицательными. После того как условие (13) удовлетворено, остается определить два из трех коэффициентов уравнения (12). Одна из этих двух степеней свободы снимается условием точной аппроксимации члена, описывающего поток вещества. Таким образом, в более наглядной консервативной форме уравнения (14) $\epsilon_{j+\frac{1}{2}} \approx V_{j+\frac{1}{2}} \delta t / \delta x$, где $V_{j+\frac{1}{2}}$ — скорость потока, отвечающая середине отрезка, соединяющего j -й и $j+1$ -й узлы сетки. Другие коэффициенты $\{\nu_{j+\frac{1}{2}}\}$ подчинены только условию положительности (16).

Из неравенства (16) непосредственно следует, что вспомогательные значения $\{\bar{\rho}_j\}$, вычисленные из (14), для обеспечения положительности должны быть подвержены сильной диффузии. Равенство в (16) описывает сильно диффузионный алгоритм донорской ячейки. Поскольку любой другой сохраняющий положительность выбор коэффициентов $\{\nu_{j+\frac{1}{2}}\}$ может привести только к увеличению диффузии, казалось бы, что положительность и точность исключают друг друга. Чтобы обойти эту сверхсильную диффузию, применим простую коррекцию [1]

$$\rho_j^1 = \bar{\rho}_j - \mu_{j+\frac{1}{2}} (\bar{\rho}_{j+1} - \bar{\rho}_j) + \mu_{j-\frac{1}{2}} (\bar{\rho}_j - \bar{\rho}_{j-1}). \quad (17)$$

где $\{\mu_{j+1/2}\}$ — положительные коэффициенты антидиффузии. Антидиффузия уменьшает сильную диффузию, описываемую условием (16), но вместе с тем опять вносит возможность появления отрицательных плотностей в новом профиле $\{\rho_j^1\}$. Если значения $\mu_{j+1/2}$ слишком велики, то возможна даже неустойчивость. Единственный выход из этого положения состоит в изменении антидиффузионных потоков (17). Мы назвали этот метод коррекцией потока (или ограничением потока), т. е. антидиффузионный поток

$$\phi_{j+1/2} = \mu_{j+1/2} (\bar{\rho}_{j+1} - \bar{\rho}_j) \quad (18)$$

в соотношении (17) нужно скорректировать (ограничить) так, чтобы обеспечить как положительность, так и устойчивость.

Наилучшее линейное значение для величины $\{\phi_{j+1/2}\}$, которое еще сохраняет положительность, имеет вид $\mu_{j+1/2} \lesssim v_{j+1/2} - 1/2 |e_{j+1/2}|$. Такой выбор все же недостаточно хорош. Чтобы еще сильнее уменьшить остаточную диффузию ($v - \mu$), коррекция потока должна быть нелинейной, т. е. должна зависеть от текущего значения плотности $\bar{\rho}_j$. Возникает следующая идея построения нелинейной ограничивающей поток корректирующей формулы. Предположим, что плотность $\bar{\rho}_j$ достигает нуля в узле j раньше, чем в соседних узлах. Тогда в этой точке вторая производная положительна, и любая конечная антидиффузия будет стремиться сделать минимум плотности $\bar{\rho}_j = 0$ отрицательным. Поскольку это физически недопустимо, антидиффузионные потоки следует ограничить так, чтобы на стадии антидиффузии (17) минимумы профиля не могли становиться более глубокими. В силу линейности уравнения непрерывности мы могли бы провести эквивалентное рассмотрение для величины $\{-\bar{\rho}_j\}$. Следовательно, мы должны потребовать, чтобы антидиффузия не приводила к повышению максимумов профиля. Совмещая эти два требования, мы естественно приходим к условию, которое образует основу метода коррекции потока [1].

На стадии антидиффузии не должны образовываться новые максимумы и минимумы решения и не должны увеличиваться уже существующие экстремумы.

Эту качественную формулировку нелинейной обработки легко описать количественно. Новые значения $\{\rho_j^1\}$ в методе коррекции потоков определяются выражением

$$\rho_j^1 = \bar{\rho}_j - \phi_{j+1/2} + \phi_{j-1/2} \quad (19)$$

где скорректированные потоки $\tilde{\phi}_{i+\frac{1}{2}}$ должны удовлетворять условию

$$\tilde{\phi}_{i+\frac{1}{2}} = S \cdot \max \{0, \min [S \cdot (\bar{p}_{i+2} - \bar{p}_{i+1}), |\phi_{i+\frac{1}{2}}|, S \cdot (\bar{p}_i - \bar{p}_{i-1})]\}, \quad (20)$$

причем $|S| = 1$ и $\text{sign } S = \text{sign}(\bar{p}_{i+1} - \bar{p}_i)$.

Для выяснения смысла этой корректирующей поток формулы предположим, что $(\bar{p}_{i+1} - \bar{p}_i)$ больше нуля. Тогда равенство (20) даст

$$\tilde{\phi}_{i+\frac{1}{2}} = \min [(\bar{p}_{i+2} - \bar{p}_{i+1}), \mu_{i+\frac{1}{2}}(\bar{p}_{i+1} - \bar{p}_i), (\bar{p}_i - \bar{p}_{i-1})]$$

или нуль в зависимости от того, что больше. «Грубый» антидиффузный поток $\mu_{i+\frac{1}{2}}(\bar{p}_{i+1} - \bar{p}_i)$ всегда ведет к уменьшению ρ_i^1 и увеличению $\bar{p}_{i+1}^1$. Формула, ограничивающая потоки, обеспечивает лишь условие того, чтобы скорректированный поток не опустил значение ρ_i^1 ниже ρ_{i-1}^1 (что дало бы новый минимум) и не поднял значение ρ_{i+1}^1 выше ρ_{i+2}^1 (что дало бы новый максимум). Общая формула (20) построена так, чтобы учесть все возможные случаи знаков и градиентов.

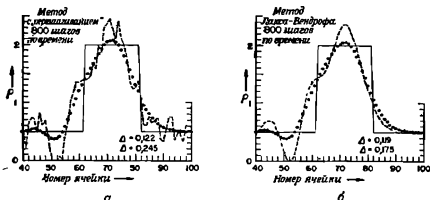
Полная формулировка алгоритма коррекции потоков состоит из четырех последовательных шагов:

1. Вычисление конвективных и диффузионных значений $\{\bar{p}_i\}$ по формулам (14), где коэффициенты диффузии удовлетворяют неравенству (16). Оптимальный выбор коэффициентов переноса $\{v_{i+\frac{1}{2}}\}$ и коэффициентов диффузии $\{\mu_{i+\frac{1}{2}}\}$ будет сделан позже.
2. Вычисление грубых антидиффузионных потоков по формуле (18).
3. Вычисление скорректированных потоков с помощью формулы (20).
4. Выполнение указанной антидиффузии согласно формуле (19).

Шаги 3 и 4 составляют исключительную особенность алгоритма FCT. Частный вариант, использованный в рассмотренном примере, называется явной антидиффузией (18) и сильной двусторонней коррекцией (20) [2]. Существует множество незначительных видоизменений, которые выделяют различные свойства решения. Некоторые из них обсуждаются в разд. II, Г и Д. Исторически приведенное выше рассуждение было впервые применено в [1] к трехточечной диффузионно-транспортной схеме, названной SHASTA. Последующая работа, как сообщалось в [2] и [3] и будет изложено в настоящем обзоре, состояла в обобщении идеи на множество различных транспортных схем, в разработке трех типов антидиффузии и некоторых вариантов формулы коррекции потоков.

Б. СРАВНЕНИЕ С НЕКОТОРЫМИ СТАНДАРТНЫМИ МЕТОДИКАМИ

Перед рассмотрением дальнейшего развития идей метода коррекции потоков мы сравним простой явный алгоритм SHASTA с некоторыми стандартными алгоритмами, не содержащими коррекции потоков. На фиг. 2 сравниваются обычный метод «с перешагиванием» [10] и двухшаговый метод Лакса и Вендрофа с использованием дополнительного численного сглаживания и без него для 800 шагов расчета в пробной задаче



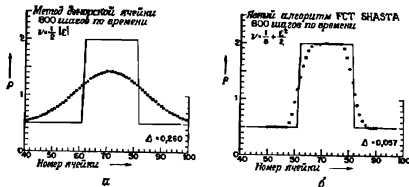
Фиг. 2. Сравнение методов «с перешагиванием» и Лакса — Вендрофа на примере пробной задачи о распространении прямоугольного импульса.

а — обратный алгоритм «с перешагиванием» с дополнительным диффузионным затуханием и без него. Точечные кривые соответствуют $\nu = 0,1$, пунктирные кривые соответствуют $\nu = 0$. б — алгоритм Лакса — Вендрофа с дополнительным диффузионным затуханием и без него. Дисперсионные ошибки малы, что дополнительно искусственное затухание существенно улучшает решение. Точечные кривые соответствуют $\nu = 0,1 \pm (e/2)$, пунктирные кривые соответствуют $\nu = 0$.

о прямоугольном импульсе. В обоих случаях при $\nu = 0$ дополнительное затухание отсутствует. Здесь преобладают ошибки дисперсии и имеет место неположительность плотности. В обоих классических алгоритмах второго порядка можно добиться некоторого уменьшения Δ (4) путем введения нефизического затухания в форме трехточечной диффузии. Показанные на фигуре большие ошибки, вызванные дисперсией коротких волн, уменьшаются, если эти волны численно затухают. Однако слишком большое затухание часто бывает губительным для численного алгоритма. Фиг. 3, а иллюстрирует алгоритм донорской ячейки (без коррекции потоков). Этот алгоритм имеет второй порядок относительно фазовых ошибок, но он содержит сильное численное затухание первого порядка. Здесь значение $\Delta = 0,260$ больше, чем для стандартных алгоритмов с перешагиванием и Лакса-Вендрофа без сглаживания ($\Delta = 0,175$ и $\Delta = 0,245$ со-

ответственно) и намного превосходит соответствующие значения для явного FCT алгоритма SHASTA, показанного на фиг. 3.

Сравнение этих трех общепринятых подходов с решением по методу FCT графически иллюстрирует причину столь сильного интереса к методу FCT. Численные ошибки в FCT-решении проявляются в остаточном сглаживании или диффузии вблизи точек разрыва и больших градиентов, и здесь не возникает неестественного уширения профиля, как на фиг. 3, а, или потенциально опасных дисперсионных осцилляций, как на фиг. 2.



Фиг. 3. Сравнение алгоритма донорской ячейки без коррекции (а) с расчетом по базисной схеме SHASTA с использованием FCT (б).

Достижимое благодаря коррекции потоков количественное улучшение в 5 раз приводит к вычислению качественного изменения.

Мы выбрали эту особенно простую пробную задачу с постоянной скоростью потока, что для нее весьма прост теоретический анализ разных методов и в ней сохраняются трудности, связанные с эйлеровой конвекцией. Вместе с тем в такой пробной задаче мы потеряли все явления, связанные со сжимаемостью среды, т. е. с переменным полем скоростей. Однако, ввиду того что в общих алгоритмах с переменной скоростью выполняются законы сохранения, а мы не использовали никаких специальных свойств задачи, связанных с условием $V = \text{const}$, учет переменной скорости в дальнейшем не представит существенных трудностей.

В. ТРИ ТИПА АНТИДИФфуЗИИ

Явный FCT-алгоритм имеет один недостаток. Хотя его ошибка в три — пять раз меньше, чем ошибка стандартных алгоритмов, требование 6 (разд. I, Б) остается невыполненным. Численные ошибки, допускаемые при пересчете ρ в случае нулевой

скорости, проявляются в виде «остаточной диффузии». Причиной этих ошибок служит явная запись антидиффузионной формулы (17). Чтобы минимизировать «остаточное затухание», проведем сначала исследование множителя перехода явной трехточечной формулы (14). Когда скорость V_0 постоянна и $\epsilon \equiv V_0 \delta t / \delta x$, формула (14) упрощается:

$$\bar{\rho}_l = \rho_l^0 - \frac{1}{2} \epsilon (\rho_{l+1}^0 - \rho_{l-1}^0) + v (\rho_{l+1}^0 - 2\rho_l^0 + \rho_{l-1}^0), \quad (21)$$

причем $v \geq \frac{1}{2} |\epsilon|$, чтобы обеспечить положительность.

Рассмотрим каждую гармонику отдельно, выбрав профиль $\rho_l^0 = \rho^0 e^{il\beta}$, где $\beta = k \delta x$. Подставив это выражение в (21), получим $(\bar{\rho}_l = \bar{\rho} e^{il\beta})$

$$\bar{\rho} = \rho^0 [1 - 2v(1 - \cos \beta) - i\epsilon \sin \beta] \quad (22)$$

для явной трехточечной формулы диффузионного переноса. Квадрат множителя перехода для рассматриваемой стадии диффузионного переноса равен

$$|\bar{A}|^2 = \left| \frac{\bar{\rho}}{\rho^0} \right|^2 = 1 - (4v - 2\epsilon^2)(1 - \cos \beta) + (4v^2 - \epsilon^2)(1 - \cos \beta)^2. \quad (23)$$

Общее условие устойчивости и, кроме того, положительность $\bar{\rho}_l$ (21) выполнены, если $|\epsilon| < 1$ и

$$\frac{1}{2} > v > \frac{1}{2} |\epsilon| > \frac{1}{2} \epsilon^2. \quad (24)$$

Для анализа линейной устойчивости алгоритма в целом нужно учесть наряду со стадией диффузионного переноса стадию антидиффузии (17). Для (17) множитель перехода имеет вид

$$A^1 = \frac{\rho^1}{\rho} = 1 + 2\mu(1 - \cos \beta). \quad (25)$$

Чтобы получить квадрат полного множителя перехода для схемы явного трехточечного переноса и явной антидиффузии, нужно (25) возвести в квадрат и умножить на (23):

$$|A|^2 = [1 - (4v - 2\epsilon^2)(1 - \cos \beta) + (4v^2 - \epsilon^2) \times \\ \times (1 - \cos \beta)^2][1 + 2\mu(1 - \cos \beta)]^2. \quad (26)$$

Каково же наибольшее возможное значение коэффициента антидиффузии μ , которое еще обеспечивает устойчивость алгоритма в целом при $v > \frac{1}{2} \epsilon^2$? Чтобы при малом, но возрастающем β имела место устойчивость, величина $|A|^2$ должна уменьшаться, начиная от единицы, а не возрастать. Поэтому длинные волны будут устойчивы в целом, если

$$\mu \leq v - \frac{\epsilon^2}{2}. \quad (27)$$

Если, кроме того, $v \leq 1/2 (1 + \epsilon^2)$, то при граничном значении μ в (27) будут устойчивы все длины волн. Подводя итог, можно сказать, что условия устойчивости и положительности для явной антидиффузии и явной трехточечной формулы будут выполнены, если v удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{4} (1 + \epsilon^2) \geq v \geq \frac{1}{2} |\epsilon|. \quad (28)$$

коэффициент антидиффузии μ определяется знаком равенства в (27) и безразмерная скорость ϵ ограничена неравенством $|\epsilon| < 1$.

Мы уже утверждали, что конечно-разностный алгоритм не должен изменять $\{\rho_i^0\}$, если скорость равна нулю. Подставив $\epsilon = 0$ и $\mu = v - 1/2 (\epsilon^2)$ в (26), найдем

$$\begin{aligned} |A|^2 &= [1 - 2v(1 - \cos \beta)]^2 [1 + 2v(1 - \cos \beta)]^2 = \\ &= [1 - 4v^2(1 - \cos \beta)^2]^2. \end{aligned} \quad (29)$$

Выражение (29) показывает, что для всех конечных длин волн сохраняется остаточное затухание, если только коэффициент диффузии v не стремится к нулю вместе с ϵ . Это остаточное затухание линейно, и оно существует даже в отсутствие нелинейной коррекции потоков, которая вносит еще большее остаточное затухание вблизи экстремумов. Хотя это нефизическое затухание весьма мало и для больших длин волн имеет порядок β^4 , хотелось бы устранить его совсем и тем самым выполнить требование 6 (разд. I, Б).

Одним из путей достижения этого, как предложено в [1], является использование неявной антидиффузии. При этом (17) заменится на

$$\bar{\rho}_i = \bar{\rho}_i - \mu_{i+1/2} (\bar{\rho}_{i+1} - \bar{\rho}_i) + \mu_{i-1/2} (\bar{\rho}_i - \bar{\rho}_{i-1}), \quad (30)$$

где для отыскания $\{\bar{\rho}_i\}$ нужно решать трехдиагональную систему уравнений. Некорректированные антидиффузионные потоки в случае неявной схемы вместо (18) примут вид

$$\phi_{i+1/2} = \mu_{i+1/2} (\bar{\rho}_{i+1} - \bar{\rho}_i). \quad (31)$$

В остальном процедура коррекции потоков не изменится, и для неявной антидиффузии аналогом соотношения (26) будет

$$|A|^2 = \frac{[1 - (4v - 2\epsilon^2)(1 - \cos \beta) + (4v^2 - \epsilon^2)(1 - \cos \beta)^2]}{[1 - 2\mu(1 - \cos \beta)]^2}. \quad (32)$$

где множитель перехода антидиффузии оказывается в знаменателе, а не в числителе формулы. В (32) верхнее граничное (а следовательно, наилучшее) значение μ опять равно $v - \epsilon^2/2$.

Если используется это значение, алгоритм устойчив для всех допустимых β и ϵ ; остаточное затухание исчезает, если ϵ равно нулю.

Используя неявную антидиффузию, во всех случаях мы получаем меньшее остаточное затухание, так как антидиффузионные потоки в (31) и (30) больше, чем в (18) и (17). Требование нулевого затухания при $\epsilon = 0$ также достигается. За эти преимущества нам придется расплачиваться: неявная трехдиагональная система уравнений (31) требует дополнительных вычислений, которые могут быть относительно дорогими для вычислительных машин с векторной или линейной памятью. Кроме того, алгоритм становится нелокальным и могут возникнуть проблемы с граничными условиями, источниками и т. д.

Чтобы получить локальную форму коррекции потоков с нулевым остаточным затуханием при $\epsilon = 0$, можно вычислить грубые антидиффузионные потоки в виде суммы двух членов:

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \mu_{i+\frac{1}{2}}(\rho_{i+1}^0 - \rho_i^0) + \mu_{i+\frac{1}{2}}(\Delta \bar{\rho}_{i+1} - \Delta \bar{\rho}_i), \quad (33)$$

где $\Delta \bar{\rho}_i$ — разность между $\bar{\rho}_i$ и значением, получаемым по формуле (14), в которой $\{e_{i+\frac{1}{2}}\}$ положено равным нулю, т. е.

$$\Delta \bar{\rho}_i = \bar{\rho}_i - \rho_i^0 - v_{i+\frac{1}{2}}^0(\rho_{i+1}^0 - \rho_i^0) + v_{i-\frac{1}{2}}^0(\rho_i^0 - \rho_{i-1}^0). \quad (34)$$

Здесь $\{v_{i+\frac{1}{2}}^0\}$ не содержит зависимости от скорости, являясь пределом $\{v_{i+\frac{1}{2}}\}$ при нулевой скорости. Очевидно, что $\Delta \bar{\rho}_i$ обращается в нуль при $V = 0$, так что антидиффузионные потоки в (33) как раз компенсируют диффузию в (14), приводя к желаемому результату.

В пределе постоянной скорости полный множитель перехода для алгоритма с явным трехточечным описанием переноса и антидиффузией, описываемой выражением (33), имеет вид

$$\frac{\rho_i^1}{\rho_i^0} = A = 1 - 2(v - \mu)(1 - \cos \beta) - 4\mu(v - v^0)(1 - \cos \beta)^2 - \\ - i\epsilon \sin \beta [1 + 2\mu(1 - \cos \beta)].$$

Это выражение несколько отличается от приведенного в [3], так как здесь мы включили в v диффузионный член $\epsilon^2/2$, зависящий от скорости. Вновь выбирая $\mu = v - \epsilon^2/2$, получим минимальное остаточное затухание при конечном ϵ , а при $\epsilon = 0$ линейное затухание отсутствует:

$$\frac{\rho_i^1}{\rho_i^0} = A = 1 - \epsilon^2(1 - \cos \beta) - 4\left(v - \frac{\epsilon^2}{2}\right)(v - v^0)(1 - \cos \beta)^2 - \\ - i\epsilon \sin \beta [1 + (2v - \epsilon^2)(1 - \cos \beta)]. \quad (35)$$

Этот вид антидиффузии был назван «фениксным», потому что незатухающее решение «восстает из пепла», как феникс.

Из фиг. 2 работы [2] видны результаты использования фениксного варианта FCT и исходного алгоритма SHASTA в пробной задаче о прямоугольном импульсе. Фениксный вариант обнаруживает несколько меньшее значение абсолютной ошибки ($\Delta = 0,052$), чем явный вариант ($\Delta = 0,057$). Неявный вариант [1] дает еще лучший результат ($\Delta = 0,049$). Вслучае этих средних абсолютных ошибок почти обратно пропорциональны длительности соответствующих расчетов.

Г. ПРОЦЕСС КОРРЕКЦИИ ПОТОКОВ

Сильная коррекция потоков, описываемая формулой (20), легко программируется и быстро считается, но возможны и другие алгоритмы с полезными свойствами. В предыдущем пункте мы продемонстрировали, насколько надежно коррекция потоков гарантирует непоявление локальных экстремумов, или «ряби», в результате антидиффузии. Конечно, на стадии диффузионного переноса локальные экстремумы могут образовываться и увеличиваться в соответствии с физическими свойствами задачи.

На стадии антидиффузии ошибки могут возникнуть по двум причинам: грубые потоки $\phi_{i+1/2}$ не могут дать точную антидиффузию даже в том случае, когда ограничитель потоков не играет роли; кроме того, ограничение потоков может слишком уменьшить потоки и оставить излишне большую чистую диффузию. Первую проблему мы уже рассматривали. Теперь перейдем к исследованию нелинейных ошибок, вносимых собственно ограничителем потоков. Эти ошибки обнаруживаются прежде всего в явлении, называемом «подрезыванием». Подрезывание связано со свойством формулы (20), которое предотвращает увеличение уже существующих экстремумов на стадии антидиффузии [2]. Подрезывание ясно показано на фиг. 7 работы [2].

Наиболее удачной альтернативой сильной коррекции потоков оказывается одностороннее ограничение потоков. В задачах, для которых известно, что решение положительно и имеет форму единственного импульса или пика, возвышающегося над более или менее однородным фоном, FCT уничтожает пуг дисперсионной ряби, которая иначе бы сопровождала этот пик. Однако высота максимума из-за подрезывания в результате сильной коррекции потоков может стать слишком малой: до 30—40% в случае очень узких пиков. Если допустить появление или возрастание максимумов, сохранив для минимумов ограничения сильной коррекции потоков, то такой алгоритм будет и положительным, и устойчивым. Интуитивно ясно, что здесь находит свое отражение тот факт, что при смещении массы из одного

узла сетки в соседний чрезмерный подъем в последнем на равную величину уменьшит первый, образовав локальный минимум. Предотвращение образования минимумов подразумевает по крайней мере некоторую степень управления образованием максимумов. Условие одностороннего ограничения потоков, заменяющее (20), имеет вид

$$\bar{\phi}_{j+\frac{1}{2}} = S \cdot \max \{0, \min[S \cdot (\rho_{j+1}^l - \rho_j^l), |\bar{\phi}_{j+\frac{1}{2}}|]\}, \quad (36)$$

где $j' = j - S$, $S = \text{sign}(\bar{\rho}_{j+1} - \bar{\rho}_j)$ и $\bar{\phi}_{j+\frac{1}{2}}$ определено выше. Преимущества условия (36) проявляются при расчете профилей, когда допустимо срезывание впадин, но не пиков. Если ρ сильно отрицательно, то естественно переопределить $j' = j + S$. Это даст возможность углубления минимумов, но не возрастания максимумов. Если ρ может принимать любой знак и мы хотим обеспечить точность расчета в областях наибольшего отклонения ρ от нуля, то очевидное обобщение имеет вид $j' = j - S \cdot \bar{S}$, где $\bar{S} = \text{sign}(\rho_j)$ (двойное одностороннее ограничение потока).

Односторонний и двойной односторонний ограничители были успешно использованы при решении конечно-разностного уравнения Власова (разд. IV, В), при изучении сжатия магнитного потока и движения бариевых облаков, электростатически связанных с ионосферой (разд. IV, Г). Эти примеры содержат решение уравнения непрерывности или системы уравнений непрерывности с полем скоростей, получаемым из потенциального поля. Примененные к нелинейным системам уравнений гидродинамики, в которых скорость описывается уравнением Навье — Стокса, составляет предмет отдельного обсуждения. Дисперсионная рябь сохраняется почти на таком же уровне, что и без ФСТ, единственная разница состоит в том, что это «односторонняя» рябь. Опыт показывает, что использование одностороннего ограничения потоков следует ограничить решением задач конвекции с заданным и не зависящим от плотности полем течения.

Д. ДРУГИЕ ФСТ-АЛГОРИТМЫ

В списке литературы приведен широкий перечень обобщений ФСТ-алгоритма, в работах [2, 3] многие из них обсуждены подробно. В данном пункте мы рассмотрим, во-первых, различные явные трехточечные разностные схемы, аппроксимирующие перенос, во-вторых, неявную трехточечную схему переноса и, в-третьих, лагранжев ФСТ-алгоритм в криволинейной системе координат.

Для основного трехточечного явного соотношения (14) разработано множество обычных конечно-разностных алгоритмов.

Идентификация членов в (14) дает определения величины $e_{j+\frac{1}{2}}$ и $v_{j+\frac{1}{2}}$, используемые в исходном алгоритме SHASTA. Возможны также варианты этого алгоритма, использующие большую или меньшую диффузионную добавку. В разд. III мы используем этот произвол в определении v для построения трехточечной явной схемы переноса с нулевым остаточным затуханием ZRD и малыми фазовыми ошибками LPE.

Если $v_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} |e_{j+\frac{1}{2}}|$, то эта трехточечная диффузионная аппроксимация переноса переходит в алгоритм донорской ячейки. Антидиффузионная коррекция дает минимум остаточного затухания при $\mu_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (|e_{j+\frac{1}{2}}| - e_{j+\frac{1}{2}}^2)$.

При $v = e^2/2$ трехточечная схема переноса становится обычной двухшаговой формулой Лакса — Вендрофа. Поскольку эта диффузия недостаточно велика, чтобы обеспечить положительность, элементарный метод Лакса — Вендрофа не представляет интереса с точки зрения применения метода FCT, пока к нему не добавлена дополнительная не зависящая от скорости диффузия. Если $v = (e^2 + 1)/2$, то алгоритмы SHASTA и Лакса — Вендрофа в пределе постоянной скорости вышние идентичны. Все эти алгоритмы, вытекающие из соотношения (14), различаются нелинейными членами, и, изменяя члены более высокого порядка по $e_{j+\frac{1}{2}}$, можно сконструировать бесконечное множество других консервативных алгоритмов с переменной скоростью.

Явная трехточечная схема переноса не обязательно должна быть нашей отправной точкой. Интересные алгоритмы вытекают из неявного трехточечного диффузионного уравнения переноса

$$\begin{aligned} & \bar{\rho}_j + \frac{1}{4} [e_{j+\frac{1}{2}} (\bar{\rho}_{j+1} + \bar{\rho}_j) - e_{j-\frac{1}{2}} (\bar{\rho}_j + \bar{\rho}_{j-1})] + \\ & + [v_{j+\frac{1}{2}} (\bar{\rho}_{j+1} - \bar{\rho}_j) - v_{j-\frac{1}{2}} (\bar{\rho}_j - \bar{\rho}_{j-1})] = \\ & = \rho_j^0 - \frac{1}{4} [e_{j+\frac{1}{2}} (\rho_{j+1}^0 + \rho_j^0) - e_{j-\frac{1}{2}} (\rho_j^0 + \rho_{j-1}^0)] + \\ & + [v_{j+\frac{1}{2}} (\rho_{j+1}^0 - \rho_j^0) - v_{j-\frac{1}{2}} (\rho_j^0 - \rho_{j-1}^0)]. \end{aligned} \quad (37)$$

В уравнение (37) величины $\{\rho_j^0\}$ и $\{\bar{\rho}_j\}$ входят симметрично, поэтому алгоритм линейно обратим. Это означает, что такая схема имеет нулевое остаточное затухание (ZRD) для любого профиля $\{e_{j+\frac{1}{2}}\}$, если коэффициенты $\{v_{j+\frac{1}{2}}\}$ выбраны в разумных границах. Сильная диффузия одновременно добавляется и вычитается. Чтобы найти смещенное в результате переноса диффузионное решение, обозначим

$$\bar{\rho}_j = \bar{\rho}_j + v_{j+\frac{1}{2}} (\bar{\rho}_{j+1} - \bar{\rho}_j) - v_{j-\frac{1}{2}} (\bar{\rho}_j - \bar{\rho}_{j-1}) \quad (36)$$

и используем в качестве грубых антидиффузионных потоков

$$\phi_{j+\frac{1}{2}} = v_{j+\frac{1}{2}} (\bar{p}_{j+1} - \bar{p}_j). \quad (39)$$

После коррекции потоков в соответствии с формулой (20) окончательное значение плотности будет иметь вид

$$\rho_j^1 = \bar{p}_j - \bar{\phi}_{j+\frac{1}{2}} + \bar{\phi}_{j-\frac{1}{2}}. \quad (40)$$

Эта неявная трехточечная схема переноса (и образуемый ею FCT-алгоритм) представляет интерес благодаря своей линейной обратимости и полной свободе (в некоторых пределах) в выборе $\{v_{j+\frac{1}{2}}\}$.

До настоящего момента мы рассматривали алгоритмы только на однородной одномерной эйлеровой декартовой сетке. Развитую выше FCT-методику можно непосредственно использовать в цилиндрической и сферической геометрии, но для получения достаточно хорошего алгоритма необходимо позаботиться о правильном учете фактора кривизны системы координат. Особенно важно обратить внимание на описание оси физической системы. Различные радиальные коды были составлены специально для того, чтобы обеспечить более гибкую и точную аппроксимацию вблизи оси. Этот вопрос кратко рассмотрен в работах [2 и 12].

При интегрировании системы уравнений по времени наиболее часто используют простой метод второго порядка точности со вспомогательным полшагом. В этом методе зависимые переменные, такие, как V и P , вычисляются при помощи разностной аппроксимации вперед на полшага с первым порядком точности. Поскольку в этом алгоритме нет зацепления временных или пространственных слоев через один, то шаг по времени может свободно изменяться от одного временного слоя к другому по мере изменения поля потоков. Существуют три основных варианта реализации базисного алгоритма SHASTA. SHASTX — сильно оптимизированный фениксный вариант с уменьшенным числом параметров, постоянным шагом и фиксированным разбиением. Текст и описание алгоритма SHASTX авторы предоставляют по запросу. SHASTZ — декартов вариант с произвольным шагом сетки, содержит скользящее или подвижное разбиение сетки, в которой также использован фениксный вариант базисного алгоритма SHASTA. SHASTR — вариант, используемый для описания радиальной компоненты в кодах с двумерной цилиндрической геометрией. Алгоритм SHASTR использует неявную запись антидиффузии, но он имеет, кроме того, произвольную скользящую сетку аналогично SHASTZ, что позволяет проводить лагранжевы расчеты. Ниже мы опишем конечно-разностный алгоритм общего типа SHASTA. Его можно сводить к разным частным случаям и использовать множество антидиффузионных методов.

Пусть $\{\rho_j^0\}$ и $\{V_j\}$ заданы в начале шага по времени в узлах сетки $\{R_j\}$. Пусть, далее, узлы сетки смещаются в $\{R_j^1\}$ после одного временного шага. Если скорости центрированы во времени и $R_j^1 = R_j + V_j \delta t$, то алгоритм будет чисто лагранжевым. Возможен другой выбор $\{R_j^1\}$; отсюда название «скользящая сетка». В дальнейшем показатель степени η принимает значения 0, 1 или 2 для декартовой, цилиндрической или сферической геометрии соответственно.

Сначала определим набор лагранжевых координат для всех узловых точек и геометрических факторов:

$$\begin{aligned} r_j &= R_j + V_j \delta t, \\ r_{j+\eta} &= \frac{1}{2} (r_{j+1} + r_j), \\ R_{j+\eta} &= \frac{1}{2} (R_{j+1} + R_j), \\ R_{j+\eta}^1 &= \frac{1}{2} (R_{j+1}^1 + R_j^1), \\ C_{j+\eta} &= \left(\frac{R_{j+\eta}}{r_{j+\eta}} \right)^\eta \frac{R_{j+1} - R_j}{r_{j+1} - r_j}, \\ C_{j+\eta}^+ &= \frac{R_{j+\eta}^1 - r_j}{r_{j+\eta} - r_j}, \\ C_{j+\eta}^- &= \frac{r_{j+1} - R_{j+\eta}^1}{r_{j+1} - r_j} = 1 - C_{j+\eta}^+, \\ A_{j+\eta}^+ &= r_{j+\eta}^\eta (r_{j+1} - R_{j+\eta}^1), \\ A_{j+\eta}^- &= r_{j+\eta}^\eta (R_{j+\eta}^1 - r_j), \\ A_{j+\eta} &= R_{j+\eta}^\eta (R_{j+1} - R_j), \\ A_j &= A_{j+\eta} + A_{j-\eta}. \end{aligned} \quad (41)$$

Пренебрежем усложнением источников и движущих членов, рассмотренным в [12], тогда конвекция и сжатие в обобщенной трапеции выразятся следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \rho_{j+1}^* \\ \rho_j^* \end{pmatrix} = C_{j+\eta} \begin{pmatrix} \rho_{j+1}^0 \\ \rho_j^0 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Равенство (42) дает новые значения плотности в границах лагранжева элемента среды, заключенного между узловыми точками j и $j+1$. Затем мы интерполируем эти значения на вновь определенную сетку $\{R_j^1\}$. Введем определение

$$\rho_{j+\eta}^* = C_{j+\eta}^+ \rho_{j+1}^* + C_{j+\eta}^- \rho_j^*. \quad (43)$$

Тогда формула, описывающая изменение плотности $\{\bar{\rho}_j\}$ в результате переноса и диффузии, примет вид

$$\bar{\rho}_j = [A_{j+\frac{1}{2}}(\bar{\rho}_{j+\frac{1}{2}} + \bar{\rho}_j) + A_{j-\frac{1}{2}}(\bar{\rho}_j + \bar{\rho}_{j-\frac{1}{2}})]/A_j. \quad (44)$$

Вычисление потоков при неявной записи являющейся диффузии требует решения трехдиагональной системы уравнений

$$\bar{\rho}_j + \frac{1}{4A_j} [A_{j+\frac{1}{2}}(\bar{\rho}_{j+1} - \bar{\rho}_j) - A_{j-\frac{1}{2}}(\bar{\rho}_j - \bar{\rho}_{j-1})] = \bar{\rho}_j, \quad (45)$$

после чего получаем

$$\phi_{j+\frac{1}{2}} = \frac{A_{j+\frac{1}{2}}}{4} (\bar{\rho}_{j+1} - \bar{\rho}_j). \quad (46)$$

Затем следует коррекция потоков в полной аналогии с (20), имеющая вид

$$\begin{aligned} \phi_{j+\frac{1}{2}} = S \cdot \max \{0, \min [S \cdot A_{j+1} \times (\bar{\rho}_{j+2} - \bar{\rho}_{j+1}), \\ | \phi_{j+\frac{1}{2}} |, S \cdot A_j (\bar{\rho}_j - \bar{\rho}_{j-1})]\}, \end{aligned} \quad (47)$$

где $S = \text{sign}(\bar{\rho}_{j+1} - \bar{\rho}_j)$.

После коррекции потоков получаем окончательный результат

$$\bar{\rho}_j^1 = \bar{\rho}_j - \frac{1}{A_j} (\phi_{j+\frac{1}{2}} - \phi_{j-\frac{1}{2}}). \quad (48)$$

Очевидно, что в случае $R_j^1 = R_j$ возможны существенные алгебраические упрощения, приводящие к более простым и экономичным формулам.

III. ОПТИМИЗАЦИЯ FCT-АЛГОРИТМОВ

А. ОШИБКИ И ОПТИМИЗАЦИЯ

В настоящем разделе дан анализ численных ошибок в алгоритмах FCT-метода и рассмотрена более общая задача оптимизации кода в целом для повышения численной точности, гибкости, простоты и экономичности. Придавая особое значение точности, мы сначала проведем усовершенствование FCT-алгоритмов и оценку их работы по сравнению с «оптимальным» алгоритмом на примере нашей пробной задачи о прямоугольном импульсе. Затем обратимся к помощи остальных трех критериев для выбора наилучшего из предложенных алгоритмов.

Успех FCT-методики достигается благодаря замене строгого разложения гораздо более физическим требованием, чтобы решение уравнения непрерывности сохраняло свою положительность. Хотя подрезывание — результат нелинейности метода коррекции потоков — несколько неприятно, оно все же является весьма

умеренной платой за чрезвычайную устойчивость и точность FCT-алгоритмов вблизи сильных градиентов. Эта точность, в частности, является результатом интересного побочного эффекта процесса диффузии — антидиффузии [1, 3], который приводит примерно к четырехкратному уменьшению дисперсии в простой конечно-разностной аппроксимации. Даже в отсутствие коррекции потоков это улучшение можно систематически использовать.

Уже были названы и кратко рассмотрены три типа линейных ошибок в описании конвекции — амплитудные ошибки, фазовые или дисперсионные ошибки и явление Гиббса. Все они складываются в полную ошибку и должны быть суммарно уменьшены до минимально возможного уровня в улучшенном алгоритме, который мы пытаемся построить. Эта полная ошибка содержит, кроме того, компоненты, связанные с неоднородностью сеток и нелинейностями, такими, как сжатие и влияние обратной связи с другими уравнениями системы. Поскольку ошибки в описании конвекции наиболее фундаментальны и важны, в последующем рассмотрении мы сосредоточим внимание на минимизации этих трех существенно линейных ошибок. Тем не менее в приведенных пробных расчетах содержатся все нелинейности ограничителя потоков.

Важно каким-либо образом найти границы численных ошибок как снизу, так и сверху, так что наши сравнительные расчеты покажут нам не только, как далеко завела нас коррекция потоков, но и как далеко нам еще идти. Поскольку преобразование Фурье, если оно применимо, позволяет полностью контролировать фазу и амплитуду каждой гармоники профиля плотности, оно дает основу для построения несомненно «оптимального» алгоритма описания конвективной части уравнения непрерывности (см. [3]).

Если плотность $\rho(x, t)$ разложена в дискретный ряд Фурье, то равенство (7) позволяет сдвинуть каждую гармонику на нужное расстояние по фазе, сохраняя в то же время правильной ее амплитуду. Эти новые гармоники можно затем просуммировать на конечно-разностной сетке в соответствии с формулой обратного преобразования Фурье (5). Если величина $V_0 \delta t$ кратна величине δx , то распределение плотности в новый момент времени будет полностью совпадать со старым профилем плотности и будет сдвинуто точно на соответствующее расстояние.

Ситуация менее благоприятна, если распределение плотности смещается на неполное число ячеек. Так как функция задана только конечным числом гармоник, то коротковолновые компоненты распределения отсутствуют в фурье-представлении и их отсутствие ведет к явлению Гиббса, описанному ранее. Если $V_0 \delta t$ составляет дробную часть δx , то какая-нибудь из гиббсо-

вых осцилляций вблизи крутого градиента или разрыва обнаружится после одного шага по времени и может дать отрицательное значение плотности, как показано на фиг. 1, б.

Хотя преобразование Фурье имеет нулевое остаточное затухание и нулевую фазовую ошибку, неустраняемое явление Гиббса заставляет нас наложить на решение условие положительности. В результате наш «оптимальный» алгоритм соединит идеальные линейные фазовые и амплитудные свойства преобразования Фурье со свойствами метода ФСТ, необходимыми для обеспечения неотрицательного решения. Фурье-решение диффундирует на каждом шаге по времени и затем подвергается неявной антидиффузии в равных количествах. Диффузия устраняет непожелательность, вызванную явлением Гиббса, а затем формула коррекции потоков препятствует развитию отрицательных значений путем образования минимумов. Действие формулы коррекции потоков заключается в сохранении остаточной диффузии у края резких скачков, что позволяет уничтожить тенденцию к непожелательности, присущую любому представлению на конечной сетке. Такое решение уже не будет линейным и обратным, но оно будет гораздо более разумным и надежным с точки зрения физического обоснования расчета.

На этот алгоритм можно взглянуть с другой стороны, если для данного профиля плотности, перенос которого предстоит изучить, подобрать ближайшую дискретную аппроксимацию, так чтобы обратное преобразование Фурье не имело дополнительных максимумов и минимумов между узлами сетки. Если взять исходный профиль и заменить его слегка сглаженным профилем, то для модифицированного профиля чистое преобразование Фурье было бы «идеальным» алгоритмом. Новых максимумов или минимумов не могло бы образовываться, фазовые амплитудные ошибки не существовали бы, и после начального сглаживания алгоритм был бы обратимым.

Очевидно, что чем меньше диффузия и антидиффузия в нашем оптимальном алгоритме при условии положительности, тем лучше. Однако мы обнаружили в пробных расчетах, что окончательное решение и средняя абсолютная ошибка Δ слабо чувствительны к уровню диффузии и антидиффузии. На фиг. 4 показан результат расчета с использованием оптимального алгоритма для пробной задачи при малом значении v . Величина ошибки Δ в этом расчете примерно равна 0,022, и этот результат более чем в 10 раз лучше, чем для ранее опробованных стандартных алгоритмов.

Мы, конечно, не хотим сказать, что преобразование Фурье вместе с коррекцией потоков является наилучшим алгоритмом в общем случае. Технику преобразования Фурье очень трудно использовать на неоднородной сетке или когда решение и урав-

нения нелинейны. Если преобразование Фурье еще было бы возможным в расчете с переменной скоростью, то взаимодействие нелинейных членов непременно исказит представления о фазе и амплитуде. Более того, стоимость выполнения такого численного преобразования намного превосходит преимущества этого метода по сравнению с хорошим конечно-разностным алгоритмом.

Этот «оптимальный» алгоритм подчеркивает скорее важность и неустранимый характер явления Гиббса. Данный алгоритм имеет нулевое остаточное затухание (ZRD) и нулевую фазовую ошибку (ZPE) — наилучшие характеристики, которыми может обладать линейный алгоритм. Таким образом, мы теперь имеем реальную основу для оценки более гибких и дешевых конечно-разностных алгоритмов. Наш фурье-алгоритм дает нижнюю границу ошибки, по которой мы обычно оцениваем более общие, но менее точные алгоритмы.



Фиг. 4 Использование оптимального алгоритма преобразования Фурье с коррекцией потоков для решения пробной задачи о прямоугольном импульсе.

При $\nu = 1/2$, после 800 шагов по времени абсолютная ошибка $\Delta = 0,022$ имеет наименьшее значение, достигаемое с помощью любого положительно определенного алгоритма. Так как фазы и амплитуды описаны точно, единственный источник ошибок заключен в дискретности представления физически непрерывных функций.

Б. УМЕНЬШЕНИЕ ФАЗОВЫХ И АМПЛИТУДНЫХ ОШИБОК

В разд. II были описаны одна неявная и несколько явных трехточечных схем переноса. Большое разнообразие вариантов и гибкость метода связаны с тем, что коэффициенты диффузии $\{v_{j+1/2}\}$ и переноса $\{e_{j+1/2}\}$ в нашем описании остаются свободными и фактически независимыми. В настоящем разделе мы используем эту свободу для того, чтобы наделить наши алгоритмы добавочными полезными свойствами и чтобы проверить относительную важность минимизации амплитудных или фазовых ошибок. Только неявная трехточечная схема, которую мы называли REVFACT (REversible — обратимый), допускает минимизацию и тех, и других ошибок одновременно (см. [3]).

Так как численная диффузия уже была изучена в этом отношении выше, мы сначала рассмотрим этот источник ошибок пу-

тем построения ZRD-алгоритмов, т. е. алгоритмов, для которых линейные множители перехода после антидиффузии равны единице для всех гармоник. Нам предстоит обсудить две явные трехточечные схемы переноса. Одна из них является производной от SHASTA (или от метода Лакса-Вендрофа); в ней коррекция потоков и неявная антидиффузия используются на каждом шаге по времени. Вторая основана на алгоритме донорской ячейки; здесь коррекция потоков и неявная антидиффузия используются только на каждом втором шаге по времени. Фениксовые алгоритмы в общем случае не могут иметь нулевого остаточного затухания (ZRD) ввиду своей формы; алгоритм REVFCST по определению обладает ZRD.

Соотношение (32) дает квадрат множителя перехода для явной трехточечной диффузионной схемы переноса с неявной антидиффузией. Условие нулевого остаточного затухания удовлетворяется таким подбором v , чтобы числитель дроби стал полным квадратом, после чего соответствующий выбор μ позволяет сократить знаменатель с числителем. Как легко проверить подстановкой в (32),

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{4} (1 + \epsilon^2), \\ \mu &= \frac{1}{4} (1 - \epsilon^2). \end{aligned} \quad (49)$$

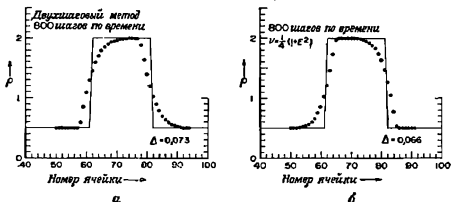
Второй ZRD-алгоритм использует значение $v = 1/2 |\epsilon|$ на стадии трехточечного диффузионного переноса. Это дает обычный алгоритм донорской ячейки, и числитель в (32) приводится к виду

$$1 - 2(|\epsilon| - \epsilon^2)(1 - \cos \beta), \quad (50)$$

в котором квадратичный член обращается в нуль. Это выражение описывает затухание для двух шагов метода донорской ячейки, но имеет вид одного шага по трехточечной диффузионной схеме. Поэтому можно получить двухшаговый ZRD-алгоритм, используя неявную антидиффузию с коэффициентами $\mu = |\epsilon|(1 - |\epsilon|)$ и $\mu = 0$ поочередно. На фиг. 5, а показан результат, полученный с помощью этого двухшагового ZRD-алгоритма, основанного на методе донорской ячейки. Для сравнения на фиг. 5, б приведен результат применения ZRD-алгоритма, полученного из метода SHASTA. Легко видеть, что двухшаговый алгоритм оказывается наилучшим из всех FCT-алгоритмов (хотя он чуть ли не в два раза лучше алгоритмов без коррекции потоков), а ZRD-алгоритм метода SHASTA намного лучше. Мы вообще не рекомендуем использовать какие-бы то ни было алгоритмы, если в них последовательные временные шаги описываются неодинаково. Подразывание и нелинейные взаимодей-

ствия соседних временных шагов обычно имеют более вредные последствия, когда чередуются сильная и слабая антидиффузия.

Можно сделать даже более общее утверждение: при нулевом остаточном затухании ошибка в целом возрастает. Фазовые ошибки, обусловленные численной дисперсией, обычно более опасны, чем комбинация остаточных амплитудных ошибок и явления Гиббса. Не следует удивляться тому, что фазовые свойства алгоритма более важны, чем обыкновенные типы амплитудных ошибок. Затухание обычно не затрагивает длинных



Фиг. 5. Сравнение ZRD-алгоритмов донорской ячейки и SHASTA на примере пробной задачи о прямоугольном импульсе.

В обоих случаях для обращения в нуль остаточного затухания необходима нелинейная антидиффузия. а — в ZRD-алгоритме донорской ячейки чередуются нулевая и косвенная антидиффузия, б — в SHASTA ZRD-алгоритме ν выбирается так, чтобы образовался полный квадрат в множителе перехода, после чего два одинаковых антидиффузионных шага полностью уничтожают затухание.

волн, но уничтожает очень коротковолновые компоненты. Поскольку эти высшие гармоники решения в любом случае испытывают наибольшую дисперсию, затухание вместе с дисперсией иногда может фактически снизить полную ошибку Δ , как это мы уже видели. Фазовые свойства обычно более важны, поскольку фазовые ошибки возрастают секулярно, когда скорость имеет одно преимущественное направление. Разница в положении истинного фазового фронта и вычисленного фазового фронта при постоянной скорости возрастает линейно во времени.

Фазовые ошибки не будут секулярными, если скорость осциллирует, и характерный размер колебательного движения мал по сравнению с рассматриваемой пространственной длиной волны. В этом частном случае фазовые ошибки нарастают за один полуцикл в одном направлении, а за второй полуцикл в другом. Результирующая интегральная фазовая ошибка в среднем стремится к нулю, и амплитудные ошибки (затухание) остаются главным источником численных ошибок. В таком частном слу-

чае обсуждавшиеся выше ZRD-алгоритмы вполне могут оказаться наилучшими.

В случае секулярной дисперсии уменьшение численных фазовых ошибок должно привести к существенному улучшению решения. В приложении А к работе [3] дано разложение относительной фазовой ошибки $R = (X - V_0 \delta t) / (V_0 \delta t)$ для больших длин волн (малых β). Здесь X — расстояние, проходимое за один шаг по времени расчетным фазовым фронтом с волновым числом $\beta = k\delta x$, — вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg} kX = \operatorname{Im} \frac{\rho^1}{\rho^0} / \operatorname{Re} \frac{\rho^1}{\rho^0}. \quad (51)$$

Разложив (51) по малым β , можно увидеть, что точное значение величины X должно быть $V_0 \delta t$. Вообще говоря, точное значение не будет достигнуто, но по крайней мере можно выбрать v так, чтобы уменьшить относительную фазовую ошибку со второго порядка по β до четвертого. Поскольку явная и неявная антидиффузия в трехточечной диффузионной схеме переноса не оказывает влияния на фазовые свойства, можно и выбрать так, чтобы минимизировать остаточные амплитудные ошибки. В фениксный и обратимый алгоритмы будут заложены другие свойства за счет снятия этой степени свободы.

Итак, ниже будут исследоваться модификации с малой фазовой ошибкой (LPE) для следующих трех алгоритмов: а) явного трехточечного диффузионного переноса с неявной антидиффузией (алгоритм SHASTA); б) явного трехточечного диффузионного переноса с фениксовой антидиффузией (фениксный алгоритм); в) неявного трехточечного диффузионного переноса с неявной антидиффузией (обратимый алгоритм). Относительные фазовые ошибки для этих алгоритмов можно вычислить по формулам

$$\operatorname{tg} kX_{\text{SHA}} = \frac{e \sin \beta}{1 - 2v(1 - \cos \beta)}. \quad (52a)$$

$$\operatorname{tg} kX_{\text{Фен}} = \frac{e \sin \beta [1 + 2(v - e^2/2)(1 - \cos \beta)]}{1 - e^2(1 - \cos \beta) - 2(v - e^2/2)e^2(1 - \cos \beta)^2}. \quad (52б)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} kX_{\text{обп}} = \frac{\frac{1}{2} e \sin \beta}{1 - 2v(1 - \cos \beta)}. \quad (52в)$$

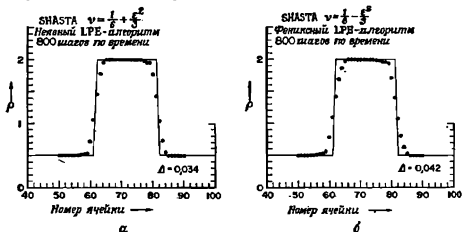
Подставляя в (11) разложение выражений (52a) — (52в) для длинных волн, найдем значения фазовых ошибок:

$$\begin{aligned} R_{\text{SHA}} = & \beta^2 \left(v - \frac{1}{6} - \frac{e^2}{3} \right) + \beta^4 \left(\frac{1}{120} - \frac{v}{4} + \right. \\ & \left. + v^2 - e^2 v + \frac{e^2}{6} + \frac{e^4}{5} \right) + O(\beta^6), \end{aligned} \quad (53a)$$

$$R_{\text{фен}} = \beta^2 \left(v - \frac{1}{6} - \frac{e^2}{8} \right) + \beta^4 \left(\frac{1}{120} - \frac{v}{4} + \frac{e^2}{6} - \frac{e^4}{20} \right) + O(\beta^6), \quad (53б)$$

$$R_{\text{обр}} = \beta^2 \left(v - \frac{1}{6} - \frac{e^2}{12} \right) + \beta^4 \left(\frac{1}{120} - \frac{v}{4} + v^2 - \frac{e^2 v}{4} + \frac{e^2}{24} + \frac{e^4}{80} \right) + O(\beta^6). \quad (53в)$$

В этих формулах индекс SHA означает модифицированный алгоритм SHASTA, т. е. трехточечную явную диффузионную схему



Фиг. 6. Сравнение неявного (а) и фениксового (б) вариантов алгоритма SHASTA с малой фазовой ошибкой (LPE) на примере пробной задачи о прямоугольном импульсе.

В обоих случаях использование $v = (1/6)(1 + 2e^2)$ уменьшает фазовую ошибку от второго порядка по Δ до четвертого. В результате уменьшается дисперсионная раба, что немаловажно упрощает задачу коррекции потоков. Неявный антидиффузион дает результат почти столь же хороший, что и обратимый FCT-алгоритм, но схема фениксовой антидиффузии несколько менее точна.

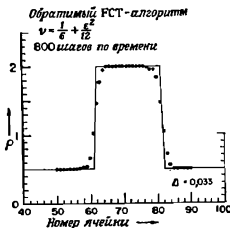
переноса. Индекс «фен» означает вариант с фениксовой антидиффузией, и индекс «обр» означает линейно-обратимый FCT-алгоритм с неявной антидиффузией.

Из уравнений (53) ясно, как можно уменьшить величину относительной фазовой ошибки для перечисленных алгоритмов со второго порядка до четвертого. Для явной трехточечной диффузионной схемы переноса с неявной антидиффузией мы выберем

$$v = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} e^2, \quad \mu = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} e^2. \quad (54)$$

Результат применения такого алгоритма SHASTA в нашей пробной задаче показан на фиг. 6, а. Такой же выбор v и μ миними-

зирует и фазовую ошибку явной трехточечной схемы переноса с феникской антидиффузией. Этот результат показан на фиг. 6, б. Феникский LPE-вариант, хотя и лучше предыдущих алгоритмов, но все же уступает алгоритму с неявной антидиффузией (по историческим причинам на фиг. 6 оба алгоритма названы



Фиг. 7. Применение обратимого ФСТ-алгоритма к задаче о прямоугольном импульсе.

Коэффициент диффузии ν выбран так, чтобы минимизировать фазовые ошибки. Этот алгоритм дает наименьшую ошибку из всех конечно-разностных алгоритмов, опробованных до настоящего времени.

Как видно из (53б), LPE-вариант обратимого ФСТ-алгоритма можно получить, положив

$$\nu = \frac{1}{6} + \frac{\epsilon^2}{12}. \quad (56)$$

Пробный расчет (фиг. 7) дает наилучшее конечно-разностное решение из полученных до сих пор. Остаточная фазовая ошибка четвертого порядка имеет вид

$$R_{\text{обр}} = \beta^4 \left(-\frac{1}{180} + \frac{\epsilon^2}{144} - \frac{\epsilon^4}{720} \right) + O(\beta^6). \quad (55\text{в})$$

В полном согласии с результатами нелинейного пробного расчета эта остаточная фазовая ошибка заметно меньше, чем ошибка феникского LPE-алгоритма, и фактически совпадает с ошибкой неявного LPE-алгоритма.

SHASTA). Недостаток феникского варианта по сравнению с неявной антидиффузией понять легко. Для неявного варианта подстановка (54) в (53а) дает

$$R_{\text{SHA}} = \beta^4 \left(-\frac{1}{180} + \frac{\epsilon^2}{36} + \frac{\epsilon^4}{45} \right) + O(\beta^6), \quad (55\text{а})$$

и соответствующая подстановка для феникского варианта приводит к

$$R_{\text{фен}} = \beta^4 \left(-\frac{1}{30} + \frac{\epsilon^2}{12} - \frac{\epsilon^4}{20} \right) + O(\beta^6). \quad (55\text{б})$$

Остаточная фазовая ошибка для феникского варианта существенно больше.

В. СРАВНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ И ДРУГИЕ
ЧИСЛЕННЫЕ ТРЕБОВАНИЯ

В двух предыдущих разделах было рассмотрено много вариантов и типов алгоритмов FCT. Все они возникли из общей явной трехточечной диффузионной схемы переноса (14) и обратной неявной трехточечной схемы переноса (37). При выводе алгоритма диффузионного переноса мы могли бы включить в схему не только две соседние ближайшие узловые точки (крайний пример — алгоритм преобразования Фурье с коррекцией потоков, созданный для случая постоянной скорости). Однако некоторое увеличение общности не оправдывает, как нам представляется, дополнительную сложность и вычислительную неэкономичность такого подхода. Так как неявная трехточечная схема (37) уже требует решения трехдиагональной системы уравнений, то объединение ее с явной или с фениксовой антидиффузией не даст никакого выигрыша в простоте или экономичности расчета. Явную трехточечную схему можно рассматривать с тремя разными вариантами антидиффузии — явным, неявным и фениксным.

Во всех этих четырех случаях величина коэффициента диффузии была оставлена свободной, и ее можно использовать для оптимизации некоторых других свойств алгоритма. В табл. 1 проводится сравнение всех рассмотренных алгоритмов. Приведенные в двух последних разделах анализ и пробные расчеты позволяют нам сделать следующие выводы:

1. Уменьшение фазовых ошибок (LPE-алгоритмы) обычно более предпочтительно, чем уменьшение амплитудных ошибок (ZRD-алгоритмы).

2. «Оптимальный» конечно-разностный результат имеет ненулевую ошибку, так как неустранимое для конечно-разностного представления явление Гиббса заставляет вводить небольшое сглаживание, обеспечивающее положительность.

3. Наилучшие из имеющих общее применение FCT-алгоритмов (обратимый FCT, неявный LPE и фениксный LPE) дают не более чем двукратное увеличение ошибки по сравнению с оптимальным алгоритмом и в среднем в пять и более раз лучше, чем общепринятые схемы переноса без коррекции потоков, построенные на трехточечном шаблоне.

4. Неявная схема антидиффузии немного лучше фениксовой, но она требует соответственно большего времени расчета. Обе схемы удовлетворяют требованию сохранения профиля $\{\rho_i\}$ при $V_i = 0$ и имеют несколько более высокую точность, чем явная схема антидиффузии.

5. По-видимому, алгоритмы с чередованием большой и малой антидиффузии на последовательных шагах по времени дают

Таблица 1

Сравнение алгоритмов решения уравнения непрерывности на примере пробной задачи о прямоугольном импульсе

Алгоритм	Абсолютная ошибка Δ	v	μ
Оптимальный FCT (неявный), разложение Фурье	0,022	0,05	0,05
Обратный FCT (LPE)	0,033	$\frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{2} e^2\right)$	$\frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{2} e^2\right)$
SHASTA ¹⁾ (неявный LPE)	0,034	$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} e^2$	$\frac{1}{6} (1 - e^2)$
SHASTA ¹⁾ (фениксный LPE)	0,042	$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} e^2$	$\frac{1}{6} (1 - e^2)$
SHASTA ¹⁾ (неявный FCT)	0,049	$\frac{1}{8} + \frac{1}{2} e^2$	$\frac{1}{8}$
SHASTA ¹⁾ (фениксный FCT)	0,052	$\frac{1}{8} + \frac{1}{2} e^2$	$\frac{1}{8}$
SHASTA ¹⁾ (явный FCT)	0,057	$\frac{1}{8} + \frac{1}{2} e^2$	$\frac{1}{8}$
SHASTA ¹⁾ (неявный ZRD)	0,066	$\frac{1}{4} (1 + e^2)$	$\frac{1}{4} (1 - e^2)$
Донорской ячейки (двухшаговый ZRD)	0,073	$\frac{1}{2} \epsilon $	$ \epsilon \cdot (1 - \epsilon)$
Лакса—Вендрофа (с диффузией)	0,119	$0,01 + \frac{1}{2} e^2$	0
«С перешагиванием» (с диффузией)	0,122	0,01	0
Лакса—Вендрофа (простой)	0,175	$\frac{1}{2} e^2$	0
«С перешагиванием» (простой)	0,245	0	0
Донорской ячейки (простой)	0,260	$\frac{1}{2} \epsilon $	0

¹⁾ В случае постоянной скорости этот алгоритм применим также в методах Лакса—Вендрофа и донорской ячейки.

плохие результаты (например, двухшаговый алгоритм донорской ячейки). Это вызвано по крайней мере двумя причинами: во время шага с малой антидиффузией ошибки выходят за пределы, контролируемые большой антидиффузией, и ухудшается нелинейное влияние подрезывания.

Эти выводы указывают, какой алгоритм хорош, какой плох, но фактически не позволяют выбрать «наилучший» алгоритм. Более того, становится очевидным, что определение «наилучший» должно зависеть от конкретной задачи и от используемой вычислительной машины. Хотя все алгоритмы предназначены

для того, чтобы хорошо работать в любых обстоятельствах, но каждый из них обнаруживает очень существенные преимущества в разных случаях. Феникский LPE-алгоритм может оказаться лучшим для векторного расчета (ограничения потоков полностью представимы в векторной форме), а обратимый FCT-алгоритм REVFCI может быть лучшим для ЭВМ со скалярной памятью, где рекурсивные соотношения, выражающие точное решение трехдиагональной системы уравнений, не представляют большого вычислительного неудобства. Однако REVFCI страдает одним важным недостатком, который обнаруживается в уравнениях с нелинейным взаимодействием. Поскольку и перенос, и антидиффузия описываются неявно, перенос создает численные предвестники, которые пересекают сетку за один шаг по времени и распространяются далеко за пределы досягаемости относительно локального ограничителя потоков, и, следовательно, не контролируются последним. Поэтому метод REVFCI очень хорош для расчета пассивной конвекции, но совершенно непригоден для ударных волн.

Такая проблема вообще отсутствует для явного переноса с неявной антидиффузией, и поэтому неявный LPE-алгоритм на самом деле можно рассматривать как абсолютно «лучший» для ЭВМ со скалярной памятью. Однако если в изучаемом явлении существенную роль играет его осцилляторный характер, то одношаговый ZRD-алгоритм может фактически оказаться лучшим, чем LPE-вариант, так как фазовые ошибки уже не будут секулярными.

Для целей настоящего изложения мы сосредоточили внимание в основном на одномерном уравнении непрерывности с постоянными коэффициентами на однородной сетке и не углублялись в изучение таких сторон вопроса, как неоднородная сетка и переменная скорость. Даже функциональный вид зависимости v от e (например, для неявного LPE-метода $v = 1/6 + e^2/3$) не дает способа вычисления $v_{j+1/2}$ для неоднородной подвижной сетки, на которой одновременно происходят процессы конвекции и сжатия. К счастью, оказывается, что преобладающим источником ошибок служит линейное воздействие постоянных коэффициентов, которое было изучено. Поэтому естественно ожидать, что в общем случае должен хорошо работать любой простой и разумный выбор переменных коэффициентов, сводящихся к какой-нибудь из стандартных форм метода FCT при переходе к постоянным коэффициентам. Теперь, когда одномерная задача подробно изучена, мы перейдем к рассмотрению многомерных задач. В следующем разделе коротко обсуждаются некоторые приложения и описывается ряд конкретных методов решения специальных задач.

IV. ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДА КОРРЕКЦИИ ПОТОКОВ

В работе [1] был описан ряд тестов, содержащих решение одномерных уравнений идеальной гидродинамики, в том числе ударные волны, волны разрежения и контактные разрывы. В работах [2, 12, 13] обсуждены некоторые приложения к многомерной гидродинамике и представлены обобщения одномерных расчетов. Ниже мы опишем другие приложения, имеющие более непосредственное отношение к УТС.

A. ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ЛАЗЕРНОЙ МИШЕНИ CYLAZR

Для описания взаимодействия мощного лазерного импульса с материальной мишенью было создано множество кодов. К настоящему времени среди FCT-кодов наиболее развит CYLAZR, в котором FCT используется в гидродинамической части [14]. Этот код был разработан для изучения эффективности конверсии рентгеновских лучей на мишени с высоким атомным номером. Используемая модель предполагает цилиндрическую симметрию и включает систему уравнений гидродинамики, переноса излучения и скорости химической реакции. Существует несколько вариантов этого кода, отличающихся в основном своим описанием атомной химии. В более сложных вариантах используются отдельные уравнения для плотностей и температур для каждого ионизационного состояния и возбужденного уровня. Описанный ниже вариант (первоначальная модель) использует корональное приближение, и ионы описываются общей температурой T_i и единственным ионизационным состоянием Z .

Метод FCT особенно эффективен в описании расширения нагреваемой лазером плазмы, так как, во-первых, быстрое выделение лазерной энергии порождает резкие скачки в направлении расширения (которые могут преобразовываться в ударные волны) и, во-вторых, коэффициенты переноса крайне анизотропны из-за присутствия спонтанных магнитных полей, в результате чего образуются крутые градиенты поперек B .

Уравнения гидродинамики решаются численно на эйлеровой сетке в плоскости (r, z) . Они описывают полную плотность ионов $N = \sum_i N_i$, гидродинамическую скорость V , плотность внутренней энергии $\mathcal{E}$, ионную температуру T_i и магнитное поле B . Эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot (NV) = 0, \quad (57)$$

$$NM \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \cdot \nabla \right) V + \nabla \cdot \left[\left(P + \frac{B^2}{8\pi} \right) I - \frac{BB}{4\pi} \right] + \nabla \cdot P_R = 0, \quad (58)$$

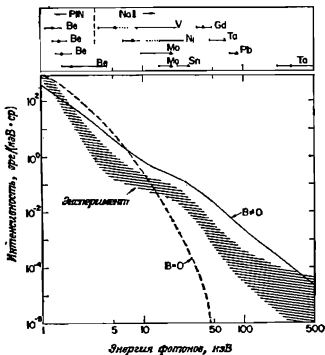
$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathcal{E}V) = & -P \nabla \cdot V + J \cdot r \cdot J + \\ & + P_L - R_e - \nabla \cdot Q_e, \end{aligned} \quad (59)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) \left(\frac{3}{2} N k T_i\right) + \frac{5}{2} N k T_i \nabla \cdot \mathbf{v} = \\ = v_{ei} \frac{3}{2} N k (T_e - T_i), \quad (60)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left[\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{c^2}{4\pi} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \right] - \\ - \frac{c}{4\pi e} \nabla \times \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{N_e} - \frac{ck}{e N_e} \nabla N_e \times \nabla T_e +$$

+ Другие члены, описывающие спонтанные поля $\mathbf{B}$. (61)

Здесь все величины не зависят от θ ; $\mathbf{B} = e_\theta B$, а остальные векторы имеют вид $\mathbf{V} = e_\theta V_\theta + e_z V_z$; электронная плотность $N_e =$



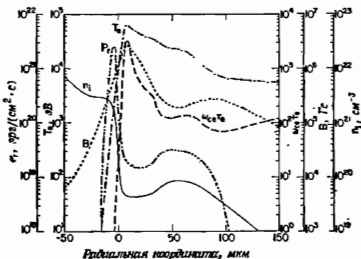
Фиг. 8. Экспериментальная и расчетная зависимости интенсивности рентгеновского излучения от энергии

Заштрихованная область покрывает разброс между самым высоким и самым низким результатами шести экспериментов. Отметим улучшение соответствия между экспериментом и численным результатом при учете спонтанных магнитных полей. Сверху указаны чертой пределы и точкой — максимумы чувствительности детекторов.

$\equiv N Z = \sum N_i Z_i$ (суммирование по сортам ионов); $M = N^{-1} \sum N_i M_i$ — средняя масса ионов, P_L — выделяемая лазерная мощность, $P = k(N_i T_i + N_e T_e)$ — полное давление, $\mathcal{E}$ — суммар-

ная плотность тепловой и ионизационной энергии, R_e — скорость преобразования энергии $\mathcal{E}$ в излучение, l — единичная диада. Коэффициенты переноса γ (сопротивление), Q_e (поток тепла) и ν_{ei} (частота электрон-ионных столкновений) взяты из работы Брагинского [15].

Уравнения (57)–(59) решаются с помощью FCT-модулей SHASTZ и SHASTR (разд. II, Д) методом расщепления. Дальнейшее расщепление в уравнениях (60) и (61) производится



Фиг. 9. Рассчитанные аксиальные зависимости величин P_r , T_e , n_e , B и произведения циклотронной частоты электронов ω_{ce} и времени между столкновениями τ_e .

Профили даны для 2 пс после максимума интенсивности лазерного импульса ($1.2 \cdot 10^{11}$ Вт/см²).

следующим образом: переносные члены описываются методом FCT, а остальные члены (диффузионный и источники) — с помощью явной разностной схемы. Расчет процессов атомной химии и излучения выполняется в быстром масштабе времени с помощью интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти результаты используются для пересчета N , T_i и $\mathcal{E}$ на последующем шаге уравнений переноса.

В качестве примера возможностей этого кода рассмотрим фиг. 8 и 9, взятые из работы [16]. На фиг. 8 сравниваются измеренная экспериментально и полученная численным расчетом интенсивности рентгеновского излучения. Видна важность учета в расчете спонтанных магнитных полей B , особенно для коротковолновой части спектра.

На фиг. 9 показаны аксиальные зависимости свойств среды, мощности рентгеновского излучения и времени между столк-

новениями. Обратим внимание на очень крутой градиент плотности в зоне поглощения, созданный балансом давления холодной плотной плазмы, с одной стороны, и менее плотной нагретой плазмы и лазерного излучения — с другой. Другие варианты этого кода используются для изучения динамики и рентгеновского излучения взрывающихся проволок, а также для различных задач, касающихся течения плазмы.

Б КОД С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОДВИЖНОЙ СИСТЕМЫ ПОТОКОВЫХ КООРДИНАТ

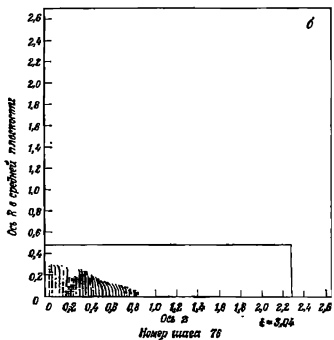
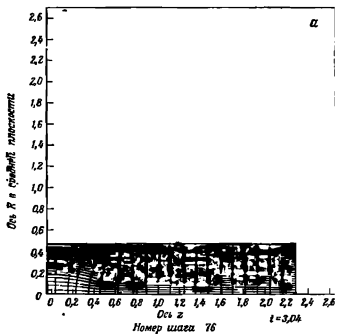
Для расчета течений с большим β и большой анизотропией переноса Андерсон [17] разработал FCT-алгоритм, названный SLIDE и основанный на непрерывной перестройке разностной сетки, которая связана с движущимися магнитными поверхностями. В этом методе вместо аксиально-симметричных координат (r, z) вводится система потоковых координат (ψ, χ) . Здесь ψ и χ — обычные функции азимутального и продольного потоков. Как и в предыдущем примере, зависимость от третьей координаты θ можно пренебречь.

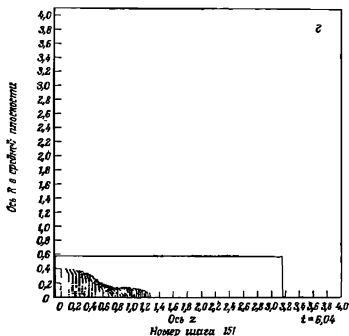
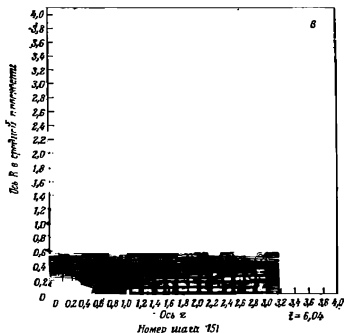
При таком преобразовании, например, член, описывающий перенос тепла, не содержит смешанных производных

$$\nabla \cdot (K \cdot \nabla T) = \frac{1}{h_\psi h_\chi h_\theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{h_\chi h_\theta}{h_\psi} K_{\perp} \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \chi} \left[\frac{h_\psi h_\theta}{h_\chi} \left(K_{\parallel} + \left(\frac{K_{\perp} - K_{\parallel}}{B^2} \right) B_\chi^2 \right) \right] \right\}. \quad (62)$$

Здесь K — тензор теплопроводности, h — параметры Ламе для криволинейной системы координат. Так как при разностной аппроксимации уравнений гидродинамики применяется расщепление шага по времени, то сильная анизотропия K вдоль поля не создает трудностей. С другой стороны, непосредственная аппроксимация указанного члена в (r, z) -координатах ведет к фиктивному переносу вдоль этих координатных линий. В результате анизотропию, превышающую отношение 4:1, нельзя точно описать в декартовом представлении, но в потоковых координатах ее описание не представляет проблемы. На самом деле, можно рассматривать анизотропию порядка $10^5:1$. Примеры, иллюстрирующие эти возможности потоковых координат и показывающие ограниченность декартовой сетки, были даны Андерсоном в работе [17].

Основу применяемого алгоритма образует метод построения новой ортогональной сетки на каждом шаге по времени. Один набор сеточных линий образован линиями уровня потока (линиями постоянной величины ψ). Другой набор вводится с помощью процедуры ортогонализации. Вследствие такого метода





Фиг. 10. Ортогональная потоковая сетка и координаты маркеров для двух ранних моментов времени при расчете расширения облака плазмы в магнитном поле.

Время дано в наносекундах, а расстояния — в сантиметрах. Для более позднего момента времени масштаб изменен, что вызвано выходом расширяющегося облака за пределы прежнего «экрана».

метрика движущейся системы координат является явной функцией времени, что дает новые источники в некоторых уравнениях. Эти источники с помощью транспортного FCT-модуля SHASTZ объединяются с обычными источниками, присутствующими в эйлеровой форме уравнений. SHASTZ удобен в этом отношении благодаря заложенной в него возможности постоянной перестройки сетки.

На фиг. 10 показано применение программы SLIDE к расчету распыления облака полностью ионизованной плазмы в среде низкой плотности, помещенной в магнитное поле напряженностью 15 кГс. Плотность плазмы в центре составляет 10^{19} см $^{-3}$ и экспоненциально спадает вне области радиусом $r = 1$ мм, ее температура $T = 20$ эВ, а начальная скорость расширения равна $3,5 \cdot 10^7$ см/с. При $t = 3$ нс (фиг. 10, а, б) хорошо заметно удерживающее действие поля в радиальном направлении. Позже, при $t = 6$ нс (фиг. 10, в, г), видно, что максимум плотности находится вне оси системы там, где плазма «сгребается» магнитным полем. Здесь же видно, что аксиальный профиль стягивается линчующей силой (неустойчивость перетяжек).

В. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА FCT К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА

Ниже мы опишем новейшее приложение, ставшее возможным благодаря нелинейным свойствам FCT-алгоритма. Согласно теории плазмы, уравнение Власова описывает эволюцию одночастичной функции распределения $f(x, v, t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{q}{m} E \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0. \quad (63)$$

Это уравнение можно рассматривать как уравнение непрерывности, описывающее распространение в $N_x + N_v$ -мерном фазовом пространстве, где N_x и N_v — размерности подпространства координат и скорости соответственно. Эта фазовая среда несжимаема, так как v не зависит от координат, а E не зависит от скорости v . Следовательно, уравнение (63) имеет вид уравнения (1), в котором отброшен член, описывающий сжатие.

При решении уравнения (63) совместно с уравнением для самосогласованного поля E методом конечных разностей с помощью традиционных линейных алгоритмов развиваются многопоточковые неустойчивости, вызванные дискретной аппроксимацией. Каждый ряд узлов сетки с общей скоростью v_i ведет себя как пучок. Два любых таких пучка имеют конечную относительную скорость u , следовательно, могут проявлять неустойчивости, присущие зарядовым сгусткам. Инкременты этих неустойчивостей имеют порядок отношения шагов сетки в скоростном и ко-

ординатном пространствах и могут исказить и полностью разрушить физические процессы. И, что еще хуже, они в конце концов приведут к отрицательным значениям f .

К счастью, метод FCT дает возможность некоторого контроля этих ошибок, которая полностью отсутствует в традиционных разностных схемах. Предположим для простоты, что имеется единственный сорт подвижных зарядов — электроны и что электрическое поле E удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla \cdot E = -4\pi e [n_e(x, t) - n_0]. \quad (64)$$

Здесь n_0 — плотность однородного ионного фона, $n_e(x, t)$ — пространственная плотность электронов

$$n_e = \int d^3v f(v). \quad (65)$$

Далее ограничимся рассмотрением одномерной пространственно-периодической системы. Тогда уравнения (63) — (65) можно переписать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vf) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{e}{m}Ef\right) = 0, \quad (66)$$

где x -компонента электрического поля определяется соотношением

$$E(x) = 2ieL \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} \rho_k \exp\left(\frac{2\pi i k x}{L}\right). \quad (67)$$

В сумме (67) опущен член с $k = 0$ и

$$\rho_k = \frac{-e}{L} \int_0^L dx \exp\left(\frac{-2\pi i k x}{L}\right) \int dv f(x, v); \quad (68)$$

ρ_k — плотность заряда электронов, L — размер системы. На дискретной сетке x принимает значения x_j , $j = 1, 2, \dots, N$, а v — значения v_l , $l = 1, 2, \dots, M$. Уравнения (67) — (68) записываются в виде

$$E_j \equiv E(x_j) = 2ieL \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} \frac{\rho_k}{k} \exp\left(\frac{2\pi i k j \delta x}{L}\right), \quad (67')$$

$$\rho_k = \frac{e}{L} \sum_{j=1}^N \delta x \sum_{l=1}^M \delta v f_{jl} \exp\left(\frac{-2\pi i k j \delta x}{L}\right). \quad (68')$$

Здесь использована сетка с постоянным шагом δx по оси x и δv по оси v .

Один шаг по времени, на котором производится пересчет массива значений функции распределения $\{f_n\}$ с одного временного слоя на следующий, состоит из трех промежуточных шагов, которые соответствуют трем шагам в описании частиц при помощи алгоритма «с перешагиванием» (см., например [18]).

1. Интегрирование по x :

$$\bar{f}_n = T_x \left(\{f_n^0\}, \left\{ v_i \frac{\delta t}{\delta x} \right\} \right). \quad (69)$$

2. Отыскание электрического поля с помощью (67') и (68').

3. Интегрирование по v :

$$f_n^1 = T_v \left(\{\bar{f}_n\}, \left\{ -\frac{e}{m} E_i \frac{\delta t}{\delta v} \right\} \right). \quad (70)$$

Здесь T_x и T_v — алгоритмы одномерного переноса, состоящие из лагранжева смещения на целое число шагов сетки, определяемое формулами $I_t = [v_i \delta t / \delta x]$ и $L_i = [-(e/m) E_i \delta t / \delta v]$ соответственно, с последующим FCT-интегрированием вдоль оставшейся дробной части шага сетки; $[z]$ означает целую часть z .

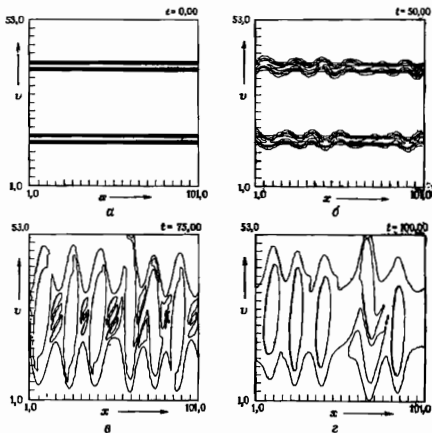
Эта схема автоматически центрарована во времени при чередующихся интегрированиях по x и v . Поэтому, если алгоритмы переноса имеют независимо второй порядок точности, то и полная точность имеет второй порядок. Чтобы получить наилучший результат, нужно, вообще говоря, выбрать разные FCT-алгоритмы по x и v . В x -направлении f редко изменяется коренным образом. Следовательно, здесь нужно придавать особое значение хорошим линейным фазовым свойствам и использовать один из LPE-алгоритмов, описанных в разд. III. Напротив, профиль скорости часто резко изменяется; например, в качестве начального распределения по скоростям обычно выбирают δ -функцию. В дальнейшем колебания скорости редко оказываются большими, поэтому фазовые ошибки не являются секулярными. Здесь основную ошибку вносит нелинейное затухание, связанное с подрезыванием, особенно на ранней стадии, прежде чем неустойчивости создадут большие значения безразмерного импульса $(-e/m) E \delta t / \delta v$.

Для данного приложения наиболее подходит FCT-алгоритм с «минимумом диффузии». Его простейшая форма означает следующий выбор коэффициентов диффузии и антидиффузии:

$$v_i = \frac{1}{2} |\epsilon_i| = \mu_i + \frac{1}{2} \epsilon_i^2 \quad (71)$$

для координаты x_i . Здесь ϵ_i — дробная часть импульса в v -направлении. Формула (71) дает наименьшее значение v_i , сохраняющее положительность на стадии переноса.

На фиг. 11 показано развитие двухпотоковой неустойчивости [19]. Два вначале холодных пучка уширяются, замедляются и в конце концов захватываются. Энергия колебаний как функ-



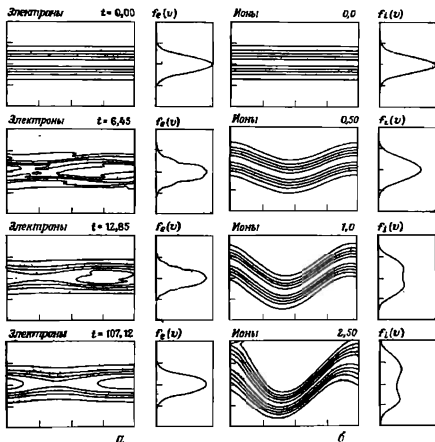
Фиг. 11. Расчет развития двухпотоковой неустойчивости с помощью кода SHASOV.

Фазовые линии уровня показывают начальное состояние (а), рост (б), захват (в) и уменьшение (г) движущихся навстречу пучков. Время измеряется в единицах $\delta t = 0,2 \omega_p^{-1}$, где ω_p — плазменная частота для одного пучка.

ция времени (не показана) осциллирует с частотой колебаний захваченных электронов. Когда заканчивается перемешивание фаз, эти осцилляции затухают.

Другой пример [20] показан на фиг. 12. Двухкомпонентная плазма (отношение масс $m_i/m_e = 1836$) приводится в движение волной накачки с большой амплитудой, волновое число и частота которой удовлетворяют дисперсионному соотношению для

ионно-звуковых волн. Уравнения решаются в системе координат волны, но для графического представления результатов производится пересчет в лабораторную систему координат. Из фиг. 12



Фиг. 12. Воздействие внешней волны на фазовые линии уровня и профили электронной (а) и ионной (б) функций распределения по скоростям.

Отношение масс $m_i/m_e = 1836$; время дано в единицах ω_{pe}^{-1} и ω_{pi}^{-1} в верхней части соответствующих графиков, изображающих фазовое пространство; шаг по времени равен $\delta t = 10^{-8} \omega_{pi}^{-1}$. Длина системы равна одной длине вынуждающей волны $2\pi/k$. Внешняя частота $\omega_0 = k c_s$, где $c_s = (kT_e/m_i)^{1/2}$ — скорость ионно-звуковых волн; внешней волны E_0 удовлетворяет соотношению $e E_0 k / k T_e = 0.25$. $T_e/T_i = 10^3$.

видно, что небольшая доля электронов быстро захватывается, тогда как остальные электроны остаются пролетными. Основная масса ионов ускоряется в своем гораздо большем масштабе времени, и ионные волны имеют тенденцию к торможению.

В обоих примерах счет прекращался, когда начинало сказываться нефизическое влияние краев сетки $\pm V_{\text{макс}}$. Такое влияние можно предотвратить, изменив граничные условия по скорости или сделав сетку в пространстве скоростей неоднородной поблизи краев.

«Движение сетки» — другой вид тонкой регулировки. Оператор переноса в пространстве T_x , определенный выше, действует таким образом, что ряды узлов сетки, для которых отношение $v_i dt/dx$ близко к целому значению, описываются более точно, чем те из них, для которых дробная часть пересекаемой ячейки велика. Такого «неравноправия» можно избежать, используя последовательные галилеевы преобразования, которые изменяют значения дробных частей ячеек от шага к шагу. Каждый ряд узлов сетки, соответствующий постоянной скорости, пробегает весь диапазон от наиболее благоприятных до наименее благоприятных состояний, и все ряды получают в среднем одинаковое описание. (Графики всегда должны быть выполнены в одной неподвижной системе координат.)

Преимущества решения уравнения Власова методом FCT — это преимущества, обычно связываемые с конечно-разностными методами: скорость, гибкость и удобство программирования. Описанные выше одномерные примеры по быстродействию почти не уступают кодам, использующим метод частиц [18], с количеством частиц, равным количеству узлов сетки в данных примерах. Эта скорость чрезвычайно высока, так как обычно частиц требуется больше, чем узлов сетки. Однако относительная скорость и разрешение быстро снижаются при переходе к фазовым пространствам большего числа измерений. С переходом от двумерного фазового пространства (x, v) одномерной задачи к четырехмерному фазовому пространству (x, v, u_x, v_y) двумерной задачи число узлов сетки растет квадратично. А так как степени свободы частиц в методе частиц по крайней мере полунезависимы, то обычно при переходе от одного к двум измерениям нет необходимости квадратично увеличивать число частиц. Поэтому самые лучшие из алгоритмов решения уравнения Власова отстают от методов моделирования частицами, когда размерность фазового пространства превышает тройку.

Г. ДРУГИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Предшествующее обсуждение должно было дать читателю представление о возможностях метода FCT. Существует множество других приложений. Чтобы очертить пределы возможностей метода и помочь читателю ориентироваться в литературе, мы кратко перечислим здесь основные приложения. Некоторые из них будут подробно обсуждены в последней статье из серии [1—3], которая будет в основном посвящена приложениям.

1. Конвекция и диффузия

Если уравнение среды описывает конвекцию и диффузию одного порядка, то FCT-описание несколько изменяется. Пусть коэффициент численной антидиффузии μ алгоритма FCT, который был бы использован в отсутствие физической диффузии, всегда больше, чем коэффициент физической диффузии η (это условие лишь немного усложняется в общем случае). Тогда алгоритм совпадает с алгоритмом, используемым в бездиффузионном случае с точностью до замены μ на $\mu' = \mu - \eta$.

Эта методика была использована при разностной аппроксимации «модифицированного уравнения Бургерса» [21], моделирующего некоторые виды плазменной турбулентности:

$$\frac{dV}{dt} + V \frac{\partial V}{\partial x} = \alpha V + \beta \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}. \quad (72)$$

Она также применялась для изучения нелинейной эволюции неустойчивости Рэлея — Тейлора в приближении мелкой воды [22], где диффузия была введена искусственно для сдерживания быстрого роста коротковолновых мод, связанных с ошибками округления, так как эти моды могут стать достаточно большими и сравниться с физическими длинноволновыми колебаниями.

2. Эрмитовы моменты уравнения Власова

Эльтгрос [23] решал задачу о двухкомпонентной плазме с электростатическим возбуждением путем разложения зависимости уравнения Власова от скорости по полиномам Эрмита. Затем полученная система моментных уравнений (аналогичная обычной системе уравнений гидродинамики) решалась с помощью одной из форм кода SHASTA.

3. θ -пинч и другие течения в скрещенных полях

Ливср и Крол [24] использовали метод FCT для изучения структуры бесстолкновительных ударных волн в θ -пинчах. Этот код имеет одно радиальное измерение и содержит коэффициенты аномального переноса, основанные на рассмотрении микронеустойчивостей. Так как поведение схлопывающегося магнитного импульса на ранней стадии расчета вполне ламинарно, то для этой задачи подходит метод FCT с минимумом диффузии.

Аналогичные коды применялись в астрофизических плазменных задачах [25, 26] и при изучении взаимодействия потока плазмы с неподвижным ионизованным фоном [27].

4. Геометрия z-пинча

Мошер с соавторами [28] пользовался одномерным радиальным FCT-кодом для описания взрывающихся проволок, определяя излучение и химические процессы из корональной модели. Алдерсон с соавторами [29] моделировал z-пинч, помещенный в стабилизирующий газ высокой плотности, также используя одномерный код.

5. Модель генератора сжимающегося магнитного поля

Фримсн и Томпсон [30] разработали двумерный МГД-код для изучения динамики генераторов сжимающегося магнитного поля, в которых металлическая обкладка, заполненная взрывчатым веществом, расширялась, сжимая магнитный поток, находящийся между ней и внешней спиральной обмоткой. Расширение уменьшает индуктивность обмотки, усиливая электрический ток. Таким образом, химическая энергия взрывчатки преобразуется в кинетическую энергию обкладки, которая в свою очередь преобразуется в электрическую энергию, передаваемую во внешнюю нагрузку. Характеристики как твердого вещества, так и магнитного потока описывались с помощью эйлера кода, названного CSQ и использующего одну из форм алгоритма SHASTA.

6. Исследование бариевых облаков

Бук и Скяннаппеко [32, 33] применили FCT-методику для решения уравнения непрерывности для ионной проводимости Педерсона, проинтегрированной вдоль поля, при изучении впрыскивания бария в ионосферу и нерегулярностей F-слоя. Скорость течения в этих задачах в основном определяется $E \times B$ -дрейфом, вытекающим из условия зарядовой нейтральности $\nabla \cdot J = 0$. В этой задаче успешно использован метод одностороннего ограничения потоков (см. [2]).

7. Магнитное сжатие

В работе [2] описан метод, использованный Буком и Кларком [33], для расчета магнитных полей, возникающих, когда плазма течет поперек другой, замагниченной плазмы. Этот метод, применимый во множестве случаев, включает в себя простую разностную аппроксимацию закона индуктивности, а ограничение потоков используется только в направлении течения,

8. Неустойчивость Кельвина — Гельмгольца в сжимаемой среде

Код SHAS2D [13] был использован для изучения устойчивости двумерного сжимаемого течения с поперечным градиентом скорости. Решение линейного дисперсионного соотношения для неустойчивости Кельвина — Гельмгольца в сжимаемой среде находится в хорошем согласии со стадией возникновения и начального возрастания [34]. Образуется вихревая дорожка Кармана, и неустойчивость насыщается, после чего начинается фаза нелинейного перемешивания. Усреднение вдоль первоначальных линий тока указывает на явный переход к однородному распределению, несмотря на то что мелкомасштабное перемешивание почти полностью отсутствует.

Существует множество других еще не опубликованных успешных приложений. Возможно также, что в будущем читатель, как и авторы, сможет дополнить этот перечень описанием того, какие трудности в новых задачах удалось преодолеть с помощью метода FCT.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы рады возможности выразить благодарность Дж. Х. Гарднеру, К. Хейну, Е. С. Орану и С. Залеску за помощь и сотрудничество в редактировании и подготовке к печати этой статьи, а также в развитии и использовании описанной FCT-методики.

Литература

1. Boris J. P., Book D. L., J. Comput. Phys., **11**, 38 (1973).
2. Book D. L. et al., J. Comput. Phys., **18**, 248 (1975).
3. Boris J. P., Book D. L., J. Comput. Phys., в печати (1976)
4. Moretti G. Thoughts and Afterthoughts about Shock Computations, Rep. PIBAL 72-37. Polytechnic Institute of Brooklyn, New York, 1972.
5. Orszag S. A., Israel M., Numerical Flow Simulation by Spectral Methods, Proc. Symp. Numer. Models Ocean Circ., Nat. Acad. Sci., Washington D. C., 1972.
6. Strang G., Fix G., An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
7. Ahlberg J. H. et al., The Theory of Splines and Their Applications, Academic Press, New York, 1967.
8. Roache P., Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publ., Albuquerque, New Mexico, 1972.
9. Courant R. et al., Commun. Pure Appl. Math., **5**, 243 (1952).
10. Courant R. et al., Math. Ann., **100**, 32 (1928).
11. Lax P. D., Wendroff B., Commun. Pure Appl. Math., **13**, 217 (1960).
12. Boris J. P. et al., Atmospheric Hydrocodes Using FCT Algorithms, NRL Memo. Rep. No. 3081, Naval Res. Lab., Washington, D. C., 1976.
13. Boris J. P., SHAS2D, A Fully Compressible Hydrodynamics Code in Two Dimensions, NRL Memo. Rep. No. 2542, Naval Res. Lab., Washington D. C., 1972.
14. Columbant D. G. et al., Laser Target Model, NRL Memo. Rep. No. 2954, Naval Res. Lab., Washington D. C., 1974.
15. Брагинский С. И., В сб.: Вопросы теории плазмы, Вып. I, М., Госатомиздат, стр. 183, 1963.

16. Ripin B. H. et al., Phys. Rev. Lett., **34**, 1313 (1975).
17. Anderson D. V., J. Comput. Phys., **17**, 246 (1975).
18. Boris J. P., Proc. Conf. Numer. Simul. Plasmas, 4th, 1970, p. 3.
19. Book D. L. et al., Proc. Conf. Numer. Simul. Plasmas, 6th, 1973, p. 6.
20. Book D. L., Sprangle P., Bull. Amer. Phys. Soc. [2], **19**, 682 (1974).
21. Ott E. et al., Phys. Fluids, **16**, 855 (1973).
22. Book D. L. et al., Phys. Fluids, **17**, 676 (1974).
23. Ellgroth P. G., Phys. Fluids, **17**, 1602 (1974).
24. Liezer P. C., Kruhl N. A., Proc. 1973 Sherwood Theory Meet., 1973, p. 129.
25. Chevalier R. A., Gardner J. H., Astrophys. J., **192**, 457 (1974).
26. Papadopoulos K. et al., Proc. Solar. Wind Conf., 1974, p. 343.
27. Wagner C. E., Manheimer W. M., Proc. Conf. Numer. Simul. Plasmas, 6th, 1973, p. 126.
28. Mosher D. et al., Ann. N. Y. Acad. Sci., **251**, 632 (1975).
29. Anderson D. V. et al., Numerical Study of the Gas Enclosed Z-Pinch, NRL Memo. Rep. No. 2486, Naval Res. Lab., Washington D. C., 1972.
30. Freeman J. R., Thompson S. L., Two-Dimensional MHD Modeling of Compressed Magnetic Field Generators I: The Magnetic Field Solver, Rep. SAND-75-375, Sandia, 1975.
31. Goldman S. R. et al., J. Geophys. Res., **79**, 1471 (1974).
32. Scannapieco A. J. et al., J. Geophys. Res., **79**, 2913 (1974).
33. Book D. L., Clark R. W., Effects of a Finite Debris Density Profile on the Development of the Longmire Shell, NRL Memo. Rep. No. 3066 Naval Res. Lab., Washington, D. C., 1973.
34. Boris J. P. et al., The Kelvin-Helmholtz Instability and Turbulent Mixing, NRL Memo. Rep. No. 3124, Naval Res. Lab., Washington D. C., 1975.

Глава 5

ICARUS — ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ДИФФУЗИИ ПЛАЗМЫ

*М. Л. Уоткинс, М. Х. Хьюджес, К. В. Робертс,
П. М. Киплинг¹⁾, Дж. Киллин²⁾*

1. ВВЕДЕНИЕ

Одномерные диффузионные модели [21, 22, 24, 25, 38, 47, 75] используются для изучения эволюции плазмы и пол дальнего магнитного поля в аксиально-симметричных тор дальних замкнутых плазменных конфигурациях типа тока [2, 6, 19, 23, 31, 40, 44, 53]. Движение плазмы предполагается достаточно медленным, так что динамическими эффектами можно пренебречь; таким образом, конфигурация проходит рез последовательность квазиравновесных состояний, удовлетворяющих уравнению

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B},$$

где p — давление плазмы, $\mathbf{B}$ — магнитное поле и $\mathbf{J}$ — плотность тока³⁾. Магнитные поверхности совпадают с поверхностями постоянного давления и образуют систему вложенных торов с общей магнитной осью. В этой задаче удобно использовать систему координат (r, θ, ϕ) , где r и θ — полярные координаты в плоскости малого сечения тора с центром на магнитной радиусом R , а ϕ — азимутальный угол, измеряемый вдоль магнитной оси (фиг. 1). Пересечение магнитных поверхностей с плоскостью сечения $\phi = \text{const}$ дает силовые линии полоидальной магнитной поля $\mathbf{B}_p = (B_r, B_\theta)$. Если малый радиус тора означать a и определить обратное аспектное отношение как $\epsilon = a/R$, то предел малого обратного аспектного отношения $\epsilon \rightarrow 0$ соответствует предположению о цилиндрической симметрии. Однако тороидальные эффекты важны даже для современных экспериментов, так как обычно $\epsilon \gtrsim 0,1$.

В настоящее время представляют интерес расчеты равновесия, устойчивости и эволюции плазмы, удерживаемой в магнитном поле токамака. В рассматриваемой двумерной ра-

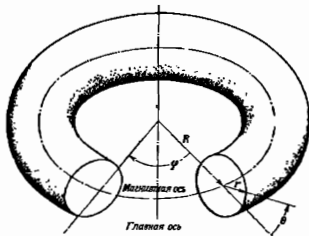
¹⁾ M. L. Watkins, M. H. Hughes, K. V. Roberts, P. M. Keeping, Culham Laboratory UKAEA Research Group, Abingdon, Oxfordshire, England

²⁾ J. Killeen, Lawrence Livermore Laboratory, University of California, Livermore, California.

³⁾ В статье использована система единиц CGS.

весной конфигурации, удовлетворяющей уравнению (1) в любой данный момент времени, происходят диффузия, нагрев и другие повышающие энтропию процессы, которые изменяют параметры плазмы и поля и ведут путем адиабатической перестройки к новой равновесной конфигурации в несколько более поздний момент времени. В каждом состоянии конфигурация должна быть проверена на устойчивость.

Тем не менее до настоящего времени еще не было предпринято попыток выполнить полный двумерный расчет, который описывал бы временную эволюцию плазмы и магнитного поля.



Фиг. 1. Схематическое изображение системы координат для тора.

Хотя существуют программы двумерного расчета равновесия [27, 73] и расчета магнитогидродинамической устойчивости, которые сначала проводились для одномерного случая [28, 33, 49, 65], а теперь распространяются на случай двух измерений [4, 71], и в ближайшем будущем имеется перспектива на выполнение реалистических трехмерных расчетов [77], все-таки большинство расчетов эволюции для токамаков пока проводится в одномерной цилиндрической геометрии с учетом торондальных поправок в коэффициентах переноса. Существует несколько причин для сохранения одномерной модели в описании диффузии. Во-первых еще не ясно, какую двумерную систему уравнений следует использовать, так как временной масштаб выравнивания давления и температуры вдоль магнитных поверхностей на несколько порядков меньше, чем характерное время переноса поперек магнитных поверхностей. Почти с полной уверенностью можно утверждать, что обычные двумерные уравнения магнитной гидродинамики неприменимы. Происхо-

дящие в токамаке физические процессы не ясны, но, по-видимому, среди них преобладают такие эффекты, как взаимодействие со стенкой, турбулентный перенос, присутствие примесей и нейтрального газа. Во-вторых, еще не созданы нежные численные методы, позволяющие эффективно описывать в двумерном случае как высокие альфеновские скорости, так и медленные характеристики эволюции в токамаке.

Представляется предпочтительным сначала получить количественное согласие расчета с экспериментом в одномерной геометрии, а затем переходить к более сложному и дорогостоящему двумерному случаю. Тем не менее существует несколько ранних работ по расчетам двумерной эволюции для токамаков [52, 66, 76].

Поскольку имеется множество процессов, которые могут быть важными в токамаках, и поскольку до сих пор не достигнуто адекватного соответствия между теорией и экспериментом, целесообразно составить новый одномерный диффузионный код, который послужил бы гибким средством исследования, легким включающим в себя новые теоретические или экспериментальные эффекты и позволяющим свободно менять предположения или параметры. Вычислительный код ICARUS был создан с учетом особого внимания этим возможностям [75]. Плазма в магнитном поле описывается системой существенно консервативных уравнений для плотности частиц n , электронного и ионного давлений p_e и p_i и поперечной компоненты магнитного поля B_θ . Предполагается, что тороидальное поле B_ϕ достаточно велико и не возмущается плазмой (приближение малого β , где β — отношение давления плазмы к давлению магнитного поля), а входит в расчет только через коэффициенты переноса. Эта модель будет замкнута, если задать радиальные потоки частиц, тепла, а также тороидальное электрическое поле. Хотя основная модель в коде является неоклассическая теория, применимая к бесстолкновительной плазме [34], небольшие изменения в коде позволяют использовать другие соотношения, как, например, соотношения в сильно столкновительной плазме [50] или неклассические эффекты [78, 2].

Результаты расчетов переноса существенно зависят от конкретных особенностей принятой модели, поэтому результат модели необходимо описывать совместно, чтобы обеспечить соответствие публикаций принятым нормам. Желательно, чтобы код был доступен для других исследовательских групп, чтобы сложные детали физической и численной моделей, а также программы можно было проверить, а расчеты подтвердить и продолжить.

Код ICARUS использует программирующую систему OLUS PUS [58, 11], предназначенную для выполнения сформу-

ванных требований. Хотя систему OLYMPUS можно использовать при решении широкого круга задач, первоначально она была составлена для задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + G(u) = 0, \quad (2)$$

где u — вектор решения, G — линейный или нелинейный оператор. Многие задачи классической физики имеют такой вид, в том числе и задачи, решаемые с помощью одномерных диффузионных кодов для токамаков. Для кодов системы OLYMPUS была использована стандартная версия языка Фортран, и они могут работать на любой вычислительной машине при условии, что в ее библиотеку загружена соответствующая версия Стандартного пакета управления и обслуживания. Эти пакеты разработаны пока для семи типов операционных систем, и два из них опубликованы [11, 39]. Все коды имеют одну и ту же основную модульную структуру и снабжены описаниями, так что тексты программ можно легко понять. Обеспечение выбранной модификации конкретного расчета проводится без изменения основной версии. Первым опубликованным примером была одномерная модель лазерного синтеза MEDUSA [12]. Этот код был использован другими исследовательскими группами, которые проверили и продолжили пробные расчеты и предложили ряд небольших дополнительных поправок [13].

Цель настоящей статьи состоит в описании основной физической модели (разд. II) и численной схемы (разд. III), использованной в коде ICARUS, а также программной методике OLYMPUS (разд. IV), и в демонстрации того, как все это можно применить к ряду расчетов конкретных токамаков (разд. V).

II. ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

А. ВВЕДЕНИЕ

Вычислительный код ICARUS [75] позволяет найти решение системы N дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих времению эволюцию N функций u_n времени t и единственного пространственного аргумента r . Решаемые уравнения выражают законы сохранения в бесконечно длинной цилиндрически симметричной установке:

$$\frac{\partial u_n(r, t)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_n(r, t)) = S_n(r, t), \quad n = 1, \dots, N, \quad (3)$$

где $F_n(r, t)$ и $S_n(r, t)$ представляют собой соответственно поток и источник величины u_n в каждой точке (r, t) . Эти функции

должны быть явно выражены через величину $u_n(r, t)$ и ее пространственный градиент. Частное приложение кода (разд. V) содержит представление потока F_n в диффузионном приближении, так что

$$F_n \sim \frac{\partial u_n}{\partial r}. \quad (4)$$

Когда эти уравнения описывают в основном диффузионные процессы, естественно их решать с помощью неявной методики (разд. III).

Б. НЕОКЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА

Основная физическая модель, использованная в вычислительном коде ICARUS, — это неоклассическая модель переноса Хазелтайца, Хинтона и Розенблюта [34]. Потоки получаются с помощью усреднения по тороидальной (ψ) и полоидальной (θ) координатам в аксиально-симметричном торе (фиг. 1). Моменты по скорости от уравнения Больцмана [10] с интегралом столкновений в форме Фоккера — Планка [64] дают систему консервативных уравнений, в которых искомые функции зависят от одной пространственной координаты r , равной расстоянию от магнитной оси тора.

Модель описывает горячую аксиально-симметричную плазму низкого давления, состоящую из водородных ионов (массы m_i) и электронов (массы m_e). В тороидальном направлении имеется сильное магнитное поле, не зависящее от времени и имеющее вид [45]

$$B_\psi = \frac{B_0}{1 + \varepsilon \cos \theta}, \quad \varepsilon = \frac{r}{R};$$

B_0 — значение магнитного поля, не зависящее от координат и времени, которое используется ниже, а ε — локальное обратное аспектное отношение. Разложение уравнения Больцмана до величин порядка $O(\varepsilon^{1/2})$ показывает, что радиальная диффузия амбиполарна [63], т. е. электронный и ионный потоки частиц Γ_e и Γ_i равны:

$$\Gamma_e = \Gamma_i = \Gamma.$$

В достаточно большом масштабе длин плазму можно считать электрически нейтральной, т. е. электроны и ионы везде присутствуют в равном количестве, а изменение плотности частиц во времени описывается уравнением непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Gamma) = 0.$$

Уравнения баланса тепла для электронов и ионов можно записать в консервативной форме, используя плотности электронной и ионной энергий e_e и e_i :

$$\frac{\partial e_e}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r Q_e = E_\phi J_\phi - \frac{e_e - e_i}{\tau_{eq}} - \Gamma T_i \left(\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} - \frac{0,172}{T_i} \frac{\partial T_i}{\partial r} \right), \quad (6)$$

$$\frac{\partial e_i}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r Q_i = \frac{e_e - e_i}{\tau_{eq}} + \Gamma T_i \left(\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} - \frac{0,172}{T_i} \frac{\partial T_i}{\partial r} \right). \quad (7)$$

Потоки тепла Q_e и Q_i выражают как теплопроводностный, так и конвективный перенос энергии. Источник энергии в плазме описывается членом омического нагрева $E \cdot J$, который содержит только тороидальное электрическое поле E_ϕ , так как для токамака используется разложение по малому параметру, равному отношению полоидального магнитного поля B_θ к внешнему тороидальному магнитному полю B_ϕ . Передача энергии от электронов к ионам описывается членом уравнения с характерным временем

$$\tau_{eq} = \frac{1}{2} \frac{m_i}{m_e} \tau_{ei},$$

где τ_{ei} — время между электрон-ионными столкновениями [7]:

$$\tau_{ei} = \frac{3 \sqrt{m_e} (4\pi e_0)^2 (k T_e)^{3/2}}{4 \sqrt{2\pi} n e^4 \ln \Lambda};$$

здесь k — постоянная Больцмана, e_0 — вакуумная диэлектрическая проницаемость, e — заряд электрона, T_e — электронная температура, $\ln \Lambda$ — кулоновский логарифм [7]:

$$\ln \Lambda = \begin{cases} 30,3 - 1,15 \lg n + 3,45 \lg \frac{k T_e}{e}, & \frac{k T_e}{e} < 50 \text{ эВ}, \\ 32,2 - 1,15 \lg n + 2,3 \lg \frac{k T_e}{e}, & \frac{k T_e}{e} > 50 \text{ эВ}. \end{cases}$$

Уравнения для электронной и ионной энергии связаны также последним членом в правой части уравнений (6) и (7), выражающим влияние радиального электрического поля и движения ионов вдоль магнитного поля.

Уравнения (6) и (7) можно использовать для описания временной эволюции электронного и ионного давлений p_e и p_i с помощью уравнений состояния идеального газа

$$\begin{aligned} e_e &= \frac{p_e}{\gamma - 1} = \frac{n k T_e}{\gamma - 1}, \\ e_i &= \frac{p_i}{\gamma - 1} = \frac{n k T_i}{\gamma - 1}, \end{aligned} \quad (8)$$

где γ — отношение удельных теплоемкостей, полагаемое равным $5/3$, и T_i — ионная температура.

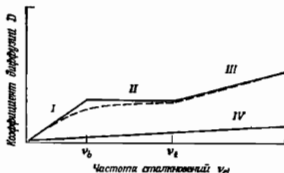
Плотность тороидального тока J_φ можно определить из дифференциальной формы закона Ампера

$$\mu_0 J_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta), \quad (9)$$

где μ_0 — магнитная проницаемость вакуума, а полоидальное магнитное поле определяется законом Фарадея

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial t} = \frac{\partial E_\varphi}{\partial r}. \quad (10)$$

В соответствии с процедурой разложения по малому параметру справедливо рассматривать изменения только в полоидальном магнитном поле B_θ .



Фиг. 2. Схематическое представление зависимости неклассического коэффициента диффузии D от частоты электрон-ионных столкновений ν_{ei} .

I — бесстолкновительный режим ($\nu_{ei} < \nu_b$). $D \sim \rho_{e0}^2 \nu_{ei}^{3/2}$; II — промежуточный режим ($\nu_b < \nu_{ei} < \nu_t$). $D \sim \rho_{e0}^2 \nu_{ei}^2$; III — столкновительный режим ($\nu_{ei} > \nu_t$). $D \sim \rho_{e0}^2 \nu_{ei}^2$. Кроме того, показаны «сглаживающая» аппроксимация этого коэффициента диффузии, используемая в коде ICARUS, и коэффициент классической диффузии в цилиндре ($D \sim \rho_{e0}^2 \nu_{ei}$).

Плазма описывается тремя функциями n , p_e , p_i , выражающими соответственно плотность частиц, электронное и ионное давление. Система уравнений сохранения для этих величин замыкается заданием радиального потока частиц, радиальных потоков электронной и ионной энергии и тороидального электрического поля и позволяет описать диффузию плазмы в то. [30, 41]. Заряженные частицы в торе могут совершать три типа почти периодического движения: ларморовское вращение вокруг магнитной силовой линии, движение вдоль силовой линии всей системе или колебания между магнитными пробками дрейф поперек силовых линий, связанный с электрическими полями и градиентом и кривизной магнитного поля. Соотношения

между частотами, соответствующими этим движениям, и частотой электрон-ионных столкновений $\nu_{ei} = \tau_{ei}^{-1}$ определяет точную форму коэффициента диффузии, который в общем случае дается формулой

$$D \sim \nu l^2, \quad (11)$$

где ν — эффективная частота столкновений, а l — размер характерного шага для процесса случайных блужданий. Относительная форма диффузионных коэффициентов для большой частоты («классический» режим), промежуточной частоты (режим «плато») и низкой частоты («банановый» режим) столкновений показаны на фиг. 2. Границами режимов служат характерная частота колебаний захваченных частиц между пробками ν_b и пролетная частота незахваченных частиц ν_p .

Выражения для потоков в режиме низких частот столкновений наиболее строго были даны Хазелтайном и соотр. [34]. В соответствии с силами A_m ($m = 1, 2, 3$), обусловленными градиентами плотности частиц, электронной и ионной температур и электрического поля, существуют три потока J_l ($l = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{A_1}{\rho_e} = \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_e + \rho_i) - \frac{5}{2T_e} \frac{\partial T_e}{\partial r} + \left(y - \frac{5}{2}\right) \frac{1}{T_e} \frac{\partial T_i}{\partial r}, \\ A_2 &= \frac{A_2}{kT_e \rho_e} = \frac{1}{kT_e^2} \frac{\partial T_e}{\partial r}, \\ A_3 &= A_3 = E_\varphi, \\ J_1 &= \Gamma, \\ J_2 &= Q_m, \\ J_3 &= \frac{J_\varphi - \sigma_s E_\varphi}{kT_e}. \end{aligned} \quad (12)$$

Силы и потоки связаны через транспортные коэффициенты L_{lm} :

$$J_l = - \sum_{m=1}^3 L_{lm} A_m, \quad l = 1, 2, 3.$$

Кроме того, полный ионный поток тепла дается выражением

$$Q_i = y \Gamma k T_i - L_i \frac{1}{k T_i^2} \frac{\partial T_i}{\partial r}. \quad (13)$$

Параметр y введен таким образом, что A_2 зависит только от градиента электронной температуры. С разумной степенью точности транспортные коэффициенты L_{lm} можно выразить простой приближенной формулой [34]

$$L_{lm} = a_{lm} e^{1/2} + \beta_{lm} s. \quad (14)$$

Эта формула дает правильные значения в пределах $\epsilon \rightarrow 0$ и $\epsilon \rightarrow 1$. В коде ICARUS силы Am ($m = 1, 2, 3$) и транспортные коэффициенты $RLIm$ ($l, m = 1, 2, 3$) выражены наиболее удобным способом — через классический коэффициент диффузии по поперечному магнитному полю D_0^ϵ и спитцеровскую проводимость σ_s , определенные формулами

$$D_0^\epsilon = \rho_{e0}^2 v_{ei}, \quad \sigma_s = \frac{ne^2}{m_e v_{ei}}, \quad (15)$$

где ларморовский радиус электронов ρ_{e0} по поперечному магнитному полю имеет вид

$$\rho_{e0}^2 = \frac{2m_e k T_e}{e^2 B_0^2}. \quad (16)$$

Для транспортных коэффициентов употребляются следующие определения:

$$\begin{aligned} RL11 &= -\frac{D_0^\epsilon}{kT_e} (CA11e^{1/2} + CB11e + CC11), \\ RL12 &= \frac{RL21}{kT_e} = \frac{D_0^\epsilon}{kT_e} (CA12e^{1/2} + CB12e + CC12), \\ RL13 &= -n RL31 = \frac{n}{B_0} (CA13e^{1/2} + CB13e + CC13), \\ RL22 &= D_0^\epsilon (CA22e^{1/2} + CB22e + CC22), \\ RL23 &= -\rho_e RL32 = \frac{\rho_e}{B_0} (CA23e^{1/2} + CB23e + CC23), \\ RL33 &= \sigma_s (CA33e^{1/2} + CB33e + CC33), \\ RLI &= \sqrt{\frac{m_i T_e}{m_e T_i}} D_0^\epsilon (CAIe^{1/2} + CBIe + CCI), \\ y &= CAYe^{1/2} + CBYe + CCY. \end{aligned} \quad (17)$$

Численные значения постоянных $CA11, \dots, CCY$, использованных в определениях транспортных коэффициентов, собраны в табл. 1. Область применимости транспортных выражений можно расширить на режим промежуточных частот «плато» с помощью «сглаживающих функций» (табл. 2). Эти функции дают гладкую интерполяцию коэффициентов диффузии при увеличении частоты столкновений до значений, больших, чем частота ν_e (фиг. 2).

Эта модель, применяемая к низким и промежуточным значениям частоты столкновений, образует основную физическую модель, принятую в коде ICARUS.

Таблица 1

Численные значения постоянных в коэффициентах
неоклассического переноса
для бесстолкновительной плазмы

CA11 = 1,12	CB11 = -0,62	CC11 = 0
CA12 = 1,27	CB12 = -0,77	CC12 = 0
CA13 = 2,44	CB13 = -1,44	CC13 = 0
CA22 = 2,64	CB22 = -0,93	CC22 = 0
CA23 = 4,35	CB23 = -1,85	CC23 = 0
CA33 = -1,85	CB33 = 0,96	CC33 = 1
CAI = 0,48	CBI = 0,23	CCI = 0
CAY = 0	CBY = 1,17	CCY = 1,33

Таблица 2

«Сглаживающие функции», используемые для расширения области
применимости неоклассической транспортной модели
для более частых столкновений¹⁾

$$ZMTH11 = \frac{1}{1 + 1,78v_{ei}^*}$$

$$ZMTH12 = \frac{1}{1 + 0,66v_{ei}^*}$$

$$ZMTH13 = \frac{1}{1 + 0,85v_{ei}^*}$$

$$ZMTH22 = \frac{1}{1 + 0,35v_{ei}^*}$$

$$ZMTH23 = \frac{1}{1 + 0,40v_{ei}^*}$$

$$ZMTH33 = \frac{1}{1 + v_{ei}^*}$$

$$ZMTHI = \frac{1}{1 + 0,36v_{ei}^*}$$

¹⁾ «Сглаживающие функции» ZMTH об преобразуют $SA_{\alpha\beta}^{1/2} + CB_{\alpha\beta} + CC_{\alpha\beta}$ в $(SA_{\alpha\beta}^{1/2} + CB_{\alpha\beta}) ZMTH_{\alpha\beta} + CC_{\alpha\beta}$.

Нормированные частоты столкновений v_{ei}^* и v_{ii}^* определяются выражениями

$$v_{ei}^* = \frac{v_{ei}}{v_b}, \quad v_{ii}^* = \frac{v_{ii}}{v_b},$$

где v_b — частота колебаний захваченных частиц.

В. ГРАНИЧНЫЕ И НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Код использует конечно-разностную сетку, покрывающую непрерывную область (разд. III) таким образом, что физические границы на стенке (диафрагме) $r = a$ и на тороидальной оси $r = 0$ совмещены с границами ячеек сетки, а не с центрами ячеек сетки, в которых заданы сеточные функции. Физические граничные условия накладываются на потоки Γ , J_ϕ , Q_ϕ , Q_i . На тороидальной оси $r = 0$ все радиальные компоненты векторных величин должны обращаться в нуль, что означает равенство нулю градиентов функций n , p_e , p_i . С другой стороны, плотность тороидального тока J_ϕ в точке r_0 (вблизи $r = 0$) отлична от нуля, и ее можно связать с полоидальным магнитным полем B_θ , используя закон Ампера для цилиндра, расположенного на оси:

$$J_\phi = \frac{2B_\theta}{\mu_0 r_0}.$$

Граничное условие на внешнем радиусе $r = a$ истолковать несколько труднее. Наилучший метод состоит в использовании заданных значений неизвестных функций в первой узловой точке с радиусом $r > a$: значение функции в граничной точке предполагается равным фиксированной доле значения на оси в момент $t = 0$ путем задания функциональной зависимости вида

$$f = f_0 [1 - (1 - P)x^l]^m, \quad f = \{n, T_e, T_i\}, \\ J_\phi = J_0 (1 - x^l)^m, \quad x = r/a.$$

Показатели степени l , m выбираются так, чтобы задать параболы распределения, а доля, составляемая граничным значением P , выбирается равной 10%. Все эти величины, так же как и максимальные значения f_0 и полный тороидальный ток

$$J_\phi = 2\pi \int_0^a J_\phi r dr,$$

можно изменить с помощью входных параметров. Граничные значения в первой узловой точке $r > a$ сохраняются неизменными во времени.

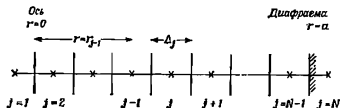
III. ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ

А. ВВЕДЕНИЕ В ОДНОМЕРНЫЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ

Решаемые уравнения можно кратко записать в форме (2), где $u(r, t)$ — вектор-столбец с компонентами $(n, p_e, p_i, B_\theta, G)$, $\mathcal{L}$ — оператор, зависящий от вектора u и его пространственных производных. Для уравнения (2) ставится задача с начальными

условиями, величина u будет определена во все моменты времени, если заданы ее начальное значение $u(r, 0)$ и условия на пространственной границе.

В общем случае решение уравнения (2) не удастся выразить через известные функции. Поэтому следует применять численные, а не аналитические методы. Вектор u и оператор G определены в узловых точках сетки (фиг. 3), покрывающей непрерывную область между точками $r = 0$ и $r = a$. Аппроксимация производной по времени приводит к дискретной сетке вдоль оси времени.



Фиг. 3. Конечнo-разностная сетка.

В общем виде разностный аналог уравнения (2) получается интегрированием

$$u^{n+1} - u^n = - \int_{t^n}^{t^{n+1} = t^n + \Delta t^n} G(u) dt. \quad (18)$$

Решение этого уравнения можно аппроксимировать путем замены правой части уравнения (18) средним по времени

$$u^{n+1} - u^n = - [\zeta G(u^{n+1}) + (1 - \zeta) G(u^n)] \Delta t^n, \quad (19)$$

где

$$0 \leq \zeta \leq 1.$$

Если оператор G таков, что уравнение (2) является параболическим, то особенно эффективными будут полностью неявные методы его решения ($\zeta \equiv 1$) [54].

Б. МЕТОД РЕШЕНИЯ, ИСПОЛЬЗОВАННЫЙ В КОДЕ ICARUS

Уравнения рассматриваемой модели в диффузионном приближении можно записать в виде, соответствующем уравнению (3), и тогда они содержат потоки F и источники S , которые являются функциями величины u :

$$F(u) = f_u(u) \frac{\partial u}{\partial r},$$

$$S(u) = s_u(u) u.$$

На конечно-разностной сетке значения u^{n+1} в момент времени t^{n+1} в точках r_{j-1} , r_j , r_{j+1} можно связать с помощью матричного уравнения

$$(-A_j \cdot u_{j+1} + B_j \cdot u_j - C_j \cdot u_{j-1})^{n+1} = D_j^n, \quad (20)$$

где A , B и C — матрицы размерности 4×4 , а D — 4-вектор. Уравнение (20) решается как линейная система с помощью алгоритма, данного Рихтмайером и Мортонем [54]:

$$u_j^{n+1} = G_j^{n+1} \cdot u_{j+1}^{n+1} + H_j^{n+1}, \quad j = N-1, N-2, \dots, 2, \quad (21)$$

где матрица G и вектор H определяются из рекуррентных соотношений

$$G_j^{n+1} = (B_j^{n+1} - C_j^{n+1} \cdot G_{j-1}^{n+1})^{-1} \cdot A_j^{n+1}, \quad (22)$$

$$H_j^{n+1} = (B_j^{n+1} - C_j^{n+1} \cdot G_{j-1}^{n+1})^{-1} \cdot (D_j^n + C_j^{n+1} \cdot H_{j-1}^{n+1}). \quad (23)$$

Расчет требует обращения 4×4 -матрицы в каждом узле сетки. Это легко выполнимо, если граничные условия заданы в конечно-разностном виде [51].

Нелинейность уравнения (20) приводит к тому, что коэффициенты при u^{n+1} зависят от u^{n+1} , поэтому для получения точного значения этих коэффициентов уравнение (20) приходится решать с помощью итераций. Вначале A^n , B^n и C^n вычисляются в момент t^n и определяется пробное решение $u^{(1)}$. Итерационный шаг повторяется со значениями $A^{(1)}$, $B^{(1)}$, $C^{(1)}$ для получения $u^{(2)}$ и эта процедура с использованием $A^{(p-1)}$, $B^{(p-1)}$, $C^{(p-1)}$ для определения $u^{(p)}$ продолжается до тех пор, пока решение не приблизится к u^{n+1} с требуемой точностью. Сходимость итерационной процедуры проверяется условием того, чтобы относительное изменение величины u на p -й итерации не превышало некоторой заданной величины δu :

$$\max_j \left(\frac{||u_j^{(p)}|| - ||u_j^{(p-1)}||}{||u_j^{(p)}|| + ||u_j^{(p-1)}||} \right) \leq \delta u.$$

Если относительное изменение меньше δu , то считается, решение найдено. Если при заданном числе итераций условие сходимости не выполнено, то шаг по времени уменьшает вычисления повторяются. В конце шага по времени проверяется сохранение числа частиц и полной энергии. Поскольку уравнения (5) — (10) не содержат полной энергии, то эта процедура служит очень чувствительным индикатором точности численной процедуры.

Неявный метод решения параболических уравнений обеспечивает численную устойчивость решения [54], и выбор шага по времени определяет только точность решения. Для контроля

менения величины u во времени шаг по времени ограничен неравенством

$$\Delta t^n \leq a \min \left(\frac{|u_j^{n+1}| + |u_j^n|}{||u_j^{n+1}| - |u_j^n||} \right) \Delta t^{n-1}.$$

Изменение шага по времени ограничено условием

$$\frac{1}{a} \leq \frac{\Delta t^n}{\Delta t^{n-1}} \leq a_0,$$

где a и a_0 — постоянные порядка единицы.

IV. МЕТОДИКА ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А. СИСТЕМА OLYMPUS

Цель программирующей системы OLYMPUS [58, 11] состоит в создании четкой типовой структуры для фортранных программ решения подобных задач. Первое применение этой системы относится к общей задаче с начальными условиями (2), предсказывающей эволюцию физической системы. Задачи с начальными условиями характерны для многих областей классической физики, и расчет диффузии в токамаках, для которого предназначен код ICARUS, служит типичным примером. Концепции, на которых основана система OLYMPUS, базируются на таких дисциплинах, как математика, теоретическая физика, машиностроение, архитектура, а также на опыте научных публикаций [56, 57]. Программы вместе с их подробным описанием должны публиковаться в проверяемом виде, пригодном для ссылок в таких журналах, как Computer Physics Communications, и в соответствующих этим журналам библиотеках программ [8]. Преимущество такого положения состоит в том, что программы становятся доступными для использования и критики наряду с другими научными публикациями. Поэтому особое внимание уделяется методам документации и компоновки, и конечная цель состоит в том, чтобы программы были столь же понятными, как учебники математики [56].

Стандартизация осуществима, так как все программы, предназначенные для решения задач типа (2), имеют много общих черт вне зависимости от конкретных особенностей уравнения. Раз и навсегда можно решить такие вопросы, как структура программы в целом, методика управления, терминология, обозначения, компоновка, а для выполнения часто возникающих внутренних нужд можно создать развитую библиотеку подпрограмм общего назначения. Становится также возможным приращение автоматических генераторов программ. Все это сможет

высвободить значительную долю времени программиста при условии, что система будет достаточно разработана и программист научится ею пользоваться. Работа программиста делается более доступной другим людям, поскольку они знают, чего нужно ожидать.

В течение длительного времени аналогичные идеи были общеприняты в математике и теоретической физике, и известно, что они оказались очень плодотворными. Типичными примерами служат абстрактный формализм теории групп и гамильтонова динамика. Одной из целей системы OLYMPUS является возможно более глубокое внедрение этих идей в практику программирования. Аналогия с гамильтоновой динамикой особенно полезна, так как она вполне применима к уравнениям вида (2).

Каждая физическая программа системы OLYMPUS состоит из набора подпрограмм, написанных на стандартном Фортране [48] и выполняемых под управлением универсальной основной программы и связанной с ней управляющей программы CONTROL, которые образуют часть Стандартного пакета управления и обслуживания [11]. Этот пакет содержится в системной библиотеке, и своя версия создается для каждой вычислительной системы, которая снабжается системой OLYMPUS (в настоящее время система OLYMPUS введена в семи типах вычислительных систем). Все версии написаны в основном на Фортране.

Таблица

Имена, идентификационные номера и заголовки
первых подпрограмм, вызываемых основной
управляющей программой (0.3) CONTROL

Имя	Номер	Заголовок
LABRUN	1.1	Обозначение просчета
CLEAR	1.2	Очистка переменных и массивов
PRESET	1.3	Предварительное задание величин
DATA	1.4	Определение данных для расчета
AUXVAL	1.5	Задание вспомогательных величин
INITAL	1.6	Определение физических начальных условий
RESUME	1.7	Возобновление счета с предыдущего записи
START	1.8	Начало расчета
STEPON	2.1	Ведение расчета
OUTPUT	3.1	Управление выводом
TESEND	4.1	Проверка условий окончания расчета
ENDRUN	4.2	Окончание расчета
EXPERT	0.4	Модификация стандартного набора программ

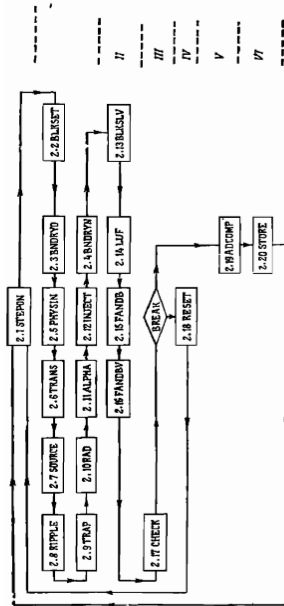
и сходны между собой. Однако они должны учитывать характерные черты каждой системы, такие, как длина слова и байта, обозначения каналов и вызов супервизора. Выделение характерных признаков вычислительной системы внутри пакета OLYMPUS позволяет переносить большие программы с одного типа вычислительных машин на другой лишь с минимальными изменениями, если только будут соблюдены указанные условия.

Управляющая программа COTROL, описанная Кристьянсеном и Робертсом [11], предполагает, что программист создает набор первичных подпрограмм с именами и функциями, определенными в табл. 3, чем обеспечивается стандартизация номенклатуры и структуры в целом. Эти первичные подпрограммы могут вызывать вторичные подпрограммы, имена и функции которых выбираются программистом с учетом характера выполняемого расчета (табл. 4 и фиг. 4). Фиктивные версии первич-

Таблица 4

Имена, идентификационные номера, заголовки подпрограмм класса 2, выполняющих расчет диффузии в вычислительном коде ICARUS

Имя	Номер	Заголовок
STEPON	2.1	Ведение расчета
BLKSET	2.2	Задание матричной формы разностных уравнений
BNDRYO	2.3	Задание граничных условий на радиусе $r = 0$
BNDRYN	2.4	Задание граничных условий на радиусе $r = a$
PHYSIN	2.5	Определение модели переноса
TRANS	2.6	Вычисление неоклассических коэффициентов переноса
SOURCE	2.7	Вычисление неоклассических источников
RIPPLE	2.8	Вычисление переноса, связанного с модуляцией тороидального поля
TRAP	2.9	Вычисление переноса, связанного с неустойчивостями на открытых частицах
RAD	2.10	Вычисление радиационных потерь
ALPHA	2.11	Вычисление влияния α -частиц
INJECT	2.12	Вычисление влияния инжекции пучка нейтронов
BLKSLV	2.13	Решение блочно-тредиагональной системы линейных уравнений
LUF	2.14	Задание весов нижнего и верхнего слоев
FANDB	2.15	Подстановка вперед и назад
FANDBV	2.16	Векторная подстановка вперед и назад
CHECK	2.17	Проверка точности решения
RESET	2.18	Переопределение переменных для повторения шага по времени
ADCOMP	2.19	Расчет адиабатического сжатия
STORE	2.20	Определение переменных для периодического запоминания



Фиг. 4. Блок-схема вычислений (класс 2А).

./ — задание начального или конечного уравнения; // — обращение матрицы; /// — проверка сложности итераций и точности решения; IV — продолжение цикла на повторение шага по времени; V — эмпирическое снятие пазов; VI — накопление изменений по времени вычисления.

ных подпрограмм заготавливаются в пакете как часть библиотеки системы OLYMPUS и используются при расширении программы. Все вместе они образуют фиктивную программу, названную CRONUS, которая имеет ту же структуру, что и остальные программы семейства OLYMPUS, но решает несуществующую систему уравнений. Кроме того, пакет программ OLYMPUS содержит ряд двойных обслуживающих и диагностических программ, к которым можно относиться как к расширению библиотеки стандартных функций Фортрана [48], набор стандартных COMMON-блоков, предпроцессорную программу (если последняя не содержится уже в операционной системе [39]), программы контроля, а также файлы данных и описаний.

Б. СТРУКТУРА ПРОГРАММЫ

При создании программы OLYMPUS принимались во внимание четыре аспекта, а именно архитектура, динамика, управление и диагностика.

Часто при сравнении программы (программного обеспечения) с реальной физической машиной (аппаратурой) бывают полезными механические или электротехнические аналогии.

Архитектура — это статическое понятие, связанное с принятой схемой построения программы. В Фортране эта схема предусматривает деление программы на подпрограммы и COMMON-блоки с собственным определенным назначением. Это соответствует проектированию реальной машины с помощью набора чертежей. Архитектура системы OLYMPUS описана в разд. IV, В.

Динамика связана с фактической работой программы. Здесь полезно использовать аналогию с гамильтоновой динамикой, в которой существует представление о состоянии динамической системы, изменяющемся во времени в соответствии с определенными законами. Состояние описывается набором координат и импульсов (q, p), а законы движения — гамильтонианом H . Работая с программой, необходимо ясное понимание того, какое количество информации требуется для фиксации «состояния вычислений», чтобы программу можно было прервать. Мы не будем рассматривать здесь динамику системы OLYMPUS. Заметим только, что она существенно упрощается при работе со стандартным Фортраном [48], не содержащим операторов RETURN и ENTRY, что облегчает переход к подпрограммам. Динамика программ, написанных на расширенном варианте Фортрана, на Алголе 60 или 68, на PL/I и особенно на Ассемблере, сильно усложняется для понимания, если только программист не вводит дополнительных ограничений.

Управление связано с работой программы при стандартных расчетах или расчетах, требующих специальной модификации. Три стандартных приема, используемых в программах OLYMPUS, будут описаны в разд. IV, Д.

Диагностику можно сравнить с измерениями или наблюдениями, проводимыми на физической или электротехнической установке для контроля и проверки правильности ее работы. Обычно эти измерения не нарушают работу системы. Те же самые критерии следует применять к диагностикам в вычислительной программе (хотя в этом случае возможно небольшое уменьшение скорости счета и увеличение необходимой памяти, нужное для размещения самих диагностических программ). Диагностические средства в программе нужны для контроля 1) работы программы, 2) правильности численной схемы и 3) поведения физической модели, описываемой данным расчетом. Система OLYMPUS по существу имеет дело только с пунктом 1.

В. АРХИТЕКТУРА

Все программы системы OLYMPUS имеют сходную архитектуру и состоят из двух основных частей:



Инструкции представляют собой фортранные подпрограммы, которые в настоящее время разбиты на семь классов.

- | | |
|---------------|-----------------|
| 0. Управление | 4. Эпилог |
| 1. Пролог | 5. Диагностика |
| 2. Расчет | U. Обслуживание |
| 3. Вывод | |

Каждой программе присвоено десятичное число $\langle m.l \rangle$, как показано в табл. 3. Класс управления 0, так же как и класс обслуживания U, являются общими для всех программ, что полностью относится и к классу диагностик 5. Подпрограммы классов 1—4, которые представляют собой соответственно подготовку, расчет, вывод и окончание работы кода, будут отличаться в разных программах, хотя имена первичных подпрограмм всегда должны существовать, поскольку эти подпрограммы вызываются постоянной подпрограммой управления CONTROL. Когда создана действующая программа, ее подпрограммы замещают фиктивные при загрузке из библиотеки.

подход позволяет строить программу стандартным систематическим способом и отлаживать части программ независимо.

Структура данных выражена помеченными COMMON-блоками, разбитыми на пять групп: 1) общие данные системы OLYMPUS, 2) физическая задача, 3) численная схема, 4) внутренняя связь и 5) ввод, вывод и диагностика. Эти группы подразделяются на десятично нумеруемые блоки [Cr.s], как это показано в табл. 5. Пустой COMMON-блок обычно не используется, но имеет метку [C9.0]. COMMON-блоки полезно представлять как *операнды*, а программы — как *операторы*, которые действуют на данные и изменяют значения переменных и массивов, так же как гамильтониан H действует на координаты и импульсы (q, p) в динамике. Чтобы воспользоваться этой простой аналогией, заметим, что вся информация, относящаяся к «состоянию расчета», запоминается в COMMON-блоках, а не в локальной области памяти и передается через COMMON-блоки, а не через списки параметров подпрограмм. Этот способ легче для понимания и обладает тем преимуществом, что диагностические программы имеют возможность проверить COMMON-блоки и дать «моментальный снимок» текущего состояния. Буквенно-цифровые индексы и блок-схемы подпрограмм используются для того, чтобы сделать архитектуру предельно ясной.

Таблица 6

Помеченные COMMON-блоки, которые определяют «состояние расчета» в вычислительном коде ICARUS

Имя	Номер	Заголовок
COMBAS	1.1	Основные параметры системы
COMFUN	1.4	Фундаментальные константы
COMDBP	1.9	Сборочные и диагностические параметры
COMPHV	2.1	Физические переменные
COMCNS	2.2	Физические постоянные
COMACH	2.3	Параметры установки
COMFLX	2.4	Переменные потоков
COMSRC	2.5	Переменные источников
COMESI	3.1	Переменные пространственной сетки
COMSTO	3.2	Переменные временной сетки
COMXSN	3.3	Средние по малому сечению
COMFLO	3.4	Потоки из сечения
COMCON	4.1	Переменные управления расчетом
COMOUT	5.1	Переменные управления выводом

Во избежание повторения нелокальных имен в обозначениях переменных и массивов разного назначения (COMMON-блоки, локальные переменные, индексы циклов, формальные пара-

метры) используются разные первые буквы. Во всей программе используется только один экземпляр каждого COMMON-блока. Это происходит автоматически с помощью специального метода выбора файлов. Перед выполнением программы управляющий оператор вида

```
//SUBSTITUTE COMТОК
```

для вычислительных машин ICL 4/70 или IBM 360/370 ставит названный файл на место управляющей карты. Соответствующие возможности предусмотрены и в системах CDC и Univac.

COMMON-блоки группы I можно представлять себе как вариант стандартной библиотеки, и они доступны всем программам. Пока были описаны лишь два из них: [C1.1] COMBAS, содержащий основные параметры системы, и [C1.9] COMDDP, содержащий параметры, используемые во время сборки и проверки программы. Другие блоки будут содержать фундаментальные физические постоянные, буквенные коды и другую информацию общего назначения.

Физические характеристики на каждом шаге расчета всегда контролируются подпрограммой (2.1) STEPON, которая в свою очередь для проведения расчета вызывает другие подпрограммы класса 2, как показано на фиг. 4 и в табл. 4. Отделение этой части от остальной программы дает существенные преимущества, касающиеся в основном практических вопросов (хотя физические начальные условия задаются подпрограммой (1.6) INITAL)

Г. ПОДГОТОВКА РАСЧЕТА

Как показывает опыт, для того чтобы программа была удобна в работе и легка для понимания, важно задавать структуру данных логическим путем. Хотя программисты часто используют последовательность карт с данными, которые могут иметь весьма сложный и разнообразный формат и совсем не обязательно должны быть все прочитаны в одном месте программы, есть возможность использовать в большинстве случаев гораздо более простую схему, которая требует только одного оператора:

```
READ (NREAD, NEWRUN).
```

Оператор (24) имеет общую форму для всех программ системы OLYMPUS. NREAD — номер канала ввода, NEWRUN — номер списка переменных и массивов NAMELIST, предварительные значения которых могут потребовать изменения.

Подготовка данных — основная цель программ класса (пролог) — состоит в очистке переменных и массивов под-

граммой <1.2> CLEAR и последующем выполнении трех подпрограмм:

(1.3) PRESET,

(1.4) DATA,

(1.5) AUXVAL.

Подпрограмма PRESET присваивает соответствующие предварительные значения всем переменным, которые могут быть заданы независимо. Для простоты это производится в алфавитном порядке блок за блоком. Подпрограмма DATA нужна для изменения некоторых из этих предварительно определенных переменных, и, наконец, подпрограмма AUXVAL вычисляет значения вспомогательных переменных, которые зависят от входных данных, например определяет

$$NM1 = N - 1,$$

где N — число узловых точек. Такая процедура осуществляется блок за блоком там, где это нужно.

Ввод данных в списке NAMELIST приводит к переопределению значений переменных и элементов массивов, указанных в списке, а все прочие остаются без изменения. Эта возможность обладает гибкостью, четкостью и наглядностью и поэтому хорошо приспособлена к работе на линии. Как показано в табл. 6, вводимый файл может быть совсем коротким, если выбраны подходящие предварительные значения.

Подпрограмма <1.6> INITAL предназначена для подготовки физических начальных условий для расчета. Обычно это лучше всего делать с помощью подпрограмм-функций, таких, как FRHO (плотность), FTE (электронная температура), которые задают функции общего вида по параметрам, определенным в списке NEWRUN. Подпрограмма <1.8> START выполняет некоторые вспомогательные операции, необходимые перед началом расчета.

Д. УПРАВЛЕНИЕ

Для управления расчетом в системе OLYMPUS используются три стандартных метода: 1) список данных NAMELIST, 2) модификация начальных функций и 3) возможность, предоставляемая подпрограммой EXPERT. Первый метод использует список данных NAMELIST, и он был описан в разд. IV, Г. Второй метод состоит в модификации начальных функций и требует загрузки новых модулей с различным выбором одной или более начальных функций FRHO, FTE и т. д. Обычно для этого нужно прочитать текстовый файл и с помощью редактора текстов изменить в нем несколько легко определяемых операторов. Третий

Таблица 6

Список имен NEWRUN, используемый в качестве входных данных в численном коде ICARUS для моделирования псевдоклассической диффузии в малом токамаке, модифицированной диффузии Пфирша — Шлютера в малом токамаке и неоклассической диффузии в большом токамаке

Малый токамак Псевдоклассическая диффузия	Малый токамак Модифицированная диффузия Пфирша — Шлютера	Большой токамак Неоклассическая диффузия
& NEWRUN MLOMT2 (12) = T, CEOB = 0.0, XN = 1.0, CB11 = 0.0, CB12 = 0.0, CB13 = 0.0, CB22 = 0.0, CB23 = 0.0, CBI = 0.0, CA11 = 0.0, CA12 = 0.0, CA22 = 0.0, CAY = 0.0, CBY = 0.0, CC11 = 1.0, CC12 = 1.5, CC22 = 3.25, CCY = 1.5, PIQ (12) = 2.0, PIQ (13) = 1.0, PIQ (14) = 40.0, & END & RESET & END	& NEWRUN NLOMT2 (12) = T, CEOB = 0.0, XE = 200.0, XN = 0.0, CB11 = 0.0, CB12 = 0.0, CB13 = 0.0, CB22 = 0.0, CB23 = 0.0, CBI = 0.0, CA11 = 0.0, CA12 = 0.0, CA22 = 0.0, CAY = 0.0, CBY = 0.0, CC11 = 1.0, CC12 = 1.5, CC22 = 3.25, CCY = 1.5, PIQ (12) = 2.0, PIQ (13) = 1.0, PIQ (14) = 40.0, & END & RESET & END	& NEWRUN RMAJOR = 2.93, RMINOR = 1.28, RPLSMA = 1.28, CURENT = 3.0E + 06, DENMAX = 9.1E + 19, TEMAX = 1000.0, TIMAX = 1000.0, NLOMT2 (12) = T, CB11 = 0.0, CB12 = 0.0, CB13 = 0.0, CB22 = 0.0, CB23 = 0.0, CBI = 0.0, & END & RESET & END

метод обладает наибольшими возможностями, и его цель состоит в значительной специальной переделке существующей программы. Однако текст исходной версии, которая могла бы хорошо отлажена, сохраняется и может непрерывно использоваться в других расчетах.

В нужных местах системы OLYMPUS вставляются операторы

CALL EXPERT (ICLASS, ISUB, IPOINT).

Формальные параметры, ICLASS и ISUB — это локальные переменные, определяющие десятичный номер (ICLASS, ISUB) вызывающей подпрограммы, а IPOINT — целая величина,

дающая точное место внутри этой подпрограммы Конечно, эти вызовы нельзя помещать внутри циклов.

Подпрограмма (0.4) EXPERT(KCLASS, KSUB, KPOINT) содержится в схематическом виде в библиотеке системы OLIMPUS и используется для управления диагностиками, но программист может создать свой собственный вариант и включить в него специальные участки. Если в позиции (2.13.3) (а возможно, и в других позициях) нужно сделать вставку, то удобно использовать для этого операторы

```

      ICODE = 10 000 * KCLASS + 100 * KSUB + KPOINT
      .
      .
      IF (ICODE.EQ.21303) GO TO 21303
      .
      .
      RETURN
21303 CONTINUE
      [Дополнительный текст для позиции (2.13.3)]
      RETURN
      .
      .
      END

```

Подпрограмма (0.4) EXPERT имеет доступ ко всем переменным и массивам COMMON-блоков (при наличии соответствующих операторов // SUBSTITUTE), и при необходимости она сама может вызывать подпрограммы. Однако она не должна вызывать те подпрограммы, которые уже содержат операторы вида (25). Эту трудность можно обойти, вставив переключатель вида

```
IF (NLEXPT) CALL EXPERT (ICLASS, ISUB, IPOINT). (26)
```

Этот переключатель выключается при входе в подпрограмму EXPERT, а при выходе из нее восстанавливается его исходное значение.

При условии, что EXPERT вводится логически, текст этого файла, а также любых дополнительных подпрограмм представляет собой обобщенную форму ввода данных и вполне определяет любые модификации, которые могли быть сделаны.

Следующая возможность состоит в использовании при работе на линии собственного варианта подпрограммы EXPERT в файле, названном MASTER, который тоже содержит все управляющие операторы, необходимые для составления подпрограммы EXPERT, редактирования или создания новой версии

используются для формирования показателя состояния всех переменных и массивов COMMON-блоков. Эта возможность предпочтительна для восьмеричной или шестнадцатеричной выдачи информации, которая обеспечивается большинством вычислительных систем.

Эти возможности полезны во время проверки программы. Переключатели можно представить как часть «пульта управления», а вызовы вида (26) — как кабели, связывающие пульт с проверяемой программой. Обслуживающие программы системы OLYMPUS можно также использовать для модификаций. Так, например, оператор

CALL RARRAY (8HVNETHA, VNETHA, MAXMSH)

в подпрограмме EXPERT позволяет вывести массив значений пологой магнитного поля без употребления оператора FORMAT в обычном виде.

Ж. ОПИСАНИЯ

Программы системы OLYMPUS и их описания организованы стандартным способом, как показано на фиг. 5. Этот способ предельно нагляден и доступен в такой же степени, что и математические учебники. Подпрограммы разбиты на десятично нумерованные разделы и подразделы, каждый из которых имеет соответствующий заголовок. Для повышения наглядности использованы абзацы. На фиг. 5 комментарии напечатаны строчными буквами на устройстве Termi Net 300 фирмы «Дженерал электрик», для того чтобы они отличались от операторов. Для целей обучения планируется опубликовать в таком виде много программ.

V. ПРИЛОЖЕНИЯ

A. ВВЕДЕНИЕ

Недавние публикации [5, 20, 35] о поведении плазмы в различных установках типа токамак содержат детальное описание поведения разряда во времени. В частности, были проведены подробные измерения не только напряжения и тока, осуществляющего омический нагрев, но и радиальных профилей электронной температуры и плотности.

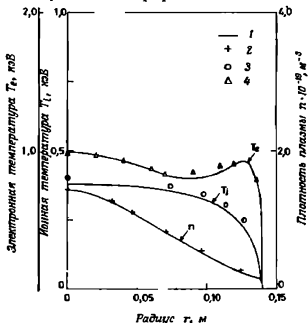
Были исследованы предсказания неоклассической теории и установлена их неправильность. Поэтому первостепенную важность приобрел вопрос о возможности выборочно убирать части модели и заменить целый ее раздел. Развитие физической модели, позволяющее хорошо моделировать поведение разряда в установке ST [20], было проведено с помощью введения в вы-

числительный код ICARUS дополнительных потоков и источников. Физические эффекты, возможные в токамаках следующего поколения, также можно легко включить в этот код.

Б. СОВРЕМЕННОЕ ПОКОЛЕНИЕ ТОКАМАКОВ

1. Результаты моделирования на основе неоклассики

Различные коды, в которых решается полная система уравнений неоклассики, в основном дают сходные результаты. На фиг. 6 показаны радиальные профили плотности плазмы n , элект-



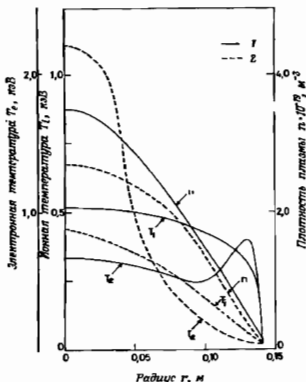
Фиг. 6. Сравнение радиальных профилей плотности плазмы n , электронной температуры T_e и ионной температуры T_i при $t=60$ мс разряда низкой плотности в небольшом токамаке ($R=1,09$ м, $a=0,14$ м, $(n)=6 \cdot 10^{19}$ м $^{-3}$, $I_0=40$ кА, $B_0=3$ Т), рассчитанных по коду ICARUS (1) и коду Дюкса (2, 3, 4) с использованием неоклассической модели диффузии.

тронной и ионной температур T_e и T_i , предсказанные кодом Дюкса [36] и кодом ICARUS [75] для момента $t=60$ мс разряда низкой плотности в установке типа ST.

Эти коды предсказывают узкий, почти линейный профиль плотности и гораздо более широкие распределения температур. Распределение плотности обусловлено преобладающей ролью эффекта пинчевания Уэйра [74] в неоклассических уравнениях. Этот эффект понижает плотность во внешних областях разряда и повышает плотность вблизи оси. Поскольку градиент темпе-

ратуры имеет заметную величину только у края, где плотность мала, тепловые потери также невелики.

Однако для современных токамаков численные предсказания не согласуются с экспериментальными результатами. В условиях



Фиг. 7. Сравнение радиальных профилей плотности плазмы n , электронной температуры T_e и ионной температуры T_i при $t = 35$ мс разряда высокой плотности в небольшом токамаке ($R = 1,09$ м, $a = 0,14$ м, $(n) = 1,65 \cdot 10^{19}$ м $^{-3}$, $I_p = 60$ кА, $B_0 = 3,7$ Т), рассчитанных по коду ICARUS с использованием неклассической модели диффузии (1) и измеренных экспериментально (2) [19].

разряда высокой плотности на установке ST [20] экспериментальные результаты для $t = 35$ мс сильно отличаются от расчетных (фиг. 7). Экспериментальный вывод состоит в том, что энергетический баланс обусловлен электронной теплопроводностью и рециркулирующей частиц, а не ионной теплопроводностью и излучением, как предсказано численно. Экспериментальные времена жизни для частиц τ_p , электронной τ_{eE} и ионной τ_{iE} компонент энергии и полное энергетическое время жизни τ'_E в крайней мере на порядок меньше, чем полученные численно (табл. 7),

Таблица 7

Общие характеристики разряда с высокой плотностью в малом токемаке
($R = 1,06$ м, $a = 0,14$ м, $(n) = 1,7 \cdot 10^{18}$ м $^{-3}$, $I_0 = 60$ кА, $B_0 = 3,7$ Т)

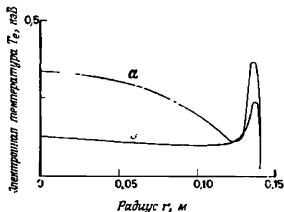
	Значение из осн				Средние значения 1)				Время жизни 2), мс				
	$n_{10^{18} \text{ м}^{-3}}$	T_e , кэВ	T_e' , кэВ	E_Z , В/м	a	(n) , 10^{18} м^{-3}	$\langle T_e' \rangle$, кэВ	$\langle T_e \rangle$, кэВ	ρ_{0e}	ρ_{0i}	τ_p	τ_e'	τ_{Ee}
Эксперимент на СТ (35 мс)	2,7	2,2	0,46	0,96	0,6	1,8	0,76	—	0,75	—	16	13	19
Неоклассическая теория (34 мс)	3,5	0,07	0,51	0,06	3,2	1,65	0,58	0,45	0,52	0,40	1506	106	604
Псевдоклассическая теория (33 мс)	2,0	1,03	0,46	0,22	2,0	1,65	0,65	0,35	0,58	0,31	23	20	65
Перенос Пфизла—Шлютера, увеличенный в 200 раз (34 мс)	2,6	2,6	0,50	0,20	0,58	1,65	0,62	0,28	0,56	0,25	6	11	44

$$1) \quad (n) = \frac{2}{a^2} \int_0^a n r dr, \quad \langle T \rangle = \frac{\int_0^a n k T r dr}{\int_0^a n r dr}, \quad \beta_0 = \frac{16\pi^3}{\mu_0 J^2} \int_0^a n k T r dr.$$

$$2) \quad \tau_p = \frac{1}{r T} \int_{r=a}^a n r dr, \quad \tau_e' = \frac{\mu_0 \int_0^a n k (T_e + T_i) r dr}{(v-1) E_0 \beta_0 |_{r=a}},$$

$$\tau_{Ee} = \frac{\int_0^a n k T_e r dr}{(v-1) r Q_0 |_{r=a}}, \quad \tau_{Ei} = \frac{\int_0^a n k T_i r dr}{(v-1) r Q_i |_{r=a}}.$$

Другой недостаток неоклассической теории состоит в том, что она не может описать стадию подъема тока в токамаках. Если бы перенос был чисто неоклассическим, скин тока сохранялся бы чрезвычайно длительное время [25]. Этого не наблюдается в эксперименте, хотя, по-видимому, в разряде на установке ST проявляется небольшой скин-эффект [20], которым, по-видимому, нельзя пренебрегать при детальном анализе энергетического баланса, но который достигает уровня насыщения.



Фиг. 8. Радиальные профили электронной температуры в условиях разряда высокой плотности в небольшом токамаке ($R=1,09$ м, $a=0,14$ м, $\langle n \rangle = 1,65 \cdot 10^{19}$ м $^{-3}$, $I_p=60$ кА, $B_p=3,7$ Т), рассчитанные по коду ICARUS для демонстрации неоклассического «скин-эффекта» в случае, когда значение плотности на границе поддерживается на уровне 5% от плотности на оси (кривая *a*) и когда потери с тормозным излучением увеличены в 10^4 раз (кривая *b*).

Кривая *a* соответствует моменту времени 2,7 с, а кривая *b* — 2 с.

Установлено [62], что в вакуумной области МГД-уравнения несправедливы, так как джоулево энерговыделение (которое не зависит от плотности частиц) распределяется между все меньшим и меньшим количеством частиц, и в результате может образоваться сингулярность электронной температуры. Для неоклассических уравнений Фюрса и др. [29] показали, что на стадии подъема тока скин-эффект, вызванный поверхностным нагревом, может привести к перегревной неустойчивости, которая увеличит и сохранит скин-эффект.

Чтобы обойти эту трудность, в численных кодах обычно используются начальные условия с током, распределенным по всему объему плазмы, и с постоянной во времени величиной

полного тока. Тем не менее скин-эффект может развиваться, если выбрано слишком низкое значение минимальной плотности (фиг. 8).

2. Разработка физической модели

Неоклассическая модель плазмы в токамаке дает такое поведение разряда во времени, которое имеет весьма отдаленное отношение к эксперименту. Необходимо, чтобы была возможность легко убрать или заменить часть модели. Это означает, что решение должно определяться таким образом, чтобы физическая часть модели была отделена от численной части. Иными словами, желательно, чтобы физическую модель можно было легко изменять и чтобы эти изменения автоматически в правильной форме передавались в численную модель. Эту связь можно организовать так, чтобы потоки F и источники S , задаваемые исследователем как функции параметров плазмы и их пространственных градиентов, преобразовывались в блочно-трехдиагональные матрицы в конечно-разностном представлении.

Предполагается, что уравнение (3) имеет вид

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sum_{\beta} F X_{\alpha\beta} \frac{\partial \beta}{\partial r} \right) = \sum_{\beta} \beta S C_{\alpha\beta}, \quad (27)$$

$$\{\alpha, \beta\} = \{n, p_e, p_i, B_0\}.$$

а потоки и источники определяются соответственно как коэффициенты $F X_{\alpha\beta}$ и $S C_{\alpha\beta}$.

Вообще говоря, для системы N уравнений с N неизвестными функциями было бы более предпочтительным определять коэффициенты в виде двумерных массивов $F X(\alpha, \beta)$ и $S C(\alpha, \beta)$ так, чтобы можно было использовать циклы от 1 до N , предоставляя различным частям еще большую независимость.

3. Дополнительные потоки

а. *Псевдоклассическая диффузия* Псевдоклассические законы [2, 78] можно включить в код ICARUS множеством различных способов, что хорошо иллюстрирует гибкость системы OLYMPUS. Определения для потока частиц, потоков плотности электронной и ионной энергии и потока плотности тока имеют

$$\begin{aligned}
\Gamma &= nV_r = -KD_0^\epsilon + \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right) \frac{\partial n}{\partial r}, \\
\tilde{Q}_e &= -KD_0^\epsilon \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right) \left(\frac{\partial p_e}{\partial r} - kT_e \frac{\partial n}{\partial r}\right), \\
\tilde{Q}_i &= \sqrt{\frac{n_i T_e}{m_e T_i}} D_0^\epsilon \left(\frac{\partial p_i}{\partial r} - kT_i \frac{\partial n}{\partial r}\right) (CAIe^{1/2} + CBIe + CCI), \quad (28) \\
Q_e &= \tilde{Q}_e + \frac{3}{2} \Gamma kT_e, \\
Q_i &= \tilde{Q}_i + \frac{3}{2} \Gamma kT_i, \\
J_\phi &= \frac{\sigma_2}{K} (CA33e^{1/2} + CB33e + CC33) E_\phi,
\end{aligned}$$

где [67]

$$K \sim Z_{\text{эф}} \left(\frac{0.457}{1.077 + Z_{\text{эф}}} + 0.29 \right). \quad (29)$$

Эти выражения для потоков не содержат перекрестных членов, так что Γ зависит только от $\partial n / \partial r$, а $\tilde{Q}$ — только от $\partial T / \partial r$. В частности, отсутствует член, описывающий неоклассическое пиццевание запертых частиц. Так как экспериментально установлено, что ионный перенос является в основном неоклассическим, эти члены сохранены. Влияние относительно малой добавки тяжелых примесных ионов (таких, как железо или вольфрам) состоит в увеличении эффективного заряда ионов $Z_{\text{эф}}$ водородной плазмы и соответствующем изменении сопротивления и других коэффициентов переноса (28) и (29) [67].

Для системы потоков, заданных этими уравнениями, запись неоклассических потоков, содержащуюся в подпрограмме (26) FLUXES (фиг. 4), можно полностью заменить новой версией. Если теперь неоклассические потоки исключить, то код будет полностью основан на псевдоклассической модели. Временное включение в код псевдоклассической модели можно обеспечить соответствующим вызовом подпрограммы EXPERT после определения неоклассических потоков. Составленная исследователем часть подпрограммы EXPERT заменила бы или дополнила потоки так, чтобы они соответствовали псевдоклассической модели.

Однако изучение уравнений (28) и (29) показывает, что задаваемая этими уравнениями конкретная псевдоклассическая модель является частным случаем базовой модели и может быть получена из последней правильным выбором численных коэффициентов. В табл. 6 в списке имен NEWRUN перечислены изменения, необходимые для работы кода в псевдоклассическом

варианте. Эти изменения можно внести путем ввода параметров.

Кроме того, этот список имен NEWRUN показывает, каким образом можно временно отключать некоторые части физической модели, чтобы оценить роль этих частей. Например, положив СЕОВ равным нулю, можно исключить из расчета все члены, связанные с пинчеванием запертых частиц. Выборочное отключение членов способствует как разгрузке кода во время исследовательской работы, так и пониманию уравнений в процессе разработки модели.

6. *Диффузия Пфирша — Шлютера*. Известно, что модель диффузии плазмы в режиме частых столкновений ($v_{ei} \gg v_i$) [62, 72], а также ее модификация Пфиршем и Шлютером [60] с учетом влияния тороидальности дают диффузионные потери, которые слишком малы по сравнению с наблюдаемыми в современных токамаках. Тем не менее Мерсье и Суббарамайер¹⁾ установили, что коэффициент диффузии Пфирша — Шлютера, увеличенный во много раз с помощью множителя $\lambda \gg 1$, позволяет моделировать поведение плазмы токамака в экспериментах на TFR [53] и ST [19]. Модифицированная диффузия Пфирша — Шлютера описывается следующим коэффициентом диффузии:

$$D_{\text{MPS}} = \lambda (1 + 1,6q^2) v_{ei} \rho_{eq}^2 \quad (30)$$

где q и ρ_{eq} — соответственно коэффициент запаса устойчивости и ларморовский радиус электронов в тороидальном магнитном поле:

$$q = \frac{r B_\phi}{R B_\theta}, \quad \rho_{eq}^2 = \frac{2 m_e k T_e}{e^2 B_\phi^2}.$$

Код ICARUS можно использовать для исследования поведения бесстолкновительной плазмы, в которой диффузия электронов определяется модифицированным коэффициентом Пфирша — Шлютера, а ионный теплоперенос задается неоклассической моделью. Изменения, необходимые для работы кода в этом режиме, даны в списке имен в табл. 6.

Однако ни псевдоклассической модели, ни модели Пфирша — Шлютера недостаточно для описания «колоколообразного» профиля электронной температуры, наблюдаемого в установке ST (фиг. 7). Хотя времена жизни и описываются усиленными диффузионными процессами (табл. 7), все же одна лишь диффузия не может создать центральный пик электронной температуры, даже несмотря на то что коэффициент диффузии Пфирша —

¹⁾ С. Mercier, Soubbaramayer, частное сообщение, 1974 г.

Шлютера возрастает к поверхности. Поэтому для того, чтобы воспроизвести экспериментальные профили, необходимо привлечь дополнительные механизмы.

4. Дополнительные источники

Добавление новых источников к источникам, уже содержащимся в базовой модели, можно осуществить сначала с помощью подпрограммы EXPERT, которая будет содержать модификацию массивов, описывающих источники. После удачного включения этих членов соответствующую часть подпрограммы EXPERT можно преобразовать в отдельную подпрограмму, которая будет связана только с конкретной частью физической модели. Например, имеет смысл определять радиационные потери, связанные с тормозными и циклотронными процессами, в отдельной подпрограмме (фиг. 5). Эти источники, описывающие потерю энергии, были получены соответственно Роузом и Кларком [60] и Розенблютом [61]:

$$P_{\text{торм}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{e^6 Z^2}{24\pi} \frac{\mu_0^3}{m_e h} \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}} n_e n_t = \\ = \text{CBREM} \cdot Z_{\text{эфф}} n_e^2 \sqrt{T_e} (\text{эВ}), \quad (31)$$

$$P_{\text{цикл}} = 0,16 \cdot 10^{16} \frac{B_0^3}{R} T_e \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \frac{\Lambda_k^l}{1 + \Lambda_k^l}, \quad (32)$$

где

$$\Lambda_k^l = 5 \cdot 10^{-16} \frac{nR}{B_0} (10^{-6} T_e (\text{эВ}))^{k-1} f_k^{(l)}, \\ f_k^{(0)} = (ke)^{k-2}, \quad f_k^{(2)} = \frac{f_k^{(0)}}{2k+1}.$$

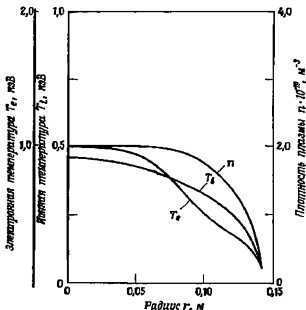
Здесь h — постоянная Планка, c — скорость света. В последнем выражении e — основание натуральных логарифмов, а me — заряд электрона.

Коэффициент CBREM зависит только от фундаментальных постоянных. Во время подготовки расчета этому коэффициенту дается нулевое значение в подпрограмме (1.2) CLEAR, в подпрограмме (1.3) PRESET ему присваивается значение, равное единице, и в подпрограмме (1.5) AUXVAL коэффициент CBREM вычисляется как произведение CBREM и фундаментальных постоянных. Соответственно величину тормозных потерь можно менять, задавая величину CBREM в подпрограмме (1.4) DATA, отличной от единицы. В частности, задав CBREM равным нулю, можно исключить влияние тормозного излучения.

Полностью исключить все радиационные эффекты, содержащиеся в подпрограмме (2.10) RAD, можно, задав в списке имен NEWRUN элемент логического массива

$$NLOMT2(10) = T.$$

Логический оператор IF в начале каждой подпрограммы классов 1—3 позволяет вернуться в вызывающую подпрограмму без

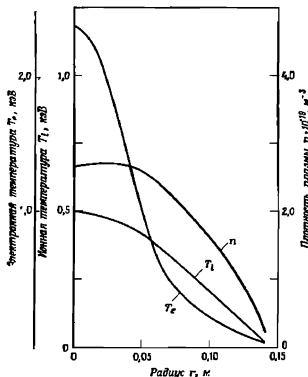


Фиг. 9. Радиальные профили плотности плазмы n , электронной температуры T_e и ионной температуры T_i в условиях разряда высокой плотности и небольшом токе ($R = 1,09$ м, $a = 0,14$ м, $\langle n \rangle = 1,65 \cdot 10^{19}$ м $^{-3}$, $I_p = 60$ кА, $B_0 = 3,7$ Т) при $t = 33$ мс, рассчитанные по коду ICARUS с использованием псевдоклассической модели диффузии и «нейтральной компоненты», описываемой $m = 2$ и $E_i = 40$ эВ.

выполнения каких бы то ни было вычислений. Любой физический эффект, который целиком содержится в одной подпрограмме, может быть исключен из расчета таким путем.

Хотя радиационное охлаждение ведет к тепловой неустойчивости разряда в токамаке [29], его влияние снижает температуру на оси разряда и поддерживает пик электронной температуры у границы (фиг. 8). Если для создания центрального пика электронной температуры нужен охлаждающий механизм, то необходимо, чтобы этот механизм был эффективным во внешней зоне разряда с низкой плотностью. Хотя в эксперименте наблюдается большой поток частиц наружу на днафрагму тока-

мака, рециркуляция частиц держится на таком уровне, что полное число частиц в торке остается приблизительно постоянным. Проникновение этих рециркулирующих частиц в плазму сопровождается их ионизацией, что дает источник в распределении частиц и сток в распределении электронной температуры.



Фиг. 10. Радиальные профили плотности плазмы n , электронной температуры T_e и ионной температуры T_i в условиях разряда высокой плотности в небольшом токамаке ($R=1,09$ м, $a=0,14$ м, $\langle n \rangle = 1,65 \cdot 10^{19}$ м $^{-3}$, $I_p=60$ кА, $B_0=3,7$ Т) при $t=4$ мс, рассчитанные по коду ICARUS с использованием модели диффузии Пирриша — Шлютера при $\lambda=200$ и «нейтральной компоненты», описываемой $m=2$ и $E_f=42$ эВ.

Подробные расчеты влияния нейтрального газа были выполнены Дюксом и др. [26], Жираром и др. [32] и Хоганом и Дори [37]. В этих расчетах учитывалась как ионизация нейтральной компоненты, так и рождение горячих нейтралов в результате перезарядки с ионами основной плазмы. Источники, входящие в уравнение для плотности частиц (5) и уравнение для электронной энергии (6), в результате ионизации нейтраль-

поп компоненты имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\delta n}{\delta t} &= n n_n \langle \sigma v \rangle_I, \\ \frac{\delta p_e}{\delta t} &= - p_e n_n \langle \sigma v \rangle_I \frac{E_I}{k T_e},\end{aligned}\quad (33)$$

где взаимодействие фоновой плазмы n с нейтральными частицами n_n определяется сечением $\langle \sigma v \rangle_I$ ионизации и средними потерями электронной энергии E_I на одно ионизирующее столкновение. Для демонстрации основной роли нейтрального газа, а именно понижения электронной температуры у границы разряда и повышения ее в центре, будет использована очень простая модель нейтралов, отвечающая целям настоящей главы. Источники в уравнениях (33) заменяются эвристической моделью, которая сохраняет полное число частиц в торе:

$$\begin{aligned}\frac{\delta n}{\delta t} &= \Gamma \Big|_{r=a} \frac{n+2}{a} \left(\frac{r}{a}\right)^m, \\ \frac{\delta p_e}{\delta t} &= - \Gamma \Big|_{r=a} \frac{n+2}{a} \left(\frac{r}{a}\right)^m E_I.\end{aligned}\quad (34)$$

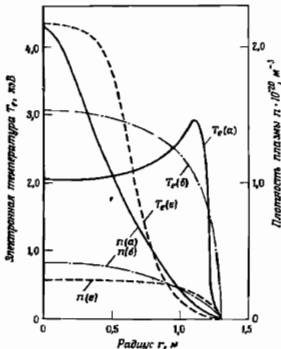
Глубину проникновения нейтралов можно регулировать подходящим выбором величины m . В установке ST нейтралы хорошо проникают в плазму [20], поэтому естественно выбрать $m = 2$, что соответствует параболическому по r распределению. Хотя и псевдоклассическая модель, и модифицированная модель диффузии Пфирша — Шлютера дают профили электронной температуры с точкой перегиба (фиг. 9, 10), экспериментальные значения плотности плазмы и температур аппроксимируются более точно с помощью модифицированной модели Пфирша — Шлютера (табл. 7), что является следствием большого притока частиц, который вызывает пикирование электронной температуры на оси.

В. ТОКАМАКИ СЛЕДУЮЩЕГО ПОКОЛЕНИЯ

Экстраполяция результатов как неоклассической, так и псевдоклассической теорий на более крупные токамаки следующих поколений позволяет сделать оптимистические прогнозы. В обоих случаях условия, благоприятные для термоядерной реакции, образуются без помощи дополнительного нагрева при условии, что средняя плотность плазмы не превосходит $5 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$ и торондальный ток больше 3 МА (фиг. 11). С другой стороны, модель Пфирша — Шлютера, дающая наилучшее согласие с экспериментом на установке ST, приводит в применении к крупным токамакам к менее благоприятным результатам. Не-

глубокое проникновение ($m = 6$) большого количества «нейтралов» в плазму сильно охлаждает ее вблизи $r = a$, в результате чего средняя температура невысока (табл. 8).

Неоклассическая модель обладает тем преимуществом, что эффект пинчевания Уэйра создает изолированный токовый



Фиг. 11. Радiallyные профили плотности плазмы n и электронной температуры T_e для большого токамака ($R = 2,82$ м, $a = 1,28$ м, $\langle n \rangle = 5 \cdot 10^{19}$ м $^{-3}$, $I_{\phi} = 3$ МА, $B_{\phi} = 3$ Т).

Результаты рассчитаны по коду ICARUS с использованием неоклассической модели (а) при $t = 5,4$ с, псевдоклассической модели (б) при $t = 4,7$ с, модели Пфирш—Шлютера (в) при $\lambda = 200$ и $t = 4,8$ с. В случаях б и в количество частиц поддерживается постоянным за счет «нейтральной компоненты», заданной параметрами $m = 6$ и $E_f = 40$ эВ.

шнур. Поступающая энергия почти полностью тратится на тормозное излучение, поэтому расчетное энергетическое время жизни сравнительно велико (табл. 8). Однако неоклассическое решение неустойчиво [25] относительно образования внеосевого максимума температуры, развивающегося в разной степени в зависимости от начальных условий. Хотя псевдоклассические времена жизни меньше, чем неоклассические, псевдоклассическое решение не зависит от начальных условий, причем в результате возрастания тороидального тока на магнитной оси достигаются более высокие значения центральной и средней температур.

Таблица 8
Общие характеристики разряда в большом токе (R = 2,9 м, a = 1,28 м, (n)¹) = 5 · 10¹⁹ м⁻³, I_φ = 8 МА, B_φ = 3Г)

	Значение на оск				Среднее значение 1)				Время жизни 2), с					
	10^{19} м^{-3}	T_e кэВ	T_i кэВ	E_Z В/м	a	$\langle n \rangle$ 10^{19} м^{-3}	$\langle T_e \rangle$ кэВ	$\langle T_i \rangle$ кэВ	g_{Ri}	g_{Re}	τ_p	τ'_E	τ_{Ee}	τ_{Ei}
Неоклассическая теория с начальными значениями T_e макс, равным (5,4 с)	22,1	1,9	1,9	0,014	1,28	5,1	2,0	2,0	0,19	0,19	-942	16	7349	500
4000 эВ	21,5	2,1	2,1	0,013	1,17	5,2	2,2	2,2	0,21	0,21	-325	11	-5479	447
(5,4 с)														
Псевдоклассическая теория	8,1	3,1	3,1	0,012	0,73	5,0	2,6	2,6	0,24	0,24	147	6	399	31
(4,6 с)														
Перенос Пфирша—Шлютера, усредненный в 200 раз	6,0	3,6	3,6	0,011	0,65	6,0	1,3	1,3	0,12	0,12	0,2	1	5	7
(4,0 с)														

¹) Средние значения определены так же, как в табл. 7.

²) Время жизни определены так же, как в табл. 7.

В рамках простой модели для нейтралов псевдоклассическая модель дает наиболее оптимистические результаты. Тем не менее она показывает, что для обеспечения горения термоядерной реакции в будущих токамаках потребуются дополнительные средства нагрева плазмы. Инжекция пучка нейтральных частиц в токамак [1, 17, 18, 43, 46, 59, 68] с целью прерывания температуры, достижимой при помощи одного омического нагрева, — это пример экспериментальной методики, для которой прогресс теоретического описания был очень быстрым [9, 14—16, 59, 70].

Учет роли пучка быстрых нейтральных частиц в диффузионном коде можно осуществить путем ряда отдельных операций, что иллюстрирует гибкость системы OLYMPUS.

Если энергия быстрых нейтралов достаточно высока:

$$E_f > 2 \cdot 10^4 A_f \text{ [эВ]},$$

где A_f — атомная масса быстрых нейтралов, то количество быстрых нейтралов $n_f(r, t) dr dt$, захватываемых в интервале $(r, r + dr)$ по радиусу и в интервале $(t, t + dt)$ во времени, описывается выражением, данным Ривьерой [55]:

$$n_f(r, t) = \frac{I_f}{q_f L} n_e(r) \left\{ \exp \left(\int_0^r \frac{n_e(x)}{L(x)} dx \right) + \exp \left(- \int_0^r \frac{n_e(x)}{L(x)} dx \right) \right\} \exp \left(- \int_0^a \frac{n_e(x)}{L(x)} dx \right), \quad (35)$$

где I_f и q_f — соответственно эквивалентные ток и заряд пучка нейтральных частиц, а n_e — электронная плотность.

Функция L , определенная соотношением

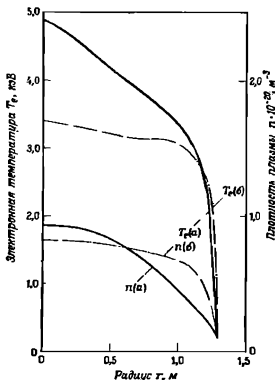
$$L = L_f \frac{\sin \delta}{Z_{\text{эфф}}(r)},$$

описывает проникновение пучка и зависит от эффективного заряда $Z_{\text{эфф}}$ и угла δ между направлением пучка и магнитным полем. «Глубина» проникновения L_f для достаточно высоких энергий аппроксимируется выражением [70]

$$L_f = 5,5 \cdot 10^{14} \frac{E_f}{A_f} [\text{м}^{-2}].$$

Расчет $n_f(r, t)$ образует вполне определенный программный модуль, не затрагивающий последующих вычислений. Поэтому этот расчет выполняется одной подпрограммой (2.12) INJECT, которая в начальной стадии процесса вызывается подпрограммой (0.4) EXPERT и вычисляет профиль электронов $S(r, t)$.

рождающихся в результате ионизации пучка нейтралов. Этот профиль учитывает распределение пучка по торoidalному и полоидальному азимутам. Упрощенная модель описания пучка



Фиг. 12. Радиальные профили плазмы n и электронной температуры T_e для большого токамака ($R=2,82$ м, $a=1,28$ м, $\langle n \rangle = 5 \cdot 10^{19}$ м $^{-3}$, $I_0=3$ МА, $B_0=3$ Т).

Результаты рассчитаны по коду ICARUS с использованием модели псевдоклассической диффузии, в которой полное число частиц поддерживается «нейтральной компонентой», заданной параметрами $m=5$ и $E_f=40$ эВ, а его увеличение связано с инжекцией быстрых нейтралов с высокой энергией (а) $E_f=80$ кэВ, $I_f=10$ А, при $t=5,7$ с и с низкой энергией (б) $E_f=20$ кэВ, $I_f=40$ А, при $t=6,4$ с.

нейтральных частиц конечной толщины была включена в код ICARUS. Эта модель задает $S(r, t)$ формулой

$$S(r, t) = n_f(r, t) \frac{1}{4\pi r R}, \quad (36)$$

где R — большой радиус тора. Использование возможностей подпрограммы EXPERT позволяет развить модель расчета профиля рождающихся частиц, причем сделать это могут физики,

которые не имеют никакого представления об остальной части кода.

Распределение введенной энергии между электронами и ионами можно найти аналитически [69, 70]. К настоящему времени в код ICARUS включена модель Свитамена [70], причем доли введенной энергии, передаваемые электронам и ионам, выражаются соотношениями

$$f_i = [1 + 0,34 X^{1,2}]^{-1}, \quad f_e = 1 - f_i, \quad (37)$$

$$X = \frac{A_i^{2/3}}{14,6 A_i} \frac{E_i}{T_e (\text{эВ})},$$

где A_i и A_i — соответственно массы ионов плазмы и быстрых нейтронов

Влияние инжектируемого пучка горячих нейтронов на температуру зависит от глубины проникновения пучка (фиг. 12). При высокой энергии инжекции ($E_i = 80$ кэВ, $I_i = 10$ А) пучок проникает глубоко, и центральная температура сильно увеличивается. Это может привести к перегревной неустойчивости плазмы, если $q(0)$ станет меньше единицы. С другой стороны, при низкой энергии инжекции ($E_i = 20$ кэВ, $I_i = 40$ А) энергия пучка выделяется во внешних областях с низкой плотностью, в результате чего возрастают температура и концентрация плазмы, а с ними и потоки энергии и частиц из разряда.

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей главе на примере кода ICARUS описана численная модель физического поведения разряда плазмы в токамаке. Код ICARUS задуман как гибкий исследовательский инструмент, позволяющий проверить различные теоретические предположения, которые можно описать системой одномомерных уравнений диффузии. Используя программные условия и библиотечное обеспечение, содержащиеся в системе OLYMPUS, можно включать в базовый вариант кода набор потоков и источников в дополнение к потокам и источникам неоклассической модели диффузии. Отдельные особенности кода допускают не только независимую проверку, но и могут быть также легко удалены, что позволяет свободно использовать различные физические предположения, численные методики и возможности ввода — вывода.

Проведено сравнение результатов эксперимента с предсказаниями неоклассической и псевдоклассической моделей в аксиально-симметричной тороидальной установке, а также с предсказаниями модели Пфирша — Шлютера, модифицированной умножением на числовой множитель, выбранный так, чтобы со-

ответствующий коэффициент диффузии был сравним с псевдоклассическим коэффициентом на радиусе $r \approx 0,5a$. В рамках эвристической модели для рециркуляции нейтралов, которая обеспечивает постоянство полного количества частиц и дает сток энергии электронов, модифицированная диффузия Пфирша — Шлютера дает наилучшее описание небольшого токамака. С другой стороны, псевдоклассическая модель позволяет сделать наиболее оптимистический прогноз поведения будущего токамака следующего поколения.

Экстраполяция от одного режима к другому имеет первостепенное значение как для получения уверенности в поведении численного кода, так и для ясного обоснования теоретических предположений. Поэтому система OLYMPUS накладывает жесткие условия на структуру и описания, что делает понятными физические механизмы, численные и программные методы и позволяет использовать код другим исследователям на других вычислительных машинах.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы рады возможности выразить благодарность Дж. А. Рейнольдсу и Т. Е. Стрингеру за полезные дискуссии и Д. Ф. Дюксу за предоставление варианта своего кода для расчетов токамака в Кальме.

Литература

1. Aldcroft D. et al., Nucl. Fusion, 13, 393 (1973).
2. Арцимович Л. А., Письма ЖЭТФ, 13, 70 (1971).
3. Арцимович Л. А. и др., Письма ЖЭТФ, 10, 82 (1969).
4. Bateman G. et al., Nucl. Fusion, 14, 669 (1974).
5. Berry L. A. et al., Phys. Rev. Lett., 32, 362 (1974).
6. Bol K., et al., Phys. Rev. Lett., 29, 1495 (1972).
7. Бразинский С. И., В сб.: Вопросы теории плазмы, Вып. 1, М., Госатомиздат, стр. 183, 1963.
8. Burke V. M., Comput. Phys. Commun., 1, 473 (1970).
9. Callen J. D. et al., Proc. Int. Conf. Plasma Phys. Control. Nucl. Fusion Res., 5th, 1975, Vol. 1, p. 645.
10. Chapman S., Cowling T. G., The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, Cambridge Univ. Press, London, New York, 1953. (Имеется перевод: С. Чепмена, Т. Каулинг Математическая теория неоднородных газов. — М.: ИЛ, 1960.)
11. Christiansen J. P., Roberts K. V., Comput. Phys. Commun., 7, 245 (1974).
12. Christiansen J. P. et al., Comput. Phys. Commun., 7, 271 (1974).
13. Christiansen J. P. et al., Comput. Phys. Commun., 10, 251 (1975).
14. Connor J. W., Cordey J. G., Nucl. Fusion, 14, 185 (1974).
15. Cordey J. G., Proc. Int. Conf. Plasma Phys. Control. Nucl. Fusion Res., 5th, 1975, Vol. 1, p. 623.
16. Cordey J. G., Core W. G. F., Phys. Fluids, 17, 1626 (1974).
17. Cordey J. G. et al., Nucl. Fusion, 14, 441 (1974).
18. Del-Cas R. et al., Proc. Int. Symp. Toroidal Plasma Confinement, Garching, 3rd, 1973, E9.
19. Dimock D. et al., Proc. Int. Conf. Plasma Phys. Control. Nucl. Fusion Res., 4th, 1971, Vol. 1, p. 451.

20. Dimock D. et al., Nucl. Fusion, **13**, 271 (1973).
21. Днестровский Ю. Н. и др., Proc. Eur. Conf. Control. Fusion Plasma Phys., 7th, 1970, Vol. 1, p. 17.
22. Dory R. A., Widner M. M., Bull. Amer. Phys. Soc. [2] **11**, 1418 (1970).
23. Drummond W. E. et al., Proc. Int. Symp. Toroidal Plasma Confinement, Garching, 3rd, 1973, B6.
24. Düchs D. F., Bull. Amer. Phys. Soc. [2] **11**, 1488 (1970).
25. Düchs D. F. et al., Proc. Int. Conf. Plasma Phys. Control Nucl. Fusion Res., 4th, 1971, Vol. 1, p. 369.
26. Düchs D. F. et al., Proc. Eur. Conf. Control. Fusion Plasma Phys., 5th, 1972, Vol. 1, p. 14.
27. Feneberg W., Lackner K., Nucl. Fusion, **13**, 549 (1973).
28. Friedberg J. P., Phys. Fluids, **13**, 1812 (1970).
29. Furth H. P. et al., Phys. Fluids, **13**, 3020 (1970).
30. Галеев А. А., Царев П. З., ЖЭТФ, **26**, 233 (1968).
31. Gibson A. et al., Proc. Int. Symp. Toroidal Plasma Confinement, Garching, 3rd, 1973, B16-1.
32. Girard J. P. et al., Proc. Eur. Conf. Control. Fusion Plasma Phys., 5th, 1972, Vol. 1, p. 105.
33. Goedbloed J. P., Hagebeek H. J. L., Phys. Fluids, **15**, 1090 (1972).
34. Hazell R. D., et al., Phys. Fluids, **16**, 1645 (1973).
35. Hinnoo E. et al., Proc. Int. Symp. Toroidal Plasma Confinement, Garching, 3rd, 1973, B13.
36. Hinton F. L. et al., Phys. Rev. Lett., **29**, 698 (1972).
37. Hogan J. T., Dory R. A., Proc. Eur. Conf. Control. Fusion Plasma Phys., 5th, 1972, Vol. 1, p. 40.
38. Hogan J. T. et al., Phys. Rev. Lett., **A36**, 217 (1971).
39. Hughes M. H. et al., Comput. Phys. Commun., **9**, 51 (1975).
40. Itoh S. et al., Proc. Int. Symp. Toroidal Plasma Confinement, Garching, 3rd, 1973, B4.
41. Кадомцев Б. Б., Поське О. Л., Nucl. Fusion, **11**, 67 (1971).
42. Keeping P. M. et al., Proc. Eur. Conf. Control. Fusion Plasma Phys. 5th, 1972, Vol. 1, p. 38.
43. Kelley G. G. et al., Nucl. Fusion, **12**, 169 (1972).
44. Kelley G. G. et al., Proc. Int. Symp. Toroidal Plasma Confinement, Garching, 3rd, 1973, B3-1.
45. Knorr G., Phys. Fluids, **8**, 1334 (1965).
46. McNally J. R., Neutral Injection Heating of Tokamaks, Report ORNL TM 4363, Oak Ridge Nat. Lab., Oak Ridge, Tennessee, 1973.
47. Mercier C. Soubbaramayer, Proc. Eur. Conf. Control. Fusion Plasma Phys., 4th, 1970, Vol. 1, p. 16.
48. National Computing Centre Limited, Standard Fortran Programming Manual, Nat. Comput. Cent. Ltd., Manchester, England, 1970.
49. Newcomb W. A., Ann. Phys. (New York), **10**, 232 (1960).
50. Pfirsch D., Schlüter A., The Effect of Electrical Conductivity on the Equilibrium of Low Pressure Plasmas in Stellarators, Report MPI/PA/7/62, Max Planck Inst. Phys. Astrophys., Munich, 1962.
51. Potter D. F., Computational Physics, Wiley, New York, 1973 (Имеется перевод: Д. Поттер, Вычислительные методы в физике. — М.: Мир, 1975.)
52. Potter D. F., Tuttle G. H., Proc. Eur. Conf. Control. Fusion Plasma Phys., 6th, 1973, Vol. 1, p. 217.
53. Rebut P. H. et al., Proc. Eur. Conf. Control. Fusion Plasma Phys., 6th, 1973, Vol. 2, p. 20.
54. Richtmyer R. D., Morton K. W., Difference Methods for Initial-Value Problems, Wiley, New York, 1967 (Имеется перевод Р. Д. Рихтмайер, К. В. Мортон. Разностные методы решения краевых задач. — М.: Мир, 1972.)

55. Riviere A. C., Nucl. Fusion, **11**, 363 (1971).
56. Roberts K. V., Comput. Phys. Commun., **1**, 1 (1969).
57. Roberts K. V., Comput. Phys. Commun., **2**, 385 (1971).
58. Roberts K. V., Comput. Phys. Commun., **7**, 237 (1974).
59. Rome J. A. et al., Nucl. Fusion, **14**, 141 (1974).
60. Rose D. J., Clark M., Plasmas and Controlled Fusion, Wiley, New York, 1961. (Имеется перевод: Д. Роу, М. Кларк. Физика плазмы и управляемые термоядерные реакции — М.: Госатомиздат, 1963.)
61. Rosenbluth M. N., Nucl. Fusion, **10**, 340 (1970).
62. Rosenbluth M. N., Kaufman A. N., Phys. Rev., **109**, 1 (1958).
63. Rosenbluth M. N. et al., Phys. Fluids, **15**, 116 (1972).
64. Rutherford P. H., Phys. Fluids, **13**, 482 (1970).
65. Шафранов В. Д., ЖТФ, **15**, 175 (1970).
66. Sharp W., Taylor J. C., Proc. Eur. Conf. Control Fusion Plasma Phys., 6th, 1973, Vol. 1, p. 45.
67. Spitzer L., Physics of Fully Ionized Gases, Wiley (Interscience), New York, 1962 (Имеется перевод: Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. — М.: Мир, 1965.)
68. Stewart L. D. et al., Proc. Int. Symp. Toroidal Plasma Confinement Garching, 3rd, 1973, E8.
69. Stix T. H., Plasma Phys., **14**, 367 (1972).
70. Sweetman D. R., Nucl. Fusion, **13**, 157 (1973).
71. Sykes A., Wesson J. A., Nucl. Fusion, **14**, 645 (1974).
72. Taylor J. B., Phys. Fluids, **4**, 1142 (1961).
73. von Hagenow K., Lockner K., Proc. Int. Symp. Toroidal Plasma Confinement, Garching, 3rd, 1973, F7.
74. Ware A. A., Phys. Rev. Lett., **25**, 916 (1970).
75. Watkins M. L. et al., Comput. Phys. Commun. (в печати) (1976).
76. Winsor N. K. et al., J. Comput. Phys., **6**, 340 (1970).
77. Woolen J. et al., Preliminary Results of the 3-D Nonlinear Ideal MHD Code, Report ORNL TM4784, Oak Ridge Nat. Lab., Oak Ridge, Tennessee, 1974.
78. Yashikawa S., Phys. Rev. Lett., **25**, 353 (1970).

Литература

1. *Armentrout C. J.* et al., Proc. Conf. Plasma Phys. Controlled Nucl. Fusion Res., 5th, 1974, Paper B 4-2.
2. *Bohm D.*, The Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Fields, eds. Guthrie A. and Wakerling R. K., McGraw-Hill, New York, 1949, Chapter 2, Sect. 5.
3. *Buneman O.*, J. Comput. Phys., **1**, 517 (1967).
4. *Canosa J., Okuda H.*, Phys. Fluids, **18**, 335 (1975).
5. *Canosa J.* et al., Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, IAEA, Vienna, 1975, Vol. II, p. 177.
6. *Chen L., Okuda H.*, J. Comput. Phys., **19**, 339 (1975).
7. *Chu C., Dawson J. M., Okuda H.*, Phys. Fluids, **18**, 1762 (1975).
8. *Dawson J. M., Okuda H., Corlute R. M.*, Phys. Rev. Lett., **27**, 491 (1971).
9. *Dupree T. H.*, Phys. Fluids, **17**, 100 (1974).
10. *Grieger G.* et al., Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, IAEA, Vienna, 1971, Vol. III, p. 37.
11. *Harries W. L.*, Phys. Fluids, **13**, 140 (1970).
12. *Hazeltine R. D., Hinton F. L.*, Phys. Fluids, **16**, 1883 (1973).
13. *Hinton F. L., Rosenbluth M. N.*, Phys. Fluids, **16**, 836 (1973).
14. *Hockney R. W.*, Stanford Univ. Tech. Rep. No. 63, 1966.
15. *Hockney R. W.*, Phys. Fluids, **9**, 1826 (1966).
16. *Kadomtsev B. B., Pogutse O. P.*, Nucl. Fusion, **11**, 67 (1971).
17. *Kamimura T., Dawson J. M.*, UCLA Physics Department Report PPG-220, 1975.
18. *Kruer W. L., Dawson J. M., Rosen B.*, J. Comput. Phys., **13**, 114 (1973).
19. *Langdon A. B.*, J. Comput. Phys., **6**, 247 (1970).
20. *Ohkawa T., Gilleland J. R., Tamano T.*, Phys. Rev. Lett., **20**, 1107 (1972).
21. *Okuda H., Dawson J. M.*, Phys. Rev. Lett., **28**, 1625 (1972).
22. *Okuda H., Dawson J. M.*, Phys. Fluids, **16**, 408 (1973).
23. *Okuda H., Dawson J. M.*, Phys. Fluids, **16**, 1456 (1973).
24. *Okuda H., Dawson J. M.*, Phys. Fluids, **16**, 2336 (1973).
25. *Okuda H., Dawson J. M., Hooke W. M.*, Phys. Rev. Lett., **29**, 1658 (1972).
26. *Okuda H., Chu C., Dawson J. M.*, Phys. Fluids, **18**, 243 (1974).
27. *Okuda H., Chu C., Dawson J. M.*, Phys. Fluids, **18**, 243 (1975).
28. *Rosen B., Okuda H., Di Massa L. G.*, Princeton Plasma Physics Laboratory Report MATT-89P, 1972.
29. *Rosenbluth M. N., Liu C. S.*, 5th Eur. Conf. Controlled Fusion Plasma Phys., Grenoble, 1972, Vol. I, p. 12.
30. *Рухадзе А. А., Силин Б. П.*, УФН, **96**, 87 (1968).
31. *Шафранов В. Д.*, Электромагнитные волны в плазме: Сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 3. Под ред. Леонтовича М. А. — М.: Госатомиздат, 1963.
32. *Shanny R., Dawson J. M., Greene J. M.*, Phys. Fluids, **18**, 1281 (1967).
33. *Tamano T., Prater R., Ohkawa T.*, Phys. Rev. Lett., **30**, 431 (1973).
34. *Tsang K. T., Callen J. D.*, Neoclassical Diffusion from Banana to Pfirsch-Schuler Regimes, ORNL-TM 4848, 1975.
35. *Tsang K. T., Matsuda Y., Okuda H.*, Phys. Fluids, **18**, 1282 (1975).
36. *Gurnee M. N.* et al., Phys. Rev. A, **5**, 158 (1972).

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ И РЕЛЯТИВИСТСКИЕ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ПЛАЗМЫ***А. Лэнгдон, Б. Лазински¹⁾***I. ВВЕДЕНИЕ**

Во время написания 9-го тома этой серии, посвященного приложениям вычислительных методов к физике плазмы, крупномасштабное численное моделирование проводилось с использованием только кулоновских взаимодействий, интенсивное же применение программ, включающих полное электромагнитное поле, только начиналось. До настоящего времени эволюция этих программ протекала до такой степени одинаково, что можно описать вычислительные и программистские принципы, общие для нескольких удачных программ решения задач из различных областей. Большая часть усовершенствований до сих пор производилась на основании эвристических и прагматических соображений. Лишь недавно математическое исследование алгоритмов продвинулось до такой стадии, что появилась надежда получить практические рекомендации для разработки и улучшения существующих программ; подобный анализ не входит в рамки этой статьи, но в соответствующих местах на него есть ссылки.

В бесстолкновительной плазме каждая частица взаимодействует сравнительно одинаково с большим числом частиц. В то же время взаимодействие с ближайшими соседями, а также квантовые эффекты во многих коллективных процессах играют относительно небольшую роль. Эти свойства широко используются в удачных алгоритмах численного моделирования. Мы обсудим этот вопрос в разд. II, поскольку он имеет отношение к развитию современных программ.

В разд. III обсуждается один тип алгоритма электромагнитного моделирования плазмы и его реализация в нашей программе ZONAR. Эта программа использовалась для моделирования взаимодействия интенсивного лазерного излучения с плазмой и в некоторых исследованиях взаимодействия электронных пучков с плазмой. Ряд приложений иллюстрирует применения и ограничения таких программ.

¹⁾ *A. Bruce Langdon, Barbara F. Lasinski, Lawrence Livermore Laboratory, University of California, Livermore, California.*

В разд. IV описывается алгоритм, разработанный на другой основе. Помимо достоинств, связанных с его особыми свойствами устойчивости, этот алгоритм может быть интересен тем, что является первым полностью электромагнитным алгоритмом, разработанным за десять лет до того, как современное применение этих программ стало предметом исследования.

В некоторых задачах запаздывание поля играет важную роль только в переходном режиме. В разд. V обсуждается программа, сочетающая свойства полностью электромагнитной и дарвиновской моделей. Эта программа замечательна также тем, что оказала сильное влияние на выбор направления развития экспериментальной программы УТС.

II. МОДЕЛИРОВАНИЕ БЕССТОЛКОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

Существуют два основных класса алгоритмов численного моделирования плазмы. В «корпускулярных» моделях плазма представляется большим числом укрупненных частиц, движение которых происходит по законам классической механики в самосогласованных электромагнитных полях. В основе «власовских» алгоритмов лежит кинетическое уравнение для функции распределения $f(x, v, t)$. Затем либо это уравнение обычным способом интегрируется по времени, либо можно разложить функцию f в ряд (см., например, «Вычислительные методы в физике плазмы»). В то время как универсальность алгоритмов укрупненных частиц подтверждена на многомерных задачах, пригодность vlasовских алгоритмов для двумерного случая еще не доказана, хотя в одномерном случае и достигнуты некоторые успехи. Несмотря на то что эта ситуация в будущем может измениться, мы ограничим наше обсуждение основным инструментом численного моделирования — алгоритмами укрупненных частиц.

Исходные идеи, лежащие в основе современных программ, можно продемонстрировать на примере простой модели плазмы, включающей лишь кулоновские столкновения. В первых программах ускорение частицы определялось просто суммированием взаимодействий со всеми остальными частицами. В одномерном случае при условии, что координаты частиц упорядочены, эта сумма становится тривиальной. При интегрировании по времени особенно внимательно необходимо следить за пересечениями частиц¹⁾. В двумерном случае суммы сил для N частиц включают $N(N-1)$ членов, описывающих взаимодействие, ко-

¹⁾ Подробности такого подхода и его приложения к физике плазмы можно найти в статье Доусона [16] (там же приведены соответствующие ссылки). Полная библиография, включающая много работ по численному моделированию электронных устройств (где, собственно, и возникла эта область исследований), составлена ван Дузером и Бёрдсом [48].

торые в зависимости от граничных условий могут иметь довольно сложный вид. К тому же для корректного описания близких столкновений требуются малые временные шаги или какая-нибудь другая специальная методика их учета, при этом влияние рассеяния на большие углы сильно завышается. Работ в этом направлении, посвященных плазме, еще очень мало, хотя подобные модели и используются для изучения эволюции звездных скоплений.

В 1963 г. Бунеман и его сотрудники в Стэнфорде стали использовать совершенно новый подход, который позволил во много раз быстрее вычислять ускорения частиц и применять простую и быструю процедуру интегрирования по времени их уравнений движения. К настоящему времени все крупномасштабные расчеты с использованием укрупненных частиц, даже в одномерном случае, проводятся на основе усовершенствования их метода. В основе этого приближения лежит введение фиксированной пространственной сетки, на которой определяются плотности зарядов, потенциалы и поля. Для нахождения плотности зарядов заряд каждой частицы связывался с ближайшим узлом сетки. Решение разностного аналога уравнения Пуассона осуществлялось с использованием нового быстрого алгоритма, затем с помощью взятия разностных производных от найденного потенциала определялось электрическое поле:

$$\begin{aligned} E_{x, i, l} &= \frac{(\phi_{i+1, l} - 2\phi_{i, l} + \phi_{i-1, l})}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{i, l+1} - 2\phi_{i, l} + \phi_{i, l-1}}{\Delta y^2}, \\ E_{x, i, l} &= - \frac{\phi_{i+1, l} - \phi_{i-1, l}}{2\Delta x}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\phi_{i, l} = \phi(i\Delta x, j\Delta y)$. Ускорение частиц определялось значением поля в ближайшем узле сетки. Скорости частиц, а затем и их координаты пересчитывались с использованием простой схемы с перешагиванием:

$$v_x^{n+1/2} = v_x^{n-1/2} + a_x^n \Delta t, \quad x^{n+1} = x^n + v_x^{n+1/2} \Delta t, \quad (2)$$

где верхний индекс n обозначает момент времени $n\Delta t$ [8, 11, 24, 49]. На первый взгляд кажется удивительным, что подобная грубая схема может давать разумные результаты. Она вообще может приводить к успеху только благодаря свойствам бесстолкновительной плазмы. Такое вычисление сил устраняет расходимость нулоновского взаимодействия на расстояниях, меньших, чем размер сетки, уменьшая нежелательное рассеяние на большие углы, которое вследствие малого числа частиц, используемого при моделировании, играет преувеличенную роль [25].

Вдобавок к скорости этот алгоритм имеет второй порядок точности по пространству и времени (относительные погрешно-

сти порядка Δx^2 и Δy^2) и точно сохраняет импульс. Временная обратимость уравнений (2) гарантирует отсутствие какого-либо численного затухания или нарастания плазменных колебаний.

Очевидное усовершенствование, значительно улучшившее характеристики алгоритма, было проведено Бэрдсолом и его сотрудниками [1, 2]. В их методе для нахождения сил, действующих на частицу, использовалась билинейная интерполяция, и те же веса, что и при интерполяции, использовались для определения плотности заряда. Подобную процедуру можно рассматривать как «размазывание заряда» по четырем ближайшим узлам. Билинейная интерполяция применялась также в программах моделирования плазмы, разработанных в Лос-Аламосе [41] по аналогии с гидродинамическими алгоритмами «частиц в ячейках» (PIC) [22, 23]. Наглядные названия «PIC» для этих алгоритмов и «взвешивание по области» для схем размазывания заряда в настоящее время используются повсеместно¹⁾.

Глубокое понимание значения модифицированного закона силового взаимодействия было достигнуто Хокки [25], Бэрдсолом и Фассом [1] и другими авторами, которые рассматривали его как кулоновское взаимодействие между частицами с протонным разреженным зарядом («облаками»). Эта точка зрения привела к теоретическому описанию воздействия на плазменные волны, флуктуаций и столкновений (см., например, [33]), которое в результате включало точный учет эффектов конечности ячеек и временного шага [29, 30].

III. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ АЛГОРИТМЫ, НЕПОСРЕДСТВЕННО ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ E И B

Основной упор в этой главе делается на алгоритмы электромагнитного моделирования плазмы с приложением к исследованиям взаимодействия интенсивного лазерного излучения с горячей плазмой и к некоторым исследованиям, связанным с электронными пучками в плазме. В качестве предмета обсуждения выбраны те алгоритмы, которые, на наш взгляд, являются наилучшими для этих приложений; по той же причине эти алгоритмы выбраны и для нашей собственной программы ZOHAR²⁾. Основные идеи необязательно связаны только с программой ZOHAR, некоторые из них были придуманы независимо в других

¹⁾ Следующим усовершенствованием было бы использование параболических сплайнов (см., например, [32]).

²⁾ ZOHAR на древнееврейском языке означает «великолепие» или «сияние». Это также название главной каббалистической книги [17]. Оказалось, что приложениям программы присущи признаки великопия и мистицизма, так же как и определенным особенностям всей методологии численного моделирования.

местах, и мы открыто заимствовали их из работ других авторов. Мы не пытались добиться оригинальности как таковой, а лишь пытались хорошо осуществить критический отбор лучших алгоритмов. (Формальный подход к проблеме синтеза алгоритмов разработан Люисом [37].)

В некоторых электромагнитных программах находятся A и ϕ , в других же, таких, как ZONAR, непосредственно определяются E и B . При выборе последнего способа мы находились под влиянием «бритвы» Оккама¹⁾ и требования меньшей загрузки памяти машины массивами полей. Связь между двумя методами обсуждалась Лэнгдоном [31]. Если для описания движения частиц не используется канонический импульс, то существует мало оснований для предпочтения какого-либо метода с точки зрения вычислительных и физических свойств алгоритма [19].

Программа ZONAR может работать в четырех видах, различающихся граничными условиями и количеством векторных компонент скорости. Имеются две пространственные переменные и две или три компоненты скорости (наличие только двух компонент приводит к более быстрым вычислениям и требует меньшего объема памяти машины, однако в некоторых физических задачах требуются все три компоненты). Граничные условия по y являются периодическими, а по x — либо периодическими, либо соответствуют «свободной границе». Первый тип полезен при моделировании явлений, происходящих на расстояниях, достаточно малых по сравнению с характерным размером неоднородности плазмы. Второй вариант используется для моделирования взаимодействия падающего излучения с сегментом неоднородной плазменной короны.

А. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОЛЯ ВО ВРЕМЕНИ

Поля рассчитываются с использованием их производных по времени, определяемых из законов Фарадея и Ампера — Максвелла:

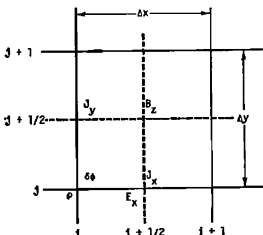
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{E}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{J}. \quad (4)$$

Эти уравнения записаны в рационализированной СГС (или Хевисайда — Лоренца) системе единиц, в которой исключены почти все проявления множителей 4 π в процессе постановки задачи и физической интерпретации результатов [27, 46].

¹⁾ «Бритва» Оккама — принцип средневекового схоласта Оккама [1270—1349], согласно которому количество сущностей не должно увеличиваться за пределами необходимости. — *Прим. перев.*

Определяя поля в гочках, показанных на фиг. 1, можно очень просто написать разностные аналоги уравнений Максвелла, имеющих второй порядок аппроксимации по пространству и времени [4, 9, 42, 48]. Все производные переходят в централь-



Фиг. 1. Пространственное расположение двумерных полей и их источников на сетках, которые используются для интегрирования разностных уравнений Максвелла.

В тексте мы ссылаемся на этот рисунок как на «полевую сетку». «Сетка для частиц» такая же, как и для плотности заряда ρ . Она используется для пересчета во времени координат частиц с помощью разностных уравнений Ланжюна — Лоренца. В модели размерности $2 \frac{1}{2}$ B_x и B_y расположены вместе с E_x и E_y , а E_z и J_z — вместе с B_z . Индексы i и j изменяются от 0 до N_x и от 0 до N_y соответственно, покрывая прямоугольник $0 \leq x \leq L_x$, $0 \leq y \leq L_y$.

ные разностные производные. Запишем в качестве примера производную по времени в виде

$$(\partial_t E_x)_{i+\frac{1}{2}, j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{E_{x, i+\frac{1}{2}, j}^{n+1} - E_{x, i+\frac{1}{2}, j}^n}{\Delta t}, \quad (5)$$

где $E_{x, i+\frac{1}{2}, j}^n = E_x([i + \frac{1}{2}] \Delta x, j \Delta y, n \Delta t)$ и т. д. Аналогично определим ∂_x и ∂_y . Градиент ∇ переходит в ∂_x . Такое обозначение будет полезно в дальнейшем вследствие того, что эти операторы, применяемые к полям, определенным на нашей пространственно-временной сетке, перестановочны. Следовательно, с разностными уравнениями можно обращаться точно таким же образом, как и с соответствующими дифференциальными уравнениями. Разностные уравнения Максвелла имеют вид

$$(\partial_t B_z)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^n = -c(\partial_x E_y - \partial_y E_x)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^n, \quad (6)$$

$$(\partial_t E_x)_{i+\frac{1}{2}, j}^{n+\frac{1}{2}} = (c \partial_y B_z - J_x)_{i+\frac{1}{2}, j}^{n+\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

$$(\partial_t E_y)_{i, j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = (-c \partial_x B_z - J_y)_{i, j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

Если $B_z^{n-1/2}$ и E^n известны, то уравнение (6) определяет $B_z^{n+1/2}$. Подобным образом пересчитывается электрическое поле. Например, уравнение (7) записывается в виде

$$\frac{E_{x, i+1/2}^{n+1} - E_{x, i+1/2}^n}{\Delta t} = c \frac{B_{z, i+1/2}^{n+1/2} - B_{z, i+1/2}^{n-1/2}}{\Delta y} - J_{x, i+1/2}^n. \quad (7a)$$

В программе оно используется поочередно, вначале для пересчета E , а затем B . На каждом шаге новые значения поля переписываются в память на место старых. Нет необходимости сохранять значения поля больше, чем для одного момента времени.

Можно получить много информации о точности и устойчивости схемы, если рассмотреть плазменные электромагнитные волны в вакууме и их воспроизведение этой схемой. Предполагая, что поля имеют вид $(E, B) = (E_0, B_0) \exp(ik \cdot x - i\omega t)$, и подставляя их в разностные уравнения, находим

$$\Omega B = c\kappa \times E,$$

$$\Omega E = -c\kappa \times B,$$

где $\Omega = (\sin \omega \Delta t / 2) / (\Delta t / 2)$, $\kappa_x = (\sin k_x \Delta x / 2) / (\Delta x / 2)$. При предельном переходе от дискретного описания к непрерывному Ω и κ стремятся к ω и k . Исключение E и B приводит к соотношению

$$\Omega^2 = c^2 \kappa^2. \quad (9)$$

Легко можно проверить, что между E и B нет никаких расхождений по фазе или амплитуде и что отсутствует какое-либо затухание или нарастание колебаний (ω действительна), если выполняется условие Куранта

$$\Delta t^{-2} > c^2 (\Delta x^{-2} + \Delta y^{-2}). \quad (10)$$

Погрешности в величине ω и относительных направлениях полей и k имеют второй порядок по Δx , Δy и Δt . Все эти свойства являются прямым следствием центрирования разностных производных по пространству и времени. Достижение подобной точности с использованием нецентрированных разностных схем потребовало бы существенно более сложного алгоритма.

Когда условие (10) нарушается, $\sin^2 \omega \Delta t / 2$ превышает единицу для $k_x \Delta x$, $k_y \Delta y$, близких к π . Корни ω являются теперь комплексными, причем один корень соответствует нарастанию, которое может быть очень быстрым.

В двумерном случае компоненты полей E_x , B_x и B_y не связаны с компонентами B_z , E_x и E_y посредством уравнений Макс-

велла. Вследствие этого узлы разностных сеток для двух совокупностей полей могут иметь любое желаемое относительное расположение. Мы выбрали одинаковые узлы для E_x и J_x вместе с B_x , B_x вместе с E_x и B_y вместе с E_y . Эта процедура делает аналогичными индексирование программы и граничные условия.

Имеются еще два уравнения Максвелла. Сейчас мы покажем, что разностные уравнения обладают свойством дифференциальных уравнений, т. е. если $\operatorname{div} \mathbf{E}$ и $\operatorname{div} \mathbf{B}$ корректно определены в начальный момент, то они остаются неизменными во все остальные моменты, т. е.

$$\partial_t (\partial_x \cdot \mathbf{B}) = \partial_x \cdot (\partial_t \mathbf{B}) = -c \partial_x \cdot \partial_x \times \mathbf{E} = 0.$$

Аналогично

$$\partial_t (\partial_x \cdot \mathbf{E} - \rho) = \partial_x \cdot \mathbf{J} - \partial_t \rho.$$

Следовательно, если $\mathbf{J}$ и ρ удовлетворяют уравнению непрерывности, то закон Гаусса остается справедливым, если он выполняется в начальный момент. Этот вопрос еще будет обсуждаться в разд. III, В.

Б. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВО ВРЕМЕНИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ

Предположим вначале, что проведена некоторая интерполяция значений E и B в узлах сетки для того, чтобы получить поля в точках нахождения частиц в момент времени $t^n = n\Delta t$. Мы хотим получить центрально-разностную аппроксимацию уравнений движения Ньютона — Лоренца.

Простейшим случаем является нерелятивистское движение с одной только компонентой магнитного поля B_x . Имеется большой класс физических задач, в которых значения u_x , E_x , B_x и B_y несутривальны. Из уравнений движения следует, что если эти величины равны нулю в начальный момент, то они остаются нулевыми и в последующие моменты времени. Следуя Бунеману [8], запишем

$$\frac{v^{n+1/2} - v^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{q}{m} \left(E^n + \frac{1}{c} \frac{v^{n+1/2} + v^{n-1/2}}{2} \times B^n \right). \quad (11)$$

Дополнением к уравнению (2) является магнитная составляющая силы Лоренца. Ее центрирование достигается простым усреднением по времени; точно так же определяется B^n [см. уравнение (16)]. При решении уравнения (11) относительно $v^{n+1/2}$ величина $cE \times B/B^2$ просто вычитается из v . Разностное уравнение для остатка как раз описывает циклотронное враще-

ние. Оказывается, что обобщение на релятивистский случай легче, если в уравнение (11) вместо $\mathbf{v}^{n-1/2}$ и $\mathbf{v}^{n+1/2}$ подставить

$$\mathbf{v}^{n-1/2} = \mathbf{v}^- - \frac{q}{2m} \mathbf{E}^n \Delta t$$

и

$$\mathbf{v}^{n+1/2} = \mathbf{v}^+ + \frac{q}{2m} \mathbf{E}^n \Delta t$$

и записать его в виде

$$\frac{\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-}{\Delta t} = \frac{q}{2mc} (\mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-) \times \mathbf{B}^n.$$

Умножив скалярно это уравнение на $(\mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-)$ и получив равенство $(v^+)^2 = (v^-)^2$, убеждаемся в том, что оно описывает только вращение; можно показать, что угол $\theta = -2 \arctg \times (qB\Delta t/2mc)$. Это плоское вращение можно очень сжато описать с помощью алгоритма Бунемана [10]:

$$\begin{aligned} v'_x &= v^-_x + v^-_y t, \\ v'_y &= v^-_y - v^-_x t, \\ v'_x &= v^+_x + v^+_y t, \end{aligned} \quad (13)$$

где $t = -\operatorname{tg} \theta/2 = qB_z \Delta t/2mc$, $s = -\sin \theta = 2t/(1+t^2)$.

В более общем случае, когда $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{v}$ характеризуются тремя ненулевыми компонентами, используется алгоритм, требующий малого числа арифметических действий и настолько мало арифметических регистров, насколько это возможно в оптимизированной программе «движения» частиц. Следуя Борису [4], предложившему геометрическое обоснование для шагов, запишем

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \mathbf{v}^- + \mathbf{v}^- \times \mathbf{t}, \\ \mathbf{v}^+ &= \mathbf{v}^- + \mathbf{v}' \times \mathbf{s}, \end{aligned} \quad (14)$$

с $\mathbf{t} = q\mathbf{B}\Delta t/2mc$, $\mathbf{s} = 2\mathbf{t}/(1+t^2)$. Погрешность в определении угла между $\mathbf{v}^-$ и $\mathbf{v}^+$ приблизительно равна $t^3/3$, и уменьшать ее, по-видимому, нет смысла.

Для релятивистского обобщения мы используем $\mathbf{u} = \gamma \mathbf{v}$, а не $\mathbf{v}$. Прибавление импульса электрических сил формально производится без каких-либо изменений:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^- &= \mathbf{u}^{n-1/2} + q\mathbf{E}^n \Delta t/2m, \\ \mathbf{u}^{n+1/2} &= \mathbf{u}^+ + q\mathbf{E}^n \Delta t/2m. \end{aligned} \quad (12a)$$

При вращении угол уменьшается в γ раз. По этой причине $\mathbf{t} = q\mathbf{B}\Delta t/2\gamma^n mc$, где $(\gamma^n)^2 = 1 + (\mathbf{u}^-)^2$. Поскольку также $(\gamma^n)^2 =$

$= 1 + (u^*)^2$, эта схема является обратимой во времени¹⁾, и полный импульс, полученный интегрированием, имеет второй порядок точности [4].

Во всех случаях координаты частиц пересчитываются в соответствии с равенством

$$x^{n+1} = x^n + v^{n+1/2} \Delta t = x^n + u^{n+1/2} \Delta t / \gamma^{n+1/2}, \quad (15)$$

где $(\gamma^{n+1/2})^2 = (1 + u^{n+1/2})^2$. Эта процедура также обратима и приводит к погрешности второго порядка в определении траектории частицы.

В других местах использовались алгоритмы, имеющие второй порядок точности, однако они были либо не центрированными по времени, либо необратимыми [44]. Эти алгоритмы работают удовлетворительно, хотя их физические или вычислительные преимущества и не обоснованы.

Во многих плазменно-лазерных приложениях магнитное поле не влияет существенно на движение ионов и поперечным ионным током можно пренебречь. В таких случаях можно сэкономить время вычислений, если использовать программу движения для ионов, в которой они ускоряются лишь электрическим полем, релятивистские эффекты игнорируются и находится только плотность ионного заряда без тока. Метод учета продольного тока обсуждается в следующем разделе.

В. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЧАСТИЦ И ПОЛЕЙ

При интегрировании с учетом взаимодействия полей и частиц мы должны связывать друг с другом величины, определенные в различные моменты времени и в различных точках пространства. В простейшем случае магнитное поле, определенное уравнениями поля на полудельных временных слоях, для уравнений движения частиц требуется в целые моменты времени. Поскольку для нахождения значений B в более поздние моменты времени по отношению к E можно использовать закон Фарадея, просто усредняем B по времени:

$$B^n = \frac{1}{2} (B^{n-1/2} + B^{n+1/2}). \quad (16)$$

Это соотношение должно обязательно использоваться в программе движения частиц, а также в определенных диагностиках программы. На практике усреднение проводится не в явном

¹⁾ Эту величину γ^n можно использовать для расчета центрированной по времени кинетической энергии. На ЭВМ с малой длиной слова лучше всего воспользоваться тождеством $(\gamma - 1)mc^2 = mv^2(\gamma + 1)^{-1}$. Вторая форма выражения кинетической энергии гораздо меньше первой восприимчива к ошибкам округления.

виде. Для того чтобы избежать использования дополнительной памяти ЭВМ, интегрирование B разбивается на два шага [4]. В качестве последнего шага интегрирования поля мы лишь частично пересчитываем B , получая величину

$$B^n = B^{n-1/2} - \frac{c \Delta t}{2} \partial_x \times E^n, \quad (17)$$

которая помещается в память на место $B^{n-1/2}$. Уравнения движения частиц интегрируются, а затем B тем же способом пересчитывается на $B^{n+1/2}$ в качестве первого шага следующего интегрирования уравнения поля.

Для расчета плотности тока по координатам и скоростям частиц мы, чтобы получить центрированную по времени плотность тока $J^{n+1/2}$ [4], используем вместе с $v^{n+1/2}$ взвешенное среднее двух координат x^n и x^{n+1} . Другой способ состоит в использовании весов для координаты $x^{n+1/2} = x^n + v^{n+1/2} \Delta t/2$ [42]. По вычислительным затратам оба метода одинаковы. Мы предпочли первый в надежде на то, что он обладает лучшими «шумовыми» характеристиками, однако окончательно предпочесть какой-либо метод пока трудно [44]. Тем не менее в недавней работе [20] показано, что наш способ менее восприимчив к численным неустойчивостям.

Читатель легко может проверить, что никакая плотность тока не удовлетворяет уравнению непрерывности с величиной ρ , вычисленной любым методом, но зависящей только от положений частиц в настоящий момент. В этом можно убедиться даже в пределе $\Delta t \rightarrow 0$, рассматривая, например, частицу, которая движется по окружности внутри четверти ячейки. После каждого оборота $\nabla \cdot J$ изменяется на ненулевую среднюю величину, хотя величина ρ та же самая.

Обсуждались методы расчета заряда, сохраняющие J для ρ , найденных методами NGR-взвешивания (по ближайшим узлам) [9] и взвешивания по области [42]. Авторы последней работы обнаружили, что уровень шума в электромагнитных полях возрастал со временем с недопустимо большой скоростью. Впоследствии они разработали модель с кулоновской калибровкой A и ϕ , в которой, как и в работе Бóриса [4], продольное поле E определяется по ρ с помощью уравнения Пуассона. Позднее было показано, что шумовые характеристики, отмеченные Морсом и Нильсоном, были связаны с методами вычисления J , а не с использованием потенциалов. Была установлена эквивалентность этих методов и предложены способы уменьшения нарастания шума [31].

Альтернативный метод Бóриса можно обосновать следующим образом. Плотность тока вычисляется, как описано выше. За-

гем рассчитывается поправка к J , которая является чисто продольной и такой, что подправленная плотность тока J удовлетворяет уравнению непрерывности. Использование этого тока для пересчета E обеспечивает выполнение закона Гаусса $\nabla \cdot E = \rho$. Указанная поправка к J имеет вид $-\nabla \xi$, где

$$\nabla^2 \xi = \nabla \cdot J + \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Легко видеть, что этот алгоритм центрирован по времени и вследствие этого имеет второй порядок точности. Отметим, что разностная аппроксимация лапласиана, согласованная с операторами градиента и дивергенции, представляет собой просто пятиточечный оператор δ_x^2 .

С вычислительной точки зрения E удобнее пересчитывать, используя неподправленное значение J , а впоследствии скорректировать E на величину $-\nabla \delta \phi$, где $\delta \phi = \xi$ или

$$-\nabla^2 \delta \phi = \rho - \nabla \cdot E. \quad (18)$$

Эта на первый взгляд асимметричная процедура приводит к точно таким же окончательным выражениям для полей, что и предыдущий, более явно центрированный по времени алгоритм. Во всех программах NRL и ZOHAR используется коррекция E ¹⁾.

В разд. II мы уже обсуждали метод, с помощью которого электрическое поле в месте нахождения частицы можно получить путем интерполяции по полевой сетке. Наиболее очевидным является раздельная интерполяция по каждой из трех совокупностей узлов, показанных на фиг. 1, как и делалось в некоторых ранних программах [4, 42, 47]. Однако для программы движения частиц это неудобно. Поскольку она занимает большую часть времени вычислений, в более поздних программах поля заранее переопределяются на единственной совокупности сеточных узлов. Это можно сделать просто усреднением по пространству сеточных значений ρ . Имеются и другие преимущества: продольная составляющая E теперь такая же, как и в консервативных по импульсу электростатических программах (разд. II; [5]), а дополнительное сглаживание уменьшает коротковолновый шум. Упрощается также диагностика результа-

¹⁾ Возможно, перед вычитанием $\nabla \cdot E$ в (18) стоило бы отфильтровать ρ по пространству, усилить моды со средними длинами волны и таким образом, может быть, подавить коротковолновый шум. Выбранный фильтр исправляет в процессе вычислений сил и полей ошибки, связанные с разностной аппроксимацией, которые уменьшают или даже меняют на противоположную дисперсию Бома—Гросса плазменных колебаний в случаях, когда на шаге пространственной сетки укладывается несколько дебаевских длин. Количественные результаты, необходимые для вывода формы этого «предвыделения», приведены в разд. 5 работы Лэнгдона [29].

тов вычислений. Такие же преимущества можно получить и в программе, использующей A и ϕ , если только изменить разностную аппроксимацию в процедуре определения E и B по A и ϕ [43, 44].

После интегрирования уравнений движения частиц значения полей на полевой сетке могли бы быть восстановлены путем дальнейшего усреднения по пространству. Однако это привело бы к недопустимо быстрому для наших приложений затуханию электромагнитных волн. Борис отметил, что, например, *первоначальное* значение E_x можно легко восстановить по усредненному E_x , если перед усреднением запомнить значения E_x на одной стороне слоя. Простейшая процедура для B_z состоит вначале в «разусреднении» по x вместе с E_x , а потом по y вместе с E_y . Таким способом мы можем переопределить поля на общей сетке и восстановить их значения без заметного повышения требований к памяти машины.

Так же как и при переопределении полевых сеток, удобно задать J посредством взвешивания по области на единственной совокупности сеточных узлов, расположенных в нашем случае вместе с r , а затем усреднить по пространству с тем, чтобы получить нужные для интегрирования уравнений поля значения в точках, показанных на фиг. 1. Разумеется, никакого восстановления неусредненных значений J не требуется.

В качестве последнего трудного момента обсудим метод, с помощью которого для полей можно использовать более мелкие временные шаги, чем для частиц. Если рассматривать разумный набор параметров для некоторых задач, в которых $c\Delta t \simeq \Delta x/2$, дебаевская длина $\lambda_D = \Delta x/2$ и тепловая скорость $v_t = c/20$, то $\omega_p \Delta t \simeq 0,05$. Величина этого временного шага во многих приложениях меньше, чем требуется для интегрирования уравнений движения частиц. Поскольку это дорогостоящая процедура, то выгодно частицы пересчитывать реже полей¹⁾. Для того чтобы пояснить это и подвести итог сказанному в этом разделе, мы опишем в общих чертах действия, проводимые на одном временном шаге интегрирования уравнений движения частиц для случая, когда поля пересчитываются в два раза чаще. Верхний индекс n обозначает номер временного слоя для частиц.

Начинаем с E^n , B^n , x^n и $u^{n-1/2}$;

0. Усредняем поля на сетке для частиц.

1. Пересчитываем $u^{n-1/2}$ на $u^{n+1/2}$, x^n на x^{n+1} ; образуем $j^{n+1/2}$ и ρ^{n+1} .

¹⁾ Другой подход состоит в использовании для вычисления полей алгоритма, не удовлетворяющего условию Куранта. (См. [43, 44] и разд. IV данной книги.)

2. Усредняем J на полевой сетке. Восстанавливаем E и B на полевой сетке.
3. Пересчитываем B^n на $B^{n+1/2}$.
4. Пересчитываем E^n на $E^{n+1/2}$, используя $J^{n+1/2}$.
5. Пересчитываем $B^{n+1/2}$ на B^{n+1} .
6. Пересчитываем $E^{n+1/2}$ на E^{n+1} , используя $J^{n+1/2}$.
7. Пересчитываем B^{n+1} на B^{n+1} .
8. Подправляем $V \cdot E^{n+1}$, используя ρ^{n+1} .

Проверяя центрирование по времени, заметим, что третий и седьмой, а также четвертый и шестой шаги симметричны. На продольную составляющую E^{n+1} влияет только $J^{n+1/2}$, поэтому несущественно, сколько используется дробных временных шагов для полей, чтобы добраться до $n+1$ -го слоя. Следовательно, доводы, приведенные ранее в обоснование того, что поправка к дивергенции фактически не затрагивает центрирования по времени, остаются в силе.

Недавно мы обнаружили, что такое расщепление временного шага может приводить к численной неустойчивости. Хотя до сих пор эта неустойчивость заметно искажала результат лишь одной физической задачи, ее амплитуда за несколько тысяч шагов может стать очень большой. Мы провели теоретический анализ и выяснили комбинацию условий, приводящую к развитию неустойчивости. В настоящее время эти результаты проверяются на тестовых задачах и будут опубликованы в другом месте.

Г. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

1. Периодические

Как и с электростатическими программами, можно провести много интересных исследований, моделируя систему, периодическую по x и y . Принципиальных проблем, связанных с граничными условиями, в этом случае нет, за одним возможным исключением. Как формулировалось до сих пор, компонента электрического поля, соответствующая $k=0$, определяется равенством

$$0 = J_{\text{полл}} = \left(J + \frac{\partial E}{\partial t} \right)_{k=0}$$

и, вообще говоря, не равна нулю [случай (а)]. Это противоположно обычной электростатической программе, в которой $E(k=0) = 0$ или является заданной функцией времени, что

обычно и программировалось [случай (б)]. Программа ZONAR снабжена переключателем, выбирающим один из двух вариантов.

Различие состоит в существовании в случае (а) возвращающей силы для плазменных колебаний с $k=0$. Это означает отсутствие какой бы то ни было «дырки» в спектре мод, характерных для нелинейных процессов, таких, как параметрические неустойчивости. Авторы обнаружили, что это приводит к радикальному отличию в исследовании высокочастотных распадов, происходящих при значении плотности, равной $1/4$ критической [35].

Разумеется, подобная возможность выбора возникает и в электростатических программах. Оренс и др. [45] наблюдали важное качественное изменение нагрева текущих навстречу друг другу плазменных потоков при другом выборе граничных условий. Дело в том, что электростатические и электромагнитные программы, как и следовало ожидать, приходят к разным выборам.

2. Граничные условия на свободной границе

«Рабочие лошадки» численного моделирования — PIC-алгоритмы — в исследованиях взаимодействия лазерного излучения с плазмой являются периодическими по y , а левая и правая границы по x являются в них в некотором смысле свободными. Желательно облучать плазменный слой с одной стороны, чтобы рассеянный свет выходил из плазмы с другой стороны. Мы обсудим способы согласования полей на внешней границе плазменного слоя с вакуумом, а также некоторые процедуры учета частиц, достигших границы. При этом потребуются намного больше диагностики.

а. *Продольное поле.* И для ϕ , и для поправки $\delta\phi$ мы хотим получить такое представление потенциала в системе, которое соответствовало бы неограниченному продолжению сетки влево и вправо до бесконечности без какого-либо заряда во внешней области моделируемой части пространства. Достичь этого с помощью методов циклической редукции для уравнения Пуассона представляется невозможным [26]. Следуя методике Бунемана [10], проведем преобразование Фурье по y , а затем, чтобы удовлетворить граничным условиям для ϕ на свободных границах, воспользуемся известными свойствами уравнения Лапласа. Применяя дискретное преобразование

$$\phi_{l,m} = \Delta y \sum_{j=0}^{N_y-1} \phi_{l,j} \exp(-ik_y m y_j),$$

где $k_{y,m} = 2\pi m/L_y$, $y_l = j\Delta y$, к пятиточечному разностному уравнению Пуассона, получим

$$\phi_{l-1,m} - 2\alpha_m \phi_{l,m} + \phi_{l+1,m} = -\Delta x^2 \rho_{l,m} \quad (19)$$

для $l = 0, 1, \dots, N_x$, где

$$\alpha_m = 1 + 2[(\Delta x/\Delta y) \sin(k_{y,m} \Delta y/2)]^2. \quad (20)$$

В дальнейшем индекс m опускается. Вне сетки, где $\rho = 0$, ϕ_i при $m \neq 0$ имеет вид

$$\phi_i = ar^i + br^{-i},$$

где r — общий корень квадратного уравнения

$$r + r^{-1} = 2\alpha \quad (21)$$

(другим корнем является r^{-1}). Выбирая в вакууме решения, ограниченные при $i = \pm\infty$, мы должны получить

$$\begin{aligned} r\phi_{-1} &= \phi_0, \\ r\phi_{N_x+2} &= \phi_{N_x+1}. \end{aligned} \quad (22)$$

Эти граничные условия и уравнения (19) образуют трехдиагональную совместную систему уравнений для ϕ_i . Применяя обычный метод исключения Гаусса для элементов под главной диагональю, найдем, что все новые диагональные элементы, кроме последнего, будут равны r . Причина, по которой решение этой системы уравнений проще, заключается в наличии факторизации, указанной Бунеманом [10]:

$$-\phi_{i+1} - 2\alpha\phi_i - \phi_{i-1} = (1 - r^{-1}E^{-1})(r - E)\phi_i,$$

где $E^{\pm 1}\phi_i = \phi_{i\pm 1}$. Таким образом, можно написать

$$\begin{aligned} \rho_i \Delta x^2 &= (1 - r^{-1}E^{-1})\phi_i = \phi_i - r^{-1}\phi_{i-1}, \\ \phi_i &= (r - E)\phi_i = r\phi_i - \phi_{i+1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Граничные условия на ϕ означают, что $\phi_{-1} = 0$ и $(r - r^{-1})\phi_{N_x+1} = \phi_{N_x+1}$. Уравнения для ϕ решаются слева направо, а для ϕ — справа налево. Эти действия те же самые, что и в упрощенном методе исключения Гаусса.

При $k_y = 0$ уравнения недоопределены. Симметричное и не зависящее от положения границ сетки решение уравнения (19) имеет вид

$$\phi_i = -\frac{1}{2}\Delta x^2 \sum_{i'} |i' - i| \rho_{i'}.$$

Его можно использовать для определения ϕ_{-1} и ϕ_0 , что и дает требуемые граничные условия при решении уравнения (19).

В конце для получения точного в пределах ошибок округления решения уравнения Пуассона проводится обратное преобразование Фурье

$$\phi_{i,1} = (1/L_y) \sum_{m=0}^{N_y-1} \phi_{i,m} \exp(ik_{y,m} y_l).$$

Используемая нами обычная процедура быстрого преобразования Фурье имеет дело с последовательностью комплексных чисел, однако мы применяем ее без изменений и для одновременного преобразования двух столбцов действительных частей данных [14]. Дополнительной памяти при этом не требуется; действительные части запоминаются в строках с номерами от 0 до $N_y/2$, а мнимые части легче расположить в обратном порядке в строках с номерами от $N_y - 1$ до $N_y/2 + 1$.

6. *Поглощаемые уходящие электромагнитные волны в диссипативной области.* Для того чтобы помешать свету, вышедшему из плазменного слоя, вернуться в него после отражения на поверхности плазмы, на краях слоя обычно помещают диссипативную область. Наиболее очевидный способ осуществления этого состоит в введении в закон Ампера — Максвелла (4) резистивного тока. Недостатком подобного подхода является довольно большая толщина резистивного слоя, необходимая для того, чтобы избежать как прохождения, так и отражения света с максимальной длиной волны.

Можно несколько улучшить положение, если ввести «ток» также в закон Фарадея, который тогда примет вид

$$-c \nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{J}_m,$$

где $\mathbf{J}_m = \sigma_m(\mathbf{x})\mathbf{B}$. Этот ток соответствует потоку магнитных монополей. Метод, эквивалентный предыдущему, состоит в умножении $\mathbf{B}$ после пересчета по времени на величину, чуть меньшую единицы (Дж. Бёрис, частное сообщение, 1972). Если величина σ_m равна проводимости, то падающая нормальная волна ($k_y = 0$) не отражается, даже если σ становится большой на малом расстоянии. Однако в случае наклонного падения это неверно, и мы увидим, что нормальное падение тривиально описывается другими методами.

У Дж. Бёриса (частное сообщение, 1972) есть интересный метод, позволяющий свдвигать электрическое сопротивление чисто поперечным; другими словами, ток в этом случае не реагирует на продольную составляющую поля и сам по себе не приводит к разделению зарядов. Смысл этой методики в том, что резистивные токи, возбуждаемые своими пограничными полями, не подавляют электростатическую активность в плазме. Нам

представляется, что этот метод эквивалентен добавлению кольцевого тока вокруг каждой ячейки, величина которого пропорциональна значению $\nabla \times \mathbf{E}$ в ячейке. Это похоже на ток намагничивания и равносильно прибавлению тока

$$\mathbf{J} = c \nabla \times \mathbf{M} = - \nabla \times [\alpha(x) \nabla \times \mathbf{E}],$$

дивергенция которого равна нулю и в который величина $-\nabla \phi$ не вносит вклада.

К недостаткам метода с введением диссипативной области следует отнести то, что он требует слишком большого объема памяти машины. Для того чтобы в соответствующем диапазоне частот и углов падения обеспечить хорошее поглощение, а не отражение выходящего света, толщина диссипативной области должна быть порядка длины волны, и все поля должны быть определены в этой области.

в. *Простое замыкание уравнений Максвелла на свободных границах.* Простое граничное условие, позволяющее решить проблему замыкания разностных уравнений Максвелла, применялось К. Синцем (частное сообщение), и в программе ZONAR предусмотрена возможность его использования. Для некоторых приложений оно довольно эффективно, и на его примере можно пояснить некоторые характерные черты, присущие и более сложным граничным условиям, которые будут обсуждаться позже.

Под замыканием разностных уравнений мы понимаем следующее. Рассмотрим левую границу и предположим, что E_x , E_y и B_z при $x \geq 0$ должны пересчитываться с использованием уравнений Максвелла. Когда мы начнем пересчитывать E_y в $t + \frac{1}{2}$, нам понадобится значение B_z в $t + \frac{1}{2}$, которое для того, чтобы система уравнений стала замкнутой, должно определяться некоторым дополнительным условием.

Для плоской волны, падающей в направлении $-x$, $E_y = -B_z$. При выводе требуемого дополнительного условия Синц использует усреднение E_y по времени и пространственное усреднение B_z :

$$B_z^{n+\frac{1}{2}}|_{x, t+\frac{1}{2}} + B_z^{n+\frac{1}{2}}|_{x, t+\frac{1}{2}} + E_y^{n, 0}|_{x, t+\frac{1}{2}} + E_y^{n+1}|_{x, t+\frac{1}{2}} = 0. \quad (24)$$

Это уравнение решается относительно $B_z^{n+\frac{1}{2}}|_{x, t+\frac{1}{2}}$ совместно с уравнением

$$(\partial_t E_y + c \partial_x B_z)|_{x, t+\frac{1}{2}} = 0, \quad (8a)$$

которое включает те же самые величины. Значение B_z , полученное таким образом, хранится в соответствующем столбце массива B_z . Внутренние значения ($x \geq \Delta x/2$) на полупелых временных слоях $t^{n+\frac{1}{2}}$ находятся с помощью закона Фарадея. E_x и E_y при $x \geq \Delta x/2$ пересчитываются отсюда с использованием

закона Ампера — Максвелла. Этот алгоритм включает в себя все необходимое для одномерной программы и в таком виде используется в программе К. Эстабрука OREMP.

Использование на последнем этапе интегрирования полс той же самой идеи, но без усреднения по времени, приводит к равенству

$$B_z^{n+1} - \psi_{n+1/2} + B_z^{n+1} \psi_{n+1/2} + 2E_y^{n+1} \psi_{n+1/2} = 0. \quad (25)$$

Процедура усреднения позволяет отсюда определить все поля при $x \geq 0$.

Для исследования погрешностей, вносимых наклонным падением и усреднением, рассмотрим отражение плоской волны, падающей на границу. Примем, что

$$B_z(x, y, t) = B_i \exp[i(-k_x x + k_y y - \omega t)] + \\ + B_r \exp[i(+k_x x + k_y y - \omega t)]$$

при $x \geq \Delta x/2$ и исключим, пользуясь (24), $B_z - \psi_{n+1/2}$, затем выразим E_x и E_y через B_z и найдем отношение

$$B_r/B_i = (c k_x \cos \omega \Delta t/2 - \Omega \cos k_x \Delta x/2) / (c k_x \cos \omega \Delta t/2 + \Omega \cos k_x \Delta x/2). \quad (26)$$

При малых углах $c k_x \rightarrow \Omega$ и процедуры усреднения являются наибольшими источниками погрешности

$$B_r/B_i = (\cos \omega \Delta t/2 - \cos k_x \Delta x/2) / (\cos \omega \Delta t/2 + \\ + \cos k_x \Delta x/2) \approx 1/16 [(k_x \Delta x)^2 - (\omega \Delta t)^2].$$

На практике она заключена приблизительно в пределах 0,5%.

Если угол падения θ не очень мал, то источником наибольшей погрешности является предположение $E_y = -B_z$:

$$B_r/B_i \approx (c k_x - \omega) / (c k_x + \omega) = -\tan^2(\theta/2).$$

При угле падения 45° интенсивность отражения составляет 17%, или 3% по энергии. Для многих приложений этого вполне достаточно. Если интерес представляет лишь одно значение угла падения, то уравнения (24) и (25) можно видоизменить применительно к этому углу.

Пока в этом анализе имеется один существенный дефект: мы предположили, что поле E является чисто поперечным. Допустим, что неподвижный точечный заряд помещен вблизи границы. Стационарные поля равны $B_z = 0$ всюду и $E_y = 0$ на границе, что в точности соответствует случаю электростатического поля заряда с *проводящей* границей. Вследствие этого точечный заряд притягивается к границе, что в ряде случаев может причинять очень большие неудобства. Поправка к $\nabla \cdot E$ на этот эффект никакого влияния не оказывает.

Метод исправления состоит в вычитании $-\partial\phi/\partial y$ из E_y в уравнениях (24) и (25). Тогда стационарные поля будут равны электростатическому полю как полученные путем решения уравнения Пуассона с краевыми условиями третьего рода и на заряд не будет действовать никакая сила.

Между прочим, эти граничные условия почти эквивалентны граничным условиям, используемым в ранней версии Лос-Аламосской программы WAVE [43]. Различие состоит в том, что при решении уравнения Пуассона в программе WAVE на границе задаются условия либо $\phi = 0$, либо $\partial\phi/\partial y = 0$, и таким образом, заряд либо притягивает, либо отталкивает заряды-источники, находящиеся вне системы.

При исследовании взаимодействия лазерного излучения с плазмой часто требуется, чтобы волна $B_{z0} \cos(k_0 x - \omega_0 t)$ распространялась в плазме (к примеру) слева направо. Простейший способ сделать это состоит в прибавлении выражения $4B_{z0} \cos \omega_0 t$, вычисленного в соответствующие моменты времени, к правым частям (24) и (25). Поля падающей и уходящей волн точно удовлетворяют модифицированным уравнениям. Эта процедура намного проще обобщается на более сложные формы падающей волны, чем широко распространенный метод плоских токовых антенн.

Граничные условия для полей B_x , B_y и E_z совершенно аналогичны вследствие их подобного пространственного расположения.

И наконец, отметим, что эти граничные условия не меняют $\nabla \cdot \mathbf{E}$ или $\nabla \cdot \mathbf{B}$ на краях. Чтобы убедиться в этом, учтем, что они используются для определения на краях только полей B_z и E_z . Поля E_x , E_y , B_x и B_y вычисляются отсюда во всей области с помощью разностных уравнений Максвелла, и наши замечания в разд. III, В относительно сохранения $\nabla \cdot \mathbf{E}$ и $\nabla \cdot \mathbf{B}$ остаются в силе.

г. *Граничные условия для волн, падающих под «любым» углом.* Во многих задачах рассеянное излучение выходит из плазмы более чем по одному направлению или же падающее излучение не описывается простой плоской волной. В таких случаях простое граничное условие, приведенное в предыдущем разделе, является неадекватным. Здесь мы опишем граничные условия, обычно используемые в программе ZOHAR и удовлетворяющие требованиям задачи.

Линдман [39] представляет волну сложной формы, распространяющуюся за пределами системы, в виде суперпозиции плоских волн. Для каждой плоской волны справедливо соотношение

$$c \partial A / \partial x = C(c k_y / \omega) \partial A / \partial t,$$

где A есть y - или z -компонента вектор-потенциала в программе WAVE, а $C \approx \cos \theta = (1 - c^2 k_y^2 / \omega^2)^{1/2}$. Кулоновская калибровка $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ используется для определения $\partial A_x / \partial x$. После этого он рассматривает c как линейный оператор, включающий $\partial / \partial y$ и $\partial / \partial t$, который можно вычислить на границе, не прибегая к экстраполяции. Оказалось, что разложение на элементарные дроби приводит к устойчивой и одновременно точной форме оператора. Непосредственно к полям эту идею применил Э. Валео, и наше дальнейшее обсуждение в основном будет касаться этой формы, поскольку именно она реализована в программе ZONAR. Учитывая падающий свет, воспользуемся на левом краю соотношением

$$B_z(0, y, t) + C^{-1}(-c \partial_y \partial_t) E_y(0, y, t) = 2B_{x0}(y, t), \quad (27)$$

где B_{x0} представляет искомую падающую волну при $x = 0$, а

$$C^{-1} \approx (1 - c^2 \partial_y^2 / \partial t^2)^{-1/2} = 1 + \sum_n \alpha_n / (\partial_t^2 / c^2 - \beta_n). \quad (28)$$

В терминах вычислительного алгоритма это означает, что

$$-B_z + 2B_{x0} = C^{-1} E_y = E_y + \sum_n E_n, \quad (29)$$

где E_n — решение уравнения

$$(\partial_t^2 / c^2 - \beta_n \partial_y^2) E_n = \alpha_n \partial_y E_y. \quad (30)$$

Как и в предыдущем пункте, в этих соотношениях $-\partial_y \phi$ нужно вычесть из E_y , а для получения второго порядка аппроксимации в уравнении (29) необходимо провести усреднение по пространству и времени. Единственное различие между уравнениями (29) и (24) заключается в членах E_n : они определяются в те же самые моменты времени и в тех же точках пространства, что и E_y , и поэтому уже усреднены по времени в граничном условии.

Еще раз рассматривая отражение плоской волны, падающей на границу, находим

$$B_t / B_i = (c k_x \cos \omega \Delta t / 2 - \Omega C \cos k_x \Delta x / 2) / (c k_x \cos \omega \Delta t / 2 + \Omega C \cos k_x \Delta x / 2).$$

Если пренебречь погрешностями конечно-разностной аппроксимации, то это соотношение перейдет в следующее:

$$B_r / B_i = (\cos \theta - c) / (\cos \theta + c).$$

Это равенство показывает, что в стационарном состоянии доля отражения в относительной погрешности разложения $C(c k_y / \omega)$

составляет половину. Об этом необходимо помнить при выборе коэффициентов α и β .

Полезную информацию об алгоритме может дать величина $B_z - B_{z0} \approx (B_z - C^{-1}E_y)/2$, которая характеризует поле только уходящих волн.

Мы достигли неплохих результатов, используя лишь два члена в разложении. Однако недавно Линдман [40] опубликовал значения коэффициентов для более точного трехчленного разложения. Они равны $\alpha = (0,3264; 0,1272; 0,0309)$ $\beta = (0,7375; 0,98384; 0,9996472)$. При таком малом числе членов требования к памяти и быстродействию ЭВМ намного меньше, чем в методе диссипативной области. Вероятно, из-за того, что коэффициенты β меньше единицы, никакого уменьшения временного шага для устойчивого решения уравнений (30) ниже величины, необходимой для уравнений Максвелла, не требуется.

Линдман обсуждает также трудность, связанную с переходной характеристикой граничных условий. Если заданная падающая волна «включается» слишком быстро, то для перехода полей в стационарное состояние требуется длительное время. Если угол θ , при котором волна входит в плазму, близок к 90° , тогда «слишком внезапное» включение может занимать неприемлемо большое время. Линдман описывает более сложное разложение, которое улучшает переходную характеристику. Мы экспериментировали с граничными условиями, представляющими другие линейные комбинации E_x , E_y и B_z , отличающиеся от (27), и также обнаружили плохую, но в различной степени, переходную характеристику. Условие (27) в этом отношении лучше и пока было достаточным. Причины затруднений с переходной характеристикой до конца не поняты и сейчас. Проведенный анализ показал, каким образом могут возникать различия между условиями Линдмана и нашими, но количественного сравнения еще не проводилось.

Как указывает Линдман [40], переходный процесс обусловлен большей частью присутствием в общем возмущении фурье-компонент с $\omega < ck_y$. Эти волны не покидают границу, и разложение (28) не может аппроксимировать аналитическое продолжение функции $(1 - c^2 k_y^2 / \omega^2)^{-1/2}$ в области $\text{Re } \omega < ck_y$ и $\text{Im } \omega > 0$. Новое разложение Линдмана отличается тем, что аппроксимирует аналитическое продолжение указанной функции.

Мы заметили другую проблему, причиной которой также является поведение разложения при $\omega < ck_y$. Наблюдается неустойчивость полей E_x , E_y и B_z , когда плотность терпит разрыв первого рода, линия которого расположена вблизи и параллельно границе. Разрыв плотности поддерживает поверхностную волну с $\omega < ck$. Для некоторых интервалов частот в этом диа-

пазоне разложение S отрицательно. Таким образом, направление вектора Пойнтинга меняется на противоположное, и энергия передается в систему, что приводит к возбуждению поверхностной волны. Никаких затруднений у нас при этом не возникло, за исключением случая, когда расстояние между линией разрыва и границей меньше, чем $4c/\omega_p$. Возможно, что новое лндмановское разложение позволит устранить и эту проблему. Однако для подавления этой неустойчивости достаточно лишь, чтобы разложение оставалось положительным.

д. *Граничные условия для частиц.* При периодических граничных условиях, когда координата y частицы после ее пересчета в «программе движения» превышает L_y , мы перед нахождением плотности заряда этой частицы и второй половины ее плотности тока просто вычитаем L_y . Если пересчитанное значение y меньше нуля, тогда мы прибавляем L_y .

В версии со свободной границей частицы, приближающиеся к левому или правому краю, нельзя продолжать пересчитывать с помощью уравнения Ньютона — Лоренца, их необходимо обрабатывать другим способом. В программе ZOHAR для каждой компоненты плазмы выделяется интервал по x . При движении частицы вне этого интервала она обрабатывается в программе движения с помощью отдельной процедуры. В настоящее время у нас есть три варианта:

1. Частица удаляется. Вклад в плотность заряда от «потерянных частиц» в месте их последнего расположения запоминается.

2. Частица вновь вводится в систему со скоростью, равной половине максвелловской (взвешенной с учетом u_x), плюс осциллирующая скорость, которая находится интегрированием электрического поля по времени в этой точке.

3. Частица удаляется, как и в варианте 1. В то же самое время новые частицы вводятся в систему, как в варианте 2, но со средней скоростью, соответствующей заданным плотности и температуре, а не с той скоростью, с которой они прибывают.

В каждом случае мы сохраняем итоговое число значений энергии частицы и любую другую представляющую интерес характеристику. Варианты 2 и 3 позволяют моделировать прилегающий плазменный резервуар и (или) предотвратить расширение плазменного слоя. Примеры возможного использования этого приведены в разд. III, Е.

Д. ДИАГНОСТИКИ

Мы опишем минимальный набор диагностик, необходимых для понимания результатов численного моделирования взаимодействия лазерного излучения с плазмой. Многие из них очевид-

ны, значение других оценивается, исходя из опыта решения отдельных задач с этими диагностиками и без них. Диагностики являются наиболее часто меняемыми частями программы, которые поэтому должны быть достаточно гибкими.

1. Частицы

Наиболее привычной диагностикой частиц является диаграмма рассеяния в фазовом пространстве. Точки наносятся в местах, определяемых двумя координатами частицы, например u_x и u_y . Часто эти диаграммы позволяют установить прямое соответствие с теорией; хорошо известным примером является захват частиц волнами.

Хотя умозрительно это и просто, практическая реализация затруднена тем, что в памяти машины отсутствует информация сразу о всех частицах плазмы (см. разд. III, Ж, 2). Если на следующем временном шаге должно быть изображено фазовое пространство, то ZONAR просматривает частицы, соответствующие минимумам и максимумам, с тем, чтобы узнать, нужно расширять границы диаграммы или нет. Другая проблема касается изображения в один и тот же момент времени более чем одной диаграммы фазового пространства. В качестве альтернативы изображению нескольких диаграмм на одном рисунке либо наличие нескольких каналов изображения мы устанавливаем сдвиг между изображениями. Таким образом, один рисунок делается на 0, 100, 200-м и т. д. шаге, другой может быть сделан на 49, 99-м и т. д. шаге и т. д. Незначительная разница по времени обычно не мешает сравнению.

Усовершенствованный алгоритм должен иметь возможность наносить одну линейную комбинацию координат частицы в зависимости от другой, пропуская частицы, не удовлетворяющие двум линейным связям. Например, изображение зависимости $u_x - u_y$ от $x - y$ позволит воспроизвести захват частиц с $a < x < b$ волнами, распространяющимися под углом 45° в слое. Полезное применение такой диагностики описано в работе Морса и Нильсона [42].

Та же подпрограмма строит графики $f(q)$ и линии уровня $f(q_1, q_2)$, где q , q_1 и q_2 — любые координаты частицы в фазовом пространстве, а q может соответствовать и u^2 (фактически это проекции на другие координатные плоскости). Эта процедура включает в себя, например, $f(u_x)$, $f(u^2)$ и $\rho(x, y)$. В варианте со свободной границей часто используется преобразование $\rho(x, k_x)$, кроме того, мы наносим на график статистику частиц, уходящих из системы.

2. Поля

Очевидными диагностиками являются линии уровня для B_x , E_x и ϕ . Имеются также изображения $E_x - E_y$, $B_x - B_y$ и $-\nabla\phi$, состоящие из маленьких стрелок, направление и длина которых характеризуют значения полей в данной точке пространства.

Энергии фурье-мод для B_x , E_x и ϕ изображаются набором вертикальных отрезков, длины которых пропорциональны логарифмам энергий мод в диапазоне, превышающем 10^4 . Подобная диагностика используется также для выявления мод, которые следует изучить более внимательно с помощью других средств.

В версии со свободной границей изображения $B_x(x, k_y)$ и др. для мод с фиксированным y помогают не только интерпретировать результаты, но и выделить нужный сигнал на фоне других эффектов или шума.

3. Изменения во времени

Для создания «исторической картины» процесса необходимо на каждом временном шаге запоминать большое число различных величин. В основном это энергии и импульсы полей и различных компонент частиц плазмы. Кроме того, запоминаются определенные пробы полей, энергии и амплитуды мод, например для $E_x(x, k_y)$. Последнее включает в себя значения E_x и B_x при $x = \frac{1}{2}$, вычисленные только для уходящих волн так же, как в разд. III, Г, п. 2, г.

4. Примечания

Как правило, невозможно точно предугадать, какие графики будут нужнее всего для понимания хода вычислений. По сравнению с электростатической программой здесь имеется во много раз больше контролируемых величин. Для того чтобы с первого раза получить нужную информацию, много внимания уделяется разумному выбору диагностики, причем мы предпочитаем ошибиться с включением какой-нибудь диагностики, а не с ее исключением. Результаты вычислений несколько напоминают телефонный справочник: огромное количество сведений, большая часть которых бесполезна, однако вы хотите иметь их все, поскольку не знаете, что вам может понадобиться впоследствии.

По этим соображениям мы считаем, что подобный тип вычислений нельзя развивать всерьез без доступа к устройству графического вывода, обладающего большим разрешением и объемом, таким, например, как электронно-лучевая трубка с фотоприемником. Механические графопостроители слишком медлительны, особенно при построении линий уровня и диаграмм в фазовом пространстве. Ударные «графопечатники» слишком

грубы и слишком часто теряют или искажают важные детали. Наиболее компактным и удобным для хранения видом графической информации является микрофотокопия.

Иногда приходится прибегать к печатанию чисел на АЦПУ. Снова приходит мысль об аналогии с телефонным справочником, и вновь микрофотокопия является наилучшей формой хранения результатов.

Е. ПРИЛОЖЕНИЯ

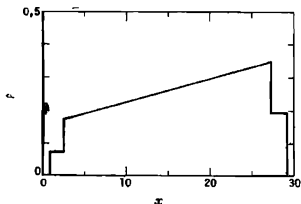
Типичные результаты, полученные с использованием двоякопериодических условий, обсуждались Морсом и Нильсоном [42] на примере неустойчивости Вайбеля, Ли и Лемпе [36] на примере образования нитей в электронных пучках и Лэнгдоном и Лазински [34] на примере образования нитей в лазерном свете. В этой главе более интересно проиллюстрировать постановку и диагностики на примере задач, решаемых с использованием версии программы ZONAR со свободной границей.

Все примеры связаны с неустойчивостями в плазме пониженной плотности, облучаемой интенсивным когерентным светом, причем в процессе изложения мы переходим от физически простого случая к более сложным задачам. Мы моделируем область плазменной короны, в которой плотность плазмы равна четверти критической (т. е. в которой плазменная частота ω_{pe} равна половине лазерной частоты ω_0). В этой области возможно развитие двух высокочастотных неустойчивостей: 1) $2\omega_0$ -распад падающей волны на две электронные плазменные волны при значениях плотности, близких к четверти критической; 2) «рамановское» рассеяние — распад на электронную плазменную волну и электромагнитную волну при значениях плотности, меньших или близких к четверти критической. Кроме того, во всей области пониженной плотности возможно стимулированное бриллюэновское рассеяние — распад на звуковую и электромагнитную волны. Другие процессы, такие, например, как образование нитей, здесь не обсуждаются.

Предварительно сделаем отступление, посвященное единицам измерения. Для задач о взаимодействии лазерного излучения с плазмой мы полагаем c , лазерную частоту ω_0 и $-q_e/m_e$ равными единице в программе. Это определяет систему единиц, в которой числа в программе легко связываются с соотношениями, представляющими физический интерес. Поскольку теперь в единицах Хевисайда — Лоренца $\omega_{pe}^2 = -\rho_e$, то плотность измеряется в единицах критической плотности. Для потенциала $\phi = 1$ соответствует $-q_e\phi = m_e c^2$, т. е. 511 кэВ. Циклотронная частота $\omega_{ce} = |q_e|B_z/(m_e c) = B_z$, так что единица B_z означает равенство $\omega_{ce} = \omega_0$, которое имеет место вблизи 100 МГц для длины волны лазерного излучения 1,06 мкм.

1. « $2\omega_p$ »-распадная неустойчивость с неподвижными ионами

В нашем первом примере с двумерной версией ZONAR мы используем неподвижный ионный фон для исключения всех процессов распада, кроме $2\omega_p$ и рамановского. Профиль плотности плазмы показан на фиг. 2. Лазерный свет распространяется в виде плоской волны вдоль оси x слева, с $E_y = B_z = 0,1$ (в максимуме), что приводит к амплитуде электронных осцилляций $0,1$ с, соответствующей потоку $\sim 10^{16}$ Вт/см² для длины волны $1,06$ мкм. Для поперечных полей использовались граничные условия Синца, поскольку мы не рассматриваем волны,



Фиг. 2. Профиль плотности плазменного слоя для примера $2\omega_p$ -распада с неподвижными ионами.

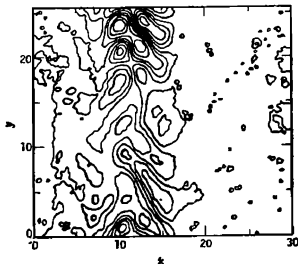
При изменении x от 2,4 до 27,3 n_e линейно возрастает от 0,125 до 0,35. Короткие участки на каждом из концов слоя выбираются равными четверти длины волны для плотности, соответствующей минимальному отражению лазерного света.

выходящие под углом к плоскопараллельному слою плазмы, и хотим сэкономить пространство, необходимое для стабилизации нашего варианта линдмановских граничных условий.

Неоднородная электронная плотность создается за счет изменения шага сетки для электронов. Это более эффективно, нежели «загрузка» однородной плотности частиц и изменение «веса» (заряда и массы) частиц, как делалось в ряде случаев. В ходе вычислений область, представляющая интерес, заполнится электронами, приходящими из других областей фазового пространства с разными весами. При заданном полном числе частиц статистика и тепловой шум будут в некотором смысле хуже, чем в случае одинакового «веса» у электронов. Также заметим, что в двумерном случае число частиц в дебаевском квадрате $n_e \lambda_{De}^2$ для электронов с равными «весами» не зависит от n_e . Заряд электрона выбирается таким образом, чтобы получить

заданную плотность заряда, а масса находится из отношения q/m . Плотность заряда ионов определяется не зависящей от времени функцией $\rho_i(x)$.

Для этой задачи размер системы составляет 30 на 25,6 и используется сетка с числом ячеек, равным 160×128 . Это дает $\lambda_D/\Delta x = 0,5$ при плотности $\rho = 0,25$, что более чем достаточно для исключения сеточной неустойчивости [29, 30], а некоторое



Фиг. 3. Линии уровня потенциала в момент времени 280, характеризующие локализованное начальное нарастание плазменных волн.

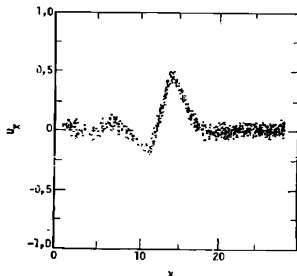
Плазменные волны, которые образовались бы в результате обратного рамановского рассеяния, не зависели бы от y . Интервал между соседними линиями уровня Φ равен 0,01. Редкие линии уровня, расположенные в других частях рисунка, обусловлены тепловым шумом.

сглаживание значительного влияния на дисперсию Бома — Гросса не оказывает. При вычислениях мы используем $N_e = 10^5$ электронов, для которых $n_e \lambda_D^2 = 1,4$ и $n_e \Delta x \Delta y = 5,2$ при плотности 0,25. Это очень низкая плотность числа частиц по сравнению с теми значениями, которые требуются в некоторых плазменных задачах; более подробно мы осветим этот вопрос в разд. III, Е, п. 4. Скорости частиц определяются генератором случайных чисел в соответствии с максвелловским распределением при температуре 1,28 кэВ ($v_i = 0,05 c$). (В этих приложениях «спокойное начало» считалось бесперспективным.) Частицы, попадающие на любой из двух краев плазменного слоя, вновь вводятся в систему при этой температуре.

Мы обнаружили, что желательно «включать» лазер постепенно, плавно повышая амплитуду от 0 до 0,1 в течение 20 временных единиц. Если это не сделано, то внезапный приход света

приведет к возмущению плазмы, не зависящему от y , которое искусственно увеличивает рамановское рассеяние назад по отношению к $2\omega_p$ -распаду.

Начиная с момента времени, равного 180, плазменные волны, образовавшиеся в процессе $2\omega_p$ -распада, становятся видимыми на фоне шума. По линиям уровня ϕ на фиг. 3 можно судить, что вначале волны характеризуются локализованным нарастанием, наводящим на мысль об абсолютном характере $2\omega_p$ -распада по



Фиг. 4. Фазовое пространство при одномерном (только по x) численном моделировании, в котором по этой причине учитывается рамановское рассеяние.

При тех же самых, что и в двумерном примере, интенсивности света, градиент плотности и т. д., плазменная волна насыщается на уровне, лишь чуть ниже того, при котором она либо распалась, либо произошел заметный захват частиц, на рисунке видно, что только незначительное число электронов «отрывается» от неустойчивости в виде нагретых частиц.

x и y . Детали пространственного расположения зависят от загрузки случайных чисел и меняются от расчета к расчету. Позднее волны расширяются по y с наибольшими модами 0—4. В конце концов преобладает мода 2.

При этой интенсивности и градиентной длине $[L = (dp/dx)^{-1} = 140]$ в одномерном случае найдено, что насыщение рамановского распада происходит на уровне, характеризующемся малым захватом электронов (фиг. 4). Этот эффект независимо заместили Бискамп и Вельтер [3], которые назвали его «недиссипативным» режимом. Однако мы никогда не наблюдали подобного поведения в двумерном случае; так же, как и в приведенном примере, здесь преобладают $2\omega_p$ -распад и нагрев.

При шаге по времени, равном для частиц $\Delta t = 0,4\omega_0^{-1}$ (и $0,1\omega_0^{-1}$ для полей), этот расчет занимает 2500 шагов по 5—6 с на шаг на CDC 7600, включая выдачу диагностик.

До какой степени можно уменьшить время решения этой задачи без ущерба для качества получаемой информации? Мы просчитали тот же самый вариант, но с вдвое меньшим числом частиц. Как и ожидалось, тепловой шум для электрического поля удвоился, а нарастание $2\omega_r$ -моды происходит приблизительно на 50 временных единиц раньше, но номера возникающих мод, инкременты и начальные уровни насыщения весьма близки к найденным ранее. Нам кажется, что при использовании 50 000 частиц основные детали удовлетворительно воспроизводятся при численном моделировании.

В ряде вариантов с меньшими размерами по y , $L_y = 8-13$, мы еще могли сделать заключения (например, по поводу конкуренции с рамановским распадом, зависимости доли поглощения от градиентной длины и интенсивности), которые представляются справедливыми. Большие значения L_y , когда расстояние между k_y , соответствующими различным модам, мало, в большей степени требуются при изучении турбулентных спектров и абсолютной неустойчивости в противоположность коактивной. В связи с этим мы перед построением графиков делим энергии системы и другие параметры на мелкие части (деля их на L_y) так, что при других нормировках выдаваемые диагностики не меняются при изменении N_y , L_y , N_e и т. д. до тех пор, пока не станет другой физика явления.

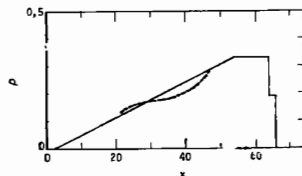
Для уменьшения размеров системы по x , по-видимому, можно было бы убрать часть плазменного слоя справа. Мы моделировали $2\omega_r$ -распад с малыми градиентными длинами $L = 63$; эта неустойчивость будет продолжать существовать даже при меньших значениях L , но характер поглощения уже изменится, если сравнивать со случаями больших L . Максимальное значение L , которое мы использовали, равнялось 660.

2. $2\omega_r$ -распадная неустойчивость с подвижными ионами

В вышеприведенном примере величина распадного поля достигает $\sim 0,2$ при частоте $\sim 0,5$. Это означает, что осциллирующие скорости $\approx 0,4$ и сравнимы с тепловой скоростью $v_t = 0,05$. Следовательно, pondermotorные силы намного превышают термические силы, и в длительных расчетах необходимо учитывать движение ионов.

В следующем примере отношение масс $m_i/m_e = 100$, что достаточно для разделения электронных и ионных характерных временных масштабов. В дополнение к движению ионов, вызываемому распадными волнами, теперь имеет место еще и брил-

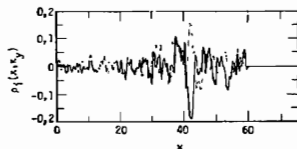
люэновское рассеяние, и слой расширяется гидродинамически. Показанный на фиг. 5 профиль плотности сводит влияние этих эффектов к минимуму. Наклонный участок исключает отраже-



Фиг. 5. Профиль плотности в примере из разд. III, *б*, *а*, *з*.

Градиентная длина $L=K_0$. Размер системы 75×16 с 300×64 ячейками, что дает $\lambda_D/\Delta x=0.4$. Вновь лазер излучает слева нормально к поверхности с $E_y = E_{osc} = 0.1$. Вначале $\lambda_{D1} = \lambda_{Dc}$; можно было бы привести доводы в пользу того, что бриллюэновское рассеяние выгнет ионы даже при более высокой температуре ионов фона, что и наблюдается при этой неустойчивости ($v_{osc}/v_i=2$). Штриховая линия характеризует усиление крутым профилем плотности при $\tau=1280$, обусловленное подтермостовой силой со стороны распадающих волн, которые вначале уменьшают плотность в некоторой области, вслед за тем левый край этой области быстро перемещается влево.

ние от правого края слоя, которое в противном случае усиливается за счет бриллюэновского рассеяния до большой величины. Электроны вновь испускаются с тепловой скоростью из



Фиг. 6. Действительная (сплошная линия) и мнимая (пунктирная линия) части $\rho_1(x, k_y)$ для моды 3 при $\tau=640$, демонстрирующие ионные возмущения, вызываемые распадающимися волнами.

⁴ Четверть критической плотности достигается при $x=21.7$. Подобное поведение характеризуется и моды 1—4.

точки на наклонном участке; фиксированная плотность ионов используется справа от этой точки. Это предотвращает расширение слоя вправо и сохраняет неизменный наклонный участок. Плоский участок выполняет роль резервуара при расширении.

влево. На левой границе электроны и ионы «поглощаются». Для полей используются линдмановские граничные условия, так как теперь мы хотим наблюдать спектр гармоник с частотой $\omega_0/2$, испускаемых в различных направлениях.

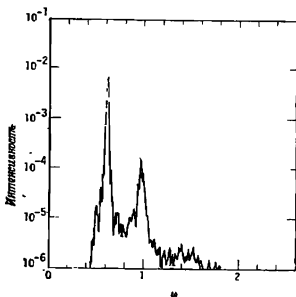
Ожидалось, что интенсивные распадные волновые поля приведут к уменьшению локальной плотности. Это навело также на мысль, что распадные волны будут разрушаться сами по себе через механизм осциллирующей двухпоточковой неустойчивости (ОДП). При численном моделировании пондермоторная сила, возникающая за счет суперпозиции нескольких распадных волн, вызывает ионные возмущения, в чем можно убедиться по фиг. 6, без привлечения механизма обратных связей для ОДП-неустойчивости. Позднее она ослабевает; характерной особенностью является крутой перепад плотности при ее величине, равной четверти критической (фиг. 5), который на умеренном уровне стабилизирует моду $2\omega_p$.

3. Рамановское и бриллюэновское рассеяние на краю

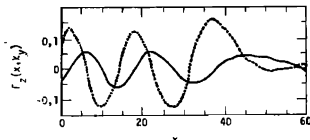
В дальнейшем мы поворачиваем вектор поляризации лазерного света на 90° , так что искомыми полями будут E_x и B_y (в варианте программы ZOHAR размерности $2 \frac{1}{2}$). Это позволяет нам исследовать процессы, происходящие в другой плоскости — бриллюэновское и рамановское рассеяние на краю, — и исключить $2\omega_p$. В этой геометрии рассеянный свет образуется преимущественно в $\pm y$ -направлениях. Затем он дифрагирует и преломляется по направлению к левому краю и выходит из слоя под углом. По этой причине для E_x и B_y используются граничные условия Линдмана, а для E_y и B_x — Синца, как в примере из разд. III, Е, п. 1.

Мы следим за первыми 15 фурье-модами $E_x(x, k_y)$ в различных точках пространства x , так что можно определить спектр, направление и место образования компонент рассеянного света. На фиг. 7 показан спектр рассеянного света (главным образом рамановского), появляющегося на левой границе в моде 7. Спектры мод 1—6 слабее, но в остальном похожи. Временная зависимость амплитуды рассеяния для большинства мод связывается с изменениями профиля плотности. Наиболее выпукло бриллюэновское рассеяние как рассеяние на краю проявляется в моде 12; оно также характеризуется временной зависимостью. Его пространственная структура приведена на фиг. 8.

На последней стадии вычислений образуется интересная зона пониженной плотности (фиг. 9). Подобная структура развивается и в других расчетах при указанной поляризации; факторы, определяющие ее формирование, в настоящее время являются предметом изучения.

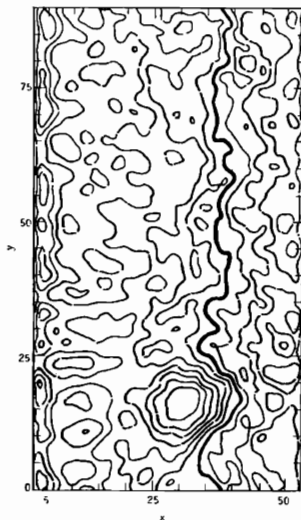


Фиг. 7. Спектр рассеянного света в моде 7 на левой границе демонстрирует в основном рамановское рассеяние (частота $\omega \approx 0,6$, угол выхода 52°) и в меньшей степени бриллюэновское рассеяние.



Фиг. 8. Пространственная структура света после бриллюэновского рассеяния на краю для моды 12.

Точка возникновения находится вблизи его «точки поворота» ($k_z = 0$). При более низких плотностях волна, идущая влево, распространяется быстрее (k_x возрастает) и свет выходит под углом 57° . Сплошная линия соответствует $\text{Re } E_x$, штриховая линия — $\text{Im } E_x$.



Фиг. 9. Плотность ионов в варианте с рассеянием на краю (пример из разд. III, Е, п. 3).

Отчетливо заметно ее уменьшение вблизи поверхности, соответствующей четверти критической плотности (жирная линия). Минимальная плотность в этот момент времени $t=1120$ равна 0,04 критической.

4. Обсуждение

Описанные выше исследования нелинейной эволюции и взаимодействия неустойчивостей, существующих в плазме пониженной плотности, развивались дальше с последовательным учетом усложняющих факторов. В более совершенных моделях вместо простой плоской волны использовался лазерный луч, характеризующийся некоторой пространственной конфигурацией (модель «конечного пятна»), а начальная плотность плазмы являлась функцией не только x , но и y . Подробные физические результаты будут опубликованы в другом месте.

В заключение обсудим два момента, сильно влияющие на практическую полезность этого типа численного моделирования. Первый касается столкновительных времен, а второй связан с плотностью частиц, требуемой для описания скоростного распределения в многомерном случае.

Очень часто утверждалось, что для численного исследования «бесстолкновительного» поведения времени столкновений должны быть намного превосходить длительность расчета. К счастью, это заключение оказалось слишком пессимистичным. Ближе к истине утверждение, что столкновительные времена должны превышать, например, времена экспоненциального нарастания неустойчивостей и времена захвата. В частности, для программы со свободной границей, в которой происходит «подкачка» тепловых частиц и энергии волны, время счета одного варианта обычно может намного превышать указанные времена.

На первый взгляд кажется, что для хорошего описания распределения по скоростям в каждом дебаевском квадрате требуется довольно много частиц. С учетом трех компонент скорости (модель размерности $2\frac{1}{2}$) полное число частиц, которое потребовалось бы в этом случае, совершенно недостижимо. Однако в наших приложениях детали распределения по v_z несущественны, необходимо лишь корректное описание нескольких первых моментов v_z . Как правило, частиц требуется не больше, чем в задаче с двумя компонентами скорости («двумерная модель»). Аналогично для продольной плоской волны, распространяющейся вдоль оси x , несущественны детали распределения по v_y ; необходимо лишь достаточное количество частиц в области, размеры которой порядка квадрата длины волны, чтобы хорошо описать распределение по v_x . Поскольку подобное положение имеет место для каждой из нескольких наложенных волн, распространяющихся в различных направлениях, требуемая плотность частиц намного меньше, чем можно было бы заключить, исходя из опыта численного моделирования одномерных задач. Другими словами, необходимы исчерпывающие

данные о распределении по проекциям скорости, а вовсе не о полном фазовом пространстве¹⁾. Эта экономия является главной причиной, по которой алгоритмы укрупненных частиц успешно конкурируют в многомерном случае с власовскими алгоритмами.

Разумеется, осторожность необходима, но если слишком твердо придерживаться консервативной позиции, то можно и упустить возможность решения интересных прикладных задач.

Ж. РЕАЛИЗАЦИЯ В ОПЕРАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ LTSS 6600-7600 ZONAR

В этом разделе мы обсудим особенности программы ZONAR, обусловленные архитектурой ЭВМ CDC-7600²⁾ и операционной системой LTSS, а также другие моменты программы, не рассмотренные ранее. Большинство этих особенностей присуще и другим программам моделирования, в первую очередь программам укрупненных частиц, и может представлять интерес для широкого круга пользователей, поскольку эта машина и операционная система были выбраны для Национального вычислительного центра по УТС. Многое из приводимого анализа применимо и для машин с другой архитектурой.

1. Хранение полей

По сравнению с электростатической в электромагнитной программе необходимо хранить гораздо больше полевых величин. Обработка частиц включает шесть полевых величин в двумерном случае ($E_x, E_y, B_z, J_x, J_y, \rho$) и десять при размерности $2\frac{1}{2}$ (добавляются B_x, B_y, E_z, J_z). Быстрая память ЭВМ 7600 («малое ядро» или SCM) составляет лишь 2^{16} машинных слов, из которых приблизительно 57 000 LTSS представляет в распоряжение пользователя. Для большинства представляющих в настоящее время интерес приложений в SCM вместе с самой программой можно поместить самое большее одну компоненту поля. В процессе интегрирования уравнений движения для частиц все эти поля необходимо хранить в «большом ядре» (LCM), а находящуюся в нашем распоряжении SCM использовать для

¹⁾ Разумеется, при исследовании некоторых явлений, связанных с УТС, таких, например, как циклотронные гармоники, количество частиц, приходящихся на проекцию скорости, не столь мало, как в приведенном примере, и в таких задачах их может потребоваться во много раз больше.

²⁾ Ссылка на название компании и изделия не означает их одобрения или рекомендации Калифорнийским университетом или Управлением энергетических разработок США с целью исключения всех остальных, которые также могут быть пригодны.

сбора диагностической информации и других целей. В LCM мы имеем доступ к 400 000 слов, часть которых используется для дублирования SCM¹⁾.

К памяти второго уровня LCM можно обращаться двумя способами. Наиболее простой путь заключается в репродукции блоками длиной до 1023 смежных слов на LCM в SCM или обратно. Поначалу эта передача занимает длительное время, но затем действует с очень большой скоростью, равной одному слову за меньший цикл (27,5 нс). Центральный процессор в течение этого времени больше ничем не занят. Можно также обмениваться одиночными словами между LCM- и CPU-регистрами. Чтение одного слова из LCM занимает больше времени по сравнению с чтением из SCM, но гораздо меньше, чем репродукция блоками, причем в течение времени ожидания можно занять центральный процессор. Кроме того, LCM организована в группы по восемь слов: чтение одного слова приводит к копированию всех восьми в «банковский регистр», из которого любое слово можно очень быстро получить до тех пор, пока регистр не переполнен.

Эта особенность была выбрана нами для использования в программе движения частиц. Несколько полевых величин, определенных в одном узле сетки, хранятся вместе, за ними следуют величины, определенные в правом соседнем узле. Тщательная группировка полей и выбор границ для индексов приводят к значительному уменьшению потерь времени на обращение к LCM.

Программа ZONAR хранит в SCM один массив, несколько больший, чем число ячеек. Это ограничивает размер задачи примерно 30 000 ячеек даже при использовании «перекрытий» программы. Однако в модели размерности $2\frac{1}{2}$ аналогичное ограничение на размер задачи накладывает объем LCM. Возможность работы с дополнительным полем массивом значительно облегчает диагностику вычислений и другие операции. Его наличие в SCM увеличивает эффективность, в особенности преобразований Фурье и решения уравнения Пуассона.

Для пространственных преобразований Фурье используется написанная на ассемблере Compass стандартная процедура под общим названием «быстрое преобразование Фурье» (FFT2), на-

¹⁾ Если в LCM помещено две или более программы, то эта особенность дает возможность быстрого предоставления SCM в распоряжение другой программы, находящейся в LCM, когда выполняемая программа больше не занимает центральный процессор (CPU), например при ожидании программой выполнения операторов ввода—вывода. Однако для большой программы, требующей всей доступной памяти, это означает потерю до 57 000 машинных слов, хранимых в LCM.

писанная для ЭВМ 6600 Р. Синглтоном из Станфордского исследовательского института и переработанная для ЭВМ 7600 Л. Слоуном. Эта процедура была выбрана из большого числа стандартных процедур быстрого преобразования Фурье благодаря ее экономичности и простоте использования. Ее скорость достаточно велика для рядов с большим числом членов (например, для ряда с 1024 членами время счета составляет 6,8 мс), но в особенности хорошо благодаря остроумной и простой индексации программы она обращается с «короткими» рядами, возникающими в двумерных задачах. Не нужно ни переписывать строки или столбцы двумерного массива в отдельную рабочую память, ни запоминать таблицы синусов или «двончно-обратимых» индексов. Большинству читателей мы не советуем пытаться разрабатывать собственные алгоритмы быстрого преобразования Фурье для серийного использования: чтобы только оценить сделанное Синглтоном, требуется тщательное и глубокое ознакомление с алгоритмом, не говоря уже о его дальнейшем усовершенствовании.

Большинство эффективных стандартных процедур быстрого преобразования Фурье, включая FFT2, обладает хорошо известным ограничением: число членов ряда должно быть степенью 2. Зачастую приходилось удваивать число узлов сетки, хотя из физических соображений требовалось увеличение лишь на 50%. С одной стороны, необходимость такого расширения сетки означала удорожание расчета, но, с другой стороны, для задачи могло не хватить памяти машины. Чтобы облегчить это положение без значительного уменьшения скорости вычислений, в программе ZOHAR в настоящее время предусмотрено включение в размер сетки одного множителя, равного 3, т. е. число узлов может быть равно как $3 \cdot 2^n$, так и 2^n . Для числа членов ряда, равного $3 \cdot 2^n$ мы используем принцип разложения на множители в быстром преобразовании Фурье в процедуру, которая трижды обращается к FFT2 с числом членов 2^n и производит другие необходимые действия. Стоимость расчета на одку ячейку здесь несколько выше, чем в случае степеней 2. (В варианте со свободной границей число узлов по x произвольно.)

2. Обработка частиц, ввод — вывод и структура данных

В большинстве интересных двумерных задач объема LCM недостаточно для хранения координат всех частиц, поэтому приходится использовать дисковую память. С другой стороны, мы в состоянии хранить одновременно лишь незначительное число частиц в SCM, где они обрабатываются наиболее эффективно. Кстати, было бы желательно одновременно обмениваться хотя бы 10 000 слов между дисками и LCM с тем, чтобы

уменьшить долю времени, проводимого в ожидании установки нужной зоны диска. В этом разделе мы обсудим способы уменьшения времени ввода — вывода и эффективного, но без излишней сложности управления им, а также структуру данных, помогающую выполнять такие «бухгалтерские операции», как уничтожение и рождение частиц.

В процессе пересчета и сбора диагностики в SCM одновременно хранятся координаты нескольких сотен частиц, причем координаты x , y , u_x , u_y одной частицы располагаются в соседних словах с использованием представления с плавающей запятой. В начале «блока» частиц в программе помещается состоящий из 24 слов «коллектор», содержащий информацию о покомпонентном составе плазмы (эти данные используются в программе движения частиц), количестве частиц, находящихся в текущий момент в блоке, временном шаге и т. д.

Программы движения частиц написаны на ассемблере Compass (Р. Джадом и Р. Вильямсом с использованием быстрой процедуры извлечения квадратного корня, разработанной Г. Нельсоном), за исключением раздела, связанного с граничными условиями на левом и правом концах в апериодической версии ZONAR. Эта часть управляется подпрограммой, написанной с целью облегчить возможные изменения, на Фортране, и вызываемой по мере надобности программой движения частиц.

Если блок находится в LCM или на диске, то координаты «упаковываются», например, x и u_x хранятся в различных частях одного слова, состоящего из 60 двоичных разрядов. Двоичные разряды низких порядков для скорости с плавающей запятой заменяются координатой с фиксированной запятой, нормированной на низшую степень 2, но не меньшую, чем размер. Контрольная сумма для блока хранится в коллекторе. Упаковка приблизительно вдвое уменьшает время ввода — вывода и вероятность сбоев диска. Распаковка координат в SCM упрощает диагностику. Соответствующие преобразования оформлены в виде процедуры на ассемблере Compass (написанной М. де Граффом) и занимают очень мало времени.

Полученное в результате отношение времени ввода — вывода к времени работы центрального процессора достаточно мало (если использовать 817-ю или 819-ю модель дисков для CDC), так что предпочтительнее более простой вариант по сравнению с обычной тройной буферизацией (см., например, [6]). При наличии в LCM двух буферов в то время, когда в одном из них происходит обработка частиц, содержимое другого буфера (задействованного в предыдущий момент) переписывается на диск. Когда эта процедура заканчивается, начинается считывание частиц, которые должны обрабатываться следующими. Считывание должно окончиться к моменту завершения полной обработки

первого буфера. Затем эта последовательность операций повторяется с переменной буферов местами. Преимущество двухбуферного варианта перед трехбуферным заключается в том, что требуется лишь один рабочий файл или набор файлов вместо двух, которые должны располагаться на разных дисках. Вдобавок длины записей больше при заданном объеме общего буферного пространства в LCM, что позволяет уменьшить время поиска на диске. При достаточно малом отношении времени ввода — вывода к времени центрального процессора мы гарантированы от любых неприятностей.

Вслед за Д. Фассом мы в конце интегрирования уравнений движения частиц не переписываем на диск последние два буфера. На следующем временном шаге вычисления начинаются с этими буферами и продолжают в обратном порядке. Это экономит, например, до половины времени ввода — вывода, если половина частиц загружена в LCM.

3. Изменения во времени

Поскольку приходится хранить много информации в памяти, мы используем эффективную процедуру ее записи на диски. Различные части программы, вычисляющие величины, которые должны записываться на каждом временном шаге, обращаются к подпрограмме, которая резервирует позицию в буфере. Размер буфера равен $512 + N$, где N — суммарное число различных позиций, которые необходимо записать. Если позиции резервируются вслед за 512-м словом, то в конце временного шага первые 512 слов записываются в файл HISTORY, расположенный на диске, а оставшиеся позиции переписываются в начало буфера. Причина этого заключается в том, что диск модели 817 наиболее эффективно записывается полными секторами, которыми начинаются каждые 512 слов. Число запоминаемых величин обычно равно 15—40, поэтому на большинстве временных шагов запись на диски отсутствует.

В ходе вычислений программа время от времени наносит на графики заполненные данные и производные от них величины в течение временного промежутка, частично совпадающего с последним изображенным на графике интервалом. Буферы частиц представляют удобный большой блок памяти, в который можно переписать нужную порцию файла HISTORY и затем с ней работать. Для анализа результатов счета этих графиков достаточно. Для более тщательной работы у нас есть работающий в диалоговом режиме постпроцессор ZED, который считывает файл HISTORY, производит различные операции с данными (например, отделение энергетического спектра) и рисует графики, причем все это проводится под контролем с телетайпа.

Формат файла HISTORY облегчает интерпретацию данных постпроцессором ZED. Слово «0» является указателем начала мод. Слова от 1 до N представляют собой ASCII-метки, идентифицирующие те N величин, которые должны быть записаны и которые различаются от задачи к задаче. Следующие рекорды, состоящие из $N + 1$ слов каждый, включают номер шага n ($n = -1, 0, \dots$), за которым расположены данные в момент времени $n\Delta t$, за исключением импульсов частиц, которые определяются в момент времени $(n + 0,5)\Delta t$.

Структура той части файла, которая содержит моды, аналогична. Первое слово включает N — число запоминаемых мод. Номер запоминаемой величины и два индекса «упаковываются» в каждое из следующих N слов. Следующие рекорды, состоящие из $N + 1$ слов каждый, представляют собой номер шага $(0, 1, \dots)$ и N обрабатываемых величин. Вместе с модами включаются и другие величины, характеризующиеся двумя индексами, такие, например, как значения полей в заданных точках пространства.

4. Особенности операционной системы

а. *Повторный запуск.* За один раз просчитываются до конца лишь самые маленькие по объему задачи. Поэтому необходимы способы запоминания состояния задачи на то время, пока будут рассмотрены промежуточные результаты вычислений. В рамках LTSS проще всего это сделать с помощью плотной упаковки всех выводимых файлов и переписывания состояния оперативной памяти на диск («сброшенный файл»). Вместо этого мы сделали так, что программа записывает массивы полей и другие нужные данные на дисковый файл STATE, который хранится вместе с файлом HISTORY и файлами частиц. Эта процедура обладает рядом преимуществ: можно продолжать вычисления по новой программе, например с использованием другой диагностики. В частности, задание сложных начальных условий можно осуществлять с помощью отдельной программы или перед продолжением счета внести изменения в задачу посредством воздействия на файл STATE.

б. *Воздействие на ход вычислений.* Часто пользователь стремится сам воздействовать на ход решения задачи, например, в начале вычислений, когда можно часто обнаружить ошибку в составлении программы до того, как будет потеряно много времени. Полезно иметь возможность работать с выполняемой программой в диалоговом режиме с телетайпа. В подходящий момент временного шага ZONAR прочитывает ожидаемое сообщение с телетайпа. Чаще всего это бывает изменение параметров выводимой диагностики или требование об очищении буфе-

ров вывода для того, чтобы рассмотреть графики, не останавливая хода вычислений.

в. Нахождение ошибок и восстановление программы В любой программе, которая считается в течение многих часов, неизбежно встретятся ошибки, связанные с аппаратурой и с программным обеспечением. Для программы укрупненных частиц на LTSS это обычно сбой дисков в файлах частиц либо аналогичные ошибки памяти. Поэтому в целях предосторожности необходимо запоминать состояние задачи через каждые десять минут или около того, чтобы повторно запустить ее после такой ошибки. В программе ZOHAR это осуществляется путем очищения буферов частиц и HISTORY и записью файла STATE, как и при нормальном окончании задачи, и последующим копированием этих файлов. Перед продолжением вычислений эти копии вновь считываются и сравниваются контрольные суммы. Если диски находятся не в лучшем состоянии, то существует неприятная возможность сбоя диска во время ввода — вывода. Для избежания этого требуются два набора дублирующих файлов, причем наши файлы повторного запуска копируются на чередующихся наборах таким образом, что один из комплектов всегда находится в хорошем состоянии. При более длительных интервалах все записывается на ленту.

Для того чтобы обнаружить отказы, не сообщаемые операционной системой программе, каждый коллектор блока частиц содержит номер шага и контрольную сумму блока, которые проверяются и исправляются на каждом шаге. Эта мера представляется необходимой, поскольку именно таким образом обнаруживались частые ошибки, причина которых заключалась в плохом запуске программы.

При сбое программа-«контролер» обращается к стандартной процедуре, которая удаляет файлы изображений и печати и переписывает последний хороший набор дублирующих файлов в рабочие файлы. Затем программа-«контролер» обычным образом вновь запускает ZOHAR.

IV. АЛГОРИТМЫ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ УСТОЙЧИВОСТИ

Для задач с большим числом релятивистских электронов уменьшение в коротковолновом случае фазовой скорости волны, определяемой уравнением (9), до значений, меньших c , приводит к возмущениям, имеющим нефизическую природу. Дж. Бёррис (частное сообщение, 1972), Бёррис и Ли [5] и Хабер и др. [21] упомянули о шуме, вызываемом черенковским излучением частиц, скорости которых больше минимальной фазовой скорости. Годфри [18] рассмотрел коллективные неустойчивости, включающие взаимодействие между релятивистскими электронными

пучками и этими медленными световыми волнами. Это вызвало потребность в программах, в которых световые волны в вакууме распространяются с корректной скоростью, а другие особенности также улучшают устойчивость. Нам кажется, что наилучшими примерами являются старый одномерный алгоритм и его обобщение на двумерный случай.

А. ОДНОМЕРНЫЙ АЛГОРИТМ

По-видимому, первый электромагнитный алгоритм был разработан Дж. Доусоном в 1965 г. Он разделил поперечные поля на составляющие, распространяющиеся влево и вправо. За счет выбора шага по координате $\Delta x = c\Delta t$ пересчет этих компонент во времени осуществляется с помощью простого сдвига значений на одну ячейку и прибавления дополнительных токов от тех частиц, траектории которых пересекают световые лучи [16]. Мы обсудим вариант этого алгоритма, сформулированный и реализованный Лэнгдоном и модернизированный для плазмен-ных исследований Коэном и др. [13].

Складывая и вычитая уравнения Максвелла для $\vec{E}_y$ и B_z , получим два уравнения

$$\left(\pm c \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right) \pm F = -\frac{1}{2} J_y \quad (31)$$

для полей, распространяющихся влево и вправо,

$$\pm F = \frac{1}{2} (E_y \pm B_z). \quad (32)$$

В таких обозначениях $E_y = +F - F$, $B_z = +F - F$, вектор Пойнтинга равен $c(+F^2 - F^2)$, а плотность энергии $+F^2 + F^2$. Определенные на сетке с $\Delta x = c\Delta t$, эти поля пересчитываются во времени в соответствии с формулой

$$*F_i^{n+1} = *F_{i\mp 1}^n - \frac{1}{4} (J_{y,i\mp 1}^{n+1/2} + J_{y,i}^{n+1/2}), \quad (33)$$

где $J_y^{n+1/2}$ и $J_y^{n+1/2}$ обозначают плотности тока, вычисленные по скоростям $v_y^{n+1/2}$, которые в свою очередь определяются на сетке путем линейной интерполяции с весами по координатам x^n и x^{n+1} . Эта процедура соответствует интегрированию уравнения (31) по характеристикам. Как и в электростатических программах, для определения полей в местах нахождения частиц используется линейная интерполяция.

Разностная схема (33) была написана, исходя из требования центрированности по времени (что приводит к обратимости и к погрешности аппроксимации второго порядка) и точного опи-

сания силы реакции излучения¹⁾. Устойчивость же по отношению к нефизическим пучковым модам, отмеченная Козном и проанализированная Годфри и Лэнгдоном [20], является неожиданным подарком.

Этот алгоритм обладает и другими достоинствами: поля определяются в целочисленных узлах по координате i и времени n , что удобно для программы движения частиц и диагностики, без процедур усреднения и разусреднения, описанных в разд. III, В. К тому же, граничные условия для уходящих волн $\pm F$ тривиальны. (Фактически первое приложение этого алгоритма заключалось в исследовании излучения ограниченно-го плазменного слоя в вакууме.)

Б. ДВУМЕРНЫЕ ПРОГРАММЫ, ОСНОВАННЫЕ НА ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУРЬЕ

Для того чтобы получить, как и в предыдущем случае, бездисперсное распространение волн в вакууме и не ограничиваться одномерной геометрией и условием $\Delta x = c\Delta t$, были разработаны программы, в которых поля подвергаются пространственному преобразованию Фурье, а временной пересчет происходит с учетом точного изменения фазы для каждой моды [21, 38]. Обобщить же описанный выше одномерный алгоритм таким образом, чтобы сохранить его специальные свойства устойчивости, пока еще никому не удалось. Однако это можно сделать, если заменить уравнение (32) и (33) на

$$\pm F = \frac{1}{2} (E \mp \hat{k} \times B), \quad \hat{k} = k/k, \quad (32a)$$

и

$$\pm F^{n+1} = e^{\mp i c k \Delta t} \left(\pm F^n - \frac{1}{4} J^{n+1/2} \Delta t \right) - \frac{1}{4} J^{n+1/2} \Delta t. \quad (33a)$$

Записывая (33a) через E и B , получим

$$E^{n+1} = E^n \cos ck \Delta t + i \hat{k} \times B^n \sin ck \Delta t - \frac{1}{2} \Delta t (J^{n+1/2} \cos ck \Delta t + J^{n+1/2}), \quad (34a)$$

$$B^{n+1} = B^n \cos ck \Delta t - i \hat{k} \times E^n \sin ck \Delta t + i \frac{1}{2} \Delta t \hat{k} \times J^{n+1/2} \sin ck \Delta t. \quad (34b)$$

¹⁾ В одномерном случае радиационное трение $(\dot{\gamma}_v)_{\text{вкл}} = -v_y q^2 / 2mc$ пропорционально скорости — удивительный результат, который можно согласовать с трехмерным случаем точечных частиц, если учесть излучение от движущейся заряженной сферической оболочки в пределе большого и малого отношения (радиус/длина волны). Отсутствие быстрого излучения плазменным слоем своей тепловой энергии можно объяснить с помощью излучательных нормальных мод этого слоя [28].

И наиболее простым представляется коррекция $\nabla \cdot \mathbf{E}$, после чего $\mathbf{E}^n$, $\mathbf{J}^{n+1/2}$ и $\mathbf{J}^{n+1/2}$ могут включать как поперечные, так и продольные составляющие.

Заметим, что теперь для устойчивости в вакууме никакого условия Куранта на шаг Δt не накладывается.

В двумерном случае затруднение может вызвать нахождение двух плотностей тока. Плотность тока $\mathbf{J}^{n+1/2} = 1/2 (\mathbf{J}^{n+1/2} + \mathbf{J}^{n+1/2})$ из разд. III. В можно было бы подставить в выражения для токов в (34) либо частично учесть при вращении:

$$\pm \mathbf{F}^{n+1} = e^{\mp i c k \Delta t / 2} (\pm \mathbf{F}^n e^{\mp i c k \Delta t / 2} - \mathbf{J}^{n+1/2} \Delta t / 2),$$

которое изменяет вклады токов в уравнениях (34а) и (34б) на $-\mathbf{J}^{n+1/2} \Delta t \cos c k \Delta t / 2$ и $i \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{J}^{n+1/2} \Delta t \sin c k \Delta t / 2$ соответственно. Эти и другие выборы (см., например, [21]) согласуются до величин порядка Δt^2 , но отличаются своей устойчивостью при $c k \Delta t \gtrsim \pi / 2$.

V. SUPERLAYER

SUPERLAYER представляет собой наиболее развитую из серии программ, разработанных для моделирования образования цилиндрических слоев релятивистских электронов в экспериментах на установке «Астрон» в Ливерморе. Как и предполагалось ранее, ряд импульсов из ускорителя электронов укладывался бы «в кучу» в одном слое, пока плотность тока не превысила бы некоторого значения, достаточного для изменения на обратное направления аксиального магнитного поля внутри «E-слоя». Такая конфигурация обеспечивает устойчивое удержание и нагрев плазмы «E-слоя».

Особенный интерес эта программа моделирования укрупненными частицами представляет скорее в качестве инструмента проектирования, а не в качестве средства исследования мелко-масштабных фундаментальных плазменных явлений. Программа SUPERLAYER использовалась для оптимизации параметров эксперимента и для опробования новых идей. Степень влияния эксперимента и расчета друг на друга, по всей видимости, беспрецедентны в исследованиях по УТС. Программирование стимулирует также радикальный пересмотр некоторых основных теоретических положений, связанных с процессом группировки частиц. Программа SUPERLAYER обсуждалась также Бретшнейдером и др. [7]; более поздние детали программистской работы и подробные результаты исследований на «Астроне» приведены в работе Байерса и др. [12].

В контексте этой статьи представляют интерес некоторые особенности самой программы. Поля определяются через потенциалы A и ϕ , связанные обычно условием лоренцевой калибров-

ки. Уравнение для волн интегрируется с помощью неявной схемы переменных направлений. Использование неявной схемы позволяет снять ограничения на величину временного шага, которая в противном случае определялась бы малыми зарядовыми временами релаксации для резистивных слоев в установке. Она также приводит к затуханию решений волновых уравнений по отношению к потенциалам в модели Дарвина (см. статью Нильсона и Льюиса в этом томе), сохраняя в то же время запаздывание для процессов с малыми характерными временами. Этот мостик между полностью электромагнитной и магнитно-индукционно-электростатической крайними моделями соответствует физическим требованиям «Астроны», особенностью которого являются быстрые переходные процессы и в то же время отсутствие осциллирующих полей (резонаторных мод) в аксиально-симметричном случае, который можно изучать с помощью программы SUPERLAYER.

В настоящее время эта программа используется для исследования процесса создания плазмы при инжекции нейтральных пучков в экспериментах на установках с магнитными пробками.

БЛАГОДАРНОСТИ

При создании программы ZOHAR использовались идеи многих ученых: Ч. Бёрдсола, Дж. Бориса, О. Буземана, Дж. Доусона, К. Эстабрука, Д. Фаска, Э. Линдмана, Б. Макнамары и Э. Валео. Нам очень помог опыт К. Эстабрука в расширении и применении варианта ZOHAR. Р. Джад и Р. Уильямс написали на ассемблере программу интегрирования уравнений движения для частиц, столь необходимую для успешного проведения расчетов. Мы признательны также Дж. Бёрнсу за его поддержку в начале проекта и участие на ранних этапах его планирования и У. Круеру за постоянную поддержку и советы.

Эта работа выполнялась по контракту № W-7405-ENG-48 с Управлением энергетических исследований и разработок США.

Литература

1. Birdsall C. K., Fuss D., J. Comput. Phys., 3, 494 (1969).
2. Birdsall C. K., Kamimura T., Plasma Computer Experiments in Three Dimensions, Report IPPJ-55, Institute of Plasma Physics, Nagoya University, Nagoya, Japan, 1966.
3. Biskamp D., Weller H., Phys. Rev. Lett., 34, 312 (1975).
4. Boris J. P., in Proceedings of the Fourth Conference on the Numerical Simulation of Plasmas, eds. Boris J. P. and Shanny R. A., U. S. Govt. Printing Office, Washington, D. C., 1970, Stock 0851 00059, p. 3.
5. Boris J. P., Lee R., J. Comput. Phys., 12, 131 (1973).
6. Boris J. P., Roberts K. V., J. Comput. Phys., 4, 552 (1969).
7. Breitschneider M., Killeen J., Mirin A. A., J. Comput. Physics, 11, 360 (1973).
8. Buneman O., J. Comput. Physics, 1, 517 (1967).

9. Buneman O., in *Relativistic Plasmas*, eds. Buneman O. and Pardo W., Benjamin, New York, 1968, p. 205.
10. Buneman O., *J. Comput. Phys.*, **12**, 124 (1973).
11. Burger P., Dunn D. A., Halstead A. S., *Phys. Fluids*, **8**, 2263 (1965).
12. Byers J. A. et al., *Phys. Fluids*, **17**, 2061 (1974).
13. Cohen B. I. et al., *Phys. Fluids*, **18**, 470 (1975).
14. Cooley J. W., Lewis P. A. W., Welch P. D., *J. Sound Vib.*, **12**, 315 (1970).
15. Dawson J. M., *Methods Comput. Phys.*, **9**, 1 (1970). (Имеется перевод: в кн. *Вычислительные методы в физике плазмы*. — М.: Мир, 1974.)
16. Dawson J., Langdon A. B., *Bull. Amer. Phys. Soc.*, **12**, 806 (1967).
17. de Leon, Moses (~1280), *Sefer ha-Zohar*.
18. Godfrey B. B., *J. Comput. Phys.*, **15**, 504 (1974).
19. Godfrey B. B., *J. Comput. Phys.*, **19**, 68 (1975).
20. Godfrey B. B., Langdon A. B., *J. Comput. Phys.*, **20**, 251 (1975).
21. Haber I. et al., in *Proceedings of the Sixth Conference on Numerical Simulation of Plasmas*, Lawrence Livermore Laboratory, Livermore, California, 1973, CONF-730804, Paper B3.
22. Harlow F. H., *J. Ass. Comput. Mach.*, **3—4**, 137 (1956—1957).
23. Harlow F. H., in *Methods Comput. Phys.*, **3**, 319 (1964). (Имеется перевод: в кн. *Вычислительные методы в гидродинамике*. — М.: Мир, 1967.)
24. Hockney R. W., *J. Ass. Comput. Mach.*, **12**, 95 (1965).
25. Hockney R. W., *Phys. Fluids*, **9**, 1826 (1968).
26. Hockney R. W., in *Methods Comput. Phys.*, **9**, 135 (1970). (Имеется перевод: в кн. *Вычислительные методы в физике плазмы*. — М.: Мир, 1974.)
27. Jackson J. D., *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York, 1962, pp. 616—618. (Имеется перевод: Джексо́н Дж. *Классическая электродинамика*. — М.: Мир, 1965.)
28. Langdon A. B., Ph. D. Thesis, Princeton University, Princeton, New Jersey, 1969.
29. Langdon A. B., *J. Comput. Phys.*, **6**, 247 (1970).
30. Langdon A. B., in *Proceedings of the Fourth Conference on the Numerical Simulation of Plasmas*, eds. Boris A. B. and Shanny R. A., US Govt. Printing Office, Washington, D. C., 1970.
31. Langdon A. B., *Phys. Fluids*, **15**, 1149 (1972).
32. Langdon A. B., *J. Comput. Phys.*, **12**, 247 (1973).
33. Langdon A. B., Birdsall C. K., *Phys. Fluids*, **13**, 2115 (1970).
34. Langdon A. B., Lasinski B. F., *Phys. Rev. Lett.*, **34**, 934 (1975).
35. Langdon A. B., Lasinski B. F., Kruer W. L., *Plasma Heating at One-Quarter Critical Density*, Report UCRL-75013, Lawrence Livermore Laboratory, Livermore, California, 1973.
36. Lee R., Lampe M., *Phys. Rev. Lett.*, **31**, 1390 (1973).
37. Lewis H. R., *J. Comput. Phys.*, **10**, 400 (1972).
38. Lin A. T., Dawson J. M., Okuda H., *Phys. Fluids*, **17**, 1995 (1974).
39. Lindman E. L., in *Proceedings of the Sixth Conference on Numerical Simulation of Plasmas*, Lawrence Livermore Laboratory, Livermore, California, 1973, CONF-730804, Paper B2.
40. Lindman E. L., *J. Comput. Phys.*, **18**, 66 (1975).
41. Morse R. L., Nielson C. W., *Phys. Fluids*, **12**, 2418 (1969).
42. Morse R. L., Nielson C. W., *Phys. Fluids*, **14**, 830 (1971).
43. Nielson C. W., Lindman E. L., in *Abstracts of the Sherwood Theory Meeting*, University of Texas, Austin, 1973, Paper D9.
44. Nielson C. W., Lindman E. L., in *Proceedings of the Sixth Conference on Numerical Simulation of Plasmas*, Lawrence Livermore Laboratory, Livermore, California, 1973, CONF-730804, Paper E3.
45. Orens J. H., Boris J. P., Haber I., in *Proceedings of the Fourth Conference on Numerical Simulation of Plasmas*, eds. Boris J. P. and Shanny R. A., US Govt. Printing Office, Washington, D. C., 1970, Stock 0851 00055, p. 526.

46. *Panofsky W. K. H., Phillips M.*, Classical Electricity and Magnetism, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1962. (Имеется перевод: Пановский В. Филипп М. Классическая электродинамика. — М.: Физматгиз, 1963.)
47. *Sinz K.*, in Proceedings of the Fourth Conference on Numerical Simulation of Plasmas, eds Boris J. P. and Shanny R. A., US Govt. Printing Office, Washington, D. C., 1970, Stock 0851-00059, p. 153.
48. *Van Duzer J., Birdsall C. K.*, Plasma Computer Simulation: A Bibliography for 1950—1970, Department of Electrical Engineering and Computer Sciences, University of California, Berkeley, 1971.
49. *Yu S. P., Kooyers G. P., Buneman O.*, J. Appl. Phys., **36**, 2550 (1965).

**МОДЕЛИ УКРУПНЕННЫХ ЧАСТИЦ
В БЕЗЫЗЛУЧАТЕЛЬНОМ ПРЕДЕЛЕ***К. Нильсон, Г. Льюис¹⁾***I. ВВЕДЕНИЕ**

Большинство коллективных эффектов, с которыми сталкиваются в плазме, представляющих интерес для термоядерного синтеза на основе магнитного удержания, по своему характеру являются нерелятивистскими и безызлучательными. Даже если излучение играет существенную роль, отдельное рассмотрение оставшихся явлений может быть полезным. Подобное разделение является обычной процедурой во многих задачах аналитической теории плазмы, когда принимаются справедливые для определенного диапазона параметров приближения и детально исследуются следствия. В частности, можно в дисперсионном соотношении определить и не учитывать радиационные члены или с самого начала пренебречь током смещения.

В случае моделирования укрупненными частицами существует дополнительная неустранимая причина, по которой излучение, если только оно не является решающим физическим фактором, следует исключить из рассмотрения. Из-за ограниченного числа частиц, которое можно практически использовать при численном моделировании, уровни флуктуаций плотностей заряда и тока обычно гораздо выше, чем в реальной плазме, представляющей собой объект моделирования. Методы сглаживания существенно улучшают положение, но полностью проблему не устраивают. В замкнутой моделируемой системе нормальные моды электромагнитного поля возбуждаются в конечном счете до неестественно высокого уровня, что может привести к искажению или затемнению важных физических эффектов. В таких случаях значительную ценность представляют безызлучательные алгоритмы моделирования плазмы.

Преимущество работы в области моделирования укрупненными частицами заключалось фактически в его безызлучательном характере: алгоритм был полностью электростатическим. С другой стороны, многие последние достижения в электромагнитном моделировании были по необходимости полностью элек-

¹⁾ *Clair W. Nielson, H. Ralph Lewis, University of California, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, New Mexico.*

ромагнитными, поскольку их основное приложение состояло в исследовании взаимодействия лазерного излучения с плазмой [11, 14, 26]. Литература по безызлучательному электромагнитному моделированию до некоторой степени ограничена. Для исследования бесстолкновительных ударных волн, распространяющихся перпендикулярно к магнитному полю, Ауэр и др. [1] разработали однокомпонентную одномерную безызлучательную модель плоских листов. В их модели магнитное поле и ток являются самосогласованными, а эффекты разделения зарядов рассматривались в приближении квазинейтральности. Хасегава и Бэрдсол [15] разработали одномерную безызлучательную модель плоских листов для исследования ионно-циклотронных волн с самосогласованными магнитным и поперечным электрическим полями. Электростатические эффекты не учитывались. Хасегава и Окуда [16] описали в более общем виде одномерную безызлучательную модель плоских листов, включающую электростатику. В их работе требовалось, чтобы магнитное поле не имело компоненты в направлении, параллельном направлению движения листов. Дикман и др. [9] создали с использованием формулировки на языке частиц и ячеек двумерную программу с включением самосогласованных электромагнитных эффектов, вызываемых токами, протекающими нормально к плоскости, в которой проводятся вычисления. Эта программа применялась для изучения нелинейной эволюции зеркальных неустойчивостей и тиринговых мод. Хабер и др. [13] описали полностью самосогласованный одномерный безызлучательный алгоритм, использующий метод частиц и ячеек. Подобные программы, разработанные и в других местах, широко применялись для исследования нелинейных микротурбулентных эффектов в одномерном случае. Одна из них — ЕМI-программа Форсланда и др. [10] — распространена в упрощенном, относительно независимом от типа ЭВМ виде.

Несколько странно, что эти программы, даже одномерные, оказались значительно сложнее своих полностью электромагнитных аналогов. Более того, обнаружено, что обобщение одномерных алгоритмов либо частного двумерного алгоритма на общий двумерный случай является отнюдь не простым делом. Цель этой главы и заключается в том, чтобы в рамках общего описания установить место полученных результатов и сформулировать общий алгоритм моделирования плазмы без излучения.

II. МОДЕЛЬ ДАРВИНА

Приближенный вид системы уравнений Максвелла — Лоренца, соответствующий малым v/c , впервые был предложен Дарвином [8], который использовал его для обобщения модели

атома Бора — Зоммерфельда. Вывод этого приближения хорошо изложен в книгах Ландау и Лифшица [21] и Джексона [18]. Дополнительные особенности модели получены Кауфманом и Ростлером [19]. В этом разделе мы опишем только те свойства модели, которые будут существенно использоваться в дальнейшем.

Лагранжиан для движения заряженной частицы в заданных внешних электрических и магнитных полях хорошо известен:

$$L_{\text{эл}} = -q\varphi + \frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}, \quad (1)$$

а лагранжиан системы частиц получается отсюда суммированием [12]. Если поля априори не заданы, а являются, хотя бы частично, самосогласованными, создаваемыми самими частицами, то для полного лагранжева описания такой системы частиц и полей необходимо, чтобы моды электромагнитного поля учитывались в качестве дополнительных степеней свободы [12, 25, 27, 31].

Цель дарвиновского вывода заключается в получении возможно более точного лагранжиана для системы полей и частиц, который выражался бы непосредственно через запаздывающие координаты и скорости частиц. Такой лагранжиан полностью исключает излучение, потому что его структура соответствует мгновенному дальновдействию на расстоянии. На первый взгляд можно было бы ожидать, что этим способом нельзя описать ничего, кроме электростатики и магнитостатики. Удивительно, что в приближении Дарвина лагранжиан является точным до величин порядка $(v/c)^2$ и содержит электромагнитные эффекты, которые иногда называются индуктивными, т. е. эффекты, связанные с законом Фарадея.

Для постоянной задачи явный вид лагранжиана не нужен. Эффективность современных методов моделирования частицами в ячейках по сравнению с предшествующими моделями плоских листов является главным образом следствием того, что вычисления проводятся в терминах полей с пространственной зависимостью, а не в терминах парных столкновений, и, таким образом, количество операций, пропорциональное N^2 , уменьшается до величины, пропорциональной N , где N — число частиц, используемых при моделировании. По этой причине желательно выразить полевые величины в дарвиновском приближении через координаты и скорости частиц, а затем с помощью последующих действий найти силу, действующую на каждую частицу со стороны этих полей. Тот факт, что силы могли бы быть непосредственно получены из многочастичного лагранжиана, является важным напоминанием о том, что уравнения описывают модель, относящуюся к данному моменту, без запаздывания, одна-

ко сам по себе многочастичный лагранжиан непосредственной вычислительной ценности не имеет.

При работе с кулоновской калибровкой приближенного описания для скалярного потенциала не требуется; он уже не содержит запаздывания и удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho. \quad (2)$$

Точный вектор-потенциал удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_t, \quad (3)$$

в котором $\mathbf{J}_t$ обозначает соленоидальную часть тока. Используя уравнение непрерывности, нетрудно показать [18], что

$$\mathbf{J}_t = \mathbf{J} - \frac{1}{4\pi} \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right). \quad (4)$$

Решение уравнения (3) можно записать, используя метод запаздывающего потенциала, в виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}_t(\text{запаздывающий})}{R} dV, \quad (5)$$

в котором $\mathbf{J}_t$ (запаздывающий) — запаздывающая величина поперечного тока в точке источника. Так как запаздывание определяется только разностью между этим решением и решением уравнения Пуассона, пренебрежение запаздыванием эквивалентно отбрасыванию члена с временной производной в уравнении (3). Менее тривиальный результат состоит в том, что это приближение сохраняет точность в лагранжиане взаимодействия вплоть до порядка $(v/c)^2$. Это справедливо по трем причинам: во-первых, векторный потенциал $\mathbf{A}$ умножается в лагранжиане взаимодействия на (v/c) ; во-вторых, вклад наименьшего порядка в $\mathbf{A}$ в уравнении (5) уже имеет порядок (v/c) и, в-третьих, первая поправка к $\mathbf{A}$ за счет запаздывания, обусловленная движением частиц во времени (R/c) , пропорциональна $(v/c)^2$, так что поправка за счет запаздывания в лагранжиане взаимодействия имеет порядок $(v/c)^3$.

Комбинируя это приближение уравнения (3) с (4), получим окончательно уравнение дарвиновского приближения для вектор-потенциала

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (6)$$

с условием $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. От более простого представления, соответствующего «пренебрежению током смещения», уравнение (6) отличается тем, что остается продольная часть тока смещения $\nabla(\partial\phi/\partial t)$. Этот член необходим для того, чтобы обеспечить справедливость уравнения непрерывности заряда.

Интересно записать уравнения непосредственно в терминах электрических и магнитных полей, которые являясь калибровочно-инвариантными и легче интерпретируются. Выразим для этого электрическое поле через продольную и поперечную составляющие, обозначенные соответственно E_1 и $E_\perp$ и определенные условиями $\nabla \times E_1 = 0$ и $\nabla \cdot E_\perp = 0$. Уравнения поля в модели Дарвина можно теперь записать в виде

$$\begin{aligned} \nabla \cdot E_1 &= 4\pi\rho, & \nabla \times E_1 &= 0, \\ \nabla \times B &= \frac{4\pi}{c} J + \frac{1}{c} \frac{\partial E_1}{\partial t}, & \nabla \cdot B &= 0, \\ \nabla \times E_\perp &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, & \nabla \cdot E_\perp &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Записанные таким образом уравнения поля только одним членом отличаются от точных уравнений Максвелла, а именно отброшенной производной по времени от поперечного электрического поля. Тем не менее это простое изменение существенно меняет их характер: приближенные уравнения Максвелла, связанные с уравнениями движения частиц через источники, имеют эллиптический, а не гиперболический тип. Подробное доказательство этого утверждения будет дано позже, а здесь заметим, что эллиптичность с вычислительной точки зрения имеет большое значение. При решении уравнений Максвелла временные производные можно использовать для пересчета полей, в то время как уравнения с дивергенцией служат начальными условиями, которые сохраняются во времени благодаря уравнению непрерывности заряда. Действительно, некоторые полностью электромагнитные алгоритмы моделирования работают точно таким образом [2, 4, 28]. Однако любая попытка использовать подобным образом временные производные в дарвиновских уравнениях поля приведет к сильным численным неустойчивостям. Эти неустойчивости отражают тот факт, что уравнения поля теперь являются эллиптическими и описывают мгновенное взаимодействие. Любая попытка передать через ячейку информацию с конечной скоростью противоречит приближению без запаздывания. Преобразование уравнений поля модели Дарвина, представляющее в явном виде их эллиптический характер, будет приведено в разд. IV.

III, ГАМИЛЬТОНОВО ОПИСАНИЕ

В разд. I упоминались некоторые программы численного моделирования в рамках модели Дарвина. Большинство их выражается в гамильтоновой форме, т. е. подразумевается, что движение частиц описывается через гамильтоновы переменные, координату x и канонический импульс p . Так как ни один из пре-

дыдущих алгоритмов для модели Дарвина нельзя непосредственно обобщить на случай большей размерности, мы заново проведем гамильтоново описание в форме, наиболее приспособленной для такого обобщения. Оказывается, что если ограничить наше описание одномерным случаем, то оно приводит к методу, похожему на использованный ранее, но более простому.

Для нахождения гамильтониана из лагранжиана воспользуемся стандартной процедурой [12], что дает

$$H = \sum_i \left[\frac{1}{2m_i} \left(p_i - \frac{q_i}{c} \mathbf{A} \right)^2 + q_i \phi \right], \quad (18)$$

где p_i — канонический импульс i -й частицы, $\mathbf{A}$ и ϕ вычисляются в точках нахождения частиц, а q_i и m_i — заряд и масса i -й частицы. Соответствующие уравнения движения Гамильтона имеют вид

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \frac{q_i}{m_i c} (\nabla_{\mathbf{r}_i} \mathbf{A}) \cdot \left[\mathbf{p}_i - \frac{q_i}{c} \mathbf{A} \right] - q_i \nabla_{\mathbf{r}_i} \phi, \quad (9a)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{1}{m_i} \left[\mathbf{p}_i - \frac{q_i}{c} \mathbf{A} \right], \quad (9b)$$

где потенциалы вычисляются в точке нахождения i -й частицы.

Плотности зарядов и токов ρ и $\mathbf{J}$ как функции координаты $\mathbf{x}$ и времени t можно выразить через переменные, характеризующие частицы:

$$\rho = \sum_s q_s n_s, \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \sum_s q_s n_s \langle \mathbf{v}_s \rangle = \\ &= \sum_s \frac{q_s}{m_s} n_s \langle \mathbf{p}_s \rangle - \left(\sum_s \frac{q_s^2}{m_s c} n_s \right) \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (10b)$$

где индекс s обозначает сорт частиц, n_s — объемная плотность частиц сорта s , а $\langle \mathbf{v}_s \rangle$ и $\langle \mathbf{p}_s \rangle$ — соответственно средняя скорость и средний канонический импульс частиц сорта s как функции координат и времени.

Подставляя плотности зарядов и токов в уравнения для дарвиновских потенциалов (2) и (6), получим

$$\nabla^2 \phi = -4\pi \left(\sum_s q_s n_s \right), \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} &= - \sum_s \frac{4\pi q_s}{m_s c} n_s \langle \mathbf{p}_s \rangle + \\ &+ \left(\sum_s \frac{4\pi q_s^2}{m_s c^2} n_s \right) \mathbf{A} + \frac{1}{c} \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (11b)$$

Если пространственная зависимость носит одномерный характер, то эти уравнения упрощаются: поперечные компоненты A и ϕ полностью расщепляются, а компонента A в направлении изменения вследствие соотношения $\nabla \cdot A = 0$ равна константе. Эти упрощения существенно использовались в предыдущих алгоритмах для модели Дарвина. Однако одномерная пространственная зависимость в действительности приводит к некоторым дополнительным трудностям, так как постоянное магнитное поле в направлении изменения нельзя определить в виде ротора вектор-потенциала и его приходится учитывать специальным образом.

Если в двумерный или трехмерный алгоритм включены все члены, то член $\nabla \phi$ связывает компоненты уравнения для вектор-потенциала. При попытке решить эти уравнения первое существенное замечание заключается в том, что ϕ не нужно вычислять с помощью разностной аппроксимации по времени, что обусловлено мгновенным характером действия сил в этой модели, и фактически уравнения для A с условием $\nabla \cdot A = 0$ представляют четыре соотношения для четырех неизвестных, которые достаточны для определения A и ϕ , разумеется при соответствующих граничных условиях. Оказалось, что детальный алгоритм решения этой системы связанных уравнений поля является наиболее трудным моментом реализации дарвиновского приближения в двумерном случае. Метод решения этих уравнений описан в разд. V.

Разностную аппроксимацию по времени уравнений движения частиц (9a) и (9b) можно проделать множеством способов. Прежде при разработке алгоритмов моделирования зачастую считалось обязательным требование точной обратимости. Приводимые при этом аргументы временами носили больше умозрительный, нежели вычислительный характер, и мы чувствуем, что обратимость несущественна. Хотя обратимые схемы, возможно, и характеризуются хорошей устойчивостью, они определенно не являются единственными схемами с подобными свойствами.

В полностью электромагнитных программах применялись другие схемы второго порядка точности с результатами, практически неотличимыми от результатов, полученных по программам, в основе которых лежали обратимые алгоритмы [28, 29].

В случае дарвиновского приближения в большинстве вышеупомянутых алгоритмов обратимость действительно задается в качестве необходимого требования. Однако это приводит к сильно неявным алгоритмам для уравнений поля, использование которых в случае двух или трех измерений практически исключается. Освобождаясь от требования обратимости при разностной аппроксимации уравнений движения частиц, мы получим

уравнения, которые независимо от размерности задачи решаются достаточно эффективно. В одномерном случае упрощение экономит и память, и время счета. Представленные в разд. VI детальные сравнения наводят на мысль о том, что в дарвиновском приближении, как и в полностью электромагнитном случае, нельзя обнаружить существенной разницы, обусловленной точной обратимостью в алгоритме моделирования.

Сейчас мы укажем особую разностную аппроксимацию по времени для уравнений движения частиц. Пусть импульсы p сохраняются на полудельтах, а координаты x — на целых временных слоях. Кроме того, предположим, что потенциалы A и ϕ можно при необходимости вычислить либо на целых, либо на полудельтах временных слоев. Тогда импульсы и координаты пересчитываются следующим образом:

$$\frac{p^{1/2} - p^{-1/2}}{\Delta t} = \frac{q}{mc} (\nabla A^0) \cdot \left[\frac{1}{2} (p^{1/2} + p^{-1/2}) - \frac{q}{c} A^0 \right] - q \nabla \phi^0, \quad (12a)$$

$$\frac{x^1 - x^0}{\Delta t} = \frac{1}{m} \left(p^{1/2} - \frac{q}{c} A^{1/2} \right), \quad (12b)$$

где верхние индексы соответствуют стандартным обозначениям временных слоев. Решение неявных уравнений для компонент p не представляет затруднений, поскольку в них содержатся координаты только одной частицы. Эти уравнения были бы обратимыми, если бы алгоритм определения A^0 и $A^{1/2}$ и ϕ^0 был обратимым. Действительно, это справедливо в полностью электромагнитной программе, в которой используется явная по времени схема решения волнового уравнения. Однако для модели Дарвина обратимость, за исключением одномерного случая, практически отсутствует.

По уравнениям (12) следует заметить, что потенциалы в каждый момент времени должны иметь погрешность только порядка Δt , если от конечных разностей для p и x требуется точность $(\Delta t)^2$, которой они и характеризуются при условии, что накапливающиеся ошибки в p и x должны быть порядка Δt .

Положение здесь следует отличать от полностью электромагнитного случая, когда потенциалы экстраполируются во времени, и вследствие этого их разностные аппроксимации должны быть порядка $(\Delta t)^2$. В этом случае мы находим A^0 следующим образом. В конце предыдущего шага по времени, перед взятием взвешенных значений импульса, используемых в источнике в уравнении поля для A , мы экстраполируем каждое значение p вперед на дополнительные полшага по времени к $\hat{p}^0$, беря ту же самую скорость изменения, которая использовалась при нахождении оставленного значения $p^{-1/2}$. Эта величина $\hat{p}^0$ будет иметь только первый порядок точности, но, поскольку она используется лишь однажды, первый порядок точности достато-

чен. При решении полевых уравнений просуммированные значения r^0 используются для нахождения величины A^0 , которая также будет иметь первый порядок точности по времени. Значение A^0 , необходимое для пересчета координат, в многомерном случае находится с помощью простой экстраполяции A^0 и оставленных значений A^{-1} . Накопление плотности, требующееся в обоих уравнениях поля, также проводится в конце временного шага, и в этом примере действительно имеется второй порядок точности по времени — факт, не имеющий особых последствий. Указанная выше последовательность шагов равносильна методу «предиктор—корректор», в котором предиктором является линейная экстраполяция от прошлых значений потенциала, а корректор представляет собой закон Ампера, выраженный уравнением (116).

Обсужденный выше анализ погрешности не гарантирует вычислительной устойчивости. Действительно, аналогичная процедура в лагранжевой формулировке сильно неустойчива. Тем не менее эмпирические исследования гамильтонова алгоритма в одномерном случае продемонстрировали устойчивость и точность, сравнимую с точностью полностью обратимых алгоритмов (см. разд. VI). Более того, как будет показано в следующем разделе, неустойчивость в лагранжевом случае обусловлена явной конечно-разностной аппроксимацией по времени $\delta A/\delta t$, которая не нужна при гамильтоновом описании. По этой причине мы считаем, что предшествующий гамильтонов алгоритм окажется устойчивым и точным в двумерных и трехмерных программах.

IV. ЛАГРАНЖЕВО ОПИСАНИЕ

Формулировка дарвиновского приближения в терминах силы Лоренца, закона Ньютона и системы уравнений поля привлекательна вследствие прямого и наглядного характера такого описания. Большинство программ моделирования выражается в таких же терминах, и мы говорим о формулировке как о лагранжевой, если движение частиц описывается в лагранжевых переменных, которыми являются координата x и скорость v . Однако, используя лагранжево описание совершенно аналогично тому, как это делается в полностью электромагнитных алгоритмах, вычислитель обнаружит, что из-за сильной численной неустойчивости расчет расстроится за несколько временных шагов. В этой статье ранее уже упоминалось об этой трудности, которая, как было установлено, обусловлена противоречием в анализе того факта, что модель Дарвина описывает мгновенное дальноедействие. Прежде чем сформулировать удовлетворительный лагранжев алгоритм, мы поясним природу этой неустойчивости на простом примере.

Рассмотрим движение заряженной жидкости перпендикулярно оси x в дарвиновском приближении. Пусть все величины меняются только в x -направлении, и пусть $\mathbf{A}$, скорость жидкости $\mathbf{v}$ и ток $\mathbf{J}$ перпендикулярны оси x , а плотность n постоянна. Тогда уравнения, описывающие систему в лагранжевых переменных, имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E}, \\ \nabla^2 \mathbf{A} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} = -\frac{4\pi}{c} qn\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (13)$$

Типичная разностная аппроксимация, включающая экстраполяцию $\mathbf{A}$ для нахождения $\mathbf{E}$, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^0 &= -\frac{\mathbf{A}^{-1/2} - \mathbf{A}^{-1/2}}{c \Delta t}, \\ m \frac{\mathbf{v}^{1/2} - \mathbf{v}^{-1/2}}{\Delta t} &= q\mathbf{E}^0, \\ \nabla^2 \mathbf{A}^{1/2} &= -\frac{4\pi}{c} qn\mathbf{v}^{1/2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Комбинируя члены и учитывая, что $\omega_p^2 = 4\pi n q^2 / m$, получим

$$\nabla \mathbf{A}^{1/2} - \nabla \mathbf{A}^{-1/2} = \frac{\omega_p^2}{c^2} (\mathbf{A}^{-1/2} - \mathbf{A}^{1/2}). \quad (15)$$

Полагая $\mathbf{A} = \mathbf{A}^0 e^{i(kx + \omega t)}$, приходим к уравнению

$$e^{i\omega \Delta t} = -\frac{\omega_p^2}{(kc)^2}. \quad (16)$$

решение которого

$$\omega = \frac{(2j+1)\pi}{\Delta t} - i\gamma, \quad (17)$$

где

$$e^{\gamma t} = \frac{\omega_p^2}{(kc)^2}, \quad (18)$$

а j — целое. Это означает, что решение расходится с меняющимся знаком для любого k , меньшего, чем ω_p/c . Для задач, в которых характерный размер в несколько раз превышает c/ω_p , это соответствует сильной неустойчивости, которая делает вычисление непригодным для использования за несколько временных шагов. Экстраполяция $\mathbf{A}$ по формулам более высокого порядка точности приводит к количественным, а не качественным изменениям в поведении и не имеет практического значения.

Необходим принципиально другой подход для определения E_1 . Во-первых, определение E_1 и B проводится относительно простым способом с помощью решения системы уравнений

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_s q_s n_s, \quad \nabla^2 \phi = -4\pi\rho, \quad E_1 = -\nabla\phi, \\ J &= \sum_s q_s n_s \langle v_s \rangle, \quad \nabla^2 A = -\frac{4\pi}{c} J + \frac{1}{c} \nabla\phi, \\ \nabla \cdot A &= 0, \quad B = \nabla \times A.\end{aligned}\quad (19)$$

Как и в гамильтоновом формализме, эти уравнения благодаря условию $\nabla \cdot A = 0$ определяют ϕ непосредственно без каких-либо разностных производных по времени. Чтобы получить уравнение для E_1 , продифференцируем закон Ампера в уравнениях (19) по времени и используем равенство

$$\nabla^2 E_1 = \frac{4\pi}{c^2} \dot{J} - \frac{1}{c^2} \nabla \ddot{\phi}. \quad (20)$$

Попытка найти $\dot{J}$ в соответствующий момент времени посредством экстраполяции J привела бы к вычислительной неустойчивости этого же типа. Тем не менее, если $\dot{J}$ можно выразить таким образом, что используются параметры частицы лишь в данный момент времени, то система уравнений, состоящая из уравнения (20) и уравнения $\nabla \cdot E_1 = 0$, станет полностью эллиптической и не возникнет никаких временных разностных неустойчивостей. Фактически это можно сделать с использованием уравнений Власова для различных компонент:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_s + \frac{q_s}{m_s} \times \left(E + \frac{1}{c} v \times B \right) \cdot \nabla_v f_s = 0. \quad (21)$$

После преобразований, совершенно аналогичных применяемым при выводе уравнения переноса импульса [20], мы получим выражение для производной по времени от плотности тока, обусловленного компонентой s :

$$\begin{aligned}\partial J_s / \partial t &= \int q_s v \frac{\partial f_s}{\partial t} d^3 v = \\ &= - \int q_s v (v \cdot \nabla_x f_s) d^3 v - \\ &- \int \frac{q_s^2}{m_s} v \left(E + \frac{1}{c} v \times B \right) \cdot \nabla_v f_s d^3 v = \\ &= - \int q_s v (v \cdot \nabla_x f_s) d^3 v + \frac{q_s}{m_s} \rho_s E + \frac{q_s}{m_s c} J_s \times B.\end{aligned}\quad (22)$$

где ρ_s — плотность заряда частиц сорта s . Определим

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_s &= - \int q_s \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \nabla_s f_s) d^3 \mathbf{v} = \\ &= - \nabla_s \cdot \int q_s \mathbf{v} \mathbf{v} f_s d^3 \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (23)$$

так что $\partial \mathbf{J}_s / \partial t$ можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} = \mathbf{D}_s + \frac{q_s}{m_s} \rho_s \mathbf{E} + \frac{q_s}{m_s c} \mathbf{J}_s \times \mathbf{B}. \quad (24)$$

Последний член в (23) показывает, что $\mathbf{D}_s$ представляет дивергенцию тензора переноса тока для компоненты s . Хотя сам по себе тензор можно запомнить и находить дивергенцию перед решением уравнений поля, такая процедура потребовала бы большего объема памяти, чем прямое вычисление дивергенции. Поэтому мы на самом деле накапливаем значения $\mathbf{D}_s$ и у нас нет никаких причин упоминать в дальнейшем о тензоре.

Разложение электрического поля на поперечную и продольную составляющие, подстановка (24) в (20) и суммирование по сортам дают

$$\nabla^2 \mathbf{E}_1 - \eta \mathbf{E}_1 = \xi + \eta \mathbf{E}_1 + \zeta \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \nabla \bar{\phi}, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \eta &= \sum_s \frac{4\pi q_s^2 \rho_s}{m_s c^2} = \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{c^2}, \\ \zeta &= \sum_s \frac{4\pi}{c^2} \frac{q_s}{m_s c} \mathbf{J}_s, \quad \xi = \sum_s \frac{4\pi}{c^2} \mathbf{D}_s. \end{aligned}$$

и

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = 0.$$

Различные моменты, необходимые при фактическом проведении расчетов, должны быть накоплены на пространственной сетке. Для уменьшения «шума» почти всегда используется некоторая разновидность методики размазывания заряда. Используя обозначение Лэнгдона [23], свяжем с моделирующими частицами функцию формы $S(\mathbf{x})$ таким образом, что $qS(\mathbf{x})$, например, представляет плотность заряда частицы, полный заряд которой q , с центром в начале координат. Тогда, если в задаче вводится равномерная сетка с узлами в $\mathbf{x}_c$, то плотность заряда частиц сорта s в узле $\mathbf{x}_c$ дается выражением

$$\rho_s(\mathbf{x}_c) = q_s \sum_p S(\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_p), \quad (26)$$

где суммирование проводится по всем частицам p сорта s , а $\mathbf{x}_p$ — вектор, проведенный в центр p -й частицы. Аналогично

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{x}_c) = q_s \sum_p \mathbf{v}_p S(\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_p), \quad (27)$$

где $\mathbf{v}_p$ — скорость частицы p . Прямым дифференцированием по времени находим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{J}}_s(\mathbf{x}_c) &= q_s \sum_p \mathbf{v}_p \dot{\mathbf{v}}_p \cdot \nabla_{\mathbf{x}_p} S(\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_p) + q_s \sum_p \dot{\mathbf{v}}_p S(\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_p) = \\ &= -q_s \sum_p \mathbf{v}_p \dot{\mathbf{v}}_p \cdot \nabla_{\mathbf{x}_c} S(\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_p) + \\ &+ \frac{q_s^2}{m_s} \sum_p S(\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_p) \left[\mathbf{E}(\mathbf{x}_p) + \frac{1}{c} \mathbf{v}_p \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_p) \right], \end{aligned} \quad (28)$$

где для исключения $\dot{\mathbf{v}}_p$ мы воспользовались силой Лоренца и законом Ньютона. Отождествление членов этого уравнения с соответствующими власовскими членами в уравнении (22) очевидно.

В качестве иллюстрации этих методов определения величины $\mathbf{D}_s$ рассмотрим одномерную задачу с $S(x)$, выбранной в виде обобщенной кусочно-линейной функции типа «палатки» [24]. Если $S(x)$ — функция такого вида с высотой, равной единице, то $S'(x)$ будет прямоугольным импульсом с амплитудой $1/\Delta x$. Рецепт для вычисления $\mathbf{D}_s$, который дает уравнение (28), состоит в следующем. Для каждой частицы p сорта s , если $x_c - \Delta x \leq x_p < x_c$, прибавляем $q_s v_p (v_{px}/\Delta x)$ к $\mathbf{D}_s(x_c)$; в противном случае, если $x_c \leq x_p < x_c + \Delta x$, вычитаем $q_s v_p (v_{px}/\Delta x)$ из $\mathbf{D}_s(x_c)$. Обобщение на случай других функций формы и на многомерный случай очевидно.

Наиболее серьезный источник неустойчивости устраняется с помощью записи $\mathbf{E}_i$ в виде решения подходящим образом сформулированного эллиптического уравнения. Другие, более слабые неустойчивости, обусловленные использованием конечной сетки [24], возможно, еще останутся, но их влияние можно либо свести к минимуму разумным выбором пространственного шага сетки, либо отчасти изменить деталями разностной аппроксимации по пространству. Оказывается, что точные детали разностной аппроксимации по времени для уравнений движения частиц при этом описании не являются решающими.

В специальной двумерной программе, названной DARWIN и представляющей собой алгоритм дарвиновской модели в лагранжевой формулировке, успешно написанный и отлаженный, для уравнений движения частиц используется точно такая же, но не обратимая во времени схема второго порядка точности,

которая ранее применялась в полностью электромагнитной программе [29]. Уравнения для пересчета частиц имеют вид

$$\begin{aligned}\tilde{v}^0 &= v^{-1/2} + \frac{h}{2} E^0, \\ v^{1/2} &= f v^{-1/2} + h (E^0 + g B^0 + \tilde{v}^0 \times B^0), \\ x^1 &= x^0 + \Delta t v^{1/2},\end{aligned}\quad (29)$$

где $h = \Delta t q/m$, $f = 1 - (h^2/2)(B^0 \cdot B^0)$ и $g = (h/2)(v^{-1/2} \cdot B^0)$. Величины $v^{1/2}$ и x^1 имеют погрешность $(\Delta t)^2$, так что накапливаемая ошибка имеет порядок Δt . Для расчета источников в уравнениях поля скорости экстраполируются далее с целью одноразового использования к величине

$$\tilde{v}^1 = v^{1/2} + \frac{1}{2}(v^{1/2} - v^{-1/2}). \quad (30)$$

Эти значения используются для вычисления величин J_n^1 и D_n^1 , соответствующих частицам, находящимся в точках x^1 . Плотность заряда ρ_n^1 также вычисляется в этих точках.

Пространственные производные аппроксимируются обычными центральными разностями. Например, $(d\phi/dx)_i = (\phi_{i+1} - \phi_{i-1})/(2\Delta x)$. Такой способ разностной аппроксимации позволяет избежать сложности многочисленных систем сеток и эквивалентен процедуре усреднения, убежденными сторонниками которой являются Борис и Ли [3]. Очевидное неудобство формы записи источников в уравнениях (19) и (25) состоит в том, что они включают в себя отдельно моменты

$$\sum_i \rho_i, \quad \sum_i q_i \rho_i, \quad \sum_i J_i \quad \text{и} \quad \sum_i q_i J_i.$$

Из-за ограничений памяти в существующей программе пренебрегается ионным током для того, чтобы последние два момента могли быть получены из одного массива. Можно также уменьшить время вычислений, если рассматривать ионы в рамках электростатики. Это приближение на самом деле очень хорошее для большинства задач, хоть сколько-нибудь поддающихся моделированию, поскольку ионный циклотронный период много больше периода электронных плазменных колебаний.

5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ

В одномерном случае упрощения, упомянутые в связи с уравнениями (11), приводят к полному расщеплению компонент уравнения для вектор-потенциала, так что уравнения поля сводятся к простым трехдиагональным системам, которые можно решать стандартными методами исключения. Уравнение Пуас-

сона решается без труда даже в двумерном или трехмерном случае; для решения уравнения Пуассона мы используем новизну четно-нечетной редукции или алгоритм Бунемана [5]. С таким же успехом можно было бы использовать методы быстрого преобразования Фурье. Однако решение уравнения (116) в гамильтоновой формулировке или уравнения (25) в лагранжевой формулировке в двумерном случае представляет затруднение.

Рассмотрим общую систему уравнений

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \eta \mathbf{A} = \xi - \nabla \chi, \quad (31a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (31b)$$

Примерами уравнения (31a) являются уравнения (116) и (25). Один из подходов к этой системе уравнений мог бы состоять в представлении $\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{W}$, $\nabla \cdot \mathbf{W} = 0$ и взятии ротора от обеих частей (31a), что привело бы, таким образом, к одному уравнению четвертого порядка, которое в двумерном случае содержит лишь одну компоненту:

$$\nabla^4 \mathbf{W} + \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{W}) = -\nabla \times \xi. \quad (32)$$

Однако оказывается, что решение этого единственного уравнения труднее решения исходной системы, в особенности из-за усложненных граничных условий, которые ставились бы для $\mathbf{W}$.

При отсутствии связи, обусловленной $\nabla \chi$ и условием $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, система уравнений (31) свелась бы к отдельным скалярным уравнениям вида

$$\nabla^2 \Psi - \eta \Psi = \rho. \quad (33)$$

Уравнение такого вида решалось Дикманом и др. [9] методом последовательной верхней релаксации. Однако появление прямых методов подчеркивало плохую сходимость этой процедуры. Если η постоянна или зависит только от x , то для решения уравнения (33) можно применять прямые методы, например преобразование Фурье по y с последующим решением трехдиагональной системы по x . Однако, если η является произвольной функцией x и y , необходим итерационный процесс. Метод, который мы называем «глобальная итерация», [30] дал скорости сходимости, намного превосходящие те, которые дают такие сравнительно локальные итерационные схемы, как последовательная верхняя релаксация или метод переменных направлений. Идея состоит в том, чтобы по возможности решать прямым методом и итерировать только остаток. Детальный анализ метода такого типа был дан Конкусом и Голубом [7]. Кроме того, они проследили происхождение подобных идей в литературе по численному анализу за многие годы.

Конкретно метод, который мы применяем к уравнению (33), состоит в следующем. Если предположить, что функция η при-

близительно постоянна по y и произвольным образом меняется по x , то формулировка метода глобальной итерации имеет вид

$$\nabla^2 \Psi^{n+1} - \bar{\eta}^y(x) \Psi^{n+1} = \rho - (\bar{\eta}^y - \eta(x, y)) \Psi^n, \quad (34)$$

где в качестве $\bar{\eta}^y$ можно выбрать среднее по y от функции η при фиксированном x . Конкус и Голуб доказали, что наилучшим выбором $\bar{\eta}^y$ является среднее минимального и максимального значений η по y при фиксированном x . Даже при использовании простого усреднения метод сходится чрезвычайно быстро, если только неоднородность по y не слишком велика. Для более общего закона изменения η следует применить естественное обобщение, которое заключается в чередовании направления усреднения η с помощью последовательных итераций, что приводит к замене $\bar{\eta}^y(x)$ на $\bar{\eta}^x(y)$ в уравнении (34).

При наличии связи между компонентами $\mathbf{A}$ за счет члена $\nabla \chi$ и условия $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ итерационный алгоритм должен быть значительно усложнен. Снова при постоянном значении η можно было бы просто вычислить промежуточное значение потенциала $\tilde{\mathbf{A}}$ из уравнения

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{A}} - \eta \tilde{\mathbf{A}} = \xi, \quad (35)$$

а затем искать окончательное решение в виде

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}} - \nabla \Psi,$$

где

$$\nabla^2 \Psi = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}}. \quad (36)$$

Подстановка затем показывает, что

$$\chi = \nabla^2 \Psi - \eta \Psi. \quad (37)$$

Этот метод используется для нахождения $\mathbf{A}$ в уравнении (19) лагранжевой формулировки. Однако если функция η не равна константе, то операторы умножения и дифференцирования не коммутируют, и эта процедура не годится. Тем не менее, комбинируя эти представления в итерационном цикле, мы можем получить процедуру, которая, как кажется с эмпирической точки зрения, сходится столь же хорошо, как и более простой алгоритм для развязанной системы уравнений (33). В итерационном процессе повторяются следующие шаги:

$$1) \text{ решить } \nabla \chi^n = \nabla \cdot \xi + \mathbf{A}^n \cdot \nabla \eta \text{ для } \chi^n; \quad (38a)$$

$$2) \text{ решить } \nabla^2 \tilde{\mathbf{A}}^{n+1} - \bar{\eta}^y \tilde{\mathbf{A}}^{n+1} = \xi + (\eta - \bar{\eta}^y) \mathbf{A}^n - \nabla \chi^n \text{ для } \mathbf{A}^{n+1}; \quad (38б)$$

$$3) \text{ решить } \nabla^2 \Psi^{n+1} = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{n+1} \text{ для } \Psi^{n+1}; \quad (38в)$$

$$4) \text{ вычислить } \mathbf{A}^{n+1} = \tilde{\mathbf{A}}^{n+1} - \nabla \Psi^{n+1}. \quad (38г)$$

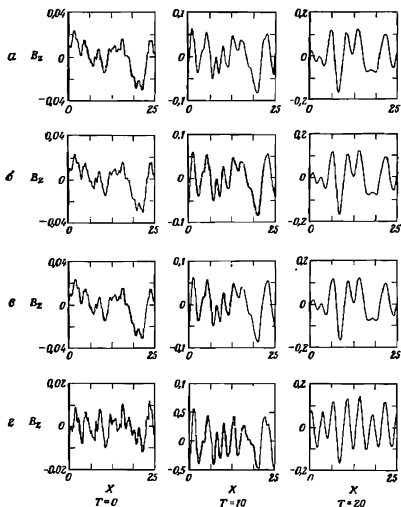
При численном моделировании значения неизвестных с предыдущего временного слоя используются для начала вычислительного процесса. Если η — функция только x , то решение является точным после одной итерации. Тот факт, что при сходимости этой последовательности ее предел будет решением, проверяется простой подстановкой. В настоящее время у нас нет точного критерия сходимости процесса, но в практических случаях сего помощью получены столь хорошие результаты, что сейчас в большинстве задач мы ограничиваемся пятью итерациями. Необходимо дальнейшее исследование свойств сходимости.

VI. СРАВНЕНИЯ В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Для моделирования однокомпонентной одномерной неустойчивой по Вайбелю¹⁾ плазмы мы применяли четыре различных алгоритма, в основе которых лежала одномерная модель Дарвина, причем цель заключалась в том, чтобы увидеть, различается ли хоть сколько-нибудь поведение разных численных алгоритмов. Этот пример удобен тем, что нарастание колебаний плазмы в нем быстрое, а общее поведение хорошо изучено [28]. Поскольку в выбранном примере проявляется очень сильная неустойчивость, это сравнение, безусловно, не является законченным. В частности, необходимость рассмотрения устойчивых случаев при очень больших временах может привести к выявлению более тонких различий, и надо надеяться, что подобные сравнения в будущем будут проведены.

В качестве примера выбрана задача с характерной длиной $25 c/\omega_{pe}$, 128 ячейками, основным магнитным полем $B_x = 0,2 m c \omega_{pe}/e$ и начальным бимаксвелловским распределением по скоростям с $(v_0/c) = 0,1$ и $(v_1/c) = 0,5$, где m и e — масса и заряд электрона, а ω_{pe} — электронная плазменная частота. Сравнивались полностью обратимая программа EMI Форсланда и др. [10], упрощенный одномерный гамильтонов алгоритм, описанный в разд. III и называемый (из-за микротурбулентности) MICRO, лагранжев алгоритм, описанный в разд. IV и реализованный в двумерной программе DARWIN, применяемой к одномерной задаче как к частному случаю, и вариант программы MICRO с другим заданием начальных условий, который будет описан позже. Результаты этих вычислений представлены единственной характеристикой, а именно z -компонентой магнитного поля. Зависимость этой величины от x изображена на фиг. 1

¹⁾ Неустойчивость Вайбеля — электромагнитная неустойчивость плазмы с анизотропным распределением электронов по скоростям. См., например, Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей, том I. — М.: Атомиздат, 1975, с. 224, где приведена обширная библиография, включающая и работу Вайбеля. — *Прим. перев.*



Фиг. 1. z — компонента магнитного поля как функция координаты в моменты времени 0, 10 и $20\omega_{pe}^{-1}$.

a — обратная программа EMI; $б$ — дигитальная программа DARWIN; $в$ — упрощенная гамильтонова программа MICRO; $г$ — программа MICRO с более «спокойным» заданием начальных условий. Координата измеряется в единицах c/ω_{pe} , а магнитное поле — в единицах $m_0 c/v$.

для каждого из четырех расчетов в моменты времени 0, 10 и $20\omega_{pe}^{-1}$. Считается, что эта величина является более чувствительной характеристикой свойств программы, нежели любая интегральная характеристика вроде полной энергии.

Поскольку хорошо известно, что детали эволюции численного моделирования зависят от точной формы задания начальных условий, то ожидалось, что различия между алгоритмами будут незначительными, вследствие чего необходимо было добиться точного совпадения начальных условий в каждом примере. Это потребовало использования одинаковых последовательностей псевдослучайных чисел при создании распределений по скоростям. Кроме того, требовалось особое внимание при указании значений вектор-потенциала, которые использовались для определения начальных канонических импульсов в гамильтоновых версиях. Для программы EM1 и первого варианта MICRO это делалось путем предварительного накопления токов, обусловленных приписанными начальными скоростями, и нахождения затем исходного решения уравнения $\nabla^2 A = -(4\pi/c)J$. Тщательное исследование первых трех серий рисунков на фиг. 1 не показывает практически никакого видимого различия между этими процессами. Поэтому мы делаем вывод, что эти три алгоритма приводят к идентичным результатам в пределах точности, определяемой этим тестом.

Вычислительный процесс с MICRO, в котором начальные условия для канонических импульсов задаются другим способом, представлен на последней серии рисунков фиг. 1. В этом случае перед заданием начальных условий для канонических импульсов не предпринималось специальных усилий для получения самосогласованного A . Вместо этого использовалось предельное равновесное значение $A=0$. Из данных, представленных на фиг. 1, выносится непосредственное впечатление о более «спокойном» начале. Кажется, что возбуждаются те же самые моды, с той же фазой, однако моды с большей длиной волны вначале возбуждаются в меньшей степени. Это явление нетрудно понять. Пусть J^0 и A^0 описывают ток и потенциал, обусловленные начальным самосогласованным распределением. Они удовлетворяют уравнению $\nabla^2 A^0 = -(4\pi/c)J^0$. В случае четвертого расчета начальные значения канонических импульсов были в точности пропорциональны начальным скоростям, поскольку использовалось нулевое значение потенциала ($A=0$). Следовательно, первое нахождение поля при этом расчете по гамильтоновой программе состоит в решении уравнения

$$\nabla^2 A^0 - \frac{\omega_p^2}{c^2} A^0 = -\frac{4\pi}{c} J^0. \quad (39)$$

Проводя преобразование Фурье по координатам и полагая ω_p постоянной и равной ее значению в начальный момент, получим

$$A_k^0 = -\frac{4\pi}{c} J_k^0 \frac{1}{k^2} \quad (40a)$$

и

$$\tilde{A}_k^0 = -\frac{4\pi}{c} J_k^0 \frac{1}{(k^2 + \omega_p^2/c^2)}. \quad (40b)$$

В случае четвертого расчета первое определение поля предполагает разрывное изменение всех скоростей частиц, и поэтому его следует рассматривать не как часть первого шага по времени, а скорее в качестве процедуры переопределения начальных условий. Так как $k_{\text{макс}}$ имеет порядок ω_p/c , то такое задание начальных условий обеспечивает почти прямоугольный спектр возбуждения A , который, вообще говоря, предпочтительнее, чем обратный квадратичный спектр в других случаях. Мы рекомендуем использовать эту методику до тех пор, пока характер задачи не позволит задать более «спокойные» начальные условия такого, например, типа, как предлагалось Байерсом [6]. Такое задание начальных условий, как в четвертом примере, в гамильтоновых алгоритмах является почти автоматическим, в то время как в лагранжевых версиях необходимо специально следить за этим.

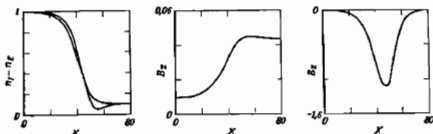
Время счета на ЭВМ зависит не только от специфической сложности алгоритмов, но также и от числа переменных, поэтому ему не следует придавать чрезмерного значения. Тем не менее грубые прикидки не лишены интереса. Все эти программы написаны на Фортране, считают в течение 100 временных шагов с 20 000 частиц и требуют следующего времени счета на CDC 7600: на одномерную обратимую гамильтонову программу EMI затрачивается 3 мин 44 с, на одномерную упрощенную гамильтонову программу MICRO затрачивается 1 мин 5 с и на двумерную лагранжеву программу DARWIN, применяемую в одномерном случае, 3 мин 26 с. Разумеется, примерная программа, используемая для одномерного случая, существенно менее эффективна, чем аналогичная программа, разработанная исключительно для одномерных задач.

VII. ДВУМЕРНЫЙ ПРИМЕР

Главным побудительным мотивом к разработке двумерной программы DARWIN был интерес к явлениям микротурбулентности при наличии сильных градиентов. Примером является диффузия магнитного поля в область тэта-пинча большой плотности. Весьма вероятно что градиенты, особенно на ранних стадиях, являются достаточно крутыми, что приводит к неадекватности квазинодородных аппроксимаций. Есть надежда, что исследования, проводимые с помощью программы такого типа, помогут объяснить природу диффузии магнитного поля, теплоперенос

поперек поля, обмен энергией между ионами и электронами и другие нелинейные явления. Мы уже начали использовать эту программу в подобных задачах и изложим здесь некоторые предварительные результаты для иллюстрации возможностей программы без какой бы то ни было попытки объяснить рассматриваемые физические процессы. Эта работа проводится сейчас Уински и Хьюиттом [32] в качестве составной части их исследования диффузии магнитного поля в тэта-пинчах.

При первых попытках применения программы численного моделирования в исследованиях тэта-пинчей в качестве начального



Фиг. 2. Величины, характеризующие исходное состояние, заданные в виде функций x в интервале от 0 до $80 c/\omega_{pe}$.

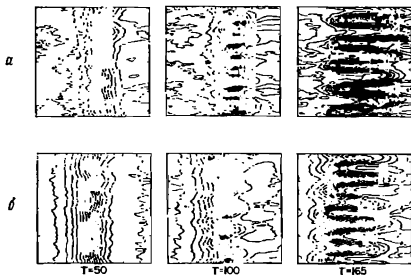
Слева направо изображены плотности электронов и ионов x —компонента магнитного поля и x —компонента электрического поля. Плотности нормированы на единицу при $x=0$, магнитное поле измеряется в единицах $m_{pe} c^2/e$, а электрическое поле — в единицах $m_{pe} c^2/e$, где e — элементарный заряд.

условия в алгоритме программы бралась неравновесная плазма, моделирующая внешнее проявление имплозии в пинче. Однако сложность протекающих явлений сделала анализ очень трудным. Оказалось, что простое разделение эффектов, обусловленных общей динамикой имплозии и микроустойчивостями, невозможно. По этой причине искали способы задания начальных условий в программе в виде неоднородного равновесного состояния. К концу работы над этой главой был развит новый метод для получения власовских равновесных состояний [17]. Метод исходит из заданных профилей плотности ионов, электронной и ионной температур и предположения об электростатическом характере удержания ионов. Этих предположений достаточно для определения электрического и магнитного полей и ионной и электронной функций распределения. В реальной программе функция распределения электронов задается с помощью разложения по полиномам Эрмита.

На фиг. 2 приведен пример определенного таким образом равновесного состояния. Плотности ионов и электронов уменьшаются здесь приблизительно на 10% по сравнению с их значениями в начальный момент. Незначительной разницы в их

плотностях достаточно для создания электростатического удерживающего поля для ионов. Отношение масс принимается равным 100. Самосогласованность токов и давлений обеспечивается довольно сложной функцией распределения электронов, которая здесь не изображена.

При определении начальных условий для двумерного численного моделирования результаты вычислений по программе рав-



Фиг. 3. Результаты двумерного моделирования для моментов времени 50, 100 и 165 ω_{pe} .

a — линии уровня электростатического потенциала *б* — линии уровня компоненты B_z магнитного поля, изображенные в прямоугольной области вычислений на плоскости *x, y*, ширина которой $8 c/\omega_{pe}$, а высоте $25 c/\omega_{pe}$.

новесия приближенно задаются тремя согласованными скоростными моментами как функциями координат. Тот факт, что полученная совокупность частиц действительно находится в квазиравновесии, проверялся путем использования программы в одномерном случае и наблюдения за сохранением начальных условий неизменными в течение многих десятков плазменных периодов.

Результаты двумерного моделирования показаны на фиг. 3. Прямоугольная область шириной $8c/\omega_{pe}$ и высотой $25c/\omega_{pe}$ покрывается сеткой, содержащей 40×128 ячеек. Каждая из плазменных компонент, а именно ионы и электроны с отношением масс, равным 100, описывается 64 000 укрупненных частиц. В процессе моделирования наблюдается развитие сильной микроскопической желобковой неустойчивости. На фиг. 3 это иллю-

стрируется линиями уровня ϕ и B_z в моменты времени, равные 50, 100 и 165 ω_{pe}^{-1} . Отметим сильную корреляцию между линиями уровня потенциала и магнитного поля и постоянство структуры, соответствующей отдельным модам. Обусловлено ли это постоянство главным образом квантованием в ограниченном прямоугольнике моделирования или оно действительно имеет важное физическое значение, сейчас неизвестно. Для дальнейшего истолкования этих явлений необходимы дополнительные расчеты и анализ.

VIII. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что алгоритмы дарвиновского приближения можно удовлетворительно описать как в гамильтоновой, так и в лагранжевой формах. Обязательное присутствие в модели мгновенного дальнего действия приводит к похожим эллиптическим системам для уравнений поля в каждой из формулировок, и нами разработаны методы решения таких систем. В гамильтоновом случае сила, обусловленная поперечным электрическим полем, определяется неявно с помощью уравнений движения частиц, тогда как в лагранжевом случае поперечное электрическое поле записывается в явном виде с использованием в качестве функции источника дивергенции тензора переноса тока.

Одномерные сравнения приводят к мысли, что полная обратимость несущественна для точности или устойчивости алгоритмов дарвиновской модели и что необратимые алгоритмы более эффективны. Двумерная программа DARWIN, реализующая лагранжевы алгоритмы из разд. IV, представляется вполне удовлетворительной. Возможно, что двумерная гамильтонова версия даст преимущества; поверхностные оценки указывают на то, что гамильтоновы варианты программы позволяют сэкономить память ЭВМ, в то время как лагранжевы алгоритмы смогут обеспечить большую скорость вычислений. Однако из-за очень сложной структуры программ моделирования укрупненными частицами для окончательного выбора требуется лучшее теоретическое и эмпирическое понимание.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы хотели бы поблагодарить Д. Фореланда, Дж. Фрайдберга, Э. Линдмана и Т. Олифанта за многочисленные полезные обсуждения в процессе проведения этих исследований, Д. Фореланда — за содействие в использовании программы EMI. Эта работа выполнялась при поддержке Управления энергетических исследований и разработок США.

Литература

1. Auer P. L., Hurwitz H., Kilb R. W., *Physics Fluids*, **4**, 1105 (1961)
2. Boris J. P., in *Proceedings of the Fourth Conference on the Numerical Simulation of Plasmas*, eds. Boris J. P. and Shanny R. A., US Govt. Printing Office, Washington, D. C., 1973, Stock 0851 00059, p. 31.

3. Boris J. P., Lee R. J. *Comput. Phys.*, **12**, 131 (1973).
4. Buneman O., in *Relativistic Plasmas*, eds. Buneman O. and Pardo W., Benjamin, New York, 1968, p. 205.
5. Buzbee B. L., Golub G. H., Nielson C. W. *SIAM (Soc. Ind. Appl. Math.)*, **J. Numer. Anal.**, **7**, 627 (1970).
6. Byers J. A., in *Proceedings of the Fourth Conference on the Numerical Simulation of Plasmas*, eds. Boris J. P. and Shanny R. A., US Govt. Printing Office, Washington, D. C., 1970, Stock 0851 00059, p. 496.
7. Concus P., Golub G. H., *SIAM (Soc. Ind. Appl. Math.)*, *J. Numer. Anal.*, **10**, 1103 (1973).
8. Darwin C. G., *Phil. Mag.*, **39**, 537 (1920).
9. Dickman D., Morse R. L., Nielson C. W., *Phys. Fluids*, **12**, 1708 (1969).
10. Forslund D. W. et al., Los Alamos Report LA-DC-72-721 (1972).
11. Godfrey R. B., *J. Comput. Phys.*, **15**, 504 (1974).
12. Goldstein H., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1953, p. 205. (Имеется перевод: Голдстейн Г. Классическая механика. — М.: Наука, 1975.)
13. Haber I. et al., in *Proceedings of the Fourth Conference on the Numerical Simulation of Plasmas*, eds. Boris J. P. and Shanny, US Govt. Printing Office, Washington, D. C., 1970, Stock 0851 00059, p. 126.
14. Haber I. et al., in *Proceedings of the Sixth Conference on Numerical Simulation of Plasmas*, Lawrence Livermore Laboratory, Livermore, California, 1973, p. 46.
15. Hasegawa A., Birdsall C. K., *Phys. Fluids*, **7**, 159 (1964).
16. Hasegawa A., Okuda H., *Phys. Fluids*, **11**, 1955 (1968).
17. Hewett D. W., Nielson C. W., Winske D., *Phys. Fluids*, **19**, 443 (1976).
18. Jackson J. D., *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York, 1962, p. 409. (Имеется перевод: Джексон Дж. Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965.)
19. Kaufman A. N., Rostler P. S., *Phys. Fluids*, **14**, 446 (1971).
20. Krall N. A., Trivelpiece A. W., *Principles of Plasma Physics*, McGraw-Hill, New York, 1973, p. 86 (Имеется перевод: Кролл Н., Трайвелпис А. Основы физики плазмы. — М.: Мир, 1975.)
21. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теория поля*. — М.: Наука, 1973.
22. Langdon A. B., *J. Comput. Phys.*, **6**, 252 (1970).
23. Langdon A. B., *J. Comput. Phys.*, **6**, 255 (1970).
24. Langdon A. B., *J. Comput. Phys.*, **6**, 261 (1970).
25. Lewis H. R., in *Methods Comput. Phys.*, **9**, 307 (1970). (Имеется перевод в книге: Вычислительные методы в физике плазмы. — М.: Мир, 1974.)
26. Lindman E. L., in *Proceedings of the Sixth Conference on Numerical Simulation of Plasmas*, Lawrence Livermore Laboratory, Livermore, California, 1973, p. 42.
27. Low F. E., *Proc. Roy. Soc., Ser. A*, **248**, 282 (1958).
28. Morse R. L., Nielson C. W., *Phys. Fluids*, **14**, 830 (1971).
29. Nielson C. W., Lindman E. L., in *Proceedings of the Sixth Conference on Numerical Simulation of Plasmas*, Lawrence Livermore Laboratory, Livermore, California, 1973, p. 148.
30. Nielson C. W., Buzbee B. L., Rudinski L. I., in *Proceedings of the Fifth Conference on the Numerical Simulation of Plasmas*, 1971, Paper DI.
31. Sturrock P. A., *Ann Phys. (Leipzig)*, **7**, 4, 306 (1958).
32. Winske D., Hewett D. W., *Phys. Rev. Lett.*, **35**, 937 (1975).

РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
ДЛЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ¹⁾Дж. Киллен, А. Мирин, М. Ренсинк²⁾

1. ВВЕДЕНИЕ

При моделировании плазмы, удерживаемой магнитным полем, в том случае, когда распределение ионов по скоростям не является максвелловским и важно знать функции распределения, следует решать кинетические уравнения. Возможность получения положительного выхода термоядерной энергии в ловушке с магнитными пробками зависит от скорости, с которой частицы плазмы теряются через концы установки. При плотностях частиц и энергиях, типичных для установок с магнитными пробками, потери через концы обусловлены главным образом рассеянием заряженных частиц вследствие классических кулоновских столкновений в конусы потерь в пространстве скоростей. Кинетическим уравнением, описывающим этот процесс, является уравнение Больцмана со столкновительными членами Фоккера — Планка [32].

Использование этого уравнения не ограничивается системами с магнитными пробками. Примерами других задач, в которых требуется решать уравнение Фоккера — Планка, являются нагрев плазмы пучками горячих нейтралов, термализация альфа-частиц в D-T- (дейтериево-тритиевой) плазме, исследование убегающих электронов в токамаках, анализ рабочих режимов двухкомпонентных в энергетическом смысле реакторов синтеза.

Проблема заключается в решении нелинейного дифференциального уравнения в частных производных для функции распределения каждого типа заряженных частиц в плазме, зависящей от семи независимых переменных (трех пространственных координат, трех скоростных координат и времени). Решение подобного уравнения даже для одного сорта частиц превосходит возможности любой современной ЭВМ, поэтому для решения задачи приходится делать ряд упрощающих предположений. Типич-

¹⁾ Работа субсидирована Управлением энергетических исследований и разработок США.

²⁾ John Killeen, Arthur A. Mirin, Marvin E. Rensink, Lawrence Livermore Laboratory, University of California, Livermore, California.

ными приближениями, которые делаются в современных программах, являются пренебрежение пространственной зависимостью и предположение об азимутальной симметрии функций распределения в пространстве скоростей (относительно направления магнитного поля). При этих допущениях число независимых переменных уменьшается до трех: двух координат в пространстве скоростей — скорости v иpitch-угла θ — и времени t . Даже в рамках этих основных предположений в последние пятнадцать лет произошло развитие численных методов решения уравнения Фоккера — Планка.

В работах Робертса и Карра [31] и Бинга и Робертса [6] полиное уравнение Фоккера — Планка решалось только для ионов, а влияние электронов, электростатического амбиполярного потенциала и пространственной неоднородности, за исключением существования конуса потерь, игнорировалось. Они также исследовали пределы применимости приближенного уравнения Фоккера — Планка, решение которого можно найти методом разделения переменных.

Бен-Даниэль и Аллис [3] развили идеи работы Робертса и Карра по аппроксимации решения приближенным решением с разделенными переменными. Им также удалось добиться некоторых успехов при аппроксимации решений в случае учета пространственной неоднородности.

Киллин и Фатч [21] и Фаулер и Рэнкин [12] решали уравнение Фоккера — Планка как для ионов, так и для электронов, предполагая, что эволюция функций распределения может быть описана уравнениями для изотропных распределений с включением некоторых коэффициентов, позволяющих учесть наличие конуса потерь. Это предположение и вытекающие из него следствия непосредственно связаны с предположением о возможности разделения переменных. Фаулер и Рэнкин учли влияние амбиполярного потенциала. В расчетах эволюции плазмы, образованной инжекцией нейтральных атомов, Киллин и Фатч, помимо амбиполярного потенциала, учитывали также эффекты, связанные с перезарядкой.

Киллин и Маркс [22] разработали программу для численного решения уравнения Фокера — Планка для одного сорта ионов, в котором переменные по v и θ не разделяются, в предположении, что электроны могут описываться максвелловской функцией распределения с вырезом, соответствующим конусу потерь. Уравнение для ионов решалось с использованием неявной разностной схемы переменных направлений на неравномерной по v и по θ сетке, а коэффициенты, которые выражаются через моменты ионной и электронной функций распределения, пересчитывались на каждом шаге по времени, совпадающем с шагом решения уравнения для ионов. Плотность частиц и их

средняя энергия, характеризующие максвелловское распределение электронов, вычислялись на более мелкой временной шкале с помощью решения двух обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых учитывались эффекты взаимодействия электронов с ионами и потерь электронов на концах, а также условия инжекции. Амбиполярный потенциал определялся с помощью итерации уравнений для электронов таким образом, чтобы уравнивать плотности положительных и отрицательных зарядов.

Маркс [25, 22] обобщил эту программу, чтобы учесть реальную пространственную зависимость величины удерживающего магнитного поля (z -зависимость) и распределение источников по пространству. В варианте программы, учитывающем z -зависимость, также рассчитывается пространственная вариация амбиполярного потенциала.

Многокомпонентная программа [23, 15] была разработана для анализа D-T и D-He реакторов с магнитными пробками, включая эффекты, связанные с продуктами реакции. Основными приближениями, лежащими в основе этой программы, являются предположение об изотропности потенциалов Розенблюта» (см. разд. II) и возможность представления функций распределения угловыми собственными функциями низшего порядка (см. разд. III). Полученная система связанных уравнений для $f_a(v, t)$ решается затем численно с помощью неявной конечно-разностной схемы. Было проведено широкое исследование параметров реактора [15], в рамках которого определялась величина параметра удержания η и строился график зависимости усиления реактора Q (отношения мощности термоядерной реакции к мощности инжекции) от величины пробочного отношения и энергии инжекции.

В своей диссертации Веркофф [34] проанализировал роль предположений об изотропности потенциалов Розенблюта и возможности представления функций распределения их первой собственной модой. Первоначально его выводы состояли в том, что учет анизотропной части потенциалов Розенблюта, обусловленной взаимодействием ионов с ионами, приводит к существенно уменьшению значения η при удержании магнитными пробками. Недавно для проверки этой гипотезы нами были разработаны две независимые многокомпонентные программы, в которых рассмотрение немаксвелловской плазмы проводится значительно точнее. Описанию этих программ посвящены разд. III и IV этой главы.

В разд. II описываются решаемые кинетические уравнения. Особый интерес представляет включение в математическую модель сил, зависящих от времени, что необходимо для воспроизведения условий некоторых специальных экспериментов.

В разд. III приводится метод решения уравнений Фоккера — Планка, в котором используется произвольное число угловых собственных функций. В частности, исследуется проблема удержания плазмы в ловушке с магнитными пробками, причем устанавливается, что учет анизотропных частей потенциалов Розенблюта и представление функций распределения ионов несколькими первыми собственными модами приводят к увеличению η примерно на 10%. Этот результат подтверждается с помощью программы, описанной в разд. IV.

В разд. IV описывается в значительной степени универсальная двумерная многокомпонентная программа, в которой кинетические уравнения для ионов решаются в двумерной (v, θ) области. Мы называем ее «гибридной» программой вследствие того, что функция распределения электронов представляется угловой собственной функцией низшего порядка (изотропной в полном пространстве скоростей); следовательно, для электронов решается одномерное кинетическое уравнение. Оказывается, подобный метод решения ионных уравнений является гораздо более быстрым по сравнению с методом, изложенным в разд. III, поэтому он положен в основу нашей стандартной программы решения задач физики плазмы, удерживаемой как в ловушках с магнитными пробками, так и в тороидальных устройствах. В разд. IV излагаются некоторые применения этой программы и описывается диагностика, которая добавлена для специальных задач. Для систем с магнитными пробками с учетом инжекции пучка величина параметра удержания η на 40%¹ больше соответствующих значений, полученных с помощью одномерной программы для уравнения Фоккера — Планка. Рассмотрены также двухкомпонентные тороидальные системы и рассчитаны коэффициенты усиления мощности для ряда различных режимов работы.

III. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

А. УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА — ПЛАНКА

Исходные кинетические уравнения представляют собой уравнения Больцмана с фоккер-планковскими столкновительными членами, которые мы будем часто называть просто уравнениями Фоккера — Планка:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m_a} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f_a}{\partial t} \right)_c + S_a + L_a. \quad (I)$$

Здесь f_a — функция распределения частиц сорта a в шестимерном фазовом пространстве; S_a — член, описывающий источники; $(\partial f_a / \partial t)_c$ — столкновительный член, а L_a включает члены, описывающие потери частиц.

Столкновительный член Фоккера — Планка для силы взаимодействия, обратного пропорциональной квадрату расстояния, был получен Розенблумом и др. [32] в виде

$$\frac{1}{\Gamma_a} \left(\frac{\partial f_a}{\partial t} \right)_c = - \frac{\partial}{\partial v_i} \left(f_a \frac{\partial h_a}{\partial v_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \left(f_a \frac{\partial^2 g_a}{\partial v_i \partial v_j} \right), \quad (2)$$

где $\Gamma_a = 4\pi Z_a^2 e^4 / m_a^2$. В настоящей работе потенциалы Розенблума

$$g_a = \sum_b (Z_b/Z_a)^2 \ln \Lambda_{ab} \int f_b \times (v') |v - v'| dv', \quad (3)$$

$$h_a = \sum_b [(m_a + m_b)/m_b] (Z_b/Z_a)^2 \times \\ \times \ln \Lambda_{ab} \int \frac{f_b(v')}{|v - v'|} dv' \quad (4)$$

несколько отличаются от тех, которые предложены в статье Розенблума и др. [32], что обусловлено зависимостью кулоновского логарифма от параметров обоих взаимодействующих сортов частиц и как следствие включением его под знак суммы. Мы используем следующее выражение:

$$\ln \Lambda_{ab} = \ln \{ [m_a m_b / (m_a + m_b)] \times \\ \times (2\alpha c \lambda_D / e^2) \max [(2\bar{E}/m)_{a,b}^{\frac{1}{2}}] \} - \frac{1}{2}, \quad (5)$$

где α — постоянная тонкой структуры, λ_D — дебаевская длина, $\bar{E}$ — средняя энергия частиц сорта a или b , а остальные символы имеют свое обычное значение. Функция f_a в уравнениях (1) — (4) нормируется таким образом, что для плотности частиц соответствующего сорта справедливо соотношение

$$n_a = \int f_a(v) dv. \quad (6)$$

Как мы увидим в дальнейшем, столкновительный член содержит производные функции f_a по скоростям, умноженные на моменты f_a по пространству скоростей, поэтому уравнение (1) является нелинейным интегродифференциальным уравнением в частных производных с семью независимыми переменными. Выберем в пространстве скоростей сферическую систему координат (значение $0 = 0$ соответствует направлению вдоль магнитного поля), а в обычном физическом пространстве цилиндрическую систему координат с осью z , направленной вдоль магнитной осп. В рамках этих координатных систем делаются следующие предположения:

1. Система однородна в физическом пространстве в радиальном и азимутальном направлениях, и, следовательно, она также азимутально-симметрична в пространстве скоростей. Кроме того, мы пренебрегаем всеми градиентами в направлении поперек магнитного поля.

2. Система является аксиально-однородной в физическом пространстве. Для установок с магнитными пробками это эквивалентно модели прямоугольной магнитной потенциальной ямы, для тороидальных систем это означает аксиальную симметрию относительно главной оси установки.

Преобразование уравнения (2) к сферическим полярным координатам (v, θ, ϕ) в пространстве скоростей сделано Розенблютом и др. [32]. С учетом нашего предположения об азимутальной симметрии функции распределения имеют вид $f_a(v, \mu, t)$, где $\mu = \cos \theta$, а $v = |\mathbf{v}|$. Уравнение для каждого сорта частиц плазмы записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma_a} \left(\frac{\partial f_a}{\partial t} \right) = & -\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(f_a v^2 \frac{\partial h_a}{\partial v} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(f_a (1 - \mu^2) \frac{\partial h_a}{\partial \mu} \right) + \\ & + \frac{1}{2v^3} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(f_a v^2 \frac{\partial^2 g_a}{\partial v^2} \right) + \frac{1}{2v^3} \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \left\{ f_a \left[\frac{1}{v^2} (1 - \mu^2)^2 \frac{\partial^2 g_a}{\partial \mu^2} + \right. \right. \\ & + \left. \frac{1 - \mu^2}{v} \frac{\partial g_a}{\partial v} - \frac{\mu}{v^2} (1 - \mu^2) \frac{\partial g_a}{\partial \mu} \right\} + \\ & + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial \mu \partial v} \left\{ f_a (1 - \mu^2) \left[\frac{\partial^2 g_a}{\partial \mu \partial v} - \frac{1}{v} \frac{\partial g_a}{\partial \mu} \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{2v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ f_a \left[-\frac{1 - \mu^2}{v} \frac{\partial^2 g_a}{\partial \mu^2} - 2 \frac{\partial g_a}{\partial v} + \frac{2\mu}{v} \frac{\partial g_a}{\partial \mu} \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{2v^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ f_a \left[\frac{\mu (1 - \mu^2)}{v^2} \frac{\partial^2 g_a}{\partial \mu^2} + \frac{2\mu}{v} \frac{\partial g_a}{\partial v} + \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{2(1 - \mu^2)}{v} \frac{\partial^2 g_a}{\partial \mu \partial v} - \frac{2}{v^2} \frac{\partial g_a}{\partial \mu} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Функции g_a и h_a , определяемые соотношениями (3) и (4), можно разложить по полиномам Лежандра [32]. Для этого положим

$$f_a(v, \mu, t) = \sum_{l=0}^{\infty} V_l^a(v, t) P_l(\mu), \quad (8)$$

где

$$V_l^a(v, t) = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f_a(v, \mu, t) P_l(\mu) d\mu. \quad (9)$$

Разложения для g_a и h_a имеют вид

$$g_a(v, \mu, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} \right)^2 \ln \Lambda_{ab} B_l^b(v, t) P_l(\mu), \quad (10)$$

$$h_a(v, \mu, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_b \frac{m_a + m_b}{m_b} \left(\frac{Z_b}{Z_a} \right)^2 \ln \Lambda_{ab} A_l^b(v, t) P_l(\mu), \quad (11)$$

где

$$A_l^a = \frac{4\pi}{2l+1} \left[\int_0^v \frac{(v')^{l+2}}{v'^{l+1}} V_l^a(v', t) dv' + \int_v^{\infty} \frac{v^l}{(v')^{l-1}} V_l^a(v', t) dv' \right], \quad (12)$$

$$B_l^a = -\frac{4\pi}{4l^2-1} \left[\int_0^v \frac{(v')^{l+2}}{v'^{l-1}} \left(1 - \frac{l-1/2}{l+1/2} \frac{(v')^2}{v^2} \right) V_l^a(v', t) dv' + \right. \\ \left. + \int_v^{\infty} \frac{v^l}{(v')^{l-3}} \left(1 - \frac{l-1/2}{l+1/2} \frac{v^2}{(v')^2} \right) V_l^a(v', t) dv' \right]. \quad (13)$$

При вычислениях берется конечное число (которое может изменяться) членов в разложениях g_a и h_a по полиномам Лежандра.

В разд. III будет описано решение уравнения (7), использующее разложение по угловым собственным функциям $M_l^a(\mu)$.

В разд. IV описывается разностный метод решения в двумерном пространстве скоростей. В этом случае для разностной аппроксимации уравнения и наложенных граничных условий вместо координат (v, μ) удобнее использовать координаты (v, θ) . Уравнение (2), записанное в дивергентной форме, имеет в этих переменных следующий вид:

$$\frac{1}{\Gamma_a} \left(\frac{\partial f_a}{\partial t} \right)_c = \frac{1}{v^2} \frac{\partial G_a}{\partial v} + \frac{1}{v^2 \sin \theta} \frac{\partial H_a}{\partial \theta}, \quad (14)$$

где

$$G_a = A_a f_a + B_a \frac{\partial f_a}{\partial v} + C_a \frac{\partial f_a}{\partial \theta}, \quad (15)$$

$$H_a = D_a f_a + E_a \frac{\partial f_a}{\partial v} + F_a \frac{\partial f_a}{\partial \theta}. \quad (16)$$

а

$$A_a = \frac{v^2}{2} \frac{\partial^2 g_a}{\partial v^2} + v \frac{\partial^2 g_a}{\partial v^2} - \frac{\partial g_a}{\partial v} - v^2 \frac{\partial h_a}{\partial v} - \frac{1}{v} \frac{\partial^2 g_a}{\partial \theta^2} + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_a}{\partial v \partial \theta^2} - \frac{\text{ctg } \theta}{v} \frac{\partial g_a}{\partial \theta} + \frac{\text{ctg } \theta}{2} \frac{\partial^2 g_a}{\partial v \partial \theta}, \quad (17)$$

$$B_a = \frac{v^2}{2} \frac{\partial^2 g_a}{\partial v^2}, \quad (18)$$

$$C_a = -\frac{1}{2v} \frac{\partial g_a}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_a}{\partial v \partial \theta}, \quad (19)$$

$$D_a = \frac{\sin \theta}{2v^2} \frac{\partial^2 g_a}{\partial \theta^2} + \frac{\sin \theta}{2} \frac{\partial^2 g_a}{\partial v^2 \partial \theta} + \frac{\sin \theta}{v} \frac{\partial^2 g_a}{\partial v \partial \theta} - \\ - \frac{1}{2v^2 \sin \theta} \frac{\partial g_a}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{2v^2} \frac{\partial^2 g_a}{\partial \theta^2} - \sin \theta \frac{\partial h_a}{\partial \theta}, \quad (20)$$

$$E_a = \sin \theta \left[- \left(\frac{1}{2v} \right) \frac{\partial g_a}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_a}{\partial v \partial \theta} \right], \quad (21)$$

$$F_a = \frac{\sin \theta}{2v^2} \frac{\partial^2 g_a}{\partial \theta^2} + \frac{\sin \theta}{2v} \frac{\partial g_a}{\partial v}. \quad (22)$$

Уравнение (14) используется для описания каждой ионной компоненты, рассматриваемой в задаче. Для электронов предполагается, что их функция распределения изотропна, поэтому уравнение (2) принимает вид

$$\frac{1}{\Gamma_e} \left(\frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_c = \frac{1}{v^2} \frac{\partial G_e}{\partial v}, \quad (23)$$

где

$$G_e = A_e f_e + B_e \frac{\partial f_e}{\partial v}, \quad (24)$$

$$A_e = 4\pi \sum_b \left[\left(\frac{Z_b}{Z_e} \right)^2 \frac{m_e}{m_b} \ln \Lambda_{eb} \int_0^v V_0^b(v', t) v'^2 dv' \right], \quad (25)$$

$$B_e = 4\pi \sum_b \left\{ \left(\frac{Z_b}{Z_e} \right)^2 \ln \Lambda_{eb} \left[\frac{1}{3v} \int_0^v V_0^b(v', t) v'^4 dv' + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{v^2}{3} \int_0^\infty V_0^b(v', t) v' dv' \right] \right\}. \quad (26)$$

6 СИЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ВРЕМЕНИ

В рамках нашей идеализированной модели однородной плазмы кинетическое уравнение с учетом зависимости магнитного поля от времени имеет вид

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{v}_\parallel \frac{\partial f}{\partial v_\parallel} + \dot{v}_\perp \frac{\partial f}{\partial v_\perp} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c + S + L, \quad (27)$$

где $(\dot{v}_\parallel, \dot{v}_\perp)$ — усредненное по циклотронному вращению индуктивное ускорение. Для медленно меняющихся магнитных полей выражения для $(\dot{v}_\parallel, \dot{v}_\perp)$ могут быть получены из адиабатических интегралов движения частицы.

1. Сжатие магнитного поля в ловушке с магнитными пробками

В линейных системах с магнитными пробками интегралами движения частицы являются

$$\frac{mv_1^2}{2B} = \text{магнитный момент}, \quad (28)$$

$$2\pi v_\parallel L = \text{продольный инвариант}, \quad (29)$$

где L — расстояние между пробками. Для нахождения $(\dot{v}_1, \dot{v}_\parallel)$ продифференцируем эти уравнения по времени:

$$\frac{2v_\perp \dot{v}_1}{B} - \frac{v_1^2 \dot{B}}{B^2} = 0, \quad (30)$$

$$\dot{v}_\parallel L + v_\parallel \dot{L} = 0, \quad (31)$$

отсюда

$$\dot{v}_1 = \frac{1}{2} v_\perp \frac{\dot{B}}{B}, \quad (32)$$

$$\dot{v}_\parallel = -v_\parallel \frac{\dot{L}}{L}. \quad (33)$$

Если подставить эти выражения для $\dot{v}_1$ и $\dot{v}_\parallel$ в (27), то уравнение Фоккера — Планка примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \left(\frac{1}{2} v \sin^2 \theta \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \frac{\dot{B}}{B} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c + S + L. \quad (34)$$

где мы использовали обозначения

$$v_\perp = v \sin \theta, \quad (35)$$

$$v_\parallel = v \cos \theta \quad (36)$$

и пренебрегли продольным сжатием. Для электронов, описываемых изотропной функцией распределения, $\partial f / \partial \theta$ равно нулю, а $\sin^2 \theta$ заменяется на свое усредненное значение $\langle \sin^2 \theta \rangle = 2/3$, так что уравнение Фоккера — Планка для электронов принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{v}{3} \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\dot{B}}{B} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c + S + L. \quad (37)$$

2. Сжатие по большому радиусу в токамаке

В аксиально-симметричных торондальных системах интегралами движения частицы являются

$$\frac{mv_1^2}{2B} = \text{магнитный момент}, \quad (38)$$

$$m\dot{v}_\parallel R = \text{торондальный угловой момент}, \quad (39)$$

где R — большой радиус тора. При изменяющемся во времени большом радиусе [14] выражения для $(\dot{v}_\parallel, \dot{v}_\perp)$ получим, дифференцируя эти соотношения по времени:

$$\frac{2v_\perp \dot{v}_\perp}{B} - \frac{v_\perp^2 \dot{B}}{B^2} = 0, \quad (40)$$

$$\dot{v}_\parallel R + v_\parallel \dot{R} = 0, \quad (41)$$

и затем

$$\dot{v}_\perp = + \frac{1}{2} v_\perp \frac{\dot{B}}{B}, \quad (42)$$

$$\dot{v}_\parallel = - v_\parallel \frac{\dot{R}}{R}. \quad (43)$$

Поскольку B определяется главным образом величиной торондального поля, оно обратно пропорционально R , что приводит к равенству

$$\frac{\dot{B}}{B} = - \frac{\dot{R}}{R}. \quad (44)$$

Если подставить эти выражения в (27), то уравнение Фоккера — Планка примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\dot{R}}{R} \left[- \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) v \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right] = \\ = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c + S + L, \end{aligned} \quad (45)$$

где $(\partial f / \partial t)_c$ определяется формулой (14). Для изотропных электронов имеем

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \left(- \frac{2}{3} v \frac{\partial f_e}{\partial v} \right) \frac{\dot{R}}{R} = \left(\frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_c + S_e + L_e. \quad (46)$$

В. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

1. Область конуса потерь, амбиполярный потенциал

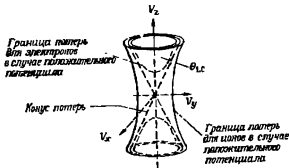
Поскольку некоторые задачи, обсуждаемые в этой главе, посвящены проблеме удержания плазмы в ловушках с магнитными пробками, в этом разделе мы рассмотрим математическую модель таких систем.

Угол раствора конуса потерь определяется равенством [33]

$$\sin^2 \theta_{LC} = \frac{1}{R_m}, \quad (47)$$

где $R_m = B_m / B(z)$; B_m — магнитное поле в пробке, а $B(z)$ — магнитное поле в рассматриваемой внутренней точке. Ориентация конуса потерь в пространстве скоростей показана на фиг. 1.

Частицы, pitch-угол которых меньше, чем θ_{LC} , сразу же теряются системой с магнитными пробками. Величина θ_{LC} не зависит от скорости, так же как и от массы и заряда частицы. Соотношение (47) получено в предположении отсутствия электростатического потенциала, и только при этом предположении θ_{LC} действительно представляет собой угол потерь. Однако интенсивность рассеяния для электронов вследствие их большей подвижности будет больше, чем для ионов, и большее число электронов по сравнению с ионами будет стремиться просочиться через концы



Фиг. 1. Границы конуса потерь в пространстве скоростей.

устройства. Следовательно, появится амбиполярный потенциал, который достигает наибольшего значения в центре и уменьшается к краям. Тот факт, что в системе устанавливается этот потенциал, ведет к фундаментальному изменению в характеристиках потерь для этих двух типов частиц. Области потерь определяются тогда углом потерь, который является функцией скорости и заряда [20, 26, 2, 35]. Если $Z_0 e$ — заряд, а $-\phi$ — электростатический потенциал, отсчитываемый от средней плоскости, то угол потерь определяется выражением

$$\sin^2 \theta_{LC} = \frac{1}{R_a}, \quad (48)$$

где

$$R_a = \left[\frac{1 + Z_0 e \phi / \frac{1}{2} m_a v^2}{R_m} \right]^{-1} \quad (49)$$

— «эффективное» пробочное отношение.

Формула (48) асимптотически переходит в (47) при $v \rightarrow \infty$. Для ионов правая часть выражения (48) может превосходить единицу; ни один ион с такой скоростью не может удерживаться в системе. Для электронов, наоборот, этот член может быть

меньше нуля; соответственно все электроны с такими скоростями будут захвачены электростатическим потенциалом. Эти области показаны на фиг. 1. Область потерь для ионов трансформируется из конуса в однополостный гиперболоид. При $\theta = \pi/2$ радиус поперечного сечения гиперболоида достигает минимума; равного минимальной скорости ионов, при которой еще возможно их удержание. Область потерь для электронов трансформируется в двуполостный гиперболоид.

В некоторых случаях потенциал, действующий на электроны, может отличаться от потенциала, действующего на ионы, поэтому мы включаем условие для определения отношения этих двух потенциалов. Предусмотрена также возможность выбора чисто электростатического удержания для электронов; в этом случае используется граничное условие $f_e(v \geq v_g) = 0$, где $m_e v_g^2/2 = e\phi$.

2. Полное пространство скоростей

В тех задачах, в которых исследуется релаксация распределения частиц в отсутствие конуса потерь или предполагается, что ионы не уходят немедленно из области потерь, используются граничные условия в полном пространстве скоростей, а именно:

$$(a) f(v=0, \theta) \text{ не зависит от } \theta, \quad (50)$$

$$(b) \frac{\partial f}{\partial v} \left(v=0, \theta = \frac{\pi}{2} \right) = 0, \quad (51)$$

$$(v) \frac{\partial f}{\partial \theta} (v, \theta=0) = \frac{\partial f}{\partial \theta} (v, \theta=\pi) = 0. \quad (52)$$

В установках, симметричных относительно средней плоскости $\theta = \pi/2$, предполагается, что

$$(r) \frac{\partial f}{\partial \theta} \left(v, \theta = \frac{\pi}{2} \right) = 0. \quad (53)$$

Г. Члены, описывающие источники и потери

Член S_a , описывающий источники в уравнении (1), имеет вид

$$S_a(v, \theta, t) = \sum_i J_a^i(t) S_a^i(v, \theta) \delta_s^{a,i}(t), \quad (54)$$

где функция $S_a^i(v, \theta)$ имеет форму гауссовой кривой по v и $\cos \theta$ с плотностью 1, $\delta_s^{a,i}(t)$ равно либо 0, либо 1, а $J_a^i(t)$ представляет собой ток и выражается следующим образом:

$$J_a^i = \sum_b [A_{ab}^i + B_{ab}^i (n_b)^{1/2} + C_{ab}^i n_b]. \quad (55)$$

Величины A_{ab}^i , B_{ab}^i и C_{ab}^i являются параметрами, не зависящими от времени, а n_b обозначает плотность частиц сорта «b».

Член L_a , описывающий потери в уравнении (1), может включать различные механизмы. Потери, обусловленные перезарядкой на атомах пучка, выражаются формулой

$$L_a^c = - \left[\sum_{b,i} D_{ab}^i \delta_{a,i}^{b,i}(t) \right] f_a(v, \theta, t), \quad (56)$$

где D_{ab}^i — постоянные параметры. Множители $\delta_{a,i}^{b,i}$ позволяют единообразным способом описать процесс перезарядки; данный член, описывающий перезарядку, вместе с соответствующим членом в выражении для источника зависит от одной и той же временной функции $\delta_{a,i}^{b,i}(t)$.

В задачах об удержании плазмы в ловушках с магнитными пробками часто предполагается, что ионы, находящиеся в области конуса потерь, сразу же теряются из системы. Однако существует конечный отрезок времени, который требуется для того, чтобы такие ионы прошли один раз между пробками, прежде чем они действительно покинут систему. Таким образом, время ухода является конечной величиной, и для холодных ионов (как в плазме мишени) оно может быть достаточно большим. Для учета этого эффекта в выражение для члена потерь L_a вводится следующее вида

$$L_a^m = - f_a(v, \theta, t) \frac{v_{th}}{L} \delta^m(v, \theta), \quad (57)$$

где L — длина ловушки с магнитными пробками вдоль оси, а $\delta^m(v, \theta)$ равно либо 0, либо 1 в зависимости от того, находится ли точка с координатами (v, θ) внутри конуса потерь или нет.

Эффекты, обусловленные конечностью времен удержания частиц и энергии в токамаке, учитываются включением в L_a следующего вида

$$L_a^e = - \frac{f_a(v, \theta, t)}{\tau_p} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[\left(\frac{1}{\tau_e} - \frac{1}{\tau_p} \right) \frac{v^3 f_a(v, \theta, t)}{2} \right]. \quad (58)$$

где τ_p и τ_e — времена удержания частиц и энергии соответственно. Если пренебречь остальными членами в уравнении (1) и подсчитать моменты функции распределения, то получим

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} = - \frac{n_a}{\tau_p}, \quad (59)$$

$$\frac{\partial (n_a \bar{E}_a)}{\partial t} = - \frac{n_a \bar{E}_a}{\tau_e}. \quad (60)$$

Величина $\bar{E}_a$ представляет среднюю энергию частиц сорта «a».

III. РЕШЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ УГЛОВЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

А. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

В этом разделе предполагается, что наша модель представляет собой открытую ловушку с пробочным отношением l . Отметим, однако, что метод разложения по собственным функциям применим и в других случаях.

Представим решения уравнения (7) в виде ортогональных рядов

$$f_a(v, \mu, t) = \sum_{l=1}^{\infty} U_l^a(v, t) M_l^a(\mu), \quad (8)$$

где $M_l^a(\mu)$ — собственные функции уравнения

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 M_l^a}{d\mu^2} - 2\mu \frac{dM_l^a}{d\mu} + \lambda_l^a M_l^a = 0, \quad (9)$$

представляющего собой уравнение Лежандра в области $-\cos \theta_{LC} \leq \mu \leq \cos \theta_{LC}$, где θ_{LC} — угол раствора конуса потока определяемый соотношением (47).

При таком рассмотрении мы не предполагаем, что g_a и h_a изотропные функции, поэтому в уравнении (7) переменные разделяются. Однако мы используем тот факт, что функции $M_l^a(\mu)$ образуют полную ортонормированную систему в области $-\mu_{LC} \leq \mu \leq \mu_{LC} = \cos \theta_{LC}$, т. е. при $k \neq l$

$$\int_{-\mu_{LC}}^{\mu_{LC}} M_l^a(\mu) M_k^a(\mu) d\mu = 0, \quad \int_{-\mu_{LC}}^{\mu_{LC}} [M_l^a(\mu)]^2 d\mu = 1. \quad (10)$$

Для численного решения задачи оставим конечное число нормальных мод $M_k^a(\mu)$ для каждого сорта частиц. Эти функции падаются численно как решения краевой задачи на собственные значения для уравнения (62) при $k = 1, 2, \dots, N$.

Если подставить правую часть (61) в уравнение (7), умножить на $M_k^a(\mu)$ и проинтегрировать по μ , учитывая (63), получим следующее уравнение для $U_k^a(v, t)$:

$$\frac{\partial U_k^a}{\partial t} = \sum_{l=1}^N \left\{ \frac{1}{v^3} \frac{\partial}{\partial v} \left[\alpha_{kl}^a U_l^a + \beta_{kl}^a \frac{\partial U_l^a}{\partial v} \right] - \frac{\gamma_{kl}^a}{v^3} U_l^a \right\} \quad (11)$$

при $K = 1, 2, \dots, N$, где

$$\alpha_{kl}^n = \Gamma_n \int_{-\mu_{LC}}^{\mu_{LC}} d\mu M_k^n(\mu) \left\{ M_l^n(\mu) \left[-v^2 \frac{\partial h_n}{\partial v} + \frac{v^3}{2} \frac{\partial^2 g_n}{\partial v^2} + v \frac{\partial^2 g_n}{\partial v^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(1-\mu^2)}{2v} \frac{\partial^2 g_n}{\partial \mu^2} - \frac{\partial g_n}{\partial v} + \frac{\mu}{v} \frac{\partial g_n}{\partial \mu} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1-\mu^2) M_l^n \left(\frac{\partial^2 g_n}{\partial \mu \partial v} - \frac{1}{v} \frac{\partial g_n}{\partial \mu} \right) \right] \right\}, \quad (65)$$

$$\beta_{kl}^n = \Gamma_n \int_{-\mu_{LC}}^{\mu_{LC}} d\mu \left[M_k^n(\mu) M_l^n(\mu) \frac{v^3}{2} \frac{\partial^2 g_n}{\partial v^2} \right], \quad (66)$$

$$\gamma_{kl}^n = -\Gamma_n \int_{-\mu_{LC}}^{\mu_{LC}} d\mu M_k^n(\mu) \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu} \left[M_l^n(\mu) \left(-(1-\mu^2) \frac{\partial h_n}{\partial \mu} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\mu(1-\mu^2)}{2v^2} \frac{\partial^2 g_n}{\partial \mu^2} + \frac{\mu}{v} \frac{\partial g_n}{\partial v} + \frac{(1-\mu^2)}{v} \frac{\partial^2 g_n}{\partial \mu \partial v} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial g_n}{\partial \mu} \right) \right] + \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \left[M_l^n(\mu) \left(\frac{(1-\mu^2)^2}{2v^2} \frac{\partial^2 g_n}{\partial \mu^2} + \frac{(1-\mu^2)}{2v} \frac{\partial g_n}{\partial v} - \frac{\mu(1-\mu^2)}{2v^2} \frac{\partial g_n}{\partial \mu} \right) \right] \right\}. \quad (67)$$

Используя (62), упростим (67), в результате получим

$$\gamma_{kl}^n = -\Gamma_n \int_{-\mu_{LC}}^{\mu_{LC}} d\mu M_k^n(\mu) \left\{ \frac{\partial M_l^n}{\partial \mu} \frac{2(1-\mu^2)}{v} \frac{\partial^2 g_n}{\partial \mu \partial v} - \frac{7\mu(1-\mu^2)}{2v^2} \frac{\partial^2 g_n}{\partial \mu^2} + \right. \\ \left. + \frac{(1-\mu^2)^2}{v^2} \frac{\partial^2 g_n}{\partial \mu^2} + \frac{2(\mu^2-1)}{v^2} \frac{\partial g_n}{\partial \mu} - (1-\mu^2) \frac{\partial h_n}{\partial \mu} \right\} + \\ + M_l^n \left[-\frac{3\mu}{v} \frac{\partial^2 g_n}{\partial \mu \partial v} + \left(\frac{15\mu^2-7}{2v^2} - \frac{\lambda_l^n(1-\mu^2)}{2v^2} \right) \frac{\partial^2 g_n}{\partial \mu^2} - \right. \\ \left. - \frac{4\mu(1-\mu^2)}{v^2} \frac{\partial^2 g_n}{\partial \mu^2} + \frac{3(1-\mu^2)}{2v} \frac{\partial^2 g_n}{\partial \mu^2 \partial v} + \frac{(1-\mu^2)^2}{2v^2} \frac{\partial^2 g_n}{\partial \mu^2} + \right. \\ \left. + \left(\frac{3\mu}{v^2} + \lambda_l^n \frac{\mu}{2v^2} \right) \frac{\partial g_n}{\partial \mu} - \frac{\lambda_l^n}{2v} \frac{\partial g_n}{\partial v} + 2\mu \frac{\partial h_n}{\partial \mu} - (1-\mu^2) \frac{\partial^2 h_n}{\partial \mu^2} \right]. \quad (68)$$

Функции g_n и h_n в уравнениях (65)–(68) представляются в виде разложений (10) и (11), причем в соотношения (12) и (13) входит

$$V_l^n(v, t) = \sum_{i=1}^N U_l^n(v, t) \int_{-1}^1 M_l^n(\mu) P_i(\mu) d\mu / \int_{-1}^1 [P_i(\mu)]^2 d\mu. \quad (69)$$

Все производные g_a и h_a по v и μ можно вычислить аналогично.

Коэффициенты (65)–(68) для уравнения (64) можно выразить аналитически с помощью четырех зависящих от времени функционалов:

$$M_I(V_I^a) = \int_0^\infty V_I^a(v', t) (v')^{I-1} dv', \quad (70)$$

$$N_I(V_I^a) = \int_0^\infty V_I^a(v', t) (v')^{2+I} dv', \quad (71)$$

$$E_I(V_I^a) = \int_0^\infty V_I^a(v', t) (v')^{4+I} dv', \quad (72)$$

$$R_I(V_I^a) = \int_0^\infty V_I^a(v', t) (v')^{3-I} dv' \quad (73)$$

и пяти определенных интегралов:

$$(S_1)_{jkl}^{ab} = \int_{-\mu_{LC}}^{+\mu_{LC}} \frac{dP_I}{d\mu} M_k^a(\mu) \frac{dM_I^b}{d\mu} (1 - \mu^2) d\mu, \quad (74)$$

$$(S_2)_{jkl}^{ab} = \int_{-\mu_{LC}}^{+\mu_{LC}} P_I(\mu) M_k^a(\mu) M_c^b(\mu) d\mu, \quad (75)$$

$$(S_3)_{jkl}^{ab} = \int_{-\mu_{LC}}^{+\mu_{LC}} \frac{dP_I}{d\mu} M_k^a(\mu) \frac{dM_I^b}{d\mu} d\mu, \quad (76)$$

$$(S_4)_{jkl}^{ab} = \int_{-\mu_{LC}}^{+\mu_{LC}} P_I(\mu) M_k^a(\mu) \frac{dM_I^b}{d\mu} \mu d\mu, \quad (77)$$

$$(S_5)_{jkl}^{ab} = \int_{-\mu_{LC}}^{+\mu_{LC}} \frac{dP_I}{d\mu} M_k^a(\mu) M_I^b(\mu) \mu d\mu. \quad (78)$$

В распоряжении авторов имеются выражения для коэффициентов в уравнениях (65)–(68). Интегралы (74)–(78) вычисляются с использованием равенства (47) для угла раствора конуса потерь, следовательно, они не зависят от времени. Однако оказывается, что необходимо пренебречь всеми анизотропными компонентами потенциалов Розенблюта для всех взаимодействий, кроме нон-ионных, т. е. мы считаем, что $(S_{1-3})_{jkl}^{ab} = 0$, если $j > 0$, а « a » или « b » совпадают с « e ».

Собственные значения λ_i^a уравнения (62), которые входят в (68), фактически зависят от «эффективного» пробочного отношения R_a , определяемого соотношением (49). Заметим, что эта формула применима только в том случае, если «а» обозначает ион, и $v^2 \geq v_{ca}^2 = z_a e \phi / 0,5 m_a (R_m - 1)$ либо если «а» обозначает электрон, а $v^2 \geq v_{ce}^2 = e \phi / 0,5 m_e$. Расширим определение R_a для всех скоростей, полагая $R_a = 1$, если «а» обозначает ион, и $v^2 \leq v_{ca}^2$ и $R_a = \infty$, если $v^2 \geq v_{ce}^2$. Наименьшее собственное значение λ_1^a дается формулой

$$\lambda_1^a \approx \frac{1}{\lg R_a}. \quad (79)$$

а большие собственные значения $\lambda_i^a (i \neq 1)$ находятся с помощью кусочно-линейных аппроксимаций отношений $\lambda_i^a / \lambda_1^a$ как функций $\lg R_a$. Функция распределения U_i^a полагается равной нулю в тех точках, где значение λ_i^a бесконечно.

Уравнения (64)–(68) решаются на конечно-разностной сетке $\{v_j\}_{j=1}^J$, где $v_1 = 0$, и $v_2 \leq v_J (J - 1)$. Значение v_2 однозначно определяет отношение $r \geq 1$, удовлетворяющее условию

$$v_{j+1} - v_j = r (v_j - v_{j-1}), \quad j = 2, \dots, J - 1. \quad (80)$$

Такая неравномерная сетка используется для того, чтобы обеспечить адекватное описание как низкоскоростных ионов, так и высокоскоростных электронов.

Для интегрирования векторной системы (64) используется шаблонный алгоритм. Разностные аппроксимации по пространству и времени аналогичны тем, которые использовались Фатчем и др. [15]. Для каждого сорта частиц «а» мы получаем трехдиагональную систему вида

$$-A_i U_{j+1}^{n+1} + B_i U_j^{n+1} - C_i U_{j-1}^{n+1} = D_i, \quad (81)$$

где A_i , B_i и C_i представляют собой матрицы $N \times N$, D_i — вектор размерности N и $U_j^n = U_k^n(v_j, n \Delta t)$. Метод решения описан в книге Рихтмайера и Мортон [29].

Для различных моделей рассчитывается самосогласованный амбиполярный потенциал как функция времени. Положим

$$n_+ = \sum_{\text{ионы}} n_a Z_a, \quad (82)$$

$$n_- = n_e, \quad (83)$$

$$d_{\pm}(\psi) = n_{\pm}(\psi + \Delta \psi) - n_{\pm}(\psi). \quad (84)$$

Если $n_+(t) \left\{ \begin{array}{l} < \\ > \end{array} \right\} \left\{ n_-(t) \text{ и } d_+(t) \right\} \left\{ \begin{array}{l} < \\ > \end{array} \right\} d_-(t)$, мы уменьшаем (увеличиваем) амбиполярный потенциал на величину $\Delta\phi$ и повторяем последний шаг по времени. Эта итерационная процедура продолжается до тех пор, пока $d_+(t) \left\{ \begin{array}{l} < \\ > \end{array} \right\} d_-(t)$.

В разд. III будет показано, что в задачах, в которых источник пропорционален низшей нормальной моде, достаточно точные результаты можно получить, если рассматривать только одну нормальную моду (т. е. $N=1$), а в (10) и (11) учитывать только члены, пропорциональные $P_0(\mu)$ и $P_2(\mu)$. [Член, пропорциональный $P_1(\mu)$, пропадает из-за симметрии относительно $\mu=0$.] Модель низшей нормальной моды, приведенная в работе Фатча и др. [15], была впоследствии значительно усовершенствована, чтобы учесть в выражениях для потенциалов Розенблюта, кроме изотропных компонент, также составляющую с $P_2(\mu)$.

В. ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Несколько нормальных мод

Рассмотрим дейтериевую плазму, удерживаемую в ловушке с магнитными пробками, в которую инжектируются дейтроны с энергией 100 кэВ. Амбиполярный потенциал рассчитывается самосогласованно, как описано выше. Вычисляется зависимость добротности удержания

$$n\tau = \frac{n_i^2}{J_i} \quad (86)$$

от углового распределения источника, пробочного отношения R , числа четных полиномов Лежандра в разложениях потенциалов Розенблюта M и числа нормальных мод, используемых для аппроксимации функции распределения N . Результаты представлены в табл. I, в которую включены также данные, полученные с помощью двумерной гибридной модели, описанной в разд. IV.

Можно сделать следующие выводы:

1. В разложениях потенциалов Розенблюта достаточно оставлять только члены с $P_0(\mu)$ и $P_2(\mu)$, т. е. в разложениях (10) и (11) можно отбрасывать члены, начиная с $j=3$.

2. В задачах с локализованным по углу источником имеется очень хорошее согласие между результатами, полученными с использованием программы разложения и гибридной программы.

2. Низшая мода

а. D-T- и D-³He-реакторы на основе ловушки с магнитными пробками. Представление источника низшей нормальной моды использовалось для параметрического исследования добротности

Таблица 1

Сравнения значений параметра удержания

Угловое распределение источников	R	M	N	Программа	$\eta \times 10^{15}$
Нормальная мода	3	1	1	Разложение	1,03
То же	3	2	1	»	1,13
» »	3	3	1	»	1,14
» »	3	4	1	»	1,14
» »	3	5	1	»	1,14
» »	3	2	4	»	1,09
» »	3	5	—	Гибридная	1,02
Локализованный	3	2	4	Разложение	1,24
Локализованный	3	5	—	Гибридная	1,22
Нормальная мода	10	1	1	Разложение	2,07
То же	10	2	1	»	2,34
» »	10	3	1	»	2,34
» »	10	4	1	»	2,34
» »	10	5	1	»	2,34
» »	10	2	4	»	2,29
» »	10	5	—	Гибридная	2,24
Локализованный	10	1	2	Разложение	2,48
Локализованный	10	1	3	»	2,34
То же	10	1	4	»	2,36
» »	10	2	2	»	2,86
» »	10	2	3	—	2,58
Локализованный	10	2	4	Разложение	2,61
То же	10	3	2	»	2,86
» »	10	5	—	Гибридная	2,65

сти Q реакторов на основе ловушки с магнитными пробками, в которых применяются D-T- и D-³He-циклы сгорания термоядерного горючего [15]. В этих исследованиях рассматривается стационарная система, в которой плазма, удерживаемая пробочным магнитным полем, поддерживается инжекцией пучка горячих нейтральных атомов. Добротность Q такой системы определяется как

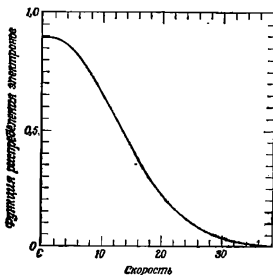
$$Q = \frac{\text{(Термоядерная мощность)}}{\text{(Инжектируемая мощность, необходимая для поддержания плазмы)}} = \\ = \frac{1}{2} \sum_a \sum_b a_a n_b (\overline{\sigma v})_{ab} E_{ab} / \sum_a J_a E_a, \quad (86)$$

где n_a — плотность частиц (частиц/см³), J_a — плотность инжектируемого тока источника (частиц/см²/с) и E_a — энергия инжектируемых частиц сорта «a». Величина $(\overline{\sigma v})_{ab}$ представляет собой произведение сечения термоядерных реакций на относительную скорость, усредненное по функциям распределения взаимодействующих частиц; E_{ab} — энергия, выделяющаяся в одной

реакции синтеза. Для данных параметров источника J_a , E_a пробочного отношения R_m функции распределения всех компонент плазмы в пространстве скоростей кажутся из уравнения (64), в которое добавляется член, описывающий источник. Голученные функции распределения используются для вычисления интенсивности термоядерных реакций

$$n_a n_b (\overline{\sigma v})_{ab} = \int dv_a \int dv_b f_a(v_a) f_b(v_b) \sigma_{ab}(v_{ab}) v_{ab}, \quad (1)$$

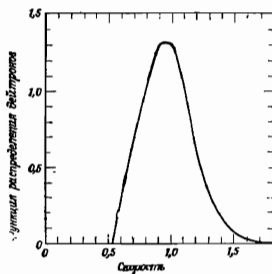
где $v_{ab} = |v_a - v_b|$ — относительная скорость. При вычислении величины Q мы пренебрегали анизотропией функций распре-



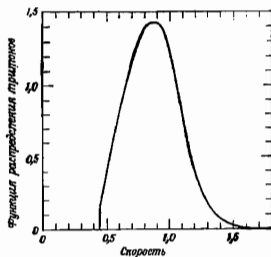
Фиг. 2. Распределение по скоростям электронов.

деления, поэтому явное выражение собственной функции $M_a(\epsilon)$ соответствующей нормальной моде, не требуется.

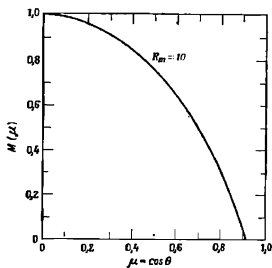
Для иллюстрации характера решений на фиг. 2—4 приведены типичные функции распределения по скоростям для электронов, дейтронов и тритонов. На фиг. 5 показано распределение по углу типичной нормальной моды. Результаты параметрического цикла сгорания термоядерного горючего в D-T-реакторе основе ловушки с магнитными пробками приведены на фиг. 6, где показана зависимость Q от энергии инжекции ($E_D = E_T = \epsilon$) и пробочного отношения; токи источников при этом подбирались таким образом, чтобы обеспечить равенство плотностей дейтронов и тритонов. В четырехкомпонентных (D-T-E- α) вариантах расчетов предполагается, что заряженные продукты реакции синтеза (α -частицы) адиабатически удерживаются в ловушке



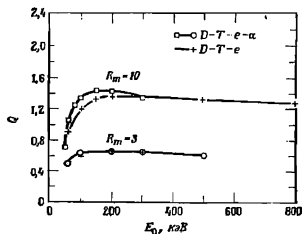
Фиг. 3. Распределение по скоростям дейтронов.



Фиг. 4. Распределение по скоростям тритонов.



Фиг. 5. Угловая собственная функция, соответствующая нижней нормальной моде.



Фиг. 6. Зависимость Q от энергии инжекции для системы с магнитными пробками.

$E_{DT} = 22.4$ МэВ.

в результате по мере их замедления происходит дополнительный нагрев плазмы. Непрерывное образование α -частиц моделируется источником, аналогичным по форме источникам ионов, но с величиной тока, определяемой интенсивностью D-T-реакции, и с энергией E_α , равной 3,5 МэВ. Потери, обусловленные выгоранием, учитываются путем вычитания интенсивности реакций из членов, описывающих источники дейтронов и тритонов. Результаты, приведенные на фиг. 6, показывают, что Q как функция энергии D-T-инжекции E_0 имеет весьма широкий максимум в области энергий, близких к $E_0 = 300$ кэВ, и улучшение удержания α -частиц, начиная с энергии инжекции порядка 300 кэВ, с точки зрения увеличения Q уже не имеет смысла. Более подробно с этими и другими результатами можно ознакомиться в работе [15].

Полученные здесь значения Q существенно зависят от числа полиномов Лежандра, удерживаемых в разложении потенциалов Розенблюта [см. уравнения (10) и (11)]. Результаты, приведенные на фиг. 6 и в работе [15], были получены с использованием только члена с $P_0(\mu)$. В табл. 2 для небольшого числа типичных случаев показано влияние следующего ненулевого члена, пропорционального $P_2(\mu)$. Видно, что Q увеличивается примерно на 20%. Учет следующих членов в разложении приводит к меньшим поправкам. В этой таблице приведены также результаты, полученные с помощью двумерной программы, описанной в разд. IV, которые хорошо согласуются с результатами, полученными в рамках одномерной модели с учетом поправок, обусловленных включением члена с $P_2(\mu)$.

Таблица 2

Сравнение значений Q ($R_m = 10$)

Тип программы	Состав плазмы по компонентам			
	D-T	D-T- α	D-e- ^3He	D-e- ^3He - α -p
Одномерная программа (используется только P_0)	1,22	1,39	0,244	0,264
Одномерная программа (используются P_0 и P_2)	1,44	1,68	0,289	0,312
Двумерная программа, источник в виде нормальной моды	1,38	1,61	0,278	0,301
Двумерная программа, локализованный источник	1,71	1,99	0,337	0,365

Модель на основе уравнения Фоккера — Планка с нижней нормальной модой применялась также при исследовании двухкомпонентного реактора на основе ловушки с магнитными проб-

ками [27]. Член, описывающий потери, видоизменялся таким образом, чтобы учесть потери дейтронов, обусловленные акселеральной диффузией в области низких энергий и уходом частиц через концы ловушки в области высоких энергий. Предполагалось, что дейтроны инжектируются в фоновую плазму, состоящую из тритонов и электронов с заданными максвелловскими распределениями. Полученные значения Q сравниваются с аналогичными величинами, найденными для тороидальных двухкомпонентных систем [11].

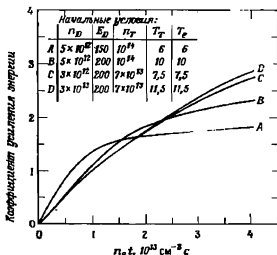
б. Двухкомпонентные тороидальные реакторы. В этом разделе мы покажем, что такое нестационарная или переходная часть решения кинетических уравнений для многокомпонентной плазмы. Разработанная программа используется для исследования коэффициента усиления энергии в двухкомпонентном тороидальном реакторе [11, 4]. В этом примере плазма состоит из трех сортов частиц (e-D-T), каждый из которых характеризуется изотропным распределением в скоростном пространстве. Кроме того, мы можем включить α -частицы, образующиеся в результате D-T-реакций синтеза. Высокоэнергетические дейтроны инжектируются в омически нагретую тритиевую плазму токамака. Исследуется эволюция распределения дейтронов с резким максимумом в начальный момент и вычисляется энергия, выделяющаяся в D-T-реакциях синтеза, происходящих по мере замедления дейтрона в фоновой плазме. В этом примере в кинетических уравнениях отсутствуют члены, описывающие потери (т. е. нет конуса потерь в пространстве скоростей), что фактически соответствует предположению о том, что времена удержания частиц и энергии велики по сравнению с временем замедления дейтронов. Добротностью такой системы является коэффициент усиления энергии F , который определяется как

$$F = \frac{\text{(энергия, выделившаяся в реакциях синтеза)}}{\text{(первоначальная энергия дейтронов)}} = \\ = \int_0^t dt n_T n_D \overline{\sigma v}(t) E_F / n_D \bar{E}_D(0), \quad (88)$$

где $\bar{E}_D(0)$ — средняя энергия дейтрона при $t = 0$, а $\overline{\sigma v}$ — параметр, характеризующий скорость D-T-синтеза, который зависит от детальной структуры распределений.

На фиг. 7 приведены результаты расчетов коэффициента усиления энергии F в некоторых показательных случаях. Для времен, больших по сравнению с временем замедления дейтронов, система приближается к состоянию теплового равновесия, так что $\overline{\sigma v}$ становится постоянной во времени и F возрастает линейно. Это ясно видно на фиг. 7. Для нахождения составляющей F

не зависящей от промежутка интегрирования по времени в формуле (88), можно определить «переходный» вклад в F , вычитая асимптотическую стационарную компоненту энергии синтеза из подынтегрального выражения в (88). Эта процедура приводит



Фиг. 7. Коэффициент усиления энергии в ТСТ.

Кривая D построена с учетом наличия альфа-частиц.

к хорошо определенным значениям F , непосредственно сравнимым с аналогичными величинами, полученными Доусоном и др. [11].

IV. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЕ РЕШЕНИЕ В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ СКОРОСТЕЙ

A. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

В этом разделе обсуждается «гибридная» трактовка, при которой ноны описываются и аппроксимируются конечно-разностными выражениями в координатах u , θ , а электроны описываются нижней нормальной модой. При применении этой модели к ловушкам с магнитными пробками в правую часть уравнения (23) добавляется член, описывающий потери электронов:

$$-\frac{1}{2} \lambda_1^e \frac{1}{v^3} \frac{\partial g_e}{\partial v} f_e(v, t), \quad (89)$$

где λ_1^e определяется равенством (79).

Уравнение (14) решается методом расщепления или дробных шагов. Вначале с использованием полуявного разностного

$$\frac{1}{\Gamma_a} \frac{\partial f_a}{\partial t} = \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial G_a}{\partial v}, \quad (90)$$

а затем аналогичным образом — уравнение

$$\frac{1}{\Gamma_a} \frac{\partial f_a}{\partial t} = \frac{1}{\sigma^2 \sin \theta} \frac{\partial H_a}{\partial \theta}. \quad (91)$$

Разностная схема для уравнения (90) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{f_{ij}^{n+1} - f_{ij}^n}{\Gamma_n \Delta t} = & \frac{A_{i,j+1}^n f_{i,j+1}^{n+1} - A_{i,j-1}^n f_{i,j-1}^{n+1}}{2\sigma_j^2 \Delta v_j} + \\ & + \frac{1}{2\sigma_j^2 \Delta v_j} \left(\frac{B_{i,j+v_k}^n (f_{i,j+1}^{n+1} - f_{i,j}^{n+1})}{\Delta v_{j+v_k}} - \right. \\ & \left. - \frac{B_{i,j-v_k}^n (f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j-1}^{n+1})}{\Delta v_{j-v_k}} \right) + \\ & + \frac{1}{2\sigma_j^2 \Delta v_j} \left(\frac{C_{i,j+1}^n (f_{i+1,j+1}^n - f_{i-1,j+1}^n)}{2 \Delta \theta_i} - \right. \\ & \left. - \frac{C_{i,j-1}^n (f_{i+1,j-1}^n - f_{i-1,j-1}^n)}{2 \Delta \theta_i} \right). \end{aligned} \quad (92)$$

Здесь $f_{i,j}^n = f(v, \theta, n \Delta t)$, а коэффициенты $B_{i,j \pm v_k}^n$ есть просто среднее арифметическое $B_{i,j}^n$ и $B_{i,j \pm 1}^n$. Индекс «а» также опущен.

Уравнение (92) можно переписать в трехдиагональной форме

$$-\alpha_{i,j}^n f_{i,j+1}^{n+1} + \beta_{i,j}^n f_{i,j}^{n+1} - \gamma_{i,j}^n f_{i,j-1}^{n+1} = \delta_{i,j}^n. \quad (93)$$

Ясно, что член со смешанной второй производной нельзя записать на верхнем временном слое без нарушения трехдиагональной формы матрицы. Уравнение (91) интегрируется аналогично, только v и θ меняются ролями.

Уравнение для электронов интегрируется методом, описанным в разд. III. При этом допускается деление временного шага на несколько меньших временных шагов $\Delta t/K = \Delta t_e$, причем электронные коэффициенты пересчитываются на каждом таком дробном временном шаге. Эта процедура, незначительно увеличивая время решения задачи на ЭВМ, весьма полезна при решении нестационарных задач, в которых характерный временной масштаб для электронов мал.

Б. ПРИЛОЖЕНИЯ

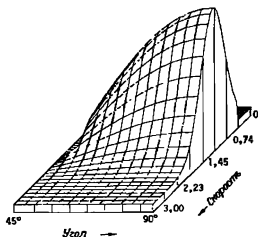
1. Плазма, удерживаемая в ловушке с магнитными пробками

Ряд различных физических процессов, для описания которых одномерная модель с низшей нормальной модой неприменима, можно исследовать с помощью прямого численного решения двумерной задачи для функции распределения ионов в пространстве скоростей. В частности, в экспериментах, проводимых на установках с магнитными пробками, таких, как 2XII [10], часто встречается нестационарная плазма, которая может претерпевать быстрые изменения, в результате чего невозможно установление ионного распределения с низшей нормальной модой. Далее инжекция хорошо коллимированных нейтральных пучков, как, например, на установках ВВП [1, 2] и 2XIV [10], приводит к образованию источников ионов, распределение которых имеет резкий максимум в пространстве скоростей, поэтому для адекватного описания таких процессов необходимо учитывать значительное количество нормальных мод.

Ниже приводятся примеры задач как с переходной, так и со стационарной плазмой, удерживаемой в системе с магнитными пробками, с инжекцией нейтральных пучков. Мы также покажем, каким образом с помощью решения уравнений Фоккера — Планка можно получить информацию об МГД-равновесии и устойчивости плазмы в ловушках с магнитными пробками.

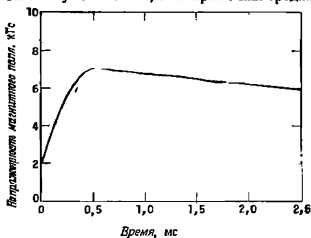
а. Эксперимент на установке 2XII. Одним из первых примеров использования двумерной программы Фоккера — Планка было исследование эксперимента на установке с магнитными пробками 2XII [10]. Плазменный струю инжектируется в ловушку с магнитными пробками, сжимается магнитным полем для увеличения плотности и энергии, а затем распадается по мере того, как электроны и ионы рассеиваются через магнитные пробки вследствие столкновений. Экспериментальные данные о временной эволюции различных плазменных характеристик можно сравнить с решениями системы уравнений Фоккера — Планка для электронов и ионов [10]. Обычно в качестве начального условия в программе берется функция распределения захваченных ионов, полученная в эксперименте, а временная зависимость члена, описывающего магнитное сжатие, подбирается таким образом, чтобы смоделировать нестационарное магнитное поле, используемое в эксперименте. На фиг. 8 показан пример начального распределения ионов. На этом трехмерном изображении по вертикали откладывается значение функции распределения в каждой точке (v, θ) горизонтальной плоскости. Зависимость величины магнитного поля от времени приведена на фиг. 9. Некоторые типичные результаты, полученные

с помощью программы, приведены на фиг. 10—12, на которых нанесены зависимости плотности, средней энергии ионов и средней энергии электронов от времени. Магнитное сжатие происхо-



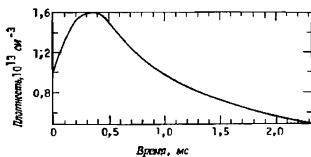
Фиг. 8. Распределение ионов в начальный момент на установке 2XIIВ.

дит в промежутке времени $0 \leq t \leq 535$ мкс. Видно, что после сжатия плотность уменьшается, в то время как средняя энергия

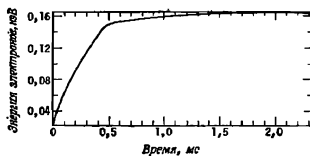


Фиг. 9. Напряженность магнитного поля на установке 2XIIВ.

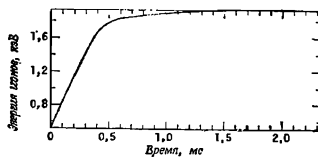
ионов увеличивается, что обусловлено преимущественным уходом низкоэнергетических ионов вследствие кулоновских столкновений. Наблюдаемое в эксперименте уменьшение плотности происходит обычно в 2—3 раза быстрее, чем это следует из чис-



Фиг. 10. Плотность плазмы на установке 2ХІІВ.



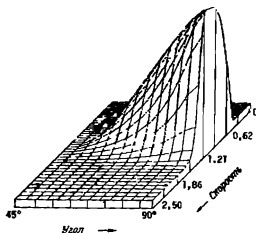
Фиг. 11. Средняя энергия электронов на установке 2ХІІВ.



Фиг. 12. Средняя энергия ионов на установке 2ХІІВ.

ленного решения уравнения Фоккера — Планка, что указывает на неклассический характер процессов в эксперименте. В настоящее время исследуются методы численного моделирования подобных процессов.

6. *Эксперимент на установке ВВН.* В эксперименте на установке с магнитными пробками ВВН [1] плазма образуется при инжекции нейтрального пучка в вакуум. Стационарное состояние плазмы устанавливается благодаря тому, что потери через концы компенсируются в результате непрерывной ионизации

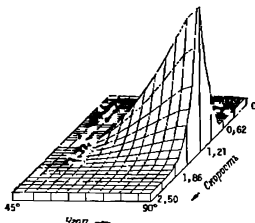


Фиг. 13. Распределение ионов на установке ВВН с учетом фонового газа.

атомов нейтрального пучка внутри ловушки. Пучок сильно коллимированный и моноэнергетический, в результате образуется распределение ионов, характеризующееся резко выраженным максимумом в пространстве скоростей. Наиболее подходящим методом численного моделирования этой специфической особенности эксперимента является прямое решение двумерных уравнений Фоккера — Планка

В уравнения включаются источники и потери, моделирующие условия эксперимента, и рассчитываются стационарные функции распределения ионов и электронов. Примеры полученных функций распределения приведены на фиг. 13 и 14. Так как плотность плазмы в этом эксперименте мала, то необходимо адекватно описать в программе большое число важных атомных процессов, происходящих в плазме. Выражения для трех членов, описывающих токи источников ионов и электронов в уравнении [55], выбирались таким образом, чтобы учесть лоренцеву ионизацию, инвертированную каскадную ионизацию [18] и ионизацию электронным и ионным ударом [30] атомов нейтрального

пучка. Присутствие значительного количества фонового газа, обычно неона и азота, приводит к образованию дополнительного источника электронов, так как возникающие при плазменной ионизации этих газов электроны удерживаются электростатически благодаря амбиполярному потенциалу. Благодаря тому же потенциалу образовавшийся холодный примесный ион сразу же выталкивается из системы. В результате происходит «охлаждение» электронов, так что их средняя энергия становится меньше, чем в отсутствие газа. Как видно из фиг. 13 и 14, влияние этого



Фиг. 14. Распределение ионов на установке VBII без учета фонового газа.

эффекта весьма заметно и на форме ионного распределения. На фиг. 13 показана вычисленная функция распределения ионов в стационарном состоянии, типичная для условий эксперимента на установке VBII. На фиг. 14 показано, как изменилась бы эта функция распределения, если бы в системе полностью отсутствовал фоновый газ. В обоих случаях положение резкого максимума ионной функции распределения соответствует энергии источника ионов и углу инжекции. В определенных эксплуатационных режимах на установке VBII важную роль играют процессы перезарядки, поэтому в наших расчетах уравнений Фоккера — Планка учитывались соответствующие члены.

При надлежащем учете в нашей модели атомных процессов было получено достаточно хорошее совпадение с экспериментом таких количественных характеристик, как плотность, средняя энергия, величина амбиполярного потенциала. Главной нерешенной задачей остается идентификация «неустойчивости предельной плотности», наблюдаемой в эксперименте. Возможно, это

обусловлено некоторыми особенностями формы функции распределения ионов, однако исследование результатов решения уравнения Фоккера — Планка пока не позволило дать однозначного ответа на этот вопрос.

в. Исследования реакторов. Программа решения двумерного уравнения Фоккера — Планка использовалась также для получения информации о плазменных процессах, относящейся к разработке реактора на основе ловушки с магнитными пробками. Расчеты Q , аналогичные ранее описанным в разд. III, были выполнены с помощью двумерной программы, учитывающей влияние локализованных источников, не описываемых одной нормальной модой, для произвольных углов инжекции. При перпендикулярной инжекции найденные значения Q на 50% превышают значения, полученные Фатчем и др. [15]. Это объясняется главным образом использованием анизотропных потенциалов Розенблюта и включением сильно локализованного по углу источника.

С помощью решений уравнений Фоккера — Планка можно также получить информацию об МГД-свойствах плазмы, удерживаемой в ловушке с магнитными пробками. Мы считаем, что решения представляют функции распределения частиц, находящихся в средней плоскости длинного тонкого плазменного шнура, удерживаемого магнитным полем с пробками. В любой другой точке вдоль оси плазмы функции распределения можно найти, если заметить, что такие интегралы движения частицы, как энергия и магнитный момент, связывают вектор скорости в средней плоскости и в любой другой точке соотношением, содержащим лишь напряженность магнитного поля B и амбиполярный потенциал ϕ . Обозначая величины, относящиеся к средней плоскости, нулевым индексом, получим

$$\text{магнитный момент} = \frac{mv^2 \sin^2 \theta}{2B} = \frac{me_0^2 \sin^2 \theta_0}{2B_0}, \quad (94)$$

$$\text{полная энергия} = \frac{mv^2}{2} + eZ\phi = \frac{mv_0^2}{2}. \quad (95)$$

Если предположить, что средняя длина свободного пробега частицы много больше расстояния между пробками, то на некотором расстоянии l от средней плоскости напряженность магнитного поля равна $B(l) = B$, а амбиполярный потенциал $\phi(l) = \phi$, и функция распределения определяется равенством

$$f_s[v, \theta, l] = f_s[v_0(v, \phi), \theta_0(v, \theta, \phi, B), 0], \quad (96)$$

где $v_0(v, \phi)$ и $\theta_0(v, \theta, \phi, B)$ находятся из соотношений (94) и (95), а $f[v_0, \theta_0, 0]$ является решением двумерного уравнения

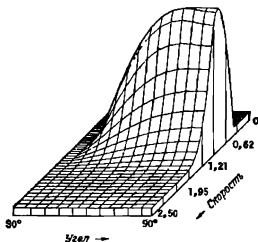
Фоккера — Планка. Вычисляя плотность каждого сорта частиц плазмы

$$n_a(B, \phi) = 4\pi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \int_0^{\infty} dv v^2 f_a[v, \theta, \Omega, \quad (97)$$

мы находим амбиполярный потенциал как функцию напряженности магнитного поля $\phi = \phi(B)$, требуя выполнения условия квазинейтральности в каждой точке плазмы:

$$n_0(B, \phi) = \sum_a Z_a n_a(B, \phi) \quad (98)$$

и разрешая его относительно ϕ , зависящего от B . Типичная функция распределения ионов $f(v_0, \theta_0, 0)$ показана на фиг. 15,



Фиг. 15. Распределение дейтронов по скоростям в реакторе на основе лодушки с магнитными пробками.

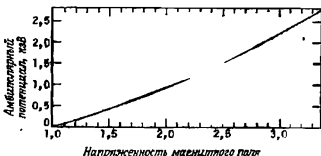
а полученный с ее помощью профиль потенциала представлен на фиг. 16. Подставляя $\phi(B)$ в уравнение (96), получим функцию распределения в произвольной точке, зависящую только от одного параметра — нормированной величины напряженности магнитного поля $\psi = B/B_0$, где $\psi = 1$ в средней плоскости и $\psi = R_m$ в магнитной пробке. Затем можно вычислить плотность $n(\psi)$ и компоненты тензора давления $[p_1(\psi), p_0(\psi)]$ и использовать их при МГД-описании плазмы. Примеры профилей плотности и давления, полученные с помощью функций распределения, найденных численными методами, приведены на фиг. 17—19.

Для МГД-устойчивости давление плазмы должно удовлетворять двум условиям [16]:

$$B + 4\pi \frac{dp_{\perp}}{dB} > 0, \quad (99)$$

$$B - 4\pi \frac{dp_{\parallel}}{dB} > 0, \quad (100)$$

которые определяют устойчивость зеркальной и шланговой мод соответственно. Если эти условия применить к профилям давления, полученным при численном решении уравнения Фоккера — Планка, то можно определить напряженность магнитного поля



Фиг. 16. Профиль амбиполярного потенциала вдоль магнитной силовой линии.

B_0 в средней плоскости, для которой плазма еще находилась бы на границе устойчивости. Затем можно также найти предельное плазменное бета, значение которого в средней плоскости определяется из соотношения

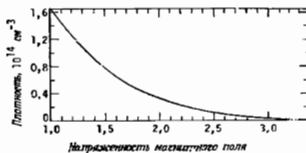
$$\beta_0 = \frac{\rho_{\perp}(B_0)}{\rho_{\perp}(B_0) + B_0^2/8\pi}. \quad (101)$$

Для примера, проиллюстрированного на фиг. 15—19, максимальное значение бета оказалось равным $\beta_0 = 0,65$. Исходные данные для этого примера приведены в табл. 3.

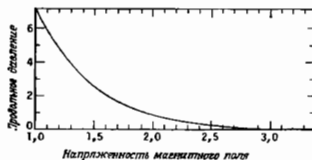
Таблица 3

Входные данные для примера реактора
на основе ловушки с магнитными пробками

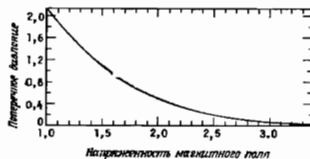
Пробочное отношение	3,381
Энергия источника дейтронов	65 кэВ
Ток источника дейтронов	$2 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$
Энергия источника тритонов	97,5 кэВ
Ток источника тритонов	$1 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$
Углы инжекции (4 источника)	55°, 63°, 70°, 78°



Фиг. 17. Профиль плотности вдоль магнитной силовой линии.



Фиг. 18. Профиль продольного давления вдоль магнитной силовой линии.

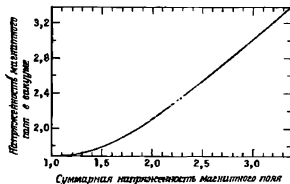


Фиг. 19. Профиль поперечного давления вдоль магнитной силовой линии.

Вычислив с помощью функций распределения, полученных при решении уравнения Фоккера — Планка, тензор давления, можно сделать определенные выводы относительно равновесной конфигурации плазмы в ловушке с магнитными пробками. В частности, для длинной тонкой системы с магнитными пробками можно приблизительно оценить изменение вакуумного магнитного поля, обусловленное присутствием плазмы с большим бета. Основным при этом является уравнение баланса радиального давления в каждой точке вдоль оси плазмы

$$\frac{B_{\text{вак}}^2}{8\pi} = \frac{B^2}{8\pi} + p_{\perp} B. \quad (102)$$

Это уравнение можно разрешить относительно B как функции $B_{\text{вак}}$, и, предполагая, что $B_{\text{вак}}$ приблизительно постоянно по по-



Фиг. 20. Напряженность магнитного поля в вакууме и в плазме с большим бета.

перечному сечению плазмы, можно найти изменение вакуумного магнитного поля, обусловленное присутствием плазмы с давлением $p_{\perp}(B)$. В частности, в плазме с большим бета вакуумное пробочное отношение значительно возрастает:

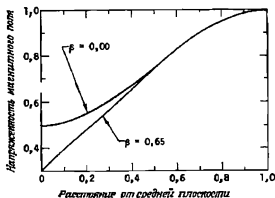
$$R_{\text{пр}} = \frac{R_{\text{вак}}}{(1 - \beta_0)^{1/2}}. \quad (103)$$

Для примера, представленного на фиг. 15—19 и в табл. 3, отношение $B_{\text{вак}}$ к B , полученное из уравнения (102), показано на фиг. 20. Далее, если известна зависимость вакуумного магнитного поля от пространственной координаты $B_{\text{вак}}(l)$, то можно найти аналогичную зависимость магнитного поля в присутствии плазмы. Например, если принять, что

$$B_{\text{вак}}(l) = B_0 \left[\frac{R_{\text{вак}} + 1}{2} - \frac{R_{\text{вак}} - 1}{2} \cos \frac{\pi l}{L_T} \right], \quad (104)$$

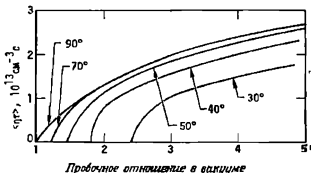
то пространственный профиль магнитного поля изменяется, как показано на фиг. 21 для $\beta = \beta_0$.

В настоящее время с использованием уравнения Фоккера — Планка для обширной области параметров проводится исследо-



Фиг. 21. Пространственный профиль магнитного поля в вакууме и в плазме, находящейся на границе МГД-устойчивости.

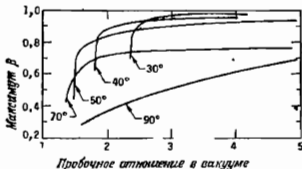
вание плазмы, удерживаемой в ловушке с магнитными пробками, при инжекции нейтральных атомов. Цель этих вычислений состоит в определении исходных данных, позволяющих выде-



Фиг. 22. Зависимость параметра удержания плазмы от пробочного отношения и угла инжекции.

лнить наиболее интересные режимы, и в создании основы для дальнейших более детальных расчетов установки. В этом исследовании входными параметрами, которые могут варьироваться, являются пробочное отношение, число и тип ионов, число источников каждого сорта ионов, энергия и угол инжекции и относительная интенсивность каждого источника. Некоторые

результаты для систем, включающих только один сорт частиц, и с одним источником ионов приведены на фиг. 22 и 23, на которых параметр удержания частиц $\langle \eta \rangle$ и максимальное бета представлены как функции вакуумного пробочного отношения и угла инжекции [26]. Эти результаты указывают на возможность значительного увеличения предельного бета без заметного уменьшения $\langle \eta \rangle$ при инжекции под углом $\theta_0 \approx 50^\circ$ в отличие от обычной инжекции с $\theta_0 = 90^\circ$. Более общая задача



Фиг. 23. Зависимость максимальной величины бета, соответствующей устойчивой плазме, от пробочного отношения и угла инжекции.

оптимизации инжекции при наличии нескольких источников изучалась Холлом и др. [17] с использованием упрощенных моделей реактора и уравнений Фоккера — Планка. Относительно использования различных углов инжекции для получения максимального бета их результаты согласуются с нашими. С помощью двумерной фоккер-планковской модели были также изучены двухкомпонентные реакторы на основе ловушки с магнитными пробками [9].

2. Двухкомпонентные тороидальные реакторы

Двумерная многокомпонентная программа Фоккера — Плана является полезным инструментом исследования физики термализации направленных моноэнергетических нейтральных пучков, инжектируемых в плотную плазму токамака [24]. Основные физические процессы в двухкомпонентном тороидальном реакторе (ТСТ)⁴⁾ были описаны Доусоном и др. [11]. Изменения и уточнения этой концепции были изложены в работах Фюрса и Джэсби [13] и Берка и др. [4]. Общепринятое толкование эксперимента с «зажиганием» на ТСТ послужило допол-

⁴⁾ ТСТ — two-component toroidal reactor, — Прим. ред.

нительным стимулом детального исследования физических явлений, происходящих в плазме такой системы.

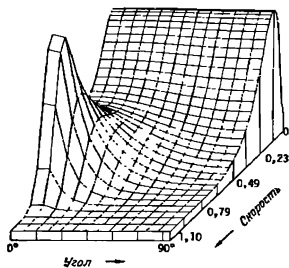
В идеализированной модели, в которой плазма считается однородной по пространству внутри некоторого конечного тороидального объема, систему можно исследовать в терминах только скоростных переменных. В частности, функции распределения электронов и ионов находятся как решения нестационарных уравнений Фоккера — Планка, содержащих лишь скоростные переменные. Эти решения можно использовать для расчета коэффициента усиления энергии

$$Q = \frac{\text{(Энергия, выделяющаяся в реакциях синтеза)}}{\text{(Энергия инжектированных дейтронов)}}. \quad (105)$$

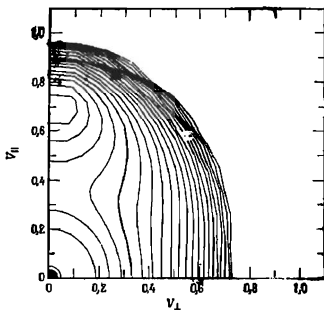
который служит добротностью для импульсной ТСТ-системы.

Ряд особенностей модели, основанной на решении уравнений Фоккера — Планка, делает ее чрезвычайно удобной для описания важных физических эффектов в ТСТ. Нелинейность кинетических уравнений позволяет учесть столкновения частиц всех сортов, включая самодействие, вне зависимости от вида функции распределения. Альфа-частицы и примесные ионы описываются точно так же, как ионы дейтерия и трития, поскольку в модели нет каких-либо ограничений на число компонент плазмы. Эффективным дополнением инжекции в тороидальный плазменный шнур является сжатие по большому радиусу [7, 8, 13], при этом двумерность пространства скоростей в нашей модели позволяет достаточно точно учесть возмущения функций распределения, обусловленные анизотропной внешней силой (см. разд. II, Б). Потери в системе, обусловленные процессами диффузии, перезарядки, излучения и др., учитываются специальными членами, описанными в разд. II, Г, причем величина этих потерь определяется через времена удержания частиц и энергии для каждого сорта частиц плазмы. При вычислениях эти времена вводятся в программу в качестве входных параметров. Мы пренебрегаем любыми потерями через границу в пространстве скоростей, обусловленными, например, тем, что банановая траектория запертой частицы может выйти за пределы плазменного шнура.

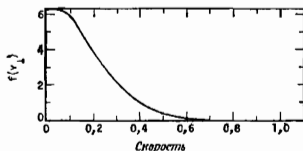
Для исследования проблем, связанных с ТСТ, имеется ряд диагностических методов; данные, полученные с их помощью, приведены на фиг. 24—27. В дополнение к обычному трехмерному изображению функций распределения ионов в пространстве (v, θ), показанному на фиг. 24, мы находим линии уровня функций распределения в пространстве (v_1, v_2), как показано на фиг. 25. Вид функции распределения в координатах v_1, v_2



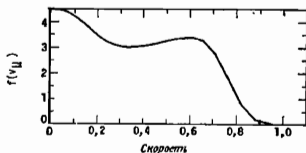
Фиг. 24. Распределение по скоростям дейтронов в ТСТ для случая стационарной тангенциальной инжекции.



Фиг. 25. Линии уровня функции распределения дейтронов по скоростям в координатах $v_{\perp}$, $v_{\parallel}$.



Фиг. 26. Распределение поперечных скоростей.



Фиг. 27. Распределение продольных скоростей.

проинтегрированной по одной из координат, приведен на фиг. 26 и 27. Эти распределения определяются как

$$f(v_{\perp}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{\parallel} f(v_{\perp}, v_{\parallel}), \quad (106)$$

$$f(v_{\parallel}) = 2\pi \int_0^{\infty} v_{\perp} dv_{\perp} f(v_{\perp}, v_{\parallel}). \quad (107)$$

Другими удобными характеристиками являются полная энергия системы

$$W_{\text{свет}}(t) = \sum_a n_a(t) \bar{E}_a(t) V(t), \quad (108)$$

суммарная энергия потерь

$$W_{\text{потерь}}(t) = \sum_a \int_0^t dt n_a(t) \bar{E}_a(t) V(t) / \tau_a \quad (109)$$

и суммарная энергия, выделявшаяся в реакциях синтеза:

$$W_F(t) = \int_0^t dt n_D(t) n_T(t) \overline{\sigma_{DT} v}(t) V(t) E_{DT}, \quad (110)$$

где $E_{DT} = 17,6$ МэВ, а $\overline{\sigma_{DT} v}(t)$ — скорость термоядерной реакции в данный момент времени, усредненная по функциям распределения по скоростям ионов дейтерия и трития. Объем плазмы $V(t)$ нормирован на единицу при $t=0$ и уменьшается по мере сжатия плазмы по большому радиусу таким образом, чтобы полное число частиц $N_a = n_a(t) V(t)$ в отсутствие потерь оставалось неизменным.

а. Коэффициент усиления энергии. Основной чертой ТСТ-реактора является получение термоядерной энергии в процессе замедления дейтрона, обладающего в начальный момент большой энергией в фоновой тритиевой плазме. В простейшем случае в качестве начальных условий для уравнения Фоккера — Планка берется функция распределения дейтронов, приблизительно равная дельта-функции по энергии и углу (θ отсчитывается относительно направления торондального магнитного поля) и с максвелловским распределением тритонов и электронов. Затем прослеживается эволюция к состоянию теплового равновесия каждого сорта частиц плазмы и вычисляется полная энергия, выделявшаяся в D-T-реакциях синтеза [см. (88)]. В состоянии теплового равновесия скорость выделения термоядерной энергии постоянна (для данной температуры D-T-плазмы), и полная энергия синтеза линейно возрастает при $t \rightarrow \infty$. В двухкомпонентных системах нас главным образом интересует «переходный» вклад в энергию синтеза, поэтому из полной энергии синтеза мы вычитаем энергию, соответствующую стационарному распределению взаимодействующих компонент, определяя

$$W'_F(t) = W_F(t) - n_D n_T (\sigma_{DT} v)_{\text{равнов}} E_{DT}, \quad (111)$$

где $(\sigma_{DT} v)_{\text{равнов}}$ — равновесная скорость термоядерных реакций для максвелловской плазмы. Тогда коэффициент усиления энергии определяется как

$$Q' = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W'_F}{n_D(0) \bar{E}_D(t)}. \quad (112)$$

В табл. 4 приведены некоторые типичные результаты для следующих значений параметров: плотность фоновой тритиевой плазмы $n = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ и температура $T = 5$ кэВ. В этих вариантах плотность дейтронов считается малой по сравнению с плотностью фоновой плазмы, так что взаимодействием «пробных»

Таблица 4

Сравнение коэффициентов усиления энергии

Энергия дейтронов кэВ	Q'	Q''	F
70	0,612	0,487	0,301
110	0,996	0,946	0,644
150	1,187	1,191	1,096
190	1,244	1,264	1,151

дейтронов между собой можно пренебречь и считать, что фоновая плазма нагревается незначительно. Полученные коэффициенты усиления энергии Q' можно сравнить с результатами расчетов, выполненными Доусоном и др. [11] и обозначенными в табл. 4 через F . Значения Q' больше, чем соответствующие значения F , главным образом из-за того, что при вычислении $\overline{\sigma v}$ были учтены дисперсия энергии дейтронов и конечная температура тритонов:

$$\overline{\sigma v} \equiv \int dv_1 \int dv_2 f_D(v_1) f_T(v_2) \sigma(v_{12}) v_{12} / n_D n_T \quad (113)$$

Для сравнения приведены результаты расчетов той же величины (обозначенные в табл. 4 через Q''), полученные в пренебрежении конечностью температуры тритонов при оценке $\overline{\sigma v}$. Эффекты, обусловленные дисперсией энергии дейтронов и конечной температурой тритонов, отчетливее всего выражены в области низких энергий.

6. Импульсные реакторы. Вместо того чтобы, как описано в предыдущем пункте, просто постулировать существование специально «приготовленных» электронной и ионной компонент, функции распределения которых являются начальными условиями в наших расчетах уравнения Фоккера — Планка, можно более реалистически моделировать процессы, происходящие в импульсном ТСТ посредством включения членов, описывающих различные источники, потери и магнитное сжатие, рассмотренные в разд. II. Было предложено несколько режимов работы такой системы различной степени сложности, некоторые из них мы сейчас опишем.

Во-первых, необходимо точно определить понятие добротности Q_ϕ импульсной системы. Установлено, что, «эксперимент с зажиганием» в импульсном ТСТ происходит в течение временного интервала, начинающегося с момента достижения высокоэнергетической дейтронной компонентой и тепловой тритонной плазмой некоторых оптимальных для усиления энергии ус-

ловий, и кончается тогда, когда тепловая энергия, запасенная в тритиевой плазме, достигает значения, меньшего «начального», т. е. того значения, которое она имела в начале «эксперимента с зажиганием». Величина Q_b в режиме с «зажиганием» определяется как отношение термоядерной энергии, выделившейся в течение эксперимента с «зажиганием» к «первоначальной» энергии горячей дейтронной компоненты.

В простейшем режиме работы ТСТ мы допускаем существование тритиевой плазмы, полученной с помощью омического нагрева и имеющей температуру 10 кэВ, в которую в течение 30 мс инжектируются дейтроны с энергией 200 кэВ. Предполагается, что дейтронные пучки инжектируются в тор тангенциально. Мы предполагаем наличие симметрии относительно направления $\theta = \pi/2$, так что в нашей модели неявно подразумевается использование как параллельных, так и антипараллельных пучков. Интенсивность источника или ток пучка подбираются таким образом, чтобы величина энергии, передаваемой дейтронами тритиевой плазме в течение эксперимента «с зажиганием», была достаточной для того, чтобы компенсировать любые потери энергии из тритиевой плазмы. Добротность реактора в режиме «с зажиганием» в этом случае равна $Q_b = 1,08$.

Таблица 5

Влияние примесей и альфа-частиц на Q

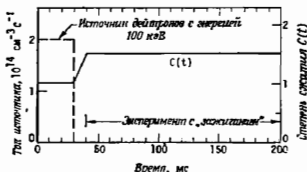
Состав плазмы по компонентам	$Z_{\alpha\beta\beta}$	Q
e-D-T	1	1,08
e-D-T- α	1	1,09
e-D-T- α -C	2	0,92
e-D-T- α -C-O	2,7	0,84

В табл. 5 показано влияние на величину Q_b учета в явном виде дополнительных сортов ионов, таких, как альфа-частицы, образующиеся в термоядерных реакциях, и примесные ионы (углерода и (или) кислорода). Альфа-частицы немного нагревают плазму, в то время как присутствие примесей приводит к более быстрой потере энергии системой. Эффективный заряд Z плазмы определяется как

$$Z_{\alpha\beta\beta} = \frac{\sum_a n_a Z_a^2}{\sum_a n_a Z_a}. \quad (114)$$

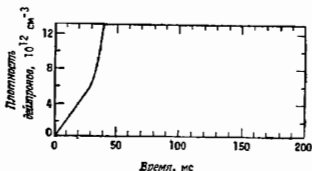
где индекс «a» относится ко всем ионным компонентам плазмы,

Несколько более сложный режим работы ТСТ схематически показан на фиг. 28. В этой модели предполагается, что значения энергии пучка и температуры плазмы, необходимые для «зажигания» ($Q_b \geq 1$), «обычными» методами недостижимы. Для



Фиг. 28. Схематическое изображение простейшего режима работы импульсного ТСТ.

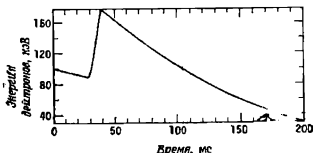
увеличения энергии как инжектируемых дейтронов, так и три-тневой плазмы, производится сжатие по большому радиусу. По окончании инжекции плазма сжимается в течение 10 мс со скоростью, определяемой из уравнения $R/R = 40,5 \text{ с}^{-1}$, так что



Фиг. 29. Средняя энергия дейтронов в простейшем режиме работы ТСТ.

конечная степень сжатия равна $C = 1,5$. Эксперимент «с зажиганием» начинается после фазы сжатия в момент $t = 40$ мс и оканчивается в момент времени $t = 200$ мс. Временная эволюция плотности и средней энергии дейтронов представлена на фиг. 29 и 30, из которых ясно видно влияние инжекции и сжатия. В этом частном случае добротность реактора в режиме «с зажиганием» $Q_b = 1,28$.

Другой режим работы ТСТ основан на возможности достижения с помощью метода сжатия по большому радиусу «накопления энергии» быстрых дейтронов. Основная идея состоит в том, чтобы инжектировать дейтроны с энергией, для которой скорость термоядерной реакции D-T в данный момент максимальна ($E_D \approx 125$ кэВ), а затем посредством магнитного сжатия подводить к дейтронам энергию, достаточную для компенсации энергии, передаваемой от дейтронов фоновой тритиевой



Фиг. 30. Поведение плотности дейтронов в простейшем режиме работы ТСТ.

плазме. Таким образом, энергия дейтронов «накапливается» в области значений, оптимальных для получения термоядерной энергии. Однако наличие такой особенности связано с тем, что энергия магнитного сжатия в конечном счете должна быть получена из внешних источников, так что добротность реактора в режиме с зажиганием следует переопределить как

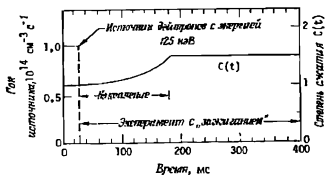
$$Q_b = \frac{\text{(Выделяющаяся термоядерная энергия)}}{\text{(Первоначальная энергия дейтронов)} + \text{(Энергия сжатия)}}. \quad (115)$$

Точный вид временной зависимости величины сжатия, необходимой для «накопления» энергии дейтронов зависит от интенсивности луча и скорости потерь энергии фоновой плазмы [19]. Обычно мы используем следующую зависимость:

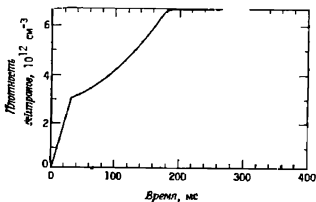
$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{A}{1 + B e^{-t/\tau}}. \quad (116)$$

где параметры A , B , τ для каждой фазы работы ТСТ определяются различным образом. Последовательность событий для ТСТ с «накоплением» энергии схематически показана на фиг. 31, а результаты вычислений приведены на фиг. 32 и 33. В этом примере была достигнута добротность реактора в режиме с зажиганием, равная $Q_b = 0,86$.

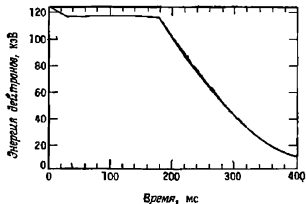
в. Стационарные реакторы. Двухкомпонентный торондальный реактор может работать и в стационарном режиме. Однако



Фиг. 31. Схематическое изображение режима ТСТ с «накоплением» энергии



Фиг. 32. Поведение плотности дейтронов в режиме с «накоплением» энергии



Фиг. 33. Средняя энергия дейтронов в режиме с «накоплением» энергии.

это потребовало бы значительного прогресса в технологии производства сверхпроводящих магнитов и источников нейтральных пучков и значительно лучшего понимания и контроля поведения примесей в токамаках. С помощью нашей программы решения уравнений Фоккера — Планка мы смоделировали некоторые стационарные ТСТ-системы и ниже приведем некоторые простейшие результаты этих исследований. Рассмотрение стационарного состояния имеет смысл и для импульсных режимов, в которых длительность импульса инжектируемого пучка дейтронов велика по сравнению со временем замедления дейтронов.

В рассматриваемом здесь примере предполагается, что плотность фоновой тритиевой плазмы остается постоянной, $n_T = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, при этом мы не пытаемся моделировать физические механизмы, компенсирующие потери фоновой плазмы. Однако энергетическое время жизни плазмы считается конечным, обычно равным 200 мс. Стационарная инжекция дейтронов с энергией 200 кэВ моделируется членом, соответствующим постоянному току источника $J_D = 1,5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$. При замедлении дейтронов они с некоторой вероятностью могут уходить из системы в области низких энергий, поэтому для их времени удержания использовалась следующая зависимость от энергии:

$$\tau_D(E) = 3(E)^{1/2} \text{ мс}, \quad (117)$$

где E измеряется в кэВ. Стационарная функция распределения дейтронов, полученная в данном примере, приведена на фиг. 24—27. Равновесная плотность дейтерия равна $n_D = 3,8 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, а средние энергии компонент системы равны $E_a = 15 \text{ кэВ}$, $E_T = 26 \text{ кэВ}$, $E_D = 100 \text{ кэВ}$. Добротность Q системы определяется как отношение выделившейся термоядерной энергии к мощности инжектируемого пучка и в данном случае равна $Q = 1,85$.

Литература

1. Anderson O. A. et al., Proc. Conf. Plasma Phys. Controlled Nucl. Fusion Res. 5th, 1974, Paper No. IAEA-CN-33/D5-2.
2. BenDaniel D. J., J. Nucl. Energy, Part C, 3, 235 (1961).
3. BenDaniel D. J., Allis W. P., J. Nucl. Energy, Part C, 4, 31 (1962).
4. Berk H. L. et al., Proc. Conf. Plasma Phys. Controlled Nucl. Fusion Res. 5th, 1975, Paper No. IAEA-CN-33/G2-3.
5. Berkner K. N. et al., Proc. Int. Conf. Plasma Phys. Controlled Nucl. Fusion Res., 1971, Vol II, p. 707.
6. Bing G., Roberts J. E., Phys. Fluids, 4, 1039 (1961).
7. Bol K. et al., Phys. Rev. Lett., 29, 1495 (1972).
8. Bol K. et al., Phys. Rev. Lett., 32, 661 (1974).
9. Byers J. A. et al., Proc. Conf. Plasma Phys. Controlled Nucl. Fusion Res. 5th, 1974 Paper No. IAEA-CN-33/G2-1.
10. Coensgen F. H. et al., Proc. Conf. Plasma Phys. Controlled Nucl. Fusion Res. 5th, 1974 Paper No. IAEA-CN-33/D2-1.

11. Dawson J. M., Furth H. P., Tenney F. H., Phys. Rev. Lett., **26**, 1156 (1971).
12. Fowler T. K., Rankin M., J. Nucl. Energy, Part C, **8**, 121 (1966).
13. Furth H. P., Jassby D. L., Phys. Rev. Lett., **32**, 1176 (1974).
14. Furth H. P., Yoshikawa S., Phys. Fluids, **13**, 2693 (1970).
15. Futch A. H. et al., Plasma Phys., **14**, 211 (1972).
16. Hall L. S., Phys. Fluids, **15**, 882 (1972).
17. Hall L. S., Hooper E. B., Jr., Newcomb W. A., Optimal Injection of Beams in a Mirror Well, Report UCRL-75561, Lawrence Livermore Laboratory, Livermore, California, 1975.
18. Hiskes J. R., Phys. Rev. Lett., **10**, 102 (1963).
19. Jassby D. L., Furth H. P., Two-Energy-Component Fusion Reactors with Sustained Suprathermal-Ion Energy, Report MATT-1048, Princeton Plasma Phys. Lab., Princeton, New Jersey, 1974.
20. Kaufman A. N., US AT. Energy Comm., Doc. TID-7520, Part 2, 387 (1956).
21. Killeen J., Futch A. H., Jr., J. Comp. Phys., **2**, 236 (1968).
22. Killeen J., Marx K. D., The Solution of the Fokker-Planck Equation for a Mirror-Confined Plasma, «Methods in Computational Physics», eds. Alder B., Fernbach S., Rotenberg M. Academic Press, New York and London, 1970, p. 422. (Имеется перевод: Киллин Дж., Маркс К. Д. Решение уравнения Фоккера — Планка для плазмы в ловушке с магнитными пробками. — В кн.: Вычислительные методы в физике плазмы, под ред. Б. Олдера, С. Фернбаха и М. Ротенберга. — М.: Мир, 1974, с. 417.)
23. Killeen J., Mirin A. A., in «Proceedings of the Fourth Conference on the Numerical Simulation of Plasmas», eds. Boris J. P., Shanny R. A., Stock 0851 00059, 685 US Gov. t. Printing Office, Washington, D. C., 1971.
24. Killeen J. et al., Computational studies of the Two-Component Toroidal Fusion Test Reactor, Report UCID-16530, Lawrence Livermore Laboratory, Livermore, California, 1974.
25. Marx K. D., Phys. Fluids, **13**, 1355 (1970).
26. Post R. F., Phys. Fluids, **4**, 902 (1961).
27. Post R. F. et al., Phys. Rev. Lett., **31**, 280 (1973).
28. Rensink M. E. et al., Proc. Conf. Plasma Phys. Controlled Nucl. Fusion Res., 5th, 1974 Paper No. IAEA-CN-33/DI-2.
29. Richtmyer R. D., Morton K. W., Difference Methods for Initial Value Problems, Wiley (Interscience, New York, 1967). (Имеется перевод: Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. — М.: Мир, 1972.)
30. Riviere A. C., Nucl. Fusion, **11**, 363 (1971).
31. Roberts J. E., Carr M. L., «End-Losses from Mirror Machines», Report UCRL-5651-T, Lawrence Livermore Laboratory, Livermore, California, 1960.
32. Rosenbluth M. N., MacDonald W. M., Judd D. L., Phys. Rev., **107**, 1 (1957).
33. Spitzer L., Jr., Physics of Fully Ionized Gases, 2nd ed., Wiley (Interscience), New York, 1962. (Имеется перевод: Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. — М.: Мир, 1965.)
34. Werkoff F., Equations de Fokker — Planck avec des Coefficients Anisotropes et Bilan Energetique d'un Reacteur a Miroirs, Association Euratom-CEA, Grenoble, France, 1973.
35. Юшманов Е. Е., ЖЭТФ, **48**, 588 (1966).

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аллис (Allis) 420
Амсен (Amsden) 25, 37
Андерсон (Anderson) 20, 129, 139, 256
Апперт (Appert) 272
Архимович Л. А. 156, 233
Ауэр (Auer) 396

Байерс (Byers) 391, 414
Бейкер (Baker) 271, 294
Бейтман (Bateman) 19, 47
Беккер (Becker) 233
Бен-Даниель (BenDaniel) 420
Берк (Berk) 456
Бернштейн (Bernstein) 293
Бетанкур (Befancourt) 59, 63, 64, 65, 67, 227
Бинг (Bing) 420
Бискамп (Biskamp) 375
Блэнк (Blank) 227
Блох ((Bloch) 227
Бодин (Bodin) 11
Бойд (Boyd) 272
Борис (Boris) 13, 18, 20, 26, 357, 363, 388, 408
Брагинский С. И. 128
Брайн (Brayne) 149
Браун (Browne) 38
Бренбилл (Brackbill) 9, 20, 37, 38
Бретшнейдер (Bretschneider) 391
Бужо (Boujot) 148
Бук (Book) 20, 26, 139
Бунеман (Buneman) 301, 349, 355, 361, 392, 409
Бэрдсол (Birdsall) 348, 350, 392, 396

Вагнер (Wagner) 19
Вайбель (Weibel) 372, 411
Валео (Valeo) 392
Вейтцнер (Wetzner) 239
Вейтлер ((Welter) 375
Веркофф (Werkoff) 421
Виднер (Widner) 143, 149, 159
Вильсон (Wilson) 90
Вольтье (Woltjer) 231
Вутен (Wooten) 19

Галеев А. А. 155
Гарабедян (Garabedian) 59, 63, 67
Гарднер (Gardner) 140
Герин (Gurnee) 324
Гертвак (Hertweck) 20
Годфрей (Goedfrey) 388, 390
Голуб (Golub) 409, 410
Гоуд (Goad) 30, 49
Гред (Grad) 90, 226
Гримм (Grimm) 10, 149
Грин (Greene) 292
Гринспен (Greenspan) 169
Гудблуд (Goeldblood) 45

Дарвин (Darwin) 396
Джэд (Judd) 385, 392
Джейсон (Jackson) 397
Джонсон (Johnson) 292
Джэсби (Jassby) 456
Дикман (Dickman) 396, 409
Дин (Dean) 156
Дикестронский Ю. Н. 143, 148, 155, 158, 159, 166, 167, 168, 170
Дори (Dory) 144, 149, 167, 214, 235
Доусон (Dawson) 90, 308, 348, 389, 392, 456
Дузер (Van Duzer) 348
Дюкс (Duchs) 18, 143, 144, 148, 158, 159, 167, 169, 173, 174, 205, 214, 221

Жирар (Girard) 144, 149, 159, 167, 214

Залесак (Zalesak) 140
Захаров Л. Е. 241, 243
Зенкевич (Zienkiewicz) 2

Носикова (Yoshikawa) 141
Ито (Itoh) 149

Ненсен (Jensen) 233

Кидомцев Б. Б. 157
Каллен (Callen) 235, 344, 345

- Калсруд (Kalsrud) 229
 Карр (Carr) 420
 Кауфман (Kaufman) 397
 Келлади (Kelladi) 149, 169
 Кернер (Kerner) 271
 Килли (Killeen) 10, 15, 18, 149, 159, 161, 225, 253, 254, 256, 420
 Киппинг (Keeping) 149
 Кларк (Clark) 139, 166, 168, 212
 Клюге (Kluge) 294
 Коврижных Л. М. 155
 Конкус (Concus) 409, 410
 Константинов О. В. 168
 Костомаров Д. П. 143, 146
 Козн (Cohen) 389
 Крейс (Kreiss) 22, 23, 25
 Кролл (Kroll) 138, 149, 159
 Крусер (Kruiser) 392
 Крускал (Kruskal) 229, 293
- Лаваль (Laval) 269
 Лазински (Lasinski) 10, 372
 Лакнер (Lackner) 237, 238, 297
 Ландау Л. Д. 15, 397
 Ланидус (Lapidus) 18, 25
 Ларкин (Larkin) 246
 Лейн (Lane) 18
 Лемпе (Lampe) 372
 Ли (Lee) 372, 388, 408
 Лянер (Liewer) 138
 Линдемут (Lindemuth) 18
 Линдман (Lindman) 366, 363, 392, 417
 Лифлинг Е. М. 15, 397
 Лэнгдон (Langdon) 10, 351, 372, 389, 390, 392, 406
 Лю (Lui) 13, 18, 20, 334
 Люст (Lüst) 282
- Макнамара (McNamara) 10, 224, 248, 251, 252, 392
 Мангеймер (Manheimer) 19
 Мани (Mann) 271, 294
 Мардер (Marder) 239, 272, 294
 Маркс (Marx) 420, 421
 Мартезен (Martensen) 282
 Марти (Marty) 149
 Машке (Mashke) 234
 Мерсье (Mercier) 143, 148, 156, 159, 166, 211
 Мид (Meade) 144, 173
 Мидли (Medley) 169
 Молвик (Molvick) 254
 Морлет (Morlette) 119
 Морс (Morse) 357, 370, 379
- Мортон (Morton) 21, 227, 435
 Мошер (Mosher) 139
 Мур (Moore) 173
 Мураками (Murakami) 146
 Муховаков В. С. 227, 238
- Нельсон (Nelson) 357, 370, 372, 385
 Нильсон (Nielsen) 10, 49
- Оберман (Oberman) 293, 294
 Окабаяши (Okabayashi) 233
 Окава (Okawa) 233
 Окуда (Okuda) 308, 324, 396
 Олифант (Oliphant) 392, 417
 Оран (Oran) 140
 Оренс (Orens) 361
 Охта (Ohta) 272
- Павлова И. Л. 148
 Парсонс (Parsons) 169
 Перель (Perel) 168
 Погуше (Pogutse) 157
 Пост (Post) 245
 Поттер (Potter) 15, 16, 18, 39, 52, 54, 61, 162, 228
 Прехт (Pracht) 20, 29, 37, 38, 49
 Пфирш (Pfirsch) 155, 211
- Ребан (Rebhan) 294
 Ресерфорд (Rutherford) 148, 294
 Рейнольдс (Reynolds) 221
 Ривард (Rivard) 25, 37
 Ривьера (Riviere) 218
 Рихтмайер (Richtmyer) 21, 22, 25, 227, 435
 Робертс (Roberts) 15, 16, 18, 39, 52, 420
 Робинсон (Robinson) 157
 Розен (Rosen) 294
 Розенблут (Rosenbluth) 45, 150, 155, 212, 245, 334
 Рим (Rome) 162, 164
 Ростлер (Rostler) 397
 Роуз (Rose) 212
 Роуланс (Rowlands) 248
 Роулс (Rawls) 149, 159
 Ранкин (Rankin) 249, 420
- Сагдеев Р. З. 155
 Сайдем (Suydam) 233
 Свитмен (Sweetmen) 220
 Сейдл (Seidl) 148
 Сигмар (Sigmar) 173

- Синглтон ((Singleton) 384
 Сканипиеко (Scannapieco) 139
 Слоуя (Sloan) 384
 Стивенс (Stevens) 231
 Стрингер (Stringer) 221
 Суббарамайер (Soubbaramayr) 143,
 148, 156, 166, 211
 Сузуки (Suzuki) 238, 239, 240, 245
- Таджима (Tajima) 149
 Такеда (Takeda) 149
 Тассо (Tasso) 271
 Татл (Tuttle) 54, 61, 90
 Тейлор (Taylor) 231, 232, 248, 251,
 253
 Тихонов А. Н. 243
 Томсон (Thompson) 139, 149
 Трипплет (Triplett) 90
 Тройон (Trojon) 294
- Уайли (Wiley) 143, 149, 159, 161
 Уайт (White) 19, 53
 Уайтмен (Whiteman) 225, 254
 Уильямс (Williams) 385, 392
 Уински (Winske) 415
 Уэйр (Ware) 205
 Уэлч (Welch) 34
- Фасс (Fuss) 350, 386, 392
 Фатч (Futch) 420, 435, 450
 Фаулс (Fowler) 249, 420
 Фенсберг (Feneberg) 237, 238
 Фешбек (Feshback) 234
 Фишер (Fisher) 239, 254, 266
 Форнберг (Fornberg) 22
 Форсланд (Forslund) 392, 396, 411,
 417
 Фрайлберг (Frelberg) 49, 227, 272,
 294, 417
 Фрид (Fried) 90
 Фридман (Friedman) 227
 Фримен (Friman) 18, 139, 259, 294
- Фромм (Fromm) 32
 Фут (Foote) 246
 Фюрс (Furth) 148, 208, 456
- Хабер (Haber) 368, 396
 Хазелтайн (Hazeltine) 185, 345
 Харлоу (Harlow) 34
 Хасегав (Hasegawa) 396
 Хаст (Hastie) 246
 Хау (Howe) 149
 Хегбек (Hagebeuk) 45
 Хейн (Hain) 140
 Хелтон (Helton) 149, 159
 Хернигер (Hernegger) 234
 Хинтон (Hinton) 143, 149, 150, 155,
 159, 173, 345
 Хирт (Hirt) 23, 25, 27, 88, 36, 37, 49
 Ховард (Howard) 246
 Хоган (Hogan) 9, 144, 149, 188, 167,
 188, 214, 226
 Хокни (Hockney) 227, 301, 350
 Холл (Hall) 224, 249, 251, 252, 253,
 265, 456
 Хьюитт (Hewett) 415
- Цанг (Tsang) 344, 345
- Ченс (Chance) 294
 Чу (Chu) 13, 18, 236
- Шафранов В. Д. 155, 227, 288, 238,
 241
 Шеффилд (Sheffield) 233
 Шлютер (Schlüter) 155, 211
 Шнейдер (Schneider) 20
 Шульц (Schulz) 28
 Шэнни (Shanny) 341
- Эльтгросс (Eltgroth) 138
 Эстабрук (Estabrook) 385, 392

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адиабатичность 78, 246
 Азимутальная симметрия 420
 Алгоритм донорской ячейки 99, 111, 119, 124
 — *Лакса — Вендрофа* 104, 111
 — PIC 350
 — с малой фазовой ошибкой 111, 120, 134
 — «перешагиванием» 104, 134, 301
 — электромагнитный 350, 388
 Альвеновские волны 52, 66, 277, 290
 Альфа-частицы 145, 153, 152, 164, 462
 Амбиоларный потенциал 428, 449
 Анизотропия 52, 274
 Анизотропное давление 245
 Антидиффузия 105, 106, 116, 123
 — невязая 107, 108, 112, 120, 122, 123
 — остаточная 106
 — фениксная 109, 112, 118, 120, 121, 122, 123
 — явная 107, 123
 Антироботрон 254
 Архитектура 195
 АТС-аксперимент 231
- Барьерные облака 139
 «Бейсбол» 266, 257, 448
 Белл-пинч 233, 239
 Бифуркация 239
 Бургерса уравнение 138
- Вакуумное поле 39
 Вакуумный промежуток 273
 Вариационная процедура 61
 Вариационный принцип 229
 Виртуального кошуа принцип 241
 Власова уравнение 132, 137, 138
 Власовские равновесные состояния 415
 Вложенность 247
 Водяного мешка метод 51, 70
- Волны разрежения 126
 — ударные 126
 Вольге инвариант 231
 Вращательное преобразование 292
 Время уравнивания 76
 Вычислительная сетка лагранжа
 14, 15, 16, 95
 — — обобщенная 16
 — — Эйлерова 14, 16, 52
 Вязкость 319
- Галеркина* метод 271, 272, 294
 Гамильтониан 400
 Гармоники 94, 106, 115
 Глобальные функции 272
 Градиенты 94, 115, 126
 Граница плазма — вакуум 39, 275, 283
 Граничные условия 35, 40, 360
 Грина функция 275, 284
 — теорема 283
- Дальнодействие 369
Давина модель 392, 396
 Движение ветки 137
 Двумерная модель 18, 297
 Диагностика 41, 196, 369
 Дивертор 275
 Дипольная схема с вычитанием 298, 300
 Дисперсия 98, 104, 115
 Диффузия 82, 93, 117, 155, 179, 209, 305, 339
 — амбиоларная 182
 — конвективная 305
 — численная 98, 110, 115
 Диэлектрический член 315
 Дрейфовая модель 293, 303
 — поверхность 246, 341
 Дрейфовые волны 156, 330
 «Дублет» 233, 237
Дугласа — Ганна метод 256
 Дюкса код 205
- Запавывающий потенциал 398
 Запаса устойчивости коэффициент 211, 275

- Запертые (захваченные) частицы 157, 185, 210, 325
 Заряд размазывание 350
 Затухание 98, 99, 107, 119, 318
 Захват пучка 162
 Захваченных частиц частота колебаний 151, 156, 185
 Зеркальная ловушка 245, 302, 445

 Излучение 174, 395
 — тормозное 153, 212
 — циклотронное 153, 212
 — черенковское 334
 Итерации 190, 409
 — глобальные 409

Кармана вихревая дорожка 140
 Катушки 2XII 262, 445
 Квазиравновесная сетка 20
 Квазиравновесные состояния 178
Кельвина — *Гельмгольца* неустойчивость 140
 Кинематические уравнения 28
 Конвекция 13, 92, 113, 125, 143
 Конечно-разностные методы 92, 93, 110, 122, 188, 270
 Контактные разрывы 126
 Конус потерь 245, 428
 Координат система 16, 27, 178, 272, 288, 293
 — — криволинейная 110, 126
 Координаты потоковые 16, 68, 129
 Корональное приближение 172
 — равновесие 173
 Корреляции время 307
 Коэффициенты переноса 143, 154, 179, 187, 340
Кронка — *Николюсона* схема 22, 158, 159, 161
Крейса теорема 22, 23, 25
Круксала — *Шафранова* условие 233
Куранта условие 353, 359, 391

 Лагранжовы методы 15, 19, 52, 95, 113, 134, 270, 276, 397, 403
Ландау затухание 327
 Ларморовский радиус электронов 186
 Лоренцева неонизация 448

 Магнитная ось 273, 291
 — пробка 302, 303, 419, 445
 Магнитные дифференциальные уравнения 252, 258
 Магнитные острова 80
 — поверхности 51, 58, 284
Максвелла уравнения 352, 389
 Методика программирования 191
 Меченые частицы 42
 Мода винтовая 45, 269, 290
 — желобковая 331, 416
 — зеркальная 253
 — магнитозвуковая 277, 288
 — одномерная 144, 149, 179
 — ортогональная 276
 — резистивная 292
 — шлапговая 253
 Модели укрупненных частиц 395
 Модель ICARUS 178
 — MEDUSA 181
 Монте-Карло метод 169
 — столкновительный оператор 340
 Мультипольное равновесие 236

 Нейтрального пучка инжекция 144, 218
 Нейтронов перенос 169
 Неоклассическая теория переноса 143, 154, 182, 339
 Непрерывности уравнение 15, 92, 114, 132, 139, 354
 — — консервативная форма 15, 92, 181, 183, 425
 Неустойчивости 45, 87, 132, 209, 253, 258, 411
 — с винтовой симметрией 87
 Невяная схема 13, 18, 32, 34, 159, 189, 240, 260
 Невяный метод переменных направлений 18, 240, 258, 260, 261, 262

 Обратимость 112, 401
 Обращение ошибки 23, 36
 Ортогонализация 54
 Осесимметричное равновесие 234, 268, 292
 Остаточное затухание нулевое 108, 111, 116
 Ошибка 96, 109, 114, 117, 125
 — *Гиббса* 98, 115, 123

 Парные столкновения 296
 Передаточная функция 98, 106
 Перезарядка 153, 162, 165, 188, 171, 431
 Перестройка 37, 129
 Перехода множитель 99, 106, 108, 118

Пинч диффузионный прямолинейный 269, 279
 — Z 139
 Плато 186
 Плотность 92, 112
 Поверхностный тон 278
 «Подрезывание» 109, 114, 118, 124
 Положительность 94, 109, 114
 Поперечное магнитное поле 60, 183, 340
 Последовательных приближений метод 167, 190
 Постпроцессор 386
 Потенциальная энергия 30, 62, 271
 Поток 56, 102, 181
 Потока коррекция 26, 144, 123, 126
 — ограничитель 109
 — поверхность 17, 129
 — равновесие в силовой трубке 252, 262
 — скорость 94, 99, 125, 136
 Предиктор-корректор 161
 Примеси 210, 462
 Программа DARWIN 411, 414, 417
 — EMT 413
 — EXPERT 199
 — MACSYMA 280
 — MICRO 411, 413
 — SUPERLAYER 391
 — WAVE 366
 — ZONAR 350, 351, 358, 361, 369, 370, 372, 382
 Пробные частицы 304
 Пробочное отношение 429
 Проводимость 186
 Продольный инвариант 246
 Профили плотности 451
 Псевдоклассическая функция 156, 209
 Пуассона уравнение 349, 357
 Пфизин — Шлютера диффузия 155, 211, 341

 Равновесие 57, 224, 291, 296
 Разложения функция 273, 278, 288
 Распыление 157
 Режим «банановый» 155, 173, 185, 343
 — классический 156, 185
 — промежуточный 155, 184, 185
 Рециркулирующие частицы 214
 Розенблута потенциалы 421
 Рэлея — Ритца принцип 271, 278, 288
 Рэлея — Тейлора неустойчивость 138

Сгущения точка 286
 Сжатие 92, 113, 126, 427
 Силовой линии кризиса 278
 Система MIRACLE 249, 250
 — OLYMPUS 180
 Скалярный потенциал 283
 Скользящая сетка 113
 Смещения вектор 272
 Спектр МГД-колебаний 268, 269, 287, 291
 Спектральные методы 93
 Спитцеровская проводимость 186
 Сплайны 93, 262, 276, 287
 Спокойное начало 413
 Стелларатор 67, 225, 339
 Столкновений частота 151, 187, 316, 381
 Столкновения кулоновские 419
 Столкновительная радиационная модель 172
 Схема последовательных сверхрелаксаций 35, 235
 — SHASTA 103, 104, 105, 111, 112, 118, 119, 128, 138
 Сходимость 190, 279, 289
 Сциллак 227

 Тепла перенос 296, 326
 Теплопроводность 143
 Термализация 153
 Термодерной реакции горение 218
 — — сечение 437
 Тиринг-моды 292
 Токамак 142, 144, 215, 218, 235, 268, 288, 339, 419
 — двухкомпонентный 164
 — с круглым сечением 235
 — ST 204, 211
 — TER 211
 Тока подъем 208
 Томсоновское рассеяние 143
 Торондальная конфигурация 268
 Торондальное поле магнитное 60, 151, 180, 339
 — — электрическое 152
 Торондальный тон 60, 184
 Трехдиагональная система уравнений 108
 Трехмерная модель 18, 297
 Трехрежимное описание 154
 Турбулентность 154, 158, 157, 308
 Турбулентный теплоперенос 326
 Тэа пинч 39, 138
 — вращающийся 41

- Удержания время 431
 Установка «Астрон» 239, 391, 392
 — HBTX 232
 — ZETA 232
 Устойчивость 21, 94, 98, 109, 115,
 190, 232, 245, 253, 265, 268, 353,
 390
- Файл MASTER 201
 Фоккера — Планка уравнения 145,
 164, 419
 Фоновый газ 449
 Фредгольма уравнение 243
 Функция распределения 419
 Фурье-преобразование 96, 97, 116,
 363
- Характеристические методы 93
- Центрирование во времени 32
- Частиц запуск 298
- Шир 158
- Эйлера — Лагранжа уравнение 256
 «Эксперимит с зажиганием» 461
 Эллиптическое сечение 268, 288
 Энергии накопления 464
 — коэффициент усиления 442
 — плотность 126
 Эргодические силовые линии 310
 Эффективный заряд Z плазмы 462
- Язык FORTRAN 181, 192, 195
 Якобиан 274, 275, 284

Предисловие редактора перевода . . .	5
Предисловие . . .	8

Глава 1. Численная магнитная гидродинамика для плазмы с большим бета (Дж. Брекбилл)	11
I. Введение	11
II. Численные методы	13
A. Описание эйлеровой, лагранжевой и обобщенной вычислительных сеток	14
Б. Обзор численных методов и их применения	18
III. Вычисление конвективного переноса	21
A. Свойства аппроксимаций конвективной производной	21
Б. Нелинейно устойчивые аппроксимации конвективного переноса	25
IV. Метод обобщенной сетки в магнитной гидродинамике	27
A. Разностные уравнения для лагранжевой фазы вычислений на обобщенной сетке	28
Б. Фаза подстройки в вычислениях на обобщенной сетке	37
V. Приложение	39
A. Расчет δ -плоскости с резкой границей	39
Б. Вращающийся δ -плоскость	41
В. Неустойчивость внутренней ионитовой моды	45
VI. Заключение	48
Приложение	48
Литература	49

Глава 2. Метод водяного мешка в магнитной гидродинамике (Д. Поттер)	51
I. Основы метода водяного мешка	51
A. Эйлеровы и лагранжевы разностные методы	52
Б. Лагранжевы контуры и поверхности	52
В. Заключение	66
II. Равновесные свойства отдельного водяного мешка	67
A. Уравнения равновесия	57
Б. Модель равновесия одного контура	59
В. Вариационная процедура	61
Г. Равновесие отдельного водяного мешка в случае трех измерений	63
III. Равновесие распределенных токов	67
A. Формулировка осесимметричного равновесия в натуральных координатах	68
Б. Вариационные методы получения равновесия	71
В. Примеры некоторых решений	75
IV. Условия адиабатичности	76
A. Адиабатические изменения равновесия	76
Б. Адиабатические уравнения в применении к осесимметричным токам	79
В. Отклонения от адиабатичности за счет диффузии	82
V. Дальнейшие приложения	84

А. О «равновесии» и инерционных моделях	84
В. Квазиинесжимаемость в приближении низкого бета	85
В. Неустойчивости с винтовой симметрией	87
Г. Заключительные замечания	90
Литература	90
Глава 3. Решение уравнений непрерывности методом коррекции потоков (Дж. П. Борис, Д. Л. Бук)	92
I. Введение	92
А. Уравнения непрерывности в физике	92
В. Требования, предъявляемые к конечно-разностным алгоритмам	93
В. Виды ошибок, подлежащих минимизации	95
II. Элементы алгоритмов FCT	100
А. Основные идеи	100
Б. Сравнение с некоторыми стандартными методиками	104
В. Три типа антидиффузии	105
Г. Процесс коррекции потоков	109
Д. Другие FCT-алгоритмы	110
III. Оптимизация FCT-алгоритмов	114
А. Ошибки и оптимизация	114
Б. Уменьшение фазовых и амплитудных ошибок	117
В. Сравнение алгоритмов и другие численные требования	128
IV. Приложения метода коррекции потоков	126
А. Двумерная модель лазерной мишени CYLAZR	126
В. Код с использованием подвижной системы потоковых координат	129
В. Применение метода FCT к решению уравнения Власова	132
Г. Другие приложения	137
Литература	140
Глава 4. Многокомпонентные модели переноса в токамаке (Дж. Т. Хоган)	142
I. Общие замечания	142
А. Разработка одномерных кодов для токамака	142
Б. Краткое описание токамака	144
В. Обзор кодов	147
Г. Обычно используемые моментные уравнения	147
Д. Другие физические процессы	153
II. Плазменные модели	154
А. Перенос, обусловленный столкновительной диффузией и турбулентностью	154
Б. Методы решения уравнения диффузии	158
III. Надтепловая плазма: инжектированные ионы и α -частицы	162
А. Захват пучка и его термализация	162
Б. Реализация модели	164
IV. Нейтральный газ	165
А. Модели переноса нейтралов	166
Б. Реализация моделей нейтралов	169
V. Примеси	171
А. Физические модели	172
VI. Заключение	176
Литература	176
Глава 5. ICARUS — одномерная модель диффузии плазмы (М. Л. Уоткинс, М. Х. Хьюджес, К. В. Робертс, П. М. Киплинг, Дж. Киллинг)	178
I. Введение	178
II. Физическая модель	181
А. Введение	181

Б. Неоклассическая модель переноса	182
В. Граничные и начальные условия	188
III. Численная модель	188
А. Введение в одномерные конечно-разностные методы	188
Б. Метод решения, использованный в коде ICARUS	189
IV. Методика программирования	191
А. Система OLYMPUS	191
Б. Структура программы	195
В. Архитектура	196
Г. Подготовка расчета	198
Д. Управление	199
Е. Диагностика	202
Ж. Описание	204
V. Приложения	204
А. Введение	204
Б. Современное поколение токамаков	205
В. Токамаки следующего поколения	215
VI. Заключение	220
Литература	221
 Глава 6. Равновесие плазмы в магнитном поле (Б. Макнамара)	
I. Введение	228
II. Торoidalное равновесие	228
А. Общая теория	228
Б. Расчеты торoidalного равновесия	234
III. Равновесие плазмы с анизотропным давлением	245
А. Кинетические законы подобия для зеркальных ловушек	245
Б. Продольный инвариант	246
В. Энергетика ловушек и система MIRACLE	249
Г. Равновесие в дрейфовом приближении	250
Д. Численные методы для расчета равновесных конфигураций в дрейфовом приближении	254
Литература	265
 Глава 7. Вычисление магнитогидродинамических спектров в осесимметричных торoidalных системах удержания плазмы (Рэй К. Гримм, Джон М. Грин, Джон Л. Джонсон)	
I. Введение	268
А. Цель исследований	268
Б. Возможные подходы к проблеме	270
В. Схема наложения	272
II. Формулировка задачи	272
А. Равновесие	272
Б. Координаты	273
В. Отображение	275
Г. Проекция	276
III. Уравнения для собственных мод	277
А. Лагранжиан	277
Б. Представление функций разложения	278
В. Матричные элементы	279
Г. Вычисление спектра и собственных мод	287
IV. Применение	288
V. Заключение	291
А. Геометрия	292
Б. Резистивные моды	292

В. Модели обобщенного давления	293
Г. Нелинейное развитие	294
Литература	294
Глава 8. Коллективный перенос в плазме (Дж. Дюсон, Х. Окуда, Б. Розен)	296
I. Введение	296
II. Вычислительная модель	298
А. Введение в модель	298
Б. Определение полей и сил	299
В. Метод решения уравнений движения	301
Г. Модель размерности $2\frac{1}{2}$ с магнитным отражением	302
Д. Некоторые усовершенствования алгоритма	304
III. Элементарная теория конвективной диффузии в однородной тепловой плазме	305
А. Двумерная диффузия	305
Б. Трехмерная диффузия	308
IV. Численное моделирование диффузии плазмы поперек магнитного поля (однородная тепловая плазма)	312
А. Двумерная плазма	312
Б. Двумерная диффузия электронов	317
В. Трехмерный перенос	319
V. Численное моделирование диффузии в неоднородной плазме	329
А. Конвективная диффузия в неоднородной плазме	329
Б. Перенос энергии плазменными волнами поперек магнитного поля	334
В. Неоклассическая диффузия в тороидальном магнитном поле	339
Литература	346
Глава 9. Электромагнитные и релятивистские вычислительные модели плазмы (А. Лэнгдон, Б. Лазински)	347
I. Введение	347
II. Моделирование бесстолкновительной плазмы	346
III. Электромагнитные алгоритмы, непосредственно использующие $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$	350
А. Интегрирование полей во времени	351
Б. Интегрирование во времени уравнений движения частиц	354
В. Взаимодействие частиц и полей	356
Г. Граничные условия	360
Д. Диагностика	369
Е. Приложения	372
Ж. Реализация в операционной системе LTSS 6600-7600: ZONAR	382
IV. Алгоритмы со специальными свойствами устойчивости	389
А. Одномерный алгоритм	389
Б. Двумерные программы, основанные на преобразованиях Фурье	390
V. SUPERLAYER	391
Литература	392
Глава 10. Модели укрупненных частиц в безызлучательном пределе (К. Нильсон, Г. Льюис)	395
I. Введение	395
II. Модель Дараниа	396
III. Гамильтоново описание	399
IV. Лагранжево описание	403
V. Решение уравнений поля	408
VI. Сравнения в одномерном случае	411

VII. Двумерный пример	414
VIII. Заключение	417
Литература	417

Глава II. Решение кинетических уравнений для многокомпонентной плазмы (Дж. Киллин, А. Мирин, М. Ренсинк)	419
I. Введение	419
II. Математическая модель	422
А. Уравнения Фоккера — Планка	422
Б. Силы, зависящие от времени	426
В. Граничные условия	428
III. Решения, использующие угловые собственные функции	432
А. Численные методы	432
Б. Приложения	436
IV. Конечно-разностное решение в двумерном пространстве скоростей	443
А. Численные методы	443
Б. Приложения	446
Литература	466