А. В. БИЦАДЗЕ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебника для студентов
механико-математических
и физических специальностей вузов

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1982

22.16
Б 66
УДК 517

Бицадзе А. В. Уравнения математической физики: Учебник. — 2-е изд., перераб. и дополненное. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982 — 336 с.

В предлагаемом новом издании наряду с традиционными разделами теории линейных уравнений в частных производных, изложенными в первом издании, внимание уделено вопросам локальной разрешимости классических задач для некоторых классов нелинейных уравнений в частных производных и построению точных решений в отдельных частных случаях нелинейных уравнений и систем.

Книга рассчитана на студентов вузов, преподавателей и специалистов научно-технического профиля, интересующихся математическим моделированием и численным экспериментом.

Андрей Васильевич Бицадзе

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Редактор *В. В. Абгарян*
Технический редактор *Л. В. Лихачева.* Корректор *Н. Б. Румянцева*
ИБ № 11791

Сдано в набор 03.03.82. Подписано к печати 03.09.82. Формат 84×108[1]/32. Бумага тип. № 2. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 17,64. Уч.-изд. л. 16,75. Тираж 14 000 экз. Заказ 337. Цена 80 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15.

Отпечатано в тип. № 2 изд-ва «Наука», Москва, Шубинский, 10, Заказ № 2180

$Б\frac{1702050000-132}{053(02)-82}71-83$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава III

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Книга охватывает традиционные разделы теории линейных уравнений в частных производных в основном второго порядка. Отдельные главы посвящены элементам теории аналитических функций и теории линейных интегральных уравнений, поскольку в значительной мере на них основаны изложенные в книге методы исследования структурных и качественных свойств решений уравнений в частных производных и классических задач для этих уравнений.

В отличие от предыдущего издания, в книге помещена седьмая глава, посвященная нелинейным уравнениям в частных производных, в частности вопросам существования решений классических задач для них, а также построению точных решений некоторых важных классов нелинейных уравнений. Кроме того, глава VI дополнена новым параграфом (§ 6), в котором рассматривается задача Дирихле для гармонических функций с разрывными краевыми условиями и строится вариант приближенного решения этой задачи в круге.

14 июля 1981 г., Москва — Тбилиси

А. Бицадзе

§ 1. Вводные понятия и определения

1°. Понятия дифференциального уравнения с частными производными и его решения. Обозначим через D область n-мерного евклидова пространства E_n точек x с декартовыми ортогональными координатами $x_1, \ldots, x_n$, $n \geqslant 2$.

Пусть $F(x, \ldots, p_{i_1 \ldots i_n}, \ldots)$ — заданная действительная функция точек x области D и действительных переменных $p_{i_1 \ldots i_n}$ с неотрицательными целочисленными индексами

$$i_1, \ldots, i_n, \quad \sum_{j=1}^{n} i_j = k, \quad k = 0, \ldots, m, \quad m \geqslant 1,$$

по крайней мере одна из производных которой

$$\frac{\partial F}{\partial p_{i_1 \ldots i_n}}, \quad \sum_{j=1}^{n} i_j = m,$$

отлична от нуля.

Равенство вида

$$F\left(x, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}, \ldots\right) = 0 \tag{1}$$

называется *дифференциальным уравнением с частными производными* или *уравнением в частных производных порядка m* относительно неизвестной функции $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$, а левая часть этого равенства — *дифференциальным оператором с частными производными* или *дифференциальным оператором в частных производных порядка m*.

Определенная в области D задания уравнения (1) действительная функция $u(x)$, непрерывная вместе со своими частными производными, входящими в это уравнение, и обращающая его в тождество, называется *регулярным решением*.

Наряду с регулярными решениями в теории дифференциальных уравнений с частными производными важное значение имеют решения, перестающие быть регулярными в изолированных точках или на многообразиях особого вида. К ним относятся так называемые *элементарные* или *фундаментальные* решения.

Все встречающиеся в приложениях уравнения с частными производными имеют целые семейства решений. Однако существуют дифференциальные уравнения с частными производными, множества решений которых весьма узки и в некоторых случаях даже пусты. Так, например, множество действительных решений уравнения

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2=0$$

исчерпывается функцией $u(x)=\text{const}$, а уравнение

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2+1=0$$

вовсе не имеет действительных решений.

Говорят, что уравнение (1) *линейно*, если F является линейной функцией относительно всех переменных $p_{i_1\ldots i_n}$, $\sum_{j=1}^{n} i_j=k$, $k=0, \ldots, m$. Когда функция F линейна лишь относительно переменных $p_{i_1\ldots i_n}$ при $\sum_{j=1}^{n} i_j=m$, то уравнение (1) называется *квазилинейным.*

Линейное уравнение $Lu=f(x)$ называется *однородным* или *неоднородным* в зависимости от того, будет ли его правая часть $f(x)$ равна нулю для всех $x\in D$ или отлична от тождественного нуля.

Очевидно, что если функции $u(x)$ и $v(x)$ являются решениями неоднородного линейного уравнения $Lu=f$, то их разность $w=u(x)-v(x)$ будет решением однородного уравнения $Lw=0$. Кроме того, если $u_k(x)$, $k=1, \ldots$ $\ldots, l$, — решения однородного уравнения, то решением этого уравнения является и функция $u=\sum_{k=1}^{l} c_k u_k(x)$, где c_k — действительные постоянные.

Линейное уравнение с частными производными второго порядка можно записать в виде

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu=f, \qquad (2)$$

где A_{ij}, B_j, C, f — заданные в области D действительные функции точки x.

В точках $x\in D$, в которых коэффициенты A_{ij}, i, $j=1, \ldots, n$, все равны нулю, (2) перестает быть уравнением второго порядка, т. е. в указанных точках порядок уравнения (2) вырождается. Ниже всегда будем предполагать, что порядок уравнения (2) в области его задания всюду равен двум.

2°. Понятие характеристической формы и классификация линейных уравнений второго порядка. В предположении непрерывности частных производных первого порядка функции F по переменным $p_{i_1\ldots i_n}$, $\sum_{j=1}^{n} i_j=m$, в теории уравнения (1) фундаментальную роль играет форма порядка m:

$$K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)=\sum\frac{\partial F}{\partial p_{i_1\ldots i_n}}\lambda_1^{i_1}\ldots\lambda_n^{i_n}, \qquad \sum_{j=1}^{n} i_j=m, \qquad (3)$$

относительно действительных параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, носящая название *характеристической формы*, соответствующей уравнению (1).

В случае уравнения второго порядка (2) характеристическая форма (3) является квадратичной:

$$Q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)=\sum_{i,\,j=1}^{n} A_{ij}(x)\,\lambda_i\lambda_j.$$

В каждой точке $x\in D$ квадратичная форма Q при помощи неособого аффинного преобразования переменных $\lambda_i=\lambda_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $i=1, \ldots, n$, может быть приведена к каноническому виду

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i^2,$$

где коэффициенты α_i, $i=1, \ldots, n$, принимают значения 1,

-1, 0, причем число отрицательных коэффициентов (индекс инерции) и число нулевых коэффициентов (дефект формы) являются аффинными инвариантами.

Когда все $\alpha_i = 1$ или все $\alpha_i = -1$, $i = 1, \ldots, n$, т. е. когда форма Q соответственно положительно или отрицательно определена (дефинитна), уравнение (2) называется *эллиптическим* в точке $x \in D$. Если один из коэффициентов α_i отрицателен, а все остальные положительны (или наоборот), то говорят, что уравнение (2) в точке x *гиперболично*. В случае, когда l, $1 < l < n-1$, коэффициентов α_i положительны, а остальные $n-l$ отрицательны, уравнение (2) называется *ультрагиперболическим*. Если же хотя бы один из этих коэффициентов равен нулю (все α_i не могут равняться нулю, ибо вырождение порядка уравнения исключается), то уравнение (2) в точке x называется *параболическим*.

Говорят, что в области D своего задания (2) является уравнением *эллиптического*, *гиперболического* или *параболического типа*, если оно соответственно эллиптично, гиперболично или параболично в каждой точке этой области.

Эллиптическое в области D уравнение (2) называется *равномерно эллиптическим*, если существуют отличные от нуля действительные числа k_0 и k_1 одинакового знака такие, что

$$k_0 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leqslant Q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \leqslant k_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

для всех $x \in D$.

Пример уравнения

$$x_n \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$

показывает, что эллиптическое в области своего задания уравнение не обязано быть равномерно эллиптическим. Это уравнение эллиптично в каждой точке полупространства $x_n > 0$, не будучи в нем равномерно эллиптическим.

Когда в разных частях области D уравнение (2) принадлежит к различным типам, то говорят, что оно является уравнением *смешанного типа* в этой области. Только что рассмотренный пример относится как раз к уравнениям смешанного типа в любой области D пространства E_n, пересечение которой с гиперплоскостью $x_n=0$ не является пустым.

В дальнейшем под определенностью квадратичной формы будем подразумевать ее положительную определенность, ибо отрицательно определенная квадратичная форма умножением на (—1) становится положительно определенной.

Предполагая, без ограничения общности, что форма Q симметрична, т. е. $A_{ij}=A_{ji}$, $i, j=1, \ldots, n$, и используя критерий Сильвестра положительной определенности квадратичных форм, мы можем, не приводя квадратичную форму Q к каноническому виду, утверждать, что для эллиптичности уравнения (2) в области D необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы

$$A=\left\|\begin{matrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} \end{matrix}\right\|$$

были положительны.

3°. **Классификация уравнений высшего порядка.** В случае уравнения с частными производными порядка m:

$$\sum a_{i_1\ldots i_n}(x)\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}}+L_1(u)=f, \quad \sum_{j=1}^{n} i_j=m, \tag{4}$$

где L_1 — дифференциальный оператор порядка ниже m, форма (3) имеет вид

$$K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)=\sum a_{i_1\ldots i_n}\lambda_1^{i_1}\ldots\lambda_n^{i_n}, \quad \sum_{j=1}^{n} i_j=m. \tag{5}$$

Если при фиксированном значении $x\in D$ можно найти такое аффинное преобразование переменных $\lambda_i=\lambda_i(\mu_1, \ldots \ldots, \mu_n)$, $i=1, \ldots, n$, в результате которого полученная из (5) форма содержит лишь l, $0<l<n$, переменных μ_i, то говорят, что уравнение (4) в точке x *параболически вырождается.*

При отсутствии параболического вырождения, если коническое многообразие

$$K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)=0 \tag{6}$$

не имеет действительных точек, кроме $\lambda_1=0, \ldots, \lambda_n=0$, уравнение (4) в точке x называется *эллиптическим.*

Говорят, что уравнение (4) в точке x *гиперболично*, если в пространстве переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ существует такая прямая, что если принять ее за координатную ось в новых переменных $\mu_1, \ldots, \mu_n$, полученных преобразованием $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то относительно координаты, меняющейся вдоль этой оси, преобразованное уравнение (6) имеет ровно m действительных корней (простых или кратных) при любом выборе значений остальных координат μ.

Аналогичным образом происходит деление по типам уравнения (1) и в нелинейном случае по характеру формы (3), в которой $p_{i_1 \ldots i_n}$ заменены через $\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}$, $\sum_{j=1}^{n} i_j = k$, $k = 0, \ldots, m$. Поскольку коэффициенты формы (3) зависят наряду с точкой x от искомого решения и от его производных, классификация по типам в рассматриваемом случае имеет смысл лишь для этого решения.

4°. Системы уравнений с частными производными. Когда F представляет собой N-мерный вектор $F = (F_1, \ldots, F_N)$ с компонентами

$$F_i(x, \ldots, p_{i_1 \ldots i_n}, \ldots), \qquad i = 1, \ldots, N,$$

зависящими от $x \in D$ и от M-мерных векторов

$$p_{i_1 \ldots i_n} = \left(p^1_{i_1 \ldots i_n}, \ldots, p^M_{i_1 \ldots i_n}\right),$$

векторное равенство (1) называется *системой* дифференциальных уравнений с частными производными относительно неизвестных функций $u_1, \ldots, u_M$ или относительно неизвестного вектора $u = (u_1, \ldots, u_M)$.

Максимальный порядок производных от искомых функций, входящих в данное уравнение системы, называется *порядком* этого уравнения.

В системе уравнений вовсе нет необходимости, чтобы число уравнений N и число неизвестных функций M были равны или чтобы порядок всех уравнений данной системы был один и тот же.

Когда $M = N$ и порядок каждого уравнения системы (1) равен m, составим квадратные матрицы

$$\left\| \frac{\partial F_i}{\partial p^j_{i_1 \ldots i_n}} \right\|, \quad i, j = 1, \ldots, N, \quad \sum_{j=1}^{n} i_j = m.$$

Выражение

$$K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \det \sum \left\| \frac{\partial F_i}{\partial p^j_{i_1 \ldots i_n}} \right\| \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_n^{i_n}, \quad \sum_{k=1}^{n} i_k = m, \qquad (7)$$

представляющее собой форму порядка Nm относительно действительных скалярных параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, называется *характеристическим детерминантом* системы (1).

Деление по типам системы (1) происходит по характеру формы (7) точно так же, как это было сделано при рассмотрении одного уравнения порядка m.

Уравнение (1), когда входящие в его левую часть величины являются комплексными и под $\frac{\partial}{\partial x_k}$ при $x_k = y_k + iz_k$ понимается $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y_k} - i\frac{\partial}{\partial z_k}\right)$, очевидно, равносильно системе уравнений.

§ 2. Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными

1°. Характеристические кривые и характеристические направления. В пункте 2° § 1 было отмечено, что в каждой фиксированной точке x области D задания уравнения (2) квадратичная форма Q может быть приведена к каноническому виду. В соответствии с этим в каждой фиксированной точке $x \in D$ всегда можно найти неособое преобразование (замену) независимых переменных $x_i = x_i(y_1, \ldots, y_n)$, $i = 1, \ldots, n$, в результате которого уравнение (2) в этой точке приводится к *каноническому* виду

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2} + \beta_i \frac{\partial v}{\partial y_i}\right) + \gamma v = \delta,$$

где постоянные α_i, $i = 1, \ldots, n$, принимают значения 1, —1, 0,

$$v(y) = u[x(y)], \quad \delta(y) = f[x(y)],$$

а функции β_i и γ выражаются через коэффициенты уравнения (2).

Следует отметить, что не всегда можно найти преобразование независимых переменных, позволяющее привести уравнение (2) к каноническому виду не только во всей области задания этого уравнения, но даже вблизи данной точки области. В этом отношении исключение представляет случай двух независимых переменных, к рассмотрению которого мы приступаем.

Уравнение (2) в случае $n=2$ в обозначениях

$$x_1=x, \quad x_2=y,$$
$$A_{11}=a(x, y), \quad A_{12}=A_{21}=b(x, y), \quad A_{22}=c(x, y),$$
$$B_1=d(x, y), \quad B_2=e(x, y), \quad C=g(x, y), \ f=f(x, y)$$

запишем в виде

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+gu=f. \tag{8}$$

Кривая $\varphi(x, y)=\text{const}$, где φ — решение уравнения

$$a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+c\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0, \tag{9}$$

называется *характеристической кривой* уравнения (7), а направление (dx, dy), определенное из равенства

$$a\,dy^2-2b\,dy\,dx+c\,dx^2=0, \tag{10}$$

— *характеристическим направлением.*

Равенство (10) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение характеристических кривых.

Согласно пункту 2° § 1 уравнение (8) эллиптично, гиперболично или параболично в зависимости от того, будет ли квадратичная форма $a\,dy^2+2b\,dy\,dx+c\,dx^2$ определена (положительно или отрицательно), знакопеременна или полуопределена (вырождена). В соответствии с этим *уравнение* (8) *является эллиптическим, гиперболическим или параболическим в зависимости от того, будет ли дискриминант* b^2-ac *квадратичной формы* $a\,dy^2+2b\,dy\,dx+c\,dx^2$ *меньше нуля, больше нуля или равен нулю соответственно.* Поэтому в области эллиптичности уравнение (8) действительных характеристических направлений не имеет, в то время как в каждой точке гиперболичности существуют по два различных действительных характеристических направления, а в каждой точке параболичности имеется одно действительное характеристическое направление. Следовательно, при достаточной гладкости коэффициентов a, b, c область гиперболичности уравнения (8) покрыта сетью двух семейств характеристических кривых, а область параболичности — одним семейством характеристических кривых.

В случае уравнения

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

где m — нечетное натуральное число, равенство (10) имеет вид $y^m\, dy^2 + dx^2 = 0$, откуда следует, что это уравнение в полуплоскости $y > 0$ действительных характеристических

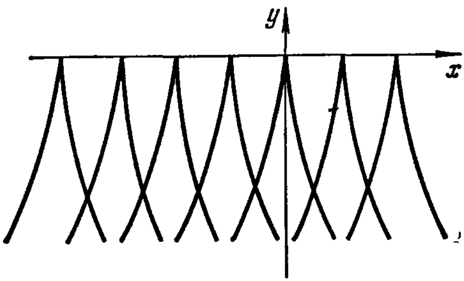

Рис. 1.

направлений не имеет, в то время как в каждой точке прямой $y = 0$ и полуплоскости $y < 0$ оно имеет по одному и по два характеристических направления. Записывая уравнение характеристических кривых в виде $dx \pm \pm (-y)^{m/2} dy = 0$ и интегрируя, заключаем, что полуплоскость $y < 0$ покрыта двумя семействами характеристических кривых (рис. 1):

$$x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = \text{const},$$

$$x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = \text{const}.$$

2°. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. В условиях достаточной гладкости коэффициентов a, b и c уравнения (8) всегда можно найти такое неособое преобразование $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ переменных x, y, при помощи которого это уравнение в данной области приводится к одному из следующих видов:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}+A\frac{\partial v}{\partial \xi}+B\frac{\partial v}{\partial \eta}+Cv=H \tag{11}$$

в эллиптическом случае,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\,\partial \eta}+A\frac{\partial v}{\partial \xi}+B\frac{\partial v}{\partial \eta}+Cv=H \tag{12}$$

или

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}+A_1\frac{\partial v}{\partial \xi}+B_1\frac{\partial v}{\partial \eta}+C_1v=H_1 \tag{12_1}$$

в гиперболическом случае и

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}+A\frac{\partial v}{\partial \xi}+B\frac{\partial v}{\partial \eta}+Cv=H \tag{13}$$

в параболическом случае.

Возможность приведения уравнения (8) к каноническим видам (11), (12), (13) во всей области D его задания (или, как еще принято говорить, «в большом») довольно трудно доказать. Однако рассуждение, приводящее к осуществлению такой возможности, сильно упрощается, если ограничиться рассмотрением достаточно малой окрестности точки (x, y) области D.

В самом деле, в результате замены переменных $\xi = \xi(x, y)$, $\eta=\eta(x, y)$ частные производные первого и второго порядка по x и y преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\xi_x\frac{\partial}{\partial \xi}+\eta_x\frac{\partial}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}=\xi_y\frac{\partial}{\partial \xi}+\eta_y\frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\xi_x^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+2\xi_x\eta_x\frac{\partial^2}{\partial \xi\,\partial \eta}+\eta_x^2\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}+\xi_{xx}\frac{\partial}{\partial \xi}+\eta_{xx}\frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}=\xi_x\xi_y\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)\frac{\partial^2}{\partial \xi\,\partial \eta}+\eta_x\eta_y\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}+\xi_{xy}\frac{\partial}{\partial \xi}+\eta_{xy}\frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\xi_y^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+2\xi_y\eta_y\frac{\partial^2}{\partial \xi\,\partial \eta}+\eta_y^2\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}+\xi_{yy}\frac{\partial}{\partial \xi}+\eta_{yy}\frac{\partial}{\partial \eta},$$

где ξ и η с буквенными индексами x, y обозначают производные, например, $\xi_x=\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\xi_{xx}=\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ и т. д. В соответствии с этим уравнение (8) принимает вид

$$a_1\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+2b_1\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\,\partial \eta}+c_1\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}+d_1\frac{\partial v}{\partial \xi}+e_1\frac{\partial v}{\partial \eta}+g_1v=f_1, \tag{14}$$

где

$$a_1(\xi,\ \eta) = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2, \tag{15}$$

$$b_1(\xi,\ \eta) = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y, \tag{16}$$

$$c_1(\xi,\ \eta) = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2, \tag{17}$$

$$v(\xi,\ \eta) = u[x(\xi,\ \eta),\ y(\xi,\ \eta)],$$

а $x = x(\xi,\ \eta)$, $y = y(\xi,\ \eta)$ — преобразование, обратное $\xi = \xi(x,\ y)$, $\eta = \eta(x,\ y)$. Явные выражения остальных коэффициентов уравнения (14) нас не интересуют, поэтому их здесь не приводим.

В случае эллиптичности уравнения (8), т. е. при $b^2 - ac < 0$, в качестве $\xi(x,\ y)$ и $\eta(x,\ y)$ примем решения системы уравнений с частными производными первого порядка

$$\begin{aligned} a\xi_x + b\xi_y + \sqrt{ac - b^2}\,\eta_y &= 0, \\ a\eta_x + b\eta_y - \sqrt{ac - b^2}\,\xi_y &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

с якобианом

$$\frac{\partial(\xi,\ \eta)}{\partial(x,\ y)} \neq 0. \tag{19}$$

В силу (15), (16), (17), (18) и (19) имеем

$$a_1 = c_1 = \frac{ac - b^2}{a}(\xi_y^2 + \eta_y^2) \neq 0, \quad b_1 = 0.$$

После деления всех членов (14) на отличное от нуля выражение

$$\frac{ac - b^2}{a}(\xi_y^2 + \eta_y^2)$$

получаем (11).

Заметим, что система (18) равносильна уравнению (9). В этом легко убедиться, если принять обозначение $\varphi = \xi + i\eta$, где i — мнимая единица.

Пусть теперь $b^2 - ac > 0$ и функции $\xi(x,\ y)$ и $\eta(x,\ y)$ являются решениями уравнения (9), удовлетворяющими условию (19). Предположим, что $a \neq 0$ (при $a = 0$ и $c \neq 0$ рассуждение изменится очевидным образом). В этом случае в силу (9) из (15), (16), (17) и (19) получаем $a_1 = c_1 = 0$, $b_1 = 2\frac{ac - b^2}{a}\xi_y\eta_y \neq 0$ и, стало быть, уравнение (14) после деления на функцию $2b_1$ примет вид (12). В результате новой замены $\alpha = \xi + \eta$, $\beta = \xi - \eta$ уравнение (12) приводится к виду (12_1).

Остается рассмотреть случай $b^2 - ac = 0$. В качестве функции $\xi(x,\ y)$ примем отличное от постоянной решение уравнения (9), а функцию $\eta(x, y)$ подберем так, чтобы было соблюдено условие $a\eta_x^2+2b\eta_x\eta_y+c\eta_y^2\neq 0$. В силу равенства $a\xi_x^2+2b\xi_x\xi_y+c\xi_y^2=0$ из (15) и (16) имеем $a_1=b_1=0$. Следовательно, после деления всех членов (14) на $a\eta_x^2+2b\eta_x\eta_y+c\eta_y^2$ получаем (13).

При $b^2-ac>0$ уравнение (9) равносильно двум линейным уравнениям с частными производными:

$$a\varphi_x+\left(b+\sqrt{b^2-ac}\right)\varphi_y=0, \quad a\varphi_x+\left(b-\sqrt{b^2-ac}\right)\varphi_y=0,$$

а при $b^2-ac=0$ — одному:

$$a\varphi_x+b\varphi_y=0.$$

Следовательно, можно считать, что при $b^2-ac>0$ функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ являются решениями уравнений

$$a\xi_x+\left(b+\sqrt{b^2-ac}\right)\xi_y=0, \quad a\eta_x+\left(b-\sqrt{b^2-ac}\right)\eta_y=0, \tag{20}$$

а при $b^2-ac=0$ одна из этих функций, например $\xi(x, y)$, является решением уравнения

$$a\xi_x+b\xi_y=0. \tag{21}$$

Вопрос существования решений линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка теснейшим образом связан с теорией обыкновенных дифференциальных уравнеиий первого порядка. Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что при достаточной гладкости функций a, b, c система линейных уравнений с частными производными (18) и линейные уравнения (20) и (21) в окрестности точки (x, y) области D задания уравнения (8) имеют решения нужного нам вида. Тем самым доказана возможность *приведения уравнения* (8) к каноническим видам (11), (12), (12_1) и (13) *в окрестности точки* (x, y), *т. е. «в малом»*.

§ 3. Простейшие примеры трех основных типов уравнений с частными производными второго порядка

1°. Уравнение Лапласа. Обозначим через Δ дифференциальный оператор с частными производными второго порядка

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

который записывается еще в виде скалярного квадрата $\Delta = \nabla\nabla$ векторного дифференциального оператора первого порядка (оператора набла)

$$\nabla = \sum_{i=1}^{n} l_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

где l_i, $i=1, \ldots, n$, — единичные ортогональные координатные векторы (орты). Дифференциальный оператор Δ называется *оператором Лапласа*, а уравнение

$$\Delta u = 0 \tag{22}$$

— *уравнением Лапласа.*

Характеристическая квадратичная форма (3), соответствующая уравнению (22),

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

положительно определена во всех точках пространства E_n. Следовательно, это уравнение эллиптично всюду в E_n. Более того, оно, очевидно, равномерно эллиптично в E_n.

Функция $u(x)$, обладающая непрерывными частными производными второго порядка и удовлетворяющая уравнению Лапласа (т. е. являющаяся решением этого уравнения), называется *гармонической функцией.*

Непосредственной проверкой легко убеждаемся в том, что функция двух точек x и ξ:

$$E(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{n-2}|\xi - x|^{2-n}, & n > 2, \\ -\log|\xi - x|, & n = 2, \end{cases} \tag{23}$$

где $|\xi - x|$ — расстояние между x и ξ, при $x \neq \xi$ является решением уравнения Лапласа как по x, так и по ξ.

Действительно, при $x \neq \xi$ из (23) имеем

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2} = -|\xi - x|^{-n} + n|\xi - x|^{-n-2}(\xi_i - x_i)^2. \tag{24}$$

Подставляя выражения $\frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2}$, $i = 1, \ldots, n$, из (24) в левую часть (22), получаем

$$\Delta E = -n\,|\xi - x|^{-n} + n\,|\xi - x|^{-n-2} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - x_i)^2 = 0.$$

Так как $E(x, \xi)$ симметрична относительно x и ξ, мы можем утверждать, что эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа и по ξ, $\xi \neq x$.

Определенная по формуле (23) функция $E(x, \xi)$ называется *элементарным* или *фундаментальным решением* уравнения Лапласа. При $n=3$ она представляет собой потенциал единичного заряда, помещенного в точке x (или ξ).

Пусть S — гладкая гиперповерхность (замкнутая или разомкнутая) в пространстве E_n и $\mu(\xi)$ — заданная на ней действительная непрерывная функция.

Выражение

$$u(x) = \int_S E(x, \xi)\,\mu(\xi)\,ds_\xi, \tag{25}$$

где ds_ξ — элемент площади гиперповерхности S по переменному интегрирования ξ, является гармонической функцией во всех точках x пространства E_n, не лежащих на S.

Справедливость этого утверждения следует из того, что, как уже было показано выше, функция $E(x, \xi)$ при $x \neq \xi$ гармонична *относительно* x и что при вычислении производных $\dfrac{\partial^2 E}{\partial x_i^2}$, $i=1, \ldots, n$, операцию дифференцирования в правой части (25) можно внести под знак интеграла.

Выражение вида

$$u(x) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \left[\frac{x_n^{2k}}{(2k)!}\Delta^k \tau(x_1, \ldots, x_{n-1}) + \right.$$
$$\left. + \frac{x_n^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^k \nu(x_1, \ldots, x_{n-1})\right], \tag{26}$$

где оператор $\Delta^k = \Delta(\Delta^{k-1})$, а τ и ν — произвольные полиномы относительно переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$, также является гармонической функцией (гармоническим полиномом) переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Действительно, так как в правой части (26) сумма конечна (под знаком суммы, начиная с определенного значения k, все $\Delta^k\tau$ и $\Delta^k\nu$ равны нулю), то

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_{k\geqslant 0} (-1)^k \left[\frac{x_n^{2k}}{(2k)!}\Delta^k \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_i^2} + \frac{x_n^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^k \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_i^2}\right],$$

$$i = 1, \ldots, n-1,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = -\sum_{k\geqslant 0} (-1)^k \left[\frac{x_n^{2k}}{(2k)!}\Delta^{k+1}\tau + \frac{x_n^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^{k+1}\nu\right].$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0.$$

Аналогично доказывается гармоничность суммы $u(x)$ ряда в правой части (26) при требованиях бесконечной дифференцируемости τ и ν, равномерной сходимости этого ряда и законности его почленного дифференцирования дважды по x_i, $i = 1, \ldots, n$.

2°. Волновое уравнение. Уравнение с частными производными

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \tag{27}$$

известно под названием *волнового уравнения*. Это уравнение часто встречается в приложениях. При $n = 4$, если единица времени $x_4 = t$ выбрана соответствующим образом, уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{28}$$

описывает явление распространения звука в трехмерном пространстве E_3 переменных x_1, x_2, x_3 (см. ниже § 5, 2°).

Характеристическая квадратичная форма (3) для уравнения (27) имеет канонический вид

$$Q = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^2 - \lambda_n^2,$$

и, следовательно, по определению, приведенному в пункте 2° § 1, это уравнение во всем пространстве E_n является гиперболическим.

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что *функция*

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{x_n^{2k}}{(2k)!}\Delta^k\tau(x_1, \ldots, x_{n-1})+\right.$$

$$\left.+\frac{x_n^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^k\nu(x_1, \ldots, x_{n-1})\right], \tag{29}$$

где τ *и* ν *— произвольные бесконечно дифференцируемые функции, при равномерной сходимости ряда* (29) *и рядов, полученных из него дифференцированием почленно дважды по* x_i, $i=1, \ldots, n$, *является решением уравнения* (27). В случае полиномиальных τ и ν ряды в правой части (29) с определенного номера k обрываются и их сумма $u(x)$ представляет собой полиномиальное решение уравнения (27).

Теперь покажем, что *функция*

$$u(x, t)=\int_S \frac{\mu(y_1, y_2, y_3)}{|y-x|}\,ds_y, \tag{30}$$

где $|y-x|$ *— расстояние между точками* $x=(x_1, x_2, x_3)$ *и* $y=(y_1, y_2, y_3)$, S *— сфера* $|y-x|^2=t^2$, а μ *— заданная на* S *произвольная действительная дважды непрерывно дифференцируемая функция, является решением уравнения* (28).

В самом деле, в результате замены переменных $y_i-x_i=t\xi_i$, $i=1, 2, 3$, формула (30) принимает вид

$$u(x, t)=t\int_\sigma \mu(x_1+t\xi_1, x_2+t\xi_2, x_3+t\xi_3)\,d\sigma_\xi, \tag{31}$$

где σ — единичная сфера $|\xi|=1$, а $d\sigma_\xi=\frac{dS_y}{t^2}=\frac{dS_y}{|y-x|^2}$ — элемент ее площади. Из (31) имеем

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=t\int_\sigma\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\mu}{\partial y_i^2}\,d\sigma_\xi. \tag{32}$$

Кроме того,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\int_\sigma \mu(x_1+t\xi_1, x_2+t\xi_2, x_3+t\xi_3)\,d\sigma_\xi+$$

$$+t\int_\sigma\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\mu}{\partial y_i}\xi_i\,d\sigma_\xi=\frac{u}{t}+\frac{1}{t}I, \tag{33}$$

где

$$I=\int\limits_S\left[\frac{\partial\mu}{\partial y_1}\nu_1+\frac{\partial\mu}{\partial y_2}\nu_2+\frac{\partial\mu}{\partial y_3}\nu_3\right]ds_y, \tag{34}$$

а $\nu(y)=(\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3)$ — внешняя нормаль к S в точке y.

Дифференцируя равенство (33), находим

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=-\frac{u}{t^2}+\frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{t^2}I+\frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t}=$$

$$=-\frac{u}{t^2}+\frac{1}{t}\left(\frac{u}{t}+\frac{I}{t}\right)-\frac{I}{t^2}+\frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t}=\frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t}. \tag{35}$$

Из курса математического анализа известно, что *для действительных функций $A_i(x)$, $i=1, \ldots, n$, непрерывных вместе со своими производными первого порядка в замкнутой области $D\cup S$ с гладкой границей S, имеет место* формула Гаусса—Остроградского

$$\int\limits_D\sum_{i=1}^n\frac{\partial A_i}{\partial x_i}d\tau_x=\int\limits_S\sum_{i=1}^n A_i(y)\nu_i(y)\,ds_y, \tag{GO}$$

где $d\tau_x$ — элемент объема, а $\nu=(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — внешняя нормаль к S в точке $y\in S$.

Правая часть (34) по формуле (GO) преобразуется в интеграл по шару $|y-x|^2<t^2$:

$$I=\int\sum_{i=1}^3\frac{\partial^2\mu}{\partial y_i^2}d\tau_y, \tag{36}$$

где $d\tau_y$ — элемент объема по переменному интегрированию y. Переходя от декартовых координат y_1, y_2, y_3 к сферическим ρ, ϑ, φ, выражение (36) для I запишем в виде

$$I=\int\limits_0^t d\rho\int\limits_0^\pi d\vartheta\int\limits_0^{2\pi}\Delta\mu\rho^2\sin\vartheta\,d\varphi,$$

где $\rho^2\sin\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta\,d\rho=d\tau_y$. Отсюда, так как $\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi=d\sigma_\xi$, находим

$$\frac{\partial I}{\partial t}=t^2\int\limits_0^\pi d\vartheta\int\limits_0^{2\pi}\Delta\mu\sin\vartheta\,d\varphi=t^2\int\limits_\sigma\sum_{i=1}^3\frac{\partial^2\mu}{\partial y_i^2}d\sigma_\xi.$$

Следовательно, в силу (35) можно написать

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=t\int\limits_{\sigma}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\mu}{\partial y_i^2}\,d\sigma_{\xi}. \qquad (37)$$

На основании (32) и (37) заключаем, что представленная формулой (30) функция $u(x, t)$ является решением уравнения (28).

3°. Уравнение теплопроводности. Уравнение

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\frac{\partial u}{\partial x_n}=0 \qquad (38)$$

относится к уравнениям параболического типа, ибо соответствующая ему характеристическая форма (3) имеет вид

$$Q=\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i^2.$$

Когда $n=4$ при подходящем подборе единицы времени $t=x_4$, уравнение

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=0 \qquad (39)$$

описывает явление передачи тепла в теле, помещенном в пространстве переменных x_1, x_2, x_3. Поэтому (39) называется *уравнением теплопроводности* (см. ниже § 5, 3°).

Непосредственным вычислением убеждаемся, как и в случае уравнений (22), (27), что *функция*

$$u(x)=\sum_{k\geqslant 0}\frac{x_n^k}{k!}\,\Delta^k\tau(x_1, \ldots, x_{n-1}) \qquad (40)$$

для любой заданной бесконечно дифференцируемой действительной функции τ *переменных* $x_1, \ldots, x_{n-1}$ *при равномерной сходимости ряда в правой части* (40) *и рядов, полученных из него дифференцированием почленно один раз по* x_n *и дважды по* x_i, $i=1, \ldots, n-1$, *удовлетворяет уравнению* (38). Решением этого уравнения является также функция

$$E(x, \xi) = (x_n - \xi_n)^{\frac{1-n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{4(x_n - \xi_n)} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \xi_i)^2\right], \quad (41)$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — действительные параметры, причем $x_n > \xi_n$.

В самом деле,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2} = -\frac{1}{2(x_n - \xi_n)} E(x, \xi) + \frac{(x_i - \xi_i)^2}{4(x_n - \xi_n)^2} E(x, \xi),$$

$$i = 1, \ldots, n-1,$$

$$\frac{\partial E}{\partial x_n} = -\frac{n-1}{2(x_n - \xi_n)} E(x, \xi) + \frac{E(x, \xi)}{4(x_n - \xi_n)^2} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \xi_i)^2,$$

откуда следует, что

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2} - \frac{\partial E}{\partial x_n} = 0.$$

Представленная формулой (41) функция называется *элементарным* (*фундаментальным*) *решением* уравнения (38).

4°. Постановка некоторых задач для уравнений с частными производными. При выводе дифференциальных уравнений с частными производными из общих законов, которым подчинены изучаемые явления природы, естественно возникают дополнительные условия, налагаемые на искомые решения. Центральное место в теории уравнений с частными производными занимает доказательство *существования* и *единственности* именно таких решений, которые удовлетворяют этим условиям. Если окажется, что малое изменение данных, входящих как в уравнения, так и в дополнительные условия, вызывает малое изменение удовлетворяющего им решения или, как еще принято говорить, искомое решение *устойчиво*, то задача называется *правильно* (*корректно*) *поставленной*. Важно заметить, что условия задач, которым должны удовлетворять искомые решения, существенно зависят от типа рассматриваемого уравнения.

Сформулируем некоторые задачи, правильность постановки которых будет показана позже.

Пусть граница S области D пространства E_n представляет собой гладкую $(n-1)$-мерную гиперповерхность, В дальнейшем под поверхностью в пространстве E_n будем понимать именно $(n-1)$-мерную гиперповерхность. *Требуется определить регулярное в области D решение $u(x)$ уравнения* (22), *непрерывное в замкнутой области $D \cup S$ и удовлетворяющее краевому условию*

$$\lim_{x \to y} u(x) = \varphi(y), \quad x \in D, \quad y \in S, \tag{42}$$

где φ — заданная на S действительная непрерывная функция. Сформулированная задача носит название *первой краевой задачи* или *задачи Дирихле.*

Обозначим через G область пространства E_{n-1} переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$. *Задача отыскания регулярного решения $u(x)$ уравнения* (27) *по условиям*

$$\begin{gathered} u(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = \varphi(x), \\ \left.\frac{\partial u(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} = \psi(x), \quad x \in G, \end{gathered} \tag{43}$$

где φ и ψ — заданные в G достаточно гладкие действительные функции, называется *задачей Коши.* Условия (43) известны под названием *начальных условий.*

Пусть D — область пространства E_n, ограниченная цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси x_n, и двумя плоскостями $x_n = 0$, $x_n = h$, $h > 0$. Часть границы области D без верхнего основания $x_n = h$ обозначим через S. *Требуется найти регулярное в области D решение $u(x)$ уравнения* (38) *по краевому условию*

$$\lim_{x \to y} u(x) = \varphi(y), \quad y \in S, \quad x \in D, \tag{44}$$

где φ — заданная на S достаточно гладкая действительная функция. Эта задача тоже называется *первой краевой задачей* для уравнения (38).

§ 4. Понятие интегрального уравнения

1°. Основные определения и обозначения. Предположим, что $\alpha(x)$ и $K_0(x, y, z)$ — заданные действительные функции точек x, y области D пространства E_n и действительного переменного z. Когда $z = \varphi(y)$ является функцией точки $y \in D$, то в предположении, что интеграл по области D:

$$\int_D K_0[x, y, \varphi(y)]\, d\tau_y$$

существует, равенство вида

$$\alpha(x)\varphi(x)+\int_D K_0[x,\ y,\ \varphi(y)]\,d\tau_y=0,\qquad x\in D,\tag{45}$$

называется *интегральным уравнением* относительно неизвестной функции $\varphi(x)$, $x\in D$.

Интегральное уравнение (45) называется *линейным*, если функция $K_0(x,\ y,\ z)$ линейно зависит от z, т. е. когда

$$K_0(x,\ y,\ z)=K(x,\ y)z+K^0(x,\ y).$$

Линейное интегральное уравнение можно записать в виде

$$\alpha(x)\varphi(x)+\int_D K(x,\ y)\varphi(y)\,d\tau_y=f(x),\qquad x\in D,\tag{46}$$

где

$$f(x)=-\int_D K^0(x,\ y)\,d\tau_y,\qquad x\in D,$$

— заданная функция.

Линейное интегральное уравнение (46) называется *однородным* или *неоднородным* в зависимости от того, будет ли $f(x)=0$ для всех $x\in D$ или $f(x)$ отлична от тождественного нуля.

Функция $K(x,\ y)$ носит название *ядра* интегрального уравнения (46), а интегральный член

$$\int_D K(x,\ y)\varphi(y)\,d\tau_y.$$

в левой части (46) — *интегрального оператора*, действующего над классом функций, к которому принадлежит искомая функция $\varphi(x)$.

2°. Классификация линейных интегральных уравнений. В случае, когда область D ограничена, $\alpha(x)$ непрерывна и ядро $K(x,\ y)$ также является непрерывной (или ограниченной интегрируемой в обычном смысле) функцией точек $x,\ y\in D\cup S$, где S — граница области D, интегральное уравнение (46) называется *фредгольмовым*.

Фредгольмово уравнение (46) называется интегральным уравнением *первого*, *второго* или *третьего рода* в зависимости от того, будет ли функция $\alpha(x)$ соответственно всюду равна нулю, всюду равна единице или отлична от тождественного нуля и от тождественной единицы.

При $\alpha(x)\neq 0$ всюду в $D\cup S$ интегральное уравнение Фредгольма третьего рода после деления всех его членов на $\alpha(x)$ приводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Ниже речь будет идти исключительно об интегральных уравнениях Фредгольма второго рода. Доказательства основных утверждений из теории фредгольмовых интегральных уравнений будут даны в том случае, когда D совпадает с интервалом (a, b) действительной числовой оси, ядро $K(x, y)$ является непрерывной функцией по совокупности переменных x, y из квадрата $a \leqslant \frac{x}{y} \leqslant b$, а $f(x)$ непрерывна на сегменте $a \leqslant x \leqslant b$. В этих предположениях интегральное уравнение Фредгольма второго рода запишем в виде

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b, \tag{47}$$

где λ — действительный параметр.

Когда при $|x-y| \to 0$ функция $K(x, y)$ обращается в бесконечность как $|x-y|^{-n_0}$, $n_0 < n$, где n — размерность области D, интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_D K(x, y)\,\varphi(y)\,d\tau_y = f(x)$$

приводится к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода с непрерывным ядром, и поэтому оно также называется фредгольмовым.

Частным случаем интегрального уравнения Фредгольма второго рода (47), когда его ядро $K(x, y)$ тождественно равно нулю при $y > x$, является *интегральное уравнение Вольтерра* второго рода

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x). \tag{48}$$

Все утверждения относительно интегрального уравнения (48) остаются в силе и для класса уравнений вида

$$\varphi(x, y) - \lambda \int_a^x dt \int_b^y K(x, y; t, \tau)\,\varphi(t, \tau)\,d\tau - \mu \int_a^x K_1(x, y; t)\,\varphi(t, y)\,dt - \nu \int_b^y K_2(x, y; \tau)\,\varphi(x, \tau)\,d\tau = f(x, y)$$

которые также называются интегральными уравнениями Вольтерра второго рода.

Под уравнениями математической физики наряду с уравнениями с частными производными понимаются и интегральные уравнения.

Интегральные уравнения играют важную роль в различных областях математики. В частности, теория интегральных уравнений широко применяется при исследовании дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и с частными производными.

§ 5. Упрощенные математические модели некоторых явлений, изучаемых в физике и технике

1°. Электростатическое поле. Мы здесь ограничимся рассмотрением *плоского электростатического поля*, т. е. плоской среды, в каждой точке P которой определен двумерный вектор E — *сила поля*. Введем декартовы ортогональные координаты x, y точки P и для компонент вектора E примем обозначения E_x, E_y. Будем предполагать, что функции E_x и E_y непрерывны вместе со своими производными первого порядка во всех точках поля.

Пусть D — произвольная область рассматриваемого поля с достаточно гладкой границей S, $|D|$ — ее площадь, $\nu = (\cos\widehat{\nu x}, \cos\widehat{\nu y})$ — внешняя к S нормаль, а $s = (\cos\widehat{sx}, \cos\widehat{sy})$ — единичный касательный вектор, направленный в сторону направления обхода S, оставляющего область D слева. Компоненты ν и s связаны между собой очевидными равенствами

$$\cos\widehat{\nu x} = \cos\widehat{sy}, \qquad \cos\widehat{\nu y} = -\cos\widehat{sx}.$$

Выражения

$$N = \int_S E\nu\, ds, \quad A = \int_S Es\, ds,$$

где $E\nu$ и Es — скалярные произведения,

$$E\nu = E_x \cos\widehat{\nu x} + E_y \cos\widehat{\nu y},$$

$$Es = E_x \cos\widehat{sx} + E_y \cos\widehat{sy} = E_y \cos\widehat{\nu x} - E_x \cos\widehat{\nu y},$$

называются соответственно *потоком* через контур S и *циркуляцией* вдоль S вектора E.

В силу формулы (GO) имеем

$$N=\int\limits_D\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)dx\,dy,\qquad A=\int\limits_D\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Стягивая область D в точку P, в пределе получаем

$$\lim_{D\to P}\frac{N}{|D|}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}=\operatorname{div}E,$$
$$\lim_{D\to P}\frac{A}{|D|}=\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=\operatorname{rot}E.$$

Поскольку, по определению, $N=4\pi e$, $\lim\limits_{D\to P}\frac{N}{|D|}=4\pi\rho$, где e — *суммарный заряд*, лежащий в D, а ρ — *поверхностная плотность* заряда в точке P, мы можем написать

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}=4\pi\rho. \tag{49}$$

Так как A представляет собой работу силы E на пути S и поле статическое, то в силу закона сохранения энергии имеем $A=0$, т. е.

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=0. \tag{50}$$

В случае отсутствия зарядов в поле из (49) получаем

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}=0. \tag{51}$$

Равенства (50) и (51) означают, что выражения $E_x dx+$ $+E_y dy$ и $E_y dx-E_x dy$ являются полными дифференциалами. Введем в рассмотрение скалярные функции $v(x, y)$ и $u(x, y)$ по формулам

$$dv=-E_x dx-E_y dy,\qquad du=-E_y dx+E_x dy.$$

Эти равенства означают, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{52}$$

Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ носят названия соответственно *силовой функции* и *потенциала поля*, а система уравнений (52), решением которой они являются, — *системы Коши — Римана*.

Таким образом, *изучение плоского электростатического поля редуцировано к исследованию системы дифференциальных уравнений с частными производными* (52).

Как будет показано ниже (см. гл. II, § 2, 5°), *функции* $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$, *представляющие собой регулярные решения системы* (52), *имеют частные производные всех порядков*. Дифференцируя первое уравнение этой системы по x, а второе по y и складывая их, заключаем, что $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$, т. е. $u(x, y)$ является гармонической функцией. Аналогично убеждаемся в гармоничности и функции $v(x, y)$

2°. Колебания мембраны. Мембраной называется упругая материальная поверхность, которая в положении покоя имеет форму плоской области G и потенциальная энергия E_p которой в процессе колебания пропорциональна приращению площади.

Предположим, что область G лежит в плоскости переменных x, y и прогиб мембраны $u(x, y, t)$, т. е. вертикальное смещение точки $(x, y) \in G$, — достаточно гладкая функция. Колебания мембраны будем считать *малыми* в том смысле, что при вычислениях можно пренебречь степенями величин u, u_x, u_y, u_t выше второй.

Так как в момент времени t площадь σ мембраны дается формулой

$$\sigma = \int_G \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dx\, dy \approx \int_G \left(1 + \frac{1}{2} u_x^2 + \frac{1}{2} u_y^2\right) dx\, dy,$$

а в положении покоя ее площадь

$$|G| = \int_G dx\, dy,$$

то для потенциальной энергии E_p имеем

$$E_p = \frac{1}{2} \mu \int_G (u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy.$$

Здесь коэффициент пропорциональности μ носит название *натяжения мембраны*.

Для кинетической энергии E_k мембраны имеем выражение

$$E_k = \frac{1}{2} \int_G \rho u_t^2\, dx\, dy,$$

где ρ — *поверхностная плотность* массы мембраны, а u_t — *скорость смещения*.

В силу принципа Гамильтона интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} (E_k - E_p)\, dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_G [\rho u_t^2 - \mu (u_x^2 + u_y^2)]\, dx\, dy, \qquad (53)$$

где (t_1, t_2) — промежуток времени наблюдения, должен быть стационарным. Следовательно, функция $u(x, y, t)$ должна быть решением *уравнения Эйлера* вариационной задачи для интеграла (53):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_t) - \frac{\partial}{\partial x}(\mu u_x) - \frac{\partial}{\partial y}(\mu u_y) = 0$$

или, считая ρ и μ постоянными,

$$\frac{1}{a^2} u_{tt} - \Delta u = 0, \qquad (54)$$

где $a^2 = \frac{\mu}{\rho}$. Постоянная a носит название *скорости распространения звука*.

При исследовании уравнения (54) без ограничения общности можно считать, что $a = 1$, ибо простой заменой переменных

$$\tau = at, \quad u(x, y, t) = u\left(x, y, \frac{\tau}{a}\right) = v(x, y, \tau)$$

это уравнение принимает вид

$$v_{\tau\tau} - \Delta v = 0.$$

Считая, что u не зависит от t, т. е. полагая, что в положении изгиба, описанном уравнением $u = u(x, y)$, мембрана находится в равновесии, из (54) получаем $\Delta u = 0$. На этот раз *уравнение Лапласа служит уравнением Эйлера вариационной задачи для интеграла Дирихле*

$$D(u) = \int_G (u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy,$$

представляющего собой потенциальную энергию мембраны в положении равновесия с прогибом $u(x, y)$.

Действительно, предположим, что смещение границы (края) S области G является заданной функцией

$$u(x, y) = \varphi, \qquad (x, y) \in S, \qquad (55)$$

При вариации $\delta u = \varepsilon v$ функции $u(x, y)$, где ε — произвольное действительное число, а v — произвольная достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию

$$v(x, y) = 0, \quad (x, y) \in S, \tag{56}$$

для вариации $\delta D = D(u + \varepsilon v) - D(u)$ интеграла Дирихле получаем выражение

$$\delta D = 2\varepsilon \int_G (u_x v_x + u_y v_y)\, dx\, dy + \varepsilon^2 \int_G (v_x^2 + v_y^2)\, dx\, dy.$$

Поэтому необходимое условие минимума интеграла Дирихле имеет вид

$$\int_G (u_x v_x + u_y v_y)\, dx\, dy = 0. \tag{57}$$

Учитывая то обстоятельство, что

$$u_x v_x + u_y v_y = (u_x v)_x + (u_y v)_y - v\, \Delta u$$

и в силу формулы (GO) и условия (56) имеют место равенства

$$\int_G [(u_x v)_x + (u_y v)_y]\, dx\, dy = \int_S v \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds = 0,$$

из (57) получаем

$$\int_G v\, \Delta u\, dx\, dy = 0. \tag{58}$$

Так как v произвольна в G, из равенства (58) заключаем, что $\Delta u = 0$.

Следовательно, *в положении равновесия мембраны ее прогиб* $u(x, y)$ *является решением задачи Дирихле* (55) *для уравнения Лапласа.*

3°. Распространение тепла. Процесс распространения тепла в среде, заполненной массой с *плотностью* ρ при *удельной теплоемкости* c и *коэффициенте теплопроводности* k, математически описывается следующим образом. Пусть $u(x, t)$ — температура среды в точке x в момент времени t и D — произвольная область среды, содержащая точку x. Обозначим через S границу D. Если ds и ν — элемент площади S и внешняя нормаль к S, то при требовании достаточной гладкости функции $u(x, t)$ количество тепла Q, поступающее в D через S за промежуток времени (t_1, t_2) в силу закона Фурье, дается формулой

$$Q = \int_{t_1}^{t} dt \int_S k \frac{\partial u}{\partial \nu} ds.$$

Так как в результате поступления тепла Q приращение температуры равно $u(x, t+dt) - u(x, t) \approx u_t\, dt$, то

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_D c\rho u_t\, d\tau,$$

где $d\tau$ — элемент объема.

Следовательно,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_S k \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_D c\rho u_t\, d\tau.$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда k, c, ρ постоянны, т. е.

$$k \int_{t_1}^{t_2} dt \int_S \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = c\rho \int_{t_1}^{t_2} dt \int_D u_t\, d\tau. \tag{59}$$

В силу формулы (60) имеем

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = \int_D \Delta u\, d\tau.$$

Поэтому равенство (59) можно записать в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_D (c\rho u_t - k\,\Delta u)\, d\tau = 0,$$

откуда ввиду того, что промежуток времени (t_1, t_2) и объем области D произвольны, заключаем, что

$$c\rho u_t - k\,\Delta u = 0$$

или

$$\frac{1}{a} u_t - \Delta u = 0,$$

где $a = \frac{k}{c\rho}$. Без ограничения общности, очевидно, и на этот раз можно считать, что $a = 1$.

Задание значений функции $u(x, t)$ в каждой точке x среды в начальный момент $t=t_0$ (*начальное условие*) и в каждой точке границы среды для всех значений t из промежутка $t_0<t<T$ при постоянном T (*краевое условие*) соответствует краевой задаче (44).

4°. Движение материальной точки под действием силы тяжести. Пусть в вертикальной плоскости с декартовыми ортогональными координатами x, y под действием силы тяжести движется материальная точка $M(x, y)$ из положения (ξ, η), $\eta>0$, к положению $(\xi_0, 0)$, $\xi_0>\xi$, так, что время t в пути является заданной функцией $t=t(\eta)$ координаты η, измеряющей высоту. Требуется определить траекторию движения точки $M(x, y)$ (*задача о таутохроне*).

Как известно, для квадрата модуля v вектора скорости $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ точки $M(x, y)$ имеет место равенство

$$v^2=2g(\eta-y), \qquad 0\leqslant y\leqslant\eta, \tag{60}$$

где g — *ускорение силы тяжести*. Если $\alpha(x, y)$ — угол между вектором скорости и положительным направлением оси x, отсчитываемый против движения часовой стрелки, то для $\frac{dy}{dt}$ в силу (60) будем иметь

$$\frac{dy}{dt}=v\sin\alpha=\sqrt{2g(\eta-y)}\sin\alpha. \tag{61}$$

Поскольку траектория $x=x(y)$ неизвестна, неизвестной является и величина

$$\varphi(y)=\frac{1}{\sin\alpha\,[x(y),\ y]}. \tag{62}$$

На основании (61) и (62) получаем

$$t(\eta)=-\int_0^\eta \frac{\varphi(y)\,dy}{\sqrt{2g(\eta-y)}}$$

или

$$\int_0^\eta \frac{\varphi(y)\,dy}{\sqrt{\eta-y}}=f(\eta), \tag{63}$$

где

$$f(\eta)=-\sqrt{2g}\,t(\eta).$$

Следовательно, функция $\varphi(y)$ должна быть решением интегрального уравнения (63), известного под названием *интегрального уравнения Абеля.*

В силу (62) лишь такие решения $\varphi(y)$ уравнения (63) имеют физический смысл, которые удовлетворяют условию $|\varphi(y)|>1$. Если нам удастся определить решение $\varphi(y)$ уравнения (63) с указанным свойством, то из геометрического равенства

$$\frac{dx}{dy}=\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\csc^2\alpha-1}=\sqrt{\varphi^2(y)-1}$$

сразу находим уравнение искомой траектории в квадратурах:

$$x=\int_0^y\sqrt{\varphi^2(z)-1}\,dz.$$

ГЛАВА I

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

§ 1. Основные свойства гармонических функций

1°. Определение гармонической функции и некоторые ее элементарные свойства. По определению, приведенному в пункте 1° § 3 введения, *функция* $u(x)$ *называется гармонической в области* D, *если она в* D *обладает непрерывными частными производными до второго порядка включительно и удовлетворяет уравнению Лапласа.*

Наряду с гармонической в области D функцией $u(x)$ гармонической является и функция $u(\lambda Cx+h)$, где λ — скалярная постоянная, C — постоянная действительная ортогональная матрица порядка n, а $h=(h_1, \ldots, h_n)$ — постоянный действительный вектор, причем предполагается, что точки x и $\lambda Cx+h$ все принадлежат области D.

Справедливость этого утверждения следует из очевидного равенства

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(\lambda Cx+h) = \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} u(y),$$

где $y=\lambda Cx+h$.

Поскольку при постоянных c_k, $k=1, \ldots, m$, имеет место равенство

$$\Delta \sum_{k=1}^{m} c_k u_k(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \Delta u_k(x),$$

вместе с $u_k(x)$, $k=1, \ldots, m$, гармонична и конечная сумма

$$u(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k u_k(x).$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что *если функция* $u(x)$ *гармонична в области* D, *то и функция*

$$v(x) = |x|^{2-n} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

гармонична всюду, где она определена.

Когда область D содержит бесконечно удаленную точку, приведенное выше определение гармонической функции нуждается в уточнении, ибо понятие производной в бесконечно удаленной точке не имеет смысла.

Мы скажем, что *функция* $u(x)$ *гармонична в окрестности бесконечно удаленной точки (т. е. вне замкнутого шара* $|x| \leqslant R$ *достаточно большого радиуса), если функция*

$$v(y) = |y|^{2-n} u\left(\frac{y}{|y|^2}\right),$$

доопределенная в точке $y=0$ *как* $\lim\limits_{y \to 0} v(y)$, *гармонична в окрестности точки* $y=0$.

В результате замены $y = \frac{x}{|x|^2}$ имеем

$$u(x) = |x|^{2-n} v\left(\frac{x}{|x|^2}\right),$$

В соответствии с этим *под регулярным в окрестности бесконечно удаленной точки решением уравнения Лапласа понимается гармоническая в этой окрестности всюду, кроме бесконечно удаленной точки, функция* $u(x)$, *которая при* $|x| \to \infty$ *остается ограниченной в случае* $n=2$ *и стремится к нулю не медленнее, чем* $|x|^{2-n}$ *при* $n>2$.

Пусть D — область пространства E_n с достаточно гладкой границей S, а $u(x)$ и $v(x)$ — заданные в ней действительные гармонические функции, непрерывные вместе со своими производными первого порядка в $D \cup S$.

Интегрируя по области D тождества

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = 0$$

и пользуясь формулой (GO) из введения, получаем

$$\int_S v(y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} ds_y = \sum_{i=1}^{n} \int_D \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} d\tau_x, \tag{1}$$

$$\int_S \left[v(y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} - u(y) \frac{\partial v(y)}{\partial \nu_y}\right] ds_y = 0 \tag{2}$$

соответственно. В формулах (1) и (2) и всюду ниже под ν подразумевается внешняя нормаль к S.

Когда область D содержит бесконечно удаленную точку пространства E_n, для того чтобы формулы (1), (2) оставались в силе, от подынтегральных выражений естественно потребовать абсолютной интегрируемости (или суммируемости, если интегралы понимаются в смысле Лебега).

Формулы (1), (2) позволяют легко установить ряд элементарных свойств гармонических функций.

1) *Если гармоническая в области D функция $u(x)$ непрерывна в $D \cup S$ вместе со своими производными первого порядка и равна нулю на границе S области D, то $u(x)=0$ для всех $x \in D \cup S$ (свойство единственности гармонической функции).*

Это свойство следует из равенства (1), если в нем примем $u(x)=v(x)$. Действительно, ввиду того, что $u(y)=0$ при $y \in S$, из (1) имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\tau_x = \int_S u(y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} ds_y, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\tau_x = 0.$$

Следовательно, $\frac{\partial u}{\partial x_i}=0$, $i=1, \ldots, n$, $x \in D$, т. е. $u(x)=$ $=\text{const}$ для всех $x \in D$ Отсюда, так как $u(y)=0$, $y \in S$, в силу непрерывности $u(x)$ в замкнутой области $D \cup S$ заключаем, что $u(x)=0$ для всех $x \in D \cup S$.

2) *Если нормальная производная $\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}$ гармонической в области D функции $u(x)$, непрерывной вместе со своими производными первого порядка в $D \cup S$, равна нулю на границе S области D, то $u(x)=\text{const}$ для всех $x \in D$.*

Это свойство гармонических функций обнаруживается точно так же, как и предыдущее, если в равенстве (3) учесть, что $\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}=0$ для всех $y \in S$.

3) *Интеграл, взятый по границе S от нормальной производной $\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}$ гармонической в области D функции $u(x)$,*

непрерывной вместе со своими частными производными первого порядка в $D \cup S$, *равен нулю.*

В самом деле, положив в (1) $v(x)=1$, $x \in D$, получаем

$$\int_S \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} ds_y = 0. \tag{4}$$

2°. Интегральное представление гармонических функций. *Для гармонической в области* D *функции* $u(x)$, *непрерывной вместе со своими производными первого порядка в* $D \cup S$, *имеет место интегральное представление*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_S E(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} ds_y - \frac{1}{\omega_n} \int_S u(y) \frac{\partial E(x, y)}{\partial \nu_y} ds_y, \tag{5}$$

где $E(x, y)$ — *рассмотренное в пункте* 1° § 3 *введения элементарное решение уравнения Лапласа,* $\omega_n = \frac{1}{\Gamma(n/2)} 2\pi^{n/2}$ — *площадь единичной сферы в* E_n, *а* Γ — *гамма-функция Эйлера.*

Для вывода формулы (5) выделим точку x из области D вместе с замкнутым шаром $|y-x| \leq \varepsilon$ радиуса ε, лежащим в D, и для оставшейся части D_ε области D, ограниченной поверхностью S и сферой $|y-x|=\varepsilon$, применим формулу (2), в которой $v(y)=E(x, y)$:

$$\begin{aligned}
\int_S \left[E(x, y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} - u(y)\frac{\partial E(x, y)}{\partial \nu_y}\right] ds_y &= \\
= \int_{|y-x|=\varepsilon} \left[E(x, y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} - u(y)\frac{\partial E(x, y)}{\partial \nu_y}\right] ds_y &= \\
= \int_{|y-x|=\varepsilon} E(x, y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} ds_y &- \\
- \int_{|y-x|=\varepsilon} [u(y)-u(x)] \frac{\partial E(x, y)}{\partial \nu_y} ds_y &- \\
- u(x) \int_{|y-x|=\varepsilon} \frac{\partial E(x, y)}{\partial \nu_y} ds_y&.
\end{aligned} \tag{6}$$

Учитывая то обстоятельство, что на сфере $|y-x|=\varepsilon$

$$E(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(n-2)\,\varepsilon^{n-2}}, & n>2,\\ -\log\varepsilon, & n=2,\end{cases}$$

$$\frac{\partial E(x,\ y)}{\partial \nu_y}=-\frac{1}{\varepsilon^{n-1}},\qquad n\geqslant 2,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|y-x|=\varepsilon}[u(y)-u(x)]\,\frac{\partial E(x,\ y)}{\partial \nu_y}\,ds_y=0,$$

$$\int\limits_{|y-x|=\varepsilon}\frac{ds_y}{\varepsilon^{n-1}}=\omega_n,$$

в силу (4) из формулы (6) в пределе при $\varepsilon\to 0$ получаем интегральное представление (5) (рис. 2).

3°. Формулы о среднем арифметическом. *Если шар $|y-x|\leqslant R$ лежит целиком в области D гармоничности функции $u(x)$, то значение этой функции в центре шара равно среднему арифметическому ее значений на сфере $|y-x|=R$.*

Действительно, так как на сфере $|y-x|=R$ имеют место равенства

$$E(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(n-2)\,R^{n-2}}, & n>2,\\ -\log R, & n=2,\end{cases}$$

$$\frac{\partial E(x,\ y)}{\partial \nu_y}=-\frac{1}{R^{n-1}},\qquad n\geqslant 2,$$

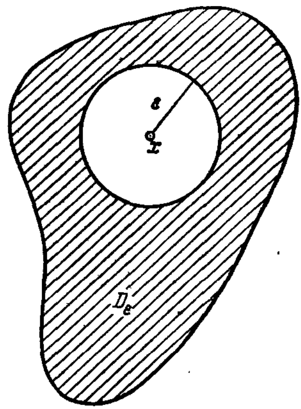

Рис. 2.

то в силу (4) из формулы (5), написанной для шара $|y-x|<R$, получаем

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\int\limits_{|y-x|=R}u(y)\,ds_y. \tag{7}$$

Записывая формулу (7) для сферы $|y-x|=\rho\leqslant R$ в виде

$$\rho^{n-1}u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{|y-x|=\rho}u(y)\,ds_y$$

и интегрируя по ρ в промежутке $0 \leqslant \rho \leqslant R$, получаем

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int\limits_{|y-x|<R} u(y)\, d\tau_y, \tag{8}$$

где $d\tau_y$ — элемент объема по переменному y, а $\frac{\omega_n R^n}{n}$ — объем шара $|y-x|<R$.

Формулы (7) и (8) известны под названием **формул о среднем арифметическом** для гармонических функций **по сфере** и **по шару** соответственно.

При $n=2$ и $n=3$, пользуясь полярными координатами, формулу (7) можно записать еще в виде

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(x_1 + R\cos\theta,\ x_2 + R\sin\theta)\, d\theta \tag{9}$$

и

$$u(x_1,\ x_2,\ x_3) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{2\pi} u(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3) \sin\theta\, d\psi,$$

где

$$y_1 = R\sin\theta\cos\psi, \quad y_2 = R\sin\theta\sin\psi, \quad y_3 = R\cos\theta.$$

4°. Принцип экстремума и единственность решения задачи Дирихле. Обозначим соответственно через M и m верхнюю и нижнюю грани значений в области D гармонической функции $u(x)$.

На основании формулы (8) легко установить следующее свойство гармонических функций, известное под названием **принципа экстремума** для гармонических функций: *отличная от постоянной гармоническая в области D функция $u(x)$ ни в одной точке $x \in D$ не может принимать ни значения M, ни значения m.*

Когда $M = +\infty$ или $m = -\infty$, справедливость этого утверждения очевидна, ибо в каждой точке области D функция $u(x)$ принимает лишь конечное значение. Когда же $M \neq +\infty$, допустим обратное, т. е. $u(x_0) = M$, $x_0 \in D$, и рассмотрим шар $|x - x_0| < \varepsilon$, лежащий в D. В каждой точке этого шара $u(x) = M$. Действительно, если бы в точке y при $|y - x_0| < \varepsilon$ имело место неравенство $u(y) < M$ (неравенство $u(y) > M$ исключено), то в силу непрерывности $u(x)$ это неравенство сохранилось бы всюду в некоторой окрестности $|\xi - y| < \delta$ точки y и на основании формулы (8), примененной в случае шара $|x-x_0|<\varepsilon$, получилось бы бессмысленное неравенство $M<M$. Следовательно, $u(x)=M$ всюду в шаре $|x-x_0|<\varepsilon$.

Пусть теперь x — произвольная фиксированная точка области D и l — непрерывная кривая, соединяющая x с x_0 и лежащая в D. Пусть число ε меньше, чем расстояние между границей S области D и кривой l. Передвигая центр y шара $|\eta-y|<\varepsilon$ из точки x_0 в точку x по кривой l и пользуясь уже доказанным фактом, что при любом положении y внутри этого шара $u=M$, получаем $u(x)=M$. Следовательно, $u(x)=M$ всюду в области D. Полученное противоречие доказывает справедливость первой части сформулированного утверждения. Аналогично доказывается и вторая его часть.

Если дополнительно известно, что гармоническая в области D функция $u(x)$ непрерывна в $D\cup S$, то она обязательно примет свое максимальное (минимальное) значение в некоторой точке $x_0\in D\cup S$. В силу только что доказанного свойства гармонических функций *точка экстремума x_0 не может быть внутренней для области D и, стало быть, $x_0\in S$.*

Из принципа экстремума для гармонических функций следует, что *сформулированная в пункте 4° § 3 введения задача Дирихле не может иметь более одного решения.* В самом деле, если $u(x)$ и $v(x)$ являются решениями этой задачи (см. краевое условие (42) введения), то их разность $w(x)=u(x)-v(x)$ будет равна нулю на границе S области D и поэтому в силу принципа экстремума $w(x)=0$, т. е. $u(x)=v(x)$ всюду в $D\cup S$.

§ 2. Понятие функции Грина и решение задачи Дирихле для шара и полупространства

1°. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа. *Функцией Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области D называется функция $G(x, \xi)$ двух точек $x, \xi\in D\cup S$, обладающая свойствами:* 1) *она имеет вид*

$$G(x, \xi)=E(x, \xi)+g(x, \xi), \tag{10}$$

где $E(x, \xi)$ — элементарное решение уравнения Лапласа, а $g(x, \xi)$ — гармоническая функция как по $x\in D$, так и *по* $\xi \in D$, *и* 2) *когда точка* x *или* ξ *лежит на границе* S *области* D, *то*

$$G(x, \xi) = 0. \tag{11}$$

Легко видеть, что $G(x, \xi) \geqslant 0$ всюду в области D. В самом деле, обозначим через D_δ часть области D, лежащую вне шара $|y - \xi| \leqslant \delta$, $\xi \in D$, достаточно малого радиуса δ. Так как $\lim\limits_{x \to \xi} G(x, \xi) = +\infty$, то при достаточно малом δ имеем $G(x, \xi) > 0$, когда $|x - \xi| < \delta$. Следовательно, на границе области D_δ имеем $G(x, \xi) \geqslant 0$ и,

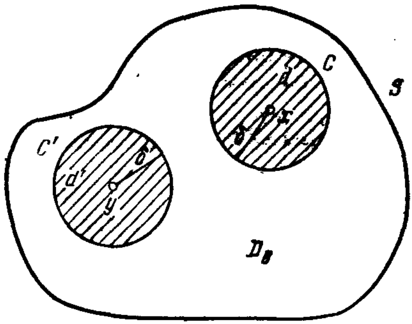

Рис. 3.

стало быть, в силу принципа экстремума, $G(x, \xi) \geqslant 0$ для всех $x \in D_\delta$. Отсюда заключаем, что $G(x, \xi) \geqslant 0$ всюду в $D \cup S$.

Функция Грина $G(x, y)$ *симметрична относительно точек* x *и* y.

Чтобы обнаружить этот факт, лежащие в области D точки x и y удалим из этой области вместе с замкнутыми шарами d: $|z - x| \leqslant \delta$ и d': $|z - y| \leqslant \delta$ достаточно малого радиуса δ и оставшуюся часть области D обозначим через D_δ (рис. 3).

Функции $v(z) = G(z, y)$ и $u(z) = G(z, x)$ гармоничны в области D вне d' и d соответственно. Применяя формулу (2) для области D_δ, будем иметь

$$\int\limits_S \left[G(z, y) \frac{\partial G(z, x)}{\partial \nu_z} - G(z, x) \frac{\partial G(z, y)}{\partial \nu_z}\right] ds_z =$$

$$= \left(\int\limits_C + \int\limits_{C'}\right)\left[G(z, y) \frac{\partial G(z, x)}{\partial \nu_z} - G(z, x) \frac{\partial G(z, y)}{\partial \nu_z}\right] ds_z,$$

где ν_z — внешняя нормаль в точке z на S и на сферах C: $|z-x|=\delta$, C': $|z-y|=\delta$. Эту формулу в силу равенств $G(z, x)=G(z, y)=0$, $z \in S$, можно переписать в виде

$$\int_C \left[G(z, y)\frac{\partial G(z, x)}{\partial \nu_z} - G(z, x)\frac{\partial G(z, y)}{\partial \nu_z}\right] ds_z = \int_{C'} \left[G(z, x)\frac{\partial G(z, y)}{\partial \nu_z} - G(z, y)\frac{\partial G(z, x)}{\partial \nu_z}\right] ds_z.$$

Отсюда с учетом того, что

$$G(z, x)=E(z, x)+g(z, x), \quad G(z, y)=E(z, y)+g(z, y),$$

где $g(z, x)$ и $g(z, y)$ — гармонические функции, в пределе при $\delta \to 0$, как и при выводе формулы (5), получаем $G(x, y)=G(y, x)$, что и требовалось доказать.

Если в равенстве (5) примем, что $u(x)$ — решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа, и вместо $E(x, y)$ возьмем $G(x, \xi)$, то повторением приведенного выше при выводе формулы (5) рассуждения с учетом (10) и (11) получаем

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int_S \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \nu_\xi}\varphi(\xi)\, ds_\xi, \tag{12}$$

где φ — заданная действительная непрерывная функция.

Когда функция Грина известна, формула (12) *дает решение задачи Дирихле в следующей постановке: ищется гармоническая в области D функция $u(x)$, непрерывная в $D \cup S$ и удовлетворяющая краевому условию*

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0), \qquad x_0 \in S, \quad x \in D. \tag{13}$$

Гармоничность представленной формулой (12) функции $u(x)$ следует из гармоничности функции Грина $G(x, \xi)$ по x при $x \neq \xi$. То, что эта функция удовлетворяет и краевому условию (13), требует особого доказательства.

2°. Решение задачи Дирихле для шара. Формула Пуассона. Мы сейчас явно построим функцию Грина, когда D представляет собой шар, и в этом случае покажем, что представленная формулой (12) гармоническая функция действительно удовлетворяет краевому условию (13).

Пусть область D представляет собой шар $|x|<1$, а x и ξ — внутренние точки этого шара. Точка $\xi'=\frac{\xi}{|\xi|^2}$ симметрична точке ξ относительно сферы S: $|x|=1$. Покажем, что *функция Грина* $G(x, \xi)$ *задачи Дирихле для шара* $|x|<1$ *имеет вид*

$$G(x, \xi)=E(x, \xi)-E\left(|x|\xi, \frac{x}{|x|}\right). \tag{14}$$

Действительно, ввиду того, что

$$\left|\,|x|\xi-\frac{x}{|x|}\right|=[|x|^2|\xi|^2-2x\xi+1]^{1/2}=\left|\,|\xi|x-\frac{\xi}{|\xi|}\right|=$$
$$=|\xi|\left|x-\frac{\xi}{|\xi|^2}\right|=|x|\left|\xi-\frac{x}{|x|^2}\right|, \tag{15}$$

функция $g(x, \xi)=-E\left(|x|\xi, \frac{x}{|x|}\right)$ при $|x|<1$, $|\xi|<1$ является гармонической как по x, так и по ξ. А при $|\xi|=1$ имеем

$$|\xi-x|=[|x|^2-2x\xi+1]^{1/2}=\left|\,|\xi|x-\frac{\xi}{|\xi|}\right|=\left|\,|x|\xi-\frac{x}{|x|}\right|. \tag{16}$$

Следовательно, представленная формулой (14) функция $G(x, \xi)$ удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к функции Грина.

Так как при $|\xi|=1$ в силу (16)

$$\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial\nu_\xi}=-\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\xi_i(\xi_i-x_i)}{|\xi-x|^n}-|x|\frac{\xi_i\left(|x|\xi_i-\frac{x_i}{|x|}\right)}{\left|\,|x|\xi-\frac{x}{|x|}\right|^n}\right\}=$$
$$=-\frac{1-|x|^2}{|\xi-x|^n},$$

то формула (12) в рассматриваемом случае запишется следующим образом:

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{1-|x|^2}{|\xi-x|^n}\varphi(\xi)\,ds_\xi. \tag{17}$$

Эта формула носит название формулы Пуассона.

В случае $n=3$ и $n=2$ формула Пуассона в полярных координатах запишется соответственно в виде

$$u(x_1, x_2, x_3)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{1-|x|^2}{(1-2|x|\cos\gamma+|x|^2)^{3/2}}\varphi \sin\vartheta\, d\psi,$$

$$\varphi=\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \xi_1=\sin\vartheta\cos\psi, \quad \xi_2=\sin\vartheta\sin\psi,$$
$$\xi_3=\cos\vartheta, \quad |x|\cos\gamma=x\xi,$$

$$u(x_1, x_2)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|x|^2}{1-2|x|\cos(\vartheta-\psi)+|x|^2}\varphi(\cos\psi, \sin\psi)\, d\psi, \tag{18}$$

$$x_1=|x|\cos\vartheta, \quad x_2=|x|\sin\vartheta, \quad \xi_1=\cos\psi, \quad \xi_2=\sin\psi.$$

Формула (17) была выведена для единичного шара с центром в точке $x=0$. Если $u(x)$ — гармоническая в шаре $|x|<R$ функция, непрерывная в замкнутом шаре $|x|\leqslant R$ и удовлетворяющая краевому условию $\lim\limits_{x\to y} u(x)=\varphi(y)$, $|x|<R$, $|y|=R$, то функция $v(z)=u(Rz)$ будет гармонической в шаре $|z|<1$, непрерывной при $|z|\leqslant 1$ и удовлетворяющей краевому условию

$$\lim_{z\to t} v(z)=\varphi(Rt), \quad |z|<1, \quad |t|=1.$$

Поэтому в силу формулы (17) имеем

$$v(z)=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{1-|z|^2}{|\xi-z|^n}\varphi(R\xi)\, ds_\xi,$$

т. е.

$$u(x)=v\left(\frac{x}{R}\right)=\frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{R^2-|x|^2}{|R\xi-x|^n}R^{n-1}\varphi(R\xi)\, ds_\xi$$

или, после замены $y=R\xi$,

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{|y|=R}\frac{R^2-|x|^2}{|y-x|^n}\varphi(y)\, ds_y. \tag{19}$$

Пусть $u(x)$ — гармоническая в шаре $|x-x_0|<R$ функция, непрерывная вплоть до границы и удовлетворяющая краевому условию $\lim\limits_{x\to y} u(x)=\varphi(y)$, $|x-x_0|<R$, $|y-x_0|=R$. Так как функция $w(z)=u(z+x_0)$ гармонична

в шаре $|z|<R$, непрерывна при $|z|\leqslant R$ и удовлетворяет краевому условию $\lim\limits_{z\to t} w(z)=\varphi(t+x_0)$, $|z|<R$, $|t|=R$, то в силу (19) можем написать

$$w(z)=\frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{|t|=R}\frac{R^2-|z|^2}{|t-z|^n}\varphi(t+x_0)\,ds_t,$$

откуда сразу следует формула Пуассона для шара $|x-$ $-x_0|<R$:

$$u(x)=w(x-x_0)=\frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{|\xi-x_0|=R}\frac{R^2-|x-x_0|^2}{|\xi-x|^n}\varphi(\xi)\,ds_\xi. \qquad (20)$$

При $x=x_0$ из формулы (20) снова получаем формулу (7) о среднем арифметическом.

3°. Проверка краевых условий. Теперь покажем, что *определенная по формуле Пуассона функция* $u(x)$ *удовлетворяет краевому условию* (13) *и, стало быть, эта формула дает решение задачи Дирихле в приведенной выше постановке.*

Ради наглядности рассуждения ограничимся рассмотрением случая $n=2$. Так как $u(x)=1$ является гармонической функцией, удовлетворяющей краевому условию $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=1$, $|x|<1$, где x_0 — произвольная фиксированная точка на окружности $|x|=1$, то для всех точек x в круге $|x|<1$ из формулы (17) получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-|x|^2}{|\xi-x|^2}\,d\psi=1, \qquad \xi_1=\cos\psi, \qquad \xi_2=\sin\psi. \qquad (21)$$

На основании формул (17) и (21) имеем

$$u(x)-\varphi(x_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-|x|^2}{|\xi-x|^2}[\varphi(\xi)-\varphi(x_0)]\,d\psi, \qquad |x|<1. \qquad (22)$$

В силу равномерной непрерывности функции φ на окружности $|x|=1$ для любого наперед заданного $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех ψ и ψ_0, $\xi_1=\cos\psi$, $\xi_2=\sin\psi$, $x_{10}=\cos\psi_0$, $x_{20}=\sin\psi_0$, удовлетворяющих условию $|\psi-\psi_0|<\delta$, имеет место неравенство

$$|\varphi(\xi)-\varphi(x_0)|<\varepsilon. \qquad (23)$$

Перепишем выражение (22) в виде

$$u(x)-\varphi(x_0)=I_1+I_2,$$

где

$$I_1=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\psi_0-\delta}^{\psi_0+\delta}\frac{1-|x|^2}{|\xi-x|^2}[\varphi(\xi)-\varphi(x_0)]\,d\psi,$$

$$I_2=\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{0}^{\psi_0-\delta}+\int\limits_{\psi_0+\delta}^{2\pi}\right)\frac{1-|x|^2}{|\xi-x|^2}[\varphi(\xi)-\varphi(x_0)]\,d\psi.$$

На основании (21) и (23) заключаем, что $|I_1|<\varepsilon$.

После выбора $\delta(\varepsilon)$ возьмем x настолько близко к x_0, чтобы имело место неравенство

$$\left(\int\limits_{0}^{\psi_0-\delta}+\int\limits_{\psi_0+\delta}^{2\pi}\right)\frac{1-|x|^2}{|\xi-x|^2}\,d\psi<\frac{\pi\varepsilon}{M},\qquad M=\max_{0\leqslant\psi\leqslant 2\pi}|\varphi(\xi)|,$$

т. е. $|I_2|<\varepsilon$. Следовательно, $|u(x)-\varphi(x_0)|<2\varepsilon$ и, стало быть,

$$\lim_{x\to x_0}u(x)=\varphi(x_0),\qquad |x|<1,\ |x_0|=1.$$

4°. Решение задачи Дирихле для полупространства. Рассмотрим теперь случай, когда область D совпадает с полупространством $x_n>0$, а от искомого решения задачи Дирихле потребуем, чтобы оно было ограничено. Пусть x и ξ — точки этого полупространства, а $\xi'=(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1},-\xi_n)$ — точка, симметричная точке ξ относительно плоскости $\xi_n=0$. Так как функция $g(x,\xi)=-E(x,\xi')$ при $x_n>0$, $\xi_n>0$ является гармонической как по x, так и по ξ и, кроме того, $E(x,\xi)-E(x,\xi')=0$ при $\xi_n=0$, то

$$G(x,\xi)=E(x,\xi)-E(x,\xi')\tag{24}$$

является функцией Грина для рассматриваемого полупространства.

Будем предполагать, что для искомого решения $u(x)$ задачи Дирихле в рассматриваемом случае справедлива формула (12). Это заведомо так, если для всех $x\in D$ при $|x|\to\infty$

$$|u(x)|\leqslant\frac{A}{|x|^h},\qquad\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\leqslant\frac{A}{|x|^{h+1}},\qquad i=1,\ldots,n,$$

где A и h — положительные постоянные. В соответствии с этим при больших $\delta = \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2\right)^{1/2}$ и заданная на плоскости $y_n = 0$ функция $\varphi(y_1, \ldots, y_{n-1})$ должна удовлетворять условию

$$|\varphi| < \frac{A}{\delta^h}.$$

Подставляя выражение $G(x, \xi)$ из формулы (24) в правую часть формулы (12) и учитывая, что

$$\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} = -\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi_n} = \frac{\xi_n - x_n}{|\xi - x|^n} - \frac{\xi_n + x_n}{|\xi' - x|^n} = -\frac{2x_n}{\left[\sum_{i=1}^{n-1} (\xi_i - x_i)^2 + x_n^2\right]^{n/2}}$$

при $\xi_n = 0$, получаем формулу

$$u(x) = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} x_n \int_{\xi_n = 0} \frac{\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})}{\left[\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \xi_i)^2 + x_n^2\right]^{n/2}} d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1}, \quad (25)$$

дающая решение задачи Дирихле с краевым условием

$$\lim_{x \to y} u(x) = \varphi(y_1, \ldots, y_{n-1}), \quad x_n > 0, \quad y_n = 0, \quad (26)$$

для полупространства $x_n > 0$ и носящую также название **формулы Пуассона**.

Тот факт, что определенная по формуле (25) функция удовлетворяет краевому условию (26), доказывается точно так же, как это было сделано выше в случае задачи Дирихле для круга.

Решение задачи Дирихле для полупространства $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k - b > 0$ редуцируется к рассмотренному случаю, если учесть, что *наряду с $u(x)$ гармонической является и функция $u(\lambda Cx + h)$, где λ — скалярная постоянная, C — постоянная ортогональная матрица, а h — постоянный вектор* (см. пункт 1° § 1 настоящей главы).

5°. Некоторые важнейшие следствия, вытекающие из формулы Пуассона. Теоремы Лиувилля и Гарнака. Из формулы (19) следует справедливость утверждения: *если* *гармоническая в пространстве E_n функция $u(x)$ всюду неотрицательна (неположительна), то она постоянна.*

Действительно, так как при $|x|<R$, $|y|=R$ имеют место неравенства $R-|x|\leqslant|y-x|<R+|x|$ и по условию $u(x)\geqslant 0$, то из формулы (19) в силу (7) следует, что

$$R^{n-2}\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{n-1}}u(0)\leqslant u(x)\leqslant R^{n-2}\frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}}u(0) \qquad (27)$$

для любого $R>0$. Отсюда, произвольно фиксируя точку $x\in E_n$ и затем устремляя R к бесконечности, получаем, что в каждой точке x пространства E_n функция $u(x)=u(0)$.

Из формулы (27) также непосредственно вытекает справедливость следующей теоремы Лиувилля: *если гармоническая в E_n функция $u(x)$ ограничена сверху (снизу), то она постоянна.*

В самом деле, пусть $u(x)\leqslant M$ для всех $x\in E_n$, где M — постоянная. Так как функция $M-u(x)$ гармонична в E_n и неотрицательна, то, как только что было доказано, $M-u(x)=M-u(0)$, т. е. $u(x)=u(0)$.

Теорема Лиувилля позволяет утверждать, что *рассмотренная в предыдущем пункте задача Дирихле для полупространства $x_n>0$ в классе ограниченных функций не может иметь более одного решения.*

Действительно, разность $v(x)=u_1(x)-u_2(x)$ любых двух решений $u_1(x)$ и $u_2(x)$ этой задачи удовлетворяет краевому условию $v(x)=0$ при $x_n=0$. Рассмотрим функцию

$$w(x)=\begin{cases} v(x_1,\ \ldots,\ x_n), & x_n\geqslant 0,\\ -v(x_1,\ \ldots,\ -x_n), & x_n\leqslant 0,\end{cases}$$

которая гармонична как при $x_n>0$, так и при $x_n<0$. Более того, функция $w(x)$ гармонична во всем пространстве E_n, ибо в шаре $|x|<R$ при любом $R>0$ она совпадает с гармонической функцией $w^*(x)$, удовлетворяющей краевому условию $w^*(x)=w(x)$ при $|x|=R$. Так как по условию $w(x)$ ограничена, то в силу теоремы Лиувилля она постоянна. Но $w(x)=0$ при $x_n=0$, т. е. $w(x)=0$ всюду в E_n и, стало быть, $u_1(x)=u_2(x)$.

Пользуясь принципом экстремума для гармонических функций и формулой Пуассона (20), легко можно получить доказательство следующей теоремы Гарнака: *если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *гармонических в области* D *функций* $u_k(x)$, *непрерывных в* $D \cup S$, *равномерно сходится на границе* S *области* D, *то этот ряд равномерно сходится в* $D \cup S$ *и его сумма* $u(x)$ *гармонична в* D.

Действительно, из равномерной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(y)$, $y \in S$, следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех $p \geqslant 1$ имеет место неравенство $\left|\sum_{i=1}^{p} u_{N+i}(x)\right| < \varepsilon$.

Отсюда, ввиду того, что конечная сумма $\sum_{i=1}^{p} u_{N+i}(x)$ гармонична в D и непрерывна в $D \cup S$, в силу принципа экстремума заключаем, что $\left|\sum_{i=1}^{p} u_{N+i}(x)\right| < \varepsilon$ для всех x из $D \cup S$. Последнее неравенство, как известно из курса математического анализа, является условием, необходимым и достаточным для равномерной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ в $D \cup S$.

Пусть x_0 — произвольная точка области D и шар $|y - x_0| < R$ лежит внутри D. Каждую гармоническую функцию $u_k(x)$ в этом шаре можно представить формулой Пуассона (20):

$$u_k(x) = \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{|y-x_0|=R} \frac{R^2 - |x-x_0|^2}{|y-x|^n} u_k(y)\, ds_y.$$

Следовательно, так как равномерно сходящийся ряд можно интегрировать почленно, имеем

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{|y-x_0|=R} \frac{R^2 - |x-x_0|^2}{|y-x|^n} u_k(y)\, ds_y =$$

$$= \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{|y-x_0|=R} \frac{R^2 - |x-x_0|^2}{|y-x|^n} u(y)\, ds_y,$$

откуда и следует гармоничность $u(x)$ в шаре $|x-x_0|<R$. Так как x_0 — произвольная точка области D, то тем самым гармоничность $u(x)$ доказана всюду в D.

§ 3. Потенциал объемных масс

1°. Непрерывность потенциала объемных масс и его производных первого порядка. Функция $u(x)$, определенная по формуле

$$u(x)=\int_D E(x,\ \xi)\mu(\xi)\,d\tau_\xi, \tag{28}$$

в случае сходимости интеграла в правой части этой формулы, называется *потенциалом объемных масс, распределенных по области D с плотностью* μ.

В дальнейшем будем считать, что область D ограничена.

Поскольку $E(x,\ \xi)$ при $x\neq\xi$ является гармонической функцией, потенциал объемных масс $u(x)$ гармоничен, когда точка x лежит вне $D\cup S$, где S — граница области D. Кроме того, при $n>2$ он стремится к нулю при $|x|\to\infty$.

Докажем справедливость следующего утверждения: *если функция μ ограничена и непрерывна в D, то потенциал $u(x)$ объемных масс непрерывен и имеет непрерывные производные первого порядка всюду в E_n, причем*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\int_D \frac{\partial}{\partial x_i}E(x,\ \xi)\mu(\xi)\,d\tau_\xi,\qquad i=1,\ \ldots,\ n. \tag{29}$$

Пусть ε — наперед заданное достаточно малое положительное число. Рассмотрим функцию

$$u_\varepsilon(x)=\int_D E_\varepsilon(x,\ \xi)\mu(\xi)\,d\tau_\xi, \tag{30}$$

где $E_\varepsilon(x,\ \xi)$ — непрерывно дифференцируемая в E_n функция, которая вне замкнутого шара $|\xi-x|\leqslant\varepsilon$ совпадает с $E(x,\ \xi)$. В качестве $E_\varepsilon(x,\ \xi)$ в шаре $|\xi-x|<\varepsilon$ можно брать при $n>2$ (мы здесь ограничимся рассмотрением именно этого случая), например, функцию

$$E_\varepsilon(x,\ \xi)=\frac{1}{2(n-2)\varepsilon^{n-2}}\left[n-(n-2)\frac{|\xi-x|^2}{\varepsilon^2}\right]. \tag{31}$$

Очевидно, что так определенная функция $u_\varepsilon(x)$ непрерывно дифференцируема всюду в E_n. Ввиду того, что в силу (28), (30) и (31) имеет место оценка

$$|u_\varepsilon(x)-u(x)|<$$
$$<\omega_n M\int_0^\varepsilon [E_\varepsilon(x,\ \xi)+E(x,\ \xi)]\,\rho^{n-1}\,d\rho=\omega_n M\frac{n+6}{2(n^2-4)}\varepsilon^2,$$

где $M=\sup\limits_{\xi\in D}|\mu(\xi)|$, при $\varepsilon\to 0$ функция $u_\varepsilon(x)$ стремится к $u(x)$ равномерно относительно x. Отсюда следует, что $u(x)$ непрерывна в E_n.

Далее, так как

$$\frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_i}=\int_D \frac{\partial E_\varepsilon(x,\ \xi)}{\partial x_i}\,\mu(\xi)\,d\tau_\xi,\qquad i=1,\ \ldots,\ n,$$

и несобственный интеграл

$$v_i(x)=\int_D \frac{\partial E(x,\ \xi)}{\partial x_i}\,\mu(\xi)\,d\tau_\xi,\qquad i=1,\ \ldots,\ n,$$

равномерно сходится, то для разности

$$\frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_i}-v_i(x)=\int_D \frac{\partial}{\partial x_i}[E_\varepsilon(x,\ \xi)-E(x,\ \xi)]\,\mu(\xi)\,d\tau_\xi$$

получаем оценку

$$\left|\frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_i}-v_i(x)\right|\leqslant\omega_n M\int_0^\varepsilon\left(\frac{\rho}{\varepsilon^n}+\frac{1}{\rho^{n-1}}\right)\rho^{n-1}\,d\rho=\omega_n M\frac{n+2}{n+1}\varepsilon,$$

равномерную относительно x. Отсюда, как и выше, учитывая непрерывность функции $\dfrac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_i}$, заключаем, что функция $u(x)$ для всех $x\in E_n$ имеет непрерывные частные производные первого порядка, которые могут быть вычислены по формуле (29).

2°. Существование производных второго порядка потенциала объемных масс. Теперь нетрудно показать, что *если плотность* μ *имеет непрерывные частные производные первого порядка, ограниченные в* D, *то потенциал объемных масс* (28) *имеет частные производные второго порядка в* D.

Действительно, формулу (29) в силу равенства $\frac{\partial E(x, \xi)}{\partial x_i} = -\frac{\partial E(x, \xi)}{\partial \xi_i}$ перепишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\int_D \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_i} E(x, \xi)\, d\tau_\xi$$

или, после интегрирования по частям,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\int_S E(x, \xi)\, \mu(\xi) \cos \widehat{\nu_\xi \xi_i}\, ds_\xi + \int_D \frac{\partial \mu}{\partial \xi_i} E(x, \xi)\, d\tau_\xi, \quad (32)$$

где ν_ξ — внешняя нормаль к S в точке ξ.

При $x \in D$ первое слагаемое в правой части (32) имеет непрерывные производные по x_i, которые могут быть получены внесением операции дифференцирования под знак интеграла. Ввиду непрерывности и ограниченности $\frac{\partial \mu}{\partial \xi_i}$ в области D и второе слагаемое в правой части этой формулы имеет непрерывные производные первого порядка

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_D \frac{\partial \mu}{\partial \xi_i} E(x, \xi)\, d\tau_\xi = \int_D \frac{\partial \mu}{\partial \xi_i} \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial x_i}\, d\tau_\xi,$$
$$i = 1, \ldots, n.$$

Тем самым доказано существование непрерывных производных второго порядка у функции $u(x)$ при $x \in D$, причем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = -\int_S \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial x_i} \mu(\xi) \cos \widehat{\nu_\xi \xi_i}\, ds_\xi + \int_D \frac{\partial \mu}{\partial \xi_i} \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial x_i}\, d\tau_\xi =$$
$$= \int_S \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial \xi_i} \mu(\xi) \cos \widehat{\nu_\xi \xi_i}\, ds_\xi - \int_D \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial \xi_i}\, d\tau_\xi.$$

Следовательно, при $x \in D$ имеем

$$\Delta u = \int_S \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial \xi_i} \mu(\xi) \cos \widehat{\nu_\xi \xi_i}\, ds_\xi - \int_D \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mu}{\partial \xi_i} \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial \xi_i}\, d\tau_\xi =$$
$$= \int_S \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} \mu(\xi)\, ds_\xi - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{D_\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mu}{\partial \xi_i} \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial \xi_i}\, d\tau_\xi, \quad (33)$$

где D_ε — часть области D вне замкнутого шара $|\xi - x| \leqslant \varepsilon$.

Так как $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 E(x, \xi)}{\partial \xi_i^2} = 0$ и, стало быть,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mu}{\partial \xi_i} \frac{\partial E}{\partial \xi_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\mu \frac{\partial E}{\partial \xi_i}\right)$$

при $\xi \neq x$, в результате интегрирования по частям и применяя формулы (GO) можем написать

$$\int_{D_\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mu}{\partial \xi_i} \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial \xi_i} d\tau_\xi = \\ = \int_S \mu(\xi) \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} ds_\xi - \int_{|\xi - x| = \varepsilon} \mu(\xi) \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} ds_\xi. \qquad (34)$$

На основании (33) и (34) при $x \in D$ имеем

$$\Delta u = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|\xi - x| = \varepsilon} \mu(\xi) \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} ds_\xi = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|\xi - x| = \varepsilon} \frac{\mu(\xi)\, ds_\xi}{|\xi - x|^{n-1}} = \\ = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|\xi - x| = \varepsilon} \frac{\mu(\xi) - \mu(x)}{\varepsilon^{n-1}} ds_\xi - \mu(x) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|\xi - x| = \varepsilon} \frac{ds_\xi}{\varepsilon^{n-1}} = \\ = -\omega_n \mu(x). \qquad (35)$$

Здесь мы пользовались тем, что граница S области D является гладкой поверхностью. Это требование станет излишним, если функцию $u(x)$ представить в виде

$$u(x) = \int_{D_R} E(x, \xi) \mu(\xi) d\tau_\xi + \int_{|\xi - x| < R} E(x, \xi) \mu(\xi) d\tau_\xi, \\ x \in D,$$

где шар $|\xi - x| \leqslant R$ лежит в области D, а D_R — часть D вне шара $|\xi - x| \leqslant R$. В правой части этого представления первое слагаемое гармонично внутри шара $|\xi - x| < R$, а для второго слагаемого, очевидно, годится приведенное выше рассуждение.

Аналогично выводится формула $\Delta u = -2\pi\mu(x)$, если предположить, что $n = 2$.

3°. Уравнение Пуассона. На основании формулы (35) заключаем, что *функция $u(x)$, определенная формулой*

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_D G(x, \xi) f(\xi) d\tau_\xi, \qquad (36)$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина задачи Дирихле для гармонических функций в области D, а функция $f(x)$ ограничена и имеет непрерывные первые производные, ограниченные в D, является регулярным решением уравнения Пуассона

$$\Delta u = f(x), \quad x \in D. \tag{37}$$

Покажем, что функция $u(x)$ удовлетворяет краевому условию

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = 0, \ x \in D, \ x_0 \in S. \tag{38}$$

Мы не вправе переходить к пределу под знаком интеграла в правой части формулы (36), ибо стремление к нулю функции Грина $G(x, \xi)$ при $x \to x_0 \in S$ не является равномерным относительно $\xi \in D$. Поэтому поступим следующим образом.

Представим функцию $u(x)$ в виде

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int_{D_\varepsilon} G(x, \xi) f(\xi)\, d\tau_\xi = -\frac{1}{\omega_n}\int_{d_\varepsilon} G(x, \xi) f(\xi)\, d\tau_\xi,$$

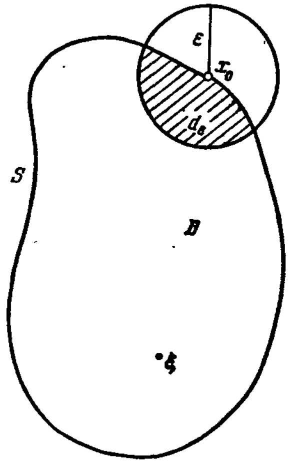

Рис. 4.

где $d_\varepsilon = D \cap \{|x - x_0| < \varepsilon\}$, а D_ε — часть D вне шара $|\xi - x_0| \leqslant \varepsilon$ (рис. 4).

Очевидно, что

$$\lim_{x \to x_0} \int_{D_\varepsilon} G(x, \xi) f(\xi)\, d\tau_\xi = \int_{D_\varepsilon} \lim_{x \to x_0} G(x, \xi) f(\xi)\, d\tau_\xi = 0.$$

Если мы покажем, что для всех $x \in d_\varepsilon$ имеет место оценка

$$\left| \int_{d_\varepsilon} G(x, \xi)\, d\tau_\xi \right| < N(\varepsilon),$$

где $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} N(\varepsilon) = 0$, то в силу ограниченности функции $f(x)$ равенство (38) будет доказано.

Обозначим через S_R сферу $|y - \xi| = R$ с центром в точке $\xi \in D$ настолько большого радиуса, что при любом $\xi \in D$

эта сфера содержит внутри себя область D. Пусть $\Omega(x, \xi) = E(x, \xi) - E(y, \xi)$, $|y - \xi| = R$. Очевидно, что в шаре $|\xi - x| < R$ функция $\Omega(x, \xi) \geqslant 0$, а на границе S области D

$$G(x, \xi) - \Omega(x, \xi) \leqslant 0.$$

Отсюда, учитывая гармоничность $G(x, \xi) - \Omega(x, \xi)$ в области D, в силу принципа экстремума заключаем, что

$$\Omega(x, \xi) \geqslant G(x, \xi) \geqslant 0$$

всюду в области D. Из полученного неравенства непосредственно следует интересующая нас оценка

$$\int\limits_{d_\varepsilon} G(x, \xi)\, d\tau_\xi \leqslant \int\limits_{d_\varepsilon} \Omega(x, \xi)\, d\tau_\xi \leqslant N(\varepsilon), \qquad x \in d_\varepsilon,$$

ибо интеграл от $\Omega(x, \xi)$ по области d_ε равномерно сходится.

Таким образом, *при наличии функции Грина* $G(x, \xi)$ *потенциал* $u(x)$ *объемных масс, определенный по формуле* (36) *в области* D, *дает решение однородной задачи Дирихле* (38) *для уравнения Пуассона* (37).

Подставляя выражение (14) функции Грина $G(x, \xi)$ в правую часть формулы (36), получаем в квадратурах решение однородной задачи Дирихле (38) для уравнения (37) в случае единичного шара.

Пусть теперь вместо однородного краевого условия (38) задано неоднородное краевое условие

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0), \qquad x \in D, \qquad x_0 \in S. \tag{39}$$

Если $v(x)$ — гармоническая в области D функция, удовлетворяющая краевому условию (39), т. е.

$$\lim_{x \to x_0} v(x) = \varphi(x_0), \qquad x \in D, \qquad x_0 \in S,$$

а $u(x)$ — искомое решение неоднородной задачи Дирихле (39) для уравнения (37), то разность $u(x) - v(x) = w(x)$ будет регулярным решением уравнения

$$\Delta w = f(x), \qquad x \in D,$$

удовлетворяющим однородному краевому условию

$$\lim_{x \to x_0} w(x) = 0, \qquad x \in D, \qquad x_0 \in S. \tag{40}$$

Тем самым *задача отыскания решения* $u(x)$ *неоднородной задачи Дирихле* (39) *для уравнения* (37) *приведена* (*редуцирована*) *к отысканию решения* $w(x)$ *этого же уравнения, удовлетворяющего однородному краевому условию* (40).

4°. Формула Гаусса. Ниже придется пользоваться формулой

$$\int_\sigma \frac{\partial}{\partial \nu_x} E(x, \xi)\, ds_x = \begin{cases} -\omega_n, & \xi \in d, \\ -\frac{1}{2}\omega_n, & \xi \in \sigma, \\ 0, & \xi \in C(d \cup \sigma), \end{cases} \tag{41}$$

где d — произвольная конечная область с достаточно гладкой границей σ, а $C(d \cup \sigma)$ — дополнение $d \cup \sigma$ до полного пространства E_n (рис. 5).

Третье из равенств (41) следует из формулы (4) в силу гармоничности $E(x, \xi)$ по x при $x \neq \xi$. Когда же $\xi \in d \cup \sigma$, часть области d вне пересечения d'_ε замкнутого шара $|x - \xi| \leqslant \varepsilon$ с $d \cup \sigma$ обозначим через d_ε. При достаточно малом ε множество d_ε представляет собой область, граница которой состоит: 1) из σ при $\xi \in d$ или из ее части σ_1 вне шара $|x - \xi| < \varepsilon$ при $\xi \in \sigma$; 2) из сферы $|x - \xi| = \varepsilon$ при $\xi \in d$ или из части σ_2 этой сферы, лежащей в d при $\xi \in \sigma$. Опять в силу гармоничности $E(x, \xi)$ при $x \neq \xi$ на основании (4) имеем

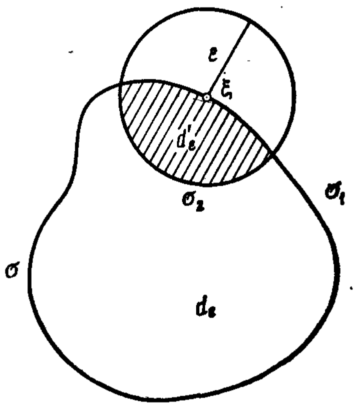

Рис. 5.

$$\int_\sigma \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial \nu_x} ds_x = -\int_{|x-\xi|=\varepsilon} \frac{ds_x}{\varepsilon^{n-1}} = -\omega_n, \quad \xi \in d, \tag{42}$$

и

$$\int_{\sigma_1} \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial \nu_x} ds_x = -\int_{\sigma_2} \frac{ds_x}{\varepsilon^{n-1}}, \quad \xi \in \sigma. \tag{43}$$

Последнее равенство написано с учетом того, что формула (4) остается в силе и в том случае, когда граница области является кусочно-гладкой поверхностью. Равенство (42) представляет собой первое из равенств (41), а равенство (43) в пределе при $\varepsilon \to 0$ переходит во второе из равенств (41).

Для потенциала $u(x)$ объемных масс, распределенных по области D с плотностью μ, на основании (41) непосредственно получается формула Гаусса

$$\int_\sigma \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x} ds_x = -\omega_n \int_{D \cap d} \mu(\xi)\, d\tau_\xi, \tag{44}$$

где d — любая область пространства E_n с достаточно гладкой границей σ.

Действительно, так как

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_x} = \int_D \mu(\xi) \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial \nu_x} d\tau_\xi,$$

то

$$\int_\sigma \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x} ds_x = \int_\sigma ds_x \int_D \mu(\xi) \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial \nu_x} d\tau_\xi =$$
$$= \int_D \mu(\xi)\, d\tau_\xi \int_\sigma \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial \nu_x} ds_x =$$
$$= \int_{D \cap d} \mu(\xi)\, d\tau_\xi \int_\sigma \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial \nu_x} ds_x + \int_{d_1} \mu(\xi)\, d\tau_\xi \int_\sigma \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial \nu_x} ds_x, \tag{45}$$

где d_1 — часть D, лежащая вне $d \cup \sigma$.

В силу (41) второе слагаемое в правой части (45) равно нулю, а первое слагаемое совпадает с правой частью формулы (44).

§ 4. Потенциалы двойного и простого слоя

1°. Определение потенциала двойного слоя. Пусть D — ограниченная область пространства E_n с достаточно гладкой границей S, а μ — заданная на S действительная непрерывная функция.

Потенциалом двойного слоя масс, распределенных по поверхности S с плотностью μ, называется функция

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_S \mu(\xi) \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} ds_\xi. \tag{46}$$

Так как $\xi \in S$, $E(x, \xi)$ при $x \neq \xi$ является гармонической функцией и $\frac{\partial E(x, \xi)}{\partial \nu_\xi}$ стремится к нулю при $|x| \to \infty$, то *потенциал двойного слоя* (46) *во всем пространстве* E_n, *за исключением поверхности* S, *является гармонической функцией, исчезающей при* $|x| \to \infty$.

Для области D и для дополнения $D \cup S$ до всего пространства E_n примем обозначения D^+ и D^- соответственно.

Подынтегральное выражение в правой части формулы (46) при $n = 3$ имеет простой физический смысл.

Действительно, пусть ξ' и ξ'' — точки на нормали ν_ξ к поверхности S в точке ξ, расположенные симметрично относительно ξ, причем $\xi' \in D^+$, $\xi'' \in D^-$. Предположим, что в точках ξ' и ξ'' сосредоточены соответственно электрические заряды $-\mu_0$ и μ_0 такие, что при $|\xi'' - \xi'| \to 0$ все время

$$\mu_0 |\xi'' - \xi'| = \mu(\xi).$$

Потенциал поля, созданного этими зарядами в точке $x \neq \xi$, имеет вид

$$\frac{\mu_0}{|\xi'' - x|} - \frac{\mu_0}{|\xi' - x|}.$$

Предельное расположение зарядов при $|\xi'' - \xi'| \to 0$ носит название *диполя*, а величины μ и ν_ξ — его *момента* и *оси* соответственно.

По определению производной в данном направлении очевидно, что

$$\lim_{|\xi'' - \xi'| \to 0} \mu_0 \left(\frac{1}{|\xi'' - x|} - \frac{1}{|\xi' - x|} \right) =$$
$$= \mu \lim_{|\xi'' - \xi'| \to 0} \frac{1}{|\xi'' - \xi'|} \left(\frac{1}{|\xi'' - x|} - \frac{1}{|\xi' - x|} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} E(x, \xi).$$

Выясним характер поведения функции $u(x)$ при переходе точки x из D^+ в D^-. Ограничимся рассмотрением случая двух независимых переменных, т. е. когда

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_S \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \log |\xi - x| \, ds_\xi, \tag{47}$$

причем будем предполагать, что S является простой замкнутой кривой Жордана с непрерывной кривизной, а μ — дважды непрерывно дифференцируемой функцией.

Дуговые абсциссы точек x^0 и ξ на S (т. е. длины дуг на S, отсчитываемые от фиксированной точки против часовой стрелки до точек x^0 и ξ) обозначим через s и t соответственно.

Покажем, что *потенциал двойного слоя* (47) *имеет смысл и при* $x=x^0$. В самом деле, для функции

$$\pi K(s,\ t)=\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\log|\xi-x^0|$$

имеем

$$\pi K(s,\ t)=\frac{1}{|\xi-x^0|^2}\sum_{i=1}^{2}(\xi_i-x_i^0)\frac{\partial\xi_i}{\partial\nu_\xi}=\frac{\cos\varphi}{|\xi-x^0|}=\frac{\partial}{\partial t}\vartheta(s,\ t), \quad (48)$$

где

$$\cos\varphi=\frac{(\xi-x^0)\,\nu_\xi}{|\xi-x^0|},\qquad \vartheta(s,\ t)=\operatorname{arctg}\frac{\xi_2-x_2^0}{\xi_1-x_1^0}.$$

Легко видеть, что *функция* $K(s,\ t)$ *непрерывна по совокупности переменных* $s,\ t$ *на* S.

Действительно, примем обозначения

$$\alpha(s,\ t)=\frac{\xi_2(t)-x_2^0(s)}{t-s},\qquad \beta(s,\ t)=\frac{\xi_1(t)-x_1^0(s)}{t-s}.$$

Очевидно, что

$$\xi_1(t)-x_1^0(s)=(t-s)\int_0^1 y_1'\,[t+\tau(s-t)]\,d\tau,$$

$$\xi_2(t)-x_2^0(s)=(t-s)\int_0^1 y_2'\,[t+\tau(s-t)]\,d\tau,$$

где

$$y_1=y_1(z),\qquad y_2=y_2(z),\qquad 0\leqslant z\leqslant l,$$

— параметрическая запись уравнений кривой S, а l — длина ее дуги.

В силу (48) имеем

$$K(s,\ t)=\frac{1}{\pi}\,\frac{\beta\alpha_t'-\alpha\beta_t'}{\alpha^2+\beta^2},$$

откуда следует, что

$$\lim_{t\to s}K(s,\ t)=\frac{1}{2\pi}\,\frac{x_1^{0\prime}(s)\,x_2^{0\prime\prime}(s)-x_2^{0\prime}(s)\,x_1^{0\prime\prime}(s)}{x_1^{0\prime 2}+x_2^{0\prime 2}}=\frac{K(s)}{2\pi},$$

где $K(s)$ — кривизна кривой S.

Доопределим $K(s, t)$ при $t=s$ как

$$\lim_{t\to s} K(s, t) = \frac{K(s)}{2\pi}.$$

Учитывая то обстоятельство, что в силу непрерывности кривизны кривой S функции α, β, α'_t, β'_t непрерывны по совокупности переменных, а $\alpha^2+\beta^2\neq 0$ для всех значений s, t на S, убеждаемся в справедливости сформулированного утверждения.

Из непрерывности функции $K(s, t)$ следует, что *потенциал двойного слоя* (47) *при* $x^0\in S$:

$$u(x^0) = -\frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\cos\varphi}{|\xi - x^0|}\mu(\xi)\,ds_\xi \tag{49}$$

имеет смысл и представляет собой непрерывную функцию x^0 *на* S.

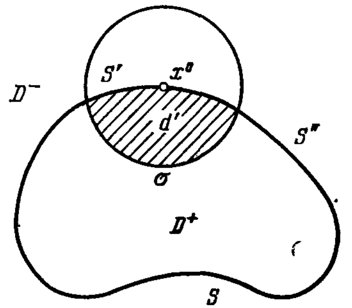

Рис. 6.

2°. Формулы скачка для потенциала двойного слоя и редукция задачи Дирихле к интегральному уравнению. Пусть d — круг $|x-x^0|<\varepsilon$ с центром в точке $x^0\in S$ достаточно малого радиуса ε, а S' — часть S, лежащая внутри d. Обозначим через $v(x)$ функцию, непрерывную вместе со своими производными первого и второго порядка в области $d' = d\cap D^+$ вплоть до ее границы и удовлетворяющую условиям

$$v(x) = \mu(x), \quad \frac{\partial v(x)}{\partial \nu_x} = 0, \quad x\in S'. \tag{50}$$

Пусть σ — часть окружности $|x-x^0| = \varepsilon$, лежащая в области D^+ (рис. 6).

Интегрируя тождество

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\log|\xi - x|\frac{\partial v}{\partial \xi_i} - v\frac{\partial}{\partial\xi_i}\log|\xi - x|\right) = \\ = \log|\xi - x|\,\Delta v - v\Delta\log|\xi - x|$$

по области d' (в случае, когда точка $x\in d'\cup S'$, эту точку следует выделить из $d' \cup S'$ вместе с замкнутым кругом $|\xi - x| \leqslant \delta$ достаточно малого радиуса δ, брать интеграл по оставшейся части области d' и устремить δ к нулю) и учитывая равенства (50), мы можем написать

$$-\int_{S'} \mu \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \log |\xi - x|\, ds_\xi + \int_\sigma \left(\log |\xi - x| \frac{\partial v}{\partial \nu_\xi} - \right.$$

$$\left. - v \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \log |\xi - x| \right) ds_\xi + q(x)\, v(x) = \int_{d'} \log |\xi - x| \Delta v \, d\tau_\xi, \quad (51)$$

где

$$q(x) = \begin{cases} 2\pi, & x \in d', \\ \pi, & x \in S', \\ 0, & x \in D^-. \end{cases} \quad (52)$$

Записывая потенциал двойного слоя (47) в виде

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{S''} \mu \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \log |\xi - x|\, ds_\xi - \frac{1}{2\pi} \int_{S'} \mu \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \log |\xi - x|\, ds_\xi,$$

где S'' — часть S, лежащая вне круга d, и пользуясь равенством (51), получаем

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{S''} \mu \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \log |\xi - x|\, ds_\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \left(v \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \log |\xi - x| - \log |\xi - x| \frac{\partial v}{\partial \nu_\xi} \right) ds_\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{d'} \log |\xi - x| \Delta v \, d\tau_\xi - \frac{1}{2\pi} q(x)\, v(x). \quad (53)$$

Интегральные члены в правой части (53) непрерывны при переходе точки x из области D^+ в область D^- через x^0. С учетом этого обстоятельства и равенств (52) для величин

$$u(x^0), \quad u^+(x^0) = \lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in D^+}} u(x), \quad u^-(x^0) = \lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in D^-}} u(x), \quad x^0 \in S,$$

получаем соотношения

$$u^+(x^0) - u(x^0) = -\frac{1}{2} \mu(x^0), \quad (54)$$

$$u^-(x^0) - u(x^0) = \frac{1}{2} \mu(x^0). \quad (55)$$

Таким образом, мы пришли к заключению, что *потенциал двойного слоя* (47) *при* $x \to x^0 \in S$ *претерпевает разрыв со скачками, выраженными формулами* (54) *и* (55).

Ввиду того, что интегральные члены в правой части (53) непрерывно дифференцируемы при переходе точки x из D^+ в D^- через точку x^0, на основании (50) и (52) заключаем, что *существуют пределы*

$$\lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in D^+}} \frac{\partial u}{\partial \nu_x} = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_{x^0}}\right)^+, \quad \lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in D^-}} \frac{\partial u}{\partial \nu_x} = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_{x^0}}\right)^-,$$

причем

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu_{x^0}}\right)^+ = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_{x^0}}\right)^-.$$

Установленные выше свойства потенциала двойного слоя остаются в силе и при более слабых предположениях относительно гладкости границы S области D и функции μ, например при требовании одной лишь непрерывности μ.

Решение $u(x)$ задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области D^+ с краевым условием

$$u^+(x^0) = g(x^0), \qquad x^0 \in S, \tag{56}$$

в случае непрерывности кривизны кривой S и функции $g(x^0)$ будем искать в виде потенциала двойного слоя (47) с неизвестной плотностью μ.

Для того чтобы представленная формулой (47) гармоническая в области D^+ функция $u(x)$ удовлетворяла краевому условию (56), в силу (48), (49) и (54) мы должны иметь

$$\mu(x) + \int_S K(s, t)\,\mu(t)\,dt = -2g(s). \tag{57}$$

Равенство (57) представляет собой относительно μ линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

Ниже в пункте 1° § 3 главы V будет доказано, что *интегральное уравнение* (57) *имеет единственное решение* μ. Следовательно, мы приходим к заключению, что *потенциал двойного слоя* (47), *плотность* μ *которого удовлетворяет интегральному уравнению* (57), *представляет собой решение задачи Дирихле с краевым условием* (56) *и тем самым существование решения этой задачи доказано.*

3°. Потенциал простого слоя. Задача Неймана. *Потенциалом простого слоя масс, распределенных по поверхности S с плотностью μ, называется функция*

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S E(x,\ \xi)\,\mu(\xi)\,ds_\xi, \tag{58}$$

гармоническая во всех точках x пространства E_n, не лежащих на S, и стремящаяся к нулю, когда $|x|\to\infty$ при $n>2$.

В случае же $n=2$ имеем

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_S \log\frac{1}{|\xi-x|}\,\mu(\xi)\,ds_\xi \tag{59}$$

или

$$u(x)=-\frac{\log|x|}{2\pi}\int\limits_S \mu(\xi)\,ds_\xi+\frac{1}{2\pi}\int\limits_S \log\frac{|x|}{|\xi-x|}\,\mu(\xi)\,ds_\xi,$$

откуда следует, что $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x)=0$ лишь при условии, что

$$\int\limits_S \mu(\xi)\,ds_\xi=0.$$

При изучении свойств потенциала простого слоя ограничимся рассмотрением случая $n=2$ в предположениях непрерывности кривизны кривой S и дважды непрерывной дифференцируемости функции μ.

Повторяя процедуру, использованную выше при выводе формулы (53), с той лишь разницей, что на этот раз $u(x)$ берется по формуле (59), а $v(x)$ вместо (50) удовлетворяет условиям

$$v(x)=0,\quad \frac{\partial}{\partial\nu_x}v(x)=\mu(x),\quad x\in S', \tag{60}$$

получаем

$$\int\limits_{S'} \log|\xi-x|\,\mu(\xi)\,ds_\xi+$$
$$+\int\limits_\sigma\left(\log|\xi-x|\frac{\partial v}{\partial\nu_\xi}-v\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\log|\xi-x|\right)ds_\xi+a(x)\,v(x)=$$
$$=\int\limits_{d'} \log|\xi-x|\,\Delta v\,d\tau_\xi. \tag{61}$$

В силу формулы (61) потенциал простого слоя (59) представим в виде

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S''} \log|\xi - x|\,\mu(\xi)\,ds_\xi -$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma}\left(v\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\log|\xi - x| - \log|\xi - x|\frac{\partial v}{\partial\nu_\xi}\right)ds_\xi +$$
$$+\frac{1}{2\pi}q(x)\,v(x) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{d'}\log|\xi - x|\,\Delta v\,d\tau_\xi. \qquad (62)$$

Из формулы (62) в силу непрерывной дифференцируемости интегральных членов в правой части всюду в E_2 вне дуг S'' и σ с учетом равенств (52) и (60) заключаем, что *при переходе точки x из области D^+ в область D^- через точку $x^0 \in S$ потенциал простого слоя* (59) *остается непрерывным, а его нормальная производная* $\frac{\partial u}{\partial\nu_x}$ *претерпевает разрыв, так что*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^+ - \frac{\partial u(x^0)}{\partial\nu_{x^0}} = \frac{1}{2}\mu(x^0), \qquad (63)$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^- - \frac{\partial u(x^0)}{\partial\nu_{x^0}} = -\frac{1}{2}\mu(x^0). \qquad (64)$$

В формулах (63) и (64)

$$\frac{\partial u(x^0)}{\partial\nu_{x^0}} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \frac{(\xi - x^0)\nu_{x^0}}{|\xi - x^0|^2}\mu(\xi)\,ds_\xi = \frac{1}{2}\int\limits_S K^*(s, t)\,\mu(t)\,dt, \qquad (65)$$

где

$$K^*(s, t) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial s}\operatorname{arctg}\frac{\xi_2 - x_2^0}{\xi_1 - x_1^0}. \qquad (66)$$

Доопределяя $K^*(s, t)$ при $t = s$ как $\lim\limits_{t\to s} K^*(s, t)$, как и в пункте 1° при рассмотрении функции $K(s, t)$, убеждаемся в непрерывности этой функции по совокупности переменных s, t.

Задача Неймана (или *вторая краевая задача*) теории гармонических функций заключается *в требовании определения гармонической в области D^+ функции $u(x)$, непрерывной вместе со своими производными первого порядка в $D^+ \cup S$ и удовлетворяющей краевому условию*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^+ = g(x^0), \qquad x^0 \in S. \qquad (67)$$

Если $u(x)$ и $v(x)$ — два решения задачи Неймана, то для их разности $u(x)-v(x)=w(x)$ в силу (67) будем иметь $\frac{\partial w}{\partial \nu_x}=0$, $x \in S$, откуда в силу доказанного в пункте 1° § 1 настоящей главы свойства 2) гармонических функций заключаем, что $w(x)=\text{const}$, т. е. $v(x)=u(x)+$ $+\text{const}$. Следовательно, *если функция $u(x)$ является решением задачи Неймана, то решением этой задачи является и функция $v(x)=u(x)+C$, где C — произвольная действительная постоянная.*

Из формулы (4), выражающей свойство 3) гармонических функций, в силу (67) следует *необходимость условия*

$$\int_S g(s)\,ds=0 \tag{68}$$

для разрешимости задачи Неймана с краевым условием (67).

Если решение $u(x)$ задачи Неймана будем искать в виде потенциала простого слоя (59) с неизвестной плотностью μ, то в силу (63), (65) и (67) для определения функции μ получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\mu(s)+\int_K K^*(s, t)\,\mu(t)\,dt=2g(s), \tag{69}$$

ядро которого $K^*(s, t)$ дается формулой (66).

Ниже будет доказано, что *выполнение условия* (68) *является не только необходимым, но и достаточным для существования решений задачи Неймана* (см. гл. V, § 3, 1°).

4°. Внешние задачи Дирихле и Неймана. Краевые задачи ставятся не только для ограниченных, но и для бесконечных областей. Так, например, задача Дирихле для введенной в пункте 1° § 4 настоящей главы бесконечной области D^- с границей S состоит *в определении регулярной гармонической в этой области функции $u(x)$, удовлетворяющей краевому условию*

$$u^-(y)=\varphi(y), \quad y \in S, \tag{70}$$

где φ — заданная действительная непрерывная функция.

Краевую задачу в такой постановке, в отличие от задачи Дирихле для конечной области D^+ (внутренней задачи), естественно называть *внешней задачей Дирихле.*

Как уже было сказано в пункте 1° § 1 настоящей главы, регулярность гармонической в D^- функции $u(x)$

означает, что при $|x| \to \infty$ эта функция стремится к нулю не медленнее, чем $|x|^{2-n}$, когда $n > 2$, и стремится к конечному пределу, когда $n = 2$.

В результате *инверсии* $x' = \frac{x}{|x|^2}$ область D^- с границей S переходит в ограниченную область D' с границей S' в пространстве E'_n переменных $x'_1, \ldots, x'_n$. Без ограничения общности можем полагать, что точка $x = 0$ входит в область D^+.

Рассмотрим функцию

$$v(x') = |x'|^{2-n} u\left(\frac{x'}{|x'|^2}\right),$$

гармоническую в области D'. В силу (70) функция $v(x')$ должна удовлетворять краевому условию

$$v(y') = |y'|^{2-n} \varphi\left(\frac{y'}{|y'|^2}\right), \quad y' \in S'. \tag{71}$$

Если $v(x')$ является решением задачи Дирихле в области D', удовлетворяющим краевому условию (71), *то функция*

$$u(x) = |x|^{2-n} v\left(\frac{x}{|x^2|}\right)$$

будет решением внешней задачи Дирихле, удовлетворяющим краевому условию (70).

Из сказанного следует, что *решение внешней задачи Дирихле, когда D^- — внешность замкнутого шара $|x| \leqslant 1$, удовлетворяющее краевому условию* (70) *на сфере $|y| = 1$, дается формулой*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{|\xi|=1} \frac{|x|^2 - 1}{|\xi - n|^n} \varphi(\xi)\, ds_\xi.$$

Очевидно, что в приведенной выше формулировке внешняя задача Дирихле не может иметь более одного решения.

Если искать решение внешней задачи Дирихле в виде потенциала двойного слоя (47), то для определения плотности μ в силу (55) получится интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

Внешняя задача Неймана заключается *в отыскании регулярной гармонической в области D^- функции $u(x)$,* *удовлетворяющей краевому условию*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^{-} = \varphi(x), \qquad x \in S,$$

где ν — *нормаль к* S, *а* φ — *заданная действительная непрерывная функция.*

Внешнюю задачу Неймана нельзя свести к аналогичной задаче для ограниченной области, как это было сделано в случае внешней задачи Дирихле. Однако, если искать решение этой задачи в виде потенциала простого слоя (59), то для определения неизвестной плотности μ в силу (64) получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

§ 5. Некоторые сведения из общей теории линейных эллиптических уравнений второго порядка

1°. Сопряженные операторы. Формула Грина. Заданному в области D пространства E_n линейному дифференциальному оператору второго порядка

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x) u,$$
$$A_{ij} = A_{ji},$$

при наличии частных производных первого порядка у коэффициентов A_{ij} можно придать вид

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} e_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu, \tag{72}$$

где

$$e_i(x) = B_i - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{73}$$

Когда функции $e_i(x)$ имеют частные производные первого порядка, вводится понятие *сопряженного оператора*

$$L^* v = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(e_i v) + Cv. \tag{74}$$

Оператор L называется *самосопряженным*, если равенство $Lu = L^* u$ выполняется тождественно.

В силу (72), (73), (74) очевидно, что *оператор L будет самосопряженным тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} = B_i(x), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

всюду в области D.

При требовании равномерной эллиптичности дифференциального оператора L и достаточной гладкости границы S области D и функций $u(x)$ и $v(x)$ в результате интегрирования тождества

$$vLu - uL^*v = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[A_{ij}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v - \frac{\partial v}{\partial x_i} u\right)\right] + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(e_i uv)$$

по области D в силу формулы (GO) получаем формулу Грина

$$\int_D (vLu - uL^*v)\, d\tau_x = \int_S \left(av\frac{du}{dN} - uQ_\xi v\right) ds_\xi,$$

где

$$Q_\xi v = a\frac{dv}{dN} - bv, \tag{75}$$

N — единичный вектор — *конормаль* в точке $\xi \in S$ с направляющими косинусами

$$\cos\widehat{N\xi_i} = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\cos\widehat{\nu\xi_j}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

ν — внешняя нормаль к S в точке ξ, а

$$a^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\cos\widehat{\xi\nu_j}\right)^2, \quad b = \sum_{i=1}^{n} e_i\cos\widehat{\nu\xi_i}.$$

В силу равномерной эллиптичности оператора L конормаль N ни в одной точке ξ поверхности S не выходит в касательную плоскость и $a \neq 0$.

2°. Существование решений линейного эллиптического уравнения второго порядка. Обозначим через a_{ij} отношение алгебраического дополнения элемента A_{ij} матрицы $\| A_{ij} \|$

к детерминанту $A = \det \| A_{ij} \|$ и введем функцию

$$\sigma(x, \xi) = \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(x)(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j),$$

где x и ξ — точки области D. Без ограничения общности будем считать, что $\sigma(x, \xi) \geqslant 0$.

В силу равномерной эллиптичности оператора L существуют положительные постоянные k_0 и k_1 такие, что

$$k_0 |x - \xi|^2 \leqslant \sigma(x, \xi) \leqslant k_1 |x - \xi|^2.$$

Предположим, что в $D \cup S$ функции A_{ij}, B_i, C имеют непрерывные частные производные третьего и первого порядка соответственно.

При $x \neq \xi$ для частных производных первого и второго порядка функции $\psi(x, \xi)$, определенной формулой

$$\psi(x, \xi) = \begin{cases} \sigma_0(\xi)\, \sigma^{\frac{2-n}{2}}, & n > 2, \\ -\dfrac{1}{2\pi\sqrt{A(\xi)}} \log \sigma, & n = 2 \end{cases} \tag{76}$$

$$\sigma_0 = \left[\omega_n (n-2) \sqrt{A(\xi)}\right]^{-1},$$

имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = P_i(x, \xi) - \sigma_0(\xi)\, \sigma^{-\frac{n}{2}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)(x_j - \xi_j), \quad n > 2, \tag{77}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} = \sigma_0(\xi)\, \sigma^{-\frac{n+2}{2}} \Big[-a_{ij}(x)\, \sigma(x, \xi) +$$
$$+ n \sum_{k, l=1}^{n} a_{ik}(x)\, a_{jl}(x)(x_k - \xi_k)(x_l - \xi_l) \Big] + P_{ij}(x, \xi), \tag{78}$$

где $P_i(x, \xi)$ и $P_{ij}(x, \xi)$ при $|x - \xi| \to 0$ являются бесконечно большими, одинакового порядка с $|x - \xi|^{2-n}$ и $|x - \xi|^{1-n}$ соответственно.

Из (78) следует, что, когда $n > 2$ и $x \neq \xi$,

$$\sum_{i, j=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i, j=1}^{n} A_{ij}(x) P_{ij}(x, \xi). \tag{79}$$

На основании (76), (77), (78) и (79) заключаем, что при $|x - \xi| \to 0$ функция $L\psi(x, \xi)$ обращается в бесконечность как $|x - \xi|^{1-n}$.

Когда $n=2$, считая без ограничения общности, что $a_{ij}=0$, $i \neq j$, $a_{ii}=1$, $i,\ j=1,\ 2$, при $x \neq \xi$ получаем

$$\sum_{i,\ j=1}^{2} A_{ij}(x) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i\, \partial x_j} = 0.$$

Функция

$$w(x) = \int_{D_0} \psi(x,\ \xi)\, \mu(\xi)\, d\tau_\xi,$$

где D_0 — подобласть области D с границей S_0, называется *обобщенным потенциалом объемных масс*, распределенных по области D_0 с плотностью μ.

При требовании непрерывной дифференцируемости $\mu(\xi)$ в $D_0 \cup S_0$ повторением рассуждения пунктов 1°, 2° § 3 настоящей главы заключаем, что

$$Lw(x) = -\mu(x) + \int_{D_0} L\psi(x,\ \xi)\, \mu(\xi)\, d\tau_\xi, \tag{80}$$

где в правой части второе слагаемое является обычным несобственным интегралом.

Будем искать решение $u(x)$ уравнения

$$Lu = f(x) \tag{81}$$

в виде

$$u(x) = \omega(x) + \int_{D_0} \psi(x,\ \xi)\, \mu(\xi)\, d\tau_\xi, \tag{82}$$

где $\omega(x)$ — произвольная действительная функция, непрерывная в $D_0 \cup S_0$ вместе со своими частными производными до третьего порядка, а μ — неизвестная пока действительная функция.

В силу (80) представленная формулой (82) функция $u(x)$ будет решением уравнения (81) тогда и только тогда, когда

$$\mu(x) + \int_{D_0} K(x,\ \xi)\, \mu(\xi)\, d\tau_\xi = F(x), \tag{83}$$

где

$$K(x,\ \xi) = -L\psi(x,\ \xi), \quad F(x) = L\omega(x) - f(x).$$

Равенство (83) относительно неизвестной функции μ представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода, которое, как будет показано в главе V, *по крайней мере в случае области D_0 достаточно малого диаметра всегда имеет решение.*

Поскольку $\omega(x)$ — произвольная функция, тем самым доказано, что *в достаточно малой окрестности каждой точки области своего задания уравнение* (81) *имеет целое семейство регулярных решений.*

Когда $\omega=\psi(x, y)$, правая часть интегрального уравнения (83) при $y=x$ обращается в бесконечность как $|y-x|^{1-n}$, но по замечанию пункта 2° § 2 главы V мы вправе повторить приведенное выше рассуждение и утверждать, что формула (82) дает *элементарное решение* уравнения (81):

$$E(x, y)=\psi(x, y)+\int_{D_0}\psi(x, \xi)\mu(\xi)\,d\tau_\xi.$$

3°. Постановка краевых задач. Пусть $p_i(x)$, $i=1, \ldots, n$, $q(x)$ и $r(x)$ — заданные на границе S области D действительные функции. Широкий класс задач для уравнения (81) охватывается следующей *линейной краевой задачей Пуанкаре: найти регулярное в области D решение $u(x)$ решения* (81), *удовлетворяющее краевому условию*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}+q(x)u(x)=r(x), \qquad x\in S, \tag{84}$$

где под $\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$ и $u(x)$ понимаются предельные значения этих функций на S изнутри области D.

В случае, когда $p_i(x)=0$, $i=1, \ldots, n$, $q(x)\neq 0$, всюду на S, краевое условие (84) можно переписать в виде

$$u(x)=g(x), \tag{85}$$

где

$$g(x)=r(x)/q(x).$$

Задача (81), (85) называется *первой краевой задачей* или *задачей Дирихле.*

Частным случаем задачи Пуанкаре, при $q(x)=0$ на S, является *задача с наклонной производной*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}=r(x), \qquad x\in S. \tag{86}$$

Когда в краевом условии (86) всюду на S

$$p_i(x) = \cos \widehat{Nx_i}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

задача с наклонной производной называется *второй краевой задачей* или *задачей Неймана.*

4°. Принцип экстремума Единственность решения задачи Дирихле. В теории эллиптического уравнения (81) важную роль играет следующий принцип экстремума: *если в области D всюду*

$$C(x) < 0, \tag{87}$$

то регулярное в этой области решение $u(x)$ однородного уравнения

$$Lu = 0 \tag{88}$$

ни в одной точке $x \in D$ не может достигать ни отрицательного относительного минимума, ни положительного относительного максимума.

Допуская, что функция $u(x)$ в точке $x \in D$ достигает отрицательного относительного минимума, мы можем написать

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{89}$$

$$\sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} \lambda_i \lambda_j \geqslant 0, \tag{90}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — произвольные действительные параметры.

Так как положительно определенную форму $\sum\limits_{i, j=1}^{n} A_{ij}\lambda_i\lambda_j$ в точке $x \in D$ всегда можно представить в виде

$$\sum_{i, j=1}^{n} A_{ij}\lambda_i\lambda_j = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} g_{kl}\lambda_l \right)^2,$$

то для коэффициентов A_{ij} справедливо представление

$$A_{ij} = \sum_{s=1}^{n} g_{si} g_{sj}, \qquad i, j = 1, \ldots, n. \tag{91}$$

На основании (90) и (91) имеем

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} = \sum_{i,j,s=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} g_{si}g_{sj} \geqslant 0. \qquad (92)$$

Учитывая то обстоятельство, что $u(x) < 0$, в силу (87), (89), (90) и (92) получаем $Lu > 0$, а это противоречит равенству (88). Полученное противоречие опровергает наше допущение.

Аналогично доказывается, что в точке $x \in D$ решение $u(x)$ уравнения (88) не может достигать положительного относительного максимума.

Из принципа экстремума следует, что *задача Дирихле* (81), (85) *при соблюдении условия* (87) *не может иметь более одного решения.*

Действительно, разность $u_1(x) - u_2(x) = u(x)$ любых двух решений $u_1(x)$ и $u_2(x)$ задачи (81), (85) удовлетворяет условиям

$$Lu = 0, \quad x \in D, \quad u(y) = 0, \quad y \in S.$$

Так как $\max |u(y)| = 0$ на S, то в силу принципа экстремума заключаем, что $u(x) = 0$, т. е. $u_1(x) = u_2(x)$ всюду в D.

Также нетрудно доказать, что *задача Дирихле* (81), (85) *при соблюдении условия*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial e_i}{\partial x_i} - 2C \geqslant 0 \qquad (93)$$

всюду в D не может иметь более одного решения.

В самом деле, для разности $u_1(x) - u_2(x) = u(x)$ любых решений $u_1(x)$ и $u_2(x)$ уравнения (81) имеет место равенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial e_i}{\partial x_i} - 2C\right)u^2 = \\ = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}u\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(e_i u^2).$$

Интегрируя это равенство по области D и применяя формулу (GO), в силу равенства $u(x)=0$, $x \in S$, получаем

$$\int\limits_D \left[\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial e_i}{\partial x_i} - 2C \right) u^2 \right] d\tau_x = 0,$$

откуда на основании положительной определенности формы $\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij}\lambda_i\lambda_j$ и условия (93) заключаем, что $u(x)=0$ всюду в $D \cup S$, т. е. $u_1(x)=u_2(x)$.

5°. Обобщенные потенциалы простого и двойиого слоя. В пункте 2° настоящего параграфа было доказано существование элементарного решения уравнения (81) в области достаточно малого диаметра.

Если коэффициенты уравнения (88) являются заданными во всем пространстве E_n достаточно гладкими функциями, то при соблюдении условий: а) $C(x) \leqslant 0$ в области D, в которой ищется решение этого уравнения, и б) $C(x) < -k^2$ вне некоторой ограниченной области, содержащей область D, при отличном от нуля постоянном k, доказывается, что *уравнение* (88) *имеет главное элементарное решение* $E^*(x, \xi)$, *определенное для всех точек* x, ξ *пространства* E_n. В отличие от рассмотренного в пункте 2° элементарного решения, главное элементарное решение $E^*(x, \xi)$ обладает еще двумя свойствами: α) $E^*(x, \xi)$ относительно ξ при $\xi \neq x$ является решением сопряженного уравнения $L^*E^*(x, \xi)=0$ и β) при $|x-\xi| \to \infty$ функция $E^*(x, \xi)$ и ее частные производные $\frac{\partial E^*}{\partial x_i}$, $i=1, \ldots, n$, ведут себя как $e^{-R|x-\xi|}$, где R — положительное число.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что главным элементарным решением *уравнения Гельмгольца*

$$\Delta u - \lambda^2 u = 0, \qquad \lambda = \text{const} \neq 0,$$

является функция $E^*(x, \xi) = \lambda^{n-2}\varphi_n(\lambda r)$, где $r=|\xi - x|$, а $\varphi_n(r)$ — решение обыкновенного линейного дифференциального уравнения

$$r\varphi_n'' + (n-1)\varphi_n' - r\varphi_n = 0.$$

В частности, при $n=2$ и $n=3$ получаем

$$\varphi_2(r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{e^{rt}\, dt}{\sqrt{t^2-1}}, \qquad \varphi_3(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-r}}{r}$$

соответственно.

Если $u_1(x)$ — регулярное в области D решение неоднородного уравнения (81) с достаточно гладкой ограниченной правой частью $f(x)$ и $u_2(x)$ — *обобщенный потенциал объемных масс* с плотностью $f(\xi)$:

$$u_2(x) = \int_D E(x, \xi) f(\xi)\, d\tau_\xi,$$

то в силу (80) для суммы $u_1(x) + u_2(x) = u(x)$ будем иметь

$$Lu = Lu_1 + Lu_2 = f(x) - f(x) = 0.$$

Следовательно, *в теории уравнения* (81) *без ограничения общности можно полагать, что* $f(x) = 0$ *всюду в области задания этого уравнения.*

Когда коэффициенты уравнеиия (88) являются достаточно гладкими функциями в области D, причем $C(x) \leqslant 0$ всюду в D, то всегда можно доопределить эти коэффициенты вне D с сохранением гладкости так, что вне некоторой области, содержащей D, будет соблюдено условие $C(x) < -k^2$. Следовательно, в этом случае мы можем считать, что *главное элементарное решение уравнения* (88) *существует.*

Функции

$$u(x) = \int_S E^*(x, \xi)\, \mu(\xi)\, ds_\xi \tag{94}$$

и

$$v(x) = \int_S Q_\xi E^*(x, \xi)\, \lambda(\xi)\, ds_\xi, \tag{95}$$

где S — достаточно гладкая поверхность, являющаяся границей области D^+, оператор Q_ξ имеет вид (75), а μ и λ — заданные на S достаточно гладкие действительные функции, называются *обобщенными потенциалами простого и двойного слоя.* Эти потенциалы оба в любой точке x пространства E_n, не лежащей на S, являются регулярными решениями уравнения (88), причем *при переходе точки x из области D^+ в область $D^- = C(D^+ \cup S)$ через границу S они ведут себя точно так же, как гармонические потенциалы простого и двойного слоя.*

Обобщенные потенциалы двойного и простого слоя позволяют редуцировать задачи Дирихле и Неймана для уравнения (88) к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.

ГЛАВА II

СИСТЕМА КОШИ — РИМАНА. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Понятие аналитической функции комплексного переменного

1°. Система Коши — Римана. Система линейных уравнений с частными производными первого порядка с двумя независимыми переменными

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad (CR)$$

как уже было отмечено в пункте 1° § 5 введения, называется *системой Коши — Римана.*

По данной в пункте 4° § 1 введения классификации система

$$A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

где

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{Vmatrix}, \quad u = (u_1,\ u_2),$$

называется эллиптической, если квадратичная форма

$$Q(\lambda_1,\ \lambda_2) = \det\begin{Vmatrix} A_{11}\lambda_1 + B_{11}\lambda_2 & A_{12}\lambda_1 + B_{12}\lambda_2 \\ A_{21}\lambda_1 + B_{21}\lambda_2 & A_{22}\lambda_1 + B_{22}\lambda_2 \end{Vmatrix}$$

положительно (или отрицательно) определена.

Поскольку в случае системы (CR): $u = u_1$, $v = u_2$,

$$A_{11} = A_{22} = -B_{12} = B_{21} = 1, \quad B_{11} = A_{12} = A_{21} = B_{22} = 0,$$

квадратичная форма

$$Q(\lambda_1,\ \lambda_2) = \det\begin{Vmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{Vmatrix} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$$

положительно определена, эта система является эллиптической.

Если $\omega(x,\ y)$ — *произвольная гармоническая функция переменных* x, y, *то пара функций* $u = \frac{\partial\omega}{\partial x}$, $v = -\frac{\partial\omega}{\partial y}$ *является решением системы* (CR).

Действительно, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2\omega}{\partial y\,\partial x}=0.$$

Последнее равенство написано на основании известного утверждения о перестановке смешанных производных $\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2\omega}{\partial y\,\partial x}$.

2°. Понятие аналитической функции. Выражение вида $u(x, y)+iv(x, y)=f(z)$, где $u(x, y)$, $v(x, y)$ — действительные функции действительных переменных x, y, а i — мнимая единица, называется функцией комплексного переменного $z=x+iy$.

Рассматривая действительные переменные x, y как декартовы ортогональные координаты точки (x, y) на евклидовой плоскости E_2, эту точку примем за изображение комплексного переменного $z=x+iy$. Следовательно, область D задания функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ является областью задания функции $f(z)$.

Пользуясь изображением комплексных чисел на сфере Римана и постулируя существование единственной бесконечно удаленной точки ∞, комплексную плоскость вместе с точкой ∞ будем называть *расширенной комплексной плоскостью*.

Функция $w=f(z)$ комплексного переменного каждой точке z из области D ее определения ставит в соответствие вполне определенную точку w на плоскости значений $f(z)$, т. е. эта функция является *однозначной*. Мы ниже всегда будем предполагать, если обратное не будет особо оговорено, что рассматриваемые функции однозначны.

Говорят, что функция $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ имеет своим *пределом* число $w_0=u_0+iv_0$ при $z\to z_0=x_0+iy_0$, $z\neq z_0$, если

$$\lim_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} u(x, y)=u_0, \qquad \lim_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} v(x, y)=v_0.$$

Функция $f(z)$ *непрерывна в точке* $z\in D$, если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в точке $(x, y)\in D$.

Так как для модуля разности $f(z)-f(z_0)$ имеем выражение

$$|f(z)-f(z_0)| = \\ = \{[u(x, y)-u(x_0, y_0)]^2+[v(x, y)-v(x_0, y_0)]^2\}^{1/2},$$

то приведенное выше определение непрерывности равносильно определению: *функция* $f(z)$ *называется непрерывной в точке* $z_0 \in D$, *если для любого наперед заданного* $\varepsilon > 0$ *существует число* $\delta > 0$ *такое, что выполнение неравенства* $|z-z_0| < \delta$ *влечет за собой выполнение неравенства* $|f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$.

Пусть $\Delta w = \Delta u + i\,\Delta v$ — приращение $f(z+\Delta z)-f(z)$, $z+\Delta z$, $z \in D$, функции $f(z)$, соответствующее приращению $\Delta z = z+\Delta z - z$ независимого переменного z.

Если $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = w'(z) = f'(z)$ существует и не зависит от пути стремления Δz к нулю, то функция $f(z)$ называется *моногенной в точке* z.

Приняв сначала $\Delta z = \Delta x$, а потом $\Delta z = i\,\Delta y$, по определению, для моногенной в точке z функции $f(z)$ будем иметь

$$w'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\,\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \\ = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i\,\Delta v}{i\,\Delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y},$$

т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Выполнение равенства (1) является *необходимым условием* моногенности функции $f(z)$ в точке $z = x+iy$. Эти равенства представляют собой систему (CR). Функция $f(z)$, моногенная в каждой точке $z \in D$, называется *аналитической в области* D.

Вспомним теперь, что пара функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ называется регулярным решением системы (CR), если они в области D их задания непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка и удовлетворяют этой системе. Следовательно, *если* $u(x, y)$, $v(x, y)$ — *пара регулярных решений системы* (CR), *то функция* $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *непрерывна в области* D. Более того, из непрерывности $u(x, y)$ и $v(x, y)$ вместе со своими производными первого порядка следует существование полных дифференциалов

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy,$$

т. е.

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + o(\Delta z), \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + o(\Delta z), \end{aligned} \tag{2}$$

где $o(\Delta z)$ обозначает бесконечно малую величину порядка выше Δz.

В силу (2) для $\Delta w = \Delta u + i\Delta v$ имеем выражение

$$\Delta w = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + i \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + i \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + o(\Delta z). \tag{3}$$

На основании (3) и (1) мы можем написать

$$\begin{aligned} w' = f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y - i \frac{\partial u}{\partial y} \Delta x + i \frac{\partial u}{\partial x} \Delta y + o(\Delta z)}{\Delta x + i\,\Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{o(\Delta z)}{\Delta z} \right] = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \tag{4}$$

А это означает, что функция $f(z)$ моногенна в каждой точке $z \in D$.

Таким образом, мы пришли к заключению, что *функция $f(z)$, действительная $u(x, y)$ и мнимая $v(x, y)$ части которой представляют собой регулярное в области D решение системы (CR), является аналитической в этой области.*

Резюмируя все сказанное выше, мы можем утверждать, что *выполнение условий (CR) необходимо, а при требовании непрерывности частных производных первого порядка функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ и достаточно для аналитичности функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в области D.*

Полученное для $w' = f'(z)$ выражение (4) называется *производной аналитической в области D функции $f(z)$*, а главная линейная относительно Δx и Δy часть Δw:

$$\begin{aligned} dw = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + i \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + i \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y = \\ = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Delta z = f'(z)\, \Delta z \end{aligned} \tag{5}$$

— *дифференциалом функции $f(z)$ в точке $z \in D$.*

Так как $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta z}=1$ в случае $f(z)=w=z$, то в силу (5) имеем $dz=\Delta z$. Пользуясь полученным равенством, дифференциал (5) мы можем записать в виде $dw=f'(z)\,dz$, откуда берет свое начало запись

$$\frac{dw}{dz}=f'(z). \tag{6}$$

Вводя обозначения

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{7}$$

системе (CR) можно придать вид

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}w(z)=0. \tag{8}$$

Следовательно, *аналитические функции* $w=f(z)$ *комплексного переменного* z *являются решениями уравнения* (8). Запись (6) производной $f'(z)$ аналитической в области D функции $f(z)$ находится в полном соответствии с обозначениями (7), если учесть равенство (8).

3°. Примеры аналитических функций. Класс аналитических функций обширен. В частности, если $\omega(x, y)$ — *гармоническая в области* D *функция действительных переменных* x, y, *то функция* $w=f(z)=\frac{\partial\omega}{\partial x}-i\frac{\partial\omega}{\partial y}$ *аналитична в области* D.

Пусть $f(z)$ и $\varphi(z)$ — заданные в области D аналитические функции. Так же, как при рассмотрении действительных дифференцируемых функций одного действительного переменного в курсе математического анализа, доказывается, что *наряду с* $f(z)$ *и* $\varphi(z)$ *аналитическими являются и функции* $f(z)\pm\varphi(z)$, $f(z)\cdot\varphi(z)$ *и* $f(z)/\varphi(z)$, $\varphi(z)\neq 0$, *причем*

$$(f\pm\varphi)'=f'\pm\varphi',\quad (f\cdot\varphi)'=f'\varphi+f\varphi',\quad \left(\frac{f}{\varphi}\right)'=\frac{f'\varphi-f\varphi'}{\varphi^2}. \tag{9}$$

Так как $\frac{dz}{dz}=1$, то на основании (9) заключаем, что *полином*

$$P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$$

и дробно-линейная функция

$$w(z)=\frac{az+b}{cz+d},\quad z\neq-\frac{d}{c},\tag{10}$$

где a, b, c, d — постоянные, аналитичны на всей плоскости переменного z и

$$P'_n=\sum_{k=1}^{n}ka_k^{k-1},$$

$$w'=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2},\quad z\neq-\frac{d}{c}.$$

Покажем теперь, что *сумма $S(z)$ степенного ряда*

$$S(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k\tag{11}$$

в круге $|z|<R$, $R>0$, его сходимости является аналитической функцией.

Сначала заметим, что если R — радиус сходимости ряда (11), то радиус сходимости ряда

$$S_0(z)=\sum_{k=1}^{\infty}ka_kz^{k-1}\tag{12}$$

тоже равен R. В самом деле, в силу известной из курса математического анализа формулы Коши — Адамара для радиусов R и R_1 сходимости рядов (11) и (12) имеем

$$R=\frac{1}{l},\quad R_1=\frac{1}{l_1},$$

где

$$l=\overline{\lim_{k\to\infty}}\,|a_k|^{1/k},\quad l_1=\overline{\lim}\,(k\,|a_k|)^{1/(k-1)}.$$

Поэтому справедливость нашего утверждения следует из очевидных равенств

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\,(k\,|a_k|)^{1/(k-1)}=\overline{\lim_{k\to\infty}}\,k^{1/(k-1)}(|a_k|^{1/k})^{k/(k-1)}=\overline{\lim_{k\to\infty}}\,|a_k|^{1/k}.$$

Здесь $\overline{\lim}$ означает верхний предел выражения, перед которым стоит этот знак. Известно, что степенной ряд внутри круга сходимости сходится абсолютно. Из абсолютной сходимости ряда (12) при $|z|<R$ следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует натуральное число N такое, что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k\,|a_k|\,r^{k-1} < \frac{\varepsilon}{3} \tag{13}$$

для всех $n \geqslant N$, если только $r < R$.

Очевидно, что

$$\left|\frac{S(z+\Delta z)-S(z)}{\Delta z} - S_0(z)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\left[(z+\Delta z)^{k-1}+\ldots+z^{k-1}-kz^{k-1}\right]\right| +$$

$$+\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\left[(z+\Delta z)^{k-1}+\ldots+z^{k-1}\right]\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} ka_k z^{k-1}\right|. \tag{14}$$

В предположении, что величина Δz достаточно мала и $|z| < r$, $|z+\Delta z| < r$, в силу непрерывности первого слагаемого в правой части (14) и неравенства (13) имеем

$$\left|\frac{S(z+\Delta z)-S(z)}{\Delta z} - S_0(z)\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

а это означает, что

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{S(z+\Delta z)-S(z)}{\Delta z} = S'(z) = S_0(z).$$

Следовательно, *степенной ряд* (11) *внутри его круга сходимости можно почленно продифференцировать, причем сумма продифференцированного ряда равна производной суммы исходного ряда.*

На основании этого утверждения убеждаемся *в аналитичности элементарных функций* e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{ch} z$ *и* $\operatorname{sh} z$ *всюду на плоскости комплексного переменного* z, *причем*

$$(e^z)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z,$$

$$(\cos z)' = \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)' = \frac{ie^{iz}-ie^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = -\sin z,$$

$$(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)' = \frac{ie^{iz}+ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z,$$

$$(\operatorname{ch} z)' = \left(\frac{e^z+e^{-z}}{2}\right)' = \frac{e^z-e^{-z}}{2} = \operatorname{sh} z,$$

$$(\operatorname{sh} z)' = \left(\frac{e^z-e^{-z}}{2}\right)' = \frac{e^z+e^{-z}}{2} = \operatorname{ch} z.$$

4°. Конформное отображение. Аналитическая в области D функция $w=f(z)$ каждой точке $z\in D$ ставит в соответствие вполне определенную точку на плоскости комплексного переменного w. Если при этом функция $w=f(z)$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между точками области D ее определения и области D_1 ее значений, то говорят, что функция $w=f(z)$ *однолистна*. Соответствие между точками областей D и D_1, осуществляемое функцией $w=f(z)$, называется *отображением области D на область D_1*. Точка $w\in D_1$ называется *образом* точки $z\in D$, а точка z — *прообразом* точки w.

В настоящем пункте будут рассмотрены отображения, осуществляемые аналитическими функциями.

Пусть

$$w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y) \tag{15}$$

— аналитическая в области D функция, удовлетворяющая в точке $z_0\in D$ условию

$$f'(z_0)\neq 0. \tag{16}$$

Это условие равносильно тому, что в точке z_0 якобиан

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=|f'(z)|^2\neq 0.$$

Следовательно, в силу известной теоремы о неявных функциях *в предположении непрерывности первых производных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$* (ниже будет доказано, что действительная и мнимая части аналитической функции имеют производные всех порядков) *система равенств $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$ в некоторой окрестности точки $z_0\in D$ однозначно обращается.* Другими словами, каждая точка $z_0\in D$, в которой выполняется условие (16), обладает окрестностью однолистности функции $w=f(z)$, причем обратная функция $z=f^{-1}(w)$ аналитична в некоторой окрестности точки $w_0=f(z_0)$ и, как легко видеть,

$$\lim_{\Delta w\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta w}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}}=\frac{1}{f'(z)}=[f^{-1}(w)]'.$$

Пусть γ — проходящая через точку z_0 гладкая дуга Жордана с уравнением $z=z(t)$, т. е. $x=x(t)$, $y=y(t)$,

$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. В точке $z_0 = z(t_0)$ кривая γ имеет касательную, т. е.

$$z'(t_0) \neq 0. \tag{17}$$

Образом γ при отображении (15) является проходящая через точку $w_0 = f(z_0)$ дуга $\Gamma = f(\gamma)$, уравнение которой имеет вид $w = f[z(t)]$, причем $w'(t) = f'(z)z'(t)$ и в силу (16) и (17)

$$w'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0) \neq 0. \tag{18}$$

Условие (18) означает в свою очередь, что дуга Γ в точке w_0 имеет касательную.

На основании (18) заключаем, что с точностью до слагаемого $2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$,

$$\arg f'(z_0) = \arg w'(t_0) - \arg z'(t_0), \tag{19}$$

т. е. аргумент $f'(z_0)$ равен углу поворота дуги γ в точке z_0 при отображении (15).

Пусть теперь γ_1 — отличная от γ гладкая дуга Жордана: $z_1 = z_1(\tau)$, $\alpha_1 \leqslant \tau \leqslant \beta_1$, проходящая через точку z_0, а $\Gamma_1 = f(\gamma_1)$ — ее образ с уравнением $w_1 = f[z_1(\tau)]$, $z_1(\tau_0) = z_0$. Повторяя приведенное выше рассуждение, получаем

$$\arg f'(z_0) = \arg w_1'(\tau_0) - \arg z_1'(\tau_0). \tag{20}$$

Из равенств (19) и (20) имеем

$$\arg w'(t_0) - \arg w_1'(\tau_0) = \arg z'(t_0) - \arg z_1'(\tau_0),$$

а это означает, что угол между дугами γ и γ_1 в точке z_0 равен углу между их образами Γ и Γ_1 в точке $w_0 = f(z_0)$.

Другими словами: *в каждой точке z_0, в которой $f'(z_0) \neq 0$, при отображении* (15) *имеет место сохранение* (*консерватизм*) *углов* (как по величине, так и по направлению их отсчета) (рис. 7). Ввиду того, что

$$|dz_0| = \sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}\, dt = ds_0,$$
$$|dw_0| = \sqrt{u_0'^2 + v_0'^2}\, dt = d\sigma_0$$

являются элементами длин дуг γ и Γ в точках z_0 и w_0 соответственно и $\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=z_0} = f'(z_0)$, имеем

$$|f'(z_0)| = \frac{|dw_0|}{|dz_0|} = \frac{d\sigma_0}{ds_0},$$

т. е. *модуль производной аналитической функции в точке* z_0 *при выполнении условия* (16) *совпадает с искажением масштаба (элемента длины) при отображении* (15) *и это искажение одно и то же по всем направлениям, выходящим из точки* z_0.

Взаимно однозначное отображение (15) области D плоскости z на область D_1 плоскости w, при котором в каждой точке z_0 имеют место консерватизм углов и постоянство искажения масштаба, называется *конформным*.

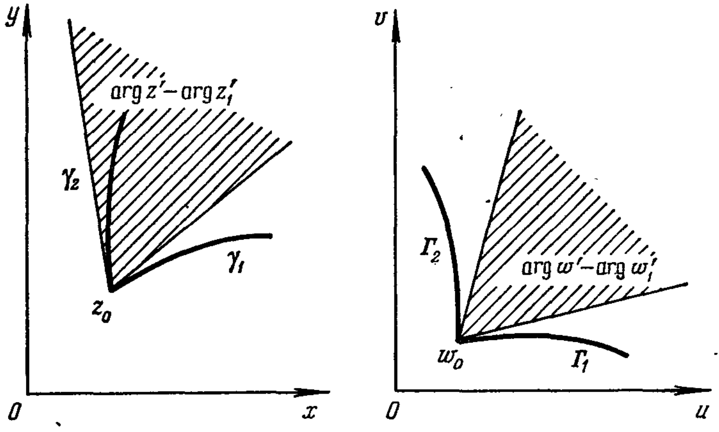

Рис. 7.

На основании приведенного выше рассуждения заключаем, что *отображение, осуществляемое аналитической функцией* $w = f(z)$, *является конформным в достаточно малой окрестности каждой точки* $z \in D$, *в которой* $f'(z) \neq 0$.

В теории конформных отображений центральное место занимают следующие четыре утверждения, доказательство которых не предусмотрено в программе, по которой составлен настоящий курс лекций.

Теорема о сохранении области: *производная* $f'(z)$ *однолистной аналитической в области* D *функции* $f(z)$ *нигде в нуль не обращается, причем эта функция область своего задания конформно отображает на определенную область* D_1 *плоскости переменного* w, *а обратная функция* $z = f^{-1}(w)$ *аналитична в* D_1.

Повторением известного из курса математического анализа рассуждения о дифференцируемости сложной функции приходим к заключению, что *если аналитическая в области D функция $w=f(z)$ конформно отображает область D на область D_1 плоскости w и функция $\zeta=\varphi(w)$ аналитична в области D_1, то сложная функция $\zeta=\varphi[f(z)]$ аналитична в области D, причем*

$$\frac{d\zeta}{dz}=\varphi'[f(z)]f'(z).$$

Теорема Римана: *для каждой односвязной области D плоскости комплексного переменного z, граница которой состоит более чем из одной точки, существует аналитическая функция $w=f(z)$, отображающая конформно эту область на внутренность единичного круга D_1 плоскости w, причем функция $f(z)$ определяется единственным образом, если потребовать, чтобы она заданную точку $z_0 \in D$ и выходящее из нее заданное направление переводила в заданную точку $w_0 \in D_1$ и в выходящее из нее заданное направление.*

Теорема о соответствии границ: *при конформном отображении $w=f(z)$ друг на друга областей D и D_1, ограниченных замкнутыми жордановыми кривыми Γ и Γ_1, функция $w=f(z)$ осуществляет взаимно однозначное и непрерывное соответствие между $D \cup \Gamma$ и $D_1 \cup \Gamma_1$ с сохранением направления обхода на Γ и Γ_1.*

Теорема о взаимно однозначном соответствии: *если границы Γ и Γ_1 односвязных областей D и D_1 являются замкнутыми кусочно-гладкими кривыми Жордана и аналитическая в D функция $w=f(z)$ взаимно однозначно и непрерывно отображает Γ на Γ_1 с сохранением направления обхода, то эта функция конформно отображает область D на область D_1.*

5°. Конформные отображения, осуществляемые некоторыми элементарными функциями, и обращение этих функций. Понятие римановой поверхности. Как уже было отмечено в пункте 3° настоящего параграфа, дробно-линейная функция (10) аналитична на плоскости комплексного переменного z всюду, кроме точки $z=-\frac{d}{c}$.

Легко видеть, что *необходимое и достаточное условие однолистности отличной от постоянной дробно-линейной* *функции* (10) *заключается в том, что*

$$ad - bc \neq 0. \tag{21}$$

В самом деле, при рассмотрении дробно-линейной функции (10) случай одновременного обращения в нуль постоянных c и d исключается. Во всех остальных случаях нарушение условия (21) означает, что функция w постоянна, что опять исключается. При отображении (10) точки $z = -\frac{d}{c}$, $w = \infty$ и $z = \infty$, $w = \frac{a}{c}$ находятся во взаимно однозначном соответствии. При различных же значениях $z_1 \neq -\frac{d}{c}$, $z_2 \neq -\frac{d}{c}$ переменного z для разности между соответствующими значениями w_1 и w_2 функции w в силу (10) имеем

$$w_2 - w_1 = \frac{(ad - bc)(z_2 - z_1)}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)}.$$

Отсюда следует, что выполнение условия (21) обеспечивает однолистность отображения (10) на расширенной плоскости комплексного переменного z, причем

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

В частности, при $c = 0$, $d = 1$ из (21) получается условие $a \neq 0$, обеспечивающее однолистность линейной функции $w = az + b$, обратной которой является

$$z = \frac{w}{a} - \frac{b}{a}.$$

В случае действительных a, b, c, d, удовлетворяющих условию (21), дробно-линейная функция (10) взаимно однозначно отображает действительную ось $\operatorname{Im} z = 0$ на действительную ось $\operatorname{Im} w = 0$ с сохранением направления обхода при $ad - bc > 0$ и с противоположным направлением обхода при $ad - bc < 0$, ибо при действительном z в силу формулы

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

в первом случае $\frac{dw}{dz} > 0$, а во втором $\frac{dw}{dz} < 0$. Отсюда в силу теоремы о взаимно однозначном соответствии заключаем, что *в рассматриваемом случае дробно-линейная функ-*

ция (10) *конформно отображает верхнюю полуплоскость* z^+: $\operatorname{Im} z > 0$ (*нижнюю полуплоскость* z^-: $\operatorname{Im} z < 0$) *на верхнюю полуплоскость* w^+: $\operatorname{Im} w > 0$ (*нижнюю полуплоскость* w^-: $\operatorname{Im} w < 0$) *при* $ad - bc > 0$ *и верхнюю полуплоскость* z^+ (*нижнюю полуплоскость* z^-) *на нижнюю полуплоскость* w^- (*верхнюю полуплоскость* w^+) *при* $ad - bc < 0$.

Дробно-линейная функция

$$w = e^{i\theta}\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}, \tag{22}$$

где θ — действительная, а z_0 — комплексная постоянные, $\operatorname{Im} z_0 > 0$, обладает тем свойством, что

$$|w| = |e^{i\theta}|\left|\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{|z - \bar{z}_0|} = 1$$

при $\operatorname{Im} z = 0$ и что эта функция точке $z = z_0$ ставит в соответствие точку $w = 0$. То есть определенная по формуле (22) функция w действительную ось $\operatorname{Im} z = 0$ взаимно однозначно переводит в окружность $|w| = 1$ и, следовательно, в силу теоремы о взаимно однозначном соответствии *эта функция конформно отображает верхнюю полуплоскость* z^+ (*нижнюю полуплоскость* z^-) *на внутренность круга* $|w| < 1$ (*на внешность круга* $|w| \leqslant 1$). *Когда же* $\operatorname{Im} z_0 < 0$, *определенная формулой* (22) *функция* w *полуплоскость* z^+ (z^-) *отображает конформно на внешность круга* $|w| \leqslant 1$ (*на внутренность круга* $|w| < 1$).

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что *при отображении* (22) *симметричным относительно действительной оси* $\operatorname{Im} z = 0$ *точкам* z *и* $\bar{z}$ *соответствуют симметричные относительно окружности* $|w| = 1$ *точки* w *и* $w_* = \frac{1}{\bar{w}}$.

Рассмотрим теперь дробно-линейную функцию

$$w = e^{i\theta}\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \quad |z_0| < 1. \tag{23}$$

Так как при $|z| = 1$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ имеем

$$|w| = |e^{i\theta}|\left|\frac{e^{i\varphi} - z_0}{1 - \bar{z}_0 e^{i\varphi}}\right| = \left|\frac{e^{i\varphi} - z_0}{e^{-i\varphi} - \bar{z}_0}\right| = 1, \qquad z = e^{i\varphi},$$

то повторением приведенного выше рассуждения убеждаемся в том, что *функция* (23) *конформно отображает круг* $|z| < 1$ *на круг* $|w| < 1$.

Если $|z_0|>1$, *то* (23) *дает конформное отображение внешности круга* $|z|\leqslant 1$ *на внутренность круга* $|w|<1$.

Каждая из рассмотренных выше дробно-линейных функций, отображающих конформно соответственно верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$, верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ на круг $|w|<1$ и круг $|z|<1$ на круг $|w|<1$, содержит по три действительных параметра, которые единственным образом определяются при соблюдении одного из следующих условий: 1) три заданные граничные точки z_1, z_2, z_3 переходят в три заданные граничные точки w_1, w_2, w_3, 2) внутренняя z_1 и граничная z_2 точки переходят во внутреннюю w_1 и граничную w_2 точки и 3) внутренняя точка z_1 и выходящее из нее направление переходят во внутреннюю точку w_1 и выходящее из нее направление.

Областью однолистности степенной функции

$$w=z^n, \tag{24}$$

где n — *натуральное число, является любой угол* D *с вершиной в точке* $z=0$ *раствора* $\frac{2\pi}{n}$. В самом деле, для двух различных значений $z_1=re^{i\varphi_1}$, $z_2=re^{i\varphi_2}$ независимого переменного z имеем $w_1=r^n e^{in\varphi_1}$, $w_2=r^n e^{in\varphi_2}$. Отсюда получаем $w_2-w_1=r^n\left(e^{in\varphi_2}-e^{in\varphi_1}\right)=r^n e^{in\varphi_1}\left(e^{in(\varphi_2-\varphi_1)}-1\right)\neq 0$, если только $n(\varphi_2-\varphi_1)\neq 2\pi k$, $k=0, \pm 1, \ldots$, т. е. при $|\varphi_2-\varphi_1|<\frac{2\pi}{n}$ имеем $w_2\neq w_1$. Внутри угла D функция $z=f^{-1}(w)$, обратная w, обозначается в виде

$$z=\sqrt[n]{w}=w^{\frac{1}{n}}, \tag{25}$$

причем

$$\frac{dz}{dw}=\frac{1}{\frac{dw}{dz}}=\frac{1}{nz^{n-1}}=\frac{1}{n}w^{\frac{1}{n}-1}.$$

Так как определенная формулой (24) функция w лучи $\arg z=\varphi$ переводит в лучи $\arg w=n\varphi$, в частности луч $\arg z=\frac{2k\pi}{n}$, $k\geqslant 0$, — в положительную часть действительной оси $\operatorname{Im} w=0$ и луч $\arg z=\frac{2(k+1)\pi}{n}$ — снова в положительную часть действительной оси $\operatorname{Im} w=0$, то эта функция угол $\frac{2k\pi}{n} < \arg z < \frac{2(k+1)\pi}{n}$ конформно отображает на плоскость w, разрезанную вдоль действительной полуоси: $0 \leqslant u < \infty$.

В обозначениях $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\psi}$ из (24) получаем $\rho e^{i\psi} = r^n e^{in\varphi}$ или $r^n = \rho$, $n\varphi = \psi + 2k\pi$, т. е.

$$r = \rho^{\frac{1}{n}}, \quad \varphi = \frac{\psi + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, \pm 1, \ldots, \ 0 < \psi < 2\pi.$$

Итак, в каждом из углов D_k: $\frac{2k\pi}{n} < \arg z < \frac{2(k+1)\pi}{n}$, $k = 0, \ldots, n-1$, для обратной функции (25) имеем

$$z_k = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\psi + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, \ldots, n-1. \tag{26}$$

Рассматривать каждую из величин z_k как отдельную функцию переменного w нецелесообразно по той простой причине, что, например, в области D: $\frac{\pi}{n} < \arg z < \frac{3\pi}{n}$ обратная функция $z = w^{\frac{1}{n}}$ при $\frac{\pi}{n} < \arg z < \frac{2\pi}{n}$ совпадает с z_0, а при $\frac{2\pi}{n} < \arg z < \frac{3\pi}{n}$ — с z_1. Каждую из z_k, $k = 0, \ldots, n-1$, принято называть *ветвью многозначной функции* $z = w^{1/n}$.

Следовательно, *обратная функция* (25) *не является однозначной*. Когда точка z пробегает плоскость z один раз, функция w пробегает n раз плоскость w. Поэтому говорят, что функция (24) является *n-листной*, а определенная формулой (26) обратная функция — *n-значной*.

Отображение, осуществляемое многолистной функцией, можно истолковать как взаимно однозначное отображение области определения этой функции на так называемую *риманову поверхность*. Проиллюстрируем сказанное на примере функции

$$w = z^2. \tag{27}$$

С этой целью рассмотрим два экземпляра E^+ и E^- плоскости w, разрезанной вдоль положительной части действительной оси. Когда z пробегает полуплоскость z^+, то w пробегает E^+. Когда z переходит из z^+ в z^- через отрицательную часть действительной оси $\operatorname{Im} z = 0$, то w переходит из нижнего края разреза E^+ на верхний край разреза E^-. Склеим нижний край разреза E^+ с верхним краем разреза E^-. Далее, когда z пробегает z^- и подходит к положительной части действительной оси, то w пробегает всю E^- и подходит к нижнему краю разреза E^-. Идентифицируя нижний край разреза E^- с верхним краем разреза E^+ (склеивать их уже не удастся), получим *двулистную риманову поверхность*, на которую функция (27) взаимно однозначно отображает плоскость z (рис. 8).

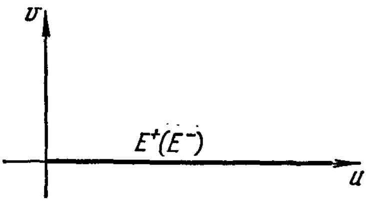

Рис. 8.

Соотношение (27) осуществляет взаимно однозначное соответствие между расширенной плоскостью комплексного переменного z и римановой поверхностью функции $z = w^{1/2}$, которое является конформным всюду, кроме точек $z = 0$ и $z = \infty$. Соответствующие $z = 0$ и $z = \infty$ точки $w = 0$ и $w = \infty$ обладают тем свойством, что при обходе вокруг них против часовой стрелки один раз, исходя из фиксированной точки w, по возвращении к этой же точке происходит переход от одной ветви z_0 на другую ветвь z_1. По этой причине точки $w = 0$ и $w = \infty$ принято называть *точками ветвления* функции $z = w^{1/2}$.

Аналогично вводится понятие точек ветвления функции $z = w^{1/n}$. Ими являются точки $w = 0$, $w = \infty$.

Областью однолистности экспоненциальной функции

$$w = e^z \tag{28}$$

является любая полоса D ширины 2π, параллельная действительной оси $\operatorname{Im} z = 0$. Это следует из того, что для точек z_1 и z_2, $z_1 \neq z_2$, равенство $e^{z_1} = e^{z_2}$ возможно лишь при $z_2 - z_1 = 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

Функция $z = f^{-1}(w)$, обратная функции (28) в полосе D, называется *логарифмической функцией*; она записывается в виде

$$z = \log w, \tag{29}$$

причем

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\frac{dw}{dz}} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w}.$$

Из равенства $w = u + iv = \rho e^{i\psi} = e^z = e^x e^{iy}$ находим, что $\rho = e^x$, $iy = i\psi + 2k\pi i$, т. е. $x = \log \rho$, $y = \psi + 2k\pi$. Следовательно, в каждой полосе D_k: $2k\pi < \operatorname{Im} z < 2(k+1)\pi$ для функции (29) имеем

$$z_k = \log|w| + i\arg w + 2k\pi i,$$
$$0 \leqslant \arg w < 2\pi, \quad k = 0, \pm 1, \ldots$$

Значение $z_0 = \log|w| + i\arg w$, $0 \leqslant \arg w < 2\pi$, называется *главным значением* логарифмической функции (29). Так как функция (28) прямые $\operatorname{Im} z = \mathrm{const}$ переводит в лучи $\arg w = \mathrm{const}$, то эта функция каждую из полос D_k, $k = 0, \pm 1, \ldots$, конформно отображает на разрезанную вдоль неотрицательной части действительной оси плоскость w. Следовательно, *экспоненциальная функция* (28) *является бесконечнолистной, а логарифмическая функция* (29) — *бесконечнозначной.*

Логарифмическая функция позволяет определить степенную функцию $w = z^\alpha$ при любом показателе α как $w = e^{\log z^\alpha} = e^{\alpha \log z}$, а показательную функцию $w = a^z$ как $w = e^{\log a^z} = e^{z \log a}$.

Чтобы получить определение функции $z = \arcsin w$, обратной функции

$$w = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

запишем это равенство в виде квадратного уравнения относительно e^{iz}:

$$e^{2iz} - 2iwe^{iz} - 1 = 0,$$

решением которого является функция

$$e^{iz} = iw \pm \sqrt{1 - w^2}.$$

Отсюда ввиду того, что $\log e^{iz} = iz = \log\left(iw \pm \sqrt{1 - w^2}\right)$, находим

$$z = \arcsin w = \frac{1}{i}\log\left(iw \pm \sqrt{1 - w^2}\right),$$

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\frac{dw}{dz}} = \frac{1}{\cos z} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 z}} = \frac{1}{\sqrt{1 - w^2}}.$$

§ 2. Комплексное интегрирование

1°. Понятие комплексного интегрирования. Пусть S — кусочно-гладкая, замкнутая или разомкнутая конечная кривая Жордана, а $f(\zeta)=u(\xi, \eta)+iv(\xi, \eta)$ — заданная на ней непрерывная функция переменного $\zeta=\xi+i\eta$.

Так как криволинейные интегралы

$$\int_S u\,d\xi - v\,d\eta, \quad \int_S u\,d\eta + v\,d\xi \tag{30}$$

существуют и

$$f(\zeta)\,d\zeta=(u+iv)(d\xi+i\,d\eta)=u\,d\xi-v\,d\eta+i(u\,d\eta+v\,d\xi),$$

то выражение вида

$$\int_S u\,d\xi - v\,d\eta + i\int_S u\,d\eta + v\,d\xi = \int_S f(\zeta)\,d\zeta \tag{31}$$

естественно называть *комплексным интегралом по S от функции $f(\zeta)$*.

Когда кривая S замкнута, направление обхода движения точки ζ при интегрировании по S называется *положительным*, если при этом обходе конечная область D, ограниченная контуром S, остается слева. Обратное направление обхода называется *отрицательным*, и при таком обходе пишем

$$\int_{S^-} f(\zeta)\,d\zeta = -\int_S f(\zeta)\,d\zeta. \tag{32}$$

На разомкнутой кривой S положительное направление обхода соответствует возрастанию действительного параметра t в записи $\zeta=\zeta(t)$ уравнения кривой S.

Приведенные ниже основные свойства интеграла (31) являются непосредственными следствиями соответствующих свойств действительных криволинейных интегралов (30).

1) Если $f_k(\zeta)$ — заданные на S непрерывные функции, а c_k — заданные постоянные, то

$$\int_S \sum_{k=1}^{m} c_k f_k(\zeta)\,d\zeta = \sum_{k=1}^{m} c_k \int_S f_k(\zeta)\,d\zeta. \tag{33}$$

2) Если кривая S состоит из m дуг $S_1, \ldots, S_m$, то

$$\int_S f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{k=1}^{m} \int_{S_k} f(\zeta)\,d\zeta, \tag{34}$$

причем предполагается, что интегрирование по каждой S_k происходит в направлении, совпадающем с направлением интегрирования на S.

Когда S представляет собой совокупность попарно непересекающихся замкнутых кривых $S_0, S_1, \ldots, S_m$, составляющих границу $(m+1)$-связной ограниченной области D, причем $S_1, \ldots, S_m$ лежат внутри конечной области D_0 с границей S_0, то (рис. 9)

$$\int_S f(\zeta)\,d\zeta = \int_{S_0} f(\zeta)\,d\zeta - \sum_{k=1}^{m} \int_{S_k} f(\zeta)\,d\zeta. \tag{35}$$

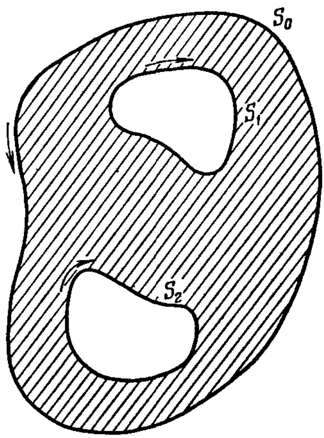

Рис. 9.

3) Наряду с непрерывной функцией $f(\zeta)$ интегрируема и функция $|f(\zeta)|$, причем

$$\left|\int_S f(\zeta)\,d\zeta\right| \leqslant \int_S |f(\zeta)|\,|d\zeta| \leqslant l \max_{\zeta\in S} |f(\zeta)|, \tag{36}$$

где l — длина S.

4) Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(\zeta)$ (последовательность $\{f_k(\zeta)\}$) заданных на S непрерывных функций $f_k(\zeta)$ равномерно сходится на S, то сумма $f(\zeta)$ этого ряда непрерывна (предел этой последовательности непрерывен) на S и

$$\int_S \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\zeta)\,d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \int_S f_k(\zeta)\,d\zeta \tag{37}$$

$$\left(\lim_{k\to\infty} \int_S f_k(\zeta)\,d\zeta = \int_S f(\zeta)\,d\zeta\right). \tag{38}$$

5) При комплексном интегрировании (31) замена переменного интегрирования производится по обычным правилам замены переменного в действительных криволинейных интегралах в левой части формулы (31).

2°. **Теорема Коши.** *Если функция* $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ *аналитична в ограниченной области* D *с кусочно-гладким контуром* S *и функции* $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ *непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в* $D\cup S$, *то*

$$\int_S f(\zeta)\,d\zeta=0. \tag{39}$$

В самом деле, преобразуя криволинейные интегралы (30) по формуле (GO), получаем

$$\int_S f(\zeta)\,d\zeta=-\int_D\left[\frac{\partial v}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}+i\left(\frac{\partial v}{\partial\eta}-\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\right]d\xi\,d\eta,$$

откуда ввиду того, что функции $u(\xi, \eta)$ и $v(\xi, \eta)$ в области D удовлетворяют системе (CR), следует справедливость равенства (39).

Заметим (этим замечанием мы ниже будем пользоваться), что *теорема Коши остается в силе и при более общих предположениях относительно* S *и* $f(\zeta)$. В частности, равенство (39) верно и в тех случаях, когда от аналитической в области D функции $f(z)$ требуется, чтобы она была лишь *непрерывна* в $D\cup S$.

Из теоремы Коши непосредственно следует, что *если функция* $f(z)$ *аналитична в односвязной области* D *и точки* z_0, $z\in D$, *то*

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta \tag{40}$$

один и тот же по всем кривым, соединяющим z_0 *и* z *и лежащим в* D, *т. е. интеграл* (40) *не зависит от пути интегрирования* (интеграл (40) берется по направлению движения ζ от z_0 к z).

Действительно, пусть S и S_1 — две кривые, лежащие в D и соединяющие точки z_0 и z. Так как в силу формул (32) и (39) имеем

$$\int_{S_1^-} f(\zeta)\,d\zeta = -\int_{S_1} f(\zeta)\,d\zeta,$$

$$\int_S f(\zeta)\,d\zeta + \int_{S_1^-} f(\zeta)\,d\zeta = \int_S f(\zeta)\,d\zeta - \int_{S_1} f(\zeta)\,d\zeta = 0,$$

то

$$\int_S f(\zeta)\,d\zeta = \int_{S_1} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Если S — окружность $|\zeta| = R$, то для целых показателей n

$$\int_{|\zeta|=R} \zeta^n\,d\zeta = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases} \tag{41}$$

В самом деле,

$$\int_{|\zeta|=R} \zeta^n\,d\zeta = \int_0^{2\pi} (Re^{i\varphi})^n\, iRe^{i\varphi}\,d\varphi = iR^{n+1}\int_0^{2\pi} \cos(n+1)\varphi\,d\varphi - $$
$$- R^{n+1}\int_0^{2\pi} \sin(n+1)\varphi\,d\varphi = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$$

Пусть теперь D — ограниченная область с кусочно-гладкой границей S и рассмотрим

$$\int_S \zeta^n\,d\zeta,$$

где n — целое число.

Когда $n \geqslant 0$ независимо от того, принадлежит или не принадлежит $D \cup S$ точка $z = 0$, и когда $n < 0$ при условии, что точка $z = 0$ не принадлежит $D \cup S$, в силу аналитичности функции z^n на основании (39) имеем

$$\int_S \zeta^n\,d\zeta = 0. \tag{42}$$

Если $n < 0$ и точка $z = 0 \in D$, то, удаляя эту точку из D вместе с замкнутым кругом $|z| \leqslant \varepsilon$ достаточно малого радиуса ε, лежащим в D, в силу формул (36), (39) и (41) мы можем написать

$$\int_S \zeta^n\,d\zeta = \int_{|\zeta|=\varepsilon} \zeta^n\,d\zeta = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases} \tag{43}$$

Из (42) и (43) следует, что для всех целых показателей $n \neq -1$ интеграл

$$\int_{z_0}^{z} \zeta^n \, d\zeta \tag{44}$$

один и тот же по всем кривым, соединяющим точки z_0 и z и не проходящим через точку $z=0$ при $n<-1$.

Для того чтобы вычислить интеграл (44) при $n \geqslant 0$, выберем в качестве пути интегрирования прямолинейный отрезок $\zeta = z_0 + (z-z_0)\,t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. В силу (31) и (33) имеем

$$\int_{z_0}^{z} \zeta^n \, d\zeta = \int_0^1 [z_0 + (z-z_0)\,t]^n (z-z_0)\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_0^{n-k} (z-z_0)^{k+1} \int_0^1 t^k \, dt =$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} z_0^{n-k} (z-z_0)^{k+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1} \left[\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} z_0^{n-k+1} (z-z_0)^k - z_0^{n+1} \right] =$$

$$= \frac{z^{n+1}}{n+1} - \frac{z_0^{n+1}}{n+1}. \tag{45}$$

3°. Интегральная формула Коши. Теперь покажем справедливость следующей *интегральной формулы Коши*:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} 0, & z \in D^-, \\ f(z), & z \in D^+, \end{cases} \tag{46}$$

где D^+ — конечная область, ограниченная кусочно-гладким контуром S, D^- — дополнение $D^+ \cup S$ до всей комплексной плоскости, а $f(z)$ — аналитическая в D^+ функция, непрерывная в $D^+ \cup S$.

Когда $z \in D^-$, в силу аналитичности по ζ функции $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ в D^+ и непрерывности ее в $D^+ \cup S$, первое из равенств (46) не что иное, как равенство (39). Если же $z \in D^+$, то, удаляя эту точку из области D^+ вместе с замкнутым кругом $|\zeta - z| \leqslant \varepsilon$, лежащим в D^+, и учитывая аналитичность по ζ функции $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ в оставшейся части D_ε области D^+ и непрерывность ее вплоть до границы, в силу (39) и (35) получаем (рис. 10)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i} f(z) \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - z},$$

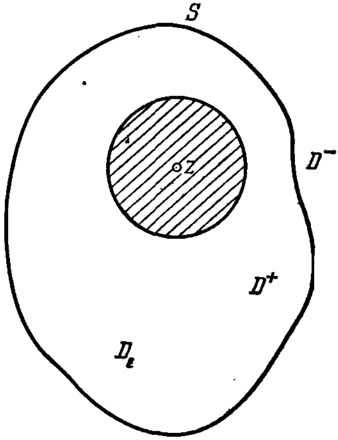

Рис. 10.

откуда на основании (41) и очевидного равенства

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta = 0$$

в пределе при $\varepsilon \to 0$ следует, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = f(z), \qquad z \in D^+. \tag{47}$$

Очевидно, что *формула* (47) *остается в силе и тогда, когда* D^+ *представляет собой* $(m+1)$*-связную ограниченную область, контур* S *которой состоит из замкнутых попарно непересекающихся кусочно-гладких кривых* $S_0, S_1, \ldots$ $\ldots, S_m$. В частности, когда конечная область D_0 с границей S_0 содержит внутри себя $S_1, \ldots, S_m$, то в силу (35) можем написать

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_0} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i}\int_{S_k} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}, \qquad z \in D^+. \tag{48}$$

Если $f(z)$ — аналитическая в односвязной области D функция, то, как уже было показано выше, интеграл (40) зависит исключительно от точек z_0, $z \in D$, и, следовательно, *функция комплексного переменного* z:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$$

при фиксированном z_0 *однозначна в области* D. Более того, для отношения $\frac{\Delta F}{\Delta z}$ имеем

$$\frac{\Delta F}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} - \int_{z_0}^{z}\right) f(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\, d\zeta,$$

где при достаточно малом $|\Delta z|$ можно считать, что интеграл берется вдоль прямолинейного отрезка δ, соединяющего точки z и $z+\Delta z$.

Так как в силу формулы (45) имеем

$$\int_{z}^{z+\Delta z} d\zeta = \Delta z,$$

то

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)]\, d\zeta\right| \leqslant \max_{\zeta \in \delta} |f(\zeta) - f(z)|.$$

Отсюда ввиду того, что $\max|f(\zeta) - f(z)| \to 0$ при $|\zeta - z| \to 0$, получаем

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta z} = F'(z) = f(z).$$

Совокупность $\Phi(z)$ аналитических в области D функций, производные которых $\Phi'(z)$ равны $f(z)$, называется *неопределенным интегралом от* $f(z)$.

Таким образом, для разности $\Phi(z) - F(z) = \Psi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ имеем $\psi'(z) = \Phi'(z) - F'(z) = f(z) - f(z) = 0$ всюду в области D. То есть $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, а это означает, что $u(x, y) = \text{const}$, $v(x, y) = \text{const}$ и, стало быть, $\Phi(z) = F(z) + C$. Так как $\Phi(z_0) = F(z_0) + C = C$, то для вычисления интеграла (40) получаем формулу

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = \Phi(z) - \Phi(z_0),$$

носящую название *формулы Лейбница*.

4°. Интеграл типа Коши. Пусть S — замкнутая или разомкнутая кусочно-гладкая кривая Жордана, а $f(\zeta)$ — заданная на S непрерывная функция.

При фиксированном значении z, не лежащем на S, выражение $\varphi(z, \zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ как функция ζ непрерывна и, следовательно, интеграл

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \tag{49}$$

существует и является однозначной функцией z. Выражение (49) носит название *интеграла типа Коши*.

Если S — замкнутый контур, ограничивающий конечную область D, и функция $f(z)$ аналитична в D и непрерывна в $D \cup S$, то правая часть (49) в каждой точке $z \in D$ совпадает с $f(z)$ и в этом случае (49) есть не что иное, как интегральная формула Коши (47).

Так как $\varphi(z, \zeta)$ при $\zeta \in S$ как функция z аналитична в каждой точке, не лежащей на S, т. е. $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \varphi(z, \zeta) = 0$ и операцию $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ можно внести под знак интеграла в правой части (49), заключаем, что $\frac{\partial F(z)}{\partial \bar{z}} = 0$. Следовательно, *функция $F(z)$ аналитична на комплексной плоскости z всюду вне кривой S*. Далее, ввиду того, что $\varphi(z, \zeta)$ при $\zeta \in S$ как функция z в каждой точке, не лежащей на S, имеет производные любого порядка

$$\frac{d^n}{dz^n} \varphi(z, \zeta) = n! \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}$$

и операцию $\frac{d^n}{dz^n}$ можно внести под знак интеграла в правой части (49), заключаем, что *представленная интегралом типа Коши (49) функция $F(z)$ в точках z, не лежащих на S, имеет производные всех порядков, причем*

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_S \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{50}$$

Из только что установленного свойства интеграла типа Коши вытекает, что *аналитическая в области D функция $f(z)$ имеет в этой области производные всех порядков.* Действительно, пусть z_0 — произвольная точка области D, а круг $|z-z_0| \leqslant \varepsilon$ достаточно малого радиуса ε лежит в D. В силу интегральной формулы Коши (46) имеем

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=\varepsilon}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}, \qquad |z-z_0|<\varepsilon. \tag{51}$$

Правая часть (51) является частным случаем интеграла типа Коши. Поэтому функция $f(z)$ в круге $|z-z_0|<\varepsilon$ имеет производные всех порядков, и в силу произвольности точки z_0 справедливость сформулированного утверждения доказана.

5°. Сопряженные гармонические функции. Теорема Морера. Так как функция

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

сама аналитична в области D, то $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ имеют частные производные первого порядка $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, причем в силу условия (CR)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Тем самым доказаны *существование производных второго порядка у функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ и гармоничность этих функций в области D.* Повторением этого рассуждения убеждаемся в том, что *функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют производные всех порядков в области D аналитичности функции $f(z)$.*

Действительная и мнимая части аналитической в области D функции $f(z)$ называются *сопряженными гармоническими функциями.*

Теперь легко восстановить аналитическую в односвязной области D функцию $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, когда известна ее действительная часть $u(x, y)$. В самом деле, имеем

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy. \tag{52}$$

Условие

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

того, чтобы полученное для dv выражение (52) было полным дифференциалом, соблюдено из-за гармоничности функции $u(x, y)$ в области D. Следовательно,

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + C,$$

где C — произвольная действительная постоянная, а интеграл не зависит от пути, соединяющего точки (x_0, y_0) и (x, y) и лежащего в области D.

Таким образом, приходим к заключению, что *по заданной в односвязной области D действительной части $u(x, y)$ аналитическая в этой области функция $f(z)$ определяется с точностью до произвольного мнимого слагаемого iC по формуле*

$$f(z) = u(x, y) + i \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + iC. \tag{53}$$

Имеет место утверждение, обратное теореме Коши и именуемое теоремой Морера: *если функция $f(x)$ непрерывна в односвязной области D и интеграл от нее вдоль любой замкнутой кусочно-гладкой кривой Жордана, лежащей в D, равен нулю, то $f(z)$ аналитична в D.*

Действительно, по условию теоремы интеграл (40) от функции $f(\zeta)$ зависит исключительно от точек z_0, z, но не от пути интегрирования, соединяющего z_0 с z. Как мы уже видели, это свойство интеграла (40) вместе с непрерывностью $f(\zeta)$ достаточны для того, чтобы определенная формулой

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta) d\zeta$$

функция была аналитична в D и имело место равенство $F'(z) = f(z)$. Так как производная аналитической функции сама является аналитической функцией, то из равенства $F'(z) = f(z)$ следует аналитичность функции $f(z)$.

§ 3. Важнейшие следствия, вытекающие из интегральной формулы Коши

1°. Принцип максимума модуля аналитической функции. Пусть $f(z)$ — аналитическая в области D функция, а M — верхняя грань значений $|f(z)|$ для всех $z \in D$.

Принцип максимума модуля: *модуль аналитической в области D функции $f(z)$, отличной от постоянной, ни в одной точке этой области не может принимать значения M.*

Если $M = \infty$, справедливость этого утверждения очевидна, ибо в каждой точке $z \in D$ функция $f(z)$ принимает лишь конечное значение. Равенство $M = 0$ также исключается, так как в этом случае $f(z) = 0$. Предположим теперь, что число M конечно и что в некоторой точке $z_0 \in D$ имеет равенство $|f(z_0)| = M$. Рассмотрим замкнутый круг $|\zeta - z_0| \leqslant \delta$, лежащий в D. В силу интегральной формулы Коши (47) имеем

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \delta} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \delta e^{i\theta})\, d\theta,$$
$$\zeta - z_0 = \delta e^{i\theta},$$

откуда по принятому допущению получаем

$$M \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(z_0 + \delta e^{i\theta})|\, d\theta. \tag{54}$$

Из (54) следует, что на окружности $|\zeta - z_0| = \delta$ всюду $|f(\zeta)| = M$. В самом деле, допустим, что в точке $\zeta_0 = \delta e^{i\theta_0}$ имеет место неравенство $|f(\zeta_0)| < M$ (обратное неравенство исключено). Тогда в силу непрерывности $|f(\zeta)|$ неравенство $|f(\zeta)| < M$ сохранится для некоторого промежутка $\theta_0 - \varepsilon < \theta < \theta_0 + \theta$ и на основании (54) получим бессмысленное неравенство $M < M$. Следовательно, $|f(\zeta)| = M$ для всех значений δ, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$, т. е. в окрестности $|z - z_0| < \delta_0$ точки z_0. Так как $\log|f(z)| = \frac{1}{2}\log f(z)\overline{f(z)}$, то

$$\frac{\partial}{\partial z}\log|f(z)| = \frac{1}{2}\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\partial}{\partial z}\log M = 0$$

для всех значений z в круге $|z-z_0|<\delta_0$, т. е. в этом круге всюду $f'(z)=0$ и, стало быть, $f(z)=\text{const}$. Отсюда, повторяя соответствующую часть рассуждения, приведенного в пункте 4° § 1 главы I при доказательстве принципа экстремума для гармонической функции, заключаем, что $f(z)=\text{const}$ всюду в D, а это исключено. Таким образом, допущение $|f(z_0)|=M$ неверно, и тем самым принцип максимума модуля доказан.

Если $f(z)\neq 0$ всюду в D и m — нижняя грань $|f(z)|$ для всех $z\in D$, то, применяя принцип максимума модуля для аналитической области D функции $\frac{1}{f(z)}$, заключаем, что $|f(z)|$ нигде в области D не может принимать значения m. Следовательно, *в рассматриваемом случае модуль аналитической в области D функции $f(z)$ экстремума может достигать лишь на границе области D.*

2°. Теоремы Вейерштрасса.

Первая теорема Вейерштрасса: *если ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \tag{55}$$

аналитических в области D функций $f_k(z)$ равномерно сходится на любом замкнутом подмножестве области D, то сумма $f(z)$ этого ряда аналитична в D, причем для каждого натурального p ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(p)}(z)$ производных порядка p функций $f_k(z)$ равномерно сходится на любом замкнутом подмножестве области D и

$$f^{(p)}(z)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(p)}(z). \tag{56}$$

Сперва покажем, что $f(z)$ непрерывна в области D. Пусть z_0 — произвольная фиксированная точка области D. В силу равномерной сходимости ряда (55) для наперед заданного $\varepsilon>0$ существует натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что $|f(z)-S_N(z)|<\varepsilon/3$ для всех z из лежащего в области D круга $|z-z_0|\leq\delta_1$. Здесь $S_N(z)=\sum_{k=1}^{N} f_k(z)$. В силу непрерывности конечной суммы $S_N(z)$ существует число $\delta_2(\varepsilon)>0$ такое, что $|S_N(z)-S_N(z_0)|<\varepsilon/3$ для всех z из круга $|z-z_0|<\delta_2$. Следовательно, для всех z из круга $|z-z_0|<\delta$, где $\delta=\min(\delta_1, \delta_2)$, на основании полученных неравенств можем написать

$$\begin{aligned}|f(z)-f(z_0)| &= \\ &= |f(z)-f(z_0)+S_N(z)-S_N(z_0)+S_N(z_0)-S_N(z)| \leqslant \\ &\leqslant |f(z)-S_N(z)|+|f(z_0)-S_N(z_0)|+ \\ &\qquad +|S_N(z)-S_N(z_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\end{aligned}$$

а это означает, что $f(z)$ непрерывна в точке z_0 и, стало быть, она непрерывна всюду в области D.

Пусть теперь замкнутый круг $|z-z_0|\leqslant\delta$ лежит в области D. Интегрируя равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\zeta-z}\sum_{k=1}^{\infty}f_k(\zeta), \quad |z-z_0|<\delta,$$

по окружности $|\zeta-z_0|=\delta$ и пользуясь свойством 4) комплексного интеграла из пункта 1° предыдущего параграфа, выраженным формулой (37), и интегральной формулой Коши (47), получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=\delta}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(z)=f(z)$$

для всех точек z круга $|z-z_0|<\delta$. Отсюда на основании аналитичности интеграла типа Коши заключаем, что $f(z)$ аналитична в круге $|z-z_0|<\delta$ и, в частности, в точке z_0. Так как z_0 — произвольная точка области D, то тем самым аналитичность $f(z)$ доказана всюду в области D.

Интегрируя равномерно сходящийся ряд

$$\frac{p!}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}}=\frac{p!}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}}$$

по окружности $|\zeta-z_0|=\delta$, в силу (50) получаем, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k^{(p)}(z)=f^{(p)}(z)$ для всех точек круга $|z-z_0|<\delta$ и, стало быть, последнее равенство имеет место всюду в области D.

Из равномерной сходимости ряда (55) на окружности $|\zeta-z_0|=\delta$ следует, что для наперед заданного $\varepsilon>0$

существует натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что $\left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{n+k}(\zeta)\right| < \nu$ для всех $n \geqslant N$. Поэтому для всех точек z круга $|z - z_0| < \delta/2$ имеем оценку

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_{n+k}^{(p)}(z)\right| = \left|\frac{p!}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \delta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_{n+k}(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{p+1}}\right| < \frac{2^{p+1} p!\, \varepsilon}{\delta^p},$$

а это означает, что ряд в правой части (56) равномерно сходится в круге $|z - z_0| < \delta/2$. Отсюда, пользуясь известным положением из анализа о возможности выделения конечного покрытия из любого заданного покрытия замкнутого множества открытыми кругами, заключаем, что ряд (56) равномерно сходится на любом замкнутом подмножестве области D.

Вторая теорема Вейерштрасса: *если ряд* (55) *аналитических в области D и непрерывных в $D \cup S$ функций $f_k(z)$ равномерно сходится на границе S области D, то этот ряд равномерно сходится в $D \cup S$.*

Эта теорема доказывается точно так же, как теорема Гарнака из пункта 5° § 2 главы I. В самом деле, из равномерной сходимости ряда (55) на S следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что $\left|\sum\limits_{k=1}^{p} f_{N+k}(\zeta)\right| < \varepsilon$ для любого $p \geqslant 1$ и для всех $\zeta \in S$.

Так как модуль конечной суммы $\sum\limits_{k=1}^{p} f_{N+k}(z)$ аналитических в D функций $f_k(z)$ максимума достигает на границе S области D, то $\left|\sum\limits_{k=1}^{p} f_{N+k}(z)\right| < \varepsilon$ для всех $z \in D \cup S$, а это означает равномерную сходимость ряда (55) в $D \cup S$.

3°. **Ряд Тейлора.** Как уже было показано в пункте 3° § 1 настоящей главы, сумма $S(z)$ степенного ряда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \tag{57}$$

внутри его круга сходимости $|z - z_0| < R$, $R > 0$, является аналитической функцией.

Имеет место и обратное утверждение, именуемое **теоремой Тейлора**: *аналитическая в области D функция $f(z)$ в окрестности каждой точки $z_0 \in D$ представляется в виде суммы степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \tag{58}$$

радиус сходимости R которого не меньше, чем расстояние δ_0 от точки z_0 до границы S области D.

В самом деле, для каждого значения z из круга $|z - z_0| < \delta < \delta_0$ на основании интегральной формулы Коши (47) имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^k \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_0}, \tag{59}$$

где γ — окружность $|\zeta - z_0| = \delta$, а $\left|\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = q < 1$, $\zeta \in \gamma$. В силу равномерной сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^k = \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

относительно ζ на окружности γ ряд в правой части (59) мы можем интегрировать почленно и переписать это равенство в виде (58), где

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{60}$$

или, принимая во внимание (50),

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{61}$$

Так как ряд (58) сходится в круге $|z - z_0| < \delta$, где δ — произвольное число из промежутка $0 < \delta < \delta_0$, то радиус сходимости ряда (58) не меньше δ_0.

Степенной ряд (57), коэффициенты a_k которого выражаются через функцию $f(z)$ по формулам (60) и (61), называется *рядом Тейлора* или *тейлоровским разложением функции* $f(z)$.

Из формулы (61) следует, что *тейлоровское разложение в окрестности данной точки* $z_0 \in D$ *единственно.*

4°. Единственность аналитической функции. Теорема Лиувилля. Из теоремы Тейлора в свою очередь вытекает теорема единственности аналитической функции: *если аналитическая в области* D *функция* $f(z)$ *равна нулю на бесконечном множестве точек* E *области* D, *которое имеет предельную точку* z_0, *лежащую в* D, *то* $f(z)=0$ *всюду в* D.

В самом деле, пусть d — круг $|z-z_0|<\delta$, лежащий в D. По теореме Тейлора в d имеет место разложение (58). Обозначим через z_k, $k=1, 2, \ldots$, последовательность точек $E \cap d$, сходящуюся к z_0. По условию, $f(z_k)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z_k-z_0)^n=0$, откуда в пределе при $z_k \to z_0$, $z_k \neq z_0$, получаем $a_0=0$. Точно так же из равенства

$$\frac{f(z_k)}{z_k-z_0}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_k-z_0)^{n-1}=0$$

получаем $a_1=0$ и т. д.

Следовательно, все $a_k=0$, $k=0, 1, \ldots$, и, стало быть, $f(z)=0$ в круге d. Пусть теперь z^* — произвольная точка области D. Соединим точки z_0 и z^* непрерывной дугой l, лежащей в D, и обозначим расстояние между l и границей S области D через δ_0. Передвигая центр круга $|z-\zeta|<\delta<\delta_0$ из точки z_0 в точку z^* и пользуясь каждый раз тем фактом, что в каждом положении ζ имеет место равенство $f(\zeta)=0$, заключаем, что $f(z^*)=0$, т. е. $f(z)=0$ всюду в D.

Точка $z_0 \in D$, в которой $f(z_0)=0$, называется *нулем* или *корнем* функции $f(z)$. Если z_0 является нулем аналитической в области D функции $f(z)$, то в силу (58) будем иметь

$$f(z)=\sum_{k=n}^{\infty} a_k(z-z_0)^k, \qquad n \geqslant 1, \quad a_n \neq 0.$$

При $n=1$ нуль z_0 называется *простым*, а при $n>1$ — *кратным* (*n-кратным*). На основании (61) заключаем, что z_0 *является n-кратным нулем функции* $f(z)$ *тогда и только тогда, когда*

$$f^{(k)}(z_0)=0, \quad k=0, \ldots, n-1, \quad f^{(n)}(z_0)\neq 0.$$

Следствием теоремы Тейлора является также теорема Лиувилля: *ограниченная аналитическая на всей плоскости z функция* $f(z)$ *постоянна.*

Действительно, в силу (60) имеем

$$|a_k|=\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi} f(\delta e^{i\theta})\frac{i\delta e^{i\theta}\,d\theta}{\delta^{k+1}e^{i(k+1)\theta}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f|\frac{d\theta}{\delta^k}<\frac{M}{\delta^k}, \qquad k=0,\ 1,\ \ldots,$$

где M — верхняя грань $|f(z)|$ на плоскости z, а δ — произвольное положительное число. Из этого неравенства в пределе при $\delta\to\infty$ получаем $a_k=0$, $k=1, 2, \ldots$, т. е. $f(z)=$ $=a_0=\mathrm{const}$.

5°. Ряд Лорана. Каждый член степенного ряда по отрицательным степеням

$$\sum_{k=-1}^{-\infty}\alpha_k(z-z_0)^k, \qquad z_0\neq\infty, \tag{62}$$

является аналитической функцией переменного z при $0<|z-z_0|<\infty$. В результате замены $z-z_0=\frac{1}{\zeta}$ ряд (62) записывается в виде степенного ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{-k}\zeta^k. \tag{63}$$

Прнняв $\zeta=0$ при $z=\infty$, убедимся, что если $|\zeta|<r_1$ — круг сходимости ряда (63), то ряд (62) будет сходиться вне замкнутого круга $|z-z_0|\leqslant r=\frac{1}{r_1}$.

Так как вне круга $|z-z_0|<\rho$ для любого $\rho>r$ ряд (62) сходится равномерно, то в силу первой теоремы Вейерштрасса сумма этого ряда $S_1(z)=S_*\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$, где $S_*(\zeta)$ — сумма ряда (63), аналитична во всех точках z, удовлетворяющих условию $|z-z_0|>r$.

Когда ряд (62) сходится при $|z-z_0|>r$, а степенной ряд $S_2(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k(z-z_0)^k$ сходится в круге $|z-z_0|<R$, где $R>r$, то ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k(z-z_0)^k$ сходится в кольце K: $r<|z-z_0|<R$ и его сумма $S(z)=S_1(z)+S_2(z)$ является аналитической функцией в K.

Справедливо и обратное утверждение — **теорема Лорана**: *аналитическая в кольце K функция $f(z)$ в каждой точке $z\in K$ представляется в виде суммы ряда*

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k, \tag{64}$$

где

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{k+1}},\quad k=0,\pm1,\ldots, \tag{65}$$

а γ — окружность $|\zeta-z_0|=\delta$, $r<\delta<R$.

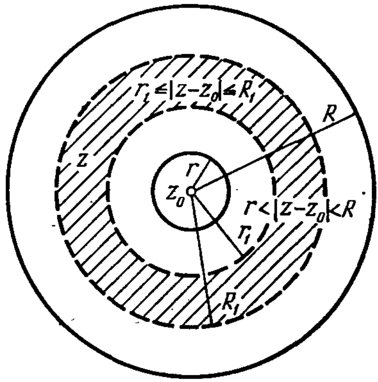

Рис. 11.

Чтобы доказать эту теорему, рассмотрим кольцо (рис. 11)

$$K_1:\ r<r_1<|z-z_0|<R_1<R.$$

В произвольной точке $z\in K_1$ по формуле (48) имеем

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=R_1}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=r_1}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=R_1}\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}f(\zeta)\,d\zeta+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=r_1}\frac{1}{z-z_0}\,\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}}f(\zeta)\,d\zeta. \tag{66}$$

Так как ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^k=\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}, \tag{67}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^k=\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}} \tag{68}$$

сходятся равномерно, когда ζ лежит на окружностях $|\zeta-z_0|=R_1$ и $|\zeta-z_0|=r_1$ соответственно, то, внося (67) и (68) в правую часть (66), получим равенство (64), в котором

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=R_1}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{k+1}},\quad k=0,\ 1,\ \ldots, \tag{69}$$

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=r_1}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{k+1}},\quad k=-1,\ -2,\ \ldots \tag{70}$$

Но $f(\zeta)(\zeta-z_0)^{-k-1}$ является аналитической функцией ζ в кольце K, поэтому в силу теоремы Коши в правых частях (69) и (70) интеграл можно считать распространенным вдоль окружности $|\zeta-z_0|=\delta$, $r<\delta<R$.

Ряд в правой части (64) называется *рядом Лорана* или *лорановским разложением* функции $f(z)$, а ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k=f_1(z-z_0), \tag{71}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{-k}(z-z_0)^{-k}=f_2\left(\frac{1}{z-z_0}\right) \tag{72}$$

— *правильной* и *главной частями* лорановского разложения (64). Тейлоровское разложение, очевидно, является частным случаем лорановского разложения.

Легко видеть, что *лорановское разложение* (64) *в данном кольце единственно*. В самом деле, при наличии двух разложений

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k=\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k(z-z_0)^k, \tag{73}$$

умножая обе части равенства (73) на $(z-z_0)^{-n-1}$ и интегрируя вдоль окружности γ, в силу равенств (43), записанных в виде

$$\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{(z-z_0)^k} = \begin{cases} 0, & k \neq -1, \\ 2\pi i, & k = 1, \end{cases} \tag{74}$$

получаем $a_n = b_n$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, что и доказывает единственность разложения (64).

6°. Понятия особых точек и вычета аналитической функции. Если в некоторой окрестности $|z-z_0| < \delta$ точки z_0 комплексной плоскости z функция $f(z)$ аналитична всюду, кроме самой точки z_0 (в которой она может быть и не задана), то z_0 называется *изолированной особой точкой* аналитической функции $f(z)$.

В силу теоремы Лорана в кольце $0 < r < |z-z_0| < \delta$ функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана (64). Устремляя r к нулю, убеждаемся в том, что полученный для $f(z)$ ряд Лорана (64) сходится для всех z, удовлетворяющих условию $0 < |z-z_0| < \delta$.

В зависимости от того, будет ли множество отличных от нуля коэффициентов a_k, $k = -1, -2, \ldots$, в лорановском разложении (64) *пусто*, *конечно* или *бесконечно*, изолированная особая точка z_0 называется *устранимой особой точкой*, *полюсом* или *существенно особой точкой*. Точка z_0 называется *полюсом порядка* $n > 0$, если $a_{-n} \neq 0$ и все $a_{-k} = 0$ при $k > n$.

Из лорановского разложения (64) видно, что, когда изолированная особая точка z_0 устранима, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a_0$, а когда z_0 — полюс, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Из определений нуля и полюса следует, что *если точка $z_0 \in D$ является нулем кратности n (полюсом порядка n) аналитической в области D функции $f(z)$, то эта точка является полюсом порядка n (нулем кратности n) для функции* $\frac{1}{f(z)}$.

Действительно, в окрестности точки z_0 функция $f(z)$ разлагается в ряд

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad a_m \neq 0,$$

где $m = n$ или $m = -n$ в зависимости от того, является ли z_0 нулем или полюсом для $f(z)$. Поэтому

$$\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^{-m}\frac{1}{\varphi(z)}, \quad \varphi(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-m}.$$

Так как $\frac{1}{\varphi(z_0)} = \frac{1}{a_m} \neq 0$, то вблизи точки z_0 функция $\frac{1}{\varphi(z)}$ является аналитической и ее можно представить в виде суммы степенного ряда

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k, \quad b_0 = \frac{1}{a_m} \neq 0,$$

и, стало быть,

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^{k-m}.$$

Отсюда следует, что точка z_0 является для функции $\frac{1}{f(z)}$ полюсом порядка n или нулем кратности n в зависимости от того, $m=n$ или $m=-n$.

Аналогично убеждаемся в том, что *если z_0 является устранимой особой точкой аналитической функции $f(z)$, то z_0 для $\frac{1}{f(z)}$ является устранимой особой точкой при* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) \neq 0$ *и полюсом при* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = 0$.

Если z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$ и в некоторой окрестности этой точки $f(z) \neq 0$, то для $\frac{1}{f(z)}$ точка z_0 будет изолированной особой точкой. Более того, поскольку z_0 для $\frac{1}{f(z)}$ не может быть ни устранимой особой точкой, ни полюсом (в противном случае z_0 была бы устранимой особой точкой или нулем для $f(z_0)$), она является существенно особой точкой.

Поведение функции $f(z)$ вблизи существенно особой точки характеризуется следующей теоремой Сохоцкого — Вейерштрасса: *если z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого комплексного числа α можно найти сходящуюся к z_0 последовательность точек z_k, $k=1, 2, \ldots$, такую, что* $\lim\limits_{z_k\to z_0} f(z_k) = \alpha$.

Сначала рассмотрим случай, когда $\alpha=\infty$. Вблизи точки z_0 функцию $f(z)$ представим в виде

$$f(z)=f_1(z-z_0)+f_2\left(\frac{1}{z-z_0}\right),$$

где f_1 и f_2 даются по формулам (71) и (72). Так как ряд в левой части (72) сходится при $|z-z_0|>0$, то функция $f_2(\zeta)=f_2\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$, $\zeta=\frac{1}{z-z_0}$, как сумма степенного ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{-k}\zeta^k$, сходящегося для всех точек плоскости ζ, не может быть ограниченной. В противном случае в силу теоремы Лиувилля $f_2(\zeta)$ была бы постоянной, т. е. главная часть в лорановском разложении отсутствовала бы, а это невозможно, ибо z_0 является существенно особой точкой для $f(z)$. Таким образом, функция $f_2(\zeta)=f_2\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ вблизи точки z_0 $(\zeta=\infty)$ не может быть ограниченной, и поэтому можно указать последовательность ζ_k, $k=1, 2, \ldots$, сходящуюся к ∞, такую, что $\lim\limits_{\zeta_k\to\infty} f_2(\zeta_k)=\infty$. Следовательно, существует последовательность $z_k=z_0+\frac{1}{\zeta_k}$, $k=1, 2, \ldots$, сходящаяся к z_0, такая, что $\lim\limits_{z_k\to z_0} f_2\left(\frac{1}{z_k-z_0}\right)=\infty$. Отсюда, так как $\lim\limits_{z_k\to z_0} f_1(z_k-z_0)=a_0$, заключаем, что $\lim\limits_{z_k\to z_0} f(z_k)=\infty$.

Пусть теперь α — конечное число. Рассмотрим функцию $f(z)-\alpha$, для которой z_0, очевидно, является существенно особой точкой. Если в каждой окрестности $|z-z_0|<\frac{1}{k}$ точки z_0 существует точка z_k, в которой $f(z_k)=\alpha$, то будем иметь $\lim\limits_{z_k\to z_0} f(z_k)=\alpha$. Если же точка z_0 имеет окрестность, в которой $f(z)\neq\alpha$, то, как уже было отмечено, z_0 будет существенно особой точкой и для $\frac{1}{f(z)-\alpha}$. Следовательно, существует последовательность точек z_k, $k=1, 2, \ldots$, сходящаяся к z_0, такая, что

$$\lim_{z_k\to z_0}\frac{1}{f(z_k)-\alpha}=\infty$$

и, стало быть,

$$\lim_{z_k \to z_0} f(z_k) = \alpha.$$

Говорят, что $z=\infty$ является *изолированной особой точкой* аналитической функции $f(z)$, если $\zeta=0$ есть изолированная особая точка для функции $\varphi(\zeta)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$. Так как лорановские разложения $\varphi(\zeta)$ и $f(z)$, $z=\frac{1}{\zeta}$, в окрестностях точек $\zeta=0$, $z=\infty$ связаны между собой равенством

$$\varphi(\zeta)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\zeta^k = f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^{-k},$$

то изолированная особая точка $z=\infty$ классифицируется по характеру множества отличных от нуля коэффициентов a_k, $k=-1, -2, \ldots$, лорановского разложения $f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^{-k}$. В зависимости от того, будет ли это множество *пусто*, *конечно* или *бесконечно*, особая точка $z=\infty$ называется *устранимой особой точкой*, *полюсом* или *существенно особой точкой*.

Аналитическая на всей плоскости z функция $f(z)$ называется *целой*. В зависимости от того, является ли бесконечно удаленная точка $z=\infty$ для целой функции $f(z)$ устранимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой, целая функция $f(z)$ будет *постоянной*, *полиномом* или *целой трансцендентной функцией*. Функция $f(z)$, которая на расширенной комплексной плоскости имеет только полюсы, называется *рациональной*. Отношение $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ двух целых функций $f(z)$ и $\varphi(z)$ называется *мероморфной функцией*. Мероморфной является, например, функция $\frac{\sin z}{\cos z}=\operatorname{tg} z$.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D всюду, кроме изолированной особой точки $z_0 \in D$, а γ — кусочно-гладкая замкнутая кривая Жордана, которая вместе с областью D_γ, границей которой она служит, лежит в D, причем $z_0 \in D_\gamma$. В силу теоремы Коши значение интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz,$$

где интегрирование происходит вдоль γ по направлению, оставляющему конечную область D_γ слева, одно и то же для всех γ; оно называется *вычетом функции* $f(z)$ *относительно особой точки* z_0.

Для вычета пользуются обозначением

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z). \tag{75}$$

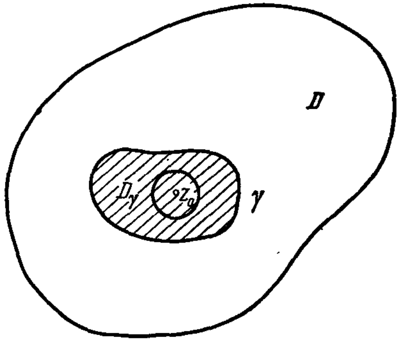

Рис. 12.

При вычислении вычета в качестве γ, очевидно, можно брать окружность $|z-z_0|=\delta$ достаточно малого радиуса (рис. 12).

Подставляя в левую часть (75) лорановское разложение (64) и пользуясь равенствами (74), получаем

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}.$$

Когда z_0 — полюс порядка n, для нахождения a_{-1} имеем очевидную формулу

$$a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]. \tag{76}$$

Если функция $f(z)$ непрерывна в $D\cup S$ и аналитична в D всюду, кроме изолированных особых точек $z_k \in D$, $k=1, \ldots, m$, и граница S конечной области D является кусочно-гладкой замкнутой кривой Жордана, то в силу формулы (48) имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{|z-z_k|=\delta} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \tag{77}$$

Формула (77) позволяет легко вычислить некоторые определенные интегралы.

Так, например, если известно, что $f(z)$ непрерывна при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ и аналитична при $\operatorname{Im} z > 0$ всюду, кроме конечного числа изолированных особых точек z_k, $\operatorname{Im} z_k >$

>0, $k=1, \ldots, m$, причем для достаточно больших $|z|$

$$|f(z)|<\frac{M}{|z|^2}, \quad M=\text{const}>0, \tag{78}$$

то, пользуясь формулой (77), когда область D — полукруг $|z|<R$, $\operatorname{Im} z>0$, содержащий внутри себя все z_k, $k=1, \ldots, m$, получаем (рис. 13)

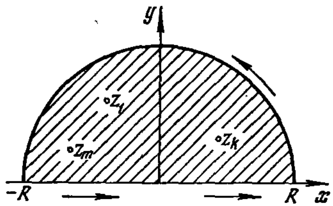

Рис. 13.

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx+\int_0^\pi f(\mathrm{R}e^{i\theta})\,iRe^{i\theta}d\theta = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \tag{79}$$

Но второй интеграл в левой части (79) в силу (78) в пределе при $R \to \infty$ дает нуль. Поэтому из (79) получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx=2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

7°. Формула Шварца. Решение задачи Дирихле. Пусть требуется определить аналитическую в круге $|z|<1$ функцию $f(z)$, если известно, что ее действительная часть $u(x, y)$ непрерывна при $|z|\leqslant 1$ и на окружности $|\zeta|=1$ изнутри принимает заданные непрерывные значения

$$u^+(\zeta)=\varphi(\zeta), \quad |\zeta|=1. \tag{80}$$

На окружности $|\zeta|=R$, $R<1$, имеем $f(z)+\overline{f(z)}=2u(\zeta)$. Умножая обе части этого равенства на $\frac{1}{2\pi i(\zeta-z)}$, $|z|<R$, и интегрируя по окружности $|\zeta|=R$, в силу интегральной формулы Коши (47) получаем

$$f(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{\overline{f(\zeta)}\,d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{u(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}, \quad |z|<R. \tag{81}$$

Из тейлоровского разложения $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ в круге $|z|<1$ при $|\zeta|=R$ в записи $\zeta=Re^{i\varphi}$, $\bar\zeta=Re^{-i\varphi}=\frac{R^2}{\zeta}$

имеем $\overline{f(\zeta)}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\bar{a}_k\bar{\zeta}^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\bar{a}_k\frac{R^{2k}}{\zeta^k}$. Поэтому второе слагаемое в левой части (81) запишется в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=R}\frac{\overline{f(\zeta)}\,d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\bar{a}_kR^{2k}\int\limits_{|\zeta|=R}\frac{d\zeta}{\zeta^k(\zeta-z)},\quad |z|<R. \tag{82}$$

Из формулы (74) имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=R}\frac{d\zeta}{\zeta-z}=1,\quad |z|<R. \tag{83}$$

Для вычисления интеграла в правой части (82) при $k>0$ воспользуемся формулой (77):

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=R}\frac{d\zeta}{\zeta^k(\zeta-z)}=\operatorname*{Res}_{\zeta=0}\frac{1}{\zeta^k(\zeta-z)}+\operatorname*{Res}_{\zeta=z}\frac{1}{\zeta^k(\zeta-z)}. \tag{84}$$

Вычеты в правой части (84) находим по формуле (76):

$$\operatorname*{Res}_{\zeta=0}\frac{1}{\zeta^k(\zeta-z)}=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{\zeta\to 0}\left(\frac{1}{\zeta-z}\right)=-\frac{1}{z^k},$$

$$\operatorname*{Res}_{\zeta=z}\frac{1}{\zeta^k(\zeta-z)}=\lim_{\zeta\to z}\frac{1}{\zeta^k}=\frac{1}{z^k}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=R}\frac{d\zeta}{\zeta^k(\zeta-z)}=-\frac{1}{z^k}+\frac{1}{z^k}=0, \tag{85}$$

$$|z|<R,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots$$

В силу (83) и (85) формула (81) принимает вид

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=R}\frac{u(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}-\bar{a}_0, \tag{86}$$

где $\bar{a}_0=\overline{f(0)}=u(0,\ 0)-iv(0,\ 0)$, а из (86) в пределе при $R\to 1$ с учетом условия (80) находим

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}-u(0,\ 0)+iv(0,\ 0). \tag{87}$$

Когда $z=0$, из (87) имеем

$$f(0)+\overline{f(0)}=2u(0,\ 0)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta},$$

т. е.

$$u(0, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta}. \tag{88}$$

Подставляя значение $u(0, 0)$ из (88) в (87), получаем формулу Шварца

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} \varphi(\zeta)\, d\theta + iC, \tag{89}$$

$$\zeta = e^{i\theta}, \quad C = v(0, 0),$$

которая восстанавливает с точностью до произвольного мнимого постоянного слагаемого аналитическую в круге $|z| < 1$ функцию $f(z)$ по краевым значениям на окружности $|\zeta| = 1$ ее действительной части.

Ввиду того, что на окружности $|\zeta| = 1$

$$\frac{\zeta+z}{\zeta-z} = \frac{1-|z|^2+2i \operatorname{Im} \bar{\zeta} z}{|\zeta - z|^2},$$

из формулы Шварца (89) получаем формулу Пуассона

$$u(z) = u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} \varphi(e^{i\theta})\, d\theta, \tag{90}$$

дающую решение задачи Дирихле для гармонических функций в круге $|z| < 1$ (сравните с формулой (17) пункта 2° § 2 гл. I).

Пользуясь теоремой Римана, теоремой о соответствии границ и формулой (90), можно доказать *существование решения задачи Дирихле в следующей общей постановке: в области D плоскости комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$, ограниченной замкнутой кривой Жордана S, требуется найти гармоническую функцию $u_*(\zeta) = u_*(\xi, \eta)$, непрерывную в $D \cup S$ и принимающую на S заданные непрерывные значения $g(\zeta)$.*

В самом деле, искомая гармоническая функция $u_*(\xi, \eta)$ должна быть действительной частью аналитической в области D функции $F(\zeta)$. Функция $u(z) = u(x, y) = \operatorname{Re} F[f^{-1}(z)]$, где $z = f(\zeta)$ конформно отображает область D на круг $|z| < 1$ гармонична в этом круге и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, причем на окружности $|z| = 1$

она принимает непрерывные значения $\varphi(z) = g[f^{-1}(z)]$. Функцию $u(x, y) = u(z)$ находим по формуле (90), и через нее искомая гармоническая функция получится в виде

$$u_*(\zeta) = u[f(\zeta)].$$

§ 4. Аналитическое продолжение

1°. Понятие аналитического продолжения. Пусть D_1 и D_2 — области плоскости комплексного переменного z, пересечение которых $d = D_1 \cap D_2$ представляет собой область, и рассмотрим аналитическую в D_1 функцию $f_1(z)$. Если существует аналитическая в D_2 функция $f_2(z)$,

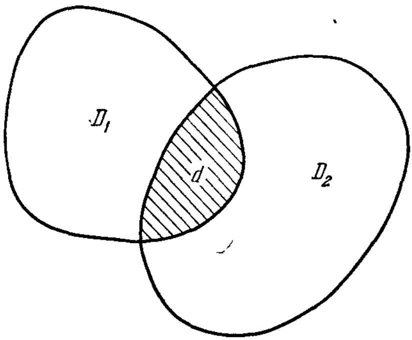

Рис. 14.

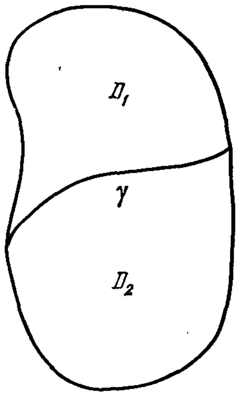

Рис. 15.

совпадающая с $f_1(z)$ в d, то говорят, что $f_2(z)$ является *аналитическим продолжением* $f_1(z)$ из области D_1 в область D_2 через общую часть d этих областей. В силу теоремы единственности аналитических функций очевидно, что при существовании аналитического продолжения оно *единственно* (рис. 14).

2°. Принцип непрерывности. Предположим, что односвязные области D_1 и D_2 имеют общий участок границ, представляющий собой гладкую дугу Жордана γ, причем пересечение $D_1 \cap D_2$ пусто.

Под принципом непрерывности понимается утверждение: *если функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ аналитичны* *в областях D_1 и D_2 соответственно, непрерывны вплоть до γ и, кроме того,*

$$f_1(z)=f_2(z), \quad z\in\gamma,$$

то функция

$$f(z)=\begin{cases} f_1(z), & z\in D_1, \\ f_2(z), & z\in D_2, \\ f_1(z)=f_2(z), & z\in\gamma, \end{cases}$$

аналитична в области $D=D_1\cup D_2\cup\gamma$ (когда дуга γ разомкнута, предполагается, что концы к ней не причисляются) (рис. 15).

Справедливость принципа непрерывности будет доказана в силу теоремы Морера, если мы покажем, что интеграл от $f(z)$ по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой Жордана S, лежащей в D, равен нулю.

Но в силу теоремы Коши

$$\int_S f(z)\,dz=0,$$

когда S лежит в $D_1\cup\gamma$ или в $D_2\cup\gamma$. Пусть теперь S является контуром области D_S, пересечения которой как с D_1, так и с D_2 не являются пустыми. Так как интегралы от $f(z)$, распространенные по контурам $D_S\cap D_1$ и $D_S\cap D_2$, равны нулю в силу теоремы Коши, а в сумме этих интегралов участки дуги γ, входящие в контуры $D_S\cap D_1$ и $D_S\cap D_2$, точка интеграции проходит два раза по противоположным направлениям, то и в этом случае рассматриваемый интеграл равен нулю.

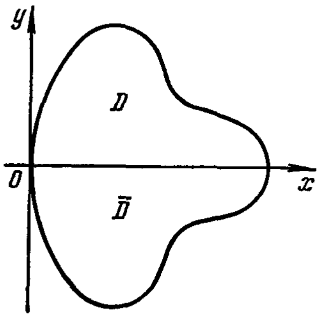

Рис. 16.

3°. Принцип симметрии Римана — Шварца. Пусть участок γ границы односвязной области D, расположенной в верхней или нижней полуплоскости, является отрезком действительной оси $\operatorname{Im} z=0$, а функция $f(z)=$ $=u(x, y)+iv(x, y)$ аналитична в D, непрерывна вплоть до γ, а на γ ее мнимая часть $v(x, 0)=0$. Риману и Шварцу принадлежит утверждение, что в этих условиях *в область* $\bar{D}$, *симметричную области* D *относительно* γ, *функция* $f(z)$ *продолжается аналитически, причем, если* $z \in \bar{D}$, *то* $f(z) = \bar{f}(z)$ (принцип симметрии Римана—Шварца) (рис. 16).

Справедливость этого принципа следует из того, что в окрестности каждой точки $z_0 \in D$ имеем $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$. Следовательно, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k (\bar{z} - \bar{z}_0)^k = \bar{f}(\bar{z})$ также является сходящимся. Под $\bar{f}(z) = \overline{f(\bar{z})}$ будем понимать аналитическую в области $\bar{D}$ функцию, представляющую собой сумму степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k (z - \bar{z}_0)^k$, $z_0 \in D$.

Так как при $\operatorname{Im} z = 0$ имеем $\operatorname{Im} f(z) = 0$, то $\bar{f}(x) = f(x)$, когда $x \in \gamma$.

Функция

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ f(x) = \bar{f}(x), & x \in \gamma, \\ \bar{f}(z), & z \in \bar{D}, \end{cases}$$

в силу принципа непрерывности является аналитической в области $D \cup \bar{D} \cup \gamma$, и тем самым принцип симметрии Римана—Шварца доказан.

Пусть теперь участок γ_0 границы области D представляет собой дугу окружности C, а D_* — лежащая вне D область, примыкающая к γ_0 и расположенная симметрично D относительно C. Поскольку в результате дробно-линейного отображения можно добиться того, чтобы образом γ_0 служил участок γ действительной оси, принцип симметрии Римана — Шварца можно сформулировать следующим образом: *если функция* $f(z)$ *аналитична в области* D, *непрерывна вплоть до* γ_0 *и* $\operatorname{Im} f(z) = 0$ *на* γ_0, *то* $f(z)$ *аналитически продолжается из области* D *через* γ_0 *в область* D_*, *причем при* $z \in D_*$

$$f(z) = \overline{f(z_*)},$$

где z_* *— точка, симметричная* z *относительно* C.

§ 5. Формулы для предельных значений интеграла типа Коши и некоторые их приложения

1°. Понятие интеграла в смысле главного значения по Коши. Пусть S — замкнутая кусочно-гладкая кривая Жордана, а $f(t)$ — заданная на ней непрерывная функция. В пункте 4° § 2 настоящей главы было показано, что интеграл типа Коши (49) в каждой точке z, не лежащей на S, является аналитической функцией. Когда точка $z \in S$, интеграл типа Коши в обычном понимании, очевидно, не существует, но при некоторых дополнительных предположениях относительно функции $f(t)$ и кривой S ему можно придать вполне оправданный смысл.

Ниже будем предполагать, что кривизна кривой S непрерывна. Пусть $t_0 \in S$, γ — окружность $|t-t_0|=\varepsilon$ достаточно малого радиуса, а S_ε — часть S, лежащая вне замкнутого круга $|t-t_0| \leqslant \varepsilon$.

Интеграл

$$I_\varepsilon = \int_{S_\varepsilon} \frac{f(t)\,dt}{t-t_0},$$

очевидно, имеет смысл в обычном понимании.

Когда существует

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon(t_0) = I(t_0),$$

этот предел называется *интегралом в смысле главного значения по Коши* или *сингулярным интегралом* и его принято обозначать обычным символом интеграла:

$$I(t_0) = \int_S \frac{f(t)\,dt}{t-t_0}. \tag{91}$$

Некоторые авторы правую часть (91) снабжают либо латинскими буквами v. p. спереди, означающими сокращенную запись французских слов valeur principal (главное значение), либо звездочкой сверху или снизу знака интеграла.

Покажем, что *если $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера, т. е. когда существуют постоянные $A>0$, $0<h\leqslant 1$, такие, что для любых t_1, $t_2 \in S$*

$$|f(t_1)-f(t_2)| \leqslant A\,|t_1-t_2|^h, \tag{92}$$

интеграл в смысле главного значения (91) *существует.*

В самом деле, на основании интегральной формулы Коши (46) выражение (91) перепишем в виде

$$I_\varepsilon(t_0)=\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\,dt+2\pi i f(t_0)-f(t_0)\int\limits_{\gamma_1}\frac{dt}{t-t_0},$$

где γ_1 — часть окружности γ, лежащая вне конечной области D с границей S.

В силу условия (92) заключаем, что несобственный интеграл

$$\int\limits_{S}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\,dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\,dt$$

сходится равномерно и представляет собой непрерывную функцию t_0.

С другой стороны,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\gamma_1}\frac{dt}{t-t_0}=\lim_{\varepsilon\to 0} i\int\limits_{\gamma_1}d\varphi=\pi i,\qquad t-t_0=\varepsilon e^{i\varphi}.$$

Следовательно, из полученного выше выражения для $I_\varepsilon(t_0)$ в пределе при $\varepsilon\to 0$ имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(t_0)=\int\limits_{S}\frac{f(t)\,dt}{t-t_0}=\pi i f(t_0)+\int\limits_{S}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\,dt. \qquad (93)$$

Когда кривая S разомкнута в предположении, что $t_0\in S$ не является концевой точкой S, интеграл в смысле главного значения по Коши определяется опять-таки как предел выражения

$$I_\varepsilon(t_0)=\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\,dt+f(t_0)\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{dt}{t-t_0}$$

при $\varepsilon\to 0$, причем этот предел всегда существует, если $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера.

2°. Касательная производная потенциала простого слоя. В главе I, § 4, 3° при изучении потенциалов простого слоя (59) мы пользовались представлением (62), в котором функция $v(x)$ удовлетворяет условиям (60). Так как интегральные члены в правой части этого представления являются непрерывно дифференцируемыми функциями при переходе точки x из D^+ в D^- через точку $x^0\in S$, то на основании формул (52) и (60) той же главы заключаем, что *касательная производная потенциала простого слоя существует и остается непрерывной при переходе точки* x *из* D^+ *в* D^-.

Записывая потенциал простого слоя в виде

$$u(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_S \log|t-z|\,\mu(t)\,ds, \qquad z = x+iy,$$

покажем, что при $z = t_0 \in S$

$$\frac{du(t_0)}{ds_0} = \frac{t_0'}{2\pi}\int_S \frac{\mu(t)\,t'\ \ t}{t-t_0} + \frac{i}{2\pi}\int_S \frac{d}{ds_0}\vartheta(t,\ t_0)\,ds, \tag{94}$$

где s и s_0 — дуговые абсциссы точек t и t_0 на S, $t_0' = \frac{dt_0}{ds_0}$, $t' = 1/\frac{dt}{ds}$, $\vartheta(t, t_0) = \arg(t-t_0)$. В первом слагаемом в правой части (94) интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, а во втором слагаемом — в обычном смысле из-за непрерывности функции $\frac{d}{ds_0}\vartheta(t, t_0)$ (см. гл. I, § 4, 1°).

Обозначим соответственно через t_1 и t_2 точки на S с дуговыми абсциссами $s_0-\varepsilon$ и $s_0+\varepsilon$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$, а через S_ε — часть S вне дуги $\widehat{t_1t_0t_2}$.

Очевидно, что равномерно относительно t_0

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(t_0) = u(t_0),$$

где

$$u_\varepsilon(t_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_{S_\varepsilon} \log|t-t_0|\,\mu(t)\,ds. \tag{95}$$

Дифференцируя обе части (95) по s_0, получаем

$$\frac{du_\varepsilon(t_0)}{ds_0} = -\frac{1}{2\pi}\int_{S_\varepsilon} \frac{d}{ds_0}\log|t-t_0|\,\mu(t)\,ds +$$
$$+\frac{1}{2\pi}\mu(t_2)\log|t_2-t_0| - \frac{1}{2\pi}\mu(t_1)\log|t_1-t_0|. \tag{96}$$

Так как

$$\mu(t_2)\log|t_2-t_0| - \mu(t_1)\log|t_1-t_0| =$$
$$= [\mu(t_2)-\mu(t_1)]\log|t_2-t_0| - \mu(t_1)\log\frac{|t_1-t_0|}{|t_2-t_0|},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{|t_1-t_0|}{|t_2-t_0|} = 1$$

и функция μ имеет непрерывную производную второго порядка, то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [\mu(t_2) \log |t_2 - t_0| - \mu(t_1) \log |t_1 - t_0|] = 0.$$

С другой стороны, на основании равенства

$$|t - t_0| = (t - t_0)\, e^{-i\vartheta(t, t_0)}$$

заключаем, что при $t \in S_\varepsilon$

$$\frac{d}{ds_0} \log |t - t_0| = \frac{-t_0'}{t - t_0} - i \frac{d}{ds_0} \vartheta(t, t_0),$$

так что

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{S_\varepsilon} \log |t - t_0|\, \mu(t)\, ds =$$

$$= \frac{t_0'}{2\pi} \int_{S_\varepsilon} \frac{t'\mu(t)\, dt}{t - t_0} + \frac{i}{2\pi} \int_{S_\varepsilon} \frac{d}{ds_0} \vartheta(t, t_0)\, ds.$$

Учитывая то обстоятельство, что функция $t'\mu(t)$ удовлетворяет во всяком случае условию Гёльдера (92), в силу определения интеграла в смысле главного значения по Коши имеем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \frac{t'\mu(t)\, dt}{t - t_0} = \int_{S} \frac{t'\mu(t)\, dt}{t - t_0}.$$

Следовательно, переходя к пределу в равенстве (96) при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{d}{ds_0} u_\varepsilon(t_0) = \frac{t_0'}{2\pi} \int_{S} \frac{t'\mu(t)\, dt}{t - t_0} + \frac{i}{2\pi} \int_{S} \frac{d}{ds_0} \vartheta(t, t_0)\, ds,$$

причем стремление к пределу происходит *равномерно относительно* t_0. Отсюда на основании известной теоремы анализа заключаем, что *для касательной производной потенциала простого слоя имеет место интегральное представление* (94).

3°. Предельные значения интеграла типа Коши. Будем предполагать, что в интеграле типа Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S} \frac{f(t)\, dt}{t - z} \tag{97}$$

контур S является замкнутой кривой Жордана с непрерывной кривизной, а плотность $f(t)$ однозначна и дважды непрерывно дифференцируема.

В этих предположениях (97) можно записать в виде

$$F(z)=u(z)+v(z), \tag{98}$$

где

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_S f(t)\frac{\partial}{\partial\nu_t}\log|t-z|\,ds, \qquad t=t(s) \tag{99}$$

— потенциал двойного слоя с плотностью $f(t)$, а

$$v(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_S f(t)\frac{\partial}{\partial s}\log|t-z|\,ds=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_S \log|t-z|\,f'_s\,ds \tag{100}$$

— потенциал простого слоя с плотностью $\frac{1}{i}f'_s$.

Как было показано в пунктах 2°, 3° § 4 главы I функция $v(z)$ непрерывна на всей плоскости переменного z, а для предельных значений $u(z)$ при $z\to t_0\in S$ соответственно из D^+ и D^- имеют место равенства (см. формулы (54), (55) гл. I)

$$u^+(t_0)=\frac{1}{2\pi}\int_S f(t)\frac{\partial}{\partial\nu_t}\log|t-t_0|\,ds+\frac{1}{2}f(t_0), \tag{101}$$

$$u^-(t_0)=\frac{1}{2\pi}\int_S f(t)\frac{\partial}{\partial\nu_t}\log|t-t_0|\,ds-\frac{1}{2}f(t_0). \tag{102}$$

Кроме того, из (100) имеем

$$v(t_0)=-\frac{1}{2\pi i}\int_S \log|t-t_0|\,f'_s\,ds=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\log|t-t_0|\,f'_s\,ds=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{S_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial s}\log|t-t_0|\,f(t)\,ds+\right.$$

$$\left.+f(t_2)\log|t_2-t_0|-f(t_1)\log|t_1-t_0|\right\},$$

где S_ε — часть S, рассмотренная в предыдущем пункте.

Ввиду того, что

$$\frac{\partial}{\partial s}\log|t-t_0| = \frac{\partial}{\partial s}\log(t-t_0) - i\frac{\partial}{\partial s}\vartheta(t, t_0) = \\ = \frac{t'}{t-t_0} - i\frac{\partial}{\partial s}\vartheta(t, t_0)$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[f(t_2)\log|t_2-t_0| - f(t_1)\log|t_1-t_0|] = 0,$$

для $v(t_0)$ имеет выражение

$$v(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f(t)\,dt}{t-t_0} - \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial s}\vartheta(t, t_0) f(t)\,ds = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\partial}{\partial s}\log|t-t_0| f(t)\,ds. \quad (103)$$

На основании (101), (102) и (103) заключаем, что *существуют предельные значения* $F^+(t_0)$ *и* $F^-(t_0)$ *интеграла типа Коши* (97) *при* $z \to t_0 \in S$ *соответственно из* D^+ *и* D^- *и*

$$F^+(t_0) = \frac{1}{2}f(t_0) + \frac{1}{2\pi}\int_S f(t)\frac{\partial}{\partial \nu_t}\log|t-t_0|\,ds + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\partial}{\partial s}\log|t-t_0| f(t)\,ds,$$

$$F^-(t_0) = -\frac{1}{2}f(t_0) + \frac{1}{2\pi}\int_S f(t)\frac{\partial}{\partial \nu_t}\log|t-t_0|\,ds + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\partial}{\partial s}\log|t-t_0| f(t)\,ds,$$

откуда в силу очевидного равенства

$$\frac{\partial}{\partial s}\log|t-t_0| + i\frac{\partial}{\partial \nu_t}\log|t-t_0| = \frac{t'}{t-t_0}$$

имеем

$$F^+(t_0) = \frac{1}{2}f(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f(t)\,dt}{t-t_0}, \quad (104)$$

$$F^-(t_0) = -\frac{1}{2}f(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f(t)\,dt}{t-t_0}. \quad (105)$$

Из равенств (104) и (105) непосредственно получаем равенства

$$F^+(t_0) - F^-(t_0) = f(t_0), \tag{106}$$

$$F^+(t_0) + F^-(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_S \frac{f(t)\,dt}{t - t_0}, \tag{107}$$

носящие название формул Сохоцкого — Племеля.

4°. **Понятие кусочно-аналитической функции.** Выводы пунктов 1°, 2°, 3° настоящего параграфа остаются в силе и при более общих предположениях относительно кривой S и заданных на ней функций $f(t)$ и $\mu(t)$. В частности, формулы (104), (105), (106) и (107) имеют место и тогда, когда $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера, а S является *кривой Ляпунова, т. е. угол $\theta(t)$, составленный касательной к S в точке t с некоторым постоянным направлением* (например, с направлением действительной оси плоскости комплексного переменного z), *также удовлетворяет условию Гёльдера.*

В силу представления (93) интеграла в смысле главного значения по Коши из формул (104) и (105), очевидно, следует, что $F^+(t_0)$ *и* $F^-(t_0)$ *являются непрерывными функциями.* Более того, *если $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем h, $0 < h < 1$, то предельные значения $F^+(t_0)$ и $F^-(t_0)$ также удовлетворяют условию Гёльдера с показателем h.* Ниже мы будем пользоваться этим утверждением, но на его доказательстве здесь останавливаться не будем.

Говорят, что заданная в области D функция $\Phi(z)$ *непрерывно продолжима всюду на границе* S этой области, если для любого $t \in S$ существует предел

$$\lim_{z \to t} \Phi(z), \qquad z \in D.$$

Из приведенного выше рассуждения следует, что *представленная интегралом типа Коши функция при принятых предположениях относительно S и f непрерывно продолжима на S как из D^+, так и из D^-.*

Функцию $\Phi(z)$, аналитическую как в D^+, так и в D^- и непрерывно продолжимую всюду на границе S этих областей, будем называть *кусочно-аналитической* (или *кусочно-голоморфной*) на плоскости комплексного переменного z. Из выводов предыдущего пункта следует, что *представленная интегралом типа Коши* (97) *функция* $F(z)$, *когда плотность* $f(t)$ *удовлетворяет условию Гёльдера, является кусочно-аналитической.*

Разность $\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=g(t)$ будем называть *скачком* кусочно-аналитической функции $\Phi(z)$.

Когда $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ являются непрерывными функциями и $g(t)=0$ всюду на S, в силу доказанного в пункте 2° предыдущего параграфа принципа непрерывности заключаем, что $\Phi(z)$ *является аналитической функцией на всей плоскости переменного* z *и, стало быть, в силу пункта* 6° § 3 *настоящей главы* $\Phi(z)$ *либо постоянна* (*в частности, нуль*), *либо полином, либо целая трансцендентная функция.*

5°. Приложения к краевым задачам. В приложениях часто встречается следующая краевая задача: *требуется определить кусочно-аналитическую функцию* $\Phi(z)$ *по краевому условию*

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=g(t), \qquad t\in S, \tag{108}$$

где $g(t)$ — *заданная функция, удовлетворяющая условию Гёльдера.*

Когда S — замкнутая кривая Ляпунова, одно из решений задачи (108) в силу формулы (106) дается интегралом типа Коши

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\frac{g(t)\,dt}{t-z}.$$

Если обозначить через $\Phi(z)$ общее решение этой задачи, то для разности $\Phi(z)-\Phi_1(z)=\Omega(z)$ в силу (108) будем иметь

$$\Omega^+(t)-\Omega^-(t)=0, \qquad t\in S,$$

и, следовательно, $\Omega(z)=P(z)$, т. е.

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\frac{g(t)\,dt}{t-z}+P(z), \tag{109}$$

где $P(z)$ — произвольная целая функция.

Если в задаче (108) дополнительно требовать, чтобы $\Phi(z)$ на бесконечности имела полюс порядка n, $n\geqslant 1$, или была ограничена, то в формуле (109) в качестве $P(z)$ следует писать соответственно произвольный полином степени n или произвольную постоянную C.

Так как в окрестности бесконечно удаленной точки в силу (109)

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}}\int_S g(t)\,t^k\,dt + P_n(z),$$

то *решение задачи* (108), *имеющее нуль порядка n на бесконечности, всегда существует при $n=1$ и существует лишь при соблюдении условий*

$$\int_S g(t)\,t^k\,dt = 0, \qquad k = 0, \ldots, n-1,$$

при $n>1$, причем в обоих случаях имеет место единственность решения и это решение дается формулой (109), *в которой $P(z)=0$.*

Решение задачи отыскания кусочно-аналитической функции $\Psi(z)$, удовлетворяющей краевому условию

$$\Psi^+(t) + \Psi^-(t) = g(t), \qquad t \in S,$$

очевидно, дается формулой

$$\Psi(z) = \begin{cases} \Phi(z), & z \in D^+, \\ -\Phi(z), & z \in D^-, \end{cases}$$

где $\Phi(z)$ — решение задачи (108).

Когда S представляет собой прямую, например действительную ось, а D^+ и D^- обозначают соответственно верхнюю и нижнюю полуплоскости, то решение задачи (108), *ограниченное на всей плоскости, дается формулой*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t)\,dt}{t-z} + C, \tag{110}$$

где C — произвольная постоянная.

Для того чтобы убедиться в справедливости сформулированного утверждения, отобразим конформно

$$w = \frac{z-i}{z+i}$$

верхнюю полуплоскость D^+ на круг $|w|<1$ (см. пункт 5° § 1 настоящей главы).

Если $\Phi(z)$ — решение задачи (108) в рассматриваемом случае, то функция

$$F(w) = \Phi\left(i\,\frac{1+w}{1-w}\right) \tag{111}$$

будет решением краевой задачи

$$F^+(\tau) - F^-(\tau) = g_1(\tau), \qquad |\tau| = 1, \tag{112}$$

где

$$g_1(\tau) = g\left(i\frac{1+\tau}{1-\tau}\right).$$

Ограниченное решение задачи (112) в силу (109) имеет вид

$$F(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1} \frac{g_1(\tau)\,d\tau}{\tau - w} + C_1, \tag{113}$$

где C_1 — произвольная постоянная. В силу (111) из (113) получаем

$$\Phi(z) = F\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{z+i}{t+i}\,\frac{g(t)\,dt}{t-z} + C_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)\,dt}{t-z} + C,$$

где

$$C = C_1 - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)\,dt}{t+i}.$$

Интеграл в правой части (110) понимается как предел выражения

$$\int\limits_{-N'}^{N''} \frac{g(t)\,dt}{t-z}, \tag{114}$$

когда положительные постоянные N' и N'' независимо друг от друга стремятся к бесконечности. Очевидно, что в этом случае от функции $g(t)$ следует потребовать, чтобы для достаточно больших $|t|$ она имела вид

$$g(t) = O\left(\frac{1}{|t|^h}\right), \qquad h > 0,$$

где $O\left(\frac{1}{|t|^h}\right)$ — бесконечно малая величина того же порядка, что и $\frac{1}{|t|^h}$ при $t \to \infty$. Когда же для достаточно больших $|t|$

$$g(t) = \text{const} + O\left(\frac{1}{|t|^h}\right), \quad h > 0, \quad \text{const} \neq 0,$$

в выражении (114) надо считать, что $N' = N''$, т. е.

интеграл в правой части (110) следует понимать в смысле главного значения.

Пользуясь решением (110) задачи (108), легко получить формулу Шварца

$$F(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\,dt}{t-z}+iC, \tag{115}$$

определяющую с точностью до чисто мнимой аддитивной постоянной iC *ограниченную, аналитическую в верхней полуплоскости* D^+ *функцию* $F(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, *непрерывную вплоть до действительной оси* $y=0$ *и удовлетворяющую краевому условию*

$$\operatorname{Re}F(t)=f(t),\quad -\infty<t<\infty, \tag{116}$$

где $f(t)=O\left(\frac{1}{|t|^h}\right)$, $h>0$, *для больших* $|t|$.

Действительно, запишем условие (116) в виде

$$F^+(t)+\overline{F^+(t)}=2f(t),\quad -\infty<t<\infty, \tag{117}$$

и введем функцию

$$G(z)=\begin{cases} F(z), & z\in D^+,\\ -\overline{F(\bar z)}=-\bar F(z), & z\in D^-.\end{cases}$$

Функция $G(z)$ непрерывно продолжима на всю действительную ось как из D^+, так и из D^-. Поскольку $\bar F(z)=u(x,-y)-iv(x,-y)$ при $z\in D^-$, условие (117) равносильно условию

$$G^+(t)-G^-(t)=2f(t),\quad -\infty<t<\infty.$$

Поэтому в силу (110) имеем

$$G(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\,dt}{t-z}+\text{const};$$

функция $F(z)=G(z)$, очевидно, будет решением задачи (116), когда $\text{const}=iC$, где C — произвольная действительная постоянная.

Заметим, что *формула* (115) *дает решение задачи* (116) *и в тех случаях, когда в конечном числе точек действительной оси функция* $f(t)$ *имеет интегрируемые особенности.*

Пользуясь этим замечанием, покажем, что формула Шварца (115) позволяет в квадратурах выписать решение следующей краевой задачи: *определить аналитическую в верхней полуплоскости D^+ функцию $\Phi(z)$, непрерывную вплоть до действительной оси всюду, кроме точек $z=-a$, $z=a$, в которых она может обращаться в бесконечность интегрируемого порядка, имеющего нуль первого порядка на бесконечности и удовлетворяющую краевым условиям*

$$\operatorname{Re}\Phi(t)=f(t), \quad -a<t<a, \quad a>0, \tag{118}$$

$$\operatorname{Im}\Phi(t)=0, \quad -\infty<t<-a, \quad a<t<\infty, \tag{119}$$

где $f(t)$ — заданная на интервале $-a<t<a$ действительная функция, удовлетворяющая условию Гёльдера.

В самом деле, выбирая однозначную ветвь функции $\sqrt{a^2-z^2}$, действительную при $-a<z<a$, введем новую функцию

$$F(z)=\sqrt{a^2-z^2}\,\Phi(z),$$

где $\Phi(z)$ — искомое решение задачи (118), (119).

Функция $F(z)$ аналитична и ограничена в верхней полуплоскости D^+ и удовлетворяет краевым условиям

$$\operatorname{Re}F(t)=\begin{cases}\sqrt{a^2-t^2}\,f(t), & -a<t<a,\\ 0, & -\infty<t<-a, \quad a<t<\infty.\end{cases}$$

Решение этой задачи дается формулой (115):

$$F(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t-z}f(t)\,dt+iC,$$

откуда находим

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a^2-t^2}{a^2-z^2}}\,\frac{f(t)\,dt}{t-z}+\frac{iC}{\sqrt{a^2-z^2}}. \tag{120}$$

За счет подбора постоянной C можно добиться того, *чтобы функция $\Phi(z)$ была ограничена на одном из концов интервала* $(-a, a)$. Так, например, когда

$$C=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-t^2}\,\frac{f(t)\,dt}{t-a},$$

формула (120) дает ограниченное при $z=a$ единственное решение задачи (118), (119):

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{(a+t)(a-z)}{(a-t)(a+z)}}\frac{f(t)\,dt}{t-z}, \tag{121}$$

где под $\sqrt{\frac{(a-z)}{(a+z)}}$ понимается ветвь этой функции, обращающаяся в i при $z\to\infty$.

§ 6. Функции нескольких переменных

1°. Вводные понятия и обозначения. Упорядоченную систему $z=(z_1, \ldots, z_n)$ значений комплексных переменных $z_k=x_k+iy_k$, $k=1, \ldots, n$, будем называть *точкой n-мерного комплексного векторного пространства C^n* этих переменных. Пространство C^n можно интерпретировать как $2n$-мерное евклидово пространство действительных переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$.

Множество точек $z\in C^n$, удовлетворяющих условиям

$$|z_k-z_k^0|<r_k, \quad k=1, \ldots, n,$$

где r_k — положительные числа, называется *открытым полицилиндром $C(r, z^0)$ радиуса $r=(r_1, \ldots, r_n)$ с центром в точке z^0*, а множество точек $z\in C^n$, удовлетворяющих условиям

$$|z_k-z_k^0|\leqslant z_k, \quad k=1, \ldots, n,$$

— *замкнутым полицилиндром* $\overline{C(r, z^0)}$. Точки $z\in C^n$, для которых имеют место равенства $|z_k-z_k^0|=r_k$, $k=1, \ldots, n$, составляют *остов* полицилиндра $C(r, z^0)$.

Понятие полицилиндра позволяет ввести понятия окрестности заданной точки, внутренней, предельной и изолированной точек для множества E точек пространства C^n, а также понятия открытого, замкнутого и ограниченного множества в C^n.

Пусть E и E_1 — множества из C^n и на плоскости комплексного переменного w соответственно. Когда указан закон, по которому каждому значению $z\in E$ поставлено в соответствие вполне определенное значение $w\in E_1$, говорят, что w является однозначной функцией переменного z или *функцией нескольких переменных* $z_1, \ldots, z_n$, и пишут

$$w = f(z) = f(z_1, \ldots, z_n).$$

Заданная на множестве E функция $f(z)$ называется *непрерывной* (или *непрерывной по совокупности переменных* $z_1, \ldots, z_n$) в предельной точке этого множества $z^0 \in E$, если для любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ можно указать систему положительных чисел $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ такую, что для любых двух точек $z' \in E \cap C(\delta, z^0)$, $z'' \in E \cap C(\delta, z^0)$ имеет место неравенство $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$.

Понятие равномерной непрерывности заданной на множестве E функции $f(z)$, а также понятия сходимости и равномерной сходимости последовательности функций $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, $z \in E$, вводятся точно таким же образом, как и в случае функций одного комплексного переменного.

Конечная сумма

$$\sum a_{k_1 \ldots k_n} z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n} = P_m(z),$$

где $a_{k_1 \ldots k_n}$ — заданные комплексные числа с индексами $k_1, \ldots k_n$, принимающими неотрицательные целые значения, причем $\sum\limits_{j=1}^{n} k_j = m$, носит название *однородного полинома переменных* $z_1, \ldots, z_n$ *степени* m. Очевидно, что $P_m(z)$ *является непрерывной функцией* для всех конечных значений z.

2°. Понятие аналитической функции нескольких переменных. Пусть $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — заданная в некоторой области D пространства C^n функция, действительная и мнимая части которой как функции действительных переменных $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ непрерывны вместе с производными первого порядка в области их задания.

Приращение Δw функции $w = f(z)$, когда переменные z_k принимают приращение Δz_k, $k = 1, \ldots, n$, запишем в виде

$$\Delta w = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial z_k} \Delta z_k + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} \Delta \bar{z}_k \right) + o(|\Delta z|), \tag{122}$$

где
$$\frac{\partial}{\partial z_k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}-i\frac{\partial}{\partial y_k}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \bar z_k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}+i\frac{\partial}{\partial y_k}\right),$$
$$\Delta z_k=\Delta x_k+i\,\Delta y_k,\quad \Delta\bar z_k=\Delta x_k-i\,\Delta y_k,$$

а $o(|\Delta z|)$ — бесконечно малая величина высшего порядка по сравнению с $|\Delta z|=\sum_{k=1}^{n}|\Delta z_k|$.

Если часть
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial z_k}\Delta z_k+\frac{\partial f}{\partial \bar z_k}\Delta\bar z_k\right)$$
приращения (122) функции $f(z)$ в каждой точке $z\in D$ является линейной формой лишь относительно Δz_k, $k=1,\ \ldots,\ n$, т. е. если в каждой точке $z\in D$ имеют место равенства
$$\frac{\partial f}{\partial \bar z_k}=0,\quad k=1,\ \ldots,\ n, \tag{123}$$
то функция $f(z)$ называется *аналитической в области* D.

Равенства (123) представляют собой комплексную запись систем действительных равенств
$$\frac{\partial u}{\partial x_k}-\frac{\partial v}{\partial y_k}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y_k}+\frac{\partial v}{\partial x_k}=0,\quad k=1,\ \ldots,\ n, \tag{CR}$$
носящих название *условий Коши — Римана* для функции нескольких переменных $f(z)$.

Выражение
$$dw=df=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_k}dz_k \tag{124}$$
называется *полным дифференциалом* аналитической функции $f(z)$.

Из приведенного выше определения аналитической функции $f(z)=f(z_1,\ \ldots,\ z_n)$ следует, что *эта функция непрерывна по совокупности переменных* $z_1,\ \ldots,\ z_n$ *и аналитична относительно каждого переменного* z_k *в смысле определения аналитической функции одного комплексного переменного* (см. пункт 1° § 1 настоящей главы). Имеет место и обратное утверждение: *если в области D функция $f(z)$ аналитична по каждому из переменных z_k, $k = 1, \ldots, n$, то она аналитична в области D.* Содержание этого утверждения известно под названием **теоремы Гартогса**, которую мы здесь приводим без доказательства.

Коэффициент $\frac{\partial f}{\partial z_k}$ при dz_k в правой части формулы (124) называется *частной производной* аналитической функции $f(z)$ по переменному z_k и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial z_k} = \lim_{\Delta z_k \to 0} \frac{f(z_1, \ldots, z_k + \Delta z_k, \ldots, z_n) - f(z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_n)}{\Delta z_k} =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x_k} + i\frac{\partial v}{\partial x_k} = -i\frac{\partial u}{\partial y_k} + \frac{\partial v}{\partial y_k}.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в аналитичности полиномов от переменных $z_1, \ldots, z_n$.

3°. Степенной ряд с несколькими переменными. Функциональный ряд вида

$$\sum \alpha_{k_1 \ldots k_n} z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}, \tag{125}$$

где $\alpha_{k_1 \ldots k_n}$ — заданные числа, причем суммирование производится по всем индексам k_j, $j = 1, \ldots, n$, от нуля до бесконечности, называется *степенным рядом нескольких переменных* $z_1, \ldots, z_n$ или *кратным степенным рядом.*

Известное из курса математического анализа утверждение (лемма Абеля), что *сходимость степенного ряда одного переменного z*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$$

в точке $z_0 \neq 0$ комплексной плоскости z влечет за собой абсолютную сходимость ряда в круге $|z| < |z_0|$, перестает быть справедливым для рядов вида (125). Однако, *если коэффициенты $\alpha_{k_1 \ldots k_n}$ степенного ряда* (125) *для всех значений индексов удовлетворяют условиям*

$$\left|\alpha_{k_1 \ldots k_n} |z_1|^{k_1} \ldots |z_n|^{k_n}\right| \leqslant \frac{g}{r_1^{k_1} \ldots r_n^{k_n}}, \quad r_j > 0, \tag{126}$$

где g — положительное число, не зависящее от $k_1, \ldots, k_n$, *то этот ряд абсолютно сходится в открытом полицилиндре $C(r, 0)$, $r=(r_1, \ldots, r_n)$, причем сходимость равномерная на каждом замкнутом ограниченном подмножестве точек полицилиндра $C(r, 0)$.*

Заметим, что при $z \in C(r, 0)$ ряд

$$\sum_{k_1 \geqslant 0, \ldots, k_n \geqslant 0} g \left|\frac{z_1}{r_1}\right|^{k_1} \cdots \left|\frac{z_n}{r_n}\right|^{k_n}$$

представляет собой кратную геометрическую прогрессию, суммой которой является выражение

$$g\left(1-\frac{|z_1|}{r_1}\right)^{-1} \cdots \left(1-\frac{|z_n|}{r_n}\right)^{-1}.$$

Для каждого члена ряда (125) в силу (126) имеет место оценка

$$|\alpha_{k_1 \ldots k_n}| \leqslant g\left|\frac{z_1}{r_1}\right|^{k_1} \cdots \left|\frac{z_n}{r_n}\right|^{k_n}. \tag{127}$$

Из наличия оценки (127) следует справедливость сформулированного утверждения.

На основании абсолютной сходимости ряда (125) в полицилиндре $C(r, 0)$ мы можем сгруппировать его члены таким образом, чтобы этому ряду придать вид

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m(z), \tag{128}$$

где $P_m(z)$ — однородные полиномы переменных $z_1, \ldots, z_n$ степени m.

Так как ряд (128) сходится равномерно на каждом замкнутом подмножестве полицилиндра $C(r, 0)$ и P_m являются аналитическими функциями по каждому из переменных z_k, $k=1, \ldots, n$, в силу первой теоремы Вейерштрасса (см. пункт 2° § 3 настоящей главы) заключаем, что сумма этого ряда $s(z)$ аналитична по любому из этих переменных, причем каждый член продифференцированного, например, один раз по переменному z_k, ряда (128) не превосходит по модулю соответствующего члена геометрической прогрессии, суммой которой является выражение

$$\frac{g}{r_k}\left(1-\frac{|z_1|}{r_1}\right)^{-1} \cdots \left(1-\frac{|z_k|}{r_k}\right)^{-2} \cdots \left(1-\frac{|z_n|}{r_n}\right)^{-1},$$

Следовательно, в силу теоремы Гартогса *сумма* $s(z)$ *степенного ряда* (125) *является аналитической функцией в полицилиндре* $C(r, 0)$.

Все сказанное выше остается в силе при рассмотрении степенного ряда вида

$$\sum \alpha_{k_1 \dots k_n} (z_1 - z_1^0)^{k_1} \dots (z_n - z_n^0)^{k_n},$$

где $z^0 = (z_1^0, \dots, z_n^0)$ — конечная точка пространства C^n.

4°. Интегральная формула Коши и теорема Тейлора. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области $D \subset C^n$ и точка $z^0 \in D$. Для достаточно малых $r_1, \dots, r_n$ полицилиндр $\overline{C(r, z_0)}$ лежит внутри D. Фиксируя значения переменных z_k в кругах $|z_k - z_k^0| < r_k$, $k \neq j$, аналитическую по переменному z_j функцию $f(z)$ в круге $|z_j - z_j^0| < r_j$ можно представить по формуле Коши (47):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t_j - z_j^0| = r_j} \frac{f(z_1, \dots, t_j, \dots, z_n)}{t_j - z_j} dt_j.$$

Повторением этого рассуждения заключаем, что для всех $z \in C(r, z^0)$ имеет место интегральная формула Коши

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|t_1 - z_1^0| = r_1} dt_1 \dots \int\limits_{|t_n - z_n^0| = r_n} \frac{f(t)\, dt_n}{(t_1 - z_1) \dots (t_n - \ )}. \tag{129}$$

В правой части формулы (129) интегрирование можно совершить в любом порядке, ибо подынтегральная функция непрерывна по совокупности переменных $t_1, \dots, t_n$. Из формулы (129), как и в пункте 4° § 3, заключаем, что *аналитическая функция* $f(z)$ *имеет производные всех порядков по переменным* $z_1, \dots, z_n$, *которые в силу теоремы Гартогса сами являются аналитическими функциями в полицилиндре* $C(r, z^0)$. Поскольку точка $z^0 \in D$ взята произвольно, тем самым доказаны существование и аналитичность всех производных аналитической фуикции $f(z)$.

Так как при $z \in C(r, z^0)$

$$\frac{1}{(t_1 - z_1)\dots(t_n - z_n)} =$$
$$= \frac{1}{(t_1 - z_1^0)\dots(t_n - z_n^0)} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{z_1 - z_1^0}{t_1 - z_1^0}\right)\dots\left(1 - \dfrac{z_n - z_n^0}{t_n - z_n^0}\right)} =$$
$$= \frac{1}{(t_1 - z_1^0)\dots(t_n - z_n^0)} \sum \left(\frac{z_1 - z_1^0}{t_1 - z_1^0}\right)^{k_1}\dots\left(\frac{z_n - z_n^0}{t_n - z_n^0}\right)^{k_n},$$

причем ряд сходится равномерно относительно положения точки t на остове полицилиндра $C(r, z^0)$, то из формулы (129) получаем

$$f(z) = \sum \beta_{k_1\dots k_n} (z_1 - z_1^0)^{k_1}\dots(z_n - z_n^0)^{k_n}, \tag{130}$$

где

$$\beta_{k_1\dots k_n} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|t_1 - z_1^0| = r_1} dt_1 \dots$$
$$\dots \int\limits_{|t_n - z_n^0| = r_n} \frac{f(t)\, dt_n}{(t_1 - z_1^0)^{k_1+1}\dots(t_n - z_n^0)^{k_n+1}}. \tag{131}$$

Из формулы (131) имеем

$$|\beta_{k_1\dots k_n}| \leqslant \frac{M}{r_1^{k_1}\dots r_n^{k_n}},$$

где $M = \max|f(z)|$ при $z \in C(r, z^0)$, откуда следует абсолютная и равномерная сходимость степенного ряда в правой части (130) в полицилиндре $\overline{C(\rho, z^0)}$, где $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$, $\rho_k < r_k$, $k = 1, \dots, n$.

Таким образом, доказана следующая теорема Тейлора: *аналитическая в области D функция $f(z)$ в окрестности каждой точки $z^0 \in D$ представляется в виде суммы абсолютно сходящегося степенного ряда* (130), *коэффициенты которого вычисляются по формуле* (131).

Поскольку в силу формулы (129)

$$\frac{\partial^l f(z)}{\partial z_k^l} = \frac{l!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|t_1 - z_1^0| = r_1} dt_1 \dots \int\limits_{|t_k - z_k^0| = r_k} dt_k \dots$$
$$\dots \int\limits_{|t_n - z_n^0| = r_n} \frac{f(t)\, dt}{(t_1 - z_1)\dots(t_k - z_k)^{l+1}\dots(t_n - z_n)},$$

для коэффициентов $\beta_{k_1 \dots k_n}$ наряду с формулой (131) имеем

$$\beta_{k_1 \dots k_n} = \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \left(\frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}} \right)_{z = z^0}. \tag{132}$$

На основании изложенных выше свойств степенных рядов и теоремы Тейлора заключаем, что приведенное в пункте 2° настоящего параграфа определение аналитической функции эквивалентно определению: *однозначная в области D функция $F(z)$ называется аналитической, если для каждой точки $z^0 \in D$ существует окрестность, в которой $F(z)$ можно представить в виде сходящегося (абсолютно) степенного ряда*

$$F(z) = \sum \gamma_{k_1 \dots k_n} (z_1 - z_1^0)^{k_1} \dots (z_n - z_n^0)^{k_n}. \tag{133}$$

Пользуясь интегральной формулой Коши, непосредственно убеждаемся в том, что *коэффициенты $\gamma_{k_1 \dots k_n}$ однозначно определяются по формулам* (131) *и* (132), *в которых функция f заменена через F.* В случае действительных $z_1, \dots, z_n$ это определение аналитической функции совпадает с известным из курса математического анализа определением аналитичности функции многих действительных переменных.

5°. Аналитические функции действительных переменных. Функция $f(x)$ называется *аналитической* в области D евклидова пространства E_n, если для каждой точки $x^0 \in D$ существует параллелепипед

$$|x_k - x_k^0| < \delta_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

в котором $f(x)$ представляется в виде суммы абсолютно сходящегося степенного ряда

$$f(x) = \sum_{k_1 \geq 0, \dots, k_n \geq 0} a_{k_1 \dots k_n} (x_1 - x_1^0)^{k_1} \dots (x_n - x_n^0)^{k_n}. \tag{134}$$

Коэффициенты этого ряда, очевидно, выражаются через $f(x)$ по формулам

$$a_{k_1 \dots k_n} = \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \left(\frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right)_{x = x^0}.$$

Класс аналитических функций обширен. В этот класс входят, в частности, гармонические функции. При доказательстве аналитичности гармонических функций обычно пользуются формулой Пуассона (см. формулу (20) из гл. I). Мы здесь ограничимся рассмотрением гармонических функций в случае $n=2$.

Итак, пусть $x_1=x$, $x_2=y$ и $x_1^0=x_0$, $x_2^0=y_0$, а D — область плоскости комплексного переменного $z=x+iy$, в которой задана гармоническая функция $u(x, y)$. В круге $|z-z_0|<R$, где $z_0=x_0+iy_0$ — произвольно фиксированная точка в D, а число R меньше, чем расстояние от z_0 до границы области D, функцию $u(x, y)$ представим по формуле Шварца (см. формулу (86) настоящей главы):

$$u(x, y)=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|t-z_0|=R}\frac{u(t)\,dt}{t-z}+C\right). \tag{135}$$

Поскольку при $|z-z_0|<|t-z_0|$

$$\frac{1}{t-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(t-z_0)^{k+1}},$$

из формулы (135) имеем

$$u(x, y)=\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k(z-z_0)^k, \tag{136}$$

где

$$\beta_0=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|t-z_0|=R}\frac{u(t)\,dt}{t-z_0}+C,$$

$$\beta_k=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|t-z_0|=R}\frac{u(t)\,dt}{(t-z_0)^{k+1}},\qquad k=1,\ 2,\ \ldots$$

Группируя члены в правой части (136) соответствующим образом (такое право мы имеем из-за абсолютной сходимости степенного ряда), получаем ряд по степеням $x-x_0$ и $y-y_0$:

$$u(x, y)=\sum_{k,\ j=0}^{\infty}\gamma_{kj}(x-x_0)^k(y-y_0)^j, \tag{137}$$

коэффициенты которого вычисляются по формуле

$$\gamma_{kj}=\frac{1}{k!\,j!}\left(\frac{\partial^{k+j}u}{\partial x^k\partial y^j}\right)_{z=z_0}.$$

Так как ряд в правой части (136) сходится при $|z-z_0|<R$, то степенной ряд (137) сходится абсолютно в параллелепипеде $|x-x_0|<r_1$, $|y-y_0|<r_2$, где $r_1^2+r_2^2<R^2$, и тем самым аналитичность $u(x, y)$ доказана.

Поскольку ряд (137) сходится абсолютно в полицилиндре $C(r, z_0)$ комплексных переменных $z_1=x+ix'$, $z_2=y+iy'$ при $r_1^2+r_2^2<R^2$, то его сумму

$$u(z_1, z_2)=\sum_{k, l=0}^{\infty} \gamma_{kl}(z_1-x_0)^k(z_2-y_0)^l,$$

представляющую аналитическую функцию в $C(r, z_0)$ (см. пункт 3° настоящего параграфа), естественно называть *аналитическим продолжением* гармонической функции $u(x, y)$ из параллелепипеда $|x-x_0|<r_1$, $|y-y_0|<r_2$ в полицилиндр $C(r, z_0)$.

6°. Конформные отображения в евклидовых пространствах. В области D евклидова пространства E_n точек $x=(x_1, \ldots, x_n)$ рассмотрим систему действительных функций $y_i=y_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i=1, \ldots, n$, непрерывных вместе с производными первого порядка, осуществляющую взаимно однозначное отображение области D на некоторую область $D_1\subset E_n$.

В векториых обозначениях это отображение запишем в виде

$$y=y(x). \tag{138}$$

Для квадратов $|dx|^2=dx\,dx$, $|dy|^2=dy\,dy$ расстояний между точками x, $x+dx$ и y, $y+dy$ (элементов длин) примем обозначения ds^2 и $d\sigma^2$ соответственно.

Отображение (138) называется *конформным по Гауссу*, если существует такая скалярная функция $\lambda(x)$, что

$$d\sigma^2=\lambda\,ds^2. \tag{139}$$

Другими словами, конформность отображения (138) озиачает, что *имеет место постоянство искажения масштаба (элемента длины) по всем направлениям, выходящим из точки x.*

Условие (139) равносильно равенствам

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial y}{\partial x_i}=\lambda(x), \quad \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial y}{\partial x_k}=0, \quad i\neq k, \quad i, k=1, \ldots, n. \tag{140}$$

При отображении (138) векторам dx и δx, выходящим из точки x, соответствуют векторы dy и δy, выходящие из точки y. Так как

$$dy_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} dx_k, \quad \delta y_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \delta x_k,$$

то в силу (139) будем иметь

$$\cos \widehat{dy\,\delta y} = \frac{dy\,\delta y}{|dy|\,|\delta y|} = \frac{dx\,\delta x}{|dx|\,|\delta x|} = \cos \widehat{dx\,\delta x}.$$

Следовательно, для конформного отображения характерным является *сохранение* (*консерватизм*) *углов*.

Параллельный перенос $y = x + h$, преобразование подобия $y = \mu x$ и ортогональное преобразование $y = Cx$, где $h = (h_1, \ldots, h_n)$ — постоянный вектор, μ — скалярная постоянная, а C — постоянная ортогональная матрица, дают тривиальные примеры конформного отображения в пространстве. В первом и третьем случаях $\lambda = 1$, а во втором случае $\lambda = \mu^2$.

Отображение

$$y = \frac{x}{|x|^2} \tag{141}$$

имеет смысл для всех конечных значений x, отличных от $x = 0$, и оно называется *инверсией* или *зеркальным отображением пространства* E_n *относительно сферы* $|x| = 1$.

Умножая обе части равенства (141) скалярно на x, получаем

$$xy = 1. \tag{142}$$

На основании (141) и (142) заключаем, что $|x|\,|y| = 1$, т. е. при инверсии соответствующие друг другу точки x и y лежат на одном луче, выходящем из точки 0, причем произведение расстояний этих точек от точки 0 равно единице. Так как $\frac{1}{|x|^2} = |y|^2$, непосредственно получаем однозначное обращение равенства (141) при $x \neq 0$, $y \neq 0$:

$$x = \frac{y}{|y|^2}.$$

Поскольку при $x \neq 0$ в результате дифференцирования равенства (141) имеем

$$dy = \frac{|x|^2 dx - 2(x\,dx)\,x}{|x|^4},$$

для $|dy|^2$ получаем выражение

$$|dy|^2 = \frac{|dx|^2}{|x|^4},$$

т. е. *инверсия* (141) *при* $x \neq 0$ *является конформным отображением, причем* $\lambda = \frac{1}{|x|^4}$.

В случае $n=2$ система (140) равносильна одной из следующих двух линейных систем:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} - \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0$$

или

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} - \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0,$$

и, следовательно, в этом случае *теория конформных отображений полностью описывается теорией однолистных аналитических функций одного комплексного переменного* $z = x_1 + ix_2$ *или* $\bar{z} = x_1 - ix_2$.

В случае же $n > 2$ система уравнений (140) относительно $y_1, \ldots, y_n$ является нелинейной, причем в ней число уравнений больше числа искомых функций.

Ответ на вопрос, насколько переопределена система (140), дает следующая теорема Лиувилля: *в евклидовом пространстве* E_n *при* $n > 2$ *конформное отображение исчерпывается конечным числом суперпозиций четырех видов отображений — параллельного переноса, преобразования подобия, ортогонального преобразования и инверсии.* На доказательстве этого утверждения мы здесь останавливаться не будем.

ГЛАВА III

УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

§ 1. Волновое уравнение

1°. Волновое уравнение с тремя пространственными переменными. Формула Кирхгофа. Ниже будем предполагать, что в пространстве E_{n+1} точек (x, t) буква x обозначает совокупность пространственных переменных x_1, x_2, x_3, а t — время.

В пункте 2° § 3 введения было доказано, что *при требовании существования непрерывных производных второго порядка у функции* $\mu(x_1, x_2, x_3)$, *заданной в пространстве* E_3 *переменных* x_1, x_2, x_3, *функция*

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = tM(\mu),$$

где

$$M(\mu) = \int\limits_{|\xi|=1} \mu(x_1 + t\xi_1, x_2 + t\xi_2, x_3 + t\xi_3)\, d\sigma_\xi, \tag{1}$$

представляет собой регулярное решение волнового уравнения с тремя пространственными переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{2}$$

Так как элемент площади ds_y сферы $|y - x|^2 = t^2$ равен $t^2\, d\sigma_\xi$, где $d\sigma_\xi$ — элемент площади единичной сферы $|\xi|^2 = 1$, то выражение

$$\frac{1}{4\pi} M(\mu) = \frac{1}{4\pi t^2} \int\limits_{|y-x|^2 = t^2} \mu(y_1, y_2, y_3)\, ds_y \tag{3}$$

является интегральным средним функции $\mu(x_1, x_2, x_3)$ по сфере $|y - x|^2 = t^2$.

Очевидно, что наряду с $tM(\mu)$ регулярным решением уравнения (2) является и функция $\frac{\partial}{\partial t}[tM(\mu)]$, если только $\mu(x_1, x_2, x_3)$ имеет непрерывные производные третьего порядка в пространстве E_3 ее задания.

Легко видеть, что *функция*

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi} tM(\psi) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t}[tM(\varphi)] \qquad (4)$$

является регулярным решением задачи Коши для волнового уравнения (2) *с начальными условиями*

$$u(x_1, x_2, x_3, 0) = \varphi(x_1, x_2, x_3), \qquad (5)$$

$$\left.\frac{\partial u(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x_1, x_2, x_3), \qquad (6)$$

где $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ *и* $\psi(x_1, x_2, x_3)$ — *заданные в пространстве* E_3 *переменных* x_1, x_2, x_3 *действительные функции, имеющие непрерывные частные производные третьего и второго порядка соответственно.*

Действительно, как уже было отмечено выше, каждое слагаемое в правой части (4) является регулярным решением уравнения (2) во всех точках (x_1, x_2, x_3, t) пространства E_4 переменных x_1, x_2, x_3, t. При $t=0$ на основании (1) из (4) имеем

$$u(x_1, x_2, x_3, 0) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\xi|=1} \varphi(x_1, x_2, x_3)\, d\sigma_\xi = \varphi(x_1, x_2, x_3).$$

Далее, так как

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}[tM(\psi)] + \frac{1}{4\pi} t \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) M(\varphi),$$

то

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x_1, x_2, x_3, t)\Big|_{t=0} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\xi|=1} \psi(x_1, x_2, x_3)\, d\sigma_\xi =$$

$$= \psi(x_1, x_2, x_3).$$

Равенство (4), дающее решение задачи Коши (5), (6) для волнового уравнения (2) в случае трех пространственных переменных x_1, x_2, x_3, называется **формулой Кирхгофа**.

Физическое явление, описываемое решением $u(x, t)$ волнового уравнения, называется *распространением волны*, а само решение $u(x, t)$ — *волной*.

Поскольку в силу формул (33) и (34) введения

$$\frac{\partial}{\partial t}[tM(\varphi)] = M(\varphi) + \frac{1}{t} \int\limits_S \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\, ds_y,$$

где ν — внешняя нормаль к S в точке y, из формулы Кирхгофа следует, что *соответствующая задаче Коши* (5), (6) *волна в случае трех пространственных переменных в точке* $(x, t) = (x_1, x_2, x_3, t)$ *пространства* E_4 *вполне определяется значениями* φ, $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$ *и* ψ *на сфере* $(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + (y_3-x_3)^2 = t^2$ *с центром в точке* (x_1, x_2, x_3) *радиуса* $|t|$. Этот факт в теории звука называется принципом Гюйгенса.

2°. Волновое уравнение с двумя пространственными переменными. Формула Пуассона. Решение $u(x_1, x_2, t)$ задачи Коши для волнового уравнения с двумя пространственными переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{7}$$

когда начальные данные

$$u(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2), \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial t} u(x_1, x_2, t)\right|_{t=0} = \psi(x_1, x_2) \tag{9}$$

имеют непрерывные частные производные третьего и второго порядка соответственно, может быть получено из формулы Кирхгофа (4) *методом спуска.*

Сущность этого метода заключается в том, что *когда в правой части формулы* (4) *функции* φ *и* ψ *зависят только от двух переменных* x_1, x_2, *то эта формула дает функцию*

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|y^2| = t^2} \psi(x_1 + y_1, x_2 + y_2)\, ds_y + \\ + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t} \int\limits_{|y|^2 = t^2} \varphi(x_1 + y_1, x_2 + y_2)\, ds_y\right], \tag{10}$$

не зависящую от x_3 *и удовлетворяющую как уравнению* (7), *так и начальным условиям* (8) *и* (9).

Как известно, проекция $dy_1\,dy_2$ элемента площади ds_y сферы $|y|^2 = t^2$ на круг $y_1^2 + y_2^2 < t^2$ выражается через ds_y формулой $dy_1\,dy_2 = ds_y \cos(\widehat{i_3, \nu}) = \frac{y_3}{|t|}\, ds_y$, где i_3 — орт оси x_3, а ν — нормаль сферы $|y|^2 = t^2$ в точке (y_1, y_2, y_3). Поэтому, учитывая то обстоятельство, что при вычислении интегралов в правой части формулы (4) следует спроектировать на круг $y_1^2 + y_2^2 < 1$ как верхнюю $y_3 > 0$, так и нижнюю $y_3 < 0$ половины сферы $|y|^2 = t^2$, формула (10) запишется в виде

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_d \frac{\psi(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} + \\ + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_d \frac{\varphi(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)}}, \qquad (11)$$

где d — круг $(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 < t^2$.

Равенство (11) носит название **формулы Пуассона**. Из этой формулы видно, что *для определения волны $u(x_1, x_2, t)$ в точке (x_1, x_2, t) недостаточно знания значений $\varphi(x_1, x_2)$ и $\psi(x_1, x_2)$ на окружности $(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 = t^2$*. В определении $u(x_1, x_2, t)$ в точке (x_1, x_2, t) участвуют значения начальных данных $\varphi(x_1, x_2)$ и $\psi(x_1, x_2)$ во всех точках круга d. А это означает, что *в случае двух пространственных переменных x_1, x_2 в волновых процессах принцип Гюйгенса не имеет места.*

3°. Уравнение колебаний струны. Формула Даламбера. Когда начальные данные φ и ψ зависят только от одного пространственного переменного $x = x_1$, из формулы (11) получаем

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-t}^{t} \psi(x + \eta_1)\, d\eta_1 \int\limits_{-\sqrt{t^2 - \eta_1^2}}^{\sqrt{t^2 - \eta_1^2}} \frac{d\eta_2}{\sqrt{t^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}} + \\ + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{-t}^{t} \varphi(x + \eta_1)\, d\eta_1 \int\limits_{-\sqrt{t^2 - \eta_1^2}}^{\sqrt{t^2 - \eta_1^2}} \frac{d\eta_2}{\sqrt{t^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}} = \\ = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-t}^{t} \psi(x + \eta_1) \arcsin \frac{\eta_2}{\sqrt{t^2 - \eta_1^2}} \Bigg|_{-\sqrt{t^2 - \eta_1^2}}^{\sqrt{t^2 - \eta_1^2}} d\eta_1 + \\ + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{-t}^{t} \varphi(x + \eta_1) \arcsin \frac{\eta_2}{\sqrt{t^2 - \eta_1^2}} \Bigg|_{-\sqrt{t^2 - \eta_1^2}}^{\sqrt{t^2 - \eta_1^2}} d\eta_1 = \\ = \frac{1}{2} \int\limits_{-t}^{t} \psi(x + \eta)\, d\eta + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{-t}^{t} \varphi(x + \eta)\, d\eta = \\ = \frac{1}{2} \varphi(x + t) + \frac{1}{2} \varphi(x - t) + \frac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} \psi(\tau)\, d\tau.$$

Формула

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\varphi(x+t) + \frac{1}{2}\varphi(x-t) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\psi(\tau)\,d\tau, \qquad (12)$$

дающая решение задачи Коши для уравнения колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (13)$$

с начальными данными

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}u(x, t)\Big|_{t=0} = \psi(x),$$

называется формулой Даламбера.

4°. **Понятия области зависимости, области влияния и области определения.** В рассмотренной в предыдущих пунктах настоящего параграфа задаче Коши носителем начальных данных является все пространство E_n переменных $(x_1, \ldots, x_n) = x$.

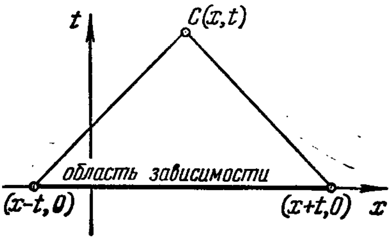

Рис. 17.

Множество точек пространства E_n, по заданным значениям функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, на котором вполне определяется значение решения $u(x, t)$ волнового уравнения в точке (x, t) пространства E_{n+1}, называется *областью зависимости для точки* (x, t). К области зависимости, разумеется, не относятся точки, в которых значения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не участвуют в определении $u(x, t)$ в точке (x, t) (рис. 17).

Как уже было отмечено, в зависимости от того, $n=2$ или $n=1$, областью зависимости для точки (x, t) является круг $|y-x|^2 \leqslant t^2$ или сегмент $|y-x|^2 \leqslant t^2$ пространства E_n, а при $n=3$ область зависимости определяется по принципу Гюйгенса.

Пусть теперь носителем начальных данных является не все пространство E_n, а некоторая его область G, т. е.

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \psi(x), \quad t = 0, \quad x \in G. \qquad (14)$$

Как видно из формул (4), (11) и (12), значения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на G влияют на значения $u(x, t)$ во всех точках (x, t) пространства E_{n+1}, которые обладают тем свойством, что пересечение двух множеств G и $\{|y-x|^2<t^2\}$ не является пустым. Множество всех таких точек принято называть *областью влияния* (рис. 18).

Множество точек $(x, t)\in E_{n+1}$, в которых значения $u(x, t)$ вполне определяются по заданным значениям $\varphi(x)$

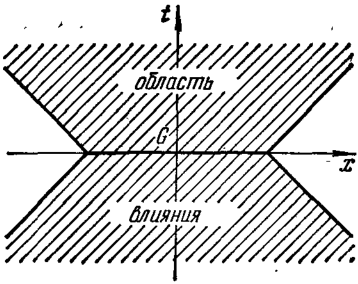

Рис. 18.

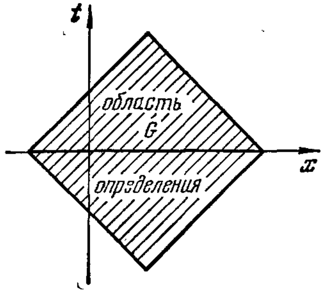

Рис. 19.

и $\psi(x)$ на G, называется *областью определения* или *областью распространения волны* $u(x, t)$ с начальными данными на G (рис. 19).

Опять из формул (4), (11) и (12) видно, что при начальных данных (14) область определения волны $u(x, t)$ составляют исключительно те точки (x, t) пространства E_{n+1}, которые обладают свойством: при $n=3$ сфера $|y-x|^2=t^2$, являющаяся пересечением характеристического конуса $|y-x|^2=(\tau-t)^2$ с вершиной в точке (x, t) с гиперплоскостью $\tau=0$, принадлежит G, при $n=2$ не только окружность $|y-x|^2=t^2$, являющаяся пересечением характеристического конуса $|y-x|^2=(\tau-t)^2$ с вершиной в точке (x, t) с плоскостью $\tau=0$, но весь круг $|y-x|^2\leqslant t^2$ принадлежит G и, наконец, при $n=1$ не только точки $x-t$ и $x+t$ пересечения характеристических прямых $y-x=\tau-t$, $y-x=t-\tau$ (вырожденного характеристического конуса $(y-x)^2=(\tau-t)^2$), проходящих через точку (x, t), с прямой $\tau=0$, но и весь прямолинейный отрезок между этими точками принадлежит G.

§ 2. Неоднородное волновое уравнение

1°. Случай трех пространственных переменных. Запаздывающий потенциал. За носителя начальных данных вместо плоскости $t=0$ примем плоскость $t=\tau_1$, где τ_1 — некоторый параметр, и обозначим через $v(x_1, x_2, x_3, t, \tau_1)$ решение волнового уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{gathered} v(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \tau_1,\ \tau_1)=0, \\ \frac{\partial}{\partial t} v(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t,\ \tau_1)\Big|_{t=\tau_1}=g(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \tau_1), \end{gathered} \tag{15}$$

где $g(x_1, x_2, x_3, \tau_1)$ — заданная действительная функция, имеющая непрерывные частные производные второго порядка.

Заменой t через $t-\tau_1$ из формулы Кирхгофа (4) для v получаем выражение

$$v(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t,\ \tau_1)=\frac{1}{4\pi(t-\tau_1)}\int\limits_{|y-x|^2=(t-\tau_1)^2} g(y_1,\ y_2,\ y_3,\ \tau_1)\,ds_y.$$

Покажем, что *функция*

$$u(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)=\int\limits_0^t v(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t,\ \tau_1)\,d\tau_1 \tag{16}$$

является решением задачи Коши

$$u(x_1,\ x_2,\ x_3,\ 0)=0,\quad \frac{\partial}{\partial t} u(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)\Big|_{t=0}=0 \tag{17}$$

для неоднородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-g(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t). \tag{18}$$

В самом деле, в силу (15) сразу видно, что функция $u(x_1, x_2, x_3, t)$ удовлетворяет начальным условиям (17). Далее, на основании (15) из (16) получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=g(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)+\int\limits_0^t \frac{\partial^2}{\partial t^2} v(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t,\ \tau)\,d\tau. \tag{19}$$

Из (16) и (19) имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-g(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)+$$
$$+\int\limits_0^t\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)v(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t,\ \tau)\,d\tau=$$
$$=-g(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t),$$

что и доказывает справедливость нашего утверждения.

В результате замены переменного $t-\tau_1=\tau$ формула (16) запишется в виде

$$u(x,\ t)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{r^2=\tau^2} g(y_1,\ y_2,\ y_3,\ t-\tau)\frac{ds_y}{\tau}=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{r^2<t^2}\frac{g(y_1,\ y_2,\ y_3,\ t-r)}{r}\,d\tau_y, \qquad (20)$$

где $r=|y-x|$.

Определенная по формуле (20) функция $u(x,\ t)$, дающая решение задачи (17), (18), совпадает с потенциалом объемных масс, распределенных по шару $r^2<t^2$ с плотностью $g(y_1,\ y_2,\ y_3,\ t-r)$. Ввиду того, что функция g участвует в формуле (20) для значения времени $t-r$, отстающего от момента наблюдения за волной, этот потенциал называется *запаздывающим*.

2°. Случай двух и одного пространственных переменных. Приведенная выше процедура построения решения задачи Коши для уравнения (18) применима и в случаях двух и одного пространственных измерений.

Так как функция

$$v(x_1,\ x_2,\ t,\ \tau)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_d\frac{g(y_1,\ y_2,\ \tau)\,dy_1\,dy_2}{\sqrt{(t-\tau)^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}$$

в силу (11) является решением уравнения (7), удовлетворяющим условиям

$$v(x_1,\ x_2,\ \tau,\ \tau)=0,\quad \frac{\partial}{\partial t}v(x_1,\ x_2,\ t,\ \tau)\Big|_{t=\tau}=g(x_1,\ x_2,\ \tau),$$

то *выражение*

$$u(x_1,\ x_2,\ t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_d\frac{g(y_1,\ y_2,\ \tau)\,dy_1\,dy_2}{\sqrt{(t-\tau)^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}, \qquad (21)$$

где d — круг $(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2<(t-\tau)^2$, представляет собой решение задачи Коши

$$u(x_1, x_2, 0)=0, \quad \frac{\partial}{\partial t}u(x_1, x_2, t)\Big|_{t=0}=0$$

для неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-g(x_1, x_2, t). \tag{22}$$

Аналогично убеждаемся в том, что функция

$$v(x, t, \tau)=\frac{1}{2}\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} g(\tau_1, \tau)\,d\tau_1$$

является решением уравнения колебаний струны (13), удовлетворяющим начальным условиям

$$v(x, \tau, \tau)=0, \quad \frac{\partial}{\partial t}v(x, t, \tau)\Big|_{t=\tau}=g(x, \tau),$$

а *функция*

$$u(x, t)=\int\limits_0^t v(x, t, \tau)\,d\tau=\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} g(\tau_1, \tau)\,d\tau_1 \tag{23}$$

представляет собой решение неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-g(x, t), \tag{24}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, 0)=0, \quad \frac{\partial}{\partial t}u(x, t)\Big|_{t=0}=0.$$

В уравнениях (22), (24) и, следовательно, в формулах (21), (23) предполагается, что функции $g(x_1, x_2, t)$, $g(x, t)$ имеют непрерывные частные производные второго и первого порядка соответственно.

§ 3. Задачи, корректно поставленные для гиперболических уравнений

1°. Единственность решения задачи Коши. Докажем, что *задача Коши в приведенной выше постановке для волнового уравнения (как однородного, так и неоднородного) не может иметь более одного решения.* Для простоты рассуждения ограничимся рассмотрением случая одного пространственного измерения $x_1 = x$.

Если $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ являются решениями задачи Коши для уравнения (24), то их разность $u_1(x, t) - u_2(x, t) = u(x, t)$ будет решением уравнения колебаний струны (13), удовлетворяющим начальным условиям

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, t)\Big|_{t=0} = 0. \tag{25}$$

Итак, нам следует показать, что однородное уравнение (13) не может иметь отличного от нуля решения, удовлетворяющего однородным начальным условиям (25). Интегрируя очевидное тождество

$$-2\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = -2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = 0$$

по треугольной области Δ с вершинами в точках $A(x-t, 0)$, $B(x+t, 0)$, $C(x, t)$ и используя формулу (GO), получаем

$$\int_{\Delta}\left[-2\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \tau}\right) + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2\right] d\xi\, d\tau =$$
$$= \int_{AB+BC+CA} -2\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \tau}\, d\tau - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2\right] d\xi = 0. \tag{26}$$

Вдоль AB в силу (25) имеют место равенства $\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial \tau} = 0$. Кроме того, так как уравнения прямолинейных отрезков BC, CA имеют вид $\xi = -\tau + x + t$, $\xi = \tau + x - t$, то вдоль этих отрезков имеем соответственно $d\xi = -d\tau$, $d\xi = d\tau$. Поэтому равенство (26) можно переписать в виде

$$\int_{BC}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2 d\tau - \int_{CA}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2 d\tau = 0$$

или

$$\int_0^t\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2 d\tau + \int_0^t\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2 d\tau = 0,$$

откуда следует, что $\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0$ на BC и $\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0$ на

AC. Следовательно, в вершине $C(x, t)$ треугольника Δ имеют место равенства $\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial t}=0$, $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}=0$, т. е. $\frac{\partial u}{\partial x}=0$, $\frac{\partial u}{\partial t}=0$.

Так как точка $C(x, t)$ выбрана произвольно, то равенства $\frac{\partial u}{\partial x}=0$, $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ имеют место всюду на плоскости переменных x, t. Это означает, что $u(x, t)=\mathrm{const}$. Но в силу (25) функция $u(x, 0)=0$, откуда следует, что $u(x, t)=0$ всюду.

Если $u_1(x, t)$ являются решением неоднородного уравнения (24), удовлетворяющим неоднородным начальным условиям

$$u_1(x, 0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}u_1(x, t)\Big|_{t=0}=\psi(x), \tag{27}$$

то, обозначив через $u_2(x, t)$ решение однородного уравнения (13), удовлетворяющее неоднородным начальным условиям (27) (как известно, это решение строится по формуле Даламбера), разность $u_1(x, t)-u_2(x, t)=u(x, t)$, очевидно, будет решением неоднородного уравнения (24), удовлетворяющим однородным начальным условиям (25). Аналогичной редукцией часто приходится пользоваться на практике.

2°. Корректность постановки задачи Коши. Из формул Кирхгофа, Пуассона, Даламбера, а также из формул (16), (21) и (23) следует, что *малому изменению начальных данных φ и ψ и правой части g волнового уравнения соответствует малое изменение решения задачи Коши.*

Покажем справедливость этого утверждения на примере однородной задачи Коши (25) для неоднородного уравнения (24). Без ограничения общности мы можем считать, что $t>0$.

Если разность $g_1(x, t)-g_2(x, t)=g(x, t)$ между правыми частями неоднородных уравнений

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=-g_1(x, t), \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=-g_2(x, t)$$

достаточно мала, т. е. $|g(x, t)|<\varepsilon$, то для разности $u_1(x, t)-u_2(x, t)=u(x, t)$ между решениями $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ этих уравнений, удовлетворяющими однородным начальным условиям (25), в силу формулы (23) получаем

$$|u(x, t)| = \frac{1}{2}\left|\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} g(\tau_1, \tau)\, d\tau_1\right| < \varepsilon \int_0^t (t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{2}\varepsilon t^2.$$

Следовательно, *малому изменению правой части неоднородного уравнения* (24) *в области ее задания соответствует малое изменение решения задачи Коши* (24), (25), *если область ограничена по переменному* t. Отсюда с учетом свойства единственности решения заключаем, что *для волновых уравнений задача Коши поставлена корректно.*

3°. Общая постановка задачи Коши. До сих пор мы считали, что носителем начальных данных (27) является плоскость $t=0$ пространства E_{n+1} переменных $x_1, \ldots, x_n, t$. Мы сейчас на примере уравнения (13) покажем, каким условиям должен удовлетворять носитель L начальных данных, отличный от $t=0$, и какой вид должны иметь сами начальные данные для того, чтобы полученная в окончательном итоге задача была поставлена корректно.

Обозначим через D область плоскости переменных x, t с кусочно-гладкой жордановой границей S. Пусть $u(x, t)$ — регулярное в области D решение уравнения (13), имеющее непрерывные частные производные в $D \cup S$.

Интегрируя тождество

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\right) = 0 \tag{28}$$

по области D и используя формулу (GO), получаем

$$\int_D \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)\right] dx_1\, dt_1 = \int_S \frac{\partial u}{\partial x_1}\, dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_1}\, dx_1 = 0. \tag{29}$$

Пусть L — разомкнутая кривая Жордана с непрерывной кривизной, удовлетворяющая двум требованиям: а) каждая прямая из двух семейств $x+t=\mathrm{const}$, $x-t=\mathrm{const}$ характеристик уравнения (13) пересекается с кривой L не более чем в одной ее точке и б) направление касательной к кривой ни в одной точке не совпадает с характеристическим направлением, соответствующим уравнению (13).

Предположим, что характеристики $x_1 - x = t_1 - t$, $x_1 - x = t - t_1$, выходящие из точки $C(x, t)$, пересекаются с кривой L в точках A и B. Применяя формулу (29) в области, ограниченной дугой AB кривой L и отрезками характеристик CA и CB, получаем (рис. 20)

$$\int\limits_{AB+BC+CA} \frac{\partial u}{\partial x_1} dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_1} dx_1 = 0. \tag{30}$$

Так как вдоль CA и BC имеем $dx_1 = dt_1$ и $dx_1 = -dt_1$ соответственно, то (30) можно записать в виде

$$\int\limits_{AB} \frac{\partial u}{\partial x_1} dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_1} dx_1 - 2u(C) + u(A) + u(B) = 0,$$

откуда находим

$$u(C) = \frac{1}{2} u(A) + \frac{1}{2} u(B) + \frac{1}{2} \int\limits_{AB} \frac{\partial u}{\partial x_1} dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_1} dx_1. \tag{31}$$

Если решение $u(x, t)$ уравнения (13) удовлетворяет условиям

$$u\Big|_L = \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_L = \psi, \tag{32}$$

где φ и ψ — заданные действительные соответственно дважды и один раз непрерывно дифференцируемые функции, а l — заданный на L достаточно гладкий вектор, нигде не совпадающий с касательной к кривой L, то, определяя $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u}{\partial t_1}$ из равенств

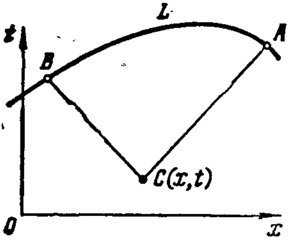

Рис. 20.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial u}{\partial t_1}\frac{dt_1}{ds} = \frac{d\varphi}{ds},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dl} + \frac{\partial u}{\partial t_1}\frac{dt_1}{dl} = \psi,$$

где s — длина дуги L, и подставляя известные значения u, $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u}{\partial t_1}$ в правую часть (31), получим регулярное решение уравнения (13), удовлетворяющее условиям (32).

Задача отыскания регулярного решения уравнения (13), удовлетворяющего условиям (32), также называется *задачей Коши*. Из приведенного рассуждения следует, что *задача Коши в только что указанной постановке имеет единственное устойчивое решение.*

4°. Задача Гурса. (Характеристическая задача.) Пусть теперь L представляет собой совокупность отрезков OA и OB характеристик $x_1-t_1=0$, $x_1+t_1=0$ соответственно. Характеристики $x_1-x=t-t_1$ и $x_1-x=t_1-t$, выходящие из точки $C(x, t)$, пересекаются с OA и OB в точках $A_1\left(\frac{x+t}{2}, \frac{x+t}{2}\right)$ и $B_1\left(\frac{x-t}{2}, -\frac{x-t}{2}\right)$ соответственно (рис. 21).

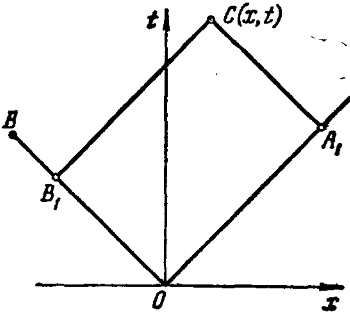

Рис. 21.

Применяя формулу (29) в случае характеристического прямоугольника OA_1CB_1, получаем

$$\int\limits_{OA_1+A_1C+CB_1+B_1O} \frac{\partial u}{\partial x_1}\,dt_1+\frac{\partial u}{\partial t_1}\,dx_1=0$$

или

$$\int\limits_{OA_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}\,dx_1+\frac{\partial u}{\partial t_1}\,dt_1-\int\limits_{A_1C} \frac{\partial u}{\partial x_1}\,dx_1+\frac{\partial u}{\partial t_1}\,dt_1+$$
$$+\int\limits_{CB_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}\,dx_1+\frac{\partial u}{\partial t_1}\,dt_1-\int\limits_{B_1O} \frac{\partial u}{\partial x_1}\,dx_1+\frac{\partial u}{\partial t_1}\,dt_1=$$
$$=2u(A_1)-2u(O)-2u(C)+2u(B_1)=0,$$

откуда имеем

$$u(C)=u(A_1)+u(B_1)-u(O). \tag{33}$$

Если известно, что

$$u|_{OA}=\varphi(x), \quad u|_{OB}=\psi(x), \quad \varphi(0)=\psi(0), \tag{34}$$

то из (33) получаем

$$u(x, t)=\varphi\left(\frac{x+t}{2}\right)+\psi\left(\frac{x-t}{2}\right)-\varphi(0). \tag{35}$$

Из этой формулы следует, что значения u и $\frac{\partial u}{\partial l}$ вдоль характеристик независимо друг от друга нельзя задавать.

Задача определения регулярного решения уравнения (13) по условиям (34) называется *задачей Гурса. Единственное устойчивое решение этой задачи дается формулой* (35). Поскольку в задаче Гурса носителями данных являются характеристики уравнения (13), эта задача называется еще *характеристической задачей.*

5°. Некоторые некорректно поставленные задачи. Так как формула (35) однозначно определяет решение задачи Гурса (34) в характеристическом прямоугольнике OAO_1B, построенном по его соседним сторонам OA и OB, то наперед произвольно задавать $u(x, t)$ еще и на сторонах O_1A и O_1B нельзя. Отсюда следует, что *задача Дирихле* (т. е. задача, в которой носителем данных является замкнутый контур) для уравнения гиперболического типа не является корректно поставленной.

На простом примере можно показать, что в свою очередь для *уравнения Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{36}$$

некорректно поставлена задача Коши.

В самом деле, пусть требуется найти регулярное решение $u(x, y)$ уравнения (36) по начальным условиям

$$u(x, 0)=\tau(x)=0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=\nu(x)=\frac{\sin nx}{n}.$$

Так как $\Delta^k \nu(x)=\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}\nu(x)=(-1)^k n^{2k+1}\frac{\sin nx}{n^2}$, то из формулы (26) введения находим

$$u(x, y)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k n^{2k+1}\frac{\sin nx}{n^2}=$$

$$=\frac{\operatorname{sh} ny\sin nx}{n^2}. \tag{37}$$

Для достаточно большого n функцию $\nu(x)$ можно сделать как угодно малой, в то время как соответствующее решение (37) задачи Коши для уравнения (36) неограничено, когда $n\to\infty$. Следовательно, полученное решение неустойчиво, и стало быть, рассматриваемая задача не является корректно поставленной. Приведенный здесь пример принадлежит Адамару.

Задача Коши и характеристическая задача корректно поставлены и для общих дифференциальных уравнений второго порядка гиперболического типа.

§ 4. Общее линейное уравнение второго порядка гиперболического типа с двумя независимыми переменными

1°. Функция Римана. В пункте 2° § 2 введения было доказано, что линейное уравнение с частными производными второго порядка гиперболического типа при довольно общих предположениях относительно его коэффициентов с помощью неособого преобразования независимых переменных можно привести к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+A(x,\ y)\frac{\partial u_1}{\partial x}+B(x,\ y)\frac{\partial u_1}{\partial y}+C(x,\ y)u= \\ =F_1(x,\ y). \qquad (38)$$

В характеристических переменных $\xi=x+y$, $\eta=x-y$ уравнение (38) записывается следующим образом:

$$Lu=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+a\frac{\partial u}{\partial\xi}+b\frac{\partial u}{\partial\eta}+cu=F, \qquad (39)$$

где

$$4a=A+B,\quad 4b=A-B,\quad 4c=C,\quad 4F=F_1,$$

$$u(\xi,\ \eta)=u_1\left(\frac{\xi+\eta}{2},\ \frac{\xi-\eta}{2}\right).$$

Очевидно, что характеристиками уравнения (39) являются прямые $\xi=\text{const}$, $\eta=\text{const}$.

В предположении дифференцируемости коэффициентов a и b уравнения (39) вводится понятие оператора

$$L^*v=\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\,\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial\xi}(av)-\frac{\partial}{\partial\eta}(bv)+cv,$$

сопряженного с оператором L.

Решение $v(\xi,\ \eta)$ *сопряженного уравнения*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\,\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial\xi}(av)-\frac{\partial}{\partial\eta}(bv)+cv=0, \qquad (40)$$

удовлетворяющее на характеристиках $\xi=\xi_1$ и $\eta=\eta_1$ условиям

$$\begin{aligned} v(\xi_1, \eta) &= \exp\int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi_1, \eta_2)\,d\eta_2, \\ v(\xi, \eta_1) &= \exp\int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2, \eta_1)\,d\xi_2, \end{aligned} \tag{41}$$

где (ξ_1, η_1) — произвольно фиксированная точка области D задания уравнения (39), называется *функцией Римана*.

При дополнительном требовании непрерывности $\frac{\partial a}{\partial \xi}$, $\frac{\partial b}{\partial \eta}$ *и* c *функция Римана существует.*

Действительно, в результате интегрирования уравнения (40) получаем

$$\begin{gathered} v(\xi, \eta) - v(\xi, \eta_1) - v(\xi_1, \eta) - \\ - \int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2, \eta)\,v(\xi_2, \eta)\,d\xi_2 - \int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi, \eta_2)\,v(\xi, \eta_2)\,d\eta_2 + \\ + \int_{\xi_1}^{\xi} d\xi_2 \int_{\eta_1}^{\eta} c(\xi_2, \eta_2)\,v(\xi_2, \eta_2)\,d\eta_2 + \int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2, \eta_1)\,v(\xi_2, \eta_1)\,d\xi_2 + \\ + \int_{\eta_1}^{\eta} d(\xi_1, \eta_2)\,v(\xi_1, \eta_2)\,d\eta_2 = 0. \end{gathered} \tag{42}$$

Так как в силу (41) имеем

$$\begin{gathered} v(\xi, \eta_1) - \int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2, \eta_1)\,v(\xi_2, \eta_1)\,d\xi_2 = 1, \\ v(\xi_1, \eta) - \int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi_1, \eta_2)\,v(\xi_1, \eta_2)\,d\eta_2 = 1, \\ v(\xi_1, \eta_1) = 1, \end{gathered}$$

то равенство (42) запишется в виде линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода относительно $v(\xi, \eta)$:

$$\begin{gathered} v(\xi, \eta) - \int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2, \eta)\,v(\xi_2, \eta)\,d\xi_2 - \int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi, \eta_2)\,v(\xi, \eta_2)\,d\eta_2 + \\ + \int_{\xi_1}^{\xi} d\xi_2 \int_{\eta_1}^{\eta} c(\xi_2, \eta_2)\,v(\xi_2, \eta_2)\,d\eta_2 = 1. \end{gathered} \tag{43}$$

В пункте 4° § 2 главы V будет доказано, что уравнение (43) имеет единственное решение, и тем самым существование функции Римана можно считать доказанным.

Поскольку функция Римана зависит не только от переменных ξ, η, но и от ξ_1 и η_1, естественно ее обозначить в виде

$$v = R(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1).$$

Из (41) имеем

$$\begin{gathered}
\frac{\partial R(\xi_1, \eta; \xi_1, \eta_1)}{\partial \eta} - a(\xi_1, \eta) R(\xi_1, \eta; \xi_1, \eta_1) = 0, \\
\frac{\partial R(\xi, \eta_1; \xi_1, \eta_1)}{\partial \xi} - b(\xi, \eta_1) R(\xi, \eta_1; \xi_1, \eta_1) = 0, \\
R(\xi_1, \eta_1; \xi_1, \eta_1) = 1
\end{gathered} \tag{44}$$

и

$$\begin{gathered}
\frac{\partial R(\xi, \eta; \xi, \eta_1)}{\partial \eta_1} + a(\xi, \eta_1) R(\xi, \eta; \xi, \eta_1) = 0, \\
\frac{\partial R(\xi, \eta; \xi_1, \eta)}{\partial \xi_1} + b(\xi_1, \eta) R(\xi, \eta; \xi_1, \eta) = 0, \\
R(\xi, \eta; \xi, \eta) = 1.
\end{gathered} \tag{45}$$

Для достаточно гладкой в области D функции $u(\xi_1, \eta_1)$ имеет место очевидное тождество

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} [u(\xi_1, \eta_1) R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) - R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) Lu(\xi_1, \eta_1)] = \\
= \frac{\partial}{\partial \xi_1}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial \eta_1} - aR\right)\right] + \frac{\partial}{\partial \eta_1}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial \xi_1} - bR\right)\right]. \tag{46}$$

В результате интегрирования (46) по ξ_1 и η_1 в промежутках $\xi_0 \leqslant \xi_1 \leqslant \xi$, $\eta_0 \leqslant \eta_1 \leqslant \eta$, где (ξ_0, η_0) — произвольная точка области D, в силу (44) получаем

$$u(\xi, \eta) = u(\xi_0, \eta_0) R(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) + \\
+ \int_{\xi_0}^{\xi} R(\xi_1, \eta_0; \xi, \eta) \left[\frac{\partial u(\xi_1, \eta_0)}{\partial \xi_1} + b(\xi_1, \eta_0) u(\xi_1, \eta_0)\right] d\xi_1 + \\
+ \int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_0, \eta_1; \xi, \eta) \left[\frac{\partial u(\xi_0, \eta_1)}{\partial \eta_1} + a(\xi_0, \eta_1) u(\xi_0, \eta_1)\right] d\eta_1 + \\
+ \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) Lu(\xi_1, \eta_1) d\eta_1. \tag{47}$$

Когда $u(\xi, \eta) = R(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)$, в силу (45) из (47) будем иметь

$$\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) LR(\xi_0, \eta_0; \xi_1, \eta_1) d\eta_1 = 0. \tag{48}$$

Из тождества (48) следует, что *функция Римана* $R(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)$ *относительно последней пары переменных* ξ_1, η_1 *является решением однородного уравнения*

$$LR(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) = 0. \tag{49}$$

На основании (45) и (49) непосредственной проверкой убеждаемся в том, что *при непрерывной правой части* $F(\xi, \eta)$ *уравнения* (39) *одним из его частных решений является функция*

$$u_0(\xi, \eta) = \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) F(\xi_1, \eta_1) d\eta_1.$$

2°. **Задача Гурса.** Предполагая в тождестве (47), что $u(\xi, \eta)$ — решение уравнения (39), после интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) = R(\xi, \eta_0; \xi, \eta) u(\xi, \eta_0) + \\ + R(\xi_0, \eta; \xi, \eta) u(\xi_0, \eta) - R(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) u(\xi_0, \eta_0) + \\ + \int_{\xi_0}^{\xi} \left[b(t, \eta_0) R(t, \eta_0; \xi, \eta) - \frac{\partial}{\partial t} R(t, \eta_0; \xi, \eta) \right] u(t, \eta_0) dt + \\ + \int_{\eta_0}^{\eta} \left[a(\xi_0, \tau) R(\xi_0, \tau; \xi, \eta) - \frac{\partial}{\partial \tau} R(\xi_0, \tau; \xi, \eta) \right] u(\xi_0, \tau) d\tau + \\ + \int_{\xi_0}^{\xi} dt \int_{\eta_0}^{\eta} R(t, \tau; \xi, \eta) F(t, \tau) d\tau. \end{aligned} \tag{50}$$

Из перечисленных выше свойств функции Римана непосредственно следует, что *формула* (50), *когда в ее правой части* $u(\xi, \eta_0)$ *и* $u(\xi_0, \eta)$ *заменены произвольными непрерывно дифференцируемыми функциями и* $u(\xi_0, \eta_0)$ — *произвольной постоянной, дает регулярное решение* $u(\xi, \eta)$ *уравнения* (39).

Следовательно, для уравнения (39) *задача Гурса*

$$u(\xi, \eta_0) = \varphi(\xi), \quad u(\xi_0, \eta) = \psi(\eta),$$

где $\varphi(\xi)$ *и* $\psi(\eta)$ — *заданные непрерывно дифференцируемые* *функции, удовлетворяющие условию* $\varphi(\xi_0)=\psi(\eta_0)$, *имеет единственное устойчивое решение* $u(\xi,\eta)$, *которое дается формулой*

$$\begin{aligned}u(\xi,\eta)&=R(\xi,\eta_0;\xi,\eta)\varphi(\xi)+\\&+R(\xi_0,\eta;\xi,\eta)\psi(\eta)-R(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)\varphi(\xi_0)+\\&+\int_{\xi_0}^{\xi}\left[b(t,\eta_0)R(t,\eta_0;\xi,\eta)-\frac{\partial}{\partial t}R(t,\eta_0;\xi,\eta)\right]\varphi(t)\,dt+\\&+\int_{\eta_0}^{\eta}\left[a(\xi_0,\tau)R(\xi_0,\tau;\xi,\eta)-\frac{\partial}{\partial\tau}R(\xi_0,\tau;\xi,\eta)\right]\psi(\tau)\,d\tau+\\&+\int_{\xi_0}^{\xi}dt\int_{\eta_0}^{\eta}R(t,\tau;\xi,\eta)F(t,\tau)\,d\tau.\end{aligned}$$

3°. Задача Коши. Обозначим через σ лежащую в области D разомкнутую дугу Жордана с непрерывной кривизной, обладающую тем свойством, что ни в одной своей точке она не имеет касания с характеристиками уравнения (39).

Предположим, что выходящие из точки $P(\xi,\eta)$ характеристики $\xi_1=\xi$ и $\eta_1=\eta$ пересекаются с дугой σ в точках Q' и Q соответственно, и обозначим через G конечную область плоскости переменных ξ, η, ограниченную участком QQ' дуги σ и отрезками характеристик PQ и PQ'.

Для произвольных дважды непрерывно дифференцируемых в области G функций $u(\xi_1,\eta_1)$ и $v(\xi_1,\eta_1)$ имеет место тождество

$$\begin{aligned}2(vLu-uL^*v)&=\\&=\frac{\partial}{\partial\eta_1}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_1}v-\frac{\partial v}{\partial\xi_1}u+2buv\right)+\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta_1}v-\frac{\partial v}{\partial\eta_1}u+2auv\right).\end{aligned}$$

Интегрируя полученное тождество по области G, на основании формулы (GO) получаем

$$\begin{aligned}2\int_G(vLu-uL^*v)\,d\xi\,d\eta=\int_S\left(\frac{\partial u}{\partial\eta_1}v-\frac{\partial v}{\partial\eta_1}u+2auv\right)d\eta_1-\\-\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_1}v-\frac{\partial v}{\partial\xi_1}u+2buv\right)d\xi_1,\end{aligned}\qquad(51)$$

где S — граница области G.

Предполагая в формуле (51), что $u(\xi_1,\eta_1)=u(P')$ — решение уравнения (39), а $v(\xi_1,\eta_1)=v(P')=R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)=$

$= R(P', P)$, $P = P(\xi, \eta)$, из тождества (51) находим

$$u(P) = \frac{1}{2}u(Q)R(Q, P) + \frac{1}{2}u(Q')R(Q', P) + \\ + \int_G F(P')R(P', P)\,d\xi_1\,d\eta_1 - \\ - \frac{1}{2}\int_{QQ'}\left[\frac{\partial u(P')}{\partial N}R(P', P) - u(P')\frac{\partial R(P', P)}{\partial N}\right]d\sigma_{P'} - \\ - \int_{QQ'}\left[a(P')\frac{\partial \xi_1}{\partial N} + b(P')\frac{\partial \eta_1}{\partial N}\right]R(P', P)\,u(P')\,d\sigma_{P'}, \tag{52}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial N} = \frac{\partial \xi_1}{\partial \nu}\frac{\partial}{\partial \eta_1} + \frac{\partial \eta_1}{\partial \nu}\frac{\partial}{\partial \xi_1},$$

а ν — внешняя нормаль дуги σ в точке P'.

Обратно, если в правой части формулы (52) будем считать, что u и $\frac{\partial u}{\partial N}$ — произвольно заданные на σ достаточно гладкие функции, то определенная этой формулой функция $u(P)$ будет решением уравнения (39).

Когда искомое решение $u(P)$ уравнения (39) и его производная $\frac{\partial u(P)}{\partial l}$, где l — заданный на σ вектор, который нигде не совпадает с касательной к σ, известны на σ:

$$u(P) = \Phi(P), \quad \frac{\partial u(P)}{\partial l} = \Psi(P), \quad P \in \sigma, \tag{53}$$

где Φ и Ψ — соответственно дважды и один раз непрерывно дифференцируемые функции, то $\frac{\partial u}{\partial N}$ всегда можно определить однозначно.

Следовательно, *формула* (52) *дает решение задачи Коши* (39), (53). Из процесса получения формулы (52) очевидно, что *решение этой задачи единственно и устойчиво.*

Наряду с рассмотренными в этой главе задачами в приложениях важную роль играют также *смешанные задачи* для гиперболических уравнений, но на них мы здесь останавливаться не будем.

ГЛАВА IV

УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

§ 1. Уравнение теплопроводности. Первая краевая задача

1°. Принцип экстремума. Простейшим примером уравнений параболического типа является *уравнение теплопроводности*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \tag{1}$$

Поскольку дифференциальное уравнение характеристик, соответствующих уравнению (1), имеет вид $dt^2 = 0$, это уравнение имеет единственное семейство характеристик $t = \text{const}$, представляющих собой прямые, параллельные оси x.

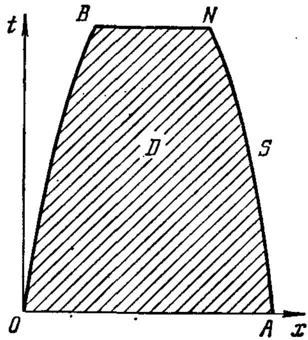

Рис. 22.

Рассмотрим область D плоскости переменных x, t, ограниченную отрезками OA и BN прямых $t = 0$, $t = T$, где T — положительное число, и кривыми OB и AN, каждая из которых пересекается с прямыми $t = \text{const}$ в одной точке, причем, если уравнения этих кривых заданы соответственно в виде $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$, то предполагается, что $\alpha(t) < \beta(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Обозначим через S часть границы области D, состоящую из OA, OB и AN, причем считается, что $B \in S$, $N \in S$ (рис. 22).

Функцию $u(x, t)$, имеющую на множестве $D \cup BN$ непрерывные частные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$ и удовлетворяющую уравнению (1) в области D, будем называть *регулярным решением* этого уравнения.

Принцип экстремума: *регулярное решение* $u(x, t)$ *уравнения* (1), *непрерывное в* $D\cup S\cup BN$, *своего экстремума достигает на* S.

При доказательстве этого утверждения мы здесь ограничимся рассмотрением случая максимума.

Итак, обозначим через M максимум $u(x, t)$ на замкнутом множестве $D\cup S\cup BN$. Допустим, что $u(x, t)$ достигает максимума M не на S, а в некоторой точке $(x_0, t_0)\in D\cup BN$. Легко показать, что это допущение приводит к противоречию.

В самом деле, введем в рассмотрение функцию

$$v(x, t)=u(x, t)+a(T-t), \tag{2}$$

где a — положительная постоянная. Ввиду того, что $0\leqslant t\leqslant T$, из (2) имеем

$$u(x, t)\leqslant v(x, t)\leqslant u(x, t)+aT \tag{3}$$

всюду в $D\cup S\cup BN$,

Пусть M_u^S, M_v^S — максимумы соответственно $u(x, t)$ и $v(x, t)$ на S. По допущению $M_u^S<M$. Число a подберем так, чтобы имело место неравенство

$$a<\frac{M-M_u^S}{T}. \tag{4}$$

На основании (3) и (4) получаем

$$M_v^S\leqslant M_u^S+aT<M_u^S+\frac{M-M_u^S}{T}T=M=u(x_0, t_0)\leqslant v(x_0, t_0).$$

Отсюда следует, что функция $v(x, t)$ не может достигать максимума на S. Следовательно, эта функция своего максимума на $D\cup S\cup BN$ достигает в некоторой точке $(x_1, t_1)\in D\cup BN$.

Сперва предположим, что $(x_1, t_1)\in D$. Так как (x_1, t_1) является точкой максимума функции $v(x, t)$ на $D\cup S\cup BN$, то в этой точке $\frac{\partial v}{\partial t}=0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\leqslant 0$, т. е.

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\geqslant 0. \tag{5}$$

Пусть теперь $(x_1, t_1)\in BN$. Ввиду того, что $v(x, t)$ достигает в точке (x_1, t_1) своего максимума на множестве

$D \cup S \cup BN$, в этой точке $\frac{\partial v}{\partial t} \geqslant 0$. Учитывая то обстоятельство, что (x_1, T) является точкой максимума $v(x, T)$ как функции x, мы должны иметь $\frac{\partial^2 v(x_1, T)}{\partial x_1^2} \leqslant 0$. Следовательно, неравенство (5) имеет место и в точке (x_1, T).

Подставляя в левую часть (5) значения $\frac{\partial v}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, найденные из равенства (2), получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} - a - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \geqslant 0, \qquad x = x_1, \quad t = t_1,$$

или, так как $u(x, t)$ является решением уравнения (1), $-a \geqslant 0$, а это невозможно, ибо $a > 0$.

Полученное противоречие доказывает справедливость первой части принципа экстремума. Аналогично доказывается и вторая его часть.

2°. **Первая краевая задача для уравнения теплопроводности.** Доказанный принцип позволяет установить *единственность и устойчивость решения* следующей так называемой *первой краевой задачи* для уравнения теплопроводности: *ищется регулярное в области D решение $u(x, t)$ уравнения* (1), *непрерывное в $D \cup S \cup BN$ и удовлетворяющее условиям*

$$\begin{gathered} u|_{OB} = \psi_1(t), \quad u|_{AN} = \psi_2(t), \quad u|_{OA} = \varphi(x), \\ \psi_1(0) = \varphi(0), \quad \psi_2(A) = \varphi(A), \end{gathered} \tag{6}$$

где ψ_1, ψ_2 и φ — заданные действительные непрерывные функции.

В самом деле, если $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — регулярные решения уравнения (1), удовлетворяющие краевым условиям (6), то функция $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ будет регулярным решением уравнения (1), обращающимся в нуль на S. Следовательно, в силу принципа экстремума $u(x, t) = 0$ в $D \cup S \cup BN$, откуда и следует единственность решения первой краевой задачи (1), (6).

Если разность между краевыми значениями на S регулярных решений $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ уравнения (1) по модулю меньше ε, $\varepsilon > 0$, то в силу принципа экстремума $|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon$ всюду в $D \cup S \cup BN$, и тем самым непрерывная зависимость решения первой краевой задачи от краевых данных на S (т. е. устойчивость решения этой задачи) доказана.

Теперь мы докажем *существование решения* первой краевой задачи для уравнения (1) в предположениях, что OB и AN — прямолинейные отрезки, соединяющие точки $O(0,\ 0)$, $B(0,\ T)$ и $A(l,\ 0)$, $N(l,\ T)$ соответственно, причем

$$u(0,\ t)=0, \quad u(l,\ t)=0, \qquad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{7}$$

$$u(x,\ 0)=\varphi(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{8}$$

где $\varphi(x)$ — непрерывно дифференцируемая на сегменте $0\leqslant x\leqslant l$ функция, обращающаяся в нуль прн $x=0$, $x=l$.

Как известно из курса математического анализа, функцию $\varphi(x)$ на сегменте $0\leqslant x\leqslant l$ можно разложить в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{\pi k}{l}x, \tag{9}$$

где

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi k}{l}x\,dx, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots$$

Пользуясь формулой (40) из введения при $n=2$, $x_1=x$, $x_2=t$, $\tau_k(x)=\sin\frac{\pi k}{l}x$, получаем регулярное решение уравнения (1):

$$u_k(x,\ t)=e^{-\pi^2k^2t/l^2}\sin\frac{\pi k}{l}x, \tag{10}$$

удовлетворяющее краевым условиям $u_k(0,\ t)=u(l,\ t)=0$, $u_k(x,\ 0)=\sin\frac{\pi k}{l}x$.

Очевидно, что функция $u(x,\ t)$, представляющая сумму ряда

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{\pi^2k^2t}{l^2}}\sin\frac{\pi k}{l}x, \tag{11}$$

будет искомым решением краевой задачи (1), (7), (8).

При $t>0$ абсолютная н равномерная сходимость ряда (11) и рядов, полученных из него дифференцированием по x и t сколько угодно раз в окрестности точки (x, t), следует из того, что

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\pi k}{l}\right)^m e^{-\frac{\pi^2k^2}{l^2}t}=0, \qquad m=0,\ 1,\ \ldots$$

Когда носителем данных (8) является отрезок прямой $t=t_0$ и $t_0\leqslant t\leqslant T$ в условиях (7), то решение первой краевой задачи в прямоугольнике $0<x<l$, $t_0<t<T$ дается опять формулой (11), в которой вместо t следует писать $t-t_0$.

Заметим, что ряд в правой части этой формулы при $t<0$ может вовсе не иметь смысла. По этой причине не рассматривается первая краевая задача для уравнения (1), когда $t<t_0$, где $t=t_0$ — носитель данных в краевых условиях.

Все сказанное выше, очевидно, остается в силе и тогда, когда число пространственных переменных больше единицы, лишь с той разницей, что в последнем случае вместо простых рядов (9), (11) следует брать кратные ряды.

§ 2. Задача Коши — Дирихле

1°. Постановка задачи Коши — Дирихле и доказательство существования ее решения. Пусть D представляет собой бесконечную полосу $-\infty<x<\infty$, $0\leqslant t\leqslant T$, где T — фиксированное положительное число, причем случай $T=\infty$ не исключается (рис. 23).

Ограниченную, непрерывную в полосе D функцию $u(x, t)$ с непрерывными внутри D частными производными $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, удовлетворяющую уравнению (1), будем называть *регулярным решением* этого уравнения.

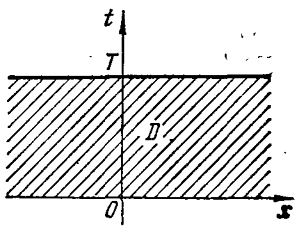

Рис. 23.

Под *задачей Коши — Дирихле* понимается следующая задача: *ищется регулярное в полосе D решение $u(x, t)$ уравнения* (1), *удовлетворяющее условию*

$$u(x,\ 0)=\varphi(x), \qquad -\infty<x<\infty, \tag{12}$$

где $\varphi(x)$, $-\infty<x<\infty$, — *заданная действительная непрерывная ограниченная функция.*

Как уже было отмечено в пункте 3° § 3 введения, функция

$$E(x,\ \xi,\ t,\ 0)=\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}},\qquad t>0, \tag{13}$$

является решением уравнения (1) во всех точках $(x,\ t)$ полуплоскости $t>0$.

Докажем, что *функция $u(x,\ t)$, определенная по формуле*

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}\,d\xi, \tag{14}$$

является решением задачи Коши — Дирихле.

Из курса математического анализа известно, что интеграл в правой части (14) сходится равномерно в окрестности любой внутренней точки $(x,\ t)$ полосы D.

В результате замены переменного интегрирования $\xi=$ $=x+2\eta\sqrt{t}$ формула (14) принимает вид

$$u(x,\ t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(x+2\eta\sqrt{t}\right)e^{-\eta^2}\,d\eta. \tag{15}$$

Так как $\sup\limits_{-\infty<x<\infty}|\varphi(x)|<M$, где M — положительное число, и интеграл в правой части (15) сходится абсолютно, то

$$|u(x,\ t)|<\frac{M}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\eta^2}\,d\eta,$$

откуда ввиду того, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\eta^2}\,d\eta=\sqrt{\pi}, \tag{16}$$

имеем

$$|u(x,\ t)|\leqslant M.$$

Учитывая то обстоятельство, что интегралы, полученные при внесении под знак интеграла в правой части (14) операции дифференцирования по x и t (любое число раз), сходятся равномерно вблизи каждой точки (x, t), $t>0$, и функция $E(x, \xi, t, 0)$ при $t>0$ удовлетворяет уравнению (1), заключаем, что определенная формулой (14) функция $u(x, t)$ в полосе D является решением уравнения (1).

Предельным переходом при $t\to 0$ (эта операция законна из-за равномерной сходимости интеграла вблизи каждой точки $(x, 0)$ при $t\geqslant 0$) из (15) в силу (16) получаем

$$\lim_{t\to 0} u(x, t)=\varphi(x).$$

2°. Единственность и устойчивость решения задачи Коши — Дирихле. Единственность и устойчивость решения задачи Коши — Дирихле непосредственно получается из следующего утверждения (принципа экстремума для полосы): *для регулярного в полосе D решения $u(x, t)$ уравнения* (1) *имеют место оценки*

$$\begin{gathered} m\leqslant u(x, t)\leqslant M, \\ m=\inf u(x, 0), \quad M=\sup u(x, 0), \quad -\infty<x<\infty. \end{gathered} \tag{17}$$

Чтобы обнаружить справедливость первого неравенства в (17), рассмотрим функцию $v(x, t)=x^2+2t$, являющуюся решением уравнения (1).

Обозначим через n нижнюю грань $u(x, t)$ при $(x, t)\in D$ и введем в рассмотрение функцию

$$w(x, t)=u(x, t)-m+\varepsilon\frac{v(x, t)}{v(x_0, t_0)}, \tag{18}$$

где ε — произвольное положительное число, а (x_0, t_0) — произвольная фиксированная точка внутри полосы D.

Представленная формулой (18) функция $w(x, t)$ является решением уравнения (1), причем при $t=0$

$$w(x, 0)=u(x, 0)-m+\varepsilon\frac{x^2}{x_0^2+2t_0}\geqslant 0 \tag{19}$$

и при $|x|=|x_0|+\sqrt{\dfrac{(m-n)\,v(x_0, t_0)}{\varepsilon}}$

$$w(x, t)\geqslant u(x, t)-n\geqslant 0. \tag{20}$$

Из оценок (19), (20) на основании доказанного в предыдущем параграфе принципа экстремума, примененного в прямоугольнике

$$0 \leqslant t \leqslant T, \quad -|x_0| - \sqrt{\frac{(m-n)\,v(x_0, t_0)}{\varepsilon}} \leqslant$$
$$\leqslant x \leqslant |x_0| + \sqrt{\frac{(m-n)\,v(x_0, t_0)}{\varepsilon}},$$

содержащем точку (x_0, t_0), заключаем, что $w(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) - m + \varepsilon \geqslant 0$, т. е. $u(x_0, t_0) \geqslant m - \varepsilon$. Отсюда в свою очередь в силу произвольности ε следует, что $u(x_0, t_0) \geqslant m$. Таким образом, $u(x, t) \geqslant m$ всюду в D.

Заменяя $u(x, t)$ на $-u(x, t)$ и повторяя приведенное выше рассуждение, убеждаемся в справедливости и второго неравенства в (17).

Название задачи (1), (12) задачей Коши — Дирихле оправдано тем, что, приняв переменное t за время, условие (12) можно рассмотреть как начальное условие. Но на это условие можно смотреть и как на краевое условие, заданное на границе $t=0$ верхней полуплоскости $t>0$ изменения переменных x, t.

3°. Неоднородное уравнение теплопроводности. Пусть теперь $g(x, t)$, $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant t < \infty$, — заданная действительная ограниченная непрерывная функция. За носителя данных вместо прямой $t=0$ примем прямую $t=\tau$, где τ — фиксированное положительное число, и введем функцию

$$v(x, t, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4(t-\tau)}} g(\xi, \tau)\, d\xi, \qquad t > \tau.$$

Как и в предыдущем пункте, легко видеть, что

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad t > \tau, \quad v(x, \tau, \tau) = g(x, \tau).$$

На основании этих равенств заключаем, что *функция*

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t, \tau)\, d\tau$$

является решением неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = -g(x, t),$$

удовлетворяющим условию $u(x, 0) = 0$.

§ 3. О характере гладкости решений уравнений с частными производными

1°. Случай эллиптических и параболических уравнений. Как уже было доказано в пункте 5° § 6 главы II, гармоническая в области D функция $u(x, y)$ является аналитической функцией переменных x, y в этой области. Более того, доказывается, что решения линейных эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами в области их регулярности являются аналитическими функциями.

Из формулы Пуассона пункта 2° § 2 главы I следует, что решение $u(x, y)$ задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге $|z| < 1$ даже при требовании одной только непрерывности краевых значений g на окружности $|z| = 1$ (т. е. когда g на окружности $|z| = 1$ непрерывна, но нигде не дифференцируема) является *аналитической* функцией действительных переменных x, y при $|z| < 1$.

В пункте 2° § 1 настоящей главы было показано, что решение $u(x, t)$ первой краевой задачи (7), (8) для уравнения теплопроводности (1) при требовании непрерывности первой производной функции $u(x, 0) = \varphi(x)$ имеет в области D: $0 < x < l$, $0 < t < T$, частные производные всех порядков по переменным x, t. Точно так же из формулы (14) в пункте 1° предыдущего параграфа был сделан вывод, что ограниченность и непрерывность функции $\varphi(x) = u(x, 0)$, $-\infty < x < \infty$, гарантируют существование частных производных *всех порядков* решения $u(x, t)$ задачи Коши — Дирихле (12) для уравнения (1).

2°. Случай гиперболических уравнений. Утверждения предыдущего пункта перестают быть верными, когда речь идет о задаче Коши и о характеристической задаче Гурса для уравнения колебаний струны.

Так, например, из формулы (35) главы III следует, что *порядок гладкости решения* $u(x, t)$ *характеристической задачи* (13), (34) *совпадает с порядком гладкости данных* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$, т. е. для существования частных производных порядка k от искомого решения $u(x, t)$ этой задачи следует требовать существования производных порядка k от функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Определенная по этой формуле функция $u(x, t)$ независимо от степени гладкости данных $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называется *обобщенным решением* задачи (13), (34) из главы III. При наличии разрыва у $\varphi(x)$ или $\psi(x)$, когда $x=\xi$, и функция $u(x, t)$ будет иметь разрыв вдоль характеристик $x+t=2\xi$ или $x-t=2\xi$, т. е. *разрывы у данных* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *влекут за собой разрывы у волны* $u(x, t)$ *вдоль характеристик уравнения колебаний струны.*

ГЛАВА V

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Метод последовательных приближений решения интегральных уравнений

1°. Общие замечания. В настоящей главе речь будет идти об *интегральных уравнениях Фредгольма второго рода*

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_{D(S)} K(x, y)\varphi(y)\,dy=f(x), \qquad x\in D \quad (x\in S), \qquad (*)$$

где интеграл распространен по ограниченной области D евклидова пространства E_n или по ее гладкой границе S, *ядро* $K(x, y)$ *и правая часть* $f(x)$ являются заданными действительными непрерывными функциями точек x, y, $\varphi(x)$ — *искомая функция*, а λ — *параметр*.

Интегральное уравнение

$$\varphi^0(x)-\lambda\int\limits_{D(S)} K(x, y)\varphi^0(y)\,dy=0 \qquad (1)$$

называется *соответствующим* $(*)$ *однородным уравнением*, а однородное уравнение

$$\psi(x)-\lambda\int\limits_{D(S)} K(y, x)\psi(y)\,dy=0 \qquad (2)$$

— *союзным с* (1) *однородным уравнением.*

Ниже основные утверждения теории интегральных уравнений будут сформулированы и доказаны, когда D представляет собой конечный интервал (a, b) действительной оси, т. е. в случае уравнения

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_a^b K(x, y)\varphi(y)\,dy=f(x). \qquad (3)$$

Попутно будет рассмотрено интегральное уравнение с переменным верхним пределом интегрирования, т. е. *интегральное уравнение Вольтерра второго рода*

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_a^x K(x, y)\varphi(y)\,dy=f(x), \qquad x>a. \qquad (4)$$

Легко видеть, что *общее решение $\Phi(x)$ интегрального уравнения Фредгольма второго рода, когда оно существует, имеет вид*

$$\Phi(x)=\varphi^0(x)+\varphi(x), \tag{5}$$

где $\varphi^0(x)$ — общее решение соответствующего (3) *однородного уравнения* (1), *которое в рассматриваемом случае имеет вид*

$$\varphi^0(x)-\lambda\int_a^b K(x, y)\varphi^0(y)\,dy=0, \tag{6}$$

а $\varphi(x)$ — частное решение однородного уравнения (3).

Действительно, если $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$ — соответственно общее и частное решения неоднородного уравнения (3), то их разность $\varphi^0(x)=\Phi(x)-\varphi(x)$ будет решением уравнения (6), и тем самым равенство (5) доказано.

2°. Построение решения уравнения Фредгольма второго рода при малых значениях параметра методом последовательных приближений. *В случае, когда параметр λ удовлетворяет условию*

$$|\lambda|<\frac{1}{M}, \tag{7}$$

где M — положительное число такое, что

$$\int_a^b |K(x, y)|\,dy\leqslant M, \qquad a\leqslant x\leqslant b, \tag{8}$$

решение $\varphi(x)$ уравнения (3) *существует и его можно построить методом последовательных приближений.*

Сущность этого метода заключается в том, что функция $\varphi(x)$ ищется в виде предела последовательности

$$\varphi_0(x)=f(x), \quad \varphi_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x, y)\varphi_{n-1}(y)\,dy, \quad n=1, 2, \ldots \tag{9}$$

Как известно из курса математического анализа, сходимость последовательности (9) равносильна сходимости ряда

$$\varphi_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)]. \tag{10}$$

В силу (8) имеют место оценки

$$|\varphi_0(x)| \leqslant m,$$

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leqslant m\,|\lambda|^n M^n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

где $m = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$.

Таким образом, каждый член ряда (10) по модулю не превышает соответствующего члена положительного числового ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} m\,|\lambda|^n M^n$, который в силу неравенства (7) сходится. Следовательно, ряд (10) и, стало быть, последовательность непрерывных функций (9) сходятся абсолютно и равномерно к непрерывной функции $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)].$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ (все условия для такой операции соблюдены) в равенстве

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi_{n-1}(y)\, dy,$$

получаем

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy,$$

а это означает, что $\varphi(x)$ является решением интегрального уравнения (3).

Легко видеть, что *у уравнения* (3) *других решений нет*. Действительно, предположим, что наряду с функцией $\varphi(x)$ и функция $\psi(x)$ является решением уравнения (3). Тогда $\theta(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ будет решением однородного уравнения (6), т. е.

$$\theta(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)\, \theta(y)\, dy,$$

откуда находим, что

$$\theta_0 \leqslant |\lambda|\, M\theta_0, \quad \theta_0 = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |\theta(x)|.$$

Полученное неравенство противоречит неравенству (7), если

$$\theta_0 \neq 0.$$

Следовательно, $\theta_0=0$ и, стало быть, $\theta(x)=0$, т. е. $\psi(x)=\varphi(x)$.

3°. Интегральное уравнение Вольтерра второго рода. Повторяя приведенное выше рассуждение в случае интегрального уравнения Вольтерра второго рода (4), будем иметь

$$\varphi_0(x)=f(x), \quad \varphi_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x, y)\,\varphi_{n-1}(y)\,dy, \tag{12}$$

$$|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)|\leqslant m\frac{|\lambda|^n M_*^n (x-a)^n}{n!}, \quad n=1, 2, \ldots, \tag{13}$$

$$m=\max|f(x)|, \quad M_*=\max|K(x, y)|.$$

Так как функциональный ряд с положительными членами

$$m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^n M_*^n (x-a)^n}{n!}=me^{|\lambda| M_*(x-a)}$$

сходится равномерно при любом конечном значении параметра λ, *то в силу оценок* (13) *последовательность функций* (12) *сходится равномерно и, стало быть, функция*

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)$$

является решением интегрального уравнения (4).

Покажем, что *для любого фиксированного значения параметра* λ *уравнение* (4) *не может иметь более одного решения.*

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — непрерывные решения уравнения (4). Их разность $\theta(x)=\varphi(x)-\psi(x)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\theta(x)=\lambda\int_a^x K(x, y)\,\theta(y)\,dy, \tag{14}$$

и, следовательно,

$$|\theta(x)|\leqslant|\lambda|\,M_* m_*(x-a), \tag{15}$$

где $M_*=\max|K(x, y)|$, $m_*=\max|\theta(x)|$. В силу (15) из (14) следует оценка

$$|\theta(x)|\leqslant|\lambda|^2 M_*^2 m_*\frac{(x-a)^2}{2}.$$

Продолжая эту процедуру, будем иметь

$$|\theta(x)| \leqslant |\lambda|^n M_*^n m_* \frac{(x-a)^n}{n!} \tag{16}$$

для людого натурального n. Из оценок (16) в пределе, когда $n \to \infty$, получаем, что $\theta(x) = 0$, т. е. $\psi(x) = \varphi(x)$.

Таким образом, мы пришли к заключению, что *интегральное уравнение Вольтерра* (4) *при требовании непрерывности его ядра* $K(x, y)$ *и правой части* $f(x)$ *имеет единственное решение для каждого конечного значения параметра* λ. Этим существенно отличается интегральное уравнение Вольтерра второго рода от интегрального уравнения Фредгольма второго рода, которое, как будет показано ниже, не для каждого λ может иметь решения, а при некоторых значениях λ оно может иметь даже несколько решений.

§ 2. Теоремы Фредгольма

1°. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с вырожденным ядром. Ядро $K(x, y)$ интегрального уравнения (3) называется *вырожденным*, если оно имеет вид

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{N} p_i(x) q_i(y), \tag{17}$$

где $p_i(x)$ и $q_i(y)$, $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$, — заданные действительные непрерывные функции. Без ограничения общности можно считать, что системы $\{p_i(x)\}$, $\{q_i(x)\}$, $i = 1, \ldots, N$, линейно независимы.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{i=1}^{N} \int_a^b p_i(x) q_i(y) \varphi(y) dy = f(x). \tag{18}$$

Интегральное уравнение (18) можно записать в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i p_i(x), \tag{19}$$

где

$$c_i = \int_a^b q_i(y)\,\varphi(y)\,dy, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{20}$$

— неизвестные постоянные.

Постараемся подобрать постоянные c_i, $i = 1, \ldots, N$, так, чтобы определенная формулой (19) функция $\varphi(x)$ была решением интегрального уравнения (18). С этой целью внесем выражение (19) для $\varphi(x)$ в левую часть (18). После простых вычислений получаем

$$\sum_{i=1}^{N} p_i(x)\left[c_i - \int_a^b q_i(y) f(y)\,dy - \lambda \sum_{j=1}^{N}\int_a^b c_j q_i(y)\,p_j(y)\,dy\right] = 0,$$

откуда в силу линейной независимости функций $p_i(x)$, $i = 1, \ldots, N$, следует, что

$$c_i - \int_a^b q_i(y) f(y)\,dy - \lambda \sum_{j=1}^{N} c_j \int_a^b q_i(y)\,p_j(y)\,dy = 0$$

или

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} c_j = \gamma_i, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{21}$$

где

$$\alpha_{ij} = \int_a^b q_i(y)\,p_j(y)\,dy, \qquad \gamma_i = \int_a^b f(y)\,q_i(y)\,dy. \tag{22}$$

Таким образом, *задача отыскания решения* $\varphi(x)$ *интегрального уравнения* (18) *редуцирована к решению системы линейных алгебраических уравнений* (21).

Соответствующее (18) однородное интегральное уравнение

$$\varphi^0(x) - \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^{N} p_i(x)\,q_i(y)\,\varphi^0(y)\,dy = 0 \tag{23}$$

точно так же редуцируется к соответствующей (21) однородной линейной алгебраической системе

$$c_i^0 - \lambda \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} c_j^0 = 0. \tag{24}$$

В теории системы (21) фундаментальную роль играет матрица

$$M(\lambda)=\left\|\begin{matrix} 1-\lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{12} & \dots & -\lambda\alpha_{1N} \\ -\lambda\alpha_{21} & 1-\lambda\alpha_{22} & \dots & -\lambda\alpha_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda\alpha_{N1} & -\lambda\alpha_{N2} & \dots & 1-\lambda\alpha_{NN} \end{matrix}\right\|.$$

Из линейной алгебры известно, что система (21) всегда (для любых правых частей γ_i) имеет, и притом единственное, решение, если

$$\det M(\lambda)\neq 0. \tag{25}$$

Но $\det M(\lambda)$ относительно λ представляет собой полином степени N. Следовательно, условие (25) будет нарушено лишь для конечного числа значений λ: $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, $m\leqslant N$, являющихся нулями полинома $\det M(\lambda)$. Эти значения называются *собственными числами ядра* $K(x, y)$.

Таким образом, для каждого конечного значения λ, отличного от λ_k, $k=1, \dots, m$, система (21) имеет единственное решение $c_1, \dots, c_N$. Подставляя полученное решение системы (21) в правую часть формулы (19), получим решение $\varphi(x)$ интегрального уравнения (18). Тем самым доказана следующая теорема: *если λ не является собственным числом ядра $K(x, y)$, то интегральное уравнение* (18) *для любой непрерывной правой части $f(x)$ имеет, и притом единственное, решение* (первая теорема Фредгольма).

Союзное с (23) интегральное уравнение в силу (1) имеет вид

$$\psi(x)-\lambda\sum_{i=1}^{N}\int_a^b p_i(y)\,q_i(x)\,\psi(y)\,dy=0. \tag{26}$$

Уравнение (26) равносильно союзной с (24) однородной системе

$$d_i-\lambda\sum_{j=1}^{N}\alpha_{ji}\,d_j=0, \tag{27}$$

где

$$d_i=\int_a^b p_i(y)\,\psi(y)\,dy, \qquad i=1, \dots, N.$$

Если $\lambda=\lambda_k$, $k=1, \dots, m$, и ранг матрицы $M(\lambda)$ равен r, то, как известно из линейной алгебры, однородная система (24) и союзная с ней система (27) имеют по $N-r$ линейно независимых решений

$$c_1^{0j}, \ldots, c_N^{0j},$$
$$d_1^j, \ldots, d_N^j, \quad j=1, \ldots, N-r.$$

Подставляя полученные решения систем (24) и (27) соответственно в правые части формул

$$\varphi_l^0(x)=\lambda \sum_{i=1}^{N} c_i^{0l} p_i(x),$$
$$\psi_l(x)=\lambda \sum_{i=1}^{N} d_i^l q_i(x),$$
$$l=1, \ldots, N-r,$$

получаем по $N-r$ линейно независимых решений однородных интегральных уравнений (23) и (26). То есть *соответствующее* (18) *однородное интегральное уравнение* (23) *и союзное с ним однородное интегральное уравнение* (26) *имеют ровно по $N-r$ линейно независимых решений* (вторая теорема Фредгольма).

Функции $\varphi_l^0(x)$, $l=1, \ldots, N-r$, называются *собственными функциями ядра $K(x, y)$, соответствующими собственному числу λ_k.*

Как известно, опять из линейной алгебры, при $\lambda=\lambda_k$, $k=1, \ldots, m$, система (21) не для любых правых частей имеет решение. Для разрешимости этой системы необходимо и достаточно, чтобы числа γ_i, $i=1, \ldots, N$, удовлетворяли условиям

$$\sum_{j=1}^{N} \gamma_j d_j^l=0, \quad l=1, \ldots, N-r. \tag{28}$$

Условия (28) в силу (22) равносильны системе равенств

$$\begin{gathered}\int_a^b f\psi_l(x)\,dx=\lambda \sum_{i=1}^{N} d_i^l \int_a^b q_i(x) f(x)\,dx=0, \\ l=1, \ldots, N-r.\end{gathered} \tag{29}$$

Таким образом, мы пришли к заключению, что *при $\lambda=\lambda_k$, $k=1, \ldots, m$, для разрешимости интегрального уравнения* (18) *необходимо и достаточно, чтобы правая* *его часть* $f(x)$ *была ортогональна ко всем решениям* $\psi_l(x)$, $l=1, \ldots, N-r$, *союзного с* (23) *однородного интегрального уравнения* (26) (третья теорема Фредгольма).

2°. Понятие итерированного ядра и резольвенты. В пункте 2° § 1 настоящей главы при наличии неравенства (7) была доказана сходимость последовательных приближений (9) к решению $\varphi(x)$ интегрального уравнения (3), причем предполагалось, что функции $K(x, y)$ и $f(x)$ непрерывны.

Функции

$$K_n(x, y)=\int_a^b K(x, y_1) K_{n-1}(y_1, y)\,dy_1, \qquad n=2, 3, \ldots,$$

называются *итерированными* (*повторными*) *ядрами*.

Пользуясь понятием итерированных ядер, последовательным приближениям (9) можно придать вид

$$\varphi_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^b \sum_{j=1}^{N} \lambda^{j-1} K_j(x, y) f(y)\,dy. \tag{30}$$

Повторяя рассуждение, примененное в пункте 2° § 1 настоящей главы при доказательстве сходимости последовательности (9), убеждаемся в том, что ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} K_j(x, y)$$

при выполнении условия (7) сходится равномерно, когда $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$. Сумма этого ряда $R(x, y; \lambda)$ называется *резольвентой* или *разрешающим ядром ядра* $K(x, y)$ или *интегрального уравнения* (3). Из равенства (30) очевидно, что *резольвента позволяет решение* $\varphi(x)$ *уравнения* (3) *записать в виде*

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x, y; \lambda) f(y)\,dy. \tag{31}$$

Заметим, что функция $R(x, y; \lambda)$ непрерывна относительно переменных x, y в квадрате $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$ $\Big($и аналитична относительно λ для всех как действительных, так и комплексных значений λ из круга $|\lambda| < \frac{1}{M}\Big)$.

Поэтому из формулы (31) непосредственно следует, что *наряду с* $f(x)$ *непрерывным является и решение* $\varphi(x)$ *уравнения* (3).

3°. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с непрерывным ядром. Теперь приступим к изучению интегрального уравнения (3) независимо от того, выполнено или нет условие (7).

Из курса математического анализа известно, что если функция $K(x, y)$ непрерывна в квадрате $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$, то для любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такие линейно независимые системы непрерывных функций $\{p_i(x)\}$, $a \leqslant x \leqslant b$, $\{q_i(y)\}$, $a \leqslant y \leqslant b$, $i = 1, \ldots, N$, что

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{N} p_i(x) q_i(y) + K_\varepsilon(x, y), \tag{32}$$

где $K_\varepsilon(x, y)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$(b-a)|K_\varepsilon(x, y)| < \varepsilon, \qquad a \leqslant x \leqslant b, \quad a \leqslant y \leqslant b. \tag{33}$$

В силу теоремы Вейерштрасса (из курса математического анализа) в качестве $p_i(x)$ и $q_i(y)$ могут служить, в частности, полиномы.

Представляя ядро $K(x, y)$ уравнения (3) по формуле (32), запишем это уравнение в виде

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K_\varepsilon(x, y) \varphi(y)\, dy = F(x), \tag{34}$$

где

$$F(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{N} \int_a^b p_i(x) q_i(y) \varphi(y)\, dy. \tag{35}$$

Для любого конечного фиксированного значения λ подберем число ε, настолько малое, чтобы имело место неравенство

$$|\lambda| < \frac{1}{\varepsilon}. \tag{36}$$

Для интегрального уравнения (34) в силу (33) и (36) соблюдено условие (7), и, стало быть, это уравнение однозначно обращается. Обозначив через $R_\varepsilon(x, y; \lambda)$ резольвенту ядра $K_\varepsilon(x, y)$, уравнение (34) запишем в виде

$$\varphi(x) = F(x) + \lambda \int_a^b R_\varepsilon(x, y; \lambda) F(y)\, dy. \tag{37}$$

Подставляя выражение (35) для $F(x)$ в правую часть (37), после простых вычислений получаем

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^N r_i(x) q_i(y) \varphi(y)\, dy = g(x), \tag{38}$$

где

$$r_i(x) = p_i(x) + \lambda \int_a^b R_\varepsilon(x, y; \lambda) p_i(y)\, dy,$$

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R_\varepsilon(x, y; \lambda) f(y)\, dy.$$

Таким образом, *для любого конечного фиксированного значения λ интегральное уравнение* (3) *эквивалентно интегральному уравнению Фредгольма второго рода* (38) *с вырожденным ядром.*

Используя доказанные в предыдущем параграфе теоремы Фредгольма для интегрального уравнения с вырожденным ядром, приходим к так называемой альтернативе Фредгольма: *для каждого фиксированного значения λ либо соответствующее* (3) *однородное уравнение* (6) *не имеет отличного от нуля решения, и тогда уравнение* (3) *всегда имеет, и притом единственное решение для любой правой части $f(x)$, либо однородное уравнение* (6) *имеет отличные от нуля решения, и тогда как однородное уравнение* (6), *так и союзное с ним уравнение имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений; в этом случае уравнение* (3) *не для любой $f(x)$ имеет решение, причем для разрешимости неоднородного уравнения* (3) *необходимо и достаточно, чтобы его правая часть $f(x)$ была ортогональна ко всем решениям союзного с* (6) *уравнения, т. е.*

$$\int_a^b f(x) \psi_l(x)\, dx = 0, \qquad l = 1, \ldots, \rho,$$

где $\psi_l(x)$, $l = 1, \ldots, \rho$, — все линейно независимые решения союзного с (6) *однородного уравнения.*

Функция, тождественно равная нулю, очевидно, является решением как однородного уравнения (6), так и союзного с ним уравнения. В дальнейшем под решением однородного (или союзного с ним) уравнения будем понимать такое его решение, которое отлично от тождественного нуля.

Значение λ, для которого однородное уравнение (6) имеет решения $\varphi_l(x)$, $l=1, \ldots, \rho$, будем называть, как и в пункте 1° настоящего параграфа, *собственным числом ядра* $K(x, y)$, а функции $\varphi_l(x)$ — *собственными функциями этого же ядра, соответствующими собственному числу* λ.

Заметим, что если уравнение (3) запишем в виде

$$\varphi(y) - \lambda \int_a^b K(y, t)\, \varphi(t)\, dt = f(y),$$

умножим обе его части на $\lambda K(x, y)$ и проинтегрируем, то получаем

$$\varphi(x) - \lambda^2 \int_a^b K_2(x, t)\, \varphi(t)\, dt = f_2(x),$$

$$f_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)\, f(y)\, dy.$$

Продолжая этот процесс, будем иметь

$$\varphi(x) - \lambda^m \int_a^b K_m(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f_m(x),$$

где

$$f_m(x) = f_{m-1}(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)\, f_{m-1}(y)\, dy, \quad f_1(x) = f(x).$$

Таким образом, мы пришли к заключению, что *если* λ *и* $\varphi(x)$ — *собственное число и соответствующая ему собственная функция ядра* $K(x, y)$, *то* λ^m *и* $\varphi(x)$ *будут собственным числом и соответствующей ему собственной функцией итерированного ядра* $K_m(x, y)$. Верно и обратное утверждение, но на его доказательстве мы здесь останавливаться не будем.

Все изложенные выше утверждения относительно уравнения (3) непосредственно распространяются на случай уравнения (*) с непрерывным ядром $K(x, y)$ и непрерывной правой частью $f(x)$.

Более того, на основании приведенного выше замечания можно заключить, что эти утверждения остаются верными и в случае ядер вида

$$K(x, y)=\frac{K^*(x, y)}{|x-y|^\alpha}, \qquad 0<\alpha<n_0,$$

где $K^*(x, y)$ — непрерывная функция относительно совокупности переменных x, y, а n_0 — размерность области D (или ее границы S). В этом легко убедиться, если учесть то обстоятельство, что ядро интегрального уравнения

$$\varphi(x)-\lambda^m \int\limits_{D(S)} K_m(x, y)\,\varphi(y)\,dy=f_m(x),$$

полученного m-кратным итерированием ядра $K(x, y)$, при достаточно большом m представляет собой непрерывную функцию переменных x, y.

Также очевидно, что, если $f(x)$ непрерывна всюду, кроме конечного числа точек или гладких многообразий размерности меньше n_0, и абсолютно интегрируема по области D (или по S), альтернатива Фредгольма остается в силе.

Именно к такому виду относятся рассмотренные в пункте 2° § 5 главы I интегральные уравнения, к которым были редуцированы вопросы существования решений (в том числе элементарных) общих эллиптических уравнений второго порядка.

Так как в этих случаях *для области D достаточно малого диаметра* значение интеграла

$$\int\limits_D |K(x, y)|\,dy$$

можно сделать как угодно малым, условие (7) пункта 2° § 1 настоящей главы можно считать выполненным и, стало быть, *для таких областей существование решений указанных интегральных уравнений гарантировано.*

4°. Понятие спектра. Множество всех собственных чисел ядра $K(x, y)$ называется *спектром* этого ядра. Изучение спектра занимает значительное место в теории интегральных уравнений.

Как уже было показано выше, спектр ядра уравнения Вольтерра является п стым (пункт 8° § 1), а в сл чае вырожденного ядра уравнения Фредгольма он состоит из конечного числа элементов (пункт 1° настоящего параграфа). Среди других ядер, спектр которых хорошо изучен, особо следует выделить действительные симметричные ядра.

Ядро $K(x, y)$ называется *симметричным*, если для всех значений x, y из области его задания $K(x, y) = K(y, x)$. Легко видеть, что *если* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$ — *собственные функции, соответствующие отличным друг от друга собственным числам* λ_1 *и* λ_2, *то*

$$\int_a^b \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,dx = 0.$$

В самом деле, в силу симметричности ядра $K(x, y)$ имеем

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_a^b \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,dx = \lambda_1\lambda_2\int_a^b \varphi_1(x)\,dx\int_a^b K(x, y)\,\varphi_2(y)\,dy -$$

$$- \lambda_1\lambda_2\int_a^b \varphi_2(x)\,dx\int_a^b K(x, y)\,\varphi_1(y)\,dy =$$

$$= \lambda_1\lambda_2\int_a^b \varphi_1(x)\,dx\int_a^b [K(x, y) - K(y, x)]\,\varphi_2(y)\,dy = 0,$$

откуда, так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, следует справедливость сформулированного утверждения.

Из этого утверждения в свою очередь вытекает, что *собственные числа действительного симметричного ядра не могут быть комплексными.*

Действительно, если собственное число λ и соответствующая ему собственная функция $\varphi(x)$ являются комплексными:

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2, \quad \varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x),$$

то $\bar{\lambda} = \lambda_1 - i\lambda_2$ и $\overline{\varphi(x)} = \varphi_1(x) - i\varphi_2(x)$ также являются собственным числом и соответствующей ему собственной функцией.

Если $\lambda_2 \neq 0$, то, как уже было доказано,

$$\int_a^b \varphi(x)\,\overline{\varphi(x)}\,dx = \int_a^b |\varphi|^2\,dx = 0.$$

Отсюда заключаем, что $\varphi(x) = 0$ тождественно, а это невозможно в силу определения собственной функции. Следовательно, $\lambda_2 = 0$, т. е. λ — действительное число.

Среди других важнейших свойств симметричных ядер отметим еще одно его свойство: *спектр действительного симметричного ядра не является пустым.* Поскольку ниже это утверждение не используется, его доказательство опускается.

5°. Интегральное уравнение Вольтерра второго рода с кратным интегралом. Повторением рассуждения, приведенного в пункте 3° § 1 в случае интегрального уравнения вида

$$\varphi(\xi, \eta) - \lambda \int_{\xi_1}^{\xi} dt \int_{\eta_1}^{\eta} K(\xi, \eta; t, \tau)\, \varphi(t, \tau)\, d\tau = f(\xi, \eta), \tag{39}$$

где $K(\xi, \eta; t, \tau)$ и $f(\xi, \eta)$ — заданные действительные непрерывные функции, приходим к заключению, что *это уравнение для любого фиксированного значения действительного параметра λ имеет единственное решение. Поэтому интегральное уравнение* (39) *также называется уравнением Вольтерра второго рода.*

Уравнение (43) из главы III в результате однозначно обратимой замены искомой функции

$$v(\xi, \eta) = w(\xi, \eta) + \int_{\xi_1}^{\xi} w(t, \eta)\, b(t, \eta) \exp\left(\int_t^{\xi} b(t_1, \eta)\, dt_1\right) dt + \\ + \int_{\eta_1}^{\eta} w(\xi, \tau)\, a(\xi, \tau) \exp\left(\int_{\tau}^{\eta} a(\xi, \tau_1)\, d\tau_1\right) d\tau$$

приводится к интегральному уравнению вида (39):

$$w(\xi, \eta) + \int_{\xi_1}^{\xi} dt \int_{\eta_1}^{\eta} K_0(\xi, \eta; t, \tau)\, w(t, \tau)\, d\tau = 1,$$

где

$$K_0(\xi, \eta; t, \tau) = c(t, \tau) - b(t, \eta)\, a(t, \tau) \exp\left(\int_{\tau}^{\eta} a(t, \tau_1)\, d\tau_1\right) - \\ - a(\xi, \tau)\, b(t, \tau) \exp\left(\int_t^{\xi} b(t_1, \tau)\, dt_1\right) + \\ + b(t, \tau) \int_t^{\xi} c(t_1, \tau) \exp\left(\int_t^{t_1} b(t_2, \tau)\, dt_2\right) dt_1 + \\ + a(t, \tau) \int_{\tau}^{\eta} c(t, \tau_1) \exp\left(\int_{\tau}^{\tau_1} a(t, \tau_2)\, d\tau_2\right) d\tau_1.$$

6°. Интегральное уравнение Вольтерра первого рода. В предположениях, что ядро $K(x, y)$ и правая часть $f(x)$ *интегрального уравнения Вольтерра первого рода*

$$\int_a^x K(x, y)\varphi(y)\,dy = f(x)$$

удовлетворяют условиям: 1) $K_x(x, y)$ и $f'(x)$ существуют и являются непрерывными функциями и 2) $K(x, x)$ нигде в нуль не обращается, в результате дифференцирования по x это уравнение приводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\varphi(x) + \int_a^x K^*(x, y)\varphi(y)\,dy = f^*(x),$$

где

$$K^*(x, y) = \frac{K_x(x, y)}{K(x, x)}, \quad f^*(x) = \frac{f'(x)}{K(x, x)}.$$

Если перечисленные условия не соблюдены, исследование интегрального уравнения Вольтерра первого рода становится в общем случае затруднительным. Тем не менее в некоторых частных случаях все же удается указать способы, позволяющие даже в квадратурах выписать решения таких уравнений.

Так, например, чтобы найти решение интегрального уравнения с непрерывной правой частью $f(x)$:

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)\,dy}{(x-y)^\alpha} = f(x), \quad 0<\alpha<1, \quad x>0,$$

носящего название *интегрального уравнения Абеля*, запишем его в виде

$$\int_0^t \frac{\varphi(y)\,dy}{(t-y)^\alpha} = f(t),$$

умножим на ядро $\frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}}$ и проинтегрируем по t от нуля до x:

$$\int_0^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \int_0^t \frac{\varphi(y)\,dy}{(t-y)^\alpha} = \int_0^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

Из этого тождества, учитывая, что

$$\int_0^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \int_0^t \frac{\varphi(y)\,dy}{(t-y)^\alpha} = \int_0^x \varphi(y)\,dy \int_y^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-y)^\alpha},$$

$$\int_y^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-y)^\alpha} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha},$$

имеем

$$\varphi(x) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

или, если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема,

$$\varphi(x) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\right].$$

В частности, когда $\alpha = \frac{1}{2}$, мы получаем решение интегрального уравнения (63) из введения, встречающегося при исследовании задачи о таутохроне:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{x-t}}.$$

§ 3. Применения теории линейных интегральных уравнений второго рода

1°. Применение альтернативы Фредгольма в теории краевых задач для гармонических функций. В пункте 2° § 4 главы I было доказано, что если искать решение задачи Дирихле в виде потенциала двойного слоя (47), то для плотности μ этого потенциала получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода (57):

$$\mu(s) - \lambda \int_S K(s, t)\,\mu(t)\,dt = -2g(s), \qquad \lambda = -1. \qquad (40)$$

Если мы покажем, что $\lambda = -1$ не является собственным числом ядра $K(s, t)$, то в силу альтернативы Фредгольма интегральное уравнение (40) будет *разрешимо* при любой правой части и, стало быть, будет *разрешима* и задача Дирихле с краевым условием (56) из главы I.

Соответствующее (40) однородное уравнение

$$\mu_0(s) - \lambda \int_S K(s, t)\, \mu_0(t)\, dt = 0 \tag{41}$$

при $\lambda = -1$ действительно не имеет отличного от нуля решения.

В самом деле, пусть μ_0 является решением уравнения (41). Потенциал двойного слоя $u_0(x, y)$ с плотностью μ_0 обладает тем свойством, что в силу формул (54) из главы I и (41)

$$u_0^+(s) = 0, \quad x^0(s) \in S.$$

Так как предел $u_0(x, y)$ изнутри области D^+ на границе S равен нулю, то в силу свойства единственности гармонической функции заключаем, что $u_0(x, y) = 0$ для всех $(x, y) \in D^+$. Следовательно, для нормальной производной $\frac{\partial u_0}{\partial \nu}$ на S имеем

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^+ = 0. \tag{42}$$

В силу свойства

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^+ = \left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^-$$

нормальной производной потенциала двойного слоя, обнаруженного в пункте 2° § 4 главы I, и равенства (42) заключаем, что

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^- = 0. \tag{43}$$

Так же, как и в пункте 3° § 4 главы I, очевидно, что гармоническая в D^- функция $u_0(x, y)$, представляющая собой потенциал двойного слоя и удовлетворяющая условию (43), является постоянной. Но $u_0(x, y)$ на бесконечности равна нулю. Поэтому $u_0(x, y) = 0$ всюду в D^-.

Используя опять формулы (54) и (55) главы I, мы можем утверждать, что

$$-\mu_0(s) = u_0^+(s) - u_0^-(s) = 0,$$

и тем самым доказано, что $\lambda = -1$ *не является собственным числом ядра* $K(s, t)$.

Можно показать, что ядро $K^*(s, t)$ интегрального уравнения Фредгольма (69) главы I, к которому редуцирована задача Неймана (67), имеет в качестве собственного числа $\lambda = -1$, но выполнение условия (68) в силу альтернативы Фредгольма гарантирует разрешимость этого уравнения.

Однако, чтобы обнаружить достаточность условия (68) для разрешимости задачи Неймана (67), мы поступим на этот раз иначе.

Пусть $u(x, y)$ — искомое решение задачи Неймана в области D^+. Обозначим через $v(x, y)$ функцию, гармонически сопряженную с $u(x, y)$. Поскольку $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ считаются непрерывными в $D^+ \cup S$, для выражения $\frac{\partial v}{\partial s}$ в силу условия (CR) и (67) имеем

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{ds} = -\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dy}{ds} =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{d\nu} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{d\nu} = \frac{\partial u}{\partial \nu} = g(s),$$

откуда

$$v(s) = \int_0^s g(t)\,dt + C, \qquad 0 \leqslant s \leqslant l,$$

где l — длина контура S области D^+.

Так как

$$v(0) = C, \quad v(l) = \int_0^l g(t)\,dt + C,$$

для непрерывности функции $v(s)$ при $s = 0$, $s = l$, т. е. для выполнения равенства $v(0) = v(l)$, функция $g(t)$ должна удовлетворять условию

$$\int_0^l g(t)\,dt = 0,$$

что и совпадает с условием (68) из главы I.

Существование в области D^+ гармонической функции $v(x, y)$, удовлетворяющей краевому условию

$$v|_S = \int_0^s g(t)\,dt + C,$$

доказано выше (задача Дирихле, как только что было доказано, имеет решение).

Гармоническая функция $u(x, y)$ (искомое решение задачи Неймана) строится при помощи $v(x, y)$ по способу, указанному в пункте 5° § 2 главы II.

2°. Редукция задачи Коши для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Для обыкновенного линейного дифференциального уравнения порядка n:

$$\frac{d^n y}{dx^n}+\sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\frac{d^k y}{dx^k}=f(x) \tag{44}$$

с непрерывной правой частью $f(x)$ и коэффициентами $a_k(x)$, обладающими непрерывными производными $\frac{d^k a_k}{dx^k}$, $k=0, 1, \ldots, n-1$, при $a \leqslant x \leqslant b$, рассмотрим *задачу Коши*

$$\left.\frac{d^k y}{dx^k}\right|_{x=x^0}=y_k^0, \qquad k=0, \ldots, n-1, \quad a<x_0<b, \tag{45}$$

где y_k^0, $k=0, \ldots, n-1$, — заданные действительные постоянные.

Так как полином

$$z(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\,y_k^0(x-x_0)^k$$

удовлетворяет условиям (45) и функция $u(x)=y(x)-z(x)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^n u}{dx^n}+\sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\frac{d^k u}{dx^k}=f(x)-\sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\frac{d^k z}{dx^k},$$

удовлетворяющим начальным условиям

$$\left.\frac{d^k u}{dx^k}\right|_{x=x_0}=0, \qquad k=0, \ldots, n-1,$$

то без ограничения общности можно считать, что в условиях (45) все $y_k^0=0$, т. е.

$$\left.\frac{d^k y}{dx^k}\right|_{x=x_0}=0, \qquad k=0, \ldots, n-1. \tag{46}$$

После n-кратного интегрирования равенства (44) в силу (46) получаем

$$y(x)+\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_0}^{x}dx_1\int_{x_0}^{x_1}dx_2\ldots\int_{x_0}^{x_{n-1}}a_k(t)\,\frac{d^ky}{dt^k}\,dt=$$

$$=\int_{x_0}^{x}dx_1\int_{x_0}^{x_1}dx_2\ldots\int_{x}^{x_{n-1}}f(t)\,dt. \tag{47}$$

На основании известного из математического анализа тождества

$$\int_{x_0}^{x_{i-1}}dx_i\int_{x_0}^{x_i}F(t)(x_i-t)^{j-1}\,dt=$$

$$=\int_{x_0}^{x_{i-1}}F(t)\,dt\int_{t}^{x_{i-1}}(x_i-t)^{j-1}\,dx_i=\frac{1}{j}\int_{x_0}^{x_{i-1}}(x_{i-1}-t)^j\,F(t)\,dt,$$

справедливого для любой непрерывной функции $F(t)$, равенство (47) можно переписать в виде

$$y(x)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}a_k(t)\,\frac{d^ky}{dt^k}\,dt=$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)\,dt. \tag{48}$$

В результате интегрирования по частям в левой части (48) с учетом условий (46) получаем

$$y(x)+\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\int_{x_0}^{x}y(t)\,\frac{d^k}{dt^k}\left[a_k(t)(x-t)^{n-1}\right]dt=$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)\,dt$$

или

$$y(x)+\int_{x_0}^{x}K(x,\,t)\,y(t)\,dt=F(x), \tag{49}$$

где

$$K(x, t) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} [a_k(t)(x-t)^{n-1}],$$

$$F(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)\, dt$$

— заданные непрерывные функции.

Таким образом, *задача* (44), (46) *сведена к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра второго рода* (49) *с непрерывным ядром* $K(x, t)$ *и непрерывной правой частью* $F(x)$.

Из установленного в пункте 3° § 1 настоящей главы факта существования и единственности решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода вытекает *существование и единственность решения задачи Коши* (44), (46).

3°. Краевая задача для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. В теории обыкновенных дифференциальных уравнений наряду с задачей Коши значительное внимание уделяется и так называемой *первой краевой задаче* (*задаче Дирихле*), которую на примере линейного уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda p(x)\, y = f(x), \qquad a < x < b, \tag{50}$$

можно сформулировать следующим образом: *ищется регулярное в интервале* $a < x < b$ *решение* $y(x)$ *уравнения* (50), *непрерывное при* $a \leqslant x \leqslant b$ *и удовлетворяющее краевым условиям*

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \tag{51}$$

где A *и* B — *заданные действительные постоянные.*

Как и при рассмотрении задачи (44), (45), без ограничения общности можно считать, что $A = B = 0$, т. е. краевые условия (51) имеют вид

$$y(a) = y(b) = 0. \tag{52}$$

Предположим, что $p(x)$ и $f(x)$ — заданные непрерывные при $a \leqslant x \leqslant b$ действительные функции, а λ — действительный параметр.

Введем в рассмотрение *функцию Грина*

$$G(t,\ x)=\begin{cases}\dfrac{(t-b)(x-a)}{b-a}, & x\leqslant t,\\[2mm] \dfrac{(t-a)(x-b)}{b-a}, & x\geqslant t,\end{cases}$$

которая 1) непрерывна в квадрате $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant t\leqslant b$, 2) в интервалах $a<x<b$, $a<t<b$ при $t\neq x$ как по t, так и по x имеет вторые производные, равные нулю, и 3)

$$\lim_{\substack{t\to x\\ t\geqslant x}}\frac{\partial G}{\partial t}-\lim_{\substack{t\to x\\ t\leqslant x}}\frac{\partial G}{\partial t}=1,\qquad a<x<b.$$

После интегрирования очевидного тождества

$$G(t,\ x)\frac{d^2y}{dt^2}-y(t)\,\frac{\partial^2 G(t,\ x)}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(G\frac{dy}{dt}-y\frac{\partial G}{\partial t}\right)$$

в интервалах $a<t<x-\varepsilon$, $x+\varepsilon<t<b$, где ε — достаточно малое положительное число, сложив полученные результаты, с учетом (50), (52) и свойств 1), 2), 3) функции $G(t,\ x)$ получаем

$$\left(\int_a^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^{b}\right)G(t,\ x)[-\lambda p(t)\,y(t)+f(t)]\,dt=$$
$$=G(x-\varepsilon,\ x)\frac{dy}{dt}\bigg|_{t=x-\varepsilon}-G(x+\varepsilon,\ x)\frac{dy}{dt}\bigg|_{t=x+\varepsilon}-$$
$$-y(x-\varepsilon)\frac{\partial G(t,\ x)}{\partial t}\bigg|_{t=x-\varepsilon}+y(x+\varepsilon)\frac{\partial G(t,\ x)}{\partial t}\bigg|_{t=x+\varepsilon},$$

откуда в пределе при $\varepsilon\to 0$ следует, что

$$y(x)=-\lambda\int_a^b G(t,\ x)\,p(t)\,y(t)\,dt+\int_a^b G(t,\ x)\,f(t)\,dt \tag{53}$$

или

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(x,\ t)\,y(t)\,dt=F(x), \tag{54}$$

где

$$K(x,\ t)=-G(t,\ x)\,p(t),\qquad F(x)=\int_a^b G(t,\ x)\,f(t)\,dt.$$

Легко видеть, что *решение* $y(x)$ *интегрального уравнения* (54), *когда оно существует, удовлетворяет дифференциальному уравнению* (50) *и краевым условиям* (52).

Действительно, так как $y(x)$ — решение интегрального уравнения (54) или, что то же самое, уравнения (53), то можем написать

$$y(x)=\int_a^b G(t,\ x)[-\lambda p(t)\,y(t)+f(t)]\,dt \tag{55}$$

или

$$y(x)=\int_a^x \frac{(t-a)(x-b)}{b-a}[-\lambda p(t)\,y(t)+f(t)]\,dt+$$
$$+\int_x^b \frac{(t-b)(x-a)}{b-a}[-\lambda p(t)\,y(t)+f(t)]\,dt,$$

откуда находим, что

$$\frac{dy}{dx}=\int_a^x \frac{t-a}{b-a}[-\lambda p(t)\,y(t)+f(t)]\,dt+$$
$$+\int_x^b \frac{t-b}{b-a}[-\lambda p(t)\,y(t)+f(t)]\,dt$$

и

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x-a}{b-a}[-\lambda p(x)\,y(x)+f(x)]-$$
$$-\frac{x-b}{b-a}[-\lambda p(x)\,y(x)+f(x)]=-\lambda p(x)\,y(x)+f(x).$$

Далее, в силу непрерывности функции $G(t,\ x)$ из (55) в пределе, когда $x\to a$ и $x\to b$, на основании равенств $G(t,\ a)=G(t,\ b)=0$ получаем, что $y(a)=y(b)=0$.

Тем самым *задача* (50), (52) *редуцирована к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода* (54). Следовательно, *об условной или безусловной разрешимости этой задачи и о числе ее линейно независимых решений можно судить на основании утверждений, доказанных в §§ 1, 2 настоящей главы.*

Опираясь на теорию интегральных уравнений, изложенную выше, легко усмотреть существенную разницу между задачами Коши и Дирихле для обыкновенных дифференциальных уравнений.

§ 4. Сингулярные интегральные уравнения

1°. Понятие сингулярного интегрального уравнения. Когда ядро $K(x, y)$ интегрального уравнения при $x=y$ обращается в бесконечность, так что интеграл существует только в смысле главного значения по Коши, такое уравнение принято называть *сингулярным интегральным уравнением.*

Пусть S — замкнутая или разомкнутая кривая Ляпунова. Говорят, что заданная на S однозначная функция $K(t, t_0)$ удовлетворяет *условию Гёльдера,* если для любых пар точек t, t_0 и t', t_0', лежащих на S, имеет место неравенство

$$|K(t, t_0)-K(t', t_0')| \leqslant A(|t-t'|^{h_1}+|t_0-t_0'|^{h_2}),$$

где A, h_1, h_2 — положительные постоянные, причем $h_1 \leqslant 1$, $h_2 \leqslant 1$.

В приложениях часто встречаются сингулярные интегральные уравнения вида

$$\alpha(t_0)\varphi(t_0)+\int_S \frac{K(t, t_0)}{t-t_0}\varphi(t)\,dt=f(t_0), \qquad t_0 \in S, \tag{56}$$

где α, K и f — заданные, а φ — искомая функции, удовлетворяющие условию Гёльдера (это условие для функции одного переменного было сформулировано в пункте 1° § 5 главы II).

Для сингулярных интегральных уравнений теоремы Фредгольма, вообще говоря, не остаются в силе. При требовании, что функции $\alpha(t_0)$ и $\beta(t_0)=K(t_0, t_0)$ ни в одной точке $t_0 \in S$ одновременно в нуль не обращаются, теория интегральных уравнений вида (56) построена в книге Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.

Ниже будут рассмотрены отдельные классы сингулярных интегральных уравнений, решения которых выписываются в квадратурах.

2°. Интегральные уравнения Гильберта. В пункте 7° § 3 главы II была выведена формула Шварца (89), которая дает интегральное представление аналитической в круге $|z|<1$ функции

$$f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$$

через краевые значения $u(\varphi)$ ее действительной части при условии, что $u(x, y)$ непрерывна в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$.

Будем предполагать, что функция $u(\varphi) = u(t_0)$, $t_0 = e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, удовлетворяет условию Гёльдера. Записывая формулу Шварца в виде формулы (87) главы II:

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{u(t)\,dt}{t-z} - u(0, 0) + iv(0, 0), \tag{57}$$

заключаем, что существует

$$f^+(t_0) = u(\varphi) + iv(\varphi), \qquad t_0 = e^{i\varphi}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

причем в силу формул (104) и (88) той же главы

$$\begin{aligned} f^+(t_0) &= u(\varphi) + iv(\varphi) = \\ &= u(\varphi) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{u(t)\,dt}{t-t_0} - u(0, 0) + iv(0, 0) = \\ &= u(\varphi) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{u(t)\,dt}{t-t_0} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{u(t)\,dt}{t} + iv(0, 0) = \\ &= u(\varphi) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} u(\psi) \operatorname{ctg} \frac{\psi-\varphi}{2}\, d\psi + iv(0, 0), \end{aligned} \tag{58}$$

где

$$\operatorname{ctg} \frac{\psi-\varphi}{2}\, d\psi = \frac{t+t_0}{t-t_0} \frac{dt}{t}, \qquad t = e^{i\psi}.$$

На основании отмеченного в пункте 4° § 5 главы II свойства предельных значений интеграла типа Коши с плотностью, удовлетворяющей условию Гёльдера, из формулы (58) заключаем, что *наряду с $u(t_0) = u(\varphi)$ и функция $f^+(t_0)$ удовлетворяет условию Гёльдера на окружности $|t_0| = 1$.*

Так как в силу теоремы о среднем для гармонических функций имеет место равенство

$$v(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} v(\psi)\, d\psi,$$

то из (58) получаем

$$v(\varphi) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(\psi) \operatorname{ctg} \frac{\psi-\varphi}{2}\, d\psi + \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} v(\psi)\, d\psi, \tag{59}$$

где первый интеграл в правой части понимается в смысле главного значения по Коши.

Пользуясь интегральным представлением аналитической в круге $|z|<1$ функции $\frac{1}{i}f(z)=v(x, y)-iu(x, y)$ через краевые значения $v(\varphi)$ ее действительной части $v(x, y)$:

$$\frac{1}{i}f(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{v(t)\,dt}{t-z}-v(0, 0)-iu(0, 0),$$

получаем интегральное представление функции $f(z)$ через краевые значения $v(\vartheta)$ ее мнимой части $v(x, y)$:

$$f(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{v(t)\,dt}{t-z}-iv(0, 0)+u(0, 0).$$

Отсюда, как и выше, находим

$$f^+(t_0)=u(\varphi)+iv(\varphi)=$$
$$=iv(\varphi)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}v(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\varphi}{2}\,d\vartheta+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u(\vartheta)\,d\vartheta,\qquad t=e^{i\vartheta},$$

или

$$u(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}v(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\varphi}{2}\,d\vartheta+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u(\vartheta)\,d\vartheta. \tag{60}$$

Следовательно, *если известно, что функция $u(\varphi)$ удовлетворяет условию Гёльдера, то функция $v(\varphi)$ тоже удовлетворяет условию Гёльдера и они связаны между собой формулой* (59). *Обратно, если $v(\varphi)$ удовлетворяет условию Гёльдера, то и $u(\varphi)$ удовлетворяет условию Гёльдера и связь между этими функциями дается формулой* (60). Это означает, что формулы (59) и (60), связывающие между собой краевые значения действительной и мнимой частей аналитической в круге $|z|<1$ функции $f(z)$, удовлетворяющей условию Гёльдера в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$, эквивалентны между собой.

Когда дополнительно известно, что

$$\int\limits_0^{2\pi}[u(\psi)+iv(\psi)]\,d\psi=0, \tag{61}$$

формулы (59) и (60) принимают вид соответственно

$$v(\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\psi)\operatorname{ctg}\frac{\psi-\varphi}{2}\,d\psi \tag{62}$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\psi}{2}\,d\vartheta = u(\psi). \tag{63}$$

Равенство (63) в предположении, что $u(\varphi)$ — заданная, а $v(\varphi)$ — искомая действительные функции, удовлетворяющие условию Гёльдера, для которых выполнено условие (61), представляет собой *сингулярное интегральное уравнение первого рода*, решение которого дается формулой (62). Уравнение (63) носит название *интегрального уравнения Гильберта*, а формула (62) — *формулы его обращения*.

Подставляя выражение $v(\vartheta)$ из формулы (62) в (63), получаем *формулу композиции сингулярных интегралов*

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\psi}{2}\,d\vartheta\int_0^{2\pi} u(\varphi)\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\vartheta}{2}\,d\varphi = -u(\psi).$$

Ядра $\frac{1}{t-t_0}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\psi-\varphi}{2}$ принято называть *ядром Коши* и *ядром Гильберта* соответственно.

3°. Преобразование Гильберта. Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(t)\,dt}{t-x} = u(x), \qquad -\infty < x < \infty, \tag{64}$$

где $u(x)$ — заданная, а $v(x)$ — искомая действительные функции, удовлетворяющие условию Гёльдера, для которых при больших $|x|$ имеют место оценки

$$|u(x)| < \frac{A}{|x|^\delta}, \quad |v(x)| < \frac{A}{|x|^\delta}, \qquad A > 0, \quad \delta > 0.$$

Обозначим через $F(z)$ интеграл типа Коши с плотностью $v(t)$:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(t)\,dt}{t-z}.$$

В силу формул (106) и (107) главы II имеем

$$F^{+}(x)-F^{-}(x)=v(x), \tag{65}$$

$$F^{+}(x)+F^{-}(x)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(t)\,dt}{t-x}, \qquad -\infty<x<\infty. \tag{66}$$

На основании (64) и (66) заключаем, что $F(z)$ должна быть решением краевой задачи

$$F^{+}(x)+F^{-}(x)=\frac{u(x)}{i}.$$

В силу формулы (110) главы II решение этой задачи, обращающееся в нуль на бесконечности, имеет вид

$$F(z)=\begin{cases}\Phi(z), & \operatorname{Im} z>0,\\ -\Phi(z), & \operatorname{Im} z<0,\end{cases} \tag{67}$$

где

$$\Phi(z)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)\,dt}{t-z}. \tag{68}$$

Поскольку в силу (67) и (68)

$$F^{+}(x)-F^{-}(x)=\Phi^{+}(x)+\Phi^{-}(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)\,dt}{t-x},$$

искомое решение $v(x)$ уравнения (64) дается формулой (65), т. е.

$$v(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)\,dt}{t-x}. \tag{69}$$

Формула (64), выражающая функцию $u(t)$ через функцию $v(x)$, носит название *преобразования Гильберта*, а формула (69), дающая решение интегрального уравнения (64), — *обратного преобразования Гильберта*.

4°. Интегральное уравнение теории крыла самолета. При отыскании профиля тонкого крыла самолета важную роль играет интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{v(t)\,dt}{t-x}=u(x), \qquad -a<x<a, \quad 0<a<\infty, \tag{70}$$

где $v(x)$ и $u(x)$ — действительные функции, удовлетворяющие условию Гёльдера в интервале $-a<x<a$.

Для предельных значений $F^+(x)=\lim\limits_{z\to x} F(z)$, $\operatorname{Im} z>0$, $F^-(x)=\lim\limits_{z\to x} F(z)$, $\operatorname{Im} z<0$, функции

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-a}^{a}\frac{v(t)\,dt}{t-z}$$

в силу формул (106) и (107) главы II имеют место формулы

$$F^+(x)-F^-(x)=v(x), \tag{71}$$

$$F^+(x)+F^-(x)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-a}^{a}\frac{v(t)\,dt}{t-x}, \quad -a<x<a. \tag{72}$$

Из равенств (70) и (72) следует, что функция $F(z)$ должна быть решением краевой задачи

$$F^+(x)+F^-(x)=\frac{u(x)}{i}, \quad -a<x<a, \tag{73}$$

$$F^+(x)-F^-(x)=0, \quad -\infty<x<-a, \quad a<x<\infty. \tag{74}$$

В силу (73) и (74) для функции

$$\Omega(z)=\sqrt{a^2-z^2}\,F(z) \tag{75}$$

имеем краевые условия

$$\Omega^+(x)+\Omega^-(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{i}\sqrt{a^2-x^2}\,u(x), & -a<x<a,\\ 0, \quad -\infty<x<-a, & a<x<\infty.\end{cases} \tag{76}$$

Как уже было показано в пункте 5° § 5 главы II, решение задачи (76) дается формулой

$$\Omega(z)=\begin{cases}\Phi(z), & \operatorname{Im} z>0,\\ -\Phi(z), & \operatorname{Im} z<0,\end{cases} \tag{77}$$

где

$$\Phi(z)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}\,u(t)\,dt}{t-z}+\frac{C_0}{2}, \tag{78}$$

а C_0 — произвольная постоянная.

Вычислим значения $\Omega^+(x)$ и $\Omega^-(x)$ на основании (77) и (78):

$$\Omega^+(x) = -i\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2}u(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}\,u(t)\,dt}{t-x} + \frac{C_0}{2},$$

$$\Omega^-(x) = -i\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2}u(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}\cdot u(t)\,dt}{t-x} - \frac{C_0}{2}.$$

Отсюда в силу (75) и (71) непосредственно следует *формула обращения интегрального уравнения* (70):

$$v(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a^2-t^2}{a^2-x^2}}\frac{u(t)\,dt}{t-x} + \frac{C}{\sqrt{a^2-x^2}}, \tag{79}$$

где $C = \operatorname{Re} C_0$.

Подбирая постоянную C по формуле

$$C = -\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-t^2}\frac{u(t)\,dt}{t-a},$$

из (79) получаем *ограниченное вблизи конца a* решение уравнения (70):

$$v(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{(a+t)(a-x)}{(a-t)(a+x)}}\frac{u(t)\,dt}{t-x}. \tag{80}$$

Формула (80) называется *преобразованием Гильберта в конечном интервале* $(-a, a)$.

5°. **Интегральное уравнение с логарифмическим ядром.** В механике сплошной среды часто встречается интегральное уравнение вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\log|t-x|\,v(t)\,dt = u(x), \qquad -a<x<a, \tag{81}$$

где $u(x)$ и $v(x)$ — действительные функции.

В предположениях, что $u(x)$ дифференцируема и $v(x)$ и $\frac{du(x)}{dx}$ при $-a<x<a$ удовлетворяют условию Гёльдера, повторяя рассуждение пункта 2° § 5 главы II, в результате дифференцирования уравнение (81) можно записать

в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{v(t)\,dt}{t-x}=-u'(x), \qquad -a<x<a, \tag{82}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

В силу формулы (79) *общим решением* уравнения (82) является функция

$$v(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a^2-t^2}{a^2-x^2}}\,\frac{u'(t)\,dt}{t-x}+\frac{C}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

где C — произвольная действительная постоянная.

Как уже было отмечено в предыдущем пункте, *ограниченное вблизи конца* a решение уравнения (82) дается формулой

$$v(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{(a+t)(a-x)}{(a-t)(a+x)}}\,\frac{u'(t)\,dt}{t-x}.$$

В приложениях порой требуется найти решение $v(x)$ уравнения (82), ограниченное на обоих концах интервала $(-a, a)$. Оно, очевидно, существует лишь при наличии равенства

$$\int_{-a}^{a}\frac{u'(t)\,dt}{\sqrt{a^2-t^2}}=0 \tag{83}$$

и имеет вид

$$v(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2-t^2}}\,\frac{u'(t)\,dt}{t-x}, \qquad -a<x<a.$$

Условие (83), в частности, соблюдено, если функция $u(x)$ является четной.

ГЛАВА VI

МЕТОДЫ, НАИБОЛЕЕ ЧАСТО ПРИМЕНЯЕМЫЕ НА ПРАКТИКЕ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

§ 1. Метод разделения переменных

1°. Решение основной смешанной задачи для уравнения колебаний струны. В теории колебаний струны важную роль играют решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0, \tag{1}$$

представимые в виде

$$u(x,\ t)=v(x)\,w(t) \tag{2}$$

и именуемые *стоячими волнами*.

Подставляя выражение (2) для $u(x,\ t)$ в левую часть уравнения (1), получаем

$$v''(x)\,w(t)-v(x)\,w''(t)=0$$

или

$$\frac{v''(x)}{v(x)}=\frac{w''(t)}{w(t)}. \tag{3}$$

Так как левая часть (3) не зависит от t, а правая часть — от x, то

$$\frac{v''(x)}{v(x)}=\frac{w''(t)}{w(t)}=\text{const}. \tag{4}$$

Обозначив через $-\lambda$ постоянную в правой части (4), перепишем эти равенства в виде

$$v''(x)+\lambda v(x)=0 \tag{5}$$

и

$$w''(t)+\lambda w(t)=0, \tag{6}$$

представляющие собой обыкновенные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что общее решение $v(x)$ уравнения (5) имеет вид

$$v=c_1x+c_2 \tag{7}$$

при $\lambda=0$,

$$v=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x \tag{8}$$

при $\lambda>0$ и

$$v=c_1e^{\sqrt{-\lambda}\,x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}\,x} \tag{9}$$

при $\lambda<0$, где c_1 и c_2 — произвольные действительные постоянные.

Точно так же в соответствии с тем, $\lambda=0$, $\lambda>0$ или $\lambda<0$, общее решение уравнения (6) запишется в виде

$$\begin{aligned} &w=c_3t+c_4,\\ &w=c_3\cos\sqrt{\lambda}\,t+c_4\sin\sqrt{\lambda}\,t,\\ &w=c_3e^{\sqrt{-\lambda}\,t}+c_4e^{-\sqrt{-\lambda}\,t}, \end{aligned} \tag{10}$$

где c_3 и c_4 — произвольные действительные постоянные.

Пусть требуется найти нетривиальное (не равное тождественно нулю) регулярное в полуполосе $0<x<\pi$, $t>0$ решение $u(x, t)$ уравнения (1), непрерывное при $0\leqslant x\leqslant\pi$, $t\geqslant 0$ и удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0, t)=0, \quad u(\pi, t)=0, \quad t\geqslant 0. \tag{11}$$

Будем искать решение задачи (1), (11) в виде стоячей волны (2). Тогда функции $v(x)$ и $w(t)$ должны удовлетворять уравнениям (5) и (6) соответственно и условиям $v(0)\,w(t)=v(\pi)\,w(t)=0$ или, что то же самое,

$$v(0)=0, \quad v(\pi)=0. \tag{12}$$

Задача отыскания нетривиального решения $v(x)$ уравнения (5), удовлетворяющего условиям (12), является частным случаем так называемой *общей спектральной задачи* или *задачи Штурма — Лиувилля*.

Значение λ, для которого уравнение (5) имеет нетривиальное решение $v(x)$, удовлетворяющее условиям (12), называется *собственным числом*, а само решение $v(x)$ — *соответствующей λ собственной функцией*.

Нетривиальные решения задачи (5), (12) вида (7) и (9) не существуют, ибо, подставляя выражение (7) и (9) для $v(x)$ в (12), получаем $c_2=0$, $\pi c_1+c_2=0$ в первом случае и $c_1+c_2=0$, $e^{\sqrt{-\lambda}\pi}c_1+e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}c_2=0$ во втором случае, т. е. в обоих случаях $c_1=c_2=0$. Теперь, подставляя выражение (8) в (12), будем иметь $c_1=0$, $c_2\sin\sqrt{\lambda}\pi=0$. Отсюда видно, что задача (5), (12) будет иметь нетривиальное решение вида (8) тогда и только тогда, когда

$$\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0,$$

т. е. когда $\lambda = n^2$, где n — отличное от нуля целое число.

Ввиду того, что функции $\sin nx$ и $\sin(-n)x = -\sin nx$ линейно зависимы, естественно ограничиться рассмотрением лишь натуральных значений 1, 2, ... для n.

Таким образом, мы пришли к заключению, что $\lambda = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$, являются собственными числами задачи (5), (12), а функции $c_n \sin nx$, $n = 1, 2, \ldots$, где c_n — произвольные действительные постоянные, отличные от нуля, — соответствующими им собственными функциями.

Ниже будем предполагать, что постоянные $c_n = 1$, $n = 1, 2, \ldots$ В соответствии с этим система собственных функций запишется в виде $v_n(x) = \sin nx$, $n = 1, 2, \ldots$ Следовательно, *однородная задача* (1), (11) *имеет бесконечное множество линейно независимых решений* $u_n(x, t) = \sin nx \cdot w_n(t)$, *где в силу* (10)

$$w_n(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

а a_n *и* b_n *— произвольные действительные постоянные.*

Набор решений

$$\sin nx\,(a_n \cos nt + b_n \sin nt), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

уравнения (1) позволяет найти решение следующей *основной смешанной задачи: требуется определить регулярное в полуполосе* $0 < x < \pi$, $t > 0$ *решение* $u(x, t)$ *уравнения* (1), *непрерывное при* $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $t \geqslant 0$ *и удовлетворяющее краевым условиям* (11) *и начальным условиям*

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \tag{14}$$

где $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *— заданные достаточно гладкие действительные функции.*

Решение $u(x, t)$ задачи (1), (11), (14) будем искать в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx\,(a_n \cos nt + b_n \sin nt). \tag{15}$$

Очевидно, что представленная формулой (15) функция $u(x, t)$, в предположении равномерной сходимости ряда в правой ее части, удовлетворяет краевым условиям (11).

Для того чтобы она удовлетворяла и начальным условиям (14), мы должны иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx = \varphi(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \sin nx = \psi(x), \tag{16}$$

откуда находим

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x) \sin nx\, dx, \quad b_n = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} \psi(x) \sin nx\, dx.$$

Из теории рядов Фурье известно, что непрерывность на сегменте $0 \leqslant x \leqslant \pi$ функций $\varphi''(x)$ и $\psi'(x)$ и выполнение условий $\varphi(0) = \varphi(\pi) = \psi(0) = \psi(\pi) = 0$ гарантируют возможность представлений (16) и равномерную сходимость тригонометрического ряда в правой части (15). Кроме того, в этом случае сумма $u(x, t)$ ряда (15) будет непрерывно дифференцируемой функцией при $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $t \geqslant 0$, удовлетворяющей условиям (11) и (14).

Если дополнительно известно, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на сегменте $0 \leqslant x \leqslant \pi$ вместе со своими производными до третьего и второго порядка соответственно, причем $\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(\pi) = 0$, $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$, то представленная формулой (15) функция $u(x, t)$ будет обладать частными производными до второго порядка включительно, которые могут быть вычислены дифференцированием почленно ряда в правой части (15). Очевидно, что в этих предположениях сумма $u(x, t)$ ряда (15) будет искомым решением основной смешанной задачи (1), (11), (14). Каждое из слагаемых

$$\sin nx\,(a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

в правой части (15) в теории распространения звука носит название *собственного колебания* (или *гармоники*) струны с закрепленными в точках (0, 0), (π, 0) концами.

Основная смешанная задача (1), (11), (14) *не может иметь более одного решения.* Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно показать, что при $\varphi(x) = \psi(x) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, задача (1), (11), (14) имеет только тривиальное решение.

Как уже было доказано в пункте 1° § 3 главы III, решение однородной задачи Коши $u(x, 0) = 0$, $\left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$,

$0 \leqslant x \leqslant \pi$, для уравнения (1) тождественно равно нулю в прямоугольном треугольнике с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(\pi, 0)$, $C(\pi/2, \pi/2)$. Легко видеть, что решение $u(x, t)$ уравнения (1), равное нулю на прямолинейных отрезках AC и AD, где $D = D(0, \pi/2)$, обращается в нуль всюду в треугольнике ACD. Действительно, интегрируя тождество

$$-2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = 0$$

по треугольной области $AC_\tau D_\tau$, где $C_\tau = C_\tau(\tau, \tau)$, $D_\tau = D_\tau(0, \tau)$ при любом фиксированном τ, $0 < \tau < \pi/2$, в силу формулы (GO) получаем

$$\int\limits_{AC_\tau + C_\tau D_\tau + D_\tau A} 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\,dt + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx = 0.$$

Отсюда, поскольку $u = 0$ на отрезках AC_τ и $D_\tau A$, находим, что

$$\int\limits_{D_\tau C_\tau} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] dx = 0,$$

т. е. $\dfrac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \dfrac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0$ вдоль $D_\tau C_\tau$ и, стало быть, $u(x, t) = 0$ в треугольнике ACD. Аналогично доказывается, что $u(x, t) = 0$ и в треугольнике BCD_1, где $D_1 = D_1(\pi, \pi/2)$.

Так как функция $u(x, t)$ при $t = \pi/2$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, удовлетворяет однородным начальным условиям $u(x, t) = \dfrac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0$, то последовательным применением приведенного выше рассуждения приходим к заключению, что $u(x, t) = 0$ в полуполосе $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $t \geqslant 0$ всюду.

2°. **Задача колебаний мембраны.** Колебания упругой мембраны с закрепленными краями вдоль кривой C, лежащей в плоскости $t = 0$ и ограничивающей конечную область G этой плоскости, описываются решением волнового уравнения с двумя пространственными переменными x, y:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{17}$$

удовлетворяющим начальным

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y),$$
$$\left.\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in G, \tag{18}$$

и краевому

$$u(x,\ y,\ t)=0, \quad t \geqslant 0, \quad (x,\ y) \in C, \tag{19}$$

условиям.

Как и при рассмотрении стоячих волн в предыдущем пункте, для того чтобы выражение вида

$$u(x,\ y,\ t)=v(x,\ y)\,w(t) \tag{20}$$

было решением уравнения (17), функции $v(x,\ y)$ и $w(t)$ должны удовлетворять соответственно уравнениям

$$\Delta v(x,\ y)+\lambda v(x,\ y)=0 \tag{21}$$

и

$$w''(t)+\lambda w(t)=0, \tag{22}$$

где

$$\lambda=-\frac{\Delta v(x,\ y)}{v(x,\ y)}=-\frac{w''(t)}{w(t)}=\mathrm{const},$$

а Δ — оператор Лапласа $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Подставляя значения функции $u(x,\ y,\ t)$ из (20) в краевое условие (19), получаем

$$v(x,\ y)\,w(t)=0, \quad (x,\ y) \in C, \quad t \geqslant 0.$$

Это равенство в свою очередь равносильно краевому условию

$$v(x,\ y)=0, \quad (x,\ y) \in C, \tag{23}$$

для функции $v(x,\ y)$.

Значение λ, для которого однородная задача Дирихле (23) для уравнения Гельмгольца (21) имеет нетривиальное решение $v(x,\ y)$, называется *собственным числом*, а $v(x,\ y)$ — *соответствующей λ собственной функцией*.

Предположим, что контур C плоской области G является кусочно-гладкой кривой Жордана, а $v(x,\ y)$ — собственной функцией задачи (21), (23), соответствующей собственному числу λ.

Интегрируя очевидное тождество

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2=\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial v}{\partial y}\right)-v\,\Delta v$$

по области G и пользуясь формулой (GO), в силу (21) и (23) получаем

$$\int\limits_G (v_x^2+v_y^2)\,dx\,dy=\int\limits_C v\frac{\partial v}{\partial \nu}\,ds-\int\limits_G v\,\Delta v\,dx\,dy=\lambda\int\limits_G v^2\,dx\,dy.$$

Отсюда заключаем, что *собственное число* $\lambda>0$. Поэтому мы вправе принять обозначение $\lambda=\mu^2$, где μ — действительное число. В соответствии с этим общее решение уравнения (22) в силу (10) имеет вид

$$w(t)=c_3\cos\mu t+c_4\sin\mu t. \tag{24}$$

Из (24) в свою очередь следует, что $w(t)$ — периодическая функция с периодом $2\pi/\mu$.

При довольно общих предположениях относительно области G существует счетное множество собственных чисел μ_1, μ_2, ... и соответствующих им собственных функций $v_1(x, y)$, $v_2(x, y)$, ... Этот факт ниже будет доказан для случая, когда G представляет собой круг.

Беря соответствующее μ_n решение (24) уравнения (22) в виде $w_n(t)=a_n\cos\mu_n t+b_n\sin\mu_n t$, где a_n и b_n — произвольные действительные постоянные, мы можем выписать набор решений уравнения (17) вида

$$u_n(x,\ y,\ t)=v_n(x,\ y)(a_n\cos\mu_n t+b_n\sin\mu_n t),\quad n=1,\ 2,\ \ldots \tag{25}$$

Если v_k и v_m — соответствующие λ_k и λ_m собственные функции, то

$$\int\limits_G v_k(x,\ y)\,v_m(x,\ y)\,dx\,dy=0,\qquad k\neq m. \tag{26}$$

Чтобы обнаружить справедливость равенства (26), достаточно проинтегрировать по области G тождество

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(v_k\frac{\partial v_m}{\partial x}-v_m\frac{\partial v_k}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v_k\frac{\partial v_m}{\partial y}-v_m\frac{\partial v_k}{\partial y}\right)=$$
$$=v_k\Delta v_m-v_m\Delta v_k,$$

воспользоваться формулой (GO) и равенствами

$$\Delta v_k=-\lambda_k v_k,\quad \Delta v_m=-\lambda_m v_m,\quad (x,\ y)\in G,$$
$$v_k(x,\ y)=v_m(x,\ y)=0,\quad (x,\ y)\in C.$$

Получаем

$$\int\limits_G (v_k\Delta v_m-v_m\Delta v_k)\,dx\,dy=(\lambda_k-\lambda_m)\int\limits_G v_k v_m\,dx\,dy=0,$$

откуда ввиду того, что $\lambda_k\neq\lambda_m$, следует (26).

Будем искать решение $u(x, y, t)$ задачи (17), (18), (19) в виде суммы ряда

$$u(x, y, t)=\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, y)(a_n \cos \mu_n t+b_n \sin \mu_n t), \tag{27}$$

где a_n, b_n, $n=1, 2, \ldots$, — произвольные действительные постоянные.

В предположении равномерной сходимости ряда в правой части (27) и допустимости его почленного дифференцирования до второго порядка сумма $u(x, y, t)$ этого ряда будет решением уравнения (17), удовлетворяющим краевому условию (19).

Для того чтобы функция $u(x, y, t)$ удовлетворяла и начальным условиям (18), коэффициенты a_n и b_n должны быть подчинены ограничениям

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(x, y)=\varphi(x, y), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n b_n v_n(x, y)=\psi(x, y), \tag{28}$$

откуда в силу (26) находим

$$\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{N^2(v_n)} \int_G \varphi(x, y) v_n(x, y)\, dx\, dy, \\ b_n&=\frac{1}{\mu_n N^2(v_n)} \int_G \psi(x, y) v_n(x, y)\, dx\, dy, \end{aligned} \tag{29}$$

где

$$N(v_n)=\left(\int_G v_n^2(x, y)\, dx\, dy\right)^{1/2}. \tag{30}$$

Число $N(v_n)$, определенное по формуле (30), называется *нормой* функции $v_n(x, y)$.

3°. Понятие полной ортонормированной системы функций. Говорят, что заданные в области G действительные функции $v_k(x, y)$, $k=1, \ldots, n$, отличные от тождественного нуля, *линейно независимы*, если нельзя указать действительных постоянных c_k, $k=1, \ldots, n$, среди которых по крайней мере одна отлична от нуля, таких, что

$$\sum_{k=1}^{n} c_k v_k(x, y)=0, \quad (x, y) \in G.$$

Бесконечная система функций

$$v_k(x,\ y), \quad k=1,\ 2,\ \ldots, \tag{31}$$

называется *линейно независимой*, если линейно независима любая конечная система функций $v_k(x,\ y)$ из последовательности (31).

Будем предполагать, что функции $v_k(x,\ y)$, $k=1,\ 2,\ldots$, интегрируемы с квадратом в области G. Линейно независимая система (31) называется *ортогональной*, если

$$\int_G v_k(x,\ y)\, v_m(x,\ y)\, dx\, dy = 0, \quad k \neq m. \tag{32}$$

Ортогональная система (31) называется *нормированной* или *ортонормированной*, если $N(v_k)=1$, $k=1,\ 2,\ \ldots$

Очевидно, что в случае надобности ортогональную систему (31) всегда можно сделать ортонормированной делением каждого ее члена $v_k(x,\ y)$ на число $N(v_k)$.

Пусть $\varphi(x,\ y)$ — произвольная, заданная в области G действительная интегрируемая вместе с квадратом функция, а система (31) ортонормирована. Числа

$$a_k = \int_G \varphi(x,\ y)\, v_k(x,\ y)\, dx\, dy, \quad k=1,\ 2,\ \ldots, \tag{33}$$

называются *коэффициентами Фурье* функции $\varphi(x,\ y)$ относительно ортонормированной системы (31).

Выражение вида $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k v_k(x,\ y)$, где α_k — действительные постоянные, называется *линейным агрегатом*.

Число

$$M = \int_G \left(\varphi - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k\right)^2 dx\, dy \tag{34}$$

носит название *средней квадратичной ошибки*.

Так как из (34) в силу (32) и (33) имеем

$$M = N^2(\varphi) + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - a_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \geqslant 0,$$

то средняя квадратичная ошибка (34) при фиксированном n будет минимальной, если $\alpha_k = a_k$, $k=1,\ \ldots,\ n$.

Когда линейный агрегат имеет вид $\sum_{k=1}^{n} a_k v_k(x, y)$, из неравенства

$$\int_G \left(\varphi - \sum_{k=1}^{n} a_k v_k\right)^2 dx\,dy \geqslant 0$$

заключаем, что

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant N^2(\varphi) \tag{35}$$

для любого n. Следовательно, *ряд, составленный из квадратов коэффициентов Фурье функции* $\varphi(x, y)$, *сходится и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \leqslant N^2(\varphi). \tag{36}$$

Соотношение (36) называется *неравенством Бесселя.*

Ортонормированная система (31) называется *полной* в пространстве функций, которому принадлежат $\varphi(x, y)$ и $v_k(x, y)$, $k = 1, 2, \ldots$, если

$$\lim_{n \to \infty} \int_G \left(\varphi - \sum_{k=1}^{n} a_k v_k\right)^2 dx\,dy = 0$$

или, что то же самое,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = N^2(\varphi). \tag{37}$$

Выполнение условия полноты (37) вовсе не означает, что функцию $\varphi(x, y)$ можно представить в виде суммы первого из рядов (28):

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(x, y). \tag{38}$$

Когда функция $\varphi(x, y)$ *непрерывна вместе со своими производными до второго порядка, представление* (38) *заведомо имеет место.*

В случае непрерывности функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ вместе с их производными до второго порядка ряд в правой части (27), коэффициенты a_n и b_n которого определены по формулам (29), будет равномерно сходиться. Для обеспечения возможности почленного дифференцирования этого ряда до второго порядка от функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ дополнительно надо потребовать непрерывность их производных соответственно до четвертого и третьего порядка. *В этих предположениях сумма $u(x, y, t)$ ряда* (27) *будет регулярным решением уравнения* (17).

Справедливость этого утверждения можно обнаружить применением теории интегральных уравнений Фредгольма, но на этом мы здесь останавливаться не будем.

4°. Случай круговой мембраны. Без ограничения общности мы можем предполагать, что круговая мембрана в положении равновесия занимает круг $x^2+y^2 \leqslant 1$.

Наряду с декартовыми ортогональными координатами x, y мы в этом пункте будем пользоваться и полярными координатами r, ϑ, определенными из равенств $x=r\cos\vartheta$, $y=r\sin\vartheta$.

Так как при переходе от декартовых ортогональных координат к полярным координатам оператор Лапласа преобразуется по формуле

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2},$$

то уравнение (21) в полярных координатах запишется в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2}+\mu^2 v=0, \quad \mu^2=\lambda. \tag{39}$$

Для того чтобы функция $v(r, \vartheta)$ вида

$$v(r, \vartheta)=R(r)\,\theta(\vartheta) \tag{40}$$

была решением уравнения (39), функции $R(r)$ и $\theta(\vartheta)$ должны удовлетворять соответственно уравнениям

$$r^2R''(r)+rR'(r)+(\mu^2r^2-\omega)R(r)=0, \tag{41}$$

$$\theta''(\vartheta)+\omega\theta(\vartheta)=0, \tag{42}$$

где ω — действительная постоянная,

$$\omega=-\frac{\theta''}{\theta}=\frac{r^2R''+rR'+r^2\mu^2R}{R}=\text{const}.$$

Из (40) следует, что для однозначности функции $v(r, \vartheta)$ однозначной должна быть фуикция $\theta(\vartheta)$, т. е. $\theta(\vartheta)$ должна быть периодической функцией с периодом 2π. А это в свою очередь означает, что в уравнении (42) постоянная $\omega = n^2$, где n — произвольное целое число. В соответствии с этим общее решение уравнения (42) примет вид

$$\theta(\vartheta) = \alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta, \tag{43}$$

где α_n, β_n — произвольные действительные постоянные.

Если $R(r)$ является регулярным при $0 \leqslant r < 1$ решением уравнения (41), непрерывным при $0 \leqslant r \leqslant 1$ и удовлетворяющим условию

$$R(1) = 0, \tag{44}$$

то представленная формулой (40) функция $v(r, \vartheta)$ будет решением задачи (21), (23) в рассматриваемом случае.

После замены переменных $\mu r = \rho$, $R(r) = R\left(\frac{\rho}{\mu}\right) = J(\rho)$ уравнение (41) принимает вид

$$J''(\rho) + \frac{1}{\rho} J'(\rho) + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right) J(\rho) = 0 \tag{45}$$

В дальнейшем будем считать, что целое число $n \geqslant 0$.

Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{2^{2k} k! \, (n+k)!}. \tag{46}$$

Так как $(k!)^2 = \prod\limits_{j=1}^{k} j(k-j+1) \geqslant k^k$ и, стало быть, при $k > 0$

$$\frac{1}{2^{2k} k! \, (n+k)!} < \frac{1}{k^k},$$

то

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[2k]{\frac{1}{2^{2k} k! \, (n+k)!}} = 0.$$

Отсюда в силу формулы Коши — Адамара заключаем, что радиус сходимости степенного ряда (46) равен бесконечности, т. е. сумма ряда (46) является целой функцией переменного z.

На основании этого факта непосредственной проверкой убеждаемся в том, что целые функции

$$J_n(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\rho^{n+2k}}{2^{n+2k} k! \, (n+k)!}, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{47}$$

являются решениями уравнения (45), т. е. функции $R(r) = J_n(\mu r)$ являются решениями уравнения (41) при $\omega = n^2$.

Определенные формулой (47) функции $J_k(\rho)$, $n = 0, 1, \ldots$, называются *функциями Бесселя*, а уравнение (45), которому они удовлетворяют, — *уравнением Бесселя.*

Доказывается, что *функции Бесселя с неотрицательными целочисленными индексами n имеют бесконечное (счетное) множество действительных нулей.* Обзначим их через $\rho_{n,m}$, $m = 1, 2, \ldots$

Собственные числа μ^2 задачи (41), (44) следует определить из равенства

$$R(1) = J_n(\mu) = 0, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Следовательно, *собственными числами задачи* (41), (44) *являются квадраты нулей бесселевых функций, т. е.*

$$\mu_m^2 = \rho_{n,m}^2 \neq 0.$$

В силу (40) и (43) соответствующие им собственные функции имеют вид

$$v_{n,m}(r, \vartheta) = J_n(\rho_{n,m}r)(\alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta). \tag{48}$$

Подставляя выражение $v_{n,m}(r, \vartheta)$ из (48) в правую часть формулы (25), получаем решения

$$\begin{gathered} u_{n,m}(x, y, t) = J_n(\rho_{n,m}r)(\alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta) \times \\ \times (a_{n,m} \cos \rho_{n,m}t + b_{n,m} \sin \rho_{n,m}t), \\ n = 0, 1, \ldots; \quad m = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{49}$$

уравнения (17), удовлетворяющие краевому условию (19), т. е. выражающие собственные колебания круговой мембраны, закрепленной по краям.

Набор решений (49) уравнения (17) позволяет по указанной в пункте 2° схеме построить решение задачи (17), (18), (19) в рассматриваемом случае.

Уравнение (21) называется еще *метагармоническим*, а его регулярные решения — *метагармоническими функциями.*

Подставляя в правую часть (40) решения $J_n(\mu r)$ и $\cos n\vartheta$, $\sin n\vartheta$, $\mu^2 = \lambda$, $n = 0, 1, \ldots$, уравнений (41) и (42), получаем метагармонические функции $J_n(\mu r) \cos n\vartheta$, $J_n(\mu r) \sin n\vartheta$, первая из которых обращается в нуль на окружностях $r = \frac{\rho_{n,m}}{\mu}$ и на лучах $\vartheta = \left(\pi k + \frac{\pi}{2}\right) \Big/ n$, а вторая — на окружностях $r=\frac{\rho_{n,m}}{\mu}$ и на лучах $\vartheta=\pi k/n$, $m=1, 2, \ldots$; $k=0, 1, \ldots, n-1$, носящих название *узловых линий.*

В то время как для уравнения Лапласа задача Дирихле всегда имеет, и притом единственное, решение, для метагармонического уравнения (21) аналогичное утверждение может не иметь места, Так, например, как уже было отмечено выше, однородная задача Дирихле (23) для уравнения (21) в круге $r<1$ при $\lambda=\rho^2_{n,m}$ имеет линейно независимые решения $J_n(\rho_{n,m}r)\cos n\vartheta$ и $J_n(\rho_{n,m}r)\sin n\vartheta$, а неоднородная задача Дирихле, оказывается, не всегда имеет решения.

5°. Общие замечания относительно метода разделения переменных. Методом разделения переменных с успехом можно пользоваться при построении решений широкого класса дифференциальных уравнений с частными производными.

Пусть задано уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+C(x)u=$$
$$=\alpha(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\beta(t)\frac{\partial u}{\partial t}+\gamma(t)u. \qquad (50)$$

Для того чтобы функция $u(x, t)$ вида

$$u(x, t)=v(x)w(t) \qquad (51)$$

была решением уравнения (50), функции $v(x)$ и $w(t)$ должны удовлетворять соответственно уравнениям

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}+[C(x)+\lambda]v(x)=0 \qquad (52)$$

и

$$\alpha(t)w''(t)+\beta(t)w'(t)+[\gamma(t)+\lambda]w(t)=0, \qquad (53)$$

где $\lambda=\text{const}$.

Когда число пространственных переменных $n=1$, т. е.

$$A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x)\frac{\partial u}{\partial x}+C(x)u=$$
$$=\alpha(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\beta(t)\frac{\partial u}{\partial t}+\gamma(t)u, \qquad (54)$$

уравнение (52) для $v(x)$ запишем в виде

$$A(x)v'' + B(x)v' + [C(x) + \lambda]v = 0. \tag{55}$$

Уравнения (53) и (55) оба являются обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями, решения которых нетрудно построить. Однако построение полного набора решений вида (51) уравнения (54) и доказательство возможности представления решения $u(x, t)$ смешанной задачи (18), (19) для этого уравнения в виде суммы ряда по этим решениям в общем случае без привлечения спектральной теории линейных операторов становятся невозможными.

Исследование этой задачи сильно осложняется, когда в отдельных точках интервала изменения независимого переменного x (или t) функция $A(x)$ (или функция $\alpha(t)$) обращается в нуль. Именно такие случаи встречаются чаще всего в приложениях. При их исследовании становится необходимым вводить в рассмотрение так называемые *специальные функции*.

Когда $A(x) = x^2$, $B(x) = x$, $C(x) = x^2$, $\lambda = -\mu^2$, уравнение (55) представляет собой уже знакомое нам уравнение Бесселя

$$x^2v'' + xv' + (x^2 - \mu^2)v = 0.$$

Решения этого уравнения называются *цилиндрическими* или *бесселевыми функциями*. Бесселевы функции $J_n(x)$ с неотрицательными целочисленными индексами n были введены в предыдущем пункте.

При $A(x) = 1 - x^2$, $B(x) = -x$, $C(x) = 0$, $\lambda = n^2$ из (55) получается *уравнение Чебышева*

$$(1 - x^2)v'' - xv' + n^2v = 0.$$

Уравнению Чебышева удовлетворяют *функции Чебышева*

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + i\sqrt{1 - x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1 - x^2}\right)^n\right],$$

$$u_n(x) = \frac{1}{2i}\left[\left(x + i\sqrt{1 - x^2}\right)^n - \left(x - i\sqrt{1 - x^2}\right)^n\right],$$

$$n = 0, 1, \ldots,$$

среди которых $T_n(x)$, очевидно, представляют собой полиномы.

Уравнение Лагерра

$$xv'' + (1-x)v' + \lambda v = 0$$

также является частным случаем уравнения (55).

6°. Шаровые и сферические функции. В силу формулы (26) введения однородные полиномы степени m:

$$u_\alpha^m(x, y, z) = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \Delta^n (x^\alpha y^{m-\alpha}), \quad \alpha = 0, \ldots, m, \tag{56}$$

$$u_{m+\beta+1}^m(x, y, z) = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \Delta^n (x^\beta y^{m-\beta-1}), \quad \beta = 0, \ldots, m-1, \tag{57}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, являются гармоническими функциями, носящими название *шаровых функций*.

Формулы (56) и (57) дают все линейно независимые шаровые функции степени m. Их число равно $2m+1$.

Из формул (56) и (57) имеем, например, при $m=1$:

$$u_0^1 = y, \quad u_1^1 = x, \quad u_2^1 = z,$$

а при $m=2$:

$$u_0^2 = y^2 - z^2, \quad u_1^2 = xy, \quad u_2^2 = x^2 - z^2, \quad u_3^2 = zy, \quad u_4^2 = zx.$$

В сферических координатах r, φ, ϑ, связанных с декартовыми ортогональными координатами x, y, z соотношениями

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta, \quad y = r\sin\varphi\sin\vartheta, \quad z = r\cos\vartheta,$$

шаровые функции $u_k^m(x, y, z)$ принимают вид

$$u_k^m(x, y, z) = r^m Y_m^k(\varphi, \vartheta), \quad k = 0, \ldots, 2m, \tag{58}$$

где $Y_m^k(\varphi, \vartheta)$ носят название *сферических функций Лапласа*.

Как уже было отмечено в пункте 1° § 1 главы I, наряду с функциями (58) гармоническими являются и функции

$$\frac{1}{r} u_k^m\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right) = \frac{1}{r^{m+1}} Y_m^k(\varphi, \vartheta), \quad k = 0, \ldots, 2m. \tag{59}$$

Записывая уравнение Лапласа $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ в сферических координатах:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right) = 0$$

и требуя, чтобы функция $u(x, y, z)$ вида

$$u(x, y, z) = Y(\varphi, \vartheta)\, w(r)$$

была гармонической, в результате разделения переменных получаем

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dw}{dr}\right) - \lambda w = 0, \qquad (60)$$

$$\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right) + \lambda Y = 0, \qquad (61)$$

где $\lambda = \text{const}$.

В частности, при $\lambda = m(m+1)$ уравнения (60) и (61) примут вид

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dw}{dr}\right) - m(m+1)\, w = 0, \qquad (62)$$

$$\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right) + m(m+1)\, Y = 0. \qquad (63)$$

Множители $\frac{1}{r^{m+1}}$ и $Y_m^k(\varphi, \vartheta)$ в выражениях (59) для гармонических функций $\frac{1}{r}\, u_k^m\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right)$ являются решениями уравнений (62) и (63) соответственно.

Для того чтобы функция $Y(\varphi, \vartheta)$ вида

$$Y(\varphi, \vartheta) = \Phi(\varphi)\, \theta(\vartheta)$$

была решением уравнения (63), функции Φ и θ должны быть решениями уравнений

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0, \qquad (64)$$

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{d\theta}{d\vartheta}\right) + \left[m(m+1) - \frac{\mu}{\sin^2\vartheta}\right]\theta = 0 \qquad (65)$$

соответственно, где $\mu = \text{const}$.

Из условия периодичности с периодом 2π функции $Y(\varphi, \vartheta)$ относительно φ следует, что в уравнении (64) постоянная $\mu = n^2$, где n — целое число. В соответствии с этим в обозначениях $\cos\vartheta = t$, $\theta(\vartheta) = \theta(\arccos t) = v(t)$ уравнение (65) запишется в виде

$$(1 - t^2)\, v'' - 2tv' + \left[m(m+1) - \frac{n^2}{1 - t^2}\right] v = 0. \qquad (66)$$

При $n = 0$ из уравнения (66) получается *уравнение Лежандра*

$$(1 - t^2)\, v'' - 2tv' + m(m+1)\, v = 0,$$

линейно независимые решения которого называются *функциями Лежандра первого* и *второго рода*, и для них приняты обозначения $P_m(\cos\vartheta)$ и $Q_m(\cos\vartheta)$.

Линейно независимые же решения $P_m^n(\cos\vartheta)$ и $Q_m^n(\cos\vartheta)$ уравнения (66) носят название *присоединенных функций Лежандра первого* и *второго рода*.

7°. Вынужденные колебания. *Уравнением вынужденных колебаний струны* называется неоднородное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f(x,\ t), \tag{67}$$

где $f(x,\ t)$ — заданная действительная непрерывная функция.

Когда $f(x,\ t)=f_n(t)\sin nx$, решение $u_n(x,\ t)$ уравнения (67) естественно искать в виде $u_n(x,\ t)=w_n(t)\sin nx$. Для определения $w_n(t)$ из (67) получаем обыкновенное линейное дифференциальное уравнение

$$w_n''(t)+n^2 w_n(t)=-f_n(t),$$

одним из частных решений которого, очевидно, является функция

$$w_n^0(t)=-\frac{1}{n}\int_0^t f_n(\tau)\sin n(t-\tau)\,d\tau.$$

Следовательно, общее решение этого уравнения имеет вид

$$w_n(t)=a_n\cos nt+b_n\sin nt-\frac{1}{n}\int_0^t f_n(\tau)\sin n(t-\tau)\,d\tau,$$

где a_n и b_n — произвольные действительные постоянные.

Набор решений

$$u_n(x,\ t)=\sin nx\left[a_n\cos nt+b_n\sin nt-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{n}\int_0^t f_n(\tau)\sin n(t-\tau)\,d\tau\right],\qquad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

уравнения (67) позволяет исследовать смешанную задачу (67), (11), (14). Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ представляют собой суммы рядов (16), а $f(x, t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin nx$, то, допуская возможность почленного дифференцирования и интегрирования этих рядов, *решение* $u(x, t)$ *смешанной задачи* (67), (11), (14) *можно выписать в виде*

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx\left[a_n\cos nt+b_n\sin nt-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n}\int_0^t f_n(\tau)\sin n(t-\tau)\,d\tau\right].$$

Заметим, что, когда краевые условия неоднородны, т. е. когда вместо (11) имеем $u(0, t)=\alpha(t)$, $u(\pi, t)=$ $=\beta(t)$, где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции, в результате замены $u(x, t)=v(x, t)+$ $+\alpha(t)+\frac{x}{\pi}[\beta(t)-\alpha(t)]$ искомого решения $u(x, t)$ уравнения (67), для определения $v(x, y)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=f(x, t)+\alpha''(t)+\frac{x}{\pi}[\beta''(t)-\alpha''(t)]$$

с однородными краевыми условиями $v(0, t)=v(\pi, t)=0$ и соответствующим образом измененными начальными условиями.

Аналогично исследуются вынужденные колебания мембраны.

§ 2. Метод интегральных преобразований

1°. Интегральные представления решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Класс дифференциальных уравнений, решения которых могут быть выписаны в элементарных функциях, весьма узок.

В предыдущем параграфе, пользуясь методом разделения переменных, мы старались строить решения дифференциальных уравнений с частными производными в виде суммы бесконечных рядов.

Порой удобно иметь решение рассматриваемого дифференциального уравнения в виде интеграла, содержащего известные функции, а также решения более простых уравнений.

Пусть имеется обыкновенное линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$L(y) = p(z)y'' + q(z)y' + r(z)y = 0, \tag{68}$$

коэффициенты которого являются аналитическими функциями комплексного переменного z, заданными на всей комплексной плоскости.

Решение $y(z)$ уравнения (68) будем искать в виде интеграла

$$y(z) = \int_C K(z, \zeta)\, v(\zeta)\, d\zeta, \tag{69}$$

где C — кусочно-гладкий контур, $v(\zeta)$ — пока еще неизвестная аналитическая функция, а $K(z, \zeta)$ — аналитическая функция переменных z, ζ, удовлетворяющая уравнению

$$p(z)\frac{\partial^2 K}{\partial z^2} + q(z)\frac{\partial K}{\partial z} + r(z)K = a(\zeta)\frac{\partial^2 K}{\partial \zeta^2} + b(\zeta)\frac{\partial K}{\partial \zeta} + c(\zeta)K, \tag{70}$$

причем $a(\zeta)$, $b(\zeta)$ и $c(\zeta)$ — заданные аналитические функции.

Предположим, что все проделанные ниже операции законны. Из (69) имеем

$$L(y) = \int_C L(K)\, v(\zeta)\, d\zeta$$

или, приняв во внимание (70),

$$L(y) = \int_C M(K)\, v(\zeta)\, d\zeta, \tag{71}$$

где M — дифференциальный оператор, $M = a(\zeta)\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + b(\zeta)\frac{\partial}{\partial \zeta} + c(\zeta)$.

Интегрируя по частям выражение (71) и допуская, что все проинтегрированные слагаемые равны нулю, будем иметь

$$L(y) = \int_C K(z, \zeta)\, M^*(v)\, d\zeta, \tag{72}$$

где

$$M^*(v) = \frac{d^2}{d\zeta^2}(av) - \frac{d}{d\zeta}(bv) + c(\zeta)v$$

— *дифференциальный оператор, сопряженный с оператором* M *по Лагранжу.*

Если функция v удовлетворяет уравнению

$$M^*(v)=0, \tag{73}$$

то представленная по формуле (69) функция $y(z)$, очевидно, будет решением дифференциального уравнения (68).

В качестве примера рассмотрим уравнение Бесселя (45), записанное в виде

$$z^2y''+zy'+(z^2-n^2)y=0, \tag{74}$$

где число n на этот раз не обязательно целое.

Решение $y(z)$ уравнения (74) будем искать по формуле (69), в которой

$$K(z,\ \zeta)=\mp\frac{1}{\pi}e^{-iz\sin\zeta}.$$

Так как в этом случае

$$L(K)=z^2K_{zz}+zK_z+(z^2-n^2)K=-K_{\zeta\zeta}-n^2K,$$

то равенства (71) и (72) запишутся в виде

$$L(y)=-\int\limits_C(K_{\zeta\zeta}+n^2K)v(\zeta)\,d\zeta=\pm\frac{1}{\pi}\int\limits_C(v_{\zeta\zeta}+n^2v)e^{-iz\sin\zeta}d\zeta.$$

Отсюда заключаем, что оператор $M^*=-\frac{d^2}{d\zeta^2}-n^2$, т. е. уравнение (73) имеет вид

$$\frac{d^2v}{d\zeta^2}+n^2v=0.$$

Решениями этого уравнения являются функции $e^{\pm in\zeta}$.

Следовательно, функции, определенные по формуле (69), в которой

$$K(z,\ \zeta)=\mp\frac{1}{\pi}e^{-iz\sin\zeta},\quad v(\zeta)=e^{in\zeta},$$

являются решениями уравнения Бесселя (74).

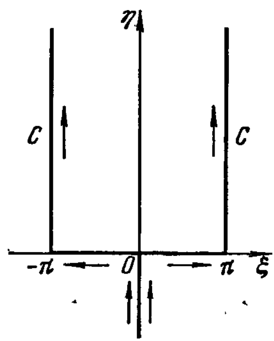

Рис. 24.

Все проделанные выше операции будут оправданы, если предположим, что $\operatorname{Re} z>0$, и в формуле (69) в качестве пути интегрирования C примем, например, ломаные

(рис. 24)

$$\begin{gathered}\xi=0, \quad -\infty<\eta\leqslant 0; \quad \eta=0, \quad -\pi\leqslant\xi\leqslant 0;\\ \xi=-\pi, \quad 0\leqslant\eta<\infty\end{gathered} \tag{75}$$

или

$$\begin{gathered}\xi=0, \quad -\infty<\eta\leqslant 0; \quad \eta=0, \quad 0\leqslant\xi\leqslant\pi;\\ \xi=\pi, \quad 0\leqslant\eta<\infty, \quad \zeta=\xi+i\eta.\end{gathered} \tag{76}$$

Когда путь интегрирования C совпадает с ломаной (75) и $K(z, \zeta)=-\frac{1}{\pi}e^{-iz\sin\zeta}$, для решения уравнения (74), определенного в полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$ по формуле (69), примем обозначение

$$\begin{aligned}H_n^1(z)=-\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\exp(-iz\sin i\eta-n\eta)\,d\eta-\\ -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{-\pi}\exp(-iz\sin\xi+n\xi i)\,d\xi-\\ -\frac{i}{\pi}\int_{0}^{\infty}\exp(iz\sin i\eta-n\eta-\pi ni)\,d\eta,\end{aligned} \tag{77}$$

а когда путь C совпадает с ломаной (76) и $K(z, \zeta)=$ $=\frac{1}{\pi}e^{-iz\sin\zeta}$,

$$\begin{aligned}H_n^2(z)=\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\exp(-iz\sin i\eta-n\eta)\,d\eta+\\ +\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\exp(-iz\sin\xi+n\xi i)\,d\xi+\\ +\frac{i}{\pi}\int_{0}^{\infty}\exp(iz\sin i\eta-n\eta+\pi ni)\,d\eta.\end{aligned} \tag{78}$$

Учитывая то обстоятельство, что

$$\sin i\eta=\frac{e^{-\eta}-e^{\eta}}{2i}=-\frac{\operatorname{sh}\eta}{i},$$

после простых преобразований формулы (77) и (78) примут вид

$$H_n^1(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{0} \exp(z\,\mathrm{sh}\,\eta - n\eta)\,d\eta + \\ + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \exp(-iz\sin\xi + in\xi)\,d\xi + \\ + \frac{1}{\pi i}\int_{0}^{\infty} \exp(-z\,\mathrm{sh}\,\eta - n\eta - \pi n i)\,d\eta, \quad (79)$$

$$H_n^2(z) = -\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{0} \exp(z\,\mathrm{sh}\,\eta - n\eta)\,d\eta + \\ + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \exp(-iz\sin\xi + in\xi)\,d\xi - \\ - \frac{1}{\pi i}\int_{0}^{\infty} \exp(-z\,\mathrm{sh}\,\eta - n\eta + \pi n i)\,d\eta. \quad (80)$$

Определенные по формулам (79) и (80) решения уравнения Бесселя (74) называются *функциями Ханкеля*, а их комбинации

$$J_n(z) = \frac{1}{2}\,[H_n^1(z) + H_n^2(z)], \quad (81)$$

$$N_n(z) = \frac{1}{2i}\,[H_n^1(z) - H_n^2(z)], \quad (82)$$

— *бесселевой функцией* и *функцией Неймана* соответственно.

В силу (79), (80) и (81) имеем

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(-iz\sin\xi + n\xi)\,d\xi - \\ - \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_{0}^{\infty} \exp(-z\,\mathrm{sh}\,\eta - n\eta)\,d\eta. \quad (83)$$

Когда n — целое число, второе слагаемое в правой части (83) отпадает и для $J_n(z)$ получаем выражение

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(-iz\sin\xi + in\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(z\sin\xi - n\xi)\, d\xi. \qquad (84)$$

Из формулы (84) следует, что $J_n(z)$ *при целом значении индекса n является целой функцией комплексного переменного z, причем*

$$J_{-n}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(z\sin\xi + n\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos[z\sin(\pi - t) + n(\pi - t)]\, dt =$$

$$= (-1)^n \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(z\sin t - nt)\, dt = (-1)^n J_n(z).$$

Доказывается, что *решения* (79) *и* (80) *уравнения Бесселя* (74), *определенные этими формулами в полуплоскости* $\operatorname{Re} z > 0$, *аналитически продолжаются в полуплоскость* $\operatorname{Re} z < 0$ *при любом индексе n, причем для полученных после аналитического продолжения функций значения $z = 0$ и $z = \infty$ переменного z являются точками ветвления, когда число n — не целое.*

Кроме того, *функции* $J_n(z)$ *и* $N_n(z)$ *линейно независимы и их можно представить в виде сумм рядов*

$$J_n(z) = \int_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} \qquad (85)$$

и

$$N_n(z) = \frac{J_n(z)\cos n\pi - J_{-n}(z)}{\sin \pi n}$$

соответственно.

В том, что представленная по формуле (85) функция $J_n(z)$ является решением уравнения (74), легко убедиться непосредственной проверкой, если учесть известное свойство гамма-функции Эйлера $\Gamma(k+1) = k\Gamma(k)$.

2°. Понятия преобразований Лапласа, Фурье и Меллина. Пусть действительная или комплексная функция $f(t)$ действительного переменного t, $0 \leqslant t < \infty$, удовлетворяет условиям: 1) $f(t)$ непрерывна всюду, кроме, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода, и 2) существуют постоянные $M > 0$ и $\xi_0 > 0$ такие, что $|f(t)| < Me^{\xi_0 t}$ для всех t.

В этих предположениях интеграл

$$F(\zeta) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-\zeta t}\, dt \tag{86}$$

существует для всех ζ с действительной частью $\operatorname{Re}\zeta > \xi_0$ и представляет собой аналитическую функцию комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$ в полуплоскости $\operatorname{Re}\zeta > \xi_0$.

Определенная по формуле (86) функция $F(\zeta)$ называется *преобразованием*, *изображением* или *трансформантой Лапласа* функции $f(t)$, а сама $f(t)$ — *функцией-оригиналом*.

В приложениях часто приходится обращать равенство (86), т. е. выражать функцию-оригинал $f(t)$ через ее лапласово изображение $F(\zeta)$.

Доказывается, что *если*: 1) $F(\zeta)$ *аналитична в полуплоскости* $\operatorname{Re}\zeta > \xi_0$, 2) *при* $\operatorname{Re}\zeta \geqslant a$ *для любого* $a > \xi_0$ *равномерно относительно* $\arg\zeta$

$$\lim_{\zeta\to\infty} F(\zeta) = 0$$

и 3) *интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(a + i\eta)\, d\eta$$

абсолютно сходится, то преобразование, обратное (86), *существует и оно имеет вид*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(a + i\eta)\, e^{(a+i\eta)t}\, d\eta, \tag{87}$$

где интеграл понимается в смыслг главного значения.

В обозначениях

$$g(t) = f(t)\, e^{-at}, \quad G(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(a + i\eta)$$

формулы (86) и (87) записываются следующим образом:

$$G(\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-i\eta t}g(t)\,dt, \tag{88}$$

$$g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta t}G(\eta)\,d\eta. \tag{89}$$

Определенная по формуле (88) функция $G(\eta)$ носит название *преобразования* или *трансформанты Фурье* функции $g(t)$. Если $g(t)=0$ при $-\infty<t<0$, то в качестве нижнего предела интегрирования в правой части (88), очевидно, можно брать $-\infty$.

Когда функция $g(t)$ определена всюду при $-\infty<t<\infty$, но она не обязательно равна нулю при $-\infty<t<0$, преобразование Фурье этой функции называется интеграл

$$G(\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta t}g(t)\,dt. \tag{90}$$

Для существования преобразования Фурье (90) достаточно чтобы: а) *функция* $g(t)$ *имела конечное число экстремумов*, б) *она была непрерывна всюду, кроме, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода*, и в) *интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt$$

сходился абсолютно, причем обращение (90) *дается формулой* (89).

Доказательство этого факта хотя и не требует привлечения сложного аппарата, но на нем мы здесь останавливаться не будем.

Заменой переменного интегрирования η на $-\eta$ убеждаемся в том, что *формулу* (89) *можно принять за исходное определение преобразования Фурье, для которого преобразование* (90) *будет обратным.*

Преобразованием Меллина функции $f(t)$, заданной при $0\leqslant t<\infty$, называется интеграл

$$F(\zeta)=\int_0^\infty t^{\zeta-1}f(t)\,dt, \tag{91}$$

где ζ — комплексное переменное, под $t^{\zeta-1}$ понимается однозначная функция

$$t^{\zeta-1}=e^{(\zeta-1)\log t},$$

а под $\log t$ — главная ветвь этой функции.

При $\zeta=a-i\tau$ в результате замены переменного интегрирования $t=e^{\xi}$ формула (91) принимает вид

$$F(a-i\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{a\xi}e^{-i\tau\xi}f(e^{\xi})\,d\xi. \tag{92}$$

В предположении, что функция $e^{a\xi}f(e^{\xi})$ удовлетворяет условиям, достаточным для существования преобразования Фурье, из (92) в силу (89) получаем

$$e^{a\xi}f(e^{\xi})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(a-i\tau)\,e^{i\xi\tau}\,d\tau$$

или, возвращаясь снова к переменному $t=e^{\xi}$,

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(a-i\tau)\,t^{-(a-i\tau)}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(a+i\eta)\,t^{-(a+i\eta)}\,d\eta. \tag{93}$$

Следовательно, преобразование, обратное (91), дается формулой (93). Эту формулу иногда записывают в виде

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} t^{-\zeta}F(\zeta)\,d\zeta. \tag{94}$$

Систематическая теория интегральных преобразований Лапласа, Фурье, Меллина и др. составляет содержание одного из разделов прикладной математики, носящего название *операционного исчисления*.

3°. Применение интегральных преобразований к задачам для дифференциальных уравнений с частными производными. Ядро $K(z,\ \zeta)$ интегрального представления (69) решения $y(z)$ обыкновенного дифференциального уравнения (68) удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению с частными производными (70).

В пункте 1° мы брали вполне определенное решение $K(z, \zeta)$ уравнения (70) и с его помощью строили решения уравнения (68). Попытаемся теперь поступить в некотором смысле обратно.

Пусть требуется определить регулярное в полуполосе $0<x<l$, $t>0$ решение $u(x, t)$ линейного уравнения с частными производными второго порядка, с коэффициентами, зависящими только от пространственного переменного x:

$$a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+c(x)\frac{\partial u}{\partial x}+d(x)\frac{\partial u}{\partial t}+e(x)u=0, \quad (95)$$

непрерывное при $0\leqslant x\leqslant l$, $t\geqslant 0$ и удовлетворяющее начальным

$$u(x, 0)=\varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x) \quad (96)$$

и краевым

$$u(0, t)=f_1(t), \quad u(l, t)=f_2(t) \quad (97)$$

условиям.

Предположим, что класс решений уравнения (95) и комплексный параметр ζ подобраны так, что существуют интегралы

$$v(x, \zeta)=\int_0^\infty u(x, t)e^{-\zeta t}\,dt, \quad (98)$$

$$F_1(\zeta)=\int_0^\infty u(0, t)e^{-\zeta t}\,dt, \quad F_2(\zeta)=\int_0^\infty u(l, t)e^{-\zeta t}\,dt \quad (99)$$

и оправданы все проделанные ниже операции:

$$\frac{dv(x, \zeta)}{dx}=\int_0^\infty \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}e^{-\zeta t}\,dt, \quad (100)$$

$$\frac{d^2v(x, \zeta)}{dx^2}=\int_0^\infty \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}e^{-t\zeta}\,dt, \quad (101)$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}e^{-\zeta t}\,dt=\zeta\int_0^\infty u(x, t)e^{-t\zeta}\,dt+u(x, t)e^{-\zeta t}\Big|_0^\infty=$$
$$=\zeta v(x, \zeta)-u(x, 0), \quad (102)$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}e^{-\zeta t}\,dt=\zeta^2 v(x, \zeta)-\zeta u(x, 0)-\left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0}. \quad (103)$$

Умножая обе части уравнения (95) на $e^{-\zeta t}$ и интегрируя по t от $t=0$ до $t=\infty$, в силу (96), (97), (98), (99), (100), (101), (102) и (103) получаем

$$av''+cv'+(e+d\zeta+b\zeta^2)\,v=b\varphi(x)\,\zeta+b\psi(x)+d\varphi(x), \tag{104}$$

$$v(0,\ \zeta)=F_1(\zeta),\quad v(l,\ \zeta)=F_2(\zeta). \tag{105}$$

Таким образом, *решение смешанной задачи* (95), (96), (97) *редуцировано к отысканию решения* $v(x,\ \zeta)$ *краевой задачи* (105) *для обыкновенного дифференциального уравнения* (104).

Наличие решения задачи (104), (105) не всегда может гарантировать даже возможность обращения преобразования Лапласа (98).

Когда задача (104), (105) имеет, и притом единственное, решение $v(x,\ \zeta)$, допускающее обращение преобразования Лапласа (98):

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} v(x,\ a+i\eta)\,e^{(a+i\eta)t}\,d\eta, \tag{106}$$

задача (95), (96), (97), очевидно, не может иметь более одного решения. Если представленная по формуле (106) функция $u(x,\ t)$ непрерывна вместе со своими частными производными до второго порядка, то она будет искомым решением задачи (95), (96), (97).

Так как нахождение функции $u(x,\ t)$ по формуле (106) требует довольно громоздких вычислений, в физике при решении конкретных задач для уравнений с частными производными предпочитают пользоваться преобразованием Фурье, тем более что выполнение условий, достаточных для существования обратного преобразования Фурье, считается вполне естественным.

4°. Применение преобразования Фурье при построении глобального решения задачи Коши для уравнения колебаний струны. Пусть требуется определить регулярное в полуплоскости $t>0$ решение $u(x,\ t)$ уравнения колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{107}$$

по условиям

$$u(x,\ 0)=\varphi(x),\quad \left.\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x), \tag{108}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Предположим, что функция $u(x, t)$ и ее частные производные до второго порядка непрерывны и стремятся к нулю при $x^2+t^2 \to \infty$, так что имеет смысл преобразование Фурье

$$v(t, \xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)\, e^{-ix\xi}\, dx \tag{109}$$

и законны все нижеследующие операции:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u(\tau, t)}{\partial \tau^2} e^{-i\tau\xi}\, d\tau = -\frac{\xi^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau, t)\, e^{-i\tau\xi}\, d\tau = \\ = -\xi^2 v(t, \xi), \tag{110}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u(\tau, t)}{\partial t^2} e^{-i\tau\xi}\, d\tau = \frac{d^2 v(t, \xi)}{dt^2}, \tag{111}$$

$$v(0, \xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0)\, e^{-i\xi x}\, dx = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{-i\xi x}\, dx = \Phi(\xi), \tag{112}$$

$$\left.\frac{dv(t, \xi)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} e^{-ix\xi}\, dx = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, e^{-ix\xi}\, dx = \Psi(\xi), \tag{113}$$

где $\Phi(\xi)$ и $\Psi(\xi)$ — преобразования Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно.

Умножая обе части уравнения (107) на $e^{-ix\xi}$ и интегрируя по x от $-\infty$ до ∞, в силу (110), (111), (112) и (113) получаем

$$v_{tt}(t, \xi)+\xi^2 v(t, \xi)=0, \tag{114}$$

$$v(0, \xi)=\Phi(\xi), \quad v_t(0, \xi)=\Psi(\xi). \tag{115}$$

Общее решение $v(t, \xi)$ обыкновенного дифференциального уравнения (114) возьмем в виде

$$v = c_1(\xi)\, e^{i\xi t} + c_2(\xi)\, e^{-i\xi t}, \tag{116}$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные (относительно t), зависящие от параметра ξ.

В силу (115) и (116) имеем

$$c_1 + c_2 = \Phi(\xi), \quad c_1 - c_2 = \frac{\Psi(\xi)}{i\xi},$$

откуда находим, что

$$c_1 = \frac{1}{2}\Phi(\xi) + \frac{1}{2i\xi}\Psi(\xi), \quad c_2 = \frac{1}{2}\Phi(\xi) - \frac{1}{2i\xi}\Psi(\xi).$$

Подставляя найденные значения c_1 и c_2 в правую часть (116), получаем решение

$$v(t, \xi) = \frac{1}{2}\Phi(\xi)(e^{i\xi t} + e^{-i\xi t}) + \frac{1}{2i\xi}\Psi(\xi)(e^{i\xi t} - e^{-i\xi t}) \quad (117)$$

уравнения (114), удовлетворяющее начальным условиям (115).

Пользуясь формулой обращения (89), в случае преобразования Фурье (109) получаем

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} v(t, \tau)\, e^{i\tau x}\, d\tau$$

или, учитывая (117),

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{i\tau(x+t)} + e^{i\tau(x-t)}\right]\Phi(\tau)\, d\tau +$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{i\tau(x+t)} - e^{i\tau(x-t)}\right]\frac{1}{i\tau}\Psi(\tau)\, d\tau. \quad (118)$$

В силу формулы обращения (89) последние из равенств (112) и (113) принимают вид

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\tau)\, e^{i\tau\xi}\, d\tau,$$

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\tau)\, e^{i\tau\xi}\, d\tau$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Предположим, что функция $u(x, t)$ и ее частные производные до второго порядка непрерывны и стремятся к нулю при $x^2+t^2 \to \infty$, так что имеет смысл преобразование Фурье

$$v(t, \xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)\, e^{-ix\xi}\, dx \tag{109}$$

и законны все нижеследующие операции:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u(\tau, t)}{\partial\tau^2}e^{-i\tau\xi}\,d\tau=-\frac{\xi^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau, t)\,e^{-i\tau\xi}\,d\tau= -\xi^2 v(t, \xi), \tag{110}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u(\tau, t)}{\partial t^2}e^{-i\tau\xi}\,d\tau=\frac{d^2 v(t, \xi)}{dt^2}, \tag{111}$$

$$v(0, \xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x, 0)\,e^{-i\xi x}\,dx= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{-i\xi x}\,dx=\Phi(\xi), \tag{112}$$

$$\left.\frac{dv(t, \xi)}{dt}\right|_{t=0}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0}e^{-ix\xi}\,dx= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\,e^{-ix\xi}\,dx=\Psi(\xi), \tag{113}$$

где $\Phi(\xi)$ и $\Psi(\xi)$ — преобразования Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно.

Умножая обе части уравнения (107) на $e^{-ix\xi}$ и интегрируя по x от $-\infty$ до ∞, в силу (110), (111), (112) и (113) получаем

$$v_{tt}(t, \xi)+\xi^2 v(t, \xi)=0, \tag{114}$$

$$v(0, \xi)=\Phi(\xi), \quad v_t(0, \xi)=\Psi(\xi). \tag{115}$$

Общее решение $v(t, \xi)$ обыкновенного дифференциального уравнения (114) возьмем в виде

$$v=c_1(\xi)\,e^{i\xi t}+c_2(\xi)\,e^{-i\xi t}, \tag{116}$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные (относительно t), зависящие от параметра ξ.

В силу (115) и (116) имеем

$$c_1+c_2=\Phi(\xi),\quad c_1-c_2=\frac{\Psi(\xi)}{i\xi},$$

откуда находим, что

$$c_1=\frac{1}{2}\Phi(\xi)+\frac{1}{2i\xi}\Psi(\xi),\quad c_2=\frac{1}{2}\Phi(\xi)-\frac{1}{2i\xi}\Psi(\xi).$$

Подставляя найденные значения c_1 и c_2 в правую часть (116), получаем решение

$$v(t,\ \xi)=\frac{1}{2}\Phi(\xi)\left(e^{i\xi t}+e^{-i\xi t}\right)+\frac{1}{2i\xi}\Psi(\xi)\left(e^{i\xi t}-e^{-i\xi t}\right) \quad (117)$$

уравнения (114), удовлетворяющее начальным условиям (115).

Пользуясь формулой обращения (89), в случае преобразования Фурье (109) получаем

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} v(t,\ \tau)\,e^{i\tau x}\,d\tau$$

или, учитывая (117),

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{i\tau(x+t)}+e^{i\tau(x-t)}\right]\Phi(\tau)\,d\tau+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{i\tau(x+t)}-e^{i\tau(x-t)}\right]\frac{1}{i\tau}\Psi(\tau)\,d\tau. \quad (118)$$

В силу формулы обращения (89) последние из равенств (112) и (113) принимают вид

$$\varphi(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\tau)\,e^{i\tau\xi}\,d\tau,$$

$$\psi(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\tau)\,e^{i\tau\xi}\,d\tau$$

и законны операции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}e^{-i\xi x}\,dx=\frac{dv(t,\xi)}{dt},\tag{131}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}e^{-i\xi x}\,dx=-\frac{\xi^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\,e^{-i\xi x}\,dx=$$
$$=-\xi^2 v(t,\xi).\tag{132}$$

Умножая уравнение (128) на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\xi x}$ и интегрируя по x от $-\infty$ до ∞, в силу (127), (129), (130), (131) и (132) будем иметь

$$\frac{dv}{dt}+\xi^2 v=0,\tag{133}$$

$$v(0,\xi)=\Phi(\xi).\tag{134}$$

Записывая уравнеие (133) в виде

$$\frac{dv}{v}=-\xi^2\,dt$$

и интегрируя, сразу получаем его общее решение

$$v(t,\xi)=ce^{-\xi^2 t},\tag{135}$$

где c — произвольная функция от ξ.

Подставляя выражение (135) для $v(t,\xi)$ в (134), находим $c=\Phi(\xi)$. Следовательно, решением обыкновенного дифференциального уравнеия (133), удовлетворяющим условию (134), является функция

$$v(t,\xi)=\Phi(\xi)\,e^{-\xi^2 t}.$$

После того, как функция $v(t,\xi)$ найдена, формулу (129) можно записать в виде

$$\Phi(\xi)\,e^{-\xi^2 t}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\,e^{-i\xi x}\,dx.\tag{136}$$

Обращая (136) по формуле (89), будем иметь

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi)\,e^{-\xi^2 t+i\xi x}\,d\xi.\tag{137}$$

Из таблиц интегральных преобразований находим, что при $t>0$ преобразованием Фурье функции $e^{-\xi^2 t}$ относительно переменного ξ является функция

$$f(x,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 t}e^{ix\xi}\,d\xi=\frac{1}{\sqrt{2t}}\,e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Применяя формулы (122) и (125) для свертки $f*\varphi$, из (137) получаем

$$u(x,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi)\,e^{-\xi^2 t}e^{ix\xi}\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,f(x-\xi,\ t)\,d\xi=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,d\xi,$$

что и требовалось доказать.

6°. Понятие δ-функции Дирака. В пункте 2° настоящего параграфа на функцию $g(x)$ были наложены условия, гарантирующие существование преобразования Фурье (90).

К сожалению, преобразование Фурье теряет смысл для достаточно обширного класса функций. Так, например, даже когда $G(x)=\text{const}\neq 0$, интеграл в правой части (89) не сходится. Тем не менее постулируется существование преобразования Фурье от постоянной $G=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, и оно, по определению, дает так называемую *δ-функцию Дирака*

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\,d\xi. \tag{138}$$

Постулируется также существование преобразования, обратного (138):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi)\,e^{-ix\xi}\,d\xi \tag{139}$$

или, что то же самое,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi)\,e^{-ix\xi}\,d\xi=1.$$

Предположим, что функция $f(x)$, $-\infty<x<\infty$, удовлетворяет условиям, достаточным для существования взаимно обратных преобразований

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{-ix\xi}\, d\xi, \tag{140}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi. \tag{141}$$

В силу (122), (125), (139), (140) и (141) для свертки $f*\delta$ будем иметь

$$f*\delta=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(x-t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi=f(x).$$

Таким образом, мы пришли к очень важному выводу о том, что *свертка $f*\delta$ дает значение функции f в точке x*:

$$f*\delta=f(x). \tag{142}$$

Формула (142) сильно упрощает громоздкие вычисления, встречающиеся особенно в квантовой механике.

В частности, когда $f(x)=1$, $-\infty<x<\infty$, из (142) и (122) в результате простой замены переменного интегрирования получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt=1. \tag{143}$$

Иногда δ-функцию Дирака $\delta(t)$ определяют как функцию, равную нулю для всех отличных от нуля t и равную ∞ при $t=0$, с требованием, чтобы имело место равенство (143).

Такое определение δ-функции не укладывается в рамки обычных классических понятий математического анализа. Строгое математическое обоснование совершенных выше операций с участием δ-функции Дирака дается в современной теории обобщенных функций.

§ 3. Метод конечных разностей

1°. Конечно-разностная замена уравнений с частными производными. В приложениях часто требуется найти приближенное (в определенном смысле) решение конкретных задач математической физики. Ниже дается краткое описание одного из методов построения приближенных решений дифференциальных уравнений с частными производными, носящего название *метода конечных разностей* или *сеточного метода.*

Пусть задано линейное дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными

$$a(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+c(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+d(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+ \\ +e(x, y)u=f(x, y). \qquad (144)$$

Считая x, y декартовыми ортогональными координатами, покроем плоскость переменных x, y квадратной сетью

$$x=m\cdot h, \quad y=n\cdot h, \qquad m, n=0, \pm 1, \ldots,$$

где h — заданное положительное число. Вершины каждого квадрата этой сети называются *узлами*, а число h — *шагом.*

Исходя из определения частных производных, в каждом узле (x, y) при условии, что все пять точек (x, y), $(x-h, y)$, $(x+h, y)$, $(x, y-h)$, $(x, y+h)$ принадлежат области D задания уравнения (144), можно считать, что

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\approx\frac{u(x, y)-u(x-h, y)}{h}, \\
&\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\approx\frac{u(x, y)-u(x, y-h)}{h}, \\
&\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}\approx\frac{u(x+h, y)+u(x-h, y)-2u(x, y)}{h^2}, \\
&\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}\approx\frac{u(x, y+h)+u(x, y-h)-2u(x, y)}{h^2}.
\end{aligned} \qquad (145)$$

Следовательно, мы вправе в каждом указанном выше узле уравнение с частными производными (144) приближенно заменить линейным алгебраическим уравнением

$$a(x, y)[u(x+h, y)+u(x-h, y)-2u(x, y)]+ \\ +b(x, y)[u(x, y+h)+u(x, y-h)-2u(x, y)]+ \\ +ch[u(x, y)-u(x-h, y)]+dh[u(x, y)-u(x, y-h)]+ \\ +h^2 e(x, y)u(x, y)=h^2 f(x, y) \qquad (146)$$

относительно $u(x, y)$, $u(x-h, y)$, $u(x+h, y)$, $u(x, y-h)$, $u(x, y+h)$.

Когда точка (x, y) пробегает узлы, принадлежащие области D, в качестве (146) мы будем иметь систему линейных алгебраических уравнений относительно значений $u(x, y)$ в указанных узлах. Некоторые из этих величин либо прямо определяются независимо от системы (146), исходя из начальных и краевых условий, либо эти последние порождают дополнительные к (146) линейные алгебраические уравнения, составляющие вместе с системой (146) приближенную сеточную замену всей исходной

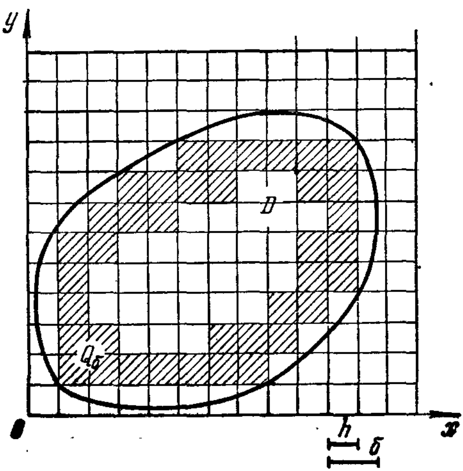

Рис. 25.

задачи. Решение таким образом полученной системы линейных алгебраических уравнений принимается за приближенное решение рассматриваемой задачи.

2°. Задача Дирихле для уравнения Лапласа. Пусть требуется построить сеточным методом приближенное решение задачи Дирихле

$$u(x, y)=\varphi(x, y), \quad (x, y) \in S, \tag{147}$$

в области D с границей S для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{148}$$

В этом случае система (146) принимает вид

$$u(x+h, y)+u(x-h, y)+\\ +u(x, y+h)+u(x, y-h)-4u(x, y)=0. \tag{149}$$

Обозначим через Q_δ совокупность лежащих в области D квадратов сети, по крайней мере одна вершина которых удалена от S на расстояние не больше, чем наперед заданное число $\delta > h$ (рис. 25).

В каждом узле, являющемся вершиной квадрата из Q_δ, за $u(x, y)$ примем заданное значение (147) искомой гармонической функции в ближайшей от (x, y) точке на S (когда таких точек на S несколько, то произвольно выбирается одно какое-либо из заданных значений φ в этих точках и к нему приравнивается $u(x, y)$).

Доказывается, что *система* (149) *относительно значений* $u(x, y)$ *в остальных узлах, принадлежащих* D, *всегда имеет, и притом единственное решение, которое в пределе при* $\delta \to 0$ *совпадает с искомым решением задачи* (147), (148).

3°. Первая краевая задача для уравнения теплопроводности. Сеточная замена уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{150}$$

в силу (145) имеет вид

$$u(x+h, y) + u(x-h, y) - \\ -2u(x, y) - hu(x, y) + hu(x, y-h) = 0. \tag{151}$$

Пусть D — область плоскости переменных x, y, ограниченная отрезками OA и BN прямых $y=0$, $y=H$, $H>0$, и гладкими кривыми OB и AN, каждая из которых пересекается с прямыми $y = \text{const}$ не более чем в одной точке. Обозначим через S часть границы области D, состоящую из OB, OA и AN.

Для того чтобы учесть краевое условие

$$u(x, y) = f(x, y), \qquad (x, y) \in S,$$

при отыскании приближенного решения уравнения (150) в области D, обозначим через Q_h совокупность квадратов сети, не выходящих из замкнутой области $\bar{D}$, а через ∂Q_h — границу Q_h.

Пусть q_h — совокупность квадратов из Q_h, по крайней мере одна вершина которых лежит на ∂Q_h, кроме внутренних квадратов самого верхнего ряда, примыкающего к отрезку BN (рис. 26).

В узлах (x, y), являющихся вершинами квадратов из q_h, за $u(x, y)$ примем значение f в ближайшей к этому узлу точке на S. Неизвестные значения $u(x, y)$ в остальных узлах, лежащих в D, находим решением линейной алгебраической системы (151).

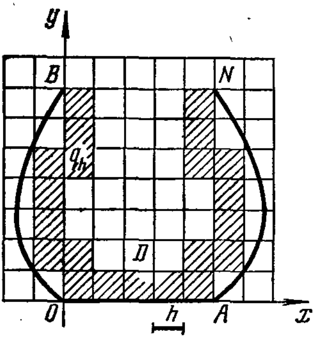

Рис. 26.

4°. Общие замечания относительно метода конечных разностей. Заменяя частные производные их приближенными значениями (145), любое нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными

$$F(x, y, u, u_x, \ldots) = 0$$

можно заменить нелинейной конечной системой

$$F\left(x, y, u(x, y), \frac{u(x, y) - u(x-h, y)}{h}, \ldots\right) = 0.$$

Однако при сеточной замене краевых и начальных условий, особенно когда в них участвуют частные производные от искомого решения, возникают некоторые сложности, которые далеко не всегда легко преодолимы.

Построение решений полученной конечно-разностной системы требует привлечения современной вычислительной техники. Ввиду того, что даже в линейном случае при достаточно малом h число уравнений системы велико, а возможности вычислительных машин ограничены, важное значение приобретает удачная сеточная замена краевых и начальных условий.

§ 4. Асимптотическое разложение

1°. Асимптотическое разложение функции одного переменного. Пусть в некоторой окрестности точки z_0 плоскости комплексного переменного z заданы функции $f(z)$, $S_n(z)$, $n = 0, 1, \ldots$, и множество E точек этой окрестности, для которого z_0 является предельной точкой.

Если известно поведение функций $S_n(z)$, $n=0, 1, \ldots,$ в окрестности точки z_0, то наличие равенств

$$\lim_{z\to z_0}[S_n(z)-S_{n-1}(z)]=0, \qquad S_n \neq S_{n-1},$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-S_n(z)}{S_n(z)-S_{n-1}(z)}=0, \qquad z\in E,$$

для каждого фиксированного n позволяет получить определенное представление о поведении функции $f(z)$ вблизи точки z_0.

В качестве z_0 часто берут бесконечно удаленную точку плоскости z, а в качестве $S_n(z)$ — сумму

$$S_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{z^k},$$

где a_k — заданные числа.

Если для любого фиксированного n

$$\lim_{z\to\infty} z^n[f(z)-S_n(z)]=0, \qquad z\in E, \tag{152}$$

говорят, что ряд

$$a_0+\frac{a_1}{z}+\ldots+\frac{a_n}{z^n}+\ldots \tag{153}$$

независимо от того, сходится он или нет, является *асимптотическим разложением функции $f(z)$ на E*, и пишут

$$f(z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{z^k}.$$

Когда имеет место соотношение (152), для коэффициентов a_k ряда (153) из (152) получаем

$$a_0=\lim_{z\to\infty}f(z),$$
$$a_n=\lim_{z\to\infty}z^n[f(z)-S_{n-1}(z)], \qquad n=1, 2, \ldots \tag{154}$$

Отсюда заключаем, что *если функция $f(z)$ имеет асимптотическое разложение, то оно единственно.*

Это утверждение вовсе не означает, что один и тот же ряд вида (153) на одном и том же множестве E не может служить асимптотическим разложением для разных функций. Так, например, для функции $f(z)=e^{-z}$ на множестве E: $\{0<z<\infty\}$, в силу (154), асимптотическим разложением является ряд (153), все коэффициенты которого $a_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots$ Очевидно, что этот же ряд является асимптотическим разложением и для функции $f(z) = 0$.

Только что рассмотренный пример показывает, что *при сходимости асимптотического ряда функции* $f(z)$ *сумма этого ряда может не совпадать с* $f(z)$.

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \int_z^\infty e^{z-t} \frac{dt}{t}, \qquad 0 < z < \infty, \tag{155}$$

где интегрирование происходит вдоль участка $z < t < \infty$ действительной оси.

После интегрирования по частям из (155) имеем

$$f(z) = \frac{1}{z} - \int_z^\infty e^{z-t} \frac{dt}{t^2}.$$

Повторяя этот процесс, получаем

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{k!}{z^{k+1}} + (-1)^n n! \int_z^\infty e^{z-t} \frac{dt}{t^{n+1}}. \tag{156}$$

Легко видеть, что *асимптотическим разложением заданной по формуле* (155) *функции* $f(z)$, *когда множество E совпадает с положительной действительной осью, является ряд*

$$\frac{1}{z} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{z^n} + \ldots \tag{157}$$

В самом деле, обозначая через $S_n(z)$ сумму первых n членов ряда (157),

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{z^k},$$

в силу (156) будем иметь

$$f(z) - S_n(z) = (-1)^n n! \int_z^\infty e^{z-t} \frac{dt}{t^{n+1}} =$$

$$= (-1)^n n! \left[\frac{1}{z^{n+1}} - (n+1) \int_z^\infty e^{z-t} \frac{dt}{t^{n+2}} \right]. \tag{158}$$

Отсюда, учитывая то обстоятельство, что

$$0 < \int\limits_z^\infty e^{z-t}\frac{dt}{t^{n+2}} < \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{z^{n+1}},$$

заключаем, что

$$\lim_{z\to\infty} z^n[f(z) - S_n(z)] = 0$$

для любого $n \geqslant 1$ на множестве E.

Для каждого z, $0 < z < \infty$, *ряд* (157) *хотя и расходится, но в силу* (158) *при достаточно больших* z *значения* $f(z)$ *очень мало отличаются от значений* $S_n(z)$ *для любого фиксированного* $n \geqslant 1$.

Если бесконечно удаленная точка плоскости z является устранимой особой точкой для аналитической функции $f(z)$, то, как известно, в окрестности этой точки имеет место разложение

$$f(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{a_k}{z^k}. \tag{159}$$

Правая часть равенства (159), очевидно, является асимптотическим разложением $f(z)$ на любом множестве E точек из окрестности точки $z = \infty$, для которого эта точка является предельной.

Вводя обозначение $\varphi(z) = o(z^{-n})$ для равенства $\lim\limits_{z\to\infty} z^n\varphi(z) = 0$, легко показать, *что если на одном и том же множестве* E

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^\infty \frac{a_k}{z^k}, \quad g(z) \sim \sum_{k=0}^\infty \frac{b_k}{z^k}, \tag{160}$$

то на этом же множестве

$$f(z) \pm g(z) \sim \sum_{k=0}^\infty \frac{a_k \pm b_k}{z^k}, \tag{161}$$

$$f(z)\cdot g(z) \sim \sum_{k=0}^\infty \frac{c_k}{z^k}, \tag{162}$$

где $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \ldots + a_kb_0$.

Действительно, пусть

$$S_n'(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{z^k}, \quad S_n''(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{z^k},$$

$$S_n(z) = S_n'(z) \pm S_n''(z), \qquad \sigma_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{z^k}.$$

Очевидно, что

$$S_n'(z) \cdot S_n''(z) = \sigma_n(z) + o(z^{-n}). \tag{163}$$

В силу (160) имеем

$$f(z) = S_n'(z) + o(z^{-n}), \quad g(z) = S_n''(z) + o(z^{-n}). \tag{164}$$

На основании (163) и (164) заключаем, что

$$f(z) \pm g(z) = S_n(z) + o(z^{-n}),$$
$$f(z) \cdot g(z) = \sigma_n(z) + o(z^{-n}),$$

и тем самым справедливость асимптотических разложений (161) и (162) доказана.

Покажем, что *если функция $f(z)$ интегрируема при $0 < z < \infty$ и на множестве E: $\{0 < z < \infty\}$:*

$$f(z) \sim \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}, \tag{165}$$

то на этом множестве

$$\int_z^{\infty} f(t)\, dt \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{kz^k},$$

где путь интегрирования совпадает с участком $z \leqslant t < \infty$ действительной оси.

В силу (165) заключаем, что для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ существует число $z_0 > 0$ такое, что

$$\left| f(t) - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{a_k}{t^k} \right| < \varepsilon t^{-n-1} \tag{166}$$

для всех $t > z_0$.

Пользуясь оценкой (166), при предположении $z>z_0$ получаем

$$\left|\int_z^\infty \left[f(t)-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{a_k}{t^k}\right]dt\right|<\frac{\varepsilon}{nz^n},$$

т. е.

$$\lim_{z\to\infty} z^n\left[\int_z^\infty f(t)\,dt-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}}{kz^k}\right]=0,$$

что и требовалось доказать.

Наличие асимптотического разложения

$$f(z)\sim\sum_{k=0}^\infty \frac{a_k}{z^k},$$

вообще говоря, не гарантирует существования асимптотического разложения для производной $f'(z)$. В этом сразу убеждаемся на примере функции $f(z)=e^{-z}\sin e^z$, асимптотическим разложением которой при $0<z<\infty$ является ряд (153) с коэффициентами $a_k=0$, $k=0, 1, \ldots$, в то время как ее производная

$$f'(z)=-e^{-z}\sin e^z+\cos e^z,\qquad 0<z<\infty,$$

не имеет асимптотического разложения, ибо при $z\to\infty$ она даже не имеет предела.

Заметим, что все сказанное выше остается в силе, когда в определении асимптотического разложения вместо ряда (153) берется ряд $\sum\limits_{k=0}^\infty a_k z^{-\alpha_k}$, где $\{\alpha_k\}$ — возрастающая последовательность неотрицательных действительных (не обязательно целых) чисел.

Приведенные ниже методы с успехом применяются при построении асимптотических разложений для некоторых классов функций.

2°. **Метод Ватсона построения асимптотических разложений.** Рассмотрим функцию

$$F(z)=\int_0^N t^m\varphi(t)\,e^{-zt^\alpha}\,dt, \tag{167}$$

где $0<N\leqslant\infty$, $\alpha>0$, $m>-1$, $z>0$, а путь интегрирования совпадает с отрезком $0\leqslant t\leqslant N$.

Имеет место принадлежащее Ватсону утверждение: *если в некотором промежутке $0 \leqslant t \leqslant h_1 \leqslant N$ функция $\varphi(t)$ представляется в виде суммы степенного ряда*

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, \quad c_0 \neq 0, \tag{168}$$

и для фиксированного значения $z = z_0 > 0$

$$\int_0^N t^m |\varphi(t)| e^{-z_0 t^\alpha} dt < M, \tag{169}$$

то при $z \to \infty$, $0 < z < \infty$,

$$F(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\alpha} \Gamma\left(\frac{m+k+1}{\alpha}\right) z^{-\frac{m+k+1}{\alpha}}. \tag{170}$$

Действительно, представим функцию $F(z)$, определенную по формуле (167), в виде

$$F(z) = \left(\int_0^h + \int_h^N\right) t^m \varphi(t) e^{-zt^\alpha} dt, \quad 0 < h < h_1.$$

Так как при $z > z_0$ и $t > h$

$$e^{-(z-z_0)t^\alpha} < e^{-(z-z_0)h^\alpha},$$

то в силу (169) будем иметь

$$\left| F(z) - \int_0^h t^m \varphi(t) e^{-zt^\alpha} dt \right| = \left| \int_h^N t^m \varphi(t) e^{-zt^\alpha} dt \right| < M e^{z_0 h^\alpha} e^{-zh^\alpha}. \tag{171}$$

На основании (168)

$$\int_0^h t^m \varphi(t) e^{-zt^\alpha} dt = \sum_{k=0}^{n} c_k \int_0^h t^{m+k} e^{-zt^\alpha} dt + \int_0^h t^{m+n+1} \varphi_1(t) e^{-zt^\alpha} dt,$$

где $\varphi_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n+k+1} t^k$, причем $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant h} |\varphi_1(t)|$ конечен.

Вводя новое переменное интегрирование $\tau = zt^\alpha$, получаем

$$\int_0^h t^{m+k} e^{-zt^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha} z^{-\frac{m+k+1}{\alpha}} \int_0^{zh^\alpha} \tau^{\frac{m+k+1}{\alpha} - 1} e^{-\tau} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\alpha} z^{-\frac{m+k+1}{\alpha}} \left[\Gamma\left(\frac{m+k+1}{\alpha}\right) - \int_{zh^\alpha}^{\infty} \tau^{\frac{m+k+1}{\alpha} - 1} e^{-\tau} d\tau\right]. \tag{172}$$

Учитывая то обстоятельство, что

$$\int_{zh^\alpha}^{\infty} \tau^{p-1} e^{-\tau}\, d\tau = \int_0^\infty (\xi + zh^\alpha)^{p-1} e^{-\xi} e^{-zh^\alpha}\, d\xi <$$

$$< 2^p e^{-zh^\alpha} \int_0^{zh^\alpha} (zh^\alpha)^{p-1} e^{-\xi}\, d\xi + e^{-zh^\alpha} 2^p \int_0^\infty \xi^{p-1} e^{-\xi}\, d\xi <$$

$$< 2^p e^{-zh^\alpha} [(zh^\alpha)^{p-1} + \Gamma(p)]$$

при $z \to \infty$ стремится к нулю быстрее любой степени $z^{-\omega}$, на основании (171) и (172) заключаем, что

$$\lim_{z\to\infty} z^{\frac{m+n+1}{\alpha}} \left[F(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{\alpha} \Gamma\left(\frac{m+k+1}{\alpha}\right) z^{-\frac{m+k+1}{\alpha}} \right] = 0$$

для любого n, откуда следует справедливость асимптотического разложения (170).

Рассмотрим теперь функцию

$$F(z) = \int_{-A}^{N} \varphi(t) e^{-\frac{1}{2} zt^2}\, dt, \qquad A > 0, \quad N > 0, \quad z > 0, \tag{173}$$

при предположениях, что в некоторой окрестности $-h_1 < t < h_1$, $h_1 < N$, точки $t = 0$ имеет место представление (168) и интеграл в правой части (173) абсолютно сходится, когда $z = z_0 > 0$.

Представляя функцию $\Phi(z) = F(2z)$ в виде

$$\Phi(z) = \left(\int_0^N - \int_0^{-A} \right) \varphi(t) e^{-zt^2}\, dt = \int_0^N \varphi(t) e^{-zt^2}\, dt + \int_0^A \varphi(-t) e^{-zt^2}\, dt$$

и учитывая то обстоятельство, что при $0 \leqslant t \leqslant h$, $h < h_1$, $h < A$

$$\varphi(t) + \varphi(-t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} t^{2k}$$

и

$$\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\, \frac{1 \cdot 3 \ldots (2k-1)}{2^k},$$

на основании (170) будем иметь

$$\Phi(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) z^{-\frac{2k+1}{2}} =$$

$$= c_0\sqrt{\pi}\, z^{-1/2} + \sqrt{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3 \ldots (2k-1)}{2^k} c_{2k} z^{-\frac{2k+1}{2}},$$

откуда находим, что

$$F(z) = \Phi\left(\frac{z}{2}\right) \sim c_0 \sqrt{2\pi}\, z^{-1/2} +$$

$$+ \sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} 1\cdot 3 \ldots (2k-1)\, c_{2k} z^{-\frac{2k+1}{2}}. \qquad (174)$$

3°. **Метод перевала.** Пусть требуется найти асимптотическое разложение при $z \to \infty$, $z > 0$, для функции

$$F(z) = \int\limits_C \varphi(t)\, e^{zf(t)}\, dt, \qquad (175)$$

где $\varphi(t)$ и $f(t)$ — аналитические функции комплексного переменного $t = x + iy$, а путь интегрирования C в обе стороны уходит в бесконечность.

Если функция $u(t) = \operatorname{Re} f(t)$ свое максимальное значение на C принимает в некоторой точке $t_0 \in C$ и в обе стороны от t_0 при $t \to \infty$ она стремится к отрицательной бесконечности, то из-за ограниченности $e^{izv(t)}$, где $v(t) = \operatorname{Im} f(t)$, при оценке $F(z)$ для больших значений z главная доля, очевидно, приходится на часть интеграла (175) по небольшому участку C_1 пути C, содержащему внутри себя точку t_0.

Так как функция $u(t)$ не может иметь локального максимума ни в одной точке области ее гармоничности, то путь интегрирования в выражении (175) указанным свойством может и не обладать. Однако в силу теоремы Коши, не изменяя значения $F(z)$, мы вправе деформировать путь C, не выходя из области D аналитичности функций $f(t)$ и $\varphi(t)$.

Чтобы отыскать в области D кривую C и точку t_0 с этими свойствами, поступим следующим образом. Рассмотрим проходящую через точку t_0 линию уровня $u(t) = u(t_0)$ гармонической функции $u(t)$. Проходящая через точку t_0 кривая C в точке t_0 должна иметь направление $\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$, ибо именно этот вектор определяет направление наибыстрейшего изменения функции $u(t)$, максимум которой вдоль C достигается в точке t_0.

В силу условий Коши — Римана $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ скалярное произведение

$$\nabla u \nabla v=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Но вектор ∇v совпадает с нормалью линии уровня $v(t)=v(t_0)$. Отсюда заключаем, что кривая C в точке t_0 должна иметь направление касательной к кривой $v(t)=v(t_0)$. Так как вдоль кривой $v(t)=v(t_0)$ всюду $\frac{dv}{ds}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{ds}=0$, а в точке t_0 максимума функции $u(t)$ на C должно быть выполнено равенство $\frac{du}{ds}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds}=0$, то $f'(t_0)=0$.

Таким образом, *точку t_0 и кривую C с нужными нам свойствами следует искать там, где $f'(t_0)=0$ среди кривых $v(t)=v(t_0)$*.

Предположим, что t_0 и C с этими свойствами найдены. Так как в окрестности $|t-t_0|<h_1$ точки t_0 на C имеет место неравенство

$$f(t)-f(t_0)=\frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n+\ldots<0, \qquad n\geqslant 2, \tag{176}$$

то в результате замены переменного интегрирования $t=t(\xi)$, определенного из равенства

$$f(t)-f(t_0)=-\frac{1}{2}\xi^2, \tag{177}$$

выражение (175) примет вид

$$F(z)=e^{zf(t_0)}\int_C \varphi[t(\xi)]e^{-\frac{1}{2}z\xi^2}\frac{dt}{d\xi}\,d\xi. \tag{178}$$

Разлагая аналитические функции $\varphi[t(\xi)]$ и $\frac{dt}{d\xi}=\psi(\xi)$ в окрестности точки $\xi=0$ в степенные ряды, искомое асимптотическое разложение функции $F(z)$ получаем непосредственно, используя формулу (174).

Поскольку точка t_0, в которой $f'(t_0)=0$ для поверхности $u=u(x, y)$, называется точкой перевала, изложенный выше метод получения асимптотической оценки носит название *метода перевала.*

Так как в методе перевала требуется из уравнения (177) определить t как функцию ξ, то фактическое использование этого метода сталкивается с большим затруднением, даже после того как уже найдены подходящие точка t_0 и путь интегрирования C.

Однако в приложениях порой достаточно ограничиться первым членом асимптотического разложения, а его найти легко.

Действительно, положим, что $f''(t_0)\neq 0$. Ограничимся рассмотрением первого члена в разложении (176) и вместо (177) введем переменное

$$\xi^2=-(t-t_0)^2 f''(t_0). \tag{179}$$

Вблизи точки t_0 участок пути интегрирования C заменим прямолинейным отрезком $t-t_0=se^{i\vartheta}$, где $2\vartheta = \pi-\arg f''(t_0)$, с таким расчетом, чтобы вдоль него имело место неравенство

$$(t-t_0)^2 f''(t_0)=s^2e^{2i\vartheta}f''(t_0)<0.$$

Тогда из (179) получаем

$$\xi=\pm s\sqrt{|f''(t_0)|}, \tag{180}$$

т. е.

$$\frac{d\xi}{dt}=\pm\frac{ds}{dt}\sqrt{|f''(t_0)|}=\pm e^{-i\vartheta}\sqrt{|f''(t_0)|}.$$

Из двух значений ϑ, отличных друг от друга на π, выберем то, для которого при прохождении точки t через t_0 в процессе интегрирования вдоль C переменное ξ в (180) становится положительным, т. е. $\frac{d\xi}{dt}=e^{-i\vartheta}\sqrt{|f''(t_0)|}$.

Следовательно, *для первого члена искомого асимптотического разложения в силу* (178) *и* (174) *будем иметь выражение*

$$\frac{\varphi(t_0)}{\sqrt{|f''(t_0)|}}\sqrt{2\pi}\,e^{zf(t_0)}e^{i\vartheta}\frac{1}{z^{1/2}}. \tag{181}$$

В качестве примера рассмотрим ханкелеву функцию

$$H_n^1(z)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_C e^{-iz\sin t}e^{int}\,dt, \tag{182}$$

где интеграл берется вдоль рассмотренной в пункте 1° § 2 ломаной (75).

На этой ломаной лежит единственная точка $t_0 = -\frac{\pi}{2}$, в которой $f'(t_0) = -i\cos t_0 = 0$, причем через эту точку проходят две линии уровня $\operatorname{Im} f(t) = -\sin x \operatorname{ch} y = 1$. Среди них в качестве нового пути C интегрирования в (182) возьмем ту, для которой $\vartheta = \frac{3}{4}\pi$, $\arg f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$, ибо при удалении точки t в бесконечность именно вдоль нее функция $u(t) = \operatorname{Re}(-i\sin t) = \cos x \operatorname{sh} y$ стремится к отрицательной бесконечности.

Так как $e^{zf\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = e^{iz}$, $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\pi}e^{-in\frac{\pi}{2}}$, то из (181) для первого члена асимптотического разложения функции $H_n^1(z)$ при $z \to \infty$, $0 < z < \infty$, получаем выражение

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{iz} e^{-i\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} z^{-\frac{1}{2}}.$$

§ 5. Понятие о вариационных методах

1°. Принцип Дирихле. В целом ряде случаев, встречающихся в приложениях, уравнения с частными производными представляют собой *уравнение Эйлера* для *вариационных задач*. Так, например, как уже было отмечено в пункте 2° § 5 введения, уравнение Лапласа $\Delta u(x, y) = 0$ может служить уравнением Эйлера задачи на минимум *интеграла Дирихле*

$$D(u) = \int_D (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy, \tag{183}$$

распространенного по области D с границей S.

Непрерывные в $D \cup S$ функции с кусочно-непрерывными в D первыми производными и конечным интегралом Дирихле, принимающие на S наперед заданные значения $\varphi(x, y)$, будем называть *допустимыми функциями*.

Существует тесная связь между задачей Дирихле об определении гармонической в области D функции $u(x, y)$, непрерывной в $D \cup S$ и удовлетворяющей краевому условию

$$u(x, y) = \varphi(x, y), \qquad (x, y) \in S, \tag{184}$$

и так называемой *первой вариационной задачей* об отыскании среди допустимых функций той функции, для которой интеграл Дирихле (183) минимален.

Если заданная на S функция $\varphi(x, y)$ такова, что класс допустимых функций не является пустым, то задача Дирихле и первая вариационная задача эквивалентны.

Справедливость этого утверждения мы покажем при некоторых дополнительных предположениях.

Пусть $u(x, y)$ — решение первой вариационной задачи. Класс допустимых функций представим в виде $u(x, y) + \varepsilon h(x, y)$, где ε — произвольная постоянная, а $h(x, y)$ — произвольная функция из класса допустимых функций, удовлетворяющая условию

$$h(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in S. \tag{185}$$

Очевидно, что

$$D(u + \varepsilon h) = D(u) + 2\varepsilon D(u, h) + \varepsilon^2 D(h) \geqslant 0, \tag{186}$$

где

$$D(u, h) = \int_D (u_x h_x + u_y h_y)\, dx\, dy.$$

Так как $u(x, y)$ — минимизирующая функция и ε — произвольная постоянная, то из (186) заключаем, что

$$D(u, h) = 0. \tag{187}$$

Функции $u(x, y)$, $h(x, y)$ и контур S будем считать настолько гладкими, что для них справедливы тождества

$$u_x h_x + u_y h_y = (u_x h)_x + (u_y h)_y - h\,\Delta u, \tag{188}$$

$$D(u, h) = \int_S h \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds - \int_D h\,\Delta u\, dx\, dy,$$

где ν — внешняя к S нормаль.

В силу (185) и (187) из (188) имеем

$$\int_D h\,\Delta u\, dx\, dy = 0,$$

откуда при предположении, что Δu является непрерывной функцией в D, в силу произвольности $h(x, y)$ заключаем, что $\Delta u(x, y) = 0$. Следовательно, при принятых допущениях решение первой вариационной задачи является решением задачи Дирихле.

Пусть теперь $u(x, y)$ — решение задачи Дирихле с граничным условием (184) для уравнения Лапласа, а $u(x, y)+\varepsilon h(x, y)$, как и выше, — класс допустимых функций, причем для $u(x, y)$ и $h(x, y)$ имеет место формула (188). Из этой формулы в силу (185) и гармоничности $u(x, y)$ следует равенство (187). Поэтому из (186) имеем

$$D(u) \leqslant D(u+\varepsilon h),$$

а это означает, что функция $u(x, y)$ минимизирует интеграл Дирихле и, стало быть, она является решением первой вариационной задачи.

Существуют и другие краевые задачи для уравнения Лапласа, которые имеют эквивалентные им вариационные задачи для интеграла Дирихле. Среди них можно назвать, например, задачу Неймана.

Идея сведения краевых задач для уравнения Лапласа к эквивалентным им вариационным задачам для интеграла Дирихле принадлежит Риману. Эту идею принято называть *принципом Дирихле.*

2°. Задача о собственных значениях. В пункте 2° § 1 настоящей главы была рассмотрена *задача о собственных значениях: в ограниченной области D с кусочно-гладкой границей S требуется определить собственные числа и собственные функции уравнения*

$$\Delta u+\lambda u=0, \quad (x, y) \in D, \quad \lambda=\text{const}, \tag{189}$$

т. е. найти значения λ, при которых это уравнение в области D имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие однородному краевому условию

$$u(x, y)=0, \quad (x, y) \in S, \tag{190}$$

и построить их.

Наименьшее собственное число задачи (189), (190) получается решением следующей *второй вариационной задачи: среди допустимых функций, удовлетворяющих условию* (190), *найти ту, для которой функционал*

$$J(u)=\frac{D(u)}{H(u)},$$

где

$$H(u)=\int_D u^2\,dx\,dy$$

принимает наименьшее значение.

Действительно, пусть $u(x, y)$ — решение второй вариационной задачи, причем наименьшее значение $J(u)$:

$$J(u)=\frac{D(u)}{H(u)}=\lambda>0. \tag{191}$$

Для класса допустимых функций $u(x, y)+\varepsilon h(x, y)$, где ε — произвольная постоянная, а $h(x, y)$ — произвольная допустимая функция, удовлетворяющая условию (185), имеем

$$F(\varepsilon)=\frac{D(u+\varepsilon h)}{H(u+\varepsilon h)}=\frac{D(u)+2\varepsilon D(u, h)+\varepsilon^2 D(h)}{H(u)+2\varepsilon H(u, h)+\varepsilon^2 H(h)}\geqslant\lambda,$$

где

$$H(u, h)=\int\limits_D uh\,dx\,dy.$$

Так как функция $F(\varepsilon)$ при $\varepsilon=0$ имеет минимум, то

$$F'(0)=2\,\frac{H(u)\,D(u, h)-D(u)\,H(u, h)}{H^2(u)}=0,$$

откуда в силу (191) получаем

$$H(u)\,[D(u, h)-\lambda H(u, h)]=0$$

или, ввиду того, что $H(u)\neq 0$,

$$D(u, h)-\lambda H(u, h)=0. \tag{192}$$

Допуская, что условия гладкости функций $u(x, y)$, $h(x, y)$ и контура S области D позволяют пользоваться формулой (188), перепишем равенство (192) в виде

$$H(\Delta u+\lambda u, h)=0,$$

откуда, как и в предыдущем пункте, заключаем, что $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (189).

Если λ^* — отличное от λ собственное число, а $u^*(x, y)$ — соответствующая ему собственная функция задачи (189), (190), то в силу (188) будем иметь

$$H(\Delta u^*+\lambda^* u^*, u^*)=-D(u^*)+\lambda^* H(u^*)=0.$$

Из этого равенства следует, что среди собственных чисел задачи (189), (190) число λ является минимальным.

Все сказанное выше остается в силе, если вместо интеграла Дирихле ввести в рассмотрение квадратичный функционал

$$E(u)=\int_D [p(u_x^2+u_y^2)+2auu_x+2buu_y+cu^2]\,dx\,dy,$$

$$p>0,\quad c\leqslant 0,$$

подынтегральное выражение которого представляет собой квадратичную форму с достаточно гладкими коэффициентами, удовлетворяющую условию

$$p(\xi^2+\eta^2)+c\zeta^2+2a\xi\zeta+2b\eta\zeta\geqslant \mu^2(\xi^2+\eta^2),$$

где μ — действительная постоянная.

Для функционала $E(u)$ уравнение Эйлера

$$2(pu_x)_x+2(pu_y)_y+2(au)_x+2(bu)_y-2au_x-2bu_y-2cu=0$$

можно записать в виде

$$(pu_x)_x+(pu_y)_y-c^*u=0,$$

где

$$c^*=c-a_x-b_y.$$

3°. Минимизирующие последовательности. Когда класс допустимых функций $\{u\}$ не является пустым, множество значений интеграла Дирихле $D(u)$ имеет нижнюю грань d. Хотя мы и не знаем, достигается ли эта грань допустимой функцией, но очевидно одно: существует последовательность u_n, $n=1, 2, \ldots$, допустимых функций такая, что

$$\lim_{n\to\infty} D(u_n)=d. \tag{193}$$

Последовательность u_n, $n=1, 2, \ldots$, для которой имеет место равенство (193), называется *минимизирующей*.

То же самое можно сказать и о функционале $J(u)$.

Существование минимизирующей последовательности еще не означает, что существует решение рассматриваемой вариационной задачи. Объектами дальнейших исследований должны быть следующие вопросы: 1) *как строить минимизирующую последовательность*, 2) *сходится ли она* и 3) *является ли ее предел* $u=\lim u_n$ *допустимой функцией?*

Детальное исследование этих вопросов требует введения в рассмотрение определенных функциональных пространств, элементами которых, в частности, являются члены минимизирующей последовательности. Установив сходимость минимизирующей последовательности в метрике этих пространств, желательно либо показать, что полученный предел является решением вариационной задачи в приведенной выше постановке, либо разумно обобщить понятие самого решения. При этом каждый раз следует установить, что решение вариационной задачи является решением краевой задачи либо в обычном, либо в определенном обобщенном смысле.

В вариационном исчислении имеются разные методы построения минимизирующих последовательностей. Эти методы применительно к задачам для уравнений с частными производными принято называть *вариационными* или *прямыми методами*. Важно то, что некоторые из вариационных методов позволяют строить приближенные решения рассматриваемых задач. О двух из этих методов речь пойдет ниже.

4°. Понятие о методе Ритца. Сущность этого метода заключается в следующем. Пусть рассматривается вопрос о минимизации функционала $\Phi(u)$. Обозначим через v_n, $n=1, 2, \ldots$, полную систему допустимых функций для функционала $\Phi(u)$ и составим последовательность $u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k$, $n=1, 2, \ldots$, где c_k — пока произвольные постоянные.

Определим коэффициенты c_k, $k=1, \ldots, n$, так, чтобы выражение $\varphi_n = \Phi(u_n)$ как функция $c_1, \ldots, c_n$ было минимальным.

Для некоторых классов функционалов Ритцу удалось показать, что $\{u_n\}$ является минимизирующей последовательностью, которая сходится и предел которой u решает рассматриваемую задачу.

Рассмотрим, например, вторую вариационную задачу минимизации функционала $J(u)$, когда область D представляет собой квадрат $0<x<\pi$, $0<y<\pi$, причем без ограничения общности будем считать, что

$$H(u)=1. \tag{194}$$

В качестве указанной выше полной системы мы можем брать систему функций

$$\sin kx \sin ly, \qquad k, l=1, 2, \ldots$$

Пусть

$$u_{mn}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}c_{kl}\sin kx\sin ly, \qquad m,\ n=1,\ 2,\ \ldots$$

Функции $u_{mn}(x, y)$, очевидно, удовлетворяют условию (190). Кроме того,

$$d_{mn}=D(u_{mn})=\frac{\pi^2}{4}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}c_{kl}^2(k^2+l^2), \tag{195}$$

$$H(u_{mn})=\frac{\pi^2}{4}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}c_{kl}^2.$$

По схеме Ритца в силу (194) нам следует найти минимум выражения (195) при условии, что

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}c_{kl}^2=\frac{4}{\pi^2}. \tag{196}$$

Решая задачу (196), (195) на условный экстремум, находим, что при любых m и n все c_{kl} равны нулю, кроме c_{11}, причем

$$c_{11}=\frac{2}{\pi}, \quad d_{mn}=2,$$

т. е.

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} u_{mn}=u(x, y)=\frac{2}{\pi}\sin x\sin y,$$

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} d_{mn}=D(u)=\lambda=2.$$

5°. Построение приближенного решения задачи о собственных значеииях. Понятие о методе Бубнова — Галеркина. Метод Ритца позволяет построить приближеное решение задачи (189), (190) о собственных значениях.

В самом деле, за приближенное решение второй вариационной задачи о минимизации функционала $J(u)$ при условии, что

$$H(u)=1,$$

можно принять функцию

$$u_n(x, y)=\sum_{k=1}^{n}c_k v_k(x, y)$$

из предыдущего пункта, где коэффициенты c_k, $k=1, \ldots, n$, определяются в результате решения задачи на условный минимум

$$d_n(c_1, \ldots, c_n) = D(u_n) = \min,$$
$$h_n(c_1, \ldots, c_n) = H(u_n) = 1.$$

Таким образом, построенную функцию $u_n(x, y)$ естественно принять за *приближенное выражение* собственной функции задачи (189), (190), причем формула

$$\lambda_n = D(u_n)$$

будет давать *приближенное выражение* для собственного числа этой же задачи.

При построении приближенного решения задачи о собственных значениях также с успехом пользуются методом Бубнова — Галеркина. В этом методе за приближенное выражение собственной функции задачи (189), (190) принимается функция

$$u_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k(x, y),$$

коэффициенты которой c_k, $k=1, \ldots, n$, на этот раз определяются из равенств

$$\sum_{k=1}^{n} H(\Delta v_k + \lambda v_k, v_m) c_k = 0, \quad m = 1, \ldots, n, \tag{197}$$

представляющих собой однородную систему линейных алгебраических уравнений. Как известно из линейной алгебры, эта система имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда λ удовлетворяет уравнению

$$\det \begin{Vmatrix} H(\Delta v_1 + \lambda v_1, v_1) & \ldots & H(\Delta v_n + \lambda v_n, v_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ H(\Delta v_1 + \lambda v_1, v_n) & \ldots & H(\Delta v_n + \lambda v_n, v_n) \end{Vmatrix} = 0. \tag{198}$$

Определенные из уравнения (198) значения λ принимаются за приближенное выражение собственных чисел задачи (189), (190). Соответствующие же им приближенные выражения для собственных функций, как уже было сказано, даются формулой

$$u_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k(x, y),$$

в которой c_k, $k=1, \ldots, n$, — решения системы (197).

§ 6. Построение приближенного решения задачи Дирихле для гармонических функций в круге

1°. Задача Дирихле для гармонических функций с разрывными краевыми условиями. При постановке и исследовании задачи Дирихле для гармонических функций (см. пункт 4° § 3 введения, §§ 1, 2, 3, 4 гл. I, пункт 7° § 3 гл. II) до сих пор мы считали, что краевые значения искомого решения представляют собой непрерывную функцию точек границы области. Эта задача остается правильно поставленной и при более общих предположениях. Принцип экстремума для гармонических функций (пункт 4° § 1 гл. I) позволяет доказать справедливость следующего утверждения: *если краевые значения гармонической в ограниченной области D плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ функции $u(z)$ изнутри области D на ее границе S равны нулю всюду, кроме конечного множества точек $\{t_k \in S\}$, $k = 1, \ldots, N$, и*

$$\lim_{\substack{z \to t_k, \\ z \in D}} \frac{u(z)}{\log|z - t_k|} = 0, \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{199}$$

то $u(z) = 0$ всюду в D.

В самом деле, обозначим через D_δ часть области D, лежащую вне замкнутых кругов $|z - t_k| \leqslant \delta$, $k = 1, \ldots, N$, достаточно малого радиуса δ, и введем в рассмотрение положительную гармоническую в D_δ функцию

$$v(z) = \varepsilon \sum_{k=1}^{N} \log \frac{d}{|z - t_k|}, \tag{200}$$

где d — диаметр области D, а ε — произвольное положительное число.

В силу (199), (200) для любого $\varepsilon > 0$, начиная с определенного значения $\delta > 0$, краевые значения на границе S_δ области D_δ гармонических в этой области функций $v(z) - u(z)$ и $v(z) + u(z)$ положительны. Поэтому в силу принципа экстремума заключаем, что в любой точке $z \in D_\delta$

$$|u(z)| < v(z). \tag{201}$$

Поскольку любая фиксированная точка $z \in D$, начиная с определенного значения $\delta > 0$, лежит в D_δ, в силу произвольности ε из (201) следует, что $u(z) = 0$.

Из доказанного утверждения сразу вытекает *единственность решения задачи Дирихле для гармонических в ограниченной области D функций, непрерывных в $D \cup S$ всюду, кроме точек $t_k \in S$, $k = 1, \ldots, N$, при наличии в этих точках разрыва первого рода у искомого решения или при допущении его обращения в бесконечность слабее, чем $\log|z - t_k|$ при $z \to t_k$.*

Вопрос существования решения задачи Дирихле с разрывными краевыми условиями будет рассмотрен в следующем пункте, когда область D — единичный круг.

2°. Справедливость формулы Пуассона решения задачи Дирихле при наличии разрывов в краевых условиях. В пункте 2° § 2 главы I формула Пуассона, дающая решение задачи Дирихле

$$u(t) = f(\vartheta), \quad t = e^{i\vartheta}, \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi, \tag{202}$$

в круге $|z| < 1$, была выведена в предположении, что $u(z)$ непрерывна в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$.

Предположим теперь, что функция $f(\vartheta)$ в краевом условии (202) непрерывна на окружности $|t| = 1$ всюду, кроме точки $t_0 = e^{i\vartheta_0}$ разрыва первого рода:

$$\lim_{\vartheta \to \vartheta_0 - 0} f(\vartheta) = f^-, \quad \lim_{\vartheta \to \vartheta_0 + 0} f(\vartheta) = f^+, \quad f^- \neq f^+. \tag{203}$$

Обозначим через $u_0(z)$ гармоническую функцию

$$u_0(z) = \frac{1}{\pi}(f^- - f^+)\arg(z - t_0), \tag{204}$$

где под $\arg(z - t_0)$ понимается главная ветвь этой функции.

Пусть $f_0(\vartheta) = u_0(e^{i\vartheta})$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$. Очевидно, что

$$\begin{gathered} \lim_{\vartheta \to \vartheta_0 - 0} f_0(\vartheta) = (1 + \alpha)(f^- - f^+), \\ \lim_{\vartheta \to \vartheta_0 + 0} f_0(\vartheta) = \alpha(f^- - f^+), \end{gathered} \tag{205}$$

где $\pi\alpha$ — угол, составленный положительным направлением касательной к окружности $|e^{i\vartheta}| = 1$ в точке $e^{i\vartheta_0}$ с положительным направлением действительной оси $y = 0$.

Функция

$$\varphi(\vartheta) = f(\vartheta) - f_0(\vartheta) \tag{206}$$

непрерывна всюду, кроме точки t_0, а в точке t_0 в силу (203), (205)

$$\lim_{\vartheta \to \vartheta_0 - 0} \varphi(\vartheta) = \lim_{\vartheta \to \vartheta_0 + 0} \varphi(\vartheta) = (1+\alpha) f^+ - \alpha f^-. \quad (207)$$

После доопределения заданной формулой (206) функции $\varphi(\vartheta)$ в точке t_0 как

$$\varphi(\vartheta_0) = \lim_{\vartheta \to \vartheta_0} \varphi(\vartheta)$$

она становится непрерывной всюду на окружности $|t|=1$.

При построении гармонической в круге $|z|<1$ функции $u_1(z)$, непрерывной в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ и принимающей на окружности $|t|=1$ значения $\varphi(\vartheta)$, мы вправе пользоваться формулой Пуассона (90) главы II:

$$u_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|=1} \frac{1-|z|^2}{|t-z|^2} \varphi(\vartheta)\, d\vartheta. \quad (208)$$

Гармоническая в круге $|z|<1$ функция $u(z)$, определенная по формуле

$$u(z) = u_1(z) + u_0(z), \quad (209)$$

непрерывна в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ всюду, кроме точки t_0, причем

$$\lim_{\substack{z \to t_0 \\ |z|<1}} u(z) = f(\vartheta), \qquad \vartheta \neq \vartheta_0.$$

Когда же точка z изнутри круга $|z|<1$ стремится к точке t_0 разрыва функции $f(\vartheta)$ вдоль луча $\arg(z-t_0)=\pi\beta$, *где $\pi\beta$ — угол, составленный вектором $z-t_0$ с положительным направлением действительной оси, то в силу* (204), (207) *и* (209) *получаем*

$$\lim_{z \to t_0} u(z) = (1-\lambda) f^+ + \lambda f^-, \quad (210)$$

где $\lambda = \beta - \alpha$.

Аналогичная картина имеется и тогда, когда функция $f(\vartheta)$ имеет конечное множество точек разрыва первого рода. Что же касается единственности решения задачи Дирихле (202) в классе ограниченных гармонических функций, она была доказана в предыдущем пункте.

При требовании суммируемости функции $\varphi(\vartheta)$ формула (208) дает гармоническую в круге $|z|<1$ функцию, которая при $|z|\to 1$ почти для всех ϑ, $0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi$, стремится к $\varphi(\vartheta)$.

3°. Построение приближенного решения задачи Дирихле для гармонических функций в круге. Пусть $t'=e^{i\vartheta'}$, $t''=e^{i\vartheta''}$, $\vartheta'<\vartheta''$, — точки на окружности $|t|=1$.

Функция

$$u(\vartheta',\ \vartheta'';\ z)=\frac{1}{\pi}\arg\left[\frac{z-t'}{z-t''}e^{i\frac{\vartheta''-\vartheta'}{2}}\right]$$

при выборе ее главной ветви однозначна и гармонична. Она называется *гармонической мерой* дуги $t't''$ окружности $|t|=1$ в точке z, $|z|<1$, относительно единичного круга $|z|<1$.

Ввиду того, что при $z=e^{i\vartheta}$

$$\arg\left[\frac{z-t'}{z-t''}e^{i\frac{\vartheta''-\vartheta'}{2}}\right]=\arg\left[\frac{\sin\dfrac{\vartheta-\vartheta'}{2}}{\sin\dfrac{\vartheta-\vartheta''}{2}}\right],$$

функция $u(\vartheta',\ \vartheta'';\ e^{i\vartheta})$ *равна единице в каждой точке открытой дуги* $t't''$, $\vartheta'<\vartheta<\vartheta''$, *и равна нулю на дополнении дуги* $t't''$, $\vartheta'\leqslant\vartheta\leqslant\vartheta''$, *до полной окружности* $|t|=1$. *Когда же точка* z *изнутри круга* $|z|<1$ *стремится к точке* $e^{i\vartheta'}$ *или* $e^{i\vartheta''}$, *то предельные значения* $u(\vartheta',\ \vartheta'';\ z)$ *даются по формуле* (210).

Существуют различные методы построения приближенных решений задачи Дирихле. Среди них в определенном смысле универсальным является рассмотренный в предыдущем параграфе метод конечных разностей.

Понятие гармонической меры позволяет построить довольно простую формулу, дающую приближенное решение задачи Дирихле (202) для гармонических функций в круге.

Пусть заданная на окружности $|t|=1$ функция $f(\vartheta)$ непрерывна. Точками $e^{\frac{2i\pi k}{n}}$, $k=1,\ldots,n$, разобьем окружность $|t|=1$ на равные дуги. В силу равномерной непрерывности функции $f(\vartheta)$ для любого наперед заданного $\varepsilon>0$ существует натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что

$$|f(\vartheta^*)-f(\vartheta^{**})|<\varepsilon$$

для любых ϑ^* и ϑ^{**} из сегмента

$$\frac{2\pi(k-1)}{n} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{2\pi k}{n},$$

как только $n \geqslant N$.

Выбирая главные ветви каждого слагаемого в правой части формулы

$$\tilde{u}(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \arg \left[\frac{z - e^{\frac{2i\pi k}{n}}}{z - e^{\frac{2i\pi(k-1)}{n}}} e^{-\frac{i\pi}{n}} \right] f(\vartheta_k^*), \qquad (211)$$

где ϑ_k^* — фиксированное значение ϑ из интервала

$$\frac{2\pi(k-1)}{n} < \vartheta_k^* < \frac{2\pi k}{n},$$

получаем гармоническую в круге $|z| < 1$ функцию $\tilde{u}(z)$, которая в точках $t = e^{i\vartheta}$ для всех значений ϑ из интервала

$$\frac{2\pi(k-1)}{n} < \vartheta < \frac{2\pi k}{n}$$

принимает изнутри круга $|z| < 1$ значение $f(\vartheta_k^*)$, а ее предельные значения в точках $t = e^{\frac{2\pi ik}{n}}$ вычисляются по формуле (210).

Очевидно, что если $u(z)$ — точное решение задачи (202), то

$$|u(z) - \tilde{u}(z)| < \varepsilon, \qquad |z| < 1,$$

как только $n \geqslant N$. Следовательно, *формула* (211) *дает приближенное решение задачи Дирихле* (202) *для гармонических функций в круге* $|z| < 1$.

ГЛАВА VII

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

§ 1. Уравнения Коши — Ковалевской

1°. Определение системы Коши — Ковалевской и постановка задачи Коши для нее. Как и в пункте 2° § 1 введения, будем считать, что равенство

$$F\left(x, \ldots, p_{i_1 \ldots i_n}, \ldots\right) = 0, \tag{1}$$

$$p_{i_1 \ldots i_n} = \left(p^1_{i_1 \ldots i_n}, \ldots, p^N_{i_1 \ldots i_n}\right) = \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}, \quad \sum_{j=1}^{n} i_j = k,$$

$$k = 0, \ldots, m,$$

представляет собой систему N уравнений в частных производных с N неизвестными функциями $(u_1, \ldots, u_N) = u$, причем порядок каждого уравнения равен m, $m \geqslant 1$.

Дополнительно будем предполагать, что функции $F_i\left(x, \ldots, p_{i_1 \ldots i_n}, \ldots\right)$, $i = 1, \ldots, N$, непрерывны относительно всех своих аргументов в окрестности их фиксированных значений x^0, $p^0_{i_1 \ldots i_n}$, $\sum\limits_{j=1}^{n} i_j = k$, $k = 0, \ldots, m$, непрерывно дифференцируемы относительно $p_{m0 \ldots 0} = (p^1_{m0 \ldots 0}, \ldots, p^N_{m0 \ldots 0})$ и функциональный детерминант

$$\det \left\| \frac{\partial F_l}{\partial p^j_{m0 \ldots 0}} \right\| \neq 0, \quad l, j = 1, \ldots, N. \tag{2}$$

Тогда в силу известной теоремы о неявных функциях систему (1) можно записать в виде

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1^m} = f\left(x, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}, \ldots\right), \tag{3}$$

где заданный N-мерный вектор $f = (f_1, \ldots, f_N)$ уже не содержит $\dfrac{\partial^m u}{\partial x_1^m}$.

Систему (3) принято называть *системой Коши — Ковалевской*. Очевидно, что далеко не каждая система (1) относится к типу Коши — Ковалевской. Так, например, в случае системы

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - u_2 = 0, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - u_1 = 0$$

условие (2) не выполнено, и, стало быть, она не является системой Коши — Ковалевской.

Пусть в некоторой области G гиперплоскости $x_1 = 0$ заданы достаточно гладкие N-мерные векторы

$$\varphi^{(0)}(x_2, \ldots, x_n), \ldots, \varphi^{(m-1)}(x_2, \ldots, x_n).$$

Задача отыскания регулярного в некоторой n-мерной окрестности области G решения $u = (u_1, \ldots, u_N)$ системы (3), удовлетворяющего начальным условиям

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}\right|_{x_1=0} = \varphi^{(k)}(x_2, \ldots, x_n), \qquad k = 0, \ldots, m-1, \tag{4}$$

называется *задачей Коши.*

2°. Редукция системы (3) к системе первого порядка. Введением новых неизвестных функций система (3) может быть приведена к системе Коши — Ковалевской первого порядка

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = f\left(x, v, p_{i_1 \ldots i_n}\right),$$

$$p_{i_1 \ldots i_n} = \left(p^1_{i_1 \ldots i_n}, \ldots, p^{N_1}_{i_1 \ldots i_n}\right) = \frac{\partial v}{\partial x_2^{i_2} \ldots \partial x_n^{i_n}}, \tag{5}$$

$$i_1 = 0, \quad \sum_{j=2}^{n} i_j = 1,$$

с начальными условиями

$$v(0, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_2, \ldots, x_n), \tag{6}$$

где f, φ — заданные, а v — искомый N_1-мерные векторы, $N_1 > N$.

Более того, можно придать системе (5) вид квазилинейной системы. Мы здесь покажем, как это делается в случае, когда $N = 1$, $m = 2$ и $n = 2$, т. е. на примере одного уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = f\left(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right), \tag{7}$$

$$u(0, x_2) = \varphi^{(0)}(x_2), \quad \left.\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = \varphi^{(1)}(x_2). \tag{8}$$

Примем обозначения

$$u_1(x_1, x_2) = u(x_1, x_2),$$
$$\frac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} = u_2(x_1, x_2), \quad \frac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} = u_3(x_1, x_2). \tag{9}$$

Тождественное выполнение последних двух равенств (9) означает, что

$$\frac{\partial u_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3(x_1, x_2)}{\partial x_1}. \tag{10}$$

В силу (7), (9) и (10) заключаем, что функции u_1, u_2 и u_3 являются решением системы Коши — Ковалевской

$$\frac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} = u_2(x_1, x_2), \quad \frac{\partial u_3(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2(x_1, x_2)}{\partial x_2},$$
$$\frac{\partial u_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} = f\left(x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right), \tag{11}$$

причем

$$u_1(0, x_2) = u(0, x_2) = \varphi^{(0)}(x_2),$$
$$u_2(0, x_2) = \left.\frac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = \left.\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = \varphi^{(1)}(x_2), \tag{12}$$
$$u_3(0, x_2) = \left.\frac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right|_{x_1=0} = \frac{\partial u(0, x_2)}{\partial x_2} = \frac{d}{dx_2}\varphi^{(0)}(x_2).$$

Теперь введем три новые функции:

$$u_4(x_1, x_2) = \frac{\partial u_2(x_1, x_2)}{\partial x_2},$$
$$u_5(x_1, x_2) = \frac{\partial u_3(x_1, x_2)}{\partial x_2}, \tag{13}$$
$$u_6(x_1, x_2) = \frac{\partial u_2(x_1, x_2)}{\partial x_1}.$$

На основании (10), (11) и (13) заключаем, что функции

$$u_1(x_1, x_2), \quad u_2(x_1, x_2), \quad u_3(x_1, x_2),$$
$$u_4(x_1, x_2), \quad u_5(x_1, x_2), \quad u_6(x_1, x_2)$$

должны составлять решение системы Коши — Ковалевской

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=u_2,\quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1}=u_6,\quad \frac{\partial u_3}{\partial x_1}=u_4,\\ \frac{\partial u_4}{\partial x_1}=\frac{\partial u_6}{\partial x_2},\quad \frac{\partial u_5}{\partial x_1}=\frac{\partial u_4}{\partial x_2},\\ \frac{\partial u_6}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\sum_{l=1}^{5}\frac{\partial f}{\partial u_l}\frac{\partial u_l}{\partial x_1},\end{gathered}\tag{14}$$

где

$$u_6(x_1,\ x_2)=f(x_1,\ x_2,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5).\tag{15}$$

В силу (13) и (15) эти же функции следует подчинять наряду с (12) еще и следующим начальным условиям:

$$\begin{gathered}u_4(0,\ x_2)=\frac{\partial u_2(0,\ x_2)}{\partial x_2}=\frac{d}{dx_2}\varphi^{(1)}(x_2),\\ u_5(0,\ x_2)=\frac{\partial u_2(0,\ x_2)}{\partial x_2}=\frac{d^2}{dx_2^2}\varphi^{(0)}(x_2),\\ u_6(0,\ x_2)=f\left(0,\ x_2,\ \varphi^{(0)},\ \varphi^{(1)},\ \frac{d}{dx_2}\varphi^{(0)},\ \frac{d}{dx_2}\varphi^{(1)},\ \frac{d^2}{dx_2^2}\varphi^{(0)}\right).\end{gathered}\tag{16}$$

Таким образом, *задача* (7), (8) *редуцирована к задаче Коши* (12), (16) *для квазилинейной системы Коши — Ковалевской* (14).

В задаче (7), (8) в равной мере, как и в задачах (11), (12) и (14), (12), (16), носителем начальных данных является интервал G прямой $x_1=0$. Когда G является интервалом прямой $x_1=x_1^0$, то заменой независимого переменного $x_1=t+x_1^0$ добьемся того, что носитель данных будет лежать на прямой $t=0$. Кроме того, без ограничения общности можно считать, что в условиях (8) начальные функции $\varphi^{(0)}$ и $\varphi^{(1)}$ тождественно равны нулю.

3°. Задача Коши с аналитическими данными. Теорема Коши — Ковалевской. Пусть все компоненты N-мерных векторов $\varphi(x)=(\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_N)$ и $f=(f_1,\ \ldots,\ f_N)$ являются аналитическими функциями в некоторых, соответственно n-мерной D_n и $(n+1)(N+1)$-мерной $D_{(n+1)(N+1)}$, областях переменных $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ и $x,\ t,\ u=(u_1,\ldots,\ u_N)$, $p_1=(p_{11},\ \ldots,\ p_{1N}),\ \ldots,\ p_n=(p_{n1},\ \ldots,\ p_{nN})$.

По данному в пункте 5° § 6 главы II определению это означает, что *в некоторых, n-мерной и $(n+1)(N+1)$-мерной, окрестностях значений* $x^0\in D_n$, $(x^0,\ t^0,\ u^0,\ p_2^0,\ \ldots$

$\ldots, p_n^0) \in D_{(n+1)(N+1)}$ *указанные функции могут быть представлены в виде сумм абсолютно сходящихся степенных рядов с неотрицательными целыми показателями*

$$\varphi(x) = \sum a_k (x - x^0)^k,$$

$$f(x, t, u, p_1, \ldots, p_n) = \\ = \sum A_{kmsl_1 \ldots l_n} (x - x^0)^k (t - t^0)^m (u - u^0)^s (p_1 - p_1^0)^{l_1} \ldots \\ \ldots (p_n - p_n^0)^{l_n},$$

где

$$a_k = a_{k_1 \ldots k_n}, \quad \sum_{i=1}^{n} k_i = k,$$

$$(x - x^0)^k = (x_1 - x_1^0)^{k_1} \ldots (x_n - x_n^0)^{k_n},$$

$$A_{kmsl_1 \ldots l_n} = A_{k_1 \ldots k_n m s_1 \ldots s_N l_{11} \ldots l_{1N} \ldots l_{n1} \ldots l_{nN}},$$

$$\sum_{j=1}^{N} s_j = s, \quad \sum_{j=1}^{N} l_{ij} = l_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

В этих предположениях задача определения регулярного в некоторой $(n+1)$-мерной области D_{n+1} переменных x, t, содержащей внутри себя область D_n, решения $u(x, t)$ системы Коши — Ковалевской

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right), \tag{17}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in D_n, \tag{18}$$

называется *задачей Коши с аналитическими данными.*

В приложениях задачи (17), (18) переменное t выступает в роли времени, а $x_1, \ldots, x_n$ — в роли пространственных переменных.

Имеет место следующее важное утверждение, известное под названием теоремы Коши — Ковалевской: *для каждой точки $x^0 \in D_n$ имеется $(n+1)$-мерная окрестность изменения переменных x, t, в которой существует, и притом единственное, аналитическое решение $u(x, t)$ задачи Коши (17), (18) с аналитическими данными.*

Как уже было отмечено в конце предыдущего пункта, можно считать, что вектор $\varphi(x)$ в условии (18) тождественно равен нулю. Этого всегда можно добиться заменой $u(x, t)$ через $u - \varphi$.

4°. Понятие мажоранты аналитической функции. Пусть $f(y)$, $y=(y_1, \ldots, y_p)$, — аналитическая в некоторой p-мерной области D_p переменных $y_1, \ldots, y_p$ функция. Если $y^*=(y_1^*, \ldots, y_p^*)$, $y_k^* \neq y_k^0$, $k=1, \ldots, p$, является точкой абсолютной сходимости степенного ряда

$$f(y)=\sum a_k (y-y^0)^k, \tag{19}$$

$$a_k=a_{k_1 \ldots k_p}, \quad \sum_{j=1}^{p} k_j=k, \quad y^0=(y_1^0, \ldots, y_p^0),$$

$$(y-y^0)^k=(y_1-y_1^0)^{k_1} \ldots (y_p-y_p^0)^{k_p},$$

то существует положительное число M такое, что для всех индексов k

$$|a_k| \leqslant \frac{M}{\prod\limits_{j=1}^{p} |y_j^*-y_j^0|^{k_j}}, \quad \sum_{j=1}^{p} k_j=k. \tag{20}$$

Говорят, что аналитическая в D_p функция $\varphi(y)$ является *мажорантой функции* $f(y)$, если все коэффициенты разложения

$$\varphi(y)=\sum b_k (y-y^0)^k \tag{21}$$

положительны и

$$|a_k| \leqslant b_k$$

для всех значений индекса k.

На основании (20) заключаем, что в качестве мажоранты представленной формулой (19) функции $f(y)$ может служить функция

$$\varphi(y)=M \sum \frac{(y-y^0)^k}{\prod\limits_{j=1}^{p} |y_j^*-y_j^0|^{k_j}}=\frac{M}{\prod\limits_{j=1}^{p}\left(1-\frac{y_j-y_j^0}{|y_j^*-y_j^0|}\right)} \tag{22}$$

при

$$|y_j-y_j^0|<|y_j^*-y_j^0|, \quad j=1, \ldots, p.$$

Наряду с (22) мажорантой $f(y)$ является и функция

$$\varphi_1(y)=\frac{M}{1-\frac{1}{a} \sum\limits_{j=1}^{p} (y_j-y_j^0)},$$

где

$$a=\min_{1 \leqslant j \leqslant p} |y_j^*-y_j^0|.$$

Справедливость этого утверждения следует из того, что при

$$\sum_{j=1}^{p} |y_j - y_j^0| < a$$

имеем

$$\varphi_1(y) = M \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{a^l} \left[\sum_{j=1}^{p} (y_j - y_j^0) \right]^l =$$

$$= M \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{a^l} \sum \frac{l!}{k_1! \ldots k_p!} \prod_{s=1}^{p} (y_s - y_s^0)^{k_s}, \qquad l = \sum_{s=1}^{p} k_s, \tag{23}$$

и, кроме того,

$$l! \geqslant \prod_{s=1}^{p} k_s!, \quad \frac{1}{a^l} \geqslant \frac{1}{\prod\limits_{s=1}^{p} |y_s^* - y_s^0|^{k_s}}.$$

Очевидно, что функция $\varphi_1(y)$ остается мажорантой $f(y)$, если в выражении (23) вместо $y_1 - y_1^0$ написано

$$\frac{1}{\alpha}(y_1 - y_1^0), \qquad 0 < \alpha < 1, \quad \alpha = \mathrm{const}.$$

5°. Доказательство теоремы Коши — Ковалевской при отсутствии в задаче (17), (18) пространственных переменных. В рассматриваемом случае (17) представляет собой *обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка*

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \tag{24}$$

для которого начальное условие (18) имеет вид

$$u(0) = 0. \tag{25}$$

Будем считать, что $f(t, u)$ является скалярной аналитической в окрестности точки (0, 0) функцией переменных t и u, т. е. в этой окрестности она представляется в виде суммы абсолютно сходящегося двойного степенного ряда

$$f(t, u) = \sum_{k,\, l=0}^{\infty} a_{kl} t^k u^l. \tag{26}$$

Для простоты записи будем считать, что радиусы сходимости ряда (26) как по t, так и по u равны единице.

Нашей целью является *построение аналитической вблизи точки $t=0$ функции $u(t)$, являющейся решением задачи* (24), (25). Допуская ее существование (впоследствии она будет найдена), при помощи последовательного дифференцирования тождества (24) с учетом условия (25) мы можем вычислить в точке $t=0$ значения всех $\frac{d^n u}{dt^n}$:

$$\left(\frac{d^n u}{dt^n}\right)_0 = \omega_n(a_{00}, \ldots, a_{ij}, \ldots), \qquad (27)$$
$$n=1, 2, \ldots, \quad i+j \leqslant n-1,$$

где ω_n представляет собой полином своих аргументов с положительными коэффициентами. Покажем, что радиус сходимости степенного ряда

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n u}{dt^n}\right)_0 t^n \qquad (28)$$

отличен от нуля.

Как уже было отмечено в предыдущем пункте, в силу сходимости ряда (26) существует положительное число M такое, что для всех значений индексов k, l имеют место оценки

$$|a_{kl}| \leqslant \frac{M}{2}. \qquad (29)$$

Поэтому в качестве мажоранты для $f(t, u)$ можем брать функцию

$$F(t, u) = \frac{M}{2(1-t)(1-u)}. \qquad (30)$$

Обозначим через $U(t)$ решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dU}{dt} = F(t, U), \qquad (31)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$U(0) = 0. \qquad (32)$$

Ввиду того, что правая часть уравнения (31) дается формулой (30), применением метода разделения переменных легко находим его решение

$$U = 1 - \sqrt{1 + M \log(1-t)}, \tag{33}$$

удовлетворяющее условию (32), причем оно, очевидно, единственно. Под $\log(1-t)$ понимается ветвь этой функции, равная нулю при $t=0$.

Так как выражение $1 + M\log(1-t)$ обращается в нуль при $t = 1 - e^{-\frac{1}{M}}$ и оно по модулю меньше единицы при

$$|t| < 1 - e^{-\frac{1}{M}},$$

то представленная по формуле (33) функция является аналитической с радиусом сходимости, равным, по меньшей мере, $1 - e^{-\frac{1}{M}}$.

Функция $U(t)$ является мажорантой для функции $u(t)$, представленной по формуле (28) степенным рядом с радиусом сходимости $1 - e^{-\frac{1}{M}}$. Очевидно, что $u(t)$ — единственное решение задачи (24), (25).

6°. Доказательство теоремы Коши — Ковалевской для задачи (17), (18). Ради простоты будем считать, что (17) представляет собой одно уравнение с одной неизвестной функцией $u(x, t)$ с аналитической правой частью f в окрестности точки $\left(x=0, \quad t=0, \quad u=0, \quad p_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \ \ldots, \ p_n = \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0\right)$. В этой окрестности функцию $f(x, t, u, p_1, \ldots, p_n)$ можно представить в виде суммы абсолютно сходящегося степенного ряда

$$f(x, t, u, p_1, \ldots, p_n) = \sum a_{kmsl_1 \ldots l_n} x^k t^m u^s p_1^{l_1} \ldots p_n^{l_n}, \tag{34}$$

где

$$p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Без ограничения общности можно считать, что $a_{00\ldots 0} = 0$. Этого всегда можно добиться заменой искомой функции по формуле

$$u = a_{0\ldots 0} t + v.$$

Как и в предыдущем пункте, будем считать, что радиусы сходимости ряда (34) по всем переменным равны единице. В таком предположении в качестве мажоранты f может служить функция

$$F=M\left\{\frac{1}{\left[1-\left(\frac{t}{\alpha}+u+\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\right]\left(1-\sum_{k=1}^{n}p_k\right)}-1\right\}, \tag{35}$$

где M и α — некоторые положительные числа, причем $0<\alpha<1$.

В результате последовательного дифференцирования тождества (17) с учетом (18) мы можем вычислить в точке $(x=0,\ t=0)$ частные производные всех порядков искомого аналитического решения $u(x,\ t)$ задачи (17), (18) и составить степенной ряд

$$u(x,\ t)=\sum b_{kl}x^k t^l, \tag{36}$$

причем его мажорантой может служить решение $U(x,\ t)$ уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t}=F, \tag{37}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$U(x,\ 0)=0. \tag{38}$$

Если нам удастся найти аналитическое вблизи точки $(x=0,\ t=0)$ *решение* $v(x,\ t)$ *уравнения* (37) *с положительными коэффициентами в его представлении в виде степенного ряда, то оно будет мажорантой для аналитического решения* $U(x,\ t)$ *задачи* (37), (38).

Функцию $v(x,\ t)$ будем искать в виде

$$v(x,\ t)=w(z), \tag{39}$$

где

$$z=\frac{t}{\alpha}+\sum_{k=1}^{n}x_k. \tag{40}$$

Поскольку в силу (39), (40)

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{1}{\alpha}\frac{dw}{dz},\qquad \frac{\partial v}{\partial x_i}=\frac{dw}{dz},\quad i=1,\ \ldots,\ n,$$

на основании (35), (37) заключаем, что функция $w(z)$ должна быть решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{1}{\alpha}\frac{dw}{dz}=M\left[\frac{1}{(1-z-w)\left(1-n\frac{dw}{dz}\right)}-1\right],$$

т. е.

$$\left(\frac{1}{\alpha}-Mn\right)\frac{dw}{dz}=\frac{n}{\alpha}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2+\frac{M}{1-z-w}-M. \tag{41}$$

Подберем α так, чтобы число $\frac{1}{\alpha}-Mn$ было положительным. Тогда уравнение (41) можно записать в виде

$$\frac{dw}{dz}=\alpha^0\left(\frac{dw}{dz}\right)^2+\beta(z,\ w), \tag{42}$$

где α^0 — положительное число, а $\beta(z,\ w)$ — сумма абсолютно сходящегося степенного ряда

$$\beta(z,\ w)=\sum\beta_{kl}z^kw^l,\qquad \beta_{00}=0,$$

с положительными коэффициентами.

Из двух значений $\frac{dw}{dz}$, удовлетворяющих равенству (42), выберем то, которое обращается в нуль при $z=0$, $w=0$. Это означает, что $w(z)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dw}{dz}=\gamma(z,\ w),\quad \gamma(0,\ 0)=0,\quad w(0)=0. \tag{43}$$

Как было показано в предыдущем пункте, аналитическое решение задачи (43) существует и оно представляется в виде суммы степенного ряда

$$w(z)=\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{d^kw}{dz^k}\right)_0\frac{z^k}{k!} \tag{44}$$

отличным от нуля радиусом сходимости.

В положительности коэффициентов степенного ряда (44) легко убеждаемся при помощи последовательного дифференцирования тождества (42) с учетом (43).

Поскольку представленная формулой (44) функция w является мажорантой для $U(x,\ t)$ и, стало быть, для $u(x,\ t)$, степенной ряд (36) имеет положительные радиусы сходимости как по x, так и по t. Следовательно, *сумма этого ряда является аналитическим решением задачи* (17), (18) *вблизи точки* $(x=0,\ t=0)$.

7°. Некоторые другие замечания относительно задачи Коши (18) для системы Коши — Ковалевской (17). В предыдущем пункте было доказано существование в малом (вблизи данной точки) аналитического решения задачи Коши (18) в случае, когда (17) представляет собой одно уравнение с одной неизвестной функцией и с аналитической правой частью. Это доказательство непосредственно обобщается на случай системы, причем единственность аналитического решения следует из процесса его построения. При этом не имеет значения, будет ли система (17) эллиптична, гиперболична или параболична, важно лишь то, что она типа Коши — Ковалевской. Следует заметить что носитель начальных данных $t=\mathrm{const}$ в случае гиперболических или параболических систем вида (17) не является характеристикой.

Единственность решения задачи (17), (18) с аналитическими данными имеет место и в классе неаналитических решений, но на ее доказательстве мы здесь останавливаться не будем.

Неаналитические решения задачи (17), (18) *не всегда существуют, если система* (17) *не является гиперболической.* В этом нетрудно убедиться на примере системы Коши—Римана

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial u}{\partial x},\quad x+it=z, \tag{45}$$

представляющей собой эллиптическую систему Коши — Ковалевской. В самом деле, допустим, что в области D плоскости переменных x, t, содержащей внутри себя отрезок ab оси $t=0$, существует регулярное решение системы (45), удовлетворяющее условиям

$$u(x,\ 0)=\varphi(x),\quad v(x,\ 0)=0,\quad a<x<b. \tag{46}$$

Принимая во внимание второе из условий (46), на основании принципа симметрии Римана — Шварца (см. пункт 3° § 4 гл. II) заключаем, что функция $u(x,\ t)+ iv(x,\ t)=F(z)$ аналитична в области D, включая открытый отрезок ab, т. е. функция $\varphi(x)$ в первом из условий (46) должна быть аналитической по переменному x. Следовательно, если наперед известно, что $\varphi(x)$ этим свойством не обладает, то задача (45), (46) не будет иметь решения.

Легко видеть, что *даже аналитические решения задачи* (17), (18) *могут оказаться неустойчивыми*. Действительно, непосредственной проверкой убеждаемся в том, что система (45) имеет аналитическое (притом единственное) решение

$$u(x,\ t)=\frac{1}{n^2}\operatorname{sh} nt \sin nx,\quad v(x,\ t)=-\frac{1}{n^2}\operatorname{ch} nt \cos nx,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,\ 0)=0,\quad v(x,\ 0)=-\frac{\cos nx}{n^2},$$

но это решенне, очевидно, неустойчиво (ср. с пунктом 5° § 3 гл. III).

§ 2. Нелинейные гиперболические и эллиптические уравнения второго порядка

1°. Нелинейные уравнения гиперболического типа. В главе III было показано, что в случае линейных уравнений второго порядка с двумя независнмыми переменными гиперболнческого типа наряду с задачей Коши корректно поставлена и задача Гурса нли характеристическая задача (см. пункт 4° § 3 и пункт 2° § 4 гл. III).

Поскольку в случае общих нелинейных уравнений тип уравнения зависит от решения и, стало быть, в определении характеристик нелинейного гиперболического уравнения могут участвовать искомые решения, постановка и исследование задачи Гурса для таких уравнений сталкиваются с определенными трудностями. По этой причине здесь в основном ограничимся рассмотрением частного класса квазилинейных гиперболических уравнений.

В случае двух независимых переменных широкий класс квазилинейных уравнений можно привести к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=f(x,\ y,\ u,\ p,\ q), \tag{47}$$

где f — заданная функция $x,\ y,\ u,\ p=\frac{\partial u}{\partial x},\ q=\frac{\partial u}{\partial y}$.

Характеристиками уравнения (47) являются прямые $x=\mathrm{const}$, $y=\mathrm{const}$. Обозначим через D прямоугольную область плоскости переменных x, y, ограниченную прямыми $x=0$, $y=0$, $x=a$, $y=b$. Будем предполагать, что функция f удовлетворяет условиям: 1) она непрерывна относительно всех своих аргументов при $(x, y) \in D$ и

$$|u| \leqslant A_1, \quad |p| \leqslant A_2, \quad |q| \leqslant A_3, \tag{48}$$

где A_1, A_2, A_3 — определенные положительные числа, и 2) удовлетворяет условию Липшица по u, p, q, т. е. существуют положительные числа k_1, k_2, k_3 такие, что для любых u', p', q' и u'', p'', q'', удовлетворяющих условиям (48), при $(x, y) \in D$ имеет место оценка

$$|f(x, y, u', p', q') - f(x, y, u'', p'', q'')| \leqslant \\ \leqslant k_1 |u' - u''| + k_2 |p' - p''| + k_3 |q' - q''|. \tag{49}$$

Под задачей Гурса для уравнения (47) *понимается требование определить непрерывное в* $D \cup \partial D$ *и регулярное в* D *его решение* $u(x, y)$, *когда наперед заданы значения* $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u(0, y) = \psi(y)$, $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $\varphi(0) = \psi(0)$.

При непрерывной дифференцируемости функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заменой $u(x, y)$ через $u(x, y) - \varphi(x) - \psi(y) + \varphi(0)$ добьемся того, что в условиях задачи Гурса

$$u(x, 0) = 0, \; u(0, y) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \; 0 \leqslant y \leqslant b. \tag{50}$$

Решение задачи (47), (50) можно найти с помощью хорошо известного из курса обыкновенных дифференциальных уравнений *метода последовательных приближений Пикара*.

За нулевое приближение задачи (47), (50) примем $u_0(x, y) = 0$, а за последующие приближения —

$$u_n(x, y) = \int_0^x d\xi \int_0^y f\left(\xi, \eta, u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta}\right) d\eta, \tag{51}$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

Пусть α, β — положительные числа, не превышающие a, b соответственно, причем

$$\alpha\beta < \frac{A_1}{M}, \quad \alpha < \frac{A_3}{M}, \quad \beta < \frac{A_2}{M}, \tag{52}$$

где M — максимум f, когда ее аргументы удовлетворяют условиям (48). В силу (52) очевидно, что, когда (x, y)

принадлежит прямоугольнику $D_1=\{0\leqslant x\leqslant\alpha,\ 0\leqslant y\leqslant\beta\}$, определенные из формулы (51) значения

$$u_n(x,\ y),\quad \frac{\partial u_n(x,\ y)}{\partial x},\quad \frac{\partial u_n(x,\ y)}{\partial y},$$
$$n=1,\ 2,\ \ldots,$$

удовлетворяют условиям (48).

Покажем, что сумма $u(x,\ y)$ ряда

$$u_1(x,\ y)+[u_2(x,\ y)-u_1(x,\ y)]+\ldots$$
$$\ldots+[u_n(x,\ y)-u_{n-1}(x,\ y)]+\ldots \tag{53}$$

является решением задачи (47), (50), если функция f удовлетворяет условиям 1) и 2).

Примем обозначения

$$A=\max(A_1,\ A_2,\ A_3),\quad k=\max(k_1,\ k_2,\ k_3),$$
$$N=\max\left[3A,\ A\left(2+\frac{x+y}{n}\right)\right].$$

В силу (51) и первого из неравенств (52) имеем

$$|u_1(x,\ y)|\leqslant A,\quad \left|\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|\leqslant A,\quad \left|\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|\leqslant A. \tag{54}$$

Далее, пользуясь неравенством (49), на основании (51) и (54) получаем

$$|u_2(x,\ y)-u_1(x,\ y)|\leqslant$$
$$\leqslant\int_0^x d\xi\int_0^y\left(k_1|u_1|+k_2\left|\frac{\partial u_1}{\partial\xi}\right|+k_3\left|\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\right|\right)d\eta\leqslant kN\frac{(x+y)^2}{2!},$$
$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(u_2-u_1)\right|\leqslant kN(x+y),\quad \left|\frac{\partial}{\partial y}(u_2-u_1)\right|\leqslant kN(x+y).$$

Продолжая этот процесс, находим, что для любого натурального n

$$|u_n-u_{n-1}|\leqslant k^{n-1}N^{n-1}\frac{(x+y)^n}{n!},$$
$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(u_n-u_{n-1})\right|\leqslant k^{n-1}N^{n-1}\frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{55}$$
$$\left|\frac{\partial}{\partial y}(u_n-u_{n-1})\right|\leqslant k^{n-1}N^{n-1}\frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

На основании оценок (55) заключаем, что ряд (53) сходится абсолютно и равномерно и что его почленно можно дифференцировать по x и y. Очевидно, что $u(x, y) = \lim_{n\to\infty} u_n(x, y)$. На основании этого предельным переходом в (51) убеждаемся, что $u(x, y)$ *является решением задачи* (47), (50).

2°. **О единственности решения задачи Гурса.** В принятых в предыдущем пункте предположениях относительно правой части f уравнения (47) легко доказать *единственность решения задачи* (47), (50). Действительно, пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — два решения задачи (47), (50). Из очевидных тождеств

$$u(x, y) = \int_0^x d\xi \int_0^y f\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) d\eta,$$

$$v(x, y) = \int_0^x d\xi \int_0^y f\left(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) d\eta$$

для разности $w = u(x, y) - v(x, y)$ получаем

$$w(x, y) = \\ = \int_0^x d\xi \int_0^y \left[f\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) - f\left(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)\right] d\eta. \quad (56)$$

Отсюда в силу (49) имеем

$$|w| \leqslant kN\frac{(x+y)^2}{2!}, \quad \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right| \leqslant kN(x+y), \quad \left|\frac{\partial w}{\partial y}\right| \leqslant kN(x+y), \quad (57)$$

где k и N — введенные в предыдущем пункте положительные постоянные. На основании (57) из (56) снова получаем

$$|w| \leqslant k^2N^2\frac{(x+y)^3}{3!},$$

$$\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right| \leqslant k^2N^2\frac{(x+y)^2}{2!}, \quad \left|\frac{\partial w}{\partial y}\right| \leqslant k^2N^2\frac{(x+y)^2}{2!}.$$

Продолжая этот процесс, приходим к заключению, что для любого натурального n

$$|w(x, y)| \leqslant k^nN^n\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Отсюда следует, что $w(x, y) = 0$, т. е. $u(x, y) = v(x, y)$.

Единственность решения задачи (47), (50) *может не иметь места, если функция f не удовлетворяет условию* (49). В этом непосредственно убеждаемся на примере уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = u^{1/2}, \tag{58}$$

которое имеет регулярные решения $u(x, y) = 0$ и $v(x, y) = \frac{1}{16}x^2y^2$, удовлетворяющие условиям (50). Правая часть уравнения (58) не удовлетворяет условию Липшица (49).

В дополнение к сказанному в начале предыдущего пункта заметим, что *уравнение Монжа — Ампера*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = -1 \tag{59}$$

гиперболично вдоль любого его решения, ибо дискриминант соответствующей ему характеристической формы

$$Q = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx^2$$

равен 1. В частности, вдоль решений $u_1 = xy$ и $u_2 = -u_1$ имеем $Q = \pm 2dx\,dy$. Следовательно, прямые $x = 0$ и $y = 0$ являются характеристиками уравнения (59), соответствующими его решениям u_1, $-u_1$, которые обращаются в нуль при $x = 0$, $y = 0$. Таким образом, *для задачи Гурса* (50) *в случае уравнения* (59) *не имеет места единственность решения.*

3°. **Задача Коши для одной квазилинейной гиперболической системы.** В настоящем пункте речь будет идти о задаче Коши для квазилинейной гиперболической системы первого порядка вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t, u), \tag{60}$$

где $\lambda(x, t)$ — заданная действительная непрерывно дифференцируемая диагональная матрица с элементами $\lambda_k(x, t)$, $k = 1, \ldots, N$, вектор $f = (f_1, \ldots, f_N)$ задан в некоторой односвязной области изменения переменных x, t и для всех значений искомого вектора $u = (u_1, \ldots, u_N)$. Предполагается, что носителем данных Коши является отрезок I прямой $t = 0$, причем

$$u(x, 0) = 0, \qquad x \in I. \tag{61}$$

По данному в § 2 введения определению, характеристики системы (60) составляют N-параметрическое семейство кривых C_k: $x_k = x_k(t)$, определенных из обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = \lambda_k(x, t), \quad k = 1, \ldots, N. \tag{62}$$

Обозначим через E множество точек (x, t) плоскости переменных x, t, обладающих тем свойством, что все кривые характеристического пучка, выходящие нз точки (x, t) в направлении прямой $t=0$, пересекаются с отрезком l. Пусть G — область, содержащаяся в E и охватывающая l.

Поскольку в силу (62) вдоль кривой C_k от точки $[\xi_k(x, t), 0]$ до $(x, t) \in G$ для решения $u(x, t)$ снстемы (60) имеют место тождества

$$\frac{du_k}{dt} = \frac{\partial u_k}{\partial t} + \lambda_k(x, t)\frac{\partial u_k}{\partial x}, \qquad k = 1, \ldots, N,$$

равенству (60) в силу (61) для решения $u(x, t)$ задачи (60), (61) можно придать вид

$$u_k(x, t) = \int\limits_{[\xi_k(x, t), 0]}^{(x, t)} f(\xi_k, \tau, u)_{\xi_k = \xi_k(\tau)}\, d\tau, \tag{63}$$

где $[\xi_k(x, t), 0]$ — точка пересечения характеристики $\xi_k = \xi_k(\tau)$, выходящей из точки (x, t) с l.

Интегральный оператор T в правой части формулы (63) каждому непрерывно дифференцируемому в области G вектору $u(x, t)$, удовлетворяющему условию (61), ставнт в соответствие непрерывно дифференцируемый в этой же области вектор $v(x, t)$, удовлетворяющий условию (61).

Задача (60), (61) *будет решена, если нам удастся найти неподвижную точку отображения $v = Tu$, т. е. функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению*

$$u = Tu. \tag{64}$$

Решение уравнения (64) можно построить методом последовательных приближений. Действительно, потребуем дополнительно непрерывность по x, t и непрерывную дифференцируемость по $u_1, \ldots, u_N$ всех компонент вектора f с конечной верхней гранью M для модулей $\left|\frac{\partial f}{\partial u_k}\right|$,

$k=1, \ldots, N$. За нулевое приближение решения уравнения (64) примем $u^{(0)}=0$, а последующие приближения определим по формулам

$$u^{(n)}=Tu^{(n-1)}, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots$$

Будем считать, что $t<h$.

Для разности $u^{(2)}-u^{(1)}$ в силу теоремы конечных приращений имеем

$$|u^{(2)}(x,\ t)-u^{(1)}(x,\ t)|=$$
$$=\left|\int\limits_{(\xi,\ 0)}^{(x,\ t)}[f(\xi,\ \tau,\ u^{(1)})-f(\xi,\ \tau,\ 0)]\,d\tau\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\int\limits_{(\xi,\ 0)}^{(x,\ t)}\sum_{k=1}^{N}\widetilde{f_k^{(1)}}u_k^{(1)}\,d\tau\right|\leqslant NMh,$$

где $\widetilde{f_k^{(1)}}$ — средние значения функций $\dfrac{\partial f}{\partial u_k^{(1)}}$.

Повторением этого рассуждения находим, что для любого натурального n имеет место оценка

$$|u^{(n+1)}(x,\ t)-u^{(n)}(x,\ t)|\leqslant NMh|u^{(n)}(x,\ t)-u^{(n-1)}(x,\ t)|. \qquad (65)$$

При достаточно малом h можно считать, что число

$$\theta=NMh<1$$

и, стало быть, оценки (65), записанные в виде

$$|u^{(n+1)}(x,\ t)-u^{(n)}(x,\ t)|\leqslant\theta\,|u^{(n)}(x,\ t)-u^{(n-1)}(x,\ t)|,$$
$$n=1,\ 2,\ \ldots,$$

позволяют заключить, что последовательность $\{u^{(n)}\}$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, равномерно сходится и в пределе дает решение $u(x,\ t)$ уравнения (64). Можно показать также, что $u(x,\ t)$ имеет непрерывные производные по x и t, т. е. $u(x,\ t)$ представляет собой решение задачи (60), (61). Единственность решения устанавливается повторением рассуждения предыдущего пункта.

Задача Коши

$$u(x,\ 0)=0, \quad u_t(x,\ 0)=0$$

для квазилинейного уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f\left(x,\ t,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

при помощи обозначений $\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}=v$, $\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}=w$ приводится к задаче вида (60), (61). Следовательно, *ее решение, по крайней мере в малом, существует и является единственным.*

4°. Об однозначной разрешимости задачи Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка. В пункте 2° § 2 введения было отмечено, что общее линейное равномерно эллиптическое уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными можно считать приведенным к каноническому виду

$$Lu=\Delta u+a(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,\ y)\,u=f(x,\ y), \tag{66}$$

где Δ — оператор Лапласа по переменным x, y.

Пусть D — конечная односвязная область плоскости переменных x, y с гладкой границей $S=\partial D$. В задаче Дирихле (см. пункт 4° § 4 введения) требуется найти регулярное в области D решение $u(x,\ y)$ уравнения (66), непрерывное в $D\cup S$ и удовлетворяющее условию

$$u(x,\ y)=\varphi(x,\ y),\qquad (x,\ y)\in S, \tag{67}$$

где $\varphi(x,\ y)$ — заданная непрерывная функция.

В пункте 4° § 5 гл. I было доказано, что, если в области D всюду коэффициент $c(x,\ y)$ уравнения (66) удовлетворяет условию

$$c(x,\ y)<0, \tag{68}$$

задача (66), (67) не может иметь более одного решения.

Легко видеть, что *единственность решения задачи* (66), (67) *имеет место и в том случае, когда в условии* (68) *знак равенства не исключен*. Действительно, для разности u двух решений u_1, u_2 этой задачи мы должны иметь

$$Lu(x,\ y)=0,\quad (x,\ y)\in D,\qquad u(x,\ y)=0,\quad (x,\ y)\in S. \tag{69}$$

В результате замены функции u по формуле

$$u=(A-e^{-Mx})\,v,$$

где число M больше верхней грани $a(x,\ y)$ в области D, для v в силу (69) получаем

$$\begin{gathered}\Delta v+a_1\frac{\partial v}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial y}+c_1v=0,\quad (x,\ y)\in D,\\ v(x,\ y)=0,\quad (x,\ y)\in S,\end{gathered} \tag{70}$$

где

$$a_1 = a + \frac{2M}{Ae^{Mx}-1}, \quad c_1 = c - \frac{M(M-a)}{Ae^{Mx}-1}.$$

Подбирая число A настолько большим, чтобы выражение $Ae^{Mx}-1$ было положительным, добьемся выполнения условия $c_1(x, y) < 0$ всюду в области D. Отсюда в силу пункта 4° § 5 гл. I заключаем, что задача (70) имеет только тривиальное решение. Тем самым справедливость сформулированного утверждения доказана.

Переходим к рассмотрению вопроса разрешимости задачи (66), (67). Предварительно заметим, что заменой $u(x, y)$ через $u(x, y)+u_0(x, y)$, где $u_0(x, y)$ — гармоническая в области D функция, удовлетворяющая условию (67), можно добиться того, что в условии (67) функция $\varphi(x, y)$ тождественно будет равна нулю. При этом очевидным образом изменится правая часть уравнения (66).

Запишем уравнение (66) в виде

$$\Delta u = F, \tag{71}$$

где

$$F = f(x, y) - a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} - b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} - c(x, y)u. \tag{72}$$

Если была бы известна правая часть уравнения (71), в силу формулы (36) главы I получили бы решение $u(x, y)$ этого уравнения в области D:

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int_D G(x, y; \xi, \eta)F(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta, \tag{73}$$

удовлетворяющее краевому условию

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in S. \tag{74}$$

В формуле (73) выражение $G(x, y; \xi, \eta)$ представляет собой функцию Грина задачи Дирихле для гармонических функций. Ее существование можно считать доказанным (см. пункт 7° § 3 гл. II).

Когда $a(x, y) = b(x, y) = 0$ всюду в области D, равенство (73) можно записать в виде

$$u(x, y) - \frac{1}{2\pi}\int_D G(x, y; \xi, \eta)c(\xi, \eta)u(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta = f^*(x, y), \tag{75}$$

где

$$f^*(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int_D G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Записанное в виде формулы (75) равенство представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Задача (66), (74) в предположении, что $a = b = 0$, очевидно, эквивалентна интегральному уравнению (75). Когда дополнительно известно, что $c(x, y) \leqslant 0$, как уже было показано выше, имеет место единственность решения задачи (66), (74) и, стало быть, единственность решения интегрального уравнения (75). Из единственности же решения уравнения (75) на основании теории Фредгольма (см. пункт 3° § 2 гл. V) заключаем, что *задача* (66), (67) *имеет, и притом единственное, решение.*

Пусть теперь коэффициенты $a(x, y)$ и $b(x, y)$ отличны от тождественного нуля, но условие

$$c(x, y) \leqslant 0 \tag{76}$$

выполнено всюду в области D. Как уже было отмечено в пункте 5° § 5 гл. I, наличие условия (76) гарантирует существование главного элементарного решения, так что можно построить обобщенные потенциалы, соответствующие уравнению (66). Поэтому мы вправе искать решение задачи (66), (67) в виде суммы обобщенного объемного потенциала с плотностью $-f(x, y)$ и обобщенного потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью, которая должна быть решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода, эквивалентного этой задаче. Разрешимость же полученного интегрального уравнения следует из единственности его решения.

Выполнение условия (76) не является необходимым для единственности и существования решения задачи (66), (67). Независимо от этого условия *задача* (66), (67) *всегда однозначно разрешима, если мера области D достаточно мала.* В этом можно убедиться, если применить метод последовательных приближений Пикара для построения решения $u(x, y)$ интегро-дифференциального уравнения (73).

5°. Достаточное условие единственности решения задачи Дирихле для нелинейного равномерно эллиптического уравнения второго порядка. Пусть нелинейное уравнение в частных производных второго порядка

$$F\left(x, \ldots, p_{i_1 \ldots i_n}, \ldots\right)=0, \tag{77}$$

$$x=(x_1, \ldots, x_n), \qquad \sum_{j=1}^{n} i_j=k, \quad k=0,\ 1,\ 2,$$

$$p_{i_1 \ldots i_n}=\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}},$$

определено для всех значений независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ из n-мерной области D их изменения и для всех значений $p_{i_1 \ldots i_n}$, $\sum_{j=1}^{n} i_j=k$, $k=0,\ 1,\ 2$.

Будем считать, что уравнение (77) равномерно эллиптично, т. е. существуют постоянные k_0, k_1 одинакового знака такие, что для всех $x \in D$ и для всех значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ имеют место оценки

$$k_0 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leqslant Q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \leqslant k_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2, \tag{78}$$

где

$$Q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)=\sum \frac{\partial F}{\partial p_{i_1 \ldots i_n}} \lambda_1^{i_1}, \ldots, \lambda_n^{i_n}, \qquad \sum_{j=1}^{n} i_j=2. \tag{79}$$

Дополнительно потребуем, чтобы функция F для всех значений своих аргументов удовлетворяла условию

$$\frac{\partial F}{\partial u} \leqslant 0 \tag{80}$$

при положительной определенности формы Q $\left(\right.$при отрицательной ее определенности для всех аргументов F знак неравенства в оценке (80) повернут, т. е. $\left.\frac{\partial F}{\partial u} \geqslant 0\right)$.

Нетрудно видеть, что в этих предположениях *задача Дирихле*

$$u(x)=\varphi(x), \qquad x \in D, \tag{81}$$

в области D для уравнения (77) *не может иметь более одного решения.* Действительно, для разности $u(x)$ двух решений $u_1(x)$, $u_2(x)$ задачи (77), (81) в силу теоремы конечных приращений имеем

$$F(x, \ldots, p^1_{i_1 \ldots i_n}, \ldots) - F(x, \ldots, p^2_{i_1 \ldots i_n}, \ldots) = \\ = \sum \bar{f}_{i_1 \ldots i_n} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}},$$

где $\bar{f}_{i_1 \ldots i_n}$ — средние значения функций

$$f_{i_1 \ldots i_n} = \frac{\partial F}{\partial p_{i_1 \ldots i_n}}. \tag{82}$$

Следовательно, для $u(x)$ тождественно выполняется равенство

$$\sum \bar{f}_{i_1 \ldots i_n} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} i_j = k, \quad k = 0, 1, 2. \tag{83}$$

Повторением рассуждения пункта 4° настоящего параграфа в случае тождества (83) с учетом (78), (79), (80), (82) убеждаемся в том, что $u(x) = 0$, т. е. $u_1(x) = u_2(x)$ всюду в области D.

Заметим, что при применении выводов настоящего пункта мы должны быть внимательны. Так, например, уравнение Монжа — Ампера

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} \right)^2 = 4$$

эллиптично вдоль любого его решения, поскольку дискриминант соответствующей ему характеристической формы равен -4. Вдоль решений $u_1 = x^2 + y^2 - 1$ и $u_2 = -u_1$ эта форма имеет вид

$$Q(dx, dy) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 \tag{84}$$

и, стало быть, она положительно определена вдоль u_1 и отрицательно определена вдоль u_2. Тем не менее это уравнение в круге $x^2 + y^2 < 1$ имеет в качестве регулярных решений функции $u_1(x, y)$ и $-u_1(x, y)$, которые обращаются в нуль на окружности $x^2 + y^2 = 1$. В рассматриваемом случае *форма* (84) (как уже было отмечено) *не сохраняет знак вдоль всевозможных* $u(x, y)$.

В случае уравнения

$$\Delta u = F(x, y, u) \tag{85}$$

задачу Дирихле (74) при требовании непрерывности функции $F(x, y, u)$ относительно $(x, y) \in D \cup S$ и для всех значений u, как и в случае уравнения (66) (см. пункт 4° настоящего параграфа), можно привести к эквивалентному нелинейному интегральному уравнению

$$u(x, y) + \frac{1}{2\pi} \int_D G(x, y; \xi, \eta) F(\xi, \eta, u) \, d\xi \, d\eta = 0.$$

Если последовательные приближения определить по формулам

$$u_0(x, y) = 0,$$
$$u_n(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_D G(x, y; \xi, \eta) F(\xi, \eta, u_{n-1}) \, d\xi \, d\eta$$
$$n = 1, 2, \ldots,$$

и потребовать ограниченность $\left| \frac{\partial F}{\partial u} \right|$, то можно показать, что в случае области D достаточно малой меры предел $u(x, y)$ последовательности $\{u_n\}$ существует и он дает решение задачи (74), (85). Когда же дополнительно известно, что $\frac{\partial F}{\partial u} \geqslant 0$, то доказывается, что при требовании лишь ограниченности области D последовательность $\{u_n\}$ равномерно сходится в D и ее предел $u(x, y)$ является искомым решением этой задачи.

§ 3. Некоторые классы нелинейных уравнений в частных производных

1°. Общее представление решений одного класса квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка. Рассмотрим класс квазилинейных уравнений первого порядка вида

$$a \nabla u = 0, \tag{86}$$

где ∇ — оператор набла по переменным $x_1, \ldots, x_n$, $a(u) = [a_1(u), \ldots, a_n(u)] \neq 0$ — заданный n-мерный непрерывно дифференцируемый вектор, определенный для всех значений искомого решения $u(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Пусть $\alpha(u) = [\alpha_1(u), \ldots, \alpha_n(u)]$ — непрерывно дифференцируемый вектор, ортогональный вектору $a(u)$:

$$a(u)\, \alpha(u) = 0. \tag{87}$$

Легко видеть, что *если непрерывно дифференцируемая функция* $g(\alpha x)$ *скалярного аргумента* $\alpha x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ *удовлетворяет условию*

$$g'(\alpha x)(\alpha' x) \neq 1, \tag{88}$$

то функция $u(x)$, *определенная из тождества*

$$u - g(\alpha x) = 0, \tag{89}$$

является наиболее общим решением уравнения (86).

Действительно, в силу условия (88) существует неявная функция $u(x)$, определенная из тождества (89), причем

$$\nabla u = \frac{g'(\alpha x)\,\alpha}{1 - g'(\alpha x)(\alpha' x)}. \tag{90}$$

Подставляя выражение ∇u из (90) в левую часть (86), в силу (87) убеждаемся в справедливости сформулированного утверждения.

В частности, *общим решением уравнения*

$$a(u)\frac{\partial u}{\partial x} - b(u)\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad a^2 + b^2 \neq 0,$$

где a и b — заданные непрерывно дифференцируемые функции, является функция $u(x, y)$, *определенная из тождества*

$$u - g(ay + bx) = 0, \tag{91}$$

где $g(\eta)$, $\eta = ay + bx$, — *произвольная непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию*

$$(a'y + b'x)\,g' \neq 1.$$

На основании этого утверждения можно построить класс точных решений следующей нелинейной системы уравнений в частных производных:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x_1} u_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x_2}(u_1 u_2) + \frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x_3}(u_1 u_3) + L_1(u_1, u_2, u_3) = 0, \\
\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x_1}(u_2 u_1) + \frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x_2} u_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x_3}(u_2 u_3) + L_2(u_1, u_2, u_3) = 0, \\
\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x_1}(u_3 u_1) + \frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x_2}(u_3 u_2) + \frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x_3} u_3^2 + L_3(u_1, u_2, u_3) = 0,
\end{gathered} \tag{92}$$

где L_1, L_2, L_3 — линейные операторы второго порядка,

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3}, \\
L_2 &= \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3}, \\
L_3 &= \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3}.
\end{aligned}
\tag{93}
$$

Считая, что u_i, $i = 1, 2, 3$, являются функциями только x_i и t, будем искать решения системы (92) в виде

$$(u_1, 0, 0), \quad (0, u_2, 0), \quad (0, 0, u_3).$$

Тогда в силу (92) и (93) получаем

$$2u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial t} = c_i(x_i), \qquad i = 1, 2, 3, \tag{94}$$

где $c_i(x_i)$ — произвольные непрерывно дифференцируемые функции переменного x_i. Предполагая, что все $c_i(x_i) = 0$, мы вправе пользоваться формулой (91), в которой

$$a = 2u_i, \quad b = 1, \quad x = x_i, \quad y = t.$$

Следовательно, в качестве точных решений системы (92) могут служить $(u_1, 0, 0)$, $(0, u_2, 0)$, $(0, 0, u_3)$, где $u_i(x, t)$ — неявные функции, определенные из равенств

$$u_i = g_i(x_i + 2tu_i), \qquad i = 1, 2, 3,$$

а g_i — произвольные функции, непрерывные вместе со своими производными первого и второго порядка, удовлетворяющие условиям

$$1 - 2t \frac{dg_i}{d\eta_i} \neq 0, \quad \eta_i = x_i + 2tu_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Точными решениями системы (92) являются также выражения

$$u_1 = v_1(x_2, x_3), \quad u_2 = v_2(x_1, x_3), \quad u_3 = v_3(x_1, x_2),$$

где v_1, v_2, v_3 — произвольные гармонические функции своих аргументов. В этом непосредственно убеждаемся, если будем считать, что каждая из u_i, $i = 1, 2, 3$, не зависит от t и x_i. В этих предположениях нелинейные члены в левой части (92) отсутствуют, а операторы L_1, L_2, L_3 в (93) сводятся к оператору Лапласа соответственно по парам переменных (x_2, x_3), (x_1, x_3), (x_1, x_2).

2°. Редукция одного класса квазилинейных уравнений второго порядка к линейному уравнению. Квазилинейное уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}-b(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]+\\+\sum_{i=1}^{n} c^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+d(x,\ u)=0, \tag{95}$$

где $a^{ij}(x)$, $b(u)$, $c^i(x)$, $d(x,\ u)$ — заданнные функции, в результате подстановки

$$u=\omega(v), \tag{96}$$

где $\omega(v)$ и $v(x)$ — новые неизвестные функции, принимает вид

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\left[\omega''-b(\omega)\,\omega'^2\right]\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+\\+\omega'\left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} c^i\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)+d(x,\ \omega)=0, \tag{97}$$

где

$$\omega'=\frac{d\omega}{dv},\quad \omega''=\frac{d^2\omega}{dv^2}.$$

Выбирая $\omega(v)$ как решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\omega''-b(\omega)\,\omega'^2=0, \tag{98}$$

из (97) для определения функции $v(x)$ получаем уравнение, линейное относительно ее частных производных второго и первого порядка:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} c^i\frac{\partial v}{\partial x_i}+\frac{1}{\omega'}d\left[x,\ \omega(v)\right]=0. \tag{99}$$

Следовательно, *если функции* $\omega(v)$ *и* $v(x)$ *являются соответственно решениями уравнений* (98) *и* (99), *то определенная по формуле* (96) *функция* $u(x)$ *будет решением уравнения* (95).

Решение уравнения (98) выписывается в квадратурах:

$$v=\alpha\int_0^u \exp\left(-\int_0^\tau b(t)\,dt\right)d\tau+\beta, \tag{100}$$

где α, β — произвольные постоянные. Что же касается уравнения (99), в случае, когда

$$\frac{1}{\omega'}d[x,\ \omega(v)]=d_1(x)\,v+d_2(x),$$

оно является линейным:

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} c^i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}+d_1(x)\,v+d_2(x)=0. \tag{101}$$

По целому ряду случаев краевые, начальные и другие задачи, поставленные для уравнения (95) в зависимости от его типа, порождают по формуле (100) соответствующие задачи для линейного уравнения (101). Когда последние являются задачами, корректно поставленными для уравнения (101) и, кроме того, из равенства (100) однозначно можно определить $u(x)$ как функцию $v(x)$, то исходная задача, очевидно, будет корректно поставленной.

В качестве первого примера уравнения вида (95), поддающегося исследованию по указанному в настоящем пункте способу, рассмотрим уравнение

$$\Box u+\frac{1}{2}\,\mu^2 u\,\Box u^2=0, \tag{102}$$

где μ — действительная постоянная, $\Box$ — даламбериан,

$$\Box=\sum_{i,\,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j},$$

в четырехмерном пространстве с линейным элементом

$$ds^2=\sum_{i,\,j=1}^{n} g_{ij}(x)\,dx_i\,dx_j,$$

а $u(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ — искомая действительная функция пространственных переменных x_1, x_2, x_3 и времени $t=x_4$.

Поскольку в рассмотренном случае уравнения (98) и (101) принимают вид соответственно

$$(1+\mu^2\omega^2)\,\omega''+\mu^2\omega\omega'^2=0 \tag{103}$$

и

$$\Box v=0, \tag{104}$$

наиболее общее решение уравнения (102) в силу формулы (100) можно записать в виде

$$\varphi(u,\ v)=0, \tag{105}$$

где

$$\varphi=\omega\sqrt{1+\mu^2\omega^2}+\frac{1}{\mu}\operatorname{arcsh}\mu\omega-v, \tag{106}$$

$u=\omega(v)$ — общее решение нелинейного обыкновенного уравнения (103), а $v(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)$ — общее решение линейного уравнения (104).

Задаче Коши для уравнения (102) с любыми достаточно гладкими начальными данными

$$u(x,\ t_0)=\tau(x),\quad \left.\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}\right|_{t=t_0}=\nu(x),\quad x=(x_1,\ x_2,\ x_3), \tag{107}$$

в силу (105), (106) и (107) соответствует задача Коши для уравнения (104) с начальными данными

$$\left.\begin{aligned} &v(x,\ t_0)=\tau\sqrt{1+\mu^2\tau^2}+\frac{1}{\mu}\operatorname{arcsh}\mu\tau,\\ &\left.\frac{\partial v(x,\ t)}{\partial t}\right|_{t=t_0}=2\nu\sqrt{1+\mu^2\tau^2}.\end{aligned}\right. \tag{108}$$

Записывая уравнение (102) в виде

$$\Box u+\frac{\mu^2 u}{1+\mu^2u^2}\sum_{i,\ j=1}^{4}a^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}=0$$

и учитывая, что величины μ и u действительны, убеждаемся в том, что оно типа Коши — Ковалевской. Ссылаясь на пункт 7° § 1 настоящей главы, можно утверждать, что для решения задачи (102), (107) имеет место единственность. В конце пункта 5° § 3 главы III было отмечено, что задача Коши (104), (108), в случае гиперболичности оператора $\Box$, в предположении, что гиперплоскость $t=t_0$ не является характеристической, корректно поставлена. Исходя из этого факта и принимая во внимание то обстоятельство, что в силу (105) и (106) достаточное условие существования $u(x)$ как неявной функции $v(x)$ соблюдено:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}=2\sqrt{1+\mu^2\omega^2}\neq 0,$$

приходим к заключению *о представимости любого регулярного решения $u(x)$ уравнения* (102) *по формуле* (105). Это утверждение остается в силе и в случае эллиптичности оператора $\square$, ибо, как уже было отмечено в пункте 1° § 3 главы IV, при аналитичности коэффициентов эллиптического оператора $\square$ регулярные решения уравнения (104) являются аналитическими функциями, а в силу пункта 3° § 1 настоящей главы задача Коши (104), (108) с аналитическими данными всегда имеет, и притом единственное, решение.

3°. Некоторые другие примеры уравнений вида (95). Рассмотрим пример уравнения эллиптического типа вида (95):

$$\Delta u-u^{\delta}(\nabla u)^2=0, \tag{109}$$

где Δ — оператор Лапласа, ∇ — оператор набла, а δ — действительная постоянная, принимающая значение -1 или 0. Сперва рассмотрим случай $\delta=-1$:

$$\Delta u-\frac{1}{u}(\nabla u)^2=0. \tag{110}$$

В силу формулы (100) связь между функциями $u(x)$ и $v(x)$ дается формулой

$$u=e^{v}, \tag{111}$$

где v — произвольная, вообще говоря, комплексная гармоническая функция переменных $x_1, \ldots, x_n$.

В ограниченной области D с гладкой границей $\partial D=S$ рассмотрим задачу Дирихле

$$u(x)=f(x), \qquad x\in S, \tag{112}$$

где $f(x)$ — заданная действительная непрерывная функция.

На основании формулы (111) заключаем, что *задача* (110), (112) *всегда имеет, и притом единственное, регулярное в области D решение, знакопостоянное* (*без ограничения общности можно считать положительное*) *и непрерывное в $D\cup S$*. Если отказаться от требования знакопостоянства искомого решения $u(x)$ задачи (110), (112), *оно может оказаться не единственным*. Действительно, рассмотрим случай, когда $n=2$, область D представляет собой круг $|x|<1$, а $f(x)=1$ на окружности S: $|x|=1$. Из формулы (111) следует, что наряду с функциями $u_1(x)$ и $u_2(x)$ решением этого уравнения является и их произведение $u_1(x)u_2(x)$. Поэтому очевидно, что решением задачи (110), (112) в рассматриваемом случае является семейство функций

$$u(x)=|F(z)|^2\exp\left(-\frac{1}{\pi}\int\limits_S\frac{1-|z|^2}{|t-z|^2}\log|F(t)|\,ds\right),\quad t=e^{is},$$

где $F(z)$ — произвольная аналитическая в D функция комплексного переменного $z=x_1+ix_2$, непрерывная в $D\cup S$ и отличная от нуля на S.

Рассмотрим теперь случай $\delta=0$, т. е.

$$\Delta u-(\nabla u)^2=0. \tag{113}$$

В силу формулы (100) имеем

$$\exp[-u(x)]=v(x), \tag{114}$$

где $v(x)$ — произвольная гармоническая функция.

Из формулы (114) следует, что краевое условие (112) для решения $u(x)$ уравнения (113) порождает краевое условие

$$v(x)=\exp[-f(x)],\quad x\in S,$$

для гармонической функции $v(x)$. Отсюда на основании пункта 4° § 2 и пункта 2° § 4 главы I заключаем, что *задача* (112), (113) *всегда имеет, и притом единственное, регулярное в области D решение, непрерывное в $D\cup S$.*

Уравнение гиперболического тнпа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-u^\delta\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]=0 \tag{115}$$

также имеет вид (95).

В случае $\delta=-1$, в силу формулы (100), решения этого уравнения могут быть представлены по формуле

$$u(x_1,\ x_2)=f_1(x_1+x_2)\,f_2(x_1-x_2), \tag{116}$$

где f_1 и f_2 — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

В треугольнике $A(-1, 0)$ $B(1, 0)$ $C(0, -1)$ знакопостоянное (и на этот раз можно без ограничения общности считать положительное) решение $u(x_1, x_2)$ уравнения (115), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x_1, 0) = \tau(x_1), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = \nu(x_1), \qquad -1 \leqslant x_1 \leqslant 1, \tag{117}$$

в силу (116) дается формулой

$$u(x_1, x_2) = \sqrt{\tau(x_1+x_2)\,\tau(x_1-x_2)}\exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_{x_1-x_2}^{x_1+x_2}\frac{\nu(t)\,dt}{\tau(t)}\right),$$

причем оно единственно.

При отказе от знакопостоянства искомого решения $u(x_1, x_2)$ задачи (115), (117), когда $\delta = -1$, *как единственность этого решения, так и его существование могут не иметь места.*

Когда $\delta = 0$, в силу формулы (100) связь между функциями $u(x_1, x_2)$ и $v(x_1, x_2)$ дается формулой (114), причем на этот раз

$$v(x_1, x_2) = f_1(x_1+x_2) + f_2(x_1-x_2), \tag{118}$$

где f_1 и f_2 — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Поскольку начальные условия (117) в силу формулы (114) порождают начальные условия для $v(x_1, x_2)$:

$$v(x_1, 0) = \exp[-\tau(x_1)], \quad \left.\frac{\partial v}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = -\nu(x_1)\exp[-\tau(x_1)],$$

из формулы (118) находим

$$v(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left[e^{-\tau(x_1+x_2)} + e^{-\tau(x_1-x_2)}\right] - \\ - \frac{1}{2}\int\limits_{x_1-x_2}^{x_1+x_2}\nu(t)\exp[-\tau(t)]\,dt.$$

Отсюда на основании формулы (114) убеждаемся в том, что *задача Коши* (117) *для уравнения* (115) *при* $\delta = 0$ ***не*** *всегда имеет действительное решение.*

4°. **Построение точных решений еще одного класса квазилинейных уравнений.** В приложениях часто приходится иметь дело с *гамильтонианом*

$$H(u_1, \ldots, u_m) = \int L(u)\,dx \tag{119}$$

с *лагранжевой плотностью* вида

$$L(u)=\sum_{i,\,j=1}^{m} g^{ij}(u_1,\ \ldots,\ u_m)\,\nabla u_i\,\nabla u_j,$$

где $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ — точка n-мерного пространства, $u_1,\ \ldots$ $\ldots,\ u_m$ — искомые функции, а g^{ij} — известные функции, причем $g^{ij}=g^{ji}$, $i,\ j=1,\ \ldots,\ m$.

Уравнения Эйлера вариационной задачи для функционала (119) при $\det\|g^{ij}\|\neq 0$ представляют собой эллиптическую систему квазилинейных уравнений в частных производных второго порядка

$$\sum_{j=1}^{m}\left[g^{ij}\,\Delta u_j+\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial g^{ij}}{\partial u_l}-\frac{1}{2}\frac{\partial g^{jl}}{\partial u_i}\right)\nabla u_j\,\nabla u_l\right)=0,$$
$$i=1,\ \ldots,\ m. \tag{120}$$

Способ, указанный в пункте 1° настоящего параграфа, позволяет построить точные решения системы (120) в виде

$$u_i=\omega_i(v),\qquad i=1,\ \ldots,\ m, \tag{121}$$

где v — произвольная гармоническая функция переменных $x_1,\ \ldots,\ x_n$, а $\omega_1(v),\ \ldots,\ \omega_m(v)$ — решения системы квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{j=1}^{m}\left[g^{ij}(\omega_1,\ \ldots,\ \omega_m)\frac{d^2\omega_j}{dv^2}+\right.$$
$$\left.+\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial g^{ij}}{\partial \omega_l}-\frac{1}{2}\frac{\partial g^{jl}}{\partial \omega_i}\right)\frac{d\omega_j}{dv}\frac{d\omega_l}{dv}\right]=0, \tag{122}$$
$$i=1,\ \ldots,\ m.$$

В справедливости этого утверждения сразу убеждаемся, если учесть, что в результате замены искомых функций (121) система (120) записывается в виде

$$\sum_{j=1}^{m} g^{ij}(\omega_1,\ \ldots,\ \omega_m)\left[\frac{d^2\omega_j}{dv^2}(\nabla v)^2+\frac{d\omega_j}{dv}\Delta v\right]+$$
$$+(\nabla v)^2\sum_{j,\,l=1}^{m}\left(\frac{\partial g^{ij}}{\partial \omega_l}-\frac{1}{2}\frac{\partial g^{jl}}{\partial \omega_i}\right)\frac{d\omega_j}{dv}\frac{d\omega_l}{dv}=0,$$
$$i=1,\ \ldots,\ m.$$

5°. Система уравнений ферромагнетизма. В некоторых, весьма важных случаях система обыкновенных дифференциальных уравнений (122) легко интегрируется. Такая ситуация возникает, например, в теории ферромагнетизма при изучении ферромагнетика по модели Гейзенберга. В случае двумерного ферромагнетика $n=2$, $m=2$, и если обозначить u_1 и u_2 соответственно через $\theta(x_1, x_2)$ и $\varphi(x_1, x_2)$, то лагранжеву плотность можно задать формулой

$$L(\theta, \varphi) = (\nabla\theta)^2 + \sin^2\theta\,(\nabla\varphi)^2$$

и, стало быть, система (120) должна иметь вид

$$\Delta\theta - \sin\theta\cos\theta\,(\nabla\varphi)^2 = 0, \quad \Delta\varphi + 2\operatorname{ctg}\theta\,\nabla\theta\,\nabla\varphi = 0. \tag{123}$$

Функции θ и φ выступают в роли *географических* (*сферических*) *координат*.

Вводя для ω_1, ω_2 обозначения $\omega_1 = \theta(v)$, $\omega_2 = \varphi(v)$, на этот раз вместо (121) будем иметь

$$\theta = \theta(v), \quad \varphi = \varphi(v), \tag{124}$$

и система обыкновенных дифференциальных уравнений (122) запишется в виде

$$\theta'' - \sin\theta\cos\theta\,\varphi'^2 = 0, \quad \varphi'' + 2\operatorname{ctg}\theta\,\theta'\varphi' = 0. \tag{125}$$

Из второго уравнения системы (125) имеем

$$\varphi' = \frac{c}{\sin^2\theta}, \tag{126}$$

а из первого с учетом (126) —

$$\theta'^2 = c_1 - \frac{c^2}{\sin^2\theta}, \tag{127}$$

где c и c_1 — произвольные постоянные.

Уравнение (127) интегрируется сразу, и для $\cos\theta$ получаем

$$\cos\theta = \frac{1}{\beta}\sqrt{\beta^2 - 1}\,\sin(\mp\beta c v + c_2),$$

где c_2 — произвольная постоянная, а $c\beta = -\sqrt{c_1}$. В правой части этой формулы вместо $\mp\beta c v + c_2$ без ограничения общности можно писать βv, ибо $v(x_1, x_2)$ — произвольная гармоническая функция. Следовательно, имеем

$$\cos\theta = \frac{1}{\beta}\sqrt{\beta^2 - 1}\,\sin\beta v. \tag{128}$$

В силу (128) из (126) получаем

$$\varphi' = \frac{\beta^2}{\beta^2 \cos^2 \beta v + \sin^2 \beta v},$$

т. е.

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{\beta} \operatorname{tg} \beta v + c_3, \tag{129}$$

где c_3 — произвольная постоянная.

Формулу (128), очевидно, можно записать в виде

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \sqrt{1 + \beta^2 \operatorname{ctg}^2 \beta v}. \tag{130}$$

Таким образом, *формулы* (129), (130) *дают класс точных решений системы* (123), *содержащих произвольную постоянную* β *и произвольную гармоническую функцию* $v(x_1, x_2)$. Их можно считать, вообще говоря, комплексными. Решения (129), (130), соответствующие $\beta = 0$ и $\beta = 1$, даются формулами

$$\varphi = \operatorname{arctg} v, \quad \theta = \operatorname{arcrg} \frac{1}{i} \sqrt{1 + \frac{1}{v^2}}$$

и

$$\varphi = v + c_3, \quad \theta = (2s + 1)\frac{\pi}{2}, \qquad s = 0, \pm 1, \ldots$$

При действительном β, $\beta^2 > 1$, и действительной $v(x_1, x_2)$ формулы (129), (130) дают *действительные решения системы* (123).

Заметим, что выше при построении решений системы (123) мы исходили из требования *параллельности векторов* $\nabla\theta$ *и* $\nabla\varphi$.

Некоторые классы точных решений системы (123), отличные от (129), (130), можно построить, если допустить, что *векторы* $\nabla\theta$ *и* $\nabla\varphi$ *ортогональны.*

Если θ — гармоническая функция, то φ должна быть постоянной. Если же предположить, что $\varphi(x_1, x_2)$ — гармоническая функция, то в силу второго уравнения (123) будем иметь

$$\nabla\theta \, \nabla\varphi = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_1} = f \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial x_2} = -f \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}. \tag{131}$$

На основании (131) и гармоничности функции $\varphi(x_1, x_2)$ заключаем, что

$$\frac{\partial(\theta, f)}{\partial(x_1, x_2)} = f\,\nabla f\,\nabla\varphi = 0. \tag{132}$$

Тождественное выполнение равенства (132) означает, что между функциями θ и f существует зависимость, не содержащая явно независимых переменных x_1, x_2.

Считая, что $\theta = \theta(f)$, в силу (131) из первого уравнения (123) получаем

$$\sin\theta\cos\theta\,d\theta = f\,df,$$

т. е.

$$f = \pm\sqrt{\sin^2\theta + c_4}, \tag{133}$$

где c_4 — произвольная постоянная.

Из равенств (131) и гармоничности функции $\varphi(x_1, x_2)$ следует, что выражение

$$\frac{d\theta}{f} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\,dx_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,dx_2 \tag{134}$$

является *полным дифференциалом*.

На основании (133) и (134) заключаем, что

$$\pm\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + c_4}} = d\omega(x_1, x_2), \tag{135}$$

где функция $\omega(x_1, x_2)$ строится интегрированием полного дифференциала $\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\,dx_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,dx_2$.

Из равенства (135) в результате интегрирования имеем

$$-k\int^{\theta}\frac{dt}{\sqrt{1 - k^2\cos^2 t}} = \omega(x_1, x_2), \tag{136}$$

где

$$k = \mp\frac{1}{\sqrt{1 + c_4}}.$$

Пользуясь *функцией Якоби* sn с модулем k, из (136) получаем

$$\cos\theta = \operatorname{sn}\left[\frac{1}{k}\,\omega(x_1, x_2);\ k\right]. \tag{137}$$

Когда $\varphi(x_1, x_2) = \arg z$, $z = x_1 + ix_2$, для $\omega(x_1, x_2)$ будем иметь $\omega = \log|z|$ и из (136) получаем, что

$$\theta = 2\,\mathrm{arctg}\,|z|^k \tag{138}$$

при $c_4 = 0$ и

$$\cos\theta = \mathrm{sn}\,[\log|z|^{1/k};\ k] \tag{139}$$

при $c_4 \neq 0$.

Приняв за $\varphi(x_1, x_2)$ функцию

$$\varphi(x_1, x_2) = \arg\prod_q (z - z_q)^q, \tag{140}$$

где $z_q = x_{1q} + ix_{2q}$, $q = \pm 1, 2, \ldots,$ — произвольные фиксированные точки плоскости комплексного переменного z, вместо (138) и (139) будем иметь соответственно

$$\theta = 2\,\mathrm{acrtg}\left[\prod_q |z - z_q|^{qk}\right] \tag{141}$$

при $c_4 = 0$ и

$$\cos\theta = \mathrm{sn}\left[\log\prod_q |z - z_q|^{q/k};\ k\right] \tag{142}$$

при $c_4 \neq 0$.

6°. Одномерный случай гамильтониана (119). Когда в гамильтониане (119) число $m = 1$ и лагранжева плотность

$$L(u) = g(u)(\nabla u)^2, \qquad u = u_1,$$

вместо (120) будем иметь квазилинейное уравнение

$$\Delta u + \frac{1}{2g(u)}\frac{dg}{du}(\nabla u)^2 = 0. \tag{143}$$

Как легко видеть, решение соответствующего (122) обыкновенного дифференциального уравнения

$$\omega'' + \frac{1}{2g(\omega)}\frac{dg}{d\omega}\omega'^2 = 0$$

выписывается в квадратурах:

$$\int_0^u \sqrt{g(t)}\,dt = v, \tag{144}$$

где $v(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная гармоническая функция.

В частности, когда $g(u) = (e^u - 1)^2$, уравнение (143) принимает вид

$$\Delta u - \frac{e^u}{e^u - 1}(\nabla u)^2 = 0$$

и его решение в силу (144) дается формулой

$$u = -\log(e^v + 1).$$

7°. Варианты уравнений гравитационного поля. Система уравнений Максвелла — Эйнштейна осесимметрического стационарного гравитационного поля сводится к системе нелинейных уравнений вида (120):

$$\begin{aligned} &(\operatorname{Re} E + \Phi\bar{\Phi})\,\Delta E - (\nabla E + 2\bar{\Phi}\,\nabla\Phi)\,\nabla E = 0,\\ &(\operatorname{Re} E + \Phi\bar{\Phi})\,\Delta\Phi - (\nabla E + 2\bar{\Phi}\,\nabla\Phi)\,\nabla\Phi = 0 \end{aligned} \tag{145}$$

относительно двух неизвестных комплексных функций E и Φ.

Как и в пункте 4° настоящего параграфа, будем искать функции E и Φ в виде

$$E = E(v), \quad \Phi = \Phi(v), \tag{146}$$

где v — произвольная гармоническая функция. Тогда вместо системы обыкновенных дифференциальных уравнений (122) будем иметь

$$\begin{aligned} &(E + \bar{E} + 2\Phi\bar{\Phi})\,E'' - 2\,(E' + 2\bar{\Phi}\Phi')\,E' = 0,\\ &(E + \bar{E} + 2\Phi\bar{\Phi})\,\Phi'' - 2\,(E' + 2\bar{\Phi}\Phi')\,\Phi' = 0. \end{aligned} \tag{147}$$

Когда $\Phi = \text{const}$, система (147) сводится к одному уравнению для определения функции $E(v)$:

$$(E + \bar{E} + 2\,|c|^2)\,E'' - 2E'^2 = 0. \tag{148}$$

Непосредственной проверкой легко убедимся в том, что семейство функций

$$E = i\varepsilon\,\frac{e^v - i\alpha}{e^v + i\beta} - |c|^2,$$

где α, β, ε — произвольные действительные постоянные, является решением уравнения (148).

Пусть теперь $E = \text{const} = c + i\nu$. При $c = 0$ решением системы (147), очевидно, является

$$E = i\nu, \quad \Phi = \frac{1}{\lambda v + \mu},$$

где λ и μ — произвольные комплексные постоянные. Если же $c = \delta^2$ или $c = -\delta^2$, то системе (147) удовлетворяют соответственно выражения

$$E = \delta^2 + i\nu, \quad \Phi = \delta e^{i\omega}\,\frac{e^{iv} + \alpha}{\alpha e^{iv} - 1}$$

и

$$E = -\delta^2 + i\nu, \quad \Phi = \delta e^{i\omega} \frac{1+\beta e^{v}}{1-\beta e^{v}},$$

где α, δ, ν, ω — произвольные действительные, а β — произвольная комплексная постоянные.

Когда E и Φ обе отличны от постоянных, из (147) заключаем, что эти функции связаны между собой линейно:

$$\Phi = \varepsilon E + \mu,$$

где ε и μ — произвольные комплексные постоянные. В частности, при $\varepsilon\bar{\mu} = -1/2$ из (147) для определения функции E получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(4\varepsilon^2\bar{\varepsilon}^2 E\bar{E} + 1) E'' - 8(\varepsilon\bar{\varepsilon})^2 \bar{E} E'^2 = 0. \qquad (149)$$

Поскольку выражение

$$E = \frac{1}{2\varepsilon\bar{\varepsilon}} e^{i\omega} \frac{\alpha^{iv} + \alpha}{\alpha e^{iv} - 1}$$

при произвольных действительных постоянных α, ω и произвольной гармонической функции v удовлетворяет уравнению (149), пара функций

$$E = E(v), \quad \Phi = \varepsilon E(v) - \frac{1}{2\bar{\varepsilon}}$$

дает класс точных решений системы (145). Решением этой системы является пара функций, определенных по формулам

$$E = \frac{1}{\beta e^{v} - |\alpha|^2}, \quad \Phi = \frac{\alpha}{\beta e^{v} - |\alpha|^2},$$

где α — произвольная комплексная, а β — произвольная действительная постоянные.

В предположении, что $E = -1 + i\nu$, из (147) для определения функции Φ получаем уравнение

$$(\Phi\bar{\Phi} - 1)\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2-1)\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(1-y^2)\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right]\right\} -$$
$$- 2\bar{\Phi}\left[(x^2-1)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + (1-y^2)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2\right] = 0, \qquad (150)$$

где x, y — *вытянутые сфероидальные координаты*. Следуя приему, изложенному в пункте 4° настоящего параграфа, приходим к заключению, что функции $\Phi(v)$ и $v(x, y)$

должны удовлетворять уравнениям

$$(\Phi\bar{\Phi}-1)\Phi''-2\bar{\Phi}\Phi'^2=0 \tag{151}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2-1)\frac{\partial v}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(1-v^2)\frac{\partial v}{\partial y}\right]=0 \tag{152}$$

соответственно.

Уравнение (152) эллиптично при $(x^2-1)(1-y^2)>0$, гиперболично при $(x^2-1)(1-y^2)<0$, а на линиях $x=\pm 1$, $y=\pm 1$ оно параболически вырождается.

В областях эллиптичности в результате замены независимых переменных

$$z=\sqrt{(x^2-1)(1-y^2)}+ixy, \quad \bar{z}=\sqrt{(x^2-1)(1-y^2)}-ixy$$

уравнения (150) и (152) запишутся соответственно в виде

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial\bar{z}}+\frac{1}{2(z+\bar{z})}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}}\right)-\frac{2\bar{\Phi}}{\Phi\bar{\Phi}-1}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}}=0 \tag{153}$$

и

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial\bar{z}}+\frac{1}{2(z+\bar{z})}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial\bar{z}}\right)=0, \tag{154}$$

ибо

$$\frac{\partial}{\partial x}=\left(\sqrt{\frac{1-y^2}{x^2-1}}\,x+iy\right)\frac{\partial}{\partial z}+\left(\sqrt{\frac{1-y^2}{x^2-1}}\,x-iy\right)\frac{\partial}{\partial\bar{z}},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\left(-\sqrt{\frac{x^2-1}{1-y^2}}\,y+ix\right)\frac{\partial}{\partial z}-\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{1-y^2}}\,y+ix\right)\frac{\partial}{\partial\bar{z}},$$

$$\frac{\sqrt{(x^2-1)(1-y^2)}}{x^2-y^2}\left(x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y}\right)+$$
$$+\frac{i}{x^2-y^2}\left[x(1-y^2)\frac{\partial}{\partial y}+y(x^2-1)\frac{\partial}{\partial x}\right]=2\frac{\partial}{\partial\bar{z}},$$

$$\frac{\sqrt{(x^2-1)(1-y^2)}}{x^2-y^2}\left(x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y}\right)-$$
$$-\frac{i}{x^2-y^2}\left[x(1-y^2)\frac{\partial}{\partial y}+y(x^2-1)\frac{\partial}{\partial x}\right]=2\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\frac{1}{x^2-y^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2-1)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}(1-y^2)\frac{\partial}{\partial y}\right]=$$
$$=4\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}}+\frac{2}{z+\bar{z}}\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right),$$

$$\frac{1}{x^2-y^2}\left[(x^2-1)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+(1-y^2)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right]=4\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}}.$$

Нетрудно показать, что решением уравнения (150) является функция

$$\Phi = \frac{w-1}{w+1}, \qquad w\bar{w} \neq 1, \tag{155}$$

где w — решение линейного уравнения первого порядка

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - \frac{w+\bar{w}}{2(z+\bar{z})} = 0. \tag{156}$$

Действительно, при предположении, что $w\bar{w} \neq 1$, в результате замены искомой функции (155) уравнение (153) переходит в уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z\, \partial \bar{z}} - \frac{1}{2(z+\bar{z})}\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right) - \frac{2}{w+\bar{w}}\left[\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - \frac{w+\bar{w}}{2(z+\bar{z})}\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{157}$$

Если w — решение уравнения (156), то, дифференцируя последнее по z, получаем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z\, \partial \bar{z}} - \frac{1}{2(z+\bar{z})}\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right) = 0. \tag{158}$$

На основании (156) и (158) заключаем, что $w(z)$ удовлетворяет уравнению (157) и, стало быть, определенная по формуле (155) функция $\Phi(z)$ является решением уравнения (150).

8°. Уравнение Лиувилля. Квазилинейное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = ke^u, \qquad k = \mathrm{const}, \tag{159}$$

называется *уравнением Лиувилля.*

Из уравнения (159) и выражения

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\, \partial y} = ke^u \frac{\partial u}{\partial x},$$

полученного его дифференцированием по x, в результате исключения ke^u получаем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} - z\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \tag{160}$$

где

$$z = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{161}$$

Уравнение (160), очевидно, равносильно *уравнению Риккати*

$$\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{2}z^2=f(x), \tag{162}$$

где $f(x)$ — произвольная непрерывная функция переменного x.

Примем обозначение

$$f(x)=\frac{\varphi'''(x)}{\varphi'(x)}-\frac{3}{2}\frac{\varphi''^2(x)}{\varphi'^2(x)},$$

где $\varphi(x)$ — произвольная трижды непрерывно дифференцируемая функция (выражение $f(x)$ называется *производной Шварца* или *дифференциальным инвариантом Шварца* функции $\varphi(x)$).

Легко убеждаемся в том, что выражение

$$z(x,\ y)=\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)}-\frac{2\varphi'(x)}{\varphi(x)+\psi(y)}, \tag{163}$$

где $\psi(y)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, является решением уравнения (162).

Подставляя $z(x,\ y)$ из (163) в (161), после интегрирования получаем решение уравнения (159):

$$u(x,\ y)=\log\varphi'(x)-2\log[\varphi(x)+\psi(y)]+\log\psi'(y)+\log\frac{2}{k}$$

или

$$e^u=\frac{2}{k}\frac{\varphi'(x)\psi'(y)}{[\varphi(x)+\psi(y)]^2}. \tag{164}$$

Формула (164) впервые была получена Лиувиллем.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4ke^u,\qquad k=\text{const}. \tag{165}$$

Записывая уравнение (165) в переменных

$$z=x+iy,\quad \bar z=x-iy,\quad v(z,\ \bar z)=u\left(\frac{z+\bar z}{2},\ \frac{z-\bar z}{2}\right)$$

в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial\bar z}=ke^v,$$

на основании (164) приходим к заключению, что *его решением является функция, определенная из равенства*

$$e^u = e^v = \frac{2}{k} \frac{\varphi'(z)\overline{\varphi'(z)}}{[\varphi(z)+\overline{\varphi(z)}]^2},$$

где $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция комплексного переменного z.

9°. Синус-уравнение Гордона. В физике и технике часто приходится иметь дело с уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \sin u, \tag{166}$$

известным под названием *синус-уравнения Гордона.*

Выписать в конечном виде сколько-нибудь общее решение уравнения (166) затруднительно. Однако, если искать его решение в виде

$$u(x, y) = \varphi(\alpha x + \beta y), \qquad \alpha = \mathrm{const} \neq 0, \quad \beta = \mathrm{const} \neq 0,$$

то для определения функции φ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\varphi''(z) = \frac{1}{\alpha\beta} \sin\varphi, \qquad z = \alpha x + \beta y. \tag{167}$$

Умножая (167) на $2\varphi'$ и интегрируя, будем иметь

$$\varphi'^2 = -\frac{2}{\alpha\beta}\cos\varphi + \frac{2c}{\alpha\beta}, \tag{168}$$

где c — произвольная постоянная.

Очевидно, что решением уравнения (168) является функция $\varphi(z)$, определенная из равенства

$$\int\limits_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{c-\cos t}} = \pm\sqrt{\frac{2}{\alpha\beta}}\, z + c_1,$$

где c_1 — произвольная постоянная. В предположениях, что $c \geqslant 1$, $\alpha\beta > 0$, полученная таким образом функция $u = \varphi(\alpha x + \beta y)$ будет действительным решением уравнения (166).

10°. Задача Коши — Дирихле для одного класса нелинейных уравнений параболического типа. В приложениях часто встречаются нелинейные уравнения параболического типа вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u)(\nabla u)^2, \tag{169}$$

где t — время, Δ и ∇ — соответственно операторы Лапласа и набла по пространственным переменным $x_1, \ldots, x_n$, а $f(u)$ — заданная функция, определенная для всех значений искомого решения $u(x, t)$.

Непосредственной проверкой легко убеждаемся в том, что в результате замены искомой функции

$$u = \varphi(v), \tag{170}$$

осуществляемой посредством равенства

$$\int_{\tau_0}^{u} \exp\left(\int_{\tau_0}^{\tau} f(z)\,dz\right) d\tau = v, \qquad \tau_0 = \text{const}, \tag{171}$$

для определения новой неизвестной функции $v(x, t)$ получаем линейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v. \tag{172}$$

Поскольку структурные и качественные свойства решений уравнения (172) хорошо известны, при исследовании свойств решений уравнения (169) фундаментальную роль может сыграть равенство (171).

В общем случае задания функции $f(u)$ характер зависимости между искомыми функциями $u(x, t)$ и $v(x, t)$, связанными равенством (171), является весьма сложным. Поэтому естественно ограничиться рассмотрением конкретных примеров уравнения (169).

Будем считать, что $f(u)$ представляет собой сумму ряда Лорана

$$f(u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k u_k,$$

где a_k — известные числа.

В силу формулы (171) имеем

$$\int_{\tau_0}^{u} \tau^{a_{-1}} \prod_k \exp\left(\frac{a_k}{k+1}\tau^{k+1}\right) d\tau = v, \tag{173}$$

где $\prod$ — знак бесконечного произведения, в котором индекс k принимает все целые значения кроме -1.

Из формулы (173), в частности, видно, что краевые условия как первой краевой задачи, так и задачи Коши — Дирихле

$$u(x,\ 0) = u_0(x), \qquad x = (x_1,\ \ldots,\ x_n) \in E_n \tag{174}$$

для уравнения (169) порождают соответствующие краевые условия для решения $v(x,\ t)$ уравнения (172). Причем для обеспечения корректности постановки задачи (169), (174) функция $u_0(x)$ и числа a_k должны быть подобраны так, чтобы, например, краевое условие задачи Коши — Дирихле

$$v(x,\ 0) = \int\limits_{\tau_0}^{u_0(x)} \tau^{a_{-1}} \prod_k \exp\left(\frac{a_k}{k+1}\tau^{k+1}\right) d\tau = v_0(x),\quad x \in E_n, \tag{175}$$

для уравнения (172) не выводило из класса единственности решения последней задачи.

Если функция $v_0(x)$ удовлетворяет условию корректности задачи (172), (175), то, пользуясь n-мерным аналогом формулы (14) главы IV

$$v(x,\ t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} v_0(\xi) \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right) d\xi,$$

где

$$|x-\xi|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \xi_i)^2, \qquad d\xi = d\xi_1 \ldots d\xi_n,$$

дающем решение этой задачи, получаем искомое решение $u(x,\ t)$ задачи (169), (174) в результате обращения равенства (173).

Когда коэффициенты a_k при $k \neq -1,\ 0$ все равны нулю и $a_{-1} = m$ — целое число, то решения $u(x,\ t)$ и $v(x,\ t)$ уравнений (169) и (172) связаны между собой формулами

$$u^{m+1} = v \quad \text{при} \quad m \neq -1, \quad a_0 = 0, \tag{176}$$

и

$$\exp a_0 u = v, \qquad a_0 \neq 0, \tag{177}$$

или

$$u = \exp v \tag{178}$$

при $m=0$ или $m=-1$, $a_0=0$, соответственно. В этих случаях в классе знакопостоянных решений уравнения (169) (при $a_0=0$ без ограничения общности их, очевидно, можно считать положительными) краевое условие (175) принимает вид $v(x, 0)=v_0(x)=u_0^{m+1}(x)$ в силу (176) и $v(x, 0)=v_0(x)=\log u_0(x)$ в силу (178). Класс единственности решения задачи (169), (174) в случае (176) определяется легко. Очевидным образом устанавливается класс единственности решения этой задачи при $a_k=0$, $k<-1$, $m>1$, в равной мере, как и в случае (177), но уже без требования знакопостоянства решений. Значительно осложняется решение задачи (169), (174), когда по меньшей мере один из коэффициентов a_k с индексом $k<-1$ не равен нулю, или $a_{-1}=-1$. На примере $a_{-1}=-1$, $a_k=0$, $k\neq-1$, в силу формулы (178) приходим к заключению, что задача (169), (174) в полупространстве $t>0$ имеет бесконечное множество стремящихся к $\exp w(x, 0)$ при $t\to 0$ решений вида

$$u(x, t)=\exp w(x, t)\cdot\exp\left[\frac{c}{t^{n/2}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)\right],$$

где c — произвольная действительная постоянная, а $w(x, t)$ — произвольное решение задачи Коши — Дирихле для уравнения (172) из класса единственности.

Формулы (170), (171) позволяют строить решения уравнения (169) с различным характером асимптотики по t. Эти же формулы позволяют значительно упростить изучение структурных и качественных свойств некоторых других классов нелинейных параболических уравнений, содержащих квадрат градиента искомого решения в виде слагаемого с коэффициентом, зависящим от самого решения. Так, например, уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{u+1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+(u+1)\log^\beta(u+1)$$

в результате замены искомого решения по формуле

$$u=\exp v-1$$

переходит в уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+v^\beta.$$

Пусть теперь заданные n-мерный вектор $a=(a_1, \ldots, a_n)$ и скаляр b зависят соответственно от x и от u, а под $a\nabla u$ понимается скалярное произведение векторов a и ∇u.

Замена (170) позволяет приводить уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+f(u)(\nabla u)^2+a(x)\nabla u+b(u),$$

которое отличается от уравнения (169) двумя последними слагаемыми в правой части, к более удобному для изучения виду

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\Delta v+a(x)\nabla v+c(v),$$

где

$$c(v)=\frac{b[\varphi(v)]}{\varphi'(v)}.$$

11°. Задача Коши для уравнения (86). Будем считать, что вектор $a(u)$ в уравнении (86) задан для всевозможных значений искомого решения $u(x)$ и имеет непрерывную производную. Как уже было показано в пункте 1° настоящего параграфа, определенная по формуле (89) функция u для любого непрерывно дифференцируемого вектора $\alpha(u)=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, ортогонального вектору $a(u)$ при соблюдении условия (88), является решением уравнения (86).

В случае двух независимых переменных x, t запишем уравнение (86) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a(u)\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{179}$$

где $a(u)$ на этот раз скаляр. В силу (89) наиболее общее решение уравнения (179) дается формулой

$$u=F[x-a(u)t], \tag{180}$$

где F — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию

$$1+F'(\omega)a'(u)t\neq 0, \qquad \omega=x-a(u)t.$$

Требуя, чтобы определенная по формуле (180) функция $u(x, t)$ удовлетворяла начальному условию

$$u(x, 0)=u_0(x), \qquad -\infty<x<\infty, \tag{181}$$

получаем, что для всех значений x, $-\infty < x < \infty$,

$$F(x) = u_0(x)$$

и, стало быть,

$$u(x, t) = u_0(x - at). \tag{182}$$

Формула (182) позволяет особенно прозрачно представить себе картину нарушения единственности и появления особенностей решения задачи (179), (181). В частности, при $a(u) = u$, $u_0(x) = x$ решением задачи (179), (181) является функция $u(x, t) = \frac{x}{t+1}$ всюду на плоскости переменных x, t кроме прямой $t = -1$, вдоль которой она претерпевает разрыв.

На нарушении единственности и появлении разрывов решения задачи (179), (181) может сказаться снижение порядка гладкости функций $a(u)$ и $u_0(x)$.

Для наглядности остановимся на двух примерах.

Сперва будем считать, что $a(u) = u$, $u_0(x) = \operatorname{sgn} x$, $-\infty < x < \infty$. В силу (180) имеем $u_0(\omega) = \operatorname{sgn} \omega$. В рассматриваемом случае из обыкновенного дифференциального уравнения характеристик

$$dx - u\,dt = 0, \tag{183}$$

соответствующих уравнению с частными производными (179), следует, что через каждую точку $(x_0, 0)$ вдоль полученного решения $u(x, t)$ проходит по одной характеристической прямой $x + t = x_0$ при $x_0 < 0$ и $x - t = x_0$ при $x_0 > 0$. Прямые $x + t = 0$, $x - t = 0$ любую окрестность D точки $(0, 0)$ делят на четыре части, для которых примем обозначения $D^{\operatorname{sgn}(t+x)}_{\operatorname{sgn}(t-x)}$. Очевидно, что в D^{+}_{-} и D^{-}_{+} имеется по одному решению $u(x, t) = 1$ и $u(x, t) = -1$, в D^{+}_{+} решения не существуют, а в D^{-}_{-} имеются два решения: $u_1(x, t) = 1$, $u_2(x, t) = -1$.

Пусть теперь $a(u) = u$, $u_0(x) = x \operatorname{sgn} x$, $-\infty < x < \infty$. Поскольку в силу (182) $u_0(\omega) = \omega \operatorname{sgn} \omega$, то

$$u_1(x, t) = x - u_1(x, t)\,t, \quad u_2(x, t) = -x + u_2(x, t)\,t$$

или

$$u_1(x, t) = \frac{x}{t+1}, \quad u_2(x, t) = \frac{x}{t-1}. \tag{184}$$

Подставляя полученные выражения (184) в левую часть уравнения (183) вместо $u(x, t)$, убеждаемся в том, что решениям $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ соответствуют характеристические прямые $x = c(t+1)$, $x = c(t-1)$, $c = \text{const} > 0$. Следовательно, в полосе D между прямыми $t = 1$, $t = -1$ имеем непрерывную функцию

$$u(x, t) = \begin{cases} \dfrac{x}{t+1}, & x \geqslant 0, \\ \dfrac{x}{t-1}, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

удовлетворяющую условию $u(x, 0) = x \operatorname{sgn} x$ и являющуюся решением уравнения (179) как внутри правой полуполосы $x > 0$, так и внутри левой полуполосы $x < 0$. Через каждую точку правой части D_1, $x > 0$ полуплоскости над прямой $t = 1$ и левой части D_2, $x < 0$ полуплоскости под прямой $t = -1$ проходит по одной прямой из обоих семейств характеристических прямых $x = c(t+1)$, $x = c(t-1)$. Ни одна из указанных прямых не проходит в левую часть D_3 полуплоскости над прямой $t = 1$ и в правую часть D_4 полуплоскости под прямой $t = -1$. Таким образом, в областях D_1 и D_2 имеем по два решения уравнения (179), принесенных из D указанными характеристическими прямыми, в то время как в D_3 и D_4 решение из D не распространяется.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ