С. К. Годунов

# УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов физико-математических специальностей университетов*

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1979

22.161.6
Г 59
УДК 517

**Уравнения математической физики.** Годунов С. К. Изд. 2-е, исправл. и дополн. Наука, Главная редакция физико-математической литературы. — М., 1979, 392 с.

Книга содержит изложение курса лекций, которые автор читал в Московском и Новосибирском университетах. Направленность книги связана с интересами автора в области приложений дифференциальных уравнений к механике сплошных сред и с разработками численных методов решения этих уравнений.

Во втором издании (1-е издание выходило в 1971 г.) основной переработке подверглась теория симметрических гиперболических систем. В частности, изложена теорема существования решений у диссипативной смешанной задачи в случае двух пространственных и одной временной переменных.

Книга представляет интерес как для студентов, изучающих курс уравнений математической физики, так и для лиц, специализирующихся в области приложений уравнений в частных производных и численных методов их решения.

Илл. 71. Библ. 12.

Г $\frac{20203-038}{053(02)-79}$ 5-79. 1702050000

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1979, с изменениями.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга написана по курсу уравнений математической физики, многократно читавшемуся в Московском и Новосибирском университетах.

Первое ее издание [1] выходило в 1972 году. При переработке изложения для второго издания я старался более подробно осветить смешанную задачу для симметрических гиперболических систем в многомерном случае. Этот вопрос, как мне кажется, удалось разобрать весьма элементарно, хотя и несколько громоздко. Чтобы облегчить читателю изучение, мелким шрифтом выделено изложение технических подробностей в доказательствах, которое при первом чтении может быть пропущено без ущерба для усвоения основной идеи.

Кроме того, я исключил главу о разностных схемах, так как в настоящее время относящиеся к этой теме вопросы подробно изучаются в соответствующих курсах.

*С. Годунов*

*Глава I*

# ВВОДНАЯ ЧАСТЬ

## § 1. Ньютоновский потенциал

Несколько предварительных замечаний о характере уравнений, которые будут изучаться в курсе. Исторические замечания о работах Лапласа, приведших его к уравнению для потенциала тяготения. Потенциал непрерывного распределения масс (или зарядов). Его непрерывность и непрерывная дифференцируемость. Потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона. Убывание потенциала на бесконечности.

Курс уравнений с частными производными существенно отличается от курса обыкновенных дифференциальных уравнений тем, что в этом курсе будут изучаться далеко не все уравнения, которые можно выписать, используя значки $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial t}$, ... ..., $\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial t^2}$ и т. п. Мы ограничимся только совсем немногочисленными конкретными примерами уравнений и систем:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t}+\rho_0 c_0^2\dfrac{\partial u}{\partial x}=0. \end{cases}$$

Иногда будут рассматриваться также некоторые не слишком широкие их обобщения.

Как правило, примеры, на изучении которых мы будем останавливаться, возникают в задачах математической физики, чаще всего — в области механики сплошных сред. Именно этим и объясняется название курса «Уравнения математической физики».

Не надо думать, что изучаемые нами примеры случайны с точки зрения математической теории. Изучение уравнений математической физики привело к тому, что появилась классификация постановок задач, согласно которой выбранные нами уравнения и системы являются типичными представителями наиболее важных классов. Оказалось, что для уравнений, отличающихся друг от друга на первый взгляд совсем несущественно, естественными будут совсем разные задачи. В качестве примера укажем на уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

так похожие по записи, но принципиально отличные по свойствам.

Во вводной части курса мы рассмотрим примеры некоторых важных задач, для которых решения удается выписать с помощью явных формул. При этом мы, во-первых, приобретем некоторую ориентировку в вопросах, которые будем потом изучать, а, во-вторых, заготовим элементы аппарата, нужного нам для построения теории.

Первым уравнением, на котором мы остановимся, будет так называемое *уравнение Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

и, чуть-чуть более общее, *уравнение Пуассона*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,\ y,\ z).$$

Я сейчас расскажу, как в математической физике появилось уравнение Лапласа. Его появление на свет вызвано совсем нетривиальным ходом развития естественнонаучных идей. Неожиданный поворот мыслей Лапласа предопределил, как мне кажется, ряд важных соображений, следствием которых явились уравнения Максвелла для электромагнитного поля и, в настоящее время, уравнения полей, связанных с элементарными частицами.

Как известно, Кеплер, обрабатывая наблюдения Тихо Браге над движением планет, установил следующие три удивительных закона:

1. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

2. Радиус-вектор от Солнца до планеты заметает равные площади в равные интервалы времени.

3. Квадраты времен обращения двух планет пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.

Законы эти, хотя и красивые, но довольно сложные. В дальнейшем Ньютон нашел для этих законов более простое, хотя и не менее удивительное, выражение, называемое законом всемирного тяготения:

«Между любыми двумя телами действует сила притяжения, прямо пропорциональная их массам и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними».

Законы Кеплера, закон Ньютона и связь между ними подробно изучаются в курсе механики. Поэтому я ограничиваюсь только беглым напоминанием.

Вместо силы, притягивающей тело единичной массы к другому телу, можно рассмотреть потенциал этой силы:

$$u=\gamma\frac{M}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}.$$

Здесь $\gamma$ — некоторая постоянная, $x_0$, $y_0$, $z_0$ — координаты притягивающего тела, $M$ — его масса. Чтобы вычислить компоненты $F_x$, $F_y$, $F_z$ силы тяготения, действующей на тело единичной массы, расположенное в точке с координатами $x$, $y$, $z$, надо положить

$$F_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad F_y=\frac{\partial u}{\partial y},\quad F_z=\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Поле потенциала $u$ полностью определяет векторное поле $\{F_x, F_y, F_z\}$.

В случае, если притягивающих тел несколько (тело массы $M_i$ располагается в точке $(x_i, y_i, z_i)$), то силу можно вычислять по тем же формулам, если взять в качестве потенциала функцию

$$u=\gamma\sum_i\frac{M_i}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}}.$$

Лаплас предложил пользоваться при изучении тяготения не самой функцией $u$, а тем дифференциальным уравнением, которому эта функция удовлетворяет. Это уравнение может быть получено следующим образом.

Рассмотрим сначала только одно слагаемое в формуле для функции $u$,

$$u_i=\gamma\frac{M_i}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}}$$

и вычислим его производные. Для упрощения записи обозначим расстояние между точками $(x, y, z)$ и $(x_i, y_i, z_i)$ посредством $r = \sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}$ и заметим, что

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x-x_i}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}}=\frac{x-x_i}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y-y_i}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z-z_i}{r}.$$

Таким образом, производные

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}=-\gamma M_i\frac{x-x_i}{r^3},\quad \frac{\partial u_i}{\partial y}=-\gamma M_i\frac{y-y_i}{r^3},\quad \frac{\partial u_i}{\partial z}=-\gamma M_i\frac{z-z_i}{r^3}.$$

Продифференцируем их еще раз:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}=\gamma M_i\left[-\frac{1}{r^3}+3\frac{(x-x_i)^2}{r^5}\right],$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}=\gamma M_i\left[-\frac{1}{r^3}+3\frac{(y-y_i)^2}{r^5}\right],$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2}=\gamma M_i\left[-\frac{1}{r^3}+3\frac{(z-z_i)^2}{r^5}\right].$$

Складывая эти три частные производные, получаем

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2}=0.$$

Очевидно, что отсюда и из того, что $u=\sum\limits_i u_i$, вытекает равенство

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

которое и называется уравнением Лапласа. Таким образом, Лаплас предложил отказаться от явной формулы для сил дальнодействия и заменить ее на дифференциальное уравнение для поля потенциала $u$. Можно считать, что дифференциальное уравнение описывает взаимодействие между соседними элементами поля $u$. Лапласу мы обязаны идеей введения уравнений для описания этого поля $u$, уравнений, которые действуют всюду вне тех точек, в которых сосредоточены сами притягивающие массы. (В точках $x=x_i$, $y=y_i$, $z=z_i$ мы не можем вычислять производные по приведенным выше формулам.)

В дальнейшем нам придется иметь дело не с потенциалом точечных масс, а с полем тяготения, вызванным массой, распределенной по некоторому объему. Остановимся на таком объемном распределении масс с плотностью $\rho=\rho(a, b, c)$ в точке $x=a$, $y=b$, $z=c$. Пусть $\rho(a, b, c)=0$ для всех точек, лежащих вне некоторого шара, то есть при $a^2+b^2+c^2>R^2$. Разобьем этот шар на элементарные объемы со сторонами $\Delta a$, $\Delta b$, $\Delta c$, в каждом из которых сосредоточена масса

$$\rho(a, b, c)\,\Delta a\,\Delta b\,\Delta c.$$

Возбуждаемый этой массой потенциал силы тяготения принимает в точке $(x, y, z)$ значение

$$\gamma\cdot\frac{\rho(a, b, c)\,\Delta a\,\Delta b\,\Delta c}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c^2)}}.$$

Суммарный потенциал $u$, учитывающий все элементарные объемы, будет равен

$$\gamma\sum_{a, b, c}\frac{\rho(a, b, c)\,\Delta a\,\Delta b\,\Delta c}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}.$$

Формально переходя к пределу при неограниченном измельчении шара $a^2+b^2+c^2 \leqslant R^2$, мы получаем представление потенциала в виде следующего интеграла:

$$u = \iiint\limits_{a^2+b^2+c^2 \leqslant R^2} \frac{\rho(a, b, c)\, da\, db\, dc}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

который носит название *объемного* или *ньютоновского потенциала*. Постоянную $\gamma$ мы, начиная с этой формулы, опускаем.

Нетрудно, хотя и несколько громоздко, показывается, что если $\rho(a, b, c)$ имеет непрерывные первые производные, то потенциал $u(x, y, z)$ удовлетворяет так называемому уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -4\pi\rho(x, y, z). \tag{1}$$

Вне притягивающих масс, то есть там, где $\rho = 0$, это уравнение совпадает с уравнением Лапласа.

Доказательство равенства (1) будет дано ниже, а сейчас заметим, что в задачах, связанных с законом всемирного тяготения, плотность $\rho(a, b, c)$ не может принимать отрицательных значений. Однако, как известно, есть еще одна область физики, в которой сила взаимодействия так же, как и в теории тяготения, описывается законом

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Это — электростатика, а $m_1$, $m_2$ — заряды двух материальных точек. В электростатике для обозначения зарядов обычно применяются буквы $e_1$, $e_2$, а не $m_1$, $m_2$. Роль постоянной тяготения $\gamma$ выполняет $\varepsilon^{-1}$, где $\varepsilon$ — диэлектрическая постоянная.

В электростатике зарядам нужно приписывать знак — заряды одного знака отталкиваются, а разного знака — притягиваются. С законом электростатического взаимодействия — законом Кулона — связан электростатический потенциал, отличающийся от потенциала гравитационного только тем, что плотность $\rho(a, b, c)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения (здесь это не плотность массы, а плотность заряда).

Приступим к аккуратному доказательству справедливости уравнения Пуассона (1). Выражение для потенциала $u(x, y, z)$ удобнее записать в виде

$$u(x, y, z) = \iiint \frac{\rho(a, b, c)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}\, da\, db\, dc,$$

где интегрирование распространено по всему пространству. (Не надо забывать, что $\rho(a, b, c)=0$, если $a^2+b^2+c^2 \geqslant R^2$.) После замены переменных интегрирования: $a-x=\xi$, $b-y=\eta$, $c-z=\zeta$ получим следующее представление для потенциала:

$$u(x, y, z) = \iiint \frac{\rho(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

До некоторых пор нас будут интересовать только $x$, $y$, $z$, лежащие в конечной части пространства $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$. Так как $\rho(x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta)=0$ при $(x+\xi)^2+(y+\xi)^2+(z+\zeta)^2 \geqslant R^2$, то можно ограничить область интегрирования шаром $D$ $\{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \leqslant (R+R)^2=4R^2=L^2\}$ и записать

$$u(x,\ y,\ z)=\iiint\limits_D \frac{\rho(x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}\,d\xi\,d\eta\,d\varepsilon. \qquad (2)$$

(Интеграл (2) является несобственным, так как подынтегральная функция имеет особенность в начале координат. Этот интеграл сходится равномерно относительно параметров $x$, $y$, $z$ ввиду того, что подынтегральная функция имеет интегрируемую мажоранту $\rho^*/\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$, $\rho^*=\max|\rho|$. Действительно,

$$\iiint\limits_D \frac{\rho^*\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}=4\pi\rho^*\int\limits_0^L \frac{r^2\,dr}{r}=4\pi\rho^*\,\frac{L^2}{2}.)$$

Интегралы, полученные формальным дифференцированием интеграла (2) по параметрам $x$, $y$ и $z$, также равномерно сходятся; следовательно, по известному правилу

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\iiint\limits_D \frac{\dfrac{\partial}{\partial x}[\rho(x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta)]}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=$$

$$=\iiint\limits_D \frac{\dfrac{\partial}{\partial \xi}[\rho(x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta)]}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

К последнему интегралу применим формулу интегрирования по частям, заметив, что

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial \xi}[\rho(x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta)]}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}=\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\rho(x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}\right]+$$

$$+\frac{\xi\cdot\rho(x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta)}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{3/2}},$$

и учитывая равенство нулю функции $\rho(x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta)$ на сфере $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=L^2$. В результате получим

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\iiint\limits_D \frac{\xi\cdot\rho(x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta)}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{3/2}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta. \qquad (3)$$

Интегрирование по частям законно, так как интеграл (3) сходится. Более того, этот интеграл сходится равномерно относительно параметров $x$, $y$, $z$, так как подынтегральная функция обладает интегрируемой мажорантой $\max|\rho|/(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)$. Действительно,

$$\iiint\limits_D \frac{\rho^*\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}=4\pi\rho^*\int\limits_0^L \frac{r^2\,dr}{r^2}=4\pi\rho^* L.$$

Производные от подынтегральной функции по $x$, $y$ или $z$ также обладают интегрируемой мажорантой. Следовательно, вторые производные функции $u$

можно получить, дифференцируя правую часть равенства (3) под знаком интеграла.

Итак,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\iiint\limits_D \frac{\xi}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{3/2}}\rho_x(x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=$$
$$=\iiint\limits_D \frac{\xi}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial\xi}[\rho(x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta)]\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

и аналогично

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\iiint\limits_D \frac{\eta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial\eta}[\rho(x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta)]\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\iiint\limits_D \frac{\zeta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial\zeta}[\rho(x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta)]\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Складывая почленно полученные равенства, можем записать

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=$$
$$=\iiint\limits_D \frac{\left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial}{\partial\zeta}+\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)[\rho(x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta)]}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{3/2}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta. \qquad (4)$$

Для вычисления интеграла в правой части удобно записать его в виде повторного интеграла $\int\limits_0^L\left\{\iint\limits_{S_r}\ldots dS_r\right\}dr$, где $S_r$ — сфера радиуса $r$ с центром в начале координат, а $dS_r$ — элемент площади этой сферы. Заметим, далее, что производная по радиусу $\frac{\partial\rho}{\partial r}$ равна скалярному произведению градиента функции $\rho$, т. е. вектора $\left\{\frac{\partial\rho}{\partial\xi},\ \frac{\partial\rho}{\partial\eta},\ \frac{\partial\rho}{\partial\zeta}\right\}$ и единичного вектора, направленного по радиусу, т. е. вектора $\{\xi/r,\ \eta/r,\ \zeta/r\}$ $\left(r=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right)$. Следовательно,

$$\xi\frac{\partial\rho}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial\rho}{\partial\eta}+\zeta\frac{\partial\rho}{\partial\zeta}=r\frac{\partial\rho}{\partial r},$$

и равенство (4) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\int\limits_0^L\left\{\iint\limits_{S_r}\frac{\frac{\partial}{\partial r}[\rho(x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta)]}{r^2}\,dS_r\right\}dr.$$

Так как элемент площади $dS_r=r^2\,d\Omega$, где $d\Omega$ — элемент площади единичной сферы $\Omega$, или элемент телесного угла, то

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\int_0^L\left\{\iint_\Omega \frac{\partial\rho(x+\xi_0 r,\ y+\eta_0 r,\ z+\zeta_0 r)}{\partial r}\,d\Omega\right\}dr=$$

$$=\iint_\Omega\left\{\int_0^L \frac{\partial\rho(x+\xi_0 r,\ y+\eta_0 r,\ z+\zeta_0 r)}{\partial r}\,dr\right\}d\Omega=$$

$$=\iint_\Omega [\rho(x+\xi_0 L\ \ y+\eta_0 L,\ z+\zeta_0 L)-\rho(x+\xi_0 0,\ y+\eta_0 0,\ z+\zeta_0 0)]\,d\Omega=$$

$$=-\iint_\Omega \rho(x,\ y,\ z)\,d\Omega=-4\pi\rho(x,\ y,\ z).$$

Равенство (1) доказано для любого шара $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$, а следовательно, для любых $x$, $y$, $z$.

В заключение этого параграфа докажем еще, что ньютоновский потенциал стремится к нулю при $(x^2+y^2+z^2)\to\infty$. Более точно, мы докажем равенство

$$\lim_{x^2+y^2+z^2\to\infty}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,u(x,\ y,\ z)=\iiint\rho(a,\ b,\ c)\,da\,db\,dc.$$

Запишем ньютоновский потенциал в виде

$$u(Q)=\iiint_D \frac{\rho(P)}{r(P\ \ Q)}\,dV,\quad D\{r(P,\ O)\leqslant R\},$$

где $Q$ — точка с координатами $x$, $y$, $z$, $P$ — точка с координатами $a$, $b$, $c$, $dV=da\,db\,dc$, $r(P,\ Q)$ — расстояние между точками $P$ и $Q$. Пусть $O$ — начало координат и $r(O,\ Q)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Тогда

$$r(O,\ Q)\,u(Q)=\iiint_D \frac{\rho(P)}{1-\dfrac{r(O,\ Q)-r(P,\ Q)}{r(O,\ Q)}}\,dV.$$

Так как

$$|r(O,\ Q)-r(P,\ Q)|\leqslant r(O,\ P)\leqslant R,$$

то

$$r(O,\ Q)\,u(Q)=\iiint_D \rho(P)\,dV+O\left(\frac{1}{r(O,\ Q)}\right),$$

$$\lim_{Q\to\infty} r(O,\ Q)\,u(Q)=\iiint_D \rho(P)\,dV.$$

Подведем итог. Нами показано, что ньютоновский потенциал при непрерывно дифференцируемой плотности, отличной от нуля лишь внутри некоторой сферы, является решением уравнения Пуассона, которое стремится к нулю на бесконечности.

В следующем параграфе мы покажем, что этими условиями он определяется однозначно. С этой точки зрения предложение

Лапласа заменить изучение интегралов изучением дифференциального уравнения, которому эти интегралы удовлетворяют, логически оправдано.

При проверке уравнения Пуассона мы предполагали, что плотность $\rho(a, b, c)$ непрерывно дифференцируема во всех точках пространства. В действительности существенна лишь локальная гладкость плотности в окрестности той точки, где проверяется выполнение уравнения Пуассона.

Задача. Пусть плотность $\rho(a, b, c)$ равна нулю вне некоторого шара и имеет непрерывные первые производные в окрестности точки $(a_0, b_0, c_0)$. Тогда в окрестности этой точки ньютоновский потенциал с плотностью $\rho$ удовлетворяет уравнению Пуассона (1). Отсюда, в частности, вытекает, что ньютоновский потенциал конечного тела постоянной плотности $\rho_0$ удовлетворяет внутри этого тела уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-4\pi\rho_0$, а вне тела — уравнению Лапласа.

## § 2. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге

Принцип максимума для гармонических функций и теорема единственности для убывающего на бесконечности ньютоновского потенциала. Понятие о логарифмическом потенциале на плоскости. Аналитические и гармонические функции двух переменных. Некоторые специальные решения уравнения Лапласа и эвристический вывод формулы Пуассона для определения гармонической в круге функции по ее граничным значениям. Различные варианты записи этой формулы и некоторые свойства ядра. Обоснование формулы Пуассона для решения уравнения Лапласа. Постановка задачи и теорема единственности решения задачи Дирихле. Существование решения вытекает из обоснования формулы Пуассона.

Докажем одно важное свойство решений уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$, которые называются *гармоническими функциями*.

Теорема о максимуме и минимуме (принцип максимума). *Гармоническая функция $u(x, y, z)$, непрерывная на некоторой замкнутой ограниченной области $\bar{G}=G\cup\Gamma$ и имеющая внутри этой области первые и вторые производные, не может внутри этой области принимать значения бо́льшие, чем максимум ее значений на границе $\Gamma$, и меньшие, чем минимум ее значений на $\Gamma$.*

Обозначим через $m$ максимум значений $u(x, y, z)$ на $\Gamma$ и предположим, что максимальное значение $u$ равно $u(x_0, y_0, z_0)= =M>m$. (Точка $(x_0, y_0, z_0)$ предполагается лежащей внутри $G$.) Составим вспомогательную функцию

$$v=u(x, y, z)+\frac{M-m}{2d^2}\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right],$$

где $d$ — диаметр области $G$. Из неравенства

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leqslant d^2$$

вытекает, что на Г

$$v(x, y, z) \leqslant m + \frac{M-m}{2d^2} d^2 = \frac{M+m}{2} < M.$$

В то же время

$$v(x_0, y_0, z_0) = u(x_0, y_0, z_0) = M.$$

Отсюда следует, что максимум $v(x, y, z)$ внутри $G$ не меньше, чем $M$, а следовательно, больше, чем максимум $v$ на Г. Этот максимум достигается, очевидно, в некоторой внутренней точке $(x, y, z)$ области $G$.

В точке максимума, как известно,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leqslant 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leqslant 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \leqslant 0,$$

а следовательно,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \leqslant 0.$$

Однако

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{M-m}{2d^2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\} \times$$
$$\times [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2] = 0 + \frac{M-m}{2d^2}[2+2+2] > 0.$$

Полученное противоречие показывает абсурдность предположения, что $M > m$. Итак, мы доказали, что внутри $G$

$$u(x, y, z) \leqslant \max u|_{\Gamma}.$$

Для доказательства неравенства, ограничивающего $u(x, y, z)$ снизу,

$$u(x, y, z) \geqslant \min u|_{\Gamma}$$

достаточно применить уже полученный результат к функции $-u(x, y, z)$, очевидно, тоже являющейся гармонической.

Теорема о максимуме и минимуме доказана. В дальнейшем мы будем часто пользоваться теоремой о максимуме и минимуме для двумерных решений уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

Такие решения тоже называются *гармоническими функциями*.

Доказательство принципа максимума в двумерном случае полностью аналогично доказательству, приведенному выше.

Докажем теперь, что ньютоновский потенциал — единственное решение уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -4\pi\rho(x, y, z),$$

стремящееся к нулю на бесконечности.

Действительно, если $u_1(x, y, z)$ и $u_2(x, y, z)$ — два решения этого уравнения, стремящиеся к нулю при $x^2+y^2+z^2 \to \infty$, то их разность также стремится к нулю и удовлетворяет однородному уравнению — уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad (u=u_1-u_2).$$

Теперь достаточно применить принцип максимума к функции $u$ в шаре радиуса $R$ с центром в начале координат. Получаем, что

$$|u(x_0, y_0, z_0)| \leqslant \max_{x^2+y^2+z^2=R^2} |u(x, y, z)|$$

для любой точки $(x_0, y_0, z_0)$, лежащей внутри шара. Фиксировав точку $(x_0, y_0, z_0)$ и устремляя $R$ к бесконечности, приходим к равенству $u(x_0, y_0, z_0)=0$.

В нашем курсе мы будем изучать уравнение Лапласа только в двумерном случае. Гармонические функции двух независимых переменных встречаются в теории функций комплексного переменного. Известно, что аналитическая функция $u+iv$ от $x+iy$ удовлетворяет уравнениям Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

Из этих уравнений вытекает, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0.$$

Закономерность этих выкладок обосновывается тем, что $u+iv$, как известно, является бесконечно дифференцируемой функцией от $x+iy$, откуда с помощью уравнений Коши — Римана нетрудно обосновать существование и непрерывность вторых производных от $u$, $v$.

В частности, из того, что

$$\operatorname{Ln}(x+iy)=\ln\sqrt{x^2+y^2}+i\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}$$

является аналитической функцией при $x^2+y^2>0$, следует гармоничность функций

$$\ln\sqrt{x^2+y^2}=-\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \operatorname{Arctg}\frac{y}{x}.$$

Первая из этих функций играет в двумерном случае роль, аналогичную функции $1/\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ в трехмерном случае. А именно: функция

$$u(x, y) = \iint \rho(a, b) \ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\, da\, db,$$

называемая *логарифмическим потенциалом*, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\pi\rho(x, y),$$

если $\rho(a, b)$ — гладкая функция, отличная от нуля только в конечной области.

Доказательство мы проводить не будем. Отметим только, что оно аналогично разобранному нами трехмерному варианту исследования ньютоновского потенциала. Правда, логарифмический потенциал, распределенный в конечной двумерной области, уже не будет стремиться к нулю при $x^2+y^2 \to \infty$, так как $\ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$ при этом растет. Но это отличие несущественно для доказательства сформулированного факта.

Задача. Покажите, что функция $\ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$ может быть получена из решения трехмерного уравнения Лапласа $1/\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$ при помощи следующей процедуры:

$$\ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2-(y-b)^2}} = \lim_{L\to\infty} \left( \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \frac{dc}{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} - \ln 2L \right).$$

Выражение, стоящее в скобках правой части, является потенциалом одномерного распределения зарядов вдоль отрезка оси $z$ длиной $2L$. Так как потенциал силового поля определен с точностью до постоянного слагаемого, то мы вольны выбирать его произвольно. Вычитание большой постоянной $\ln 2L$ перед переходом к пределу обеспечивает конечность этого предела.

Вторая из этих функций $\operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$ понадобится нам для решения следующей задачи: восстановить гармоническую функцию в круге $x^2+y^2 \leqslant R^2$ по ее значениям на границе круга. Решение такой задачи дается формулой Пуассона

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{R^2-x^2-y^2}{R^2-2R(x\cos\theta+y\sin\theta)+x^2+y^2}\, d\theta,$$

которая читателям должна быть известна из курса теории функций комплексного переменного. В этой формуле $u(x, y)$ — интересующая нас гармоническая функция, непрерывная в замкнутом круге, а $f(\theta) = u(R\cos\theta, R\sin\theta)$ задает ее граничные значения. Мы приведем сейчас для полноты изложения еще один вывод формулы Пуассона, не слишком короткий, но, как кажется автору, очень наглядный.

Функция

$$\varphi(x,\ y) = \operatorname{Arctg}\frac{y-y_2}{x-x_2} - \operatorname{Arctg}\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

является гармонической. Она представляет собой угол, под которым виден из точки $(x,\ y)$ отрезок, соединяющий $(x_1,\ y_1)$ с $(x_2,\ y_2)$. Из элементарной геометрии известно, что $\varphi(x,\ y)$ постоянна вдоль окружностей, проходящих через концы этого отрезка. Такие окружности являются линиями уровня $\varphi(x,\ y)$. Они изображены на рис. 1.

Положим, теперь $x_1 = R\cos\theta_1$, $y_1 = R\sin\theta_1$, $x_2 = R\cos\theta_2$, $y_2 = R\sin\theta_2$, где $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant 2\pi$, и рассмотрим как ведет себя гармоническая функция

$$\varphi(x,\ y,\ \theta_1,\ \theta_2) = \operatorname{Arctg}\frac{y-R\sin\theta_2}{x-R\cos\theta_2} - \operatorname{Arctg}\frac{y-R\sin\theta_1}{x-R\cos\theta_1}$$

внутри круга $D\,\{x^2+y^2 \leqslant R^2\}$ и на его границе. Ветви Arctg выберем так, чтобы внутри круга $\varphi(x,\ y,\ \theta_1,\ \theta_2)$ равнялась углу между лучами $PA$ и $PB$,

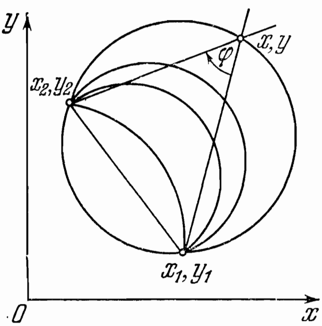


Рис. 1.

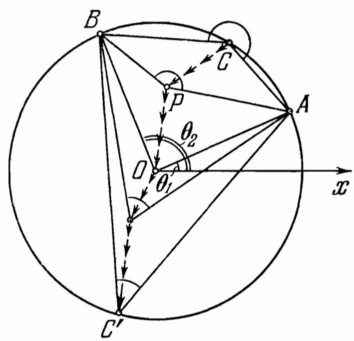


Рис. 2.

где $P$ — точка $(x,\ y)$, $A$ — точка $(R\cos\theta_1,\ R\sin\theta_1)$ и $B$ — точка $(R\cos\theta_2,\ R\sin\theta_2)$. В частности, в центре круга

$$\varphi(0,\ 0,\ \theta_1,\ \theta_2) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{-R\sin\theta_2}{-R\cos\theta_2}\right) - \operatorname{Arctg}\left(\frac{-R\sin\theta_1}{-R - \theta_1}\right) = \theta_2 - \theta_1.$$

Теперь давайте перемещать точку $(x,\ y)$ внутри круга. Из рис. 2 видно, как будет деформироваться угол $\varphi(x,\ y,\ \theta_1,\ \theta_2)$ при перемещении точки $P(x,\ y)$. На дуге $AC'B$ он равен $\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}$, на дуге $ACB$ этот угол равен $\pi + \dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}$. Рассмотрим функцию

$$w(x,\ y,\ \theta_1,\ \theta_2) = \frac{1}{\pi}\left[\varphi(x,\ y,\ \theta_1,\ \theta_2) - \frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right] =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{Arctg}\frac{y-R\sin\theta_2}{x-R\cos\theta_2} - \frac{\theta_2}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{Arctg}\frac{y-R\sin\theta_1}{x-R\cos\theta_1} - \frac{\theta_1}{2}\right),$$

которая, очевидно, тоже является гармонической функцией от $x$, $y$. (Прибавление константы и умножение на постоянное число не нарушают гармоничности.) После всего сказанного ясно, что на дуге $ACB$ функция $w(x,\ y,\ \theta_1,\ \theta_2) = 1$, а на дуге $AC'B$ $w(x,\ y,\ \theta_1,\ \theta_2) = 0$.

С помощью функции $w(x,\ y,\ \theta_1,\ \theta_2)$ нетрудно придумать формулу, которая позволяет восстановить гармоническую функцию по ее значениям на окружности

$x^2+y^2=R^2$. Сначала мы дадим нестрогий вывод, а затем приведем полное обоснование.

Разобьем всю окружность точками $x_i=R\cos\theta_i$, $y_i=R\sin\theta_i$ на достаточно мелкие части, а на каждой из этих частей выберем точку $x_{i+\frac{1}{2}}=R\cos\theta_{i+\frac{1}{2}}$; $y_{i+\frac{1}{2}}=R\sin\theta_{i+\frac{1}{2}}\left(\theta_i<\theta_{i+\frac{1}{2}}<\theta_{i+1}\right)$. Рассмотрим на окружности непрерывную функцию $f(\theta)$. Ясно, что

$$f\left(\theta_{i+\frac{1}{2}}\right)\omega(x,\ y,\ \theta_i,\ \theta_{i+1})$$

принимает на дуге $(\theta_i,\ \theta_{i+1})$ значение $f\left(\theta_{i+\frac{1}{2}}\right)$, а на дополнительной к ней дуге — нуль.

Сумма

$$\sum_i f\left(\theta_{i+\frac{1}{2}}\right)\omega(x,\ y,\ \theta_i,\ \theta_{i+1})=$$

$$=\sum_i f\left(\theta_{i+\frac{1}{2}}\right)\left[\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{Arctg}\frac{y-R\sin\theta_{i+1}}{x-R\cos\theta_{i+1}}-\frac{\theta_{i+1}}{2}\right)-\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{Arctg}\frac{y-R\sin\theta_i}{y-R\cos\theta_i}-\frac{\theta_i}{2}\right)\right]$$

представляет собой гармоническую внутри круга функцию, кусочно постоянную на границе. На дуге $(\theta_i,\ \theta_{i+1})$ она принимает значение $f\left(\theta_{i+\frac{1}{2}}\right)$.

Гармоничность конечной суммы внутри круга следует из линейности уравнения Лапласа. В точках $x=R\cos\theta_i$, $y=R\sin\theta_i$ эта функция, конечно, разрывна.

Совершим формальный предельный переход при неограниченном измельчении окружности, а именно, рассмотрим функцию

$$u(x,\ y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\left[\operatorname{Arctg}\frac{y-R\sin\theta}{x-R\cos\theta}-\frac{\theta}{2}\right].$$

У нас есть основания ожидать, что она будет гармонической внутри круга $x^2+y^2\leqslant R^2$, а в его граничных точках $x=R\cos\omega$, $y=R\sin\omega$ будет принимать значения $f(\omega)$. В дальнейшем этот факт будет обоснован, а пока мы эту формулу, преобразовав, приведем к более красивому виду.

Имеем

$$d\left[\operatorname{Arctg}\frac{y-R\sin\theta}{x-R\cos\theta}-\frac{\theta}{2}\right]=$$

$$=\frac{-R\cos\theta\,(x-R\cos\theta)-R\sin\theta\,(y-R\sin\theta)}{(y-R\sin\theta)^2+(x-R\cos\theta)^2}\,d\theta-\frac{d\theta}{2}=$$

$$=\frac{2\left[R^2-xR\cos\theta-yR\cos\theta\right]-(x^2+y^2)-R^2+2yR\sin\theta+2xR\cos\theta}{2\left[(y-R\sin\theta)^2+(x-R\cos\theta)^2\right]}\,d\theta=$$

$$=\frac{R^2-(x^2+y^2)}{2\left[R^2-2R\,(x\cos\theta+y\sin\theta)+x^2+y^2\right]}\,d\theta.$$

Заметим здесь, что при вычислении дифференциала безразлично, какие именно ветви Arctg были выбраны, так как значения $\operatorname{Arctg} z$ на разных ветвях отличаются на постоянную величину.

Мы показали, как можно придумать формулу

$$u(x,\ y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\frac{R^2-x^2-y^2}{R^2-2R\,(x\cos\theta+y\sin\theta)+x^2+y^2}\,d\theta,$$

которая носит название *формулы Пуассона*.

Запишем ее еще в двух формах. Во-первых, положив $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\sin\omega$ и заметив, что

$$x\cos\theta+y\sin\theta=\rho\,(\cos\theta\cos\omega+\sin\theta\sin\omega)=\rho\cos(\theta-\omega),$$

получаем

$$u(\rho\cos\omega,\ \rho\sin\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\,\rho\cos(\theta-\omega)+\rho^2}\,d\theta.$$

Во-вторых, можно разложить ядро нашего интеграла на простые дроби

$$\frac{R^2-x^2-y^2}{R^2-2R\,(x\cos\theta+y\sin\theta)+x^2+y^2}=-1+\frac{Re^{i\theta}}{Re^{i\theta}-(x+iy)}+\frac{Re^{-i\theta}}{Re^{-i\theta}-(x-iy)}$$

и записать

$$u(x,\ y)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta+2\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\frac{Re^{i\theta}\,d\theta}{Re^{i\theta}-(x+iy)}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta+2\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\theta)\,Re^{i\theta}\,d\theta}{Re^{i\theta}-\rho e^{i\omega}}. \qquad (1)$$

Докажем еще, что ядро

$$\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\omega)+\rho^2}\geqslant 0 \qquad (2)$$

при $\rho\leqslant R$ и что интеграл от него

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\omega)+\rho^2}\,d\theta=1. \qquad (3)$$

Первое из этих утверждений очевидно, если заметить, что

$$R^2-2R\rho\cos(\theta-\omega)+\rho^2=(R-\rho)^2+4R\rho\sin^2\frac{\theta-\omega}{2}.$$

Второе доказывается так:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\omega)+\rho^2}\,d\theta=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta+\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{i}\oint\frac{dz}{z-(x+iy)}.$$

В этом равенстве

$$\oint \frac{dz}{z-(x+iy)}$$

берется по замкнутому контуру — окружности радиуса $R$ с центром в начале координат, точка $x+iy$ лежит внутри этой окружности. Поэтому

$$\oint \frac{dz}{z-(x+iy)} = 2\pi i,$$

а следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\omega)+\rho^2}\,d\theta = -1+\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{i}\cdot 2\pi i = -1+2 = 1.$$

Формула Пуассона и доказанные сейчас свойства ее ядра будут в дальнейшем играть важную роль при изучении решений уравнения Лапласа.

Приступаем к обоснованию формулы Пуассона. Проверим, что

$$u(x,\ y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-x^2-y^2}{R^2-2R(x\cos\theta+y\sin\theta)+x^2+y^2} f(\theta)\,d\theta$$

гармонична при $x^2+y^2<R^2$. В самом деле, подынтегральная функция — непрерывная и, более того, аналитическая функция переменных $x$ и $y$, если только $x^2+y^2<R^2$. Следовательно, функция $u(x,\ y)$ непрерывна внутри круга, и законно формальное дифференцирование интеграла.

Воспользовавшись представлением (1), имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\mathrm{Re}\,\frac{Re^{i\theta}}{Re^{i\theta}-(x+iy)}\right]d\theta = 0,$$

так как действительная часть аналитической функции $Re^{i\theta}/[Re^{i\theta}-(x+iy)]$ является гармонической внутри круга функцией.

Докажем теперь, что при непрерывной $f(\theta)$ функция $u(x,\ y)$ непрерывна вплоть до границы круга и принимает там значения $f(\theta)$:

$$u(R\cos\theta,\ R\sin\theta) = f(\theta).$$

Для доказательства представим разность $u(x,\ y)-f(\alpha) = u(Q)-f(\alpha)$

в следующем виде:

$$u(Q)-f(\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\omega)+\rho^2}f(\theta)\,d\theta-f(\alpha)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\omega)+\rho^2}\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\omega)+\rho^2}[f(\theta)-f(\alpha)]\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\theta-\alpha|<\delta}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\omega)+\rho^2}[f(\theta)-f(\alpha)]\,d\theta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\theta-\alpha|\geqslant\delta}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\omega)+\rho^2}[f(\theta)-f(\alpha)]\,d\theta=I_1+I_2.$$

Здесь мы воспользовались соотношением (3) и обозначениями $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\sin\omega$ координат точки $Q$.

Оценим по отдельности каждый из интегралов $I_1$ и $I_2$. Так как $f(\theta)$ — непрерывная функция, то по произвольному $\varepsilon>0$ можно выбрать $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что $|f(\theta)-f(\alpha)|<\frac{\varepsilon}{2}$ при $|\theta-\alpha|<\delta$. В силу соотношений (2) и (3) получаем оценку первого из интегралов: $|I_1|<\frac{\varepsilon}{2}$. Фиксируем выбранное $\delta>0$ и приступим к оценке интеграла $I_2$. Ввиду того, что функция $f(\theta)$ ограничена ($|f(\theta)|<M$), имеем

$$|I_2|\leqslant\frac{R^2-\rho^2}{\pi}M\int\limits_{|\theta-\alpha|\geqslant\delta}\frac{d\theta}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\omega)+\rho^2}.$$

Обозначим посредством $Q_0$ точку с координатами $R\cos\alpha$, $R\sin\alpha$, а посредством $P$ — точку с координатами $R\cos\theta$, $R\sin\theta$ для тех $\theta$, для которых $|\theta-\alpha|\geqslant\delta$. Расстояние между точками $Q_0$ и $P$ больше положительной постоянной $l=2R\sin\frac{\delta}{2}$ (рис. 3). Так как знаменатель подынтегрального выражения равен $r^2(Q_0, P)$ — квадрату расстояния между точками $Q_0$ и $P$, то для всех точек $Q$, отстоящих от $Q_0$ меньше, чем на $l/2$, $r^2(P, Q)>(l/2)^2$ и, следовательно, для этих точек

$$\int\limits_{|\theta-\alpha|\geqslant\delta}\frac{d\theta}{R^2-2R\rho\sin(\theta-\omega)+\rho^2}<\frac{2\pi}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}=\frac{8\pi}{l^2}.$$

Для таких точек

$$|I_2|<\frac{R^2-\rho^2}{\pi}M\cdot\frac{8\pi}{l^2}\leqslant\frac{16RM}{l^2}(R-\rho).$$

Так как $R-\rho$ не превышает расстояния между точками $Q$ и $Q_0$, то для точек $Q$ из круга, отстоящих от $Q_0$ меньше, чем на $\delta_1(\varepsilon) = \min\left\{\frac{l}{2}, \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{l^2}{16RM}\right\}$, где $l = 2R\sin\frac{\delta(\varepsilon)}{2}$, справедливы оба неравенства $|I_1| < \varepsilon/2$, $|I_2| < \varepsilon/2$. Следовательно, для этих точек $|u(Q) - f(\alpha)| < \varepsilon$.

Таким образом, $u(x, y)$ будет непрерывна в точке $x = R\cos\alpha$, $y = R\sin\alpha$, если ее доопределить в этой точке значением $f(\alpha)$. Непрерывность $u(x, y)$ внутри круга была доказана раньше.

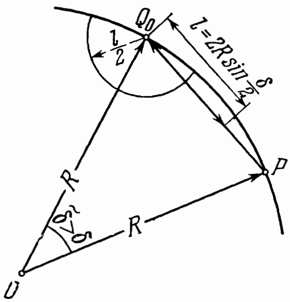

Рис. 3.

Тем самым мы показали, что можно внутри круга построить такую непрерывную вплоть до границы гармоническую функцию, чтобы на границе она принимала заданные непрерывные значения. *Задача восстановления непрерывной гармонической функции по ее граничным значениям на границе некоторой ограниченной области называется задачей Дирихле.*

Докажем единственность решения такой задачи. Пусть у нее оказалось два решения $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$. Тогда их разность тоже будет непрерывной и гармонической и будет обращаться на границе в нуль. По принципу максимума

$$0 = \min_{\Gamma} u \leqslant u(x, y) \leqslant \max_{\Gamma} u = 0.$$

Следовательно, $u(x, y) = u_1 - u_2 \equiv 0$. Единственность доказана. Для произвольной области разрешимости задачи Дирихле может и не быть.

Изучением условий разрешимости задачи Дирихле мы будем заниматься в главе III. А пока в следующем параграфе рассмотрим некоторый класс задач математической физики, связанный, например, с процессами теплопроводности. В частности, так появится еще один пример физически осмысленной задачи, которая приводится к задаче Дирихле.

## § 3. Уравнение теплопроводности

Вывод уравнения теплопроводности. Задача Дирихле как задача определения стационарного распределения температуры по заданной температуре границы области. Постановка задач для одномерного уравнения теплопроводности. Принцип максимума для этого уравнения. Теоремы единственности задач 1 и 2 для уравнения теплопроводности при различных предположениях о решении и о начальной функции.

Кратко наметим вывод уравнения теплопроводности из физических соображений. Среда, в которой мы будем рассматривать процессы теплопередачи, должна характеризоваться так называемым калорическим уравнением состояния $E=E(T)$, плотностью $\rho=\rho(x, y, z)$ и коэффициентом теплопроводности $K=K(x, y, z)$. Здесь $T$ — температура, $E(T)$ — внутренняя энергия тела, заключенная в единице массы, если эта масса нагрета до температуры $T$. Можно рассматривать среду с тепловыми свойствами, меняющимися от одной точки пространства к другой. В этом случае уравнение состояния имеет более общий вид $E=E(x, y, z, T)$. Количество тепла, заключенное в бесконечно малом объеме

$$x_0-\frac{\Delta x}{2}\leqslant x\leqslant x_0+\frac{\Delta x}{2},$$

$$y_0-\frac{\Delta y}{2}\leqslant y\leqslant y_0+\frac{\Delta y}{2},$$

$$z_0-\frac{\Delta z}{2}\leqslant z\leqslant z_0+\frac{\Delta z}{2},$$

в момент времени $t$ равно

$$\rho(x_0, y_0, z_0)\,E(x_0, y_0, z_0, T(t))\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z.$$

Изменение этого количества тепла за время $\Delta t$ будет равно

$$\rho(x_0, y_0, z_0)\,\frac{\partial E(x_0, y_0, z_0, T)}{\partial t}\,\Delta t\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z.$$

Это изменение может произойти только за счет того, что тепло вытекает или втекает через границу выделенного нами объема, если мы предполагаем, что никакого выделения или поглощения энергии не происходит.

Количество тепла, протекающего через площадку $\Delta S$ за время $\Delta t$, равно

$$K\frac{\partial T}{\partial n}\,\Delta t\,\Delta S.$$

Здесь $K$ — коэффициент теплопроводности в точке, через которую мы провели нашу бесконечно малую площадку, а $\frac{\partial T}{\partial n}$ — производная температуры по нормали к площадке. Тепло течет из области более высоких температур в область более низких. Такова формулировка закона теплопроводности Ньютона в изотропном теле. Этот закон является результатом систематизации большого количества опытных фактов.

Выпишем потоки через площадки

$$x=x_0\pm\Delta x/2,$$

$$y=y_0\pm\Delta y/2,$$

$$z=z_0\pm\Delta z/2,$$

ограничивающие наш объем.

Количество тепла, втекающее через площадку $x=x_0+\Delta x/2$, равно

$$+K\left(x_0+\frac{\Delta x}{2},\ y_0,\ z_0\right)\frac{\partial T}{\partial x}\Bigg|_{\substack{x=x_0+\Delta x/2\\ y=y_0\\ z=z_0}}\Delta t\,\Delta y\,\Delta z,$$

а через площадку $x=x_0-\Delta x/2$

$$-K\left(x_0-\frac{\Delta x}{2},\ y_0,\ z_0\right)\frac{\partial T}{\partial x}\Bigg|_{\substack{x=x_0-\Delta x/2\\ y=y_0\\ z=z_0}}\Delta t\,\Delta y\,\Delta z.$$

В результате общее количество тепла, вошедшее в наш объем через эти две площадки, будет

$$\left[K\left(x_0+\frac{\Delta x}{2},\ y_0,\ z_0\right)\frac{\partial T}{\partial x}\Bigg|_{\substack{x=x_0+\Delta x/2\\ y=y_0\\ z=z_0}}-\right.$$
$$\left.-K\left(x_0-\frac{\Delta x}{2},\ y_0,\ z_0\right)\frac{\partial T}{\partial x}\Bigg|_{\substack{x=x_0-\Delta x/2\\ y=y_0\\ z=z_0}}\right]\Delta t\,\Delta y\,\Delta z\approx$$
$$\approx\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Bigg|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0}}\right]\Delta x\,\Delta t\,\Delta y\,\Delta z.$$

Аналогично количество тепла, которое за время $\Delta t$ просочится в наш объем через площадки $y=y_0\pm\Delta y/2$, $z=z_0\pm\Delta z/2$, равно, соответственно,

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0}}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0}}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t.$$

Суммируя все притоки тепла и приравнивая их сумму изменению внутренней энергии, получаем

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0}}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t=$$
$$=\rho\,(x_0,\ y_0,\ z_0)\,\frac{\partial E\,(x_0,\ y_0,\ z_0,\ T)}{\partial t}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t.$$

Сокращая обе части этого равенства на $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t$ и замечая, что точка $(x_0, y_0, z_0)$ может быть выбрана произвольно (поэтому индекс нуль может быть опущен), мы приходим к окончательной форме уравнения теплопроводности

$$\rho(x, y, z)\frac{\partial E(x, y, z, T)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial T}{\partial z}\right).$$

Предположения про входящие в него функции следующие:

$$\rho>0,\ \frac{\partial E}{\partial T}>0,\ K>0.$$

Эти предположения представляют собой обобщение опытных фактов.

Иногда уравнение теплопроводности записывают в виде

$$C\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial T}{\partial z}\right),$$

обозначив через $C(x, y, z, T)$ выражение $\rho\frac{\partial E}{\partial T}$. Величина $C$ по вполне понятным причинам называется *теплоемкостью* (единицы объема).

Если теплоемкость $C$ и коэффициент теплопроводности $K$ не зависят от $T$, $x$, $y$, $z$, т. е. являются постоянными, уравнение может быть переписано так:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{K}{C}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right).$$

Коэффициент $\frac{K}{C}$ принято называть *коэффициентом температуропроводности*.

Интересно рассмотреть случай стационарного распределения температуры $\left(\frac{\partial T}{\partial t}=0\right)$. Мы видим, что если $K=\text{const}$, то стационарное распределение температуры описывается решением $T(x, y, z)$ уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0.$$

Задача Дирихле для этого уравнения состоит в отыскании распределения температуры внутри некоторого тела по известным значениям $T$ на границе.

Если область представляет собой высокий круговой цилиндр с образующими, параллельными оси $z$, и вдоль каждой такой граничной образующей температура постоянна, то можно предполагать, что распределение температуры вблизи среднего горизонтального сечения цилиндра почти не зависит от $z$ и может быть описано в виде решения $T=T(x, y)$ уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+$ $+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$. Зная температуру на образующих цилиндра, $T(R\cos\theta, R\sin\theta)$, мы можем по формуле Пуассона определить $T(x, y)$ внутри цилиндра, т. е. внутри круга на плоскости переменных $x$, $y$.

Если область — узкий слой между близкими плоскостями, на которых поддерживается постоянная температура (на каждой плоскости слоя), то распределение $T(x)$ температур (стационарное) между плоскостями $x=x_1$, $x=x_2$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2T}{dx^2}=0.$$

Общее решение этого обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид

$$T=b_1x+b_2.$$

Постоянные $b_1$, $b_2$ должны быть определены из граничных условий — температур на граничных плоскостях. После этого определения получим

$$T=\frac{(x_2-x)\,T_1+(x-x_1)\,T_2}{x_2-x_1}, \quad \text{где } T_1=T(x_1),\ T_2=T(x_2).$$

При изучении нестационарного уравнения теплопроводности мы в дальнейшем ограничимся только одномерным случаем и постоянными коэффициентами $K$, $C$

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{K}{C}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Изменением масштаба по оси $x$ можно добиться равенства $K/C=1$. При рассмотрении уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

мы будем обычно обозначать неизвестную температуру буквой $u$.

Для простейшего уравнения теплопроводности мы ограничимся обсуждением следующих двух задач:

Задача 1. *Требуется найти ограниченное решение $u(x, t)$, непрерывное в области $t\geqslant 0$, удовлетворяющее уравнению теплопроводности при $t>0$ и равное заданной непрерывной ограниченной функции $\varphi(x)$ при $t=0$.* (Эта задача связана с распространением тепла в неограниченной среде.)

Примечание. Вместо условия ограниченности $\varphi(x)$ и $u(x, t)$ могут быть наложены другие, менее ограничительные условия. Об этом будет сказано позднее.

Задача 2. *Найти в прямоугольной области* $A \leqslant x \leqslant B$, $0 \leqslant t \leqslant T$ *непрерывное вплоть до границы решение уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

*удовлетворяющее следующим граничным условиям:*

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad A \leqslant x \leqslant B,$$
$$u(A, t) = \psi_A(t),$$
$$u(B, t) = \psi_B(t).$$

(Эта задача связана с распространением тепла в ограниченной области.)

Мы предполагаем $\varphi(x)$, $\psi_A(t)$, $\psi_B(t)$ непрерывными и, следовательно, ограниченными функциями на замкнутых отрезках $A \leqslant x \leqslant B$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Предполагается также выполнение «условия согласования» $\varphi(A) = \psi_A(0)$, $\varphi(B) = \psi_B(0)$. Иначе непрерывную $u(x, t)$ нельзя было бы построить.

Под словами «решение, непрерывное вплоть до границы» мы здесь подразумеваем следующее. Функция $u(x, t)$, непрерывная при $A \leqslant x \leqslant B$, $0 \leqslant t \leqslant T$, имеет в каждой «внутренней» точке $(A < x < B,\ 0 < t \leqslant T)$ первые и вторые производные, удовлетворяющие равенству $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Выполнения этого равенства в точках границы и даже дифференцируемости $u(x, t)$ в граничных точках $(x = A,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$, $(A \leqslant x \leqslant B,\ t = 0)$, $(x = B,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ мы не предполагаем.

Исследование задач 1 и 2 начнем с получения теоремы единственности, основанной на принципе максимума, который напоминает принцип максимума для уравнения Лапласа.

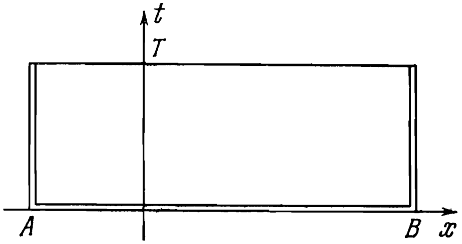

Рис. 4.

Принцип максимума для уравнения теплопроводности. *Всякое решение уравнения теплопроводности в прямоугольнике* $A < x < B$, $0 < t \leqslant T$, *непрерывное вплоть до границы, принимает свои наибольшее и наименьшее значения на нижней или на боковых его границах.* На рис. 4 эти границы нарисованы двойной линией.

Обозначим через $M$ максимум $u(x, t)$ на всем нашем прямоугольнике, а через $m$ — наибольшее значение $u(x, t)$ на двойной границе и предположим, что $M > m$. Пусть $(x_0, t_0)$ — та точка нашего прямоугольника (внутренняя или лежащая на его верхней границе), для которой $u(x_0, t_0) = M$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{M-m}{2(B-A)^2}(x-x_0)^2.$$

На «двойной» границе для $v(x, t)$ выполнено неравенство

$$v(x, t) \leqslant u(x, t) + \frac{M-m}{2(B-A)^2}(B-A)^2 \leqslant m + \frac{M-m}{2} < M.$$

С другой стороны, $v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M$, т. е. наибольшее значение $v(x, t)$ не меньше, чем $M$. Максимальное значение $v(x, t)$ принимается в некоторой точке $(x_1, t_1)$. Так как $v(x_1, t_1) \geqslant M$, а на «двойной» границе $v(x, t) < M$, то точка $(x_1, t_1)$ не может лежать на «двойной» границе.

Если точка $(x_1, t_1)$ — внутренняя точка максимума, то в ней $v_t = 0$, $v_x = 0$, $v_{xx} \leqslant 0$ и, следовательно, $v_t - v_{xx} \geqslant 0$. Если же $(x_1, t_1)$ лежит на верхней границе прямоугольника, то $v_t \geqslant 0$, $v_x = 0$, $v_{xx} \leqslant 0$ и, опять-таки, $v_t - v_{xx} \geqslant 0$. Итак, мы показали, что если $M = \max u(x, t) > m$, то существует точка $(x_1, t_1)$, в которой $v_t - v_{xx} \geqslant 0$. Однако, пользуясь тем, что $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $v(x, t) = u(x, t) + \frac{M-m}{2(B-A)^2}(x-x_0)^2$, мы без труда можем вычислить $v_t - v_{xx}$:

$$v_t - v_{xx} = -\frac{M-m}{(B-A)^2} < 0.$$

Полученное противоречие показывает невозможность неравенства $M > m$. Тем самым доказано неравенство $u(x, t) \leqslant \max u(x, t)$ на «двойной» границе. Принцип максимума обоснован.

Так как функция $-u(x, t)$ тоже удовлетворяет уравнению теплопроводности, мы можем, применяя к ней принцип максимума, доказать еще и

Принцип минимума. *Наименьшее значение $u(x, t)$ обязательно принимается на «двойной» границе.*

Примечание. В доказательстве мы предполагаем дважды дифференцируемость $u(x, t)$ во всех внутренних точках прямоугольника и на его верхней границе. Достаточно предполагать наличие вторых производных во внутренних точках, а непрерывность $u(x, t)$ вплоть до границ. В самом деле, из принципа максимума

$$u(x, t)\,|_{0 \leqslant t \leqslant T-\varepsilon} \leqslant m$$

в силу непрерывности $u(x, t)$ вытекает, что

$$u(x, T) \leqslant m.$$

Объединяя прицип максимума с принципом минимума, получаем неравенство для $|u(x, t)|$:

$$|u(x, t)| \leqslant \max |u(x, t)| \text{ на «двойной» границе.}$$

Докажем теорему единственности решения задачи 2. Пусть $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ — два решения этой задачи. Тогда $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ будет непрерывной функцией, у которой

$$\begin{aligned} u(A, t) &= 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ u(x, 0) &= 0 \quad \text{при} \quad A \leqslant x \leqslant B, \\ u(B, t) &= 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{aligned}$$

Внутри прямоугольника $A < x < B$, $0 < t < T$ функция $u(x, t)$, очевидно, удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) = 0.$$

Из принципа максимума мы заключаем:

$$\max_{\substack{A \leqslant x \leqslant B \\ 0 \leqslant t \leqslant T}} |u(x, t)| \leqslant$$
$$\leqslant \max \left\{ \max_{A \leqslant x \leqslant B} |u(x, 0)|, \max_{0 \leqslant t \leqslant T} |u(A, t)|, \max_{0 \leqslant t \leqslant T} |u(B, t)| \right\} = 0.$$

Ясно, что $u(x, t) \equiv 0$ при $A \leqslant x \leqslant B$, $0 \leqslant t \leqslant T$, т. е. что в этом прямоугольнике $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$. Единственность решения задачи 2 доказана.

Доказательство единственности решения задачи 1 несколько сложней. Напомним постановку этой задачи.

Задача 1. *Найти непрерывную и ограниченную в полуплоскости $t \geqslant 0$, $-\infty < x < +\infty$, функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую при $t > 0$ уравнению $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, а при $t = 0$ начальному условию $u(x, 0) = \varphi(x)$. Здесь $\varphi(x)$ — произвольная ограниченная непрерывная функция $x$. Ограниченность мы предполагаем заданной в форме неравенств*

$$|u(x, t)| < M, \quad |\varphi(x)| < M.$$

Докажем теорему единственности для задачи 1. Рассмотрим некоторое частное решение $v(x, t)$ уравнения $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, определяемое формулой

$$v(x, t) = \frac{2M}{L^2}(x^2 + 2t).$$

Выполнение уравнения проверяется непосредственным дифференцированием:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 4\frac{M}{L^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Очевидно, что это решение удовлетворяет неравенствам:

$$v(x,\ 0)=\frac{2M}{L^2}x^2 \geqslant 0,$$

$$v(\pm L,\ t)=\frac{2M}{L^2}(L^2+2t)\geqslant 2M.$$

Если у задачи 1 есть два решения $u_1(x,\ t)$, $u_2(x,\ t)$, то их разность $u=u_1-u_2$ будет решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

удовлетворяющим при $t\geqslant 0$ неравенствам $|u(x,\ t)|\leqslant 2M$, а при $t=0$ обращающимся в нуль: $u(x,\ 0)=0$. Из принципа максимума следует, что так как на нижней ($t=0$) и боковых ($x=\pm L$) границах прямоугольника $0\leqslant t\leqslant T$ ($T$ произвольно), $-L\leqslant x\leqslant L$ разность $v(x,\ t)-u(x,\ t)\geqslant 0$, то это неравенство сохранится и внутри прямоугольника. (Разность $v-u$ тоже удовлетворяет уравнению теплопроводности). Итак, при $-L\leqslant x\leqslant L$ мы доказали неравенство

$$u(x,\ t)\leqslant\frac{2M}{L^2}(x^2+2t).$$

Замечая, что функция $\tilde{u}(x,\ t)=-u(x,\ t)$ удовлетворяет уравнению и неравенству $\tilde{u}\leqslant 2M$, мы точно так же получаем, что

$$-u(x,\ t)\leqslant\frac{2M}{L^2}(x^2+2t).$$

Если два полученные неравенства объединить, то становится ясно, что

$$|u(x,\ t)|\leqslant\frac{2M}{L^2}(x^2+2t).$$

Фиксировав точку $(x,\ t)$ ($t>0$) и выбирая различные $L$, мы видим, что неравенство должно быть выполнено при всех достаточно больших $L$, а так как $L$ можно устремить к бесконечности, то отсюда следует равенство

$$|u(x,\ t)|=0,$$
$$u_1-u_2=0 \quad \text{при} \quad t>0.$$

Теорема единственности решения задачи 1 доказана.

Мы сейчас ослабим ограничения на функции $u(x,\ t)$, $\varphi(x)$ и покажем, что единственность имеет место и при ослабленных ограничениях.

Рассмотрим два решения $u_1(x,\ t)$, $u_2(x,\ t)$ уравнения теплопроводности, определенных в полуплоскости $t>0$, непрерывных вплоть до $t=0$, удовлетворяющих условиям

$$u_1(x,\ 0)=\varphi(x), \quad u_2(x,\ 0)=\varphi(x)$$

и неравенствам

$$|u_1(x, t)| \leqslant M(t) e^{a|x|},$$
$$|u_2(x, t)| \leqslant M(t) e^{a|x|},$$

где $M(t)$ — непрерывная монотонная функция $t$. Она может как угодно быстро расти с ростом $t$.

Мы докажем, что $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$. Выделим произвольный конечный отрезок $0 \leqslant t \leqslant T$ времени и докажем совпадение $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$ для $t$ из этого отрезка. Из произвольности $T$ будет следовать единственность решения во всей верхней полуплоскости.

Итак, пусть $0 \leqslant t \leqslant T$. Тогда

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leqslant |u_1(x, t)| + |u_2(x, t)| \leqslant 2M(t) e^{a|x|} \leqslant M^* e^{a|x|}.$$

Через $M^*$ мы здесь обозначили

$$2 \max_{0 \leqslant t \leqslant T} M(t) = 2M(T).$$

Как обычно, заключаем, что функция $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, условию $u(x, 0) = 0$, а по доказанному — еще и неравенству

$$|u(x, t)| \leqslant M^* e^{a|x|} \qquad (0 \leqslant t \leqslant T).$$

Будет доказано, что из этих условий вытекает равенство

$$u(x, t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Доказательство будет почти такое же, как и в предположении ограниченности $u(x, t)$, только мажорирующее решение нужно выбрать другим.

Положим

$$v(x, t) = M^* (e^{aL} + e^{-aL}) \frac{e^{2ax} + e^{-2ax}}{e^{2aL}} e^{4a^2 t}.$$

Легко проверить равенство $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$. В самом деле,

$$v(x, t) = \frac{M^* (e^{aL} + e^{-aL})}{e^{2aL}} e^{2ax + 4a^2 t} + \frac{M^* (e^{aL} + e^{-aL})}{e^{2aL}} e^{-2ax + 4a^2 t} =$$
$$= b e^{2ax + 4a^2 t} + b e^{-2ax + 4a^2 t}$$

и, следовательно, достаточно убедиться в том, что функции $e^{\pm 2ax + 4a^2 t}$ являются решениями. Это легко получить дифференцированием:

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{\pm 2ax + 4a^2 t} = 4a^2 e^{\pm 2ax + 4a^2 t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{\pm 2ax + 4a^2 t}.$$

При $t=0$

$$v(x,\ 0)>0=u(x,\ 0),$$

при $0\leqslant t\leqslant T$

$$v(\pm L,\ t)\geqslant M^*(e^{aL}+e^{-aL})\frac{e^{2aL}+e^{-2aL}}{e^{2aL}}>M^*e^{aL}.$$

По предположению, $u(\pm L,\ t)\leqslant M^*e^{aL}$.

Из принципа максимума нетрудно теперь заключить, что при $0\leqslant t\leqslant T$, $-L\leqslant x\leqslant L$ имеет место неравенство

$$u(x,\ t)\leqslant M^*(e^{aL}+e^{-aL})\frac{e^{2ax}+e^{-2ax}}{e^{2aL}}e^{4a^2t}.$$

Точно так же доказывается неравенство

$$-u(x,\ t)\leqslant M^*(e^{aL}+e^{-aL})\frac{e^{2ax}+e^{2-ax}}{e^{2aL}}e^{4a^2t}.$$

Следовательно,

$$|u(x,\ t)|\leqslant M^*(e^{aL}+e^{-2aL})\frac{e^{2ax}+e^{-2ax}}{e^{2aL}}e^{4a^2t}.$$

Фиксируем $(x,\ t)$, а параметр $L$ устремим к $\infty$. Правая часть неравенства стремится при этом к нулю. Значит,

$$|u(x,\ t)|\leqslant 0,\qquad u(x,\ t)=0.$$

Теорема единственности доказана.

На самом деле неравенство

$$|u(x,\ t)|<M(t)e^{a|x|}$$

может быть еще более ослаблено. Можно допустить еще больший рост $u(x,\ t)$ с ростом $x$. Однако существуют достаточно быстро растущие с ростом $x$ решения уравнения теплопроводности, удовлетворяющие при $t=0$ нулевым начальным данным. К сожалению, в нашем курсе мы не можем останавливаться на разборе соответствующих примеров.

Сейчас мы распространим теорему единственности на решения с разрывными начальными данными $\varphi(x)$. Для простоты ограничимся случаем, когда есть только одна точка разрыва $\varphi(x)$, а именно — точка $x=0$. При этом решение тоже нельзя будет считать непрерывным в точке $x=0$, $t=0$. Во всех остальных точках мы его непрерывность будем предполагать. Если есть два решения $u_1(x,\ t)$, $u_2(x,\ t)$ таких, что при $x\neq 0$ $u_i(x,\ 0)=\varphi(x)$, то их разность $u(x,\ t)=u_1(x,\ t)-u_2(x,\ t)$ будет непрерывной функцией всюду, за исключением, быть может, точки $x=0$, $t=0$. При $x\neq 0$ функция $u(x,\ 0)=0$. Мы докажем, что если $u(x,\ t)$ ограничена в окрестности этой точки и не слишком быстро растет при $|x| \to \infty$, то $u(x, t) = 0$. Переходим к аккуратной формулировке:

*Пусть решение* $u(x, t)$ *уравнения* $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ *удовлетворяет при* $0 \leqslant t \leqslant T$ *неравенству*

$$|u(x, t)| < M^* e^{a|x|},$$

*непрерывно при всех* $x$ *и всех* $t \geqslant 0$, *за исключением, быть может, точки* $x = 0$, $t = 0$. *Пусть* $u(x, 0) = 0$, *если* $x \neq 0$. *При этих предположениях* $u(x, t) \equiv 0$ *для* $0 \leqslant t \leqslant T$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$v(x, t) = M^* (e^{aL} + e^{-aL}) \frac{e^{2ax} + e^{-2ax}}{e^{2aL}} e^{4a^2 t} + 2M^* \frac{e^{-\frac{x^2}{4(t+\varepsilon)}}}{\sqrt{t+\varepsilon}} \sqrt{\varepsilon}.$$

Она состоит из двух слагаемых, первое из которых

$$M^* (e^{aL} + e^{-aL}) \frac{e^{2ax} + e^{-2ax}}{e^{2aL}} e^{4a^2 t}$$

нам уже встречалось. Оно удовлетворяет уравнению теплопроводности. Легко убедиться, что и второе слагаемое при любом $\varepsilon > 0$ также удовлетворяет этому уравнению. Мы не будем проводить вычислений, это доказывающих. Рассмотрим область $P_1 P_2 P_3 \ldots P_8$, изображенную на рис. 5. Всюду на «двойной» границе (она нарисована двойной линией) $v(x, t) > 0$. Это очевидно. На $[P_1, P_2]$, $[P_7, P_8]$ $v(\pm L, t) > M^*$. Мы уже проверяли, что такому неравенству удовлетворяет первое слагаемое. Второе слагаемое может это неравенство только усилить.

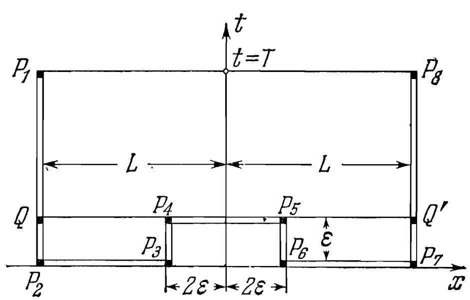


Рис. 5.

Покажем, что на $P_3 P_4 P_5 P_6$ также $v(x, t) > M^*$. Достаточно убедиться в том, что на этом контуре второе слагаемое больше, чем $M^*$.

Очевидно, что при $\varepsilon \geqslant t \geqslant 0$, $|x| < 2\varepsilon$ верны неравенства:

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{t+\varepsilon}} \geqslant \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon+\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$e^{-\frac{x^2}{4(t+\varepsilon)}} \geqslant e^{-\frac{(2\varepsilon)^2}{4(0+\varepsilon)}} = e^{-\varepsilon} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(последнее при $\varepsilon$ достаточно малом),

$$2M^* \sqrt{\varepsilon}\, \frac{e^{-\frac{x^2}{4(t+\varepsilon)}}}{\sqrt{t+\varepsilon}} > 2M^* \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = M^*.$$

Итак, всюду на $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$

$$v(x, t) > u(x, t),$$
$$w(x, t) = v(x, t) - u(x, t) > 0.$$

Разность $w$ также удовлетворяет уравнению $\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ и, следовательно, для нее справедлив принцип максимума. Из этого принципа вытекает, что всюду внутри замкнутого контура $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8P_1$ также $w(x, t) = v(x, t) - u(x, t) > 0$. Для доказательства достаточно область, ограниченную этим контуром, разрезать отрезками $[t = \varepsilon, -L \leqslant x \leqslant -2\varepsilon]$, $[t = \varepsilon, 2\varepsilon \leqslant x \leqslant L]$ на три прямоугольника $QP_2P_3P_4$; $P_5P_6P_7Q'$; $P_1QQ'P_8$, как это показано на рис. 5, а затем, последовательно, воспользоваться для каждого из них принципом максимума.

Итак, при $-L \leqslant x \leqslant L$, $\varepsilon \leqslant t \leqslant T$ имеет неравенство

$$u(x, t) < M^* (e^{aL} + e^{-aL}) \frac{e^{2ax} + e^{-2ax}}{e^{2aL}} e^{4a^2t} + 2M^* \sqrt{\varepsilon}\, \frac{e^{-\frac{x^2}{4(t+\varepsilon)}}}{\sqrt{t+\varepsilon}} = v(x, t).$$

Аналогичным рассуждением получаем

$$-u(x, t) < v(x, t)$$

и, следовательно,

$$|u(x, t)| < M^* (e^{aL} + e^{-aL}) \frac{e^{2ax} + e^{-2ax}}{e^{2aL}} e^{4a^2t} + 2M^* \sqrt{\varepsilon}\, \frac{e^{-\frac{x^2}{4(t+\varepsilon)}}}{\sqrt{t+\varepsilon}}.$$

Фиксируя точку $(x, t)$ и устремляя $L$ к бесконечности, а $\varepsilon$ к нулю, приходим к утверждению

$$|u(x, t)| \leqslant 0,$$
$$u(x, t) = 0.$$

Доказательство этим завершено.

Можно было бы доказать, не привлекая никаких новых идей, подобную теорему единственности в случае, если допускать у решения $u(x, t)$ при $t=0$ не одну точку разрыва, а любое конечное их число. Более того, можно предположить, что их бесконечное число, но расстояние между двумя соседними точками разрыва ограничено снизу.

Задача. Докажите, что ограниченное решение уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$, непрерывное всюду в прямоугольнике $A \leqslant x \leqslant B$, $0 \leqslant t \leqslant T$, кроме, быть может, угловых точек $(x=A, t=0)$, $(x=B, t=0)$, однозначно определяется начальными и граничными условиями $u(x, 0)=\varphi(x)$, $u(A, t)=\psi_A(t)$, $u(B, t)=\psi_B(t)$. Мы здесь уже не предполагаем начальные и граничные условия «согласованными» в углах. Можно также допустить конечное число точек разрыва у $\psi_A$, $\psi_B(t)$ и соответственно у решения $u(x, t)$ при $x=A$, $x=B$.

На этом мы заканчиваем доказательство теорем единственности и в следующем параграфе перейдем к теореме существования решения.

## § 4. Уравнение теплопроводности (продолжение)

Формула Пуассона для уравнения теплопроводности и ее обоснование. Решение с помощью интеграла Пуассона простейшей задачи для уравнения теплопроводности на конечном отрезке. Решение смешанной задачи. Нестрогий эвристический вывод интегральной формулы для решения уравнения теплопроводности. Примеры частных решений линейного и нелинейного уравнений теплопроводности.

Покажем, что решение задачи 1 из § 3 дается формулой

$$u(x, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,d\xi. \tag{1}$$

Если мы дадим ее обоснование, то тем самым и докажем теорему существования. Как можно придумать эту формулу (она называется *интегралом Пуассона для уравнения теплопроводности*), мы сейчас объяснять не будем. Это объяснение будет дано позднее. А сейчас проведем аккуратное исследование формулы Пуассона, не интересуясь тем, как она была получена.

Итак, мы приступаем к исследованию функции $u(x, t)$.

Свойство 1. *Если* $|\varphi(\xi)|<Me^{a|\xi|}$, *то интеграл* (1) *сходится, а функция* $u(x, t)$ *удовлетворяет неравенству*

$$|u(x, t)|<2Me^{a^2t}e^{a|x|},$$

Доказательство вытекает из следующей цепочки неравенств и равенств:

$$|u(x, t)| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Me^{a|\xi|}}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Me^{a|x|+a|\xi-x|}}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi =$$

$$= \frac{Me^{a|x|}}{2\sqrt{\pi}} 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{a|\xi-x|}{2\sqrt{t}} 2\sqrt{t}} e^{-\left(\frac{|\xi-x|}{2\sqrt{t}}\right)^2} \frac{d(\xi-x)}{2\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{Me^{a|x|}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2+a|\eta|2\sqrt{t}} d\eta = \frac{Me^{a|x|}}{\sqrt{\pi}} 2 \int_{0}^{+\infty} e^{-\eta^2+a\eta\cdot 2\sqrt{t}} d\eta =$$

$$= \frac{Me^{a|x|}}{\sqrt{\pi}} 2e^{a^2t} \int_{0}^{\infty} e^{-(\eta-a\sqrt{t})^2} d\eta < \frac{2Me^{a^2t}e^{a|x|}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta =$$

$$= \frac{2Me^{a^2t}e^{a|x|}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 2Me^{a^2t}e^{a|x|}.$$

Свойство 1 тем самым доказано.

Свойство 2. *При* $t > 0$ *функция* $u(x, t)$ *бесконечно дифференцируема, а ее производные могут быть вычислены при помощи следующего сходящегося интеграла*:

$$\frac{\partial^{m+n} u(x, t)}{\partial x^m \partial t^n} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial t^n} \left[\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\right] d\xi.$$

Мы опять предполагаем, что $|\varphi(\xi)| < Me^{a|\xi|}$.

Доказательство. Легко убедиться в том, что

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial t^n} \left[\frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\right] = \varphi(\xi) \left[\sum_{\text{конечная}} \frac{\text{полином от } (x-\xi)}{\text{степень } t}\right] e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} =$$

$$= \varphi(\xi) P(\xi, x, t) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}.$$

Выберем некоторый произвольный интервал времени $0 < t_0 \leqslant t \leqslant \leqslant t_1$ и отрезок $-x_0 \leqslant x \leqslant x_0$ оси $x$.

Для точек $(x, t)$ из области $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $-x_0 \leqslant x \leqslant x_0$ выражение для $P(\xi, x, t)$ может быть оценено так:

$$|P(\xi, x, t)| \leqslant \text{const} \, |\xi|^p < \text{const} \, e^{|\xi|}.$$

(Через $p$ мы обозначили наивысшую степень $(x-\xi)$, входящую в выражение для $P(\xi, x, t)$.) Следовательно, мы можем написать

$$|\varphi(\xi) P(\xi, x, t)| < N(x_0, t_0, t_1) e^{(a+1)|\xi|}.$$

Из этого неравенства вытекает, что интеграл

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial t^n}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\right]d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)P(\xi,\ x,\ t)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,d\xi$$

равномерно сходится для $-x_0\leqslant x\leqslant +x_0$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$.

По известной теореме анализа о дифференцировании несобственных интегралов по параметру отсюда вытекает справедливость равенства

$$\frac{\partial^{m+n}u(x,\ t)}{\partial x^m\,\partial t^n}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial t^n}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\right]d\xi.$$

В силу произвольности $x_0$, $t_0$, $t_1$ это равенство верно во всех внутренних точках верхней полуплоскости $t>0$. Свойство 2 доказано.

Свойство 3. *Функция* $u(x,\ t)$ *удовлетворяет при* $t>0$ *уравнению* $\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$.

Доказательство. По свойству 2

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\right]d\xi.$$

Остается лишь проверить прямым дифференцированием равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}=0.$$

Этой проверкой и завершается доказательство свойства 3.

Функцию $\varphi(\xi)$, удовлетворяющую неравенству $|\varphi(\xi)|<Me^{a|\xi|}$, мы будем предполагать кусочно непрерывной. Сейчас будет доказано

Свойство 4. *Если* $\varphi(\xi)$ *непрерывна в точке* $x_0$, *то функция* $u(x,\ t)$ *непрерывна в точке* $(x_0,\ 0)$, *при этом*

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ x\to x_0}} u(x,\ t)=\varphi(x_0).$$

Для доказательства сделаем замену в интеграле Пуассона, положив $\frac{\xi-x}{2\sqrt{t}}=\zeta$. Тогда $u(x,\ t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\zeta^2}\varphi(x+2\zeta\sqrt{t})\,d\zeta$.

Этот интеграл сходится равномерно относительно $x$ и $t$ для ограниченных значений этих переменных. Действительно, для $|x| < R$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$, подынтегральная функция имеет интегрируемую мажоранту $Me^{-\zeta^2 + aR + 2a\sqrt{t_1}|\zeta|}$.

Далее, на любом ограниченном отрезке $|\zeta| \leqslant N$ подынтегральная функция стремится при $x \to x_0$, $t \to 0$ к функции $e^{-\zeta^2}\varphi(x_0)$ равномерно относительно $\zeta$. Это свойство вытекает из непрерывности функции $\varphi(x)$ в точке $x_0$.

По известной теореме о переходе к пределу под знаком несобственного интеграла отсюда вытекает, что

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ t \to 0}} u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\zeta^2}\varphi(x_0)\, d\zeta = \varphi(x_0).$$

Подведем итог. Мы показали, что функция, определенная равенством

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi,$$

является при $t > 0$ любое число раз дифференцируемым решением уравнения теплопроводности, если $\varphi(\xi)$ — кусочно непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству

$$|\varphi(\xi)| < Me^{a|\xi|}.$$

Это решение оценивается так:

$$|u(x, t)| < 2Me^{a^2 t}e^{a|x|}.$$

И наконец, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ t \to 0}} u(x, t) = \varphi(x_0)$, если точка $x_0$ лежит внутри некоторого отрезка непрерывности $\varphi(x)$. Формула для $u(x, t)$, очевидно, дает решение задачи 1. Теорема существования тем самым доказана.

Отметим еще одно полезное свойство интеграла (1).

Свойство 5. *Пусть функция $\varphi(\xi)$ удовлетворяет неравенству $|\varphi(\xi)| < Me^{a|\xi|}$ и, кроме того, $\varphi(\xi) \equiv 0$ для $A < \xi < B$. Тогда в точках интервала $A < x < B$, $t = 0$ функция $u(x, t)$ равна нулю вместе с любыми производными по $x$ и $t$.*

Доказательство свойства 5 довольно легко вытекает из явного вида интеграла Пуассона, и мы не будем приводить это доказательство.

Покажем теперь, как с помощью интеграла Пуассона можно решить в некоторых простых случаях задачу 2. Для этого рассмотрим нечетную функцию $\varphi(\xi)$:

$$\varphi(\xi) = -\varphi(-\xi).$$

В этом случае формулу для $u(x, t)$ можно переписать так:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi - \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{0} \varphi(|\xi|)\, e^{-\frac{(x+|\xi|)^2}{4t}}\, d\xi.$$

Отсюда $u(0, t) = 0$, $u(x, t) = -u(-x, t)$.

Например, можно взять в качестве $\varphi(\xi)$ функцию $\operatorname{sign}\xi$, разрывную при $\xi = 0$. Для $t > 0$ соответствующее решение будет уже непрерывным. График $u(x, t_i)$ этого решения изображен для нескольких последовательных времен $t_0 = 0$, $t_1 > 0$, $t_2 > t_1$, $t_3 > t_2$ на рис. 6.

Ясно, что если $\varphi(\xi)$ антисимметрична не относительно точки $\xi = 0$, а относительно $\xi = A$, то и решение $u(x, t)$ будет антисимметричным относительно $\xi = A$. Иными словами, если

$$\varphi(A+\xi) + \varphi(A-\xi) = 0,$$

то

$$u(A+x, t) + u(A-x, t) = 0.$$

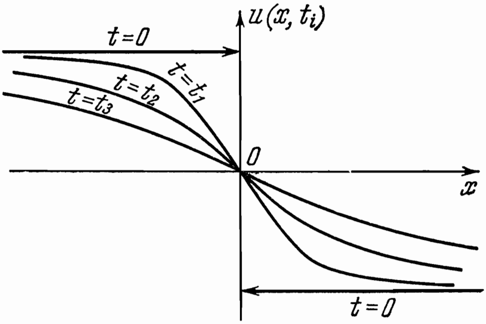


Рис. 6.

Пусть теперь $\varphi(\xi)$ задана нам только на отрезке $A < \xi < B$. Продолжим ее на всю прямую следующим образом:

$$\varphi(\xi) = -\varphi[2B - \xi + 2n(B-A)],$$

если $A + (2n+1)(B-A) < \xi < B + (2n+1)(B-A)$,

$$\varphi(\xi) = \varphi[\xi - 2n(B-A)],$$

если $A + 2n(B-A) < \xi < B + 2n(B-A)$.

Вся прямая разбивается при этом на примыкающие друг к другу равные отрезки длины $B - A$ каждый, а функция $\varphi(\xi)$ оказывается антисимметричной относительно каждого из концов этих отрезков. В частности, $\varphi(A+\xi) + \varphi(A-\xi) = 0$, $\varphi(B+\xi) + \varphi(B-\xi) = 0$. Решение $u(x, t)$, построенное по так продолженной функции $\varphi(\xi)$ с помощью интеграла Пуассона, будет при $t > 0$ непрерывной функцией, обращающейся в нуль при $x = A$ и при $x = B$

$$u(A, t) = 0, \qquad u(B, t) = 0.$$

Если первоначальная функция $\varphi(\xi)$ обращалась в нуль при $\xi = A$ и при $\xi = B$, то $u(x, t)$ будет непрерывной всюду при $t \geqslant 0$.

Мы видим, что так построенная функция $u(x, t)$ решает в области $A \leqslant x \leqslant B$, $t \geqslant 0$ задачу 2 с начальными данными

$u(x, 0) = \varphi(x)$ и граничными условиями $u(A, t) = \psi_A(t) = 0$, $u(B, t) = \psi_B(t) = 0$.

Если $\varphi(A) = \varphi(B) = 0$, то граничные и начальные данные согласованы и существует непрерывное решение, единственность которого была нами доказана. Доказательство единственности решения в случае несогласованных начальных данных было предложено в § 3 в качестве задачи. Доказательство существования в задаче 2 при произвольных непрерывных $\psi_A(t)$, $\psi_B(t)$ сводится к применению формулы Пуассона искусственным приемом, который мы опишем. Решение $U(x, t)$, построенное интегралом Пуассона по начальной функции

$$\varphi(\xi) = 1 - \operatorname{sign}\xi = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \xi > 0, \\ 2 & \text{при} \quad \xi < 0, \end{cases}$$

и рассматриваемое в квадранте $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, будет непрерывно всюду, кроме начала координат. При этом $U(0, t) = 1$, если $t > 0$, а при $x > 0$ $t \geqslant 0$ функция $U(x, t)$ непрерывна вместе со своими производными любого порядка. Как $U(x, t)$, так и все ее производные обращаются при $t = 0$, $x > 0$ в нуль (свойство 5 формулы Пуассона). Ясно, что если теперь положить $U(x, t) = 0$ для $t < 0$, $x \geqslant 0$, то мы получим ограниченную $U(x, t)$, непрерывную вместе со всеми своими производными всюду при $x \geqslant 0$, $-\infty < t < +\infty$, за исключением начала координат, и принимающую при $x = 0$ значения

$$U(0, t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t > 0, \\ 0 & \text{при} \quad t < 0. \end{cases}$$

По построению $U(x, t)$ во всех точках своей непрерывности удовлетворяет уравнению теплопроводности и, кроме того, $U(x, t) = 0$ для $t < 0$.

Совершенно аналогично показывается, что $U_{AB}(x, t)$, построенная при $t \geqslant 0$ по формуле Пуассона с использованием начальной функции

$$\varphi_{AB}(\xi) = -2n \quad \text{для} \quad A + 2n(B - A) < \xi < B + (2n+1)(B - A),$$

и продолженная нулем при $t < 0$, представляет собой решение, непрерывное вместе со всеми своими производными в полосе $A \leqslant x \leqslant B$, $+\infty > t > -\infty$, за исключением точки $x = A$, $t = 0$. Оно удовлетворяет следующим условиям:

$$U_{AB}(A, t) = \begin{cases} 1 & (t > 0), \\ 0 & (t < 0), \end{cases} \quad U_{AB}(B, t) = 0,$$

$$U_{AB}(x, t) = 0 \qquad (t < 0),$$

$$U_{AB}(x, 0) = 0 \qquad (A < x \leqslant B).$$

Решение задачи 2 при произвольной непрерывной $\psi_A(t)$ и при $\psi_B(t)=0$, $\varphi(\xi)=0$ дается формулой

$$u(x, t)=\int_0^T \psi_A(\tau)\frac{\partial U_{AB}(x, t-\tau)}{\partial t}\,d\tau.$$

То, что $u(x, t)$ при $A<x<B$ действительно является решением, проверяется дифференцированием интеграла по параметрам $x$, $t$. Очевидно, что

$$u(x, 0)=0 \quad \text{при} \quad A<x\leqslant B,$$
$$u(B, t)=0$$

В выполнении граничного условия при $x=A$ проще всего убедиться, если $\psi_A(t)$ кусочно постоянна и имеет разрывы только при $t=t_0=0$, $t=t_1$, $t=t_2$, $t=t_2$, ..., $t=t_k=T$. При этом

$$u(x, t)=\sum_{i=1}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\psi_A(t_i)\frac{\partial U_{AB}(x, t-\tau)}{\partial t}\,d\tau=$$

$$=\psi_A(t_0)\,U_{AB}(x, t-t_0)+\sum_{i=0}^{k-1}[\psi_A(t_{i+1})-\psi_A(t_i)]\,U_{AB}(x, t-t_{i+1})-$$
$$-\psi_A(T)\,U_{AB}(x, t-T),$$

$$\psi_A(t)=\psi_A(t_i) \qquad (t_i\leqslant t<t_{i+1}),$$

и выполнение граничных условий на интервале $0<t<T$ следует из свойств $U_{AB}(t)$.

Выбрав последовательность кусочно постоянных $\psi_A^{(j)}(t)$, равномерно сходящихся при $j\to\infty$ к $\psi_A(t)$ и построив последовательность решений

$$u^{(j)}(x, t)=\int_0^T\frac{\partial U_{AB}(x, t-\tau)}{\partial t}\psi_A^{(j)}(\tau)\,d\tau,$$

мы с помощью принципа максимума докажем, что $u^{(j)}(x, t)$ равномерно при $A\leqslant x\leqslant B$ $0\leqslant t\leqslant T$ сходятся к некоторой функции $\tilde{u}(x, t)$, непрерывной всюду, кроме точки $x=A$, $t=0$, и удовлетворяющей при $0<t<T$ граничному условию $\tilde{u}(A, t)=\psi_A(t)$. Каковы бы ни были $x_0$, $x_2$: $A<x_0<x_1<B$, производная $\dfrac{\partial U_{AB}(x, t)}{\partial t}$ ограничена и непрерывна в полосе $x_0\leqslant x\leqslant x_1$, и поэтому в этой полосе $u^{(j)}(x, t)$ равномерно сходятся к

$$\int_0^T\frac{\partial U_{AB}(x, t-\tau)}{\partial t}\psi_A(\tau)\,d\tau,$$

т. е. к $u(x, t)$. Совпадение $\tilde{u}(x, t)=u(x, t)$ доказано.

Нетрудно аналогичным приемом построить решение задачи 2 при произвольной $\psi_B(t)$ и при $\psi_A(t)=0$, $\varphi(x)=0$. Решение в общем случае ненулевых $\psi_A(t)$, $\psi_B(t)$, $\varphi(x)$ находится как сумма описанных частных решений.

Есть много разных способов, с помощью которых можно вывести формулу Пуассона для уравнения теплопроводности, справедливость которой мы обосновали. Наиболее короткий и изящный вывод основан на использовании преобразования Фурье. Здесь будет приведен не слишком простой эвристический вывод, иллюстрирующий использование групповой инвариантности. Он основан на идеях, которые были разработаны Л. И. Седовым [2] для получения решения сложной нелинейной гидродинамической задачи о сильном взрыве.

При этом выводе, поскольку мы будем пользоваться физическими соображениями, нам будет удобно рассматривать уравнение с неравными единице коэффициентами $C$ (теплоемкость) и $K$ (теплопроводность), которые предполагаются постоянными:

$$\frac{\partial Cu}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Это равенство для достаточно гладких $u(x, t)$ эквивалентно выполнению по любому кусочно гладкому замкнутому контуру интегрального тождества

$$\oint Cu\,dx+K\frac{\partial u}{\partial x}\,dt=0,$$

выражающего собой закон сохранения количества тепла. Если вспомнить приводившийся в § 3 вывод уравнения теплопроводности, то легко заметить, что он как раз состоял в получении закона сохранения тепла для бесконечно малого параллелепипеда. Интегральным тождеством, которое было выписано, нам будет удобно в некоторый момент воспользоваться.

Пусть теперь $u(x, t)$ — некоторое решение уравнения теплопроводности. Выбрав постоянные $\alpha>0$, $\lambda>0$, сделаем замену переменных

$$x=\alpha z \quad (z=x/\alpha), \qquad t=\lambda s \quad (s=t/\lambda),$$

положив

$$u(x, t)=u(\alpha z, \lambda s)=v(z, s).$$

Выясним, какому уравнению удовлетворяет $v(z, s)$. Для этого сосчитаем производные

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dz}=\alpha\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial s}=\lambda\frac{\partial u}{\partial t}.$$

С помощью этих равенств из уравнения

$$\frac{\partial Cu}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

следует, что

$$\frac{\partial Cv}{\partial s} = \frac{\lambda}{\alpha^2} \frac{\partial}{\partial z}\left(K \frac{\partial v}{\partial z}\right).$$

Предположив, что параметры $\lambda$ и $\alpha$ связаны между собой равенством $\lambda = \alpha^2$, мы видим, что если $u(x, t)$ является решением нашего уравнения, то $u(\alpha x, \lambda t)$ тоже будет решением. Из линейности уравнения можно сделать вывод, что и функция

$$\gamma u(\alpha x, \lambda t) \quad (\lambda = \alpha^2)$$

тоже является решением при любом постоянном $\gamma$.

Будем рассматривать только такие решения, для которых при любом $t > 0$ сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Cu(x, t)\, dx = Q(t);$$

$Q(t)$ — полное количество тепла в момент времени $t$ при $-\infty < x < +\infty$. Наряду с решением $u(x, t)$ рассмотрим еще решение $w(x, t) = \gamma u(\sqrt{\lambda}x, \lambda t)$ и сосчитаем полное количество тепла для этого решения в момент времени $t$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Cw(x, t)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} C\gamma u(\sqrt{\lambda}x, \lambda t)\, dx =$$

$$= \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} Cu(\sqrt{\lambda}x, \lambda t)\, d(\sqrt{\lambda}x) = \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} Cu(z, \lambda t)\, dz = \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}} Q(\lambda t).$$

Если положить $\gamma = \sqrt{\lambda}$, то мы будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Cw(x, t)\, dx = Q(\lambda t).$$

В дальнейшем нам нужно будет рассматривать решение, для которого полное количество тепла с течением времени не меняется, т. е. $Q(t) = Q = \text{const}$. Из наших рассуждений вытекает, что если для решения $u(x, t)$ полное количество тепла равно $Q$, то и для $w(x, t) = \sqrt{\lambda}\, u(\sqrt{\lambda}x, \lambda t)$ полное количество тепла будет тем же самым.

Мы построили однопараметрическую группу преобразований (параметр $\lambda$), переводящих в себя множество решений уравнения теплопроводности с одинаковым постоянным количеством тепла $Q$. Интересно представить себе, как преобразуются начальные данные таких решений. Пусть $u(x, 0) = \varphi(x)$. Тогда $w(x, 0) = \sqrt{\lambda}\varphi(\sqrt{\lambda}x)$. На рис. 7 изображены $u(x, 0)$, $w(x, 0)$ в случае, если $\lambda > 1$. Чтобы получить $w(x, 0)$ из $u(x, 0)$, надо сжать график в $\sqrt{\lambda}$ раз по $x$ и вытянуть его в $\sqrt{\lambda}$ раз по $\varphi$.

На этом мы заканчиваем подготовительную работу и переходим собственно к выводу. Рассмотрим область $-\infty < x < \infty$, $t \geqslant 0$ и постараемся в этой области найти решение уравнения

$$\frac{\partial Cu}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

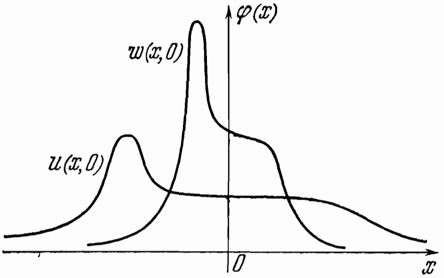

Рис. 7.

которое отвечало бы при $t = 0$ некоторым специальным начальным данным. Эти начальные данные нельзя представить себе заданными в виде обычной функции $u(x, 0) = \varphi(x)$. Для их описания должно быть использовано специальное понятие «обобщенной функции». Мы не будем на этом понятии останавливаться и ограничимся нестрогим, но наглядным описанием.

Представим себе, что при $t = 0$ на плоскости $x = 0$ (в пространстве $x$, $y$, $z$) выделилось некоторое количество тепла. А именно, пусть на единицу площади этой плоскости выделилось $Q$ калорий. Из физических соображений ясно, что решение, которое отвечает такому начальному впрыскиванию тепла, в любой момент времени $t$ будет распределением тех же $Q$ калорий:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Cu(x, t)\, dx = Q.$$

При $t = 0$ все тепло сосредоточено лишь при $x = 0$, т. е. $\lim\limits_{t \to 0} u(x, t) = 0$, если $x \neq 0$. Ясно, что $\max\limits_{x} u(x, t)$ должен стремиться к $\infty$ при $t \to 0$ и при малых $t$ этот максимум обязан достигаться где-то вблизи $x = 0$.

Пусть нам удалось найти некоторое решение $u(x, t)$ так поставленной задачи. Выберем некоторый параметр $\lambda > 0$ и рассмотрим еще решение $w(x, t) = \sqrt{\lambda}\, u(\sqrt{\lambda}\, x, \lambda t)$. Мы знаем, что для любого $t > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Cw(x, t)\, dx = Q.$$

Кроме того, очевидно, что при $x \neq 0$

$$\lim_{t \to 0} w(x, t) = \sqrt{\lambda} \lim_{t \to 0} u(\sqrt{\lambda} x, \lambda t) = 0.$$

Решение $w(x, t)$ таким образом удовлетворяет всем тем условиям, которые мы наложили на $u(x, t)$. Следовательно, либо мы можем построить для нашей задачи о «впрыскивании» тепла бесконечное множество решений $w(x, t) = \sqrt{\lambda} u(\sqrt{\lambda} x, \lambda t)$, либо все эти решения должны совпадать.

Примем гипотезу о единственности решения поставленной задачи. Из этой гипотезы вытекает равенство $w(x, t) = u(x, t)$, а следовательно, следующее функциональное соотношение, которому должно удовлетворять решение

$$u(x, t) = \sqrt{\lambda}\, u(\sqrt{\lambda} x, \lambda t).$$

Фиксируем некоторую точку $(x, t)$ и выберем $\lambda = 1/t$. Получаем

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right) = \frac{1}{\sqrt{t}} g\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

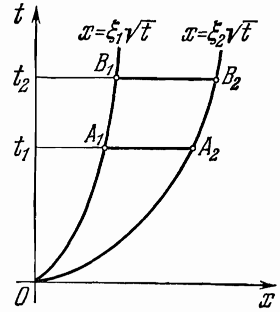


Рис. 8.

Для того чтобы найти функцию $g(\xi)$, достаточно подставить это выражение в уравнение теплопроводности. Тогда для $g(\xi)$ получится обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Мы пойдем немного другим путем. Воспользовавшись остроумным приемом Л. И. Седова, мы сумеем для $g(\xi)$ получить уравнение не второго, а первого порядка. Этот прием был предложен Л. И. Седовым не для уравнения теплопроводности, а для решения одной задачи газовой динамики.

Из равенства $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} g\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ следует, что интеграл

$$\int\limits_{\xi_1 \sqrt{t}}^{\xi_2 \sqrt{t}} Cu(x, t)\, dx = C \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} g(\xi)\, d\xi$$

не зависит от $t$. Иными словами, количество тепла, заключенное между любыми двумя параболами $x = \xi_1 \sqrt{t}$, $x = \xi_2 \sqrt{t}$ (рис. 8), не зависит от времени. Закон сохранения энергии (тепла) записывается в виде

$$\oint Cu\, dx + K \frac{\partial u}{\partial x} dt = 0.$$

(Интеграл берется по любому замкнутому контуру.) Мы уже отмечали, что это равенство эквивалентно уравнению теплопроводности.

Применим это интегральное тождество к контуру $A_1A_2B_2B_1A_1$, изображенному на рис. 8. Так как

$$\int_{A_1}^{A_2} Cu\,dx = \int_{B_1}^{B_2} Cu\,dx,$$

то

$$\int_{A_1}^{B_1} Cu\,dx + K\frac{\partial u}{\partial x}\,dt = \int_{A_2}^{B_2} Cu\,dx + K\frac{\partial u}{\partial x}\,dt.$$

В силу произвольности интервала времени $(t_1, t_2)$ при любых $t$ должно быть выполнено равенство

$$Cu(x, t)\frac{dx}{dt} + K\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=\xi_1\sqrt{t}} = Cu(x, t)\frac{dx}{dt} + K\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=\xi_2\sqrt{t}}.$$

Выразим теперь $u(x, t)$ через $g(x/\sqrt{t})$ и получим соотношение

$$\left[\frac{C}{\sqrt{t}}g\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\xi_1\frac{1}{2\sqrt{t}} + K\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{t}}g'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right]_{x=\xi_1\sqrt{t}} =$$
$$= \left[\frac{C}{\sqrt{t}}g\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\xi_2\frac{1}{2\sqrt{t}} + K\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{t}}g'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right]_{x=\xi_2\sqrt{t}}.$$

Следовательно,

$$C\frac{1}{2}\xi_1 g(\xi_1) + Kg'(\xi_1) = C\frac{1}{2}\xi_2 g(\xi_2) + Kg'(\xi_2).$$

Мы показали, что $C\cdot\frac{1}{2}\xi g(\xi) + Kg'(\xi)$ не зависит от $\xi$ и что, следовательно,

$$C\cdot\frac{1}{2}\xi g(\xi) + Kg'(\xi) = M.$$

(Выражение $\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}C\xi g(\xi) + Kg'(\xi)\right]$ представляет собой скорость, с которой тепло проходит в момент времени $t$ через параболу $x=\xi\sqrt{t}$ за счет теплопроводности и за счет того, что точка параболы, перемещаясь с ростом времени, «захватывает» все новые участки оси $x$ вместе с распределенным там теплом.)

Естественно предполагать, что при $t>0$ и при $x=0$ $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}}g\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ конечно и что $\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=0\\t>0}} = \frac{1}{t}g'(0) = 0$ (это просто соображения симметрии). Иными словами, $g(0)$ конечно, $g'(0)=0$. Ясно, что для этого $M$ должно быть равно 0. Итак, мы получили для $g(\xi)$ линейное уравнение

$$Kg'(\xi) + \frac{1}{2}C\xi g(\xi) = 0,$$

которое без труда интегрируется разделением переменных:

$$\frac{dg}{g} = -\frac{C}{2K}\xi\, d\xi,$$

$$g(\xi) = Ae^{-\frac{C}{4K}\xi^2}.$$

Для $u(x, t)$ мы приходим к формуле

$$u(x, t) = \frac{A}{\sqrt{t}} e^{-\frac{C}{4K}\frac{x^2}{t}}.$$

Постоянную $A$ определим из условия, в силу которого полное количество тепла нам задано,

$$\frac{Q}{C} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t)\, dx = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{C}{4K}\frac{x^2}{t}} d\frac{x}{\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{A\cdot 2\sqrt{K}}{\sqrt{C}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}\, d\eta = \frac{A\cdot 2\sqrt{K}}{\sqrt{C}}\sqrt{\pi}.$$

Отсюда $A = Q/(2\sqrt{KC\pi})$ и, следовательно,

$$u(x, t) = \frac{Q}{2\sqrt{KC\pi t}} e^{-\frac{Cx^2}{4Kt}}.$$

Непосредственным дифференцированием можно убедиться, что заданная этой формулой функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности, а качественное ее исследование показывает, что при $t \to 0$ и $u(x, t) \to 0$ при любом фиксированном $x \neq 0$. С другой стороны, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x, t)\, dx$ не зависит от $t$ и равен $\frac{Q}{C}$. Таким образом, можно считать, что построенное нами решение удовлетворяет поставленным условиям.

Ясно, что сумма решений

$$\sum_i \frac{Q_i}{2\sqrt{KC\pi t}} e^{-\frac{C(x-x_i)^2}{4Kt}}$$

тоже будет решением, отвечающим выделению при $t = 0$ энергий $Q_i$ в точках $x = x_i$.

Если в момент $t = 0$ нам задано начальное распределение температуры $u(x, 0) = \varphi(x)$, то его можно аппроксимировать выделением энергий $\varphi(x_i)\,\Delta x_i$ в точках $x_i$ ($\Delta x_i$ — интервал достаточно мелкого разбиения оси $x$, содержащий точку $x_i$). Соответствующее решение будет аппроксимироваться суммой

$$u(x,\ t) \approx \sum_i \frac{\varphi(x_i)\,\Delta x_i}{2\sqrt{KC\pi t}} e^{-\frac{C(x-x_i)^2}{4Kt}}.$$

Если теперь формально перейти к пределу при $\Delta x_i \to 0$, получится интегральная формула

$$u(x,\ t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{2\sqrt{KC\pi t}} e^{-\frac{C(x-\xi)^2}{4Kt}}\,d\xi,$$

законность которой была продемонстрирована ранее. Там, правда, мы для простоты считали, что $K = C = 1$.

В заключение рассмотрим один интересный класс решений уравнения теплопроводности. Это — решения, имеющие вид бегущей волны стационарной формы, распространяющейся с постоянной скоростью: $u = f(x - wt)$. Подставим эту формулу в уравнение

$$C\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

и получим для $f(\xi)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-Cwf' = (Kf')'.$$

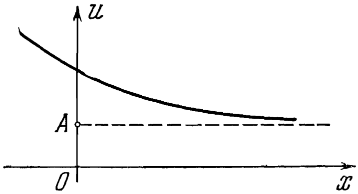

Рис. 9.

Это линейное уравнение с постоянными коэффициентами может быть без труда проинтегрировано

$$f(\xi) = A + Be^{-\frac{Cw}{K}\xi},$$

$$u(x,\ t) = A + Be^{-\frac{Cw}{K}(x-wt)}.$$

График этого решения в некоторый фиксированный момент времени имеет вид, изображенный на рис. 9. Постоянная $A$ представляет собой температуру среды «на бесконечности», т. е. там, куда тепло еще не дошло. Решениями такого вида описывается, например, прогрев вещества, по которому со скоростью $w$ распространяется вправо детонационная волна, где реакция поддерживает постоянную температуру

$$f(x - wt)\,|_{x-wt=0} = u_0$$

($x = wt$ — уравнение движения детонационной волны). Температуру на бесконечности обозначим $u_\infty$. Определив постоянные $A$, $B$, мы получим следующую формулу для температуры в зоне прогрева:

$$u(x,\ t)=u_\infty+(u_0-u_\infty)\,e^{-\frac{Cw}{K}(x-wt)}.$$

Из формулы видно, что толщина зоны прогрева тем меньше, чем больше скорость $w$. Это понятно: тепло не успевает далеко распространиться от источника нагрева за то время, пока источник (детонационная волна) его не догонит.

Интересно, что получение решений вида $u=f(x-wt)$ может быть сведено к квадратурам даже в случае нелинейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial E(u)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[K(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

При этом мы получаем для $f$ обыкновенное уравнение

$$-w[E(f)]'=[K(f)f']',$$

которое можно один раз проинтегрировать:

$$wE(f)+K(f)f'=A=\text{const}.$$

Полученное уравнение первого порядка интегрируется так:

$$d\xi=\frac{K(f)\,df}{A-wE(f)}\quad(\xi=x-wt).$$

Разберем в качестве примера уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u^m\frac{\partial u}{\partial x}\right),\qquad m\geqslant 1. \tag{2}$$

К такого рода уравнениям приводятся уравнения фильтрации жидкости в пористых средах ($m=1$) и уравнения лучистой теплопроводности в средах, нагретых до температуры звезд, т. е. до температур порядка десятков миллионов градусов.

Положим постоянную интегрирования $A$ равной нулю. Мы будем иметь

$$d\xi=-\frac{f^m}{wf}\,df,$$

$$f^m=-mw(\xi-\xi_0),$$

$$f(\xi)=\sqrt[m]{-mw\xi}\quad(\text{положили } \xi_0=0),$$

$$u(x,\ t)\doteq\sqrt[m]{mw(wt-x)}.$$

График этого решения для некоторого фиксированного $t$ и для таких $x$, что $wt-x>0$, изображен на рис. 10. Таким образом, функция

$$u_1(x,\ t)=\begin{cases}\sqrt[m]{mw(wt-x)} & \text{при} \quad x-wt<0,\\ 0 & \text{при} \quad x-wt\geqslant 0\end{cases}$$

является гладкой функцией и удовлетворяет нашему уравнению всюду, кроме прямой $x=wt$. На этой прямой $u_1(x,\ t)$ не имеет даже первых производных (при $m=1$ есть односторонние производные справа и слева, но они различны).

Как мы уже отмечали, для правильного описания физического процесса важно не столько выполнение дифференциального уравнения теплопроводности, сколько выполнение соотношения $\oint Cu\,dx+K\frac{\partial u}{\partial x}dt=0$ по любому кусочно гладкому контуру. Для нашего уравнения это равенство имеет вид

$$\oint u\,dx+u^m\frac{\partial u}{\partial x}dt=0. \tag{3}$$

При выводе уравнения теплопроводности именно подобное соотношение и бралось за основу, так как оно выражает закон сохра-

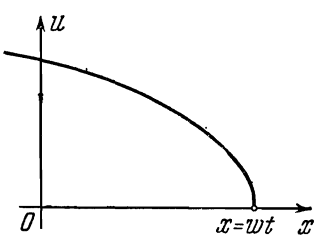


Рис. 10.

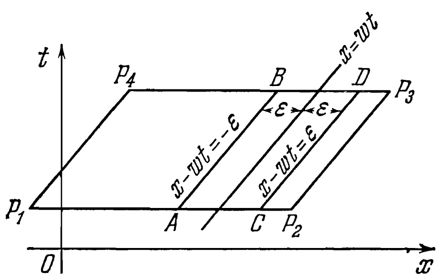


Рис. 11.

нения энергии. Нетрудно проверить, что для гладких функций выполнение соотношения (3) для любого кусочно гладкого контура и справедливость уравнения (2) эквивалентны (это следует из формулы Грина, примененной к интегралу (3)). Однако для функций, имеющих где-либо разрывы или разрывы производных, более естественно за определение решения брать равенство (3). Такие функции называются *обобщенными решениями* уравнения (2), и мы остановимся подробнее на этом важном понятии и на его строгой математической постановке позднее, на примере гиперболических уравнений.

Читателю рекомендуется проверить выполнение равенства (3) для функции $u_1(x,\ t)$. Достаточно ограничиться лишь контуром $P_1P_2P_3P_4$, показанным на рис. 11. Проверка равенства по любому другому кусочно гладкому контуру проводится таким же образом с небольшими техническими усложнениями.

Чтобы показать, какие подводные камни могут встретиться при рассмотрении негладких решений, рассмотрим функцию

$$u_2(x,\ t)=\begin{cases} x^{\frac{1}{m+1}} & \text{при} \quad x>0,\\ 0 & \text{при} \quad x\leqslant 0,\end{cases}$$

внешне очень похожую на рассмотренную функцию $u_1(x,\ t)$. Легко проверить, что она также удовлетворяет уравнению (2) всюду, кроме оси $x=0$. Тем не менее функция $u_2$ уже не будет обобщенным решением этого уравнения — она не удовлетворяет соотношению (3). Для того чтобы убедиться в этом, возьмем контур $ABCDA$, изображенный на рис. 12.

Интеграл по $AD$ равен нулю. Легко видеть, что интегралы по $AB$ и по $CD$ стремятся к нулю при $\varepsilon\to 0$, но

$$\int\limits_B^C u_2\,dx+u_2^m\frac{\partial u_2}{\partial x}\,dt=\int\limits_{t_1}^{t_2} u_2^m\frac{\partial u_2}{\partial x}\,dt=$$

$$=(t_2-t_1)\,\varepsilon^{\frac{m}{m+1}}\frac{1}{m+1}\,\varepsilon^{\frac{1}{m+1}-1}=\frac{t_2-t_1}{m+1}\not\to 0$$

при $\varepsilon\to 0$.

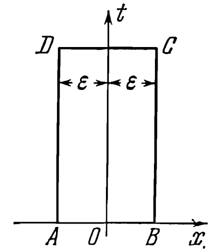


Рис. 12.

Физически рассматриваемое решение $u_2(x,\ t)$ описывает распределение температур при наличии в точке $x=0$ оттока тепла постоянной мощности.

На этом мы заканчиваем краткий обзор основных фактов, связанных с уравнением теплопроводности.

## § 5. Гиперболические уравнения

Простейшие примеры гиперболических уравнений с частными производными $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$, уравнения для звуковых волн. Задача Коши для этих уравнений и ее решение с помощью характеристик. Гиперболическое уравнение второго порядка. Формула Даламбера. Интеграл энергии для звуковых волн. Доказательство единственности решения, основанное на использовании интеграла энергии. Смешанная задача и построение ее решений. Расширение системы уравнений включением в нее уравнений для производных. Интегралы энергии в смешанной задаче и теорема единственности. Интегральные оценки производных. Операторная точка зрения. Понятие о пополнении функциональных пространств, элементами которых являются начальные данные и решения.

В предыдущих параграфах мы уже ознакомились с некоторыми типичными примерами задач, которые математическая физика ставит в терминах уравнений с частными производными. Здесь мы продолжим рассмотрение таких примеров.

Остановимся сначала на простейшем из уравнений с частными производными, а именно на уравнении

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

Чтобы получить формулу его общего решения, проделаем следующее построение, известное из курса обыкновенных дифференциальных уравнений.

Нарисуем на плоскости $(x, t)$ прямые линии, вдоль которых $\frac{dx}{dt}=1$ (рис. 13). Уравнение каждой из таких прямых может быть представлено в виде $x-t=\text{const}$. Только постоянная (const) будет для каждой из этих прямых слоя. Значения постоянных как бы нумеруют эти прямые. Мы будем говорить, что постоянная $c$ в уравнении $x-t=c$ является «номером» прямой нашего семейства, задаваемой этим уравнением.

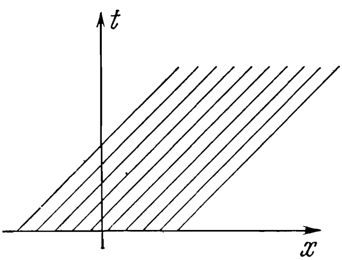


Рис. 13.

Рассмотрим какую-либо функцию $u(x, t)$ и вычислим ее производную $\frac{du}{dt}$ вдоль нашей прямой. Ясно, что функцию $u(x, t)$ надо предполагать дифференцируемой. Вместо слова «дифференцируемая» мы будем употреблять слово «гладкая». Более точно — слово «гладкая» означает, что рассматриваемая нами функция имеет столько производных или даже непрерывных производных, сколько нужно для законности тех выкладок или рассуждений, которые мы собираемся проводить. Этим термином мы будем и в дальнейшем часто пользоваться. Итак, вычисляем производную $\frac{du}{dt}$ вдоль некоторой прямой $\frac{dx}{dt}=1$:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Из формулы для этой производной видно, что уравнение $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$ означает постоянство $u(x, t)$ вдоль каждой из прямых $\frac{dx}{dt}=1$. Конечно, на разных прямых эта постоянная может быть различной. Таким образом, значение $u(x, t)$ в точке $(x, t)$ зависит лишь от «номера» той прямой, на которой лежит точка, т. е. $u(x, t)=f(x-t)$. (Значение $x-t$ является «номером» прямой.) Ясно, что для того чтобы у функции $u(x, t)$ существовали производные $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, надо, чтобы функция $f(\xi)$ была дифференцируемой. При этом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -f'(x-t),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x-t).$$

Отсюда ясно, что любая гладкая $f$ дает решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Мы говорим, что *формула* $u = f(x-t)$ *дает общее решение этого уравнения.*

Теперь мы уже можем перейти к обсуждению тех задач, которые разумно ставить для этого уравнения. Под задачей мы понимаем совокупность дополнительных условий, которые надо задать, чтобы выделить какое-либо конкретное решение. Рассмотрим опять полоску прямых $x-t=\text{const}$ на плоскости $(x, t)$. На рис. 14 мы дополнительно изобразили некоторую кривую $\gamma$, которая с каждой из прямых $x-t=\text{const}$ пересекается только в одной точке. Пусть $\gamma$ задана в параметрическом виде $x=\xi(s)$, $t=\tau(s)$ и пусть вдоль этой кривой задана функция $\varphi=\varphi(s)$.

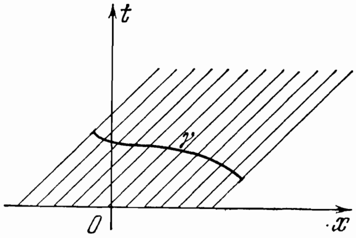


Рис. 14.

Ясно, что мы можем на прямых нашей полоски так определить функцию $u=u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, чтобы в точках кривой $\gamma$ она принимала заданные значения $\varphi=\varphi(s): u|_\gamma = \varphi$. Действительно, решение должно иметь вид

$$u = f(x-t).$$

Вид функции $f$ может быть определен следующим образом. Найдем для каждого значения $x-t$ величину $s$ из уравнения $x-t = \xi(s)-\tau(s)$. Это $s$ отвечает точке пересечения прямой $x-t = \text{const}$ с кривой $\gamma$ и, по нашему условию, единственно. После этого положим $f(x-t)=\varphi(s)$. Можно доказать, что если $\xi(s)$, $\tau(s)$, $\varphi(s)$ являются гладкими функциями $(\xi'(s)-\tau'(s)\neq 0)$, то построенная нами $f(x-t)$ тоже будет гладкой, а следовательно, она даст решение изучаемого уравнения.

Упражнение. Из неравенства $\xi'(s)-\tau'(s)\neq 0$ вытекает, что каждая из прямых $x-t=\text{const}$ пересекается с кривой не более, чем в одной точке. Докажите это.

Мы сейчас не будем аккуратно проводить доказательство теоремы существования. В дальнейшем эта теорема нами будет доказана совсем другим способом, который, правда, не столь нагляден, но зато допускает далеко идущие и очень важные обобщения.

Наглядные соображения, приводимые сейчас, нужны для того, чтобы как можно скорее и проще подойти к предварительной

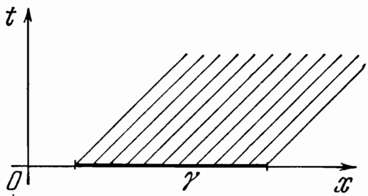


Рис. 15.

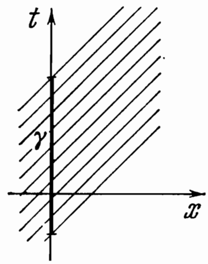


Рис. 16.

формулировке основных фактов из теории одного важного класса уравнений математической физики. Вернемся к нашей задаче. В качестве кривой $\gamma$ мы можем выбрать отрезок оси $x$ или отрезок оси $t$, как это показано на рисунках 15 и 16. Можно даже (рис. 17) выбрать в качестве кривой $\gamma$ примыкающие друг к другу отрезки оси $x$ и оси $t$. Правда, при этом придется специально

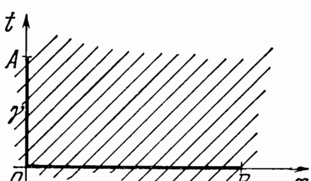


Рис. 17.

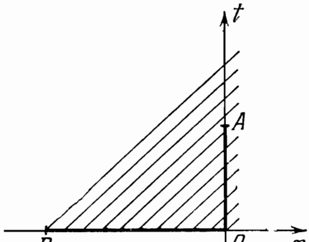


Рис. 18.

позаботиться, чтобы элементы функции $\varphi(s)$, заданные на отрезках $AO$ и $OB$, определили функцию $f(x-t)$, которая дифференцируема на прямой $x=t$, проходящей через точку $O$.

Вопрос. Каким условиям должны для этого удовлетворять элементы $\varphi(s)$ на отрезках $AO$ и $OB$?

А вот такие отрезки осей $x$, $t$, какие изображены на рис. 18, использовать для постановки задачи нельзя, так как здесь есть прямые $x-t=\text{const}$, которые встречаются как с отрезком $AO$, так и с отрезком $OB$. Вдоль каждой из прямых $x-t=\text{const}$ значение $u(x, t)$ является постоянным, а следовательно, значения $\varphi$ на отрезке $OA$ задавать произвольно нельзя. Они однозначно определяются после задания $\varphi$ на $BO$.

Теперь остановимся на вопросе о единственности решения. Предположим, что мы задаем значения $\varphi(s)$ на отрезке $AB$ оси $x$. Решение определится и притом однозначно внутри полосы, образованной прямыми $x-t=\text{const}$, пересекающими отрезок $AB$. Если мы продолжим гладким образом $\varphi(s)$ на больший отрезок $ab$ (рис. 19), то мы сможем построить решение в более широкой полосе, границы которой помечены пунктиром. Так как такое

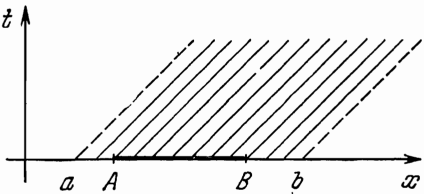


Рис. 19.

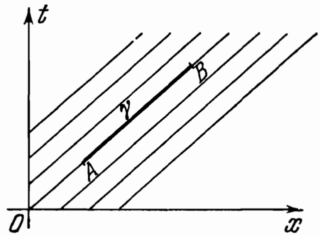


Рис. 20.

продолжение $\varphi(s)$ может быть выполнено многими способами, то и решение в нашей более широкой полосе заданием $\varphi(s)$ на отрезке $AB$ определяется неоднозначно.

Полоса, образованная прямыми $x-t=\text{const}$, пересекающимися с $AB$, является областью единственности.

Разберем еще случай, когда в качестве кривой $\gamma$ выбран отрезок $AB$ одной из прямых $x-t=\text{const}$, например, прямой $x-t=0$ (рис. 20). В этом случае ясно, что $\varphi(s)$ произвольно задавать нельзя, так как $u|_\gamma=\varphi(s)$, а с другой стороны, вдоль отрезка $\gamma$ производная $\frac{du}{dt}=0$, откуда следует, что функция $\varphi(s)$ должна быть выбрана постоянной. Иначе задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}=0, \\ u|_\gamma=\varphi(s) \end{cases}$$

не будет иметь никакого решения. Если же мы выбрали $\varphi(s)=\varphi_0=\text{const}$, то задача будет иметь решение $u=f(x-t)$, где функция $f(\xi)$ подчинена только условию $f(0)=\varphi_0$, а в остальном — произвольна. Область единственности в этом случае как бы стягивается в одну прямую $x-t=0$.

Мы видим, что выбор кривых $\gamma$, на которых разумно задавать дополнительные условия, не может быть произвольным. Нам надо учитывать расположение $\gamma$ относительно прямых $x-t=\text{const}$. Эти прямые носят название *характеристик* уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$. Мы пока не даем важному понятию характеристики какого-либо общего определения. Такое определение будет дано в следующем параграфе. Теперь же нам будет достаточно того качественного описания, которое мы разобрали.

В дальнейшем, как правило, мы будем в качестве кривой $\gamma$ выбирать отрезок оси $x$ и разыскивать решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$ в характеристической полосе, опирающейся на этот отрезок, только для времени $t\geqslant 0$. Дополнительное условие $u|_\gamma=\varphi(s)$ в этом случае естественно называть *начальным условием* или *начальными данными*.

Ясно, что все рассказанное для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$ может быть почти дословно повторено и для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0$. Его общее решение записывается в виде $u=f(x-at)$, откуда видно, что роль прямых $x-t=\text{const}$ в этом случае будут играть прямые $x-at=\text{const}$, которые мы будем называть характеристиками уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0$.

Разберем теперь более сложный пример системы

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}+a_1\frac{\partial u_1}{\partial x}=0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t}+a_2\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \end{cases}$$

состоящей из двух независимых уравнений. Решение первого из уравнений системы имеет вид $u_1=f(x-a_1t)$. Решение второго: $u_2=g(x-a_2t)$. Зададим для нашей системы начальные данные на отрезке $AB$ оси $x$ (т. е. при $t=0$). Отрезок $AB$ по-прежнему будем обозначать через $\gamma$:

$$u_1|_\gamma=\varphi(x),$$
$$u_2|_\gamma=\psi(x).$$

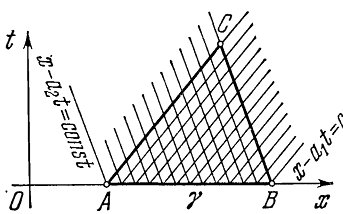


Рис. 21.

На рис. 21 изображены на плоскости $(x, t)$ те полуполосы $(t\geqslant 0)$, в которых мы можем определить значения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$. Для большей наглядности, мы выбрали различными знаки коэффициентов $a_1$, $a_2$ $(a_1>0,\ a_2<0)$.

Ясно, что говорить о решении системы имеет смысл только внутри треугольника $ABC$, являющегося пересечением (в теоретико-множественном смысле) обеих характеристических полос, опирающихся на отрезок $AB$; только внутри этого треугольника решение будет определено однозначно.

Прямые $x - a_1 t = \mathrm{const}$, $x - a_2 t = \mathrm{const}$ естественно назвать *характеристиками* рассматриваемой системы, а треугольник $ABC$, ограниченный характеристиками, *характеристическим треугольником.*

Пример системы, который мы сейчас рассмотрели, может показаться надуманным. Поэтому мы продемонстрируем, как к этому уже изученному случаю может быть приведена существенно более сложная, на первый взгляд, система

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{aligned}\right. \tag{1}$$

Эта система описывает распространение плоских звуковых волн (малых возмущений) в покоящейся среде. Здесь $u$ — скорость возмущенной среды, а $p$ — давление в этой среде. Постоянные $\rho_0$, $c_0$ связаны со свойствами покоящейся среды: $\rho_0$ — ее плотность, а $c_0$ — постоянная, характеризующая сжимаемость. Уравнения (1) называются также *уравнениями акустики*. Вывод этих уравнений можно найти в курсе физики или механики сплошных сред. Мы сейчас покажем, что систему, описывающую распространение звуковых волн, можно несложным преобразованием и переобозначением переменных привести к тому простейшему виду, который уже был нами рассмотрен.

Для этого умножим второе уравнение на $1/\rho_0 c_0$. Полученное равенство

$$\frac{\partial \dfrac{p}{\rho_0 c_0}}{\partial t} + c_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

прибавим к первому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

В результате получим равенство

$$\frac{\partial\left(u + \dfrac{p}{\rho_0 c_0}\right)}{\partial t} + c_0 \frac{\partial\left(u + \dfrac{p}{\rho_0 c_0}\right)}{\partial x} = 0.$$

Если сложение равенств заменить вычитанием, то получится другое аналогичное уравнение:

$$\frac{\partial\left(u - \dfrac{p}{\rho_0 c_0}\right)}{\partial t} - c_0 \frac{\partial\left(u - \dfrac{p}{\rho_0 c_0}\right)}{\partial x} = 0.$$

Теперь нам остается только обозначить

$$u+\frac{p}{\rho_0 c_0}=u_1,\quad u-\frac{p}{\rho_0 c_0}=u_2,$$

чтобы прийти к системе уже разобранного вида

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+c_0\frac{\partial u_1}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}-c_0\frac{\partial u_2}{\partial x}=0.$$

Общее решение такой системы имеет, как мы знаем, вид

$$u_1=f(x-c_0t),\quad u_2=g(x+c_0t).$$

Выражая $u_1$, $u_2$ через $u$, $p$, получаем

$$u+\frac{p}{\rho_0 c_0}=f(x-c_0t),\quad u-\frac{p}{\rho_0 c_0}=g(x+c_0t)$$

или, окончательно:

$$u=\frac{f(x-c_0t)+g(x+c_0t)}{2},\quad p=\rho_0c_0\frac{f(x-c_0t)-g(x+c_0t)}{2}.$$

Эти формулы дают представление общего решения уравнений распространения звука.

Системы, которые можно привести к нескольким независимым уравнениям первого порядка, каждое из которых содержит лишь одну независимую функцию, принадлежат к так называемому классу гиперболических уравнений, подробному изучению которого посвящена глава II.

Пусть нам известно распределение давления $p$ и скорости $u$ в начальный момент $t=0$ на некотором интервале $x_1<x<x_2$. Как мы уже видели, это начальное распределение однозначно определит решение в характеристическом треугольнике, опирающемся своим основанием на интервал $(x_1, x_2)$. Этот треугольник определяется неравенством $t>0$, $x-c_0t>x_1$, $x_0+c_0t<x_2$.

Величины $u\pm\frac{p}{\rho_0c_0}$ носят название *римановых инвариантов*, по фамилии немецкого математика Римана, который ввел их в аналогичном, но более сложном случае. Формула

$$u+\frac{p}{\rho_0c_0}=f(x-c_0t)$$

показывает, что распределение этого риманова инварианта перемещается без искажения формы вправо со скоростью $c_0$. Это дает основание для того, чтобы назвать величину $c_0$ *скоростью распространения возмущений звуковых волн* или, короче, *скоростью звука*.

Аналогично формула

$$u - \frac{p}{\rho_0 c_0} = g(x + c_0 t)$$

показывает, что распределение этого, другого риманова инварианта перемещается без искажения влево, опять-таки со скоростью звука $c_0$.

Подберем функции $f$, $g$ так, чтобы решение, даваемое полученными выше формулами, удовлетворяло начальным данным:

$$u(x, 0) = u|_{t=0} = \varphi(x),$$
$$p(x, 0) = p|_{t=0} = \psi(x),$$

заданным на отрезке $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Очевидно, достаточно положить:

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2}, \quad \frac{\psi(x)}{\rho_0 c_0} = \frac{f(x) - g(x)}{2}.$$

Отсюда

$$f(z) = \varphi(z) + \frac{\psi(z)}{\rho_0 c_0}, \quad g(z) = \varphi(z) - \frac{\psi(z)}{\rho_0 c_0},$$

$$\begin{cases} u + \dfrac{p}{\rho_0 c_0} = \varphi(x - c_0 t) + \dfrac{\psi(x - c_0 t)}{\rho_0 c_0}, \\ u - \dfrac{p}{\rho_0 c_0} = \varphi(x + c_0 t) - \dfrac{\psi(x + c_0 t)}{\rho_0 c_0}. \end{cases}$$

Теперь нетрудно получить формулы

$$u = \frac{\varphi(x - c_0 t) + \varphi(x + c_0 t)}{2} + \frac{\psi(x - c_0 t) - \psi(x + c_0 t)}{2\rho_0 c_0},$$

$$p = \frac{\psi(x - c_0 t) + \psi(x + c_0 t)}{2} + \rho_0 c_0 \frac{\varphi(x - c_0 t) - \varphi(x + c_0 t)}{2},$$

дающие решение так называемой задачи Коши для уравнений акустики. З а д а ч а  К о ш и для системы (1) ставится так: *требуется найти решение системы* (1) *по заданным начальным данным* $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $p|_{t=0} = \psi(x)$. Приведенные выше рассуждения позволяют обосновать как существование, так и единственность решения задачи Коши внутри характеристического треугольника.

Часто вместо системы уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_0} \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

рассматривают уравнение второго порядка для давления $p$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0,$$

которое получается, если первое уравнение системы продифференцировать по $x$, а второе по $t$, а затем исключить из них смешанную производную $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}$. Это уравнение второго порядка обычно называется *уравнением малых колебаний струны*, так как такой же вид имеет уравнение, описывающее колебания натянутых нитей — струн. Именно в связи с исследованием колебаний струн оно и появилось впервые в математических исследованиях.

Это уравнение может быть переписано в следующей форме:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) p = 0.$$

Обозначив через $q$ выражение $\frac{\partial p}{\partial t} + c_0 \frac{\partial p}{\partial x}$, мы приходим к системе первого порядка, эквивалентной этому уравнению,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} + c_0 \dfrac{\partial p}{\partial x} = q, \\ \dfrac{\partial q}{\partial t} - c_0 \dfrac{\partial q}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Второе из уравнений системы имеет общее решение

$$q = G(x + c_0 t) = 2c_0 g'(x + c_0 t).$$

(В дальнейшем нам будет удобно второе обозначение произвольной гладкой функции $G$ через производную некоторой другой функции $g$.) Уравнение для $p$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c_0 \frac{\partial p}{\partial x} = 2c_0 g'(x + c_0 t)$$

может быть переписано теперь так:

$$\frac{\partial\,[p - g(x + c_0 t)]}{\partial t} + c_0 \frac{\partial\,[p - g(x + c_0 t)]}{\partial x} = 0,$$

что позволяет выписать его общее решение

$$p - g(x + c_0 t) = f(x - c_0 t),$$
$$p(x,\ t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t).$$

Последняя формула, по-видимому, впервые была найдена Даламбером (1747 г.).

В 1748 году Эйлер выразил $f$, $g$ через значения при $t = 0$ функций $p(x,\ t)$, $p_t(x,\ t)$:

$$p(x,\ 0) = \varphi(x), \qquad p_t(x,\ 0) = \psi(x). \tag{2}$$

Это привело его к формуле

$$p(x,\ t) = \frac{\varphi(x + c_0 t) + \varphi(x - c_0 t)}{2} + \frac{1}{2c_0} \int\limits_{x - c_0 t}^{x + c_0 t} \psi(\xi)\, d\xi,$$

которую часто тоже называют *формулой Даламбера*, несмотря на то, что Даламбер считал ее незаконной. Однако название установилось, и мы будем его придерживаться.

Эта формула дает решение задачи Коши для уравнения $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$. *Для этого уравнения второго порядка задача Коши ставится так: требуется найти решение, удовлетворяющее начальным данным* (2). Чтобы получить формулу решения задачи Коши, мы должны функции $f$, $g$ в представлении общего решения

$$p(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x_0 + c_0 t)$$

определить из условий

$$f(x) + g(x) = p(x, 0) = \varphi(x),$$

$$-c_0 f'(x) + c_0 g'(x) = p_t(x, 0) = \psi(x).$$

Продифференцировав первое равенство, приходим к системе уравнений для производных $f'$, $g'$, которая решается так:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\varphi'(x) - \frac{1}{2c_0}\psi(x),$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}\varphi'(x) + \frac{1}{2c_0}\psi(x).$$

Интегрируем эти равенства:

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2c_0}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\,d\xi + a,$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c_0}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\,d\xi + b.$$

Здесь $x_0$ — произвольная точка из области задания начальных данных, $a$ и $b$ — постоянные интегрирования. Однако эти постоянные не независимы. Из равенства $f(x) + g(x) = \varphi(x)$ заключаем, что $b = -a$. Итак:

$$p(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t) =$$

$$= \left[\frac{\varphi(x - c_0 t)}{2} - \frac{1}{2c_0}\int_{x_0}^{x - c_0 t}\psi(\xi)\,d\xi + a\right] +$$

$$+ \left[\frac{\varphi(x + c_0 t)}{2} + \frac{1}{2c_0}\int_{x_0}^{x + c_0 t}\psi(\xi)\,d\xi - a\right] =$$

$$= \frac{\varphi(x + c_0 t) + \varphi(x - c_0 t)}{2} + \frac{1}{2c_0}\int_{x - c_0 t}^{x + c_0 t}\psi(\xi)\,d\xi.$$

**Формула решения задачи Коши обоснована.**

Мы уже показывали, что для системы (1) существование и единственность решения задачи Коши могут быть получены при выводе явных формул решения.

Однако обычно для доказательства теоремы единственности пользуются соображениями, связанными с законом сохранения энергии. Покажем, как провести доказательство, основанное на этих соображениях.

Помножим первое из уравнений системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

на множитель $\rho_0 u$, а второе — на множитель $\dfrac{p}{\rho_0 c_0^2}$. Сложив результаты, придем к тождеству

$$\frac{\partial\left[\rho_0\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0^2 c_0^2}\right)\right]}{\partial t} + \frac{\partial p u}{\partial x} = 0.$$

Из этого тождества следует, что по любому кусочно гладкому замкнутому контуру

$$\oint -\left(\rho_0\frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right)dx + pu\,dt = 0.$$

Это интегральное равенство носит название *закона сохранения энергии* для гладких решений уравнений распространения звука.

Чтобы пояснить название «закон сохранения энергии», применим наше интегральное тождество к прямоугольному контуру $ABCDA$, изображенному на рис. 22. Мы получаем равенство

$$\int_D^C \left(\rho_0\frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right)dx = \int_A^B \left(\rho_0\frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right)dx + \int_A^D pu\,dt - \int_B^C pu\,dt.$$

В этом равенстве $\int\limits_A^B \rho_0 \frac{u^2}{2}\,dx$ изображает кинетическую энергию газа, заключенного при $x_1 < x < x_2$ в начальный момент $t_0$; $\int\limits_A^B \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\,dx$ — потенциальная энергия сжатия этого газа. Интеграл $\int\limits_C^D \left(\rho_0\frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right)dx$ — полная энергия в момент времени $t_1$. Разность $\int\limits_A^D pu\,dt - \int\limits_B^C pu\,dt$ представляет собой работу, совершенную над газом за интервал времени $(t_0,\ t_1)$.

После этих пояснений должно быть понятно, почему наше интегральное тождество естественно называть законом сохранения энергии (или интегралом энергии). Покажем теперь, как закон сохранения энергии можно использовать при доказательстве теоремы единственности.

Будем задавать начальные данные $u|_{t=0}=\varphi(x)$, $p|_{t=0}=\psi(x)$ на отрезке $AB$ $(x_1 \leqslant x \leqslant x_2)$ оси $x$ при $t=0$. Единственность

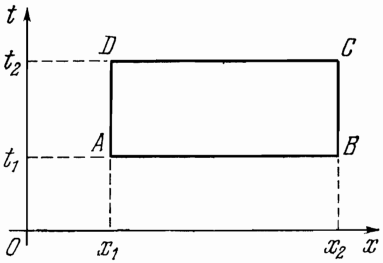


Рис. 22.

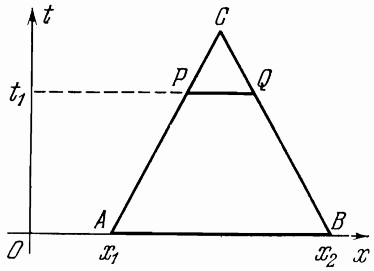


Рис. 23.

решения мы будем доказывать (рис. 23) внутри характеристического треугольника $ABC$, ограниченного слева и справа характеристиками $AC$ $(x-c_0t=x_1)$ и $BC$ $(x+c_0t=x_2)$. Пересечем этот треугольник отрезком $PQ$ прямой $t=t_1$, а затем к контуру $ABQP$ применим интегральную форму закона сохранения энергии:

$$\int\limits_P^Q \left(\rho_0 \frac{u^2}{2}+\frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx = \int\limits_A^B \left(\rho_0 \frac{u^2}{2}+\frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx -$$
$$-\int\limits_A^P \left[\left(\rho_0 \frac{u^2}{2}+\frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx - pu\,dt\right] + \int\limits_B^Q \left[\left(\rho_0 \frac{u^2}{2}+\frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx - pu\,dt\right].$$

Рассмотрим подробнее интеграл

$$\int\limits_A^P \left[\left(\rho_0 \frac{u^2}{2}+\frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx - pu\,dt\right].$$

Так как этот интеграл берется вдоль характеристики $x-c_0t= \text{const}$, то $dx=c_0\,dt$, а следовательно, его можно записать еще так:

$$\int\limits_A^P \left[\left(\rho_0 \frac{u^2}{2}+\frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) c_0\,dt - pu\,dt\right] = \frac{\rho_0 c_0}{2} \int\limits_A^P \left(u-\frac{p}{\rho_0 c_0}\right)^2 dt \geqslant 0.$$

Мы доказали неотрицательность интеграла по отрезку характеристики $AP$. Аналогично, пользуясь вдоль $BQ$ равенством

$dx = -c_0\,dt$, можно убедиться в том, что

$$\int_B^Q \left[\left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx - pu\,dt\right] = -\frac{\rho_0 c_0}{2} \int_B^Q \left(u + \frac{p}{\rho_0 c_0}\right)^2 dt \leqslant 0.$$

Из доказанных неравенств и из интегрального тождества закона сохранения энергии вытекает:

$$\int_P^Q \left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx \leqslant \int_A^B \left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx.$$

Если при $t=0$ мы имеем $p=0$, $u=0$, то

$$\int_P^Q \left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx \leqslant 0,$$

а следовательно, на $PQ$ величины $u$, $p$ тоже должны равняться нулю. Этим самым мы доказали, что нулевые начальные данные на основании характеристического треугольника с необходимостью влекут за собой равенство $u=0$, $p=0$ всюду внутри него. Теперь легко получить доказательство собственно теоремы единственности.

Если $u_1$, $p_1$ так же, как и $u_2$, $p_2$, являются решениями нашей линейной системы, удовлетворяющими на отрезке $AB$ одним и тем же начальным данным, то их разность $u_1 - u_2$, $p_1 - p_2$ тоже является решением той же системы с нулевыми начальными данными. Согласно доказанному выше $u_1 - u_2 \equiv 0$, $p_1 - p_2 \equiv 0$ всюду внутри характеристического треугольника. Теорема единственности доказана.

Иногда для уравнений акустики приходится решать не задачу Коши, а так называемую смешанную задачу, которая состоит в разыскании решения в области $0 \leqslant x \leqslant l$, $t \geqslant 0$ по начальным данным

$$u(x,\ 0) = \varphi(x), \quad p(x,\ 0) = \psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

причем требуется, чтобы это решение на границах области $x=0$, $x=l$ удовлетворяло некоторым дополнительным граничным условиям. Например, можно потребовать, чтобы эти дополнительные условия состояли в равенствах $u(0,\ t)=0$, $u(l,\ t)=0$. Так поставленная задача связана с изучением колебаний газа между неподвижными стенками $x=0$, $x=l$.

Решение поставленной здесь смешанной задачи должно иметь вид

$$u = \frac{f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)}{2},$$

$$p = \rho_0 c_0 \frac{f(x - c_0 t) - g(x + c_0 t)}{2},$$

где функции $f$, $g$ определяются через начальные значения $u|_{t=0} = \varphi(x)$; $p|_{t=0} = \psi(x)$ формулами

$$f(z) = \varphi(z) + \frac{\psi(z)}{\rho_0 c_0}, \quad g(z) = \varphi(z) - \frac{\psi(z)}{\rho_0 c_0}.$$

Эти формулы определяют $f(z)$, $g(z)$ лишь при $0 \leqslant z \leqslant l$, что дает возможность построить решение внутри характеристического треугольника $x - c_0 t \geqslant 0$, $x + c_0 t \leqslant l$.

Чтобы построить решение всюду внутри полосы $0 \leqslant x \leqslant l$ и чтобы добиться выполнения граничных условий $u = 0$ при $x = 0, l$, мы воспользуемся искусственным приемом продолжения начальных данных на всю ось $x$. Аналогичным приемом мы уже пользовались при решении одной из задач для уравнения теплопроводности.

Определив $f(z)$, $g(z)$ при $0 \leqslant z \leqslant l$, мы продолжим их на все $z$ так, чтобы

$$f(z) = -g(-z), \quad f(l - z) = -g(l + z).$$

Нетрудно убедиться, что если $f(0) + g(0) = 0$, $f(l) + g(l) = 0$, то такое продолжение возможно и единственно. Действительно, если мы знаем $f(z)$, $g(z)$ при $0 \leqslant z \leqslant l$, то формулы

$$f(-z) = -g(z), \quad -f(z) = g(-z)$$

позволяют определить эти функции при $-l \leqslant z \leqslant 0$. Равенство $f(0) + g(0) = 0$ обеспечивает совпадение значений при $z = 0$ до и после продолжения.

Теперь продолжим $f(z)$, $g(z)$ на всю прямую периодическими функциями с периодом $2l$:

$$f(z + 2l) = f(z),$$
$$g(z + 2l) = g(z).$$

Возможность такого непрерывного продолжения обеспечивается равенствами $f(l) = f(-l)$, $g(l) = g(-l)$, которые выводятся из условия $f(l) + g(l) = 0$ и из построения $f(-l) = -g(l)$, $g(-l) = -f(l)$. Мы будем предполагать, что продолженные на всю ось $z$ функции $f(z)$, $g(z)$ непрерывны и имеют непрерывные первые и вторые производные.

Задача. Проверьте, что для этого начальные данные $u|_{t=0} = \varphi$, $p|_{t=0} = \psi$ должны иметь непрерывные первые и вторые производные при $0 \leqslant x \leqslant l$, удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(l) = 0, \quad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0,$$
$$\psi'(0) = \psi'(l) = 0.$$

Построенное решение будет, очевидно, иметь непрерывные по $x$ и по $t$ первые и вторые частные производные.

Дифференцируя уравнения и граничные условия

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases}$$

по времени $t$, нетрудно установить, что производные $u_t$, $p_t$ тоже удовлетворяют аналогичной системе

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_t}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial p_t}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u_t}{\partial x} = 0,$$

и граничным условиям $u_t(0, t) = u_t(l, t) = 0$. Пользуясь исходными уравнениями, можно $u_t$, $p_t$ выразить через $u_x$, $p_x$ и убедиться, что эти последние удовлетворяют следующим уравнениям и условиям на границе:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_x}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial (\rho_0^2 c_0^2 u_x)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial (\rho_0^2 c_0^2 u_x)}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \dfrac{\partial p_x}{\partial x} = 0, \end{cases} \qquad p_x(0, t) = p_x(l, t) = 0$$

— система, которая состоит из исходных уравнений и из полученных уравнений для производных $u_t$, $p_t$, $u_x$, $p_x$, носит название расширенной системы уравнений. Такие системы широко используются при изучении свойств решений и будут играть важную роль в дальнейшем.

Для доказательства единственности решения смешанной задачи при наших граничных условиях $u(0, t) = u(l, t) = 0$ опять можно воспользоваться интегралом энергии

$$\int_0^l \left[\rho_0 \frac{u^2(x, t)}{2} + \frac{p^2(x, t)}{2\rho_0 c_0^2}\right] dx = \int_0^l \left[\rho_0 \frac{u^2(x, 0)}{2} + \frac{p^2(x, 0)}{2\rho_0 c_0^2}\right] dx +$$
$$+ \int_0^t p(0, t)\cdot u(0, t)\, dt - \int_0^t p(l, t)\cdot u(l, t)\, dt =$$
$$= \int_0^l \left[\rho_0 \frac{\varphi^2(x)}{2} + \frac{\psi^2(x)}{2\rho_0 c_0^2}\right] dx,$$

из которого следует, что нулевым начальным данным $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$ отвечает нулевое решение.

Применяя тождество интеграла для решений $u_t$, $p_t$; $p_x$, $\rho_0^2 c_0^2 u_x$ той же системы, удовлетворяющих начальным данным

$$\begin{cases} u_t(0,\ t) = -\dfrac{1}{\rho_0} p_x(0,\ t) = -\dfrac{1}{\rho_0}\psi'(x), \\ p_t(0,\ t) = -\rho_0 c_0^2 u_x(0,\ t) = -\rho_0 c_0^2 \varphi'(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} p_x(0,\ t) = \psi'(x), \\ \rho_0^2 c_0^2 u_x(0,\ t) = \rho_0^2 c_0^2 \varphi'(x), \end{cases}$$

мы придем к равенствам

$$\int_0^l \left[\rho_0 \frac{u_t^2(x,t)}{2} + \frac{p_t^2(x,t)}{2\rho_0 c_0^2}\right] dx = \int_0^l \left\{\frac{[\psi'(x)]^2}{2\rho_0} + \frac{\rho_0 c_0^2}{2}[\varphi'(x)]^2\right\} dx,$$

$$\int_0^l \left[\rho_0 \frac{p_x^2(x,t)}{2} + \frac{\rho_0^3 c_0^2 u_x^2(x,t)}{2}\right] dx = \int_0^l \left\{\rho_0 \frac{[\psi'(x)]^2}{2} + \frac{\rho_0^3 c_0^2}{2}[\varphi'(x)]^2\right\} dx,$$

позволяющим, вместе с интегралом энергии для исходной системы, оценить

$$\int_0^l u^2(x,\ t)\,dx, \quad \int_0^l u_t^2(x,\ t)\,dx, \quad \int_0^l u_x^2(x,\ t)\,dx,$$
$$\int_0^l p^2(x,\ t)\,dx, \quad \int_0^l p_t^2(x,\ t)\,dx, \quad \int_0^l p_x^2(x,\ t)\,dx$$

через интегралы

$$\int_0^l \varphi^2(x)\,dx, \quad \int_0^l \psi^2(x)\,dx, \quad \int_0^l (\varphi')^2\,dx, \quad \int_0^l (\psi')^2\,dx$$

от функций, задающих начальные данные.

Рассматривая решения смешанной задачи на интервале времени $0 < t < T$, нетрудно интегрированием тождества интеграла энергии по $t$ получить равенства:

$$\int_0^T \int_0^l \left[\rho_0 \frac{u^2(x,t)}{2} + \frac{1}{2\rho_0 c_0^2} p^2(x,\ t)\right] dx\,dt = T \int_0^l \left[\rho_0 \frac{\varphi^2(x)}{2} + \frac{\psi^2(x)}{2\rho_0 c_0^2}\right] dx,$$

$$\int_0^T \int_0^l \left[\rho_0 \frac{u_t^2(x,t)}{2} + \frac{1}{2\rho_0 c_0^2} p_t^2(x,\ t)\right] dx\,dt = T c_0^2 \int_0^l \left\{\rho_0 \frac{[\varphi'(x)]^2}{2} + \frac{[\psi'(x)]^2}{2\rho_0 c_0^2}\right\} dx,$$

$$\int_0^T \int_0^l \left[\rho_0 \frac{u_x^2(x,t)}{2} + \frac{1}{2\rho_0 c_0^2} p_x^2(x,\ t)\right] dx\,dt = T \int_0^l \left\{\rho_0 \frac{[\varphi'(x)]^2}{2} + \frac{[\psi'(x)]^2}{2\rho_0 c_0^2}\right\} dx,$$

с помощью которых оцениваются

$$\int_0^T\int_0^l u^2(x,\ t)\,dx\,dt, \quad \int_0^T\int_0^l u_t^2(x,\ t)\,dx\,dt, \quad \int_0^T\int_0^l u_x^2(x,\ t)\,dx\,dt,$$

$$\int_0^T\int_0^l p^2(x,\ t)\,dx\,dt, \quad \int_0^T\int_0^l p_t^2(x,\ t)\,dx\,dt, \quad \int_0^T\int_0^l p_x^2(x,\ t)\,dx\,dt.$$

Такого рода оценки будут в дальнейшем положены в основу изучения свойств решений гиперболических систем. Конечно, интегральные тождества для производных только по аналогии могут называться интегралами энергии, но такое наименование для них установилось и мы будем им пользоваться. Оказывается удобной следующая операторная точка зрения. Мы можем считать, что система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

с граничными условиями $u(0,\ t) = u(l,\ t) = 0$ определяет оператор $R$, сопоставляющий начальным данным $\varphi(x)$, $\psi(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ решение $u(x,\ t)$, $p(x,\ t)$ $(0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$

$$\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}.$$

Будем рассматривать начальные данные $\varphi(x)$, $\psi(x)$ как вектор функционального пространства $\Phi$ с нормой

$$\left\|\begin{matrix} \varphi \\ \psi \end{matrix}\right\|_\Phi = \sqrt{\int_0^l \{\varphi^2(x) + \psi^2(x) + [\varphi'(x)]^2 + [\psi'(x)]^2\}\,dx},$$

а решение $u(x,\ t)$, $p(x,\ t)$ как вектор пространства $U$ с нормой

$$\left\|\begin{matrix} u \\ p \end{matrix}\right\|_U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^l \{u^2(x,\ t) + p^2(x,\ t) + u_t^2(x,\ t) + u_x^2(x,\ t) + p_t^2(x,\ t) + p_x^2(x,\ t)\}\,dx\,dt} + \max_{0 \leqslant t \leqslant T}\sqrt{\int_0^l [u^2(x,\ t) + p^2(x,\ t) + u_x^2(x,\ t) + p_x^2(x,\ t)]\,dx}.$$

Полученные с помощью интегралов энергии оценки могут быть записаны в виде неравенства

$$\left\|\begin{matrix} u \\ p \end{matrix}\right\|_U \leqslant M \left\|\begin{matrix} \varphi \\ \psi \end{matrix}\right\|_\Phi$$

с постоянной $M$, выражающейся через $\rho_0$, $c_0$, $T$, а это неравенство можно понимать как оценку

$$\|R\| \leqslant M$$

для нормы оператора $R$, осуществляющего отображение

$$\Phi \xrightarrow{R} U.$$

Мы определим это отображение для достаточно гладких дважды непрерывно дифференцируемых элементов $\{\varphi(x), \psi(x)\}$ пространства $\Phi$, удовлетворяющих условиям согласования

$$\begin{gathered} \varphi(0)=0, \quad \psi'(0)=0, \quad \varphi''(0)=0, \\ \varphi(l)=0, \quad \psi'(l)=0, \quad \varphi''(l)=0. \end{gathered}$$

В функциональном анализе принято различать пространства полные и неполные. В полном пространстве для каждой фундаментальной последовательности можно указать элемент того же пространства, к которому эта последовательность сходится. Пространство $\Phi$, если в него включать только дважды непрерывно дифференцируемые $\varphi(x)$, $\psi(x)$, полным не является, так как из сходимости по $\| \ \|_\Phi$ нельзя сделать никаких заключений о сходимости вторых производных $\varphi''$, $\psi''$ — они в норму не входят. Нетрудно построить пример фундаментальной по $\| \ \|_\Phi$ последовательности, состоящей из пар $\{\varphi_n(x), \psi_n(x)\}$ дважды дифференцируемых функций, сходящейся (по $\| \ \|_\Phi$) к паре $\left\{\varphi(x)=\left|\frac{l}{2}-x\right|,\right.$ $\left.\psi(x)=0\right\}$, у которой $\varphi(x)$, очевидно, не имеют даже первой производной при $x=0$. Построение такой последовательности составляет стандартное упражнение по математическому анализу и мы не будем на нем останавливаться.

Неполнота пространства начальных данных $\Phi$, состоящего из дважды непрерывно дифференцируемых $\varphi(x)$, $\psi(x)$, и соответствующего пространства гладких решений $U$, усложняет построение теории, так как не позволяет, построив фундаментальную последовательность приближенных или точных решений с гладкими начальными данными из $\Phi$, утверждать, что предел такой последовательности удовлетворяет начальным условиям из $\Phi$ и лежит в $U$.

Однако это затруднение можно преодолеть, если включить в пространства $\Phi$, $U$ пределы всех возможных фундаментальных последовательностей гладких элементов из этих пространств. Такое включение в метрическое пространство идеальных элементов (пределов фундаментальных последовательностей) носит название *пополнения* пространства.

Хорошо известным примером пополнения является расширение множества рациональных чисел до множества всех действительных чисел.

С аккуратным изложением теории пополнения метрического пространства можно познакомиться по учебникам [3], [4].

Рассмотренный выше ограниченный оператор $R$, дающий решение изучавшейся смешанной задачи, можно распространить на пополнение множества начальных данных из $\Phi$; после этого он будет отображать элементы этого пополнения в пополнение множества гладких решений, лежащих в $U$. Так построенным элементам пополненного $U$ присваивается название *обобщенных решений*.

Этими замечаниями мы закончим сейчас наше беглое знакомство с точкой зрения, основанной на сопоставлении дифференциальным уравнениям операторов в функциональных пространствах, отображающих элементы пространства начальных данных (или граничных условий) в элементы пространства решений.

## § 6. Характеристики

Определение характеристик для общей системы уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными. Соотношения на характеристиках. Комплексные характеристики уравнений Коши — Римана. Определение характеристик в случае большего числа независимых переменных. Определение $t$-гиперболической системы первого порядка. Симметрические $t$-гиперболические системы первого порядка. Пример — уравнения для звуковых волн. Инвариантность понятия характеристик относительно невырожденных преобразований искомых функций и замены уравнений эквивалентными линейными комбинациями. Конус характеристических нормалей. Определение характеристик для одного уравнения второго порядка. Постановка задачи Коши для такого уравнения. Примеры. Определение эллиптической системы и эллиптического уравнения.

Примеры, разобранные в предыдущем параграфе, подвели нас к понятию характеристик, хотя определения этого понятия мы и не давали.

Этот параграф мы посвятим характеристикам, описав соображения, приводящие к этому понятию в трех типичных случаях. Понятие характеристик для уравнений и систем более общего вида по существу ничем не отличается от разбираемых ниже примеров.

В разных примерах мы даем разное аналитическое оформление рассуждений, приводящих к определению характеристик, чтобы в дальнейшем облегчить читателю использование различных литературных источников.

Начнем описание характеристик в случае произвольной линейной системы с двумя независимыми переменными $x$, $t$.

Пусть изучаемая нами система имеет вид

$$\begin{cases} A_{11}(x,\ t)\dfrac{\partial u_1}{\partial t}+A_{12}(x,\ t)\dfrac{\partial u_2}{\partial t}+B_{11}(x,\ t)\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+B_{12}(x,\ t)\dfrac{\partial u_2}{\partial x}=f_1(x,\ t), \\ A_{21}(x,\ t)\dfrac{\partial u_1}{\partial t}+A_{22}(x,\ t)\dfrac{\partial u_2}{\partial t}+B_{21}(x,\ t)\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+B_{22}(x,\ t)\dfrac{\partial u_2}{\partial x}=f_2(x,\ t). \end{cases}$$

Иногда мы будем записывать эту систему в матричной форме

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}=f, \tag{1}$$

обозначая

$$A=\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{Vmatrix},\quad u=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Применяя матричную запись, мы, конечно, можем не ограничиваться случаем двух уравнений с двумя неизвестными функциями. Векторы $u$, $f$ можно предполагать $n$-мерными. Матрицы должны иметь при этом размер $n\times n$.

Пусть нам известно, что рассматриваемая система имеет гладкое решение в некоторой области $G$. Выберем в этой области точку $(x_0,\ t_0)$ и проведем через эту точку кривую $\gamma$. Вектор бесконечно малого смещения вдоль этой кривой из точки $(x_0,\ t_0)$ будем обозначать $(dx,\ dt)$. Предположим, что нам почему-либо известны значения $u$ вдоль кривой $\gamma$ и что мы хотим по этим значениям и по уравнениям системы восстановить $u$ в некоторой окрестности $\gamma$.

Задача нахождения решения системы в окрестности кривой $\gamma$ по значениям этого решения на кривой называется *задачей Коши для системы*. Давайте еще сузим стоящую перед нами задачу, а именно ограничимся попыткой найти у вектор-функции $u = (u_1,\ u_2)$ лишь производные по нормали к кривой $\gamma$ в точке $(x_0,\ t_0)$, лежащей на этой кривой.

Заметим, что так как $u_1$, $u_2$ вдоль кривой известны, а следовательно, известны производные от них вдоль кривой, то знание нормальных производных позволяет нам вычислить производные по любому направлению, в том числе и все производные

$$\frac{\partial u_1}{\partial t},\quad \frac{\partial u_1}{\partial x},\quad \frac{\partial u_2}{\partial t},\quad \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

в точках кривой. Наоборот, знание этих четырех производных позволяет вычислить производные по любому направлению, в том числе и по нормали к кривой.

Поэтому мы и поставим перед собой задачу: зная вдоль кривой $\gamma$ вектор-функцию $u$, найти в точках этой кривой производные $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Вычисление этих производных мы будем производить в точке $(x_0, t_0)$, используя из нашего знания функции $u$ лишь значение дифференциала $du$, отвечающего смещению $dx$, $dt$ вдоль кривой. Запишем $du$ с помощью частных производных от $u$:

$$\begin{cases} \underline{\underline{dt}}\,\dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \underline{\underline{dx}}\,\dfrac{\partial u_1}{\partial x} = \underline{\underline{du_1}}, \\ \underline{\underline{dt}}\,\dfrac{\partial u_2}{\partial t} + \underline{\underline{dx}}\,\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = \underline{\underline{du_2}}. \end{cases}$$

В этих равенствах подчеркнуты известные нам дифференциалы, определяющие смещение вдоль $\gamma$.

Объединяя эти два равенства с двумя первоначальными уравнениями системы, мы приходим к четырем линейным уравнениям с четырьмя неизвестными $\dfrac{\partial u_1}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u_1}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u_2}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u_2}{\partial x}$:

$$\begin{aligned} A_{11}\frac{\partial u_1}{\partial t} + A_{12}\frac{\partial u_2}{\partial t} + B_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x} + B_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x} &= f_1, \\ A_{21}\frac{\partial u_1}{\partial t} + A_{22}\frac{\partial u_2}{\partial t} + B_{21}\frac{\partial u_1}{\partial x} + B_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x} &= f_2, \\ dt\frac{\partial u_1}{\partial t} \qquad\qquad + dx\frac{\partial u_1}{\partial x} \qquad\qquad &= du_1, \\ dt\frac{\partial u_2}{\partial t} \qquad\qquad + dx\frac{\partial u_2}{\partial x} &= du_2. \end{aligned}$$

В матричной форме уравнения для $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ пишутся так:

$$\begin{cases} A\,\dfrac{\partial u}{\partial t} + B\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = f, \\ dt\,E\,\dfrac{\partial u}{\partial t} + dx\,E\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = du. \end{cases} \tag{2}$$

Через $E$ мы обозначили единичную матрицу. Из этих уравнений искомые производные могут быть определены, если только определитель

$$\det\begin{Vmatrix} A & B \\ dt\,E & dx\,E \end{Vmatrix} \neq 0.$$

Для системы второго порядка

$$\det\begin{Vmatrix} A & B \\ dt\,E & dx\,E \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{vmatrix}.$$

Линии (задаваемые дифференциалами смещения $dx$, $dt$), вдоль которых

$$\det\begin{Vmatrix} A & B \\ dt\,E & dx\,E \end{Vmatrix} = 0,$$

называются *характеристиками системы*

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}=f.$$

Пусть теперь у нас кривая $\gamma$ является характеристикой. Несмотря на то, что определитель равен нулю, система (2) имеет решение, так как мы предполагаем, что в $G$ существует решение системы (1), принимающее на $\gamma$ заданные там значения. Это означает, что ранг расширенной матрицы

$$\begin{Vmatrix} A & B & f \\ dt\,E & dx\,E & du \end{Vmatrix}$$

равен рангу вырожденной матрицы

$$\begin{Vmatrix} A & B \\ dt\,E & dx\,E \end{Vmatrix}$$

коэффициентов при неизвестных $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Следовательно, вектор $du$ вдоль характеристик не может быть произвольным. Он должен удовлетворять соотношению:

$$\text{ранг}\begin{Vmatrix} A & B & f \\ dt\,E & dx\,E & du \end{Vmatrix}=\text{рангу}\begin{Vmatrix} A & B \\ dt\,E & dx\,E \end{Vmatrix}.$$

Это соотношение и является *соотношением на характеристике*, записанным в матричной форме *).

Для того чтобы проиллюстрировать понятия характеристик и соотношений на них, мы рассмотрим уже знакомый нам пример системы, описывающей звуковые волны,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t}+\rho_0 c_0^2\dfrac{\partial u}{\partial x}=0. \end{cases}$$

Вот ее матричная форма:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho_0} \\ \rho_0 c_0^2 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

---

*) Линейно независимых линейных уравнений, связывающих $du$, $dt$, $dx$ и вытекающих из этой матричной формы, может быть больше, чем одно, если ранг $\begin{Vmatrix} A & B \\ dt\,E & dt\,E \end{Vmatrix}$ вдоль характеристик меньше ее ранга при произвольных $dt$, $dx$ на 2, 3 или на еще большее число.

Система уравнений (2) запишется в этом примере так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ 0 & 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ du \\ dp \end{pmatrix}.$$

Уравнение характеристик

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ 0 & 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{vmatrix} = dx^2 - c_0^2\, dt^2 = (dx - c_0\, dt)(dx + c_0\, dt) = 0.$$

Таким образом, в качестве характеристик мы получили линии, задаваемые уравнениями

$$dx = \pm c_0\, dt,$$

т. е. прямые

$$x \mp c_0 t = \text{const}.$$

Это как раз те линии, которые мы решили назвать характеристиками в предыдущем параграфе.

Перейдем теперь к получению соотношений на характеристиках для рассматриваемой системы. Нам надо, чтобы ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} & 0 \\ 0 & 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 & du \\ 0 & dt & 0 & dx & dp \end{pmatrix}$$

равнялся (вдоль характеристики) рангу матрицы, составленной из ее первых четырех столбцов. Определитель этой последней равен нулю. Поэтому должен быть равен нулю определитель матрицы, составленной из произвольных четырех столбцов. Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ dt & 0 & dx & du \\ 0 & dt & 0 & dp \end{vmatrix} = dx\, dp + \rho_0 c_0^2\, du\, dt = 0.$$

Мы видим, что вдоль характеристик $\frac{dx}{dt} = c_0$ выполнено соотношение $c_0\, dt\, dp + \rho_0 c_0^2\, du\, dt = 0$ или, что то же самое, $d\left(u + \frac{p}{\rho_0 c_0}\right) = 0$.

Вдоль характеристик $\frac{dx}{dt} = -c_0$ аналогично получаем соотношение $d\left(u - \frac{p}{\rho_0 c_0}\right) = 0$. Мы показали, что для системы уравнений распространения звуковых волн данное нами общее определение характеристик и соотношений на них приводит к фактам, которые были выведены в предыдущем параграфе.

Рассмотрим еще пример системы уравнений Коши — Римана

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

В матричной форме она записывается так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0.$$

Раскроем характеристический определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ dx & 0 & dy & 0 \\ 0 & dx & 0 & dy \end{vmatrix} = dx^2 + dy^2.$$

Мы видим, что система Коши — Римана не имеет вещественных характеристик (они определяются равенствами $dy = \pm i\, dx$).

Системы, у которых все характеристики вещественны, при некоторых дополнительных ограничениях называются *гиперболическими.* Изучая постановку задачи Коши для гиперболических систем, мы обычно будем предполагать, что начальные данные задаются на некотором отрезке оси $x$ (при $t = 0$). В качестве таких начальных данных задаются начальные значения всех неизвестных функций. При этом мы будем предполагать, что ось $x$ не является характеристикой, т. е. что при любых начальных значениях $u(x, 0)$ мы можем, в силу системы, определить производные по $t$. Так как система пишется в виде

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial u}{\partial x} = f,$$

то это означает, что на отрезке задания начальных данных не равен нулю определитель $\det \| A \| \neq 0$. В этом случае система может быть переписана так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A^{-1} B \frac{\partial u}{\partial x} = A^{-1} f$$

или, если обозначить $A^{-1}B = C$, $A^{-1}f = g$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial u}{\partial x} = g.$$

Как правило, мы с самого начала будем предполагать систему заданной в такой форме. Уравнение характеристик для системы в такой форме упрощается. Действительно, для системы порядка $n$

$$\det\begin{Vmatrix} E & C \\ dt\,E & dx\,E \end{Vmatrix} = dt^n \det\begin{Vmatrix} E & C \\ E & \frac{dx}{dt}E \end{Vmatrix} =$$

$$= dt^n \det\begin{Vmatrix} 0 & C-\frac{dx}{dt}E \\ E & \frac{dx}{dt}E \end{Vmatrix} = (-1)^n\, dt^n \det\left\Vert C-\frac{dx}{dt}E\right\Vert.$$

Поэтому характеристиками являются линии, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{dx}{dt} = k_i(x, t),$$

в которых наклоны характеристик $k_i$ вычисляются как характеристические корни матрицы $C$:

$$\det\Vert C-kE\Vert.$$

*Если все корни этого уравнения вещественны и не являются кратными ни в одной точке рассматриваемой области, то мы будем называть эту систему гиперболической в области.*

В дальнейшем мы увидим, что некоторые (не все) системы с кратными характеристическими корнями $k$ тоже следует причислить к классу гиперболических, так как они обладают одинаковыми с ними свойствами.

Сделаем еще одно замечание. Приведенное нами определение характеристик дословно переносится на системы вида

$$A(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial t} + B(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t, u).$$

Такого рода системы, у которых коэффициенты зависят от решения (но не от его производных), называются квазилинейными. В этом случае характеристики зависят от того, какое решение рассматривается. Линия, являющаяся характеристикой для одного решения, для другого характеристикой не является. В качестве примера такой квазилинейной системы можно привести известные из механики сплошных сред уравнения движения баротропного газа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{p'(\rho)}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

$p = p(\rho)$ — уравнение состояния.

Задача. Покажите, что для этой системы уравнения характеристик и соотношения на них записываются в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=u+\sqrt{p'(\rho)}, \\ du=-\dfrac{dp}{\rho\sqrt{p'(\rho)}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=u-\sqrt{p'(\rho)}, \\ du=\dfrac{dp}{\rho\sqrt{p'(\rho)}}. \end{cases}$$

Перейдем теперь к случаю, когда число независимых переменных больше, чем два. Мы разберем описание понятия характеристик в типичном случае, когда таких переменных три ($x$, $y$, $t$). При этом описании мы будем интересоваться только самим уравнением характеристик, а соотношений на ней выписывать не будем. (Описание, которое мы дадим для случая трех переменных, может быть дословно перенесено и на уже разобранный случай двух переменных.)

Итак, пусть нам дана система $n$ уравнений с $n$ неизвестными функциями. Мы ее запишем в векторной форме

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial y}=f(x,\ y,\ t,\ u).$$

Пусть нам известно, что эта система имеет гладкое решение в некоторой области $G$ пространства $(x,\ y,\ t)$. Предположим, что мы знаем это решение на некоторой поверхности $S$, лежащей в $G$, и нам хочется воспользоваться этим знанием, чтобы определить решение и вне $S$, хотя бы в некоторой окрестности этой поверхности, т. е. решить задачу Коши для рассматриваемой системы. Давайте еще сузим стоящую перед нами задачу. Ограничимся только отысканием производных от неизвестных по нормали к $S$ в некоторой точке $(x_0,\ y_0,\ t_0)$ этой поверхности. (Для этого достаточно найти производные по какому-либо направлению, не касательному к поверхности.)

Пусть уравнение поверхности $S$ пишется в виде

$$\varphi(x,\ y,\ t)=0, \quad \text{где } \operatorname{grad}\varphi\neq 0.$$

Рассмотрим, кроме $\varphi=\varphi(x,\ y,\ t)$ еще две какие-либо функции $\alpha=\alpha(x,\ y,\ t)$, $\beta=\beta(x,\ y,\ t)$, подчиненные только условию

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y & \varphi_t \\ \alpha_x & \alpha_y & \alpha_t \\ \beta_x & \beta_y & \beta_t \end{vmatrix}\neq 0$$

в некоторой окрестности точки $(x_0,\ y_0,\ t_0)$ поверхности $S$. Систему функций

$$\begin{aligned} \varphi&=\varphi(x,\ y,\ t), \\ \alpha&=\alpha(x,\ y,\ t), \\ \beta&=\beta(x,\ y,\ t) \end{aligned}$$

можно рассматривать как некоторую новую систему координат. Если $Z = Z(x, y, t) = Z[x(\varphi, \alpha, \beta), y(\varphi, \alpha, \beta), t(\varphi, \alpha, \beta)] = Z(\varphi, \alpha, \beta)$, то $Z_\alpha$, $Z_\beta$ являются производными по направлениям, касательным к $S$, а $Z_\varphi$ — производная по некоторому не касательному к $S$ направлению.

Запишем нашу систему в новых координатах

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}A + \frac{\partial\varphi}{\partial x}B + \frac{\partial\varphi}{\partial y}C\right)\frac{\partial u}{\partial\varphi} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}A + \frac{\partial\alpha}{\partial x}B + \frac{\partial\alpha}{\partial y}C\right)\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \\ + \left(\frac{\partial\beta}{\partial t}A + \frac{\partial\beta}{\partial x}B + \frac{\partial\beta}{\partial y}C\right)\frac{\partial u}{\partial\beta} = f.$$

(Я очень рекомендую при разборе этого материала, наряду с матричным выводом, провести выкладку в покомпонентной форме на примере системы второго или третьего порядка.)

Для разрешимости этой системы относительно $\frac{\partial u}{\partial\varphi}$ при любых $\frac{\partial u}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial u}{\partial\beta}$, $f$ надо, чтобы определить

$$\det\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}A + \frac{\partial\varphi}{\partial x}B + \frac{\partial\varphi}{\partial y}C\right\| \neq 0.$$

Мы видим, что это условие только для поверхности $S\{\varphi(x, y, t) = 0\}$ и никак не связано с выбором вспомогательных координатных функций $\alpha$, $\beta$. Так как вектор $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$ коллинеарен вектору нормали $(\tau, \xi, \eta)$ к поверхности $S$, то последнее условие эквивалентно неравенству

$$\det\|\tau A + \xi B + \eta C\| \neq 0.$$

Определение. *Поверхности* $S\{\varphi(x, y, t) = 0\}$, *на которых* $\det\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}A + \frac{\partial\varphi}{\partial x}B + \frac{\partial\varphi}{\partial y}C\right\| = 0$, *или, что то же самое*, $\det\|\tau A + \xi B + \eta C\| = 0$, *где* $(\tau, \xi, \eta)$ — *вектор нормали к поверхности* $S$, *называются характеристиками системы*

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y} = f.$$

Разберем пример, иллюстрирующий это определение. Система, описывающая в двумерном случае распространение звуковых волн, пишется так:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Вот матричная форма этой системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ \frac{1}{\rho_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho_0 c_0^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho_0} & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial t} A + \frac{\partial\varphi}{\partial x} B + \frac{\partial\varphi}{\partial y} C \right\|$ здесь пишется так:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial t} & \rho_0 c_0^2 \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \rho_0 c_0^2 \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial t} & 0 \\ \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial\varphi}{\partial y} & 0 & \frac{\partial\varphi}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Ее определитель

$$\det \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial t} A + \frac{\partial\varphi}{\partial x} B + \frac{\partial\varphi}{\partial y} C \right\| = \frac{\partial\varphi}{\partial t} \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - c_0^2 \left[ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 \right] \right\}.$$

Приравнивая определитель нулю, получаем уравнения характеристик:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = +c_0 \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -c_0 \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}.$$

Определение. *Система $n$ уравнений первого порядка*

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial x} = f$$

*называется $t$-гиперболической, если ее характеристическое уравнение*

$$\det \| \tau A + \xi B + \eta C \| = 0$$

*при любых вещественных* $\xi$, $\eta$ $(\xi^2 + \eta^2 \neq 0)$ *имеет $n$ вещественных и различных корней* $\tau$. Если матрицы $A$, $B$, $C$ зависят от $x$, $y$, $t$, то требуется, чтобы это условие было выполнено в каждой точке $(x, y, t)$ рассматриваемой области.

Проверять условие гиперболичности для конкретных систем очень трудно. Однако есть один важный класс систем, когда такая проверка существенно облегчается.

Рассмотрим систему

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial y} = f$$

с симметричными матрицами $A$, $B$, $C$. Матрицу $A$ предположим к тому же положительно определенной.

Очевидно, что матрица $\mathscr{B}=\xi B+\eta C$ тоже будет симметричной при любых $\xi$, $\eta$. Известно, что любые две симметричные матрицы $A$, $\mathscr{B}$, одна из которых (в нашем случае $A$) положительно определенная, можно одним и тем же невырожденным вещественным преобразованием $T$ привести к диагональному виду (матрица $A$ при этом может быть переведена в единичную)

$$T^*\mathscr{B}T=\begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & b_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & b_n \end{pmatrix},\qquad T^*AT=\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$\det\|\tau A+\xi B+\eta C\|=\det\|\tau A+\mathscr{B}\|=[\det\|T\|]^{-2}\det\|\tau T^*AT+ \\ +T^*\mathscr{B}T\|=[\det\|T\|]^{-2}\det\begin{pmatrix} \tau+b_1 & & 0 \\ & \tau+b_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \tau+b_n \end{pmatrix}=0.$$

При любых вещественных $\xi$, $\eta$ оно имеет для $\tau$ ровно $n$ вещественных корней. Правда, у нас нет никакой информации об их кратности. Несмотря на это, системы вида

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial y}=f$$

с симметричными матрицами $A$, $B$, $C$, из которых $A$ положительно определенная, обладают всеми основными свойствами гиперболических систем. Часть этих свойств будет нами в дальнейшем подробно изучаться.

Определение. *Система уравнений*

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial y}=f$$

*называется симметрической $t$-гиперболической системой (по Фридрихсу), если матрицы $A$, $B$, $C$ являются симметрическими, а матрица $A$ к тому же положительно определенной* (Все элементы матриц $A$, $B$, $C$ и компоненты правой части предполагаются, как обычно, достаточно гладкими функциями $x$, $y$, $t$.)

Пример. Уравнения распространения звуковых волн, которые мы уже рассматривали, можно записать так:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho_0 c_0^2}\dfrac{\partial p}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0, \\ \rho_0\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial p}{\partial x}=0, \\ \rho_0\dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{\partial p}{\partial y}=0. \end{cases}$$

По сравнению с предыдущим примером мы первое уравнение разделили на $\rho_0 c_0^2$, а два последующих помножили на $\rho_0$.

В матричной форме рассматриваемая система перепишется так:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из этой записи следует, что матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

удовлетворяют всем условиям только что приведенного определения и что поэтому уравнения распространения звука в использованной сейчас форме образуют симметрическую $t$-гиперболическую систему.

Симметрические $t$-гиперболические системы, как это выяснится в следующей главе, позволяют построить некоторые важные соотношения, которым удовлетворяют их решения. Эти соотношения, обобщающие закон сохранения энергии для решений уравнений акустики или уравнений Максвелла, носят название *интегралов энергии*.

По существу вся теория симметрических гиперболических систем основывается на этих тождествах.

Для системы

$$A(x,\ y,\ t,\ u)\frac{\partial u}{\partial t} + B(x,\ y,\ t,\ u)\frac{\partial u}{\partial x} + C(x,\ y,\ t,\ u)\frac{\partial u}{\partial y} = f(x,\ y,\ t,\ u)$$

(здесь $A$, $B$, $C$ — матрицы, $u$ — $n$-мерная вектор-функция) мы определили характеристики как такие поверхности $S$, что вектор $(\tau,\ \xi,\ \eta)$ — нормаль к $S$ — удовлетворяет равенству

$$\det \| \tau A + \xi B + \eta C \| = 0.$$

Заметим, что это определение выделяет поверхности, которые не меняются при произвольном линейном невырожденном преобразовании множества искомых функций и при замене исходных уравнений произвольными их линейными комбинациями.

Именно, положим $u = Tv$ ($T = T(x,\ y,\ t)$ — невырожденная матрица). Тогда функции $v$ будут удовлетворять системе

$$AT\frac{\partial v}{\partial t} + BT\frac{\partial v}{\partial x} + CT\frac{\partial v}{\partial y} = f - \left(A\frac{\partial T}{\partial t} + B\frac{\partial T}{\partial x} + C\frac{\partial T}{\partial y}\right)v.$$

Замена уравнений системы их линейными комбинациями эквивалентна умножению системы слева на невырожденную матрицу $Q$.

При этом уравнения принимают форму

$$QAT\frac{\partial v}{\partial t}+QBT\frac{\partial v}{\partial x}+QCT\frac{\partial v}{\partial y}=Qf-Q\left(A\frac{\partial T}{\partial t}+B\frac{\partial T}{\partial x}+C\frac{\partial T}{\partial y}\right)v.$$

Если бы $Q$ была вырожденной, то эти уравнения не были бы эквивалентны исходным.

Напишем уравнение характеристик для так преобразованной системы:

$$\det\|\tau QAT+\xi QBT+\eta QCT\|=0.$$

По теореме об определителе произведения матриц

$$\det\|\tau QAT+\xi QBT+\eta QCT\|=\det\|Q(\tau A+\xi B+\eta C)T\|=$$
$$=\det\|Q\|\det\|\tau A+\xi B+\eta C\|\det\|T\|.$$

В силу неравенств $\det\|Q\|\neq 0$, $\det\|T\|\neq 0$ уравнение

$$\det\|\tau A+\xi B+\eta C\|=0 \tag{3}$$

эквивалентно уравнению

$$\det\|\tau QAT+\xi QBT+\eta QCT\|=0.$$

Утверждение об инвариантности понятия характеристик относительно невырожденных линейных преобразований множества искомых функций и относительно замены уравнений произвольными равносильными линейными комбинациями доказано.

Множество векторов $(\tau, \xi, \eta)$, удовлетворяющих равенству (3), очевидно, является конусом, так как с каждым вектором $(\tau, \xi, \eta)$ этому равенству удовлетворяют и все коллинеарные ему векторы вида $(k\tau, k\xi, k\eta)$. Конус, определяемый таким уравнением, называется *конусом нормалей к характеристикам* или, короче, *конусом характеристических нормалей*. Если матрицы коэффициентов $A$, $B$, $C$ зависят от координат $x$, $y$, $t$, то и конус характеристических нормалей

$$\det\|\tau A(x, y, t)+\xi B(x, y, t)+\eta C(x, y, t)\|=0$$

в каждой точке пространства $(x, y, t)$ свой.

Дадим еще определение характеристик в случае одного уравнения второго порядка

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}+C\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x, t, u, u_x, u_t).$$

Ограничимся только случаем двух независимых переменных $x$, $t$. В случае большего числа переменных характеристики определяются совершенно так же.

Перейдем к новой системе координат:

$$\varphi=\varphi(x, t), \quad \alpha=\alpha(x, t), \quad \frac{D(\varphi, \alpha)}{D(x, t)}\neq 0.$$

В этой новой системе координат уравнение запишется так:

$$\left[A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+2B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+$$
$$+2\left[A\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\frac{\partial\alpha}{\partial t}+B\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\frac{\partial\alpha}{\partial x}+B\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{\partial\alpha}{\partial t}+C\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\,\partial\alpha}+$$
$$+\left[A\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2+2B\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)+C\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+$$
$$+\left[A\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+2B\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial x}+C\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right]\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\left[A\,\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}+2B\,\frac{\partial^2\alpha}{\partial t\,\partial x}+C\,\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}\right]\frac{\partial u}{\partial\alpha}=$$
$$=f\,(x,\ t,\ u,\ u_\varphi\varphi_x+u_\alpha\alpha_x,\ u_\varphi\varphi_t+u_\alpha\alpha_t).$$

Предположим теперь, что на некоторой кривой $\varphi=\varphi_0=\text{const}$ нам задана функция $u$ и все ее первые производные, как функции от $\alpha$. Для нас существенно, что известна функция $u$ и ее производная $\frac{\partial u}{\partial\varphi}$. Дифференцируя их по $\alpha$ (то есть вдоль кривой), мы найдем на этой кривой

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\,\partial\alpha}.$$

Теперь с помощью уравнения, если только

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+2B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\neq 0,$$

мы сможем найти $\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$. *Кривые* $\varphi(x,\ t)=\text{const}$ $(\operatorname{grad}\varphi\neq 0)$, *на которых*

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+2B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2=0, \tag{4}$$

*называются характеристиками уравнения*

$$A\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2B\,\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}+C\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f.$$

Характеристики играют для одного уравнения такую же важную роль, какую они играют для систем.

Так же как и для рассмотренных выше систем, при определении характеристик для уравнения второго порядка равенство (4) можно заменить эквивалентным ему соотношением

$$A\tau^2+2B\tau\xi+C\xi^2=0,$$

где $(\tau,\ \xi)$ — нормаль к исследуемой кривой.

Если кривая $\varphi(x, t)=\varphi_0$ является характеристикой, то решение $u$ удовлетворяет вдоль нее равенству

$$2\left[A\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial t}+B\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial t}+C\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right]\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)+$$
$$+\left[A\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2+2B\frac{\partial\alpha}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+C\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+$$
$$+\left[A\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+2B\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial x}+C\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right]\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\left[A\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}+2B\frac{\partial^2\alpha}{\partial t\,\partial x}+C\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}\right]\frac{\partial u}{\partial\alpha}=$$
$$=f(x,\ t,\ u,\ u_\varphi\varphi_x+u_\alpha\alpha_x;\ u_\varphi\varphi_t+u_\alpha\alpha_t).$$

Это равенство можно рассматривать как соотношение между $u$, $\frac{\partial u}{\partial\varphi}$ вдоль характеристики.

*Задача Коши для уравнения второго порядка* ставится так. Задавая на некоторой линии $\varphi=\text{const}$ значения $u$, $\frac{\partial u}{\partial\varphi}$, мы должны постараться определить решение в некоторой окрестности этой линии. Если кривая $\varphi=\text{const}$ является характеристикой, то ставить задачу Коши на ней нельзя. Задав $u$ на кривой, мы сможем определить $u_\varphi$ из соотношения на характеристике. Свобода задания начальных данных снижается. Иногда, правда, достаточно на характеристике задать $u$, чтобы определить решение, но такую постановку задачи уже неестественно называть задачей Коши.

Примеры. 1. Для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ характеристики определяются равенством

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=0.$$

Общее решение уравнения $\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0$ имеет вид $\varphi=\varphi(x-t)$, а общее решение, аннулирующее другой множитель $\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, будет $\varphi=\varphi(x+t)$. Равенства $\varphi(x-t)=\text{const}$ или $\varphi(x+t)=\text{const}$ определяют два семейства прямых $x\pm t=\text{const}$, которые и будут характеристиками рассматриваемого уравнения.

2. Для уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ уравнение характеристик $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2=0$ действительных решений не имеет.

3. Уравнение теплопроводности $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$ приводит к уравнению характеристик $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2=0$. Общее решение этого уравнения $\varphi=\varphi(t)$, а характеристики $\varphi(t)=\text{const}$ $(t=\text{const})$ представляют собой прямые, параллельные оси $x$. Задача определения температуры для $t>0$ по начальным значениям $u(x, 0)$ представляет

собой задачу с данными на характеристике. Именно поэтому здесь задается в качестве начального условия только одна функция, хотя уравнение теплопроводности второго порядка. Начальная задача для уравнения теплопроводности не является задачей Коши, хотя такое название ей часто в литературе присваивается.

Оказалось, что уравнения с частными производными естественно классифицируются по свойствам характеристического уравнения. Так было введено понятие гиперболических систем, которые мы уже определяли. Дадим еще определение эллиптических систем или уравнений.

Система

$$A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z}=f$$

называется *эллиптической*, если ее характеристическое уравнение

$$\det\|\xi A+\eta B+\zeta C\|=0$$

не имеет вещественных решений $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ таких, что $\xi^2+\eta^2+\zeta^2>0$. Чтобы дать определение эллиптичности для одного уравнения

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f,$$

надо рассмотреть его характеристическое уравнение

$$A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2=0$$

и потребовать, чтобы оно не имело вещественных решений $(\xi,\ \eta)$ таких, что $\xi^2+\eta^2>0$.

Примером эллиптической системы является система уравнений Коши — Римана:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\end{cases}$$

а примером эллиптического уравнения — уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Уравнение теплопроводности $\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ имеет в качестве уравнения характеристик уравнение $\xi^2=0$, распадающееся на два совпадающих уравнения. Оно относится к промежуточному между эллиптическим и гиперболическим классу параболических уравнений. Мы не будем приводить определения параболических уравнений, а лишь отметим, что в это определение входят не только коэффициенты при старших производных, но и некоторые другие коэффициенты.

В заключение параграфа укажем на следующее обстоятельство. Несмотря на то, что переход к новым неизвестным функциям и замена уравнений их линейными комбинациями оставляет характеристики неизменными, бывают случаи, когда для описания одного и того же явления могут употребляться уравнения и системы, имеющие разные характеристики.

Приведем пример. Уравнения акустики

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\rho_0\frac{\partial u}{\partial x}+\rho_0\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

$$\rho_0\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}=0,$$

$$\rho_0\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial y}=0,$$

если первое из них продифференцировать по $t$ и вычесть из результата второе и третье, продифференцированные соответственно по $x$ и по $y$, приводят к одному уравнению второго порядка:

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=0.$$

Его характеристическое уравнение

$$\varphi_t^2-c_0^2(\varphi_x^2+\varphi_y^2)=0$$

отличается от характеристического уравнения исходной системы

$$\varphi_t[\varphi_t^2-c_0^2(\varphi_x^2+\varphi_y^2)]=0.$$

В этих преобразованиях использовалось дифференцирование, которое не включалось в число преобразований, оставляющих характеристики инвариантными.

## § 7. Метод Фурье

Схема метода Фурье для уравнения Лапласа и его обоснование. Метод Фурье для гиперболической системы уравнений акустики. Представление решений в виде суммы стоячих волн. Пересказ вводной главы из работы Римана, посвященной истории метода Фурье. Ортогональность собственных вектор-функций и вычисление коэффициентов Фурье.

В этом параграфе мы опишем идею так называемого метода Фурье. Этот очень распространенный метод решения дифференциальных уравнений, к сожалению, не является универсальным. Он применим только к линейным уравнениям некоторого специального вида, позволяющего построить для этих уравнений достаточно богатый запас частных решений. Линейные комбинации этих частных решений затем применяются для того, чтобы аппроксимировать более или менее произвольное решение, Рассмотрим, например, уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ в круге $x^2+y^2\leqslant R^2$. Нам будет удобно, перейдя к полярным координатам $r$, $\varphi$ ($x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$), записать это уравнение в форме

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,$$

а затем искать его частные решения вида

$$u(r,\ \varphi)=A(r)B(\varphi).$$

Подставив эту формулу в уравнение, будем иметь

$$\frac{1}{r}[rA'(r)]'\ B(\varphi)+\frac{A(r)}{r^2}B''(\varphi)=0$$

и, далее,

$$\frac{r[rA'(r)]'}{A(r)}=-\frac{B''(\varphi)}{B(\varphi)}=\lambda.$$

Так как из этого равенства $\lambda$ должно зависеть, с одной стороны, только от $r$, а с другой — только от $\varphi$, то необходимо, чтобы оно ни от одного, ни от другого аргумента не зависело, т. е. было бы постоянным. Уравнение

$$-\frac{B''(\varphi)}{B(\varphi)}=\lambda$$

или, что то же самое,

$$B''+\lambda B(\varphi)=0$$

имеет общее решение

$$B(\varphi)=c_1\sin\left(\sqrt{\lambda}\varphi\right)+c_2\cos\left(\sqrt{\lambda}\varphi\right).$$

Очевидно, что $B(\varphi)$ должно быть гладкой периодической с периодом $2\pi$ функцией от $\varphi$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $\sqrt{\lambda}$ было целым числом $n$, т. е. чтобы $\lambda=n^2$. (Докажите это.)

Уравнение

$$r[rA'(r)]'-n^2A(r)=0$$

для множителя $A(r)$ является так называемым *уравнением Эйлера*. Его общее решение (при $n\neq 0$)

$$A(r)=c_3r^n+c_4r^{-n}.$$

Итак, мы пришли к решениям уравнения Лапласа, имеющим вид

$$u(r,\ \varphi)=A(r)B(\varphi)=(c_3r^n+c_4r^{-n})(c_1\sin n\varphi+c_2\cos n\varphi).$$

Частные решения

$$u=r^{\pm n}\cos n\varphi,\qquad u=r^{\pm n}\sin n\varphi$$

получаются специальным выбором постоянных

$$(c_3=c_2=1,\quad c_1=c_4=0),\quad (c_3=c_1=1,\quad c_2=c_4=0),$$
$$(c_4=c_2=1,\quad c_1=c_3=0),\quad (c_4=c_1=1,\quad c_2=c_3=0).$$

Решения $r^{-n}\cos n\varphi$, $r^{-n}\sin n\varphi$, имеют особенность при $r=0$, и мы постараемся обойтись без них. Добавим к набору частных решений $r^n\cos n\varphi$, $r^n\sin n\varphi$ еще частное решение $u=1$, являющееся ограниченным решением, отвечающим значению $n=0$. (Разыскивая его в виде $u(r,\ \varphi)=A(r)\cos(0\cdot\varphi)=A(r)$, замечаем, что ограниченное решение уравнения

$$r[rA'(r)]'=0$$

получается из общего $A(r)=c_3+c_4\ln r$ лишь при $c_4=0$.)

Линейная комбинация построенных частных решений

$$u(r,\ \varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\frac{r^n}{R^n}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi),$$

очевидно, тоже будет решением уравнения Лапласа.

Интересно, что если считать постоянные

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots$$

ограниченными, то линейная комбинация бесконечного числа слагаемых

$$u(r,\ \varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)$$

является при $r<R$ решением уравнения Лапласа. В самом деле, этот ряд можно переписать еще так:

$$u(r,\ \varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Re}\frac{r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)(a_n-ib_n)}{R^n}=$$
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Re}\frac{(x+iy)^n}{R^n}(a_n-ib_n).$$

Ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-ib_n}{R^n}(x+iy)^n=w(x+iy)=w(z)$$

является рядом Тейлора с радиусом сходимости не меньшим, чем $R$. Отсюда следует, что внутри круга сходимости функции $w(z)$ — аналитическая, $u=\operatorname{Re}w$ гармонична.

Если предположить равномерную сходимость ряда

$$u(r, \varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi) \tag{1}$$

вплоть до границы круга $r=R$, то для граничных значений $u(R, \varphi)=f(\varphi)$ мы будем иметь представление рядом Фурье

$$f(\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi). \tag{2}$$

Как известно, коэффициенты Фурье $a_k$, $b_k$ вычисляются по формулам

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos k\varphi\,d\varphi,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin k\varphi\,d\varphi,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots.$$

Для того чтобы обеспечить равномерную сходимость рядов (1) и (2) (первого в замкнутом круге $r\leqslant R$), достаточно предположить непрерывность вторых производных у $f(\varphi)$. Интегрированием по частям можно убедиться в том, что при этом

$$a_k=-\frac{1}{\pi k^2}\int_0^{2\pi}f''(\varphi)\cos k\varphi\,d\varphi,$$

$$b_k=-\frac{1}{\pi k^2}\int_0^{2\pi}f''(\varphi)\sin k\varphi\,d\varphi,$$

$$|a_k|\leqslant\frac{\text{const}}{k^2},\quad |b_k|\leqslant\frac{\text{const}}{k^2}.$$

Эти неравенства обеспечивают сходимость.

Таким образом, для любой достаточно гладкой $f(\varphi)$, заданной на границе круга $0\leqslant r\leqslant R$, законно следующее построение решения задачи Дирихле:

1°. Вычисляем коэффициенты Фурье $f(\varphi)$ по формулам

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos k\varphi\,d\varphi,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin k\varphi\,d\varphi,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

2°. Используем эти коэффициенты при составлении «линейной комбинации»

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{R^n} r^n \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{R^n} r^n \sin n\varphi$$

частных решений уравнения Лапласа. Мы доказали, что построенная функция $u(r, \varphi)$ является в круге $r \leqslant R$ решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа с граничным значением $f(\varphi)$, если функция $f(\varphi)$ достаточно гладкая.

Сейчас мы покажем, что описанная процедура применима для любой непрерывной $f(\varphi)$, совсем не обязательно дифференцируемой. Есть примеры, показывающие, что ряд Фурье для непрерывной функции может не сходиться к ней равномерно. Несмотря на это, мы покажем, что полученный при помощи нашей процедуры ряд для решения задачи Дирихле сходится к этому решению равномерно в любом круге $r \leqslant R_0 < R$ радиуса $R_0$, меньшего $R$. В § 2 решение задачи Дирихле в круге при любой непрерывной $f(\varphi)$ было построено с помощью формулы Пуассона. Воспользуемся комплексной формой этого решения

$$u(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha)\,Re^{i\alpha}\,d\alpha}{Re^{i\alpha} - re^{i\varphi}} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha)\,Re^{-i\alpha}\,d\alpha}{Re^{-i\alpha} - re^{-i\varphi}} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \operatorname{Re}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha)\,Re^{i\alpha}\,d\alpha}{Re^{i\alpha} - re^{i\varphi}} =$$

$$= \operatorname{Re}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2} + \frac{Re^{i\alpha}}{Re^{i\alpha} - re^{i\varphi}}\right] f(\alpha)\,d\alpha = \operatorname{Re} w,$$

разложив подынтегральное выражение в ряд Тейлора по степеням $\frac{r}{R}$:

$$\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{1 - \frac{r}{R} e^{i(\varphi-\alpha)}}\right] f(\alpha) = \frac{1}{2} f(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n e^{in(\varphi-\alpha)} f(\alpha).$$

Этот ряд можно почленно проинтегрировать и перегруппировать слагаемые:

$$w(x,\ y)=w(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}+\frac{Re^{i\alpha}}{Re^{i\alpha}-re^{i\varphi}}\right]f(\alpha)\,d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(\alpha)d\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\cos n\varphi\cos n\alpha+\sin n\varphi\sin n\alpha)f(\alpha)d\alpha+$$

$$+i\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\sin n\varphi\cos n\alpha-\sin n\alpha\cos n\varphi)\,f(\alpha)\,d\alpha=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-ib_n}{R^n}r^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-ib_n}{R^n}(x+iy)^n.$$

Через $a_n$, $b_n$ мы обозначили интегралы

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha,\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha,\qquad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

совпадающие с коэффициентами Фурье.

Тем самым показано, что для любой непрерывной $f(\varphi)$ формула решения задачи Дирихле

$$u(x,\ y)=\operatorname{Re}\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-ib_n}{R^n}(x+iy)^n\right\}$$

представляет собой просто другую запись формулы Пуассона. Следовательно, справедлива формула (1) и обоснован метод Фурье. Выделяя мнимую часть из ряда

$$w=u+iv=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-ib_n}{R^n}(x+iy)^n,$$

найдем

$$v(x,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}(-b_n\cos n\varphi+a_n\sin n\varphi).$$

Мы обосновали правило Фурье построения гармонической в круге функции $u(x,\ y)$ по ее непрерывным граничным значениям. Более того, мы дали также ряд для построения $v(x,\ y)$ — гармонической функции, сопряженной к $u(x,\ y)$ и связанной с ней соотношениями

Коши — Римана

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Из этих соотношений видно, что функция $v(x, y)$ определяется по заданной $u(x, y)$ однозначно, с точностью до произвольной постоянной (однозначно определяются $v_x$, $v_y$). Мы доказали тем самым, что аналитическая в круге $|x+iy|<R$ функция $w$ восстанавливается по непрерывным граничным значениям ее вещественной части однозначно, с точностью до произвольного постоянного мнимого слагаемого $iC$. Нам будет важно для дальнейшего заметить, что если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ сходится, то $w$ как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций будет непрерывной в замкнутом круге $|x+iy|\leqslant R$. Чтобы обеспечить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$, достаточно предполагать функцию $f(\varphi)$ имеющей вторые непрерывные производные.

Отметим, что приведенное нами рассуждение дает аккуратное доказательство того факта, что всякая достаточно гладкая (имеющая непрерывные вторые производные) периодическая с периодом $2\pi$ функция $(\varphi)$ может быть представлена равномерно сходящимся к ней рядом Фурье (2), для коэффициентов которого выполнены неравенства

$$|a_k| < \frac{\text{const}}{k^2}, \quad |b_k| < \frac{\text{const}}{k^2}.$$

Легко убедиться в том, что это доказательство, основанное на теории интеграла Пуассона, по существу никак не опирается на те сведения о рядах Фурье, которые мы использовали при предварительном разборе наводящих соображений.

Ясно, что если функция $f(z)$ имеет непрерывные вторые производные и периодична с периодом $2l$, то ее можно записать следующим равномерно сходящимся рядом:

$$f(z) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos\frac{k\pi z}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin\frac{k\pi z}{l}.$$

Действительно, этот случай сводится к предыдущему, если положить

$$z = \frac{l}{\pi}\varphi, \quad \varphi = \frac{2\pi}{2l}z = \frac{\pi z}{l}.$$

Приведенной сейчас формой ряда Фурье для $f(z)$ мы воспользуемся ниже в этом параграфе.

В качестве другого примера на метод Фурье рассмотрим задачу об акустических колебаниях слоя газа толщины $l$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ между двумя неподвижными плоскостями. Для этого у системы уравнений акустики

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

будем разыскивать решения, удовлетворяющие граничным условиям: $u = 0$ при $x = 0$, $x = l$. Начнем с отыскания частных решений вида

$$u = T(t)\,U(x),$$
$$p = T(t)\,P(x).$$

Из уравнений акустики следует, что если такие решения существуют, то $T$, $P$, $U$ связаны равенствами

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{P'(x)}{U(x)} = \lambda = \mathrm{const},$$
$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\rho_0 c_0^2 \frac{U'(x)}{P(x)} = \lambda = \mathrm{const}$$

($\lambda$ является, с одной стороны, функцией только от $t$, а с другой — только от $x$, поэтому оно на самом деле не зависит ни от одного, ни от другого). Отсюда $T(t) = \mathrm{const}\, e^{\lambda t}$, и поэтому мы должны рассматривать частные решения такого вида:

$$u = e^{\lambda t}\,U(x),$$
$$p = e^{\lambda t}\,P(x).$$

Очевидно, что для $U(x)$ должны быть выполнены граничные условия $U(0) = U(l) = 0$. Подстановка решений указанного вида в исходную систему дает для $U$, $P$ обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\lambda U + \frac{1}{\rho_0}\frac{dP}{dx} = 0,$$

$$\lambda P + \rho_0 c_0^2 \frac{dU}{dx} = 0.$$

Общее решение этих уравнений имеет вид

$$U = Ae^{\frac{\lambda x}{c_0}} + Be^{-\frac{\lambda x}{c_0}},$$

$$P = -\rho_0 c_0 A e^{\frac{\lambda x}{c_0}} + \rho_0 c_0 B e^{-\frac{\lambda x}{c_0}}.$$

Постоянные $A$, $B$ определим из граничных условий $U(0)=U(l)=0$. Эти условия приводят к однородной системе линейных уравнений

$$A+B=0,$$
$$Ae^{\frac{\lambda l}{c_0}}+Be^{-\frac{\lambda l}{c_0}}=0,$$

которая имеет ненулевое решение, лишь если

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\frac{\lambda l}{c_0}} & e^{-\frac{\lambda l}{c_0}} \end{vmatrix}=e^{-\frac{\lambda l}{c_0}}-e^{\frac{\lambda l}{c_0}}=-2\operatorname{sh}\frac{\lambda l}{c_0}=0,$$

т. е. если $\lambda=\frac{ik\pi c_0}{l}$ ($k$ — целое). Постоянные $A$, $B$ при таких $\lambda$ определяются с точностью до произвольного множителя. Мы можем положить $A=1/2$, $B=-1/2$. Тогда

$$U=i\,\frac{e^{i\frac{k\pi}{l}x}-e^{-i\frac{k\pi}{l}x}}{2i}=i\sin\frac{k\pi}{l}x,$$
$$P=-\rho_0c_0\,\frac{e^{i\frac{k\pi}{l}x}+e^{-i\frac{k\pi}{l}x}}{2}=-\rho_0c_0\cos\frac{k\pi}{l}x.$$

Значения параметра $\lambda$, при которых задача

$$\lambda U+\frac{1}{\rho_0}\frac{dP}{dx}=0,$$
$$\lambda P+\rho_0c_0^2\frac{dU}{dx}=0,$$
$$U(0)=U(l)=0$$

имеет нетривиальное решение, называются *собственными значениями*, а соответствующие решения $U(x)$, $P(x)$ образуют *собственную вектор-функцию*. Мы установили, что собственные значения и собственные функции даются формулами

$$\lambda_k=i\,\frac{k\pi c_0}{l},\quad U_k=i\sin\frac{k\pi}{l}x,\quad P_k=-\rho_0c_0\cos\frac{k\pi}{l}x,$$

и тем самым показали, что частных решений

$$u_k=e^{\lambda_k t}\,U_k(x),\quad p_k=e^{\lambda_k t}\,P_k(x)$$

будет бесконечно много. Ясно, что любая конечная линейная комбинация

$$u=\sum_k a_ku_k,\quad p=\sum_k a_kp_k,$$

т. е.

$$\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \sum_k a_k \begin{pmatrix} u_k \\ p_k \end{pmatrix},$$

также удовлетворяет системе

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

и граничным условиям $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

Для системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$
$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

обычно решают задачу с начальными данными

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad p(x, 0) = \psi(x).$$

Аппроксимируем вектор-функцию $\{\varphi(x), \psi(x)\}$ конечными линейными комбинациями

$$\begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix} \approx \sum a_k \begin{pmatrix} U_k(x) \\ P_k(x) \end{pmatrix}.$$

Естественно ожидать, что решение

$$\tilde{u}(x, t) = \sum a_k e^{\lambda_k t} U_k(x),$$
$$\tilde{p}(x, t) = \sum a_k e^{\lambda_k t} P_k(x)$$

будем аппроксимировать разыскиваемое решение $u(x, t)$, $p(x, t)$.

Мы сейчас ограничиваемся только не очень аккуратными формулировками, которые нужны для понимания примера. Строгая теория будет построена немного дальше.

Остановимся еще на следующем обстоятельстве. Рассматривая вещественную систему с вещественными граничными условиями, мы построили у нее комплексные частные решения

$$u_k = ie^{i\frac{k\pi c_0}{l}t} \sin\frac{k\pi x}{l} = i\cos\frac{k\pi c_0}{l}t \sin\frac{k\pi}{l}x - \sin\frac{k\pi c_0}{l}t \sin\frac{k\pi}{l}x,$$

$$p_k = -\rho_0 c_0 e^{i\frac{k\pi c_0}{l}t} \cos\frac{k\pi}{l}x =$$
$$= -\rho_0 c_0 \left(\cos\frac{k\pi c_0}{l}t \cos\frac{k\pi}{l}x + i\sin\frac{k\pi c_0}{l}t \cos\frac{k\pi}{l}x\right).$$

Ясно, что линейная комбинация

$$\sum a_k \begin{pmatrix} u_k \\ p_k \end{pmatrix} = \sum a_k \begin{pmatrix} \dfrac{u_k + u_{-k}}{2} \\ \dfrac{p_k + p_{-k}}{2} \end{pmatrix} + \sum i a_k \begin{pmatrix} \dfrac{u_k - u_{-k}}{2i} \\ \dfrac{p_k - p_{-k}}{2i} \end{pmatrix}$$

является также линейной комбинацией вещественных частных решений

$$\begin{cases} \dfrac{u_k + u_{-k}}{2} = -\sin \dfrac{k\pi c_0}{l} t \sin \dfrac{k\pi}{l} x, \\ \dfrac{p_k + p_{-k}}{2} = -\rho_0 c_0 \cos \dfrac{k\pi c_0}{l} t \cos \dfrac{k\pi}{l} x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{u_k - u_{-k}}{2i} = \cos \dfrac{k\pi c_0}{l} t \sin \dfrac{k\pi}{l} x, \\ \dfrac{p_k - p_{-k}}{2i} = -\rho_0 c_0 \sin \dfrac{k\pi c_0}{l} t \cos \dfrac{k\pi}{l} x. \end{cases}$$

Наоборот, любая комбинация этих вещественных частных решений будет комбинацией комплексных решений $(u_k, p_k)$. Использование комплексных решений удобно для упрощения выкладок.

Решения вида

$$\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -\sin \dfrac{k\pi c_0}{l} t \sin \dfrac{k\pi}{l} x \\ -\rho_0 c_0 \cos \dfrac{k\pi c_0}{l} t \cos \dfrac{k\pi}{l} x \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \cos \dfrac{k\pi c_0}{l} t \sin \dfrac{k\pi}{l} x \\ -\rho_0 c_0 \sin \dfrac{k\pi c_0}{l} t \cos \dfrac{k\pi}{l} x \end{pmatrix} =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos \dfrac{k\pi c_0 (t+\tau)}{l} \sin \dfrac{k\pi}{l} x \\ -\rho_0 c_0 \sin \dfrac{k\pi c_0 (t+\tau)}{l} \cos \dfrac{k\pi}{l} x \end{pmatrix}$$

описывают так называемые собственные колебания слоя газа, заключенного между неподвижными плоскостями $x = 0$, $x = l$, или, как иногда говорят, — *стоячие волны*. Графики распределения скорости и давления в такой волне в некоторый момент времени приведены на рис. 24. Название «стоячие волны» подчеркивает тот факт, что для таких колебаний точки, в которых амплитуда скорости $u$ (или давления $p$) равна нулю (узлы) или экстремальна (пучности), все время остаются в одних и тех же местах. Отметим, что в «узлах» скорости амплитуда давления максимальна. Нужно также ука-

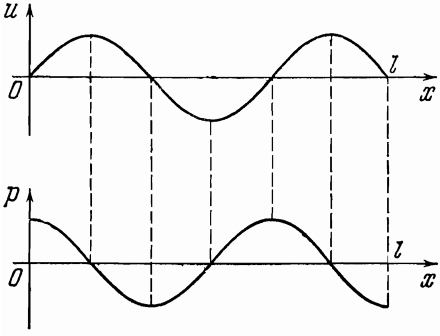

Рис. 24.

зать, что колебания давления сдвинуты по фазе относительно колебаний $u$.

*Перейдем к обоснованию метода Фурье для системы уравнений акустики.* А именно, покажем, что решение этой системы с условиями $u(0, t) = u(l, t) = 0$ и при некоторых дополнительных ограничениях на начальные функции $u(x, 0)$ и $p(x, 0)$ представляется в виде бесконечной суммы частных решений системы, описывающих стоячие волны.

В § 5 мы установили, что если $\varphi(x)$, $\psi(x)$ имеют непрерывные первые и вторые производные при $0 \leqslant x \leqslant l$ и удовлетворяют условиям согласования

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(l) = 0, \quad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0; \quad \psi'(0) = \psi'(l) = 0,$$

то решение уравнений акустики имеет вид

$$u = \frac{f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)}{2}, \quad p = \rho_0 c_0 \frac{f(x - c_0 t) - g(x + c_0 t)}{2}.$$

Здесь $f(z)$, $g(z)$, дважды непрерывно дифференцируемые периодические функции с периодом $2l$

$$f(z + 2l) = f(z), \quad g(z + 2l) = g(z),$$

связаны равенством $f(z) = -g(-z)$.

Как известно, всякую достаточно гладкую периодическую функцию можно разложить в равномерно сходящийся ряд Фурье:

$$f(z) = \frac{\tilde{\alpha}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_k \cos\frac{k\pi}{l} z + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\beta}_k \sin\frac{k\pi}{l} z,$$

$$g(z) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos\frac{k\pi}{l} z + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin\frac{k\pi}{l} z.$$

(Мы уже отмечали, что доказательство этого факта вытекает, в частности, из рассмотрений начала этого параграфа.) Условие $f(z) = -g(-z)$ накладывает на коэффициенты соотношения

$$\tilde{\alpha}_k = -\alpha_k, \quad \tilde{\beta}_k = \beta_k,$$

в силу которых

$$f(z) = -\frac{\alpha_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos\frac{k\pi}{l} z + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin\frac{k\pi}{l} z,$$

$$g(z) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos\frac{k\pi}{l} z + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin\frac{k\pi}{l} z.$$

Коэффициенты $\alpha_k$, $\beta_k$ удовлетворяют неравенствам $|\alpha_k| < \mathrm{const}/k^2$, $|\beta_k| < \mathrm{const}/k^2$, вытекающим из непрерывности вторых производных $f''$, $g''$. Для решения

$$u=\frac{f(x-c_0t)+g(x+c_0t)}{2},$$

$$p=\rho_0c_0\frac{f(x-c_0t)-g(x+c_0t)}{2}$$

мы приходим к представлению

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\frac{1}{2}\left[\cos\frac{k\pi}{l}(x+c_0t)-\cos\frac{k\pi}{l}(x-c_0t)\right]+ \\ +\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\frac{1}{2}\left[\sin\frac{k\pi}{l}(x+c_0t)+\sin\frac{k\pi}{l}(x-c_0t)\right],$$

$$p=\frac{\rho_0c_0}{2}\alpha_0-\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\frac{\rho_0c_0}{2}\left[\cos\frac{k\pi}{l}(x+c_0t)+\cos\frac{k\pi}{l}(x-c_0t)\right]+ \\ +\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\frac{\rho_0c_0}{2}\left[-\sin\frac{k\pi}{l}(x+c_0t)+\sin\frac{k\pi}{l}(x-c_0t)\right]$$

(перестановка членов, производившаяся при получении этого представления, законна в силу равномерной и абсолютной сходимости рядов, вытекающей из неравенств

$$|\alpha_k|<\frac{\text{const}}{k^2},\qquad |\beta_k|<\frac{\text{const}}{k^2}\Big).$$

Тем самым получено представление решения через комбинацию вектор-функций

$$\begin{pmatrix}u_0\\ p_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\tilde{u}_k\\ \tilde{p}_k\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\frac{k\pi}{l}(x+c_0t)-\cos\frac{k\pi}{l}(x-c_0t)\\ -\rho_0c_0\left[\cos\frac{k\pi}{l}(x+c_0t)+\cos\frac{k\pi}{l}(x-c_0t)\right]\end{pmatrix}= \\ =\begin{pmatrix}\cos\frac{k\pi c_0}{l}\left(t+\frac{l}{2c_0}\right)\sin\frac{k\pi}{l}x\\ -\rho_0c_0\sin\frac{k\pi c_0}{l}\left(t+\frac{l}{2c_0}\right)\cos\frac{k\pi}{l}x\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\tilde{\tilde{u}}_k\\ \tilde{\tilde{p}}_k\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sin\frac{k\pi}{l}(x+c_0t)+\sin\frac{k\pi}{l}(x-c_0t)\\ \rho_0c_0\left[-\sin\frac{k\pi}{l}(x+c_0t)+\sin\frac{k\pi}{l}(x-c_0t)\right]\end{pmatrix}= \\ =\begin{pmatrix}\cos\frac{k\pi c_0}{l}t\sin\frac{k\pi}{l}x\\ -\rho_0c_0\sin\frac{k\pi c_0}{l}t\cos\frac{k\pi}{l}x\end{pmatrix},$$

каждая из которых является стоячей волной.

Тем самым мы показали, что любое решение системы уравнений акустики, отвечающее достаточно гладким начальным данным $u(x, 0) = \varphi(x)$, $p(x, 0) = \psi(x)$ таким, что

$$\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi'(0) = \varphi(l) = \varphi''(l) = \psi'(l) = 0$$

(это условия согласования начальных данных с граничными условиями $u(0, t) = u(l, t) = 0$), может быть разложено в равномерно сходящийся ряд по частным решениям — стоячим волнам. Обоснование метода Фурье для рассматриваемой задачи закончено.

Теперь немного истории. Метод, который носит название метода Фурье, возник еще в 18 веке при изучении уравнения, описывающего колебания струны. Это уравнение точно такое же, какое получается, если из системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

исключить одну из неизвестных функций (например $p$). Так мы приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{3}$$

В нашей задаче $u(x, t)$ удовлетворяет граничным условиям $u(0, t) = u(l, t) = 0$. Этим же условиям удовлетворяет отклонение струны, закрепленной на концах. (В § 5 мы получали уравнение такого же вида, как и (3), исключением не $p$, а $u$.)

Изучая уравнение колебаний струны, Даламбер в 1747 году показал, что его общее решение имеет вид

$$u(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t).$$

В 1748 году Эйлер выразил $f$, $g$ через начальное отклонение струны $u_0(x)$ и через ее начальную скорость $u_1(x)$, получив формулу

$$u(x, t) = \frac{u_0(x + c_0 t) + u_0(x - c_0 t)}{2} + \frac{1}{2c_0}\int\limits_{x - c_0 t}^{x + c_0 t} u_1(\xi)\, d\xi,$$

которую мы теперь обычно называем *формулой Даламбера*. Эйлер отметил, что по смыслу задачи начальные данные $u_0(x)$, $u_1(x)$ могут быть заданы в виде двух произвольных кривых.

Даламбер в 1750 году поспешил выступить против этого расширенного толкования его идеи, так как он подразумевал, что $u(x, t)$ непременно должно быть выражено через $x$, $t$ аналитически.

В 1753 году Даниил Бернулли из совсем других соображений пришел к выводу, что самыми общими решениями уравнения струны должны быть решения вида

$$u = \sum_k a_k \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \frac{k\pi c_0}{l} (t - t_k),$$

т. е. линейные комбинации стоячих волн. Эйлер с этим не согласился. Он сомневался в возможности представления произвольной функции тригонометрическим рядом.

В 1759 году Лагранж, изучая колебания уже не струны, а аппроксимирующей ее нити с нанизанными бусинками, и затем совершая предельный переход, подтвердил результаты Эйлера, с одной стороны, и результаты, близкие к результатам Бернулли, с другой. Однако большое количество предельных переходов, которые в то время, конечно, не могли быть проведены хоть с какой-нибудь строгостью, дало основание Даламберу не согласиться с трактовкой вопроса Лагранжем.

Только в 1807 году Фурье сформулировал теорему о том, что совершенно произвольная функция может быть представлена тригонометрическим рядом. Как это ни странно, с самыми решительными возражениями выступил против этого Лагранж, хотя его формулы почти совпадают с формулами для коэффициентов тригонометрического ряда Фурье.

Доказательство теоремы Фурье было дано в 1829 году Дирихле, который наложил на представляемую функцию довольно жесткие условия, носящие его имя.

В 1853 году Риман, изучая условия, при которых функция представляется тригонометрическим рядом, пришел, в частности, к своему известному определению интеграла. Вводная глава его работы содержит увлекательное изложение истории вопроса, которое я пересказал. Я бы очень рекомендовал прочесть эту главу. Избранные сочинения Римана переведены на русский язык и изданы у нас в 1948 году. Работа «О возможности представления функции посредством тригонометрического ряда» помещена в этой книге.

В заключение этого параграфа остановимся еще на одном важном вопросе. Чтобы методом Фурье можно было пользоваться для решения конкретных задач, надо указать правило для определения коэффициентов $a_k$ (коэффициентов Фурье) в разложении начальных данных задачи. Сейчас будет описано такое правило, относящееся к разобранному примеру системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

На решениях этой системы с граничными условиями $u(0, t) = u(l, t) = 0$ имеет место закон сохранения энергии:

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^l \frac{\rho_0 u^2(x, t) + \frac{1}{\rho_0 c_0^2} p^2(x, t)}{2}\, dx\right] = 0.$$

Он непосредственно следует из тождества интеграла энергии (§ 5). Оказывается, что следствием этого закона является ортогональность собственных вектор-функций в некотором скалярном произведении, связанном с квадратичной формой интеграла энергии. Надо только отметить, что так как наши собственные функции комплексные, то в эти формулировки надо внести уточнения, заменив квадратичную формулу интеграла энергии эрмитовой. Аккуратное изложение этих фактов из теории консервативных задач, связанных с процессами, в которых сохраняется полная энергия, будет проведено в главе IV. Сейчас же мы ограничимся только указанием формулы

$$\int_0^l \left[\frac{\rho_0}{2} u_1(x)\, \bar{u}_2(x) + \frac{1}{2\rho_0 c_0^2} p_1(x)\, \bar{p}_2(x)\right] dx$$

для скалярного (эрмитова) произведения вектор-функций с компонентами $(u_1(x),\ p_1(x))$, $(u_2(x),\ p_2(x))$ и отметим, что различные собственные вектор-функции

$$U_k = i \sin\frac{k\pi}{l} x, \quad P_k = -\rho_0 c_0 \cos\frac{k\pi}{l} x$$

между собой действительно ортогональны в этом скалярном произведении.

В самом деле, скалярное произведение собственных функций с номерами $m$, $n$ вычисляется по формуле

$$\int_0^l \left[\frac{\rho_0}{2} i \sin\frac{m\pi x}{l} (-i) \sin\frac{n\pi x}{l} + \frac{1}{2\rho_0 c_0^2}\left(-\rho_0 c_0 \cos\frac{m\pi x}{l}\right)\left(-\rho_0 c_0 \cos\frac{n\pi x}{l}\right)\right] dx =$$

$$= \frac{\rho_0}{2}\int_0^l \left[\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} + \cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\right] dx = \begin{cases} \frac{\rho_0 l}{2}, & \text{если} \quad m = n, \\ 0, & \text{если} \quad m \neq n. \end{cases}$$

Как было доказано, решение нашей задачи, отвечающее начальным данным

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad p(x, 0) = \psi(x)$$

с дважды непрерывно дифференцируемыми $\varphi(x)$, $\psi(x)$, удовлетворяющими условиям согласования

$$\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=0, \qquad \psi'(0)=\psi'(l)=0,$$

может быть представлено равномерно сходящимся рядом

$$\begin{pmatrix} u(x,t) \\ p(x,t) \end{pmatrix} = \sum_k a_k e^{\lambda_k t} \begin{pmatrix} U_k(x) \\ P_k(x) \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho_0 c_0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k e^{i\frac{k\pi c_0}{l}t} \begin{pmatrix} i\sin\frac{k\pi x}{l} \\ -\rho_0 c_0 \cos\frac{k\pi x}{l} \end{pmatrix} + a_{-k} e^{-i\frac{k\pi c_0}{l}t} \begin{pmatrix} -i\sin\frac{k\pi x}{l} \\ -\rho_0 c_0 \cos\frac{k\pi x}{l} \end{pmatrix} \right].$$

В частности, равномерно сходится ряд, представляющий начальные данные:

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,0) \\ p(x,0) \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho_0 c_0 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \begin{pmatrix} i\sin\frac{k\pi x}{l} \\ -\rho_0 c_0 \cos\frac{k\pi x}{l} \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + a_{-k} \begin{pmatrix} -i\sin\frac{k\pi x}{l} \\ -\rho_0 c_0 \cos\frac{k\pi x}{l} \end{pmatrix} \right].$$

Ортогональность собственных функций дает в наши руки очень удобный аппарат для вычисления коэффициентов $a_k$ в разложении начальной вектор-функции. Чтобы показать, как это делается, рассмотрим интеграл

$$\int_0^l \left[ \frac{\rho_0}{2} \varphi(x) \bar{U}_n(x) + \frac{1}{2\rho_0 c_0^2} \psi(x) \bar{P}_n(x) \right] dx =$$

$$= a_0 \int_0^l \left[ \frac{\rho_0}{2} U_0(x) \bar{U}_n(x) + \frac{1}{2\rho_0 c_0^2} P_0(x) \bar{P}_n(x) \right] dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \int_0^l \left[ \frac{\rho_0}{2} U_k \bar{U}_n + \frac{1}{2\rho_0 c_0^2} P_k \bar{P}_n \right] dx + \right.$$

$$\left. + a_{-k} \int_0^l \left[ \frac{\rho_0}{2} U_{-k} \bar{U}_n + \frac{1}{2\rho_0 c_0^2} P_{-k} \bar{P}_n \right] dx \right\} = \frac{a_n \rho_0 l}{2}.$$

Из равномерной сходимости ряда, представляющего вектор-функцию $\varphi$, $\psi$, следует законность выполненного нами почленного интегрирования.

Итак, мы пришли к следующим формулам для коэффициентов Фурье в нашей задаче:

$$a_n = \frac{2}{\rho_0 l} \int_0^l \left[\frac{\rho_0}{2} \varphi(x) \bar{U}_n(x) + \frac{1}{2\rho_0 c_0^2} \psi(x) \bar{P}_n(x)\right] dx =$$
$$= -\frac{i}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\frac{n\pi x}{l}\, dx - \frac{1}{c_0 l} \int_0^l \psi(x) \cos\frac{n\pi x}{l}\, dx.$$

На этом мы заканчиваем наш предварительный обзор идей, связанных с методом Фурье.

В главе IV мы подробнее разберем теорию этого метода в случае гиперболических систем с двумя независимыми переменными. При этом мы будем существенно опираться на теорему существования решений из главы II и на технику так называемого преобразования Лапласа.

## § 8. Корректность

Связь между корнями характеристического уравнения и свойствами коротких волн. Пример Адамара. Понятие о корректно и некорректно поставленных задачах. Некорректная задача для уравнения теплопроводности. Замечания о предмете курса уравнений математической физики. Пример некорректно поставленной смешанной задачи для волнового уравнения и для уравнений акустики.

Классификация дифференциальных уравнений с частными производными, описанная в § 6 (эллиптические, гиперболические, параболические уравнения), была связана со структурой характеристик — и это не случайно.

Дело в том, что свойства характеристического уравнения тесно связаны с качественными особенностями поведения решений. Сейчас я постараюсь пояснить это обстоятельство, пользуясь нестрогими соображениями. Впрочем, такие нестрогие соображения, типичные для специалистов по прикладным наукам, если постараться, можно превратить в доказательство. Однако мы не будем таких попыток делать.

Рассмотрим, например, уравнение

$$A(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2B(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} + C(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial t} = F(x, t)$$

в некоторой окрестности точки $(x_0, t_0)$, которая выбрана так, чтобы коэффициенты $A$, $B$, $C$, ... внутри этой окрестности могли с разумной точностью считаться постоянными. Постараемся найти у нашего уравнения решения вида $u = U[\rho(\xi x + \tau t)]$. Здесь $\xi$, $\tau$ — постоянные, выбранные раз и навсегда, а $\rho$ — параметр. Если взять $\rho$ большим, то предлагаемая формула будет описывать очень короткие волны. Подставляя эту формулу в уравнение, получим

$$(A\tau^2+2B\xi\tau+C\xi^2)\,U''=O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Увеличивая $\rho$, мы видим, что с его ростом произвольная функция $U[\rho(\xi x+\tau t)]$ будет все точнее и точнее удовлетворять уравнению, если только постоянные $\xi$, $\tau$ подчинены условию $A\tau^2+$ $+2B\xi\tau+C\xi^2=0$, т. е. если вектор $(\xi,\ \tau)$ направлен по нормали к характеристике. В качестве $u=U[\rho(\xi x+\tau t)]$ может быть взята любая функция, постоянная вдоль прямых $\xi x+\tau t=\text{const}$. Эти прямые внутри нашей окрестности можно считать совпадающими с характеристиками.

Очень полезно взять в качестве $U(s)$ гармонику $e^{is}$. Ей отвечают приближенные решения вида $u=e^{i\rho(\xi x+\tau t)}$. Вещественная часть этих приближенных решений — бегущие синусоидальные волны, если $\xi$, $\tau$ вещественны.

В случае, если взять уравнение с невещественными характеристиками, например, уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ $(\xi^2+\tau^2=0)$, положение изменится. Среди решений вида $e^{i\rho(\xi x+\tau t)}=e^{i\rho\xi x\pm\rho\xi t}$ (это будут здесь точные, а не приближенные решения) есть решения, которые очень быстро увеличивают свою амплитуду с ростом $t$. Этот рост тем быстрее, чем больше $\xi$ — меньше длина волны. Для уравнений с переменными коэффициентами дело будет обстоять совершенно так же, так как «с точки зрения коротких волн» переменность коэффициентов несущественна. По этой причине изучение уравнений с частными производными начинается, как правило, с рассмотрения модели, у которой коэффициенты постоянны. У этой модели в первую очередь удобно найти бегущие короткие волны, выяснить, растут ли они и как, а лишь потом строить строгую теорию.

Разберем, в качестве примера, уравнения акустики

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial p}{\partial t}+\rho_0 c_0^2\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\end{cases}$$

и постараемся найти у этой системы решения вида

$$u=Ue^{i(\alpha x+\lambda t)},\quad p=Pe^{i(\alpha x+\lambda t)}.$$

Подставляя формулы для $u$, $p$ в уравнения и сокращая на $e^{i(\alpha x+\lambda t)}$, мы найдем, что $\lambda/\alpha$ должно быть собственным числом матрицы

$$\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{\rho_0}\\ \rho_0 c_0^2 & 0\end{pmatrix},$$

а коэффициенты $U$, $P$ образовывать собственный вектор этой матрицы. Получаем $\frac{\lambda}{\alpha}=\pm c_0$. Выберем верхний знак: $\lambda=c_0\alpha$. Тогда $c_0U+\frac{1}{\rho_0}P=0$. Решение имеет вид

$$u=-\frac{P}{\rho_0c_0}e^{i\alpha(x+c_0t)},\quad p=Pe^{i\alpha(x+c_0t)}.$$

Вещественные решения можно получить, отделив мнимую или вещественную часть. Выпишем последнюю:

$$u=-\frac{P}{\rho_0c_0}\cos[\alpha(x+c_0t)],$$
$$p=P\cos[\alpha(x+c_0t)].$$

Полученные формулы показывают, что звуковые гармонические волны, в том числе и короткие, перемещаются, не изменяя с течением времени своей амплитуды.

Теперь перейдем к эллиптической системе (уравнения Коши — Римана) и посмотрим, какой характер будут иметь решения, которые строятся по таким же правилам. Это опять будут точные решения, так как уравнения Коши — Римана имеют постоянные коэффициенты. Решения системы

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial v}{\partial x},\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial t}=-\dfrac{\partial u}{\partial x}\end{cases}$$

будем искать в виде

$$u=Ue^{i(\lambda t+\alpha x)},\quad v=Ve^{i(\lambda t+\alpha x)}.$$

Подставляя этот вид в систему, получим

$$\lambda^2+\alpha^2=0,\quad V=\frac{\lambda}{\alpha}U.$$

Выберем $\alpha=n$, $\lambda=-in$. Тогда

$$u_n=U_ne^{nt-inx},\quad v_n=-iU_ne^{nt-inx}.$$

Отделив вещественную часть, найдем решения

$$u_n=U_ne^{nt}\cos nx,$$
$$v_n=U_ne^{nt}\sin nx.$$

Постоянную $U_n$ зададим формулой $U_n=e^{-\sqrt{n}}$.

Пример последовательности решений

$$u_n=e^{-\sqrt{n}}e^{nt}\cos nx,$$
$$v_n=e^{-\sqrt{n}}e^{nt}\sin nx$$

был построен в свое время (1904 г.) Адамаром, который из ее рассмотрения пришел к очень важным выводам.

Дело в том, что решение $(u_n, v_n)$ удовлетворяет при $t=0$ следующим начальным данным:

$$u_n(x, 0) = \varphi_n(x) = e^{-\sqrt{n}} \cos nx,$$
$$v_n(x, 0) = \psi_n(x) = e^{-\sqrt{n}} \sin nx.$$

При $n \to \infty$ эти начальные данные стремятся к нулю. Более того, производные от них $\varphi_n^{(k)}(x)$, $\psi_n^{(k)}(x)$ порядков $k = 1, 2, \ldots, p$, стремятся к нулю при $n \to \infty$. (Здесь $p$ — произвольное фиксированное натуральное число.) В самом деле,

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n^{(k)}(x) &= \pm n^k e^{-\sqrt{n}} \cos nx \\ \psi_n^{(k)}(x) &= \pm n^k e^{-\sqrt{n}} \sin nx \end{aligned}\right\}, \text{ если } k \text{ — четное,}$$
$$\left.\begin{aligned} \varphi_n^{(k)}(x) &= \pm n^k e^{-\sqrt{n}} \sin nx \\ \psi_n^{(k)}(x) &= \pm n^k e^{-\sqrt{n}} \cos nx \end{aligned}\right\}, \text{ если } k \text{ — нечетное.}$$

С другой стороны, $u_n(x, t)$, $v_n(x, t)$ при любом $t$ неограничены.

Мы видим, что какую бы норму мы ни выбрали для оценки величины начальных данных, мы не сможем утверждать, что из малости этой нормы вытекает малость решения (решение здесь оценивается по максимуму его модуля). В качестве допустимых норм для начальных данных мы здесь допускаем нормы следующего вида:

$$\|\varphi(x)\|_p = \max_{0 \leqslant k \leqslant p} \sup_x |\varphi^{(k)}(x)|,$$
$$\|\psi(x)\|_p = \max_{0 \leqslant k \leqslant p} \sup_x |\psi^{(k)}(x)|.$$

Адамар предложил такие задачи называть некорректными.

*Задача называется корректной, если она разрешима при любых начальных (или граничных) данных, принадлежащих к некоторому классу, имеет единственное решение и это решение непрерывно зависит от начальных данных.*

*Задача называется некорректной, если она разрешима не при любых начальных данных, либо если она имеет неединственное решение, либо если нельзя выбрать такие нормы для решений и такие нормы для начальных данных, чтобы в этих нормах имела место непрерывная зависимость решения от условий задачи.*

В последней формулировке предполагается, что нельзя выбрать нормы, принадлежащие к некоторому заранее очерченному, но достаточно широкому классу. Как правило, в качестве такого класса рассматриваются нормы, включающие оценку функции и ее производных вплоть до некоторого фиксированного порядка.

Пример Адамара показывает, что задача Коши для уравнений Коши — Римана является некорректной.

Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге, или задачи 1 и 2 для уравнения теплопроводности — корректны. Разрешимость этих задач была нами доказана, так же как и соответствующие теоремы единственности. Непрерывная зависимость решений от граничных или начальных условий вытекает из соответствующих принципов максимума. (Проверьте это.)

Сейчас мы приведем еще один пример некорректной задачи. Пусть мы рассматриваем решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

в области $t<0$, $0\leqslant x\leqslant\pi$ и хотим определить это решение по тем значениям, которые оно принимает при $t=0$

$$u(x,\ 0)=\varphi(x).$$

При $x=0$, $x=\pi$ предполагаются выполненными граничные условия $u(0,\ t)=u(\pi,\ t)=0$.

Это задача об определении тепловой истории нагретого тела по его состоянию в данный момент. Некорректность такой задачи легко устанавливается рассмотрением последовательности решений

$$u_n(x,\ t)=e^{-\sqrt{n}}e^{-n^2t}\sin nx,$$

неограниченной при любом $t<0$ и удовлетворяющей условиям:

$$u_n(x,\ 0)=\psi_n(x)=e^{-\sqrt{n}}\sin nx,$$

точно таким же, как в примере Адамара.

Адамар выдвинул постулат, что все процессы в математической физике, которые разумно описывать дифференциальными уравнениями, связаны с корректными задачами. Некорректные задачи нам приходится иногда решать в тех случаях, когда мы хотим получить описание некоторого процесса не по условиям, которыми он вызывается, а по некоторым его следствиям, полученным в результате измерений. Например, если мы хотим установить распределение температур в теле для $t=-T_0<0$, зная тепловое состояние при $t=0$.

Начиная с Адамара, в теории уравнений математической физики изучаются, как правило, корректные задачи. Мы тоже будем следовать по этому пути.

И. Г. Петровский выделил класс уравнений, для которых корректна задача Коши, и назвал уравнения этого класса гиперболическими. Для эллиптических уравнений, точнее для некоторого естественного их подкласса, типичной корректной задачей является задача Дирихле. Мы в нашем курсе изучим типичные примеры гиперболических уравнений и задачу Коши для них. В качестве примера эллиптических уравнений мы рассмотрим только одно уравнение — уравнение Лапласа. В качестве примеров задач для параболических уравнений, имеющих кратные характеристики, мы уже рассматривали некоторые задачи для уравнения теплопроводности.

Приведем пример, показывающий, как можно установить некорректность в смешанной задаче. Пусть мы хотим разыскивать решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c_0^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0$$

при $x > 0$, $t > 0$, удовлетворяющее при $t = 0$ начальным условиям

$$w|_{t=0} = \varphi(x, y),$$
$$w_t|_{t=0} = \psi(x, y),$$

а при $x = 0$ — граничному $w_t - kw_x - lw_y = 0$. Легко проверить, что если

$$k^2 + l^2 < c_0^2, \qquad k < 0,$$

то последовательность частных решений

$$w_n(x, y, t) = e^{-\sqrt{n}} e^{-n\sqrt{c_0^2 - k^2 - l^2}\,(kt + x)} \cos n\left[l(kx + c_0^2 t) - (c_0^2 - k^2) y\right]$$

свидетельствует о некорректности поставленной задачи. Точно так же задача некорректна при любом $l$, если $k = -c_0$. В этом убеждает последовательность

$$w_n(x, y, t) = e^{-\sqrt{n}} e^{n(c_0 t - x)}.$$

Упражнение. Постройте последовательности функций $w_n(x, y, t)$ из приведенных примеров некорректности, отыскивая удовлетворяющие граничному условию частные решения волнового уравнения вида

$$w = Ae^{i(\alpha x + \beta y + \gamma t)}$$

и отделяя затем вещественную часть.

Эти примеры позволяют также утверждать, что для уравнений акустики

$$\frac{1}{\rho_0 c_0^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

смешанная задача в области $x > 0$, $t > 0$ с начальными данными $p|_{t=0}$, $u|_{t=0}$, $v|_{t=0}$ и с граничным условием $p + k\rho_0 u + l\rho_0 v = 0$, при $x = 0$ некорректна, если $k = -c_0$, или если $k < 0$, $k^2 + l^2 < c_0^2$.

В самом деле, нетрудно убедиться, что последовательности вида

$$p_n = \frac{\partial w_n}{\partial t}, \quad u_n = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial w_n}{\partial x}, \quad v_n = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial w_n}{\partial y},$$

где $w_n$ — построенные выше решения волнового уравнения, являются последовательностями решений уравнений акустики, свидетельствующими о некорректности поставленной задачи.

Оказывается, что при всех других вещественных значениях коэффициентов $k$, $l$ рассматриваемая смешанная задача как для волнового уравнения, так и для уравнений акустики корректна. На доказательстве этого мы не можем сейчас останавливаться. Более подробно рассмотрение смешанной задачи для гиперболических систем проводится в главе II.

## § 9. Свойства функций, удовлетворяющих интегральным неравенствам

Оценка максимума и модуля непрерывности функции по интегралам от ее квадрата и квадрата ее производных. Непрерывность «в среднем». Свойства функций из функциональных пространств, введенных в § 5. Что надо понимать под выполнением граничных условий и удовлетворением начальных данных. Две теоремы, которые вместе с теоремой Арцела приводят к критериям компактности.

В этом параграфе мы получим описание некоторых важных для дальнейшего свойств функций, следующих из интегральных неравенств, которым эти функции удовлетворяют. Такого рода неравенства обычно удается установить для решений гиперболических уравнений в результате оценок интегралов энергии. Поэтому изучение функций, удовлетворяющих интегральным неравенствам, позволяет прийти к важным заключениям о свойствах решений. В лемме 1 мы оценим максимум функции одного переменного и ее модуль непрерывности через интегралы квадратов самой этой функции и ее производной. Лемма 2 обобщает такие оценки на функции двух переменных.

Лемма 1. *Пусть непрерывная $v(x)$ кусочно непрерывно дифференцируема на отрезке $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ длины $X = x_2 - x_1$ и удовлетворяет неравенствам:*

$$\int_{x_1}^{x_2} v^2(x)\,dx \leqslant K^2X,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} v_x^2(x)\,dx \leqslant L^2/X.$$

*Тогда*

$$|v(x)| \leqslant K + L, \tag{1}$$

$$|v(x)| \leqslant K + 2\sqrt{KL}, \tag{2}$$

$$|v(\xi_2) - v(\xi_1)| \leqslant L\sqrt{\frac{\xi_2 - \xi_1}{X}} \leqslant L, \tag{3}$$

$$(x_1 \leqslant \xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant x_2).$$

Сначала убедимся в справедливости (3):

$$|v(\xi_2)-v(\xi_1)|=\left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} v_x(x)\,dx\right|\leqslant\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}|v_x(x)|\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} v_x^2\,dx}\cdot\sqrt{\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} 1\,dx}\leqslant\sqrt{L^2/X}\cdot\sqrt{\xi_2-\xi_1}.$$

Для доказательства (1) и (2) разобьем $[x_1,\ x_2]$ на $n$ равных частей и рассмотрим произвольную точку $x_0\,(x_1\leqslant x_0\leqslant x_2)$. Она принадлежит одному из построенных отрезков $[x_1',\ x_2']$ длины $\frac{1}{n}X$. Так как

$$\int\limits_{x_1'}^{x_2'} v^2(x)\,dx\leqslant\int\limits_{x_1}^{x_2} v^2(x)\,dx\leqslant K^2X,$$

то на $[x_1',\ x_2']$ найдется точка $x_3$ такая, что

$$v^2[x_3]\cdot\frac{1}{n}X\leqslant K^2X,$$

т. е. что $|v(x_3)|\leqslant\sqrt{n}\,K$. Теперь нетрудно, пользуясь (3), оценить $v(x_0)$ $\left(|x_3-x_0|<\frac{1}{n}X\right)$:

$$|v(x_0)|\leqslant|v(x_3)|+|v(x_0)-v(x_3)|\leqslant\sqrt{n}\,K+\frac{1}{\sqrt{n}}L. \tag{4}$$

В этой оценке $n$ — произвольное натуральное число. Так как разность между квадратными корнями из двух последовательных натуральных чисел меньше единицы,

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^{-1}<1,$$

то можно выбрать $n$ так, чтобы

$$(L/K)^{1/2}\leqslant\sqrt{n}\leqslant(L/K)^{1/2}+1.$$

Из этих неравенств и из (4), учитывая произвольность $x_0$, приходим к (2). Если в (4) положить $n=1$, то получим оценку (1). Лемма доказана.

Лемма 2. *Если $u(x,\ y)$ непрерывна, кусочно непрерывно дифференцируема в прямоугольнике $x_1\leqslant x\leqslant x_2$, $y_1\leqslant y\leqslant y_2$ $(x_2-x_1=X,$*

$y_2 - y_1 = Y$) *и удовлетворяет там неравенствам*:

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} u^2(x, y)\, dx\, dy \leqslant M^2 XY,$$

$$\max_{y_1 \leqslant y \leqslant y_2} \int_{x_1}^{x_2} u_x^2(x, y)\, dx \leqslant L^2/X,$$

$$\max_{x_1 \leqslant x \leqslant x_2} \int_{y_1}^{y_2} u_y^2(x, y)\, dy \leqslant L^2/Y,$$

*то для нее справедливы оценки*

$$|u(\xi_1, \eta_1) - u(\xi_2, \eta_2)| \leqslant L\left(\sqrt{\frac{|\xi_1 - \xi_2|}{X}} + \sqrt{\frac{|\eta_1 - \eta_2|}{Y}}\right), \tag{5}$$
$$|u(x, y)| \leqslant M + 2L.$$

Действительно, два раза применяя неравенство (3) из леммы 1, доказываем (5):

$$|u(\xi_1, \eta_1) - u(\xi_2, \eta_2)| \leqslant |u(\xi_1, \eta_1) - u(\xi_2, \eta_1)| +$$
$$+ |u(\xi_2, \eta_1) - u(\xi_2, \eta_2)| \leqslant L\sqrt{\frac{|\xi_1 - \xi_2|}{X}} + L\sqrt{\frac{|\eta_1 - \eta_2|}{Y}} \leqslant 2L. \tag{5'}$$

Начиная доказательство второго утверждения леммы, заметим, что из неравенства

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} u^2(x, y)\, dx\, dy \leqslant MXY,$$

очевидно существование точки $(x_0, y_0)$, в которой $|u(x_0, y_0)| \leqslant M$. В произвольной $(x, y)$

$$|u(x, y)| \leqslant |u(x_0, y_0)) + |u(x, y) - u(x_0, y_0)| \leqslant M + 2L.$$

Лемма 2 доказана.

При изучении гиперболических уравнений нам удобно пользоваться не самими неравенствами, сформулированными в леммах 1, 2, а легко выводимыми из них следствиями, содержащимися в леммах 3, 4. После этих лемм мы схематически наметим, как утверждения лемм 1 — 4 будут использоваться в теории гиперболических систем.

Лемма 3. *Для кусочно непрерывно дифференцируемой в прямоугольнике* $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$ *функции* $u(x, t)$ *и для любых*

$0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$, $0 \leqslant t \leqslant T$ *имеют место неравенства*:

$$\int_0^l [u(x, t_1) - u(x, t_2)]^2\, dx \leqslant |t_1 - t_2| \int_0^T \int_0^l u_t^2(x, t)\, dx\, dt,$$

$$\int_0^l u^2(x, t)\, dx \leqslant \frac{2}{T} \int_0^T \int_0^l u^2(x, t)\, dx\, dt + 2T \int_0^T \int_0^l u_t^2(x, t)\, dx\, dt,$$

$$\int_0^l u^2(x, t)\, dx \leqslant 8 \sqrt{\int_0^T \int_0^l u^2(x, t)\, dx\, dt} \sqrt{\int_0^T \int_0^l u_t^2(x, t)\, dx\, dt} + \frac{2}{T} \int_0^T \int_0^l u^2(x, t)\, dx\, dt.$$

Доказательство первого из них получается интегрированием по $x$ неравенства

$$[u(x, t_1) - u(x, t_2)]^2 \leqslant |t_1 - t_2| \int_{t_1}^{t_2} u_t^2(x, t)\, dt \leqslant |t_1 - t_2| \int_0^T u_t^2(x, t)\, dt,$$

которое, по существу, уже использовалось (в других обозначениях) при доказательстве леммы 2 и леммы 1. Второе и третье вытекают из результата интегрирования по $x$ неравенств:

$$u^2(x, t) \leqslant \left[\sqrt{\frac{\int_0^T u^2(x, t)\, dt}{T}} + \sqrt{T \int_0^T u_t^2(x, t)\, dt}\right]^2 \leqslant \frac{2}{T} \int_0^T u^2(x, t)\, dt + 2T \int_0^T u_t^2(x, t)\, dt,$$

$$u^2(x, t) \leqslant \left[2 \sqrt[4]{\int_0^T u^2(x, t)\, dt} \cdot \sqrt[4]{\int_0^T u_t^2(x, t)\, dt} + \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(x, t)\, dt}\right]^2 \leqslant 8 \sqrt{\int_0^T u^2(x, t)\, dt} \sqrt{\int_0^T u_t^2(x, t)\, dt} + \frac{2}{T} \int_0^T u^2(x, t)\, dt,$$

доказанных в других обозначениях в лемме 1 (неравенства (1) и (2)). При этом надо воспользоваться неравенством Буняковского, в силу которого

$$\int_0^l \sqrt{\int_0^T u^2(x, t)\,dt} \cdot \sqrt{\int_0^T u_t^2(x, t)\,dt}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_0^T\int_0^l u^2(x, t)\,dx\,dt} \cdot \sqrt{\int_0^T\int_0^l u_t^2(x, t)\,dx\,dt}.$$

Утверждения леммы 3 допускают несложное обобщение на функции $u(x, y, t)$ трех переменных $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant y \leqslant m$, $0 \leqslant t \leqslant T$, которое мы сформулируем в виде леммы 4.

Лемма 4. *Имеют место неравенства*

$$\int_0^l\int_0^m [u(x, y, t_1) - u(x, y, t_2)]^2\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant |t_1 - t_2| \int_0^l\int_0^m\int_0^T u_t^2(x, y, t)\,dx\,dy\,dt,$$

$$\int_0^m\int_0^T [u(x_1, y, t) - u(x_2, y, t)]^2\,dy\,dt \leqslant$$

$$\leqslant |x_1 - x_2| \int_0^l\int_0^m\int_0^T u_x^2(x, y, t)\,dx\,dy\,dt,$$

$$\int_0^l\int_0^m u^2(x, y, t)\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{T}\int_0^l\int_0^m\int_0^T u^2(x, y, t)\,dx\,dy\,dt + 2T\int_0^l\int_0^m\int_0^T u_t^2(x, y, t)\,dx\,dy\,dt,$$

$$\int_0^l\int_0^m u^2(x, y, t)\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant 8\sqrt{\int_0^l\int_0^m\int_0^T u^2(x, y, t)\,dx\,dy\,dt}\sqrt{\int_0^l\int_0^m\int_0^T u_t^2(x, y, t)\,dx\,dy\,dt} +$$

$$+ \frac{2}{T}\int_0^l\int_0^m\int_0^T u^2(x, y, t)\,dx\,dy\,dt.$$

Первое, третье, четвертое из них доказываются дословным повторением доказательства леммы 3, в котором $u(x, t)$ надо заменить на $u(x, y, t)$, а вместо интегрирования по $x$ от 0 до $l$ выполнить интегрирование по $x$, $y$ в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant y \leqslant m$. Второе же отличается от первого лишь обозначениями.

Простые, но важные оценки, составляющие содержание лемм 1—4 будут существенно использоваться в дальнейшем при построении теории гиперболических уравнений.

В § 5 при изучении решений гиперболической системы (уравнений акустики) мы ввели функциональные пространства $\Phi$, $U$ вектор-функций $(\varphi, \psi)$, $(u, p)$, норма в которых определена равенствами

$$\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_\Phi = \sqrt{\int_0^l \{\varphi^2(x) + \psi^2(x) + [\varphi'(x)]^2 + [\psi'(x)]^2\}\, dx},$$

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} \right\|_U = \sqrt{\int_0^T \int_0^l \{u^2(x, t) + p^2(x, t) + u_t^2 + u_x^2 + p_t^2 + p_x^2\}\, dx\, dt} + \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \sqrt{\int_0^l [u^2(x, t) + p^2(x, t) + u_x^2(x, t) + p_x^2(x, t)]\, dx}.$$

Для уменьшения громоздкости удобно считать, что каждая из компонент $\varphi(x)$, $\psi(x)$ лежит в пространстве, норма которого определяется равенством:

$$\|\varphi\| = \sqrt{\int_0^l \{\varphi^2(x) + [\varphi'(x)]^2\}\, dx},$$

$$\|\psi\| = \sqrt{\int_0^l \{\psi^2(x) + [\psi'(x)]^2\}\, dx}.$$

Именно такое пространство скалярных функций мы будем теперь обозначать через $\Phi$:

$$\|\varphi\|_\Phi = \sqrt{\int_0^l \{\varphi^2(x) + [\varphi'(x)]^2\}\, dx}.$$

Точно так же мы будем считать, что компоненты $u(x, t)$, $p(x, t)$ лежат в пространстве $U$ скалярных функций с нормой

$$\|u\|_U = \sqrt{\int_0^T \int_0^l [u^2(x, t) + u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t)]\, dx\, dt} + \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \sqrt{\int_0^l [u^2(x, t) + u_x^2(x, t)]\, dx}.$$

Из неравенства Буняковского для кусочно непрерывно дифференцируемых $\varphi(x)$ имеем (см. лемму 1):

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant \sqrt{|x_1 - x_2|} \cdot \|\varphi\|_\Phi,$$

и следовательно, любое множество достаточно гладких функций $\{\varphi(x)\}$, имеющих ограниченную норму $\|\varphi\|_\Phi \leqslant M$, удовлетворяет одной и той же оценке непрерывности

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant \sqrt{|x_1 - x_2|} \cdot M.$$

При пополнении пространства $\Phi$ с помощью обычной процедуры, принятой в функциональном анализе (см. ссылки, сделанные в § 5), мы сопоставляем каждому элементу пополнения последовательность функций $\varphi_i(x)$, фундаментальную по $\| \ \|_\Phi$ (точнее, сопоставляется класс эквивалентных фундаментальных последовательностей). Например, можно считать, что

$$\|\varphi_j - \varphi_k\|_\Phi \leqslant \frac{1}{j+1} + \frac{1}{k+1}.$$

Все такие $\varphi_j$ имеют ограниченную норму:

$$\|\varphi_j\|_\Phi = \|\varphi_j - \varphi_1 + \varphi_1\|_\Phi \leqslant \|\varphi_j - \varphi_1\|_\Phi + \|\varphi_1\|_\Phi \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{j+1} + \frac{1}{1+1} + \|\varphi_1\|_\Phi < \frac{2}{2} + \|\varphi_1\|_\Phi < M,$$

и поэтому

$$|\varphi_j(x_1) - \varphi_j(x_2)| < M\sqrt{|x_1 - x_2|}.$$

Мы будем говорить, что элемент $\varphi$ пополнения удовлетворяет условиям $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, если можно подобрать сопоставленную ему последовательность $\varphi_j(x)$ такую, что $\varphi_j(0) = \varphi_j(l) = 0$.

Для таких $\varphi_j(x)$

$$|\varphi_j(x)| = |\varphi_j(x) - \varphi_j(0)| < M\sqrt{x},$$
$$|\varphi_j(x)| = |\varphi_j(x) - \varphi_j(l)| < M\sqrt{l - x},$$
$$|\varphi_j(x)| < M \max(\sqrt{x}, \sqrt{l-x}) < M\sqrt{\frac{l}{2}},$$
$$|\varphi_j(x_1) - \varphi_j(x_2)| < M\sqrt{|x_1 - x_2|};$$

кроме того,

$$|\varphi_j(x) - \varphi_k(x)| \leqslant \|\varphi_j - \varphi_k\|_\Phi \sqrt{\frac{l}{2}} < \left(\frac{1}{j+1} + \frac{1}{k+1}\right) \cdot \sqrt{\frac{l}{2}}.$$

Последовательность $\varphi_j(x)$ оказывается последовательностью непрерывных функций, фундаментальной относительно равномерной сходимости. Предел этой последовательности является непрерывной функцией, обращающейся в нуль при $x = 0$, $x = l$. Именно это и служит оправданием нашего распространения понятий $\varphi(0) = 0$, $\varphi(l) = 0$ на пополнение пространства $\Phi$.

Функции, достаточно гладкие и имеющие ограниченную норму пространства $U$

$$\|u(x, t)\|_U \leqslant M$$

(ограниченную одной и той же постоянной $M$), являются в силу леммы 3 «равностепенно непрерывными *в среднем* по $t$». Под этими словами мы понимаем выполнение для всех таких функций неравенств:

$$\int_0^l [u(x,\ t_1)-u(x,\ t_2)]^2\,dx \leqslant |t_1-t_2|\,\|u\|_U^2 \leqslant |t_1-t_2|\,M^2.$$

В частности, если $\|u_j\| \leqslant M$, $u_j(x,\ 0)=\varphi_j(x)$, то

$$\int_0^l [u_j(x,\ t_1)-\varphi_j(x)]^2\,dx \leqslant |t|\,M. \tag{6}$$

При переходе к пополнениям пространств $U$, $\Phi$ мы будем говорить, что элемент $u \in U$ удовлетворяет при $t=0$ начальным данным $\varphi \in \Phi$, если для всех членов фундаментальных последовательностей $\{u_j\}$, $\{\varphi_j\}$, сопоставляемых этим $u$, $\varphi$, выполнены неравенства (6).

Сформулированные сейчас определения появились как следствие точки зрения, согласно которой элементам пополненного пространства приписываются свойства, выражаемые неравенствами, которые выполнены равномерно (с одними и теми же постоянными) для всех членов фундаментальных последовательностей, сопоставленных этим элементам.

Мы не будем развивать эту точку зрения подробнее, ограничившись приведенной здесь качественной формулировкой и разобранными примерами.

В заключение параграфа приведем две теоремы, которые используются в следующей главе при доказательстве теоремы существования. Первая из них относится к функциям от двух переменных $x$, $t$, а вторая к функциям от трех переменных $x$, $y$, $t$. Изучив эти теоремы, читатель без особого труда сможет сформулировать и доказать их обобщения на случай, когда независимых переменных еще больше.

Теорема 1. *Непрерывная в прямоугольнике*

$$x_1 \leqslant x \leqslant x_2 = x_1 + X,$$
$$t \leqslant t \leqslant t_2 = t_1 + T$$

*функция* $u(x,\ t)$ *с кусочно непрерывными производными (непрерывными в каждом из многоугольников, которые в конечном числе покрывают прямоугольник), такая, что при всех* $t$

$$\int_{x_1}^{x_2} u^2(x,\ t)\,dx \leqslant M^2 X,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} u_x^2(x,\ t)\,dx \leqslant \frac{L^2}{X}, \quad \int_{x_1}^{x_2} u_t^2(x,\ t)\,dx \leqslant \frac{L^2 X}{T^2},$$

*удовлетворяет неравенствам:*

$$|u(x,\ t)| \leqslant M + L, \tag{7}$$

$$|u(\xi_1,\ \tau_1) - u(\xi_2,\ \tau_2)| \leqslant L\sqrt{\frac{|\xi_1 - \xi_2|}{X}} + 3L\sqrt{\frac{|\tau_1 - \tau_2|}{T}}. \tag{8}$$

Теорема 2. *Заданная в параллелепипеде*

$$\begin{aligned} x_1 &\leqslant x \leqslant x_1 + X, \\ y_1 &\leqslant y \leqslant y_2 + Y, \\ t_1 &\leqslant t \leqslant t_2 + T, \end{aligned}$$

*функция* $u(x,\ y,\ t)$, *такая, что при всех* $t$

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} u^2(x,\ y,\ t)\,dx\,dy \leqslant M^2XY,$$

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} u_t^2(x,\ y,\ t)\,dx\,dy \leqslant \frac{L^2XY}{T^2},$$

*при всех* $y,\ t$

$$\int_{x_1}^{x_2} u_x^2(x,\ y,\ t)\,dx \leqslant \frac{L^2}{X},$$

$$\int_{y_1}^{y_2} u_y^2(x,\ y,\ t)\,dy \leqslant \frac{L^2}{Y},$$

*удовлетворяет неравенствам:*

$$|u(x,\ y,\ t)| \leqslant M + 2L, \tag{9}$$

$$|u(\xi_1,\ \eta_1,\ \tau_1) - u(\xi_2,\ \eta_2,\ \tau_2)| \leqslant$$
$$\leqslant L\left(\sqrt{\frac{|\xi_1 - \xi_2|}{X}} + \sqrt{\frac{|\eta_1 - \eta_2|}{Y}} + 5\sqrt[3]{\frac{|\tau_1 - \tau_2|}{T}}\right). \tag{10}$$

Утверждение $|u(x,\ t)| \leqslant M + L$ теоремы 1 непосредственно следует из леммы 1 (неравенство (1)), так же как и неравенство

$$|u(\xi_1,\ t) - u(\xi_2,\ t)| \leqslant L\sqrt{\frac{|\xi_2 - \xi_1|}{X}}.$$

Для завершения доказательства теоремы 1 достаточно показать, что при каждом $x = x_0$

$$|u(x_0,\ \tau_1) - u(x_0,\ \tau_2)| \leqslant 3L\sqrt{\frac{|\tau_2 - \tau_1|}{T}}.$$

Выберем любой прямоугольник:

$$x_1' \leqslant x \leqslant x_2',$$
$$\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2,$$

лишь бы $x_1' \leqslant x_0 \leqslant x_2'$, и установим неравенство

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{x_1'}^{x_2'} u_t^2(x,\ t)\, dx\, dt \leqslant \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ \int_{x_1}^{x_2} u_t^2(x,\ t)\, dx \right] dt \leqslant (\tau_2 - \tau_1) \cdot \frac{L^2 X}{T^2}.$$

Далее,

$$\int_{x_1'}^{x_2'} |u(x,\ \tau_1) - u(x,\ \tau_2)|\, dx \leqslant \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{x_1'}^{x_2'} |u_t(x,\ t)|\, dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{x_1'}^{x_2'} u_t^2(x,\ t)\, dx\, dt} \cdot \sqrt{\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{x_1'}^{x_2'} dx\, dt} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{(\tau_2 - \tau_1) \frac{L^2 X}{T^2}} \cdot \sqrt{(x_2' - x_1')(\tau_2 - \tau_1)} =$$
$$= \frac{\tau_2 - \tau_1}{T} \cdot \sqrt{\frac{X}{x_2' - x_1'}} \cdot L \cdot (x_2'$$

Следовательно, существует $x_3\ (x_1' \leqslant x_3 \leqslant x_2')$ такое, что

$$|u(x_3,\ \tau_1) - u(x_3,\ \tau_2)| \leqslant L \frac{\tau_2 - \tau_1}{T} \sqrt{\frac{X}{x_2' - x_1'}}.$$

Кроме того,

$$|u(x_0,\ \tau_1) - u(x_3,\ \tau_1)| \leqslant L \sqrt{\frac{x_2' - x_1'}{X}},$$
$$|u(x_3,\ \tau_2) - u(x_0,\ \tau_2)| \leqslant L \sqrt{\frac{x_2' - x_1'}{X}},$$

а значит,

$$|u(x_0,\ \tau_1) - u(x_0,\ \tau_2)| \leqslant L \frac{\tau_2 - \tau_1}{T} \sqrt{\frac{X}{x_2' - x_1'}} + 2L \sqrt{\frac{x_2' - x_1'}{X}}$$

Выбирая $x_2'$, $x_1'$ так, чтобы

$$\frac{x_2' - x_1'}{X} = \frac{\tau_2 - \tau_1}{T},$$

мы приходим к интересующему нас неравенству:

$$|u(x_0,\ t_1) - u(x_0,\ t_2)| \leqslant 3L \sqrt{\frac{\tau_2 - \tau_1}{T}}.$$

**Теорема 2 доказывается аналогичными рассуждениями.**

Удобно начать с замечания, что из неравенства

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} u^2(x,\ y)\,dx\,dy \leqslant M^2XY$$

можно вывести существование при каждом $t=t_0$ такой точки $x_0$, $y_0$, что $|u(x_0,\ y_0,\ t_0)|\leqslant M$. По лемме 1 (неравенство 3) для любых $x$, $y$ из нашей области следует:

$$|u(x,\ y,\ t_0)-u(x_0,\ y_0,\ t_0)|\leqslant|u(x,\ y,\ t_0)-u(x,\ y_0,\ t_0)|+$$
$$+|u(x,\ y_0,\ t_0)-u(x_0,\ y_0,\ t_0)|\leqslant L\left(\sqrt{\frac{|x-x_0|}{X}}+\sqrt{\frac{|y-y_0|}{Y}}\right)\leqslant 2L.$$

Тем самым $|u(x,\ y,\ t_0)|\leqslant M+2L$, и вследствие произвольности $t_0$ первое утверждение теоремы 2 доказано.

Из леммы 1, как мы уже отметили, следует оценка непрерывности по $x$, $y$:

$$|u(\xi_1,\ \eta_1,\ t)-u(\xi_2,\ \eta_2,\ t)|\leqslant L\left(\sqrt{\frac{|\xi_1-\xi_2|}{X}}+\sqrt{\frac{|\eta_1-\eta_2|}{Y}}\right),$$

и нам остается лишь доказать, что при произвольных $x_0$, $y_0$

$$|u(x_0,\ y_0,\ \tau_1)-u(x_0,\ y_0,\ \tau_2)|\leqslant 5\sqrt[3]{\frac{|\tau_2-\tau_1|}{T}}.$$

Выберем любой параллелепипед:

$$x_1'\leqslant x\leqslant x_2',$$
$$y_1'\leqslant y\leqslant y_2',$$
$$\tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2,$$

лишь бы $x_1'\leqslant x_0\leqslant x_2'$, $y_1'\leqslant y_0\leqslant y_2'$, и установим неравенство:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{x_1'}^{x_2'}\int_{y_1'}^{y_2'} u_t^2(x,\ y,\ t)\,dx\,dy\,dt\leqslant\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} u_t^2(x,\ y,\ t)\,dx\,dy\right]dt\leqslant(\tau_2-\tau_1)\frac{L^2XY}{T^2}.$$

Далее,

$$\int_{x_1'}^{x_2'}\int_{y_1'}^{y_2'}|u(x,\ y,\ \tau_2)-u\ (x,\ y,\ \tau_1)|\,dx\,dy\leqslant\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{x_1'}^{x_2'}\int_{y_1'}^{y_2'}|u_t|\,dx\,dy\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{x_1'}^{x_2'}\int_{y_1'}^{y_2'}u_t^2\,dx\,dy\,dt}\cdot\sqrt{\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{x_1'}^{x_2'}\int_{y_1'}^{y_2'}1\,dx\,dy\,dt}\leqslant$$
$$\leqslant L\frac{\tau_2-\tau_1}{T}\sqrt{\frac{X}{x_2'-x_1'}\cdot\frac{Y}{y_2'-y_1'}}\,(x_2'-x_1')\,(y_2'-y_1').$$

Отсюда следует существование $x_3$, $y_3$ ($x_1'\leqslant x_3\leqslant x_2'$, $y_1'\leqslant y_3\leqslant y_2'$) таких, что

$$|u(x_3,\ y_3,\ \tau_2)-u(x_3,\ y_3,\ \tau_1)|\leqslant L\frac{\tau_2-\tau_1}{T}\sqrt{\frac{X}{x_2'-x_1'},\ \frac{Y}{y_2'-y_1'}}.$$

Кроме того,

$$|u(x_0,\ y_0,\ \tau_2)-u(x_3,\ y_3,\ \tau_2)|\leqslant L\left(\sqrt{\frac{x_2'-x_1'}{X}}+\sqrt{\frac{y_2'-y_1'}{Y}}\right),$$
$$|u(x_3,\ y_3,\ \tau_1)-u(x_0,\ y_0,\ \tau_1)|\leqslant L\left(\sqrt{\frac{x_2'-x_1'}{X}}+\sqrt{\frac{y_2'-y_1'}{Y}}\right),$$

а значит,

$$|u(x_0, y_0, \tau_2)-u(x_0, y_0, \tau_1)| \leqslant$$
$$\leqslant L\left(\frac{\tau_2-\tau_1}{T}\sqrt{\frac{X}{x_2'-x_1'}}\sqrt{\frac{Y}{y_2'-y_1'}}+2\sqrt{\frac{x_2'-x_1'}{X}}+2\sqrt{\frac{y_2'-y_1'}{Y}}\right).$$

Выбирая $x_2'$, $x_1'$; $y_2'$, $y_1'$ так, чтобы

$$\frac{x_2'-x_1'}{X}=\frac{y_2'-y_1'}{Y}=\left(\frac{\tau_2-\tau_1}{T}\right)^{\frac{2}{3}},$$

мы приходим к интересующему нас неравенству:

$$|u(x_0, y_0, \tau_2)-u(x_0, y_0, \tau_1)| \leqslant 5L\sqrt[3]{\frac{\tau_2-\tau_1}{T}},$$

и тем завершаем доказательство теоремы 2.

Если у нас целое семейство $\{u\}$ функций, удовлетворяющих интегральным неравенствам, сформулированным как предпосылки теоремы 2 (или теоремы 1), то для любой функции этого семейства выполнены неравенства (9), (10) (или, в случае теоремы 1, неравенства (7), (8)). Неравенство (9) (или (7)) утверждает, что семейство $\{u\}$ равномерно ограничено. В силу неравенства (10) (или (8)) это семейство равностепенно непрерывно.

Напомним, что семейство $\{u(x, y, t)\}$ называется *равностепенно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$, существует $\delta > 0$ такое, что из $|\Delta x|+|\Delta y|+|\Delta t| < \delta$ вытекает неравенство $|\Delta u| < \varepsilon$ для каждой $u(x, y, t)$ из семейства.

В курсах математического анализа изучается теорема Арцела, которая гласит:

*Всякое равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное в ограниченной области семейство функции $\{u\}$ компактно в смысле равномерной сходимости.*

Другими словами, из всякой бесконечной последовательности функций, принадлежащих такому семейству, можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность.

Следствие из теоремы Арцела:

*Семейство функций $u(x, y, t)$ (или $u(x, t)$), удовлетворяющих условиям теоремы 2 (теоремы 1) компактно в смысле равномерной сходимости.*

Мы обосновали простейшие условия компактности, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Наиболее употребительные в настоящее время и наиболее удобные для приложений критерии компактности носят название «теоремы вложения С. Л. Соболева». См. [5], [6].

## § 10. Обобщенные решения

Обобщенное решение для уравнений акустики. Связь определения обобщенного решения с законами сохранения. Понятие обобщенного решения для простейшего гиперболического уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$. Обобщенное решение как предел гладких решений. Определение С. Л. Соболева. Эквивалентность этого определения классическому на гладких решениях. Уточнение определения. Теорема единственности. Теорема существования. Замечание об удовлетворении начального условия. Обобщенное решение в пространстве функций, непрерывных по $t$ «в среднем».

В заключение нашего вводного обзора основных фактов теории уравнений с частными производными мы кратко остановимся на чрезвычайно важном понятии «обобщенного решения». Этому понятию и посвящен настоящий параграф.

Для начала рассмотрим систему уравнений, описывающих распространение звуковых волн:

$$\frac{\partial \rho_0 u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \frac{p}{c_0^2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 u}{\partial x} = 0.$$

К понятию обощенного решения этой системы приводит тождество

$$\varphi\left(\frac{\partial \rho_0 u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x}\right) + \psi\left(\frac{\partial \frac{p}{c_0^2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 u}{\partial x}\right) + \rho_0 u\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + p\left(\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \\ = \frac{\partial\left(\rho_0 u\varphi + \frac{p}{c_0^2}\psi\right)}{\partial t} + \frac{\partial(p\varphi + \rho_0 u\psi)}{\partial x}.$$

Предполагая функции $\varphi$, $\psi$ гладкими и финитными (т. е. отличными от нуля лишь в некоторой ограниченной области на плоскости $x$, $t$), будем иметь на решениях исходной системы:

$$\iint\limits_{t \geqslant 0}\left[\rho_0 u\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + p\left(\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\right] dx\,dt + \int\limits_{t=0}\left(\rho_0 u\varphi + \frac{p}{c_0^2}\psi\right) dx = 0.$$

По предложению С. Л. Соболева, *обобщенным решением называются такие $p$, $u$, что для них последнее тождество выполнено при любых гладких и финитных* $\varphi$, $\psi$.

В этом определении нужно еще оговорить, какому классу должны принадлежать функции $p$, $u$ (измеримы, интегрируемы с квадратом...), но мы на этом останавливаться не будем.

Постараемся придать интегральному тождеству, лежащему в основе определения обобщенного решения, некоторый наглядный смысл.

Будем пока предполагать, что $\psi = 0$, и рассматривать тождество

$$\iint\limits_{t \geqslant 0}\left[\rho_0 u\frac{\partial \varphi}{\partial t} + p\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] dx\,dt + \int\limits_{t=0}\rho_0 u\varphi\,dx = 0.$$

Рассмотрим некоторую специальную функцию $\varphi(x, t)$, устроенную следующим образом. Пусть $\varphi(x, t) = 1$ внутри некоторого гладкого замкнутого контура $\gamma$ на плоскости $x$, $t$ и $\varphi(x, t) = 0$ вне другого, охватывающего $\gamma$, контура $\gamma'$ (рис. 25). Мы будем предполагать, что контуры $\gamma$ и $\gamma'$ ограничивают некоторую замкнутую полоску, внутри которой $\varphi(x, t)$ плавно спадает от единицы до нуля. Если предполагать эту полоску очень узкой, то двойной интеграл по верхней полуплоскости (он очевидно равен интегралу только по верхней, заштрихованной на рисунке, части полоски $\gamma$, $\gamma'$) можно будет приближенно вычислить при помощи следующего простого соображения. Внутри узкой полоски можно предполагать, что градиент $\varphi(x, t)$ направлен по нормали к $\gamma$ и что $\rho_0 u$, $p$

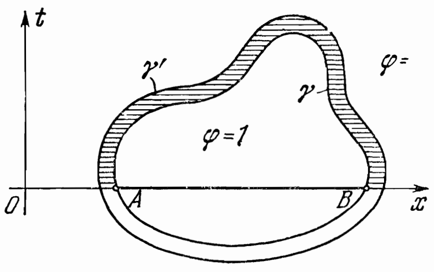


Рис. 25.

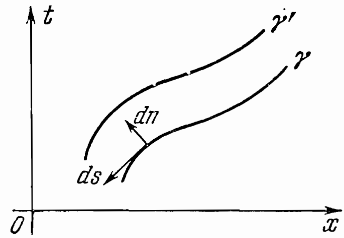


Рис. 26.

вдоль отрезка этой нормали, лежащей внутри $\gamma$, $\gamma'$, почти постоянны.

Интегрирование по полоске можно выполнять (рис. 26) как интегрирование по нормали к $\gamma$ (дифференциал $dn$) и вдоль $\gamma$ (дифференциал $ds$):

$$\int\limits_{\gamma}^{\gamma'} \left(\rho_0 u \frac{\partial\varphi}{\partial t} + p \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) dn = \int\limits_{\gamma}^{\gamma'} (\rho_0 u n_t + p n_x) \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dn \approx$$

$$\approx (\rho_0 u n_t + p n_x) \int\limits_{\gamma}^{\gamma'} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dn = (\rho_0 u n_t + p n_x)(-1) = -p s_t + \rho_0 u s_x$$

($n_t$, $n_x$ — компоненты единичного вектора нормали к $\gamma$, $s_t$, $s_x$ — компоненты единичного, касательного к $\gamma$, вектора);

$$\int\limits_{\text{вдоль } \gamma} \left[\int\limits_{\gamma}^{\gamma'} \left(\rho_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t} + p \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) dn\right] ds \approx \int\limits_{\text{вдоль } \gamma} (\rho_0 u s_x - p\, t_t)\, ds =$$

$$= \int\limits_{\text{вдоль } \gamma} \rho_0 u\, dx - p\, dt.$$

Поэтому равенство

$$\iint\limits_{t \geqslant 0} \left[\rho_0 u \frac{\partial\varphi}{\partial t} + p \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] dx\, dt + \int\limits_{t=0} \rho_0 u \varphi\, dx = 0$$

может быть приближенно записано в виде контурного интегрального равенства

$$\oint \rho_0 u\, dx - p\, dt = 0$$

вдоль верхней ($t>0$) части контура $\gamma$ и замыкающего эту часть отрезка $AB$ оси $x$.

Равенство

$$\oint \rho_0 u\, dx - p\, dt = 0$$

представляет собой закон сохранения количества движения $\left(\int \rho_0 u\, dx\right.$ — количество движения, $\left.\int p\, dt \text{ — импульс силы}\right)$.

Иногда в качестве определения обобщенного решения как раз и принимают выполнение интегральных законов сохранения в форме таких контурных интегралов

$$\oint \rho_0 u\, dx - p\, dt = 0,$$

$$\oint \frac{p}{c_0^2}\, dx - \rho_0 u\, dt = 0.$$

Второй из этих интегралов представляет закон сохранения массы, так как $p$ — это на самом деле отклонение $\delta p$ давления от состояния покоя, а для $\delta p$ справедливо равенство $\delta p = c_0^2 \delta\rho$. Он опять-таки может быть получен из равенства

$$\iint\limits_{t\geqslant 0}\left[\rho_0 u\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+p\left(\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right]dx\,dt+\int\limits_{t=0}\left(\rho_0 u\varphi+\frac{p}{c_0^2}\psi\right)dx=0, \quad (1)$$

если выбрать $\varphi = 0$, а $\psi$ — совпадающим с тем $\varphi$, которое выбиралось при получении закона сохранения количества движения.

Форма законов сохранения

$$\oint \rho_0 u\, dx - p\, dt = 0,$$

$$\oint \frac{p}{c_0^2}\, dx - \rho_0 u\, dt = 0$$

не очень удобна для построения математической теории. Дело в том, что интегралы в этих равенствах берутся по контурам, имеющим двумерную меру нуль. Изменение же функции из $L_2$ на мере нуль не меняет ее как элемент пространства $L_2$. Поэтому для функции из $L_2$ (на плоскости) значение интегралов по контуру, строго говоря, не определено.

Предложенное С. Л. Соболевым интегральное тождество (1) содержит в себе законы сохранения в форме, более удобной для строгой математики, так как неизвестные функции в нем интегрируются по двумерной области. (Интеграл $\int\limits_{t=0}\left(\rho_0 u\,\varphi+\frac{p}{c_0^2}\,\psi\right)dx$ содержит лишь значения $u$, $p$, задающиеся в качестве начальных данных).

Обычно уравнения механики сплошных сред выводятся в виде интегральных законов сохранения (правда, как правило, в виде контурных интегралов), а лишь затем из них получаются дифференциальные. Это можно трактовать как первичность понятия обобщенного решения и вторичность понятия решения гладкого или, как иногда говорят, классического.

Отметим еще, что для нелинейных уравнений газовой динамики разрывные решения — ударные волны — могут, по-видимому, трактоваться как обобщенные решения. Однако надо отметить, что построение соответствующей математической теории до настоящего времени не закончено.

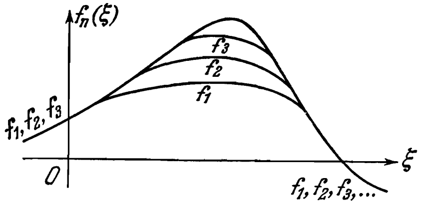


Рис. 27.

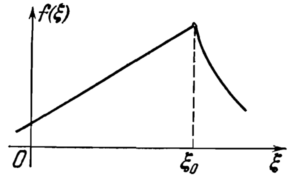


Рис. 28.

Теперь мы на примере простейшего гиперболического уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ покажем содержательность понятия обобщенного решения, доказав теоремы существования и единственности.

Мы знаем, что общее решение этого уравнения имеет вид:

$$u = f(x - t)$$

с довольно произвольной функцией $f(\xi)$. Мы предъявляем к ней минимальные требования гладкости — требуем дифференцируемости, так как для того чтобы убедиться в том, что эта функция действительно дает решение, нам приходится ее производные подставлять в уравнения.

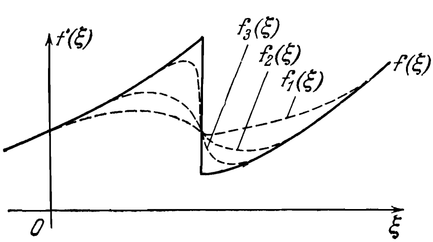


Рис. 29.

С другой стороны, мы видим из этой формулы, что если рассмотреть последовательность гладких решений вида

$$u_n = f_n(x - t)$$

с функциями $f_n(\xi)$, графики которых изображены на рис. 27, то обращает внимание тот факт, что эти решения сходятся к $u = f(x-t)$ с функцией, уже не обязательно всюду дифференцируемой. Предельная функция для последовательности $f_1, f_2, f_3, \ldots$, указанной на рис. 27, изображена на рис. 28. В точке $\xi = \xi_0$ функция $f(\xi)$ не имеет производной. Очевидно, могут быть построены и более сложные примеры, в которых дифференцируемость нарушается более чем в одной точке. Можно даже построить пример последовательности решений, для которой предельная функция будет разрывной. (Конечно, в этом случае предельный переход должен совершаться не в смысле равномерной сходимости.)

Такой пример изображен на рис. 29. Разобранные примеры ведут нас к мысли о разумности пополнения множества решений с гладкими $f$ множеством функций $u=f(x-t)$ с теми $f$, которые могут быть в некотором определенном смысле получены из гладких путем предельного перехода.

Такой предельный переход естественно делать в смысле сходимости по норме вида

$$\|u\| = \sqrt{\max_t \int u^2(x, t)\,dx}.$$

Основанием для выбора такой нормы являются следующие соображения, связанные с оценками решений при помощи интеграла энергии. Рассмотрим для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

характеристическую полосу, высекаемую из полуплоскости $x$, $t$ $(t>0)$ характеристиками $x - t = \text{const}$, проходящими через отрезок $[0, 1]$ оси $x$. На этом отрезке мы будем задавать начальные данные.

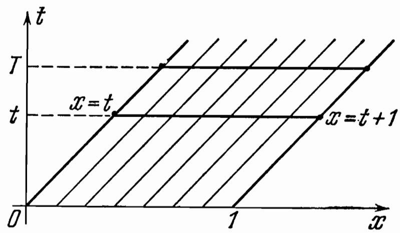


Рис. 30.

Прямая $t=\text{const}$ пересекает эту полосу по отрезку $t \leqslant x \leqslant t+1$ (рис. 30). Интеграл энергии для этого уравнения имеет вид

$$\oint u^2\,dx - u^2\,dt = 0.$$

При интегрировании вдоль характеристик мы имеем $\int u^2(dx-dt)=0$, и поэтому

$$\int_t^{t+1} u^2(x, t)\,dx = \int_0^1 u^2(x, 0)\,dx = \int_0^1 u_0^2(x)\,dx,$$

т. е. интеграл от $u^2$ по любому сечению $t=\text{const}$ характеристической полосы будет один и тот же для любых $t$. Поэтому, если мы возьмем последовательность решений $u_n(x, t)$ уравнения

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{\partial u_n}{\partial x} = 0$$

с начальными данными

$$u_n(x, 0) = u_{n0}(x),$$

то, пользуясь еще линейностью уравнения, будем иметь

$$\max_t \int_t^{t+1} [u_n(x, t) - u_m(x, t)]^2\,dx = \int_0^1 [u_{n0}(x) - u_{m0}(x)]^2\,dx,$$

$$\|u_n - u_m\| = \sqrt{\max_t \int_t^{t+1} [u_n(x, t) - u_m(x, t)]^2\,dx} = \sqrt{\int_0^1 [u_{n0}(x) - u_{m0}(x)]^2\,dx}.$$

В случае если последовательность $\{u_{n0}\}$ сходится в среднем на отрезке $[0, 1]$, то последовательность решений будет сходиться в смысле введенной нормы. Это утверждение служит основанием для следующего определения обобщенного решения.

*Функцию $u(x, t)$ назовем обобщенным решением, если существует последовательность $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ гладких решений того же уравнения*

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{\partial u_n}{\partial x} = 0$$

*таких, что*

$$\|u_n - u\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Другими словами, мы назовем функцию $u(x, t)$ обобщенным решением, если ее можно как угодно точно аппроксимировать гладкими решениями.

Описанное сейчас понятие обобщенного решения неудобно тем, что оно трудно проверяемо. В самом деле, чтобы убедиться, что $u(x, t)$ является обобщенным решением, мы должны построить бесконечную последовательность гладких функций $u(x, t)$, аппроксимирующих $u(x, t)$, причем надо постараться выбрать $u_n(x, t)$ так, чтобы они были точными решениями нашего уравнения. Ясно, что это сделать трудно, особенно если речь будет идти не о простейшем уравнении $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, которое мы рассматриваем в качестве модели.

С. Л. Соболев дал другое определение обобщенного решения, которое в настоящее время является общепринятым. Основная идея этого определения состоит в замене дифференциальных уравнений непосредственно интегральными законами сохранения, из которых дифференциальные уравнения математической физики обычно и выводятся. Мы разберем модельное уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ и на нем постараемся понять существо дела. Простейших физически осмысленных примеров мы уже касались в начале параграфа.

Начнем с замечания, что для любой функции $\varphi(x, t)$ и любой области $G$

$$\iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\varphi(x, t)\,dx\,dt = 0,$$

если $u(x, t)$ является гладким решением уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$. Для дальнейшего нам удобно предполагать, что область $G$ имеет кусочно гладкую границу.

Пусть $u(x, t)$ имеет в некоторой области $G$ непрерывные первые производные и пусть для любой достаточно гладкой, например, дважды дифференцируемой функции $\varphi(x, t)$ имеет место равенство

$$\iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\varphi(x, t)\,dx\,dt = 0.$$

Тогда (как будет доказано) всюду внутри $G$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Предположим противное. Пусть $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$ в некоторой внутренней точке $(x_0, t_0)$ области $G$. Для определенности предположим, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\substack{x = x_0\\ t = t_0}} = \delta > 0.$$

Из непрерывности производных $u_t$, $u_x$ следует существование такого $\varepsilon$, что при $(x - x_0)^2 + (t - t_0)^2 \leqslant \varepsilon$ выполнено неравенство $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} > \frac{\delta}{2}$.

Определим теперь $\varphi(x, t)$ формулой

$$\varphi(x, t) = \begin{cases} \left[1 - \frac{(x - x_0)^2 + (t - t_0)^2}{\varepsilon}\right]^p, & \text{если } (x - x_0)^2 + (t - t_0)^2 \leqslant \varepsilon, \\ 0, & \text{если } (x - x_0)^2 + (t - t_0)^2 > \varepsilon. \end{cases}$$

Выбором достаточно большого $p$ можно добиться, чтобы функция $\varphi$ была нужное число раз непрерывно дифференцируемой. (При $p = 3$ $\varphi(x, t)$ имеет две непрерывные производные.)

Очевидно, что для такой функции $\varphi(x, t)$

$$\iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\varphi(x, t)\,dx\,dt > \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \left(1 - \frac{r^2}{\varepsilon}\right)^p \frac{\delta}{2} \cdot 2\pi r\,dr > 0.$$

Мы пришли к противоречию.

Итак, утверждение

$$\iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \varphi(x, t)\, dx\, dt = 0$$

при любой достаточно гладкой $\varphi$ и утверждение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

для непрерывно дифференцируемой $u(x, t)$ эквивалентны.

Теперь, воспользовавшись тождеством

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \varphi(x, t) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) u = \frac{\partial \varphi u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi u}{\partial x},$$

мы сделаем утверждение, что равенство $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ эквивалентно для непрерывно дифференцируемой функции $u$ равенству

$$\iint_G u\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dx\, dt = \oint\limits_{\text{по границе } G} \varphi u\, dx - \varphi u\, dt \tag{2}$$

для любой достаточно гладкой $\varphi$. Из проведенного нами доказательства вытекает даже, что все $\varphi$ можно считать равными нулю на всей (или на части) границы $G$, если мы хотим убедиться в выполнении равенства $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ лишь внутри $G$. При этом соответствующая часть контурного интеграла пропадает.

Для гладких $u$ равенства (2) эквивалентны определению решения. Для проверки их выполнимости не надо, однако, дифференцировать $u(x, t)$. Это и послужило основанием назвать функции, удовлетворяющие равенствам (2), обобщенными решениями уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Прежде чем дать аккуратное определение, опишем структуру $G$ в интересующем нас случае. Эта область будет представлять собой верхнюю ($t \geqslant 0$) половину полосы $0 < x - t < 1$, ограниченной характеристиками $x - t = 0$, $x - t = 1$ уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$. Эти крайние характеристики проходят через концы $x = 0$, $x = 1$ отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$ оси $x$, на котором мы задаем начальные данные. Функции $\varphi(x, t)$, достаточно гладкие внутри полосы (вплоть до границы), мы будем предполагать равными нулю на граничных характеристиках, и, кроме того, при всех достаточно больших $t$ внутри полосы.

Пусть $\varphi(x, t) \equiv 0$ при $t \geqslant T$ ($T$ для каждой $\varphi(x, t)$ может быть свое). Выберем $G$ в виде параллелограмма $0 \leqslant x-t \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$ (см. рис. 30). На его контуре $\varphi(x, t)$ отлична от нуля лишь на основании $t=0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Поэтому для обобщенных решений должно быть выполнено равенство

$$\iint u\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) dx\, dt+\int_0^1 \varphi(x, 0)\, u(x, 0)\, dx=0.$$

В двойном интеграле интегрирование проводится по всей полуполосе, что не вызывает никаких затруднений, так как $\varphi=0$ при $t>T$.

Определение обобщенного решения. *Функция двух переменных $u(x, t)$* *), *имеющая ограниченную норму*

$$\|u\|=\sqrt{\max_t \int_t^{t+1} u^2(x, t)\, dx},$$

*называется обобщенным решением уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$ внутри полуполосы $0 \leqslant x-t \leqslant 1$, $t \geqslant 0$ с начальными данными $u(x, 0)=$ $=u_0(x)$, если для любой функции $\varphi$, принадлежащей описанному выше классу, выполнено равенство*:

$$\iint\limits_{\substack{0 \leqslant x-t \leqslant 1 \\ t \geqslant 0}} u\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) dx\, dt+\int_0^1 \varphi(x, 0)\, u_0(x)\, dx=0.$$

Покажем, что из этого определения вытекает единственность обобщенного решения. Для этого, очевидно, достаточно убедиться в том, что из равенства $u_0(x)=0$ вытекает равенство $u(x, t)=0$. Зададимся некоторым произвольным $T$ и покажем, что $u(x, t)=0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$ почти всюду.

Предположим противное. Из конечности $\|u\|$ вытекает, что ограничен

$$\iint\limits_{\substack{0 \leqslant x-t \leqslant 1 \\ T \geqslant t \geqslant 0}} u^2(x, t)\, dx\, dt,$$

т. е. что $u(x, t)$ принадлежит пространству функций с интегрируемым квадратом в параллелограмме $0 \leqslant x-t \leqslant 1$, $T \geqslant t \geqslant 0$. Каждая такая функция может быть сколь угодно точно аппроксимирована в смысле среднего крадратичного полиномами $u_n(x, t)$:

$$\iint\limits_{\substack{0 \leqslant x-t \leqslant 1 \\ T \geqslant t \geqslant 0}} [u_n(x, t)-u(x, t)]^2\, dx\, dt \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

*) Функция $u(x, t)$ предполагается измеримой.

Построим теперь внутри нашего параллелограмма функции $\varphi_n(x, t)$ как решения уравнений

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial t}+\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}=(x-t)^2(1-x+t)^2(T-t)^2 u_n(x, t),$$

удовлетворяющие при $t=T$ условию $\varphi_n=0$. Непосредственным дифференцированием можно убедиться, что такие решения задаются формулой

$$\varphi_n(x, t)=-\int_t^T (x-t)^2(1-x+t)^2(T-\tau)^2 u_n(x-t+\tau, \tau)\,d\tau$$

и являются непрерывно дифференцируемыми.

Последнее свойство не нарушится, если мы их доопределим равенством $\varphi_n(x, t)=0$ при $t>T$. Очевидно также, что $\varphi_n=0$ при $x-t=0$ и при $x-t=1$. Из определения обобщенного решения вытекает, что

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x-t\leqslant 1\\ t\geqslant 0}} u\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial t}+\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}\right)dx\,dt=0,$$

т. е. что

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x-t\leqslant 1\\ T\geqslant t\geqslant 0}} (x-t)^2(1-x+t)^2(T-t)^2 u_n(x, t)\,u(x, t)\,dx\,dt=0.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n\to\infty$, приходим к соотношению

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x-t\leqslant 0\\ T\geqslant t\geqslant 0}} (x-t)^2(1-x+t)^2(T-t)^2 u^2(x, t)\,dx\,dt=0,$$

которое и доказывает теорему единственности.

Докажем теперь теорему существования. Пусть для $u_0(x)$ существует конечный $\int_0^1 u_0^2(x)\,dx$. Мы покажем, что $u(x, t)=u_0(x-t)$ является обобщенным решением уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$ с начальными данными $u_0(x)$ при $t=0$, $0\leqslant x\leqslant 1$, т. е. что для любой функции $\varphi(x, t)$, удовлетворяющей всем наложенным на такие функции ограничениям, выполнено равенство

$$\iint\limits_{0\leqslant x-t\leqslant 1} u_0(x-t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx\,dt+\int_0^1 \varphi(x, 0)\,u_0(x)\,dx=0.$$

Для доказательства вспомним, что каждую функцию, интегрируемую с квадратом на $[0, 1]$, можно как угодно точно приблизить (в среднем) полиномом. Пусть $u_n(x)$ — такой полином, что

$$\int_0^1 [u_n(x)-u_0(x)]^2\,dx<\frac{1}{n}.$$

Очевидно, что $u_n(x-t)$ будет гладким решением уравнения $\frac{\partial u_n}{\partial t}+\frac{\partial u_n}{\partial x}=0$ и, вследствие этого, удовлетворяет тождеству

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x-t\leqslant 1\\ t\geqslant 0}} u_n(x-t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx\,dt+\int_0^1\varphi(x,\ 0)\,u_n(x)\,dx=0$$

с любой допустимой $\varphi$. В дальнейшем мы будем пользоваться тем, что для каждой $\varphi$ существует такое $T$, что $\varphi(x,\ t)=0$ при $t\geqslant T$ и что, следовательно,

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x-t\leqslant 1\\ T\geqslant t\geqslant 0}} u_n(x-t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx\,dt+\int_0^1\varphi(x,\ 0)\,u_n(x)\,dx=0.$$

Воспользуемся теперь тем, что

1) $$\left|\int_0^1\varphi(x,\ 0)\,u_n(x)\,dx-\int_0^1\varphi(x,\ 0)\,u_0(x)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\int_0^1\varphi^2(x,\ 0)\,dx}\cdot\sqrt{\int_0^1(u_n-u_0)^2\,dx}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\int_0^1\varphi^2(x,\ 0)\,dx},$$

2) $$\left|\iint\limits_{\substack{0\leqslant x-t\leqslant 1\\ T\geqslant t\geqslant 0}} u_n(x-t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx\,dt-\right.$$
$$\left.-\iint\limits_{\substack{0\leqslant x-t\leqslant 1\\ T\geqslant t\geqslant 0}} u_0(x-t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\iint\limits_{\substack{0\leqslant x-t\leqslant 1\\ T\geqslant t\geqslant 0}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2dx\,dt}\cdot\sqrt{T\cdot\int_0^1(u_n-u_0)^2\,dx}=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

3) $$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x-t\geqslant 1\\ t\geqslant T}} u_n(x-t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx\,dt+\int_0^1 u_n(x)\,\varphi(x,\ 0)\,dx=0,$$

и установим равенство:

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x-t\leqslant 1\\ t\geqslant 0}} u_0(x-t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx\,dt+\int\limits_0^1 u_0(x)\,\varphi(x,\ 0)\,dx=0,$$

которое доказывает, что $u=u_0(x-t)$ является обобщенным решением.

Теорема существования обобщенного решения задачи Коши для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$ доказана.

Задача. Докажите непрерывную зависимость обобщенного решения от начальной функции $u_0(x)$.

Сделаем еще следующее замечание. Мы определяли обобщенные решения как функции пространства с нормой

$$\|u\|=\sqrt{\max_t\int\limits_t^{t+1} u^2(x,\ t)\,dx},$$

которое может рассматриваться как пространство, полученное пополнением по этой норме пространства гладких функций. Для элементов такого пространства нельзя сформулировать каких-либо условий непрерывности по $t$. Поэтому приписывание этому решению начального условия $u(x,\ 0)=u_0(x)$ может показаться некоторой натяжкой. Из приведенного рассуждения вытекает однозначность сопоставления $u_0(x)\to u(x,\ t)$, но совсем не следует, что $u(x,\ 0)$ с $u_0(x)$ совпадает. Чтобы избежать такого рода неясностей, удобно предположить, что $u(x,\ t)$ лежит в каком-либо более узком пространстве, элементы которого в некотором смысле непрерывны по $t$. Например, функции пространства $U$ с нормой

$$\|u\|_U=\sqrt{\int\limits_0^T\int\limits_t^{t+1}[u^2(x,\ t)+u_t^2(x,\ t)+u_x^2(x,\ t)]\,dx\,dt}+{}$$

$$+\sqrt{\max_t\int\limits_t^{t+1}(u^2+u_x^2)\,dx}$$

из-за неравенств леммы 4 § 9 непрерывны в среднем по $t$:

$$\int\limits_t^{t+1}[u(x,\ t)-u(x+\delta,\ t+\delta)]^2\,dx\leqslant\delta\int\limits_0^T\int\limits_t^{t+1}(u_x+u_t)^2\,dx\,dt\leqslant 2\delta\|u\|_U.$$

Мы уже поясняли, что это свойство непрерывности переносится и на пополнение $U$. Правда, обобщенные решения из $U$ уже не будут содержать разрывных решений, так как разрывные функции не лежат в $U$ (их норма была бы неограниченной). Однако обобщенные решения с разрывными производными допустимы и при этом определении.

Напомним, что пространство $U$ было введено в §§ 5,9. Мы уже отмечали, что получение решения с начальными данными из некоторого другого пространства $\Phi$ описывалось в § 5 действием некоторого ограниченного оператора $R$ $(\Phi_R \to U)$.

Пополнение пространств $\Phi$, $U$ и соответствующее расширение области действия оператора $R$ как раз и приводит к тому понятию обобщенного решения, которое мы постарались разъяснить в этом параграфе, исходя первоначально из некоторой другой точки зрения.

*Глава II*

# ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

## § 11. Интеграл энергии

Приведение к каноническому виду гиперболической системы с двумя независимыми переменными в окрестности точки. Римановы инварианты. Неоднозначность их определения. Канонический вид — частный случай симметрической по Фридрихсу системы. Специальная форма симметрической системы с постоянной матрицей коэффициентов при производных по $x$. Тождество «интеграл энергии» для гладких решений симметрических $t$-гиперболических систем. Пример: закон сохранения энергии для уравнений акустики. Интеграл энергии для волнового уравнения. Лемма об интегральном неравенстве.

*Система $n$ уравнений*

$$\frac{\partial u}{\partial t}+C\frac{\partial u}{\partial x}+Du=f$$

*для $n$ неизвестных функций $u=(u_1,\ u_2\ \ldots,\ u_n)$ с матрицами $C=\|c_{ik}\|=\|c_{ik}(x,\ t)\|$, $D=\|d_{ik}\|=\|d_{ik}(x,\ t)\|$ называется гиперболической, если все корни характеристического уравнения* $\det\|C-kE\|=0$ *($E$ — единичная матрица) вещественны и различны.*

Мы сейчас покажем, как такую систему можно привести к некоторому специальному каноническому виду. Рассмотрим собственный вектор $z$ матрицы $C$, отвечающий собственному значению $k_1$. Он удовлетворяет системе уравнений

$$(C-k_1E)\,z=0.$$

Пусть элементы $c_{ik}(x,\ t)$ матрицы $C$ являются гладкими функциями координат и пусть $k_1$ — некратный корень характеристического уравнения. Собственный вектор $z(x,\ t)$ определяется в этом случае с точностью до произвольного множителя, являющегося функцией от $x$ и $t$. Покажем, что можно предполагать вектор $z(x,\ t)$ имеющим гладкие составляющие.

Начнем с изучения гладкости корня $k_1(x,\ t)$ характеристического полинома

$$\det\|C-kE\|=(-1)^n\left[k^n+p_1(x,\ t)\,k^{n-1}+p_2(x,\ t)\,k^{n-2}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+p_n(x,\ t)\right]=P(k,\ x,\ t).$$

Его коэффициенты $p_1(x,\ t),\ p_2(x,\ t),\ \ldots,\ p_n(x,\ t)$ представляют собой полиномы от элементов $c_{ik}(x,\ t)$ и, следовательно, будут гладкими. Выберем некоторую точку $(x_0, t_0)$. Корень $k_1$ является некратным и, следовательно,

$$\frac{\partial P(k_1, x_0, t_0)}{\partial k} \neq 0.$$

По теореме о неявной функции у точки $(x_0, t_0)$ существует окрестность, в которой однозначно определена непрерывная функция $k = k_1(x, t)$, удовлетворяющая условиям

$$P(k, x, t) = 0,$$
$$k(x_0, t_0) = k_1(x_0, t_0).$$

Эта функция будет иметь ту же гладкость, что и коэффициенты $p_i(x, t)$, т. е. ту же, что и элементы матрицы $C$. В частности, производные $\frac{\partial k}{\partial x}$, $\frac{\partial k}{\partial t}$ вычисляются по формулам

$$\frac{\partial k}{\partial x} = -\frac{P_x(k, x, t)}{P_k(k, x, t)}, \quad \frac{\partial k}{\partial t} = -\frac{P_t(k, x, t)}{P_k(k, x, t)}.$$

Аналогично могут быть выписаны формулы и для производных более высокого порядка.

Так как точка $(x_0, t_0)$ может быть выбрана произвольно, а через $k_1$ может быть обозначен любой корень характеристического уравнения, нами доказана.

Лемма. *Если в некоторой области $G$ плоскости $x$, $t$ все элементы матрицы $C$ являются гладкими функциями координат и если все ее характеристические корни в этой области некратны, то сами эти корни будут гладкими функциями $x$, $t$.*

Теперь постараемся построить гладкий собственный вектор $z$ матрицы $C - kE$. Мы проведем его построение в некоторой окрестности произвольной точки $(x_0, t_0)$.

В точке $(x_0, t_0)$ ранг матрицы $C - kE$ равен $n-1$. Значит, существует минор этой матрицы, полученный вычеркиванием одной строки ($r$-й) и одного столбца ($q$-го), такой, что его определитель в точке $(x_0, t_0)$ не равен нулю. По непрерывности он отличен от нуля и в некоторой окрестности этой точки. Только эту окрестность мы будем рассматривать. Чтобы определить вектор $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, положим $z_q = 1$ и рассмотрим все уравнения системы $(C - kE)z = 0$, кроме $r$-го. Если вектор $z$ будет удовлетворять этим $n-1$ уравнениям, то он будет удовлетворять $r$-му, линейно с ними зависимому.

Для $n-1$ неизвестных $z_1, z_2, \ldots, z_{q-1}, z_{q+1}, \ldots, z_n$ имеем систему $n-1$ уравнений с неравным нулю определителем. Ее можно решить по формулам Крамера. Из этих формул очевидно, что все компоненты $z_1(x, t), z_2(x, t), \ldots, z_{q-1}(x, t), z_q(x, t) = 1, z_{q+1}(x, t), \ldots, z_n(x, t)$ будут внутри окрестности гладкими функциями от $x$, $t$. Ясно, что если все $z_i(x, t)$ умножить на одну и ту же гладкую

$\rho(x, t) \neq 0$, то мы опять получим гладкий собственный вектор. В частности, таким путем можно добиться того, чтобы компоненты $z_i(x, t)$ собственного вектора были нормированы условием $\sum\limits_{i=1}^{n} z_{il}^2(x, t) = 1$. Так нормированный собственный вектор определен однозначно с точностью до знака. Только этот знак мешает нам воспользоваться теоремой Больцано — Вейерштрасса и, выбрав конечное покрытие окрестностями произвольной замкнутой подобласти, а затем склеив в их пересечениях знаки у $z_i(x, t)$, построить собственный вектор гладкой функцией во всей замкнутой подобласти. На самом деле в случае односвязной области такое построение действительно можно провести. В двусвязной области оно может оказаться невозможным.

Мы не будем на этом подробнее останавливаться и ограничимся построением гладкого собственного вектора лишь в некоторой окрестности точки $(x_0, t_0)$. Построив такие окрестности для всех собственных векторов, а затем взяв их пересечения, мы можем утверждать, что у точки $(x_0, t_0)$ существует некоторая окрестность, в которой элементы матрицы

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nn} \end{pmatrix}$$

являются гладкими функциями $x$, $t$. Столбцы этой матрицы мы составили из собственных векторов так, что

$$C\begin{pmatrix} z_{1p} \\ z_{2p} \\ \dots \\ z_{np} \end{pmatrix} = k_p \begin{pmatrix} z_{1p} \\ z_{2p} \\ \dots \\ z_{np} \end{pmatrix}.$$

Иными словами, имеет место тождество

$$CZ = \begin{pmatrix} k_1 z_{11} & k_2 z_{12} & \dots & k_n z_{1n} \\ k_1 z_{21} & k_2 z_{22} & \dots & k_n z_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_1 z_{1n} & k_2 z_{2n} & \dots & k_n z_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & & & 0 \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k_n \end{pmatrix} = ZK.$$

Матрица $Z$, состоящая из линейно независимых собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям, невырождена. Поэтому можно написать

$$Z^{-1}CZ = K.$$

Это равенство означает, что подобное преобразование с матрицей $Z$ приводит $C$ к диагональному виду $K$. Этот факт известен из линейной алгебры. Мы провели подробно его вывод, чтобы показать возможность выбрать $Z$ гладкой хотя бы в некоторой окрестности.

Сейчас мы покажем, что если в некоторой области существует гладкая матрица $Z$ такая, что $Z^{-1}CZ=K$, то в этой области гиперболическая система

$$\frac{\partial u}{\partial t}+C\frac{\partial u}{\partial x}+Du=f$$

может быть приведена к некоторому каноническому виду.

Сделав подстановку $u=Zv$, запишем нашу систему так:

$$\frac{\partial}{\partial t}(Zv)+C\frac{\partial}{\partial x}(Zv)+D(Zv)=f.$$

Выполняем дифференцирование

$$Z\frac{\partial v}{\partial t}+CZ\frac{\partial v}{\partial x}+\left(DZ+\frac{\partial}{\partial t}Z+C\frac{\partial}{\partial x}Z\right)v=f$$

и умножаем систему слева на $Z^{-1}$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+Z^{-1}CZ\frac{\partial v}{\partial x}+Z^{-1}\left(DZ+\frac{\partial}{\partial t}Z+C\frac{\partial}{\partial x}Z\right)v=Z^{-1}f.$$

Пользуясь тождеством $Z^{-1}CZ=K$ и обозначая

$$Z^{-1}\left(DZ+\frac{\partial}{\partial t}Z+C\frac{\partial}{\partial x}Z\right)=M,$$

$$Z^{-1}f=g,$$

приходим к системе следующего вида, который называется каноническим:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+K\frac{\partial v}{\partial x}+Mv=g.$$

Вот пример системы второго порядка в канонической форме:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}+k_1(x,\ t)\frac{\partial v_1}{\partial x}+m_{11}(x,\ t)v_1+m_{12}(x,\ t)v_2=g_1(x,\ t),$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t}+k_2(x,\ t)\frac{\partial v_2}{\partial x}+m_{21}(x,\ t)v_1+m_{22}(x,\ t)v_2=g_2(x,\ t).$$

Компоненты $v_i(x,\ t)$ искомой вектор-функции $v(x,\ t)$ в канонической форме системы называются *римановыми инвариантами*. Так как матрица $Z$, приводящая систему к каноническому виду, определена неоднозначно, то неоднозначно определяются и римановы инварианты. В дальнейшем нам будет удобно этой неоднозначностью пользоваться.

Иногда говорят, что система $\frac{\partial u}{\partial t}+C\frac{\partial u}{\partial x}+Du=f$ называется *гиперболической*, если существует гладкая матрица $Z$, приводящая ее к описанному каноническому виду. При этом совсем необязательно требовать некратности характеристических корней. Эта некратность была нам нужна лишь для построения гладкой $Z(x, t)$. Если же канонический вид получен, то для построения дальнейшей теории требование некратности совсем необязательно.

Пример. Система уравнений Максвелла

$$\frac{\mu}{c_0}\frac{\partial H_y}{\partial t}=\frac{\partial E_z}{\partial x},\quad \frac{\varepsilon}{c_0}\frac{\partial H_y}{\partial t}=-\frac{\partial H_z}{\partial x},$$
$$\frac{\mu}{c_0}\frac{\partial H_z}{\partial t}=-\frac{\partial E_y}{\partial x},\quad \frac{\varepsilon}{c_0}\frac{\partial E_z}{\partial t}=\frac{\partial H_y}{\partial x}$$

имеет двукратные характеристические корни, но это не мешает ей приводиться к каноническому виду

$$\frac{\partial(\sqrt{\mu}\,H_y+\sqrt{\varepsilon}\,E_z)}{\partial t}-\frac{c_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\partial(\sqrt{\mu}\,H_y+\sqrt{\varepsilon}\,E_z)}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial(\sqrt{\mu}\,H_z-\sqrt{\varepsilon}\,E_y)}{\partial t}-\frac{c_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\partial(\sqrt{\mu}\,H_z-\sqrt{\varepsilon}\,E_y)}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial(\sqrt{\mu}\,H_y-\sqrt{\varepsilon}\,E_z)}{\partial t}+\frac{c_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\partial(\sqrt{\mu}\,H_y-\sqrt{\varepsilon}\,E_z)}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial(\sqrt{\mu}\,H_z+\sqrt{\varepsilon}\,E_y)}{\partial t}+\frac{c_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\partial(\sqrt{\mu}\,H_z+\sqrt{\varepsilon}\,E_y)}{\partial x}=0.$$

Ближайшие параграфы будут посвящены подробному исследованию важного класса гиперболических систем — симметрических $t$-гиперболических (по Фридрихсу) систем. Напомним их определение, данное нами в § 6 гл. I для случая трех независимых переменных $x$, $y$, $t$. Система уравнений

$$A(x, y, t)\frac{\partial u}{\partial t}+B(x, y, t)\frac{\partial u}{\partial x}+C(x, y, t)\frac{\partial u}{\partial y}=f(x, y, t, u)$$

называется *симметрической $t$-гиперболической* системой, если матрицы $A$, $B$, $C$ являются симметрическими, а матрица $A$ к тому же положительно определенной.

Мы видим, что в случае двух независимых переменных гиперболическая система после приведения ее к каноническому виду

$$E\frac{\partial v}{\partial t}+K\frac{\partial v}{\partial x}+Mv=f$$

является симметрической $t$-гиперболической, так как диагональная матрица $K$ симметрична, а единичная матрица $E$ положительно определена. В случае, если независимых переменных больше, чем две, произвольную строго гиперболическую систему (с некратными характеристическими корнями) не удается, вообще говоря, привести к форме, симметричной по Фридрихсу.

Однако если система

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial y}+Qu=f$$

уже является симметрической гиперболической системой, то ее можно привести к некоторому специальному каноническому виду, который отличается простотой матриц $A$ и $B$. Такой канонический вид будет удобен при изучении задач, в постановке которых выделена ось $x$-ов, например, задач, в которых решение разыскивается при $x>0$, а на плоскости $x=0$ ставятся граничные условия. Мы сейчас покажем, как такое приведение осуществляется.

Пусть столбцы матрицы $Z$

$$Z=\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & z_{2n} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ z_{n1} & z_{n2} & z_{nn} \end{pmatrix}$$

являются решениями уравнений

$$(k_jA-B)\begin{pmatrix} z_{1j} \\ z_{2j} \\ \vdots \\ z_{nj} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $k_j$ — собственные значения пучка матриц $kA-B$, т. е. корни уравнения

$$\det\|kA-B\|=0.$$

Если $A=A(x,\ y,\ t)$, $B=B(x,\ y,\ t)$ — симметрические с гладкими элементами, $A$ — положительно определенная и среди $k_j$ нет кратных, то можно считать $z_{ij}=z_{ij}(x,\ y,\ t)$ гладкими функциями с той же гладкостью, что и у элементов матриц $A$, $B$.

Доказательство, по существу, следует из приведенных выше рассуждений, в которых теперь вместо $C$ надо брать $A^{-1}B$, и все рассматриваемые функции считать зависящими не от двух аргументов $(x,\ y)$, а от трех $(x,\ y,\ t)$.

Вместо тождества $CZ=ZK$ мы будем иметь теперь тождество

$$A^{-1}BZ=ZK,$$

которое может быть переписано в виде

$$BZ=AZK.$$

Умножив это тождество слева на $Z^*$, получим

$$Z^*BZ = Z^*AZ \cdot \begin{pmatrix} k_1 & & & 0 \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k_n \end{pmatrix}.$$

Это тождество утверждает, что $j$-й столбец симметрической матрицы $Z^*BZ$ получается из $j$-го столбца симметрической $Z^*AZ$ умножением на $k_j$. Легко видеть, что если среди $k_j$ нет равных, то из этого тождества следует диагональность матриц $Z^*BZ$ и $Z^*AZ$:

$$Z^*AZ = \begin{pmatrix} \delta_1 & & & 0 \\ & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \delta_n \end{pmatrix}; \quad Z^*BZ = \begin{pmatrix} k_1\delta_1 & & & 0 \\ & k_2\delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k_n\delta_n \end{pmatrix}.$$

Здесь $\delta_j = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} z_{ij} z_{kj} > 0$ определяются нормировкой столбцов у $Z$ (нормировкой собственных векторов). Если считать, что нормировка обеспечивает равенства $\delta_j = 1$, то мы будем иметь $Z^*AZ = I$, $Z^*BZ = K$. Сделав в симметрической гиперболической системе

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial y} + Qu = f$$

подстановку $u = Zv$, а затем помножив ее слева на $Z^*$, мы приведем ее к виду

$$Z^*AZ \frac{\partial v}{\partial t} + Z^*BZ \frac{\partial v}{\partial x} + Z^*CZ \frac{\partial v}{\partial y} + \\ + Z^*\left(QZ + A \frac{\partial}{\partial t} Z + B \frac{\partial}{\partial x} Z + C \frac{\partial}{\partial y} Z\right) = Z^*f,$$

который в силу нашей конструкции $Z$ опять является симметрической гиперболической системой

$$\frac{\partial v}{\partial t} + K \frac{\partial v}{\partial x} + \tilde{C} \frac{\partial v}{\partial y} + \bar{Q}v = \bar{f}, \qquad \tilde{C} = Z^*CZ = \tilde{C}^*.$$

В дальнейшем, пользуясь таким каноническим видом симметрической гиперболической системы, мы не будем предполагать, что все $k_i$ на диагонали матрицы $K$ различны. Дело в том, что многие уравнения математической физики допускают приведение с гладко зависящей от $x$, $y$, $t$ матрицей $Z$, даже если среди собственных значений $k_i$ есть кратные. В качестве примера можно указать уравнения трехмерной акустики

$$\frac{1}{\rho_0 c_0^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

$$\rho_0\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}=0,$$

$$\rho_0\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial y}=0,$$

$$\rho_0\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial z}=0,$$

канонический вид которых

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_0&0&0&0\\0&-c_0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}c_0&0\\0&0&0&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}c_0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}c_0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}c_0&0&0&0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}=0,$$

получающийся при переходе к новым неизвестным функциям:

$$u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}[p+\rho_0c_0u],\qquad u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}[p-\rho_0c_0u],\qquad u_3=\rho_0c_0v,\qquad u_4=\rho_0c_0w$$

имеет диагональную матрицу $K$ с двумя нулями на главной диагонали.

Нам будет удобно в записи матрицы $K$ такого канонического вида выделять знаки ее диагональных элементов и предполагать, что эти знаки в рассматриваемой области не меняются, т. е. предполагать, что $k_i$, ненулевые в какой-то точке $(x, y, t)$, не будут обращаться в нуль нигде в этой области. После этих замечаний должно стать ясным, какие ограничения накладываются, если мы в некоторых задачах предполагаем, что симметрическая гиперболическая система

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial y}+Qu=f$$

имеет матрицу $B$ следующего специального вида:

$$B=\begin{pmatrix} k_1 & & & & & & & & & & 0\\ & k_2 & & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & k_{n_0} & & & & & & & \\ & & & & -k_{n_0+1} & & & & & & \\ & & & & & -k_{n_0+2} & & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & -k_{n_1} & & & \\ & & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$(k_j > 0).$$

На самом деле без какого-либо дальнейшего ограничения общности мы можем предполагать, что все $k_j$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n_1)$ не зависят от $(x,\ y,\ t)$ и даже равны единице. Действительно, пусть $B$ имеет описанный выше диагональный вид с гладкими и всюду отличными от нуля $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_{n_0},\ k_{n_0+1},\ \ldots,\ k_{n_1}$. Сделаем подстановку

$$u=\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{k_1}} & & & & & & 0\\ & \frac{1}{\sqrt{k_2}} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{k_{n1}}} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}=Tv,$$

после чего еще умножим полученную систему

$$AT\frac{\partial v}{\partial t}+BT\frac{\partial v}{\partial x}+CT\frac{\partial v}{\partial y}+\left(QT+A\frac{\partial T}{\partial t}+B\frac{\partial T}{\partial x}+C\frac{\partial T}{\partial y}\right)v=f$$

слева на $T^*=T$. Мы приходим опять к симметрической системе

$$T^*AT\frac{\partial v}{\partial t}+T^*BT\frac{\partial v}{\partial x}+T^*CT\frac{\partial v}{\partial y}+$$
$$+T^*\left(QT+A\frac{\partial T}{\partial t}+B\frac{\partial T}{\partial x}+C\frac{\partial T}{\partial y}\right)v=T^*f,$$

у которой диагональная матрица $T^*BT$ коэффициентов при $\frac{\partial v}{\partial x}$

имеет на диагонали постоянные элементы, равные $\pm 1$ или нулю:

$$T^*BT = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} +1 & & & \\ & +1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & +1 \end{matrix}\right\} n_0 \text{ штук} & & & 0 \\ & \left.\begin{matrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{matrix}\right\} n_1 - n_0 \text{ штук} & & \\ & & \left.\begin{matrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{matrix}\right\} n - n_1 \text{ штук} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Конечно, матрица $T^*AT$ коэффициентов при производных $\frac{\partial v}{\partial t}$ теперь уже не будет единичной. Для дальнейшего важно лишь то, что она положительно определена и что ее элементы — гладкие функции от $x$, $y$, $t$.

Сейчас мы выведем для симметрических $t$-гиперболических систем одно очень важное тождество, называемое *интегралом энергии*. Оно будет играть основную роль при построении всей теории симметрических систем.

Ограничимся линейными системами вида

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y} + Qu = f,$$

где

$$A = A(x, y, t), \quad B = B(x, y, t), \quad C = C(x, y, t),$$

$$Q = Q(x, y, t), \quad f = f(x, y, t),$$

и

$$A = A^*, \quad B = B^*, \quad B = C^*.$$

Матрица $Q$ симметричной не предполагается. Умножим систему скалярно на вектор $2u$

$$2\left(A\frac{\partial u}{\partial t},\ u\right) + 2\left(B\frac{\partial u}{\partial x},\ u\right) + 2\left(C\frac{\partial u}{\partial y},\ u\right) + 2(Qu,\ u) = 2(f,\ u).$$

Преобразуем отдельные слагаемые полученного равенства (пользуемся тем, что $A=A^*$, $B=B^*$, $C=C^*$):

$$2\left(A\frac{\partial u}{\partial t},\ u\right)=\left(A\frac{\partial u}{\partial t},\ u\right)+\left(A\frac{\partial u}{\partial t},\ u\right)=\left(A\frac{\partial u}{\partial t},\ u\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial t},\ A^*u\right)=$$
$$=\left(A\frac{\partial u}{\partial t},\ u\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial t},\ Au\right)=\left(A\frac{\partial u}{\partial t},\ u\right)+\left(Au,\ \frac{\partial u}{\partial t}\right)=$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial t}[Au],\ u\right)-\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}A\right]u,\ u\right)+\left(Au,\ \frac{\partial u}{\partial t}\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}(Au,\ u)-\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}A\right]u,\ u\right).$$

Аналогично:

$$2\left(B\frac{\partial u}{\partial x},\ u\right)=\frac{\partial}{\partial x}(Bu,\ u)-\left(\left[\frac{\partial}{\partial x}B\right]u,\ u\right),$$
$$2\left(C\frac{\partial u}{\partial y},\ u\right)=\frac{\partial}{\partial y}(Cu,\ u)-\left(\left[\frac{\partial}{\partial y}C\right]u,\ u\right).$$

Кроме того,

$$2(Qu,\ u)=(Qu,\ u)+(u,\ Q^*u)=([Q+Q^*]\,u,\ u).$$

После выполнения всех этих преобразований можно написать, что

$$\frac{\partial}{\partial t}(Au,\ u)+\frac{\partial}{\partial x}(Bu,\ u)+\frac{\partial}{\partial y}(Cu,\ u)=(Du,\ u)+2(f,\ u).$$

Здесь

$$D=\frac{\partial}{\partial t}A+\frac{\partial}{\partial x}B+\frac{\partial}{\partial y}C-(Q+Q^*)=D(x,\ y,\ t).$$

Из последнего равенства ясно, какой гладкости надо требовать от $A$, $B$, $C$, $Q$, чтобы $D$ обладала той или иной определенной гладкостью.

Рассмотрим какую-либо область $G$, лежащую внутри области существования решения $u$, ограниченную кусочно гладкой поверхностью $S$. Проинтегрируем наше тождество по области $G$

$$\iiint\limits_G\left[\frac{\partial}{\partial t}(Au,\ u)+\frac{\partial}{\partial x}(Bu,\ u)+\frac{\partial}{\partial y}(Cu,\ u)\right]dx\,dy\,dt=$$
$$=\iiint\limits_G[(Du,\ u)+2(f,\ u)]\,dx\,dy\,dt.$$

Интеграл в левой части, как интеграл от дивергенции, может быть преобразован в поверхностный по теореме Гаусса — Остроградского. Мы будем единичный вектор внешней нормали к поверхности $S$ обозначать $(\tau,\ \xi,\ \eta)$. Имеем

$$\iint\limits_S [\tau (Au,\ u)+\xi (Bu,\ u)+\eta (Cu,\ u)]\, ds =$$
$$=\iiint\limits_G [(Du,\ u)+2 (f,\ u)]\, dx\, dy\, dt.$$

*Интегральное тождество*

$$\iint\limits_S ([\tau A+\xi B+\eta C]\, u,\ u)\, ds=\iiint\limits_G [(Du,\ u)+2 (f,\ u)]\, dx\, dy\, dt$$

*называется интегралом энергии для симметрической системы.*

Если взять в качестве примера систему уравнений, описывающих распространение звуковых волн (см. § 6) с матрицами

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(матрица $Q$ и вектор $f$ — нулевые), то получится тождество

$$\iint\limits_S \left[\tau \left(\frac{p^2}{\rho_0 c_0^2}+\rho_0 u^2+\rho_0 v^2\right)+\xi 2pu+\eta 2pv\right] ds=0,$$

выражающее (после деления на 2) закон сохранения энергии звуковых волн. В случае двух переменных $x$, $t$ мы таким законом уже пользовались в § 5 при доказательстве теоремы единственности.

Выведенный нами интеграл энергии будет использован в следующем параграфе для доказательства единственности решения задачи Коши в случае произвольной гиперболической системы.

Интегралы энергии можно строить не только для симметрических систем первого порядка. Сейчас мы опишем интегралы энергии волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-c_0^2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)=0.$$

Для этого умножим обе его части на

$$\frac{\partial p}{\partial t}+m\frac{\partial p}{\partial x}+n\frac{\partial p}{\partial y},$$

и преобразуем слагаемые, получившиеся в произведении, по следующим правилам:

$$\frac{\partial p}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{p_t^2}{2},\quad \frac{\partial p}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\,(p_tp_x)-\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{p_x^2}{2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\,(p_tp_y)-\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{p_y^2}{2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}\,\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\,(p_tp_x)-\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{p_t^2}{2},\quad \frac{\partial p}{\partial y}\,\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\,(p_tp_y)-\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{p_t^2}{2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}\,\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{p_x^2}{2},\quad \frac{\partial p}{\partial x}\,\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\,(p_xp_y)-\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{p_y^2}{2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}\,\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\,(p_xp_y)-\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{p_x^2}{2},\quad \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{p_y^2}{2}.$$

В результате мы придем к выполненному на решениях тождеству

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{p_t^2+2mp_tp_x+2np_tp_y+c_0^2\,(p_x^2+p_y^2)}{2}\right]-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{mp_t^2+2c_0^2p_tp_x-mc_0^2p_x^2+2nc_0^2p_xp_y+mc_0^2p_y^2}{2}\right]-$$
$$-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{np_t^2+2c_0^2p_tp_y-nc_0^2p_y^2+2mc_0^2p_xp_y+nc_0^2p_y^2}{2}\right]=0.$$

Если $m^2+n^2<c_0^2$, то квадратичная форма от производных

$$p_t^2+2mp_tp_x+2np_tp_y+c_0^2\,(p_x^2+p_y^2),$$

стоящая в этом тождестве под знаком дифференцирования по $t$, является положительно определенной. Тождество носит название интеграла энергии для волнового уравнения и используется для тех же целей, что и интегралы энергии у симметрических гиперболических систем.

В заключение этого параграфа докажем вспомогательную лемму, которой в дальнейшем не раз будем пользоваться.

Лемма об интегральном неравенстве. *Пусть при $0\leqslant t\leqslant T$ функция $I(t)\geqslant 0$ непрерывна и дифференцируема. Если такая $I(t)$ для любых $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant T$ удовлетворяет неравенству*

$$I(t_2)\leqslant I(t_1)+M\int_{t_1}^{t_2}I(t)\,dt+N\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{I(t)}\,dt\quad (M>0,\ N\geqslant 0),$$

*то*

$$\sqrt{I(t)}\leqslant\sqrt{I(0)}\,e^{\frac{M}{2}t}+\frac{N}{M}\left(e^{\frac{M}{2}t}-1\right).\qquad (1)$$

Доказательство. По предположению, для $t_1<t_2$ имеет место неравенство

$$\frac{I(t_2)-I(t_1)}{t_2-t_1}\leqslant\frac{\int_{t_1}^{t_2}(MI+N\sqrt{I})\,dt}{t_2-t_1}=MI(t^*)+N\sqrt{I(t^*)}.$$

Мы воспользовались здесь теоремой о среднем значении, выбрав с ее помощью $t^*$ $(t_1 \leqslant t^* \leqslant t_2)$. Стягивая $[t_1, t_2]$ к внутренней точке $t$ интервала и пользуясь дифференцируемостью $I(t)$, получаем

$$\frac{dI}{dt} \leqslant MI(t) + N\sqrt{I(t)}. \tag{2}$$

Если $I(\hat{t}) = 0$ для выбранного значения $\hat{t}$, то выполнение неравенства (1) в точке $\hat{t}$ очевидно. Пусть теперь $I(\hat{t}) > 0$. Обозначим посредством $t_1$ либо наибольшее из тех значений $t$, для которых $I(t) = 0$ и $t < \hat{t}$, либо (если $I(t) > 0$ для всех $t < \hat{t}$) точку $t = 0$. На интервале $(t_1, \hat{t})$ функция $I(t)$ положительна. Поделим обе части неравенства (2) на $2\sqrt{I(t)}$. Имеем

$$\frac{d\sqrt{I(t)}}{dt} \leqslant \frac{M}{2}\sqrt{I(t)} + \frac{N}{2},$$

$$\frac{d\sqrt{I(t)}}{dt} - \frac{M}{2}\sqrt{I(t)} \leqslant \frac{N}{2}.$$

Умножим обе части последнего неравенства на $e^{-\frac{M}{2}t}$:

$$\frac{d\left[e^{-\frac{M}{2}t}\sqrt{I(t)}\right]}{dt} \leqslant \frac{N}{2}e^{-\frac{M}{2}t}.$$

Проинтегрируем это неравенство от $t_1$ до $\hat{t}$

$$e^{-\frac{M}{2}\hat{t}}\sqrt{I(\hat{t})} - e^{-\frac{M}{2}t_1}\sqrt{I(t_1)} \leqslant \frac{N}{M}\left[e^{-\frac{M}{2}t_1} - e^{-\frac{M}{2}\hat{t}}\right].$$

Следовательно,

$$\sqrt{I(\hat{t})} \leqslant \sqrt{I(t_1)}\,e^{\frac{M}{2}(\hat{t}-t_1)} + \frac{N}{M}\left[e^{\frac{M}{2}(\hat{t}-t_1)} - 1\right].$$

Так как $\hat{t} - t_1 \leqslant \hat{t}$, а $I(t_1)$ либо равно $I(0)$, либо равно нулю, то интегральное неравенство (1) доказано.

## § 12. Теорема единственности и оценки решений гиперболических систем

Использование интеграла энергии для оценок решений симметрических гиперболических систем. Оценки проводятся в области полупространства $t > 0$, ограниченной сверху некоторой «шапочкой», о которой известно, что по ней поверхностный интеграл энергии неотрицателен. Как проверить это условие, пока не выясняется. Теорема единственности для рассматриваемых областей. Получение оценок для производных путем применения изучаемой техники к расширенным системам, включающим уравнения для оцениваемых производных. Расширение уравнений акустики.

Мы начинаем изучение теоремы единственности и теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных данных для симметрических гиперболических систем. Попутно мы получим некоторые важные оценки для решений и их производных. Все эти теоремы и оценки получаются из исследования интегралов энергии с помощью интегрального неравенства, доказанного в конце прошлого параграфа. Доказательство, которое здесь будет проводиться, предполагает неотрицательность некоторых поверхностных интегралов. Сейчас мы этими интегралами заниматься не будем, поэтому все наши выводы будут носить условный характер. Условия неотрицательности таких интегралов будут изучены в последующих параграфах. Их изучение связано с важными идеями.

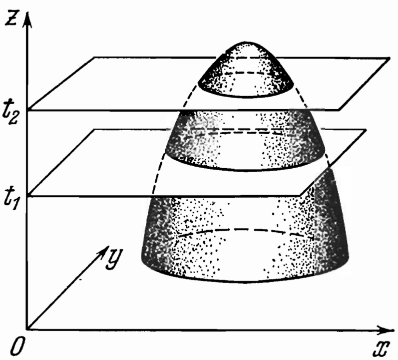

Рис. 31.

Изучая гиперболическую симметрическую систему

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial y}+Qu=f,$$

мы в предыдущем параграфе установили для ее гладких решений интегральное тождество, которому было присвоено название «интеграл энергии»:

$$\iint\limits_S([\tau A+\xi B+\eta C]\,u,\ u)\,ds=\iiint\limits_G[(Du,\ u)+2\,(f,\ u)]\,dt\,dx\,dy.$$

В этом тождестве поверхность $S$ ограничивает область $G$ в пространстве $(t,\ x,\ y)$, вектор $(\tau,\ \xi,\ \eta)$ — единичная внешняя нормаль к этой поверхности. Матрица $D$ определяется равенством

$$D=\frac{\partial}{\partial t}A+\frac{\partial}{\partial x}B+\frac{\partial}{\partial y}C-(Q+Q^*).$$

Пусть некоторая область ограничена поверхностью, которая разбивается на две части. Первая из этих частей представляет собой ограниченный кусок плоскости $t=0$, а вторая — является как бы «шапочкой», опирающейся на границу первой и расположенной в полупространстве $t>0$. Такая «шапочка» изображена на рис. 31.

Мы будем предполагать, что всюду на поверхности «шапочки» квадратичная форма $([\tau A+\xi B+\eta C]\,u,\ u)$ неотрицательна. При каких условиях это предположение выполняется, мы сейчас выяснять не будем. Проведем сечения $t=t_1$, $t=t_2$ $(t_2>t_1)$ и рассмотрим область $G$, ограниченную этими сечениями и поверхностью «шапочки». На сечении $t=t_2$ вектор внешней нормали $(\tau, \xi, \eta)$ имеет координаты $(1, 0, 0)$, а на сечении $t=t_1$ координаты $(-1, 0, 0)$. Опуская в тождестве интеграла энергии неотрицательный интеграл по боковой поверхности и заменяя тройной интеграл по области $G$ на повторный, получим неравенство

$$\iint\limits_{t=t_2} (Au, u)\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_{t=t_1} (Au, u)\,dx\,dy + \\ + \int\limits_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint\limits_{t=\text{const}} [|(Du, u)| + 2|(f, u)|]\,dx\,dy \right\} dt.$$

Здесь все интегралы по сечениям $t=t_2$, $t=t_1$, $t=\text{const}$ берутся только по пересечению $G$ с соответствующей плоскостью.

Обозначим через $I(t)$ интеграл

$$\iint\limits_{t=\text{const}} (Au, u)\,dx\,dy.$$

Воспользуемся неравенствами:

$$-M(Au, u) \leqslant (Du, u) \leqslant M(Au, u),$$

$$\iint\limits_{t=\text{const}} |(Du, u)|\,dx\,dy \leqslant M \iint\limits_{t=\text{const}} (Au, u)\,dx\,dy = MI(t),$$

$$\iint\limits_{t=\text{const}} 2|(f, u)|\,dx\,dy \leqslant 2 \iint\limits_{t=\text{const}} \sqrt{(f, f)}\sqrt{(u, u)}\,dx\,dy \leqslant \\ \leqslant 2\sqrt{\iint\limits_{t=\text{const}} (f, f)\,dx\,dy}\sqrt{p^2 \iint\limits_{t=\text{const}} (Au, u)\,dx\,dy} \leqslant \\ \leqslant N\sqrt{\iint\limits_{t=\text{const}} (Au, u)\,dx\,dx} = N\sqrt{I(t)}.$$

С их помощью получаем, что

$$I(t_2) \leqslant I(t_1) + M\int\limits_{t_1}^{t_2} I(t)\,dt + N\int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{I(t)}\,dt.$$

Применяем теперь лемму об интегральном неравенстве, доказанную в конце прошлого параграфа:

$$\sqrt{I(t)} \leqslant \sqrt{I(0)}\,e^{\frac{M}{2}t} + N\,\frac{e^{\frac{M}{2}t}-1}{M}.$$

Постоянная $M$ здесь оценивает коэффициенты системы и их производные, а $N$ — правые части $f$.

Из доказанного неравенства вытекаат, что если $u=0$ при $t=0$ и если $f(x,\ t)=0$, то $I(t)=0$, а следовательно, всюду внутри «шапочки» $u=0$. Это утверждение представляет собой теорему единственности. Правда, мы пока не обосновали важнейшего условия положительности поверхностного интеграла по «шапочке» и поэтому не установили, для каких «шапочек» такая теорема имеет место.

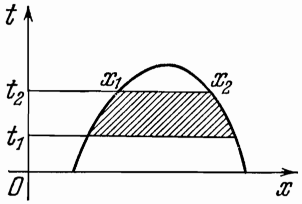

Рис. 32.

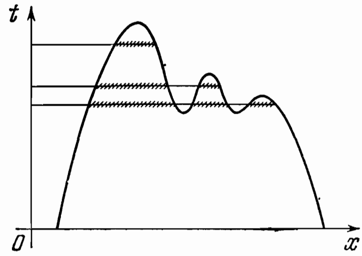

Рис. 33.

Заметим, что $(u,\ u)\leqslant \mathrm{const}\,(Au,\ u)$, и, определив норму $\|\boldsymbol{u}\|$ вектор-функции $\boldsymbol{u}(t)=u(x,\ y,\ t)$ на сечении $t=\mathrm{const}$ равенством

$$\|\boldsymbol{u}(t)\|=\sqrt{\iint\limits_{t=\mathrm{const}}(u,\ u)\,dx\,dy},$$

запишем выведенную оценку в следующей форме:

$$\|\boldsymbol{u}(t)\|\leqslant \mathrm{const}\,\|\boldsymbol{u}(0)\|+\mathrm{const}\max_t\|\boldsymbol{f}(t)\|.$$

Мы предполагаем здесь, что $t$ меняется на конечном отрезке $0\leqslant t\leqslant T$, и благодаря этому оцениваем $e^{\frac{M}{2}t}$, $\dfrac{e^{\frac{M}{2}t}-1}{M}$ сверху через некоторые постоянные.

Рассуждения, которые мы проводили, никак не связаны, кроме обозначений, с тем, что число пространственных переменных $x$, $y$ равно двум. Точно так же могут быть разобраны случаи трех пространственных переменных $x$, $y$, $z$ или одного только $x$.

Остановимся кратко на последнем случае. При этом надо рассмотреть рис. 32. «Шапочка» в этом случае представляет собой не поверхность, а кривую, вместо двойных интегралов по сечениям $t=\mathrm{const}$ мы должны рассматривать однократные. Норма $\|\boldsymbol{u}(t)\|$ определяется здесь так:

$$\|\boldsymbol{u}(t)\|=\sqrt{\int\limits_{x_1(t)}^{x_2(t)}\Big[\sum_i u_i^2(x,\ t)\Big]dx}.$$

Конечно, можно представить себе случай «шапочки», изображенной на рис. 33. Сечения такой шапочки прямыми $t = \text{const}$ могут состоять из нескольких не связанных между собой отрезков. Без всякого труда можно получить аккуратные формулировки, пригодные и для таких случаев.

Сейчас я расскажу, как описанный выше прием может быть использован для получения оценок не самих решений, а их производных. Рассмотрим наряду с исходной системой

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial y}+Q\boldsymbol{u}=f$$

еще три равенства, получающиеся из нее дифференцированием по $t$, $x$, $y$. Эти равенства вместе с исходной системой образуют расширенную систему, содержащую в четыре раза больше уравнений и неизвестных, чем исходная:

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial y}+Qu=f,$$

$$A\frac{\partial u_t}{\partial t}+B\frac{\partial u_t}{\partial x}+C\frac{\partial u_t}{\partial y}+(Q+A_t)u_t+B_tu_x+C_tu_y+Q_tu=f_t,$$

$$A\frac{\partial u_x}{\partial t}+B\frac{\partial u_x}{\partial x}+C\frac{\partial u_x}{\partial y}+A_xu_t+(B_x+Q)\,u_x+C_xu_y+Q_xu=f_x,$$

$$A\frac{\partial u_y}{\partial t}+B\frac{\partial u_y}{\partial x}+C\frac{\partial u_y}{\partial y}+A_yu_t+B_yu_x+(C_y+Q)\,u_y+Q_yu=f_y.$$

Эту систему можно записать с помощью клеточных матриц еще в следующей форме:

$$\begin{pmatrix} A & & & 0\\ & A & & \\ & & A & \\ 0 & & & A\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}u\\u_t\\u_x\\u_y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B & & & 0\\ & B & & \\ & & B & \\ 0 & & & B\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}u\\u_t\\u_x\\u_y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} C & & & 0\\ & C & & \\ & & C & \\ 0 & & & C\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}u\\u_t\\u_x\\u_y\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} Q & 0 & 0 & 0\\ Q_t & Q+A_t & B_t & C_t\\ Q_x & A_x & Q+B_x & C_x\\ Q_y & A_y & B_y & Q+C_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\u_t\\u_x\\u_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f\\f_t\\f_x\\f_y\end{pmatrix}.$$

Из этой формы видно, что расширенная система тоже будет симметрической. Это позволяет применять к ней рассуждения, разобранные нами выше. С их помощью могут быть оценены производные от $u(x, y, t)$ через их начальные значения при $t=0$ и через правые части и их производные $f_t$, $f_x$, $f_y$. Константы в этих оценках зависят от матриц расширенной системы. Для их получения надо требовать большей гладкости от коэффициентов исходной системы и ее правых частей, чем при оценке самой вектор-функции $u(x, y, t)$.

Начальные значения производных $u_x$, $u_y$ могут быть получены дифференцированием начальных данных, а начальные значения производной $u_t$ вычисляются через начальные значения $u$, $u_x$, $u_y$ с помощью основной системы уравнений:

$$Au_t = -Bu_x - Cu_y - Qu + f,$$
$$u_t = A^{-1}(f - Bu_x - Cu_y - Qu).$$

В случае, если надо оценить не только первые, но еще и вторые производные или даже производные более высокого порядка, то, аналогично, дальнейшим дифференцированием расширяют систему так, чтобы она после этого содержала в качестве искомых функций производные всех тех порядков, какие мы только хотим оценивать.

Ясно, что чем выше порядок производных, для которых мы хотим получить оценку, тем большей гладкости нам нужно требовать от коэффициентов исходных уравнений, их правых частей и от начальных данных.

Упражнение. Получите расширенную систему, с помощью которой можно оценить вторые производные от решений.

В некоторых случаях удобно использовать расширенные системы с симметричными клеточными матрицами коэффициентов, клетки которых отличны от исходных $A$, $B$, $C$.

Сейчас будут описаны, без какой-либо мотивировки, три различных примера такого расширения уравнений акустики,

$$\frac{1}{\rho_0 c_0^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$
$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$
$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

которые нам понадобятся в § 15 при разборе поучительных примеров постановок задач.

Продифференцировав первое уравнение этой системы по $t$, вычтя из результата второе и третье уравнения, деленные на $\rho_0$ и продифференцированные соответственно по $x$, $y$, получим уравнение второго порядка для $p$, только множителем отличающееся от следующего волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_0^2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Если теперь ввести постоянный параметр $l$ и обозначить:

$$j = p_t - lp_y, \qquad r = p_x, \quad s = p_y,$$

то, пользуясь тождествами

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+l\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-l\,\frac{\partial}{\partial y}\right)-(c_0^2-l^2)\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)-c_0^2\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\\ =\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_0^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

$$c_0^2\left(\frac{\partial}{\partial t}-l\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)-c_0^2\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}-l\,\frac{\partial}{\partial y}\right)=0,$$

$$(c_0^2-l^2)\left(\frac{\partial}{\partial t}-l\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)-(c_0^2-l^2)\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial t}-l\,\frac{\partial}{\partial y}\right)=0,$$

легко убедиться, что $j$, $r$, $s$ удовлетворяют системе:

$$\frac{\partial j}{\partial t}+l\,\frac{\partial j}{\partial y}-(c_0^2-l^2)\,\frac{\partial s}{\partial y}-c_0^2\,\frac{\partial r}{\partial x}=0,$$

$$c_0^2\,\frac{\partial r}{\partial t}-lc_0^2\,\frac{\partial r}{\partial y}-c_0^2\,\frac{\partial j}{\partial x}=0,$$

$$(c_0^2-l^2)\,\frac{\partial s}{\partial t}-l\,(c_0^2-l^2)\,\frac{\partial s}{\partial y}-(c_0^2-l^2)\,\frac{\partial j}{\partial y}=0.$$

Если известно решение этой системы, то $p$, $u$, $v$ могут быть получены с помощью уравнений

$$\frac{\partial p}{\partial t}=j+ls,\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\,r,\qquad \frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\,s.$$

В результате мы пришли к симметрической системе шестого порядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0\\ \cdot & c_0^2 & & & & \cdot\\ \cdot & & c_0^2-l^2 & & & \cdot\\ \cdot & & & 1 & & \cdot\\ \cdot & & & & 1 & \cdot\\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} j\\ r\\ s\\ p\\ u\\ v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -c_0^2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0\\ -c_0^2 & 0 & & & & \cdot\\ \cdot & & 0 & & & \cdot\\ \cdot & & & 0 & & \cdot\\ \cdot & & & & 0 & \cdot\\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} j\\ r\\ s\\ p\\ u\\ v\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} l & 0 & -(c_0^2-l^2) & \cdot & \cdot & 0\\ 0 & -lc_0^2 & 0 & & & \cdot\\ -(c_0^2-l^2) & 0 & -l\,(c_0^2-l^2) & & & \cdot\\ \cdot & & & 0 & & \cdot\\ \cdot & & & & 0 & \cdot\\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} j\\ r\\ s\\ p\\ u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ j+ls\\ -\dfrac{1}{\rho_0}\,r\\ -\dfrac{1}{\rho_0}\,s\end{pmatrix},\qquad (1)$$

которая при $|l|<c_0$ является гиперболической.

Следующий пример расширения мы получим, заметив, что при произвольных параметрах $k$, $l$ линейная комбинация производных от $p$,

$$\pi=p_t-kp_x-lp_y,$$

удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2}-c_0^2\left(\frac{\partial^2\pi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\pi}{\partial y^2}\right)=0.$$

При этом, как нетрудно убедиться, производные от $\pi$, $p$:

$$\theta=\frac{\partial\pi}{\partial t},\quad \delta=\frac{\partial\pi}{\partial x},\quad \varkappa=\frac{\partial\pi}{\partial y},\quad r=p_x,\quad s=p_y$$

и сами $\pi$, $p$, $u$, $v$ являются решениями уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\theta}{\partial t}-\frac{\partial\delta}{\partial x}-\frac{\partial\varkappa}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial p}{\partial t}-k\frac{\partial p}{\partial x}-l\frac{\partial p}{\partial y}=\pi,\\ \frac{\partial\delta}{\partial t}-\frac{\partial\theta}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial r}{\partial t}-k\frac{\partial r}{\partial x}-l\frac{\partial r}{\partial y}=\delta,\\ \frac{\partial\varkappa}{\partial t}-\frac{\partial\theta}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial s}{\partial t}-k\frac{\partial s}{\partial x}-l\frac{\partial s}{\partial y}=\varkappa,\\ \frac{\partial\pi}{\partial t}=\theta,\quad \frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}r,\quad \frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}s,\end{gathered}\tag{2}$$

которые также образуют (при любых $k$, $l$) симметрическую гиперболическую систему.

Третий вид расширенной системы можно получить, если воспользоваться тождеством

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+k\frac{\partial}{\partial x}-l\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial t}-k\frac{\partial p}{\partial x}-l\frac{\partial p}{\partial y}\right)-\frac{k^2}{c_0^2}\left[\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-c_0^2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)\right]=\\ =\left(1-\frac{k^2}{c_0^2}\right)\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-2l\frac{\partial^2 p}{\partial t\,\partial y}+(k^2+l^2)\frac{\partial^2 p}{\partial y^2},$$

и получить для давления $p$ уравнение

$$\left(1-\frac{k^2}{c_0^2}\right)\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-2l\frac{\partial^2 p}{\partial t\,\partial y}+(k^2+l^2)\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=\\ =\frac{\partial\pi}{\partial t}+k\frac{\partial\pi}{\partial x}-l\frac{\partial\pi}{\partial y}=\theta+k\delta-l\varkappa,$$

которое допускает еще и следующую запись:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{lc_0^2}{c_0^2-k^2}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{lc_0^2}{c_0^2-k^2}\frac{\partial p}{\partial y}\right)-\\ -\frac{c_0^2k^2(k^2+l^2-c_0^2)}{(c_0^2-k^2)^2}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=\frac{c_0^2}{c_0^2-k^2}(\theta+k\delta-l\varkappa).$$

Введя обозначения

$$f=p_t-\frac{lc_0^2}{c_0^2-k^2}p_y,\quad g=\frac{c_0|k|\sqrt{k^2+l^2-c_0^2}}{|c_0^2-k^2|}p_y,$$

получим для $p$, $f$, $g$ уравнения первого порядка:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{lc_0^2}{c_0^2-k^2}\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{c_0|k|\sqrt{k^2+l^2-c_0^2}}{|c_0^2-k^2|}\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{c_0^2}{c_0^2-k^2}(\theta+k\delta-l\varkappa),\\&\frac{\partial g}{\partial t}-\frac{lc_0^2}{c_0^2-k^2}\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{c_0|k|\sqrt{k^2+l^2-c_0^2}}{|c_0^2-k^2|}\frac{\partial f}{\partial y}=0,\\&\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{lc_0^2}{c_0^2-k^2}\frac{\partial p}{\partial y}=f.\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

Компоненты $u$, $v$ скорости удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=-\frac{1}{\rho_0 k}\left[\pi-f-\frac{l|k|\cdot|c_0^2-k^2|}{c_0(c_0^2-k^2)\sqrt{k^2+l^2-c_0^2}}g\right],\\\frac{\partial v}{\partial t}&=-\frac{|c_0^2-k^2|}{c_0|k|\sqrt{k^2+l^2-c_0^2}}g,\end{aligned}\tag{4}$$

представляющим собой запись в новых обозначениях равенств:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x},\qquad\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Если объединить уравнения для $\theta$, $\delta$, $\varkappa$, $\pi$ из (2) с уравнениями (3), (4) для $f$, $g$, $p$, $u$, $v$, мы придем к замкнутой системе девятого порядка, которая тоже может считаться расширением уравнений акустики. Это последнее расширение является симметрической гиперболической системой, только если $k^2+l^2-c_0^2>0$, $k^2\neq c_0^2$, $k\neq 0$.

Все три приведенных сейчас примера расширений уравнений акустики имеют вид симметрических гиперболических систем

$$A\frac{\partial w}{\partial t}+B\frac{\partial w}{\partial x}+C\frac{\partial w}{\partial y}=h.$$

Для дальнейшего нам важно отметить, что связанные системами квадратичные формы $(Bw, w)$ имеют вид

для первого расширения $(Bw,\ w)=-2c_0^2jr$, где $j=p_t-lp_y$, $r=p_x$;

для второго расширения $(Bw,\ w)=-2\theta\delta-k(r^2+s^2+p^2)$,

$$\theta=\frac{\partial}{\partial t}(p_t-kp_x-lp_y),\qquad\delta=\frac{\partial}{\partial x}(p_t-kp_x-lp_y),$$

$$r=p_x,\quad s=p_y;$$

для третьего расширения $(Bw,\ w)=-2\theta\delta$.

Напомним еще, что для осуществимости первого из наших расширений необходимо выполнение неравенства $|l|<c_0$, а для осуществимости третьего — выполнение трех неравенств: $k^2\neq c_0^2$, $k^2+l^2-c_0^2>0$, $k\neq 0$.

В дальнейшем (см. § 15) мы воспользуемся построенными здесь примерами при анализе смешанной задачи.

## § 13. Условие неотрицательности квадратичной формы, связанной с интегралом энергии

Конус векторов, связанных с неотрицательно определенными квадратичными формами интеграла энергии. Его выпуклость. Способ вычисления границы этого конуса. Неравенство $\tau+H(\xi, \eta)\geqslant 0$ и определение $H(\xi, \eta)$. Однородность и вытекающее из нее равенство $\xi H_\xi+\eta H_\eta=H$. Примеры: гиперболическая система с двумя независимыми переменными $x$, $t$ в канонической форме и уравнения теории упругости. Замечание о случае переменных коэффициентов.

В предыдущем параграфе при исследовании интегралов энергии мы столкнулись с необходимостью изучать такие поверхности $S$, на которых

$$\iint\limits_S ([\tau A+\xi B+\eta C]\, u,\ u)\, ds \geqslant 0;$$

здесь $\tau$, $\xi$, $\eta$ — компоненты вектора нормали к поверхности $S$; $A$, $B$, $C$ — симметрические матрицы, причем $A$ положительно определена. Мы сейчас фиксируем некоторую точку $(x_0, t_0, y_0)$ пространства и рассмотрим для матриц $A$, $B$, $C$, описывающих коэффициенты некоторой системы в этой точке, множество всех тех векторов $(\tau, \xi, \eta)$, для которых $\tau A+\xi B+\eta C$ неотрицательно определена.

Во-первых, заметим, что вектор $\tau=1$, $\xi=0$, $\eta=0$ отвечает, по условию, положительно определенной форме $\tau A+\xi B+\eta C$. Отметим также, что вместе с каждым вектором $(\tau, \xi, \eta)$, отвечающим положительно (неотрицательно) определенной форме, любой вектор $\bar\tau=\mu\tau$, $\bar\xi=\mu\xi$, $\bar\eta=\mu\eta$ при $\mu>0$ также дает положительно (неотрицательно) определенную матрицу $\bar\tau A+\bar\xi B+\bar\eta C = \mu(\tau A+\xi B+\eta C)$. Это утверждение можно сформулировать так: *Векторы, отвечающие положительно (неотрицательно) определенным формам, образуют конус.*

Покажем, что конус векторов $(\tau, \xi, \eta)$, отвечающих положительно определенным формам, является выпуклым. Действительно, пусть

$$\tau_1(Au,\ u)+\xi_1(Bu,\ u)+\eta_1(Cu,\ u)\geqslant \varkappa_1(u,\ u),$$
$$\tau_2(Au,\ u)+\xi_2(Bu,\ u)+\eta_2(Cu,\ u)\geqslant \varkappa_2(u,\ u).$$

Любой вектор $(\tau, \xi, \eta)$, лежащий на отрезке, соединяющем концы векторов $(\tau_1, \xi_1, \eta_1)$, $(\tau_2, \xi_2, \eta_2)$, может быть представлен в форме

$$\tau=(1-\alpha)\tau_1+\alpha\tau_2,\quad \xi=(1-\alpha)\xi_1+\alpha\xi_2,\quad \eta=(1-\alpha)\eta_1+\alpha\eta_2$$

с неотрицательным $\alpha$, не превышающим 1. Отсюда ясно, что

$$\tau(Au,\ u)+\xi(Bu,\ u)+\eta(Cu,\ u)\geqslant[(1-\alpha)\varkappa_1+\alpha\varkappa_2](u,\ u)\geqslant \geqslant\min[\varkappa_1,\ \varkappa_2](u,\ u).$$

Это неравенство и означает положительную определенность.

Итак, мы видим, что вместе с каждыми двумя векторами, отвечающими положительно определенным формам, все векторы, являющиеся их линейными комбинациями с положительными коэффициентами, тоже отвечают таким формам. Таким образом, конус векторов $(\tau, \xi, \eta)$ с положительно определенными формами является выпуклым и содержит вектор $(1, 0, 0)$, перпендикулярный плоскостям $t = \mathrm{const}$. Этот конус не совпадает со всем пространством, так как вектору $(-1, 0, 0)$ отвечает отрицательно определенная форма.

Рассмотрим векторы, лежащие на границе конуса положительно определенных форм. В силу непрерывности квадратичной формы $\tau(Au, u)+\xi(Bu, u)+\eta(Cu, u)$ относительно вектора $(\tau, \xi, \eta)$ эта форма на границе конуса будет неотрицательно определенной:

$$\tau(Au, u)+\xi(Bu, u)+\eta(Cu, u) \geqslant 0.$$

С другой стороны, для вектора $(\tau_0, \xi_0, \eta_0)$, лежащего на границе конуса, эта форма не может быть положительно определенной, так как в противном случае выполнялось бы неравенство

$$\tau_0(Au, u)+\xi_0(Bu, u)+\eta_0(Cu, u) > \varkappa > 0,$$

если

$$(u, u) = 1,$$

которое в силу непрерывности квадратичной формы было бы справедливо и для всех векторов $(\tau, \xi, \eta)$, близких к $(\tau_0, \xi_0, \eta_0)$. Это противоречит тому, что $(\tau_0, \xi_0, \eta_0)$ — граничный вектор.

Из алгебры известно, что квадратичная форма симметрической матрицы $\tau(Au, u)+\xi(Bu, u)+\eta(Cu, u)$ будет положительно определенной тогда и только тогда, когда все ее собственные значения положительны, и эта форма будет неотрицательно определенной тогда и только тогда, когда все ее собственные значения неотрицательны. Поэтому неотрицательность квадратичной формы, не являющейся положительно определенной, влечет за собой равенство нулю одного из характеристических корней ее матрицы. Отсюда ясно, что для векторов $(\tau, \xi, \eta)$, лежащих на границе конуса положительно определенных форм,

$$\det\|\tau A+\xi B+\eta C\| = 0.$$

Конус векторов, которые удовлетворяют последнему равенству, называется, как мы знаем (§ 6), *конусом характеристических нормалей*. Он делит все пространство на несколько частей. Рассмотрим ту часть, которая содержит вектор $(1, 0, 0)$. Мы показали, что эта часть пространства совпадает с теми векторами $(\tau, \xi, \eta)$, для которых форма положительно определена. Она является выпуклой.

**Чтобы найти границу конуса положительно определенных форм, надо при каждой фиксированной паре $(\xi, \eta)$ найти наиболь-**

ший корень $\tau^*(\xi, \eta)$ уравнения

$$\det \| \tau A + \xi B + \eta C \| = 0.$$

Легко видеть, что выполнение неравенства

$$\tau \geqslant \tau^*(\xi, \eta)$$

является условием неотрицательности формы:

$$\tau(Au, u) + \xi(Bu, u) + \eta(Cu, u).$$

Обычно вместо $\tau^*(\xi, \eta)$ рассматривается функция

$$H(\xi, \eta) = -\tau^*(\xi, \eta),$$

а конус векторов $(\tau, \xi, \eta)$, отвечающих неотрицательным формам, задается неравенством:

$$\tau + H(\xi, \eta) \geqslant 0.$$

Ясно, что при $\alpha > 0$ справедливо равенство

$$H(\alpha\xi, \alpha\eta) = \alpha H(\xi, \eta),$$

которое означает, что функция $H$ является однородной функцией первой степени однородности. Если $H$ — дифференцируемая функция, то по теореме Эйлера для однородных функций

$$\xi H_\xi + \eta H_\eta = H.$$

Сейчас проиллюстрируем описанную конструкцию двумя примерами.

Первый пример рассмотрим в случае всего двух переменных $x$, $t$, чтобы подчеркнуть независимость наших выводов от числа пространственных переменных. Ясно, что в этом случае $H = H(\xi)$, но при этом может быть, что $H(-\xi) \neq -H(\xi)$.

Рассмотрим гиперболическую систему в канонической форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + K\frac{\partial u}{\partial x} + Qu = f, \qquad K = \begin{pmatrix} k_1 & & & 0 \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k_n \end{pmatrix}.$$

Здесь $A = E$ (единичная матрица), $B = K$,

$$\det\|\tau A + \xi B\| = \det\|\tau E + \xi K\| = \det \begin{pmatrix} \tau + k_1\xi & & & 0 \\ & \tau + k_2\xi & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \tau + k_n\xi \end{pmatrix} =$$

$$= (\tau + k_1\xi)(\tau + k_2\xi)\ldots(\tau + k_n\xi).$$

Уравнение $\det\|\tau E + \xi K\| = 0$ определяет конус характеристических нормалей: $n$ прямых $\tau + k_i\xi = 0$, которые делят плоскость $(\tau, \xi)$ на некоторое число углов. Угол, содержащий вектор $\tau = 1$, $\xi = 0$, ограничен лучами прямых $\tau + k_p\xi = 0$, отвечающих наибольшему и наименьшему коэффициентам $k_p$ (рис. 34). Функция $H(\xi)$

определяется здесь так:

$$H(\xi) = \max_i (-\xi k_i).$$

В качестве второго примера рассмотрим двумерные уравнения теории упругости:

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y}, \qquad (\sigma_{12} = \sigma_{21})$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} = \left(K + \frac{4}{3}\mu\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} = \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(K + \frac{4}{3}\mu\right)\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

В этой системе уравнений $\rho_0$ — плотность среды, $u$, $v$ — компоненты вектора скорости перемещения, $\sigma_{ik}$ — компоненты тензора напряжений. Постоянные положительные коэффициенты $K$ и $\mu$ называются соответственно *модулем всестороннего сжатия* и *модулем сдвига*. Вывод уравнений теории упругости имеется в курсе механики сплошных сред.

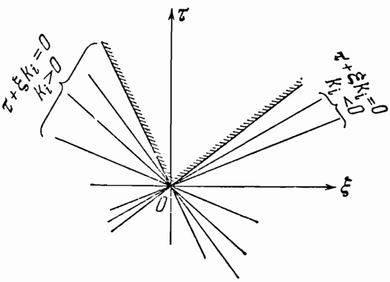

Рис. 34.

Выписанная система не имеет симметрической формы и поэтому неудобна для наших целей. Поделим последнее уравнение на $\mu$, а вместо третьего и четвертого возьмем некоторые их линейные комбинации.

После этих преобразований уравнения упругих волн запишутся в следующей окончательной форме:

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} = 0,$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial\left[\dfrac{3K+4\mu}{4\mu(3K+\mu)}\sigma_{11} - \dfrac{3K-2\mu}{4\mu(3K+\mu)}\sigma_{22}\right]}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial\left[-\dfrac{3K-2\mu}{4\mu(3K+\mu)}\sigma_{11} + \dfrac{3K+4\mu}{4\mu(3K+\mu)}\sigma_{22}\right]}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Эта система уже является симметрической системой вида

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

В этом легко убедиться, если, обозначив $u_1=u$, $u_2=v$, $u_3=u_4=\sigma_{22}$, $u_5=\sigma_{12}$, выписать матрицы $A$, $B$, $C$:

$$A=\begin{pmatrix} \rho_0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \rho_0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{3K+4\mu}{4\mu(3K+\mu)} & -\dfrac{3K-2\mu}{4\mu(3K+\mu)} & 0\\ 0 & 0 & -\dfrac{3K-2\mu}{4\mu(3K+\mu)} & \dfrac{3K+4\mu}{4\mu(3K+\mu)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{\mu}\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Уравнение $\det\|\tau A+\xi B+\eta C\|=0$ для этой системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} \tau\rho_0 & 0 & -\xi & 0 & -\eta\\ 0 & \tau\rho_0 & 0 & -\eta & -\xi\\ -\xi & 0 & \tau\dfrac{3K+4\mu}{4\mu(3K+\mu)} & -\tau\dfrac{3K-2\mu}{4\mu(3K+\mu)} & 0\\ 0 & -\eta & -\tau\dfrac{3K-2\mu}{4\mu(3K+\mu)} & \tau\dfrac{3K+4\mu}{4\mu(3K+\mu)} & 0\\ -\eta & -\xi & 0 & 0 & \dfrac{\tau}{\mu}\end{vmatrix}=0.$$

Замечая, что

$$\tau\frac{3K+4\mu}{4\mu(3K+\mu)}+\tau\frac{3K-2\mu}{4\mu(3K+\mu)}=\frac{1}{2}\frac{\tau}{\mu},$$

и вводя обозначения

$$\omega=\rho_0\tau,\quad a=\tau\frac{3K+4\mu}{4\mu(3K+\mu)},\quad b=\tau\frac{3K-2\mu}{4\mu(3K+\mu)},$$

мы перепишем это уравнение менее громоздко:

$$\begin{vmatrix} \omega & 0 & -\xi & 0 & -\eta\\ 0 & \omega & 0 & -\eta & -\xi\\ -\xi & 0 & a & -b & 0\\ 0 & -\eta & -b & a & 0\\ -\eta & -\xi & 0 & 0 & 2(a+b)\end{vmatrix}=0,$$

а затем раскроем определитель:

$$[a(\xi^2+\eta^2)-\omega(a^2-b^2)][\xi^2+\eta^2-2\omega(a+b)]=0. \tag{1}$$

Выражение для определителя может быть получено прямым (довольно громоздким) вычислением. Значительного упрощения выкладки можно добиться, заметив, что система уравнений инвариантна относительно вращения и поэтому естественно ожидать, что определитель зависит от переменных $\xi$ и $\eta$ простым образом: он зависит лишь от $\xi^2+\eta^2$. Полагая в определителе $\eta=0$ и разлагая его по второй и четвертой строкам, получаем равенство

$$[-\xi^2+2\omega(a+b)]\begin{vmatrix} \omega & -\xi & 0 \\ -\xi & a & -b \\ 0 & -b & a \end{vmatrix} =$$

$$=[-\xi^2+2\omega(a+b)][\omega(a^2-b^2)-a\xi^2]=0.$$

Заменяя теперь $\xi^2$ на $\xi^2+\eta^2$, приходим к равенству (1).

Теперь можно вернуться к первоначальным обозначениям и написать

$$\det\|\tau A+\xi B+\eta C\|=$$

$$=\frac{\rho_0^2}{4\mu^2\left(K+\frac{1}{3}\mu\right)}\tau\left[\tau^2-\frac{K+\frac{4}{3}\mu}{\rho_0}(\xi^2+\eta^2)\right]\left[\tau^2-\frac{\mu}{\rho_0}(\xi^2+\eta^2)\right]=0.$$

Это уравнение определяет плоскость $\tau=0$ и два конуса:

$$\tau^2-\frac{K+\frac{4}{3}\mu}{\rho_0}(\xi^2+\eta^2)=0,$$

$$\tau^2-\frac{\mu}{\rho_0}(\xi^2+\eta^2)=0.$$

Эти конусы и плоскость $\tau=0$ изображены на рис. 35. Внутренней полой конуса, содержащей вектор $\tau=1$, $\xi=0$, $\eta=0$, будет верхняя пола конуса

$$\tau^2-\frac{K+\frac{4}{3}\mu}{\rho_0}(\xi^2+\eta^2)=0.$$

Это значит, что матрицы $\tau A+\xi B+\eta C$ будут неотрицательно определены, если

$$\tau-\sqrt{\frac{K+\frac{4}{3}\mu}{\rho_0}}\sqrt{\xi^2+\eta^2}\geqslant 0.$$

Функцию $H(\xi, \eta)$ здесь надо определить равенством

$$H(\xi, \eta) = -\sqrt{\frac{K+\frac{4}{3}\mu}{\rho_0}}\sqrt{\xi^2+\eta^2}.$$

Мне кажется, что эти примеры достаточно проиллюстрировали структуру и способ определения множества векторов, отвечающих неотрицательно определенным матрицам $\tau A+\xi B+\eta C$.

В заключение сделаем еще одно замечание. До сих пор мы изучали форму $\tau(Au, u)+\xi(Bu, u)+\eta(Cu, u)$ в некоторой фиксированной точке $(x_0, y_0, t_0)$. Если матрицы коэффициентов $A$, $B$, $C$ — переменные, т. е. зависят от точки $(x, y, t)$, то и конус векторов $(\tau, \xi, \eta)$, связанных с неотрицательно определенными формами, будет в каждой точке свой. Поэтому мы должны писать его уравнение в виде

$$\tau+H(\xi, \eta, x, y, t)\geqslant 0.$$

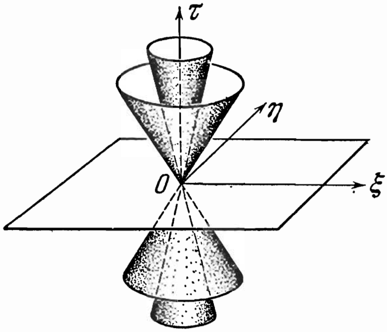

Рис. 35.

Функция $H$ и здесь — однородная первой степени по переменным $\xi$, $\eta$ и, следовательно, если она дифференцируема, $\xi H_\xi+\eta H_\eta=H$. Этим равенством мы воспользуемся в дальнейшем.

## § 14. Уравнение Гамильтона — Якоби

Неравенство и уравнение Гамильтона — Якоби. Схематическое описание приема интегрирования этого уравнения. Бихарактеристики и канонические уравнения Гамильтона для их построения. Конус характеристических нормалей для уравнений акустики и уравнения Гамильтона — Якоби для этой системы. Описание областей единственности для нее. Конус характеристик и конус характеристических нормалей. Пример: уравнения акустики.

В этом параграфе мы подведем итог в рассмотрении вопроса об области единственности для решений симметрических гиперболических систем.

Пусть некоторая область ограничена снизу плоскостью $t=0$, а сверху «шапочкой» $\varphi(x, y, t)=0$ $(\operatorname{grad}\varphi\neq 0)$. Предположим, что внутри области $\varphi<0$, а вне ее $\varphi>0$. Итак, мы рассматриваем область, высеченную неравенствами $\varphi<0$, $t>0$. Эта область предполагается ограниченной. Внешняя нормаль к «шапочке» $\varphi=0$ направлена вдоль вектора — градиента $(\varphi_t, \varphi_x, \varphi_y)$. Если $(\tau, \xi, \eta)$ — единичный вектор внешней нормали, то

$$k\tau=\varphi_t,\quad k\xi=\varphi_x,\quad k\eta=\varphi_y,\quad k>0.$$

Если мы хотим, чтобы форма $\tau(Au, u)+\xi(Bu, u)+\eta(Cu, u)$ была неотрицательно определенной, нам надо, как мы уже знаем, потребовать, чтобы

$$\tau+H(\xi, \eta, x, y, t)\geqslant 0.$$

Умножим левую часть неравенства на положительное $k$ и воспользуемся однородностью (первой степени) функции $H$:

$$k\tau+H(k\xi, k\tau, x, y, t)\geqslant 0.$$

Иными словами, уравнение поверхности $\varphi(x, y, t)\geqslant 0$ должно задаваться функцией $\varphi$, удовлетворяющей неравенству

$$\varphi_t+H(\varphi_x, \varphi_y, x, y, t)\geqslant 0.$$

Это неравенство называется неравенством Гамильтона — Якоби. Среди всех поверхностей, удовлетворяющих этому неравенству, особую роль играют поверхности, для которых функция $\varphi$ удовлетворяет равенству $\varphi_t+H(\varphi_x, \varphi_y, x, y, t)=0$. Это равенство называется *уравнением Гамильтона — Якоби*. Заметим еще раз, что если взять по поверхности $\varphi=\text{const}$, связанной этим уравнением, интеграл

$$\int\int[(\tau A+\xi B+\eta C)u, u]\,ds,$$

то этот интеграл будет неотрицательным.

Отметим еще тот факт, что при получении оценок для производных мы расширяли изучаемую систему до системы, матрицы коэффициентов при производных у которой принимали клеточный вид

$$\begin{pmatrix} A & & & 0\\ & A & & \\ & & A & \\ 0 & & & A\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} B & & & 0\\ & B & & \\ & & B & \\ 0 & & & B\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} C & & & 0\\ & C & & \\ & & C & \\ 0 & & & C\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что условия неотрицательной определенности расширенной матрицы

$$\tau\begin{pmatrix} A & & & 0\\ & A & & \\ & & A & \\ 0 & & & A\end{pmatrix}+\xi\begin{pmatrix} B & & & 0\\ & B & & \\ & & B & \\ 0 & & & B\end{pmatrix}+\eta\begin{pmatrix} C & & & 0\\ & C & & \\ & & C & \\ 0 & & & C\end{pmatrix}$$

совпадают с условиями неотрицательной определенности матрицы $\tau A+\xi B+\eta C$.

В свое время мы определили понятие характеристики как такой поверхности, для которой вектор нормали $(\tau, \xi, \eta)$ удовлетворяет уравнению $\det\|\tau A+\xi B+\eta C\|=0$. Равенство $\tau+H=0$ дает только часть решений этого уравнения. *Равенство* $\det\|\tau A+$ $+\xi B+\eta C\|=0$ *определяет некоторый конус — конус характеристических нормалей. Уравнение Гамильтона — Якоби выделяет из* *этого конуса только одну полу, а именно полу, охватывающую положительную полуось* $\tau$.

Способы интегрирования уравнения Гамильтона — Якоби изучаются в курсе теоретической механики. Сейчас я очень коротко остановлюсь на процедуре получения решения (существование и гладкость которого, равно как и гладкость функции $H$, предполагаются), чтобы использовать эту процедуру при разборе важного примера.

Наряду с уравнением $\varphi_t + H(\varphi_x, \varphi_y, x, y, t) = 0$ рассмотрим равенства, получающиеся из него дифференцированием по $x$ и по $y$:

$$\frac{\partial\varphi_x}{\partial t} + H_{\varphi_x}\frac{\partial\varphi_x}{\partial x} + H_{\varphi_y}\frac{\partial\varphi_y}{\partial x} + H_x = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi_y}{\partial t} + H_{\varphi_x}\frac{\partial\varphi_x}{\partial y} + H_{\varphi_y}\frac{\partial\varphi_y}{\partial y} + H_y = 0.$$

Заметив теперь, что $\dfrac{\partial\varphi_x}{\partial y} = \dfrac{\partial\varphi_y}{\partial x}$, перепишем их так:

$$\frac{\partial\varphi_x}{\partial t} + H_{\varphi_x}\frac{\partial\varphi_x}{\partial x} + H_{\varphi_y}\frac{\partial\varphi_x}{\partial y} + H_x = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi_y}{\partial t} + H_{\varphi_x}\frac{\partial\varphi_y}{\partial x} + H_{\varphi_y}\frac{\partial\varphi_y}{\partial y} + H_y = 0.$$

Само исходное уравнение

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + H(\varphi_x, \varphi_y, x, y, t) = 0,$$

воспользовавшись тождеством $H(\varphi_x, \varphi_y, x, y, t) = \varphi_x H_{\varphi_x} + \varphi_y H_{\varphi_y}$ (однородность $H$ по $\varphi_x$, $\varphi_y$ первой степени), можно переписать так:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + H_{\varphi_x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + H_{\varphi_y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$$

Систему

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + H_{\varphi_x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + H_{\varphi_y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi_x}{\partial t} + H_{\varphi_x}\frac{\partial\varphi_x}{\partial x} + H_{\varphi_y}\frac{\partial\varphi_x}{\partial y} + H_x = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi_y}{\partial t} + H_{\varphi_x}\frac{\partial\varphi_y}{\partial x} + H_{\varphi_y}\frac{\partial\varphi_y}{\partial y} + H_y = 0$$

нетрудно проинтегрировать методом характеристик, который изучается в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Обозначим $q_1=x$, $q_2=y$, $\varphi_x=p_1$, $\varphi_y=p_2$ и перепишем систему еще раз:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+H_{p_1}(p_1, p_2, q_1, q_2, t)\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}+H_{p_2}(p_1, p_2, q_1, q_2, t)\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}=0,$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t}+H_{p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_1}+H_{p_2}\frac{\partial p_1}{\partial q_2}+H_{q_1}=0,$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t}+H_{p_1}\frac{\partial p_2}{\partial q_1}+H_{p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q_2}+H_{q_2}=0.$$

Рассмотрим характеристики этой системы:

$$\frac{dq_1}{dt}=H_{p_1}.\quad \frac{dq_2}{dt}=H_{p_2}.$$

Вдоль этих характеристик

$$\frac{dp_1}{dt}=\frac{\partial p_1}{\partial t}+H_{p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_1}+H_{p_2}\frac{\partial p_1}{\partial q_2}=-H_{q_1},\quad \frac{dp_2}{dt}=-H_{q_2}.$$

Кроме того, опять же вдоль характеристик

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+H_{p_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}+H_{p_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}=0.$$

Итак, если мы знаем, что в некоторой окрестности плоскости $t=0$ точнее, в некоторой окрестности определенной области на этой плоскости) существует решение $\varphi(x, y, t)$ уравнения Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+H\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, x, y, t\right)=0,$$

принимающие при $t=0$ начальные значения $\varphi(x, y, 0)=\varphi_0(x, y)$, то мы можем построить это решение так.

Через каждую точку $(x, y)$ нашей области на плоскости $t=0$ проведем характеристику, определяемую начальными данными

$$q_{10}=x\,|_{t=0},\quad q_{20}=y\,|_{t=0},$$

$$p_{10}=\frac{\partial\varphi_0}{\partial x},\quad p_{20}=\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}$$

и уравнениями

$$\frac{dp_i}{dt}=-H_{q_i},\quad \frac{dq_i}{dt}=H_{p_i}$$

(канонические уравнения Гамильтона). Траектории этих уравнений

$$x=q_1=q_1(t, q_{10}, q_{20});\quad y=q_2=q_2(t, q_{10}, q_{20})$$

заполняют некоторую окрестность нашей области, заданной при $t=0$. Вдоль каждой из этих траекторий $\varphi=\varphi(q_{10}, q_{20})=\varphi_0(q_{10}, q_{20})$ не зависит от $t$. Из уравнений $x=q_1(t, q_{10}, q_{20})$, $y=q_2(t, q_{10}, q_{20})$

по заданным $x$, $y$, $t$ могут быть определены $q_{10}$, $q_{20}$, а следовательно, и значения $\varphi$.

Провести по описанной схеме доказательство существования решения не слишком сложно, но громоздко и кропотливо. Аккуратно такое доказательство, даже для более общего случая, проведено в книге И. Г. Петровского «Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений». Мы ограничимся только приведенной схемой и перейдем к рассмотрению примеров.

Отметим только, что характеристики уравнения $\varphi_t = H(\varphi_x, \varphi_y, x, y, t) = 0$, в свою очередь описывающего характеристическую поверхность некоторой системы, называются *бихарактеристиками*.

Выпишем уравнение Гамильтона — Якоби для симметрической системы, описывающей распространение звуковых волн в движущейся среде,

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \rho_0 U \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \rho_0 U \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{U}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Здесь $u + U$, $v$ — компоненты скорости ($u \ll U$, $v \ll U$), $p$ — возмущение давления. Если положить $t' = t$, $x' = x - Ut$, $y' = y$ (т. е. перейти к движущимся со скоростью $U$ координатам), эта система перейдет в уже известную нам систему уравнений акустики:

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t'} + \frac{\partial p}{\partial x'} = 0,$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t'} + \frac{\partial p}{\partial y'} = 0,$$

$$\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t'} + \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} = 0.$$

Уравнение $\det \| \tau A + \xi B + \eta C \| = 0$ для уравнений звука в движущейся среде имеет вид

$$\begin{vmatrix} \rho_0 (\tau + U\xi) & 0 & \xi \\ 0 & \rho_0 (\tau + U\xi) & \eta \\ \xi & \eta & \dfrac{1}{\rho_0 c_0^2} (\tau + U\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем равенство

$$\frac{\rho_0}{c_0^2} (\tau + U\xi) \left[ (\tau + U\xi)^2 - c_0^2 (\xi^2 + \eta^2) \right] = 0.$$

Конус характеристических нормалей для этой системы распадается на плоскость

$$\tau + U\xi = 0$$

и конус второго порядка

$$(\tau + U\xi)^2 - c_0^2(\xi^2 + \eta^2) = 0.$$

Таким образом, конус характеристических нормалей разбивает все пространство $\tau$, $\xi$, $\eta$ на четыре части:

I. $$\tau + U\xi > c_0\sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

II. $$c_0\sqrt{\xi^2 + \eta^2} > \tau + U\xi > 0,$$

III. $$0 > \tau + U\xi > -c_0\sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

IV. $$-c_0\sqrt{\xi^2 + \eta^2} > \tau + U\xi.$$

Вектор $\tau = 1$, $\xi = 0$, $\eta = 0$, очевидно, принадлежит области I: $\{\tau + U\xi > c_0\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\}$. Именно в этой области лежат векторы $(\tau, \xi, \eta)$, отвечающие положительно определенным энергетическим формам.

Если $|U| < c_0$, то для векторов этой области

$$\tau > c_0\sqrt{\xi^2 + \eta^2} - U\xi \geqslant \geqslant (c_0 - |U|)|\xi| \geqslant 0.$$

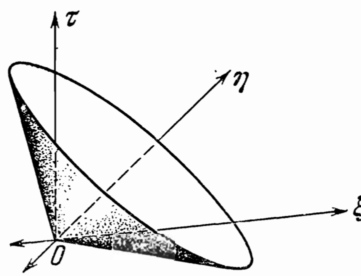

Рис. 36.

Вся эта область при этом лежит в полупространстве $t > 0$. Если же $|U| > c_0$, то область $\tau > c_0\sqrt{\xi^2 + \eta^2} - U\xi$ уже пересекается с полупространством $\tau < 0$. Ее расположение в этом случае изображено на рис. 36 ($U > 0$).

Уравнение Гамильтона — Якоби, отвечающее нашей системе, имеет вид

$$\varphi_t + U\varphi_x - c_0\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} = 0,$$
$$\left(H(\xi, \eta) = U\xi - c_0\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right).$$

В покоящемся газе ($U = 0$) оно упрощается:

$$\varphi_t + H(\varphi_x, \varphi_y) = \varphi_t - c_0\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} = 0.$$

Построим сначала характеристики для этого простейшего случая $\left(H(\xi, \eta) = -c_0\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right)$. Пусть неравенство $\varphi_0(x, y) < 0$ определяет на плоскости $x$, $y$ некоторую область, изображенную на рис. 37. Кривая $\varphi_0(x, y) = 0$ является ее границей. Постараемся построить функцию $\varphi = \varphi(x, y, t)$ такую, чтобы $\varphi(x, y, 0) = \varphi_0(x, y)$ и чтобы она удовлетворяла уравнению Гамильтона — Якоби

$$\varphi_t - c_0\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} = 0.$$

Мы будем сейчас интересоваться лишь тем, как с течением времени меняется граница области $\varphi<0$, т. е. как движется линия $\varphi(x, y, t)=0$ при изменении $t$. Возьмем какую-либо точку $(x_0, y_0)$ на линии $\varphi_0=0$ и определим в ней

$$q_{10}=x_0, \quad q_{20}=y_0, \quad p_{10}=\varphi_{0_x}, \quad p_{20}=\varphi_{0_y}.$$

Очевидно, что вектор $(p_{10}, p_{20})$ направлен по внешней нормали к кривой $\varphi_0=0$. Выпишем уравнения бихарактеристики, проходящей через точку $(x_0, y_0)\left(H=-c_0\sqrt{p_1^2+p_2^2}\right)$,

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dq_1}{dt}=H_{p_1}=-c_0\frac{p_1}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}, \quad \frac{dp_1}{dt}=-H_{q_1}=0,$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dq_2}{dt}=H_{p_2}=-c_0\frac{p_2}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}, \quad \frac{dp_2}{dt}=-H_{p_2}=0.$$

Из этих уравнений видно, что вдоль бихарактеристики $p_1$, $p_2$ будут постоянны, а следовательно, будет постоянен и вектор скорости движения $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ вдоль бихарактеристики. Этот вектор

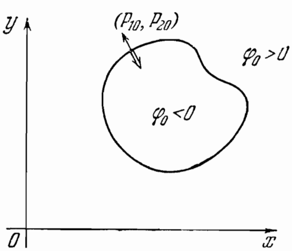


Рис. 37.

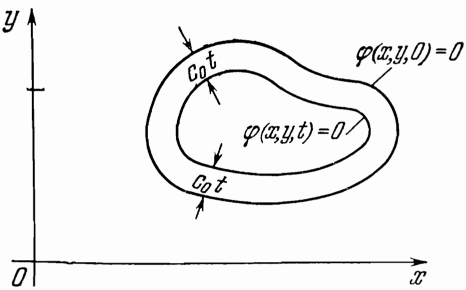


Рис. 38.

направлен по той же прямой, что и $(p_1, p_2)$, но в обратную сторону, а его модуль равен

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=c_0.$$

Итак, двигаясь по бихарактеристике, мы будем смещаться внутрь области $\varphi_0<0$ по нормали к ее границе с постоянной скоростью $c_0$. Напомним, что вдоль бихарактеристик

$$\varphi(x, y, t)=\text{const}=0.$$

На рис. 38 изображено, куда сместится граница $\varphi(x, y, t)=0$ за небольшое время $t$.

Вспомним теперь теорему единственности, которую мы изучали. По этой теореме начальные данные, известные нам при $t=0$

в области $\varphi(x, y, t)<0$, однозначно определяют решение для $t>0$ в области $\varphi(x, y, t)<0$. Почему с ростом $t$ на нашем рисунке эта область уменьшает свои размеры? Вспоминая, что скорость движения границы этой области носит название «скорость звука», мы можем дать этому факту следующее нестрогое, но по существу правильное, наглядное истолкование. То, что мы знаем начальные данные внутри области $\varphi(x, y, 0)<0$, еще не значит, что они не существуют при $\varphi(x, y, 0)>0$. Просто они нам там неизвестны. Влияние этих начальных данных распространяется со скоростью звука $c_0$. В каждый момент времени $t$ линия $\varphi(x, y, t)=$ $=0$ разделяет области, до которой дошло и до которой не дошло влияние неизвестных нам начальных данных. Поэтому ничего удивительного в том, что граница $\varphi(x, y, t)=0$ движется внутрь области $\varphi<0$ со скоростью $c_0$, нет. Более того, пользуясь этим наглядным истолкованием, нетрудно понять, как меняется с течением времени $t$ область единственности и в случаях, когда граница начальной области $\varphi_0(x, y)=0$ имеет изломы.

Уравнение Гамильтона — Якоби

$$\varphi_t-c_0\sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2}=0$$

имеет, например, следующие решения, являющиеся линейными функциями $x$, $y$, $t$:

$$\varphi=c_0t+\alpha x+\beta y+\gamma \quad (\alpha^2+\beta^2=1).$$

В частности, такими решениями будут

$$\begin{aligned}
\varphi_1&=\varphi_1(x, y, t)=c_0t-x-3,\\
\varphi_2&=\varphi_2(x, y, t)=c_0t+x,\\
\varphi_3&=\varphi_3(x, y, t)=c_0t+y,\\
\varphi_4&=\varphi_4(x, y, t)=c_0t-y-1.
\end{aligned}$$

Кусочно гладкая функция

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y, t)&=\min(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)=\\
&=\min[c_0t-x-3,\ c_0t+x,\ c_0t+y,\ c_0t-y-1]
\end{aligned}$$

в каждой области гладкости будет решением уравнения

$$\varphi_t=c_0\sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2}.$$

Поэтому, если в этих областях гладкости направить единичный вектор $(\tau, \xi, \eta)$ по внешней нормали к границе области $\varphi<0$, мы будем иметь, что

$$\iint\limits_{\varphi=0}[\tau(Au, u)+\xi(Bu, u)+\eta(Cu, u)]\,ds\geqslant 0,$$

(Этот интеграл можно разбить на сумму интегралов по областям гладкости поверхности $\varphi=0$).

Область $\varphi<0$, $t>0$ является областью единственности для уравнений акустики. Рассмотрим ее внимательнее. Неравенство $\varphi(x, y, 0)<0$ выделяет на плоскости $t=0$ прямоугольник $-3<x<0$, $-1<y<0$, изображенный на рис. 39. При увеличении $t$ граница $\varphi=0$ будет перемещаться внутрь первоначального прямоугольника. Нормальная скорость этого перемещения равна $c_0$. На рисунке видно, как с течением времени область $\varphi<0$ уменьшается. При $t=\frac{1}{2c_0}$ горизонтальные границы схлопнутся и, начиная с этого времени, область $\varphi<0$ перестанет существовать.

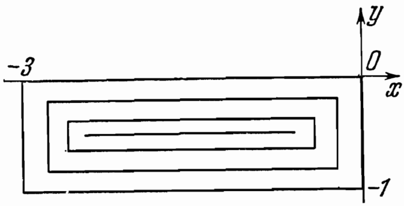

Рис. 39.

Если изобразить эту область в пространстве $x$, $y$, $t$, то она выглядит как насыпь (рис. 40). Начальные данные, заданные на основании этой насыпи, определяют единственное решение всюду внутри нее. Боковые грани насыпи, ограничивающие область единственности, являются характеристиками уравнений акустики. Не все характеристики годятся для ограничения области единственности — надо, чтобы нормали к ним принадлежали к границе конуса положительно определенных форм. Уравнение Гамильтона — Якоби выделяет именно такие характеристики.

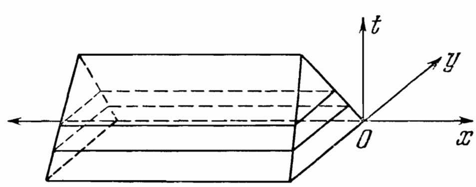

Рис. 40.

Вот еще важный пример области единственности для той же системы. Пусть теперь область задания начальных данных представляет собой круг $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant R$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x, y, t)=\sqrt{x^2+y^2}+c_0t-R.$$

Эта функция удовлетворяет уравнению

$$\varphi_t-c_0\sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2}=0$$

и начальным данным

$$\varphi(x, y, 0)=\sqrt{x^2+y^2}-R$$

($\varphi(x, y, 0) < 0$ внутри круга). Поэтому поверхность

$$\sqrt{x^2+y^2}+c_0t-R=0$$

представляет собой границу области единственности (рис. 41). Эта граница является конической поверхностью с вершиной в точке $x=0$, $y=0$, $t=\frac{R}{c_0}$. Для $t>\frac{R}{c_0}$ эта поверхность $\sqrt{x^2+y^2}+$

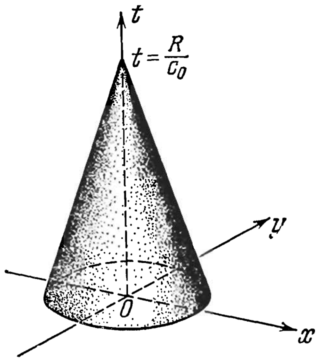


Рис. 41.

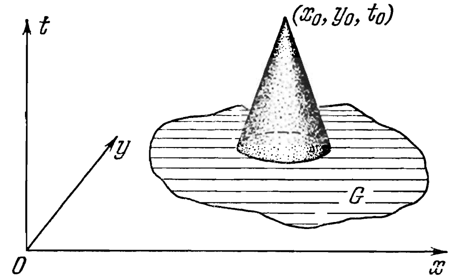


Рис. 42.

$+c_0t-R=0$ перестает существовать. На границе существования она имеет особую точку — вершину конуса.

Ясно, что геометрически картина не изменится, если центр круга будет расположен не в начале координат, а в произвольной точке $(x_0, y_0)$. Это позволяет нам сказать, что решение при некотором $t=t_0$ в точке $(x_0, y_0)$ зависит лишь от начальных данных при $t=0$ в области $G$, если характеристический конус $(x-x_0)^2+$ $+(y-y_0)^2-c_0^2(t-t_0)^2=0$ (точнее, его пола при $t<t_0$) опирается при $t=0$ на круг, целиком лежащий в области $G$ (рис. 42).

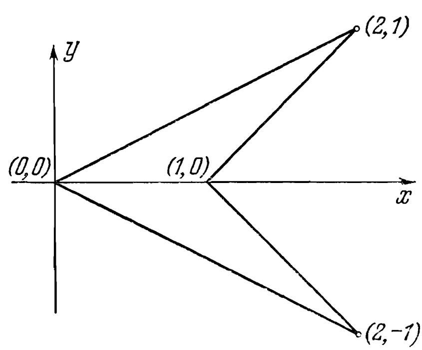


Рис. 43.

Полная область единственности будет объединением таких (характеристических) конусов, опирающихся своим основанием на область $G$.

З а д а ч а. Опишите структуру области единственности для случая, когда начальные данные для той же системы заданы в области, изображенной на рис. 43. В скобках около вершин многоугольника поставлены координаты $(x, y)$ этих вершин.

В свое время, давая определение характеристической поверхности, мы ее определили как поверхность, вектор $(\tau, \xi, \eta)$ нормали к которой лежит на конусе характеристических нормалей

$$\det \| \tau A + \xi B + \eta C \| = 0.$$

Пусть вектор $(\tau, \xi, \eta)$ пробегает такой конус. Сопоставим каждому такому вектору перпендикулярную к нему плоскость

$$\tau (t - t_0) + \xi (x - x_0) + \eta (y - y_0) = 0.$$

Когда $(\tau, \xi, \eta)$ пробегает конус характеристических нормалей, эти плоскости огибают некоторый другой конус. Ясно, что если поверхность имеет нормаль, лежащую на конусе характеристических нормалей, то она сама касается одной из плоскостей

$$\tau (t - t_0) + \xi (x - x_0) + \eta (y - y_0) = 0$$

и огибаемого ими конуса. Этот последний носит название *конуса характеристик*.

Проиллюстрируем понятие конуса характеристик на примере уравнений звука в движущемся газе. Конус характеристических нормалей для этих уравнений задается, как мы видели, равенством

$$(\tau + U\xi) [(\tau + U\xi)^2 - c_0^2 (\xi^2 + \eta^2)] = 0.$$

Плоскости $\tau (t - t_0) + \xi (x - x_0) + \eta (y - y_0) = 0$, ортогональные векторам $(\tau, \xi, \eta)$, связанным равенством $\tau + U\xi = 0$, проходят через прямую $x - Ut = x_0 - Ut_0$, $y = y_0$, что видно из тождества

$$\tau (t - t_0) + \xi (x - x_0) + \eta (y - y_0) = - U\xi (t - t_0) + \xi (x - x_0) + \\ + \eta (y - y_0) = \xi [x - Ut - (x_0 - Ut_0)] + \eta (y - y_0) = 0.$$

Эта прямая и является «конусом», который получается как огибающая плоскостей, нормаль к которым лежит на плоскости $\tau + U\xi = 0$.

Если $(\tau, \xi, \eta)$ пробегают конус $(\tau + U\xi)^2 - c_0^2 (\xi^2 + \eta^2) = 0$, то нормальные к ним плоскости огибают конус

$$\varphi (x, y, t) = c_0^2 (t - t_0)^2 - [(x - Ut) - (x_0 - Ut_0)]^2 - (y - y_0)^2 = 0.$$

В этом легко убедиться, проверив прямым вычислением, что $\varphi (x, y, t)$ удовлетворяет уравнению

$$(\varphi_t + U\varphi_x)^2 - c_0^2 (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) = 0.$$

Итак, для уравнений распространения звука конус характеристических нормалей состоит из плоскости

$$\tau + U\xi = 0$$

и из конуса

$$(\tau + U\xi)^2 - c_0^2 (\xi^2 + \eta^2) = 0,$$

тогда как конус характеристик распадается на прямую $x-Ut=$ $=x_0-Ut_0$, $y=y_0$ и на конус

$$c_0^2(t-t_0)^2-[(x-Ut)-(x_0-Ut_0)]^2-(y-y_0)^2=0.$$

Расположение конуса характеристик с вершиной в начале координат $x_0=0$, $y_0=0$, $t_0=0$ изображено на рис. 44 в дозвуковом ($|U|<c_0$), а на рис. 45 — в сверхзвуковом ($|U|>c_0$) случаях. Конус характеристик для рассматриваемых уравнений (точнее, одна из его пол) всегда расположен в верхнем полупространстве

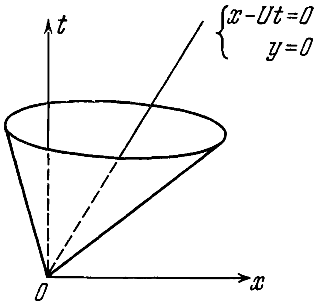


Рис. 44.

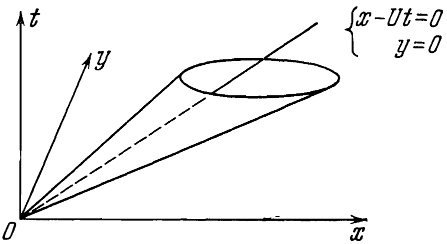


Рис. 45.

и содержит ось $t$ только в дозвуковом случае. (Сравните рисунки конуса характеристик с рисунком конуса характеристических нормалей, который рассматривался в начале этого параграфа: рис. 36, сверхзвуковой случай.)

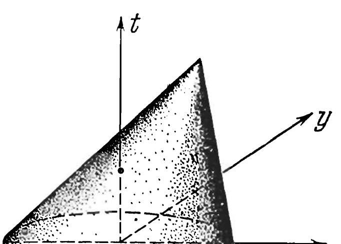


Рис. 46.

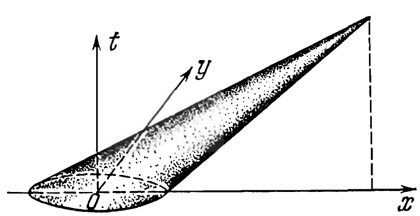


Рис. 47.

В заключение приведем область единственности для уравнений звука в движущемся газе, если начальные данные заданы при $\varphi(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}-R<0$, т. е. внутри круга радиуса $R$ с центром в начале координат. Решение уравнения Гамильтона — Якоби

$$\varphi_t+U\varphi_x-c_0\sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2}=0$$

с начальным условием

$$\varphi(x,\ y,\ 0)=\sqrt{x^2+y^2}-R$$

дается формулой

$$\varphi(x,\ y,\ t)=\sqrt{(x-Ut)^2+y^2}+c_0t-R.$$

Поверхность

$$\sqrt{(x-Ut)^2+y^2}+c_0t-R=0,$$

ограничивающая нужную нам область единственности, представляет собой одну полу характеристического конуса с вершиной в точке

$$t_0=\frac{R}{c_0},\quad x_0=Ut_0=\frac{UR}{c_0},\quad y_0=0.$$

Расположение области единственности в пространстве $x$, $y$, $t$ изображено на рисунках 46 (дозвуковой случай) и 47 (сверхзвуковой случай).

## § 15. Постановка смешанной задачи для гиперболической системы

Обсуждение (на примере) постановки граничных условий для гиперболической системы. Число условий, которое надо задавать на той или иной границе для однозначной разрешимости задачи. Условия согласования начальных данных и граничных условий (на примере). Диссипативные граничные условия. Возможность такого приведения гиперболической системы к каноническому виду, чтобы граничные условия стали диссипативными. Смешанная задача для уравнений акустики в двумерном пространстве и ее приведение к диссипативному виду.

В ближайших параграфах мы будем изучать способы получения оценок решений и теорему единственности для гиперболических систем в случае, когда решаемая задача не является задачей Коши. Мы покажем, что кроме начальных данных разумно иногда задавать еще и некоторые граничные условия.

Например, решая уравнение $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$ при $x>0$ мы можем задавать значения $u$ не только при $t=0$, но и на некотором отрезке оси $t$ $(x=0)$. При этом решение $u=f(x-t)$ определится во всех точках плоскости $x$, $t$, через которые проходят характеристики, пересекающиеся с областью задания начальных данных и граничных условий. Если решение имеет смысл разыскивать только при $x>0$, $t>0$, то его область определения будет иметь вид, изображенный на рис. 48. С этим примером мы встречались в § 5. Гладкие начальные данные

$$u(x,\ 0)=\varphi(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant L,$$
$$u(0,\ t)=\psi(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant T$$

должны, конечно, удовлетворять условию согласования $\varphi(0)=\psi(0)$, чтобы решение $u(x, t)$ было непрерывным на характеристике $x-t=0$. Так как, в силу уравнения, $\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial u}{\partial x}$, то для непрерывности производных в точке $(0, 0)$ надо потребовать равенство $\psi'(0)=-\varphi'(0)$.

Если мы знаем, что $u(x, t)$ два раза непрерывно дифференцируема, то $\varphi(x)$, $\psi(t)$ удовлетворяют еще равенству $\varphi''(0)-\psi''(0)=0$. В самом деле, для решений выполнены равенства:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0.$$

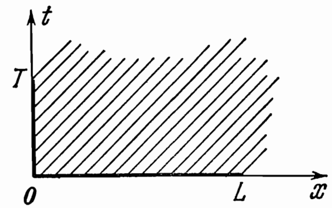


Рис. 48.

Разность левых частей этих равенств

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0.$$

Это равенство, рассмотренное в точке $x=0$, $t=0$, как раз и превращается в сформулированное условие $\varphi''(0)-\psi''(0)=0$.

Задача. Выведите условия согласования в точке $x=0$, $t=0$ производных третьего и четвертого порядков от начальных и граничных данных. Напомним, что изучаются такие решения уравнения $u_t+u_x=0$, для которых $u(x, 0)=\varphi(x)$, $u(0, t)=\psi(t)$.

Чем большую гладкость решения мы хотим получить, тем более жесткие условия согласования на начальные данные и граничные условия мы должны накладывать. С условиями согласования нам придется иметь дело при доказательстве теоремы существования. При изучении теоремы единственности мы о них говорить, как правило, не будем. Нам достаточно предполагать, что та или иная задача имеет достаточно гладкое решение, а за счет какого согласования такая гладкость получается, нам пока не важно.

Чтобы понять, какие граничные условия надо ставить для тех или иных гиперболических систем, рассмотрим следующий пример.

Пусть в области $0\leqslant x\leqslant L$, $t\geqslant 0$ мы изучаем решения системы

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial u_1}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+2\frac{\partial u_2}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t}-\frac{\partial u_3}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial u_4}{\partial t}=0.$$

Эта система имеет два семейства характеристик с положительным наклоном:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1, \\ du_1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2, \\ du_2 = 0, \end{cases}$$

одно семейство с отрицательным наклоном

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -1, \\ du_3 = 0, \end{cases}$$

и одно — вертикальное

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0, \\ du_4 = 0. \end{cases}$$

Для определения функции $u_4$ достаточно ограничиться начальными данными

$$u_4(x, 0) = \varphi_4(x),$$

так как $u_4$ постоянна вдоль вертикальных характеристик. Эти характеристики изображены на рис. 49. Значения $u_1$ надо задавать

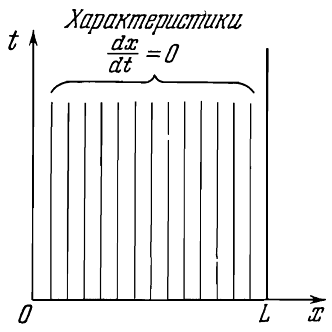


Рис. 49.

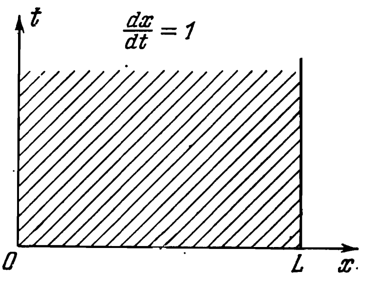


Рис. 50.

при $t = 0$ на отрезке $[0, 1]$ и на оси $t$ при $t > 0$. Из рис. 50, на котором изображены характеристики $\frac{dx}{dt} = 1$ (вдоль них $u_1$ постоянна), ясно, что начальные данные

$$u_1(x, 0) = \varphi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant L,$$
$$u_1(0, t) = \psi_1(t), \quad 0 \leqslant t,$$

определяют решение всюду в рассматриваемой области.

Аналогично, для определения $u_2(x, t)$ достаточно задать

$$u_2(x, 0) = \varphi_2(x), \qquad u_2(0, t) = \psi_2(t).$$

Функция $u_3(x, t)$ определяется по ее значениям на основании ($t=0$, $0 \leqslant x \leqslant L$) и на правой границе ($x=L$, $t \geqslant 0$) области. Это очевидно из чертежа (рис. 51), на котором изображены линии постоянства $u_3\left(\text{характеристики } \frac{dx}{dt} = -1\right)$. Полагаем $u_3(x, 0) = \varphi_3(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant L)$, $u_3(L, t) = \psi_3(t)$ $(t \geqslant 0)$.

Итак, мы видим, что решение системы в выбранной области полностью определяется следующими начальными и граничными условиями.

Начальные условия

$$\begin{matrix} u_1(x, 0) = \varphi_1(x), & u_2(x, 0) = \varphi_2(x), \\ u_3(x, 0) = \varphi_3(x), & u_4(x, 0) = \varphi_4(x) \end{matrix} \quad \text{при } t=0, \ 0 \leqslant x \leqslant L.$$

Граничные условия на левой границе

$$\begin{matrix} u_1(0, t) = \psi_1(t), \\ u_2(0, t) = \psi_2(t) \end{matrix} \quad \text{при } x=0, \ t \geqslant 0.$$

Граничные условия на правой границе

$$u_3(L, t) = \psi_3(t) \quad \text{при } x=L, \ t \geqslant 0.$$

На разных границах нам пришлось задавать разное число условий. На левой границе надо задавать столько условий, сколько у нашей системы характеристик с положительным наклоном $\frac{dx}{dt}$. По мере увеличения $t$ эти характеристики удаляются от левой границы, унося с нее значения соответствующих римановых инвариантов. Мы будем говорить, что для левой границы характеристики с положительным наклоном $\frac{dx}{dt} > 0$ «уходящие», а с отрицательным наклоном — «приходящие». Для правой границы характеристики с $\frac{dx}{dt} > 0$ — «приходящие», а с $\frac{dx}{dt} < 0$ — «уходящие».

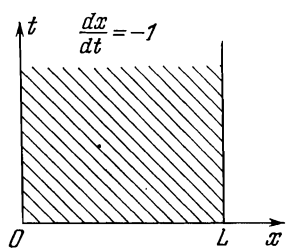


Рис. 51.

В разобранном примере нам пришлось на каждой границе поставить столько граничных условий, сколько на этой границе семейств «уходящих» с нее характеристик. Эти граничные условия могут иметь и несколько более сложный вид. Пусть, например,

$$\left.\begin{matrix} u_1 = \alpha_{13}u_3 + \alpha_{14}u_4 + \psi_1(t), \\ u_2 = \alpha_{23}u_3 + \alpha_{24}u_4 + \psi_2(t) \end{matrix}\right\} \text{ на левой границе,}$$

$$u_3 = \beta_{31}u_1 + \beta_{32}u_2 + \beta_{34}u_4 + \psi_3(t) \text{ — на правой границе,}$$

Задав эти граничные условия, а также указав начальные данные при $t=0$: $u_1(x, 0)=\varphi_1(x)$, $u_2(x, 0)=\varphi_2(x)$, $u_3(x, 0)=\varphi_3(x)$, $u_4(x, 0)=\varphi_4(x)$, выберем $T$ так, чтобы за время $T$ ни одна из характеристик не успела пересечь нашей полосы $0\leqslant x\leqslant L$ от одной границы до другой. Достаточно, чтобы

$$T\max\left|\frac{dx}{dt}\right|<\frac{L}{2}$$

$\left(\frac{dx}{dt}\right.$ — наклон характеристик$\left.\right)$. В системе уравнений нашего примера $\max\left|\frac{dx}{dt}\right|$ — максимальный наклон характеристик — равен 2. Поэтому можно выбрать

$$T=\frac{L}{8}=\frac{1}{2}\frac{\frac{L}{2}}{\max\left|\frac{dx}{dt}\right|}.$$

При $0\leqslant t\leqslant T$ значения $u_3$ на левой границе определяются только с помощью начальных данных, без использования каких-либо граничных условий. Это становится ясно, если обратиться к рис. 52, на котором изображены характеристики $\frac{dx}{dt}=-1$, вдоль которых $u_3$ постоянна.

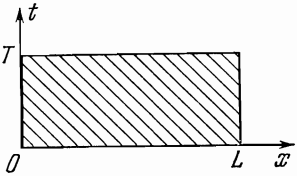


Рис. 52.

Для определения $u_4$ всюду в рассматриваемой области, в том числе и на левой границе, как мы уже отмечали, достаточно лишь начальных данных. Мы видим, что для $0\leqslant t\leqslant T$ при $x=0$ могут быть найдены $u_3(0, t)$, $u_4(0, t)$, а после этого вычислены их комбинации

$$\alpha_{13}u_3+\alpha_{14}u_4+\psi_1(t),$$
$$\alpha_{23}u_3+\alpha_{24}u_4+\psi_2(t).$$

Эти комбинации, в силу граничных условий, равны $u_1(0, t)$, $u_2(0, t)$.

Аналогично, на правой границе при $0\leqslant t\leqslant T$ только по начальным данным определятся значения $u_1$, $u_2$, которые «приносятся» на эту границу характеристиками с наклонами $\frac{dx}{dt}=1$, $\frac{dx}{dt}=2$. Начальными данными определяется и граничное значение $u_4$. Это дает возможность по формуле

$$u_3=\beta_{31}u_1+\beta_{32}u_2+\beta_{34}u_4+\psi_4(t)$$

вычислить $u_3$.

Определив на левой границе $u_1$, $u_2$, а на правой $u_3$, мы свели задачу к уже разобранному случаю и теперь мы в состоянии определить $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, $u_3(x, t)$, $u_4(x, t)$ всюду в прямоугольнике $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant x \leqslant L$. Затем, приняв значения $t = T$ за начальные данные, мы совершенно так же найдем решение для $T \leqslant \leqslant t \leqslant 2T$.

Продвигаясь и дальше такими шагами по времени, мы последовательно найдем искомые функции при $2T \leqslant t \leqslant 3T$, $3T \leqslant t \leqslant 4T$ и т. д., т. е. при всех $t > 0$.

Для произвольной гиперболической системы нужное число граничных условий и их вид, оказывается, будут определяться совершенно так же, как и в разобранном примере. На каждой границе надо оставить столько условий, сколько семейств характеристик уходит от этой границы. В качестве таких условий нельзя задавать значения «римановых инвариантов», отвечающих приходящим характеристикам, или значения каких-либо функций от этих инвариантов.

В дальнейшем мы ограничимся разбором только таких систем, у которых нет вертикальных характеристик. Предположим даже, что в рассматриваемых областях $\left|\frac{dx}{dt}\right|$ (абсолютная величина характеристической скорости) ограничена снизу положительной константой.

Пусть гиперболическая система уравнений задана нам в каноническом виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + k_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{l=1}^{n} m_{il} u_l = f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n_0),$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - k_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{l=1}^{n} m_{il} u_l = f_i \qquad (i = n_0 + 1, \ldots, n),$$

$$k_i > 0 \text{ *)}$$

в полосе $0 \leqslant x \leqslant l$ для $0 \leqslant t \leqslant T$.

Рассмотрим для этой системы следующие граничные условия:

$$u_i = \sum_{j=n_0+1}^{n} \alpha_{ij} u_j \text{ при } x = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n_0),$$

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} u_j \text{ при } x = l \quad (l = n_0 + 1, \ldots, n).$$

Для простоты мы ограничиваемся однородными граничными усло-

---

*) В дальнейшем будут рассматриваться и более общие системы, в которых некоторые из $k_i$ равны нулю.

виями, коэффициенты которых $\alpha_{lj}$, $\beta_{lj}$ являются гладкими функциями $t$. Начальные данные для описываемой задачи задаются в виде

$$u_l(x,\ 0) = \varphi_l(x).$$

Можно доказать, что так поставленная задача имеет, и притом единственное, решение, если наложить на систему и начальные данные некоторые ограничения гладкости. Более того, можно показать, что решение такой задачи непрерывно зависит от начальных условий, коэффициентов и правых частей системы, коэффициентов граничных условий.

Доказательство перечисленных фактов (доказательство корректности задачи) и служит обоснованием разумности ее постановки. Приведенные же нами рассуждения на типичном примере могут рассматриваться только как наводящие соображения, позволившие придумать хорошую постановку задачи.

Сначала мы начнем проведение доказательства теоремы единственности. Теорема о непрерывной зависимости решений от данных задачи и теорема существования будут разобраны позже. При их доказательстве мы еще сузим класс рассматриваемых задач, чтобы сделать вывод менее громоздким.

При изучении теоремы единственности никакие дополнительные ограничения использоваться не будут. В процессе доказательства теоремы единственности будут также получены некоторые оценки решения и его производных.

Прежде чем приступать к проведению доказательства (оно будет разобрано в следующем параграфе), воспользуемся произволом в приведении системы к каноническому виду. На наличие такого произвола мы в свое время указывали. Умножим каждое из уравнений системы

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} \pm k_l \frac{\partial u_l}{\partial x} + \sum_i m_{il} u_i = f_l$$

на какой-нибудь положительный гладкий множитель $\mu = \mu_l(x,\ t) > 0$. Результат этого умножения можно записать так:

$$\frac{\partial \mu_l u_l}{\partial t} \pm k_l \frac{\partial \mu_l u_l}{\partial x} - \frac{\dfrac{\partial \mu_l}{\partial t} \pm k_l \dfrac{\partial \mu_l}{\partial x}}{\mu_l} \mu_l u_l + \sum_l \frac{\mu_l}{\mu_l} m_{il} \mu_l u_l = \mu_l f_l.$$

Обозначив $\mu_l u_l$ через $v_l$, получаем для этих новых неизвестных функций опять каноническую систему гиперболических уравнений

$$\frac{\partial v_l}{\partial t} \pm k_l \frac{\partial v_l}{\partial x} + \sum_l \tilde{m}_{il} v_l = \tilde{f}_l.$$

Характеристические корни $k_l(x,\ t)$ этой системы такие же, как и у исходной, а коэффициенты при младших членах $\tilde{m}_{il}$ и правые части $\tilde{f}_i$ — другие. Граничные условия

$$u_i = \sum_{j=n_0+1}^{n} \alpha_{ij} u_j \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_0) \quad \text{при} \quad x = 0,$$

$$u_i = \sum_{j=1}^{n_0} \beta_{ij} u_j \quad (i = n_0 + 1,\ \ldots,\ n) \ \text{при} \quad x = L$$

перепишутся для неизвестных $v_i = \mu_i u_i$ так:

$$v_i = \sum_{j=n_0+1}^{n} \frac{\mu_i}{\mu_j} \alpha_{ij} v_j \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_0) \quad \text{при} \quad x = 0,$$

$$v_i = \sum_{j=1}^{n_0} \frac{\mu_i}{\mu_j} \beta_{ij} v_j \quad (i = n_0 + 1,\ \ldots,\ n) \quad \text{при} \quad x = L.$$

Интересно, что $\mu_i$, стоящие в числителе, отвечают номерам, связанным с «уходящими» характеристиками, а $\mu_j$ в знаменателях имеют $j$ такие же, как и «приходящие» характеристики. Выбором функций $\mu_i(x,\ t)$ можно добиться, чтобы все элементы матриц граничных условий для $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n$ были по абсолютной величине меньше любого заданного фиксированного числа. Конечно, уменьшая эти элементы, мы будем изменять и, как правило, увеличивать $\tilde{m}_{il}$, $\tilde{f}_i$ и их производные.

Сейчас будет приведено важное определение, смысл которого выяснится в следующем параграфе во время проведения собственно доказательства теоремы единственности.

*Граничные условия, заданные на одной из границ, называются диссипативными, если в точках этой границы для любой вектор-функции* $(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n)$, *удовлетворяющей граничным условиям, выполнено неравенство*

$$-\sum_{\substack{\text{по прихо-}\\ \text{дящим } i}} k_i u_i^2 + \sum_{\substack{\text{по уходя-}\\ \text{щим } i}} k_i u_i^2 \leqslant 0.$$

(Мы пишем «по приходящим $i$», подразумевая под этим, что суммирование выполняется по всем тем $i$, для которых соответствующая характеристика — приходящая. Аналогично истолковывается сокращение «по уходящим $i$».)

Воспользуемся свободой в выборе нормировочных множителей $\mu_i(x,\ t)$, чтобы сделать граничные условия диссипативными.

Рассмотрим, например, левую границу с граничными условиями

$$v_i = \sum_{j=n_0+1}^{n} \frac{\mu_i}{\mu_j} \alpha_{ij} v_j \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_0)$$

и подставим значения $v_1, v_2, \ldots, v_{n_0}$ из этих условий в выражение

$$-\sum_{\substack{\text{по}\\ \text{проходящим } i}} k_i v_i^2 + \sum_{\substack{\text{по}\\ \text{уходящим } i}} k_i v_i^2 = -\sum_{i=n_0+1}^{n} k_i v_i^2 + \sum_{i=1}^{n_0} k_i v_i^2 =$$

$$= -\sum_{i=n_0+1}^{n} k_i v_i^2 + \sum_{i=1}^{n_0} k_i \left( \sum_{j=n_0+1}^{n} \frac{\mu_i}{\mu_j} \alpha_{ij} v_j \right)^2.$$

В результате подстановки первая сумма — отрицательно определенная формы $v_{n_0+1}, v_{n_0+2}, \ldots, v_n$, вторая — некоторая другая форма тех же переменных. Выбором $\mu_i$ можно сделать все коэффициенты этой второй формы достаточно маленькими, а тем самым полную сумму отрицательно определенной. При таких $\mu_i$ граничные условия для $v_1, v_2, \ldots, v_n$ будут диссипативными.

Более того, граничные условия будут строго диссипативными. Так мы будем называть условия, при которых для любой вектор-функции, удовлетворяющей граничным условиям, выполнено неравенство:

$$-\sum_{\substack{\text{по}\\ \text{приходящим } i}} k_i u_i^2 + \sum_{\substack{\text{по}\\ \text{уходящим } i}} k_i u_i^2 \leqslant -k_0 \sum_{\substack{\text{по}\\ \text{приходящим } i}} u_i^2, \quad k_0 > 0.$$

Выбрав $\mu_i$ отдельно на левой и отдельно на правой границах, чтобы удовлетворить условиям диссипативности, мы можем потом построить всюду внутри прямоугольника такие гладкие функции $\mu_i(x, t)$, чтобы на границах они совпадали с теми, которые там были выбраны.

В дальнейшем, рассматривая систему

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + k_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{l=1}^{n} m_{il} u_l = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n_0,$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - k_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{l=1}^{n} m_{il} u_l = f_i, \quad i = n_0 + 1, \ldots, n,$$

с граничными условиями

$$u_i = \sum_{j=n_0+1}^{n} \alpha_{ij} u_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n_0) \quad \text{при } x = 0,$$

$$u_i = \sum_{j=1}^{n_0} \beta_{ij} u_j \quad (i = n_0 + 1, \ldots, n) \quad \text{при } x = L,$$

мы всегда имеем право предполагать, что эта задача диссипативна и даже строго диссипативна.

До сих пор мы обсуждали постановку смешанной задачи только у гиперболических систем с двумя независимыми переменными $x$, $t$. При изучении смешанной задачи для симметрической системы

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial y}+Qu=f$$

в некоторой подобласти четверти пространства $x>0$, $t>0$ с начальными данными, заданными при $t=0$ и граничными условиями, поставленными при $x=0$, мы всегда будем предполагать, что систему перед этим изучением удалось привести к каноническому виду, который обеспечивает следующую простую форму матрицы $B$:

$$B=\begin{pmatrix} k_1 & & & & & & & & & & & 0\\ & k_2 & & & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & & \\ & & & k_{n_0} & & & & & & & & \\ & & & & -k_{n_0+1} & & & & & & & \\ & & & & & -k_{n_0+2} & & & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & & -k_{n_1} & & & & \\ & & & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}; \qquad (k_j>0)$$

Матрица $A$ при этом может быть произвольной симметрической положительно определенной, а $C$ — произвольной симметрической (см. по этому поводу § 11). Для таких систем мы опять будем рассматривать при $x=0$ граничные условия (строго диссипативные) вида

$$u_i=\sum_{j=n_0+1}^{n_1}\alpha_{ij}u_j \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n_0),$$

обеспечивающие отрицательность квадратичной формы $(Bu,\ u)$

$$(Bu,\ u)=-\sum_{j=n_0+1}^{n_1}k_ju_j^2+\sum_{i=1}^{n_0}k_iu_i^2\leqslant-k_0\left(\sum_{j=n_0+1}^{n_1}u_j^2\right) \qquad (k_0>0).$$

Задача. Покажите, что граничные условия вида

$$u_i=\sum_{j=n_0+1}^{n_1}\alpha_{ij}u_j+\sum_{s=n_1+1}^{n}\gamma_{is}u_s \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

не являются диссипативными, если среди $\gamma_{is}$ есть отличные от нуля.

Отметим, что определение диссипативных граничных условий как таких условий, которые обеспечивают отрицательность или неположительность квадратичной формы $(Bu, u)$, применимо и в том случае, когда $B$ не записано в каноническом виде. Мы будем пользоваться этим замечанием при разборе ряда примеров. Использование канонического вида $B$ несколько упрощает построение общей теории.

В случае задач с тремя $(x, y, t)$ или бо́льшим числом независимых переменных не существует такого простого способа приводить более или менее произвольные граничные условия к диссипативному виду, которым мы пользовались в случае двух независимых переменных. О характере возникающих осложнений можно судить по примеру смешанной задачи для уравнений акустики, разбор которой мы начнем со следующей задачи.

Задача. Покажите, что граничное условие

$$p + k\rho_0 u + l\rho_0 v = 0,$$

заданное при $x=0$ для уравнений акустики

$$\frac{1}{\rho_0 c_0^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

решаемых в полупространстве $x > 0$, диссипативно, лишь если $l=0$, $k \geqslant 0$.

Оказывается, что если даже эти условия диссипативности ($l = 0$, $k \geqslant 0$) не выполнены, то в целом ряде случаев можно построить такое расширение уравнений акустики, для которых наше граничное условие диссипативное. Эти расширения были описаны в конце § 12.

Первое из них, построенное при $|l| < c_0$, приводит к симметрической гиперболической системе

$$A\frac{\partial w}{\partial t} + B\frac{\partial w}{\partial x} + C\frac{\partial w}{\partial y} = h$$

для вектор-функции $w$ с компонентами

$$j = p_t - lp_y, \quad r = p_x, \quad s = p_y, \ p, \ u, \ v.$$

Условие диссипативности $(Bw, w) \leqslant 0$ для этой системы имеет вид неравенства $-2c_0^2 jr \leqslant 0$. Граничные условия $p + k\rho_0 u + l\rho_0 v = 0$, после дифференцирования по $t$ и замены $\rho_0 u_t$, $\rho_0 v_t$ на равные им $-p_x$, $-p_y$, дают соотношение $p_t - kp_x - lp_y = 0$, эквивалентное для расширенной системы граничному условию $j = kr$. Диссипативность этого последнего, если $k \geqslant 0$, очевидна.

Второе из описанных в конце § 12 расширений выполнено при любых $k$, $l$. Оно приводит к условию диссипативности

$$(Bw, w) = -2\theta\delta - k(r^2 + s^2 + p^2) \leqslant 0,$$

где

$$\theta = \frac{\partial}{\partial t}(p_t - kp_x - lp_y), \quad \delta = \frac{\partial}{\partial x}(p_t - kp_x - lp_y),$$

$$r = p_x, \ s = p_y.$$

Эта диссипативность, очевидно, имеет место при $k \geqslant 0$ на решениях, удовлетворяющих нашему граничному условию $p_t - kp_x - lp_y = 0$, без каких-либо ограничительных предположений о коэффициенте $l$. Некоторое неудобство этого второго расширения, по сравнению с первым, состоит в том, что оно использует производные исходных функций $p$, $u$, $v$ более высокого порядка.

Диссипативность третьего расширения из § 12 обеспечивается неравенством

$$(Bw, \ w) = -2\theta\delta \leqslant 0,$$

где опять

$$\theta = \frac{\partial}{\partial t}(p_t - kp_x - lp_y), \quad \delta = \frac{\partial}{\partial x}(p_t - kp_x - lp_y).$$

Эта диссипативность всегда, при любых $k$, $l$, имеет место на решениях с нашим граничным условием. Однако само это третье расширение можно осуществить лишь, если $k^2 + l^2 > c_0^2$, $k^2 \neq c_0^2$.

Итак, мы можем получить оценки решений смешанной задачи с граничным условием $p + k\rho_0 u + l\rho_0 v = 0$ для уравнений акустики в случае двух пространственных переменных $x$, $y$ путем приведения к диссипативной задаче для расширенной системы. Такое приведение не удается осуществить, лишь если $k = -c_0$, или если выполнены одновременно неравенства

$$k < 0, \quad k^2 + l^2 \leqslant c_0^2.$$

Напомним, что в § 8 была продемонстрирована некорректность смешанной задачи при $k = -c_0$ или при одновременном выполнении неравенств

$$k < 0, \quad k^2 + l^2 < c_0^2.$$

В дальнейшем (§§ 16—19) будет показано, что для симметрической гиперболической системы смешанная задача с диссипативными граничными условиями поставлена корректно. (Мы, правда, будем накладывать несколько более ограничительное предположение о строгой диссипативности.) В доказательстве мы воспользуемся, по существу, лишь тем, что в диссипативном случае можно оценить интегралы энергии. Поэтому естественно ожидать, что корректность должна иметь место всегда, когда удается оценка этих интегралов. В настоящее время доказано (см. [7], [8], [9], [10]), что для решения смешанной задачи у гиперболических уравнений и систем всегда может быть получена оценка интегралов энергии, если только приемом, описанным в § 8, не строится пример, демонстрирующий некорректность задачи. Эти доказательства очень трудные. Приведенная здесь конструкция иллюстрирует, на сравнительно простом примере уравнений акустики, утверждения этих работ.

## § 16. Теоремы единственности и оценки решений в смешанной задаче

Постановка смешанной задачи с диссипативными граничными условиями. Оценка решения и теорема единственности. Расширение системы уравнений и граничных условий задачи. Получение оценок производных. Обзор оценок решений для симметричных гиперболических систем. Условия согласования начальных данных и граничных условий. Непрерывная зависимость решений от условий задачи. Понятие об обратимых задачах. Примеры исследования постановок граничных условий для гиперболических систем.

Переходим непосредственно к доказательству теоремы единственности и к получению оценок для решения диссипативной смешанной задачи. Начнем со случая двух независимых переменных. Мы рассматриваем при $0 \leqslant x \leqslant L$, $t \geqslant 0$ решения системы

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + k_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{l=1}^{n} m_{il} u_l = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n_0,$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - k_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{l=1}^{n} m_{il} u_l = f_i, \quad i = n_0 + 1, \ldots, n_1,$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} m_{il} u_l = f_i, \qquad i = n_1 + 1, \ldots, n$$

с граничными условиями

$$u_i = \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_{ij} u_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n_0 \text{ при } x = 0,$$

$$u_i = \sum_{j=1}^{n_0} \beta_{ij} u_j, \qquad i = n_0 + 1, \ldots, n \text{ при } x = L.$$

Начальные данные для этой задачи задаются в виде

$$u_i(x, 0) = \varphi_i(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Так поставленная задача называется *смешанной*, так как она требует выполнения для решений не только начальных, но и граничных условий. Предположим, что на обеих границах выполнены условия диссипативности. А именно, предположим, что для любых $u_i(x, t)$, удовлетворяющих граничным условиям, на каждой из границ выполняются неравенства

$$-\sum_{\substack{\text{по}\\ \text{приходящим } i}} k_i u_i^2 + \sum_{\substack{\text{по}\\ \text{уходящим } i}} k_i u_i^2 \leqslant 0.$$

Наша система является симметрической гиперболической системой

$$E\frac{\partial u}{\partial t} + K\frac{\partial u}{\partial x} + mu = f$$

со следующими матрицами:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_1 & & & & & & & & & 0 \\ & k_2 & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & k_{n_0} & & & & & & \\ & & & & -k_{n_0+1} & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & -k_{n_1} & & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$m = \| m_{ik} \|.$$

Было показано, что для решений этой системы имеет место следующее тождество, носящее название интеграла энергии,

$$\int\int \left[\frac{\partial}{\partial t}(u,\ u) + \frac{\partial}{\partial x}(Ku,\ u)\right] dx\,dt = \oint (u,\ u)\,dx + (Ku,\ u)\,dt = \int\int [(Du,\ u) + 2(f,\ u)]\,dx\,dt.$$

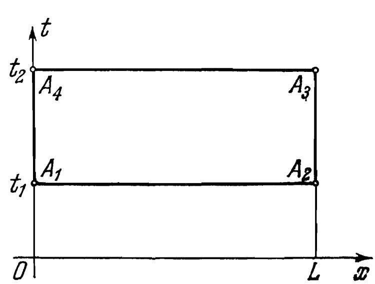

Рис. 53.

Элементы матрицы $D$ могут быть вычислены через элементы матрицы $m = \| m_{ik} \|$ и через производные от элементов $K$, т. е. через производные от $k_l(x,\ t)$.

Рассмотрим прямоугольный контур на плоскости $x$, $t$, ограниченный справа и слева отрезками вертикальных прямых $x = 0$, $x = l$, а сверху и снизу — отрезками горизонтальных прямых $t = t_1$, $t = t_2$. Такой контур изображен на рис. 53.

Рассматривая по этому контуру $(A_1A_2A_3A_4)$ интеграл энергии, мы приходим к неравенству

$$\int_{A_4}^{A_3}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)dx \leqslant \int_{A_1}^{A_4}\left[-\sum_{\substack{\text{по}\\ \text{приходящим } i}} k_i u_i^2 + \sum_{\substack{\text{по}\\ \text{уходящим } i}} k_i u_i^2\right]dt +$$
$$+\int_{A_2}^{A_3}\left[-\sum_{\substack{\text{по}\\ \text{приходящим } i}} k_i u_i^2 + \sum_{\substack{\text{по}\\ \text{уходящим } i}} k_i u_i^2\right]dt + \int_{A_1}^{A_2}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)dx +$$
$$+M\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^l \sum u_i^2(x,\ t)\,dx\right]dt + N\int_{t_1}^{t_2}\left[\sqrt{\int_0^l \sum u_i^2(x,\ t)\,dx}\right]dt.$$

Здесь вместо равенства выписано неравенство, так как мы подробно не расписывали двойной интеграл по внутренности прямоугольника. Этот двойной интеграл заменен на больший. Константы $M$ и $N$ оценивают сверху, соответственно, матрицу $D$ и вектор правых частей $f$. Аналогичные рассуждения при оценке интегралов энергии несколько подробнее проводились в § 12.

В силу диссипативности мы только усилим неравенство, отбросив интегралы по левой и правой границам. Обозначив, для сокращения, через $I(t)$ интеграл

$$I(t) = \int_0^l \sum_{i=1}^{n} u_i^2(x,\ t)\,dx,$$

получим для него уже знакомое нам неравенство

$$I(t_2) \leqslant I(t_1) + \int_{t_1}^{t_2}\left[MI(t) + N\sqrt{I(t)}\right]dt,$$

в котором постоянная $N$ оценивает сверху правые части $(|f_i|)$.

Из этой оценки по лемме об интегральном неравенстве получается следующее ограничение роста решений

$$\sqrt{I(t)} \leqslant \sqrt{I(0)}\,e^{\frac{M}{2}t} + N\,\frac{e^{\frac{M}{2}t}-1}{M}.$$

Теорема единственности следует из этого неравенства. Действительно, если бы у нас существовало два решения задачи с одними и теми же правыми частями $f_i(x,\ t)$ и с одинаковыми начальными данными $u_i(x,0) = \varphi_i(x)$, то разность этих решений удовлетворяла бы однородной системе $(f_i = 0)$ и нулевым начальным данным. Рассматривая однородную систему с нулевыми начальными данными, мы должны считать, что $N = 0$, $I(0) = 0$. Отсюда $I(t) = 0$. Больше для единственности ничего не нужно.

Перейдем теперь к случаю, когда независимых переменных не две, а три $(x,\ y,\ t)$.

Пусть некоторая область $G$ пространства $(x, y, t)$, лежащая при $x>0$, $t>0$, ограничена поверхностью, состоящей из трех частей. Две из этих частей — примыкающие друг к другу по отрезку прямой $x=0$, $t=0$ ограниченные куски полуплоскостей $x=0$, $t>0$ и $x>0$, $t=0$, тогда как третья является как бы «шапочкой», опирающейся на границу первых двух (рис. 54). Мы будем предполагать, что единичный вектор $(\tau, \xi, \eta)$ внешней нормали во всех точках «шапочки» удовлетворяет неравенству Гамильтона — Якоби

$$\tau+H(\xi, \eta, x, y, t)\geqslant 0,$$

обеспечивающему неотрицательность квадратичной формулы $([\tau A+\xi B+\eta C]u, u)$.

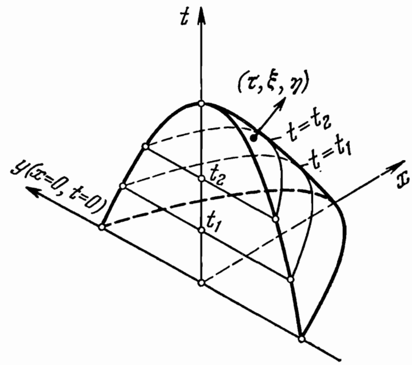


Рис. 54.

В области $G$ мы будем рассматривать решения симметрической гиперболической системы

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial y}+Qu=f,$$

и получим для них оценки, вытекающие из тождества интеграла энергии:

$$\iint\limits_S([\tau A+\xi B+\eta C]u, u)\,ds=\iiint\limits_G[(Du, u)+2(f, u)]\,dt\,dx\,dy.$$

Удобно применять это тождество не ко всей области $G$, а только к ее части $t_2>t>t_1$, ограниченной плоскостями $t=t_1$, $t=t_2$, $x=0$ и поверхностью «шапочки». При этом мы приходим к равенству

$$\iint\limits_{t=t_2}(Au, u)\,dx\,dy=\iint\limits_{t=t_1}(Au, u)\,dx\,dy+\iint\limits_{x=0}(Bu, u)\,dy\,dt-$$
$$-\iint\limits_{\text{по «шапочке»}}([\tau A+\xi B+\eta C]u, u)\,ds+$$
$$+\iiint\limits_{\substack{G\\ t_2\geqslant t\geqslant t_1}}[(Du, u)+2(f, u)]\,dt\,dx\,dy.$$

Из этого равенства, пользуясь диссипативностью граничных условий, в силу которой $(Bu, u)_{x=0}\leqslant 0$, выводим неравенство:

$$\iint\limits_{t=t_2}(Au, u)\,dx\,dy\leqslant\iint\limits_{t=t_1}(Au, u)\,dx\,dy+$$
$$+\int\limits_{t_1}^{t_2}\left\{\iint\limits_{t=\text{const}}[|(Du, u)|+2|f(u)|]\,dx\,dy\right\}dt.$$

Это последнее ничем не отличается от неравенства, с помощью которого доказывалась теорема единственности и получались оценка решения в случае задачи Коши (см. § 12). Тем самым теорема единственности решения у смешанной задачи доказана.

Для дальнейшего существенно отметить, что предположение о непрерывности $u(x, y, t)$ в замкнутом полупространстве $x \geqslant 0$, которое использовалось в намеченном здесь доказательстве единственности, может быть ослаблено. Достаточно ограничиться предположениями:

1) непрерывности $u(x, y, t)$ во всех внутренних точках, т. е. при $x > 0$;

2) непрерывности вплоть до границы $x = 0$ вектора $Bu$ и квадратичной формы $(Bu, u)$. Эти предположения отличаются от предположения о непрерывности при $x \geqslant 0$ вектор-функции $u(x, y, t)$ в случае, если матрица $B$ вырожденная;

3) существования при каждом $t$ интеграла

$$\iint\limits_{t=\mathrm{const}} (Au, u)\,dx\,dy$$

и непрерывной его зависимости от времени $t$.

Читатель без труда убедится, что при указанных ослабленных требованиях 1), 2), 3) к решению $u(x, y, t)$ намеченное нами доказательство проходит с несложными уточнениями рассуждений. Мы не будем на них подробнее останавливаться.

Теперь естественно попытаться, так же как и в § 12, применить развитую технику оценок интегралов для получения оценок производных от решения. Но в случае смешанной задачи мы сталкиваемся здесь с серьезными затруднениями. Конец этого параграфа будет посвящен их преодолению.

Мы обсудим, как получить в диссипативной смешанной задаче расширенную систему, содержащую уравнения для производных от решения. Вся трудность состоит в получении для этой расширенной системы диссипативных граничных условий. Наше исследование будет производиться в предположении, что изучаемая система имеет матрицу $B$ вида

$$B = \begin{pmatrix} k_1 & & & & & & & & & 0 \\ & k_2 & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & k_{n_0} & & & & & & \\ & & & & -k_{n_0+1} & & & & & \\ & & & & & -k_{n_0+2} & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & -k_{n_1} & & \\ & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (k_i > 0),$$

и что граничные условия

$$u_i = \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_{ij} u_j, \qquad i = 1, 2, \ldots n_0,$$

являются строго диссипативными ($k_0 > 0$):

$$\sum_{=1}^{n_0} k_i u_i^2 - \sum_{j=n_0+1}^{n_1} k_j u_j^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_0} k_i \left( \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_{ij} u_j \right)^2 - \sum_{j=n_0+1}^{n_1} k_j u_j^2 \leqslant -k_0 \left( \sum_{j=n_0+1}^{n_1} u_j^2 \right).$$

Кроме того, для некоторого упрощения и без того громоздких рассмотрений мы ограничимся случаем однородной системы уравнений ($f = 0$). Это ограничение не является существенным.

Из сделанного предположения о виде $B$ вытекает, что

$$B_t = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} k_1 &&&&&& \\ & \frac{\partial}{\partial t} k_2 &&&&& \\ && \ddots &&&& \\ &&& -\frac{\partial}{\partial t} k_{n_1} &&& \\ &&&& 0 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1} \frac{\partial}{\partial t} k_1 &&&&&& \\ & \frac{1}{k_2} \frac{\partial}{\partial t} k_2 &&&&& \\ && \ddots &&&& \\ &&& \frac{1}{k_{n_1}} \frac{\partial}{\partial t} k_{n_1} &&& \\ &&&& 0 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} k_1 &&&&&& \\ & k_2 &&&&& \\ && \ddots &&&& \\ &&& -k_{n_1} &&& \\ &&&& 0 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 0 \end{pmatrix} = R_0 \cdot B,$$

где $R_0$ — некоторая матрица с ограниченными гладкими коэффициентами.

Точно так же показывается, что

$$B_x = B_1 \cdot B; \quad B_y = B_2 \cdot B,$$

где $R_1$, $R_2$ — ограниченные матрицы, имеющие ту же гладкость по $x$, $y$, $t$, что и производные $B_x$, $B_y$ матрицы $B$. Продифференцировав исходную систему по $t$, $x$, $y$, мы приходим, так же как и в случае Коши (см. § 12), к расширенной системе для $u$, $u_t$, $u_x$, $u_y$:

$$\begin{cases} A\dfrac{\partial u}{\partial t} + B\dfrac{\partial u}{\partial x} + C\dfrac{\partial u}{\partial y} + Qu = 0, \\ A\dfrac{\partial u_t}{\partial t} + B\dfrac{\partial u_t}{\partial x} + C\dfrac{\partial u_t}{\partial y} + (Q + A_t)\,u_t + B_t u_x + C_t u_y + Q_t u = 0, \\ A\dfrac{\partial u_x}{\partial t} + B\dfrac{\partial u_x}{\partial x} + C\dfrac{\partial u_x}{\partial y} + A_x u_t + (B_x + Q)\,u_x + C_x u_y + Q_x u = 0, \\ A\dfrac{\partial u_y}{\partial t} + B\dfrac{\partial u_y}{\partial x} + C\dfrac{\partial u_y}{\partial y} + A_y u_t + B_y u_x + (C_y + Q)\,u_y + Q_y u = 0. \end{cases}$$

Для дальнейшего нам удобно слагаемые $B_t u_x$, $B_y x_x$ во втором и четвертом уравнениях выразить с помощью первого уравнения (исходная система) через $u_t$, $u_y$, $u$:

$$B_t u_x = R_0 B u_x = -R_0 A u_t - R_0 C u_y - R_0 Q u,$$
$$B_y u_x = R_2 B u_x = -R_2 A u_t - R_2 C u_y - R_2 Q u,$$

и исключить из системы третье уравнение. Тогда для $u$, $u_t$, $u_y$ мы приходим к следующим уравнениям:

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y} = -Qu,$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_t \\ u_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u_t \\ u_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} u_t \\ u_y \end{pmatrix} =$$
$$= -\begin{pmatrix} A_t - R_0 A + Q & C_t - R_0 C \\ A_y - R_2 A & C_y - R_2 C + Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_t \\ u_y \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} (Q_t - R_0 Q)\,u \\ (Q_y - R_2 Q)\,u \end{bmatrix}.$$

Мы в этой записи постарались подчеркнуть важные для дальнейшего особенности ее структуры: уравнение для $u$ независимо от уравнений для $u_t$, $u_y$, тогда как эти последние составляют симметрическую гиперболическую систему, завязанную с уравнением для $u$ младшими членами. Если матрицы коэффициентов $A$, $B$, $C$, $Q$ были достаточно гладкими, то можно рассматривать полученную здесь систему как исходную и опять провести расширение, включив при этом уравнения для вторых производных:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_{tt} \\ u_{ty} \\ u_{yy} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u_{tt} \\ u_{ty} \\ u_{yy} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} u_{tt} \\ u_{ty} \\ u_{yy} \end{pmatrix} = \ldots$$

Здесь многоточием в правой части заменены младшие члены, представляющие собой суммы слагаемых, каждое из которых получается применением ограниченных матриц к $u$, $u_t$, $u_y$, $u_{tt}$, $u_{ty}$, $u_{yy}$.

Ясно, что при достаточной гладкости коэффициентов возможны и дальнейшие шаги процесса расширения, которые включаются в систему уравнения для все более и более высоких производных по $t$ и по $y$. Важной для дальнейшего особенностью описанной здесь схемы получения расширенных систем является то, что при их составлении мы как бы полностью игнорируем производные по переменному $x$, исключая эти производные с помощью либо исходных уравнений, либо уравнений, выписанных в результате предыдущих шагов расширения.

Можно было сделать выкладки при нашем описании процесса расширения чуть более короткими, если предполагать, что расширяемая каноническая система имеет матрицы $B$ постоянными. При этом производные $B_t$, $B_y$ равны нулю и поэтому пропадает необходимость выражать их через $B$. Напомним, что если система приведена к каноническому виду, который использовался при описании расширения, то она может быть приведена и к каноническому виду постоянными $B$ (см. § 11).

Получив расширенную систему, мы постараемся использовать ее для вывода оценок, так же как это делалось в случае задачи Коши. В случае смешанной задачи нам придется пользоваться диссипативностью граничных условий. При этом граничные условия расширенной системы мы будем получать дифференцированием по $t$ и по $y$ граничных условий исходной

$$u_i(0,\ y,\ t) = \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_{ij}(y,\ t)\, u_j(0,\ y,\ t), \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_0.$$

Таким дифференцированием мы придем к соотношениям:

$$\left\{\begin{aligned} u_{it} &= \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_{ij} u_{jt} + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_{ijt} u_j, \\ u_{iy} &= \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_{ij} u_{jy} + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_{ijy} u_j, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} u_{itt} &= \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_{ij} u_{jtt} + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} 2\alpha_{ijt} u_{jt} + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_{ijtt} u_j, \\ u_{ity} &= \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_{ij} u_{jty} + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_{ijt} u_{jy} + \\ &\qquad\qquad + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_{ijy} u_{jt} + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_{ijty} u_j, \\ u_{iyy} &= \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_{ij} u_{jyy} + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} 2\alpha_{ijy} u_{jy} + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_{ijyy} u_j, \end{aligned}\right.$$

которые могут рассматриваться как граничные условия для расширенной системы. Если бы мы включили в нашу систему уравнения для $u_x$, $u_{xx}$, $u_{xy}$, $u_{xt}$, то для них мы не сумели бы получить граничных условий описанным здесь приемом, так как нельзя дифференцировать по $x$ граничные соотношения, заданные нам только на плоскости $x=0$. Именно это обстоятельство побудило нас строить расширенную систему специальным образом, включая в нее только производные по $y$ и по $t$. Однако и теперь у нас еще нет уверенности, что граничные условия расширенной системы оказались диссипативными. Они действительно могут не быть таковыми.

Чтобы справиться с возникшим затруднением, удобно, выбрав гладкие положительные множители

$$\begin{gathered}\mu_0=\mu_0(x,\ y,\ t),\\ \mu_1=\mu_1(x,\ y,\ t),\\ \mu_2=\mu_2(x,\ y,\ t),\\ \cdots\cdots\cdots\end{gathered}$$

использовать в расширенной системе в качестве неизвестных не вектор-функции $u$; $u_t$, $u_y$; $u_{tt}$, $u_{ty}$, $u_{yy}$; а пропорциональные им

$$\mu_0 u;\quad \mu_0\mu_1 u_t,\quad \mu_0\mu_1 u_y;\quad \mu_0\mu_1\mu_2 u_{tt},\\ \mu_0\mu_1\mu_2 u_{ty},\quad \mu_0\mu_1\mu_2 u_{yy},\ \ldots$$

Характер системы от введения таким образом новых неизвестных не изменится. Она опять будет иметь следующий вид:

$$A\frac{\partial[\mu_0 u]}{\partial t}+B\frac{\partial[\mu_0 u]}{\partial x}+C\frac{\partial[\mu_0 u]}{\partial y}=\text{младшие члены, содержащие } [\mu_0 u],$$

$$\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & A\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\mu_0\,\mu_1\,u_t\\ \mu_0\,\mu_1\,u_y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\mu_0\,\mu_1\,u_t\\ \mu_0\,\mu_1\,u_y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}C & 0\\ 0 & C\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}\mu_0\,\mu_1\,u_t\\ \mu_0\,\mu_1\,u_y\end{pmatrix}=$$
$$=\text{младшие члены, содержащие } [\mu_0 u],\quad [\mu_0\mu_1 u_t],\quad [\mu_0\mu_1 u_y],$$

$$\begin{pmatrix}A & 0 & 0\\ 0 & A & 0\\ 0 & 0 & A\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\mu_0\,\mu_1\,\mu_2\,u_{tt}\\ \mu_0\,\mu_1\,\mu_2\,u_{ty}\\ \mu_0\,\mu_1\,\mu_2\,u_{yy}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B & 0 & 0\\ 0 & B & 0\\ 0 & 0 & B\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\mu_0\,\mu_1\,\mu_2\,u_{tt}\\ \mu_0\,\mu_1\,\mu_2\,u_{ty}\\ \mu_0\,\mu_1\,\mu_2\,u_{yy}\end{pmatrix}+$$
$$+\begin{pmatrix}C & 0 & 0\\ 0 & C & 0\\ 0 & 0 & C\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}\mu_0\,\mu_1\,\mu_2\,u_{tt}\\ \mu_0\,\mu_1\,\mu_2\,u_{ty}\\ \mu_0\,\mu_1\,\mu_2\,u_{yy}\end{pmatrix}=\text{младшие члены, содержащие}$$

$$[\mu_0 u],\quad [\mu_0\mu_1 u_t],\quad [\mu_0\mu_1 u_y],\quad [\mu_0\mu_1\mu_2 u_{tt}],\quad [\mu_0\mu_1\mu_2 u_{ty}],\quad [\mu_0\mu_1\mu_2 u_{yy}].$$

Изменятся коэффициенты граничных условий, которые теперь пишутся так ($i=1, 2, \ldots, n_0$):

$$[\mu_0 u_i] = \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_{ij} [\mu_0 u_j],$$

$$[\mu_0\mu_1 u_{it}] = \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_{ij} [\mu_0\mu_1 u_{jt}] + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \mu_1 \alpha_{ijt} \cdot [\mu_0 u_j],$$

$$[\mu_0\mu_1 u_{iy}] = \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_{ij} [\mu_0\mu_1 u_{jy}] + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \mu_1 \alpha_{ijy} [\mu_0 u_j],$$

$$[\mu_0\mu_1\mu_2 u_{tt}] = \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_{ij} [\mu_0\mu_1\mu_2 u_{jtt}] + \\ + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} 2\mu_2 \alpha_{ijt} [\mu_0\mu_1 u_{jt}] + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \mu_2\mu_1 \alpha_{ijtt} [\mu_0 u_j],$$

$$[\mu_0\mu_1\mu_2 u_{ty}] = \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_{ij} [\mu_0\mu_1\mu_2 u_{jty}] + \\ + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \mu_2 \alpha_{ijt} [\mu_0\mu_1 u_{jy}] + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \mu_2 \alpha_{ijy} [\mu_0\mu_1 u_{jt}] + \\ + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \mu_2\mu_1 \alpha_{ijyy} [\mu_0 u_j],$$

$$[\mu_0\mu_1\mu_2 u_{yy}] = \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_{ij} [\mu_0\mu_1\mu_2 u_{iyy}] + \\ + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} 2\mu_2 \alpha_{ijy} [\mu_0\mu_1 u_{jy}] + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \mu_2\mu_1 \alpha_{ijyy} [\mu_0 u_j].$$

Благодаря сделанной подстановке у некоторых из этих коэффициентов появились множители $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_2\mu_1$. Поэтому, пользуясь свободой в выборе $\mu_0$, $\mu_2$, $\mu_2$, мы можем сделать коэффициенты, содержащие эти множители, произвольно малыми (но не нулями!!!), и за счет этой малости обеспечить диссипативность граничных условий.

Поясним, как это делается на примере расширенной системы, с помощью которой оцениваются только $u$, $u_t$, $u_y$. В качестве неизвестных при этом должны быть выбраны вектор-функции

$$v = \mu_0 u, \quad \bar{v} = \mu_0\mu_1 u_t, \quad \bar{\bar{v}} = \mu_0\mu_1 u_y,$$

удовлетворяющие при $x=0$ граничным условиям:

$$v_i=\sum_{j=n_0+1}^{n_1}\alpha_{ij}v_j,$$

$$\bar v_i=\sum_{j=n_0+1}^{n_1}\alpha_{ij}\bar v_j+\sum_{j=n_0+1}^{n_1}\mu_1\alpha_{ijt}v_j,\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n_0),$$

$$\bar{\bar v}_i=\sum_{j=n_0+1}^{n_1}\alpha_{ij}\bar{\bar v}_j+\sum_{j=n_0+1}^{n_1}\mu_1\alpha_{ijy}v_j,$$

а при $x>0$ системе, у которой мы выпишем только старшие члены, содержащие производные от неизвестных функций:

$$\begin{pmatrix}A&0&0\\0&A&0\\0&0&A\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}v\\ \bar v\\ \bar{\bar v}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B&0&0\\0&B&0\\0&0&B\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}v\\ \bar v\\ \bar{\bar v}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}C&0&0\\0&C&0\\0&0&C\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}v\\ \bar v\\ \bar{\bar v}\end{pmatrix}+\ldots=0.$$

Условие строгой диссипативности, при используемых нами диагональных $B$, имеет вид неравенства

$$\left[\sum_{i=1}^{n_0}k_iv_i^2-\sum_{j=n_0+1}^{n_1}k_jv_j^2\right]+$$
$$+\left[\sum_{i=1}^{n_0}k_i\bar v_i^2-\sum_{j=n_0+1}^{n_1}k_i\bar v_i^2\right]+\left[\sum_{i=1}^{n_0}k_i\bar{\bar v}_i^2-\sum_{j=n_0+1}^{n_1}k_i\bar{\bar v}_i^2\right]=$$
$$=\left[\sum_{i=1}^{n}k_i\left(\sum_{j=n_0+1}^{n_1}\alpha_{ij}\bar{\bar v}_j^2\right)-\sum_{j=n_0+1}^{n_1}k_j\bar{\bar v}_j^2\right]+$$
$$+\left[\sum_{i=1}^{n}k_i\left(\sum_{j=n_0+1}^{n_1}\alpha_{ij}\bar v_j+\mu_1\sum_{j=n_0+1}^{n_1}\alpha_{ijt}v_j\right)^2-\sum_{j=n_0+1}^{n_1}k_j\bar v_j^2\right]+$$
$$+\left[\sum_{i=1}^{n}k_i\left(\sum_{j=n_0+1}^{n_1}\alpha_{ijj}\bar{\bar v}+\mu_1\sum_{j=n_0+1}^{n_1}\alpha_{ijy}v_j\right)^2-\sum_{j=n_0+1}^{n_1}k_j\bar{\bar v}_j^2\right]\leqslant$$
$$\leqslant-\frac{k_0}{2}\sum_{j=n_0+1}^{n_1}(v_j^2+\bar v_j^2+\bar{\bar v}_j^2),$$

которое заведомо выполнено при достаточно малых $\mu_1$. (При $\mu_1=0$ оно является следствием диссипативности граничных условий для исходных уравнений. Левая часть условия диссипативности является квадратичной формой от переменных $v_j$, $\bar v_j$, $\bar{\bar v}_j$ $(j=n_0+1,\ \ldots,\ n_1)$, сумма квадратов которых стоит в правой части неравенства. Коэффициенты этой квадратичной формы непрерывно зависят от $\mu_1$.) По существу, идея этой конструкции та же самая, что и у приведения к диссипативному виду граничных условий в задаче с двумя независимыми переменными (см. § 15).

Теперь мы уже можем стандартным образом применить технику оценок интегралов энергии, развитую в § 12 и приспособленную к смешанной задаче в начале настоящего параграфа. В результате мы получим для рассматриваемых решений следующее неравенство:

$$\sqrt{\iint\limits_{\substack{G\\ t=\text{const}\\ x>0}} [\mu_0^2 (Au,\ u)+\mu_0^2\mu_1^2 (Au_t,\ u_t)+\mu_0^2\mu_1^2 (Au_y,\ u_y)\, dx\, dy} \leqslant$$
$$\leqslant e^{Mt} \sqrt{\iint\limits_{\substack{G,\ t=0\\ x>0}} [\mu_0^2 (Au,\ u)+\mu_0^2\mu_1^2 (Au_t,\ u_t)+\mu_0^2\mu_1^2 (Au_y,\ u_y)]\, dx\, dy},$$

с постоянной $M$, которую можно оценить через коэффициенты решаемой системы, через коэффициенты граничных условий и через производные всех этих коэффициентов. Эта оценка не содержит никакой информации о производных $u_x$. Для получения такой информации удобно применить следующий прием. В силу исходного уравнения

$$Bu_x = -Au_t - Cu_y - Qu,$$
$$\begin{aligned}(Bu_x,\ Bu_x) &= (Au_t + Cu_y + Qu,\ Au_t + Cu_y + Qu) = \\ &= (A^2u_t,\ u_t) + (C^2u_y,\ u_y) + (Q^2u,\ u) + \\ &\qquad + 2(Au_t,\ Cu_y) + 2(Au_t,\ Qu) + 2(Cu_y,\ Qu)\end{aligned}$$

Так как $A$ положительно определенная, то

$$(A^2u_t,\ u_t) \leqslant \text{const}\,(Au_t,\ u_t),$$
$$(C^2u_y,\ u_y) \leqslant \text{const}\,(Au_y,\ u_y),$$
$$(Q^2u,\ u) \leqslant \text{const}\,(Au,\ u),$$
$$|(Au_t,\ Cu_y)| \leqslant \sqrt{(A^2u_t,\ u_t)(C^2u_y,\ u_y)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}(A^2u_t,\ u_t) + \frac{1}{2}(C^2u_y,\ u_y) \leqslant \text{const}\,[(Au_t,\ u_t) + (Au_y,\ u_y)].$$

В результате этих оценок мы приходим к выводу, что на решениях нашей системы

$$(Bu_x,\ Bu_x) \leqslant \text{const}\,[(Au,\ u) + (Au_t,\ u_t) + (Au_y,\ u_y)].$$

Отсюда и из выведенного выше неравенства, дающего интегральную оценку решения, заключаем

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\sqrt{\iint\limits_{\substack{G,\,t=\mathrm{const}\\ x>0}}[(Au,\ u)+(Au_t,\ u_t)+(Bu_x,\ Bu_x)+(Au_y,\ u_y)]\,dx\,dy}\leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\sqrt{\iint\limits_{\substack{G,\,t=0\\ x>0}}[(Au,\ u)+(Au_t,\ u_t)+(Bu_x,\ Bu_x)+(Au_y,\ u_y)]\,dx\,dy}\leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\sqrt{\iint\limits_{\substack{G,\,t=0\\ x>0}}[(Au,\ u)+(Bu_x,\ Bu_x)+(Au_y,\ u_y)]\,dx\,dy}.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались тем, что

$$u_t=-A^{-1}Bu_x-A^{-1}Cu_y-A^{-1}Qu,$$

и что в силу этого

$$(Au_t,\ u_t)\,|_{t=0}\leqslant \mathrm{const}\,[(Bu_x,\ Bu_x)+(Au_y,\ u_y)+(Au,\ u)]_{t=0}.$$

Мы научились, таким образом, оценивать производные $u_x$, входящие в форму $(Bu_x,\ Bu_x)$. Правда, если $B$ вырожденная (если $n>n_1$), то производные по $x$ не от всех компонент вектора $u$ в эту форму входят. Этот дефект оценки не удается полностью устранить, хотя его можно ослабить с помощью приема, который вскоре будет описан.

Пока же мы отметим, что если оценивать интегралы энергии для расширенной системы, содержащей вторые производные решения, то через начальные данные может быть оценен

$$\max_t \iint\limits_{\substack{G,\,t=\mathrm{const}\\ x>0}}[\mu_0^2(Au,\ u)+\mu_0^2\mu_1^2(Au_t,\ u_t)+\mu_0^2\mu_1^2(Au_y,\ u_y)+ \\ +\mu_0^2\mu_1^2\mu_2^2(Au_{yy},\ u_{yy})+\mu_0^2\mu_1^2\mu_2^2(Au_{yt},\ u_{yt})+ \\ +\mu_0^2\mu_1^2\mu_2^2(Au_{tt},\ u_{tt})]\,dx\,dy,$$

а через этот интеграл в свою очередь может быть оценен

$$\max_t \iint\limits_{\substack{G,\,t=\mathrm{const}\\ x>0}}[(Bu_x,\ Bu_x)+(Bu_{xt},\ Bu_{xt})+(Bu_{xy},\ Bu_{xy})]\,dx\,dy.$$

Аналогичное положение имеет место и при получении оценок для высших производных.

Для оценок производных $u_x$ в точках, лежащих строго внутри области $x>0$, можно воспользоваться следующим приемом, который приводит к включению в расширенную систему уравнений для производных $u_x$, умноженных на гладкий неотрицательный множитель $\nu_1(x)$, отличный от нуля при $x>\lambda_1>0$ и равный нулю в полосе $\lambda_1\geqslant x\geqslant 0$.

Продифференцировав по $x$ основную систему

$$Au_t+Bu_x+Cu_y+Qu=0$$

и помножив результат дифференцирования на $\nu_1(x)$, запишем его в виде равенства

$$A\frac{\partial[\nu_1u_x]}{\partial t}+B\frac{\partial[\nu_1u_x]}{\partial x}+C\frac{\partial[\nu_1u_x]}{\partial y}+Q[\nu_1u_x]+$$
$$+\nu_1(x)B_xu_x-\nu_1'(x)Bu_x+\nu_1A_xu_t+\nu_1C_xu_y+\nu_1Q_xu=0.$$

Заменив в подчеркнутых слагаемых $Bu_x$ на $-Au_t-Cu_y-Qu$, $B_xu_x=R_1Bu_x$ на $-R_1(Au_t+Cu_y+Qu)$, а затем выразив $u_t$, $u_y$, $u$ в младших членах через $\mu_0u$, $\mu_0\mu_1u_t$, $\mu_0\mu_1u_y$, мы сможем включить это уравнение в расширенную систему оценки первых производных, которая будет теперь выглядеть так:

$$\begin{pmatrix}A&0&0&0\\0&A&0&0\\0&0&A&0\\0&0&0&A\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\mu_0u\\\mu_0\mu_1u_t\\\mu_0\mu_1u_y\\\nu_1u_x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B&0&0&0\\0&B&0&0\\0&0&B&0\\0&0&0&B\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\mu_0u\\\mu_0\mu_1u_t\\\mu_0\mu_1u_y\\\nu_1u_x\end{pmatrix}+$$
$$+\begin{pmatrix}C&0&0&0\\0&C&0&0\\0&0&C&0\\0&0&0&C\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}\mu_0u\\\mu_0\mu_1u_t\\\mu_0\mu_1u_y\\\nu_1u_x\end{pmatrix}+\text{младшие члены}=0.$$

Здесь младшие члены — это линейные комбинации величин $\mu_0u$, $\mu_0\mu_1u_t$, $\mu_0\mu_1u_y$, $\nu_1u_x$.

В силу того, что вектор $\nu_1u_x$ равен нулю в некоторой окрестности границы, можно считать, что он на границе удовлетворяет произвольным однородным линейным соотношениям. В качестве таких соотношений могут быть взяты некоторые граничные условия, например, те же самые, что и условия, которым удовлетворяет вектор $u$. При этом, как нетрудно проверить, будет обеспечено выполнение условия диссипативности для только что выписанной расширенной системы, которой удовлетворяют $\mu_0u$, $\mu_0\mu_1u_t$, $\mu_0\mu_1u_y$, $\nu_1u_x$. Пользуясь этой диссипативностью, нетрудно вывести неравенство:

$$\max_{T\geqslant t\geqslant 0}\iint\limits_{G,\,x>0}\nu_1^2(Au_x,\ u_x)\leqslant$$
$$\leqslant\text{const}\iint\limits_{\substack{t=0\\G,\,x>0}}[(Au,\ u)+(Bu_x,\ Bu_x)+(Au_y,\ u_y)+\nu_1^2(Au_x,\ u_x)]\,dx\,dy\leqslant$$
$$\leqslant\text{const}\iint\limits_{\substack{t=0\\G,\,x>0}}[(Au,\ u)+(Bu_x,\ Bu_x)+(Au_y,\ u_y)+x^2(Au_x,\ u_x)]\,dx\,dy,$$

оценивающее производные $u_x$ во внутренних точках области $G$.

Для получения оценок производных порядка выше первого ту расширенную систему с диссипативными граничными условиями, которая использовалась при оценке первых производных, подвергают следующему расширению. Это расширение выполняется в точности по той же схеме, что и описанное сейчас расширение исходной системы. Только теперь роль исходного вектора $u$ должен играть составной вектор, векторными компонентами которого являются $\mu_0 u$, $\mu_0\mu_1 u_t$, $\mu_0\mu_1 u_y$, $\nu_1 u_x$. В результате расширения мы теперь придем к симметрической гиперболической системе с диссипативными граничными условиями, которая позволит нам оценить уже вторые производные от $u$.

При построении описываемого расширения мы будем использовать производные по $x$ от исходного составного вектора, умноженные на неотрицательный «срезающий» множитель $\nu_2(x)$, равный нулю в некоторой полоске вблизи $x=0$ (аналогично множителю $\nu_1(x)$, использованному при первом расширении). Наличие срезающих множителей $\nu_1$, $\nu_2$ приводит к тому, что квадратичные интегралы от вторых производных, которые нам удается оценить, будут эти срезающие множители содержать. Таким образом, мы, в частности, оценим

$$\max_t \iint\limits_{\substack{G,\, x>0\\ t=\mathrm{const}}} \nu_1^2\nu_2^2 (Au_{xx},\ u_{xx})\,dx\,dy,$$

$$\max_t \iint\limits_{\substack{G,\, x>0\\ t=\mathrm{const}}} \nu_1^2 (Au_{xy},\ u_{xy})\,dx\,dy.$$

По той же схеме, с помощью дальнейших последовательных расширений, оцениваются во внутренних подобластях интегралы от высших производных.

На самом деле, вместо $\nu_1(x)$, $\nu_2(x)$, ... обращающихся в нуль в некоторых окрестностях границы $x=0$, можно взять как в качестве $\nu_1$, так и в качестве $\nu_2$, $\nu_3$, ..., одну и ту же $\nu(x)\equiv x$, обращающуюся в нуль только на границе $x=0$. Конструкция с множителями $\nu_1(x)$, $\nu_2(x)$, ... выглядит несколько прозрачнее, потому мы с нее и начали изложение. Читатель без труда проверит, что во всех приведенных выше рассуждениях и формулах, действительно, можно считать $\nu_1(x)=\nu_2(x)=\ldots=x$. Полученная с помощью $\nu_1(x)=x$ оценка $u$ и первых производных

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \sqrt{\iint\limits_{\substack{G,\, x>0\\ t=\mathrm{const}}} [(Au,\ u)+(Au_t,\ u_t)+(Bu_x,\ Bu_x)+ +x^2(Au_x,\ u_x)+(Au_y,\ u_y)]\,dx\,dy} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \sqrt{\iint\limits_{\substack{G,\, x>0\\ t=0}} [(Au,\ u)+(Bu_x,\ Bu_x)+x^2(Au_x,\ u_x)+(Au_y,\ u_y)]\,dx\,dy},$$

ведет к неравенству

$$\|u\|_U \leqslant \text{const}\, \|\varphi\|_\Phi,$$

если для оценки решения $u$ и начальных данных $\varphi$ ввести следующие нормы:

$$\|u\|_U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left\{\iint\limits_{\substack{G,\, x>0 \\ t=\text{const}}} [(Au,\ u)+(Au_t,\ u_t)+(Bu_x,\ Bu_x)+ + x^2(Au_x,\ u_x)+(Au_y,\ u_y)]\, dx\, dy\right\} dt} + \\ + \max_{0\leqslant t\leqslant T} \sqrt{\iint\limits_{\substack{G,\, x>0 \\ t=\text{const}}} [(Au,\ u)+(Bu_x,\ Bu_x)+ + x^2(Au_x,\ u_x)+(Au_y,\ u_y)]\, dx\, dy},$$

$$\|\varphi\|_\Phi = \\ = \sqrt{\iint\limits_{\substack{G,\, t=0 \\ x>0}} [(A\varphi,\ \varphi)+(B\varphi_x,\ B\varphi_x)+x^2(A\varphi_x,\ \varphi_x)+(A\varphi_y,\ \varphi_y)]\, dx\, dy}.$$

Константа в оценке нормы решения через норму начальных данных оценивается через коэффициенты системы и граничных условий, через производные этих коэффициентов и через геометрию области.

Приведенная сейчас оценка решения, очевидно, обобщает на смешанную задачу с диссипативными граничными условиями неравенства для норм решений, которые мы получили во вводной части (§ 5) для простейшей гиперболической системы одномерных уравнений акустики. Надо сказать, что и вывод, приведенный здесь, делался по той же схеме, что и в § 5, но только теперь мы обращали внимание на большее число подробностей, имея в виду менее элементарные задачи. Мы видели, что чем больше гладкость коэффициентов и начальных данных, тем для большего числа производных удается получить оценку.

На этом мы закончим изложение техники, с помощью которой оцениваются квадратичные интегралы от решения и от его производных. Мы изложили самую трудную часть этой техники на задачах с тремя ($x$, $y$, $t$) независимыми переменными. Применение ее к более простому случаю двух независимых переменных ($x$, $t$) не должно вызывать каких-либо недоразумений. Сделаем, однако, несколько важных для дальнейшего замечаний.

Изучая смешанную задачу для системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} + K\frac{\partial u}{\partial x} + mu = 0$$

в каноническом виде

$$K=\begin{pmatrix} k_1 & & & & & & & & 0\\ & k_2 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & k_{n_0} & & & & & \\ & & & & -k_{n_0+1} & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & -k_{n_1} & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (k_i>0)$$

в области $0\leqslant x\leqslant l$ с двумя боковыми границами $x=0$, $x=l$, на которых заданы диссипативные граничные условия:

$$u_i=\sum_{j=n_0+1}^{n_1}\alpha_{ij}u_j \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n_0 \quad \text{при} \quad x=0,$$

$$u_i=\sum_{j=1}^{n_0}\beta_{ij}u_j \qquad i=n_0+1,\ \ldots,\ n_1 \quad \text{при} \quad x=l,$$

и строя расширенную систему для первых производных, нам будет удобно считать неизвестными функциями в ней векторы:

$$\mu u, \quad u_t, \quad x(x-l)\,u_x.$$

Обращающийся в нуль на обеих границах множитель $x(x-l)$ при производных $u_x$ вводится здесь с той же целью, с которой в задаче с одной границей $x=0$ вводился множитель $x$. Читателю рекомендуется проделать аккуратно построение соответствующей расширенной системы и убедиться, что получающиеся оценки записываются в сокращенном виде

$$\|u\|_U\leqslant \text{const}\,\|\varphi\|_\Phi,$$

если определить нормы в пространстве $U$ решений и в пространстве $\Phi$ начальных данных формулами:

$$\|u\|_U=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^l[(u,\ u)+(u_t,\ u_t)+(Ku_x,\ Ku_x)+x^2(x-l)^2(u_x,\ u_x)]\,dx}\ +$$

$$+\max_{0\leqslant t\leqslant T}\sqrt{\int_{\substack{0\\ t=\text{const}}}^{l}[(u,\ u)+(Ku_x,\ Ku_x)+x^2(x-l)^2(u_x,\ u_x)]\,dx},$$

$$\|\varphi\|_\Phi=\sqrt{\int_0^l[(\varphi,\ \varphi)+(K\varphi_x,\ K\varphi_x)+x^2(x-l)^2(\varphi_x,\ \varphi_x)]\,dx}.$$

Теперь мы кратко остановимся на том, как развитая здесь техника позволяет получить теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных данных, правых частей и коэффициентов уравнений в случае симметрических гиперболических систем.

Оценку разности решений двух систем:

$$A_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + B_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + C_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + Q_1 u_1 = f_1,$$

$$A_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} + B_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + C_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + Q_2 u_2 = f_2$$

мы будем проводить в области, ограниченной снизу плоскостью $t=0$, а сверху «шапочкой», удовлетворяющей неравенствам Гамильтона — Якоби, полученным как с помощью одной, так и другой систем.

Определим норму $\| v \|$ некоторой вектор-функции $v$ как

$$\| v \| = \max_t \sqrt{\iint\limits_{t=\text{const}} \left(\sum v_i^2\right) dx\,dy}.$$

Двойной интеграл здесь берется по внутренней части сечения $t=\text{const}$, лежащей внутри «шапочки». Предположим, что для решений обеих систем ограничены нормы

$$\| u_i \|, \quad \left\| \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\|, \quad \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x} \right\|.$$

Для этого достаточно предположить, что коэффициенты и начальные данные обеих систем достаточно гладкие, но мы не будем останавливаться на доказательстве этого факта.

Рассмотрим разность уравнений наших систем. Эту разность можно переписать в виде следующего уравнения для разности решений $u_1 - u_2$:

$$A_1 \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial t} + B_1 \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial x} + C_1 \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial y} + Q_1 (u_1 - u_2) =$$

$$= f_1 - f_2 - (A_1 - A_2) \frac{\partial u_2}{\partial t} - (B_1 - B_2) \frac{\partial u_2}{\partial x} - (C_1 - C_2) \frac{\partial u_2}{\partial y} - (Q_1 - Q_2) u_2.$$

Если $\| A_1 - A_2 \|$, $\| B_1 - B_2 \|$, $\| C_1 - C_2 \|$, $\| Q_1 - Q_2 \|$, $\| f_1 - f_2 \|$ малы, то мала и вся сумма (по нашей норме $\| \; \|$), вынесенная в правую часть этого равенства.

Рассматривая это векторное уравнение как систему для $u_1 - u_2$ и предполагая малость разности начальных данных, т. е. малость $\| u_{10} - u_{20} \|_0$, мы отсюда можем получить оценку малости $\| u_1 - u_2 \|$. Тем самым доказывается, что если начальные данные, коэффициенты и правые части являются достаточно гладкими, то решение непрерывно зависит от всех этих параметров задачи.

Точно так же доказывается непрерывная зависимость решений смешанной задачи от всех определяющих ее величин. При этом только надо предположить, что $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ удовлетворяют одинаковым граничным условиям. На самом деле доказательство можно провести и в случае близких граничных условий, но мы не будем останавливаться на нужных для такого доказательства изменениях техники.

Если бы для всех разбиравшихся нами задач (задача Коши в области под «шапочкой» и смешанная задача при $t>0$, $0\leqslant x\leqslant\leqslant l$) были доказаны теоремы существования, то из доказанной единственности решений и из их непрерывной зависимости от условий задачи вытекала бы их корректность. Мы приведем в дальнейшем доказательство теоремы существования для случая трех независимых переменных $(x, y, z)$.

Остановимся теперь на одном простом, но очень важном для дальнейшего, понятии — понятии обратимой смешанной задачи. Обратимые задачи играют принципиальную роль в теории метода Фурье, изучением которого мы будем заниматься в четвертой главе.

При решении системы

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+k_i\frac{\partial u_i}{\partial x}+\sum_{l=1}^{n} m_{il}u_l=f_i, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n_0,$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}-k_i\frac{\partial u_i}{\partial x}+\sum_{l=1}^{n} m_{il}u_l=f_i, \qquad i=n_0+1,\ \ldots,\ n,$$

$$k_i>0 \qquad (0\leqslant x\leqslant l)$$

с граничными условиями

$$u_i=\sum_{j=n_0+1}^{n}\alpha_{ij}u_j \text{ при } x=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n_0),$$

$$u_i=\sum_{j=1}^{n_0}\beta_{ij}u_j \qquad \text{при } x=l \qquad (i=n_0+1,\ \ldots,\ n)$$

и начальными данными

$$u_i(x,\ 0)=\varphi_i(x),$$

у нас может появиться желание разыскивать решение не при $t\geqslant 0$, а при $t\leqslant 0$. В случае такого «обращения» времени «приходящие» на границу и «уходящие» с границы характеристики меняются ролями. Число граничных условий должно теперь равняться числу характеристик, «приходящих» в старом смысле. Решать задачу в сторону $t<0$ и одновременно в сторону $t>0$ возможно лишь, если число характеристик с положительным наклоном равно числу характеристик с отрицательным наклоном (т. е. если $n=2n_0$) и если граничные условия можно разрешить как относительно римановых инвариантов, связанных с положительным наклоном характеристик ($u_1, u_2, \ldots, u_{n_0}$), так и относительно инвариантов, отвечающих характеристикам с отрицательным наклоном ($u_{n_0+1}, u_{n_0+2}, \ldots, u_{2n_0}$). В этом случае граничные условия можно записать так:

$$\sum_{j=1}^{n_0} \gamma_{ij}u_j = \sum_{j=n_0+1}^{2n_0} \alpha_{ij}u_j \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n_0)$$

на одном из концов ($\det\|\gamma_{ij}\| \neq 0$, $\det\|\alpha_{ij}\| \neq 0$) и аналогичное условие с другими матрицами $\gamma_{ij}$, $\alpha_{ij}$ на другом конце отрезка.

Такие задачи, для разрешимости которых направление времени не играет роли, мы будем называть *обратимыми*.

## § 17. Критерии компактности сеточных функций

Сеточные функции и правила их интерполяции — распространения на всю область, покрытую сеткой. Оценки квадратичных интегралов от проинтерполированных функций через сеточные суммы. Применение критерия компактности. Дифференцируемость пределов и оценки непрерывности пределов и их производных.

При доказательстве теоремы существования решений у симметрических гиперболических систем нам придется пользоваться критериями компактности некоторых семейств функций. Ряд таких критериев был уже приведен в § 9. Цель настоящего параграфа состоит в том, чтобы приспособить эти критерии к последовательностям приближенных решений, которые будут строиться в процессе доказательства теоремы существования. Приближенные решения мы будем получать в виде сеточных функций, определенных на дискретной системе точек $x=ih$, $y=jh$, $t=k\tau$ с целыми $i$, $j$, $k$. Постоянные $h$, $\tau$ называются шагами сетки.

Обычно у нас будет целое семейство сеточных функций, определенных каждая на своей сетке, причем среди этих сеток будут сетки с как угодно малыми шагами $\tau$, $h$. Рассматривая фиксированную сетку, мы обозначим $u(x, y, t)=u(ih, jh, k\tau)$ через $u_{ijk}$ и сформулируем правило интерполяции, позволяющее функции, первоначально заданной только на сетке, сопоставить вполне определенную непрерывную функцию, заданную уже при всех $x$, $y$, $t$. Эту непрерывную функцию, определенную по сеточной $u_{ijk}$, мы в дальнейшем будем опять обозначать $u(x, y, t)$. Значения $u(x, y, t)$ внутри параллелепипеда (ячейки сетки)

$$ih \leqslant x \leqslant (i+1)h, \quad jh \leqslant y \leqslant (j+1)h, \quad k\tau \leqslant t \leqslant (k+1)\tau$$

мы определим формулой

$$
\begin{aligned}
u(x, y, t) = {} & u_{i,j,k}\cdot\left(i+1-\frac{x}{h}\right)\left(j+1-\frac{y}{h}\right)\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right)+\\
& + u_{i,j,k+1}\left(i+1-\frac{x}{h}\right)\left(j+1-\frac{y}{h}\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right)+\\
& + u_{i,j+1,k}\left(i+1-\frac{x}{h}\right)\left(\frac{y}{h}-j\right)\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right)+\\
& + u_{i,j+1,k+1}\cdot\left(i+1-\frac{x}{h}\right)\left(\frac{y}{h}-j\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right)+\\
& + u_{i+1,j+1,k}\cdot\left(\frac{x}{h}-i\right)\left(\frac{y}{h}-j\right)\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right)+\\
& + u_{i+1,j+1,k+1}\left(\frac{x}{h}-i\right)\left(\frac{y}{h}-j\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right)+\\
& + u_{i+1,j,k}\cdot\left(\frac{x}{h}-i\right)\left(j+1-\frac{y}{h}\right)\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right)+\\
& + u_{i+1,j,k+1}\cdot\left(\frac{x}{h}-i\right)\left(j+1-\frac{y}{h}\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right)=\\
& = \sum_{i',\,j',\,k'} \alpha_{i',j',k'}(x, y, t)\cdot u_{i',j',k'} \qquad \alpha_{i',j',k'} \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

В последней сумме $i'$, $j'$, $k'$ пробегают значения, соответствующие вершинам параллелепипеда, а через $\alpha_{i',j',k'}(x, y, t)$ мы обозначили коэффициенты интерполяционной формулы, подробно выписанные в первых строках. Внутри параллелепипеда $u(x, y, t)$ будет линейной по $x$ при фиксированных $y$, $t$, линейной по $t$ при постоянных $x$, $y$, линейной по $y$ при фиксированных $x$, $t$. Нетрудно убедиться, что в каждой точке $(x, y, t)$ параллелепипеда, сумма всех коэффициентов $\alpha_{i',j',k'}$ равна единице. Действительно, если $u_{i,j,k}$ во всех вершинах равна 1, то $u(x, y, t)$, будучи линейной по каждому аргументу, оказывается единицей при всех $x$, $y$, $t$ внутри параллелепипеда. Для такой $u_{ijk}$ очевидно, что $u(x, y, t)$ получится единицей во всех внутренних точках, т. е.

$$
u(x, y, t) = 1 = \sum_{i',\,j',\,k'} \alpha_{i'j'k'}(x, y, t)\, u_{i'j'k'} = \sum_{i'j'k'} \alpha_{i'j'k'}(x, y, t).
$$

Интегрируя доказанное сейчас равенство

$$
\int\limits_{ih}^{(i+1)h}\int\limits_{jh}^{(j+1)h}\int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau} 1\cdot dx\,dy\,dt = \sum_{i'j'k'}\int\limits_{ih}^{(i+1)h}\int\limits_{jh}^{(j+1)h}\int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau} \alpha_{i'j'k'}(x, y, t)\,dx\,dy\,dt,
$$

мы приходим к выводу, что сумма интегралов в правой части равна $h^2\tau$. Любые два интеграла слагаемых в этой сумме равны между собой, как это легко вытекает из следующих свойств симметрии:

$$\alpha_{ij'k'}(ih+\xi,\ y,\ t)=\alpha_{i+1j'k'}([i+1]h-\xi,\ y,\ t),$$
$$\alpha_{i'jk'}(x,\ jh+\eta t)=\alpha_{i'j+1k'}(x,\ [j+1]h-\eta,\ t),$$
$$\alpha_{i'j'k}(x,\ y,\ k\tau+\delta)=\alpha_{i'j'k+1}(x,\ y,\ [k+1]\tau-\delta).$$

Поэтому для каждого из коэффициентов $\alpha_{i'j'k'}(x,\ y,\ t)$

$$\int\limits_{ih}^{(i+1)h}\int\limits_{jh}^{(j+1)h}\int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau}\alpha_{i'j'k}(x,\ y,\ t)\,dx\,dy\,dt=\frac{h^2\tau}{8}.$$

В этом можно убедиться и непосредственной выкладкой.

Воспользуемся тем, что

$$\alpha_{i'j'k'}\geqslant 0,\qquad \sum_{i'j'k'}\alpha_{i'j'k'}(x,\ y,\ t)=1,$$

и применим неравенство Буняковского:

$$u^2(x,\ y,\ t)=\Big(\sum_{i'j'k'}\alpha_{i'j'k'}(x,\ y,\ t)\,u_{i'j'k'}\Big)^2=$$
$$=\Big(\sum\sqrt{\alpha_{i'j'k'}}\cdot\sqrt{\alpha_{i'j'k'}}\,u_{i'j'k'}\Big)^2\leqslant\sum\alpha_{i'j'k'}\sum\alpha_{i'j'k'}u_{i'j'k'}^2=$$
$$=\sum_{i'j'k'}\alpha_{i'j'k'}(x,\ y,\ t)\,u_{i'j'k'}^2.$$

Полученный таким образом вывод

$$u^2(x,\ y,\ t)\leqslant\sum_{i'j'k'}\alpha_{i'j'k'}(x,\ y,\ t)\,u_{i'j'k'}^2$$

мы проинтегрируем по всему параллелепипеду

$$\int\limits_{ih}^{(i+1)h}\int\limits_{jh}^{(j+1)h}\int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau}u^2(x,\ y,\ t)\,dx\,dy\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\sum\Big[\int\int\int\alpha_{i'j'k'}(x,\ y,\ t)\,dx\,dy\,dt\Big]u_{i'j'k'}^2=\frac{h^2\tau}{8}\sum u_{i'j'k'}^2.$$

Итак,

$$\underset{\substack{\text{по сеточному}\\ \text{параллелепипеду}}}{\int\int\int}u^2(x,\ y,\ t)\,dx\,dy\,dt\leqslant\frac{h^2\tau}{8}\sum_{\substack{\text{по всем восьми}\\ \text{вершинам}\\ \text{параллелепипеда}}}u^2.$$

Если некоторая область $G$ в пространстве $x,\ y,\ t$ покрывается полностью некоторым конечным числом ячеек сетки (сеточными параллелепипедами), то, суммируя доказанные неравенства по всем этим ячейкам (каждая вершина — узел сетки — принадлежит не более, чем восьми примыкающим к ней параллелепипедам), получаем неравенство

$$\iiint\limits_G u^2(x, y, t)\,dx\,dy\,dt \leqslant h^2\tau \sum_{\substack{\text{по всем}\\ \text{узлам}}} u^2(x, y, t).$$

Это неравенство показывает, что если мы построим какую-либо сеточную функцию и оценим для нее

$$h^2\tau \sum_{\substack{\text{по всем}\\ \text{узлам сетки}}} u^2(x, y, t),$$

то, продолжив интерполяцией эту сеточную функцию на всю область $G$, покрытую сеткой, мы можем для этого продолжения автоматически использовать оценку интеграла

$$\iiint\limits_G u^2(x, y, t)\,dx\,dy\,dt,$$

той же самой величиной, которой оценена сеточная сумма. На каждом фиксированном сеточном слое $t = k\tau = \text{const}$

$$u(x, y, t) = \alpha_{ijk}(x, y, t)\,u_{ijk} + \alpha_{i+1,jk}(x, y, t)\,u_{i+1,jk} + \\ + \alpha_{ij+1,k}(x, y, t)\,u_{ij+1k} + \alpha_{i+1,j+1,k}(x, y, t)\,u_{i+1,j+1},$$

(все остальные коэффициенты $\alpha_{i'j'k+1}(x, y, k\tau) = 0$). Повторением с очевидными упрощениями и видоизменениями, только что проведенных рассуждений доказывается неравенство

$$\iint\limits_{\substack{t=\text{const}\\ G}} u^2(x, y, k\tau)\,dx\,dy \leqslant h^2 \sum_{\substack{\text{по всем узлам}\\ \text{слоя } t=k\tau}} u^2(x, y, k\tau).$$

При $k\tau \leqslant t \leqslant (k+1)\tau$ и при нашем способе интерполяции

$$u(x, y, t) = \frac{(k+1)\tau - t}{\tau}\,u(x, y, k\tau) + \frac{t - k\tau}{\tau}\,u(x, y, [k+1]\tau),$$

$$u^2(x, y, t) \leqslant \frac{(k+1)\tau - t}{\tau}\,u^2(x, y, k\tau) + \frac{t - k\tau}{\tau}\,u^2(x, y, [k+1]\tau),$$

$$\iint\limits_{\substack{t=\text{const}\\ G}} u^2(x, y, t)\,dx\,dy \leqslant \frac{(k+1)\tau - t}{\tau} \iint\limits_{\substack{t=k\tau\\ G}} u^2(x, y, k\tau)\,dx\,dy + \\ + \frac{t-k\tau}{\tau} \iint\limits_{\substack{t=(k+1)\tau\\ G}} u^2(x, y, [k+1]\tau)\,dx\,dy \leqslant \\ \leqslant \max\left\{\iint\limits_{t=k\tau} u^2\,dx\,dy,\ \iint\limits_{t=(k+1)\tau} u^2\,dx\,dy\right\}.$$

Поэтому при любом $t$

$$\iint\limits_{\substack{t=\text{const}\\ G}} u^2(x, y, t)\,dx\,dy \leqslant \max_{\substack{\text{по всем}\\ \text{сеточным}\\ \text{слоям}}} \left\{\sum_{\substack{\text{по слою}\\ t=k\tau}} u^2(x, y, k\tau)\,h^2\right\}.$$

Теперь мы докажем, что оценки квадратичных интегралов от производных проинтерполированной $u(x, y, t)$ вытекают из оценок соответствующих сумм квадратов разностных отношений сеточной функции. Обозначим через $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ разностное отношение

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \left.\frac{\Delta u}{\Delta t}\right|_{x=ih,\ y=jk,\ t=k\tau} = \frac{u(x,\ y,\ [k+1]\tau) - u(x,\ y,\ k\tau)}{\tau}.$$

На интервале времени $(k+1)\tau > t > k\tau$, производная по $t$ у нашей проинтерполированной $u(x, y, t)$ при фиксированных $x$, $y$ постоянна и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,\ y,\ t) = \sum_{i'j'} \alpha_{i'j'k}(x,\ y,\ k\tau)\left[\frac{\Delta u}{\Delta t}\right]_{i'h,\ j'h,\ k\tau}.$$

Поэтому на этом интервале времени

$$u_t^2(x,\ y,\ t) \leqslant \sum_{i'j'} \alpha_{i'j'k}(x,\ y,\ k\tau)\left[\frac{\Delta u}{\Delta t}\right]^2_{i'h,\ j'h,\ k\tau},$$

$$\iint\limits_{k\tau \leqslant t \leqslant (k+1)\tau} u_t^2(x,\ y,\ t)\,dx\,dy \leqslant \sum_{\substack{\text{по слою}\\ t=k\tau}} h^2\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2.$$

Теперь уже очевидно, что *)

$$\max_t \iint\limits_{\substack{t=\text{const}\\ G}} u_t^2(x,\ y,\ t)\,dx\,dy \leqslant \max_{\substack{\text{по всем}\\ \text{сеточным}\\ \text{слоям}}} \left\{\sum_{\substack{\text{по слою}\\ t=k\tau}} h^2\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2\right\}.$$

Обозначая вычисляемые по сеточной функции разностные отношения:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \left.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right|_{\substack{x=ih\\ y=jh\\ t=k\tau}} = \frac{u([i+1]\,h,\ y,\ t) - u(ih,\ y,\ t)}{h},$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta y} = \left.\frac{\Delta u}{\Delta y}\right|_{\substack{x=ih\\ y=jh\\ t=k\tau}} = \frac{u(x,\ [j+1]\,h,\ t) - u(x,\ jh,\ t)}{h},$$

отметим еще следующие неравенства для $u(x, y, t)$, построенной при помощи описанной интерполяции:

$$\int\limits_{G\left(\substack{y=\text{const}\\ t=\text{const}}\right)} u_x^2(x,\ y,\ t)\,dx \leqslant \max_{\substack{\text{по сеточным}\\ \text{рядам}\\ y=jh\\ t=k\tau}} \left\{\sum_{x=ih}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 h\right\},$$

$$\int\limits_{G\left[\substack{y=\text{const}\\ t=\text{const}}\right]} u_y^2(x,\ y,\ t)\,dy \leqslant \max_{\substack{x=ih\\ t=k\tau}} \left\{\sum_{y=jh}\left(\frac{\Delta u}{\Delta y}\right)^2 h\right\}.$$

---

*) Максимум по $t$ следует брать только по тем $t$, для которых $u_t$ существует, исключив тем самым из рассмотрения конечное число значений $t$.

Интегралы в этих неравенствах берутся по отрезкам прямых, параллельным координатным осям. Докажем первое из них. Второе обосновывается заменой обозначений $x$ на $y$ и наоборот.

При $ih \leqslant x \leqslant (i+1)h$, $jh \leqslant y \leqslant (j+1)h$, $t = k\tau = \text{const}$

$$u(x, y, t) = \frac{(j+1)h - y}{h} u(x, jh, k\tau) + \frac{y - jh}{h} u(x, [j+1]h, k\tau),$$

$$u_x(x, y, t) = \frac{(j+1)h - y}{h} u_x(x, jh, k\tau) + \frac{y - jh}{h} u_x(x, [j+1]h, k\tau),$$

$$u_x^2(x, y, t) \leqslant \frac{(j+1)h - y}{h} u_x^2(x, jh, k\tau) + \frac{y - jh}{h} u_x^2(x, [j+1]h, k\tau) \equiv$$
$$\equiv \frac{(j+1)h - y}{h} \left[\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]^2_{\substack{x = ih \\ y = jh \\ t = k\tau}} + \frac{y - jh}{h} \left[\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]^2_{\substack{x = ih \\ y = (j+1)h \\ t = k\tau}},$$

$$\int\limits_{ih}^{(i+1)h} u_x^2(x, y, t)\, dx \leqslant \frac{(j+1)h - y}{h} \left[\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]^2_{i, jk} h + \frac{y - jh}{h} \left[\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]^2_{i, j+1, k} h.$$

Суммируя эти неравенства по $i$, приходим к доказываемому утверждению:

$$\int\limits_{\substack{y = \text{const} \\ t = \text{const}}} u_x^2(x, y, t)\, dx \leqslant \frac{(j+1)h - y}{h} \sum_i \left[\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]^2_{i, jk} h +$$
$$+ \frac{y - jh}{h} \sum_i \left[\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]_{i, j+1, k} h \leqslant \max_{j, k} \left(\sum_i \left[\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]^2_{i, j, k} h\right).$$

Итак, мы показали, что если сетки с шагами $h$, $\tau$ покрывают некоторую область $G$, то из неравенств для сеточных функций (по сетке, покрывающей $G$):

$$\sum_{x, y, t} u^2(x, y, t) h^2 \tau \leqslant \text{const},$$

$$\max_t \sum_{x, y} u^2(x, y, t) h^2 \leqslant \text{const},$$

$$\max_t \sum_{x, y} \left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2 h^2 \leqslant \text{const},$$

$$\max_{t, y} \sum_x \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 h \leqslant \text{const},$$

$$\max_{t, x} \sum_y \left(\frac{\Delta u}{\Delta y}\right)^2 h \leqslant \text{const},$$

вытекают аналогичные неравенства:

$$\iiint\limits_G u^2(x,\ y,\ t)\,dx\,dy\,dt \leqslant \text{const},$$

$$\max_t \iint u^2(x,\ y,\ t)\,dx\,dy \leqslant \text{const},$$

$$\max_t \iint u_t^2(x,\ y,\ t)\,dx\,dy \leqslant \text{const},$$

$$\max_{t,\ y} \int u_x^2(x,\ y,\ t)\,dx \leqslant \text{const},$$

$$\max_{t,\ x} \int u_y^2(x,\ y,\ t)\,dy \leqslant \text{const},$$

которым удовлетворяют функции, продолженные (проинтерполированные) на всю $G$. Константы в соответствующих неравенствах для сеточных и продолженных функций одинаковы.

Доказанное утверждение позволяет нам воспользоваться теоремой 2 из § 9 главы I и следствием из этой теоремы и теоремы Арцела (см. тот же § 9).

Цель, к которой мы стремились, исследуя продолжения сеточных функций, — достигнута. На компактности будет основано доказательство теоремы существования (см. §§ 19, 20).

С очевидными упрощениями аналогичное исследование свойств продолжений (интерполяций) может быть проведено и для сеточных функций $u(x,\ t)$ от двух переменных $x = ih$, $t = k\tau$. В каждой ячейке

$$ih \leqslant x \leqslant (i+1)\,h, \quad k\tau \leqslant t \leqslant (k+1)\,\tau,$$

мы проинтерполируем такую функцию линейно по $x$ при $t = \text{const}$ и линейно по $t$, при постоянном $x$. Не останавливаясь на доказательстве, ограничимся только формулировкой важных нам свойств такой интерполяции.

Из неравенств для сеточных функций (по сетке, покрывающей область $G$):

$$\sum_{x,\ t} u^2(x,\ t)\,h\tau \leqslant \text{const},$$

$$\max_t \sum_x u^2(x,\ t)\,h \leqslant \text{const},$$

$$\max_t \sum_x \left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2 h \leqslant \text{const},$$

$$\max_t \sum_x \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 h \leqslant \text{const},$$

вытекают, для продолженных на $G$ непрерывных $u(x,\ y,\ t)$, следующие неравенства, имеющие, соответственно, те же постоянные:

$$\iint_G u^2(x,\ t)\,dx\,dt \leqslant \text{const},$$

$$\max_t \int u^2(x,\ t)\,dx \leqslant \text{const},$$

$$\max_t \int u_t^2(x,\ t)\,dx \leqslant \text{const},$$

$$\max_t \int u_x^2(x,\ t)\,dx \leqslant \text{const}.$$

Теорема 1 из § 9 главы I и там же сформулированное следствие из нее и из теоремы Арцела позволяют для прямоугольной области $G$: $(x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$ вывести из этих неравенств утверждение о компактности (относительно равномерной сходимости) любого бесконечного семейства функций, удовлетворяющих выписанным неравенствам.

Теперь мы уже имеем критерий компактности для сеточных функций как от трех, так и от двух переменных.

Для сеточных функций от трех переменных $(x,\ y,\ t)$ мы в дальнейшем будем пользоваться критерием компактности в несколько иной формулировке, а именно мы будем требовать выполнения неравенств:

$$\max_t \sum_{x,\ y} u^2(x,\ y,\ t)\,h^2 \leqslant \text{const},$$

$$\max_t \sum_{x,\ y} \left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2 h^2 \leqslant \text{const},$$

$$\max_t \sum_{x,\ y} \left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta u}{\Delta y}\right)^2\right] h^2 \leqslant \text{const},$$

$$\max_t \sum_{x,\ y} \left[\frac{\Delta^2 u}{\Delta x \Delta y}\right]^2 h^2 \leqslant \text{const},$$

левые части которых содержат суммы только по целым сеточным слоям $t = \text{const}$ и не содержат сумм по отдельным сеточным рядам $(t = \text{const},\ y = \text{const})$, $(t = \text{const},\ x = \text{const})$, которые участвовали в критерии, обоснованном выше. Вместо этого мы включили суммы по слою от квадратов вторых разностей

$$\left.\frac{\Delta^2 u}{\Delta x \Delta y}\right|_{x,\ y} = \frac{\Delta}{\Delta y}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \frac{u\,(x+h,\ y+h) - u\,(x,\ y+h) - u\,(x+h,\ y) + u\,(x,\ y)}{h^2}.$$

Покажем, что из сформулированных сейчас неравенств следует выполнение уже обоснованного критерия компактности. Область $G$ мы считаем прямоугольным параллелепипедом с гранями, параллельными координатным плоскостям:

$$x_1 \leqslant x \leqslant x_2 = x_1 + X,$$
$$y_1 \leqslant y \leqslant y_2 = y_1 + Y,$$
$$t_1 \leqslant t \leqslant t_2.$$

Пусть

$$\sum_{x,\,y} \left(\frac{\Delta^2 u}{\Delta x \Delta y}\right)^2 h^2 \leqslant \frac{K^2}{XY},$$

$$\sum_{x,\,y} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 h^2 \leqslant L^2.$$

Обозначим через $S(y_0)$ сумму

$$S(y_0) = \sum_{\substack{x \\ y = y_0}} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 h,$$

и оценим разность $S(y_0 + h) - S(y_0)$

$$|S(y_0+h) - S(y_0)| =$$
$$= \left| \sum_x \left\{ \left[\frac{u(x+h,\, y_0+h) - u(x,\, y_0+h)}{h}\right]^2 h - \left[\frac{u(x+h,\, y_0) - u(x,\, y_0)}{h}\right]^2 h \right\} \right| =$$
$$= \left| \sum_x \left[\frac{u(x+h,\, y_0+h) - u(x,\, y_0+h) - u(x+h,\, y_0) + u(x,\, y_0)}{h^2}\right] \left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{y=y_0} h^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{y=y_0+h} h^2\right] \right| \leqslant \sum_x \left|\frac{\Delta^2 u}{\Delta x \Delta y}\right|_{y=y_0} \cdot \left|\frac{\Delta u}{\Delta x}\right|_{y=y_0} \cdot h^2 +$$
$$+ \sum_x \left|\frac{\Delta^2 u}{\Delta x \Delta y}\right|_{y=y_0} \cdot \left|\frac{\Delta u}{\Delta x}\right|_{y=y_0+h} h^2.$$

Чтобы оценить $S(y') - S(y'')$, достаточно просуммировать эти неравенства по $y_0\,(y' \leqslant y_0 \leqslant y'' - h)$. При этом мы только усилим оценку, если правую часть просуммируем по всей сетке, а получившуюся сумму оценим сверху с помощью неравенства Буняковского. Мы получаем таким образом:

$$|S(y') - S(y'')| \leqslant 2 \sqrt{\sum_{x,\,y} \left(\frac{\Delta^2 u}{\Delta x \Delta y}\right)^2 h^2} \sqrt{\sum_{x,\,y} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 h^2} \leqslant \frac{2KL}{\sqrt{XY}}.$$

Кроме того, очевидно, что

$$\sum_y S(y)\, h = \sum_{x,\,y} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 h^2 \leqslant L^2.$$

Отсюда следует существование такого $y'$, что

$$S(y') \leqslant \frac{L^2}{Y}.$$

Теперь очевидно, что для любого $y$

$$\sum_{\substack{x \\ y=\text{const} \\ t=\text{const}}} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 h = S(y) \leqslant |S(y')| + |S(y) - S(y')| \leqslant \frac{L^2}{Y} + \frac{2KL}{XY}.$$

Нам удалось оценить $\sum\limits_x \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 h$ через размеры $G$, через

$$L^2 = \sum_{x,\, y} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 h^2 \leqslant \sum_{x,\, y} \left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta u}{\Delta y}\right)^2\right] h^2$$

и через

$$\frac{K^2}{XY} = \sum_{x,\, y} \left(\frac{\Delta^2 u}{\Delta x \Delta y}\right)^2 h^2.$$

Оценка суммы $\sum\limits_y \left(\frac{\Delta u}{\Delta y}\right)^2 h$ получается сменой обозначений переменных $x$, $y$. Удобная для нас форма критерия компактности в трехмерном случае обоснована.

Задача. Сформулируйте и докажите аналогичный критерий для случая четырех независимых переменных $x$, $y$, $z$, $t$.

Обоснованные критерии компактности (двумерный и трехмерный) дают возможность, построив удовлетворяющие им последовательности сеточных функций, утверждать, что из них можно выбрать подпоследовательности, равномерно сходящиеся к некоторой непрерывной функции. Иногда есть возможность установить дифференцируемость этой предельной функции. Для этого, оказывается, достаточно потребовать, чтобы наряду с сеточными $u(x, y, t)$ критериям компактности удовлетворяли и все их первые разностные отношения $\frac{\Delta u}{\Delta t}$, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta u}{\Delta y}$. В самом деле, рассмотрим наряду с множеством сеточных $\{u_h(x, y, t)\}$ еще совокупности таких функций $\{v_h(x, y, t)\}$, $\{w_h(x, y, t)\}$, $\{g_h(x, y, t)\}$, которые определим при помощи равенств

$$v_h(x, y, t) = \frac{u(x+h, y, t) - u(x, y, t)}{h} \equiv \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

$$w_h(x, y, t) = \frac{u(x, y+h, t) - u(x, y, t)}{h} = \frac{\Delta u}{\Delta y},$$

$$g_h(x, y, t) = \frac{u(x, y, t+\tau) - u(x, y, t)}{\tau} = \frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

Выберем из $\{u_h(x, y, t)\}$ сходящуюся подпоследовательность, из нее выберем подпоследовательность такую, чтобы построенные по ней $v_h(x, y, t)$ тоже сходились. Из этой последовательности выберем в свою очередь подпоследовательность так, чтобы ее $w_h(x, y, t)$ были сходящимися. Переходом к следующей подпоследовательности мы добьемся сходимости также и $g_h(x, y, t)$. Итак, при выполнении критерия компактности для $u_h$, $\frac{\Delta u_h}{\Delta t}$, $\frac{\Delta u_h}{\Delta x}$, $\frac{\Delta u_h}{\Delta y}$, из семейства сеточных функций $u_h(x, y, t)$ можно выбрать подпоследовательность такую, что непрерывные функции $u_h$, $v_h$, $w_h$, $g_h$, полученные описанной выше интерполяцией с сеток на всю покрываемую ими область, будут равномерно сходиться к непрерывным функциям $\hat{u}(x, y, t)$, $\hat{v}(x, y, t)$, $\hat{w}(x, y, t)$, $\hat{g}(x, y, t)$, так, что

$$|u_h(x, y, t) - \hat{u}(x, y, t)| < \varepsilon(h, \tau),$$

$$|v_h(x, y, t) - \hat{v}(x, y, t)| < \varepsilon(h, \tau),$$

$$|w_h(x, y, t) - \hat{w}(x, y, t)| < \varepsilon(h, \tau),$$

$$|g_h(x, y, t) - \hat{g}(x, y, t)| < \varepsilon(h, \tau)$$

$$\varepsilon(h, \tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} h \to 0 \\ \tau \to 0 \end{cases}$$

(мы будем в качестве $u_h$, $v_h$, $w_h$ рассматривать теперь только эту сходящуюся подпоследовательность).

Про $u_h$, $v_h$, $w_h$, $g_h$, определенные на всей плоскости, нам, кроме того, известно выполнение неравенств, дающих оценку их непрерывности:

$$|u_h| \leqslant M,$$

$$|u_h(x_1, y_1, t_1) - u_h(x_2, y_2, t_2)| \leqslant N\left(\sqrt{x_1 - x_2} + \sqrt{y_1 - y_2} + \sqrt{t_1 - t_2}\right),$$

$$|v_h| \leqslant M,$$

$$v_h(x_1, y_1, t_1) - v_h(x_2, y_2, t_2)| \leqslant N\left(\sqrt{x_1 - x_2} + \sqrt{y_1 - y_2} + \sqrt{t_1 - t_2}\right)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Мы воспользуемся этими неравенствами для того, чтобы доказать равенство

$$\hat{u}(x_2, y_0, t_0) - \hat{u}(x_1, y_0, t_0) = \int_{x_1}^{x_2} \hat{v}(x, y_0, t_0)\, dx,$$

которым связаны значения функций-пределов $\hat{u}$, $\hat{v}$ на произвольной прямой $y = y_0$, $t = t_0$, параллельной оси $x$.

Рассмотрим сетку с некоторыми шагами $h$, $\tau$, соответствующие сеточные $u_h$, $v_h$ и их интерполяцию на покрытую сеткой область. Эту интерполяцию мы обозначаем теми же буквами $u_h(x, y, t)$,

$v_h(x, y, t)$. Положив $x_1 = i_1 h + \xi_1$, $x_2 = i_2 h + \xi_2$, $y_0 = jh + \eta$, $t_0 = k\tau + \delta$, $|\xi_1| \leqslant \frac{h}{2}$, $|\xi_2| \leqslant \frac{h}{2}$, $|\eta| \leqslant \frac{h}{2}$, $|\delta| < \frac{\tau}{2}$, мы тем самым выберем сеточный ряд точек $y = jh$, $t = k\tau$, ближайший к прямой $y = y_0$, $t = t_0$. Очевидно, что

$$|u_h(x_1, y_0, t_0) - u_h(i_1 h, jh, k\tau)| \leqslant N\left(2\sqrt{\frac{h}{2}} + \sqrt{\frac{\tau}{2}}\right),$$

$$|u_h(x_2, y_0, t_0) - u_h(i_2 h, jh, k\tau)| \leqslant N\left(2\sqrt{\frac{h}{2}} + \sqrt{\frac{\tau}{2}}\right),$$

$$u_h(i_2 h, jh, k\tau) - u_h(i_1 h, jh, k\tau) = \sum_{i=i_1}^{i=i_2-1} \left(\frac{\Delta u_h}{\Delta x}\right) h = \int_{i_1 h}^{i_2 h} v_h(x, jh, k\tau)\, dx,$$

откуда

$$\left| u_h(x_2, y_0, t_0) - u_h(x_1, y_0, t_0) - \int_{i_1 h}^{i_2 h} v_h(x, jh, k\tau)\, dx \right| \leqslant N\left(4\sqrt{\frac{h}{2}} + \sqrt{\frac{\tau}{2}}\right). \quad (*)$$

С другой стороны, пользуясь имеющимися у нас оценками ограниченности и непрерывности подынтегральной функции $v_h(x, y, t)$, нетрудно установить, что:

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} v_h(x, y_0, t_0)\, dx - \int_{i_1 h}^{i_2 h} v_h(x, jh, k\tau)\, dx \right| \equiv$$

$$\equiv \left| \int_{i_1 h + \xi_1}^{i_2 h + \xi_2} v_h(x, jh + \eta, k\tau + \delta)\, dx - \int_{i_1 h}^{i_2 h} v_h(x, jh, k\tau)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant M(|\xi_1| + |\xi_2|) + N\, |i_2 h - i_1 h| \left(\sqrt{|\eta|} + \sqrt{|\delta|}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2M\frac{h}{2} + NX\left(\sqrt{\frac{h}{2}} + \sqrt{\frac{\tau}{2}}\right). \quad (**)$$

Объединяя утверждения неравенств (*) и (**), приходим к равенству:

$$u_h(x_2, y_0, t_0) - u_h(x_1, y_0, t_0) - \int_{x_1}^{x_2} v_h(x, y_0, t_0)\, dx = O\left(h + \sqrt{h} + \sqrt{\tau}\right),$$

в котором можно перейти к пределу при $h$, $\tau$, стремящихся к нулю. В результате этого предельного перехода выводим:

$$\hat{u}(x_2, y_0, t_0) - \hat{u}(x_1, y_0, t_0) = \int_{x_1}^{x_2} \hat{v}(x, y_0, t_0)\, dx.$$

Пользуясь произвольностью $x_2$, $x_1$, $y_0$, $t_0$, перепишем это утверждение в виде

$$\hat{u}(x, y, t)-\hat{u}(x_0, y, t)=\int_{x_0}^{x}\hat{v}(\xi, y, t)\,d\xi.$$

Совершенно аналогично доказываются равенства

$$\hat{u}(x, y, t)-\hat{u}(x, y_0, t)=\int_{y_0}^{y}\hat{w}(x, \eta, t)\,d\eta,$$

$$\hat{u}(x, y, t)-\hat{u}(x, y, t_0)=\int_{t_0}^{t}\hat{g}(x, y, \delta)\,d\delta,$$

которым удовлетворяют предельные функции $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{w}$, $\hat{g}$. Из этих равенств уже следуют дифференцируемость $\hat{u}(x, y, t)$ и равенства

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}=\hat{v}, \quad \frac{\partial\hat{u}}{\partial y}=\hat{w}, \quad \frac{\partial\hat{u}}{\partial t}=\hat{g},$$

обеспечивающие непрерывность производных.

Для дальнейшего важно отметить, что $\hat{u}$, $\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}$, $\frac{\partial\hat{u}}{\partial y}$, $\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}$, полученные как пределы равномерно сходящихся последовательностей равностепенно непрерывных и равномерно ограниченных функций, будут удовлетворять тем же оценкам:

$$|\hat{u}(x, y, t)|\leqslant\text{const},$$

$$|\hat{u}(\xi_1, \eta_1, \tau_1)-\hat{u}(\xi_2, \eta_2, \tau_2)|\leqslant$$
$$\leqslant\text{const}\left(\sqrt{\frac{|\xi_1-\xi_2|}{X}}+\sqrt{\frac{|\eta_1-\eta_2|}{Y}}+5\sqrt[3]{\frac{|\tau_1-\tau_2|}{T}}\right),$$

$$\left|\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}(\xi_1, \eta_1, \tau_1)-\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}(\xi_2, \eta_2, \tau_2)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\text{const}\left(\sqrt{\frac{|\xi_1-\xi_2|}{X}}+\sqrt{\frac{|\eta_1-\eta_2|}{Y}}+5\sqrt[3]{\frac{|\tau_1-\tau_2|}{T}}\right),$$

$$\left|\frac{\partial\hat{u}}{\partial y}(\xi_1, \eta_1, \tau_1)-\frac{\partial\hat{u}}{\partial y}(\xi_2, \eta_2, \tau_2)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\text{const}\left(\sqrt{\frac{|\xi_1-\xi_2|}{X}}+\sqrt{\frac{|\eta_1-\eta_2|}{Y}}+5\sqrt[3]{\frac{|\tau_1-\tau_2|}{T}}\right),$$

$$\left|\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}(\xi_1, \eta_1, \tau_1)-\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}(\xi_2, \eta_2, \tau_2)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\text{const}\left(\sqrt{\frac{|\xi_1-\xi_2|}{X}}+\sqrt{\frac{|\eta_1-\eta_2|}{Y}}+5\sqrt[3]{\frac{|\tau_1-\tau_2|}{T}}\right),$$

$$\left|\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}\right|\leqslant\text{const}, \quad \left|\frac{\partial\hat{u}}{\partial y}\right|\leqslant\text{const}, \quad \left|\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}\right|\leqslant\text{const},$$

что и функции $u_h$, $v_h$, $w_h$, $g_h$, из которых $\hat{u}$, $\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}$, $\frac{\partial \hat{u}}{\partial y}$, $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}$ получаются в результате предельного перехода. Константы в этих неравенствах при переходе к пределу не меняются, и, следовательно, зависят лишь от постоянных, оценивающих суммы квадратов разностных отношений, входящих в соответствующие критерии компактности сеточных функций.

## § 18. Разностная схема и основная теорема об оценке ее решений

Описание разностной схемы и разностных граничных условий. Предположения относительно начальных данных. Три леммы об оценках разностных решений. Эти оценки аналогичны неравенствам, вытекающим из интегралов энергии. Доказательство и формулировка основной теоремы об оценке разностных решений.

В этом параграфе мы опишем простейшую разностную схему, с помощью которой можно приближенно решать диссипативную краевую задачу для гиперболических уравнений. Доказывать, что приближенные решения близки к точным, мы не будем. Да мы и не смогли бы этого сделать, так как пока нам не известен факт существования решения у дифференциальных уравнений. В дальнейшем теорема существования будет доказана. В ее доказательстве важную роль играет разностная схема, которую мы сейчас изучим. Оценки решений разностных уравнений, аналогичные оценкам интегралов энергии, будут существенно использоваться в доказательстве теоремы.

Основное внимание при изучении разностной схемы мы обратим именно на получение этих оценок. Система дифференциальных уравнений, которую мы будем пытаться приближенно решить в прямоугольной области

$$\begin{aligned} &0 \leqslant x \leqslant l, \quad -\infty < y < +\infty, \\ &0 \leqslant t \leqslant T, \end{aligned}$$

имеет вид

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y} + Qu = 0.$$

При этом предполагается, что матрицы $A$ и $C$ симметрические и положительно определенные, тогда как симметрическая $B$ от $x$, $y$, $t$ не зависит (постоянна) и имеет следующий канонический вид (см. § 11):

$$B=\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & & & 0 \\ & +1 & & n_0 \text{ штук} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & +1 & & & & & & \\ & & & & -1 & & n_1 \text{ штук} & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & \ddots & n-n_1 \text{ штук} \\ 0 & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы будем представлять $B$ в виде разности $B=B_0-B_1$ постоянных неотрицательно определенных симметрических матриц:

$$B_0=\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & & 0 \\ & +1 & & n_0 \text{ штук} & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & +1 & & & & & \\ & & & & 0 & & & & \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & 0 & n-n_0 \text{ штук} & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1=\begin{pmatrix} 0 & & & & & & & & & & 0 \\ & 0 & & n_0 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & & & \\ & & & & +1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & n_1-n_0 & & & & \\ & & & & & & +1 & & & & \\ & & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 0 & n-n_1 & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

граничные условия при $x=0$ и при $x=l$ мы предполагаем заданными в виде

$$u_i=\sum_{j=n_0+1}^{n_1}\alpha_{ij}(y,\ t)\,u_j \qquad (i=1,\ 2\ \dots\ n_0) \quad \text{при} \quad x=0,$$

$$u_i=\sum_{j=1}^{n_0}\beta_{ij}(y,\ t)\,u_j \qquad (i=n_0+1,\ \dots,\ n_1) \quad \text{при} \quad x=l,$$

и строго диссипативными. Условия строгой диссипативности состоят в выполнении неравенств:

при $x=0$

$$(Bu,\ u)=\sum_{i=1}^{n_0} u_i^2-\sum_{i=n_0+1}^{n_1} u_i^2=$$
$$=\sum_{i=1}^{n_0}\left(\sum_{j=n_0+1}^{n_1}\alpha_{ij}u_j\right)^2-\sum_{i=n_0+1}^{n_1} u_i^2<-k_0\sum_{i=n_0+1}^{n_1} u_i^2 \qquad (k_0>0)$$

при $x=l$

$$-(Bu,\ u)=\sum_{i=n_0+1}^{n_1} u_i^2-\sum_{i=1}^{n_0} u_i^2=$$
$$=\sum_{i=n_0+1}^{n_1}\left(\sum_{j=1}^{n_0}\beta_{ij}u_j\right)^2-\sum_{i=1}^{n_0} u_i^2<-k_0\sum_{i=1}^{n_0} u_i^2,$$

которые сокращенно можно записать как

$$(B_0u,\ u)-(B_1u,\ u)<-k_0(B_1u,\ u) \quad \text{при} \quad x=0,$$
$$(B_1u,\ u)-(B_0u,\ u)<-k_0(B_0u,\ u) \quad \text{при} \quad x=l.$$

Эти неравенства должны выполняться на всех векторах $u$, удовлетворяющих соответственным граничным условиям.

Предположение о положительной определенности матрицы $C$ не является обязательным. Оно введено для упрощения конструкции разностной схемы. На самом деле, если интересующая нас система имеет матрицу $C$, этому предположению не удовлетворяющую, то, перейдя в новую систему координат $x'$, $y'$, $t'$, начало отсчета которой движется относительно старой с постоянной скоростью $\omega$ параллельно оси $y$,

$$x'=x, \quad y'=y+\omega t, \quad t'=t,$$

мы должны будем переписать уравнения в виде

$$A\frac{\partial u}{\partial t'}+B\frac{\partial u}{\partial x'}+(C+\omega A)\frac{\partial u}{\partial y'}+Qu=f,$$

у которого симметрическая матрица $C+\omega A$ коэффициентов при $\frac{\partial u}{\partial y'}$ будет, при достаточно большом $\omega$, положительно определенной. Матрица $B$, вид граничных условий, а следовательно, и их диссипативность, при таком преобразовании не изменятся.

В продолжение всего нашего построения и исследования решений разностных уравнений мы будем считать, что все коэффициенты системы и граничных условий являются ограниченными и достаточно гладкими функциями.

Начнем с построения разностной сетки, которая будет у нас состоять из точек $x=ph$, $y=qh$, $t=r\tau$ с целыми $p$, $q$, $r$. Шаги сетки $h$ (по пространственным переменным $x$, $y$), $\tau$ (по времени $t$)

мы выберем так, чтобы на отрезках $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$ укладывалось целое число шагов. На самом деле нам придется рассматривать в дальнейшем не одну разностную сетку и построенное на ней разностное решение, а целую последовательность решений на сетках с шагами $\tau_1, h_1$; $\tau_2, h_2$; $\tau_3, h_3$; $\ldots$, стремящимися к нулю: $\tau_m \to 0$, $h_m \to 0$ при $m \to \infty$. При выборе последовательности шагов мы будем обеспечивать неизменность отношения шага по времени к шагу по пространству:

$$\frac{\tau_1}{h_1} = \frac{\tau_2}{h_2} = \ldots = \frac{\tau_m}{h_m} = \ldots$$

Для этого, выбрав каким-либо образом $\tau_1$, $h_1$, можно выбрать шаги более мелких сеток по правилу:

$$\tau_2 = \frac{1}{2}\tau_1, \quad \tau_3 = \frac{1}{2^2}\tau_1, \quad \ldots, \quad \tau_m = \frac{1}{2^{m-1}}\tau_1, \ \ldots$$

$$h_2 = \frac{1}{2}h_1, \quad h_3 = \frac{1}{2^2}h_1, \quad \ldots, \quad h_m = \frac{1}{2^{m-1}}h_1, \ \ldots$$

Мы увидим вскоре, что отношение шагов $\tau/h$ не может быть выбрано произвольно. Оно должно не превышать некоторого предела, который вычисляется по матрицам $A$, $B$, $C$. При таком ограничении нам удастся получить для разностных решений оценки, которые при всех достаточно малых шагах от величины этих шагов не зависят.

Переходим к построению разностного решения на сетке с некоторыми фиксированными шагами $\tau$, $h$. Значения $u(x, y, 0) = u(ph, qh, 0\tau)$ во всех точках сетки на начальном сеточном слое $t = 0$ предполагаются заданными. Схема, которую мы построим, позволит по этим начальным значениям вычислить приближенные значения искомых функций на первом временно́м слое $t = \tau$. Затем, считая слой $t = \tau$ за начальный, мы по той же разностной схеме рассчитаем решение на слое $t = 2\tau$. Считая теперь заданным слой $t = 2\tau$, рассчитаем слой $t = 3\tau$, и т. д.

Для того чтобы описать схему, нам, очевидно, достаточно будет показать, как величины на сеточном слое $t + \tau$ вычисляются по величинам на слое $t$. Пока мы будем иметь дело только с двумя слоями $t$, $t + \tau$, величины на нижнем слое будут обозначаться $u$, $A$, $C$, $Q$, иногда с дополнительным указанием координат $x$, $y$:

$$u(x, y) \equiv u(x, y, t),$$
$$A(x, y-h) \equiv A(x, y-h, t) \quad \text{и т. д.}$$

Над величинами, относящимися к верхнему слою $t + \tau$, будет ставиться крышечка:

$$\hat{u}(x, y) \equiv u(x, y, t+\tau),$$
$$\hat{C}(x, y-h) \equiv C(x, y-h, t+\tau).$$

Разностные уравнения, приближающие нашу систему, мы получим, заменив в ней производные на аппроксимирующие их разностные отношения:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x,\,y} \text{— заменяется на } \left.\frac{\Delta u}{\Delta t}\right|_{x,\,y} = \frac{\hat{u}(x,\ y)-u(x,\ y)}{\tau},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x,\,y} \text{— заменяется либо на } \left.\frac{\overrightarrow{\Delta u}}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}\right|_{x,\,y} = \frac{u(x,\ y)-u(x-h,\ y)}{h},$$

$$\text{либо на } \left.\frac{\overleftarrow{\Delta u}}{\underset{\leftarrow}{\Delta x}}\right|_{x,\,y} = \frac{u(x+h,\ y)-u(x,\ y)}{h},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x,\,y} \text{— заменяется на } \left.\frac{\overrightarrow{\Delta u}}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}\right|_{x,\,y} = \frac{u(x,\ y)-u(x,\ y-h)}{h}.$$

При этом вместо дифференциальных уравнений

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B_0\frac{\partial u}{\partial x}-B_1\frac{\partial u}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial y}+Qu=0$$

мы строим следующие разностные:

$$A(x,\ y)\frac{\Delta u}{\Delta t}+B_0\frac{\overrightarrow{\Delta u}}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}-B_1\frac{\overleftarrow{\Delta u}}{\underset{\leftarrow}{\Delta x}}+C(x,\ y)\frac{\overrightarrow{\Delta u}}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}+Q(x,\ y)\,u(x,\ y)=0.$$

В приведенной сокращенной записи подразумевается, что входящие в нее разностные отношения вычисляются в точке $x$, $y$ (точнее, $x$, $y$, $t$). Из этих разностных уравнений

$$A(x,\ y)\,\hat{u}(x,\ y)\equiv A(x,\ y,\ t)\,u(x,\ y,\ t+\tau)=A(x,\ y)\cdot u(x,\ y)-$$
$$-\tau\left[B_0\frac{\overrightarrow{\Delta u}}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}-B_1\frac{\overleftarrow{\Delta u}}{\underset{\leftarrow}{\Delta x}}+C(x,\ y)\frac{\overrightarrow{\Delta u}}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}+Q(x,\ y)\cdot u\right]$$

мы можем вычислить $\hat{u}(x,\ y)$, используя с нижнего слоя $u(x-h,\ y)$, $u(x,\ y)$, $u(x+h,\ y)$, $u(x,\ y-h)$. На самом деле нам достаточно знать $u(x-h,\ y)$, $u(x+h,\ y)$ не полностью, а только те компоненты этих векторов, которые определяют значения $B_0u(x-h,\ y)$, $B_1u(x+h,\ y)$, т. е.

$$u_1(x-h,\ y),\quad u_2(x-h,\ y),\ \ldots,\ u_{n_0}(x-h,\ y),$$
$$u_{n_0+1}(x+h,\ y),\quad u_{n_0+2}(x+h,\ y),\ \ldots,\ u_{n_1}(x+h,\ y).$$

(Напомним, что у нас $B_0$, $B_1$ — постоянные диагональные матрицы, на главной диагонали которых стоят единицы или нули.)

Ясно, что если на слое $t$ нам известны $u(x,\ y)$ во всех точках сетки:

$$(x=0,\ y=qh),\quad (x=h,\ y=qh),\quad (x=2h,\ y=qh),\ \ldots$$
$$\ldots,\ (x=l-h,\ y=qh),\quad (x=l,\ y=qh)\quad q=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots,$$

то построенная схема позволяет определить значения $\hat{u}(x,\ y)$ не во всех точках слоя $t+\tau$, а только при $h \leqslant x \leqslant l-h$. Для определения $\hat{u}(0, y)$, $\hat{u}(l, y)$ придется воспользоваться граничными условиями, которые должны быть приближением граничных условий, заданных для дифференциальных уравнений. Мы будем задавать граничные условия разностных уравнений равенствами:

$$\hat{u}_i(0, y) = \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_{ij}(y, t)\, \hat{u}_j(h, y) \qquad (i=1, 2, \ldots, n_0),$$

$$\hat{u}_i(l, u) = \sum_{j=1}^{n_0} \beta_{ij}(y, t)\, \hat{u}_j(l-h, y) \qquad (i=n_0+1, n_0+2, \ldots, n_1),$$

в которых коэффициенты $\alpha_{ij}(y, t)$, $\beta_{ij}(y, t)$ те же самые, что и в граничных условиях для дифференциальных уравнений.

Напомним, что $\alpha_{ij}$, $\beta_{ij}$ удовлетворяли условию диссипативности. Благодаря этой диссипативности мы будем иметь на решениях разностных уравнений неравенства:

$$(B_0\hat{u}, \hat{u})_{0, y} - (B_1\hat{u}, \hat{u})_{h, y} \leqslant 0,$$

$$(B_1\hat{u}, \hat{u})_{l, y} - (B_0\hat{u}, \hat{u})_{l-h, y} \leqslant 0.$$

С помощью описанных сейчас разностных граничных условий мы никак не определим

$$\hat{u}_{n_0+1}(0, y),\ \hat{u}_{n_0+2}(0, y),\ \ldots,\ \hat{u}_n(0, y);$$

$$\hat{u}_1(l, y),\ \hat{u}_2(l, y),\ \ldots,\ \hat{u}_{n_0}(l, y);\quad \hat{u}_{n_1+1}(l, y),\ \ldots,\ \hat{u}_n(l, y),$$

но эти компоненты граничных значений $\hat{u}(0, y)$, $\hat{u}(l, y)$ не влияют на значения $B_0\hat{u}(0, y)$, $B_1\hat{u}(0, y)$, которые будут использоваться в разностной схеме, для вычисления сеточных функций на следующем слое сетки, отвечающем времени $t+2\tau$. Для того чтобы упростить структуру сеточной функции, удобно, все же определить недостающие компоненты $\hat{u}(0, y)$, $\hat{u}(l, y)$, положив их равными значениям этих компонент в ближайшей сеточной точке $(h, y)$ или $(l-h, y)$. Нам удобно считать, что и на начальном слое $t=0$ были заданы начальные значения $u(x, y, 0)$ только во внутренних точках сетки $h \leqslant x \leqslant l-h$, а граничные значения $u(0, y, 0)$, $u(l, y, 0)$ определялись из граничных условий (при $t=0$):

$$u_i(0, y, t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_{ij}(y, t)\, u_j(h, y, t), & i=1, 2, \ldots, n_0, \\ u_i(h, y, t), & i=n_0+1, n_0+2, \ldots, n, \end{cases}$$

$$u_i(l, y, t) = \\ = \begin{cases} u_i(l-h, y, t), & i=1, 2, \ldots, n_0;\ n_1+1, n_1+2, \ldots, n, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n_0} \beta_{ij}(y, t)\, u_j(l-h, y, t), & i=n_0+1, n_0+2, \ldots, n_1. \end{cases}$$

Это предположение является разностным аналогом предположения о согласовании начальных данных и граничных условий, которое мы всегда должны делать при изучении гладких решений смешанных задач.

Заметим, что в дальнейшем нам придется иногда рассматривать сеточные функции, полученные из разностных решений дополнением недостающих значений $u_i(0, y, t)$ $(i=n_0+1, n_0+2, \ldots n)$; $u_i(l, y, t)$ $(i=1, 2, \ldots n_0; n_1+1, \ldots, n)$ не просто путем их переноса из соседней точки, но еще и с домножением (при этом переносе) на некоторые ограниченные множители $\gamma_i(y, t)$, $\delta_i(y, t)$:

$$u_i(0, y, t)=\gamma_i(y, t)\, u_i(h, y, t), \qquad i=n_0+1, n_0+2, \ldots, n,$$

$$u_i(l, y, t)=\delta_i(y, t)\, u_i(l-h, y, t),$$

$$i=1, 2, \ldots, n_0; n_1+1, n_2+2, \ldots, n.$$

При нашем исследовании свойств разностных решений, мы будем отмечать факты, которые остаются верными, в случае, если $\gamma_i(y, t)\neq 1$, $\delta_i(y, t)\neq 1$.

В течение всего нашего исследования разностных уравнений и доказательства теоремы существования мы будем предполагать, что начальные данные отличны от нуля только в ограниченной области, например, только при $-\frac{1}{2}Y<y<\frac{1}{2}Y$. При $t=\tau$ разностное решение, полученное по описанной схеме, заведомо будет равно нулю, если $|y|>\frac{1}{2}Y+h$, при $t=2\tau$, если $|y|>\frac{1}{2}Y+2h$ и т. д. На последнем сеточном слое $t=T$ разностное решение будет равно нулю, если $|y|>\frac{1}{2}Y+\frac{T}{\tau}\cdot h$. Таким образом, на любом из рассматриваемых сеточных слоев сеточная функция $u(x, y)$ будет отлична от нуля только в конечном числе точек. При не слишком больших $t$, $u(x, y, t)=0$, если $|y|>Y$. Этим свойством разностных решений мы будем пользоваться.

Теперь мы уже можем переходить к получению оценок разностных уравнений, аналогичных оценкам интегралов энергии. Нам удобно начать со следующих подготовительных лемм:

Лемма 1. *Пусть $A$, $D$ — симметрические матрицы, причем $A$ положительно, а $D$ — неотрицательно определены. Параметр положителен и такой, что $A-\rho D$ неотрицательно определена. Тогда, если векторы $w$, $w'$, $w''$ связаны равенством*

$$Aw=[A-\rho D]\, w'+\rho D w'',$$

*то имеет место неравенство:*

$$(Aw, w)\leqslant([A-\rho D]\, w', w')+\rho\,(Dw'', w').$$

Для доказательства удобно, сделав подстановку

$$w=R\overline{w}, \quad w'=R\overline{w}', \quad w''=R\overline{w}''$$

с помощью некоторой невырожденной матрицы $R$, и переписав в новых величинах исходное равенство

$$AR\overline{w} = [A - \rho D] R\overline{w}' + \rho DR\overline{w}'',$$

помножить его слева на $R^*$:

$$R^*AR\overline{w} = [R^*AR - \rho R^*DR]\,\overline{w}' + \rho R^*DR\overline{w}''.$$

Неравенство, которое мы хотим доказать, в силу того, что

$$\begin{aligned} (Aw,\ w) &= (AR\overline{w},\ R\overline{w}) = (R^*AR\overline{w},\ \overline{w}),\\ (Aw',\ w') &= (R^*AR\overline{w}',\ \overline{w}'),\\ (Dw',\ w') &= (R^*DR\overline{w}',\ \overline{w}'),\\ (Dw'',\ w'') &= (R^*DR\overline{w}'',\ \overline{w}''), \end{aligned}$$

перепишется в виде

$$(R^*AR\overline{w},\ \overline{w}) \leqslant ([R^*AR - \rho R^*D]\,\overline{w}',\ \overline{w}') + \rho\,(R^*DR\overline{w}'',\ \overline{w}'').$$

Как известно из линейной алгебры, преобразующую матрицу $R$ можно подобрать так, что $R^*AR$, $R^*DR$ одновременно станут диагональными:

$$R^*AR = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0\\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix},\quad R^*DR = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0\\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix},$$

$$a_i > 0; \qquad d_i \geqslant 0.$$

Для справедливости этого утверждения надо, чтобы $A$ и $D$ были симметричными и одна из них — ($A$) — положительно определенной. Неравенства $d_i \geqslant 0$ вытекают из неотрицательной определенности $D$. Легко также убедиться, что параметр $\rho$ удовлетворяет (при всех $i$) неравенствам

$$a_i \geqslant a_i - \rho d_i \geqslant 0, \quad 1 \geqslant 1 - \rho\,\frac{d_i}{a_i} \geqslant 0.$$

Компоненты $\overline{w}_i$, $\overline{w}_i'$, $\overline{w}_i''$ векторов $\overline{w}$, $\overline{w}'$, $\overline{w}''$ при таком выборе $R$ оказываются связанными равенствами

$$\begin{aligned} a_i\overline{w}_i &= (a_i - \rho d_i)\,\overline{w}_i' + \rho d_i\overline{w}_i'',\\ \overline{w}_i &= \left(1 - \rho\,\frac{d_i}{a_i}\right)\overline{w}_i' + \rho\,\frac{d_i}{a_i}\,\overline{w}_i'', \end{aligned}$$

и надо доказать, что из них следует неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\overline{w}_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} (a_i - \rho d_i)\,(\overline{w}_i')^2 + \rho d_i\,(\overline{w}_i'')^2.$$

Очевидно, достаточно убедиться в справедливости при всех $i$ оценки:

$$\overline{w}_i^2 \leqslant \left(1-\rho\frac{d_i}{a_i}\right)(\overline{w}_i')^2+\rho\frac{d_i}{a_i}(\overline{w}_i'')^2,$$

которая вытекает из следующей цепочки очевидных равенств и неравенств:

$$\overline{w}_i^2=\left[\left(1-\rho\frac{d_i}{a_i}\right)\overline{w}_i'+\rho_i\frac{d_i}{a_i}\overline{w}_i''\right]^2=$$
$$=\left(1-\rho\frac{d_i}{a_i}\right)(\overline{w}_i')^2+\rho\frac{d_i}{a_i}(\overline{w}_i'')^2-\rho\frac{d_i}{a_i}\left(1-\rho\frac{d_i}{a_i}\right)(\overline{w}_i'-\overline{w}_i'')^2\leqslant$$
$$\leqslant\left(1-\rho\frac{d_i}{a_i}\right)(\overline{w}_i')^2+\rho\frac{d_i}{a_i}(\overline{w}_i'')^2.$$

Доказательство леммы 1 завершено.

Лемма 2. *Если*

$$w=\frac{1}{3}[w_1+w_2+w_3],\quad A\hat{u}=Aw+\tau f,$$

*то для положительно определенной* $A$:

$$(Aw,\ w)\leqslant\frac{1}{3}[(Aw_1,\ w_1)+(Aw_2,\ w_2)+(Aw_3,\ w_3)],$$

$$(A\hat{u},\ \hat{u})\leqslant\frac{1}{3}[(Aw_1,\ w_1)+(Aw_2,\ w_2)+(Aw_3,\ w_3)]+$$
$$+\tau[(A\hat{u},\ \hat{u})+(A^{-1}f,\ f)].$$

Доказательство первого утверждения леммы следует из равенства

$$(Aw,\ w)=\frac{1}{9}(A[w_1+w_2+w_3],\ \ [w_1+w_2+w_3])=$$
$$=\frac{1}{9}[(Aw_1,\ w_1)+(Aw_2,\ w_2)+(Aw_3,\ w_3)+2(Aw_1,\ w_2)+$$
$$+2(Aw_2,\ w_3)+2(Aw_3,\ w_1)],$$

и из неравенств

$$2(Aw_i,\ w_j)\leqslant 2\sqrt{(Aw_i,\ w_i)}\cdot\sqrt{(Aw_j,\ w_j)}\leqslant(Aw_i,\ w_i)+(Aw_j,\ w_j).$$

Второе утверждение обосновывается следующим образом:

$$(A\hat{u},\ \hat{u})=(Aw+\tau f,\ w+\tau A^{-1}f)=A(w,\ w)+2\tau(f,\ w)+\tau^2(f,\ A^{-1}f)\leqslant$$
$$\leqslant(Aw,\ w)+2\tau(Aw,\ A^{-1}f)+2\tau^2(f,\ A^{-1}f)=(Aw,\ w)+$$
$$+2\tau(Aw+\tau f,\ A^{-1}f)=$$
$$=(Aw,\ w)+2\tau(A\hat{u},\ A^{-1}f)\leqslant(Aw,\ w)+2\tau\sqrt{(A\hat{u},\ \hat{u})}\times$$
$$\times\sqrt{(AA^{-1}f,\ A^{-1}f)}\leqslant\frac{1}{3}[(Aw_1,\ w_1)+(Aw_2,\ w_2)+(Aw_3,\ w_3)]+$$
$$+\tau[(A\hat{u},\ \hat{u})+(A^{-1}f,\ f)].$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть $B_0$, $B_1$, $C$, $C_2$ симметрические неотрицательно определенные матрицы, $A$, $\hat{A}$ — положительно определены и пусть $1 > \tau > 0$, $h > 0$ таковы, что*

$$A - \frac{3\tau}{h} B_0, \quad A - \frac{3\tau}{h} B_1, \quad A - \frac{3\tau}{h} C$$

*тоже неотрицательно определены. Тогда из равенства*

$$\frac{1}{\tau} A[\hat{u} - u] + \frac{1}{h} B_0[u - u_0] - \frac{1}{h} B_1[u_1 - u] + \frac{1}{h} C[u - u_2] = f$$

*вытекает неравенство*

$$\frac{(\hat{A}\hat{u}, \hat{u}) - (Au, u)}{\tau} + \frac{(B_0u, u) - (B_0u_0, u_0)}{h} - \frac{(B_1u_1, u_1) - (B_1u, u)}{h} +$$
$$+ \frac{(Cu, u) - (C_2u_2, u_2)}{h} \leqslant (\hat{A}\hat{u}, \hat{u}) + \left| \frac{2}{\tau} ([A - \hat{A}]\hat{u}, \hat{u}) \right| +$$
$$+ \left| \frac{1}{h} ([C - C_2] u_2, u_2) \right| + (A^{-1}f, f).$$

Доказательство сводится к применению лемм 1 и 2.

Равенство, определяющее $\hat{u}$, может быть переписано в виде

$$A\hat{u} = Au + \frac{\tau}{h} B_0[u_0 - u] + \frac{\tau}{h} B_1[u_1 - u] + \frac{\tau}{h} C[u_2 - u] + \tau f =$$
$$= \frac{1}{3}\left\{Au + \frac{3\tau}{h} B_0[u_0 - u]\right\} + \frac{1}{3}\left\{Au + \frac{3\tau}{h} B_1[u_1 - u]\right\} +$$
$$+ \frac{1}{3}\left\{Au + \frac{3\tau}{h} C[u_2 - u]\right\} + \tau f =$$
$$= \frac{1}{3}[Aw_0 + Aw_1 + Aw_2] + \tau f,$$

где

$$Aw_0 = Au + \frac{3\tau}{h} B_0[u_0 - u],$$
$$Aw_1 = Au + \frac{3\tau}{h} B_1[u_1 - u],$$
$$Aw_2 = Au + \frac{3\tau}{h} C[u_2 - u].$$

По лемме 1:

$$(Aw_0, w_0) \leqslant (Au, u) + \frac{3\tau}{h}[(B_0u_0, u_0) - (B_0u, u)],$$
$$(Aw_1, w_1) \leqslant (Au, u) + \frac{3\tau}{h}[(B_1u_1, u_1) - (B_1u, u)],$$
$$(Aw_2, w_2) \leqslant (Au, u) + \frac{3\tau}{h}[(C_2u_2, u_2) - (Cu, u)] +$$
$$+ \frac{3\tau}{h} |([C - C_2] u_2, u_2)|$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{3}[(Aw_0,\ w_0)+(Aw_1,\ w_1)+(Aw_2,w_2)]\leqslant$$
$$\leqslant(Au,u)+\frac{\tau}{h}[(B_0u_0,\ u_0)-(B_0u,\ u)]+\frac{\tau}{h}[(B_1u_1,\ u_1)-(B_1u,\ u)]+$$
$$+\frac{\tau}{h}[(C_2u_2,\ u_2)-(Cu,\ u)]+\tau\left|\left(\frac{1}{h}[C-C_2]u_2,\ u\right)\right|.$$

Теперь можно применить лемму 2:

$$(\hat{A}\hat{u},\ \hat{u})\leqslant(A\hat{u},\ \hat{u})+\tau\left|\left(\frac{1}{\tau}[\hat{A}-A]\hat{u},\ \hat{u}\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{3}[(Aw_0,\ w_0)+(Aw_1,\ w_1)+(Aw_2,\ w_2)]+$$
$$+\tau\left[(A\hat{u},\ \hat{u})+(A^{-1}f,\ f)\right]+\tau\left|\left(\frac{1}{\tau}[\hat{A}-A]\hat{u},\ \hat{u}\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant(Au,\ u)+\frac{\tau}{h}[(B_0u_0,\ u_0)-(B_0u,\ u)]+\frac{\tau}{h}[(B_1u_1,\ u_1)-(B_1u,\ u)]+$$
$$+\frac{\tau}{h}[(C_2u_2,\ u_2)-(Cu,\ u)]+\tau\left|\left(\frac{1}{h}[C-C_2]u_2,\ u_2\right)\right|+$$
$$+\underline{\underline{\tau(A\hat{u},\ \hat{u})}}+\tau(A^{-1}f,\ f)+\tau\left|\left(\frac{1}{\tau}[\hat{A}-A]\hat{u},\ \hat{u}\right)\right|.$$

Нам осталось, воспользовавшись неравенством

$$\tau(A\hat{u},\ \hat{u})\leqslant\tau(\hat{A}\hat{u},\ \hat{u})+\tau\left|\left([\hat{A}-A]\hat{u},\ \hat{u}\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\tau(\hat{A}\hat{u},\ \hat{u})+\tau\left|\left(\frac{1}{\tau}[\hat{A}-A]\hat{u},\ \hat{u}\right)\right|,$$

справедливым при $1\geqslant\tau>0$, заменить дважды подчеркнутое слагаемое в правой части на бо́льшую величину:

$$\tau(\hat{A}\hat{u},\ \hat{u})+\tau\left|\left(\frac{1}{\tau}[A-A]\hat{u},\ \hat{u}\right)\right|.$$

В результате такой замены получаем неравенство

$$(\hat{A}\hat{u},\ \hat{u})\leqslant(Au,\ u)+\frac{\tau}{h}[(B_0u_0,\ u_0)-(B_0u,\ u)]+$$
$$+\frac{\tau}{h}[(B_1u_1,\ u_1)-(B_1u,\ u)]+\frac{\tau}{h}[(C_2u_2,\ u_2)-(Cu,\ u)]+$$
$$+\tau(A^{-1}f,\ f)+\tau\left\{\frac{1}{h}\left|([C-C_2]u_2,\ u_2)\right|+(\hat{A}\hat{u},\ \hat{u})+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{\tau}\left([\hat{A}-A]\hat{u},\ \hat{u}\right)\right\},$$

эквивалентное утверждению леммы.

Задача. Докажите, что лемма 3 допускает следующее усиление. Вместо неотрицательной определенности матриц $A-\frac{3\tau}{h}B_0$, $A-\frac{3\tau}{h}B_1$, $A-\frac{3\tau}{h}C$, можно потребовать неотрицательной определенности $A-\rho_0 B_0$, $A-\rho_1 B_1$, $A-\rho_2 C$ ($\rho_i>0$), а параметры $\tau$, $h$ подчинить неравенству

$$\frac{\tau}{h}\leqslant\left[\frac{1}{\rho_0}+\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right]^{-1}.$$

Утверждение, доказанное в лемме 3, можно сформулировать так:

*На решениях разностных уравнений*

$$A(x,\ y,\ t)\frac{\Delta u}{\Delta t}+B_0\frac{\overrightarrow{\Delta} u}{\underrightarrow{\Delta x}}-B_1\frac{\overleftarrow{\Delta} u}{\underleftarrow{\Delta x}}+C(x,\ y,\ t)\frac{\overrightarrow{\Delta} u}{\underrightarrow{\Delta y}}=f(x,\ y,\ t)$$

*выполнено неравенство*

$$\frac{\Delta(Au,\ u)}{\Delta t}+\frac{\overrightarrow{\Delta}(B_0u,\ u)}{\underrightarrow{\Delta x}}-\frac{\overleftarrow{\Delta}(B_1u,\ u)}{\underleftarrow{\Delta x}}+\frac{\overrightarrow{\Delta}(Cu,\ u)}{\underrightarrow{\Delta y}}\leqslant$$
$$\leqslant(\hat{A}\hat{u},\ \hat{u})+\left|\frac{2}{\tau}([\hat{A}-A]\hat{u},\ \hat{u})\right|+\left|\frac{1}{h}([C(x,\ y,\ t)-C(x,\ y-h,\ t)]\times\right.$$
$$\left.\times u(x,\ y-h,\ t),\ u(x,\ y-h,\ t)\right|+(A^{-1}f,\ f)\leqslant$$
$$\leqslant M\{(\hat{A}\hat{u},\ \hat{u})+(Au[x,\ y,\ t],\ u[x,\ y,\ t])+$$
$$+(Au[x,\ y-h,\ t],\ u[x,\ y-h,\ t])\}+(A^{-1}f,\ f),$$

*если только матрицы $A$, $C$ имеют ограниченные производные, и если отношение шагов $\frac{\tau}{h}$ не превышает некоторого значения $\rho$, обеспечивающего неотрицательную определенность во всех точках $x$, $y$, $t$ матриц*

$$A-3\rho B_0,\quad A-3\rho B_1,\quad A-3\rho C.$$

При этой переформулировке мы воспользовались также постоянством $B_0$, $B_1$ и равномерной положительной определенностью $A$.

Из нашей формулировки очевидно, что доказанное неравенство является разностным аналогом дифференциальной формы интеграла энергии.

Умножим обе части неравенства на $\tau h^2$ и просуммируем по всем внутренним точкам сеточного слоя, отвечающего выбранному моменту времени $t$:

$$\sum_{h\leqslant x\leqslant l-h}h^2\tau\left\{\frac{\Delta(Au,\ u)}{\Delta t}+\frac{\overrightarrow{\Delta}(B_0u,\ u)}{\underrightarrow{\Delta x}}-\frac{\overleftarrow{\Delta}(B_1u,\ u)}{\underleftarrow{\Delta x}}+\frac{\overrightarrow{\Delta}(Cu,\ u)}{\underrightarrow{\Delta y}}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\tau M\sum_{\substack{h\leqslant x\leqslant l-h\\ -\infty<y<+\infty}}(\hat{A}\hat{u},\ \hat{u})h^2+2\tau M\sum_{\substack{h\leqslant x\leqslant l-h\\ -\infty\leqslant y\leqslant+\infty}}(Au,\ u)h^2+$$
$$+\tau\sum_{\substack{h\leqslant x\leqslant l-h\\ -\infty\leqslant y\leqslant+\infty}}(A^{-1}f,\ f)h^2.$$

Мы выписываем здесь формально суммы бесконечного числа слагаемых, но это только формально, так как только конечное число из них отлично от нуля, в силу того, что разностное решение не равно нулю лишь в конечном числе точек. Такое же предположение делается и о правой части $f$.

Левая часть этого просуммированного неравенства допускает упрощения. В самом деле,

$$h\tau \sum_{h\leqslant x\leqslant l-h}\left[\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty} h\frac{\overset{\rightarrow}{\Delta}(Cu,\ u)}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}\right]= \\ = h\tau \sum_{h\leqslant x\leqslant l-h}\left\{\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}[(Cu,\ u)_{x,\,y}-(Cu,\ u)_{x,\,y-h}]\right\}=0,$$

$$h\tau \sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\left[h\sum_{x=h}^{x=l-h}\frac{\overset{\rightarrow}{\Delta}(B_0u,\ u)}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}\right]=h\tau\sum_{y}\left\{\sum_{x=h}^{x=l-h}[(B_0u,\ u)_{x,\,y}-\right. \\ \left.-(B_0u,\ u)_{x-h,\,y}]\right\}=h\tau\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}(B_0u,\ u)_{l-h,\,y}-h\tau\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}(B_0u,\ u)_{0,\,y},$$

$$-h\tau \sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\left[h\sum_{x=h}^{l-h}\frac{\overset{\leftarrow}{\Delta}(B_1u,\ u)}{\underset{\leftarrow}{\Delta x}}\right]=-h\tau\sum_{y}\left\{\sum_{x=h}^{x=l-h}[(B_1u,\ u)_{x+h,\,y}-\right. \\ \left.-(B_1u,\ u)_{x,\,y}]\right\}=h\tau\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}(B_1u,\ u)_{h,\,y}-h\tau\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}(B_1u,\ u)_{l,\,y},$$

$$h^2\tau\sum_{\substack{h\leqslant x\leqslant l-h\\ -\infty<y<+\infty}}\frac{\Delta(Au,\ u)}{\Delta t}=\sum_{\substack{h\leqslant x\leqslant l-h\\ -\infty<y<+\infty}}(\hat{A}\hat{u},\ \hat{u})h^2- \\ -\sum_{\substack{h\leqslant x\leqslant l-h\\ -\infty<y<+\infty}}(Au,\ u)h^2.$$

Поэтому

$$\sum_{\substack{h\leqslant x\leqslant l-h\\ -\infty<y<+\infty}}(\hat{A}\hat{u},\ \hat{u})h^2-\sum_{\substack{h\leqslant x\leqslant l-h\\ -\infty<y<+\infty}}(Au,\ u)h^2+ \\ +h\tau\sum_{y}[(B_1u,\ u)_{h,\,y}-(B_0u,\ u)_{0,\,y}]+ \\ +h\tau\sum_{y}[(B_0u,\ u)_{l-h,\,y}-(B_1u,\ u)_{l,\,y}]\leqslant \\ \leqslant\tau M\cdot\sum_{\substack{h\leqslant x\leqslant l-h\\ -\infty<y<+\infty}}(\hat{A}\hat{u},\ \hat{u})h^2+2\tau M\sum_{\substack{h\leqslant x\leqslant l-h\\ -\infty\leqslant y\leqslant+\infty}}(Au,\ u)h^2+ \\ +\tau\sum_{\substack{h\leqslant x\leqslant l-h\\ -\infty\leqslant y\leqslant+\infty}}(A^{-1}f,\ f)h^2.$$

Пользуясь диссипативностью разностных граничных условий, в силу которой

$$(B_0u,\ u)_{0,\,y}-(B_1u,\ u)_{h,\,y}\leqslant 0,$$
$$(B_1u,\ u)_{l,\,y}-(B_0u,\ u)_{l-h,\,y}\leqslant 0,$$

и обозначая

$$U(t)=\left\{\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\sum_{x=h}^{l-h}(Au,\ u)h^2\right\},$$

$$U(t+\tau)=\left\{\sum_{y=-\infty}^{+\infty}\sum_{x=h}^{l-h}(\hat{A}\hat{u},\ \hat{u})h^2\right\},$$

$$F(t)=\left\{\sum_{y=-\infty}^{+\infty}\sum_{x=h}^{l-h}(A^{-1}f,\ f)h^2\right\},$$

приходим к неравенствам

$$U(t+\tau)-U(t)\leqslant\tau MU(t+\tau)+2\tau MU(t)+\tau F(t),$$
$$(1-\tau M)\,U(t+\tau)\leqslant(1+2\tau M)\,U(t)+\tau F(t).$$

Нам удобно теперь рассмотреть еще суммы

$$V(t)=\left\{\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\sum_{x=0}^{x=l}(Au,\ u)h^2\right\},$$

распространенные на весь сеточный слой $0\leqslant x\leqslant l$, $-\infty<y<+\infty$, а не только на внутренние точки $h\leqslant x\leqslant l-h$, входившие в сумму $U(t)$. Очевидно, что

$$V(t)\geqslant U(t).$$

С другой стороны,

$$V(t)=U(t)+\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}(Au,\ u)_{x=0}h^2+\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}(Au,\ u)_{x=l}h^2.$$

В силу граничных условий

$$u_i(0,\ y,\ t)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=n_0+1}^{n_1}\alpha_{ij}(y,\ t)\,u_j(h,\ y,\ t), & i=1,\ 2,\ \ldots,\ n_0,\\ u_i(h,\ y,\ t), & i=n_0+1,\ n_0+2,\ \ldots,\ n\end{cases}$$

должно иметь место неравенство:

$$(Au,\ u)_{x=0}\leqslant\text{const}\,(Au,\ u)_{x=h}=M_0\,(Au,\ u)_{x=h},$$

$$\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}(Au,\ u)_{x=0}h^2\leqslant M_0\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}(Au,\ u)_{x=h}\cdot h^2\leqslant$$
$$\leqslant M_0\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\sum_{x=h}^{x=l-h}(Au,\ u)\,h^2=M_0U(t).$$

Аналогично, используя граничные условия

$$u_i(h,\ y,\ t)=\begin{cases} u_i(l-h,\ y,\ t), & i=1,\ 2,\ \ldots,\ n_0;\ n_1+1,\ \ldots,\ n,\\ \sum\limits_{j=1}^{n_0}\beta_{ij}(y,\ 0)\,u_j(l-h,\ y,\ t), & i=n_0+1,\ n_0+2,\ \ldots,\ n_1,\end{cases}$$

доказывается неравенство

$$\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}(Au,\ u)_{x=l}\cdot h^2\leqslant M_1\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\sum_{x=h}^{x=l-h}(Au,\ u)\,h^2=M_1U(t);$$

теперь очевидно, что

$$U(t)\leqslant V(t)\leqslant(1+M_0+M_1)\,U(t).$$

Заметим, что к такому же выводу мы пришли бы в случае, если вместо граничных условий

$$u_i(0,\ y,\ t)=u_i(h,\ y,\ t),\qquad i=n_0+1,\ n_0+2,\ \ldots,\ n,$$
$$u_i(l,\ y,\ t)=u_i(l-h,\ y,\ t),\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n_0;\ n_1+1,\ n_1+2,\ \ldots,\ n$$

выполнялись условия

$$u_i(0,\ y,\ t)=\gamma_i(y,\ t)\cdot u_i(h,\ y,\ t),\qquad i=n_0+1,\ n_0+2,\ \ldots,\ n,$$
$$u_i(l,\ y,\ t)=\delta_i(y,\ t)\,u_i(l-h,\ y,\ t),\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n_0;\ n_1+1,\ \ldots,\ n$$

с ограниченными $\gamma_i(y,\ t)$, $\delta_i(y,\ t)$.

Сделаем еще предположение, что правые части $f(x,\ y,\ t)$ наших разностных уравнений вычисляются по значениям $u(x,\ y,\ t)$, $u(x\pm h,\ y,\ t)$, $u(x+h,\ y-2h,\ t)\ldots$, т. е. по некоторому конечному числу значений $u$ на рассматриваемом слое $t$ в точках, соседних с точкой $x,\ y,\ t$, причем так, что имеет место неравенство

$$F(t)=\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\sum_{x=h}^{x=l-h}(A^{-1}f,\ f)\,h^2\leqslant$$
$$\leqslant M_2\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\sum_{x=0}^{x=l}(Au,\ u)\,h^2+\Phi=M_2V(t)+\Phi\quad(M,\ \Phi=\text{const}).$$

Эта гипотеза, в частности, справедлива, если $f(x,\ y,\ t)=Q(x,\ y,\ t)\times\times u(x,\ y,\ t)$*). Выписав теперь доказанные и постулированные неравенства

$$(1-\tau M)\,U(t+\tau)\leqslant(1+2\tau M)\,U(t)+\tau F(t),$$
$$U(t)\leqslant V(t)\leqslant(1+M_0+M_1)\,U(t),$$
$$F(t)\leqslant M_2V(t)+\Phi\leqslant M_2(1+M_0+M_1)\,U(t)+\Phi,$$

---

*) В этом случае можно положить $\Phi=0$.

мы из них без труда выведем следующие следствия $\left(0<\tau<\frac{1}{M},\ 0\leqslant t\leqslant T\right)$:

$$(1-\tau M)\,U(t+\tau)\leqslant(1+2\tau M)\,U(t)+\tau M_2(1+M_0+M_1)\,U(t)+\tau\Phi,$$

$$U(t+\tau)\leqslant\frac{1+\tau\,[2M+M_2(1+M_0+M_1)]}{1-\tau M}\,U(t)+\frac{\tau}{1-\tau M}\Phi,$$

$$\max\{\Phi,\ U(t+\tau)\}\leqslant\frac{1+\tau\,[2M+M_2(1+M_0+M_1)+1]}{1-\tau M}\max\{\Phi,\ U(t)\},$$

$$\max\{\Phi,U(t)\}\leqslant\left\{\frac{1+\tau[2M+M_2(1+M_0+M_1)+1]}{1-\tau M}\right\}^{t/\tau}\max\{\Phi,\ U(0)\},$$

$$V(t)\leqslant(1+M_0+M_1)\,U(t)\leqslant$$
$$\leqslant(1+M_0+M_1)\left\{\frac{1+\tau\,[2M+M_2(1+M_0+M_1)+1]}{1-\tau M}\right\}^{t/\tau}\cdot[V(0)+\Phi].$$

При $\tau\to 0$

$$\left\{\frac{1+\tau\,[2M+M_2(1+M_0+M_1)+1]}{1-\tau M}\right\}^{t/\tau}\to e^{T\,[M+M_2(1+M_0+M_1)+1]},$$

и поэтому при достаточно малых $\tau$ и при $0\leqslant t\leqslant T$:

$$(1+M_0+M_1)\left[\frac{1+\tau\,[2M+M_2(1+M_0+M_1)+1]}{1-\tau M}\right]^{\frac{T}{\tau}}\leqslant$$
$$\leqslant 2\cdot(1+M_0+M_1)\,e^{[1+M+M_2(1+M_0+M_1)]\,T}=M',$$

$$V(t)\leqslant M'V(0)+M'\Phi=M'V(0)+M'',$$

$$\left[\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\sum_{x=0}^{x=l}(Au,\ u)h^2\right]_{t=\text{const}}<M'\left[\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\sum_{x=0}^{x=l}(Au,\ u)h^2\right]_{t=0}+M''.$$

Это последнее неравенство и было целью предпринятого нами исследования разностных уравнений.

Сформулируем доказанное утверждение:

Основная теорема об оценке разностных решений:

*Пусть* 1°. *Коэффициенты разностных уравнений*

$$A(x,\ y,\ t)\frac{\Delta u}{\Delta t}+B_0\frac{\overrightarrow{\Delta u}}{\underrightarrow{\Delta x}}-B_1\frac{\overleftarrow{\Delta u}}{\underleftarrow{\Delta x}}+C(x,\ y,\ t)\frac{\overrightarrow{\Delta u}}{\underrightarrow{\Delta y}}=f(x,\ y,\ t)$$

*являются достаточно гладкими функциями* *), *матрицы* $A(x, y, t)$, $C(x,\ y,\ t)$ *положительно определены,* $B_0$, $B_1$ — *постоянные диаго-*

*) Конечно, коэффициенты разностных уравнений при каждом фиксированном шаге определены только в конечном числе точек, поэтому требует уточнения утверждения об их гладкости. Мы считаем, что $A(x,\ y,\ t)$, $C(x,\ y,\ t)$ заданы при всех $x$, $y$, $t$, как матрицы с гладкими элементами, а в разностные уравнения входят в качестве коэффициентов их значения в точках сетки.

*нальные матрицы следующего вида:*

$$B_0=\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & 0\\ & +1 & & n_0 \text{ штук} & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & +1 & & & & \\ & & & & 0 & n-n_0 & & \\ & & & & & 0 & \text{штук} & \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1=\begin{pmatrix} 0 & & & & & & & & & & 0\\ & 0 & & n_0 \text{ штук} & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & & & \\ & & & & +1 & & & & & & \\ & & & & & +1 & & n_1-n_0 & & & \\ & & & & & & \ddots & \text{штук} & & & \\ & & & & & & & +1 & & & \\ & & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & & 0 & n-n_1 \\ & & & & & & & & & \ddots & \text{штук} \\ 0 & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

*Обозначения разностных отношений приняты следующие:*

$$\frac{\Delta u}{\Delta t}=\frac{u(x,\ y,\ t+\tau)-u(x,\ y,\ t)}{\tau},\qquad \frac{\underset{\rightarrow}{\Delta} u}{\underset{\rightarrow}{\Delta} x}=\frac{u(x,\ y,\ t)-u(x-h,\ y,\ t)}{h},$$

$$\frac{\underset{\leftarrow}{\Delta} u}{\underset{\leftarrow}{\Delta} x}=\frac{u(x+h,\ y,\ t)-u(x,\ y,\ t)}{h},\qquad \frac{\underset{\rightarrow}{\Delta} u}{\underset{\rightarrow}{\Delta} y}=\frac{u(x,\ y+h,\ t)-u(x,\ y,\ t)}{h}.$$

2°. *При* $x=0$, $x=l$ *на любом сеточном слое* $t=\text{const}$ *(в том числе при* $t=0$*) выполнены граничные условия*

$$u_i(0,\ y,\ t)=\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_{ij}(y,\ t)\,u_j(h,\ y,\ t), & i=1,\ 2,\ \ldots,\ n_0,\\ \gamma_i(y,\ t)\,u_i(h,\ y,\ t), & i=n_0+1,\ n_0+2,\ \ldots,\ n; \end{cases}$$

$$u_i(l,\ y,\ t)=$$

$$=\begin{cases} \delta_i(y,\ t)\,u_i(l-h,\ y,\ t), & i=1,\ 2,\ \ldots,\ n_0;\ n_1+1,\ n_1+2,\ \ldots,\ n,\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n_0} \beta_{ij}(y,t)\,u_j(l-h,\ y,\ t), & i=n_0+1,\ n_0+2,\ \ldots,\ n_1, \end{cases}$$

*с ограниченными коэффициентами* $\alpha_{ij}(y,\ t)$, $\gamma_i(y,\ t)$, $\beta_{ij}(y,\ t)$, $\delta_i(y,\ t)$. *Эти граничные условия диссипативны в том смысле, что на любых сеточных функциях, им удовлетворяющих, выполнены неравенства*

$$(B_0u,\ u)_{0,\ y}-(B_1u,\ u)_{h,\ y}\leqslant 0,$$
$$(B_1u,\ u)_{l,\ y}-(B_0u,\ u)_{l-h,\ y}\leqslant 0$$

3°. *В приведенной сокращенной записи системы предполагается, что значения $f(x, y, t)$ вычисляются через значения и на том же сеточном слое $t = \text{const}$, причем имеет место неравенство*

$$\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty} \sum_{x=h}^{x=l-h} (A^{-1}f, f)h^2 \leqslant \text{const} \sum_{y=-\infty}^{y=+\infty} \sum_{x=0}^{x=l} (Au, u)h^2 + \text{const}.$$

*Это предположение, в частности, выполнено, если*

$$f(x, y, t) = -Q(x, y, t) \cdot u(x, y, t),$$

*где $Q(x, y, t)$ — ограниченная матрица.*

*При условиях 1°, 2°, 3° существуют постоянные $M'$, $M''$ такие, что*

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left\{ \sum_{y=-\infty}^{y=+\infty} \sum_{x=0}^{x=l} (Au, u)h^2 \right\}_{t=\text{const}} \leqslant M' \left\{ \sum_{y=-\infty}^{y=+\infty} \sum_{x=0}^{x=l} (Au, u)h^2 \right\}_{t=0} + M''.$$

*Постоянные $M'$, $M''$ можно вычислить по коэффициентам (и их производным) уравнения, коэффициентам граничных условий, а также через константы условия 3°.*

## § 19. Оценки разностных отношений и компактность приближенных решений

Расширение разностных уравнений. Первый шаг — включение уравнений для разностных отношений по $y$ и по $t$ и приведение граничных условий у расширения к диссипативному виду. Начальные данные и их распространение на расширенную систему. Оценка квадратичных сумм разностных отношений по $y$ и по $t$ через начальные данные. Использование разностных уравнений для оценки сумм, содержащих разностные отношения по $x$. Уравнения и оценки для таких отношений, помноженных на множитель, аннулирующийся вблизи границ. Исследование компактности сеточных функций, которая следует из всех полученных оценок.

В этом параграфе мы продолжим изучение решений разностных уравнений и установим для их решений более тонкие оценки. Как следствие этих оценок будет получена компактность сеточных функций и с ее помощью мы проведем доказательство теоремы существования.

Компактность решений будет выведена из критерия компактности сеточных функций, который изучался в § 17. Чтобы его применить, нужно сначала получить оценки для сумм по сетке, слагаемыми в которых будут квадратичные формы от разностных отношений различных порядков. Эти оценки получаются применением основной теоремы предыдущего параграфа к расширенной системе разностных уравнений. Такой метод аналогичен использованию интегралов энергии при изучении расширенных систем гиперболических дифференциальных уравнений в § 16. При первом чтении несколько громоздкие выкладки и построения настоящего параграфа, набранные петитом, можно опустить и прямо перейти к его заключительной части, где из компактности сеточных функций выводится теорема существования решений у дифференциальных уравнений.

Начнем с построения расширенной системы разностных уравнений. Пусть $u(x, y, t)$ — сеточная функция, определенная только в точках сетки и удовлетворяющая разностным уравнениям:

$$A(x, y, t)\frac{\Delta u}{\Delta t}+B_0\frac{\Delta u}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}-B_1\frac{\Delta u}{\underset{\leftarrow}{\Delta x}}+C(x, y, t)\frac{\Delta u}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}+Q(x, y, t)\,u=0.$$

Аналогично тому, как в § 16 мы получили расширенную систему дифференцированием исходной, так и здесь мы ее будем получать путем «разностного дифференцирования» — применения операторов $\frac{\Delta}{\Delta t}$, $\frac{\Delta}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}$, описанных в § 18. Так мы приходим к уравнениям

$$\begin{gathered}
A(x, y, t+\tau)\frac{\Delta\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)}{\Delta t}+B_0\frac{\underset{\rightarrow}{\Delta}\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}-B_1\frac{\underset{\leftarrow}{\Delta}\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)}{\underset{\leftarrow}{\Delta x}}+C(x, y, t+\tau)\frac{\underset{\rightarrow}{\Delta}\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}+ \\
+\left\{\left[\frac{\Delta}{\Delta t}A\right]+Q(x, y, t+\tau)\right\}\frac{\Delta u}{\Delta t}+\left[\frac{\Delta}{\Delta t}C(x, y, t)\right]\frac{\Delta u}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}+\left[\frac{\Delta}{\Delta t}Q\right]u=0,
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
A(x, y, t)\frac{\Delta\left(\frac{\Delta u}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}\right)}{\Delta t}+B_0\frac{\underset{\rightarrow}{\Delta}\left(\frac{\Delta u}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}\right)}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}-B_1\frac{\underset{\leftarrow}{\Delta}\left(\frac{\Delta u}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}\right)}{\underset{\leftarrow}{\Delta x}}+C(x, y, t)\frac{\underset{\rightarrow}{\Delta}\left(\frac{\Delta u}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}\right)}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}+ \\
+\left\{\frac{\underset{\rightarrow}{\Delta}}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}A\right\}\left[\frac{\Delta u}{\Delta t}\right]_{x,\, y-h,\, t}+Q(x, y, t)\left[\frac{\Delta u}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}\right]_{x,\, y-h,\, t}+ \\
+\left\{\frac{\Delta Q}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}\right\}[u]_{x,\, y-h,\, t}+\left\{\frac{\underset{\rightarrow}{\Delta}}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}C\right\}\cdot\left[\frac{\Delta u}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}\right]_{x,\, y-h,\, t}=0,
\end{gathered}$$

напоминающим дифференциальные уравнения § 16.

Правда, здесь есть одно отличие. В младших членах последнего равенства сеточные функции $\frac{\Delta u}{\Delta t}$, $\frac{\Delta u}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}$, $u$ берутся не в тех же точках $[x, y, t]$, что и в первом равенстве, а в смещенных точках $[x, y-h, t]$. Проводя дальнейшее расширение разностной системы, в нее можно включить уравнения для разностных отношений высшего порядка по $y$ и по $t$:

$$\frac{\Delta^2 u}{\Delta t^2}=\frac{\Delta}{\Delta t}\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right),\ \frac{\Delta^2 u}{\Delta y^2}=\frac{\overrightarrow{\Delta}}{\overrightarrow{\Delta y}}\left(\frac{\overrightarrow{\Delta u}}{\overrightarrow{\Delta y}}\right),\ \frac{\Delta^2 u}{\Delta t\Delta y}=\frac{\Delta^2 u}{\Delta y\Delta t}=\frac{\overrightarrow{\Delta}\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)}{\overrightarrow{\Delta y}},\ \frac{\Delta^3 u}{\Delta t^3},\ \dots$$

и т. д.

В нашей разностной системе такое расширение проводить даже несколько проще, чем для дифференциальных уравнений в § 16, так как теперь мы предполагаем постоянство матриц $B_0$, $B_1$ и поэтому избавлены от необходимости исключать $\frac{\Delta}{\Delta t}B_0$, $\frac{\overrightarrow{\Delta}}{\overrightarrow{\Delta y}}B_0$, $\frac{\Delta}{\Delta t}B_1$, $\frac{\overrightarrow{\Delta}}{\overrightarrow{\Delta y}}B_1$ — они нули. Как уже не раз отмечалось (§ 5, § 16) предположение о постоянстве $B_0$, $B_1$ не является существенным ограничением.

По мере того, как в разностную систему включаются уравнения для высших разностей, ее вид будет несколько усложняться за счет того, что в младшие члены начинает входить все бо́льшее и бо́льшее число точек нижнего слоя, сдвинутых относительно точек $x$, $y, t$ на $\pm h$, $\pm 2h$, $\pm 3h, \dots$ вдоль оси $y$. Для наших целей будет достаточно ограничиться включением в систему уравнений для разностных отношений вплоть до третьего порядка. После этого полученную систему надо преобразовать, выбрав в количестве новых неизвестных функций векторы

$$\mu_0(x,\ y,\ t)\cdot u=u^{(0)};$$

$$\mu_0\cdot\mu_1\frac{\Delta u}{\Delta t}=u^{(1,\ 1)};\quad \mu_0\mu_1\frac{\Delta u}{\Delta y}\equiv\mu_0\mu_1\frac{\overrightarrow{\Delta u}}{\overrightarrow{\Delta y}}=u^{(1,\ 2)};$$

$$\mu_0\mu_1\mu_2\frac{\Delta^2 u}{\Delta t^2}=u^{(2,\ 1)};\quad \mu_0\mu_1\mu_2\frac{\Delta^2 u}{\Delta y,\Delta t}=u^{(2,\ 2)};\quad \mu_0\mu_1\lambda_2\frac{\Delta^2 u}{\Delta y^2}=u^{(2,\ 3)};$$

$$\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3\frac{\Delta^3 u}{\Delta t^3}=u^{(3,\ 1)};\quad \mu_0\mu_1\mu_2\mu_3\frac{\Delta^3 u}{\Delta t^2\Delta y}=u^{(3,\ 2)};$$

$$\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3\frac{\Delta^3 u}{\Delta t\Delta y^2}=u^{(3,\ 3)};\quad \mu_0\mu_1\mu_2\mu_3\frac{\Delta^3 u}{\Delta y^3}=u^{(3,\ 4)},$$

которые отличаются от $u$ и ее разностных отношений положительными гладкими множителями $\mu_i=\mu_i(x,\ y,\ t)$. Описанное сейчас преобразование полностью аналогично такому же преобразованию дифференциальной системы в § 16, однако теперь надо иметь в виду следующее обстоятельство.

При переходе к новым неизвестным функциям, младшие члены нижнего слоя в разностных уравнениях еще усложнятся за счет того, что в них войдут значения в точках, сдвинутых относительно $x$, $y$, $t$ не только параллельно оси $y$, но и в точках с первой координатой $x+h$, $x-h$. Чтобы разъяснить эти замечания и не слишком загромождать изложение, ограничимся введением только множителя $\mu_0(x,\ y,\ t)$ при получении уравнения для $u^{(0)}$. Помножив на скалярный множитель $\mu_0$ уравнение

$$A\frac{\Delta u}{\Delta t}+B_0\frac{\overrightarrow{\Delta u}}{\overrightarrow{\Delta x}}-B_1\frac{\overleftarrow{\Delta u}}{\overleftarrow{\Delta x}}+C\frac{\overrightarrow{\Delta u}}{\overrightarrow{\Delta y}}+Qu=0,$$

преобразуем полученный результат

$$A\mu_0\frac{\Delta u}{\Delta t}+B_0\mu_0\frac{\overrightarrow{\Delta u}}{\overrightarrow{\Delta x}}-B_1\mu_0\frac{\overleftarrow{\Delta u}}{\overleftarrow{\Delta x}}+C\mu_0\frac{\overrightarrow{\Delta u}}{\overrightarrow{\Delta y}}+Q\mu_0 u=0,$$

воспользовавшись тождествами;

$$\mu_0(x,\ y,\ t)\frac{\Delta u}{\Delta t}=\frac{\mu_0(x,\ y,\ t)}{\mu_0(x,\ y,\ t+\tau)}\frac{\Delta\mu_0 u}{\Delta t}-\frac{\mu_0(x,\ y,\ t)}{\mu_0(x,\ y,\ t+\tau)}\frac{\Delta\mu_0}{\Delta t}\cdot u,$$

$$\mu_0(x,\ y,\ t)\frac{\underset{\rightarrow}{\Delta u}}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}=\frac{\underset{\rightarrow}{\Delta\mu_0 u}}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}-\frac{1}{\mu_0(x-h,\ y,\ t)}\cdot\frac{\underset{\rightarrow}{\Delta\mu_0}}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}\cdot[\mu_0 u]_{x-h,\ y,\ t},$$

$$\mu_0(x,\ y,\ t)\frac{\underset{\leftarrow}{\Delta u}}{\underset{\leftarrow}{\Delta x}}=\frac{\underset{\leftarrow}{\Delta\mu_0 u}}{\underset{\leftarrow}{\Delta x}}-\frac{1}{\mu_0(x+h,\ y,\ t)}\cdot\frac{\underset{\leftarrow}{\Delta\mu_0}}{\underset{\leftarrow}{\Delta x}}\cdot[\mu_0 u]_{x+h,\ y,\ t},$$

$$\mu_0(x,\ y,\ t)\frac{\underset{\rightarrow}{\Delta u}}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}=\frac{\underset{\rightarrow}{\Delta\mu_0 u}}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}-\frac{1}{\mu_0(x,\ y-h,\ t)}\frac{\underset{\rightarrow}{\Delta\mu_0}}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}\cdot[\mu_0 u]_{x,\ y-h,\ t},$$

в результате чего придем к уравнению для $u^{(0)}=\mu_0 u$ следующего вида:

$$\frac{\mu_0(x,\ y,\ t)}{\mu_0(x,\ y,\ t+\tau)}A(x,\ y,\ t)\frac{\Delta u^{(0)}}{\Delta t}+B_0\frac{\underset{\rightarrow}{\Delta u^{(0)}}}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}-B_1\frac{\underset{\leftarrow}{\Delta u}}{\underset{\leftarrow}{\Delta y}}+C(x,\ y,\ t)\frac{\underset{\rightarrow}{\Delta u^{(0)}}}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}+\ldots=0.$$

Младшие члены этого равенства, замененные в этой записи многоточием, будут содержать значения $u^{(0)}=\mu_0 u$ на нижнем слое как в точке $x,\ y,\ t$, так и в точках, сдвинутых относительно $x,\ y,\ t$ на $h$ по координате $x$, т. е. в точках $(x\pm h,\ y,\ t)$.

Точно такой же сдвиг по $x$ на $h$ в младших членах появится и в уравнениях для разностных отношений (по $t$ и по $y$) после перехода к неизвестным, получающихся из разностных отношений помножением на соответствующие множители. Правда, уравнения для разностных отношений по $t$ и по $y$ содержали еще до этого помножения в младших членах слагаемые со сдвинутыми на $\pm h$, $\pm 2h$, $\pm 3h$ аргументами, но, как уже отмечалось, это были сдвиги только параллельно оси $y$. Теперь уже нетрудно понять, какова структура разностных уравнений для $u^{(0)}$, $u^{(1,\ 1)}$, $u^{(1,\ 2)}$, ..., $u^{(3,\ 2)}$, $u^{(3,\ 3)}$, $u^{(3,\ 4)}$. Эти уравнения имеют следующий вид:

$$\tilde{A}\frac{\Delta\tilde{u}}{\Delta t}+\tilde{B}_0\frac{\underset{\rightarrow}{\Delta\tilde{u}}}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}-\tilde{B}_1\frac{\underset{\rightarrow}{\Delta\tilde{u}}}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}+\tilde{C}\frac{\underset{\rightarrow}{\Delta\tilde{u}}}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}=\tilde{f}.$$

Здесь $\tilde{u}$ составной вектор, имеющий «векторные компоненты» $u^{(0)}$, $u^{(1,\ 1)}$, $u^{(1,\ 2)}$, $u^{(2,\ 2)}$, ..., $u^{(2,\ 3)}$, а клеточно диагональные $\tilde{A}$, $\tilde{B}_0$, $\tilde{B}_1$, $\tilde{C}$ составлены следующим образом:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}\frac{\mu_0(x,\ y,\ t)}{\mu_0(x,\ y,\ t+\tau)}A(x,\ y,\ t) & & 0\\ & \frac{\mu_0(x,\ y,\ t)\,\mu_1(x,\ y,\ t)}{\mu_0(x,\ y,\ t+\tau)\,\mu_1(x,\ y,\ t+\tau)}A(x,\ y,\ t) & \\ 0 & & \ddots\end{pmatrix},$$

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix}B_0 & & 0\\ & B_0 & \\ & & B_0\\ 0 & & \ddots\end{pmatrix},\qquad \tilde{B}_1=\begin{pmatrix}B_1 & & 0\\ & B_1 & \\ & & B_1\\ 0 & & \ddots\end{pmatrix},\qquad \tilde{C}=\begin{pmatrix}C & & 0\\ & C & \\ & & C\\ 0 & & \ddots\end{pmatrix}.$$

Все младшие члены мы объединили в «правой части» $\tilde{f}$, значения которой в точке $(x,\ y,\ t)$ $(h\leqslant x\leqslant l-h)$ вычисляются как сумма векторов, каждый из которых получается применением той или иной матрицы к значениям $\tilde{u}$ в точке $(x, y, t)$ и в некотором (вполне определенном и не зависящем от $t$) числе соседних точек сеточного слоя $t = \text{const}$, $0 \leqslant x \leqslant l$). Матрицы, с помощью которых $\tilde{f}$ вычисляются через значения $\tilde{u}$ на нижнем слое, выражаются через $\mu_i$, а также через матрицы коэффициентов исходного разностного уравнения и через их разностные отношения вплоть до некоторого порядка. Ограниченность этих разностных отношений будет обеспечена, если $\mu_i$, а также коэффициенты системы имеют ограниченные производные соответствующих порядков. Если такую ограниченность предположить, то мы, очевидно, будем иметь неравенство

$$\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty} \sum_{x=h}^{x=l-h} (\tilde{A}^{-1}\tilde{f}, \tilde{f})\, h^2 \leqslant \text{const} \sum_{y=-\infty}^{y=+\infty} \sum_{x=0}^{x=l} (\tilde{A}\tilde{u}, \tilde{u})\, h^2,$$

которое позволит нам применить для оценки $\tilde{u}$ основную теорему об оценке разностных решений.

Чтобы эта теорема была применима, необходимо еще добиться диссипативности граничных условий у нашей расширенной системы. Именно для этого при ее построении были введены множители $\mu_i(x, y, t)$. Они здесь могут быть использованы точно так же, как и в случае расширения системы дифференциальных уравнений (§ 16). В самом деле, диссипативные граничные условия исходной разностной системы

$$u_i(0, y, t) = \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_{ij}(y, t)\, u_j(h, y, t), \quad i = 1, 2, \ldots, n_0,$$

$$u_i(0, y, t) = u_i(h, y, t), \quad i = n_0+1, \quad n_0+2, \ldots, n$$

влекут для разностных отношений равенства

$$\frac{\Delta u_i(0, y, t)}{\Delta t} = \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_{ij}(y, t+\tau) \frac{\Delta u_j(h, y, t)}{\Delta t} + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \frac{\Delta \alpha_{ij}}{\Delta t} u_j(h, y, t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n_0,$$

$$\frac{\Delta u_i(0, y, t)}{\Delta t} = \frac{\Delta u_i(h, y, t)}{\Delta t}, \qquad i = n_0+1, n_0+2, \ldots, n,$$

$$\frac{\underset{\rightarrow}{\Delta} u_i(0, y, t)}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}} = \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_{ij}(y-h, t) \frac{\underset{\rightarrow}{\Delta} u_j(h, y, t)}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}} + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \frac{\underset{\rightarrow}{\Delta} \alpha_{ij}}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}} u_j(h, y, t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n_0,$$

$$\frac{\underset{\rightarrow}{\Delta} u_i(0, y, t)}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}} = \frac{\underset{\rightarrow}{\Delta} u_i(h, y, t)}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}, \qquad i = n_0+1, n_0+2, \ldots, n.$$

Эти равенства можно рассматривать как граничные условия расширенной системы. Записанные через компоненты $u_i^{(0)}$, $u_i^{(1, 1)}$, $u_i^{(1, 2)}$ введенных нами неизвестных вектор-функций $u^{(0)}$, $u^{(1, 1)}$, $u^{(1, 2)}$, они выглядят следующим образом:

$$
\begin{cases}
u_i^{(0)}(0, y, t) = \sum\limits_{j=n_0+1}^{n_1} \dfrac{\mu_0(0, y, t)}{\mu_0(h, y, t)} \alpha_{ij}(y, t)\, u_j^{(0)}(h, y, t), \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n_0, \\
u_i^{(0)}(0, y, t) = \dfrac{\mu_0(0, y, t)}{\mu_0(h, y, t)} u_i^{(0)}(h, y, t), \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = n_0+1, n_0+2, \ldots, n,
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
u_i^{(1,1)}(0, y, t) = \sum\limits_{j=n_0+1}^{n_1} \dfrac{\mu_0(0, y, t)}{\mu_0(h, y, t)} \alpha_{ij}(y, t+\tau)\, u_j^{(1,1)}(h, y, t) + \\
\qquad + \sum\limits_{j=n_0+1}^{n_1} \dfrac{\mu_0(0, y, t)\,\mu_1(0, y, t)}{\mu_0(h, y, t)} \dfrac{\Delta\alpha_{ij}}{\Delta t} u_j^{(0)}(h, y, t), \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n_0, \\
u_i^{(1,1)}(0, y, t) = \dfrac{\mu_0(0, y, t)\,\mu_1(0, y, t)}{\mu_0(h, y, t)\,\mu_1(h, y, t)} u_i^{(1,1)}(h, y, t), \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = n_0+1, n_0+2, \ldots, n;
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
u_i^{(1,2)}(0, y, t) = \sum\limits_{j=n_0+1}^{n_1} \dfrac{\mu_0(0, y, t)}{\mu_0(h, y, t)} \alpha_{ij}(y-h, t)\, u_j^{(1,2)} + \\
\qquad + \sum\limits_{j=n_0+1}^{n_1} \dfrac{\mu_0(0, y, t)\,\mu_1(0, y, t)}{\mu_0(h, y, t)} \dfrac{\overrightarrow{\Delta}\alpha_{ij}}{\overrightarrow{\Delta y}} u_j^{(0)}(h, y, t), \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n_0, \\
u_i^{(1,2)}(0, y, t) = \dfrac{\mu_0(0, y, t)\,\mu_1(0, y, t)}{\mu_0(h, y, t)\,\mu_1(h, y, t)} u_i^{(1,2)}(h, y, t), \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = n_0+1, n_0+2, \ldots, n.
\end{cases}
$$

Легко видеть, что при любых положительных ограниченных и гладких $\mu_0(x, y, t)$, $\mu_1(x, y, t)$ это условие формально того же вида, который описан в пункте 2° основной теоремы об оценке разностных решений (§ 18). Диссипативность их, при достаточно малых $\mu_1(x, y, t)$, доказывается почти дословным повторением доказательства диссипативности граничных условий у расширенной системы дифференциальных уравнений в § 16. Только теперь коэффициенты граничных условий расширенной разностной системы зависят от значений $\mu_l(x, y, t)$, $\alpha_l(x, y, t)$ не только в точке $x, y, t$, но и в соседних точках разностной сетки. Поэтому мы должны говорить, что выполнение условия диссипативности обеспечивается при достаточно малых $\mu_l(x, y, t)$ и при достаточно малых шагах $h$, $\tau$.

Ограничившись этими замечаниями, мы не будем проводить доказательство подробнее. Ясно, что подобными рассуждениями обосновывается возможность приведения к диссипативному виду разностной смешанной задачи у расширенной системы разностных уравнений и в случае, когда в нее включаются разностные отношения не только первого порядка, но также второго, третьего и более высоких, если только это включение допускается гладкостью коэффициентов и граничных условий. Для наших целей необходимо включение в расширенную систему разностных уравнений вплоть до третьего порядка.

Мы здесь описали приведение к диссипативному виду граничных условий на левой границе $x=0$ рассматриваемой нами области. Диссипативность граничных условий для расширенной системы на правой границе $x=l$ обеспечивается совершенно аналогично.

К расширенной системе с диссипативными граничными условиями мы будем применять основную теорему об оценке решений разностных уравнений. Для применения теоремы к оценке некоторого решения необходимо, чтобы, задав разностные начальные данные при $t=0$ на некоторой сетке при любых $y$ в точках $x=h, 2h, 3h, \ldots, l-2h, l-h$, и достроив граничные значения в точках с координатами $x=0$, $x=l$, мы могли оценить по этим данным квадратичную форму

$$\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty} \sum_{x=0}^{x=l} (\tilde{A}\tilde{u},\tilde{u})\, h^2.$$

Для этого, как нетрудно убедиться, достаточно уметь оценивать

$$\sum\sum (Au,\ u)\, h^2, \quad \sum\sum \left(A\frac{\Delta u}{\Delta t},\ \frac{\Delta u}{\Delta t}\right) h^2,$$

$$\sum\sum \left(A\frac{\Delta u}{\Delta y},\ A\frac{\Delta u}{\Delta y}\right) h^2, \quad \sum\sum \left(A\frac{\Delta^2 u}{\Delta t^2},\ \frac{\Delta^2 u}{\Delta t^2}\right) h^2,$$

$$\sum\sum \left(A\frac{\Delta^2 u}{\Delta t\,\Delta y},\ \frac{\Delta^2 u}{\Delta t\,\Delta y}\right) h^2, \quad \sum\sum \left(A\frac{\Delta u}{\Delta y},\ \frac{\Delta u}{\Delta y}\right) h^2.$$

Разностные отношения $\frac{\Delta u}{\Delta t}, \frac{\Delta^2 u}{\Delta t\,\Delta y}, \ldots, \frac{\Delta u}{\Delta t}$ должны при этом вычисляться с помощью разностных уравнений и вблизи границ $x=0$, $x=l$, с помощью граничных условий. Сейчас будет описан некоторый способ задания начальных данных на последовательности сеток, шаги которых $h$ стремятся к нулю. Этот способ обеспечивает равномерную (для всех таких сеток) ограниченность выписанных квадратичных форм от разностных отношений.

Зададим в качестве начальных данных $u(x,\ y,\ 0)=\varphi(x,\ y)$ некоторую гладкую $\varphi(x,\ y)$, определенную в полосе $0\leqslant x\leqslant l$ и равную нулю при достаточно больших $y$:

$$\varphi(x,\ y)=0, \text{ если } |y|\geqslant \frac{1}{2}Y.$$

Сеточные начальные данные мы будем определять как значения $\varphi(x,\ y)$ в соответствующих точках той или иной сетки.

Для упрощения доказательств мы предположим, что на $\varphi(x,\ y)$, дополнительно наложено еще одно ограничение:

$$\varphi(x,\ y)=0, \text{ если } 0\leqslant x\leqslant \xi, \text{ либо если } l-\xi\leqslant x\leqslant l,$$

где $\xi>0$ — произвольный параметр. Тем самым мы предполагаем, что $\varphi(x,\ y)$ отлично от нуля только в конечной части полосы $0\leqslant x\leqslant l$, нигде не примыкающей к границам этой полосы. Вместо этого, на первый взгляд очень жесткого ограничения, можно было бы ограничиться требованием, чтобы $\varphi(x,\ y)$ удовлетворяло граничным условиям дифференциальной системы уравнений, полученной в § 16 в качестве расширения исходной, т. е. условиям согласования начальных данных и граничных условий.

При достаточно мелкой сетке, в каждую из полосок $0 \leqslant x \leqslant \xi$, $l-\xi \leqslant x \leqslant l$ попадает больше пяти приграничных сеточных слоев,

$$\begin{array}{ll} x=0, & x=l, \\ x=h, & x=l-h, \\ x=2h, & x=l-2h, \\ x=3h, & x=l-3h, \\ x=4h, & x=l-4h, \end{array}$$

которые только и используются при определении значений разностного решения $u(x, y, t)$ в точках

$$\left\{ \begin{array}{l} x=0,\ h, \\ t=0,\ \tau,\ 2\tau,\ 3\tau, \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} x=l,\ l-h, \\ t=0,\ \tau,\ 2\tau,\ 3\tau. \end{array} \right.$$

Поэтому эти значения будут нулями, а следовательно, равны нулю при $x=0$, $l$ и при $t=0$ разностные отношения

$$\frac{\Delta u}{\Delta t},\ \frac{\Delta u}{\Delta y},\ \frac{\Delta^2 u}{\Delta y^2},\ \frac{\Delta^2 u}{\Delta y\,\Delta t},\ \frac{\Delta^2 u}{\Delta t^2},\ \frac{\Delta^3 u}{\Delta t^3},$$
$$\frac{\Delta^3 u}{\Delta t^2\,\Delta y},\ \frac{\Delta^3 u}{\Delta t\,\Delta y^2},\ \frac{\Delta^3 u}{\Delta y^3},$$

и пропорциональные им значения всех компонент вектора $\tilde{u}$ начальных данных нашей расширенной диссипативной разностной системы. Тем самым наш способ задания начальных данных обеспечивает автоматическое выполнение условий их согласования с граничными условиями у расширенной разностной системы. При вычислении $\frac{\Delta u}{\Delta t}$, $\frac{\Delta^2 u}{\Delta t\,\Delta y}$, $\frac{\Delta^2 u}{\Delta t^2}$, $\frac{\Delta^3 u}{\Delta t^2\,\Delta y}$, $\frac{\Delta^3 u}{\Delta t^3}$, $\frac{\Delta^3 u}{\Delta t\,\Delta y^2}$ на начальном слое $t=0$ с помощью разностных уравнений, мы получим их как линейные комбинации (с ограниченными матричными коэффициентами) значений в точках слоя $\varphi(x, y)$ и разностных отношений:

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta y},\ \frac{\Delta^2\varphi}{\Delta y^2},\ \frac{\Delta^3\varphi}{\Delta y^3},\ B\frac{\Delta\varphi}{\Delta x},\ B\frac{\Delta^2\varphi}{\Delta x\,\Delta y},\ B\frac{\Delta^3\varphi}{\Delta x\,\Delta y^2},$$
$$B\frac{\Delta^2\varphi}{\Delta x^2},\ B\frac{\Delta^3\varphi}{\Delta x^2\,\Delta y},\ B\frac{\Delta^3\varphi}{\Delta x^3},\ B\frac{\Delta^3\varphi}{\Delta x^2\,\Delta y}.$$

Это дает возможность оценить начальное значение

$$\left[\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\sum_{x=0}^{x=l}(\tilde{A}\tilde{u},\ \tilde{u})h^2\right]_{t=0}$$

через

$$\sum\sum(A\varphi,\ \varphi)h^2,\quad \sum\sum\left(A\frac{\Delta\varphi}{\Delta y},\ \frac{\Delta\varphi}{\Delta y}\right)h^2,\quad \ldots,\quad \sum\sum\left(A\frac{\Delta^3\varphi}{\Delta y^3},\ \frac{\Delta^3\varphi}{\Delta y^3}\right)h^2,$$
$$\sum\left(B\frac{\Delta\varphi}{\Delta x},\ B\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\right)h^2,\quad \sum\left(B\frac{\Delta^2\varphi}{\Delta x\,\Delta y},\ B\frac{\Delta^2\varphi}{\Delta x\,\Delta y}\right)h^2,\ \ldots$$
$$\ldots,\ \sum\left(B\frac{\Delta^3\varphi}{\Delta x^3},\ B\frac{\Delta^3\varphi}{\Delta x^3}\right)h^2.$$

В свою очередь, если у $\varphi(x, y)$ вторые производные непрерывны, эти суммы при $h \to 0$ стремятся соответственно к

$$\int_0^l \int_{-\infty}^{+\infty} (A\varphi, \varphi)\, dx\, dy, \quad \int_0^l \int_{-\infty}^{+\infty} \left(A \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dx\, dy, \ \ldots$$

$$\ldots, \int_0^l \int_{-\infty}^{+\infty} \left(B \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}, B \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}\right) dx\, dy,$$

и, следовательно, при достаточно малых $h$ не превышают удвоенных значений этих интегралов.

Применив основную теорему об оценке решений разностных уравнений, мы установим, что следующие суммы:

$$\sum_{x, \bar{y}} (Au, u) h^2, \quad \sum_{x, y} \left(A \frac{\Delta u}{\Delta t}, \frac{\Delta u}{\Delta t}\right) h^2,$$

$$\sum_{x, y} \left(A \frac{\Delta u}{\Delta y}, \frac{\Delta u}{\Delta y}\right) h^2, \ \ldots, \quad \sum_{x, y} \left(A \frac{\Delta^3 u}{\Delta y^3}, \frac{\Delta^3 u}{\Delta y^3}\right) h^3,$$

будут равномерно ограничены на отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant T$ при достаточно малых шагах $h$.

Суммы, которые удалось оценить, содержат квадратичные формы от $u$ и от разностных отношений $\frac{\Delta u}{\Delta y}, \frac{\Delta^2 u}{\Delta y^2}, \ldots, \frac{\Delta^3 u}{\Delta t^3}$ по $y$ и по $t$ вплоть до третьего порядка. Чтобы оценить разностные отношения по $x$, мы должны, как и в дифференциальном случае, воспользоваться уравнениями расширенной системы.

Так, из уравнений

$$A(x, y, t) \frac{\Delta u}{\Delta t} + B_0 \frac{\overrightarrow{\Delta u}}{\overrightarrow{\Delta x}} - B_1 \frac{\overleftarrow{\Delta u}}{\overleftarrow{\Delta x}} + C(x, y, t) \frac{\overrightarrow{\Delta u}}{\overrightarrow{\Delta y}} + Q(x, y, t) u = 0$$

мы сможем выразить при $x = h, 2h, \ldots, l-h$

$$B_0 \frac{\overrightarrow{\Delta u}}{\overrightarrow{\Delta x}} - B_1 \frac{\overleftarrow{\Delta u}}{\overleftarrow{\Delta x}}$$

через значения $u, \frac{\Delta u}{\Delta t}, \frac{\Delta u}{\Delta y}$. Это позволяет оценить сумму

$$\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty} \sum_{x=h}^{x=l-h} \left(B_0 \frac{\overrightarrow{\Delta u}}{\overrightarrow{\Delta x}} - B_1 \frac{\overleftarrow{\Delta u}}{\overleftarrow{\Delta x}}, B_0 \frac{\overrightarrow{\Delta u}}{\overrightarrow{\Delta x}} - B_1 \frac{\overrightarrow{\Delta u}}{\overrightarrow{\Delta x}}\right) h^2 =$$

$$= \sum_{y=-\infty}^{y=+\infty} \sum_{x=h}^{x=l-h} \left\{ \sum_{i=1}^{n_0} \left[\frac{u_i(x, y, t) - u_i(x-h, y, t)}{h}\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=n_0+1}^{i=n_1} \left[\frac{u_i(x+h, y, t) - u_i(x, y, t)}{h}\right]^2 \right\},$$

в которую вошли все разностные отношения $\frac{\Delta u_i}{\Delta x}$, $i=1, 2, \ldots, n_1$, за исключением следующих:

$$\frac{u_i(h, y, t)-u_i(0, y, t)}{h}, \qquad i=n_0+1,\ n_0+2, \ldots, n_1,$$

$$\frac{u_i(l, y, t)-u_i(l-h, y, t)}{h}, \quad i=1, 2, \ldots, n_0.$$

Напомним, что при построении разностных решений нам не требовалось определять входящие в эти отношения значения $u_i(0, y, t)$, $u_i(l, y, t)$. Мы их довольно произвольно доопределили, положив равными значениям этих же компонент в соседних точках. Благодаря этому

$$\frac{u_i(h, y, t)-u_i(0, y, t)}{h}=0, \qquad i=n_0+1, \ldots, n_1,$$

$$\frac{u_i(l, y, t)-u_i(l-h, y, t)}{h}=0, \qquad i=1, 2, \ldots, n_0,$$

и, следовательно,

$$\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\sum_{x=h}^{x=l-h}\left(B_0\frac{\Delta u}{\overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}}-B_1\frac{\Delta u}{\overset{\leftarrow}{\underset{\leftarrow}{\Delta x}}},\ B_0\frac{\Delta u}{\overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}}-B_1\frac{\Delta u}{\overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}}\right)h^2=$$

$$=\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\sum_{x=0}^{x=l-h}\left\{\sum_{i=1}^{i=n_1}\left[\frac{u_i(x+h, y, t)-u_i(x, y, t)}{h}\right]^2\right\}=$$

$$=\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\sum_{x=0}^{x=l-h}\left(B\frac{\Delta u}{\overset{\leftarrow}{\underset{\leftarrow}{\Delta x}}},\ B\frac{\Delta u}{\overset{\leftarrow}{\underset{\leftarrow}{\Delta x}}}\right)h^2\equiv\sum_{x,\,y}\left(B\frac{\Delta u}{\Delta x},\ B\frac{\Delta u}{\Delta x}\right).$$

В результате применения изложенных соображений мы приходим к неравенству, выполненному на каждом сеточном слое с фиксированным $t$:

$$\sum_{x,\,y}\left(B\frac{\Delta u}{\Delta x},\ B\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)h^2\leqslant$$

$$\leqslant\mathrm{const}\left\{\sum_{x,\,y}(Au, u)h^2+\sum_{x,\,y}\left(A\frac{\Delta u}{\Delta t},\ \frac{\Delta u}{\Delta t}\right)h^2+\sum_{x,\,y}\left(A\frac{\Delta u}{\Delta y},\ \frac{\Delta u}{\Delta y}\right)h^2\right\}.$$

Аналогично, используя разностные уравнения расширенной системы, которым удовлетворяют все разностные отношения:

$$u,\quad \frac{\Delta u}{\Delta t},\quad \frac{\Delta u}{\Delta y},\quad \frac{\Delta^2 u}{\Delta t^2},\quad \frac{\Delta^2 u}{\Delta y^2},\quad \frac{\Delta^2 u}{\Delta t\,\Delta y},$$

мы сумеем оценить суммы

$$\sum_{x,\,y}\left(B\frac{\Delta u}{\Delta x},\ B\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)h^2,\quad \sum_{x,\,y}\left(B\frac{\Delta^2 u}{\Delta x\,\Delta t},\ B\frac{\Delta^2 u}{\Delta x\,\Delta t}\right)h^2,\ \ldots$$

$$\ldots,\ \sum_{x,\,y}\left(B\frac{\Delta^3 u}{\Delta x\,\Delta t\,\Delta y},\ B\frac{\Delta^3 u}{\Delta x\,\Delta t\,\Delta y}\right)h^2$$

через уже оцененные суммы квадратичных форм от разностных отношений по $t$ и по $y$. Вследствие того, что $B$ может оказаться вырожденной, а также потому, что в наши разностные отношения $\frac{\Delta}{\Delta x}$ входит только в первой степени, эти оценки не дают полной информации о всех разностных отношениях третьего порядка, а такая информация нам нужна, чтобы с ее помощью установить компактность приближенных решений и сходимость ее подпоследовательностей к дифференцируемым функциям.

Мы постараемся получить нужную нам информацию о разностных отношениях $\frac{\Delta^3}{\Delta x^2\,\Delta y}$, $\frac{\Delta^3}{\Delta x^2\,\Delta t}$ с помощью приема, который в § 16 нам помог оценить интегралы от производных $u_{xxy}$, $u_{xxt}$, …, на некотором удалении от границы.

Начнем опять с исходной системы

$$A\frac{\Delta u}{\Delta t}+B_0\frac{\Delta u}{\overrightarrow{\Delta x}}-B_1\frac{\Delta u}{\overleftarrow{\Delta x}}+C\frac{\Delta u}{\overrightarrow{\Delta y}}+Q(x,\ y,\ t)\,u=0,$$

и так же, как мы это делали в начале этого параграфа, построим расширенную систему, которой удовлетворяют разностные отношения:

$$u,\quad \frac{\Delta u}{\Delta t},\quad \frac{\Delta u}{\Delta t},\quad \frac{\Delta^2 u}{\Delta t^2},\quad \frac{\Delta^2 u}{\Delta y^2},\quad \frac{\Delta^2 u}{\Delta t\,\Delta y}.$$

Нам достаточно здесь ограничиться разностными отношениями до второго порядка. Удобно составной вектор, векторными компонентами которого являются перечисленные сейчас разностные отношения, обозначить буквой $v$, клеточно диагональные матрицы коэффициентов при разностных отношениях $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, $\frac{\Delta v}{\overrightarrow{\Delta x}}$, $\frac{\Delta v}{\overleftarrow{\Delta x}}$, $\frac{\Delta v}{\overrightarrow{\Delta y}}$ буквами $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}_0$, $\mathbb{B}_1$, $\mathbb{C}$, а все «младшие члены», содержащие компоненты $v$, но не содержащие разностных отношений от них, обозначить через $g$. В этих обозначениях расширенная система записывается как

$$\mathbb{A}\frac{\Delta v}{\Delta t}+\mathbb{B}_0\frac{\Delta v}{\overrightarrow{\Delta x}}-\mathbb{B}_1\frac{\Delta v}{\overleftarrow{\Delta y}}+\mathbb{C}\frac{\Delta v}{\overrightarrow{\Delta y}}=g.$$

Как уже отмечалось нами в начале параграфа, $g$ представляется как сумма слагаемых, каждое их которых получается как результат умножения некоторого матричного коэффициента на вектор $v$, взятый в одной из соседних с точкой $x$, $y$, $t$ точек $(x,\ y\pm h,\ t)$ $(x,\ y\pm h,\ t)$. Матричные коэффициенты, умножаемые на $v$ в этом представлении, определяются матрицами коэффициентов исходной системы и их разностными отношениями. Вследствие этого

$$\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\sum_{x=h}^{x=l-h}(\mathbb{A}^{-1}g,\ g)\,h^2\leqslant\mathrm{const}\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\sum_{x=h}^{x=l-h}(\mathbb{A}v,\ v)\,h^2,$$

$$\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\sum_{x=2h}^{x=l-h}\nu^2(x)\left(\mathbb{A}^{-1}\frac{\Delta g}{\overrightarrow{\Delta x}},\ \frac{\Delta g}{\overrightarrow{\Delta x}}\right)h^2\leqslant$$

$$\leqslant\mathrm{const}\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\sum_{x=2h}^{x=l-h}\nu^2(x)\left(\mathbb{A}\frac{\Delta v}{\overrightarrow{\Delta x}},\ \frac{\Delta v}{\overrightarrow{\Delta x}}\right)h^2+\mathrm{const}\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\sum_{x=h}^{x=l-h}\nu^2(x)\,(\mathbb{A}v,\ v)\,h^2$$

при любой неотрицательной $\nu^2(x)$. Константы в этих неравенствах определяются гладкостью коэффициентов исходной системы и оцениваются через их производные. Полезно еще заметить, что $\mathbb{B}_0$, $\mathbb{B}_1$ — клеточно диагональные матрицы, клетки на диагоналях которых — это матрицы $B_0$, $B_1$, которые диагональны, а на их диагонали стоят единицы и нули. Таким же свойством, очевидно, обладают и составные $\mathbb{B}_0$, $\mathbb{B}_1$. Применив к уравнению для $v$, т. е. к нашей расширенной системе, оператор $\dfrac{\underset{\to}{\Delta}}{\underset{\to}{\Delta x}}$, получим уравнения

$$\mathbb{A}(x, y, t)\frac{\Delta\left(\dfrac{\underset{\to}{\Delta} v}{\underset{\to}{\Delta x}}\right)}{\Delta t}+\mathbb{B}_0\frac{\underset{\to}{\Delta}\left(\dfrac{\underset{\to}{\Delta} v}{\underset{\to}{\Delta x}}\right)}{\underset{\to}{\Delta x}}-\mathbb{B}_1\frac{\underset{\leftarrow}{\Delta}\left(\dfrac{\underset{\to}{\Delta} v}{\underset{\to}{\Delta x}}\right)}{\underset{\leftarrow}{\Delta x}}+\mathbb{C}(x, y, t)\frac{\underset{\to}{\Delta}\left(\dfrac{\underset{\to}{\Delta} v}{\underset{\to}{\Delta x}}\right)}{\underset{\to}{\Delta y}}+$$
$$+\left[\frac{\underset{\to}{\Delta}}{\underset{\to}{\Delta x}}\mathbb{A}\right]\cdot\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)_{x-h,\, y,\, t}+\left[\frac{\underset{\to}{\Delta}}{\underset{\to}{\Delta x}}\mathbb{C}\right]\left(\frac{\underset{\to}{\Delta} v}{\underset{\to}{\Delta y}}\right)_{x-h,\, y,\, t}=\frac{\underset{\to}{\Delta} g}{\underset{\to}{\Delta x}}.$$

Эти уравнения имеет смысл рассматривать при произвольных $y$, $t$ в точках $x=2h$, $x=3h$, ..., $x=l-h$. Теперь помножим обе части полученной системы на гладкий положительный скалярный множитель $\nu(x)$, который можно внести под знак разностных отношений $\dfrac{\Delta}{\Delta t}$, $\dfrac{\underset{\to}{\Delta}}{\underset{\to}{\Delta y}}$, и воспользовавшись элементарными тождествами

$$\nu(x)\frac{\underset{\to}{\Delta} w}{\underset{\to}{\Delta x}}=\frac{\underset{\to}{\Delta}[\nu w]}{\underset{\to}{\Delta x}}-\left(\frac{\underset{\to}{\Delta}\nu}{\underset{\to}{\Delta x}}\right)w(x-h, y, t),$$
$$\nu(x)\frac{\underset{\leftarrow}{\Delta} w}{\underset{\leftarrow}{\Delta x}}=\frac{\underset{\leftarrow}{\Delta}[\nu w]}{\underset{\leftarrow}{\Delta x}}-\left(\frac{\underset{\leftarrow}{\Delta}\nu}{\underset{\leftarrow}{\Delta x}}\right)w(x+h, y, t),$$

перепишем систему в виде

$$\mathbb{A}(x, y, t)\frac{\Delta\left(\nu\dfrac{\underset{\to}{\Delta} v}{\underset{\to}{\Delta x}}\right)}{\Delta t}+\mathbb{B}_0\frac{\underset{\to}{\Delta}\left(\nu\dfrac{\underset{\to}{\Delta} v}{\underset{\to}{\Delta x}}\right)}{\underset{\to}{\Delta x}}-\mathbb{B}_1\frac{\underset{\leftarrow}{\Delta}\left(\nu\dfrac{\underset{\to}{\Delta} v}{\underset{\to}{\Delta x}}\right)}{\underset{\leftarrow}{\Delta x}}+$$
$$+\mathbb{C}(x, y, t)\frac{\underset{\to}{\Delta}\left(\nu\dfrac{\underset{\to}{\Delta} v}{\underset{\to}{\Delta x}}\right)}{\underset{\to}{\Delta y}}-\frac{\underset{\to}{\Delta}\nu}{\underset{\to}{\Delta x}}\left\{\mathbb{B}_0\frac{\underset{\to}{\Delta} v}{\underset{\to}{\Delta x}}\right\}_{x-h,\, y,\, t}+\frac{\underset{\leftarrow}{\Delta}\nu}{\underset{\leftarrow}{\Delta x}}\left\{B_1\frac{\underset{\to}{\Delta} v}{\underset{\leftarrow}{\Delta x}}\right\}_{x-h,\, y,\, t}+$$
$$+\nu\left[\frac{\underset{\to}{\Delta}}{\underset{\to}{\Delta x}}\mathbb{A}\right]\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)_{x-h,\, y,\, t}+\nu\left[\frac{\underset{\to}{\Delta}}{\underset{\to}{\Delta x}}\mathbb{C}\right]\left(\frac{\underset{\to}{\Delta} v}{\underset{\to}{\Delta y}}\right)_{x-h,\, y,\, t}=\nu(x)\frac{\underset{\to}{\Delta} g}{\underset{\to}{\Delta x}}.$$

Теперь выберем конкретный вид $\nu(x)$, положив

$$\nu(x)=\begin{cases}(x-5h)(l-5h-x), & \text{если это выражение положительно,}\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Заметим, что так выбранное $\nu(x)$ ограничено и имеет ограниченные разностные отношения

$$\frac{\underset{\to}{\Delta}\nu}{\underset{\to}{\Delta x}}=\frac{\nu(x)-\nu(x-h)}{h}=\nu'\left(x-\frac{h}{2}\right),$$
$$\frac{\underset{\leftarrow}{\Delta}\nu}{\underset{\leftarrow}{\Delta x}}=\frac{\nu(x+h)-\nu(x)}{h}=\nu'\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Введем теперь сокращенные обозначения

$$\tilde{v} = \nu(x)\frac{\Delta v}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}},$$

$$\tilde{g} = \frac{\Delta \nu}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}\left\{\mathbb{B}_0 \frac{\Delta v}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}\right\} - \frac{\Delta \nu}{\underset{\leftarrow}{\Delta x}}\left\{\mathbb{B}_1 \frac{\Delta v}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}\right\} + \\ + \nu\left[\frac{\Delta}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}\mathbb{A}\right]\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)_{x-h,\, y,\, t} - \nu\left[\frac{\Delta}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}\mathbb{C}\right]\left(\frac{\Delta v}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}\right)_{x-h,\, y,\, t} + \nu(x)\frac{\Delta g}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}},$$

и отметим неравенства

$$\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\sum_{x=2h}^{x=l-h}\left(\mathbb{A}^{-1}\nu\frac{\Delta g}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}},\ \nu\frac{\Delta g}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}\right)h^2 \leqslant \\ \leqslant \mathrm{const}\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\sum_{x=2h}^{l-h}(\mathbb{A}\tilde{v},\ \tilde{v})\,h^2 + \mathrm{const}\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\sum_{x=h}^{x=l-h}(\mathbb{A}v,\ v)\,h^2,$$

$$\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\sum_{x=2h}^{x=l-h}\left(\mathbb{A}^{-1}\nu\left[\frac{\Delta}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}\mathbb{A}\right]\left[\frac{\Delta v}{\Delta t}\right]_{x-h,\, y,\, t},\ \nu\left[\frac{\Delta}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}\mathbb{A}\right]\left[\frac{\Delta v}{\Delta t}\right]_{x-h,\, y,\, t}\right)h^2 \leqslant \\ \leqslant \mathrm{const}\sum_{y=-\infty}^{+\infty}\sum_{x=h}^{l-h}\left(\mathbb{A}\frac{\Delta v}{\Delta t},\ \frac{\Delta v}{\Delta t}\right)h^2,$$

$$\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\sum_{x=2h}^{x=l-h}\left(\mathbb{A}^{-1}\nu\left[\frac{\Delta}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}\mathbb{C}\right]\left[\frac{\Delta v}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}\right],\ \nu\left[\frac{\Delta}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}\mathbb{C}\right]\left[\frac{\Delta v}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}\right]_{x-h,\, y,\, t}\right)h^2 \leqslant \\ \leqslant \mathrm{const}\sum_{y=-\infty}^{+\infty}\sum_{x=h}^{l-h}\left(\mathbb{A}\frac{\Delta v}{\Delta y},\ \frac{\Delta v}{\Delta y}\right)h^2,$$

$$\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\sum_{x=2h}^{x=l-h}\left(\mathbb{A}^{-1}\frac{\Delta \nu}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}\left\{\mathbb{B}_0\frac{\Delta v}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}\right\},\ \frac{\Delta \nu}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}\left\{\mathbb{B}_0\frac{\Delta v}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}\right\}\right)h^2 \leqslant \\ \leqslant \mathrm{const}\sum_{y=-\infty}^{+\infty}\sum_{x=h}^{l-h}\left(\mathbb{B}_0\frac{\Delta v}{\Delta x},\ \mathbb{B}_0\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)h^2,$$

$$\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\sum_{x=2h}^{x=l-h}\left(\mathbb{A}^{-1}\frac{\Delta \nu}{\underset{\leftarrow}{\Delta x}}\left\{\mathbb{B}_1\frac{\Delta v}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}\right\},\ \frac{\Delta \nu}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}\left\{\mathbb{B}_1\frac{\Delta v}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}\right\}\right)h^2 \leqslant \\ \leqslant \mathrm{const}\sum_{y=-\infty}^{+\infty}\sum_{x=h}^{l-h}\left(\mathbb{B}_1\frac{\Delta v}{\Delta x},\ \mathbb{B}_1\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)h^2.$$

Первое из них мы в несколько иной форме уже выписывали, когда вводили обозначение для $g$. В правых частях второго, третьего, четвертого стоят суммы квадратичных форм $\left(\mathbb{A}\frac{\Delta v}{\Delta t},\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$, $\left(\mathbb{A}\frac{\Delta v}{\Delta y},\frac{\Delta v}{\Delta y}\right)$, $\left(\mathbb{B}_0\frac{\Delta v}{\Delta x},\mathbb{B}_0\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$, $\left(\mathbb{B}_1\frac{\Delta v}{\Delta x},\mathbb{B}_1\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$.

Вспоминая, что $v$ — составной вектор, составленный из $u$, $\frac{\Delta u}{\Delta t}$, $\frac{\Delta u}{\Delta y}$, $\frac{\Delta^2 u}{\Delta t^2}$, $\frac{\Delta^2 u}{\Delta y\,\Delta t}$, $\frac{\Delta^2 u}{\Delta y^2}$, мы можем эти правые части выразить через квадратичные формы от разностных отношений до третьего порядка вектор-функции $u$. Разностные отношения по $x$ участвуют только в следующих из этих форм:

$$\left(B\frac{\Delta u}{\Delta x},\ B\frac{\Delta u}{\Delta x}\right),\quad \left(B\frac{\Delta^2 u}{\Delta x\,\Delta t},\ B\frac{\Delta^2 u}{\Delta x\,\Delta t}\right),\quad \left(B\frac{\Delta^2 u}{\Delta x\,\Delta y},\ B\frac{\Delta^2 u}{\Delta x\,\Delta y}\right),$$

$$\left(B\frac{\Delta^2 u}{\Delta x\,\Delta y^2},\ B\frac{\Delta^2 u}{\Delta x\,\Delta y^2}\right),\quad \left(B\frac{\Delta^2 u}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta t},\ B\frac{\Delta^2 u}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta t}\right),\quad \left(B\frac{\Delta^2 u}{\Delta x\,\Delta t^2},\ B\frac{\Delta^2 u}{\Delta x\,\Delta t^2}\right).$$

Все такие квадратичные формы от разностных отношений до третьего порядка уже оценены нами через интегралы от производных начальной функции $\varphi(x, y)$. Это позволяет представить $\tilde{g}(x, y, t)$ в виде суммы

$$\tilde{g}(x, y, t) = \tilde{g}_0(x, y, t) + \tilde{g}_1(x, y, t),$$

так что

$$\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\ \sum_{x=2h}^{x=l-h} (\mathbb{A}^{-1}\tilde{g}_0,\ \tilde{g}_0)\, h^2 \leqslant \Phi,$$

$$\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\ \sum_{x=2h}^{x=l-h} (\mathbb{A}^{-1}\tilde{g}_1,\ \tilde{g}_1)\, h^2 \leqslant M'' \sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\ \sum_{x=2h}^{x=l-h} (\tilde{\mathbb{A}}\tilde{v},\ \tilde{v})\, h^2,$$

где постоянная $\Phi$ оценивается через квадратичные интегралы от $\varphi(x, y)$ и от ее производных до третьего порядка.

Заметим еще, что $\tilde{v}(x, y, t)$ обращается в нуль во всех точках сетки, отстоящих от границы $x=0$ или $x=l$ не более, чем на $5h$. Поэтому такие $\tilde{v}$ при $x=0$ $x=l$ обращают в нуль квадратичную форму $(\mathbb{B}\tilde{v}, \tilde{v})$ и, следовательно, можно считать, что $\tilde{v}$ удовлетворяют при $x=0$, $x=l$ диссипативным граничным условиям. Это позволяет оценивать $\tilde{v}$ по основной теореме об оценке разностных решений.

Обозначим

$$U(t) = \left[\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\ \sum_{x=h}^{x=l-h} (\tilde{\mathbb{A}}\tilde{v},\ \tilde{v})\, h^2\right]_{t=\text{const}},$$

$$F(t) = \sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\ \sum_{x=h}^{x=l-h} (\mathbb{A}^{-1}\tilde{g}_0,\ \tilde{g}_0)\, h^2 \leqslant M''U(t) + \Phi.$$

Неравенство, связывающее $U(t+\tau)$, $U(t)$, было установлено при доказательстве основной теоремы в предыдущем параграфе. Оно имеет вид

$$(1-\tau M)\, U(t+\tau) \leqslant (1+2\tau M)\, U(t) + \tau F(t).$$

Основная теорема утверждает, что на фиксированном интервале $0 < t < T$ времени

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} U(t) \leqslant M'U(0) + M''.$$

Чтобы расшифровать содержание этого неравенства, вспомним, что

$$\tilde{v} = \nu(x)\frac{\Delta v}{\underset{\rightarrow}{\overrightarrow{\Delta x}}} = \nu(x, h)\frac{\Delta v}{\overrightarrow{\Delta x}},$$

а сам вектор $v$ — составной и состоит из сеточной вектор-функции $u(x, y, t)$ и ее разностных отношений по $y$ и по $t$ вплоть до второго порядка.

Оценив

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} U(t)=\max_t \sum_{y=-\infty}^{y=+\infty}\sum_{x=h}^{x=l-h}(\mathbb{A}\tilde{v},\ \tilde{v})h^2,$$

мы тем самым оценили максимальное по времени значение следующих сумм, взятых по сеточному слою с фиксированным $t$:

$$\sum_{x,y} v^2(x,\ h)\left(A\frac{\Delta u}{\Delta x},\ \frac{\Delta u}{\Delta x}\right)h^2;\quad \sum_{x,y} v^2(x,\ h)\left(A\frac{\Delta^2 u}{\Delta x\,\Delta t},\ \frac{\Delta^2 u}{\Delta x\,\Delta t}\right)h^2,$$

$$\sum_{x,y} v^2(x,\ h)\left(A\frac{\Delta^2 u}{\Delta x\,\Delta y},\ \frac{\Delta^2 u}{\Delta x\,\Delta y}\right),\quad \sum_{x,y} v^2(x,\ h)\left(A\frac{\Delta^3 u}{\Delta x\,\Delta y^2},\ \frac{\Delta^3 u}{\Delta x\,\Delta y^2}\right),$$

$$\sum_{x,y} v^2(x,\ h)\left(A\frac{\Delta^3 u}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta t},\ \frac{\Delta^3 u}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta t}\right)$$

$$\sum_{x,y} v^2(x,\ h)\left(A\frac{\Delta^3 u}{\Delta x\,\Delta t^2},\ \frac{\Delta^3 u}{\Delta x\,\Delta t^2}\right).$$

Эти суммы оцениваются через $\Phi$ и через начальное при $t=0$, значение таких же сумм. Эти начальные значения в свою очередь оцениваются через соответствующие интегралы от производных $\varphi(x,\ y)$. Так как $v^2(x,\ h)$ в каждой точке $x,\ y,\ t$ нашей области при $h\to 0$ стремится к $x^2(l-x^2)$, то из полученных сейчас оценок разностных отношений и из оценок полученных в начале этого параграфа, следует, что во всякой внутренней подобласти

$$0<\lambda<x\leqslant l-\lambda<l$$

нашей полосы $0\leqslant x\leqslant l$, в которой мы строим сеточные функции, для них ограничены следующие суммы разностных отношений, вычисленные на любом сеточном слое $t=\text{const}$:

$$\sum_{x,y}(u,\ u)h^2,\quad \sum_{x,y}\left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x},\ \frac{\Delta u}{\Delta x}\right)+\left(\frac{\Delta u}{\Delta y},\ \frac{\Delta u}{\Delta y}\right)+\left(\frac{\Delta u}{\Delta t},\ \frac{\Delta u}{\Delta t}\right)\right]h^2,$$

$$\sum_{x,y}\left[\left(\frac{\Delta^2 u}{\Delta y^2},\ \frac{\Delta^2 u}{\Delta y^2}\right)+\left(\frac{\Delta^2 u}{\Delta y\,\Delta t},\ \frac{\Delta^2 u}{\Delta y\,\Delta t}\right)+\left(\frac{\Delta^2 u}{\Delta t^2},\ \frac{\Delta^2 u}{\Delta t^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\Delta^2 u}{\Delta x\,\Delta y},\ \frac{\Delta^2 u}{\Delta x\,\Delta y}\right)+\left(\frac{\Delta^2 u}{\Delta x\,\Delta t},\ \frac{\Delta^2 u}{\Delta x\,\Delta t}\right)\right]h^2,$$

$$\sum_{x,y}\left[\left(\frac{\Delta^3 u}{\Delta t^3},\ \frac{\Delta^3 u}{\Delta t^3}\right)+\ldots+\left(\frac{\Delta^3 u}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta t},\ \frac{\Delta^3 u}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta t}\right)\right]h^2.$$

Во все участвующие здесь разностные отношения символ $\frac{\Delta}{\Delta x}$ опять входит не выше, чем в первой степени, и все разностные отношения, вплоть до третьего порядка, этому условию удовлетворяющие, в выписанных суммах участвуют.

Вспомним теперь условия компактности сеточных функций, установленные в § 17. Согласно этим условиям из ограниченности

$$\sum (u,\ u) h^2, \quad \sum_{x,\,y} \left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}, \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) + \left(\frac{\Delta u}{\Delta y}, \frac{\Delta u}{\Delta y}\right) + \left(\frac{\Delta u}{\Delta t}, \frac{\Delta u}{\Delta t}\right)\right] h^2,$$

$$\sum_{x,\,y} \left[\frac{\Delta^2 u}{\Delta x\, \Delta y}\right]^2 h^2$$

вытекает компактность сеточных функций $u(x,\ y,\ t)$ относительно равномерной сходимости. Из ограниченности

$$\sum_{x,\,y} \left(\frac{\Delta u}{\Delta t}, \frac{\Delta u}{\Delta t}\right) h^2, \quad \sum_{x,\,y} \left[\left(\frac{\Delta^2 u}{\Delta x\, \Delta t}, \frac{\Delta^2 u}{\Delta x\, \Delta t}\right) + \left(\frac{\Delta^2 u}{\Delta y\, \Delta t}, \frac{\Delta^2 u}{\Delta y\, \Delta t}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\Delta^2 u}{\Delta y\, \Delta t}, \frac{\Delta^2 u}{\Delta y\, \Delta t}\right)\right] h^2, \quad \sum_{x,\,y} \left[\frac{\Delta^3 u}{\Delta x\, \Delta y\, \Delta t}\right]^2 h^2$$

следует компактность сеточных функций $\frac{\Delta u}{\Delta t}$, а конечность сумм

$$\sum_{x,\,y} \left(\frac{\Delta u}{\Delta y}, \frac{\Delta u}{\Delta y}\right) h^2, \quad \sum_{x,\,y} \left[\left(\frac{\Delta^2 u}{\Delta x\, \Delta y}, \frac{\Delta^2 u}{\Delta x\, \Delta y}\right) + \left(\frac{\Delta^2 u}{\Delta y^2}, \frac{\Delta^2 u}{\Delta y^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\Delta^2 u}{\Delta y\, \Delta t}, \frac{\Delta^2 u}{\Delta y\, \Delta t}\right)\right] h^2, \quad \sum_{x,\,y} \left[\frac{\Delta^3 u}{\Delta x\, \Delta y^2}\right]^2 h^2$$

влечет компактность сеточных $\frac{\Delta u}{\Delta y}$. Для того чтобы установить компактность $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, нам была бы нужна ограниченность

$$\sum_{x,\,y} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}, \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) h^2, \quad \sum_{x,\,y} \left[\left(\frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2}, \frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2}\right) + \left(\frac{\Delta^2 u}{\Delta x\, \Delta y}, \frac{\Delta^2 u}{\Delta x\, \Delta y}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\Delta^2 u}{\Delta y\, \Delta t}, \frac{\Delta^2 u}{\Delta y\, \Delta t}\right)\right] h^2.$$

Однако нам пока не известно, ограничены ли суммы

$$\sum_{x,\,y} \left(\frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2}, \frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2}\right) h^2, \quad \sum_{x,\,y} \left(\frac{\Delta^3 u}{\Delta x^2\, \Delta y}, \frac{\Delta^3 u}{\Delta x^2\, \Delta y}\right) h^2.$$

Нам и в дальнейшем не удастся доказать их ограниченность, не удастся доказать компактность сеточных функций $\frac{\Delta u}{\partial x}$.

Вместо этого мы ограничимся тем, что установим компактность сеточных функций

$$B \frac{\Delta u}{\Delta x} \equiv B_0 \frac{\Delta u}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}} - B_1 \frac{\Delta u}{\underset{\leftarrow}{\Delta x}}.$$

Действительно, в силу уравнения

$$A\frac{\Delta u}{\Delta t}+B_0\frac{\overrightarrow{\Delta u}}{\underset{\rightarrow}{\Delta x}}-B_1\frac{\overleftarrow{\Delta u}}{\underset{\leftarrow}{\Delta x}}+C\frac{\overleftarrow{\Delta u}}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}}+Qu=0,$$

каждая сеточная функция интересующего нас семейства $B\frac{\Delta u}{\Delta x}$ представляется в виде суммы функций

$$-A\frac{\Delta u}{\Delta t},\quad -C\frac{\overrightarrow{\Delta u}}{\underset{\rightarrow}{\Delta y}},\quad -Qu,$$

принадлежащих компактным семействам. Ясно, что такое представление влечет за собой компактность $B\frac{\Delta u}{\Delta x}$.

Теперь пора подвести итоги и резюмировать все выводы, полученные в результате проведенных нами рассуждений. Этим итогам и выводам посвящен следующий параграф.

## § 20. Теорема существования решения смешанной задачи

Следствия из компактности сеточных функций о характере пределов их подпоследовательностей. Выполнение для этих пределов дифференциальных уравнений и граничных условий. Формулировка доказанной теоремы существования и замечания о следствиях из ее доказательства. Формулировка теоремы существования в одномерном случае. Неравенства для решений и их производных. Замечания к одномерной теореме существования: 1) отказ от диссипативности граничных условий, 2) случай коэффициентов, не зависящих от времени, 3) теорема существования задачи Коши внутри характеристического треугольника.

В предыдущем § 19 установлена во всякой внутренней подобласти $0<\lambda<x<l-\lambda<l$ компактность сеточных функций

$$u,\quad \frac{\Delta u}{\Delta y},\quad \frac{\Delta u}{\Delta t},\quad B\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

В § 17 было установлено, что отсюда следует непрерывность функции $U(x, y, t)$, которая получается как предел некоторой сходящейся подпоследовательности, существование у нее непрерывных производных $\frac{\partial}{\partial y}U(x, y, t)$, $\frac{\partial}{\partial t}U(x, y, t)$, а также непрерывная дифференцируемость по $x$ вектор-функции $BU$, т. е. существование и непрерывность $\frac{\partial}{\partial x}BU$. Ясно, что из последовательностей, сходящихся во внутренних подобластях, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в каждой такой подобласти. Конечно, скорость ее сходимости будет убывать по мере расширения подобласти. Только эту подпоследовательность мы и будем в дальнейшем рассматривать. Оказывается, что из нее можно выбрать подпоследовательность сеточных функций, таких, что построенные по ним функции $Bu$ будут уже равномерно сходиться в замкнутой области

$$0 \leqslant x \leqslant l, \quad -Y \leqslant y \leqslant Y, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Для того чтобы в этом убедиться, достаточно проверить компактность сеточных функций $Bu$. Эта компактность вытекает из ограниченности сумм

$$\sum_{x,\, y} (Bu,\ Bu)\, h^2,$$

$$\sum_{x,\, y} \left(B \frac{\Delta^2 u}{\Delta x\, \Delta y},\ B \frac{\Delta^2 u}{\Delta x\, \Delta y}\right) h^2,$$

$$\sum_{x,\, y} \left[\left(B \frac{\Delta u}{\Delta x},\ B \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) + \left(B \frac{\Delta u}{\Delta y},\ B \frac{\Delta u}{\Delta y}\right) + \left(B \frac{\Delta u}{\Delta t},\ B \frac{\Delta u}{\Delta t}\right)\right] h^2,$$

которая нами также установлена еще в начале § 19.

На этом мы закончим доказательство компактности сеточных функций и исследование непрерывности и дифференцируемости их пределов.

Самая трудная часть исследования решений разностных уравнений завершена. Полученные нами выводы легко приведут к теореме существования, которая на самом деле уже почти доказана. Мы сейчас покажем, что предельная вектор-функция $U(x,\ y,\ t)$ удовлетворяет дифференциальным уравнениям.

Действительно, на всех сетках были выполнены разностные уравнения:

$$A \frac{\Delta u}{\Delta t} + B_0 \frac{\overrightarrow{\Delta} u}{\underrightarrow{\Delta x}} - B_1 \frac{\overleftarrow{\Delta} u}{\underleftarrow{\Delta x}} + C \frac{\overrightarrow{\Delta} u}{\underrightarrow{\Delta y}} + Q(x,\ y,\ t)\, u = 0$$

или, что то же самое,

$$A \frac{\Delta u}{\Delta t}\bigg|_{x,\, y,\, t} + B_0 \frac{\overleftarrow{\Delta} u}{\underleftarrow{\Delta x}}\bigg|_{x-h,\, y,\, t} - B_1 \frac{\overleftarrow{\Delta} u}{\underleftarrow{\Delta x}}\bigg|_{x,\, y,\, t} + C \frac{\overleftarrow{\Delta} u}{\underleftarrow{\Delta y}}\bigg|_{x,\, y,\, -h,\, t} + \\ + Q(x,\ y,\ l)\, u = 0.$$

Если теперь заданные на сетке функции

$$u,\ \frac{\Delta u}{\Delta t},\ \frac{\overleftarrow{\Delta} u}{\underleftarrow{\Delta x}} \equiv \frac{\Delta u}{\Delta x},\ \frac{\overleftarrow{\Delta} u}{\underleftarrow{\Delta y}} \equiv \frac{\Delta u}{\Delta y}$$

проинтерполировать на всю область, покрытую сеткой так, как это было описано в § 17, и воспользоваться тем, что проинтерполированные функции равностепенно непрерывны и отличаются в двух каких-либо точках внутри одной сеточной ячейки на величину порядка $O(\sqrt{h})$, то легко заметить, что всюду имеет место соотношение

$$A\frac{\Delta u}{\Delta t}+(B_0-B_1)\frac{\Delta u}{\Delta x}+C\frac{\Delta u}{\Delta y}+Q(x,\ y,\ t)\,u=O(\sqrt{h}).$$

Оценка $O(\sqrt{h})$ равномерна во всякой внутренней подобласти. В такой подобласти, как мы знаем, $u$, $\frac{\Delta u}{\Delta t}$, $B\frac{\Delta u}{\Delta x}=(B_0-B_1)\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta u}{\Delta y}$ можно считать, для рассматриваемой подпоследовательности сеточных функций равномерно сходящимися (при $h\to 0$), соответственно к

$$U(x,\ y,\ t),\quad \frac{\partial U(x,\ y,\ t)}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial x}BU,\ \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Отсюда выполнение уравнения

$$A\frac{\partial U}{\partial t}+B\frac{\partial U}{\partial x}+C\frac{\partial U}{\partial y}+QU=0$$

в любой точке любой внутренней подобласти очевидно. Тем самым доказано, что построенная нами функция действительно удовлетворяет уравнению всюду при $0<x<l$.

Далее, для любого $\xi>0$ $U(x,\ y,\ t)$ непрерывна по $x$, $y$, $t$ при $\xi<x<l-\xi$. Покажем, что при $t=0$ имеет место равенство $U(x,\ y,\ 0)=\varphi(x,\ y)$, т. е. что удовлетворяются начальные данные. Действительно, для любой сеточной $u(x,\ y,\ t)$ в точках сетки, лежащих на слое $t=0$, мы имеем по построению $u(x,\ y,\ 0)=\varphi(x,\ y)$. Так как $\varphi(x,\ y)$ имеет ограниченные производные, а проинтерполированная с сетки на всю область $u(x,\ y,\ t)$ меняется в пределах одной сеточной ячейки на $O(\sqrt{h})$, мы имеем

$$u(x,\ y,\ 0)-\varphi(x,\ y)=O(\sqrt{h}).$$

Сеточные $u(x,\ y,\ t)$ из нашей подпоследовательности равномерно при $\xi\leqslant x\leqslant l-\xi$, $-Y\leqslant y\leqslant Y$, $0\leqslant t\leqslant T$ сходятся к $U(x,\ y,\ t)$ при $h\to 0$. Теперь очевидно, что

$$U(x,\ y,\ 0)-\varphi(x,\ y)=0.$$

Из-за произвольности $\xi>0$ это равенство имеет место всюду при $0<x<l$.

Точно так же проверяется выполнение граничных условий при $x=0$, $x=l$. При этой проверке мы должны пользоваться непрерывностью $BU$ при $0\leqslant x\leqslant l$. Напомним, что $BU$ — это вектор с компонентами $U_1$, $U_2$, $U_{n_0}$, $-U_{n_0+1}$, $-U_{n_0+2}$, ..., $-U_{n_1}$, 0, 0, ..., 0. Тем самым мы подчеркнем, что $U_1$, $U_2$, ..., $U_{n_1}$ у нас непрерывны в замкнутой области $0\leqslant x\leqslant l$. (Про непрерывность $U_{n_1+1}$, $U_{n_1+2}$, ..., $U_n$ мы можем утверждать, что она имеет место лишь при $0<x<l$. Непрерывности этих последних функций

вплоть до границы мы доказывать не умеем.) Для сеточных $u_1$, $u_2$, ..., $u_{n_1}$ мы имеем равенства (в граничных точках сетки):

$$u_i(0,\ y,\ t)=\sum_{j=n_0+1}^{n_1}\alpha_{ij}(y,\ t)\,u_j(h,\ y,\ t),\qquad i=1,\ 2\ \dots\ n_0,$$

$$u_i(l,\ y,\ t)=\sum_{j=1}^{n_0+1}\beta_{ij}(y,\ t)\,u_j(l-h,\ y,\ t),\qquad i=n_0+1,\ n_0+2\dots n_1.$$

Для проинтерполированных $u_i(x,\ y,\ t)$ отсюда заключаем, что

$$u_i(0,\ y,\ t)-\sum_{j=n_0+1}^{n_1}\alpha_{ij}(y,\ t)\,u_j(0,\ y,\ t)=O(\sqrt{h}),\quad i=1,\ 2,\ \dots,\ n_0,$$

$$u_i(l,\ y,\ t)-\sum_{j=1}^{n_0+1}\beta_{ij}(y,\ t)\,u_j(l,\ y,\ t)=O(\sqrt{h}),$$

$$i=n_0+1,\ n_0+2,\ \dots,\ n_1.$$

Переходя к пределу при $h\to 0$, убеждаемся в выполнении граничных условий для предельных функций.

Сформулируем доказанную теорему и все налагаемые при этом условия.

I. *Область, где строится решение, задается неравенствами*:

$$0\leqslant x\leqslant l,\quad -\infty\leqslant y\leqslant+\infty,\quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

II. *Система уравнений*:

$$A(x,\ y,\ t)\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}+C(x,\ y,\ t)\frac{\partial u}{\partial y}+Q(x,\ y,\ t)\,u=0,$$

$$B=\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & & & & 0\\ & +1 & & n_0\ \text{штук} & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & +1 & & & & & & & \\ & & & & -1 & & & & & & \\ & & & & & -1 & & n_1-n_0\ \text{штук} & & & \\ & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & & 0\quad n-n_1\ \text{штук} & \\ 0 & & & & & & & & & \ddots & 0 \end{pmatrix}$$

*имеет матрицу $B$ постоянной специального вида, $A$, $C$ — матрицы симметрические и положительно определенные. Все матрицы коэффициентов достаточно гладкие.*

III. *Граничные условия на левой границе*

$$u_i=\sum_{j=n_0+1}^{n_1}\alpha_{ij}u_j\qquad(i=1,\ 2,\ \dots,\ n_0).$$

*на правой границе*

$$u_l = \sum_{j=1}^{n_0} \beta_{lj} u_j \qquad (j = n_0+1,\ n_0+2,\ \ldots,\ n_1).$$

*Здесь* $\alpha_{ij}(y, t)$, $\beta_{ij}(y, t)$ — *достаточно гладкие функции времени. Граничные условия предполагаются строго диссипативными. Это означает, что любая вектор-функция* $u$, *удовлетворяющая граничным условиям, удовлетворяет также неравенствам*

$$\left.\begin{aligned} (Bu, u)|_{x=0} &\leqslant -k_0 \sum_{i=n_0+1}^{n_1} u_i^2 \\ (Bu, u)|_{x=l} &\geqslant k_0 \sum_{i=1}^{n_0} u_i^2 \end{aligned}\right\}$$

$$k_0 > 0.$$

*Если* $\alpha_{ij}$, $\beta_{ij}$ *постоянны, то, как это видно из приведенного доказательства, вместо строгой диссипативности можно ограничиться просто диссипативностью* ($k_0 = 0$).

IV. *Начальные данные* $u(x, y, 0) = \varphi(x, y)$ *предполагаются достаточно гладкими, равными нулю при* $|y| > \frac{1}{2} Y$ *и во всех точках* $x$, $y$, *таких, что либо* $0 \leqslant x \leqslant \xi$, *либо* $l - x \geqslant \xi > 0$ *для некоторого* $\xi$.

V. *При предположениях* I — IV *существует решение поставленной задачи. Это решение будет отлично от нуля лишь в ограниченной части описанной в* I *области.*

Решение единственно. По поводу единственности см. конец приведенного ниже замечания 2.

Замечание 1. В формулировке пункта IV можно отказаться от требования, чтобы $\varphi(x, y)$ обращалась в нуль в окрестности границ $x = 0$, $x = l$. Проще всего это сделать, построив последовательность решений, начальные данные которых обращаются в нуль в полосках все более и более узких, но имеют ограниченными все производные до некоторого порядка, причем эти производные сходятся к производной предельной функции. Последовательность соответствующих решений, как можно показать, будет компактна и из нее можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к решению, начальные данные для которого — предел начальных данных из выбранной последовательности. Мы не будем проводить эти рассуждения подробнее, ограничившись лишь приведенной схемой. Заметим, однако, что начальные данные, для которых таким путем удастся доказать существование решения, окажутся согласованными с граничными условиями в том смысле, какой был описан в § 15.

Замечание 2. Для построенного решения из нашего доказательства можно вывести оценки с постоянными, выражающимися через размеры области, коэффициенты уравнений и граничных условий, начальные данные и через производные этих функций достаточно высокого порядка. Такие оценки вытекают из заключительного замечания § 17 и из полученных при доказательстве теоремы существования оценок сумм квадратов разностных отношений. Оценки решения имеют вид

$$
i=1,\,2,\,\ldots,\,n \left\{
\begin{aligned}
&|u_i| \leqslant \text{const}, \quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial t}\right| \leqslant \text{const}, \quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial y}\right| \leqslant \text{const},\\
&\left|\frac{\partial u_i}{\partial t}\bigg|_{x_1,\,y_1,\,t_1} - \frac{\partial u_i}{\partial t}\bigg|_{x_2,\,y_2,\,t_2}\right| \leqslant\\
&\leqslant \text{const}\left(\sqrt[3]{|t_1-t_2|} + \sqrt{|x_1-x_2|} + \sqrt{|y_1-y_2|}\right),\\
&\left|\frac{\partial u_i}{\partial y}\bigg|_{x_1,\,y_1,\,t_1} - \frac{\partial u_i}{\partial y}\bigg|_{x_2,\,y_2,\,t_2}\right| \leqslant\\
&\leqslant \text{const}\left(\sqrt[3]{|t_1-t_2|} + \sqrt{|x_1-x_2|} + \sqrt{|y_1-y_2|}\right),
\end{aligned}
\right.
$$

$$
i=1,\,2,\,\ldots,\,n_0 \left\{
\begin{aligned}
&|u_i(x_1,\,y_1,\,t_1) - u_i(x_2,\,y_2,\,t_2)| \leqslant\\
&\leqslant \text{const}\left(\sqrt[3]{|t_1-t_2|} + \sqrt{|x_1-x_2|} + \sqrt{|y_1-y_2|}\right),\\
&\left|\frac{\partial u_i}{\partial x}\bigg|_{x_1,\,y_1,\,t_1} - \frac{\partial u_i}{\partial x}\bigg|_{x_2,\,y_2,\,t_2}\right| \leqslant\\
&\leqslant \text{const}\left(\sqrt[3]{|t_1-t_2|} + \sqrt{|x_1-x_2|} + \sqrt{|y_1-y_2|}\right),\\
&\left|\frac{\partial u_i}{\partial x}\right| \leqslant \text{const}.
\end{aligned}
\right.
$$

Из этих оценок, в частности, следуют свойства 1), 2), 3) решения $u(x,\ y,\ t)$, которые в § 16 использовались при доказательстве теоремы единственности.

В дальнейшем мы будем существенно использовать теорему существования в одномерном случае. Такая теорема доказывается, по существу, так же как и двумерная, описанная нами, но, конечно, несколько проще. Не останавливаясь на отличиях в деталях доказательств, приведем ее формулировку и обсудим некоторые простые следствия из нее.

Нам удобно, имея в виду дальнейшие применения, считать в этой формулировке постоянной не матрицу $B$ коэффициентов при производных по $x$, а матрицу $A$ коэффициентов при производных по $t$. Эту последнюю матрицу мы будем, не ограничивая общности, считать единичной. Матрица $B$ предполагается диагональной с элементами главной диагонали $\pm k_l(t,\ x)$, не обращающимися в нуль.

I. *Область, где строится решение, является прямоугольником*

$$0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

II. *Система уравнений*

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + k_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_l m_{il} u_l = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_0),$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - k_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_l m_{il} u_l = 0 \qquad (i = n_0 + 1,\ \ldots,\ n),$$

$$k_i(x,\ t) > 0.$$

*Коэффициенты предполагаются достаточно гладкими.*

III. *Граничные условия на левой границе*

$$u_i = \sum_{j=n_0+1}^{n} \alpha_{ij} u_j \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_0),$$

*на правой границе*

$$u_i = \sum_{j=1}^{n_0} \beta_{ij} u_j \qquad (i = n_0 + 1,\ \ldots,\ n).$$

*Здесь $\alpha_{ij}(t)$, $\beta_{ij}(t)$ — достаточно гладкие функции времени. Граничные условия предполагаются строго диссипативными. Это означает, что любая функция, удовлетворяющая граничным условиям, удовлетворяет также и неравенствам*

$$-\sum_{i=1}^{n_0} k_i u_i^2 + \sum_{i=n_0+1}^{n} k_i u_i^2 \leqslant -k_0 \text{ — на правой границе,}$$

$$-\sum_{i=n_0+1}^{n} k_i u_i^2 + \sum_{i=1}^{n_0} k_i u_i \leqslant -k_0 \text{ — на левой границе.}$$

*Если $\alpha_{ij}$, $\beta_{ij}$ постоянны, то достаточно ограничиться просто диссипативностью ($k_0 = 0$).*

IV. *Начальные данные $u_i(x,\ 0) = \varphi_i(x)$ предполагаются достаточно гладкими и согласованными с граничными условиями вместе со своими производными достаточно высокого порядка.*

V. *При предположениях I — IV существует единственное решение поставленной задачи в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$ (единственность была доказана в § 16).*

Для этого решения могут быть получены оценки с постоянными, выражающимися через размеры прямоугольника, через коэффициенты уравнений и граничных условий, начальные данные и через производные этих функций достаточно высокого порядка.

Вот эти оценки:

$$|u_i| \leqslant \text{const}, \quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial t}\right| \leqslant \text{const}, \quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial x}\right| \leqslant \text{const},$$

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial x}\Big|_{x_1,\,t_1} - \frac{\partial u_i}{\partial x}\Big|_{x_2,\,t_2}\right| \leqslant \text{const}\left(\sqrt{|t_1-t_2|}+\sqrt{|x_1-x_2|}\right),$$

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial t}\Big|_{x_1,\,t_1} - \frac{\partial u_i}{\partial t}\Big|_{x_2,\,t_2}\right| \leqslant \text{const}\left(\sqrt{|t_1-t_2|}+\sqrt{|x_1-x_2|}\right).$$

Сделаем несколько замечаний относительно теоремы и ее формулировки.

Замечание 1. В формулировке пункта III можно отказаться от требования диссипативности граничных условий. В случае, если граничные условия имеют такой вид, как в пункте III, то преобразованием неизвестных $u_i(x, t)$ можно добиться выполнения условий диссипативности. Это преобразование приведет только к некоторому изменению констант в окончательных оценках. Если коэффициенты граничных условий и уравнений не зависят от времени $t$, то преобразование неизвестных функций также можно сделать не зависящим от времени.

Замечание 2. Если система с коэффициентами и граничными условиями, не зависящими от $t$, задана в области $0 \leqslant t < \infty$, $0 \leqslant x \leqslant l$, то решение поставленной задачи существует для всех $t > 0$ и удовлетворяет оценкам вида

$$|u_i(x, t)| \leqslant Ce^{Kt}, \quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial t}\right| \leqslant Ce^{Kt}, \quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial x}\right| \leqslant Ce^{Kt},$$

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial x}\Big|_{x_1,\,t_1} - \frac{\partial u_i}{\partial x}\Big|_{x_2,\,t_2}\right| \leqslant D(t_1, t_2)\left(\sqrt{|t_2-t_1|}+\sqrt{|x_2-x_1|}\right),$$

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial t}\Big|_{x_1,\,t_1} - \frac{\partial u_i}{\partial t}\Big|_{x_2,\,t_2}\right| \leqslant D(t_1, t_2)\left(\sqrt{|t_2-t_1|}+\sqrt{|x_2-x_1|}\right).$$

Экспоненциальная зависимость констант от времени следует из оценки для роста разностных «интегралов энергии», получаемой так же, как и в разобранном нами двумерном случае. Действительно, постоянная $M'$ в этих оценках, получаемых при помощи основной теоремы об оценке разностных решений (§ 18), зависит от $T$ экспоненциально, так как мы предположили, что коэффициенты уравнений не зависят от $t$.

Сделанное в этом замечании утверждение понадобится нам в дальнейшем в главе IV при построении теории метода Фурье и преобразования Лапласа.

Замечание 3. Нами была доказана единственность решения задачи Коши для гиперболической системы. Эта задача требует только начальных данных. Граничные условия ей не нужны. Решение определяется однозначно внутри характеристического треугольника, опирающегося на отрезок оси $x$, где задаются начальные данные. Этот треугольник высекается характеристикой $\frac{dx}{dt} = k_i(x, t)$ с наибольшим $k_i$, проходящей через левую границу отрезка, и характеристикой $\frac{dx}{dt} = k_i(x, t)$ с наименьшим $k_i(x, t)$, проходящей через его правую границу. Коэффициенты $k_i(x,t)$ системы

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + k_i(x, \ t)\frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_k m_{ik}u_k = 0$$

мы здесь не предполагаем строго положительными или отрицательными. Они могут даже менять знак.

Мы сейчас покажем, как из нашей теоремы существования для граничной задачи вывести теорему существования решения задачи Коши внутри характеристического треугольника. Во-первых, покажем, что можно ограничиться только случаем строго положительных наклонов характеристик $k_i(x, t)$. Действительно, преобразование независимых переменных

$$x' = x - at, \qquad t' = t$$

приводит систему к виду

$$\frac{\partial u_i}{\partial t'} + (a + k_i)\frac{\partial u_i}{\partial x'} + \sum_k m_{ik}u_k = 0.$$

Ясно, что выбором достаточно большого положительного $a$ можно добиться положительности наклонов характеристик

$$\frac{dx'}{dt'} = a + k_i.$$

Рассмотрим систему с положительным наклоном характеристик внутри некоторого достаточно большого прямоугольника, содержащего характеристический треугольник (рис. 55). Если система не была определена в этом прямоугольнике всюду, то мы ее доопределим, продолжив коэффициенты и правые части произвольным достаточно гладким образом. Продолжим также начальные данные на все основание этого прямоугольника. Так как систему мы предполагаем с положительными $k_i$, то граничные условия нужно для нее задавать только на левой границе. Зададим их опять-таки произвольно достаточно гладкими и согласованными с начальными данными. (В качестве граничных условий могут быть заданы значения всех неизвестных функций $u_i$ на левой границе.)

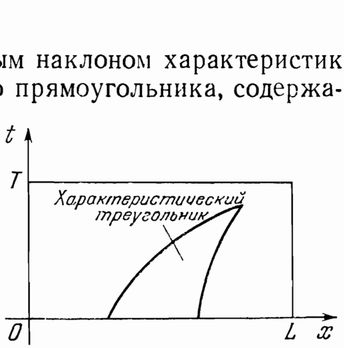

Рис. 55.

У такой расширенной задачи по доказанной теореме будет существовать решение. В частности, оно будет существовать и внутри характеристического треугольника. По теореме единственности решение внутри этого треугольника не зависит от нашего произвола в продолжении уравнений, начальных и граничных условий.

В нашем доказательстве мы не сформулировали аккуратно предположений относительно коэффициентов и начальных данных (из которых следовала бы возможность их гладкого продолжения) и не дали точного описания такого продолжения. Мы не будем останавливаться на этих тонкостях. Этими замечаниями мы закончим наше обсуждение теоремы существования.

# *Глава III*

# УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА

## § 21. Свойства гармонических функций

Инвариантность уравнения Лапласа и интеграла Дирихле относительно конформных преобразований плоскости. Две теоремы о среднем арифметическом для гармонических функций. Следствие — оценка гармонической функции в центре круга через интеграл ее квадрата. Из сходимости последовательности гармонических функций в среднем вытекает равномерная сходимость в некоторой подобласти. Решение задачи Дирихле в круге бесконечно дифференцируемо во всех внутренних точках. Оценка его производных в центре круга. Теорема Гарнака о равномерной сходимости и о гармоничности предела. Сходимость производных во внутренних точках. Неравенство Гарнака для неотрицательных гармонических функций. Теорема Лиувилля. Усиленный принцип максимума. Теорема о разрывной мажоранте. Устранимые особенности.

В этом параграфе мы начнем подробное исследование решений простейшего эллиптического уравнения — уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. С этим уравнением мы уже встречались во вводной части курса.

Остановимся сначала на инвариантности уравнения Лапласа относительно некоторых преобразований плоскости независимых переменных $x$, $y$. Такими преобразованиями являются произвольные невырожденные конформные преобразования

$$x=x(\xi,\ \eta),$$
$$y=y(\xi,\ \eta).$$

Условие конформности (как известно из теории функций комплексного переменного) записывается в виде уравнений Коши — Римана

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}=\frac{\partial y}{\partial \eta},$$
$$\frac{\partial x}{\partial \eta}=-\frac{\partial y}{\partial \xi}.$$

Невырожденность преобразования эквивалентна неравенству

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Нам будет удобно пользоваться не самими условиями Коши —

Римана, а легко вытекающими из них тремя группами равенств

$$\text{I.} \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix},$$

$$\text{II.} \qquad \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta} = 0,$$

$$\text{III.} \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0.$$

Какова бы ни была достаточно гладкая функция $u(x, y)$, мы можем для нее получить следующие равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2\right] + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\left[\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right] +$$
$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\right] = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}.$$

Последнее из них показывает, что утверждения $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ эквивалентны.

Проинтегрируем равенство

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2 = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

по некоторой области $\gamma$ на плоскости $\xi$, $\eta$:

$$\iint_{\gamma} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2\right] d\xi\, d\eta = \iint_{\gamma} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi\, d\eta.$$

Если при преобразовании $x=x(\xi, \eta)$, $y=y(\xi, \eta)$ область $\gamma$ переходит в область $g$, то, как известно из интегрального исчисления,

$$\iint\limits_{\gamma} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi\, d\eta = \iint\limits_{g} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy.$$

Мы доказали равенство

$$\iint\limits_{\gamma} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2\right] d\xi\, d\eta = \iint\limits_{g} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy,$$

показывающее инвариантность интеграла $\iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy$ относительно конформных преобразований. Этот интеграл называется *интегралом Дирихле*. В дальнейшем он будет играть важную роль в теории задачи Дирихле. Подчеркнем, что функция $u(x, y)$, участвующая в доказанном равенстве, вовсе не обязана быть гармонической.

Напомним формулу Пуассона (§ 2):

$$u(\rho\cos\alpha, \ \rho\sin\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\omega+\alpha)\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos\omega+\rho^2}\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\varphi-\alpha)+\rho^2}\,d\varphi.$$

Мы знаем, что эта формула дает решение задачи Дирихле в круге с любой непрерывной функцией $f(\varphi)$. Напомним еще следующий вариант записи формулы Пуассона, который будет нам иногда полезен:

$$u(x, \ y)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f(\varphi)\,Re^{i\varphi}\,d\varphi}{Re^{i\varphi}-(x+iy)}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f(\varphi)\,Re^{-i\varphi}\,d\varphi}{Re^{-i\varphi}-(x-iy)}.$$

Сейчас мы установим целый ряд интересных и важных свойств гармонических функций.

Две формы теоремы о среднем арифметическом. *Если $u(x, y)$ непрерывна в круге $K\,\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant R^2\}$ и гармонична внутри него, то*

$$1^\circ \qquad u(x_0, y_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(x_0+R\cos\varphi, \ y_0+R\sin\varphi)\,d\varphi,$$

$$2^\circ \qquad u(x_0, \ y_0)=\frac{\iint\limits_K u(x, \ y)\,dx\,dy}{\iint\limits_K dx\,dy}=\frac{\iint\limits_K u(x, \ y)\,dx\,dy}{\pi R^2}.$$

Для доказательства первого утверждения достаточно переписать формулу Пуассона для круга с центром в точке $(x_0, y_0)$:

$$u(x_0+\rho\cos\alpha,\ y_0+\rho\sin\alpha)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0+R\cos\varphi,\ y_0+R\sin\varphi)\frac{R^2-\rho^2}{R^2+2R\rho\cos(\varphi-\alpha)+\rho^2}\,d\varphi$$

и положить $\rho=0$.

Вторую форму теоремы о среднем арифметическом легко вывести из первой. Действительно, при любом $r$ $(0\leqslant r\leqslant R)$

$$u(x_0,\ y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0+r\cos\varphi,\ y_0+r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Умножим обе части этого равенства на $r\,dr$ и проинтегрируем по $r$ от 0 до $R$:

$$u(x_0,\ y_0)\int_0^R r\,dr=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R u(x_0+r\cos\varphi,\ y_0+r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

Отсюда

$$u(x_0,\ y_0)=\frac{\iint\limits_K u(x,\ y)\,dx\,dy}{\frac{R^2}{2}\cdot 2\pi}.$$

Следствие 1. *При тех же предположениях*

$$|u(x_0,\ y_0)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}R}\sqrt{\iint\limits_K u^2(x,\ y)\,dx\,dy}.$$

Доказательство следует из второй формы только что доказанной теоремы:

$$|u(x_0,\ y_0)|=\frac{1}{\pi R^2}\left|\iint\limits_K u(x,\ y)\,dx\,dy\right|\leqslant\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_K|u(x,\ y)|\,dx\,dy$$

и из неравенства Коши — Буняковского:

$$\iint\limits_K|u(x,\ y)|\,dx\,dy\leqslant\sqrt{\iint\limits_K u^2(x,\ y)\,dx\,dy}\sqrt{\iint\limits_K 1^2\,dx\,dy}=$$
$$=\sqrt{\pi R^2}\sqrt{\iint\limits_K u^2(x,\ y)\,dx\,dy}.$$

Будем обозначать посредством $G_\delta$ множество точек области $G$, удаленных от ее границы больше, чем на $\delta>0$.

Следствие 2. *Последовательность $\{u_n(x, y)\}$ гармонических в $G$ функций, сходящихся в $G$ в среднем, в каждой внутренней подобласти $G_\delta$ сходится равномерно.*

Это утверждение следует из того, что

$$\max_{(x, y)\in G_\delta} |u_n(x, y) - u_m(x, y)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}\delta}\sqrt{\iint_G (u_n - u_m)^2\,dx\,dy},$$

так как любой круг радиуса $\delta$ с центром в $G_\delta$ принадлежит полностью $G$ (разность $u_n - u_m$ также гармонична).

Оказывается, что гармоническая функция внутри круга может быть сколько угодно раз продифференцирована, если она на всем круге непрерывна и ограничена. Для доказательства этого факта заметим, что

$$\frac{\partial^n}{\partial x^m \partial y^{n-m}}\left[\frac{Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi} - (x+iy)}\right] = \frac{n!\,Re^{i\varphi} i^{n-m}}{[Re^{i\varphi} - (x+iy)]^{n+1}}$$

и что $|Re^{i\varphi} - (x+iy)| \geqslant R - \sqrt{x^2+y^2}$. Последнее становится очевидным, если на комплексной плоскости рассмотреть треугольник со следующими вершинами: $Re^{i\varphi}$, $x+iy$ и начало координат.

Отсюда

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial x^m\,\partial y^{n-m}}\,\frac{Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi} - (x+iy)}\right| \leqslant \frac{n!\,R}{(R - \sqrt{x^2+y^2})^{n+1}}.$$

Аналогично

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial x^m\,\partial y^{n-m}}\,\frac{Re^{-i\varphi}}{Re^{-i\varphi} - (x-iy)}\right| \leqslant \frac{n!\,R}{(R - \sqrt{x^2+y^2})^{n+1}}.$$

Существование, ограниченность и непрерывность всех этих производных делают законным формальное дифференцирование внутри круга $x^2+y^2 \leqslant r^2 < R^2$ формулы Пуассона

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\varphi)\,Re^{i\varphi}\,d\varphi}{Re^{i\varphi} - (x+iy)} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\varphi)\,Re^{-i\varphi}\,d\varphi}{Re^{-i\varphi} - (x-iy)}$$

по параметрам $x$, $y$ любое конечное число раз. (Непрерывность $n$-х производных вытекает из ограниченности $n+1$-х). Для производных получаем оценку $(n > 0)$:

$$\left|\frac{\partial^n u(x, y)}{\partial x^m\,\partial y^{n-m}}\right| \leqslant \frac{2n!\,RM}{(R - \sqrt{x^2+y^2})^{n+1}}.$$

Через $M$ мы обозначили $\max|f(\varphi)| = \max|u(R\cos\varphi, R\sin\varphi)|$. В центре круга, т. е. при $x = y = 0$

$$\left|\left[\frac{\partial^n u(x, y)}{\partial x^m\,\partial y^{n-m}}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}\right| \leqslant \frac{2n!\,M}{R^n}.$$

Ясно, что такая же оценка может быть написана и для круга с центром в произвольной точке:

$$\left|\left[\frac{\partial^n u(x, y)}{\partial x^m \partial y^{n-m}}\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\right| \leqslant \frac{2n!}{R^n} \max_{\varphi} |u(x_0+R\cos\varphi, \ y_0+R\sin\varphi)|.$$

Первая теорема Гарнака. *Последовательность непрерывных на $\bar{G}$ гармонических функций, равномерно сходящаяся на границе $\Gamma$ области $G$, равномерно сходится и внутри $G$, причем ее пределом является гармоническая функция. Для каждой внутренней подобласти сходимость равномерная не только для самих функций, но и для их производных любого фиксированного порядка.*

Равномерная сходимость последовательности $\{u_k(x, y)\}$ внутри $G$ вытекает из ее равномерной сходимости на границе. Это проверяется применением принципа максимума к гармоническим функциям $u_k(x, y) - u_l(x, y)$.

Докажем теперь равномерную сходимость производных некоторого фиксированного порядка

$$\frac{\partial^n u_k(x, y)}{\partial x^m \partial y^{n-m}}$$

внутри $G_\delta$. Построив вокруг произвольной точки $(x_0, y_0)$ круг радиуса $\delta$, целиком лежащей в $G$, применим к гармонической функции $u_k(x, y) - u_l(x, y)$ оценку

$$\left|\left[\frac{\partial^n (u_k - u_l)}{\partial x^m \partial y^{n-m}}\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\right| \leqslant \frac{2n!}{\delta^n} \max_{\substack{(x-x_0)^2+\\ +(y-y_0)^2=\delta^2}} |u_k(x, y) - u_l(x, y)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2n!}{\delta^n} \max_{\Gamma} |u_k(x, y) - u_l(x, y)|.$$

Из произвольности точки $(x_0, y_0) \in G_\delta$ выводим, что всюду внутри $G_\delta$

$$\left|\frac{\partial^n (u_k - u_l)}{\partial x^m \partial y^{n-m}}\right| \leqslant \frac{2n!}{\delta^n} \max_{\Gamma} |u_k(x, y) - u_l(x, y)|.$$

Это неравенство и доказывает равномерную сходимость производных в $G_\delta$. По известной теореме анализа отсюда вытекает, что всюду в области $G$ существуют производные

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^m \partial y^{n-m}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\partial^n u_k}{\partial x^m \partial y^{n-m}}.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в уравнении $\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} = 0$, приходим к выводу, что предельная функция $u(x, y)$ гармонична в области $G$. Теорема Гарнака доказана.

Следствие. *Последовательность функций $u_k(x, y)$, гармонических в некоторой области $G$ и непрерывных в ее замыкании $\bar{G}$, сходящаяся в этой области в среднем, внутри любой подобласти $G_\delta$*

*сходится равномерно вместе с производными любого фиксированного порядка. Пределом этой последовательности является гармоническая функция $u(x, y)$, а пределом последовательностей производных — соответствующие производные от $u$.*

Это утверждение вытекает из доказанной теоремы Гарнака и второго следствия теоремы о среднем арифметическом.

Выведем из формулы Пуассона изящное неравенство Гарнака для неотрицательных гармонических функций.

Неравенство Гарнака. *Пусть $u(x, y) \geqslant 0$ гармонична (и непрерывна вплоть до границы) внутри круга $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leqslant R^2$. Тогда она удовлетворяет неравенству* $(0 \leqslant \rho < R)$

$$\frac{R-\rho}{R+\rho} u(x_0, y_0) \leqslant u(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\sin\alpha) \leqslant \frac{R+\rho}{R-\rho} u(x_0, y_0).$$

Для доказательства воспользуемся неравенством

$$\frac{R-\rho}{R+\rho} = \frac{R^2-\rho^2}{(R+\rho)^2} \leqslant \frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos\omega} \leqslant \frac{R^2-\rho^2}{(R-\rho)^2} = \frac{R+\rho}{R-\rho}$$

и формулой Пуассона

$$u(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\sin\alpha) = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0+R\cos\varphi, y_0+R\sin\varphi)\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\varphi-\alpha)}\,d\varphi.$$

Пользуясь еще неотрицательностью $u(x_0+R\cos\varphi, y_0+R\sin\varphi) = f(\varphi)$, мы имеем

$$\frac{R-\rho}{R+\rho}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi \leqslant u(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\sin\alpha) \leqslant \frac{R+\rho}{R-\rho}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi.$$

По теореме о среднем арифметическом

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi = u(x_0, y_0).$$

Неравенство Гарнака доказано.

Докажем теперь одну замечательную теорему о гармонических функциях, определенных во всех точках плоскости $(x, y)$.

Теорема Лиувилля. *Гармоническая на всей плоскости функция $u(x, y)$ не может быть ограниченной сверху или снизу, если она не постоянна.*

Доказательство. Если $u(x, y)$ ограничена сверху, то $-u(x, y)$ ограничена снизу. Поэтому достаточно рассмотреть случай гармонической функции $u(x, y)$, которая всюду больше некоторого числа $M$. Более того, можно считать, что $M=0$. Действительно, $u(x, y)-M \geqslant 0$, а разность $u-M$ гармонична. Итак, предполагая существование гармонической во всей плоскости неотрицательной функции $u(x, y)$, мы докажем, что эта функция постоянна.

Воспользуемся неравенством Гарнака $(0<\rho<R)$:

$$\frac{R-\rho}{R+\rho} u(0, 0) \leqslant u(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha) \leqslant \frac{R+\rho}{R-\rho} u(0, 0).$$

Если функция $u(x, y)$ гармонична во всей плоскости $(u \geqslant 0)$, то, фиксировав произвольное $\rho>0$ и неограниченно увеличивая $R$, мы получим

$$u(0, 0) \leqslant u(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha) \leqslant u(0, 0),$$
$$u(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha) \equiv u(0, 0).$$

Теорема Лиувилля доказана.

Усиленный принцип максимума. *Если гармоническая в области $G$ функция $u(x, y)$ принимает свое наибольшее или свое наименьшее значение в некоторой внутренней точке $(x_0, y_0)$, то* $u(x, y)=\text{const}$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть только случай $u(x, y) \geqslant u(x_0, y_0)=0$. Все другие случаи приводятся к этому так же, как и в предыдущей теореме. Пусть круг радиуса $R$ с центром в точке $(x_0, y_0)$ содержится в $G$. Для любой внутренней точки $(x, y)$ этого круга $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2<R^2$ по неравенству Гарнака

$$0=\frac{R-\rho}{R+\rho} u(x_0, y_0) \leqslant u(x, y) \leqslant \frac{R+\rho}{R-\rho} u(x_0, y_0)=0.$$

Итак, $u(x, y)=0$ внутри круга. Пусть теперь $(x^*, y^*)$ — любая другая внутренняя точка $G$. Соединим ее с точкой $(x_0, y_0)$ ломаной, целиком лежащей в $G$. Пусть каждая точка ломаной отстоит от границы больше чем на $\delta>0$. Выберем $R<\delta$ и построим на ломаной конечную последовательность точек $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$, ... ..., $(x_n, y_n)$ $(x_n=x^*, y_n=y^*)$ такую, что $(x_k-x_{k-1})^2+(y_k-y_{k-1})^2 \leqslant R^2/4$. Если мы построим круг с центром в точке $(x_k, y_k)$ радиуса $R$, то точка $(x_{k+1}, y_{k+1})$ будет для него внутренней. Если нам удалось для неотрицательной гармонической функции $u(x, y)$ установить, что $u(x_k, y_k)=0$, то по доказанному $u(x_{k+1}, y_{k+1})=0$. Следовательно, из $u(x_0, y_0)=0$ вытекает, что $u(x^*, y^*)=0$. Усиленный принцип максимума доказан.

Теорема о разрывной мажоранте. *Рассмотрим ограниченную область $G$ с границей $\Gamma$ и отметим в $\bar{G}=G+\Gamma$ конечное число точек $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, ..., $(x_N, y_N)$. Некоторые из этих точек могут лежать внутри $G$, некоторые могут быть на границе $\Gamma$. Пусть $u(x, y)$, $v(x, y)$ — две функции, непрерывные и гармоничные в $G+\Gamma$, кроме, может быть, точек $(x_i, y_i)$. В этих точках $u(x, y)$, $v(x, y)$ могут терпеть разрыв или могут быть* *не определены. Предположим, однако, ограниченность этих функций:*

$$|u(x, y)| \leqslant M, \quad |v(x, y)| \leqslant M$$

*в* $G+\Gamma$ *(за исключением, конечно, точек* $(x_i, y_i)$*).*

*Если* $u(x, y)|_\Gamma \leqslant v(x, y)|_\Gamma$ *во всех точках границы, кроме, быть может, попавших на границу точек* $(x_i, y_i)$, *то и всюду внутри* $G+\Gamma$ $u(x, y) \leqslant v(x, y)$. (Опять-таки за исключением, быть может, точек $(x_i, y_i)$, лежащих внутри.)

Для доказательства рассмотрим функцию

$$w_\delta(x, y) = u(x, y) - v(x, y) - \sum_i \frac{2M}{\ln \frac{d}{\delta}} \ln \frac{d}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}.$$

Здесь $d$ — диаметр области $G$, так что

$$\ln \frac{d}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}} \geqslant 0,$$

$\delta > 0$ — некоторое фиксированное маленькое число.

Рассмотрим область $G_\delta$, полученную вырезанием из $G$ кружочков радиуса $\delta$ с центрами во всех точках $(x_i, y_i)$. Граница $G_\delta$ состоит из кусков границы $\Gamma$ области $G$ и из дуг окружностей, ограничивающих вырезанные кружочки. Очевидно, что на $G_\delta$ вместе с ее границей функция $w_\delta(x, y)$ непрерывна, гармонична и неположительна. Последнее утверждение вытекает из принципа максимума и из неравенства

$$w_\delta(x, y) = u(x, y) - v(x, y) - \sum_i \frac{2M}{\ln \frac{d}{\delta}} \ln \frac{d}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}} \leqslant 0,$$

выполненного на границе $G_\delta$.

Зафиксируем точку $(x, y)$ и, устремляя в неравенстве $w_\delta(x, y) \leqslant \leqslant 0$ параметр $\delta$ к нулю, убедимся, что $u(x, y) - v(x, y) \leqslant 0$. Теорема о разрывной мажоранте доказана.

Из этой теоремы можно вывести теорему единственности решения задачи Дирихле в ограниченной области с кусочно непрерывной граничной функцией, имеющей конечное число точек разрыва.

Другим следствием теоремы о разрывной мажоранте является

Теорема об устранимой особенности. *Пусть* $u(x, y)$ — *гармоническая и ограниченная в окрестности некоторой точки* $(x_0, y_0)$ *функция, за исключением, быть может, самой этой точки. Тогда можно так доопределить значение* $u(x_0, y_0)$, *чтобы после этого* $u(x, y)$ *стала гармонической во всей рассматриваемой окрестности точки* $(x_0, y_0)$, *включая и саму эту точку.*

Доказательство. Пусть круг $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leqslant R^2$ лежит целиком внутри окрестности. Пусть $u^*(x, y)$ — гармоническая всюду внутри круга и принимает на окружности $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ те же значения, что и $u(x, y)$. Функцию $u^*$ можно построить с помощью интеграла Пуассона. Ясно, что если $|u(x, y)| \leqslant M$, то и $|u^*(x, y)| \leqslant M$. Поэтому мы можем применить лемму о разрывной мажоранте и с ее помощью утверждать, что

$$u^*(x, y) \leqslant u(x, y) \leqslant u^*(x, y)$$

всюду, кроме точки $(x_0, y_0)$. Следовательно, $u(x, y)=u^*(x, y)$. Это позволяет утверждать, что, положив $u(x_0, y_0)=u^*(x_0, y_0)$, мы превратим $u(x, y)$ в функцию, непрерывную и гармоническую во всей окрестности.

На этом мы закончим обзор основных свойств гармонических функций в областях общего вида и в следующем параграфе вернемся к изучению гармонических функций в круге.

## § 22. Вариационный принцип Дирихле

Формула для вычисления интеграла Дирихле гармонической в круге функции по коэффициентам Фурье граничных значений. Пример непрерывной в круге гармонической функции, имеющей бесконечный интеграл Дирихле. Неравенство для интегралов Дирихле двух функций, принимающих на границе круга одинаковые значения, одна из которых гармоническая. Пример Адамара непрерывной на границе круга функции, которая не может быть продолжена внутрь с конечным интегралом Дирихле. Вариационный подход к задаче Дирихле. Некоторые исторические замечания. Пример неразрешимой вариационной задачи. Единственность экстремальной функции. Принцип Дирихле для круга и для простейших областей, полученных из него конформными преобразованиями.

Ближайшие параграфы будут посвящены доказательству разрешимости задачи Дирихле для уравнения Лапласа в областях весьма широкого класса. Доказательство основано на так называемом вариационном подходе к задаче и опирается на некоторые важные и интересные свойства интеграла Дирихле.

Сейчас мы изучим интеграл Дирихле для функций, гармонических в круге, и докажем экстремальное свойство этого интеграла.

Для простоты рассмотрим круг радиуса $R$ с центром в начале координат и напомним, что интегралом Дирихле называется выражение

$$D_r(u)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2}(u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^r\left(u_\rho^2+\frac{1}{\rho^2}u_\alpha^2\right)\rho\,d\rho\,d\alpha,$$

$$x=\rho\cos\alpha, \quad y=\rho\sin\alpha.$$

Если функция $u(x, y)$ гармонична в круге радиуса $R$, то внутри круга радиуса $r<R$ производные $u_x$ и $y_y$ непрерывны. Следовательно, интеграл $D_r(u)$ — интеграл от непрерывной функции. Но

при $r=R$ этот интеграл может оказаться несобственным интегралом. При этом под $D_R(u)$ понимается $\lim\limits_{r\to R} D_r(u)$.

Как было показано во вводной части (§ 2), функция $u(x, y)$, непрерывная в круге $x^2+y^2\leqslant R^2$ и гармоническая внутри этого круга, представляется в виде ряда

$$u(\rho\cos\alpha,\ \rho\sin\alpha)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n(a_n\cos n\alpha+b_n\sin n\alpha),$$

где коэффициенты $a_n$ и $b_n$ являются коэффициентами Фурье граничной функции $f(\varphi)=u(R\cos\varphi,\ R\sin\varphi)$:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi,\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi,\qquad n=1,\ 2,\ \ldots$$

Сейчас мы воспользуемся выписанным рядом для вычисления интеграла Дирихле. Очевидно, это внутри круга $0<\rho\leqslant r$ почленное дифференцирование по $\rho$ и $\alpha$ для ряда $u(\rho\cos\alpha,\ \rho\sin\alpha)$ законно, так как формально продифференцированные ряды

$$u_\rho=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\rho^{n-1}}{R^n}(a_n\cos n\alpha+b_n\sin n\alpha),$$

$$u_\alpha=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n n(-a_n\sin n\alpha+b_n\cos n\alpha)$$

сходятся там равномерно. Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\rho^{n-1}}{R^n}(a_n\cos n\alpha+b_n\sin n\alpha),$$

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha}=\sum_{n=1}^{\infty}n\,\frac{\rho^n}{R^n}(-a_n\sin n\alpha+b_n\cos n\alpha).$$

Это позволяет вычислить интеграл Дирихле $D_r(u)$ в явном виде.

Начнем с вычисления

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2\rho\,d\alpha,\qquad \int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)^2\frac{1}{\rho}\,d\alpha.$$

Подынтегральные выражения представляются двойными суммами

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 \rho = \sum_{m,\, n=1}^{\infty} mn \frac{\rho^{m+n-1}}{R^{m+n}} (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha)(a_m \cos m\alpha + b_m \sin m\alpha),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 \frac{1}{\rho} =$$

$$= \sum_{m,\, n=1}^{\infty} mn \frac{\rho^{m+n-1}}{R^{m+n}} (-a_n \sin n\alpha + b_n \cos n\alpha)(-a_m \sin m\alpha + b_m \cos m\alpha).$$

Теперь заметим, что

$$\int_0^{2\pi} (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha)(a_m \cos m\alpha + b_m \sin m\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ (a_n^2 + b_n^2)\pi, & \text{если } m = n \neq 0, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} (-a_n \sin n\alpha + b_n \cos n\alpha)(-a_m \sin m\alpha + b_m \cos m\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ (a_n^2 + b_n^2)\pi, & \text{если } m = n \neq 0. \end{cases}$$

Это замечание приводит нас к выводу, что

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 \rho\, d\alpha = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 \frac{1}{\rho}\, d\alpha = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2) \frac{\rho^{2n-1}}{R^{2n}}.$$

Отсюда

$$D_r(u) = \int_0^r \left\{ \int_0^{2\pi} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 \rho + \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 \frac{1}{\rho} \right] d\alpha \right\} d\rho =$$

$$= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2) \int_0^r \frac{\rho^{2n-1}}{R^{2n}}\, d\rho = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n^2 + b_n^2) \left(\frac{r}{R}\right)^{2n}.$$

Из определения интеграла $D_R(u)$ вытекает, что

$$D_R(u) = \lim_{r \to R} D_r(u) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n^2 + b_n^2). \tag{1}$$

Если ряд в правой части расходится, то это значит, что

$$D_R(u) = \infty.$$

Адамар построил *пример непрерывной функции* $f(\varphi)$ *такой, что решение задачи Дирихле в круге* $0 < \rho \leqslant R$ *для уравнения*

*Лапласа* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ *с граничным условием* $u(R\cos\varphi,\ R\sin\varphi)=f(\varphi)$ *имеет бесконечный интеграл Дирихле.* Функция Адамара записывается равномерно сходящимся рядом:

$$f(\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n!\ \varphi)}{n^2}.$$

(Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна.) Решение $u(x,\ y)$ задачи Дирихле с граничными значениями $f(\varphi)$ имеет интеграл Дирихле:

$$D_R(u)=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^4}=\infty.$$

Этот пример в дальнейшем нам понадобится при обсуждении очень важного и интересного вариационного подхода к решению задачи Дирихле. А сейчас мы докажем с помощью ряда (1) следующую замечательную теорему.

Теорема. *Пусть* $g(\rho,\ \varphi)$ — *какая-либо непрерывная в круге* $0\leqslant\rho\leqslant R$ *кусочно гладкая функция с конечным интегралом Дирихле*

$$D_R(g)=\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\left(g_\rho^2+\frac{1}{\rho^2}g_\varphi\right)\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

*На границе круга* $g(\rho,\ \varphi)$ *принимает граничные значения*

$$f(\varphi)=g(R,\ \varphi).$$

*Построим гармоническую функцию* $u(\rho,\ \alpha)$ *с теми же самыми граничными значениями* $u(R,\ \varphi)=f(\varphi)$. *Мы докажем, что интеграл Дирихле* $D_R(u)$ *конечен и не превышает* $D_R(g)$:

$$D_R(u)\leqslant D_R(g).$$

Граничной функции $f(\varphi)=g(R,\ \varphi)$ может быть сопоставлен сходящийся к ней в среднем ряд Фурье

$$g(R,\ \varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi).$$

Решение $u(\rho,\ \varphi)$ задачи Дирихле представляется тогда рядом

$$u(\rho,\ \varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi).$$

Интеграл Дирихле этого решения

$$D_R(u) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2).$$

Для того чтобы доказать неравенство

$$D_R(u) \leqslant D_R(g),$$

очевидно, достаточно убедиться в том, что при всех $N$

$$\pi \sum_{n=1}^{N} n(a_n^2 + b_n^2) \leqslant D_R(g),$$

т. е. в том, что

$$D_R(u_N) \leqslant D_R(g),$$

где

$$u_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

В доказательстве, которое мы приведем, будет использовано, что $u_N$ имеет непрерывные вторые производные. (На самом деле $u_N$ — полином переменных $x$, $y$ и имеет производные любого порядка.)

Доказательство будет состоять из двух лемм.

Лемма 1. *Выполнено равенство*

$$\int_0^{2\pi} [g(R, \varphi) - u_N(R, \varphi)] \left[\frac{\partial u_N(\rho, \varphi)}{\partial \rho}\right]_{\rho=R} d\varphi = 0.$$

Доказательство. Ясно, что $g(R, \varphi) - u_N(R, \varphi)$ — непрерывная функция, имеющая сходящийся к ней в среднем ряд Фурье

$$g(R, \varphi) - u_N(R, \varphi) = \sum_{n=N+1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Коэффициенты Фурье, отвечающие значениям индекса от 1 до $N$ включительно, будут для этой функции равны нулю. Эти коэффициенты определяются интегралами:

$$A_0 = \int_0^{2\pi} [g(R, \varphi) - u_N(R, \varphi)]\, d\varphi = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \int_0^{2\pi} [g(R, \varphi) - u_N(R, \varphi)] \cos n\varphi \, d\varphi = 0, \\ B_n &= \int_0^{2\pi} [g(R, \varphi) - u_N(R, \varphi)] \sin n\varphi \, d\varphi = 0. \end{aligned}\right\} \; n = 1, 2, \ldots, N.$$

Любая линейная комбинация $A_0, A_1, \ldots, A_N, B_1, \ldots, B_N$ тоже будет равна нулю. В частности,

$$\sum_{n=1}^{N} n\,(A_n a_n + B_n b_n) = 0.$$

Это равенство можно переписать еще так:

$$\int_0^{2\pi} [g(R,\ \varphi) - u_N(R,\ \varphi)]\left[\sum_{n=1}^{N} n\,(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)\right] d\varphi = 0.$$

Теперь осталось только заметить, что

$$\sum_{n=1}^{N} n\,(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) =$$

$$= R\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)\right]_{\rho=R} = R\left[\frac{\partial u_N(\rho,\ \varphi)}{\partial\rho}\right]_{\rho=R}.$$

Доказательство первой леммы завершено.

Лемма 2. *Пусть $G$ — некоторая конечная область с кусочно гладкой границей $\Gamma$, функция $\psi_2(x,\ y)$ имеет в замкнутой области $\bar{G}$ непрерывные вторые, а $\psi_1(x,\ y)$ — кусочно непрерывные первые производные. Тогда*

$$\iint_G \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial\psi_2}{\partial x} + \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right) dx\,dy + \iint_G \psi_1\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}\right) dx\ dy =$$

$$= \int_\Gamma \psi_1 \frac{\partial\psi_2}{\partial n}\,ds$$

$\left(ds\right.$ *— дифференциал длины дуги $\Gamma$, $\dfrac{\partial}{\partial n}$ — производная по внешней нормали*$\left.\right)$.

Доказательство этой леммы мы проведем для области, в которой $\psi_1(x,\ y)$ непрерывно дифференцируема вплоть до границы. В случае кусочной гладкости область $G$ может быть разбита на конечную сумму областей $G_1, G_2, \ldots G_k$, для каждой из которых это предположение выполнено. Доказав интересующее нас тождество для $G_1, G_2, \ldots, G_k$, а затем сложив их, мы получим тождество для $G$. При этом интегралы по внутренним к $G$ участкам границ $G_1, \ldots, G_k$ уничтожатся, так как для двух соседних подобластей внешние нормали, а следовательно, и $\dfrac{\partial\psi_2}{\partial n}$, отличаются лишь знаками, функции же $\psi_1$, входящие в граничные интегралы, — непрерывны. Внутри подобласти $G_i$, где $\psi_1$, $\psi_2$ имеют непрерывными соответственно первые и вторые производные, выполнено тождество

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial\psi_2}{\partial y}+\psi_1\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi_1\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi_1\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right).$$

Проинтегрируем это равенство по $G_i$:

$$\iint\limits_{G_i}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right)dx\,dy+\iint\limits_{G_i}\psi_1\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}\right)dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{G_i}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi_2\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right)\right]dx\,dy=\int\limits_{\Gamma_i}\psi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\,ds.$$

Для преобразования двойного интеграла в контурный мы воспользовались теоремой Гаусса — Остроградского. Лемма 2 доказана.

Следствие.

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\left[\frac{\partial u_N}{\partial x}\frac{\partial(g-u_N)}{\partial x}+\frac{\partial u_N}{\partial y}\frac{\partial(g-u_N)}{\partial y}\right]dx\,dy=0.$$

Действительно, положив $u_N=\psi_2$, $g-u_N=\psi_1$ и применяя предыдущую лемму к области $x^2+y^2\leqslant R^2$, получим

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\left[\frac{\partial u_N}{\partial x}\frac{\partial(g-u_N)}{\partial x}+\frac{\partial u_N}{\partial y}\frac{\partial(g-u_N)}{\partial y}\right]dx\,dy+$$

$$+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}(g-u_N)\left[\frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_N}{\partial y^2}\right]dx\,dy=$$

$$=\int\limits_{x^2+y^2=R^2}(g-u_N)\frac{\partial u_N}{\partial n}\,ds=R\int\limits_{\rho=R}(g-u_N)\frac{\partial u_N}{\partial\rho}\,d\varphi=0.$$

Остается для пояснения еще заметить, что $u_N$ — гармоническая функция:

$$\frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_N}{\partial y^2}=0.$$

Теперь тождество

$$\iint\limits_{\rho\leqslant R}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{\rho\leqslant R}\left[\left(\frac{\partial u_N}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_N}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy+$$

$$+\iint\limits_{\rho\leqslant R}\left\{\left[\frac{\partial(g-u_N)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial(g-u_N)}{\partial y}\right]^2\right\}dx\,dy+$$

$$+2\iint\limits_{\rho\leqslant R}\left[\frac{\partial u_N}{\partial x}\frac{\partial(g-u_N)}{\partial x}+\frac{\partial u_N}{\partial y}\frac{\partial(g-u_N)}{\partial y}\right]dx\,dy,$$

в правой части которого последний интеграл равен нулю, а предпоследний неотрицателен, сразу позволяет заключить, что

$$D_R(g) \geqslant D_R(u_N).$$

Как мы отмечали, отсюда следует неравенство

$$D_R(u) \leqslant D_R(g).$$

Мы доказали, что *если для некоторых граничных значений $f(\varphi)$ существует непрерывное и кусочно гладкое продолжение $g(\rho, \varphi)$ внутрь круга, обладающее конечным интегралом Дирихле, то гармоническая функция $u(\rho, \varphi)$, отвечающая тем же граничным значениям, будет также иметь конечный интеграл Дирихле, не превышающий $D_R(g)$.*

В частности, отсюда следует, что граничная функция Адамара

$$f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!\varphi)}{n^2}$$

не имеет продолжения $g(\rho, \varphi)$ внутрь круга $0 \leqslant \rho \leqslant R$ $(g(R, \varphi) = f(\varphi))$ с конечным $D_R(g)$. Доказанное нами сейчас экстремальное свойство гармонических функций носит название *вариационного принципа Дирихле.* Мы его доказали в случае, когда гармонические функции рассматриваются в круге. На самом деле аналогичный принцип справедлив для очень широкого класса областей. Мы этот класс в дальнейшем опишем, а сейчас остановимся на несколько более развернутом описании идеи вариационного подхода.

Рассмотрим какую-либо ограниченную область на плоскости, на границе которой задана непрерывная функция $f(s)$. Возьмем внутри этой области гладкие функции $u(x, y)$, принимающие граничные значения $f(s)$, и для каждой из них вычислим интеграл Дирихле

$$D(u) = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy.$$

В основе вариационного подхода лежит утверждение, что минимальное значение $D(u)$ принимается на гармонической функции, решающей задачу Дирихле.

Ясно, что $D(u) \geqslant 0$, и поэтому для значений этого функционала существует нижняя грань. Пусть эта нижняя грань достигается на гладкой функции $u(x, y)$. Как известно из вариационного исчисления, $u(x, y)$ тогда должна удовлетворять уравнению

Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(u_x^2+u_y^2)_{u_x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(u_x^2+u_y^2)_{u_y}\right]=0$$

или, что то же самое,

$$2\left[\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\right]=0,$$

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

— уравнению Лапласа.

Идея этого вариационного подхода к уравнению Лапласа была впервые высказана Гауссом. Дирихле излагал этот подход на своих лекциях, одним из слушателей которых был Риман. Риман развил эту теорию и под названием принципа Дирихле положил ее в основу своей геометрической теории функций комплексного переменного.

Эта работа произвела большое впечатление на математиков того времени. Но через 18 лет Вейерштрасс показал, что утверждения, положенные в основу вариационной теории, неубедительны. Дело в том, что из рассуждений Римана не следовало существование функции $u(x, y)$, на которой достигается нижняя грань $D(u)$. Риман не сумел найти ответ на критику Вейерштрасса. Только через 32 года Гильберт сумел построить корректное обоснование принципа Дирихле.

Так как идеология вариационных методов имеет чрезвычайно важные и многочисленные приложения, мы не можем обойти ее стороной.

Начнем наше обсуждение с пояснений критики Вейерштрасса. Разберем *пример вариационной задачи, для которой не существует функции, дающей минимум функционала* $D(u)$.

Пусть $u=0$ на границе круга $x^2+y^2=1$. Потребуем еще, чтобы $u(0, 0)=1$. Рассмотрим всевозможные кусочно гладкие функции $u(x, y)$, удовлетворяющие сформулированным ограничениям, и для каждой из них вычислим интеграл Дирихле $D(u)$. Постараемся оценить нижнюю грань $D(u)$. Для этого введем полярные координаты $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ и определим функции $u_\delta(r, \varphi)$ $(0<\delta<1)$ равенством

$$u_\delta(r, \varphi)=\begin{cases} 1 & (0\leqslant r\leqslant \delta^2),\\ \dfrac{\ln\dfrac{\delta}{r}}{\ln\dfrac{1}{\delta}} & (\delta^2\leqslant r\leqslant\delta),\\ 0 & (\delta<r).\end{cases}$$

Вычислим $D_r(u_\delta)$:

$$D_r(u_\delta)=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left[\left(\frac{\partial u_\delta}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u_\delta}{\partial \varphi}\right)^2\right]r\,dr\,d\varphi=$$

$$=\frac{2\pi}{\ln^2\frac{1}{\delta}}\int_{\delta^2}^{\delta}\left(\frac{d\ln\frac{\delta}{r}}{dr}\right)^2 r\,dr=\frac{2\pi}{\ln^2\frac{1}{\delta}}\int_{\delta^2}^{\delta}\frac{1}{r^2}\,r\,dr=\frac{2\pi}{\ln\frac{1}{\delta}}.$$

Ясно, что $D(u_\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$. Очевидно, что

$$u_\delta(x,\ y)\,|_{x^2+y^2=1}=0,\qquad u_\delta(0,\ 0)=1,$$

т. е. $u_\delta(x,\ y)$ допустимы в нашей задаче. С другой стороны, мы показали, что $D(u_\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$. Отсюда ясно, что

$$\inf D(u)\leqslant\inf D(u_\delta)=0.$$

Из неотрицательности $D(u)$ вытекает равенство

$$\inf D(u)=0.$$

Однако ни на одной допустимой функции эта нижняя грань не достигается. В самом деле, если

$$D(u)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=0,$$

то $u=\mathrm{const}$, но постоянная не может принимать различных значений в центре круга и на окружности.

Тот же самый пример последовательности функций $\{u_\delta\}$ $\delta=\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$ может играть еще одну роль. Он представляет собой интересный пример последовательности функций, принимающих на границе круга нулевые значения и имеющих интеграл Дирихле, стремящийся к нулю. Замечательно, что сами эти функции к нулю равномерно не сходятся, несмотря на то, что функция $u(x,\ y)=0$ является здесь экстремальной. Мы видим, что *даже в случае, когда экстремальная функция существует, минимизирующая последовательность может к ней не сходиться.*

Есть еще одна трудность в вариационном подходе к задаче Дирихле. Выше был построен пример непрерывной на границе круга функции, которая не может быть продолжена внутрь круга так, чтобы иметь там конечный интеграл Дирихле (пример Адамара).

Ясно, что для граничной функции Адамара нельзя решать задачу Дирихле с помощью вариационного принципа. Поэтому мы накладываем на граничную $f(Q)$ следующее ограничение: *существует в области $G$ непрерывная вплоть до границы, гладкая,* *или кусочно гладкая функция* $g(x, y)$, *имеющая конечный интеграл Дирихле* $D_G(g)$ *и принимающая на границе* $G$ *значения* $f(Q)$.

Только такие $f(Q)$, допускающие продолжение в $G$ с конечным интегралом Дирихле, будут нами рассматриваться. Только для них будет доказана разрешимость задачи Дирихле, да и то не для всех областей. Так, например, область, представляющая собой единичный круг с выколотым центром, не является допустимой. Рассмотренный нами пример функций $u_\delta(x, y)$ привел нас к выводу, что не для всякой допустимой непрерывной граничной функции существует продолжение с минимальным интегралом Дирихле. Функция

$$f(x, y)|_\Gamma = \begin{cases} 1 & \text{при } x=0, \ y=0, \\ 0 & \text{при } x^2+y^2=1 \end{cases}$$

может считаться непрерывной функцией на границе. Мы видели, что она допускает непрерывное продолжение внутрь области с как угодно малым интегралом Дирихле. Непрерывная же функция с нулевым интегралом Дирихле по необходимости, — константа и наших краевых значений принимать не может.

Предположим теперь, что для некоторой области и для некоторой граничной функции $f(s)$ нам удалось построить такое продолжение $u(x, y)$ внутрь $G$ этой $f(s)$ $(u|_\Gamma = f)$, что $D_G(u)$ конечен и равен нижней грани $\inf D_G(z)$ интегралов Дирихле функций $z(x, y)$, удовлетворяющих граничному условию

$$z|_\Gamma = f$$

(через $D_G(z)$ мы обозначили интеграл Дирихле от $z(x, y)$ по области $G$). Мы покажем, что такое *экстремальное гладкое продолжение* $u(x, y)$ *единственно.*

Пусть

$$D_G(u) = D_G(v) = d = \inf D_G(z),$$
$$u|_\Gamma = v|_\Gamma = f.$$

Докажем равенство

$$D_G\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{1}{2} D_G(u) + \frac{1}{2} D_G(v) - \frac{1}{4} D_G(u-v).$$

Для этого достаточно сделать элементарные преобразования подынтегрального выражения:

$$D_G\left(\frac{u+v}{2}\right) = \iint\limits_G \left\{\left[\frac{\partial\left(\frac{u+v}{2}\right)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial\left(\frac{u+v}{2}\right)}{\partial y}\right]^2\right\} dx\,dy =$$
$$= \iint\limits_G \left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] - \frac{1}{4}\left[\frac{\partial(u-v)}{\partial y}\right]^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}\left[\frac{\partial(u-v)}{\partial y}\right]^2\right\} dx\,dy = \frac{1}{2} D_G(u) + \frac{1}{2} D_G(v) - \frac{1}{4} D_G(u-v).$$

Из доказанного равенства и из неравенства

$$D_G\left(\frac{u+v}{2}\right) \geqslant d \quad \left(\frac{u+v}{2}\Big|_\Gamma = f\right)$$

вытекает, что $d \leqslant \frac{1}{2} d + \frac{1}{2} d - \frac{1}{4} D_G(u-v)$. Отсюда

$$D_G(u-v) = \iint\limits_G [(u_x - v_x)^2 + (u_y - v_y)^2]\, dx\, dy \leqslant 0.$$

Таким образом, $u - v = \text{const}$. На границе $u - v = 0$. Равенство $u - v \equiv 0$ всюду в $G$ доказано.

Применение этой теоремы единственности экстремальной функции к случаю круговой области завершает для этой области обоснование принципа Дирихле.

Повторим формулировку принципа в этом случае:

*Если $f(\varphi)$ — непрерывная функция, допускающая хотя бы одно непрерывное кусочно гладкое продолжение $g(\rho, \varphi)$ $(g(\rho, \varphi) = f(\varphi))$ внутрь круга $0 \leqslant \rho \leqslant R$ с конечным интегралом Дирихле $D_R(g)$, то существует среди таких продолжений единственное гладкое продолжение $u(\rho, \varphi)$ такое, что $D_G(u) = d$, где $d$ — нижняя грань интегралов Дирихле для таких продолжений. Продолжение $u(\rho, \varphi)$ является гармонической в круге функцией, решающей задачу Дирихле*

$$u(R, \varphi) = f(\varphi).$$

В предыдущем параграфе мы показали, что уравнение Лапласа и интеграл Дирихле инвариантны относительно обратимых конформных преобразований

$$x = x(\xi, \eta), \quad \xi = \xi(x, y),$$
$$y = y(\xi, \eta), \quad \eta = \eta(x, y)$$

независимых переменных. Отсюда вытекает, что если некоторая замкнутая область $G + \Gamma$ может быть непрерывно и конформно отображена на круг, то мы можем ручаться, что задача Дирихле с непрерывными граничными значениями для области разрешима.

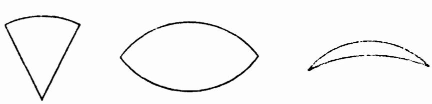

Рис. 56.

В частности, отсюда вытекает разрешимость задачи Дирихле для областей, изображенных на рис. 56, т. е. для кругового сектора или для луночек, ограниченных дугами окружностей. В теории функций комплексного переменного приводятся простые формулы для отображений этих областей на единичный круг.

Для всех этих областей справедлив и принцип Дирихле. Действительно, пусть $\Gamma$ — граница $G$, $u|_\Gamma = f$. Покажем, что

$$D_G(u) \leqslant D_G(g),$$

где $g$ — какая угодно кусочно гладкая функция, определенная в $G$ и принимающая те же самые граничные значения, что и $u(x, y)$ $(g|_\Gamma = f)$. Пусть равенства

$$x = x(\xi, \eta),$$
$$y = y(\xi, \eta)$$

определяют конформное отображение круга $K\{\xi^2 + \eta^2 \leqslant 1\}$ на $G$. При этом $u[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$ — гармоническая функция от $\xi$, $\eta$, $u|_{\xi^2+\eta^2=1} = f[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$. Очевидно, что функция $\gamma(\xi, \eta) = g[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$ принимает на окружности $\xi^2 + \eta^2 = 1$ те же граничные значения, что и $u[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$. В силу инвариантности интеграла Дирихле

$$D_G(u) = D_K\{u[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]\},$$
$$D_G(g) = D_K\{g[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]\},$$

а в силу принципа Дирихле для круга

$$D_K\{g[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]\} \geqslant D_K\{u[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]\}.$$

Поэтому $D_G(g) \geqslant D_G(u)$.

Наше доказательство единственности экстремальной функции годится для произвольных областей, в том числе и для рассматриваемых сейчас.

Мы заканчиваем на этом обоснование принципа Дирихле и разрешимости задачи Дирихле для всех областей, которые элементарными конформными преобразованиями могут быть непрерывно (вместе с границей) отображены на круг. В частности, принцип Дирихле и разрешимость задачи Дирихле обоснованы для сектора и луночек, изображенных на рис. 56.

В следующем параграфе будет изучен альтернирующий метод Шварца, с помощью которого нам удастся распространить теоремы о разрешимости задачи Дирихле и о применимости принципа Дирихле на любые многоугольники.

Если воспользоваться теоремой о том, что всякую односвязную область со спрямляемой границей, содержащей не менее двух точек, можно непрерывно и конформно отобразить на круг, то после некоторого уточнения формулировок нетрудно обосновать разрешимость задачи Дирихле и принцип Дирихле. Однако мы не будем пользоваться этой теоремой о конформных отображениях, так как ее доказательство в аккуратной формулировке, которая нас бы удовлетворяла, совсем не так просто.

## § 23. Метод Шварца

Альтернирующий метод Шварца доказательства существования решения задачи Дирихле для составных областей. Критерий Шварца. Формулировка теоремы и ее доказательство. Использование метода Шварца для обоснования принципа Дирихле. Пример получения теоремы существования решения задачи Дирихле и принципа Дирихле в неодносвязном многоугольнике. Проверка критерия Шварца с помощью геометрического «условия луночки». Схема доказательства принципа Дирихле и разрешимости задачи Дирихле для любых многоугольных областей.

В этом параграфе будет рассмотрен альтернирующий метод Шварца решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в составных областях. Предположим, что область $G$ разбивается на три части $G_1$, $G_2$, $G_3$ так, как это показано на рис. 57. Обозначим теоретико-множественную сумму областей $G_1$ и $G_2$ вместе с их общей границей $\beta$ через $G_{1,2}$. Аналогично обозначим $G_{2,3}=G_2 \cup G_3 \cup \gamma$, где $\cup$ означает знак объединения. Граница области $G_{1,2}$ состоит из дуг $\alpha$, $\gamma$ и $\sigma$. Предположим, что для частичных областей $G_{1,2}$ и $G_{2,3}$ разрешима задача Дирихле с любыми непрерывными граничными значениями. Нашей целью будет формулировка условия на области $G_1$, $G_2$, $G_3$, при котором из разрешимости задачи Дирихле для частичных областей $G_{1,2}$ и $G_{2,3}$ будет вытекать ее разрешимость для всей области $G$. Сначала мы сформулируем этот критерий в той форме, в какой он нужен для проведения доказательства существования, но из которой, на первый взгляд, совсем не видно эффективного способа проверки, выполнен ли он для конкретно заданных геометрически областей. В дальнейшем будут указаны простые геометрически наглядные достаточные условия выполнения нашего критерия.

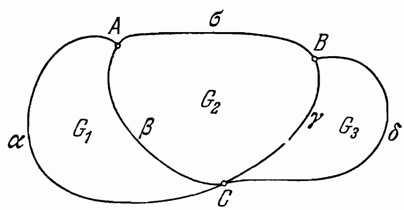

Рис. 57.

Критерий Шварца. *Мы будем говорить, что система областей $G_1$, $G_2$, $G_3$ с граничными дугами $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\sigma$ удовлетворяет критерию Шварца, если выполнены следующие два условия:*

1. *Любая гармоническая в $G_{1,2}$, непрерывная в $\bar{G}_{1,2}$ функция, равная нулю на $\alpha \cup \sigma$ и не превышающая по абсолютной величине 1 на $\gamma$, всюду на дуге $\beta$ не превосходит по модулю некоторого $\theta<1$.*

2. *Любая гармоническая в $G_{2,3}$, непрерывная в $\bar{G}_{2,3}$ функция, равная нулю на $\delta \cup \sigma$ и не превышающая по абсолютной величине 1 на $\beta$, всюду на дуге $\gamma$ не превосходит по модулю $\theta<1$.*

В этом критерии предполагается, что постоянная $\theta$ может быть выбрана для данной системы областей $G_1$, $G_2$, $G_3$ раз и навсегда и, следовательно, она не зависит от рассматриваемой непрерывной гармонической функции. (Напомним, что знак черты над множеством означает замыкание этого множества.)

Будем говорить, что область $G_{1,2}$ ($G_{2,3}$) удовлетворяет условию разрешимости, если при любой непрерывной на $\overline{\alpha \cup \gamma \cup \sigma}$ ($\overline{\delta \cup \beta \cup \sigma}$) граничной функции существует отвечающее ей непрерывное решение задачи Дирихле в $\bar{G}_{1,2}$ ($\bar{G}_{2,3}$). Аналогично, область $G = G_{1,2} \cup G_{2,3}$ будет удовлетворять условию разрешимости, если при любой непрерывной на $\overline{\alpha \cup \delta \cup \sigma}$ граничной функции существует отвечающее ей непрерывное решение задачи Дирихле в $\bar{G}$.

Теорема. *Если система областей $G_1$, $G_2$, $G_3$ удовлетворяет критерию Шварца и если для областей $G_{1,2}$, $G_{2,3}$ выполнено условие разрешимости, то это условие выполнено и для составной области $G = G_{1,2} \cup G_{2,3}$.*

Доказательство. Пусть на $\overline{\alpha \cup \delta \cup \sigma}$ задана непрерывная граничная функция $f(s)$. Пусть $g(x, y)$ — какая-либо непрерывная в $\bar{G}$ функция, равная $f(s)$ на границе $\overline{\alpha \cup \delta \cup \sigma}$. Мы сейчас опишем итерационный процесс, который, отправляясь от начального приближения $g(x, y)$, приведет нас к решению задачи Дирихле.

Положим $u_0(x, y) = g(x, y)$ и определим $v_0(x, y)$ следующим образом:

$$v_0(x, y) = \begin{cases} u_0(x, y) \text{ на } \overline{G_1 \cup \sigma \cup \delta}; \\ \text{решению задачи Дирихле в } \bar{G}_{2,3} \\ \text{с граничными условиями} \\ v_0|_{\overline{\sigma \cup \delta}} = f(s) = u_0(x, y)|_{\overline{\sigma \cup \delta}}, \\ v_0|_\beta = u_0(x, y)|_\beta. \end{cases}$$

В дальнейшем последовательные приближения $u_n(x, y)$, $v_n(x, y)$ будут строиться следующим образом:

$$u_n(x, y) = \begin{cases} v_{n-1}(x, y) \text{ на } \overline{G_3 \cup \alpha \cup \sigma}; \\ \text{решению задачи Дирихле в } \bar{G}_{1,2} \\ \text{с граничными условиями} \\ u_n|_{\overline{\alpha \cup \sigma}} = f(s) = v_{n-1}(x, y)|_{\overline{\alpha \cup \sigma}}, \\ u_n|_\gamma = v_{n-1}(x, y)|_\gamma, \end{cases}$$

$$v_n(x, y) = \begin{cases} u_n(x, y) \text{ на } \overline{G_1 \cup \sigma \cup \gamma}; \\ \text{решению задачи Дирихле в } \bar{G}_{2,3} \\ \text{с граничными условиями} \\ v_n|_{\overline{\sigma \cup \delta}} = f(s) = u_n(x, y)|_{\overline{\sigma \cup \delta}}, \\ v_n|_\beta = u_n(x, y)|_\beta. \end{cases}$$

Очевидно, что каждая из функций $u_n(x, y)$, $v_n(x, y)$ по построению является непрерывной в $\bar{G}$ и принимает на границе значения $f(s)$. Мы докажем, что последовательность

$$u_0,\ v_0,\ u_1,\ v_1,\ u_2,\ \ldots,\ v_{k-1},\ u_k,\ v_k,\ u_{k+1},\ \ldots$$

равномерно сходится. Отсюда будет следовать, что ее предел будет непрерывной функцией, принимающей на $\overline{\alpha \cup \delta \cup \sigma}$ заданные значения $f(s)$.

Легко показать, что этот предел будет в $G$ функцией гармонической. Действительно, возьмем в $G$ какую-либо внутреннюю точку $(x_0, y_0)$. Эта точка будет внутренней хотя бы для одной из областей $G_{1,2}$, $G_{2,3}$. Рассмотрим, для определенности, случай $(x_0, y_0) \in G_{1,2}$. Последовательность $u_0(x, y), u_1(x, y), \ldots, u_n(x, y), \ldots$ гармонических в $G_{1,2}$ функций тоже равномерно сходится в $G_{1,2}$ к тому же пределу как подпоследовательность сходящейся последовательности. По первой теореме Гарнака ее предел будет гармонической в $G_{1,2}$ функцией.

Если бы $(x_0, y_0) \in G_{2,3}$, то, аналогично, надо было бы выделить подпоследовательность $v_0, v_1, v_2, \ldots$ и установить гармоничность ее предела.

Мы видим, что для обоснования условия разрешимости задачи Дирихле в $G$ достаточно установить равномерную сходимость последовательности

$$u_0,\ v_0,\ u_1,\ v_1,\ u_2,\ v_2,\ \ldots$$

Переходя к этому исследованию сходимости, отметим, что

$$\begin{array}{c} u_n - u_{n-1} = \\ (n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots) \end{array} \begin{cases} v_{n-1} - v_{n-2} \text{ на } \overline{G_3 \cup \sigma \cup \alpha}; \\ \text{гармонической в } G_{1,2} \text{ функции,} \\ \text{равной 0 на } \overline{\alpha \cup \sigma} \text{ и равной} \\ v_{n-1} - v_{n-2} \text{ на } \bar{\gamma}; \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} v_n - v_{n-1} = \\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \end{array} \begin{cases} u_n - u_{n-1} \text{ на } \overline{G_1 \cup \sigma \cup \delta}; \\ \text{гармонической в } G_{2,3} \text{ функции,} \\ \text{равной 0 на } \overline{\delta \cup \sigma} \text{ и} \\ \text{равной } u_n - u_{n-1} \text{ на } \bar{\beta}. \end{cases}$$

Обозначим

$$a_n = \max_{(x,\, y) \in \bar{\beta}} |u_n(x, y) - u_{n-1}(x, y)|,$$

$$b_n = \max_{(x,\, y) \in \bar{\gamma}} |v_n(x, y) - v_{n-1}(x, y)|.$$

Из выполнения критерия Шварца мы выводим следующие утверждения:

$$a_n \leqslant \theta b_{n-1}; \quad b_n \leqslant \theta a_n.$$

Отсюда

$$a_n \leqslant \theta^2 a_{n-1} \leqslant \theta^{2(n-2)} a_2,$$
$$b_n \leqslant \theta^{2n-3} a_2 \qquad (n \geqslant 2).$$

Очевидно, что из принципа максимума для решения задачи Дирихле следуют неравенства:

$$|u_n(x,\ y) - u_{n-1}(x,\ y)| \leqslant b_{n-1} \leqslant \text{const}\,\theta^{2n},$$
$$|v_n(x,\ y) - v_{n-1}(x,\ y)| \leqslant a_n \leqslant \text{const}\,\theta^{2n};$$
$$(x,\ y) \in \bar{G}, \qquad n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

Равномерная сходимость последовательностей

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,$$
$$v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots$$

очевидна. Теперь заметим, что, начиная с $n=1$, функции $v_n - u_n$, очевидно, будут гармоническими и непрерывными в каждой из областей $G_1$, $G_2$, $G_3$ и будут равны нулю на внешней границе $\overline{\alpha \cup \delta \cup \sigma}$. Из определения очевидно также, что $v_n - u_n = 0$ на $\bar{G}_1$ и на $\bar{\beta}$. На дуге $\bar{\gamma}$ функция $u_n$ по построению совпадает с $v_{n-1}$. Поэтому $v_n - u_n$ на $\bar{\gamma}$ равно $v_n - v_{n-1}$. По принципу максимума

$$|v_n(x,\ y) - u_n(x,\ y)| \leqslant \max_{\bar{\gamma}} |v_n - u_n| = \max_{\bar{\gamma}} |v_n - v_{n-1}| = b_n \leqslant \text{const}\,\theta^{2n}.$$

Отсюда ясно, что составная последовательность

$$u_0,\ v_0,\ u_1,\ v_1,\ u_2,\ v_2,\ \ldots$$

тоже равномерно сходится. Доказательство теоремы завершено.

Оказывается, что принцип Шварца позволяет переносить на составные области не только разрешимость задачи Дирихле с непрерывными граничными значениями, но и выполнение принципа Дирихле.

Пусть непрерывная и кусочно гладкая функция $g(x,\ y)$ имеет конечный интеграл Дирихле $D_G(g) = D_{G_1}(g) + D_{G_2}(g) + D_{G_3}(g)$. Предположим также, что принцип Дирихле выполнен для каждой из областей $G_{1,2}$, $G_{2,3}$.

Выполнение этого принципа означает, что для любой кусочно гладкой в $G_{1,2}$ функции $v(x,\ y)$ и для гармонической там же функции $u(x,\ y)$, совпадающей с $v$ на границе $\overline{\beta \cup \sigma \cup \delta}$, справедливо неравенство

$$D_{G_{1,2}}(u) \leqslant D_{G_{1,2}}(v).$$

В частности, для последовательности функций $u_n$, $v_n$, участвовавших в доказательстве предыдущей теоремы,

$$D_{G_{1,2}}(u_n) \leqslant D_{G_{1,2}}(v_{n-1}), \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Отметим еще, что на $G_3$ $u_n = v_{n-1}$ и поэтому

$$D_{G_3}(u_n) \leqslant D_{G_3}(v_{n-1}).$$

Объединяя два последние утверждения, имеем:

$$D_G(u_n) \leqslant D_G(v_{n-1}), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Аналогично, предполагая выполнение принципа Дирихле для $G_{2,3}$, мы без труда установим неравенство

$$D_G(v_n) \leqslant D_G(u_n), \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Так как $u_0(x, y) = g$, мы убедились в том, что интеграл Дирихле любой из функций последовательности

$$u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots$$

не превышает $D_G(g)$. Мы знаем, что это последовательность равномерно сходится к гармонической в области $G$ функции $u(x, y)$, совпадающей с $g(x, y)$ на границе этой области. Докажем, что $D_G(u) \leqslant D_G(g)$.

Достаточно установить неравенство

$$D_{H_1 \cup H_2 \cup H_3}(u) = D_{H_1}(u) + D_{H_2}(u) + D_{H_3}(u) \leqslant D_G(g)$$

для любых внутренних подобластей $H_i$ областей $G_i$ ($H_1 \subset G_1$, $H_2 \subset G_2$, $H_3 \subset G_3$) и воспользоваться затем равенством

$$D_G(u) = \sup D_{H_1 \cup H_2 \cup H_3}(u).$$

Внутри каждой из подобластей $H_i$ последовательность

$$u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, \ldots$$

является последовательностью гармонических функций, равномерно сходящихся вместе со своими первыми производными. (Вспомните теорему Гарнака и теорему о сходимости производных у равномерно сходящихся гармонических последовательностей.) Поэтому

$$D_{H_1 \cup H_2 \cup H_3}(u) = \lim_{n \to \infty} D_{H_1 \cup H_2 \cup H_3}(u_n).$$

С другой стороны,

$$D_{H_1 \cup H_2 \cup H_3}(u_n) \leqslant D_G(u_n) \leqslant D_G(g).$$

На этом мы заканчиваем доказательство неравенства

$$D_G(u) \leqslant D_G(g).$$

По теореме единственности решения задачи Дирихле функция $u(x, y)$ определяется по граничным значениям $g(x, y)|_{\alpha \cup \delta \cup o}$ однозначно. Ее существование следует из доказанной теоремы о разрешимости задачи Дирихле в $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$. Функция, совпадающая с $g(x, y)$ на границе $\alpha \cup \delta \cup \sigma$ и имеющая интеграл Дирихле, равный $D_G(u)$, единственна. Это было доказано в прошлом параграфе.

Перечисленные сейчас факты составляют содержание принципа Дирихле для составной области $G$. Итак, мы показали, что из критерия Шварца для $G_1$, $G_2$, $G_3$, из разрешимости задачи Дирихле для $G_{1,2}$, $G_{2,3}$ и из выполнения принципа Дирихле для $G_{1,2}$, $G_{2,3}$ следует разрешимость задачи Дирихле и выполнение принципа Дирихле для составной области $G = G_{1,2} \cup G_{2,3}$. Прежде чем воспользоваться этими фактами, сделаем несколько замечаний относительно проведенного доказательства. В этом доказательстве нам

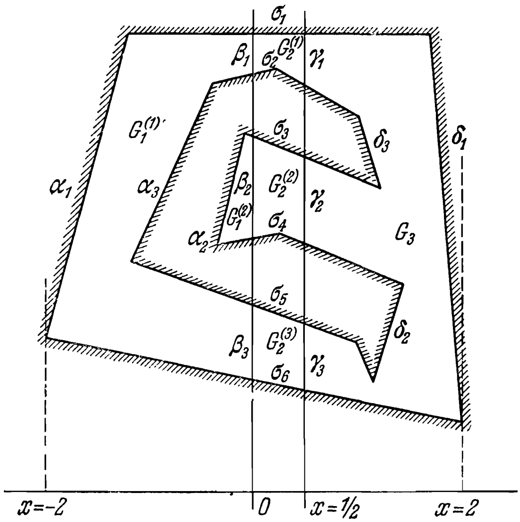


Рис. 58.

было совсем не существенно, чтобы области были односвязными, а каждая из дуг границы $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\sigma$ связной. Каждая из них может состоять из нескольких различных дуг, как это, например, изображено на рис. 58. На этом рисунке двусвязный многоугольник $\overline{G_1 \cup G_2 \cup G_3}$ мы рассекли двумя параллельными прямыми $\beta\,(x=0)$ и $\gamma\,(x=1/2)$ на несколько частей. Части $G_1^{(1)}$ и $G_1^{(2)}$ мы считаем составляющими область $G_1$. Части $G_2^{(1)}$, $G_2^{(2)}$, $G_2^{(3)}$ образуют область $G_2$ *). Границы $\alpha$, $\delta$ состоят каждая из трех ломаных $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$; $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$. Граница $\sigma$ разбивается на шесть различных

*) Под областью обычно понимается открытое связное множество, так что, строго говоря, $G_1$ и $G_2$ не являются областями. Однако нам при рассмотрении этого примера будет удобно, немного отклонившись от общепринятых определений, называть $G_1$ и $G_2$ областями.

частей. На каждой из прямолинейных границ $\beta$, $\gamma$ должно рассматриваться по три отрезка; на рис. 59 изображены области $G_1$, $G_2$, $G_3$, расположенные так, что дуга $\sigma$ вообще отсутствует. Покажем, что области, изображенные на рис. 58, удовлетворяют критерию Шварца.

Рассмотрим гармоническую функцию $\frac{2}{5}(x+2)$, неотрицательную в $G_1 \cup G_2$ и равную 1 на $\gamma\,(x=1/2)$. Неотрицательность этой функции следует из того, что вся наша фигура расположена в полосе $-2 \leqslant x \leqslant 2$, как это видно из рисунка.

Очевидно, что для любой непрерывной гармонической функции, не большей 1 на $\gamma$ и равной нулю на $\alpha \cup \sigma$, из принципа максимума следует неравенство

$$u(x,\ y) \leqslant \frac{2}{5}(x+2).$$

Если мы знаем, что $u(x,\ y)$ не меньше $-1$ на $\gamma$ и равна нулю на $\alpha \cup \sigma$, то аналогично мы можем написать:

$$u(x,\ y) \geqslant -\frac{2}{5}(x+2).$$

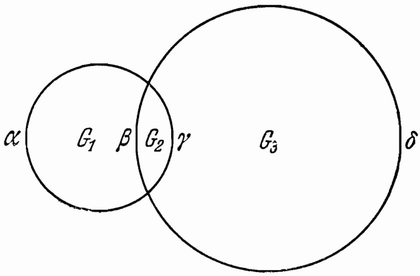


Рис. 59.

Отсюда ясно, что если $|u| \leqslant 1$ на $\gamma$ и если $u=0$ на $\alpha \cup \sigma$, то при $x=0$, т. е. на $\beta$, имеет место неравенство $|u| \leqslant \frac{2}{5}(x+2)=\frac{4}{5}$. Точно таким же способом, с помощью гармонической функции $1-x/2$, положительной в $G_1 \cup G_2$ и равной единице на $\beta\,(x=0)$, показывается, что любая гармоническая функция, не превышающая 1 по модулю на $\beta$ и равная нулю на $\delta \cup \sigma$, удовлетворяет на $\gamma\,(x=1/2)$ неравенству $|u| \leqslant 3/4$. Мы видим, что в рассматриваемом случае критерий Шварца выполнен, если за $\theta$ выбрать

$$\theta=\frac{4}{5}=\max\left(\frac{3}{4},\ \frac{4}{5}\right).$$

Если бы мы имели обоснование разрешимости задачи Дирихле и принципа Дирихле для односвязных областей $G_1^{(1)} \cup G_2^{(1)} \cup G_2^{(3)} \cup \beta_1 \cup \beta_3$; $G_1^{(2)} \cup G_2^{(2)} \cup \beta_2$; $G_3 \cup G_2^{(1)} \cup G_2^{(2)} \cup G_2^{(3)} \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, то имели бы право перенести эти утверждения и на неодносвязную область $\overline{G_1 \cup G_2 \cup G_3}$. Ясно, что приведенное сейчас рассуждение является общим. Мы не будем на нем подробнее останавливаться и, доказав в дальнейшем выполнение принципа Дирихле для односвязных многоугольников, не будем при исследовании эту односвязность оговаривать. Перенесение доказанных фактов с односвязных на многосвязные многоугольники проводится по разобранной на этом примере схеме путем разрезания на односвязные части.

Сейчас мы опишем и докажем одно очень простое и удобное *геометрическое условие, из которого следует выполнение критерия Шварца.*

Пусть внутри области $G_2$ можно выделить подобласть $G_2^{(2)}$, ограниченную двумя дугами окружностей, пересекающихся в точках $A$, $B$, лежащих на границе $G_2$ так, что дуги $\beta$, $\gamma$ оказываются по разные стороны от луночки $AB$.

На рис. 60 изображены несколько допустимых для нас вариантов расположений луночки $G_2^{(2)}$ внутри области $G_2$. Дуги окружностей, ограничивающих луночку, мы предполагаем не совпадающими. На рис. 61 изображена область, в которую луночку поместить нельзя, так как дуги $\beta$ и $\gamma$ касаются между

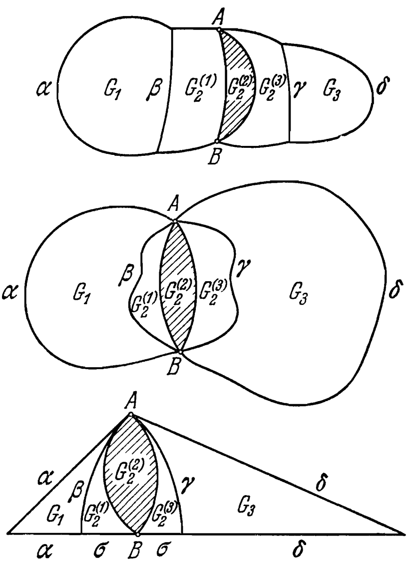


Рис. 60.

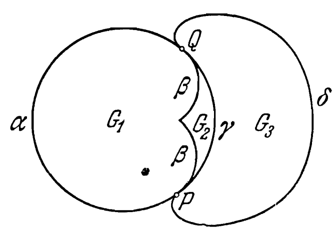


Рис. 61.

собой в точках $P$, $Q$. Оказывается, что *если в $G_2$ описанным выше образом можно поместить луночку, то критерий Шварца выполнен.* Сейчас мы это докажем.

Пусть нам известно, что некоторая непрерывная гармоническая функция $u(x, y)$ равна нулю на $\alpha \cup \sigma$ и не превышает по модулю 1 на $\gamma$. Тогда по принципу максимума она не превышает по модулю 1 на дуге окружности, ограничивающей луночку справа (см. рис. 61). Если удастся показать, что абсолютная величина этой функции не больше некоторого $\theta$ ($\theta < 1$) на левой дуге, ограничивающей луночку, то из принципа максимума без труда выведем, что и на $\beta$ такое неравенство имеет место. Достаточно построить гармоническую функцию $w(x, y)$, равную 1 на правой дуге и неотрицательную на остальной части границы области $G_1 \cup G_2^{(1)} \cup G_2^{(2)}$, чтобы из принципа максимума вывести неравенство

$$|u(x, y)| \leqslant w(x, y), \quad (x, y) \in G_1.$$

Если при этом окажется, что на левой дуге, ограничивающей луночку, $w \leqslant \theta$, то нужное нам утверждение будет доказано. Гармоническую функцию — мажоранту $w(x, y)$ — мы построим так, чтобы она была однозначна на плоскости с разрезом вдоль правой дуги нашей луночки, равнялась 1 на этой дуге слева от разреза и нулю справа от него. Эту функцию нам удастся построить постоянной вдоль каждой дуги той или иной окружности, проходящей через точки $A$, $B$. Для этого достаточно воспользоваться гармоничностью функции

$$w(x, y) = a\left(\operatorname{Arctg}\frac{y-y_A}{x-x_A} - \operatorname{Arctg}\frac{y-y_B}{x-x_B}\right) + b$$

и подобрать постоянные $a$, $b$ и ветви арктангенса так, чтобы удовлетворить поставленным условиям. Гармоничностью этой функции мы пользовались еще во вводной главе при выводе формулы Пуассона для решения задачи Дирихле в круге. На левой границе луночки наша $w$, очевидно, принимает некоторое положительное, меньшее 1, значение $\theta$.

Правда, использовать функцию $w(x, y)$ в качестве мажоранты на основе простейшего принципа максимума нельзя, так как она разрывна в точках $A$, $B$, лежащих на границе $G$. Однако она ограничена, что позволяет использовать лемму о разрывной мажоранте (§ 21). На этом заканчиваются рассуждения, доказывающие, что из равенства $u(x, y) = 0$ на $\alpha \cup \sigma$ и неравенства $|u| \leqslant 1$ на $\gamma$ следует неравенство $|u| \leqslant \theta$ на $\beta$. Проверка первой половины критерия Шварца закончена. Вторая половина проверяется совершенно аналогично.

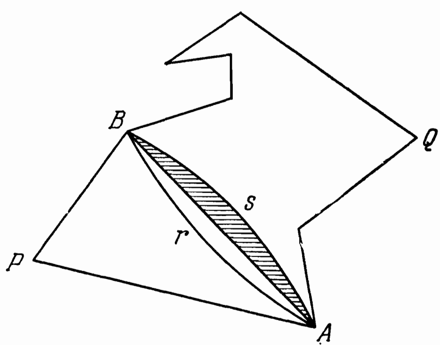

Рис. 62.

Сейчас мы покажем, как использование критерия луночки позволяет легко убедиться в разрешимости задачи Дирихле и в выполнении принципа Дирихле для любого многоугольника. Как уже было отмечено, мы ограничимся односвязными многоугольниками.

Пусть некоторый многоугольник можно отрезком прямой $AB$, лежащим целиком внутри многоугольника, разрезать на две части $APB$ и $BQA$ (рис. 62), для каждой из которых справедливость доказываемого утверждения уже установлена. Для краткости мы будем утверждение о разрешимости задачи Дирихле и о выполнении принципа Дирихле называть утверждением $D$.

Окружим отрезок $AB$ некоторой луночкой, лежащей целиком внутри многоугольника. Как было показано в предыдущем параграфе, для луночки $ArBs$ утверждение $D$ справедливо. С помощью нашего геометрического критерия легко проверить справедливость $D$ для области $APBsA$, состоящей из многоугольника $APB$, дополненного заштрихованной частью луночки.

Из справедливости $D$ для $APBsA$ и для $BQA$ уже нетрудно вывести, опять-таки с помощью условия луночки, справедливость $D$ для $APBQA$.

Любой односвязный многоугольник можно разрезать прямолинейными отрезками на треугольники так, что каждое сечение увеличивает число раздельно лежащих областей. Поэтому достаточно ограничиться проверкой справедливости $D$ для треугольников и даже для прямоугольных треугольников (любой из треугольников может быть рассечен на два прямоугольных одной из своих высот). На рис. 63 изображено, как прямоугольный треугольник $ABC$ разрезается на три области $G_1$, $G_2$, $G_3$ дугами $AE$, $AF$ окружностей, проходящих через точку $A$, центры которых помещены в вершины острых углов $C$ и $B$.

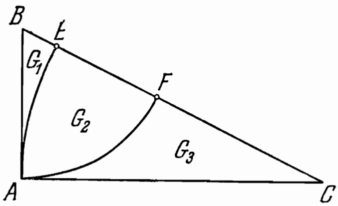


Рис. 63.

Очевидно, что и здесь условие луночки выполнено. Поэтому достаточно уметь проверять справедливость утверждения $D$ лишь для круговых секторов $CAE$, $BAF$. В конце прошлого параграфа была доказана разрешимость задачи Дирихле и выполнение принципа Дирихле для любых секторов. На этом мы заканчиваем описание схемы доказательства того, что по любой непрерывной функции, заданной на границе произвольного многоугольника с конечным числом сторон, внутри этого многоугольника может быть построена гармоническая функция, непрерывная вплоть до границы и там совпадающая с заданной. Если это гармоническое продолжение граничной функции внутрь многоугольника имеет бесконечный интеграл Дирихле, то не существует какого-либо продолжения этой граничной функции внутрь с конечным интегралом Дирихле. Если же интеграл Дирихле гармонического продолжения конечен, то для любого другого продолжения он строго больше или бесконечен.

Эти утверждения составляют содержание принципа Дирихле для многоугольных областей. Теперь он нами обоснован, так же как и разрешимость для этих областей задачи Дирихле при любой непрерывной граничной функции.

## § 24. Задача Гильберта для уравнений Коши — Римана в круге

Постановка и примеры. Индекс граничного условия. Нормировка (регуляризация) граничного условия в задаче Гильберта. Теорема существования решения в случае неотрицательного индекса граничного условия. Исследование неединственности при положительном или нулевом индексе граничных условий. Единственность и условия разрешимости при отрицательном индексе. Задача с косой производной и ее сведéние к задаче Гильберта. Задача Неймана. Индекс задачи и индекс граничных условий. Понятие об индексе для системы линейных алгебраических уравнений.

Мы довольно подробно изучили задачу Дирихле для уравнения Лапласа, как пример типичной задачи, решаемой для уравнений эллиптического типа. В этом параграфе будет разобран несколько более сложный пример задачи Гильберта для уравнений Коши — Римана.

При изучении задачи Гильберта мы ограничимся только простейшей односвязной областью — кругом. Основные факты, которые мы для этой задачи установим, могут быть получены также для любой односвязной области с достаточно гладкой границей. Более того, они могут быть получены из теорем, доказанных для круга, с помощью конформного преобразования. Мы не можем в нашем курсе на таком перенесении останавливаться, так как в нашем распоряжении нет тех тонких теорем о граничных свойствах конформных преобразований, которые для этого перенесения нужны.

*Задача Гильберта в единичном круге* $x^2+y^2\leqslant 1$ *ставится так. Надо найти решение* $u(x, y)$, $v(x, y)$, *непрерывное вплоть до границы* $\Gamma\ (x^2+y^2=1)$, *уравнений Коши — Римана*

$$u_x - v_y = 0,$$
$$u_y + v_x = 0,$$

*удовлетворяющее на границе граничному условию*

$$a(s)\,u + b(s)\,v = f(s).$$

Коэффициенты $a(s)$, $b(s)$ предполагаются достаточно гладкими функциями длины дуги $s$ единичной окружности; функция $f(s)$ — тоже достаточно гладкая, $a^2(s)+b^2(s)>0$.

Изучение задачи Гильберта начнем с разбора двух типичных примеров.

Пример 1. Пусть $a(s)=1$, $b(s)=0$, $u|_\Gamma=f(s)$. Мы получаем здесь задачу Дирихле для гармонической функции $u(x, y)$. Сопряженная к ней гармоническая функция $v(x, y)=c+v_0(x, y)$ определяется с точностью до произвольной постоянной. В § 2 было доказано, что $v(x, y)$ будет непрерывной вплоть до границы, если $f(s)$ достаточно гладкая.

Пример 2. Пусть $a(s) = x(s)$, $b(s) = -y(s)$ $(x^2 + y^2 = 1)$,

$$(xu - yv)|_{\Gamma} = f(s).$$

Предположим, что нам удалось найти аналитическое в единичном круге и непрерывное вплоть до границы решение $u(x, y) + iv(x, y)$ этой задачи. Как известно, $\oint (u + iv)(dx + i\,dy) = \oint (u\,dx - v\,dy) + i \oint (u\,dy + v\,dx) = 0$ по любому замкнутому контуру, лежащему в круге. Мнимая часть этого интеграла дает равенство

$$\oint u\,dy + v\,dx = 0.$$

В силу непрерывности $u(x, y)$, $v(x, y)$ контур можно продеформировать, не изменяя результата, и превратить в границу — единичную окружность. На этой окружности $dy = x\,ds$, $dx = -y\,ds$. Отсюда

$$\oint (ux - vy)\,ds = \int_0^{2\pi} f(s)\,ds.$$

Из разрешимости задачи Гильберта в этом примере следует, что интеграл от правой части равен нулю. Задача оказалась разрешимой не при всяких правых частях $f(s)$.

Приведенные нами простые примеры показывают, что характер задачи существенно зависит от коэффициентов $a(s)$, $b(s)$ граничного условия. В дальнейшем выяснится, что разрешимость или

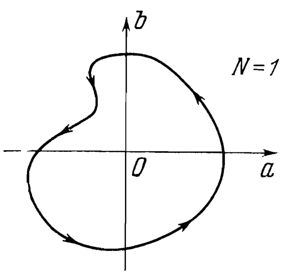


Рис. 64.

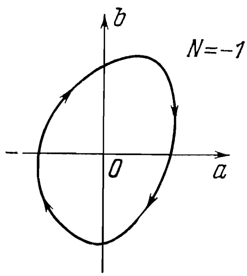


Рис. 65.

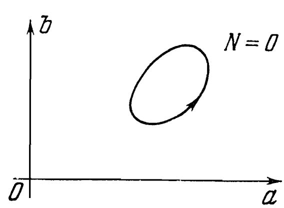


Рис. 66.

неразрешимость задачи Гильберта, а также условия единственности зависят от некоторого целого числа $N$, которое может быть определено по виду функций $a(s)$, $b(s)$. Это число называется *индексом граничного условия*.

Пусть $s$ — длина дуги единичной окружности — меняется от 0 до $2\pi$ при движении точки вдоль окружности против часовой стрелки. При этом вектор с координатами $a(s)$, $b(s)$ опишет некоторую кривую на плоскости $(a, b)$. *Число оборотов, которое сделает эта кривая вокруг начала координат, и называется индексом*. На рис. 64—68 изображены такие кривые в случае различных индексов. Стрелкой указано направление движения вдоль кривой при возрастании $s$. В разобранных нами примерах 1 и 2 значения индекса были, соответственно, равны нулю и минус единице.

Теорема. *Задача Гильберта при $N \geqslant 0$ всегда имеет неединственное решение. Это решение зависит от $2N+1$ постоянной.*

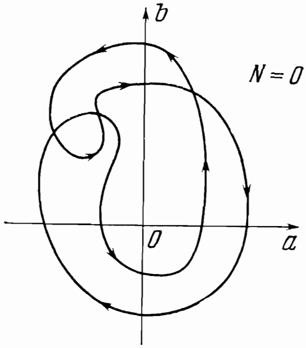


Рис. 67.

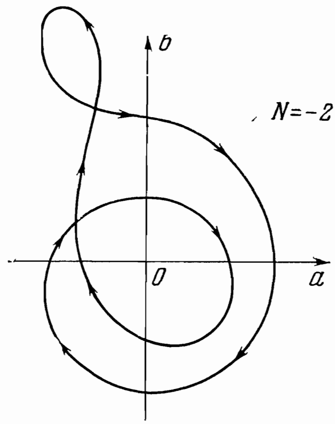


Рис. 68.

*При $N<0$, если задача Гильберта разрешима, то она разрешима однозначно. Для разрешимости необходимо и достаточно, чтобы правая часть $f(s)$ была ортогональна к любой функции из некоторой линейной конечномерной системы функций. Размерность этой системы $2|N|-1=-(2N+1)$.*

В разобранном примере (пример 2) задачи с индексом $N=-1$ правая часть $f(s)$ должна быть ортогональна всего лишь к одномерному пространству. Это пространство состоит из констант. Отсюда и получается условие $\int\limits_0^{2\pi} f(s)\cdot 1\,ds=0$. Из сформулированной теоремы вытекает, что для любой достаточно гладкой $f(s)$, удовлетворяющей этому равенству, задача Гильберта этого примера разрешима однозначно.

Доказательство теоремы будет дано немного ниже, а сейчас мы проведем ряд полезных предварительных построений.

Прежде всего еще раз отметим, что задача Гильберта эквивалентна задаче нахождения аналитической внутри круга и непрерывной вплоть до границы функции $w=u(x, y)+iv(x, y)$, удовлетворяющей граничному условию

$$a(s)\,u+b(s)\,v=f(s).$$

В частном случае $b \equiv 0$ в примере 1 мы показали, что при таком граничном условии $\left(u|_\Gamma = \frac{f(s)}{a(s)} = f_1(s)\right)$ задача Гильберта легко исследуется. Ниже мы покажем, что и в общем случае задача может быть, по существу, сведена к рассмотренному частному примеру.

Для этого предположим сначала на минуту, что $a(s)$ и $b(s)$ — это граничные значения действительной и мнимой частей некоторой аналитической в круге и не равной там нулю функции

$$c(x+iy) = a(x, y) + ib(x, y).$$

Тогда аналитическая в круге функция

$$\frac{w}{c} = \frac{u+iv}{a+ib} = \frac{au+bv}{a^2+b^2} + i\frac{av-bu}{a^2+b^2} = U + iV$$

имеет вещественную часть $U = \frac{au+bv}{a^2+b^2}$, значение которой на границе известно: оно равно $\frac{f(s)}{a^2(s)+b^2(s)}$. Как мы уже напоминали в примере 1 (подробное доказательство изложено в § 2), гармонические функции $U(x, y)$ и $V(x, y)$ восстанавливаются по граничным значениям $U$, причем $V$ определяется с точностью до аддитивной постоянной. Тем самым определяется $w(x+iy) = c(x+iy)\cdot\cdot[U(x, y) + iV(x, y)]$. Конечно, наше предположение о том, что $a(s)$, $b(s)$ — граничные значения действительной и мнимой частей аналитической в круге функции, вообще говоря, не выполняется. Однако ясно, что граничное условие

$$a(s)u + b(s)v = f(s)$$

эквивалентно любому условию вида

$$\rho(s)a(s)u + \rho(s)b(s)v = \rho(s)f(s),$$

какова бы ни была строго положительная функция $\rho(s)$.

Обозначения

$$\alpha(s) = \rho(s)a(s), \quad \beta(s) = \rho(s)b(s)$$

позволяют записать его в форме

$$\alpha(s)u + \beta(s)v = \rho(s)f(s).$$

Ясно, что индекс пары $(\alpha(s), \beta(s))$ в точности равен индексу исходной пары, и мы попытаемся подобрать множитель $\rho(s)$ так, чтобы $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ были граничными значениями действительной и мнимой частей аналитичсской в круге функции $\alpha(x, y) + i\beta(x, y)$. Посмотрим, можно ли подобрать множитель так, чтобы функция $\alpha + i\beta$ не имела нулей внутри круга. Будем сразу искать эту функцию в виде $\alpha(x, y) + i\beta(x, y) = e^{p(x, y) + iq(x, y)}$, где $p + iq$ — аналитическая в единичном круге функция. (Легко видеть, что представление в таком виде функции $\alpha+i\beta$ эквивалентно требованию, чтобы эта функция не имела нулей, но нам нет надобности на этой эквивалентности останавливаться.) Из равенства модулей в представлении функции $\alpha+i\beta$ получаем

$$e^{p(x,\,y)}|_\Gamma=\rho(s)\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}. \tag{1}$$

Следовательно,

$$e^{iq(x,\,y)}|_\Gamma=\frac{a(s)+ib(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}. \tag{2}$$

Задача, таким образом, состоит в том, чтобы найти функции $\rho(s)$, $p(x, y)$ и $q(x, y)$, удовлетворяющие соотношениям (1), (2). Мы будем сначала искать $q(x, y)$, затем $p(x, y)$ как сопряженную с ней функцию. И, наконец, из равенства (1) определится $\rho(s)$. Итак, попробуем найти $q(x, y)$. Из определения индекса $N$ пары $(a(s), b(s))$ видно, что при движении точки по единичной окружности против часовой стрелки после обхода всей окружности вектор $\frac{a(s)+ib(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}$ обойдет окружность $N$ раз. Следовательно, $q(x, y)|_\Gamma$ (это просто аргумент указанного вектора) получит приращение $2\pi N$. Тем самым, при $N\neq 0$ $q(x, y)$ даже на границе круга не является однозначной функцией, и наше построение функции $\alpha(x, y)+i\beta(x, y)$ незаконно.

Чтобы построить функцию $\alpha(x, y)+i\beta(x, y)$, нам придется отказаться от требования, чтобы у этой функции внутри круга не было нулей и полюсов. Заметим, что аналитическая функция $(x+iy)^N$ при обходе аргументом единичной окружности тоже увеличивает свой аргумент на $2\pi N$. Следовательно, после того, как аргумент $s$ изменится от 0 до $2\pi$, аргумент функции

$$\frac{a(s)+ib(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}\cdot\frac{1}{(x+iy)^N}\bigg|_{x^2+y^2=1}=\frac{a(s)+ib(s)}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\frac{1}{\cos Ns+i\sin Ns}$$

возвращается к первоначальному значению. Поэтому этот аргумент определяется однозначно. Приняв эти значения аргумента за граничные значения функции $q(x, y)$, построим внутри круга аналитическую функцию $p(x, y)+iq(x, y)$. Построение аналитической функции по граничным значениям ее мнимой части полностью аналогично восстановлению аналитической функции по граничным значениям ее действительной части, так как $-i(p+iq)=$ $=q-ip$. Произвольную постоянную действительной части $p$ фиксируем каким-либо определенным образом. Тем самым мы построили аналитическую внутри круга функцию $e^{p(x,\,y)+iq(x,\,y)}$, которую мы обозначим $\alpha_0(x, y)+i\beta_0(x, y)$. На границе круга

$$[\alpha_0(x, y)+i\beta_0(x, y)]_\Gamma=e^{p(x,\,y)+iq(x,\,y)}|_\Gamma=$$
$$=e^{p(x,\,y)}\Big|_\Gamma\cdot\frac{a(s)+ib(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}\cdot\frac{1}{(x+iy)^N}\Big|_\Gamma.$$

Следовательно, функция

$$\alpha(x, y)+i\beta(x, y)=[\alpha_0(x, y)+i\beta_0(x, y)](x+iy)^N$$

на границе круга равна $e^{p(x, y)}\Big|_\Gamma \cdot \dfrac{a(s)+ib(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}$. Множитель $\rho(s)=$ $=\dfrac{e^{p(x, y)}|_\Gamma}{\sqrt{n^2(s)+b^2(s)}}$ называется *регуляризирующим множителем*.

При достаточно гладких функциях $a(s)$ и $b(s)$ функция $\alpha_0(x, y)+i\beta_0(x, y)$ будет дважды непрерывно дифференцируемой вплоть до границы. (Из рассмотрения способа построения функций $p(x, y)+iq(x, y)$ в § 2 видно, что для этого достаточно, чтобы $a(s)$ и $b(s)$ были четырежды непрерывно дифференцируемы.)

Приступим к доказательству сформулированной выше теоремы.

Пусть $N\geqslant 0$. В этом случае построенная аналитическая функция $\alpha(x, y)+i\beta(x, y)$ имеет внутри круга единственный нуль порядка $N$ в начале координат. Построим аналитическую в круге и непрерывную вплоть до границы функцию $U(x, y)+iV(x, y)$ по граничным значениям ее действительной части:

$$U(\cos s, \sin s)=\frac{\rho(s)f(s)}{\alpha^2(s)+\beta^2(s)}.$$

Тогда функция $u(x, y)+iv(x, y)=(\alpha+i\beta)(U+iV)$ является искомой функцией. Действительно, она по построению аналитична в круге и непрерывна вплоть до границы. Кроме того, она удовлетворяет граничному условию. Действительно,

$$\frac{\alpha u+\beta v}{\alpha^2+\beta^2}\Big|_\Gamma=\operatorname{Re}\frac{u(x, y)+iv(x, y)}{\alpha(x, y)+i\beta(x, y)}\Big|_\Gamma=U(x, y)|_\Gamma=\frac{\rho(s)f(s)}{\alpha^2(s)+\beta^2(s)}.$$

Следовательно, $\alpha u+\beta v|_\Gamma=\rho(s)f(s)$. Существование решения при $N\geqslant 0$ доказано.

Исследуем теперь вопрос о его единственности (а точнее, о степени неединственности). Ясно, что решение задачи Гильберта (как и решение любой линейной задачи) определяется с точностью до произвольного решения однородной задачи. Итак, пусть $u(x, y)+iv(x, y)$ — решение однородной задачи: $(au+bv)|_\Gamma=0$, а, следовательно, и $(\alpha u+\beta v)|_\Gamma=0$. Поэтому функция

$$U+iV=\frac{u+iv}{\alpha+i\beta}=\frac{\alpha u+\beta v}{\alpha^2+\beta^2}+i\frac{\alpha v-\beta u}{\alpha^2+\beta^2}$$

имеет вещественную часть $U$, обращающуюся в нуль на границе круга. Так как $u(x, y)+iv(x, y)$ регулярна внутри круга, а $\alpha(x, y)+i\beta(x, y)$ имеет в начале координат нуль кратности $N$, то функция $U(x, y)+iV(x, y)$ имеет в начале координат не выше чем $N$.

Мы найдем сейчас общий вид аналитической функции $U+iV$, имеющей в начале координат полюс кратности не выше $N$ и такой, что $U(x, y)=0$ на окружности $x^2+y^2=1$. Пусть $U+iV$ имеет в центре круга полюс с главной частью:

$$\sum_{k=-N}^{k=-1} (\xi_k+i\eta_k)(x+iy)^k.$$

Нетрудно проверить, что полином

$$\sum_{k=-N}^{k=-1} (\xi_k-i\eta_k)(x+iy)^{-k}$$

имеет вещественную часть, принимающую на границе те же значения, что и вещественная часть главной части. Поэтому функция

$$\Phi+i\Psi=\sum_{k=-N}^{k=-1} [(\xi_k+i\eta_k)(x+iy)^k-(\xi_k-i\eta_k)(x+iy)^{-k}]$$

имеет вещественную часть, обращающуюся на границе в нуль, и ту же главную часть, что и $U+iV$. Следовательно,

$$(U+iV)-(\Phi+i\Psi)$$

ограничена, и вещественная часть разности принимает на границе нулевые значения. Отсюда $U-\Phi=0$, $V-\Psi=C^*=\text{const}$. Итак,

$$U+iV=iC^*+\sum_{k=-N}^{k=-1} [(\xi_k+i\eta_k)(x+iy)^k-(\xi_k-i\eta_k)(x+iy)^{-k}].$$

С другой стороны, постоянные $\xi_k$, $\eta_k$ могут быть выбраны произвольно. Функция $U+iV$ будет при этом аналитической с нулевой вещественной частью на окружности и с полюсом порядка не выше $N$ в центре. Это решение зависит от $2N+1$ постоянных

$$\xi_{-1},\ \xi_{-2},\ \ldots,\ \xi_{-N},$$
$$\eta_{-1},\ \eta_{-2},\ \ldots,\ \eta_{-N},\ C^*.$$

Мы показали, что при $N\geqslant 0$ решение задачи Гильберта определяется с точностью до $2N+1$ линейно независимых решений однородной задачи. (Почему они линейно независимы?)

Рассмотрим теперь случай $N<0$. Пусть $u(x, y)+iv(x, y)$ — решение задачи Гильберта. Так как построенная выше функция $\alpha(x, y)+i\beta(x, y)$ имеют полюс порядка $|N|$ в начале координат, то функция

$$U(x, y)+iV(x, y)=\frac{u(x, y)+iv(x, y)}{\alpha(x, y)+i\beta(x, y)}$$

имеет нуль в начале координат кратности не меньшей чем $|N|$. Граничные значения вещественной части $U(x, y)$ равны $\left.\frac{\alpha u+\beta v}{\alpha^2+\beta^2}\right|_\Gamma=$

$=\frac{\rho(s) f(s)}{\alpha^2(s)+\beta^2(s)}$. Пусть коэффициенты Фурье этой функции равны $a_n$ и $b_n$. Ранее, в § 7, было показано, что коэффициенты ряда Тейлора функции

$$U+iV=\omega_0+\omega_1 z+\omega_2 z^2+\ldots \quad (z=x+iy)$$

определяются по формулам

$$\begin{aligned} &\omega_0=\frac{a_0}{2}+iC, \\ &\omega_n=a_n-ib_n \quad (n>0) \end{aligned} \tag{3}$$

однозначно с точностью до постоянной $C$. Так как первые $|N|$ коэффициентов обращаются в нуль, то это означает, что все коэффициенты ряда Тейлора функции $U+iV$ (а значит, и сама функция) определяются однозначно по граничному условию. Следовательно, $u+iv=(U+iV)(\alpha+i\beta)$ определяется однозначно. Итак, мы доказали, что при $N<0$ не существует более одного решения задачи, и если задача разрешима, то

$$a_0=a_1=a_2=\ldots=a_{|N|-1}=b_1=b_2=\ldots=b_{|N|-1}=0.$$

С другой стороны, если эти условия выполнены, то построенная функция $U+iV$ имеет нуль в начале координат порядка не ниже чем $|N|$ (постоянную $C$ в соотношении (3) полагаем равной нулю). Тогда функция $u+iv=(\alpha+i\beta)(U+iV)$ аналитична в круге и, по построению $U$, удовлетворяет граничным условиям.

Записав явные выражения для коэффициентов Фурье, получим необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Гильберта:

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(s)}{\rho(s)\left[a^2(s)+b^2(s)\right]} \cos ns\, ds=0 \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ |N|-1),$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(s)}{\rho(s)\left[a^2(s)+b^2(s)\right]} \sin ns\, ds=0 \quad (n=1,\ 2,\ \ldots,\ |N|-1).$$

Обозначив

$$\varphi_k(s)=\begin{cases} \dfrac{\sin ks}{\rho(s)\left[a^2(s)+b^2(s)\right]} & (k=1,\ 2,\ \ldots,\ |N|-1), \\ \dfrac{\cos(ks-|N|s)}{\rho(s)\left[a^2(s)+b^2(s)\right]} & (k=|N|,\ |N|+1,\ \ldots,\ 2|N|-1), \end{cases}$$

мы можем, переписав эти равенства в виде

$$\int_0^{2\pi} f(s)\,\varphi_k(s)\, ds=0, \quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2|N|-1,$$

сказать, что для разрешимости задачи Гильберта при $N<0$ необходимо и достаточно, чтобы правая часть $f(s)$ была ортогональна к $2|N|-1$-мерному пространству функций, являющихся линейными комбинациями $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2|N|-1}$. (Вопрос: почему функции $\varphi$ между собой линейно независимы?) Теорема полностью доказана.

В заключении рассмотрим одну задачу для уравнения Лапласа, тесно связанную с задачей Гильберта.

Задача с косой производной. *Найти решение* $\varphi(x, y)$ *уравнения Лапласа* $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$, *непрерывное вплоть до границы вместе с первыми производными и удовлетворяющее граничному условию*: $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|_\Gamma=f(s)$. Здесь $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$ означает производную по некоторому направлению $\nu$. Если обозначить направляющие косинусы этого направления через $a(s)$, $-b(s)$, то граничное условие перепишется следующим образом:

$$a(s)\frac{\partial\varphi}{\partial x}-b(s)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=f(s).$$

Положим $u=\varphi_x$, $v=-\varphi_y$. Очевидно, что $u_y=-v_x$. Кроме того, $u_x-v_y=(\varphi_x)_x-(-\varphi_y)_y=\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0$. Мы выяснили, что $u(x, y)$, $v(x, y)$ связаны условиями Коши — Римана. Функция $u+iv$ — аналитическая. Граничное условие $a\varphi_x-b\varphi_y=f$ перепишется для этой аналитической функции так:

$$au+bv=f.$$

Таким образом, каждому решению задачи с косой производной соответствует решение задачи Гильберта по формулам $u=\varphi_x$, $v=-\varphi_y$. Обратно, по решению задачи Гильберта можно однозначно, с точностью до произвольной аддитивной постоянной, определить решение $\varphi$ задачи с косой производной.

Таким образом, в случае единичного круга было доказано следующее: если индекс граничного условия $N\geqslant 0$, то по доказанной теореме задача Гильберта, а с ней и задача с косой производной всегда разрешимы. При этом функция $\varphi$ определяется с точностью до $2N+2$ линейно независимых решений однородной задачи (одна произвольная постоянная появляется при переходе от $u$, $v$ к $\varphi$).

Если же индекс $N<0$, то для разрешимости задачи необходимо и достаточно выполнения $2|N|-1$ условия, и решение $\varphi$ определяется с точностью до одной произвольной постоянной.

В качестве примера можно рассмотреть так называемую задачу Неймана — частный случай задачи с косой производной, когда направление $\nu$ совпадает с нормалью. Для круга в этом случае $a(s)=\cos s$, $b(s)=-\sin s$ и, следовательно, индекс равен $-1$.

Условие разрешимости, как это вытекает из теоремы (и из разобранного ранее примера 2), записывается в виде $\int\limits_0^{2\pi} f(s)\,ds = 0$. Решение задачи Неймана определяется с точностью до произвольной постоянной.

На этом мы заканчиваем изучение задачи Гильберта. Сделаем лишь еще одно терминологическое замечание.

В настоящее время индексом той или иной краевой задачи принято называть разность между числом решений однородной задачи и числом условий ортогональности, которые должны выполняться для правой части в случае разрешимости. В задаче Гильберта эта разность равна $2N+1$ (а в задаче с косой производной $2N+2$) как в случае положительного, так и в случае отрицательного $N$. Именно поэтому мы назвали $N$ индексом граничного условия, чтобы не путать его с индексом $2N+1$ задачи.

Упражнение. Докажите, что для разрешимости системы

$$\sum_{k=1}^{K} a_{ik}x_k = f_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, I, \tag{4}$$

необходимо и достаточно, чтобы $f_i$ были ортогональны $\left(\sum\limits_{i=1}^{i=I} z_i f_i = 0\right)$ любому решению однородной сопряженной системы

$$\sum_{i=1}^{I} a_{ik}z_i = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, K. \tag{5}$$

Разность любых двух решений системы (4) удовлетворяет однородным уравнениям

$$\sum_{k=1}^{K} a_{ik}y_k = 0. \tag{6}$$

Разность размерностей пространств решений у систем (6), (5) называется индексом системы (4). Докажите, что этот индекс равен $K-I$.

## § 25. Некорректные задачи

Обсуждение возможности решения некорректных задач на примере задачи Коши для периодических решений Лапласа. Разложение этих решений в ряд Фурье. Логарифмически выпуклые функции и получение с их помощью неравенств для логарифмических функций. Условная корректность в классе ограниченных решений. Регуляризация приближений для начальных данных и отыскание решения некорректной задачи, ограниченного известной константой.

В заключение нашего обзора теории эллиптических уравнений, который мы проводим на простейших типичных задачах, остановимся еще на разборе «некорректной» задачи. Несмотря на постулат Адамара о том, что реальные физические процессы описываются, как правило, задачами корректными, есть много научных вопросов, сводящихся к задачам некорректным. Обычно эти вопросы бывают связаны с попыткой восстановить течение какого-либо процесса, описываемого корректной задачей, по результатам измерений, которые должны единственным образом определять решение, но делают это некорректным образом. Так, например, потенциал поля тяготения может быть получен по заданному распределению масс решением некоторой корректной задачи для уравнения Пуассона. Однако, если мы постараемся определить это поле по результатам измерений, сделанных на какой-либо поверхности, например, на поверхности Земли, то мы придем к некорректной задаче Коши, рассмотренной в примере Адамара. Несмотря на это, задачу восстановления поля тяготения по данным Коши часто решают, например, в целях гравиметрической разведки.

Этот параграф будет посвящен решению задачи Коши для уравнения Лапласа. Несколько точнее будет сказать, что мы решаем смешанную краевую задачу, так как $u(x, y)$ мы будем предполагать периодической по $x$ с периодом $2\pi$. Более того, мы ограничимся предположением, что $u(x, y) = -u(-x, y)$. Пусть решение определено и непрерывно вместе с первыми производными в полосе $0 \leqslant y \leqslant 1$. Для простоты еще предположим, что $u(x, 0) = 0$, и обозначим

$$\left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right|_{y=0} = \varphi(x).$$

Предполагая, что такое решение существует, выпишем его разложение в ряд Фурье по переменной $x$. В силу наложенных условий (нечетности и гладкости функции) этот ряд имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y) \sin nx$$

и сходится при каждом $y\,(0 \leqslant y \leqslant 1)$ равномерно относительно $x$.

Чтобы вычислить коэффициенты Фурье $b_n(y)$, заметим, что $b_n(y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(x, y) \sin nx\, dx$. Затем умножим уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

почленно на $\sin nx$ и проинтегрируем получившееся равенство от 0 до $2\pi$:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \sin nx\, dx + \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \sin nx\, dx = 0.$$

Это равенство справедливо для внутренних точек полосы $0 < y < 1$. Для этих точек гармоническая функция $u(x, y)$, как мы знаем, бесконечно дифференцируема. Поэтому во втором интеграле можно поменять местами операции интегрирования и дифференцирования. А первый интеграл преобразуем интегрированием по частям два раза и воспользуемся периодичностью функции $u(x, y)$. В результате получим соотношение

$$-n^2\int_0^{2\pi} u(x, y)\sin nx\,dx + \frac{d^2}{dy^2}\int_0^{2\pi} u(x, y)\sin nx\,dx = 0$$

или, что то же самое,

$$-n^2 b_n(y) + \frac{d^2}{dy^2} b_n(y) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$b_n(y) = A_n \operatorname{sh} ny + C_n \operatorname{ch} ny.$$

Из интегрального представления функций $b_n(y)$ видно, что они непрерывны при $0 \leqslant y \leqslant 1$. Следовательно, из условия $u(x, 0) = 0$ (а следовательно, и $b_n(0) = 0$) окончательно имеем

$$b_n(y) = A_n \operatorname{sh} ny.$$

Итак, мы получили, что для функции $u(x, y)$, удовлетворяющей нашим предположениям, справедливо представление

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sh} ny \sin nx. \tag{1}$$

В частности, $u(x, 1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sh} n \sin nx$, откуда вытекает, что

$$|A_n \operatorname{sh} n| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} u(x, 1)\sin nx\,dx\right| \leqslant 2\max|u(x, 1)| = K.$$

Следовательно, $|A_n| \leqslant \dfrac{K}{\operatorname{sh} n}$.

Из этой оценки вытекает, что ряд (1) можно любое число раз дифференцировать почленно при $0 \leqslant y < 1$. В частности,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sin nx,$$

т. е. $A_n = \dfrac{a_n}{n}$, где $a_n$ — коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$.

Тем самым получено (при наложенных выше предположениях) решение задачи Коши для уравнения Лапласа с условиями:

$$u(x,\ 0)=0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx.$$

Мы показали, что если решение существует в полосе $0\leqslant y\leqslant 1$, то

$$u(x,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\operatorname{sh} ny \sin nx \tag{2}$$

и

$$|a_n|<\text{const}\,\frac{n}{\operatorname{sh} n}. \tag{3}$$

И обратно, если коэффициенты Фурье $a_n$ удовлетворяют неравенству (3), то ряд (2) дает решение задачи Коши. Действительно, легко проверить, что каждый член ряда является гармонической функцией и, в силу неравенства (3), ряд можно дифференцировать любое число раз при $|y|<1$. Следовательно, функция $u(x,\ y)$ тоже гармонична и удовлетворяет начальным условиям.

Пример Адамара показывает, что задача восстановления $u(x,\ y)$ по $u(x,\ 0)$, $\left.\dfrac{\partial u(x,\ y)}{\partial y}\right|_{y=0}$ не является корректной. Однако если знать, что решение существует и удовлетворяет некоторым неравенствам, то оказывается, что его можно приближенно решить, даже если пользоваться не совсем точными начальными данными.

Мы расскажем решение задачи о восстановлении

$$u(x,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\operatorname{sh} ny\cdot\sin nx$$

по приближенным значениям

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx.$$

Наш рассказ будет основан на работе М. М. Лаврентьева. Решаемая задача некорректна. Однако если предположить, что мы восстанавливаем решение, про которое известно, что

$$\int_0^{\pi} u^2(x,\ y)\,dx<M^2 \text{ при всех } 0\leqslant y\leqslant 1,$$

то некорректность исчезает благодаря следующей теореме.

Теорема. *Если $u(x,\ y)$ — непрерывная при $0\leqslant y\leqslant 1$ гармоническая функция, удовлетворяющая нашим условиям периодичности* *и регулярности:* $u(x, 0)=0$,

$$\int_0^\pi u^2(x, 1)\,dx \leqslant M^2, \quad \int_0^\pi \varphi^2(x)\,dx \leqslant m^2$$

$$(\varphi(x)=u_y(x, 0)),$$

*то*

$$\int_0^\pi u^2(x, y)\,dx \leqslant y^2 m^{2(1-y)} M^{2y}.$$

Положительную гладкую функцию $f(t)>0$ мы будем называть логарифмически выпуклой, если $\frac{d^2}{dt^2}\ln f(t) \geqslant 0$. В силу равенства

$$\frac{d^2}{dt^2}\ln f(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{f}\frac{df}{dt}\right)=\frac{f''f-f'^2}{f^2} \geqslant 0$$

для логарифмической выпуклости необходимо и достаточно выполнения неравенств $f>0$, $f''f-f'^2 \geqslant 0$, что в свою очередь эквивалентно неотрицательности формы

$$f''\xi^2+2f'\xi\eta+f\eta^2 \geqslant 0$$

при произвольных $\xi$, $\eta$.

Лемма 1. *Сумма логарифмически выпуклых функций является логарифмически выпуклой.*

Доказательство этой леммы вытекает из неравенства

$$(f_1+f_2)''\xi^2+2(f_1+f_2)'\xi\eta+(f_1+f_2)\eta^2 \geqslant 0,$$

выполненного для любых $\xi$, $\eta$, если только для них выполнены неравенства

$$f_1''\xi^2+2f_1'\xi\eta+f_1\eta^2 \geqslant 0,$$
$$f_2''\xi^2+2f_2'\xi\eta+f_2\eta^2 \geqslant 0,$$

означающие логарифмическую выпуклость $f_1$, $f_2$. Очевидно, что доказанный факт имеет место для любого конечного числа слагаемых.

Лемма 2. $f(t)=\frac{\operatorname{sh}^2 at}{t^2}$ *логарифмически выпукла при любом* $a$.

В самом деле,

$$\frac{d^2}{dt^2}\ln f(t)=\frac{2}{t^2}\cdot\frac{\operatorname{sh}^2 at-a^2t^2}{\operatorname{sh}^2 at} \geqslant 0.$$

Лемма 3. $I_N(y)=\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k^2\operatorname{sh}^2 ky}{k^2y^2}$ *является логарифмически выпуклой функцией*. Доказательство вытекает из лемм 1, 2.

Из логарифмической выпуклости вытекают неравенства

$$\ln I_N(y) \leqslant y \ln I_N(1) + (1-y) \ln I_N(0), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$
$$I_N(y) \leqslant [I_N(1)]^y [I_N(0)]^{1-y}.$$

Очевидно, что если обозначить

$$u_N(x, y) = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n} \operatorname{sh} ny \sin nx,$$

$$\varphi_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin nx,$$

то

$$I_N(y) = \frac{2}{\pi y^2} \int_0^\pi u_N^2(x, y)\, dx,$$

$$I_N(1) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u_N^2(x, 1)\, dx,$$

$$I_N(0) = \sum_{n=1}^{N} a_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi_N^2(x)\, dx.$$

Это позволяет переписать доказанное нами неравенство так:

$$\frac{1}{y^2} \int_0^\pi u_N^2(x, y)\, dx \leqslant \left[\int_0^\pi u_N^2(x, 1)\, dx\right]^y \left[\int_0^\pi \varphi_N^2(x)\, dx\right]^{1-y}.$$

При наших предположениях $u_N(x, y)$, $\varphi_N(x)$ сходятся равномерно ($|y| \leqslant 1$) к $u(x, y)$, $\varphi(x)$ соответственно. Из этой равномерной сходимости вытекает, что

$$\int_0^\pi u^2(x, y)\, dx \leqslant y^2 \left[\int_0^\pi u^2(x, 1)\, dx\right]^y \left[\int_0^\pi \varphi^2(x)\, dx\right]^{1-y}.$$

Доказательство теоремы закончено.

Пусть теперь $\{u^{(k)}(x, y)\}$ — последовательность гармонических функций

$$u^{(k)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{(k)}}{n} \operatorname{sh} ny \sin nx,$$

ограниченных одной и той же постоянной при $|y| \leqslant 1$. Тогда для любой из этих функций

$$\int_0^\pi [u^{(k)}(x,\ 1)]^2\,dx \leqslant M^2,$$

$$u^{(k)}(x,\ 0)=0,\qquad \left.\frac{\partial u^{(k)}(x,\ y)}{\partial y}\right|_{y=0}=\varphi^{(k)}(x).$$

*Пусть $u(x,\ y)$ — некоторая гармоническая функция того же вида:*

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n}\operatorname{sh} ny\cdot\sin nx,$$

$$u(x,\ 0)=0,\ \ \left.\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial y}\right|_{y=0}=\varphi(x),\qquad \int_0^\pi u^2(x,\ 1)\,dx\leqslant M^2$$

*и пусть мы знаем, что*

$$\int_0^\pi [\varphi^{(k)}(x)-\varphi(x)]^2\,dx=\varepsilon_k^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

*Тогда $u^{(k)}(x,\ y)$ сходится к $u(x,\ y)$ равномерно вместе со всеми своими производными до любого фиксированного порядка внутри любой полосы $|y|\leqslant Y<1$.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что

$$\int_0^\pi [u^{(k)}(x,\ 1)-u(x,\ 1)]^2\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{2\pi}[u^{(k)}(x,\ 1)]^2\,dx+2\left|\int_0^{2\pi}u^{(k)}(x,\ 1)\,u(x,\ 1)\,dx\right|+\int_0^\pi u^2(x,\ 1)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant M^2+2\sqrt{M^2}\sqrt{M^2}+M^2=4M^2.$$

Далее, по предыдущей теореме (заменив $M^2$ на $4M^2$)

$$\int_0^\pi [u^{(k)}(x,\ y)-u(x,\ y)]^2\,dx\leqslant y^2(2M)^{2y}\,\varepsilon_k^{2\,(1-y)}\leqslant y^2\cdot 4M^2\cdot\varepsilon_k^{2\,(1-Y)}.$$

Проинтегрируем это неравенство по $y$ от $-Y$ до $Y$ *):

$$\int_{-Y}^{Y}\int_0^\pi [u^{(k)}(x,\ y)-u(x,\ y)]^2\,dx\,dy\leqslant\frac{2Y^3}{3}\cdot 4M^2\varepsilon_k^{2\,(1-Y)}.$$

Мы видим, что $u^{(k)}(x,\ y)$ сходятся к $u(x,\ y)$ в среднем внутри прямоугольника $0\leqslant x\leqslant\pi$, $|y|<Y$. Из-за периодичности $u(x,\ y)$ по $x$ и благодаря ее нечетности сходимость в среднем имеет место

*) Очевидно, хотя мы на этом и не остановились, что $u(x,\ y)=-u(x,\ -y)$; $u^{(k)}(x,\ y)=-u^{(k)}(x,\ -y)$.

для любой конечной части полосы $|y|<Y$. Как мы знаем, для гармонических функций из сходимости в среднем вытекает равномерная сходимость внутри любой внутренней подобласти. Эта сходимость равномерна не только для самих $u(x, y)$, но и для их производных любого фиксированного порядка.

В классе ограниченных решений два решения мало отличаются друг от друга, если достаточно близки их начальные данные. Говорят, что здесь имеет место условная корректность — непрерывная зависимость от начальных данных, при условии, что все рассматриваемые решения удовлетворяют дополнительному решению — ограниченности.

Теперь мы остановимся на принципиальной возможности приближенного вычисления $u(x, y)$ по приближенным значения $\psi_N(x)$ для $\varphi(x)$. Не ограничивая общности, можно предполагать, что $\psi_N(x)$ является тригонометрическим многочленом

$$\psi_N(x)=\sum_{n=1}^{N} a_n^{(N)} \sin nx.$$

Пусть

$$\int_0^\pi [\psi_N(x)-\varphi(x)]^2\,dx=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{N}(a_n^{(N)}-a_n)^2+\frac{\pi}{2}\sum_{N+1}^{\infty} a_n^2\leqslant\varepsilon_N.$$

Кроме того, предположим, что

$$\int_0^\pi u^2(x,\ 1)\,dx=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{n^2}\operatorname{sh}^2 n\leqslant M^2.$$

Гармонические функции, построенные по нулевым начальным значениям $u(x, 0)$ и по значениям $\psi_N(x)$ для начальных значений производных по $y$

$$\tilde{u}_N(x,\ y)=\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n^{(N)}}{n}\operatorname{sh} ny\cdot\sin nx,$$

не обязаны быть равномерно ограниченными при $|y|\leqslant 1$, и поэтому могут не образовать сходящейся последовательности.

Мы начнем с «регуляризации» приближенных значений $\psi_N(x)$ для начальных данных. Положим

$$\bar{\psi}_N(x)=\sum_{n=1}^{N}\bar{a}_n^{(N)}\sin nx,$$

где $\bar{a}_n^{(N)}$ мы выберем так, чтобы они удовлетворяли неравенству

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{\left[\bar{a}_n^{(N)}\right]^2}{n^2}\operatorname{sh}^2 n\leqslant M^2$$

и при этом условии давали минимальное значение выражению

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(a_n^{(N)}-\bar{a}_n^{(N)}\right)^2.$$

Существование таких $\bar{a}_n^{(N)}$ не вызывает сомнения, так как речь идет о минимуме непрерывной функции $N$ переменных в конечной области $N$-мерного пространства.

Если бы мы положили $\bar{a}_n^{(N)}=a_n$ $(n=1, 2, \ldots, N)$, то неравенство

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{\left[\bar{a}_n^{(N)}\right]^2}{n^2}\operatorname{sh}^2 n\leqslant M^2$$

было бы выполнено и, кроме того, мы имели бы

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{N}\left[a_n^{(N)}-\bar{a}_n^{(N)}\right]^2=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{N}\left[a_n^{(N)}-a_n\right]^2\leqslant\varepsilon_N$$

(так поступить на самом деле мы не можем, так как $a_n$ нам неизвестны). Отсюда вытекает, что для $\bar{a}_n^{(N)}$, дающих минимум выражению $\frac{\pi}{2}\sum\limits_{n=1}^{N}\left[a_n^{(N)}-\bar{a}_n^{(N)}\right]^2$, этот минимум не будет превосходить $\varepsilon_N$, так как в допустимой области есть точка, в которой значение минимизируемого выражения не больше $\varepsilon_N$. Мы теперь уже знаем, что

a) $$\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{N}\left[a_n^{(N)}-\bar{a}_n^{(N)}\right]^2\leqslant\varepsilon_N,$$

b) $$\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{N}\left[a_n^{(N)}-a_n\right]^2\leqslant\varepsilon_N,$$

c) $$\frac{\pi}{2}\sum_{N+1}^{\infty}a_n^2\leqslant\varepsilon_N.$$

Из неравенств a), b) с помощью элементарного неравенства $(b-a)^2\leqslant 2\left(b^2+a^2\right)$ выводим

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{N}\left[\bar{a}_n^{(N)}-a_n\right]^2\leqslant 4\varepsilon_N.$$

Объединим полученный результат с c):

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{N}[\bar{a}_n^{(N)}-a_n]^2+\frac{\pi}{2}\sum_{N+1}^{\infty}a_n^2\leqslant 5\varepsilon_N,$$

$$\int_0^{\pi}[\bar{\psi}_N(x)-\varphi(x)]^2\,dx\leqslant 5\varepsilon_N.$$

Кроме того, по построению

$$\int_0^1 \bar{u}_N^2(x,\ 1)\,dx\leqslant M^2.$$

Здесь мы обозначили

$$\bar{u}_N(x,\ y)=\sum_{n=1}^{N}\frac{\bar{a}_n^{(N)}}{n}\,\mathrm{sh}\,ny\cdot\sin nx,$$

$$\int_0^1 \bar{u}_N^2(x,\ 1)\,dx=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{\left[\bar{a}_n^{(N)}\right]^2}{n^2}\,\mathrm{sh}^2\,n.$$

По доказанному ранее, гармонические функции $\bar{u}_N(x,\ y)$ б при $|y|<1$ сходиться к $u(x,\ y)$, если $N\to\infty$, $\varepsilon_N\to 0$.

В заключение опишем вкратце, как могут быть найдены чения $\bar{a}_n^{(N)}$. Начнем с того, что выясним, какой из случаев:

I) $$\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{\left[a_n^{(N)}\right]^2}{n^2}\,\mathrm{sh}^2\,n\leqslant M^2,$$

II) $$\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{\left[a_n^{(N)}\right]^2}{n^2}\,\mathrm{sh}^2\,n> M^2$$

имеет место.

В случае I) достаточно положить

$$\bar{a}_n^{(N)}=a_n^{(N)}.$$

Тогда мы будем иметь

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{N}[a_n^{(N)}-\bar{a}_n^{(N)}]^2=0,$$

а меньших значений это выражение принимать не может.

В случае II ясно, что минимум

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{N}[a_n^{(N)}-\bar{a}_n^{(N)}]^2$$

будет достигаться для $\bar{a}_n^{(N)}$, лежащих на поверхности $N$-мерного эллипсоида

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{\left[\bar{a}_n^{(N)}\right]^2}{n^2}\operatorname{sh}^2 n = M^2.$$

Для отыскания условного экстремума воспользуемся множителем Лагранжа $\lambda_N$ и, составив выражение

$$\sum_{n=1}^{N}\left\{\left[a_n^{(N)}-\bar{a}_n^{(N)}\right]^2+\lambda_N\frac{\operatorname{sh}^2 n}{n^2}\left[\bar{a}_n^{(N)}\right]^2\right\},$$

приравняем к нулю его производную по $\bar{a}_n^{(N)}$:

$$2\left[a_n^{(N)}-a_n^{(N)}+\lambda_N\frac{\operatorname{sh}^2 n}{n^2}\bar{a}_n^{(N)}\right]=0.$$

Отсюда

$$\bar{a}_n^{(N)}=\frac{a_n^{(N)}}{1+\lambda_N\frac{\operatorname{sh}^2 n}{n^2}}.$$

Параметр $\lambda_N$ надо найти как решение уравнения

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{\left[\bar{a}_n^{(N)}\right]^2}{n^2}\operatorname{sh}^2 n = M^2.$$

Ясно, что существует, и притом единственное, положительное решение, так как левая часть является монотонно убывающей функцией $\lambda_N$ и меняется от $\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{\left[a_n^{(N)}\right]^2}{n^2}\operatorname{sh}^2 n > M^2$ до нуля при изменении $\lambda_N$ в пределах от нуля до плюс бесконечности.

Интересующий нас минимум достигается на положительном корне.

Это видно из того, что правые части равенств

$$\sum_{n=1}^{N}\left[\bar{a}_n^{(N)}-a_n^{(N)}\right]^2=\sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda_N^2}{\left(1+\lambda_N\frac{\operatorname{sh}^2 n}{n^2}\right)^2}\left[a_n^{(N)}\right]^2\frac{\operatorname{sh}^4 n}{n^4},$$

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{\left[\bar{a}_n^{(N)}\right]^2}{n^2}\operatorname{sh}^2 n = M^2=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\left(1+\lambda_N\frac{\operatorname{sh}^2 n}{n^2}\right)^2}\cdot\frac{\left[a_n^{(N)}\right]^2}{n^2}\operatorname{sh}^2 n$$

уменьшатся, если при отрицательном $\lambda_N$ сменить знак.

Мы показали принципиальную возможность решения некорректной задачи, если нам известно, что интересующее нас решение действительно существует и принадлежит некоторому множеству решений, для которого имеет место «условная корректность».

На изложении эффективного технологического процесса решения некорректных задач мы останавливаться не будем. Отметим только, что обычно этот процесс состоит в замене исходной задачи близкой к ней, но уже корректной. Решение этой близкой (регуляризированной) задачи обычно оказывается мало отличающимся от разыскиваемого решения, принадлежащего некоторому классу «условной корректности».

В этом параграфе мы кратко остановились на обсуждении постановки типичной «некорректной» задачи. Цель этого обсуждения — более выпукло оттенить современное содержание понятия корректности и обратить внимание на сравнительно новую и бурно развивающуюся область математической физики. К сожалению, мы не можем здесь останавливаться на обзоре методов решения «некорректных» или «условно корректных» задач, которым посвящена обширная литература. См., например, [11].

# *Глава* IV

●

# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И МЕТОД ФУРЬЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

## § 26. Система обыкновенных дифференциальных уравнений

Изучение формул для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами при помощи соображений, которые будут использоваться для сбоснования метода Фурье. Интеграл Дюамеля и преобразование Лапласа. Частотная характеристика. Формулировка теоремы об обращении преобразования Лапласа и ее применение для представления решения в виде суммы экспонент.

Мы приступаем к изучению теории метода Фурье на примере его приложения к смешанным задачам для гиперболических систем с двумя независимыми переменными $x$, $t$. Этот метод является перенесением на более сложный случай известного приема Эйлера интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Прием Эйлера состоит в отыскании у системы $\frac{du}{dt} - Au = 0$ частных решений $u = e^{\lambda_i t} v_i$ и в конструировании произвольного решения из этих частных. Мы сейчас опускаем некоторые известные видоизменения этого приема, возникающие в случае, когда характеристическое уравнение $\det \| A - \lambda E \| = 0$ имеет кратные корни.

С методом Фурье для уравнений с частными производными мы уже знакомились во вводной части этой книги (гл. 1, § 7). Там были разобраны в качестве примеров задача Дирихле для уравнения Лапласа и простейшая гиперболическая система — уравнения акустики. В этой главе мы построим теорию метода Фурье для гиперболических систем с двумя независимыми переменными $x$, $t$. Подробно будет рассмотрен случай двух уравнений. В случае систем большего порядка схема теории остается той же самой, но результаты могут быть несколько другими. Дело в том, что далеко не всегда любое решение представимо в виде суммы частных решений типа стоячих волн. Хотя в этой главе будет разобран только один пример неполноты системы стоячих волн в случае, когда собственных функций вообще нет, я думаю, что из приведенной теории должно быть ясно, в каких конкретных случаях полнота имеет место, а в каких нет.

Мы построим теорию метода Фурье, основываясь на технике преобразования Лапласа. Чтобы сделать все выводы более прозрачными, опишем сначала идею теории в случае обыкновенных дифференциальных уравнений.

Прежде чем давать формальное определение, разберем наводящие соображения, поясняющие смысл процедуры, с помощью которой определяется преобразование Лапласа.

Пусть $w(t)$ является решением системы

$$\frac{dw}{dt} - Aw = f(t)$$

с не зависящей от времени $t$ матрицей $A$, удовлетворяющим нулевым начальным данным $w(0) = 0$. Наряду с этой системой рассмотрим зависящее от параметра $t_0$ семейство $u(t, t_0)$ решений однородной системы

$$\frac{du}{dt} - Au = 0,$$

$$u|_{t=0} = f(t_0).$$

Утверждается, что

$$w(t) = \int_0^t u(t - t_0, t_0)\,dt_0.$$

Действительно,

$$\frac{dw}{dt} = u(0, t) + \int_0^t \frac{du(t - t_0, t_0)}{dt}\,dt_0 = f(t) + \int_0^t Au(t - t_0, t_0)\,dt_0 =$$

$$= f(t) + A\int_0^t u(t - t_0, t_0)\,dt_0 = f(t) + Aw(t).$$

Уравнение $\frac{dw}{dt} - Aw = f(t)$ выполнено. Выполнение для $w$ начального условия $w(0) = 0$ очевидно.

Формула

$$w(t) = \int_0^t u(t - t_0, t_0)\,dt_0,$$

представляющая решение неоднородной задачи через решения однородных, называется *интегралом Дюамеля*.

Рассмотрим теперь случай специальной правой части вида $f(t) = e^{\lambda t}\varphi$ ($\varphi$ — постоянный вектор). Решение $u(t, t_0)$ однородной задачи

$$\frac{du}{dt} - Au = 0,$$

$$u|_{t=0} = f(t_0) = e^{\lambda t_0}\varphi$$

зависит от $t_0$ простым явным образом:

$$u(t, t_0) = e^{\lambda t_0} u(t, 0).$$

В дальнейшем мы будем этим пользоваться, опуская в $u(t, 0)$ второй (нулевой) аргумент и записывая решение $w$ неоднородной задачи

$$\frac{dw}{dt} - Aw = e^{\lambda t}\varphi,$$

$$w|_{t=0} = 0$$

формулой

$$w(t) = \int_0^t u(t-t_0)\, e^{\lambda t_0}\, dt_0 = e^{\lambda t}\int_0^t u(t-t_0)\, e^{-\lambda(t-t_0)}\, dt_0.$$

Входящая в этот интеграл вектор-функция $u(t)$ удовлетворяет следующим уравнениям и начальным условиям:

$$\frac{du}{dt} - Au = 0,$$

$$u|_{t=0} = \varphi.$$

Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что решение может быть, как правило, представлено в виде линейной комбинации экспонент $e^{k_i t}$, где $k_i$ являются корнями характеристического уравнения

$$\det \| kE - A \| = 0.$$

Слова «как правило» означают, что некоторые уточнения должны быть внесены при наличии кратных корней у этого уравнения. Из представления решения в виде комбинации экспонент следует, что если $\operatorname{Re}\lambda > \max\limits_i \operatorname{Re} k_i$, то

$$\int_0^t u(t-t_0)\, e^{-\lambda(t-t_0)}\, dt_0 = -\int_{t_0=0}^{t_0=t} u(t-t_0)\, e^{-\lambda(t-t_0)}\, d(t-t_0) =$$

$$= -\int_t^0 u(\tau)\, e^{-\lambda\tau}\, d\tau = \int_0^t u(\tau)\, e^{-\lambda\tau}\, d\tau \xrightarrow[t\to\infty]{} \int_0^\infty u(t)\, e^{-\lambda t}\, dt = v(\lambda),$$

т. е. последний интеграл сходится.

(Задача. Докажите сходимость интеграла при том же предположении $\operatorname{Re}\lambda > \max\limits_i \operatorname{Re} k_i$ в случае, если среди корней $k_i$ имеются кратные.)

В этом случае говорят, что «вынуждающая сила» $e^{\lambda t}\varphi$ раскачивает систему со своей «частотой». Через $v(\lambda)$ мы обозначили устанавливающуюся при $t \to \infty$ амплитуду колебаний. Слово «частота» мы взяли в кавычки, потому что понятие частоты $\omega$, строго говоря, определено лишь для чисто мнимых $\lambda = i\omega$. Для простоты и большей наглядности мы будем некоторое время предполагать, что $\lambda = i\omega$ у нас чисто мнимое и что $\max\limits_i (\operatorname{Re} k_i) <$

$< -p < 0$. Потом мы покажем, как обобщить нужные нам факты на тот случай, если неравенство $\max_i (\operatorname{Re} k_i) < -p$ не выполнено. Итак, рассматривая решение системы

$$\frac{dw}{dt} - Aw = e^{i\omega t}\varphi,$$
$$w|_{t=0} = 0,$$

мы имеем для него формулу

$$w(t) = e^{i\omega t}\int_0^t u(t-t_0)\, e^{-i\omega(t-t_0)}\, dt_0.$$

При $t \to \infty$

$$\int_0^t u(t-t_0)\, e^{-i\omega(t-t_0)}\, dt_0 \to v(i\omega) = \int_0^\infty u(t)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

Вектор-функция $v(i\omega)$ от частоты $\omega$ носит название *частотной характеристики системы* $\frac{du}{dt} - Au = 0$, а представляющий ее интеграл $\int_0^\infty u(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$ называется *преобразованием Лапласа от* $u(t)$.

Рассмотрим сейчас в качестве совсем простого частного примера случай системы, состоящей всего из одного уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - ku = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dw}{dt} - kw = \varphi e^{i\omega t}, \\ w|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Для $u(t)$, $w(t)$ могут быть выписаны следующие явные формулы:

$$u(t) = \varphi e^{kt}, \qquad w = \frac{\varphi}{i\omega - k}\, e^{i\omega t} - \frac{\varphi}{i\omega - k}\, e^{kt}.$$

Так как мы предполагаем, что $\operatorname{Re} k < 0$, то в формуле для $w$ второе слагаемое стремится к нулю при $t \to \infty$. Коэффициент при первом слагаемом — функция $v(i\omega) = \frac{\varphi}{i\omega - k}$ является частотной характеристикой и может быть вычислена в виде интеграла

$$v(i\omega) = \int_0^\infty u(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_0^\infty \varphi e^{kt} e^{-i\omega t}\, dt = \frac{\varphi}{i\omega - k}.$$

В этом примере частотная характеристика — это просто скалярная функция от $\omega$ или, если угодно — одномерная вектор-функция. Оказывается, что если для довольно произвольной функции

$u(t)$ известна ее частотная характеристика

$$v(i\omega)=\int_0^\infty u(t)\,e^{-i\omega t}\,dt,$$

то сама функция $u(t)$ может быть восстановлена по этой частотной характеристике. Имеет место следующая *теорема об обращении преобразования Лапласа*:

Теорема. *Пусть функция $u(t)$, определенная при $0\leqslant t<\infty$, удовлетворяет неравенствам*

$$|u(t)|<Me^{-pt},\quad |u'(t)|<Me^{-pt}\qquad (p>0)$$

*и пусть, кроме того, при $0\leqslant t_i\leqslant 2T$*

$$|u'(t_1)-u'(t_2)|\leqslant M\sqrt{|t_1-t_2|}.$$

*Определим преобразование Лапласа $v(i\omega)$ формулой*

$$v(i\omega)=\int_0^\infty e^{-i\omega t}u(t)\,dt.$$

*Тогда исходная функция $u(t)$ может быть восстановлена по $v(i\omega)$ с помощью равенства*

$$u(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b}v(i\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega+O\left(\frac{1}{b}\right).$$

Оценка константы в $O\left(\frac{1}{b}\right)$ равномерна для всех $t$ из отрезка $0<t_0\leqslant t\leqslant T$ и для всех функций $u(t)$, удовлетворяющих неравенствам в условии теоремы. Эта теорема лишь деталями формулировки отличается от общеизвестной теоремы об обращении преобразования Лапласа: здесь на функцию $u(t)$ накладываются несколько более сильные ограничения и получается более точная асимптотика для интеграла. Доказательство теоремы будет приведено в следующем параграфе, а пока вернемся к рассмотрению частотной характеристики $v(i\omega)$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{du}{dt}-Au=0$, $u|_{t=0}=\varphi$. Оказывается, что каждая компонента этой частотной характеристики $v(i\omega)$, является рациональной функцией $i\omega$, имеющей полюсы в точках $k$, удовлетворяющих характеристическому уравнению

$$\det\|A-kE\|=0.$$

Докажем это. Наряду с преобразованием Лапласа $u(t)$

$$v(i\omega)=\int_0^\infty e^{-i\omega t}u(t)\,dt$$

рассмотрим еще преобразование Лапласа от $Au(t)$ и от $\frac{du(t)}{dt}$:

$$\int_0^\infty e^{-i\omega t} Au(t)\,dt = A\int_0^\infty e^{-i\omega t} u(t)\,dt = Av(i\omega),$$

$$\int_0^\infty e^{-i\omega t}\frac{du}{dt}\,dt = [u(t)e^{-i\omega t}]_0^\infty - \int_{t=0}^{t=\infty} u(t)\,de^{-i\omega t} =$$

$$= -u(0) + i\omega\int_0^\infty u(t)e^{-i\omega t}\,dt = -\varphi + i\omega v(i\omega).$$

Отсюда

$$\int_0^\infty e^{-i\omega t}\left(\frac{du}{dt} - Au\right)dt = -\varphi + i\omega v(i\omega) - Av(i\omega).$$

Так как $\frac{du}{dt} - Au = 0$, то $v(i\omega)$ удовлетворяет системе линейных уравнений

$$(A - i\omega E)v + \varphi = 0,$$

которая разрешима, если только $i\omega$ не является корнем характеристического уравнения $\det\|A - kE\| = 0$. Сформулированное утверждение про $v(i\omega)$ следует из вида этой системы. Если все корни характеристического уравнения простые, то $v(i\omega)$, очевидно, допускает представление в виде

$$v(i\omega) = \sum_j \frac{1}{i\omega - k_j}\psi_j.$$

Воспользуемся теперь теоремой об обращении преобразования Лапласа $(0 < t_0 \leqslant t \leqslant T)$:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{+b} v(i\omega)e^{i\omega t}\,d\omega + O\left(\frac{1}{b}\right) = \sum_j\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{+b}\frac{e^{i\omega t}}{i\omega - k_j}\,d\omega\right)\psi_j + O\left(\frac{1}{b}\right).$$

Немного ниже мы покажем, что при $b \to \infty$ и $\operatorname{Re} k_j < 0$, $t \geqslant t_0 > 0$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{+b}\frac{e^{i\omega t}}{i\omega - k_j}\,d\omega = e^{k_j t} + O\left(\frac{1}{b}\right). \tag{1}$$

Это дает нам право утверждать, что

$$u(t) = \sum_j e^{k_j t}\psi_j + O\left(\frac{1}{b}\right).$$

В силу произвольности $b$ отсюда получается представление

$$u(t)=\sum_j e^{k_j t}\psi_j$$

решения системы в виде комбинации экспонент. Тем самым знание частотной характеристики $v(i\omega)$ позволяет найти собственные «частоты $k_j$» и вычислить векторные коэффициенты $\psi_j$ разложения решения по этим частотам, то есть собственные векторы матрицы $A$.

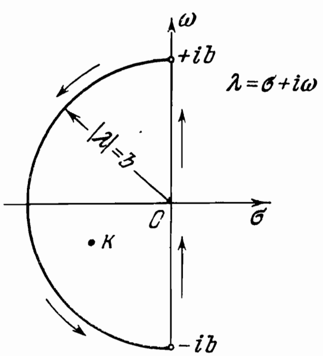


Рис. 69.

Докажем соотношение (1). Для этого рассмотрим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{+b}\frac{e^{i\omega t}}{i\omega-k}\,d\omega, \quad \text{где} \quad \operatorname{Re} k<0.$$

Изобразим путь интегрирования в виде отрезка $-b\leqslant\omega\leqslant b$ на комплексной плоскости $\lambda=i\omega$ и дополним этот путь полуокружностью $|\lambda|=b$ $(\operatorname{Re}\lambda<0)$ так, как это сделано на рис. 69. Интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{e^{\lambda t}}{\lambda-k}\,d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{+b}\frac{e^{i\omega t}}{i\omega-k}\,d\omega+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{|\lambda|=b\\ \operatorname{Re}\lambda<0}}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda-k}\,d\lambda$$

может быть вычислен точно с помощью вычетов. Он отличается от нашего исходного на интеграл по полуокружности, про который будет показано, что он при $b\to\infty$ является величиной порядка $O\left(\frac{1}{b}\right)$. При достаточно большом $b$ полюс $\lambda=k$ лежит внутри контура интегрирования и имеет вычет $e^{kt}$. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{e^{\lambda t}}{\lambda-k}\,d\lambda=e^{kt}.$$

Для оценки интеграла по полуокружности заметим, что

$$\lambda=b(-\sin\varphi+i\cos\varphi), \qquad 0<\varphi\leqslant\pi,$$

$$|d\lambda|=b\,|d\varphi|, \qquad |e^{\lambda t}|=e^{-bt\sin\varphi}.$$

Выбрав достаточно большие $b$, можно считать, что на полуокружности $1/|\lambda-k|<2/b$.

Поэтому

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{|\lambda|=b\\ \operatorname{Re}\lambda<0}}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda-k}\,d\lambda\right|<\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}e^{-bt\sin\varphi}\,d\varphi$$

и нам остается показать, что $\int\limits_0^{\pi} e^{-c\sin\varphi}\,d\varphi = 2\int\limits_0^{\pi/2} e^{-c\sin\varphi}\,d\varphi = O\left(\frac{1}{c}\right)$, где обозначено $c = bt$. Представим этот положительный интеграл в виде

$$\int\limits_0^{\pi/2} e^{-c\sin\varphi}\,d\varphi = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{e^{-c\sin\varphi}\cos\varphi}{\cos\varphi}\,d\varphi + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} e^{-c\sin\varphi}\,d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{\pi/4} \frac{e^{-c\sin\varphi}\,d(\sin\varphi)}{\sqrt{2}/2} + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} e^{-c\frac{\sqrt{2}}{2}}\,d\varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{\sqrt{2}}}\right) + \frac{\pi}{4}e^{-\frac{c}{\sqrt{2}}} = O\left(\frac{1}{c}\right) = O\left(\frac{1}{bt}\right) = O\left(\frac{1}{b}\right),$$

так как по предположению $t \geqslant t_0 > 0$. Эта оценка в курсе теории функций комплексного переменного часто носит название леммы Жордана.

Мы разобрали подробно случай, когда характеристическое уравнение не имеет кратных корней. Случаю кратных корней посвящена следующая задача.

З а д а ч а. В случае, если характеристический корень $k_j$ матрицы $A$ имеет кратность $r_j$, функция $v(i\omega)$ может быть представлена в виде

$$v(i\omega) = \sum_j \left[\sum_{s=1}^{r_j} \frac{\varphi_{js}}{(i\omega - k_j)^s}\right].$$

Вычислите (в предположении, что $\operatorname{Re} k_j < 0$) интегралы

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}\,d\omega}{(i\omega - k_j)^\sigma}.$$

Результат используйте для вывода представления решения $u(t)$.

Изучение метода Фурье для уравнений в частных производных будет проводиться по следующей схеме. Сначала с помощью преобразования Лапласа решения системы уравнений с частными производными будет построена «частотная» характеристика этой системы, являющаяся аналитической функцией параметра $\lambda$ («частоты»). Затем аналитическая природа этой «частотной характеристики» будет тщательно изучена, будут выделены ее полюсы, определены в их окрестности главные части лорановского разложения. С помощью теоремы об обращении преобразования Лапласа решение будет аппроксимировано контурным интегралом, который в свою очередь будет вычислен в виде конечной суммы по полюсам. Тщательное выполнение этой программы приведет нас к теореме о возможности как угодно точной аппроксимации любого решения смешанной задачи для гиперболической системы конечной суммой специальных решений — «стоячих волн».

## § 27. Теорема об обращении преобразования Лапласа

Формулировка теорем об обращении преобразования Лапласа и ее обобщение на растущие (не слишком быстро) функции. Первые три леммы и вытекающие из них следствия приводят к важному тождеству с тригонометрическим интегралом. Обсуждается характер остаточного члена в этом тождестве. Окончание доказательства теоремы.

Приведем формулировку теорем, которые будут доказаны в этом параграфе.

Теорема 1. *Пусть функция $u(t)$, определенная при $0 \leqslant t < \infty$, удовлетворяет неравенствам*

$$|u(t)| < Me^{-pt},$$
$$|u'(t)| < Me^{-pt}, \quad p > 0,$$

*и пусть, кроме того, при $0 \leqslant t_i \leqslant 2T$*

$$|u'(t_1) - u'(t_2)| \leqslant N(T) \cdot \sqrt{|t_1 - t_2|}.$$

*Тогда при $0 < t_0 \leqslant t \leqslant T$ выполнено неравенство*

$$\left| u(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{+b} v(i\omega) e^{i\omega t} \, d\omega \right| < \frac{M_1}{b}.$$

*Здесь $v(i\omega)$ — преобразование Лапласа функции $u(t)$:*

$$v(i\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t} u(t) \, dt,$$

*а постоянная $M_1$ зависит лишь от $p$, $t_0$, $T$, $M$, $N(T)$.*

Теорема 2. *Пусть функция $u(t)$, определенная при $0 \leqslant t < \infty$, удовлетворяет неравенствам*

$$|u(t)| < Me^{Kt},$$
$$|u'(t)| < Me^{Kt},$$
$$|u'(t_1) - u'(t_2)| \leqslant N(T) \sqrt{|t_1 - t_2|} \quad \text{для } 0 \leqslant t_i \leqslant 2T.$$

*Тогда при $0 < t_0 \leqslant t \leqslant T$ справедливо неравенство*

$$\left| u(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} v(\lambda) e^{\lambda t} \, d\lambda \right| < \frac{M_1}{b}, \quad a > K,$$

*где $v(\lambda) = \int_0^\infty u(t) e^{-\lambda t} \, dt$ — преобразование Лапласа функции $u(t)$, а постоянная $M_1$ зависит лишь от $K$, $t_0$, $T$, $M$ и $N(T)$.*

Легко видеть, что теорема 2 вытекает из теоремы 1. Действительно, пусть функция $u(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Введем функцию $\tilde{u}(t) = e^{-at} u(t)$. Тогда $|\tilde{u}(t)| = |u(t)| e^{-at} <$

$< Me^{-(a-K)t} = Me^{-pt}$, где обозначено $p = a - K > 0$. Проверим, что функция $\tilde{u}(t)$ удовлетворяет остальным двум неравенствам в условии теоремы 1:

$$|\tilde{u}'(t)| = e^{-at}\,|u'(t) - au(t)| < M(1 + |a|)\,e^{-pt} = \tilde{M}e^{-pt},$$

$$\begin{aligned}|\tilde{u}'(t_1) - \tilde{u}'(t_2)| &= |e^{-at_1}[u'(t_1) - au(t_1)] - e^{-at_2}[u'(t_2) - au(t_2)]| \leqslant \\ &\leqslant |(e^{-at_1} - e^{-at_2})[u'(t_1) - au(t_1)] + \\ &+ e^{-at_2}[u'(t_1) - u'(t_2) - au(t_1) + au(t_2)]| \leqslant \\ &\leqslant A(T)\cdot|t_1 - t_2| + B(T)\cdot\sqrt{|t_1 - t_2|} \leqslant \tilde{N}(T)\cdot\sqrt{|t_1 - t_2|}\end{aligned}$$

при $0 \leqslant t_i \leqslant 2T$. Функция $\tilde{u}(t)$ удовлетворяет, таким образом, всем условиям теоремы 1. Следовательно, если положить

$$\tilde{v}(i\omega) = \int_0^\infty \tilde{u}(t)\,e^{-i\omega t}\,dt = \int_0^\infty u(t)\,e^{-(a+i\omega)t}\,dt,$$

то имеет место формула

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t) = u(t)\,e^{-at} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{+b} \tilde{v}(i\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega + O\left(\frac{1}{b}\right) = \\ &= \frac{e^{-at}}{2\pi i}\int_{a-ib}^{a+ib} \tilde{v}(i\omega)\,e^{(a+i\omega)t}\,d(a+i\omega) + O\left(\frac{1}{b}\right).\end{aligned}$$

Положим $\lambda = a + i\omega$, $v(\lambda) = v(a + i\omega) = \tilde{v}(i\omega)$. Так как при $t_0 \leqslant \leqslant t \leqslant T$ выражение $e^{-at}$ ограничено как сверху, так и снизу, то из последней формулы после сокращения на $e^{-at}$ вытекает заключение теоремы 2.

В дальнейшем мы будем пользоваться той формой обращения преобразования Лапласа, которая дается в теореме 2.

Приступим к доказательству теоремы 1. Мы начнем с нескольких подготовительных лемм о тригонометрических интегралах.

Лемма 1 *При $t > 0$, $b > 0$ выполнено неравенство*

$$\left|\int_t^\infty \frac{\sin b\xi}{\xi}\varphi(\xi)\,d\xi\right| \leqslant \frac{1}{b}\left[\frac{\sup\limits_{\xi > t}|\varphi(\xi)|}{t} + \int_t^\infty \frac{|\varphi(\xi)|}{\xi^2}\,d\xi + \frac{1}{t}\int_t^\infty |\varphi'(\xi)|\,d\xi\right].$$

*(Про $\varphi(\xi)$ предполагается, что она имеет непрерывную производную $\varphi'(\xi)$ и конечную правую часть в выписанном неравенстве.)*

Для доказательства леммы преобразуем интегрированием по частям следующий интеграл $(B > t)$:

$$\begin{aligned}\int_t^B \frac{\sin b\xi}{\xi}\,\varphi(\xi)\,d\xi &= -\frac{1}{b}\int_{\xi=t}^{\xi=B} \frac{\varphi(\xi)}{\xi}\,d\cos b\xi = \\ &= \frac{1}{b}\left[\frac{\varphi(t)\cos bt}{t} - \frac{\varphi(B)\cos bB}{B} - \int_t^B \cos b\xi\,\frac{\varphi(\xi)}{\xi^2}\,d\xi + \int_t^B \cos b\xi\,\frac{\varphi'(\xi)}{\xi}\,d\xi\right],\end{aligned}$$

а затем оценим слагаемые полученной суммы:

$$\left|\int_t^B \frac{\sin b\xi}{\xi}\varphi(\xi)\,d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{b}\left\{\sup_{\xi>t}|\varphi(\xi)|\cdot\left[\frac{1}{t}+\frac{1}{B}\right]+\int_t^B \frac{|\varphi(\xi)|}{\xi^2}\,d\xi+\frac{1}{t}\int_t^B|\varphi'(\xi)|\,d\xi\right\}.$$

Если существуют

$$\sup_{\xi\geqslant t}|\varphi(\xi)|,\qquad \int_t^\infty \frac{|\varphi(\xi)|}{\xi^2}\,d\xi,\qquad \int_t^\infty |\varphi'(\xi)|\,d\xi,$$

то из приведенного неравенства следует, что

$$\left|\int_{B_1}^{B_2} \frac{\sin b\xi}{\xi}\varphi(\xi)\,d\xi\right| < \varepsilon(B_1)\qquad (B_2>B_1),$$

где $\varepsilon(B_1)\to 0$ при $B_1\to\infty$. Это последнее утверждение эквивалентно выполнению критерия Коши для проверки сходимости интеграла

$$\int_t^\infty \frac{\sin b\xi}{\xi}\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Итак, этот интеграл сходится. Переходя к пределу при $B\to\infty$ в обеих частях неравенства для $\int_t^B \frac{\sin b\xi}{\xi}\varphi(\xi)\,d\xi$, приходим к утверждению леммы.

Первое следствие из леммы 1:

$$\left|\int_{-t}^{+t} \frac{\sin b\xi}{\xi}\,d\xi-\pi\right| \leqslant \frac{1}{b}\cdot\frac{4}{t}.$$

Действительно, из курса математического анализа известно, что $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin b\xi}{\xi}d\xi=\pi$, а из леммы 1, положив $\varphi(\xi)=1$, получим

$$\left|\int_t^\infty \frac{\sin b\xi}{\xi}\,d\xi\right| = \left|\int_{-\infty}^{-t} \frac{\sin b\xi}{\xi}\,d\xi\right| \leqslant \frac{1}{b}\left[\frac{1}{t}+\int_t^\infty \frac{d\xi}{\xi^2}+\frac{1}{t}\int_t^\infty 0\cdot d\xi\right] = \frac{2}{bt}.$$

Теперь сформулированное следствие очевидно.

Второе следствие из леммы 1. Если при $t\geqslant 0$

$$|u(t)|\leqslant Me^{-pt},\qquad |u'(t)|\leqslant Me^{-pt},$$

то для $t\geqslant t_0>0$

$$\int_t^\infty \frac{\sin b\xi}{\xi}u(t+\xi)\,d\xi = O\left(\frac{1}{b}\right)$$

с остаточным членом $\left|O\left(\frac{1}{b}\right)\right| < \frac{1}{b}\cdot\frac{M}{t_0}\left[2+\frac{1}{p}\right]$.

В самом деле, по лемме 1:

$$\left|\int_t^\infty \frac{\sin b\xi}{\xi} u(t+\xi)\,d\xi\right| \leqslant \frac{1}{b}\left[\frac{Me^{-2pt}}{t} + Me^{-pt}\int_t^\infty \frac{e^{-p\xi}}{\xi^2}\,d\xi + \frac{Me^{-pt}}{t}\int_t^\infty e^{-p\xi}\,d\xi\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{b}\left[\frac{M}{t} + M\int_t^\infty \frac{d\xi}{\xi^2} + \frac{M}{t}\int_t^\infty e^{-p\xi}\,d\xi\right] =$$

$$= \frac{1}{b}\left[\frac{2M}{t} + \frac{M}{pt}e^{-pt}\right] < \frac{1}{b}\,\frac{M}{t_0}\left[2+\frac{1}{p}\right] = O\left(\frac{1}{b}\right).$$

Следствие обосновано.

Лемма 2. *Пусть при* $-t \leqslant \xi \leqslant t$ *выполнены неравенства* $|f(\xi)| < M$, $|f'(\xi)| < \dfrac{M}{\sqrt{|\xi|}}$; *тогда*

$$\int_{-t}^{+t} \sin b\xi\, f(\xi)\,d\xi < \frac{2M+4M\sqrt{t}}{b}.$$

Доказательство:

$$\int_{-t}^{+t} \sin b\xi\, f(\xi)\,d\xi = -\frac{1}{b}\int_{\xi=-t}^{\xi=t} f(\xi)\,d\cos b\xi =$$

$$= -\frac{\cos bt}{b}\,[f(t)-f(-t)] + \frac{1}{b}\int_{-t}^{+t} \cos b\xi\cdot f'(\xi)\,d\xi,$$

$$\left|\int_{-t}^{+t} \sin b\xi\, f(\xi)\,d\xi\right| < \frac{2M}{b} + \frac{1}{b}\,M\cdot 2\int_0^t \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = \frac{2M+4M\sqrt{t}}{b}.$$

Лемма 3. *Пусть при* $|\xi| < t$ *выполнены неравенства:* $|\varphi(\xi)| < M$, $\varphi'(\xi)| < M$,

$$|\varphi'(\xi_1) - \varphi'(\xi_2)| \leqslant M\sqrt{|\xi_1-\xi_2|}.$$

*Тогда*

$$\left|\int_{-t}^{+t} \frac{\sin b\xi}{\xi}\,\varphi(\xi)\,d\xi - \pi\varphi(0)\right| < \frac{2M+4M\sqrt{t}+\dfrac{4M}{t}}{b}.$$

Доказательство. Построим функцию

$$f(\xi) = \frac{\varphi(\xi)-\varphi(0)}{\xi}$$

и докажем, что $|f(\xi)| < M$, $|f'(\xi)| < \dfrac{M}{\sqrt{|\xi|}}$. Действительно,

$$f(\xi) = \frac{\varphi(\xi)-\varphi(0)}{\xi} = \varphi'(\theta\xi), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

Отсюда

$$|f(\xi)| = |\varphi'(\theta\xi)| < M.$$

Далее:

$$f'(\xi)=\frac{\xi\varphi'-[\varphi(\xi)-\varphi(0)]}{\xi^2}=\frac{\xi\varphi'(\xi)-\xi\varphi'(\theta\xi)}{\xi^2}=\frac{\varphi'(\xi)-\varphi'(\theta\xi)}{\xi}.$$

Поэтому

$$|f'(\xi)|=\frac{|\varphi'(\xi)-\varphi'(\theta\xi)|}{|\xi|}\leqslant\frac{M\sqrt{(1-\theta)|\xi|}}{|\xi|}\leqslant\frac{M}{\sqrt{|\xi|}}.$$

Применим теперь лемму 2:

$$\left|\int\limits_{-t}^{+t}\sin b\xi f(\xi)\,d\xi\right|=\left|\int\limits_{-t}^{+t}\frac{\sin b\xi}{\xi}\varphi(\xi)\,d\xi-\varphi(0)\int\limits_{-t}^{+t}\frac{\sin b\xi}{\xi}\,d\xi\right|<\frac{2M+4M\sqrt{t}}{b}.$$

Теперь остается лишь отметить, что по первому следствию из леммы 1

$$\left|\varphi(0)\int\limits_{-t}^{+t}\frac{\sin b\xi}{\xi}\,d\xi-\pi\cdot\varphi(0)\right|<\frac{1}{b}\cdot\frac{4M}{t}.$$

Доказательство леммы 3 завершено.

Следствие из леммы 3. *Пусть при* $t\geqslant 0$ *выполнены неравенства*

$$|u(t)|<Me^{-pt}\leqslant M,\qquad |u'(t)|<Me^{-pt}\leqslant M,$$

*а при* $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant 2T$ *оценка непрерывности* $u'(t)$:

$$|u'(t_2)-u'(t_1)|\leqslant M\sqrt{|t_2-t_1|}.$$

*Тогда для* $0<t_0\leqslant t\leqslant T$ *имеет место равенство*:

$$\int\limits_{-t}^{+t}\frac{\sin b\xi}{\xi}u(t+\xi)\,d\xi-\pi u(t)=O\left(\frac{1}{b}\right)$$

*с остаточным членом* $O\left(\frac{1}{b}\right)$ *таким, что*

$$\left|O\left(\frac{1}{b}\right)\right|<\frac{2M+4M\sqrt{T}+\frac{4M}{t_0}}{b}.$$

(Для вывода следствия из леммы 3 достаточно положить $\varphi(\xi)=u(t+\xi)$.) Объединяя это следствие со вторым следствием из леммы 1, мы получим для функций $u(t)$, удовлетворяющих всем сформулированным для них условиям, равенство

$$u(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-t}^{\infty}\frac{\sin b\xi}{\xi}u(t+\xi)\,d\xi+O\left(\frac{1}{b}\right),$$

где постоянная $c$ в оценке $\left|O\left(\frac{1}{b}\right)\right|<\frac{c}{b}$ зависит лишь от $M$, $p$, $t_0$, $T$: $c=c(M,p,t_0,T)$, если $0<t_0\leqslant t\leqslant T$. (Расширяя допустимый отрезок изменения $t$, например, путем приближения $t_0$ к нулю, мы будем увеличивать постоянную $c$ в этой оценке.)

Мы говорим в таком случае, что оценка остаточного члена $O\left(\frac{1}{b}\right)$ равномерна по всем функциям $u(t)$, удовлетворяющим оценкам

$$|u(t)| < Me^{-pt}, \qquad |u'(t)| < Me^{-pt}, \qquad t \geqslant 0,$$
$$|u'(t_2) - u'(t_1)| \leqslant M\sqrt{t_2 - t_1}, \qquad 0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 2T,$$

и для всех $t$ из фиксированного отрезка

$$0 < t_0 \leqslant t \leqslant T.$$

В курсах математического анализа часто доказывается, что если функция $g(\xi)$ такова, что:

I. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|g(\xi)|}{1+|\xi|}\, d\xi < \infty;$

II. $g(\xi)$ непрерывна при $\xi_0 - \Delta < \xi < \xi_0 + \Delta$ и имеет в этом интервале ограниченную вариацию, то для нее выполнено предельное соотношение

$$g(\xi_0) = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) \frac{\sin b(\xi - \xi_0)}{\xi - \xi_0}\, d\xi.$$

Из этого утверждения получается, что если положить

$$g(\xi) = \begin{cases} u(t+\xi) & \text{при} \quad \xi > -t, \\ 0 & \text{при} \quad \xi < -t, \end{cases}$$

то

$$u(t) = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-t}^{\infty} u(t+\xi) \frac{\sin b\xi}{\xi}\, d\xi.$$

Наложив на $u(t)$ более жесткие условия, мы сумели показать, что при $b \to \infty$ интеграл в правой части отличается от $u(t)$ на величину порядка $1/b$ равномерно для всех функций $u(t)$, удовлетворяющих этим предположениям, и для всех $t$ из некоторого фиксированного отрезка $0 < t_0 \leqslant t \leqslant T$.

Ограничение $t_0 > 0$ необходимо накладывать по следующей причине. Функция $g(\xi)$ имеет у нас график такого типа, который изображен на рис. 70. При $\xi = -t$ она, как правило, разрывна. Ясно, что сходимость непрерывных по $\xi_0$ функций

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin b(\xi - \xi_0)}{\xi - \xi_0} g(\xi)\, d\xi$$

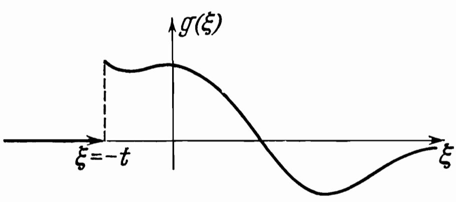


Рис. 70.

к функции $g(\xi_0)$ при $b \to \infty$ перестает быть равномерной в окрестности точек разрыва $g$. Именно поэтому точка разрыва $\xi = -t$ должна быть достаточно удалена от изучаемой точки $\xi = 0$, что и обеспечивается неравенством $0 < t_0 \leqslant t$.

Итак, мы доказали, что

$$u(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-t}^{\infty} \frac{\sin b\xi}{\xi} u(t+\xi)\, d\xi + O\left(\frac{1}{b}\right).$$

Теперь уже можно переходить к теореме об обращении преобразования Лапласа.

Доказательство теоремы 1.

Чтобы доказать эту теорему, достаточно убедиться в том, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{+b} v(i\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-t}^{\infty}\frac{\sin b\xi}{\xi}\,u(t+\xi)\,d\xi.$$

В интеграле, представляющем $v(i\omega)$, удобно в процессе доказательства обозначать переменную интегрирования не буквой $t$, а какой-либо другой буквой, например, $\tau$. Проведем выкладку, доказывающую нужное нам равенство:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{+b} v(i\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{+b} e^{i\omega t}\left(\int_{0}^{\infty} u(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau\right)d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{+b}\int_{0}^{\infty} u(\tau)\,e^{i\omega(t-\tau)}\,d\tau\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{+b}\int_{-t}^{\infty} u(t+\xi)\,e^{-i\omega\xi}\,d\xi\,d\omega.$$

Последний интеграл равномерно сходится и, следовательно, допускает перемену порядка интегрирования:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{+b} v(i\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{+b}\int_{-t}^{\infty} u(t+\xi)\,e^{-i\omega\xi}\,d\xi\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{\infty} u(t+\xi)\left(\int_{-b}^{+b} e^{-i\omega\xi}\,d\omega\right)d\xi.$$

Внутренний интеграл может быть вычислен:

$$\int_{-b}^{+b} e^{-i\omega\xi}\,d\omega=-\left[\frac{e^{-i\omega\xi}}{i\xi}\right]_{\omega=-b}^{\omega=b}=\frac{e^{ib\xi}-e^{-ib\xi}}{i\xi}=2\,\frac{\sin b\xi}{\xi}.$$

Окончательно:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{+b} v(i\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-t}^{\infty} u(t+\xi)\,\frac{\sin b\xi}{\xi}\,d\xi.$$

Доказательство теоремы завершено. Правило для обращения преобразования Лапласа обосновано.

## § 28. Преобразование Лапласа для решений гиперболической системы

Описание постановки обратимых смешанных задач для гиперболической системы. Существование решений и оценки для них изучались в § 20. Преобразование Лапласа $v_l(x, \lambda)$ решения при достаточно больших $\operatorname{Re}\lambda$. Его аналитичность. Обыкновенные дифференциальные уравнения, которым оно удовлетворяет. Оценки. Использование обратимости. Изложение схемы дальнейшего изучения. Основные свойства $v_l(x, \lambda)$, которые будут обоснованы в следующих параграфах, и получение с их помощью формулы обращения, содержащей интеграл по замкнутому контуру.

Мы будем изучать теорию метода Фурье на примере системы двух гиперболических уравнений, записанных в каноническом виде

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+k_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+m_{11}(x)\,u_1+m_{12}(x)\,u_2=0,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t}-k_2\frac{\partial u_2}{\partial x}+m_{21}(x)\,u_1+m_{22}(x)\,u_2=0.$$

Предполагается, что у этой системы одна характеристика имеет положительный наклон, а другая отрицательный, что обеспечивается неравенствами $k_1(x)>0$, $k_2(x)>0$. Условия $k_i(x)\neq 0$ означают, что у характеристик нет вертикальных касательных. Рассматривая эту систему на отрезке $0\leqslant x\leqslant l$, мы должны задать еще граничные условия

$$\alpha_1u_1(0,\ t)+\alpha_2u_2(0,\ t)=0,$$
$$\beta_1u_1(l,\ t)+\beta_2u_2(l,\ t)=0$$

и начальные данные при $t=0$: $u_1(x,\ 0)=\varphi_1(x)$, $u_2(x,\ 0)=\varphi_2(x)$. Если все коэффициенты $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2)$ в граничных условиях отличны от нуля $(\alpha_1\neq 0,\ \alpha_2\neq 0,\ \beta_1\neq 0,\ \beta_2\neq 0)$, то при достаточной гладкости коэффициентов системы и начальных данных возможно построение решения как «в верхней» полуполосе

$$t\geqslant 0,\qquad 0\leqslant x\leqslant l$$

плоскости $x$, $t$, так и в нижней

$$t\leqslant 0,\qquad 0\leqslant x\leqslant l.$$

Такие задачи, которые могут решаться как в сторону растущих $t\ (t>0)$, так и в сторону убывающих $(t<0)$, мы называем *обратимыми* (см. § 16). Обратимость будет существенно использоваться в дальнейшем при построении теории. Для необратимых задач не только не проходит схема нашего исследования, но и сами факты теории метода Фурье совсем другие. Далеко не каждое решение необратимой задачи может быть аппроксимировано частными решениями вида $e^{\lambda t}u(x)$, использование которых лежит в основе метода. В дальнейшем мы убедимся в этом на примерах.

Как было сформулировано в § 20, решение поставленной нами задачи существует (как в полуполосе $t>0$, $0\leqslant x\leqslant l$, так и в полуполосе $t<0$, $0\leqslant x\leqslant l$) и удовлетворяет неравенствам

$$\left(|u_i(x,\ t)|,\ \left|\frac{\partial u_i}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial u_i}{\partial t}\right|\right)\leqslant \mathrm{const}\,e^{K|t|},$$
$$\left|\frac{\partial u_i(x,\ t_1)}{\partial t}-\frac{\partial u_i(x,\ t_2)}{\partial t}\right|\leqslant\sqrt{t_1-t_2}\,C(|t_1|,\ |t_2|).$$

В этих неравенствах $C=C(|t_1|,\ |t_2|)$ — постоянная, зависящая от интервала времени, в котором заключены $t_1$, $t_2$. Рассмотрим решение, построенное в полуполосе $t>0$, $0<x<l$, и построим его преобразование Лапласа

$$v_i(x, \lambda)=\int_0^\infty u_i(x, t)\, e^{-\lambda t}\, dt.$$

Интеграл в этой формуле сходится и, следовательно, преобразование Лапласа определено, если $\operatorname{Re}\lambda>K$. С помощью правил дифференцирования несобственных интегралов по параметру легко убедиться, что в каждой точке полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda>K$ существует производная $\frac{\partial v_i(x, \lambda)}{\partial\lambda}$, представляемая сходящимся интегралом:

$$\frac{\partial v_i(x, \lambda)}{\partial\lambda}=-\int_0^\infty u_i(x, t)\, t\cdot e^{-\lambda t}\, dt.$$

Отсюда следует, что $v_i(x, \lambda)$ в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda>K$ являются аналитическими функциями $\lambda$, зависящими от вещественного параметра $x$.

Определим еще преобразования Лапласа от производных $\frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x}$, $\frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t}$. Эти преобразования можно также считать определенными при $\operatorname{Re}\lambda>K$ и нетрудно проверить, что

$$\int_0^\infty \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x}\, e^{-\lambda t}\, dt=\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty u_i(x, t)\, e^{-\lambda t}\, dt=\frac{\partial v_i(x, \lambda)}{\partial x},$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial u_i}{\partial t}\, e^{-\lambda t}\, dt=[u_i(x, t)\, e^{-\lambda t}]_0^\infty-\int_{t=0}^{t=\infty} u_i(x, t)\, de^{-\lambda t}=$$

$$=-u_i(x, 0)+\lambda\int_0^\infty u_i(x, t)\, e^{-\lambda t}\, dt=-\varphi_i(x)+\lambda v_i(x, \lambda).$$

Теперь нетрудно получить для $v_i(x, \lambda)$ обыкновенное дифференциальное по $x$ уравнение, зависящее от параметра $\lambda$:

$$0=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}+k_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+m_{11}u_1+m_{12}u_2\right) dt=-\varphi_1(x)+$$

$$+\lambda v_1(x, \lambda)+k_1\frac{dv_1(x, \lambda)}{dx}+m_{11}v_1(x, \lambda)+m_{12}v_2(x, \lambda).$$

Мы пишем для производной $\frac{\partial v_1(x, \lambda)}{\partial x}$ знак обыкновенной производной $\frac{dv_1(x, \lambda)}{dx}$, так как в дальнейшем дифференцирование по параметру $\lambda$ ни в каких выкладках до § 31 не будет участвовать и, следовательно, такое обозначение не сможет привести к недоразумениям.

Аналогично, рассматривая интеграл

$$0=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}-k_2\frac{\partial u_2}{\partial x}+m_{21}u_1+m_{22}u_2\right)dt,$$

получаем второе уравнение

$$-\varphi_2(x)+\lambda v_2(x,\ \lambda)-k_2\frac{dv_2(x,\ \lambda)}{dx}+m_{21}v_1(x,\ \lambda)+m_{22}v_2(x,\ \lambda)=0.$$

Система обыкновенных уравнений

$$\lambda v_1+k_1\frac{dv_1}{dx}+m_{11}v_1+m_{12}v_2=\varphi_1,$$

$$\lambda v_2-k_2\frac{dv_2}{dx}+m_{21}v_1+m_{22}v_2=\varphi_2$$

будет играть в наших дальнейших исследованиях важную роль. Нетрудно проверить, что $v_1(x,\ \lambda)$, $v_2(x,\ \lambda)$ удовлетворяют при $x=0$ и при $x=l$ граничным условиям

$$\alpha_1v_1(0,\ \lambda)+\alpha_2v_2(0,\ \lambda)=0,$$

$$\beta_1v_1(l,\ \lambda)+\beta_2v_2(l,\ \lambda)=0.$$

Их проверка выполняется так (мы ограничиваемся проверкой лишь одного):

$$\alpha_1v_1(0,\ \lambda)+\alpha_2v_2(0,\ \lambda)=\alpha_1\int_0^\infty e^{-\lambda t}u_1(0,\ t)\,dt+\alpha_2\int_0^\infty e^{-\lambda t}u_2(0,\ t)\,dt=$$

$$=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[\alpha_1u_1(0,\ t)+\alpha_2u_2(0,\ t)\right]dt=0.$$

Мы определили преобразование Лапласа в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda>K$. Если выбрать $K^*>K>0$, то оказывается, что в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda>K^*$ может быть получена чрезвычайно важная для дальнейшего оценка:

$$|v_i(x,\ \lambda)|<\frac{\text{const}}{|\lambda|}.$$

Выведем ее. Сначала покажем, что ($\operatorname{Re}\lambda>K^*$)

$$|v_i(x,\ \lambda)|=\left|\int_0^\infty u_i(x,\ t)\,e^{-\lambda t}\,dt\right|\leqslant\int_0^\infty |u_i|\,e^{-K^*t}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\text{const}\int_0^\infty e^{Kt}\cdot e^{-K^*t}\,dt=\frac{\text{const}}{K^*-K}.$$

Аналогично:

$$\left|\frac{dv_i(x,\ \lambda)}{dx}\right|=\left|\int_0^\infty \frac{\partial u_i(x,\ t)}{\partial x}e^{-\lambda t}\,dt\right|\leqslant\frac{\text{const}}{K^*-K}.$$

Из обыкновенных уравнений, которым удовлетворяют $v_i(x,\ \lambda)$, находим:

$$v_1(x,\ \lambda)=\frac{1}{\lambda}\left[\varphi_1(x)-k_1\frac{dv_1}{dx}-m_{11}v_1-m_{12}v_2\right],$$

$$v_2(x,\ \lambda)=\frac{1}{\lambda}\left[\varphi_2(x)+k_2\frac{dv_2}{dx}-m_{21}v_1-m_{22}v_2\right].$$

Если правую часть этих равенств оценить с помощью только что полученных неравенств, то мы и придем (при $\operatorname{Re}\lambda>K^*$) к обещанному утверждению:

$$|v_i(x,\ \lambda)|<\frac{\text{const}}{|\lambda|}.$$

При каждом фиксированном $x$ функции $u_i(x,\ t)$ удовлетворяют всем тем условиям, которые обеспечивают применимость теоремы об обращении преобразования Лапласа, доказанной в предыдущем параграфе. Поэтому

$$u_i(x,\ t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ib}^{a+ib}v_i(x,\ \lambda)e^{\lambda t}\,d\lambda+O\left(\frac{1}{b}\right).$$

В этой формуле интеграл берется по отрезку прямой $\operatorname{Re}\lambda=a$, параллельной мнимой оси и такой, что $a>K$. При фиксированном $a$ оценка равномерна по $0\leqslant x\leqslant l$, $T\geqslant t\geqslant t_0>0$. Равномерность по $x$ следует из того, что оценка

$$|u_i|<\text{const}\,e^{Kt},\quad\left|\frac{\partial u_i}{\partial t}\right|<\text{const}\,e^{Kt},$$

$$\left|\frac{\partial u_i(x,\ t_1)}{\partial t}-\frac{\partial u_i(x,\ t_2)}{\partial t}\right|\leqslant C(|t_1|,\ |t_2|)\sqrt{|t_1-t_2|}$$

содержит константы, не зависящие от $x$. Фиксировав $K^*$, мы будем полагать $a=K^*$.

Итак, теорема существования решения у гиперболической системы в полуполосе $t>0$, $0\leqslant x\leqslant l$ позволила нам определить его преобразование Лапласа, компоненты которого являются аналитическими функциями от параметра $\lambda$ в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda>K$, и получить оценку $|v_i|<\frac{\text{const}}{\lambda}$ в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda>$ $>K^*>K>0$. Кроме того, обоснована возможность вычисления $u_i(x,\ t)$ при $0\leqslant x\leqslant l$, $0<t_0\leqslant t\leqslant T$ через $v_i(x,\ \lambda)$ с помощью приближенной формулы обращения преобразования Лапласа с равномерной оценкой остаточного члена.

Теперь посмотрим, какие выводы можно сделать из обратимости исходной задачи, т. е. из существования ее решения в полуполосе $t<0$, $0 \leqslant x \leqslant l$. Для этого рассмотрим интегралы:

$$\int_0^{-\infty} e^{-\lambda t} u_i(x, t)\, dt = \tilde{v}_i(x, \lambda), \qquad \int_0^{-\infty} e^{-\lambda t} \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x}\, dt = \frac{\partial \tilde{v}_i(x, \lambda)}{\partial x},$$

$$\int_0^{-\infty} e^{-\lambda t} \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t}\, dt = [e^{-\lambda t} u_i(x, t)]_0^{-\infty} + \lambda \int_0^{-\infty} u_i(x, t) e^{-\lambda t}\, dt =$$
$$= -\varphi_i(x, 0) + \lambda \tilde{v}_i(x, \lambda).$$

Сходимость этих интегралов и законность выполненных преобразований легко обосновывается при $\operatorname{Re}\lambda < -K$.

С помощью оценок

$$|u_i(x, t)| < \mathrm{const} \cdot e^{K|t|},$$
$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial x}\right| < \mathrm{const}\, e^{K|t|}, \quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial t}\right| < \mathrm{const}\, e^{K|t|}$$

точно так же, как и для преобразования Лапласа при $\operatorname{Re}\lambda > K$, проверяется, что $\tilde{v}_i(x, \lambda)$ удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &\lambda \tilde{v}_1 + k_1 \frac{d\tilde{v}_1}{dx} + m_{11}\tilde{v}_1 + m_{12}\tilde{v}_2 = \varphi_1, \\ &\lambda \tilde{v}_2 - k_2 \frac{d\tilde{v}_2}{dx} + m_{21}\tilde{v}_1 + m_{21}\tilde{v}_2 = \varphi_2 \end{aligned}\right\} \quad (\operatorname{Re}\lambda < -K)$$

и граничным условиям

$$\alpha_1 \tilde{v}_1(0, \lambda) + \alpha_2 \tilde{v}_2(0, \lambda) = 0,$$
$$\beta_1 \tilde{v}_1(l, \lambda) + \beta_2 \tilde{v}_2(l, \lambda) = 0.$$

Эти уравнения и граничные условия по своей форме никак не отличаются от тех, которые получены при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ для $v_i(x, \lambda)$. В дальнейшем мы этим обстоятельством воспользуемся. Точно так же легко убедиться, что $\tilde{v}_i(x, \lambda)$ — аналитические функции $\lambda$ при $\operatorname{Re}\lambda < -K$.

Рассмотрим теперь наши функции $\tilde{v}_i(x, \lambda)$, $\frac{\partial \tilde{v}_i(x, \lambda)}{\partial x}$ в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < -K^* < -K$:

$$|\tilde{v}_i(x, \lambda)| = \left|\int_0^{-\infty} e^{-\lambda t} u_i(x, t)\, dt\right| \leqslant \left|\mathrm{const} \int_0^{-\infty} e^{-K^*|t|} e^{K|t|}\, dt\right| = \frac{\mathrm{const}}{K^* - K},$$

$$\left|\frac{\partial \tilde{v}_i(x, \lambda)}{\partial x}\right| = \left|\int_0^{-\infty} e^{-\lambda t} \frac{\partial u_i}{\partial x}\, dt\right| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{K^* - K}.$$

Записав уравнения для $\tilde{v}_i$ в форме

$$\tilde{v}_1=\frac{1}{\lambda}\left[\varphi_1-k_1\frac{\partial\tilde{v}_1}{\partial x}-m_{11}\tilde{v}_1-m_{12}\tilde{v}_2\right],$$

$$\tilde{v}_2=\frac{1}{\lambda}\left[\varphi_2+k_2\frac{\partial\tilde{v}_2}{\partial x}-m_{21}\tilde{v}_1-m_{22}\tilde{v}_2\right]$$

и используя для правой части полученные оценки, находим, что

$$|\tilde{v}_i(x,\ \lambda)|<\frac{\text{const}}{|\lambda|}\ \text{при}\ \operatorname{Re}\lambda<-K^*.$$

В дальнейшем мы изучим поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\lambda v_1+k_1\frac{dv_1}{dx}+m_{11}v_1+m_{12}v_2=\varphi_1,$$

$$\lambda v_2-k_2\frac{dv_2}{dx}+m_{21}v_1+m_{22}v_2=\varphi_2$$

с граничными условиями

$$\alpha_1 v_1(0,\ \lambda)+\alpha_2 v_2(0,\ \lambda)=0,$$

$$\beta_1 v_1(l,\ \lambda)+\beta_2 v_2(l,\ \lambda)=0$$

при изменении $\lambda$ в полосе $-2K^*\leqslant\operatorname{Re}\lambda\leqslant 2K^*$. Во время этого изучения выяснится, что решение системы единственно для почти всех $\lambda$ из этой полосы. Более того, все точки, в которых единственность нарушается, лежат дискретно в полосе $|\operatorname{Re}\lambda|<K$ (напомним, что $K<K^*$). Из этой дискретности будет выведено, что существует полоска $|\operatorname{Im}\lambda-\alpha|<\beta$, внутри которой всюду имеет место единственность. Будет также показано, что в окрестности каждой точки единственности решения $v_i(x,\ \lambda)$ являются аналитическими функциями $\lambda$.

Из теории функций комплексного переменного известно, что аналитическая функция однозначно определяется своими значениями в любой сколь угодно малой области. В дальнейшем будет показано, что в полосе $K^*\leqslant\operatorname{Re}\lambda\leqslant 2K^*$ решение системы обыкновенных уравнений единственно и, следовательно, совпадает с вектор-функцией $\{v_1(x,\ \lambda),\ v_2(x,\ \lambda)\}$, получившейся преобразованием Лапласа из вектор-функции $\{u_1(x,\ t),\ u_2(x,\ t)\}$. Следовательно, та аналитическая функция от $\lambda$, зависящая от $x$ как от параметра, которая определяется в полосе (с выколотыми дискретными точками неединственности) $-2K^*\leqslant\operatorname{Re}\lambda\leqslant 2K^*$, является аналитическим продолжением этого преобразования Лапласа. В частности, рассматривая аналитическое продолжение вдоль полоски $|\operatorname{Im}\lambda-\alpha|<\beta$ в левую полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda<-K^*$, заметим, что в силу единственности решения системы обыкновенных уравнений в полосе $-2K^*<\operatorname{Re}\lambda<-K^*$ там это аналитическое продолжение будет совпадать с $\{\tilde{v}_1(x,\ \lambda),\ \tilde{v}_2(x,\ \lambda)\}$.

Этими рассуждениями обосновывается возможность аналитического продолжения преобразования Лапласа

$$v_i(x, \lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}u_i(x, t)\,dt,$$

определенного этим интегралом при $\operatorname{Re}\lambda > K$, на всю плоскость комплексного переменного $\lambda$, за исключением некоторой дискретной последовательности точек, лежащих в полосе $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant K$. В дальнейшем выяснится, что точки этой последовательности, как правило, являются полюсами для $v_i(x, \lambda)$. (Эти полюса общие для всех $x$.) Оказывается, что полюса можно занумеровать $\ldots, \lambda_{-p}$, $\lambda_{-p+1}, \ldots, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p, \ldots$ так, чтобы при $|p|\to\infty$ имела место асимптотическая формула:

$$\lambda_p=\frac{i\,2p\pi-\mu-\nu}{\varkappa}+O\left(\frac{1}{|p|}\right).$$

Параметры $\mu$, $\nu$, $\varkappa$ легко вычисляются через коэффициенты $k_1(x)$, $k_2(x)$, $m_{ik}(x)$ изучаемой системы и через коэффициенты $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$, $\beta_2$ граничных условий. Отметим, что параметры $\varkappa$ и $\mu$ вещественны, а $\nu$ может быть комплексным, и что все полюса лежат в полосе $|\operatorname{Re}\lambda| < K^*$.

Рассмотрим еще горизонтальные прямые

$$\operatorname{Im}\lambda=\frac{(2p+1)\,\pi-\operatorname{Im}\nu}{\varkappa},$$

от каждой из которых полюса $\lambda_p$ и $\lambda_{p+1}$ асимптотически (при больших $p$) удалены одинаково. Будет показано, что на отрезках, высекаемых из этих прямых полосой $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant 2K^*$, имеет место оценка

$$|v_i(x, \lambda)| < \frac{\text{const}}{p}$$

равномерно для всех $x$.

Мы сейчас покажем, как, воспользовавшись этим обстоятельством, можно замкнуть контур интегрирования в формуле обращения преобразования Лапласа. В последующем интеграл по замкнутому контуру будет уже нетрудно заменить суммой вычетов по полюсам. Обоснованную ранее формулу обращения преобразования Лапласа нам теперь удобно записать в следующей форме:

$$u_i(x, t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K^*-i\frac{2p+1}{\varkappa}\pi}^{K^*+i\frac{2p+1}{\varkappa}\pi} v_i(x, \lambda)\,e^{\lambda t}\,d\lambda+O\left(\frac{1}{p}\right).$$

Напомним, что оценка остаточного члена $O\left(\frac{1}{p}\right)$ равномерна при $0\leqslant x\leqslant l$ и для любого фиксированного отрезка времени с нижней границей, отделенной от нуля: $0 < t_0 \leqslant t \leqslant T$. Нарисуем на плоскости $\lambda = \sigma + i\tau$ следующий довольно сложный контур $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8P_9P_1$, изображенный на рис. 71. Участки $P_8P_9$, $P_3P_4$ этого контура лежат на горизонтальных прямых

$$\operatorname{Im}\lambda = \frac{\pm(2p+1)\pi - \operatorname{Im}\nu}{\varkappa}$$

и вдоль них $|v_i(x, \lambda)| < \mathrm{const}/p$, $|e^{\lambda t}| = |e^{\sigma t}| \leqslant e^{K^* T}$. Отсюда

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{P_3}^{P_4} e^{\lambda t} v_i(x, \lambda)\, d\lambda\right| < \frac{\mathrm{const}}{p},$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{P_8}^{P_9} e^{\lambda t} v_i(x, \lambda)\, d\lambda\right| < \frac{\mathrm{const}}{p}.$$

Константы здесь и во всех оценках, которые будут сейчас проводиться, можно выбрать не зависящими от $t$, $x$ из прямоугольника $t_0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant x \leqslant l$. В дальнейшем мы эту равномерность оценок будем все время подразумевать, не оговаривая особо. Мы уже знаем, что при $|\operatorname{Re}\lambda| \geqslant K^*$, а следовательно, и при $\operatorname{Re}\lambda = \pm K^*$ имеет место оценка $v_i(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$. Пользуясь этим, мы, очевидно, приходим к тому, что по каждому из отрезков $P_2P_3$, $P_4P_5$, $P_7P_8$, $P_9P_1$, имеющих ограниченную длину, интегралы

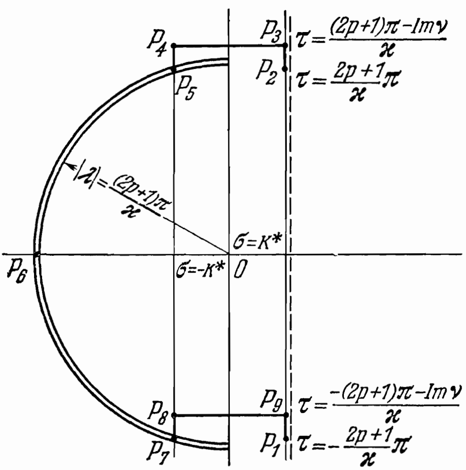


Рис. 71.

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int e^{\lambda t} v_i(x, \lambda)\, d\lambda\right|$$

являются также величинами типа $O\left(\frac{1}{p}\right)$. Оценим теперь модуль интеграла по дуге $P_5P_6P_7$ окружности $|\lambda| = \frac{(2p+1)\pi}{\varkappa}$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{P_5P_6P_7} e^{\lambda t} v_i(x, \lambda)\, d\lambda\right| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{2\pi p}\int\limits_{P_5P_6P_7} |e^{\lambda t}|\,|d\lambda|.$$

Так как на окружности $|\lambda|=\frac{(2p+1)}{\varkappa}\pi$

$$\lambda=|\lambda|(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

то

$$|e^{\lambda t}|\cdot|d\lambda|=|\lambda|e^{|\lambda|t\cos\varphi}\,d\varphi=\frac{(2p+1)\pi}{\varkappa}e^{\frac{(2p+1)\pi}{\varkappa}t\cos\varphi}\,d\varphi.$$

Поэтому

$$\int\limits_{P_5P_6P_7}|e^{\lambda t}||d\lambda|<$$

$$<\frac{2p+1}{\varkappa}\pi\int\limits_{+\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}e^{\frac{(2p+1)\pi}{\varkappa}t\cos\varphi}\,d\varphi=\frac{2p+1}{\varkappa}\pi\cdot 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{2p+1}{\varkappa}\pi t\sin\theta}\,d\theta,$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{P_5P_6P_7}e^{\lambda t}v_i(x,\ \lambda)\,d\lambda\right|\leqslant\text{const}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{(2p+1)\pi}{\varkappa}t\sin\theta}\,d\theta=O\left(\frac{1}{pt}\right).$$

Утверждение, что последний интеграл можно считать величиной типа $O\left(\frac{1}{pt}\right)$, составляет содержание леммы Жордана, часто используемой в теории функций комплексного переменного. Ее несложное доказательство было изложено в § 26.

Итак, мы показали, что

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8P_9P_1}e^{\lambda t}v_i(x,\ \lambda)\,d\lambda\right|=O\left(\frac{1}{p}\right).$$

С другой стороны,

$$u_i(x,\ t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{P_1}^{P_2}e^{\lambda t}v_i(x,\ \lambda)\,d\lambda+O\left(\frac{1}{p}\right).$$

Значит,

$$u_i(x,\ t)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8P_9P_1}e^{\lambda t}v_i(x,\ \lambda)\,d\lambda+O\left(\frac{1}{p}\right).$$

Из теории функций комплексного переменного известно, что контурный интеграл не будет менять своего значения, если мы начнем деформировать контур так, чтобы он при этой деформации не проходил через особые точки подынтегральной аналитической функции. Пользуясь тем, что функция $v_i(x,\ \lambda)e^{\lambda t}$ может иметь полюса лишь в полосе $|\operatorname{Re}\lambda|\leqslant K^*$, мы заключаем, что наш сложный контур без изменения значения интеграла может быть продеформирован в границу прямоугольника $P_9P_3P_4P_8P_9$, который мы будем обозначать $\Pi_p$

$$\Pi_p : \left\{ |\operatorname{Re}\lambda| \leqslant K^*;\ \frac{-(2p+1)\pi - \operatorname{Im}\nu}{\varkappa} \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant \frac{(2p+1)\pi - \operatorname{Im}\nu}{\varkappa} \right\}.$$

Итак, постулировав некоторые асимптотические свойства $v_i(x, \lambda)$ в полосе $|\operatorname{Re}\lambda| < \text{const}$ и воспользовавшись уже доказанными фактами про $v_i(x, \lambda)$ ($\tilde{v}_i(x, \lambda)$) вне этой полосы, мы получили следующее важное представление

$$u_i(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Pi_p} e^{\lambda t} v_i(x, \lambda)\, d\lambda + O\left(\frac{1}{p}\right)$$

с оценкой $O\left(\frac{1}{p}\right)$ для остаточного члена, равномерной при $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 < t_0 \leqslant t \leqslant T$.

Прежде чем пользоваться этой формулой для обоснования метода Фурье, мы в следующих двух параграфах восполним пробел в нашем доказательстве. А именно, мы изучим функции $v_i(x, \lambda)$ внутри полосы $|\operatorname{Re}\lambda| < \text{const}$.

## § 29. Асимптотика решений обыкновенных дифференциальных уравнений

Асимптотические (по $\lambda$) формулы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, связанных с преобразованием Лапласа. Эти формулы получаются из явных представлений решений системы, содержащей два независимых уравнения. Последующие леммы постепенно приводят к все более и более сложному характеру зацепления уравнений.

В этом параграфе будет доказана

Теорема об асимптотике решений задачи Коши. *Если $k_i(x)$, $m_{ij}(x)$ — функции, непрерывные вместе со своими первыми производными, то любые решения системы*

$$\lambda v_1 + k_1 \frac{dv_1}{dx} + m_{11} v_1 + m_{12} v_2 = \varphi_1,$$

$$\lambda v_2 - k_2 \frac{dv_2}{dx} + m_{21} v_1 + m_{22} v_2 = \varphi_2$$

*удовлетворяют при $|\operatorname{Re}\lambda| < K^*$ на отрезке $[0, l]$ неравенствам:*

$$|v_1(x) - v_1(0)\, e^{-\lambda y_1(x) - \mu_1(x)}| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M}{|\lambda|} \left[ \max_{i,x} |\varphi_i(x)| + \max_{i,x} |\varphi_i'(x)| + \max_i |v_i(0)| \right],$$

$$|v_2(x) - v_2(0)\, e^{\lambda y_2(x) + \mu_2(x)}| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M}{|\lambda|} \left[ \max_{i,x} |\varphi_i(x)| + \max_{i,x} |\varphi_i'(x)| + \max_i |v_i(0)| \right],$$

*где постоянная $M$ оценивается через максимум модуля коэффици-*

*ентов и их производных, а* $y_l(x)$, $\mu_l(x)$ *определены формулами*:

$$y_l(x)=\int_0^x \frac{d\xi}{k_l(\xi)},$$

$$\mu_l(x)=\int_0^x \frac{m_{ll}(\xi)}{k_l(\xi)}\,d\xi.$$

Формулировка этой теоремы на первый взгляд кажется довольно сложной. Но это только кажется. Сейчас поясним, в чем смысл этой теоремы.

Оказывается, что рассматривая решения нашей системы при больших по модулю $\lambda$, лежащих в некоторой узкой полосе около мнимой оси, мы можем вычеркнуть из системы коэффициенты $m_{12}$, $m_{21}$, запутывающие уравнения, и правые части $\varphi_1$, $\varphi_2$. Решение оставшейся после этого расцепленной однородной системы

$$\frac{dv_1}{dx}+\left[\frac{\lambda}{k_1(x)}+\frac{m_{11}(x)}{k_1(x)}\right]v_1=0,$$

$$\frac{dv_2}{dx}-\left[\frac{\lambda}{k_2(x)}+\frac{m_{22}(x)}{k_2(x)}\right]v_2=0$$

выписывается формулами

$$v_1(x)=v_1(0)\,e^{-\lambda y_1(x)-\mu_1(x)},$$

$$v_2(x)=v_2(0)\,e^{\lambda y_2(x)+\mu_2(x)},$$

которые и представляют собой главный член нашей асимптотики. Члены порядка $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ в этой асимптотике оценивают влияние отброшенных членов в уравнениях. Мне кажется, что после этих пояснений формулировку доказываемой теоремы будет нетрудно запомнить.

Приступим к доказательству теоремы. Рассмотрим сначала решение одного уравнения с постоянным коэффициентом

$$\lambda u+\frac{du}{dy}=q(y), \qquad u(0)=0.$$

Это решение может быть выписано формулой

$$u(y)=\int_0^y e^{-\lambda(y-\eta)}q(\eta)\,d\eta.$$

Очевидно, что $u(0)=0$. Непосредственным дифференцированием легко убедиться в том, что уравнение выполнено. Интегрированием по частям формулу для решения можно привести к другому виду:

$$u(y)=\frac{1}{\lambda}\,[e^{-\lambda(y-\eta)}q(\eta)]_0^y-\frac{1}{\lambda}\int_0^y e^{-\lambda(y-\eta)}q'(\eta)\,d\eta=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\,[q(y)-q(0)\,e^{-\lambda y}]-\frac{1}{\lambda}\int_0^y e^{-\lambda(y-\eta)}q'(\eta)\,d\eta.$$

Предполагая, что $|y|\leqslant Y$, $\lambda=\sigma+i\tau$, $|\sigma|\leqslant K^*$, а следовательно,

$$|e^{-\lambda y}|=|e^{-\sigma y-i\tau y}|=e^{-\sigma y}\leqslant e^{K*Y},\qquad |e^{-\lambda(y-\eta)}|\leqslant e^{K*Y},$$

и используя формулы для решения, мы можем получить неравенства

$$|u(y)|\leqslant \mathrm{const}\cdot\max|q(y)|,$$

$$|u(y)|\leqslant\frac{\mathrm{const}}{|\lambda|}\,[\max|q(y)+\max|q'(y)|\,].$$

Из этих неравенств следует справедливость леммы 1.

Лемма 1. *Решение уравнения*

$$\lambda u+\frac{du}{dy}=q(y)+\frac{q^*(y)}{\lambda},\qquad u(0)=0,$$

*в предположении, что* $|\mathrm{Re}\,\lambda|\leqslant K^*$, $|y|\leqslant Y$, *допускает оценку*

$$|u(y)|\leqslant\frac{\mathrm{const}}{|\lambda|}\left[\max|q^*|+\max|q|+\max\left|\frac{dq}{dy}\right|\right].$$

Рассмотрим теперь решение $z=z(x)$ уравнения с переменными коэффициентами:

$$\lambda z+k(x)\frac{dz}{dx}+m(x)\,z=f(x)+\frac{f^*(x)}{\lambda}.$$

Подстановкой

$$y=\int_0^x\frac{d\xi}{k(\xi)},\qquad z=e^{-\mu(x)}u,\qquad q(x)=e^{\mu(x)}f,$$

$$q^*(x)=e^{\mu(x)}f^*,\qquad \mu(x)=\int_0^x\frac{m(\xi)}{k(\xi)}\,d\xi,$$

из которой следует, что

$$\frac{dq}{dy}=e^{\mu(x)}\left[k(x)\frac{df}{dx}+m(x)\,f\right],$$

$$\max|q(y)|\leqslant\mathrm{const}\cdot\max|f(x)|,$$

$$\max|q^*(y)|\leqslant\mathrm{const}\cdot\max|f^*(x)|,$$

$$\max|q'(y)|\leqslant\mathrm{const}\,[\max|f(x)|+\max|f'(x)|\,],$$

уравнения для $z$ приводятся к разобранному в лемме 1 уравнению для $u$. Нами доказана

Лемма 2. *Если при* $0 \leqslant x \leqslant l$ $k(x) \neq 0$, $k(x)$ *и* $m(x)$ *ограничены и непрерывны и если* $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant K^*$, *то решение* $z(x)$ *уравнения*

$$\lambda z + k(x)\frac{dz}{dx} + m(x)z = f(x) + \frac{f^*(x)}{\lambda}, \qquad z(0) = 0$$

*оценивается неравенством*

$$|z(x)| \leqslant \frac{\text{const}}{|\lambda|}[\max|f^*(x)| + \max|f(x)| + \max|f'(x)|].$$

Решение однородного уравнения

$$\lambda z + k(x)\frac{dz}{dx} + m(x)z = 0$$

выписывается формулой

$$z(x) = z(0)e^{-\lambda y(x) - \mu(x)},$$

$$y(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{k(\xi)}, \quad \mu(x) = \int_0^x \frac{m(\xi)}{k(\xi)}\,d\xi.$$

Представляя решение неоднородного уравнения в виде суммы решения с нулевыми начальными данными и решения однородного уравнения, легко заключаем, что

$$|z(x) - z(0)e^{-\lambda y(x) - \mu(x)}| \leqslant \frac{\text{const}}{|\lambda|}[\max|f^*(x)| + \max|f(x)| + \max|f'(x)|].$$

При доказательстве леммы 2 мы пользовались тем, что $k(x)$ не обращается в нуль при $0 \leqslant x \leqslant l$, но нигде не пользовались положительностью $k(x)$. Это позволяет нам считать доказанной следующую лемму.

Лемма 3. *Если при* $0 \leqslant x \leqslant l$ *коэффициенты* $k_i(x) > 0$, $k_i(x)$ *и* $m_{ii}(x)$ *ограничены и непрерывны и если* $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant K^*$, *то решение системы*

$$\lambda z_1 + k_1(x)\frac{dz_1}{dx} + m_{11}(x)z_1 = \frac{f_1^*(x)}{\lambda} + f_1(x),$$

$$\lambda z_2 - k_2(x)\frac{dz_2}{dx} + m_{22}(x)z_2 = \frac{f_2^*(x)}{\lambda} + f_2(x)$$

*удовлетворяет неравенствам:*

$$|z_1(x) - z_1(0)e^{-\lambda y_1(x) - \mu_1(x)}| \leqslant \frac{N}{|\lambda|}(F + F^*),$$

$$|z_2(x) - z_2(0)e^{\lambda y_2(x) + \mu_2(x)}| \leqslant \frac{N}{|\lambda|}(F + F^*),$$

*где*

$$F = \max(|f_1| + |f_1'| + |f_2| + |f_2'|),$$
$$F^* = \max(|f_1^*| + |f_2^*|),$$

$$y_i(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{k_i(\xi)}, \quad \mu_i(x) = \int_0^x \frac{m_{ii}(\xi)}{k_i(\xi)}\,d\xi,$$

*а постоянная* $N$ *зависит от величины коэффициентов, длины отрезка* $l$ *и от* $K^*$. *Производные коэффициентов в эту оценку не входят.*

Доказанное неравенство для решений «расцепленной» системы, состоящей из двух не связанных друг с другом уравнений, мы положим в основу получения асимптотического представления решений интересующей нас «зацепленной» системы.

Сначала рассмотрим случай слабого (при $\lambda \to \infty$) зацепления:

$$\lambda w_1 + k_1(x)\frac{dw_1}{dx} + m_{11}(x) w_1 + \frac{1}{\lambda}[n_{11}(x, \lambda) w_1 + n_{12}(x, \lambda) w_2] = \psi_1(x),$$

$$\lambda w_2 - k_2(x)\frac{dw_2}{dx} + m_{22}(x) w_2 + \frac{1}{\lambda}[n_{21}(x, \lambda) w_1 + n_{22}(x, \lambda) w_2] = \psi_2(x).$$

«Зацепляющие» коэффициенты $n_{ik}(x, \lambda)$ предположим непрерывными по $x$ и ограниченными. Рассматривая некоторое решение $w_1(x)$, $w_2(x)$ такой системы, обозначим

$$\max_{i, x} | w_i(x) | = \omega,$$

$$\max_{i} | w_i(0) | = \omega_0,$$

$$f_1^* = -(n_{11}w_1 + n_{12}w_2), \quad f_1 = \psi_1,$$

$$f_2^* = -(n_{21}w_1 + n_{22}w_2), \quad f_2 = \psi_2,$$

и, пользуясь тем, что $F^* = \max(|f_1^*| + |f_2^*|) \leqslant L\omega$, $|e^{-\lambda y_1 - \mu_1}| < M$, $|e^{\lambda y_2 + \mu_2}| < M$, мы с помощью леммы 3 приходим к неравенству

$$\omega \leqslant M\omega_0 + \frac{N}{|\lambda|}(F + L\omega),$$

выполненному для $\lambda$, лежащих в нашей полосе. Пусть $|\lambda| > 2NL$. Тогда

$$\omega \leqslant M\omega_0 + \frac{N}{|\lambda|}F + \frac{1}{2}\omega,$$

а следовательно,

$$\omega \leqslant \frac{2N}{|\lambda|}F + 2M\omega_0.$$

Далее,

$$F^* \leqslant L\omega \leqslant \frac{2NL}{|\lambda|}F + 2ML\omega_0 \leqslant \frac{2NL}{2NL}F + 2ML\omega_0 = F + 2ML\omega_0.$$

Опять применим лемму 3 и получим оценку

$$| w_1(x) - w_1(0)\, e^{-\lambda y_1(x) - \mu_1(x)} | \leqslant \frac{N}{|\lambda|}[F + F^*] \leqslant \frac{N}{|\lambda|}[2F + 2ML\omega_0],$$

$$| w_2(x) - w_2(0)\, e^{\lambda y_2(x) + \mu_2(x)} | \leqslant \frac{N}{|\lambda|}[2F + 2ML\omega_0].$$

Итак, нами доказана

Лемма 4. *Если при $0 \leqslant x \leqslant l$ коэффициенты $k_i(x) > 0$, $k_i(x)$, $m_{ii}(x)$ и $n_{ij}(x)$ непрерывны и, следовательно, ограничены, и если $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant K^*$, то для достаточно больших по модулю $\lambda$, лежащих в указанной полосе, решение системы*

$$\lambda w_1 + k_1\frac{dw_1}{dx} + m_{11}w_1 + \frac{1}{\lambda}[n_{11}w_1 + n_{12}w_2] = \psi_1(x),$$

$$\lambda w_2 - k_2\frac{dw_2}{dx} + m_{22}w_2 + \frac{1}{\lambda}[n_{21}w_1 + n_{22}w_2] = \psi_2(x)$$

*удовлетворяет неравенствам*

$$\left| w_1(x) - w_1(0)\, e^{-\lambda y_1(x) - \mu_1(x)} \right| \leqslant \frac{Q}{|\lambda|} \left[F + \max\left(|w_1(0)|,\ |w_2(0)|\right)\right],$$

$$\left| w_2(x) - w_2(0)\, e^{\lambda y(x) + \mu_2(x)} \right| \leqslant \frac{Q}{|\lambda|} \left[F + \max\left(|w_1(0)|,\ |w_2(0)|\right)\right];$$

*здесь постоянная $Q$ зависит лишь от границ для коэффициентов $k_i$, $m_{ii}$, $n_{ij}$, а $F$ определяется как*

$$F = \max_x \left[\,|\psi_1| + |\psi_2| + |\psi_1'| + |\psi_2'|\,\right].$$

Заметим, что пока мы нигде не пользовались гладкостью коэффициентов и поэтому границы производных от коэффициентов не вошли в наши оценки.

Вот еще один чуть-чуть более общий вид «слабо зацепленных» систем:

$$\lambda w_1 + k_1 \frac{dw_1}{dx} + \frac{1}{\lambda^2}\left[p_{11}\frac{dw_1}{dx} + p_{12}\frac{dw_2}{dx}\right] + m_{11} w_1 + \frac{1}{\lambda}\left[n_{11} w_1 + n_{12} w_2\right] = \psi_2,$$

$$\lambda w_2 - k_2 \frac{dw_2}{dx} + \frac{1}{\lambda^2}\left[p_{21}\frac{dw_1}{dx} + p_{22}\frac{dw_2}{dx}\right] + m_{22} w_2 + \frac{1}{\lambda}\left[n_{21} w_1 + n_{22} w_2\right] = \psi_2.$$

Предположения о коэффициентах $p_{ij}$ — такие же, как и о $n_{ij}$ — непрерывность и ограниченность.

Ясно, что если разрешить эту систему относительно $\frac{dw_i}{dx}$, что, очевидно, возможно при достаточно больших по модулю $\lambda$, то мы получим равенства следующего типа:

$$\frac{dw_1}{dx} = \lambda\left[A_{11} w_1 + A_{12} w_2\right] + B_{11}\psi_1 + B_{12}\psi_2,$$

$$\frac{dw_2}{dx} = \lambda\left[A_{21} w_1 + A_{22} w_2\right] + B_{21}\psi_1 + B_{22}\psi_2,$$

с ограниченными (при $\lambda \to \infty$) непрерывными по $x$ коэффициентами $A_{ik} = A_{ik}(x, \lambda)$, $B_{ik} = B_{ik}(x, \lambda)$. Подставив эти выражения для производных в выражения $\frac{1}{\lambda^2}\left[p_{i1}\frac{dw_1}{dx} + p_{i2}\frac{dw_2}{dx}\right]$, мы избавимся от слагаемых такого типа, несколько изменив выражения для $n_{ik}(x, \lambda)$ и для $\psi_i$. После этого можно применить лемму 4 и убедиться, что ее формулировка дословно переносится и на системы, имеющие зацепление порядка $1/\lambda^2$ и коэффициентов при производных.

Можно получить похожие оценки и для систем с зацеплением порядка $1/\lambda$ в коэффициентах при производных. Нам достаточно будет здесь ограничиться системами вида

$$\lambda v_1 + k_1 \frac{dv_1}{dx} + \frac{p}{\lambda}\frac{dv_2}{dx} + m_{11} v_1 + \frac{1}{\lambda}\left[n_{11} v_1 + n_{12} v_2\right] = \psi_1,$$

$$\lambda v_2 - k_2 \frac{dv_2}{dx} + \frac{q}{\lambda}\frac{dv_1}{dx} + m_{22} v_2 + \frac{1}{\lambda}\left[n_{21} v_2 + n_{22} v_2\right] = \psi_2.$$

Здесь, однако, в константы оценки войдут еще и производные от некоторых комбинаций коэффициентов.

Запишем нашу систему в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \lambda + m_{11} & 0 \\ 0 & \lambda + m_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & \frac{p}{\lambda} \\ \frac{q}{\lambda} & -k \end{pmatrix} \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

и сделаем подстановку

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{a(x,\lambda)}{\lambda} \\ \dfrac{b(x,\lambda)}{\lambda} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

с достаточно гладкими по $x$ коэффициентами $a(x, \lambda)$, $b(x, \lambda)$, которые вместе с производными по $x$ предположим ограниченными при $\lambda \to \infty$.

Очевидно, что

$$\frac{d}{dx}\left[\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{a}{\lambda} \\ \dfrac{b}{\lambda} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{a}{\lambda} \\ \dfrac{b}{\lambda} & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 0 & a' \\ b' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому система уравнений для $w_1$, $w_2$ может быть записана так:

$$\begin{pmatrix} \lambda + m_{11} & 0 \\ 0 & \lambda + m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{a}{\lambda} \\ \dfrac{b}{\lambda} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} k_1 & \dfrac{p}{\lambda} \\ \dfrac{q}{\lambda} & -k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{a}{\lambda} \\ \dfrac{b}{\lambda} & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} \tilde{n}_{11} & \tilde{n}_{12} \\ \tilde{n}_{21} & \tilde{n}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

Умножим эту систему еще слева на матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a}{\lambda} \\ -\dfrac{b}{\lambda} & 1 \end{pmatrix}$ и заметим, что

$$\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a}{\lambda} \\ -\dfrac{b}{\lambda} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda + m_{11} & 0 \\ 0 & \lambda + m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{a}{\lambda} \\ \dfrac{b}{\lambda} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda + m_{11} & 0 \\ 0 & \lambda + m_{22} \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} -ab\left(1 + \dfrac{m_{22}}{\lambda}\right) & (m_{11} - m_{22})\,a \\ (m_{22} - m_{11})\,b & -ab\left(1 + \dfrac{m_{11}}{\lambda}\right) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a}{\lambda} \\ -\dfrac{b}{\lambda} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & \dfrac{p}{\lambda} \\ \dfrac{q}{\lambda} & -k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{a}{\lambda} \\ \dfrac{b}{\lambda} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 0 & p + a(k_1 + k_2) \\ q - b(k_1 + k_2) & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda^2}\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda^3}\begin{pmatrix} \tilde{\pi}_{11} & \tilde{\pi}_{12} \\ \tilde{\pi}_{21} & \tilde{\pi}_{22} \end{pmatrix}.$$

Так как $k_1 + k_2 > 0$, то, положив $a = -\dfrac{p(x)}{k_1(x) + k_2(x)}$, $b = \dfrac{q(x)}{k_1(x) + k_2(x)}$, мы придем после описанного преобразования к уже изученной «слабо зацепленной» системе с «зацеплением» порядка $1/\lambda^2$ при первых производных. Очевидно, из гладкости $p(x)$, $q(x)$, $k_i(x)$ следует гладкость $a(x)$, $b(x)$. Таким образом, применяя известную нам оценку, имеем

$$|w_1(x, \lambda)-w_1(0, \lambda)e^{-\lambda y_1-\mu_1}| \leqslant \frac{Q}{|\lambda|}[F+\max(|w_1(0)|, |w_2(0)|)],$$

$$|w_2(x, \lambda)-w_2(0, \lambda)e^{\lambda y_2+\mu_2}| \leqslant \frac{Q}{|\lambda|}[F+\max(|w_1(0)|, |w_2(0)|)].$$

Вспоминая, что

$$v_1=w_1+\frac{a}{\lambda}w_1, \qquad v_2=\frac{b}{\lambda}w_1+w_2,$$

мы без труда выводим отсюда, что

$$|v_1(x)-v_1(0)e^{-\lambda y_1(x)-\mu_1(x)}| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\text{const}}{|\lambda|}[\max_{x,\,i}|\psi_i(x)|+\max_{x,\,i}|\psi_i'(x)|+\max_i|v_i(0)|],$$

$$|v_2(x)-v_2(0)e^{\lambda y_2(x)+\mu_2(x)}| \leqslant \frac{\text{const}}{|\lambda|}[\max_{x,\,i}|\psi_i(x)|+\max_{x,\,i}|\psi_i'(x)|+\max_i|v_i(0)|].$$

Эти оценки составляют содержание леммы 5. Чтобы теперь привести основную нашу систему

$$\begin{aligned} \lambda v_1+k_1\frac{dv_1}{dx}+m_{11}v_1+m_{12}v_2&=\varphi_1,\\ \lambda v_2-k_2\frac{dv_2}{dx}+m_{21}v_1+m_{22}v_2&=\varphi_2 \end{aligned} \tag{$*$}$$

к изученному уже виду, выпишем знакомую нам форму этих же уравнений:

$$v_1=\frac{1}{\lambda}\left[\varphi_1-k_1\frac{dv_1}{dx}-m_{11}v_1-m_{12}v_2\right],$$

$$v_2=\frac{1}{\lambda}\left[\varphi_2+k_2\frac{dv_2}{dx}-m_{21}v_1-m_{22}v_2\right],$$

а затем подставим отсюда выражение для $v_1$ во второе уравнение ($*$) вместо того $v_1$, при котором стоит коэффициент $m_{21}$. Выражение для $v_2$ подставляется в первое уравнение на место того $v_2$, при котором коэффициент обозначен как $m_{12}$.

На этом приведение системы к изученному виду заканчивается. Ее новые правые части будут

$$\psi_1=\varphi_1-\frac{m_{12}}{\lambda}\varphi_2, \qquad \psi_2=\varphi_2-\frac{m_{21}}{\lambda}\varphi_1.$$

Применяя последнюю из наших лемм, мы убеждаемся, что основная теорема этого параграфа доказана.

## § 30. Собственные функции краевой задачи

Изучение в полосе $|\operatorname{Re}\lambda|<\text{const}$ аналитических функций от $\lambda$, зависящих от параметра $x$. Эти функции удовлетворяют обыкновенным дифференциальным по $x$ уравнениям и граничным условиям. Вывод асимптотических формул решения краевой задачи из формул для решения задачи Коши, полученных в предыдущем параграфе. Функция $D(\lambda)$. Ее нули — собственные значения системы. Нулей $D(\lambda)$ вне полосы $|\operatorname{Re}\lambda|\leqslant K$ нет. Асимптотика нулей $D(\lambda)$. Аналитическое продолжение преобразования Лапласа решения гиперболической системы на всю комплексную плоскость с выколотыми полюсами в нулях $D(\lambda)$.

В предыдущем параграфе было доказано, что любое решение системы уравнений

$$\lambda v_1+k_1\frac{dv_1}{dx}+m_{11}v_1+m_{12}v_2=\varphi_1,$$

$$\lambda v_2-k_2\frac{dv_2}{dx}+m_{21}v_1+m_{22}v_2=\varphi_2$$

($0\leqslant x\leqslant l$, $k_i>0$, $k_i$, $m_{ik}$ ограничены вместе со своими непрерывными первыми производными, $\varphi_i$, $\varphi_i'$ непрерывны) удовлетворяет неравенствам

$$|v_1(x)-v_1(0)\,e^{-\lambda y_1(x)-\mu_1(x)}|\leqslant \leqslant\frac{M}{|\lambda|}[\max|\varphi_i(x)|+\max|\varphi_i'(x)|+\max_i|v_i(0)|],$$

$$|v_2(x)-v_2(0)\,e^{\lambda y_2(x)+\mu_2(x)}|\leqslant \leqslant\frac{M}{|\lambda|}[\max|\varphi_i(x)|+\max|\varphi_i'(x)|+\max_i|v_i(0)|].$$

Постоянная $M$ оценивается через коэффициенты системы и их производные, а $y_i(x)$, $\mu_i(x)$ определены равенствами

$$y_i(x)=\int_0^x\frac{d\xi}{k_i(\xi)},\qquad \mu_i(x)=\int_0^x\frac{m_{ii}(\xi)}{k_i(\xi)}\,d\xi.$$

Параметр $\lambda$ предполагается изменяющимся в некоторой произвольной, но фиксированной полосе $|\operatorname{Re}\lambda|<K^*$.

Изучим с помощью доказанных неравенств некоторые специальные решения систем изучаемого типа $v^*=(v_1^*,\ v_2^*)$, $v^{(1)}=(v_1^{(1)},\ v_2^{(1)})$, $v^{(2)}=(v_1^{(2)},\ v_2^{(2)})$. Решения $v^*$, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ определяются своими начальными данными и правыми частями системы так:

1) $v_1^*(x,\lambda)$, $v_2^*(x,\lambda)$ удовлетворяют начальным данным $v_1^*(0,\lambda)=0$, $v_2^*(0,\lambda)=0$ и неоднородной системе

$$\lambda v_1+k_1\frac{dv_1}{dx}+m_{11}v_1+m_{12}v_2=\varphi_1,$$

$$\lambda v_2-k_2\frac{dv_2}{dx}+m_{21}v_1+m_{22}v_2=\varphi_2.$$

При достаточно больших по модулю $\lambda$ в нашей полосе справедлива оценка

$$|v_1^*(x,\lambda)|<\frac{N}{|\lambda|},$$

$$|v_2^*(x,\lambda)|<\frac{N}{|\lambda|}.$$

2) $v_1^{(1)}(x, \lambda)$, $v_2^{(1)}(x, \lambda)$ удовлетворяют однородной системе ($\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$) и начальным данным

$$v_1^{(1)}(0, \lambda)=1, \quad v_2^{(1)}(0, \lambda)=0.$$

Это решение оценивается так:

$$|v_1^{(1)}(x, \lambda)-e^{-\lambda y_1(x)-\mu_1(x)}|<\frac{N}{|\lambda|},$$

$$|v_2^{(1)}(x, \lambda)|<\frac{N}{|\lambda|}.$$

3) $v_1^{(2)}(x, \lambda)$, $v_2^{(2)}(x, \lambda)$ тоже удовлетворяют однородной системе ($\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$). Начальные данные этого решения

$$v_1^{(2)}(0, \lambda)=0, \quad v_2^{(2)}(0, \lambda)=1.$$

Для него справедлива оценка

$$|v_1^{(2)}(x, \lambda)|<\frac{N}{|\lambda|},$$

$$|v_2^{(2)}(x, \lambda)-e^{\lambda y_2(x)+\mu_2(x)}|<\frac{N}{|\lambda|}.$$

Отметим еще следующее важное свойство функций $v_i^*(x, \lambda)$, $v_i^{(k)}(x, \lambda)$ — они являются целыми аналитическими функциями параметра $\lambda$. Эта аналитичность является следствием следующей теоремы, которая имеется, например, в учебнике И. Г. Петровского «Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений».

*Пусть при $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ коэффициенты $a_{ik}(x, \lambda)$ и правые части $f_i(x, \lambda)$ являются достаточно гладкими функциями $x$ и аналитическими при $|\lambda-\lambda_0|<b$ функциями $\lambda$. Пусть $y_{i0}(\lambda)$ тоже аналитичны при $|\lambda-\lambda_0|<b$. Тогда решение системы*

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_k a_{ik}y_k+f_i,$$

$$y_i(x_0, \lambda)=y_{i0}(\lambda)$$

*при каждом $x$ ($x_0 \leqslant x \leqslant x_1$) является аналитической функцией $\lambda$ при $|\lambda-\lambda_0|<b$. Если $a_{ik}(x, \lambda)$, $y_i(0, \lambda)$ — целые функции $\lambda$, то $y_i(x, \lambda)$ — также целая.*

Очевидно, что наша система и начальные данные для $v^*$, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ удовлетворяют условиям этой теоремы, и поэтому аналитичность $v_1^*(x, \lambda)$, $v_2^*(x, \lambda)$, $v_1^{(1)}(x, \lambda)$, $v_2^{(1)}(x, \lambda)$, $v_1^{(2)}(x, \lambda)$, $v_2^{(2)}(x, \lambda)$ из нее следует. Параметр $\lambda$ имеет право при этом пробегать всю комплексную плоскость. Это означает, что все перечисленные сейчас функции — целые.

Решение $v_1$, $v_2$ системы

$$\lambda v_1 + k_1 \frac{dv_1}{dx} + m_{11}v_1 + m_{12}v_2 = \varphi_1,$$

$$\lambda v_2 - k_2 \frac{dv_2}{dx} + m_{21}v_1 + m_{22}v_2 = \varphi_2,$$

принимающее при $x=0$ начальные значения $(A_1, A_2)$, записывается в виде

$$v_1 = v_1^* + A_1 v_1^{(1)} + A_2 v_1^{(2)},$$
$$v_2 = v_2^* + A_1 v_2^{(1)} + A_2 v_2^{(2)}.$$

Посмотрим, какие должны быть $A_1$, $A_2$, чтобы $v_1$, $v_2$ удовлетворяли граничным условиям

$$\alpha_1 v_1(0, \lambda) + \alpha_2 v_2(0, \lambda) = 0,$$
$$\beta_1 v_1(l, \lambda) + \beta_2 v_2(l, \lambda) = 0.$$

Для этого $A_1$, $A_2$ должны удовлетворять системе:

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 = 0,$$
$$[\beta_1 v_1^{(1)}(l, \lambda) + \beta_2 v_2^{(1)}(l, \lambda)] A_1 + [\beta_1 v_1^{(2)}(l, \lambda) + \beta_2 v_2^{(2)}(l, \lambda)] A_2 = \\ = -\beta_1 v_1^*(l, \lambda) - \beta_2 v_2^*(l, \lambda).$$

Обозначив через $D(\lambda)$ определитель этой системы:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 v_1^{(1)}(l, \lambda) + \beta_2 v_2^{(1)}(l, \lambda) & \beta_1 v_1^{(2)}(l, \lambda) + \beta_2 v_2^{(2)}(l, \lambda) \end{vmatrix},$$

мы приходим к формулам для $A_1$, $A_2$:

$$A_1 = \frac{\alpha_2 [\beta_1 v_1^*(l, \lambda) + \beta_2 v_2^*(l, \lambda)]}{D(\lambda)} = \frac{\alpha_2 a(\lambda)}{D(\lambda)},$$

$$A_2 = \frac{-\alpha_1 [\beta_1 v_1^*(l, \lambda) + \beta_2 v_2^*(l, \lambda)]}{D(\lambda)} = \frac{-\alpha_1 a(\lambda)}{D(\lambda)}.$$

Очевидно, что $a(\lambda)$, $D(\lambda)$ — аналитические, целые функции $\lambda$. Внутри полосы $|\operatorname{Re}\lambda| < \mathrm{const}$ выполнена оценка

$$|a(\lambda)| < \frac{N}{|\lambda|}(|\beta_1| + |\beta_2|).$$

Очевидно также, что $|D(\lambda)| < \mathrm{const}$ в нашей полосе. Это позволяет написать, что решение краевой задачи представимо в виде

$$v_1 = v_1^* + A_1 v_1^{(1)} + A_2 v_1^{(2)} = \frac{1}{D(\lambda)} \hat{v}_1(x, \lambda),$$

$$v_2 = v_2^* + A_1 v_2^{(1)} + A_2 v_2^{(2)} = \frac{1}{D(\lambda)} \hat{v}_2(x, \lambda)$$

с целыми аналитическими (по $\lambda$) $\hat{v}_1(x, \lambda)$, $\hat{v}_2(x, \lambda)$, удовлетворяющими при достаточно больших $|\lambda|$ ($|\operatorname{Re}\lambda| < \text{const}$) неравенствам $|\hat{v}_i| < \frac{\text{const}}{|\lambda|}$. Для $D(\lambda)$ имеем в той же полосе формулы

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 v_1^{(1)}(l, \lambda) + \beta_2 v_2^{(1)}(l, \lambda) & \beta_1 v_1^{(2)}(l, \lambda) + \beta_2 v_2^{(2)}(l, \lambda) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 e^{-\lambda y_1(l) - \mu_1(l)} & \beta_2 e^{\lambda y_2(l) + \mu_2(l)} \end{vmatrix} + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) =$$

$$= \alpha_1 \beta_2 e^{\lambda y_2(l) + \mu_2(l)} - \alpha_2 \beta_1 e^{-\lambda y_1(l) - \mu_1(l)} + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right).$$

Напомним, что $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$.

Будем говорить, что *вектор-функция* $(v_1(x), v_2(x))$ *является собственной вектор-функцией с собственным значением* $\lambda_0$, *если* $v_1$, $v_2$ *не равны тождественно нулю, удовлетворяют однородной системе*

$$\lambda_0 v_1 + k_1 \frac{dv_1}{dx} + m_{11} v_1 + m_{12} v_2 = 0,$$

$$\lambda_0 v_2 - k_2 \frac{dv_2}{dx} + m_{21} v_1 + m_{22} v_2 = 0$$

*и граничным условиям*

$$\alpha_1 v_1(0) + \alpha_2 v_2(0) = 0,$$
$$\beta_1 v_1(l) + \beta_2 v_2(l) = 0.$$

Вектор-функции, тождественно равные нулю, к числу собственных функций не причисляются. Покажем, что всегда, *если* $D(\lambda_0) = 0$, *то существует собственная вектор-функция с собственным значением* $\lambda_0$. В самом деле, равенство нулю определителя системы

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = 0,$$
$$[\beta_1 v_1^{(1)}(l, \lambda_0) + \beta_2 v_2^{(1)}(l, \lambda_0)]\, a_1 + [\beta_1 v_1^{(2)}(l, \lambda_0) + \beta_2 v_2^{(2)}(l, \lambda_0)]\, a_2 = 0$$

показывает, что у этой системы есть ненулевое решение $a_1$, $a_2$, т. е. существует вектор-функция

$$v_1(x) = a_1 v_1^{(1)}(x, \lambda_0) + a_2 v_1^{(2)}(x, \lambda_0),$$
$$v_2(x) = a_2 v_2^{(1)}(x, \lambda_0) + a_2 v_2^{(2}(x, \lambda_0),$$

удовлетворяющая однородной системе, граничным условиям и принимающая в точке $x = 0$ начальные значения $(a_1, a_2)$, образующие ненулевой вектор.

Пусть теперь, наоборот, $D(\lambda_0) \neq 0$. Любое решение однородной системы записывается в виде

$$v_1 = A_1 v_1^{(1)} + A_2 v_1^{(2)},$$
$$v_2 = A_1 v_2^{(1} + A_2 v_2^{(2)}.$$

Если известно, что это решение удовлетворяет однородным граничным условиям, то, следовательно, для $A_1$ и $A_2$ выполнены равенства

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 = 0,$$
$$[\beta_1 v_1^{(1)}(l, \lambda_0) + \beta_2 v_2^{(1)}(l, \lambda_0)] A_1 + [\beta_1 v_1^{(2)}(l, \lambda_0) + \beta_2 v_2^{(2)}(l, \lambda_0)] A_2 = 0.$$

Так как определитель этой системы $D(\lambda_0) \neq 0$, то отсюда вытекает, что $A_1 = A_2 = 0$. Значит, $v_1 \equiv v_2 \equiv 0$ и $\lambda_0$ не является собственным значением.

Итак, мы показали, что *собственные значения* (*и только они*) *являются нулями некоторой целой аналитической функции* $D(\lambda)$. Покажем еще, что при $|\mathrm{Re}\,\lambda| > K$, а следовательно, и подавно при $|\mathrm{Re}\,\lambda| \geqslant K^* \geqslant K$ не может быть нулей $D(\lambda)$, т. е. собственных значений. Этот вывод будет сделан при помощи следующего рассуждения, которое можно сделать совсем строгим. У нас оно будет строгим не до конца. В чем его нестрогость, мы отметим позднее.

Пусть $\lambda = \lambda_0$ является нулем $D(\lambda)$. Как было показано, отсюда следует существование вектор-функции $(v_1(x), v_2(x))$, удовлетворяющей уравнениям

$$\lambda_0 v_1 + k_1 \frac{dv_1}{dx} + m_{11} v_1 + m_{12} v_2 = 0,$$

$$\lambda_0 v_2 - k_2 \frac{dv_2}{dx} + m_{21} v_1 + m_{22} v_2 = 0$$

и граничным условиям

$$\alpha_1 v_1(0) + \alpha_2 v_2(0) = 0,$$
$$\beta_1 v_1(l) + \beta_2 v_2(l) = 0.$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что функции

$$u_i(x, t) = e^{\lambda_0 t} v_i(x)$$

удовлетворяют исходной системе уравнений и его граничным условиям. Это решение растет при $t \to \infty$ как $e^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda_0}$, что невозможно при $\mathrm{Re}\,\lambda_0 > K$. Отсюда и выводится, что $\mathrm{Re}\,\lambda_0 \leqslant K$. Нестрогость этого вывода, впрочем, устранимая, состоит в том, что оценка роста решений как $e^{Kt}$ была выведена только для достаточно гладких начальных данных, гладко согласованных с граничными условиями. Для решения, участвующего в нашем рассуждении, в качестве начальных данных надо выбрать

$$\varphi_i(x) = v_i(x, \lambda_0).$$

Исследование гладкости собственных функций и согласования этой гладкости с граничными условиями мы не проводили.

То, что $\operatorname{Re}\lambda_0 > -K$, показывается точно так же, если заметить, что решение

$$e^{\lambda_0 t} v_l(x, \lambda_0)$$

при $t \to -\infty$ растет не быстрее $e^{K|t|} = e^{-Kt}$.

Таким образом, мы доказали, что все нули $D(\lambda)$ расположены в полосе $|\operatorname{Re}\lambda| < K^*$.

Мы в дальнейшем убедимся, что $D(\lambda)$ не является тождественным нулем. Отсюда уже можно будет сделать важный вывод, что нули $D(\lambda)$ лежат на плоскости $\lambda$ дискретно, не имея конечных предельных точек, и каждый из этих нулей имеет конечную кратность. Если бы это было не так, то по теореме единственности для аналитических функций $D(\lambda)$ было бы тождественным нулем. Итак, в каждой конечной области полосы $\lambda$ существует конечное число нулей $D(\lambda)$. (Каждый нуль считается вместе с его кратностью.) То, что $D(\lambda) \not\equiv 0$, вытекает из асимптотической формулы, которую мы получили для больших по модулю $\lambda$, лежащих в полосе $|\operatorname{Re}\lambda| < \text{const}$. Из нее же будет вытекать асимптотический закон распределения собственных значений, попавших в эту полосу.

Асимптотическую формулу для $D(\lambda)$ мы получили в виде:

$$D(\lambda) = \alpha_1\beta_2 e^{\lambda y_2(l) + \mu_2(l)} - \alpha_2\beta_1 e^{-\lambda y_1(l) - \mu_1(l)} + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$$

$$(\alpha_1 \neq 0, \quad \beta_2 \neq 0, \quad \alpha_2 \neq 0, \quad \beta_1 \neq 0).$$

Обозначив $\dfrac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2\beta_1} = e^{\nu}$ ($\nu$ вещественно или комплексно, в зависимости от знака дроби), можем написать

$$D(\lambda) = \alpha_2\beta_1 e^{-\lambda y_1(l) - \mu_1(l)} \left\{e^{\lambda[y_1(l) + y_2(l)] + [\mu_2(l) + \mu_1(l)] + \nu} - 1\right\} + \\ + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) = \Delta(\lambda)\left(e^{\lambda\varkappa + \mu + \nu} - 1\right) + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right),$$

где обозначено

$$\Delta(\lambda) = \alpha_2\beta_1 e^{-\lambda y_1(l) - \mu_1(l)},$$

$$\varkappa = y_1(l) + y_2(l) = \int_0^l \frac{dx}{k_1(x)} + \int_0^l \frac{dx}{k_2(x)},$$

$$\mu = \mu_1(l) + \mu_2(l) = \int_0^l \frac{m_{11}(x)}{k_1(x)}\,dx + \int_0^l \frac{m_{22}(x)}{k_2(x)}\,dx,$$

$$\nu = \operatorname{Ln}\frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2\beta_1}.$$

Внутри полосы $|\operatorname{Re}\lambda| < \text{const}$ множитель $\Delta(\lambda)$ ограничен по модулю как сверху, так и снизу:

$$0 < \Delta_0 < |\Delta(\lambda)| < \Delta_1.$$

Рассмотрим теперь (внутри нашей полосы) уравнение

$$D(\lambda)=0,$$

$$D(\lambda)=\Delta(\lambda)\left(e^{\lambda\varkappa+\mu+\nu}-1\right)+O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)=0.$$

В его корнях, очевидно,

$$e^{\lambda\varkappa+\mu+\nu}=1+O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$$

или, что то же самое,

$$\lambda\varkappa+\mu+\nu=i2\pi p+O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)=i2\pi p+O\left(\frac{1}{|p|}\right),\quad p=0,\ \pm 1,\ \ldots$$

Иными словами,

$$\lambda_p=\frac{2ip\pi-\mu-\nu}{\varkappa}+O\left(\frac{1}{|p|}\right).$$

Мы показали, что при достаточно больших $|\lambda|$ в нашей полосе нули $D(\lambda)$ могут быть лишь вблизи точек $\dfrac{2p\pi i-\mu-\nu}{\varkappa}$.

Покажем, что при достаточно большом $p$ действительно существует, и притом только один, нуль $D(\lambda)$ вблизи такой точки. Выберем некоторый достаточно маленький радиус $\rho$ такой, чтобы внутри окружности $\left|\lambda-\dfrac{-\mu-\nu}{\varkappa}\right|=\rho$ $\left(\lambda=\dfrac{-\mu-\nu}{\varkappa}+\rho e^{i\theta}\right)$ лежал только один нуль функции $e^{\lambda\varkappa+\mu+\nu}-1$. Этот нуль, очевидно, отвечает значению $\lambda=\dfrac{-\mu-\nu}{\varkappa}$. Очевидно, что внутри каждой из окружностей

$$\lambda=\frac{2p\pi i-\mu-\nu}{\varkappa}+\rho e^{i\theta}$$

при любом целом $p$ будет тогда содержаться только один нуль $\lambda=\dfrac{2p\pi i-\mu-\nu}{\varkappa}$ функции $\Delta(\lambda)\left\{e^{\lambda\varkappa+\mu+\nu}-1\right\}$. На этих окружностях выражение в фигурных скобках

$$e^{\lambda\varkappa+\mu+\nu}-1=e^{\varkappa\rho e^{i\theta}}-1$$

не зависит от $p$ и, следовательно, ограничено снизу по модулю положительной постоянной. Функция $\Delta(\lambda)$ тоже ограничена снизу по модулю ($|\Delta(\lambda)|>\Delta_0$). Поэтому (на окружностях) все произведение

$$|\Delta(\lambda)\left\{e^{\lambda\varkappa+\mu+\nu}-1\right\}|\geqslant b.$$

Следовательно, по теореме Руше это произведение, отличающееся от $D(\lambda)$ на $O\left(\dfrac{1}{|\lambda|}\right)$, будет при достаточно больших $p$ иметь внутри такой окружности столько же нулей, сколько и $D(\lambda)$.

Отсюда вытекает существование и простота корней $D(\lambda)$ внутри этих окружностей при достаточно больших по модулю $p$.

Пусть при $|\lambda|=|\sigma+i\tau|=\sqrt{\sigma^2+\tau^2}>R$ все нули в полосе $|\operatorname{Re}\lambda|=|\sigma|<\text{const}$ — простые и лежат по одному внутри окружностей

$$\lambda=\frac{2p\pi i-\mu-\nu}{\varkappa}+\rho e^{i\theta}.$$

В конечной части полосы, высекаемой неравенством

$$|\lambda|\leqslant R,$$

имеется конечное число нулей, считаемых столько раз, какова их кратность. Таким образом, число нулей в прямоугольнике

$$-K^*\leqslant\sigma\leqslant K^*,$$

$$\frac{-(2p+1)\pi-\operatorname{Im}\nu}{\varkappa}\leqslant\tau\leqslant\frac{(2p+1)\pi-\operatorname{Im}\nu}{\varkappa}$$

равно (при достаточно больших $p$) $2p+p_0$ ($p_0$ — некоторое фиксированное целое число).

Пусть теперь $\lambda=\sigma+i\dfrac{(2p+1)\pi-\operatorname{Im}\nu}{\varkappa}$ $(-K^*\leqslant\sigma\leqslant K^*)$, т. е. пусть $\lambda$ пробегает горизонтальный отрезок, лежащий (при больших $p$) почти «по середине» между двумя нулями

$$\lambda_p=\frac{2ip\pi-\mu-\nu}{\varkappa}+O\left(\frac{1}{|p|}\right) \text{ и } \lambda_{p+1}=\frac{2i(p+1)\pi-\mu-\nu}{\varkappa}+O\left(\frac{1}{|p|}\right).$$

На этом горизонтальном отрезке

$$e^{\lambda\varkappa+\mu+\nu}-1=e^{\sigma\varkappa+\mu}e^{\operatorname{Re}\nu}e^{i(2p+1)\pi}-1=-e^{\sigma\varkappa+\operatorname{Re}\nu+\mu}-1,$$

$$|e^{\lambda\varkappa+\mu+\nu}-1|>1,$$

$$|D(\lambda)|=|\Delta(\lambda)|\,|e^{\lambda\varkappa+\mu+\nu}-1|+O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)>\Delta_0+O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\geqslant\frac{\Delta_0}{2}$$

(при достаточно больших $|p|$). Теперь вспомним про представление

$$v_i(x,\lambda)=\frac{\hat{v}_i(x,\lambda)}{D(\lambda)},\qquad |\hat{v}_i(x,\lambda)|<\frac{\text{const}}{|\lambda|},$$

полученное в начале этого параграфа.

Из этого представления и неравенства для $D(\lambda)$ следует, что на изучаемых горизонтальных отрезках

$$\left(\operatorname{Im}\lambda=\frac{(2p+1)\pi-\operatorname{Im}\nu}{\varkappa};\quad |\operatorname{Re}\lambda|\leqslant K^*\right)$$

$$|v_i(x,\lambda)|<\frac{\text{const}}{|\lambda|}.$$

На этом мы заканчиваем изучение функций $v_i(x,\lambda)$, определенных в полосе $|\operatorname{Re}\lambda|\leqslant K^*$ с помощью системы дифференциальных уравнений, зависящих от параметра $\lambda$,

$$\lambda v_1 + k_1 \frac{dv_1}{dx} + m_{11} v_1 + m_{12} v_2 = \varphi_1,$$
$$\lambda v_2 - k_2 \frac{dv_2}{dx} + m_{21} v_1 + m_{22} v_2 = \varphi_2,$$
$$0 \leqslant x \leqslant l,$$
$$\alpha_1 v_1 (0,\ \lambda) + \alpha_2 v_2 (0,\ \lambda) = 0,$$
$$\beta_1 v_1 (l,\ \lambda) + \beta_2 v_2 (l,\ \lambda) = 0.$$

Вспомним теперь, что в § 28, рассматривая решение обратимой гиперболической системы

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + k_1 (x) \frac{\partial u_1}{\partial x} + m_{11} (x) u_1 + m_{12} (x) u_2 = 0,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - k_2 (x) \frac{\partial u_2}{\partial x} + m_{21} (x) u_1 + m_{22} (x) u_2 = 0,$$
$$u_i (x,\ 0) = \varphi_i (x),$$
$$\alpha_1 u_1 (0,\ t) + \alpha_2 u_2 (0,\ t) = 0,$$
$$\beta_1 u_1 (l,\ t) + \beta_2 u_2 (l,\ t) = 0,$$

растущее вместе с производными не быстрее, чем $e^{Kt}$, и его преобразования Лапласа

$$v_i (x,\ \lambda) = \int_0^{\infty} u_i (x,\ t) e^{-\lambda t} dt \quad (\operatorname{Re} \lambda > K),$$
$$v_i (x,\ \lambda) = \int_0^{-\infty} u_i (x,\ t) e^{-\lambda t} dt \quad (\operatorname{Re} \lambda < -K),$$

мы установили, что эти преобразования $v_i (x,\ \lambda)$ являются аналитическими функциями $\lambda$ в указанных полуплоскостях и удовлетворяют там как раз тем уравнениям, что изучались нами при $|\operatorname{Re} \lambda| < K^*$. Напомним, что $K^*$ выбиралось бо́льшим, чем $K$. Отсюда следует, что полоса $|\operatorname{Re} \lambda| < K^*$ пересекается с каждой из полуплоскостей $(\operatorname{Re} \lambda > K)$, $(\operatorname{Re} \lambda < -K)$. В этих пересечениях решение краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений единственно и, следовательно, совпадает с соответствующим преобразованием Лапласа. Так как преобразования Лапласа и решение обыкновенных дифференциальных уравнений — аналитические функции $\lambda$, а аналитическая функция однозначно определяется своими значениями на любом множестве, имеющем хотя бы одну конечную предельную точку, то и решение обыкновенных дифференциальных уравнений и преобразование Лапласа при $\operatorname{Re} \lambda < -K$ могут рассматриваться как аналитическое продолжение преобразования Лапласа при $\operatorname{Re} \lambda > K$.

Свойства этого аналитического продолжения нами теперь тщательно изучены. Мы установили, что при $\operatorname{Re}\lambda < -K^*$ это продолжение $v_i(x, \lambda)$ удовлетворяет оценке $|v_i(x, \lambda)| < \frac{\text{const}}{|\lambda|}$, а в полосе $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant K^*$ для $v_i(x, \lambda)$ выведены достаточно точные асимптотические формулы. Из этих формул, в частности, было показано, что при

$$|\operatorname{Re}\lambda| < K^*, \quad \operatorname{Im}\lambda = \frac{(2p+1)\pi - \operatorname{Im}\nu}{\varkappa}$$

функции $v_i(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$. Как было ранее доказано, из этих фактов следует справедливость следующей формулы обращения преобразования Лапласа, записанной в виде контурного интеграла

$$u_i(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Pi_p} e^{\lambda t} v_i(x, \lambda)\, d\lambda + O\left(\frac{1}{p}\right).$$

Контур $\Pi_p$ здесь является границей прямоугольника

$$|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant K^*,$$
$$\frac{-(2p+1)\pi - \operatorname{Im}\nu}{\varkappa} \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant \frac{(2p+1)\pi - \operatorname{Im}\nu}{\varkappa},$$

внутри которого, как мы знаем, содержится $2p + p_0$ полюсов $v_i(x, \lambda)$. Оценка остаточного члена $O\left(\frac{1}{p}\right)$ здесь равномерна для всех $0 \leqslant x \leqslant l$ и для любого фиксированного конечного отрезка изменения времени $0 < t_0 \leqslant t \leqslant T$, ограниченного снизу положительным моментом $t_0$.

## § 31. Полнота системы собственных функций

Напоминание доказанных в предыдущих параграфах фактов о свойствах $v_i(x, \lambda)$ — аналитических функций от $\lambda$ и о приближенном представлении решения смешанной задачи контурным интегралом. Вычисление отдельных вычетов. Решение приближается суммой конечного числа «стоячих волн». Видоизменения в случае кратных полюсов. Замечания о возможности распространения теории на системы, не приведенные к каноническому виду.

Теорема о полноте собственных функций. Примеры, показывающие существенность обратимости задачи для применимости метода Фурье.

Изучив в прошлых параграфах аналитические свойства преобразования Лапласа решений гиперболических систем, мы получили в свое распоряжение мощный аппарат для качественного исследования этих решений. Здесь будет показано, как этот аппарат применяется.

Мы рассматриваем обратимую задачу для системы (с гладкими коэффициентами)

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+k_1(x)\frac{\partial u_1}{\partial x}+m_{11}(x)u_1+m_{12}(x)u_2=0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}-k_2(x)\frac{\partial u_2}{\partial x}+m_{21}(x)u_1+m_{22}(x)u_2=0,$$

$$k_i(x)>0,\quad 0\leqslant x\leqslant l.$$

Эта задача определяется граничными условиями

$$\alpha_1u_1(0,\ t)+\alpha_2u_2(0,\ t)=0,\qquad \alpha_1\neq 0,\ \alpha_2\neq 0,$$

$$\beta_1u_1(l,\ t)+\beta_2u_2(l,\ t)=0,\qquad \beta_1\neq 0,\ \beta_2\neq 0$$

и начальными данными

$$u_i(x,\ 0)=\varphi_i(x),$$

которые предполагаются достаточно гладкими и гладко согласованными с граничными условиями.

Было показано, что существует некоторое $K$ такое, что при $\operatorname{Re}\lambda>K$ определено преобразование Лапласа $v_i(x,\ \lambda)$ решения $u_i(x,\ t)$:

$$v_i(x,\ \lambda)=\int_0^\infty u_i(x,\ t)e^{-\lambda t}\,dt.$$

Функции $v_i(x,\ \lambda)$ допускают, как аналитические функции $\lambda$, продолжение на всю плоскость комплексного переменного с выколотыми дискретно расположенными полюсами. Все эти полюса расположены в полосе $|\operatorname{Re}\lambda|\leqslant K$; все они, за исключением конечного числа, — простые, не имеют конечных предельных точек. Они описываются следующей асимптотической формулой:

$$\lambda_p=\frac{2\pi ip-\mu-\nu}{\varkappa}+O\left(\frac{1}{|p|}\right),\quad p\to\pm\infty - \text{целые}.$$

Параметры $\mu$, $\nu$, $\varkappa$ вычисляются через коэффициенты уравнений и граничных условий. Была доказана следующая «формула обращения»:

$$u_i(x,\ t)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Pi_p} e^{\lambda t}v_i(x,\ \lambda)\,d\lambda+O\left(\frac{1}{p}\right),$$

в которой через $\Pi_p$ обозначена граница прямоугольника

$$|\operatorname{Re}\lambda|\leqslant K^*,\quad \frac{-(2p+1)\pi-\operatorname{Im}\nu}{\varkappa}\leqslant\operatorname{Im}\lambda\leqslant\frac{(2p+1)\pi-\operatorname{Im}\nu}{\varkappa}.$$

Внутри каждого такого прямоугольника содержится конечное число $(2p+p_0)$ полюсов функций $v_i(x,\ \lambda)$. Поэтому интеграл по $\Pi_p$ может быть заменен на конечную сумму не более чем $2p+p_0$

слагаемых по контурам $\Gamma_k$, каждый из которых содержит только по одному полюсу $v_i(x, \lambda)$:

$$u_i(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \oint_{\Gamma_k} e^{\lambda t} v_i(x, \lambda)\, d\lambda + O\left(\frac{1}{p}\right).$$

Оценка остаточного члена $O\left(\frac{1}{p}\right)$ равномерна для любого отрезка $[t_0, T]$ времени такого, что $0 < t_0 \leqslant T$, и при $0 \leqslant x \leqslant l$.

Для вычисления интегралов по $\Gamma_k$ легко применить теорию вычетов. Пусть $\lambda = \lambda_k$ — простой полюс $v_i(x, \lambda)$, т. е. $D(\lambda_k) = 0$, $D'(\lambda_k) \neq 0$. Как было показано в предыдущем параграфе, решение краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений представимо в виде

$$v_i(x, \lambda) = \frac{\hat{v}_i(x, \lambda)}{D(\lambda)}$$

с целыми, аналитическими по $\lambda$ функциями $\hat{v}_i(x, \lambda)$. Так как $v_i(x, \lambda)$ удовлетворяют системе уравнений с правыми частями $\varphi_i(x)$, то, следовательно, функции $\hat{v}_i(x, \lambda)$ удовлетворяют системе

$$\lambda \hat{v}_1 + k_1 \frac{d\hat{v}_1}{dx} + m_{11}\hat{v}_1 + m_{12}\hat{v}_2 = D(\lambda)\varphi_1,$$

$$\lambda \hat{v}_2 - k_2 \frac{d\hat{v}_2}{dx} + m_{21}\hat{v}_1 + m_{22}\hat{v}_2 = D(\lambda)\varphi_2.$$

Отсюда видно, что если $D(\lambda_k) = 0$, то пара $\hat{v}_1(x, \lambda)$, $\hat{v}_2(x, \lambda)$ удовлетворяет однородной системе уравнений и краевым условиям.

В предыдущем параграфе было показано также, что при условии $D(\lambda_k) = 0$ существует собственная вектор-функция — ненулевое решение однородной системы, удовлетворяющее однородным краевым условиям. Так как по предположению $\lambda_k$ — простой корень, то (как нетрудно заметить из рассмотрений предыдущего параграфа) существует лишь единственная с точностью до множителя собственная вектор-функция. Мы будем обозначать ее, нормировав каким-либо образом, через $\left(v_1^{(k)}(x), v_2^{(k)}(x)\right)$. Итак,

$$\hat{v}_i(x, \lambda_k) = c_k v_i^{(k)}(x).$$

Теперь нетрудно уже и подсчитать интеграл по $\Gamma_k$:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_k} e^{\lambda t} v_i(x, \lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_k} \frac{e^{\lambda t}\hat{v}_i(x, \lambda)}{D(\lambda)}\, d\lambda =$$

$$= \frac{e^{\lambda_k t}\hat{v}_i(x, \lambda_k)}{D'(\lambda_k)} = \frac{c_k}{D'(\lambda_k)} e^{\lambda_k t} v_i^{(k)}(x).$$

Обозначим $\frac{c_k}{D'(\lambda_k)} = d_k$. Таким образом, если $D(\lambda)$ не имеет кратных нулей, то решение $u_i(x, t)$ нашей задачи может быть представлено в виде:

$$u_i(x, t) = \sum_{\substack{(2p+p_0 \\ \text{слагаемых})}} d_k v_i^{(k)}(x)\, e^{\lambda_k t} + O\left(\frac{1}{p}\right)$$

с оценкой остаточного члена, равномерной по $x$ и $t$,

$$0 \leqslant x \leqslant l, \qquad 0 < t_0 \leqslant t \leqslant T.$$

Непосредственной подстановкой в систему

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + m_{11}u_1 + m_{12}u_2 = 0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + m_{21}u_1 + m_{22}u_2 = 0$$

и граничные условия

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 |_{x=0} = 0, \qquad \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 |_{x=l} = 0$$

легко убедиться, что функции

$$u_i^{(k)} = v_i^{(k)}(x)\, e^{\lambda_k t}$$

являются частными решениями этой системы и удовлетворяют граничным условиям. Такие частные решения носят название «стоячих волн». Это название связано с тем, что «форма волны» $v_i^{(k)}(x)$ не зависит от времени, тогда как ее «амплитуда» определяется зависящим только от $t$ множителем $e^{\lambda_k t}$.

Кратко говорят, что решение может быть аппроксимировано конечной суммой стоячих волн. На простом примере уравнений акустики представление решения в виде ряда по собственным функциям было доказано в вводной части (гл. I, § 7).

Мы не будем до конца уточнять формулировки в случае кратных нулей $D(\lambda)$. Ограничимся рассмотрением примера двукратного корня $D(\lambda_k) = 0$, $D'(\lambda_k) = 0$, $D''(\lambda_k) \neq 0$. При этом

$$D(\lambda) = \frac{D''(\lambda_k)}{2}(\lambda - \lambda_k)^2 + \frac{D'''(\lambda_k)}{6}(\lambda - \lambda_k)^3 + \ldots;$$

$$\frac{1}{D(\lambda)} = \frac{2}{D''(\lambda_k)} \frac{1}{(\lambda - \lambda_k)^2} - \frac{2D'''(\lambda_k)}{3[D''(\lambda_k)]^2} \frac{1}{\lambda - \lambda_k} + \text{аналитическая функция};$$

$$e^{\lambda t} = e^{\lambda_k t} + (\lambda - \lambda_k)\, t e^{\lambda_k t} + \frac{(\lambda - \lambda_k)^2 t^2}{2} e^{\lambda_k t} + \ldots;$$

$$\frac{e^{\lambda t}}{D(\lambda)} = \frac{2}{D''(\lambda_k)} \cdot \frac{e^{\lambda_k t}}{(\lambda - \lambda_k)^2} + \left[\frac{2t}{D''(\lambda_k)} - \frac{2D'''(\lambda_k)}{3[D''(\lambda_k)]^2}\right] \frac{e^{\lambda_k t}}{\lambda - \lambda_k} + $$
$$+ \text{аналитическая функция};$$

$$\hat{v}_i(x, \lambda) = \hat{v}_i(x, \lambda_k) + (\lambda - \lambda_k)\left[\frac{\partial \hat{v}_i(x, \lambda)}{\partial \lambda}\right]_{\lambda = \lambda_k} + \ldots.$$

Перемножим два последних ряда:

$$\frac{e^{\lambda t}\hat{v}_i(x,\ \lambda)}{D(\lambda)}=\frac{2\hat{v}_i(x,\ \lambda_k)}{D''(\lambda_k)}\frac{e^{\lambda_k t}}{(\lambda-\lambda_k)^2}+\left\{\left[\frac{2t}{D''(\lambda_k)}-\frac{2D'''(\lambda_k)}{3[D''(\lambda_k)]^2}\right]\hat{v}_i(x,\ \lambda_k)e^{\lambda_k t}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{D''(\lambda_k)}\frac{\partial\hat{v}_i(x,\ \lambda_k)}{\partial\lambda_k}e^{\lambda_k t}\right\}\frac{1}{\lambda-\lambda_k}+\text{аналитическая функция от }\lambda=$$

$$=\frac{\text{функция от }x,\ t}{(\lambda-\lambda_k)^2}+\left[te^{\lambda_k t}\tilde{v}_i^{(k)}(x)+e^{\lambda_k t}\tilde{\tilde{v}}_i^{(k)}(x)\right]\frac{1}{\lambda-\lambda_k}+$$

$$+\text{аналитическая функция.}$$

Отсюда

$$u_i^{(k)}(x,\ t)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_k}\frac{e^{\lambda t}\hat{v}_i(x,\ \lambda)}{D(\lambda)}d\lambda=te^{\lambda_k t}\tilde{v}_i^{(k)}(x)+e^{\lambda_k t}\tilde{\tilde{v}}_i^{(k)}(x).$$

Мы ввели здесь обозначения

$$\frac{2\hat{v}_i(x,\ \lambda_k)}{D''(\lambda_k)}=\tilde{v}_i^{(k)}(x),$$

$$-\frac{2D'''(\lambda_k)}{3[D''(\lambda_k)]^2}\hat{v}_i(x,\ \lambda_k)+\frac{2}{D''(\lambda_k)}\frac{\partial\hat{v}_i(x,\ \lambda_k)}{\partial\lambda_k}=\tilde{\tilde{v}}_i^{(k)}(x).$$

Задача 1. Докажите, что $\tilde{v}_i^{(k)}$, $\tilde{\tilde{v}}_i^{(k)}$ удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\lambda_k\tilde{v}_1^{(k)}+k_1\frac{d\tilde{v}_1^{(k)}}{dx}+m_{11}\tilde{v}_1^{(k)}+m_{12}\tilde{v}_2^{(k)}=0,$$

$$\lambda_k\tilde{v}_2^{(k)}-k_2\frac{d\tilde{v}_2^{(k)}}{dx}+m_{21}\tilde{v}_1^{(k)}+m_{22}\tilde{v}_2^{(k)}=0,$$

$$\tilde{v}_1^{(k)}+\lambda_k\tilde{\tilde{v}}_1^{(k)}+k_1\frac{d\tilde{\tilde{v}}_1^{(k)}}{dx}+m_{11}\tilde{\tilde{v}}_1^{(k)}+m_{12}\tilde{\tilde{v}}_2^{(k)}=0,$$

$$\tilde{v}_2^{(k)}+\lambda_k\tilde{\tilde{v}}_2^{(k)}-k_2\frac{d\tilde{\tilde{v}}_2^{(k)}}{dx}+m_{21}\tilde{\tilde{v}}_1^{(k)}+m_{22}\tilde{\tilde{v}}_2^{(k)}=0,$$

и граничным условиям:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1\tilde{v}_1^{(k)}+\alpha_2\tilde{v}_2^{(k)}&=0,\\ \alpha_1\tilde{\tilde{v}}_1^{(k)}+\alpha_2\tilde{\tilde{v}}_2^{(k)}&=0\end{aligned}\right\}\quad\text{при}\quad x=0,$$

$$\left.\begin{aligned}\beta_1\tilde{v}_1^{(k)}+\beta_2\tilde{v}_2^{(k)}&=0,\\ \beta_1\tilde{\tilde{v}}_1^{(k)}+\beta_2\tilde{\tilde{v}}_2^{(k)}&=0\end{aligned}\right\}\quad\text{при}\quad x=l.$$

Функции $v_i^{(k)}$ опять являются собственными, а $\tilde{\tilde{v}}_i^{(k)}$ носят название *присоединенных собственных функций*.

Задача 2. Если $\lambda_0$ — двукратный корень характеристического уравнения $D(\lambda)=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0$, то любое решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_1}{dt}=a_{11}u_1+a_{12}u_2,$$

$$\frac{du_2}{dt}=a_{21}u_1+a_{22}u_2$$

представляется в виде

$$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=te^{\lambda_0 t}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}+e^{\lambda_0 t}\begin{pmatrix}\tilde{v}_1\\\tilde{v}_2\end{pmatrix},$$

где $v_i$, $\tilde{v}_i$ являются решением линейной системы:

$$\lambda_0 v_1=a_{11}v_1+a_{12}v_2,$$

$$\lambda_0 v_2=a_{21}v_1+a_{22}v_2,$$

$$v_1+\lambda_0\tilde{v}_1=a_{11}\tilde{v}_1+a_{12}\tilde{v}_2,$$

$$v_2+\lambda_0\tilde{v}_2=a_{21}\tilde{v}_1+a_{22}\tilde{v}_2.$$

Покажите, что $v_1$, $v_2$ отличны от нуля, лишь если матрица $\|a_{ik}\|$ не приводится подобным преобразованием к диагональному виду.

Задачи 1 и 2 позволяют проследить и в случаях кратных корней $D(\lambda)$ аналогию между нашими гиперболическими системами и системами линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Доказанное нами утверждение о возможности как угодно точного приближения решения конечными суммами «стоячих волн», т. е. суммами специальных решений, которые в случае простых корней $D(\lambda)$ имеют вид $u_i=v_i^{(k)}(x)e^{\lambda_k t}$, представляет собой основной результат этой главы.

Способ отыскания решения краевой задачи в виде суперпозиции таких специальных решений носит название метода Фурье. Таким образом, нами обоснован метод Фурье для обратимой гиперболической системы в случае двух независимых переменных при определенных ограничениях на коэффициенты и краевые условия. Ради этого мы развили теорию преобразования Лапласа, которой были посвящены параграфы этой главы.

Подробно метод Фурье для системы акустики был разобран в вводной части. Для этой системы мы не только доказали, что произвольное колебание можно представить в виде суперпозиции стоячих волн, но и показали, как, исходя из начальных данных, вычислить коэффициенты разложения.

В следующем параграфе мы сделаем то же самое для специальных систем более общего вида. А сейчас сделаем ряд замечаний по поводу доказанной теоремы о разложении.

Напомним, что разбираемая задача предполагается обратимой, а начальные данные $u_i(x, 0)=\varphi_i(x)$ должны быть достаточно гладкими и согласованными с граничными условиями.

Система, для которой проводилось доказательство, была записана в каноническом виде. На самом деле, такое же утверждение об аппроксимации решений стоячими волнами имеет место и для системы, не приведенной к каноническому виду, лишь бы ее коэффициенты зависели только от $x$ и лишь бы для нее приведение к каноническому виду (со всеми ограничениями на $k_1(x)$, $k_2(x)$ и граничные условия) было выполнимо. Заметим еще, что если коэффициенты системы зависят только от $x$, то элементы матрицы преобразования искомых функций, приводящей такую систему к каноническому виду, тоже могут быть выбраны зависящими только от $x$. В этом можно убедиться, если вспомнить процесс приведения, который мы разбирали еще во второй главе. Сейчас мы подробнее останавливаться на этом не будем.

Теперь мы выведем из теоремы об аппроксимации решений одно очень важное следствие, которое обычно носит название *теоремы о полноте множества собственных* (*и присоединенных*) *функций*.

Пусть система

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + k_1(x)\frac{\partial u_1}{\partial x} + m_{11}(x)u_1 + m_{12}(x)u_2 = 0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - k_2(x)\frac{\partial u_2}{\partial x} + m_{21}(x)u_1 + m_{22}(x)u_2 = 0$$

с граничными условиями

$$\alpha_1 u_1(0,\ t) + \alpha_2 u_2(0,\ t) = 0, \quad \beta_1 u_1(l,\ t) + \beta_2 u_2(l,\ t) = 0$$

удовлетворяет всем условиям применимости предыдущей теоремы.

Во всяком случае, это значит, что для достаточно гладких $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, согласованных с граничными условиями, существует решение системы $(u_1(x,\ t),\ u_2(x,\ t))$ такое, что

$$u_1(x,\ 0) = \varphi_1(x), \quad u_2(x,\ 0) = \varphi_2(x).$$

Такое решение существует как для $t > 0$, так и для $t < 0$. При $t = -\tau$ ($\tau$ — некоторое положительное число) это решение принимает определенные значения

$$u_1(x,\ -\tau) = \psi_1(x),$$
$$u_2(x,\ -\tau) = \psi_2(x).$$

Заметим теперь, что если $(u_1(x,\ t),\ u_2(x,\ t))$ является решением, то решением является также

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u}_1(x,\ t) = u_1(x,\ t-\tau),$$
$$\tilde{u}_2 = \tilde{u}_2(x,\ t) = u_2(x,\ t-\tau).$$

Это решение удовлетворяет при $t = 0$ начальным условиям

$$\tilde{u}_1(x,\ 0) = \psi_1(x), \quad \tilde{u}_2(x,\ 0) = \psi_2(x),$$

и при $t=\tau$ принимает значение

$$\tilde{u}_1(x,\ \tau)=\varphi_1(x),\ \ \tilde{u}_2(x,\ \tau)=\varphi_2(x).$$

Очевидно, что к решению $(\tilde{u}_1,\ \tilde{u}_2)$, отличающемуся от $(u_1,\ u_2)$ только сдвигом по времени, применима вся разобранная нами теория преобразования Лапласа, со всеми вытекающими из этой теории выводами. В частности, мы воспользуемся тем, что на любом отрезке времени $0<t_0\leqslant t\leqslant T$ решение $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$ может быть как угодно точно аппроксимировано (равномерно по $x$ и $t$) линейной комбинацией собственных (и присоединенных) функций (с коэффициентами, зависящими от времени). Мы положим $t_0=\tau/2$, $T=3\tau/2$. Тогда из этого утверждения вытекает, что $(\tilde{u}_1(x,\ \tau)$, $\tilde{u}_2(x,\ \tau))$ может быть как угогно точно аппроксимировано линейной комбинацией собственных (и присоединенных) функций. Теперь вспомним, что $\tilde{u}_1(x,\ \tau)=\varphi_1(x)$, $\tilde{u}_2(x,\ \tau)=\varphi_2(x)$.

Итак, *какова бы ни была достаточно гладкая вектор-функция* $(\varphi_1(x),\ \varphi_2(x))$, *согласованная с граничными условиями, она может быть как угодно точно (равномерно по* $x$*) приближена линейной комбинацией собственных вектор-функций (в случае обратимой задачи). При наличии кратных собственных значений к собственным функциям иногда надо добавлять еще и так называемые присоединенные.*

С кратными собственными значениями приходится иметь дело сравнительно редко. Так, например, нами было уже показано, что все достаточно большие по модулю собственные значения — простые.

Теперь мы покажем на примере, что в случае, если для гиперболической системы изучаемая задача — необратимая, то аппроксимации решения «стоячими волнами» нет. (Ее нет не только в этом примере — это общий факт.) В качестве примера возьмем простейшую систему, состоящую всего из одного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

рассматриваемого при $0\leqslant x\leqslant 1$, $t>0$ с граничным условием $u(0,\ t)=0$. Начальные данные зададим при $t=0$ формулой $u(x,\ 0)=x^3$. Рассмотрев характеристики $x-t=\text{const}$ этой системы, легко заметить, что если бы мы захотели решать задачу с теми же начальными данными для $t<0$, то нам пришлось бы задавать граничные условия уже не при $x=0$, а при $x=1$. Кроме того, ясно, что так как решение имеет вид $u=f(x-t)$, то при $t>x$ искомая функция будет равна нулю ($u(x,\ t)=0$ при $t>x$).

Собственные функции такой задачи должны удовлетворять уравнению

$$\lambda v+\frac{dv}{dx}=0$$

и граничному условию $v(0,\ \lambda)=0$.

Общее решение уравнения имеет вид

$$v(x, \lambda) = ce^{-\lambda x}.$$

Из граничного условия находим $c=0$. Итак, мы показали, что нетривиальных собственных функций у нашего уравнения нет.

Представим на некоторое время, что такая собственная функция нашлась и что она отвечает собственному значению $\lambda_0$. Тогда у уравнения в частных производных существовало бы решение вида

$$u(x, t) = e^{\lambda_0 t} v(x, \lambda_0),$$

отвечающее при $t=0$ начальному условию $u(x, 0) = v(x, \lambda_0) \not\equiv 0$. Из поведения характеристик мы видим, что при $t > x$ $u(x, t) = 0$ (во всяком случае, $u(x, t) \equiv 0$ при $t > 1$). Но это противоречит представлению $u(x, t) = e^{\lambda_0 t} v(x, \lambda_0)$.

В случае более общих необратимых задач для гиперболических уравнений собственные значения у системы могут быть, но приблизить любое решение линейной комбинацией «стоячих волн», связанных с этими собственными значениями, и тогда не удается.

Этому, в частности, мешает отсутствие оценки

$$|v_i(x, \lambda)| < \frac{\text{const}}{|\lambda|} \quad \text{для} \quad \operatorname{Re}\lambda < -K.$$

Все на том же примере мы покажем, что этой оценки действительно нет. Функция $v(x, \lambda)$, отвечающая начальным данным $u(x, 0) = x^3$, является решением уравнения

$$\lambda v + \frac{dv}{dx} = x^3,$$

$$v(0, \lambda) = 0$$

и имеет вид

$$v(x, \lambda) = \frac{6e^{-\lambda x} + \lambda^3 x^3 - 3\lambda^2 x^2 + 6\lambda x - 6}{\lambda^4}.$$

Из этой формулы видно, что при $\operatorname{Re}\lambda \to -\infty$ функция $v(x, \lambda)$ экспоненциально возрастает (у нас $x > 0$), что и доказывает отсутствие оценки $|v(x, \lambda)| < \text{const}/|\lambda|$.

## § 32. Ряд Фурье для консервативной системы

Консервативная гиперболическая задача для системы из двух уравнений. Интеграл энергии для вещественных и комплексных решений. Комплексные евклидовы пространства, натянутые на собственные вектор-функции. Унитарность преобразования, связанного со сдвигом времени. Свойства унитарных преобразований. Вывод из этих свойств ортогональности собственных функций и доказательство того, что $\lambda_k$ чисто мнимы. Использование ортогональности при приближении начальных данных «стоячими волнами». Формула для коэффициентов в разложении решения в ряд Фурье. Пример.

В этом параграфе будут разобраны некоторые замечательные свойства собственных значений и собственных функций в задачах с законом сохранения энергии. Мы назовем такие задачи *консервативными*. Краевая задача для системы уравнений акустики, которая рассматривалась в вводной части (гл. I, § 7) является примером консервативной задачи.

Рассмотрим систему

$$a_{11}(x)\frac{\partial u_1}{\partial t}+a_{12}(x)\frac{\partial u_2}{\partial t}+b_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x}+b_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x}+0\cdot u_1+c(x)u_2=0,$$

$$a_{21}(x)\frac{\partial u_1}{\partial t}+a_{22}(x)\frac{\partial u_2}{\partial t}+b_{21}\frac{\partial u_1}{\partial x}+b_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x}-c(x)u_1+0\cdot u_2=0$$

с симметричными матрицами $\|a_{ik}(x)\|$, $\|b_{ik}\|$ ($\|a_{ik}(x)\|$ — положительно определенная, $\|b_{ik}\|$ не зависит от $x$, постоянная). Матрицу $\|c_{ik}(x)\|=\begin{pmatrix}0 & c(x)\\ -c(x) & 0\end{pmatrix}$ мы предполагаем кососимметрической.

Умножая первое уравнение на $u_1$, второе — на $u_2$ и складывая, мы приходим к следующей дифференциальной форме закона сохранения энергии

$$\frac{\partial\left(\dfrac{a_{11}u_1^2+2a_{12}u_1u_2+a_{22}u_2^2}{2}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\dfrac{b_{11}u_1^2+2b_{12}u_1u_2+b_{22}u_2^2}{2}\right)}{\partial x}=0.$$

Интегрируя это равенство по прямоугольнику

$$0\leqslant x\leqslant l,\quad 0\leqslant t\leqslant\tau,$$

мы получаем следующее соотношение:

$$\frac{1}{2}\int_0^l[a_{11}u_1^2+2a_{12}u_1u_2+a_{22}u_2^2]_{t=\tau}dx=\frac{1}{2}\int_0^l[a_{11}u_1^2+2a_{12}u_1u_2+a_{22}u_2^2]_{t=0}dx-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^\tau(b_{11}u_1^2+2b_{12}u_1u_2+b_{22}u_2^2)_{x=b}\,dt+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^\tau(b_{11}u_1^2+2b_{12}u_1u_2+b_{22}u_2^2)_{x=0}\,dt.$$

Предположим еще дополнительно, что граничные условия $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2=0$ при $x=0$ и $\beta_1u_1+\beta_2u_2=0$ при $x=l$ таковы, что из них следует обращение в нуль при $x=0$, $x=l$ квадратичной формы $b_{11}u_1^2+2b_{12}u_1u_2+b_{22}u_2^2$. Иными словами, пусть граничные условия обеспечивают отсутствие потока энергии через границу. Это возможно, если форма $b_{11}u_1^2+2b_{12}u_1u_2+b_{22}u_2^2$ может быть разложена на два линейных множителя и если граничные условия состоят в равенстве нулю того или иного из этих множителей. Для таких граничных условий

$$\int_0^l [a_{11}u_1^2+2a_{12}u_1u_2+a_{22}u_2^2]_{t=\tau}\,dx=\int_0^l [a_{11}u_1^2+2a_{12}u_1u_2+a_{22}u_2^2]_{t=0}\,dx,$$

т. е. энергия рассматриваемой системы сохраняется. Описанный класс задач естественно назвать *консервативным*.

Пусть вектор-функция $\{u_1, u_2\}$ является комплексным решением нашей системы, удовлетворяющим граничным условиям

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2=0 \text{ при } x=0,$$
$$\beta_1u_1+\beta_2u_2=0 \text{ при } x=l.$$

Пусть $v_k$ и $w_k$ — вещественная и мнимая части функции

$$u_k=v_k+iw_k.$$

Мы предполагаем коэффициенты уравнения и коэффициенты граничных условий вещественными. Следовательно, вместе с решением $\{u_1, u_2\}$ решениями нашей системы будут вектор-функции $\{v_1, v_2\}$ и $\{w_1, w_2\}$. Они также будут удовлетворять рассматриваемым граничным условиям. Тогда, как мы установили, интегралы

$$\int_0^l (a_{11}v_1^2+2a_{12}v_1v_2+a_{22}v_2^2)\,dx$$

и

$$\int_0^l (a_{11}w_1^2+2a_{12}w_1w_2+a_{22}w_2^2)\,dx$$

не меняются при изменении времени $t$.

Так как сумма этих интегралов равна

$$\int_0^l (a_{11}u_1\bar{u}_1+a_{12}(u_1\bar{u}_2+u_2\bar{u}_1)+a_{22}u_2\bar{u}_2)\,dx, \tag{1}$$

то тем самым нами доказано, что на комплексных решениях консервативных задач с течением времени не меняется эрмитова форма (1), являющаяся аналогом интеграла энергии вещественных решений.

Покажем, что из равенства этой формы нулю для непрерывной вектор-функции $\{u_1(x), u_2(x)\}$ вытекают равенства $u_1(x)\equiv 0$, $u_2(x)\equiv 0$. Действительно,

$$a_{11}u_1\bar{u}_1+a_{12}(u_1\bar{u}_2+u_2\bar{u}_1)+a_{22}u_2\bar{u}_2=$$
$$=a_{11}v_1^2+2a_{12}v_1v_2+a_{22}v_2^2+a_{11}w_1^2+2a_{12}w_1w_2+a_{22}w_2^2,$$

где $u_l=v_l+iw_l$. Так как, по предположению, матрица $a_{kl}$ является положительно определенной, то из равенства нулю формы (1) вытекает обращение в нуль интегралов энергии для вектор-функций $\{v_1, v_2\}$ и $\{w_1, w_2\}$. Следовательно, $v_k \equiv 0$, $w_k \equiv 0$ и

$$u_k(x) = v_k(x) + iw_k(x) \equiv 0.$$

Мы показали, что эрмитову форму интеграла энергии для комплексных решений можно считать положительно определенной, если она положительно определена на решениях вещественных.

Матрицу $b_{kl}$ мы предполагали такой, что из выполнения одного из граничных условий вытекает обращение в нуль квадратичной формы $b_{11}u_1^2 + 2b_{12}u_1u_2 + b_{22}u_2^2$. Мы отмечали уже, что для этого необходимо, чтобы указанная форма разлагалась на два сомножителя. Предположим дополнительно, что эти множители различны и, следовательно, сигнатура квадратичной формы равна $(1, \ -1)$. Характеристики $\frac{dx}{dt} = k_1(x)$, $\frac{dx}{dt} = k_2(x)$ консервативной системы определяются с помощью уравнения

$$\det \| B - kA \| = 0 \quad (B = \| b_{ik} \|, \ A = \| a_{ik} \|).$$

Как известно из алгебры, существует такая невырожденная матрица $S$, что

$$S^*AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ (A \text{ — положительно определенная}),$$

$$S^*BS = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.$$

Так как сигнатура квадратичных форм при изменении базиса сохраняется, то корни $k_1 = k_1(x)$, $k_2 = k_2(x)$ имеют разные знаки. Следовательно, если коэффициенты достаточно гладкие, консервативная система может быть приведена к каноническому виду, который использовался при обосновании метода Фурье. Можно также показать, что граничные условия у консервативной задачи удовлетворяют тем требованиям, которые нужны для применимости развитой на предыдущих лекциях теории. Мы не будем на этом останавливаться.

Рассмотрим конечномерное линейное векторное пространство, натянутое на $N$ собственных вектор-функций нашей консервативной системы. Каждый элемент $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ этого пространства представим в виде

$$\varphi_1 = \sum_{k=1}^{N} c_k v_1^{(k)}(x),$$

$$\varphi_2 = \sum_{k=1}^{N} c_k v_2^{(k)}(x).$$

Здесь $\left\{v_1^{(k)}(x), \ v_2^{(k)}(x)\right\}$ — собственная вектор-функция, отвечающая собственному значению $\lambda_k$. Мы будем для простоты предполагать, что система не имеет кратных собственных значений, хотя кратность по существу ничему не может здесь помешать.

Сопоставим элементу $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ элемент $\{\psi_1, \psi_2\}$ по формуле

$$\psi_1 = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{\lambda_k \tau} v_1^{(k)}(x),$$

$$\psi_2 = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{\lambda_k \tau} v_2^{(k)}(x).$$

Это сопоставление можно трактовать так. Построим по начальным (при $t=0$) данным $\varphi_1$, $\varphi_2$ решение изучаемой системы, а затем рассмотрим значение этого решения при $t=\tau$. Это значение и будет вектор-функцией $\{\psi_1, \psi_2\}$. Нами было доказано, что

$$\int_0^t [a_{11}\varphi_1\bar{\varphi}_2 + a_{12}(\varphi_1\bar{\varphi}_2 + \varphi_2\bar{\varphi}_1) + a_{22}\varphi_2\bar{\varphi}_2]\,dx =$$
$$= \int_0^l [a_{11}\psi_1\bar{\psi}_2 + a_{12}(\psi_1\bar{\psi}_2 + \bar{\psi}_1\psi_2) + a_{22}\psi_2\bar{\psi}_2]\,dx.$$

Легко также сообразить, что $e^{\lambda_k\tau} \neq e^{\lambda_p\tau}$ при достаточно малых $\tau$, если $\lambda_k \neq \lambda_p$. В самом деле, так как $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ — конечное число различных собственных значений, то существует $\max|\lambda_p - -\lambda_k| = \Delta$. Выберем $\tau < \frac{2\pi}{\Delta}$. Тогда $|\lambda_p\tau - \lambda_k\tau| < 2\pi$, а следовательно,

$$\frac{e^{\lambda_p\tau}}{e^{\lambda_k\tau}} = e^{\lambda_p\tau - \lambda_k\tau} \neq 1, \quad e^{\lambda_p\tau} \neq e^{\lambda_k\tau}.$$

Преобразование $\{\varphi_1, \varphi_2\} \to \{\psi_1, \psi_2\}$ является линейным преобразованием, а числа $e^{\lambda_k\tau}$ — его собственные значения. Отвечающие им собственные векторы — это соответствующие собственные вектор-функции. Введем в нашем конечномерном векторном пространстве комплексное скалярное произведение

$$(\theta, \varphi) = \int_0^l [a_{11}\theta_1\bar{\varphi}_1 + a_{12}(\theta_1\bar{\varphi}_2 + \theta_2\bar{\varphi}_1) + a_{22}\theta_2\bar{\varphi}_2]\,dx.$$

Легко убедиться, что

1° $(\theta, \varphi) = \overline{(\varphi, \theta)}$,

2° $(\lambda\theta, \varphi) = \lambda(\theta, \varphi)$,

3° $(\theta + \tilde{\theta}, \varphi) = (\theta, \varphi) + (\tilde{\theta}, \varphi)$,

4° $(\theta, \theta) \geqslant 0$, причем равно нулю, лишь если $\theta \equiv 0$.

Последнее утверждение мы недавно аккуратно проверяли.

Свойства 1°—4° являются аксиомами, которым должно удовлетворять скалярное произведение в комплексном евклидовом пространстве. Закон сохранения энергии при преобразовании

$$\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2\} \to \psi = \{\psi_1, \psi_2\}$$

мы можем теперь толковать как сохранение скалярного квадрата вектора при рассматриваемом линейном преобразовании: $(\varphi, \varphi) = (\psi, \psi)$. Преобразование, обладающее таким свойством, называется унитарным. Легко проверить, что собственные значения унитарного преобразования $U$ обязательно равны 1 по модулю. В самом деле, пусть $U\varphi = \mu\varphi$. Тогда, в силу унитарности, $(U\varphi, U\varphi) = (\varphi, \varphi)$. С другой стороны,

$$(U\varphi, U\varphi) = (\mu\varphi, \mu\varphi) = \mu(\varphi, \mu\varphi) = \mu\overline{(\mu\varphi, \varphi)} = \mu \cdot \bar{\mu}\overline{(\varphi, \varphi)}.$$

Скалярный квадрат $(\varphi, \varphi)$ веществен и положителен, а следовательно, $\overline{(\varphi, \varphi)} = (\varphi, \varphi)$. Мы видим, что $(\varphi, \varphi) = \mu \cdot \bar{\mu}(\varphi, \varphi)$, а значит, $\mu \cdot \bar{\mu} = 1$, $|\mu| = 1$.

В нашем случае собственные значения — это $e^{\lambda_p \tau}$. Из условия $|e^{\lambda_p \tau}| = 1$ вытекает, что $\lambda_p \tau$ — число мнимое. Очевидно, что $\lambda_p$ тоже будет чисто мнимым. Мы доказали, что для рассматриваемых консервативных систем все собственные значения $\lambda_p$ лежат на мнимой оси.

Докажем еще, что собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны в смысле введенного скалярного произведения. Сначала заметим, что из равенств

$$(U\varphi, U\varphi) = (\varphi, \varphi), \quad (U\psi, U\psi) = (\psi, \psi)$$

следует, что

$$(U\varphi, U\psi) = (\varphi, \psi).$$

Действительно,

$$(U(\varphi+\psi), U(\varphi+\psi)) = (U\varphi, U\varphi) + (U\psi, U\psi) + (U\varphi, U\psi) + (U\psi, U\varphi),$$

$$(U(\varphi+i\psi), U(\varphi+i\psi)) = \\ = (U\varphi, U\varphi) + (U\psi, U\psi) - i(U\varphi, U\psi) + i(U\psi, U\varphi).$$

С другой стороны,

$$(U(\varphi+\psi), U(\varphi+\psi)) = (\varphi+\psi, \varphi+\psi) = \\ = (\varphi, \varphi) + (\psi, \psi) + (\varphi, \psi) + (\psi, \varphi),$$

$$(U(\varphi+i\psi), U(\varphi+i\psi)) = (\varphi+i\psi, \varphi+i\psi) = \\ = (\varphi, \varphi) + (\psi, \psi) - i(\varphi, \psi) + i(\psi, \varphi),$$

$$(U\varphi, U\varphi) = (\varphi, \varphi), \quad (U\psi, U\psi) = (\psi, \psi).$$

Сравнивая все эти равенства, находим

$$(U\varphi, U\psi) + (U\psi, U\varphi) = (\varphi, \psi) + (\psi, \varphi), \tag{2}$$

$$-i(U\varphi, U\psi) + i(U\psi, U\varphi) = -i(\varphi, \psi) + i(\psi, \varphi). \tag{3}$$

Прибавляя к тождеству (2) тождество (3), умноженное на $i$, получим равенство

$$2(U\varphi, \ U\psi) = 2(\varphi, \ \psi).$$

Утверждение $(U\varphi, \ U\psi) = (\varphi, \ \psi)$ доказано. Пусть теперь $U\varphi = \mu_1\varphi$, $U\psi = \mu_2\psi$, причем $\mu_1 \neq \mu_2$. Мы уже знаем, что $\mu_1\bar{\mu}_1 = 1$, $\mu_2\bar{\mu}_2 = 1$. Неравенство $\frac{\mu_1}{\mu_2} \neq 1$ можно записать в виде $\mu_1\bar{\mu}_2 \neq 1$. Воспользуемся тождеством

$$(U\varphi, \ U\psi) = (\varphi, \ \psi).$$

По условию

$$(U\varphi, \ U\psi) = (\mu_1\varphi, \ \mu_2\psi) = \mu_1\bar{\mu}_2(\varphi, \ \psi) = (\varphi, \ \psi).$$

Это равенство возможно лишь, если $\mu_1\bar{\mu}_2 = 1$ или если $(\varphi, \ \psi) = 0$. Первое невозможно по предположению. Следовательно, $(\varphi, \ \psi) = 0$. Ортогональность собственных функций доказана.

В случае если консервативная задача имеет кратные собственные значения, преобразование $u_l(x, \ 0) \to u_l(x, \ \tau)$ не перестает быть унитарным. С помощью обычных для линейной алгебры приемов можно показать, что в этом случае никаких присоединенных функций не существует и что каждому $r$-кратному собственному значению отвечают $r$ линейно независимых собственных вектор-функций. Так как любая линейная комбинация собственных вектор-функций, отвечающих одному и тому же собственному значению, опять будет собственной с тем же собственным значением, то для них может быть выбран ортогональный базис. Напомним, кстати, что кратные собственные значения будут лишь в конечном числе и каждое из них имеет конечную кратность. Собственные вектор-функции, отвечающие различным собственным значениям, по доказанному выше будут ортогональны автоматически.

Ортогональностью базиса из собственных вектор-функций удобно пользоваться при приближении начальных данных. Пусть мы хотим начальную вектор-функцию $\varphi = \{\varphi_1(x), \ \varphi_2(x)\}$ приблизить при помощи конечной линейной комбинации собственных вектор-функций $\sum\limits_{k=1}^{N} c_k v^{(k)}(x)$ $\left(v^{(k)} = \left\{v_1^{(k)}, \ v_2^{(k)}\right)\right\}$. Естественно определить коэффициенты $c_k$ из условия минимума невязки $\delta = \varphi - \sum\limits_{k=1}^{N} c_k v^{(k)}$. Для измерения величины $\Delta$ невязки удобно пользоваться нашим скалярным произведением:

$$\Delta = \|\delta\|^2 = (\delta,\ \delta) =$$
$$= (\varphi,\ \varphi) - \sum \bar{c}_k (\varphi,\ v^{(k)}) - \sum c_k (v^{(k)},\ \varphi) + \sum c_i \bar{c}_k (v^{(i)},\ v^{(k)}) =$$
$$= (\varphi,\ \varphi) - \sum_{k=1}^{N} \bar{c}_k (\varphi,\ v^{(k)}) - \sum_{k=1}^{N} c_k \overline{(\varphi,\ v^{(k)})} + \sum_{k=1}^{N} c_k \bar{c}_k (v^{(k)},\ v^{(k)}) =$$
$$= (\varphi,\ \varphi) + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(v^{(k)},\ v^{(k)})} \left| c_k (v^{(k)},\ v^{(k)}) - (\varphi,\ v^{(k)}) \right|^2 - \sum_{k=1}^{N} \frac{|(\varphi,\ v^{(k)})|^2}{(v^{(k)},\ v^{(k)})}.$$

Отсюда видно, что $\Delta$ принимает минимальное значение при

$$c_k = \frac{(\varphi,\ v^{(k)})}{(v^{(k)},\ v^{(k)})}.$$

Теперь мы можем вернуться к вопросу о нахождении коэффициентов в разложении решения в ряд Фурье, полученный в предыдущем параграфе. Там было показано, что для решения справедлива формула

$$u(x,\ t) = \sum_{1}^{N} d_k v^{(k)}(x)\, e^{\lambda_k t} + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

где $v^{(k)}(x) = \left\{v_1^{(k)}(x),\ v_2^{(k)}(x)\right\}$ — собственные функции, а $\lambda_k$ — собственные значения нашей задачи. Остаточный член, правда, оценивался лишь для $0 < t_0 \leqslant t \leqslant T$. Но если учесть обратимость задачи, то можно за начало отсчета времени взять $t = -\tau$ с начальными данными $u(x,\ -\tau)$, так что можно считать оценку равномерной при $0 \leqslant t \leqslant T$. В частности,

$$u(x,\ 0) = \varphi(x) = \sum_{1}^{N} d_k v^{(k)}(x) + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Если задача консервативна, то умножая это равенство скалярно на $v^{(k)}(x)$ (в введенном нами скалярном произведении), получаем

$$(\varphi,\ v^{(k)}) = d_k (v^{(k)},\ v^{(k)}) + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

или, в силу произвольности $N$,

$$d_k = \frac{(\varphi,\ v^{(k)})}{(v^{(k)},\ v^{(k)})}.$$

Другими словами, коэффициенты $d_k$ — это и есть коэффициенты Фурье разложения начальной вектор-функции по собственным функциям унитарного преобразования $U$.

В результате получаем окончательную формулу для решения задачи с гладкими согласованными начальными данными $\varphi(x) = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(\varphi, v^{(k)})}{(v^{(k)}, v^{(k)})} v^{(k)}(x) e^{\lambda_k t} + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Рассмотренный во вводной части пример акустической системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

является частным случаем консервативной задачи. Ее собственные вектор-функции $\left\{i \sin \frac{k\pi x}{l}, -\rho_0 c_0 \cos \frac{k\pi x}{l}\right\}$, собственные значения $\lambda_k = i \frac{k\pi}{l} c_0$, скалярное произведение равно $\int_0^l \left(\rho_0 u_1 \bar{u}_2 + \frac{p_1 \bar{p}_2}{\rho_0 c_0^2}\right) dx$, а формула для решения имеет вид:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{N} c_k i \sin \frac{k\pi x}{l} e^{i \frac{k\pi}{l} c_0 t} + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

$$p(x, t) = \sum_{k=1}^{N} c_k \left(-\rho_0 c_0 \cos \frac{k\pi x}{l}\right) e^{i \frac{k\pi}{l} c_0 t} + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

где

$$c_k = -\frac{1}{l} \int_0^l \left\{i \sin \frac{k\pi x}{l} u(x, 0) + \frac{1}{\rho_0 c_0} \cos \frac{k\pi x}{l} p(x, 0)\right\} dx.$$

## § 33. Самосопряженная система второго порядка

Ее сведѐние к симметричной системе первого порядка. Эта система консервативна. «Кинетическая» и «потенциальная» энергия для решений этой системы. Собственные вектор-функции и собственные значения соответствующей краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Собственные функции ортогональны как в «потенциальной» метрике, так и в «кинетической». Формулы для приближенного решения задачи. Замечания о методе Ритца.

Изучение метода Фурье мы закончим рассмотрением некоторого класса типичных задач, к которым этот метод применим. Это рассмотрение покажет одно из важных направлений, в которых допускает расширение проиллюстрированная на простом примере теория.

Мы будем рассматривать симметрическую и так называемую самосопряженную систему второго порядка

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}(x)\frac{\partial u_k}{\partial x}\right),\quad i=1,\,2,\,\ldots,\,n.$$

Матрицы $\|a_{ik}(x)\|$, $\|b_{ik}(x)\|$ здесь предполагаются симметричными и (обе) положительно определенными.

Граничные условия при $x=0$ и при $x=l$ будем предполагать заданными в следующем виде:

$$\sum_{k} b_{ik}(0)\frac{\partial u_k}{\partial x}=\sum_{k}\sigma_{ik}u_k \qquad \text{при } x=0,$$

$$\sum_{k} b_{ik}(l)\frac{\partial u_k}{\partial x}=-\sum_{k}\varepsilon_{ik}u_k \quad \text{при } x=l$$

с неотрицательно определенными квадратными матрицами $\sigma_{ik}$, $\varepsilon_{ik}$.

Начальные данные при $t=0$ должны для этой системы задаваться так:

$$u_k(x,\,0)=\varphi_k(x),$$

$$\left.\frac{\partial u_k}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_k(x).$$

Мы сейчас покажем, как такую задачу можно привести к консервативной задаче для системы уравнений парвого порядка, содержащей в два раза больше уравнений, чем исходная система второго порядка. Консервативность этой задачи будет гарантией ее обратимости, используя которую, можно доказать применимость метода Фурье.

Обозначим

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}=v_k,$$

$$\sum_{k} b_{ik}(x)\frac{\partial u_k}{\partial x}=w_i. \tag{1}$$

Матрицу $\|b_{ik}\|^{-1}$ обозначим $\|c_{ik}(x)\|$. Легко проверить, что $\|c_{ik}\|$ тоже будет симметрической и положительно определенной. С ее использованием могут быть записаны тождества

$$\sum_{i} c_{ri}b_{ik}=\delta_k^r \text{ (символ Кронекера)},$$

$$\frac{\partial u_l}{\partial x}=\sum_{k} c_{lk}(x)\,w_k.$$

Эти последние равенства, будучи продифференцированы по $t$, приводят к уравнениям

$$\sum_k c_{ik}(x)\frac{\partial w_k}{\partial t}=\frac{\partial v_l}{\partial x}.$$

Исходные же уравнения переписываются в следующей форме:

$$\sum_k a_{ik}(x)\frac{\partial v_k}{\partial t}=\frac{\partial w_l}{\partial x}.$$

Объединяя уравнения этих двух видов, приходим к симметрической системе

$$\sum_k a_{ik}(x)\frac{\partial v_k}{\partial t}=\frac{\partial w_l}{\partial x},$$

$$\sum_k c_{ik}(x)\frac{\partial w_k}{\partial t}=\frac{\partial v_i}{\partial x},$$

которая, с учетом замены (1), эквивалентна первоначальной системе. После умножения уравнений полученной системы на $v_l$ и $w_i$, соответственно, сложения и интегрирования по области с кусочно гладкой границей Г получаем интеграл энергии (см. § 9):

$$\oint_\Gamma \frac{1}{2}\left(\sum_{i,k}a_{ik}v_iv_k+\sum_{i,k}c_{ik}w_iw_k\right)dx+\left(\sum_i v_iw_i\right)dt=0.$$

Квадратичная форма $\frac{1}{2}\sum\limits_{i,k}a_{ik}v_iv_k=\frac{1}{2}\sum\limits_{i,k}a_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial t}\frac{\partial u_k}{\partial t}$ отвечает, так сказать, «кинетической» энергии, а форма

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k}c_{ik}w_iw_k=\frac{1}{2}\sum_i w_i\left(\sum_r c_{ir}w_r\right)=\frac{1}{2}\sum_i w_i\frac{\partial u_i}{\partial x}=\frac{1}{2}\sum_{i,k}b_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_k}{\partial x}$$

— «потенциальной». Мы пишем слова «кинетическая» и «потенциальная» в кавычках, чтобы подчеркнуть, что речь идет о некотором общем классе уравнений, для которого понятия кинетической и потенциальной энергии могут иметь только условный смысл.

Из граничных условий при $x=0$ вытекает, что

$$\sum_k b_{ik}(0)\frac{\partial u_k}{\partial x}\bigg|_{x=0}=w_i\bigg|_{x=0}=\sum_k \sigma_{ik}u_k\bigg|_{x=0},$$

$$\sum_i w_iv_i\bigg|_{x=0}=\sum_{i,k}\sigma_{ik}u_k\frac{\partial u_i}{\partial t}\bigg|_{x=0}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i,k}\sigma_{ik}u_iu_k\bigg|_{x=0}.$$

Аналогично из граничных условий при $x=l$ получаем

$$\sum_i w_iv_i\bigg|_{x=l}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i,k}\varepsilon_{ik}u_i\cdot u_k\bigg|_{x=l}.$$

Отсюда

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i v_i w_i \Big|_{x=0} dt = \left(\frac{1}{2}\sum_{i,k} \sigma_{ik} u_i u_k\right)_{\substack{x=0\\ t=t_2}} - \left(\frac{1}{2}\sum_{i,k} \sigma_{ik} u_i u_k\right)_{\substack{x=0\\ t=t_1}},$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} \sum v_i w_i \Big|_{x=l} dt = \left(\frac{1}{2}\sum_{i,k} \varepsilon_{ik} u_i u_k\right)_{\substack{x=l\\ t=t_1}} - \left(\frac{1}{2}\sum_{i,k} \varepsilon_{ik} u_i u_k\right)_{\substack{x=l\\ t=t_2}}.$$

Используя эти тождества в интеграле энергии для прямоугольника $0 \leqslant x \leqslant l$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, мы приходим к следующему закону сохранения:

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k} \sigma_{ik} u_i u_k \Big|_{\substack{x=0\\ t=t_2}} + \frac{1}{2}\int_0^l \left(\sum_{i,k} a_{ik} v_i v_k + \sum_{i,k} c_{ik} w_i w_k\right)_{t=t_2} dx +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,k} \varepsilon_{ik} u_i u_k \Big|_{\substack{x=l\\ t=t_2}} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} \sigma_{ik} u_i u_k \Big|_{\substack{x=0\\ t=t_1}} + \frac{1}{2}\sum_{i,k} \varepsilon_{ik} u_i u_k \Big|_{\substack{x=l\\ t=t_1}} +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^l \left(\sum_{i,k} a_{ik} v_i v_k + \sum_{i,k} c_{ik} w_i w_k\right)_{t=t_1} dx.$$

В этом законе к «потенциальной» энергии добавлены слагаемые $\frac{1}{2}\sum_{i,k} \sigma_{ik} u_i u_k \Big|_{x=0}$, $\frac{1}{2}\sum \varepsilon_{ik} u_i u_k \Big|_{x=l}$, представляющие собой «запас упругой энергии» граничных условий.

Полученное тождество можно толковать, как некоторое обобщенное условие консервативности, обеспечивающее унитарность преобразования решения при переходе от $t=t_1$ к $t=t_2$. Исходя из этого, как и в предыдущем параграфе, нетрудно доказать, что собственные значения обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\lambda \sum_k a_{ik} v_k = \frac{dw_i}{dx},$$

$$\lambda \sum_k c_{ik} w_k = \frac{dv_i}{dx}$$

$$\lambda u_k = v_k$$

при наших граничных условиях оказываются чисто мнимыми, а система собственных функций ортонормирована в смысле метрики, задаваемой эрмитовой формулой

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k} \sigma_{ik} u_i \bar{u}_k \Big|_{x=0} + \frac{1}{2}\int_0^l \left(\sum_{i,k} a_{ik} v_i \bar{v}_k + \sum_{i,k} c_{ik} w_i \bar{w}_k\right) dx + \frac{1}{2}\sum_{i,k} \varepsilon_{ik} u_i \bar{u}_k \Big|_{x=l}.$$

Однако эта ортогональность обычно не используется при приближении начальных данных комбинациями собственных функций. Дело в том, что собственные функции, оказывается, можно считать ортогональными в более простой метрике, связанной лишь с матрицей «кинетической энергии» $\| a_{ik} \|$. Сейчас мы покажем, как к такому выводу можно прийти.

Переписав уравнения

$$\sum_k c_{ik} \lambda w_k = \frac{dv_i}{dx}$$

в форме

$$\lambda w_i = \sum_k b_{ik} \frac{dv_k}{dx}$$

и подставив отсюда $\lambda w_i$ в равенства

$$\lambda^2 \sum_k a_{ik} v_k = \frac{d\lambda w_i}{dx},$$

получаем уравнения второго порядка:

$$\lambda^2 \sum_k a_{ik} v_k = \frac{d}{dx} \left( \sum_k b_{ik} \frac{dv_k}{dx} \right).$$

Так как собственные значения $\lambda$ являются чисто мнимыми, то, следовательно, $\lambda^2$ должно быть вещественным и отрицательным. Обозначим $\lambda^2 = -\mu$.

Мы установили, что собственные функции должны удовлетворять уравнениям с вещественными коэффициентами

$$\frac{d}{dx} \left[ \sum_{i,\ k} b_{ik}(x) \frac{dv_k}{dx} \right] + \mu \sum_k a_{ik}(x) v_k = 0.$$

Граничные условия

$$\sum_k b_{ik}(0) \frac{du_k}{dx} = \sum \sigma_{ik} u_k \qquad (\text{при } x = 0),$$

$$\sum_k b_{ik}(l) \frac{du_k}{dx} = -\sum_k \varepsilon_{ik} u_k \quad (\text{при } x = l)$$

с помощью равенств $\lambda u_k = v_k$ могут быть для наших собственных функций переписаны так:

$$\sum_k b_{ik}(0) \frac{dv_k}{dx} = \sum_k \sigma_{ik} v_k \qquad (\text{при } x = 0),$$

$$\sum_k b_{ik}(l) \frac{dv_k}{dx} = -\sum_k \varepsilon_{ik} v_k \quad (\text{при } x = l)$$

Мы видим, что уравнения для собственных вектор-функций $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и граничные условия для них вещественны. Отсюда следует возможность считать $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ вещественными.

Покажем, что собственные вектор-функции

$$v^{(1)} = \{v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \ldots, v_n^{(1)}\},$$
$$v^{(2)} = \{v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, \ldots, v_n^{(2)}\},$$

отвечающие различным собственным значениям $\mu_1$, $\mu_2$ $(\mu_1 \neq \mu_2)$, ортогональны в смысле скалярного произведения

$$(v^{(1)}, v^{(2)}) = \int_0^l \left( \sum_{i,k} a_{ik} v_i^{(1)} v_k^{(2)} \right) dx.$$

Для этого выпишем уравнения, которым удовлетворяют $v^{(1)}$, $v^{(2)}$:

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_k b_{ik}\frac{dv_k^{(1)}}{dx}\right] + \mu_1 \sum_k a_{ik} v_k^{(1)} = 0,$$
$$\frac{d}{dx}\left[\sum_k b_{ik}\frac{dv_k^{(2)}}{dx}\right] + \mu_2 \sum_k a_{ik} v_k^{(2)} = 0.$$

Умножим $i$-е уравнение для $v^{(1)}$ на $v_i^{(2)}$, а $i$-е уравнение для $v^{(2)}$ на $v_i^{(1)}$, вычтем их друг из друга и просуммируем по всем $i$:

$$\sum_i \left[ v_i^{(2)} \frac{d}{dx}\left(\sum_k b_{ik}\frac{dv_k^{(1)}}{dx}\right) - v_i^{(1)} \frac{d}{dx}\left(\sum_k b_{ik}\frac{dv_k^{(2)}}{dx}\right)\right] + \\ + (\mu_1 - \mu_2) \sum_{i,k} a_{ik} v_i^{(1)} v_k^{(2)} = 0.$$

Выражение в квадратных скобках может быть преобразовано следующим образом:

$$\left[ v_i^{(2)} \frac{d}{dx}\left(\sum_k b_{ik}\frac{dv_k^{(1)}}{dx}\right) - v_i^{(1)} \frac{d}{dx}\left(\sum_k b_{ik}\frac{dv_k^{(2)}}{dx}\right)\right] = \\ = \frac{d}{dx}\left[ v_i^{(2)} \sum_k b_{ik}\frac{dv_k^{(1)}}{dx} - v_i^{(1)} \sum_k b_{ik}\frac{dv_k^{(2)}}{dx}\right] - \sum_k b_{ik}\frac{dv_k^{(1)}}{dx}\frac{dv_i^{(2)}}{dx} + \\ + \sum_k b_{ik}\frac{dv_k^{(2)}}{dx}\frac{dv_i^{(1)}}{dx}.$$

После суммирования по $i$ последние две суммы уничтожатся и мы будем иметь

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{i,k} b_{ik}\left(v_i^{(2)}\frac{dv_k^{(1)}}{dx} - v_i^{(1)}\frac{dv_k^{(2)}}{dx}\right)\right] + (\mu_1 - \mu_2)\sum_{i,k} a_{ik} v_i^{(1)} v_k^{(2)} = 0.$$

Проинтегрируем это равенство по $x$ от 0 до $l$:

$$(\mu_1-\mu_2)\int_0^l \sum_{i,k} a_{ik} v_i^{(1)} v_k^{(2)}\,dx + \left[\sum_{i,k} b_{ik}\left(v_i^{(2)}\frac{dv_k^{(1)}}{dx} - v_i^{(1)}\frac{dv_k^{(2)}}{dx}\right)\right]_0^l = 0.$$

В силу граничных условий при $x=0$

$$\sum_{i,k} b_{ik} v_i^{(2)}\frac{dv_k^{(1)}}{dx} = \sum_i v_i^{(2)}\sum_k b_{ik}\frac{dv_k^{(1)}}{dx} = \sum_i v_i^{(2)}\sum_k \sigma_{ik} v_k^{(1)} = \sum_{i,k}\sigma_{ik} v_i^{(2)} v_k^{(1)},$$

$$\sum_{i,k} b_{ik} v_i^{(1)}\frac{dv_k^{(2)}}{dx} = \sum_{i,k}\sigma_{ik} v_i^{(1)} v_k^{(2)} = \sum_{i,k}\sigma_{ik} v_i^{(2)} v_k^{(1)},$$

$$\left[\sum_{i,k} b_{ik}\left(v_i^{(2)}\frac{dv_k^{(1)}}{dx} - v_i^{(1)}\frac{dv_k^{(2)}}{dx}\right)\right]_{x=0} = 0.$$

Совершенно так же устанавливается, что

$$\left[\sum_{i,k} b_{ik}\left(v_i^{(2)}\frac{dv_k^{(1)}}{dx} - v_i^{(1)}\frac{dv_k^{(2)}}{dx}\right)\right]_{x=l} = 0.$$

Следовательно,

$$(\mu_1-\mu_2)\int_0^l \sum_{i,k} a_{ik} v_i^{(1)} v_k^{(2)}\,dx = 0,$$

$$\int_0^l \sum_{i,k} a_{ik} v_i^{(1)} v_k^{(2)}\,dx = 0.$$

Ортогональность собственных функций доказана. Пользуясь этой ортогональностью, нетрудно дать формулы, с помощью которых вектор-функции $u_k(x,\ 0)=\varphi_k(x)$, $\left.\frac{\partial u_k}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_k(x)$ могут быть приближены суммами вида

$$\varphi_k^{(N)} = \sum_{p=1}^{N} A_p v_k^{(p)}(x),$$

$$\psi_k^{(N)} = \sum_{p=1}^{N} B_p v_k^{(p)}(x).$$

Начальные значения $u_k(x,\ 0)$ и производной $\left.\frac{\partial u_k}{\partial t}\right|_{t=0}$ приближаются независимо. В нашей записи это подчеркнуто тем, что их коэффициенты Фурье обозначены разными буквами. Точное решение исходной системы

$$\sum_k a_{ik}(x)\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_k b_{ik}(x)\frac{\partial u_k}{\partial x}\right),$$

соответствующее этим приближенным начальным данным, записывается в виде

$$u_k^{(N)}(x, t) = \sum_{p=1}^{N} \left[ A_p \cos(\sqrt{\mu_p} t) + B_p \sin(\sqrt{\mu_p} t) \frac{1}{\sqrt{\mu_p}} \right] v_k^{(p)}(x).$$

Упражнение. Убедитесь в этом непосредственной подстановкой в уравнения и в начальные условия.

Мы уже отмечали, что собственные функции нашей задачи ортогональны еще и в смысле метрики, задаваемой формой

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \sigma_{ik} u_i \bar{u}_k \big|_{x=0} + \frac{1}{2} \int_0^l \left( \sum_{i,k} a_{ik} v_i \bar{v}_k + \sum_{i,k} c_{ik} w_i \bar{w}_k \right) dx + \\ + \frac{1}{2} \sum \varepsilon_{ik} u_i \bar{u}_k \big|_{x=l} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \sigma_{ik} u_i \bar{u}_k \big|_{x=0} + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \varepsilon_{ik} u_i \bar{u}_k \big|_{x=l} + \\ + \frac{1}{2} \int_0^l \left( \sum_{i,k} a_{ik} v_i \bar{v}_k + \sum_{i,k} b_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x} \right) dx.$$

Вычислим значение этой формы на собственной вектор-функции, для которой

$$\lambda u_k = v_k, \qquad \lambda = -\bar{\lambda} = \sqrt{-\mu},$$
$$\bar{\lambda} \bar{u}_k = \bar{v}_k = v_k, \qquad \lambda \cdot \bar{\lambda} = \mu.$$

Непосредственное использование этих равенств дает

$$F = \frac{1}{2} \int_0^l \sum_{i,k} a_{ik} v_i v_k \, dx + \\ + \mu^{-1} \left[ \frac{1}{2} \sum_{i,k} \sigma_{ik} v_i v_k \big|_{x=0} + \frac{1}{2} \int_0^l \sum_{i,k} b_{ik} \frac{dv_i}{dx} \frac{dv_k}{dx} \, dx + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \varepsilon_{ik} v_i v_k \big|_{x=l} \right].$$

Преобразуем интегрированием по частям интеграл, входящий в квадратную скобку,

$$\frac{1}{2} \int_0^l \sum_{i,k} b_{ik} \frac{dv_i}{dx} \frac{dv_k}{dx} \, dx = \\ = \frac{1}{2} \sum_{i,k} b_{ik} \frac{dv_k}{dx} v_i \Big|_0^l - \frac{1}{2} \int_0^l \sum_i v_i \frac{d}{dx} \left( \sum_k b_{ik} \frac{dv_k}{dx} \right) dx = \\ = -\frac{1}{2} \sum_{i,k} \sigma_{ik} v_i v_k \big|_{x=0} - \frac{1}{2} \sum_{i,k} \varepsilon_{ik} v_i v_k \big|_{x=l} + \frac{\mu}{2} \int_0^l \sum_{i,k} a_{ik} v_i v_k \, dx.$$

При получении последней строчки мы еще воспользовались уравнениями

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_k b_{ik}\frac{dv_k}{dx}\right)+\mu\sum_k a_{ik}v_k=0$$

и граничными условиями

$$\sum_k b_{ik}\frac{du_k}{dx}-\sum_k \sigma_{ik}u_k=0 \qquad (\text{при } x=0),$$

$$\sum_k b_{ik}\frac{du_k}{dx}+\sum_k \varepsilon_{ik}u_k=0 \qquad (\text{при } x=l).$$

Окончательно приходим к выводу, что на собственной вектор-функции рассматриваемая форма равна

$$\frac{1}{2}\int_0^l\sum_{i,k}a_{ik}v_iv_k\,dx+\frac{1}{2}\int_0^l\sum_{i,k}a_{ik}v_iv_k\,dx.$$

Это утверждение эквивалентно утверждению о том, что на собственной вектор-функции, отвечающей собственному значению $\mu$, «потенциальная» квадратичная форма

$$\mu^{-1}\left(\frac{1}{2}\sum_{i,k}\sigma_{ik}v_iv_k\,\Big|_{x=0}+\frac{1}{2}\int_0^l\sum_{i,k}b_{ik}\frac{dv_i}{dx}\frac{dv_k}{dx}\,dx+\frac{1}{2}\sum_{i,k}\varepsilon_{ik}v_iv_k\,\Big|_{x=l}\right)$$

равна «кинетической» квадратичной форме

$$\frac{1}{2}\int_0^l\sum_{i,k}a_{ik}v_iv_k\,dx.$$

Задача. Докажите, применяя интегрирование по частям и используя дифференциальные уравнения для собственных вектор-функций $\{v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \ldots, v_n^{(1)}\}$, $\{v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, \ldots, v_n^{(2)}\}$, отвечающих различным собственным значениям

$$\mu_1,\quad \mu_2 \qquad (\mu_1\neq\mu_2),$$

что

$$\sum_{i,k}\sigma_{ik}v_i^{(1)}v_k^{(2)}\,|_{x=l}+\int_0^l\sum_{i,k}b_{ik}\frac{dv_i^{(1)}}{dx}\cdot\frac{dv_k^{(2)}}{dx}\,dx+\sum_{i,k}\varepsilon_{ik}v_i^{(1)}v_k^{(2)}\,|_{x=l}=0.$$

Эта ортогональность собственных функций в «потенциальной» метрике вместе с уже доказанной раньше ортогональностью в «кинетической» дает их ортогональность в полной энергетической метрике («кинетическая» + «потенциальная»).

Для упрощения записи обозначим:

$$\Pi(y, z) = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\sigma_{ik}y_iz_k\,|_{x=0} + \frac{1}{2}\int_0^l \sum_{i,k} b_{ik}\frac{\partial y_i}{\partial x}\frac{\partial z_k}{\partial x}\,dx + \frac{1}{2}\sum_{i,k}\varepsilon_{ik}z_iz_k\,|_{x=l},$$

$$K(y, z) = \frac{1}{2}\int_0^l \sum_{i,k} a_{ik}y_iz_k\,dx.$$

Пусть $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(r)}$ — собственные вектор-функции, отвечающие собственным значениям $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_r$, и пусть

$$v = \xi_1 v^{(1)} + \xi_2 v^{(2)} + \ldots + \xi_r v^{(r)}$$

является вектор-функцией, лежащей в пространстве, натянутом на эти собственные.

Тогда

$$\frac{\Pi(v, v)}{K(v, v)} = \frac{\sum \xi_i\xi_k \Pi(v^{(i)}, v^{(k)})}{\sum \xi_i\xi_k K(v^{(i)}, v^{(k)})} =$$
$$= \frac{\xi_1^2 \Pi(v^{(1)}, v^{(1)}) + \xi_2^2 \Pi(v^{(2)}, v^{(2)}) + \ldots + \xi_r^2 \Pi(v^{(r)}, v^{(r)})}{\xi_1^2 K(v^{(1)}, v^{(1)}) + \xi_2^2 K(v^{(2)}, v^{(2)}) + \ldots + \xi_r^2 K(v^{(r)}, v^{(r)})} =$$
$$= \frac{\mu_1\xi_1^2 K(v^{(1)}, v^{(1)}) + \mu_2\xi_2^2 K(v^{(2)}, v^{(2)}) + \ldots + \mu_r\xi_r^2 K(v^{(r)}, v^{(r)})}{\xi_1^2 K(v^{(1)}, v^{(1)}) + \xi_2^2 K(v^{(2)}, v^{(2)}) + \ldots + \xi_r^2 K(v^{(r)}, v^{(r)})}.$$

Если предполагать, что собственные функции нормированы так, что $K(v^{(s)}, v^{(s)}) = 1$, то

$$\frac{\Pi(v, v)}{K(v, v)} = \frac{\mu_1\xi_1^2 + \mu_2\xi_2^2 + \ldots + \mu_r\xi_r^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_r^2} \geqslant \mu_1.$$

Если все собственные значения различны, то минимум

$$\min \frac{\Pi(v, v)}{K(v, v)} = \mu_1$$

достигается только на вектор-функциях, пропорциональных $v^{(1)}$, т. е. на собственной функции, отвечающей наименьшему собственному значению.

Это утверждение допускает следующее важное обобщение. Пусть $v$ пробегает вообще все гладкие вектор-функции, а не только те из них, которые являются линейными комбинациями конечного числа собственных. Можно доказать, что для таких $v$

$$\frac{\Pi(v, v)}{K(v, v)} \geqslant \mu_1,$$

где $\mu_1$ — наименьшее из собственных значений нашей задачи, причем минимум достигается только на собственной функции, отвечающей $\mu_1$.

Этот факт служит основанием очень важного для приложений метода Ритца, предложенного в 1908 г. и применяемого для вычисления собственных функций и собственных значений.

Разберем идею этого метода на примере задачи, в которой одна искомая функция $v(x)$ и формы $\mathrm{K}(v, v)$, $\Pi(v, v)$ задаются формулами

$$\mathrm{K}(v, v) = \int_0^1 a(x) v^2 dx,$$

$$\Pi(v, v) = \int_0^1 b(x) \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx + v^2(1).$$

Будем искать минимум

$$\min \frac{\Pi(v, v)}{\mathrm{K}(v, v)} = \min \Pi(v, v) \text{ (при условии } \mathrm{K}(v, v) = 1)$$

не среди всех $v(x)$, а только среди $v(x)$, являющихся полиномами степени $p$:

$$v(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p.$$

Для таких $v(x)$

$$\Pi(v, v) = \sum_{i, k=0}^{p} \pi_{ik} a_i a_k, \qquad \pi_{ik} = ik \int_0^l b(x) x^{i+k-2} dx + 1,$$

$$\mathrm{K}(v, v) = \sum_{i, k=0}^{p} \varkappa_{ik} a_i a_k, \qquad \varkappa_{ik} = \int_0^l a(x) x^{i+k} dx,$$

и дело сводится к нахождению минимума квадратичной формы $\sum\limits_{i, k=0}^{p} \pi_{ik} a_i a_k$ на векторах $(a_0, a_1, \ldots, a_p)$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{i, k=0}^{p} \varkappa_{ik} a_i a_k = 1$.

Как известно, этот минимум $\mu$ равен наименьшему корню характеристического уравнения степени $p+1$

$$\det \| \pi_{ik} - \mu \varkappa_{ik} \| = 0,$$

а собственный вектор, на котором этот минимум достигается, удовлетворяет однородной системе

$$\sum_{k=0}^{p} (\pi_{ik} - \mu \varkappa_{ik}) a_k = 0.$$

Таким образом, дело сводится к решению алгебраической задачи. Естественно ожидать, что, повышая степень $p$ полинома, мы будем все точнее и точнее приближаться к собственному значению и к собственной функции.

Практическое удобство метода Ритца состоит в том, что обычно удается получить хорошие приближения, рассматривая в качестве допустимых лишь функции, лежащие в пространствах не слишком большой размерности. Эти пространства не обязательно должны быть пространствами полиномов.

Особенно выгодно применять метод Ритца для отыскания собственных значений и функций в случае задач с двумя или тремя пространственными переменными, где нет почти ни одного конкурирующего с ним метода. Отметим еще, что обычно метод Ритца дает очень хорошую точность для собственных значений и несколько худшую для собственных функций.

В заключение главы IV, посвященной методу Фурье, заметим следующее. Часто изложение этого метода состоит в построении решения краевой задачи (и тем самым в доказательстве существования решения) с помощью решений специального вида «стоячих волн». И во вводной первой главе, и в настоящей мы предпочли опереться на независимым образом доказанные теоремы существования решения краевых задач и затем уже разлагать эти решения по функциям специального вида. Однако полученные нами формулы для коэффициентов разложения решений симметричных консервативных задач дают возможность выписать явные выражения для решений по начальным данным, если известны собственные функции краевой задачи для соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

# ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971.
2. Седов Л. И. Распространение сильных взрывных волн. — ПММ, 1964, т. IX, вып. 2.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972, гл. II, § 3.
4. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. — М.: Наука, 1965, гл. I, § 3.
5. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Л.: ЛГУ, 1950, с. 1—255; Новосибирск, 1962, с. 1—255.
6. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977.
7. Крейс О. Смешанные задачи для гиперболических систем. — В кн. «Математика», 1970, т. 14, № 4, с. 98—111.
8. Сакомото Р. Смешанные задачи для гиперболических уравнений. — В кн. «Математика», 1972, т. 16, № 1, с. 62—100.
9. Ikawa M. Mixed problem for the wave equation with an oblique derivative boundary condition. — *Osaka J. Math.* 1970, v. 7, p. 495—525.
10. Годунов С. К., Гордиенко В. М. Смешанная задача для волнового уравнения, — АН СССР, Сибирское отделение. Институт Математики. Дифференциальные уравнения с частными производными. Труды семинара С. Л. Соболева. Новосибирск, 1977, с. 5—32.
11. Лаврентьев М. М. О задаче Коши для уравнения Лапласа. — ИАН СССР (сер. математическая), 1956, т. 20, с. 819—842.
12. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1974, с. 211—221.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ