АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ им. Л. В. КИРЕНСКОГО

Л. А. АЙЗЕНБЕРГ

ФОРМУЛЫ КАРЛЕМАНА В КОМПЛЕКСНОМ АНАЛИЗЕ

Первые приложения

Ответственный редактор
кандидат физико-математических наук
А. М. Кытманов

НОВОСИБИРСК
«НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1990

УДК 517.5 : 771.64 : 621.391

Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения/Айзенберг Л. А.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990.— 248 с.
ISBN 5-02-029314-8.

В монографии впервые систематически изложены формулы Карлемана, позволяющие восстанавливать значения голоморфных в области функций по их значениям на части границы области. Рассмотрены различные обобщения этих формул. Отражены их первые приложения: «внутренние» (к задачам аналитического продолжения в теории функций) и «внешние» (к теоретической и математической физике, экстраполяции и интерполяции сигналов с финитным спектром Фурье).

Книга предназначена для математиков и физиков-теоретиков, интересующихся комплексным анализом, а также для специалистов по обработке сигналов.

Ил. 9. Библиогр.: 244 назв.

Рецензенты

член-корреспондент АН СССР *В. К. Иванов*
доктор физико-математических наук *А. П. Южаков*

Утверждено к печати
Институтом физики им. Л. В. Киренского СО АН СССР

А $\frac{1602070000-127}{042(02)-90}$ 237—90 I полугодие

ISBN 5—02—029314—8

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть III

ПЕРВЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Интегральные представления голоморфных функций играют важную роль в классической теории функций одного комплексного переменного и в многомерном комплексном анализе (в последнем случае наряду с интегрированием по всей границе ∂D области D часто встречается интегрирование по границе Шилова $S = S(D)$). Они решают классическую задачу восстановления в точках области D голоморфной функции, достаточно хорошо себя ведущей при подходе к границе ∂D, по ее значениям на ∂D или на S. Наряду с этой классической задачей можно и естественно рассматривать следующую: восстановить голоморфную функцию в D по ее значениям на некотором множестве $M \subset \partial D$, не содержащем S. Конечно, M должно быть множеством единственности для рассматриваемого класса голоморфных функций (например, тех из них, которые непрерывны на $\bar{D}$ или входят в класс Харди $H^p(D)$, $p \geqslant 1$).

Первый результат в направлении решения такой задачи получил Т. Карлеман в 1926 г. [199] для области $D \subset \mathbf{C}$ одного специального вида. Его идею введения «гасящей» функции в интегральную формулу Коши развили Г. М. Голузин и В. И. Крылов в 1933 г. [68] применительно к односвязным плоским областям. Их метод предусматривал построение некоторой вспомогательной голоморфной функции, зависящей от множества M, что было возможно для односвязных областей $D \subset \mathbf{C}^1$, но, вообще говоря, уже невозможно для многосвязных областей в $\mathbf{C}^1$ или для областей в $\mathbf{C}^n$, $n > 1$. Другой метод, основанный на аппроксимации ядра интегрального представления, предложил М. М. Лаврентьев в 1956 г. [107]. Оказалось, что этот метод успешно работает в отмеченных случаях, когда неприменим подход Голузина — Крылова.

Автор в течение многих лет занимался интегральными представлениями голоморфных функций многих комплексных переменных. Его интерес к построению формул Карлемана резко возрос после выхода книги М. М. Лаврентьева, В. Г. Романова, С. П. Шишатского [111] по некорректным задачам анализа и математической физики. Автору удалось также заинтересовать этим направлением и некоторых молодых красноярских математиков.

Предлагаемая монография написана на основе спецкурсов, прочитанных автором на математическом факультете Красноярского университета, и содержит результаты, полученные в основном за последние 4 года, значительная часть которых еще не опубликована. Не исключено, что при их изложении автор пошел не наилучшим путем, однако желание выпустить книгу достаточно быстро, чтобы привлечь внимание математиков к новому разделу комплексного анализа, сыграло здесь решающую роль.

Монография состоит из трех частей. Часть I посвящена формулам Карлемана в теории функций одного комплексного переменного и их обобщениям, в частности, на случай решений эллиптических систем весьма общего вида. Мы приводим также очень общий подход Виденского — Гавуриной — Хавина. В этой части изложены методы Голузина — Крылова и Лаврентьева. Последний метод позволил получить теорему существования для (неодносвязных) областей в $\mathbb{C}^1$ формул Карлемана с голоморфным ядром. Интересно, что самая простая формула Карлемана, известная автору, получена при $n = 1$ для областей специального вида физиками-теоретиками В. А. Фоком и Ф. М. Куни [156], хотя ее можно извлечь и из работы [68].

Отметим еще метод Кытманова, применимый к областям с достаточно богатой группой автоморфизмов, позволивший в случае однородных областей в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, построить формулы Карлемана, оказавшиеся для шара и поликруга более простыми, чем полученные другими методами. Для иллюстрации в простейшем случае подход Кытманова приведен и в части I при $n = 1$.

Часть II, посвященная многомерному комплексному анализу, начинается с гл. 3, в которой изложены интегральные представления голоморфных функций многих комплексных переменных и формулы логарифмического вычета. В основном глава составлена из материалов первых двух глав книги [34]. Исключение составляет разд. 15 об интегральных представлениях функций, голоморфных в классических областях, следующий работе [221], а также некоторые новые результаты разд. 13. В этой части метод Голузина — Крылова применяется в сечениях области D комплексными прямыми или используется метод Лаврентьева, а в некоторых случаях — и другие подходы.

Рассматриваемая в этой книге задача восстановления голоморфной функции в области D по ее значениям на части границы ∂D (на части границы Шилова S) не является, как известно, корректной, но она условно устойчива, если ограничиться классом голоморфных в D функций, удовлетворяющих условию $|f(z)| \leqslant C$, $z \in D$, или другому подходящему неравенству. Оказалось, что само существование формулы Карлемана для компакта $K \subset \partial D$ эквивалентно условной устойчивости этой задачи для компакта K. Данный результат мы приводим (не только для голоморфных функций, но и для решений эллиптических систем дифференциальных уравнений весьма общего вида), однако, как правило, в книге нет оценок условной устойчивости (о них см., например, [111, 109, 112, 38].

Заметим, что если в первых двух частях книги изложены все известные автору формулы Карлемана из комплексного анализа, то при написании части III автор следовал своим личным вкусам. Приложения формул Карлемана начались недавно, почти все результаты части III получены за последние 2 года. Отметим разд. 27, содержащий описание следов на $M \subset \partial D$ голоморфных в D функций. Интересно, что и здесь самый простой результат фактически уже содержался в работе В. А. Фока, Ф. М. Куни [156]. Кроме того, в разд. 28 кратко приведены приложения к аналитическому продолжению «с острия клина» (результат А. А. Гончара и его некоторые следствия; по поводу теоремы Боголюбова «об острие клина», ее обобщений и уточнений см. обзор В. С. Владимирова [59]). Мы не коснулись ряда других приложений формул Карлемана в комплексном анализе (см. о них, например, [191, 192]).

Приводя примеры приложений формул Карлемана к задачам теоретической и математической физики, автор надеется, что их количество и значение будут расти.

При рассмотрении задач экстраполяции и интерполяции спектров Фурье финитных сигналов (или, что по существу равносильно, сигналов с финитным спектром Фурье) использована та же идея, которая была в методе Голузина — Крылова, но уже по отношению к «внутренней» задаче аналитического продолжения (множество M лежит в области D, а не на ее границе). Эти же результаты можно было бы получить и исходя из интерполяционных идей книги [155].

Отметим гл. 9, посвященную вычислительному эксперименту, в котором применялись некоторые изложенные ранее в книге методы экстраполяции или интерполяции сигналов (в основном пока одномерных) с финитным спектром, что связано с задачей сверхразрешения физических приборов, борьбы с узкополосным шумом и т. д....

А. М. Кытманов написал для этой книги гл. 6 и сделал ряд замечаний. Л. Н. Знаменская, Н. С. Красикова, А. М. Кытманов, Т. Н. Никитина, Н. Н. Тарханов, Ю. В. Хурумов, А. К. Цих, Б. А. Шаимкулов предоставили в распоряжение автору свои еще не опубликованные работы. В полезных обсуждениях прикладных результатов, вошедших в книгу, приняли участие М. Л. Аграновский, К. С. Александров, Г. В. Алексеев, В. А. Игнатченко, М. М. Лаврентьев, В. П. Паламодов, Н. Н. Тарханов. В вычислительном эксперименте участвовали Б. А. Кравцов и Р. Ф. Миненкова. Л. Н. Знаменская и Л. В. Нонкина оказали большую помощь при подготовке рукописи к изданию. Считаю своим приятным долгом выразить им всем свою искреннюю признательность и благодарность.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

ВНЕШНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ И ФОРМУЛА СТОКСА

Будем считать, что читатель знаком с понятиями внешней дифференциальной p-формы класса C^k на многообразии X, ее внешнего дифференциала, а также формы типа (p, q) на комплексном аналитическом многообразии, p-цепи c и ее границы ∂c. Часто будет использоваться *формула Стокса*.

Теорема 0.1 (формула Стокса). *Если ω — p-форма класса C^1 на многообразии X и c — $(p+1)$-цепь в X, то*

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega.$$

Предполагаются известными понятия цикла, точной и замкнутой формы, $\bar\partial$-точной и $\bar\partial$-замкнутой формы, а также цикла, гомологичного нулю, так что из теоремы 0.1 вытекает

Следствие 0.2. *Интеграл от точной формы по циклу равен нулю.*

Следствие 0.3. *Интеграл от замкнутой формы по циклу, гомологичному нулю, равен нулю.*

В дальнейшем, как правило, будем рассматривать ограниченные области D комплексного пространства $\mathbf{C}^n$ переменных $z = (z_1, \ldots, z_n)$, где $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, \ldots, n$. Предполагаем, что $\mathbf{C}^n$ ориентировано так, что

$$\int_D dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n = \left(-\frac{i}{2}\right)^n \int_D d\bar z_1 \wedge \ldots d\bar z_n \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n > 0.$$

Границе ∂D области D приписываем ориентацию, индуцированную ориентацией D. Если $D = \{z\colon \rho(z) < 0\}$, где ρ — действительнозначная функция класса C^r в окрестности ∂D и $\operatorname{grad}\rho = \left(\rho'_{z_1}, \ldots, \rho'_{z_n}\right) \neq 0$ на ∂D, то будем писать $\partial D \in C^r$. Согласно формуле Стокса

$$(-i)^n \int_{\partial D} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \bar\zeta_j\, d\bar\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\bar\zeta_{j-1} \wedge d\bar\zeta_{j+1} \wedge \ldots \wedge d\bar\zeta_n \wedge d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n > 0.$$

Заметим, что в ряде книг (см., например, [55, 157]) принята такая ориентация $\mathbf{C}^n$, что

$$\int\limits_D dx_1 \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge dy_n =$$
$$= \left(-\frac{i}{2}\right)^n \int\limits_D d\bar{z}_1 \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_n \wedge dz_n > 0.$$

Легко видеть, что интегралы, вычисленные при данной ориентации и ориентации, принятой нами, отличаются множителем $(-1)^{n(n-1)/2}$. Как частный случай следствия 0.3 получается

Теорема 0.4 (Коши — Пуанкаре). *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области $D \subset \mathbf{C}^n$. Тогда для любой $(n+1)$-цепи σ в D интеграл*

$$\int\limits_{\partial\sigma} f(z)\, dz = \int\limits_{\partial\sigma} f(z_1, \ldots, z_n)\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n = 0.$$

Пусть D — ограниченная область в $\mathbf{C}^n$ с кусочно-гладкой границей ∂D, и области D_0, D_0' таковы, что $\overline{D_0'} \subset D_0 \subset \overline{D}_0 \subset D$. На $\overline{D} \setminus \overline{D_0'}$ задана внешняя дифференциальная форма α размерности $2n-1$, непрерывная в $\overline{D} \setminus \overline{D_0'}$ и замкнутая в области $D \setminus \overline{D}_0'$. Область D можно аппроксимировать изнутри многогранниками D_m, $m = 1, 2, \ldots$, $D_0 \subset D_m$, так, чтобы для всякой непрерывной в $\overline{D} \setminus \overline{D_0'}$ формы β степени $2n-1$ выполнялось

$$\lim_{m \to \infty} \int\limits_{\partial D_m} \beta = \int\limits_{\partial D} \beta.$$

С другой стороны, в силу замкнутости формы α

$$\int\limits_{\partial D_m} \alpha = \int\limits_{\partial D_0} \alpha,$$

значит, верно

Следствие 0.5. *При сделанных предположениях*

$$\int\limits_{\partial D_0} \alpha = \int\limits_{\partial D} \alpha.$$

Это следствие часто используется далее при доказательстве справедливости различных интегральных представлений.

НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ АНАЛИЗА

Если F — замкнутое, а Ω — открытое множество в $\mathbf{C}^n$ и $m = 0, 1, 2, \ldots, \infty$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $0 \leqslant r \leqslant 2n$, $0 \leqslant p$, $q \leqslant n$, то $C_r^{m,\lambda}(F)$ — класс внешних дифференциальных форм размерности r, коэффициенты которых продолжаются в окрестность F как m раз непрерывно дифференцируемые функции, причем все производные порядка m (при $m < \infty$) удовлетворяют условию Гёльдера с показателем λ.

$C_{p,q}^{m,\lambda}(F)$ — подкласс класса $C_{p+q}^{m,\lambda}(F)$, состоящий из форм типа (p, q). При $\lambda = 0$ этот индекс будем опускать. $C_{p,q}^{m,\lambda}(\Omega)$ — проективный предел классов $C_{p,q}^{m,\lambda}(F)$, $F \subset\subset \Omega$.

Аналогично определяется условие $\partial D \in C^{m,\lambda}$, где ∂D — граница ограниченной области в $\mathbf{C}^n$. В частности, ограниченная область со связной границей называется областью Ляпунова, если $\partial D \in C^{1,\lambda}$, $\lambda > 0$.

Пусть X и Y — дифференцируемые многообразия и f: $X \to Y$ — отображение класса C^1. Точка $p \in X$ называется критической точкой отображения f, если $\min(\dim X, \dim Y) > \operatorname{rank}(df)_p$, где $(df)_p$ — дифференциал отображения f в точке p. Множество значений отображения f на критических точках обозначим $\operatorname{wr}(f)$.

Теорема 0.6 (Сард). *Если* $\dim X = \dim Y$, *то лебегова мера* $\operatorname{wr}(f)$ *в* Y *равна нулю. Если* $X \in C^\infty$, $Y \in C^\infty$, $f \in C^\infty$, *то также лебегова мера* $\operatorname{wr}(f)$ *в* Y *равна нулю.*

В дальнейшем будем пользоваться простейшими понятиями теории меры, не объясняя, например, слова «конечная борелевская мера» или sup относительно данной меры μ $\left(\text{обозначение } \operatorname*{vrai\,sup}_{\mu}\right)$.

СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Предполагается, что читатель знаком с простейшими свойствами голоморфных функций одного и многих комплексных переменных. Их можно найти в первых главах учебников [55, 62, 138, 157, 176, 165]. Например, считается известным, что такое комплексная прямая, комплексная гиперплоскость, круговая область, n-круговая область, строго псевдовыпуклая область, однородная область, порождающее многообразие, строго логарифмически выпуклая n-круговая область, CR-функция.

Напомним, что если $f(z_1, \ldots, z_n)$ — голоморфное отображение области $D \subset \mathbf{C}^n$ в пространство той же комплексной размерности, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $f_k = u_k + iv_k$, $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, \ldots, n$, то

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 = \left|\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)}\right|^2 = \frac{\partial(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)}.$$

Если граница ∂D ограниченной области D кусочно-гладка, форма $\alpha \in C_{n,n-1}(\partial D)$ является $\bar\partial$-точной, т. е. на ∂D справедливо равенство $\alpha = \bar\partial\beta$, где $\beta \in C_{n,n-2}(\partial D)$, а функция f голоморфна на $\bar D$, то по формуле Стокса (см. следствие 0.2)

$$\int_{\partial D} f\alpha = \int_{\partial D} f\bar\partial\beta = \int_{\partial D} \bar\partial(f\beta) = \int_{\partial D} d(f\beta) = 0.$$

Область $D \subset \mathbf{C}^n$ назовем *линейно-выпуклой*, если для каждой точки $\zeta \in \partial D$ существует комплексно $(n-1)$-мерная аналитическая плоскость, проходящая через ζ и не пересекающая D. Обозначим $D_r = rD$ — гомотетию области D с коэффициентом $r > 0$. Область D назовем сильно звездной, если $D_r \supset \bar D$ при $r > 1$. Предполагается известной теорема Гефера, а также теорема единственности Садуллаева.

Теорема 0.7 (Садуллаев). *Пусть $D \subset \mathbf{C}^n$ — область с гладкой границей, $M \subset \partial D$ — порождающее j-мерное многообразие класса C^3, множество $K \subset M$ имеет положительную j-мерную меру на M. Если ограниченная в D голоморфная функция f имеет радиальные предельные значения $f(\zeta) = 0$ для всех $\zeta \in K$, то $f \equiv 0$ в D.*

Считаются известными простейшие свойства функций класса Харди $H^p(D)$, где D — область в $\mathbf{C}^1$ со спрямляемой границей (см., например, [134, 100, 34]); в частности, тот факт, что функции класса Харди $H^1(D)$ представимы через свои граничные значения на ∂D формулой Коши, а также что при автоморфизмах единичного круга класс Харди H^1 переходит в себя.

Пусть теперь ограниченная область $D \subset \mathbf{C}^n$ имеет гладкую границу ∂D. Тогда классы Харди $H^p(D)$ по определению состоят из таких функций f, голоморфных в D, для которых

$$\varlimsup_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D} |f(\zeta - \varepsilon\nu_\zeta)|^p \, d\sigma_\zeta < \infty, \tag{0.1}$$

где ν_ζ — вектор (единичный) внешней нормали к ∂D в точке ζ, а $d\sigma$ — элемент поверхности — мера Лебега, $0 < p < \infty$.

Нам потребуется для $f \in H^1(D)$ слабая сходимость $f|_{\partial D_m}$ (где D_m — некоторая аппроксимирующая D последовательность областей, $\bar D_m \subset D_{m+1} \subset D$) к граничным значениям f на ∂D в том смысле, что

$$\lim_{m \to \infty} \int_{\partial D_m} f\nu = \int_{\partial D} f\nu \tag{0.2}$$

для всякой внешней дифференциальной формы $\nu \in C_{2n-1}(\bar D \setminus D_1)$. Этот факт вытекает из более сильных утверждений, если D — область Ляпунова (см. [164]). Но можно не требовать $\partial D \in C^{1,\lambda}$, если область D с кусочно-гладкой границей такова, что каждое ее сечение комплексной прямой, проходящей через начало координат, односвязно, а также существует гомеоморфизм $\psi \in C^1$ области D на единичный шар, при котором сечение D каждой комплексной прямой указанного пучка прямых конформно отображается на сечение шара той же прямой (этим двум условиям удовлетворяют, например, линейно-выпуклые ограниченные области с гладкой границей [182]). Пусть D_m — прообраз шара радиуса $1-(m+1)^{-1}$ при отображении ψ, где $m=1, 2, \ldots$. Тогда можно задать классы Харди $H^p(D)$, заменяя требование (0.1) на

$$\sup_m \int\limits_{\partial D_m} |f(\zeta)|^p \, d\sigma_\zeta < \infty.$$

При этом из теоремы Фубини нетрудно получить

Предложение 0.8. *Если голоморфная в ограниченной области $D \ni 0$ функция f принадлежит классу $H^p(D)$, $0 < p \leqslant \infty$, то:*

1) *почти в каждом сечении α области D пучком комплексных прямых, проходящих через 0, функция $f|_\alpha$ входит в класс $H^p(\alpha)$;*

2) *$f \in L^p_{d\sigma}(\partial D)$, где $f|_{\partial D}$ построено по сечениям.*

Области D_m удовлетворяют условию (0.2). Разумеется, вместо пучка комплексных прямых, проходящих через 0, можно использовать пучок параллельных прямых. Будем обозначать $D \in H$, если D — ограниченная область в $\mathbf{C}^n$ с кусочно-гладкой границей ∂D, в которой определены классы Харди $H^p(D)$ с указанным свойством.

Наконец, считаются известными понятия внешней и внутренней функции из теории функций одного комплексного переменного (см., например, [100]). Под границей области $D \subset \mathbf{C}^1$ обычно понимается жорданова кривая. Спрямляемая кривая Γ называется *регулярной*, если $l(\Gamma \cap U(a, r)) \leqslant cr$, где $U(a, r)$ — круг с центром в любой точке $a \in \Gamma$ радиуса r, а l — длина кривой. Обозначим

$$\mathcal{P}(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}$$

ядро Пуассона для единичного круга.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathbf{C}^n$ — пространство n комплексных переменных, точки этого пространства обозначаются z, ζ, z^0, ζ^0 и т. д. Если $z=(z_1, \ldots, z_n)$, то $\bar z = (\bar z_1, \ldots, \bar z_n)$. Для $z, \zeta \in \mathbf{C}^n$ обозначим $\langle z, \zeta\rangle = z_1\zeta_1 + \ldots \ldots + z_n\zeta_n$, $|z| = \sqrt{\langle z, \bar z\rangle}$, $\|z\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |z_i|$, $z' = (z_1, \ldots, z_{n-1})$, $'z = (z_2, \ldots, z_n)$.

Введем обозначения для шара $B^n = B_r = B_r(a) = B(a, r) = \{z\colon |z-a| < r\}$, поликруга $U^n = U = U(a, r) = \{z\colon |z_i - a_i| < r_i,$

$i=1, \ldots, n\}$, его остова $\Delta_r=\{z\colon |z_i-a_i|=r_i,\ i=1, \ldots, n\}$, обобщенного шара $B_r^\alpha(a)=\left\{z\colon |z_1-a_1|^{2\alpha_1}+\ldots+|z_n-a_n|^{2\alpha_n}<r^2\right\}$, где $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Вообще, знаком $\{z\colon \ldots\}$ обозначается множество из $\mathbf{C}^n$ (в частности, из $\mathbf{C}^1$), другие случаи специально оговариваются. $\mathbf{R}^n$ — пространство n действительных переменных, его точки обозначаются x, y и т. д.

Если I, J — векторы с неотрицательными целыми координатами (мультииндексы), то $|I|=i_1+\ldots+i_n$; неравенство $I\leqslant J$ означает, что $i_k\leqslant j_k$, $k=1, \ldots, n$, где $I=(i_1, \ldots, i_n)$, $J=(j_1, \ldots, j_n)$. Далее, $I!=i_1!\ldots i_n!$,

$$z^I=z_1^{i_1}\ldots z_n^{i_n},\ D^I=\frac{\partial^{|I|}}{\partial z_1^{i_1}\ldots\partial z_n^{i_n}},$$

$dz=dz_1\wedge\ldots\wedge dz_n$; $dz_I=dz_{i_1}\wedge\ldots\wedge dz_{i_p}$, где $I=(i_1, \ldots, i_p)$. $dz[j]=dz_1\wedge\ldots\wedge dz_{j-1}\wedge dz_{j+1}\wedge\ldots\wedge dz_n$. Знак [ ] часто будет употребляться в том же смысле, означающем, что соответствующий элемент пропущен.

Пусть M — множество в $\mathbf{C}^n$, тогда ∂M — граница M, CM — внешность M, т. е. $\mathbf{C}^n\setminus M$, $\overline{M}$ — замыкание M, а $\operatorname{int} M$ — внутренность M; $M\subset\subset N$ означает, что $\overline{M}$ — компакт и $\overline{M}\subset\operatorname{int} N$. Если $w=(w_1, \ldots, w_n)$, $\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, то $\langle w, d\varphi\rangle=w_1d\varphi_1+\ldots+w_nd\varphi_n$, $\langle w, \varphi^{(\alpha+1)}\rangle=w_1\varphi_1^{\alpha_1+1}+\ldots+w_n\varphi_n^{\alpha_n+1}$, где $\alpha+1=(\alpha_1+1, \ldots, \alpha_n+1)$. Далее, $0=(0, \ldots, 0)$ — начало координат;

$$\frac{d\varphi}{\varphi}=\frac{d\varphi_1}{\varphi_1}\wedge\ldots\wedge\frac{d\varphi_n}{\varphi_n}.$$

Мы часто будем записывать функцию $\psi(z)$ вместо $\psi(z, \bar{z})$. Знаком $\varnothing$ обозначим пустое множество, а γ_r — окружность $\partial U(0, r)$. Меру Лебега обозначим m, а j-мерную меру Лебега соответственно m_j. Пусть $\Pi=\{z\colon \operatorname{Im} z>0\}\subset\mathbf{C}^1$ — верхняя полуплоскость, а $\widetilde{\Pi}=\{z\colon \operatorname{Re} z<0\}$ — левая полуплоскость, χ_E — характеристическая функция множества E.

Класс функций, голоморфных в области D (на компакте K), обозначается $A(D)$ (соответственно $A(K)$). Как обычно, $C(K)$ — класс непрерывных на K функций. Далее $A_C(D)=A(D)\cap C(\overline{D})$. $A^\alpha(D)$ — класс голоморфных в области D функций, удовлетворяющих условию Гёльдера на $\overline{D}$ порядка $\alpha>0$. Далее, $\widetilde{A}^\alpha(\Pi)$ — образ $A^\alpha(U)$ при конформном отображении Π на $U=U(0, 1)$, а H_1^1 — класс функций, производная которых входит в класс Харди H^1. $\|\ldots\|$ — норма в банаховом пространстве, в частности, $\|\ldots\|_p$ — норма в H^p.

Пусть Z — множество целых чисел, а $Z_p(X)$ — множество p-мерных циклов на многообразии X, но $Z^k_{p,q}(D)$ — класс внешних дифференциальных форм типа (p, q), которые $\bar\partial$-замкнуты в D и входят в класс $C^k(\overline{D})$. Кроме того, $\operatorname{Re} A_C(D)$ — класс функций, являющихся действительными частями функций из $A_C(D)$. Обозначим $\operatorname{Ph}(D)$ — класс плюригармонических в области D функций, а $\operatorname{Ph}_C(D) = \operatorname{Ph}(D) \cap C(\overline{D})$. Далее $CR(M)$ — класс CR-функций, непрерывных на M.

Индекс ζ (или z) у множества интегрирования означает, что ζ (соответственно z) — переменное интегрирования; $|\partial D|$ — образ ∂D при отображении $z \to (|z_1|, \ldots, |z_n|)$. $\operatorname{supp} \alpha$ — носитель формы α, т. е. $\operatorname{supp} \alpha = \overline{\{z\colon \alpha(z) \neq 0\}}$; D_ε — ε-окрестность D. $C^*(E)$ — пространство, сопряженное к $C(E)$. Знаком I иногда будет обозначаться единичный оператор в соответствующем пространстве.

Если x — элемент банаховой алгебры с единицей, то $\operatorname{sp} x$ — спектр элемента x (см. [48, гл. 1]). Если W — матрица $n \times n$, то W^τ — транспонированная матрица, $W^* = \overline{W}^\tau$. Запись $W > 0$ означает, что W положительно определена, а $WW^* < I$ означает, $I - WW^*$ положительно определена (здесь I — единичная матрица); $\dotplus$ — знак прямой суммы матриц. Пусть $\tau_0 = \left\{W : W \in \mathbb{C}^{n^2},\ WW^* < > I\right\}$ — «обобщенный единичный круг». Знак $\square$ указывает конец доказательства.

Часть I

ФОРМУЛЫ КАРЛЕМАНА В ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

ГЛАВА 1

ОДНОМЕРНЫЕ ФОРМУЛЫ КАРЛЕМАНА

1. МЕТОД ГОЛУЗИНА — КРЫЛОВА

Пусть D — односвязная ограниченная область комплексной плоскости $\mathbf{C}^1$ со спрямляемой границей ∂D. Для функций f из класса Харди $H^1(D)$ справедлива формула Коши (см. [134, с. 205])

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z},\quad z\in D. \tag{1.1}$$

На границе ∂D рассмотрим измеримое множество M положительной меры Лебега. Ставится задача восстановления $f(z)$ в D по граничным значениям не на всей границе ∂D, как в (1.1), а только на $M\subset\partial D$. Применяя простую, но очень плодотворную идею Карлемана, построим *«гасящую» функцию*, которая позволит избавиться в (1.1) от интегрирования по $\partial D\setminus M$. Для этой цели нужно сконструировать вспомогательную функцию $\varphi(z)\in H^\infty(D)$, удовлетворяющую двум условиям:

1) $|\varphi(\zeta)|=1$ почти всюду на $\partial D\setminus M$,
2) $|\varphi(z)|>1$ в D.

Это можно сделать, решая подходящую задачу Дирихле, например, рассматривая функцию

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{M}\frac{\partial G}{\partial n}\,ds, \tag{1.2}$$

где s — дуга ∂D, а G — функция Грина для области D. Формула (1.2) представляет гармоническую и ограниченную в D функцию $u(x,y)$ такую, что

$$u(x,y)=\begin{cases}1 & \text{почти всюду на } M,\\ 0 & \text{почти всюду на } \partial M\setminus M,\end{cases}$$

т. е. *гармоническую меру M относительно области D*. Пусть v — сопряженная к u гармоническая функция, тогда $\varphi(z)=\exp(u+iv)$ удовлетворяет указанным условиям 1) и 2).

Теорема 1.1. (Голузин — Крылов). *Если $f \in H^1(D)$ и множество $M \subset \partial D$ положительной меры Лебега, то для любой точки $z \in D$ верна формула Карлемана*

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_M f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \tag{1.3}$$

сходимость в (1.3) *равномерна на компактах в* D.

Доказательство. Функция $f\varphi^m$ принадлежит классу Харди $H^1(D)$, здесь m — целое положительное число. По формуле Коши (1.1)

$$f(z)\varphi^m(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\varphi^m(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z},$$

далее

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_M f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D\setminus M} f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \tag{1.4}$$

Остается заметить, что второй интеграл в (1.4) равномерно стремится к нулю при $m \to \infty$ на всяком компакте $K \subset D$. □

Аналогично для любого положительного $\sigma > 0$ можно рассмотреть функцию $f(z)\varphi^\sigma(z) = f(z)\exp\sigma\ln\varphi(z)$ и получить формулу

$$f(z) = \lim_{\sigma\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_M f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^\sigma \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \tag{1.5}$$

а выбор ветви логарифма не играет роли, так как не меняет множитель $\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^\sigma$.

Следствие 1.2. *При условиях теоремы* 1.1

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_M \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty d\sigma \int_M \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^\sigma \ln\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\,d\zeta. \tag{1.6}$$

Доказательство очевидно, так как

$$\lim_{\sigma\to\infty}\psi(\sigma) - \psi(0) = \int_0^\infty \left(\frac{d}{d\sigma}\psi(\sigma)\right) d\sigma, \tag{1.7}$$

где существование предела в левой части (1.7) эквивалентно существованию несобственного интеграла в правой части. □

Если теперь сравнить (1.1) и (1.6), то получим для $z \in D$

$$\int_{\partial D\setminus M} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \int_0^\infty d\sigma \int_M \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^\sigma \ln\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\,d\zeta.$$

Иногда можно построить более простую «гасящую» функцию $\varphi(z)$ и не только для односвязных областей D. В рассматриваемых далее примерах z_∞, v_∞ — точки, переходящие в точку ∞ при соответствующем конформном отображении.

Пример 1. Пусть область D односвязна и M — дуга контура ∂D. Рассмотрим односвязную (не обязательно конечную) область $D' \supset D$ такую, что $\partial D \backslash M \subset \partial D'$, но $M \cap \partial D' = \varnothing$. Тогда в качестве $\varphi(z)$ можно взять функцию, конформно отображающую область D' на внешность единичного круга $CU(0, 1)$ так, чтобы точка z_∞ лежала вне $\overline{D}$. Или, например, можно рассмотреть $\varphi(z) = \exp g(z)$, где $w = g(z)$ конформно отображает D' на полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Re} w > 0\}$ так, чтобы точка z_∞ лежала вне $\overline{D}$.

Пример 2. Пусть D — двухсвязная область, $\partial D = C_1 \cup C_2$, где C_i — замкнутые простые контуры, $i = 1, 2$, и C_1 — внешний контур, а C_2 — внутренний. Если $M = C_2$, то в качестве $\varphi(z)$ удобно взять функцию, конформно отображающую внутренность C_1 на $CU(0, 1)$ так, чтобы точка z_∞ лежала внутри C_2.

Если же C_2 — незамкнутая кривая, то следует рассмотреть $\varphi(z) = \Phi(g(z))$, где $v = g(z)$ конформно отображает внешность C_2 на $CU(0, 1)$ и $z_\infty = \infty$, а $w = \Phi(v)$ отображает внутренность $g(C_1)$ опять на $CU(0, 1)$ так, чтобы $|v_\infty| < 1$. Если $M = C_1$, то в качестве $\varphi(z)$ можно рассмотреть функцию, конформно отображающую внешность C_2 на $CU(0, 1)$ так, чтобы z_∞ лежала во внешности C_1.

Аналогичные примеры нетрудно привести и для n-связных областей в случае, если M — один из граничных контуров.

Пример 3. Предположим, что ∂D содержит дугу γ окружности $\partial U(0, r)$ и что $U(0, r) \cap D = \varnothing$. Рассмотрим $M = \partial D \backslash \gamma$, тогда верна формула (1.3), где $\varphi(z) = z$. Если же $D \subset U(0, r)$ и $0 \notin D$, то можно взять $\varphi(z) = 1/z$.

Пусть $D = \{z\colon \rho < |z| < r\}$ — кольцо, тогда

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(\zeta) \left(\frac{\zeta}{z}\right)^m \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \tag{1.8}$$

Если требуется восстановить голоморфную функцию $f(z)$ не во всей области D, а лишь на некотором подмножестве D, то иногда задача существенно упрощается.

Пример 4. Разобьем границу ∂D области D на две части: $C_1 = \{z\colon z \in \partial D, \operatorname{Re} z \geqslant a\}$ и $C_2 = \{z\colon z \in \partial D, \operatorname{Re} z \leqslant a\}$, где $a \in \mathbf{R}^1$. Тогда для точек $z \in D_1 = \{z\colon z \in D, \operatorname{Re} z > a\}$ имеет место формула

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} f(\zeta)\, e^{m(\zeta - z)} \frac{d\zeta}{\zeta - z},$$

а для точек $z \in D_2 = D \backslash \overline{D}_1$

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} f(\zeta)\, e^{m(z-\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Пример 5 (Карлеман). Область D ограничена прямыми OB и OA и простой спрямляемой кривой AB, лежащей внутри угла AOB. Пусть $\angle AOB = \pi\alpha$, $0 < \alpha < 2$. Рассмотрим в качестве M указанную кривую AB, тогда для точек z, лежащих на биссектрисе угла AOB, справедлива формула

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{e^{-m}}{2\pi i} \int_M f(\zeta) \exp\left[m\left(\frac{\zeta-\zeta_0}{z-\zeta_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \tag{1.9}$$

где ζ_0 — комплексное число, соответствующее вершине угла (точке O), $(\zeta-\zeta_0)^{1/\alpha} = \exp\left[\frac{1}{\alpha}\ln(\zeta-\zeta_0)\right]$, выбор ветви логарифма не существен так же, как и в формуле (1.5). Для доказательства формулы (1.9) достаточно заметить, что функция

$$\psi_z(\zeta) = \exp\left[m\left(\frac{\zeta-\zeta_0}{z-\zeta_0}\right)^{1/\alpha}\right] \tag{1.10}$$

при фиксированном z является как функция ζ функцией класса $H^\infty(D)$ и что при $\zeta \in \partial D \backslash M$, а z — на указанной биссектрисе, $|\psi_z(\zeta)| = 1$, и, наконец $\psi_z(z) = e^m$.

Очевидно, этим методом можно восстановить голоморфную функцию $f(z)$ не только на биссектрисе, но и во всем угле AOB, выбирая меньший угол так, чтобы точка z оказалась на его биссектрисе. Но тогда в формуле Карлемана (1.9) множество M будет зависеть от z, «гасящая» функция (1.10) тоже зависит от z (не только потому, что z входит в знаменатель показателя, но и потому, что в этом случае α зависит от z).

Заметим в заключение, что «гасящую» функцию φ, удовлетворяющую условиям 1) и 2), можно строить и другими способами, не обязательно с помощью (1.2). Указанный подход Голузина — Крылова давал функцию φ, удовлетворяющую условию 1), и $|\varphi(\zeta)| = e$ почти всюду на M. Между тем для выполнения 2) достаточно, чтобы было верно 1) и $|\varphi(\zeta)| > 1$ почти всюду на M, если φ не имеет нулей в D. Таким образом, $|\varphi|$ не обязательно должен быть постоянным почти всюду на M. Проиллюстрируем сказанное характерным примером.

Пример 6 (Фок — Куни). Пусть область D ограничена контуром, состоящим из отрезка действительной оси и спрямляемой кривой M, лежащей выше действительной оси. Тогда для $z \in D$ верны формулы (сравни с (1.3) и (1.6))

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_M \frac{f(\zeta)\exp[im(z-\zeta)]}{\zeta - z}\, d\zeta, \tag{1.11}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_M \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \exp(i\sigma z) \left(\int_M f(\zeta) \exp(-i\sigma\zeta)\, d\zeta\right) d\sigma. \tag{1.12}$$

Формулы (1.11) и (1.12) нашли применение при изучении дисперсионных соотношений в теоретической ядерной физике (см. разд. 29). Далее обозначим (сравни с. (1.3))

$$f_m(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_M \left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

Теорема 1.1 утверждает, что последовательность $f_m(z)$ при $m\to\infty$ равномерно на компактах в D сходится к $f(z)$, если $f\in H^1(D)$. Для классов Харди H^p, $1<p<\infty$, можно получить более сильную сходимость.

Теорема 1.3 (Патил). *Если* $f\in H^p(U(0,\ 1))$, $1<p<\infty$, *то*

$$\lim_{m\to\infty}\|f - f_m\|_p = 0. \tag{1.13}$$

Доказательство этой теоремы опирается на ряд вспомогательных утверждений. В случае круга $U(0,\ 1)$ пространство Харди H^p, $1\leqslant p\leqslant\infty$, можно отождествить с подпространством таких $f\in L^p(\partial U(0,\ 1))$, для которых равны нулю коэффициенты Фурье с отрицательными номерами

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\theta}\right)e^{in\theta}\,d\theta = 0,$$

$n=1,\ 2,\ \ldots$. При $1<p<\infty$ часто рассматривают естественную проекцию $P\colon L^p\to H^p$, которую можно задать либо с помощью соответствующих рядов Фурье

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta} \xrightarrow{P} \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\theta},$$

либо с помощью интеграла типа Коши

$$(Pf)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

Для любой $\varphi\in L^\infty(\partial U(0,\ 1))$ определим *оператор Теплица* T_φ, действующий из H^p в H^p: $T_\varphi f = P(\varphi f)$. При этом в силу классической теоремы М. Рисса (см. [134])

$$\|T_\varphi\| \leqslant C_p\|\varphi\|_\infty. \tag{1.14}$$

Лемма 1.4. *Если* $\varphi,\ \psi\in L^\infty(\partial U)$ *и* $\bar\varphi\in H^\infty$, *либо* $\psi\in H^\infty$, *то*

$$T_{\varphi\psi} = T_\varphi T_\psi. \tag{1.15}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть представление φ и ψ рядами Фурье и следующие частные случаи, где $n_i,\ m_i>0$, $\varphi_1 = e^{-in_1\theta}$, $\varphi_2 = e^{-in_2\theta}$, $\psi_1 = e^{im_1\theta}$, $\psi_2 = e^{im_2\theta}$. Тогда, очевидно, $T_{\varphi_1\varphi_2} = T_{\varphi_1}T_{\varphi_2}$, $T_{\psi_1\psi_2} = T_{\psi_1}T_{\psi_2}$, $T_{\varphi_1\psi_1} = T_{\varphi_1}T_{\psi_1}$, но $T_{\psi_1\varphi_1} \neq \neq T_{\psi_1}T_{\varphi_1}$. Поэтому при условиях леммы верно (1.15), но $T_{\psi\varphi} \neq \neq T_\psi T_\varphi$. □

Лемма 1.5. *Если h, $1/h \in H^\infty$ и $\varphi = |h|^{-2}$, то оператор Теплица T_φ обратим и $T_\varphi^{-1} = T_h T_{\bar{h}}$.*

Доказательство. Действительно,

$$T_h T_{\bar{h}} T_\varphi = T_h \left(T_{\bar{h}} T_\varphi\right) = T_h T_{1/h} = I. \ \square$$

Рассмотрим далее характеристическую функцию χ_M множества M и $\psi_m = 1 + (e^{2m} - 1)\chi_M$.

Лемма 1.6. *$\psi_m(z) = |\varphi(z)|^{2m}$, $z \in \partial U$, где $\varphi(z)$ — функция из формулы Карлемана* (1.3).

Доказательство. Функцию $\varphi(z)$ из (1.3) для случая круга $U(0, 1)$ можно задать формулой

$$\varphi(z) = \exp \frac{1}{2\pi i} \int_M \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{1.16}$$

В интеграле (1.16) ядро Шварца таково, что его действительная часть является ядром Пуассона для круга. Интеграл Пуассона от χ_M решает соответствующую задачу Дирихле, поэтому

$$\varphi^m(z)\, \overline{\varphi^m(z)} = \exp 2m\chi_M(z) = 1 + \left(e^{2m} - 1\right)\chi_M(z). \ \square$$

Лемма 1.7. *Оператор T_{ψ_m} обратим и*

$$T_{\psi_m}^{-1} = T_{1/\varphi^m} T_{\overline{1/\varphi^m}}.$$

Доказательство сразу следует из леммы 1.5, так как

$$\varphi^m,\ 1/\varphi^m \in H^\infty. \ \square$$

Определим для каждого $a \in U(0, 1)$

$$e_a(z) = 1/(1 - \bar{a}z), \quad z \in U(0, 1),$$

тогда $e_a \in H^p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Лемма 1.8. *Если рассмотреть T_{ψ_m} как оператор на H^p, $1 < p < \infty$, то*

$$T_{\psi_m}^{-1} e_a = \frac{1}{\overline{\varphi^m(a)}} \frac{e_a(z)}{\varphi^m(z)}. \tag{1.17}$$

Доказательство. Нам потребуется описание пространства, сопряженного к H^p. Обозначим $H^p(0) = \{f\colon f \in H^p\ f(0) = 0\} = zH^p$. Тогда при $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, пространство $H^q(0)$ является сопряженным к H^p и эта двойственность реализуется скалярным произведением

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f\left(e^{i\theta}\right) \overline{g\left(e^{i\theta}\right)}\, d\theta$$

(другое, но эквивалентное приведенному, описание пространства, сопряженного к H^p, см. в [100, гл. VII]).

Для всякой функции $g \in H^q(0)$ имеем

$$\left(T_{1/\bar{\varphi}^m} e_a, g\right) = \left(e_a/\bar{\varphi}^m, g\right),$$

так как $(Pf, g) = (f, g)$ для $f \in L^p$, $g \in H^q(0)$. Далее, используя формулу, комплексно-сопряженную к формуле Коши для круга $U(0, 1)$, получим

$$(e_a/\bar{\varphi}^m, g) = (e_a, g/\varphi^m) = \overline{g(a)}/\bar{\varphi}^m(a) = (1/\bar{\varphi}^m(a))\,(e_a, g),$$

следовательно,

$$T_{1/\bar{\varphi}^m} e_a = \left(1/\bar{\varphi}^m(a)\right) e_a,$$

и для доказательства (1.17) остается применить лемму 1.7. □

Лемма 1.9. *Пусть K — компакт в $U(0, 1)$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Тогда равномерно для $a \in K$*

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \frac{1}{\bar{\varphi}^m(a)} \frac{1}{\varphi^m} e_a \right\|_p = 0.$$

Доказательство. Заметим, что (см. (1.16))

$$\left\| \frac{1}{\varphi^m} \right\|_\infty \leqslant 1, \quad \left| \frac{1}{\varphi^m(a)} \right| \leqslant \frac{1}{m^\alpha},$$

где $\alpha > 0$ и α зависит от $|a|$. □

Обозначим через S — оператор Теплица на H^p, $1 < p < \infty$, соответствующий χ_M. Тогда $I + \left(e^{2m} - 1\right) S = T_{\psi_m}$ и $(I + (e^{2m} - 1)S)^{-1}$ существует по лемме 1.7. Кроме того, по леммам 1.8 и 1.9 $\|(I + (e^{2m} - 1)S)^{-1} e_a\|_p \to 0$ при $m \to \infty$. Далее из леммы 1.7 и (1.14) получаем

$$\left\| \left(I + \left(e^{2m} - 1\right) S\right)^{-1} \right\| = \left\| T_{1/\varphi^m} T_{0/\bar{\varphi}^m} \right\| \leqslant \left\| \frac{1}{\varphi^m} \right\|_\infty^2 C_p^2 \leqslant C_p^2.$$

Множество $\{e_a\}$, $a \in U(0, 1)$ является фундаментальным в H^p, поэтому (см. [72, гл. V]) для любой функции $f \in H^p$

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \left(I + \left(e^{2m} - 1\right) S\right)^{-1} f \right\|_p = 0.$$

Кроме того,

$$(I + (e^{2m} - 1)S)^{-1} f = f - (e^{2m} - 1)\,(I + (e^{2m} - 1)S)^{-1} S f.$$

Следовательно, мы доказали (учитывая, что $\lim\limits_{m\to\infty} \left(e^{2m} - 1\right) e^{-2m} = 1\Big)$.

Лемма 1.10. *При* $1<p<\infty$ *и* $f\in H^p$

$$\lim_{m\to\infty}\|e^{2m}(I+(e^{2m}-1)S)^{-1}Sf-f\|_p=0.$$

Доказательство теоремы 1.3 будет теперь закончено, если показать, что

$$f_m=e^{2m}(I+(e^{2m}-1)S)^{-1}Sf. \tag{1.18}$$

Действительно, заметим, что

$$f_m(z)=e^{2m}\int\limits_{M}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\bar{\varphi}^m(\zeta)\,\varphi^m(z)\,(\zeta-z)}, \tag{1.19}$$

а правую часть (1.18) в силу леммы 1.7 запишем в виде

$$e^{2m}T_{1/\varphi^m}T_{1/\bar{\varphi}^m}Sf. \tag{1.20}$$

Далее по лемме 1.4 получим вместо (1.20)

$$e^{2m}T_{1/\varphi^m}T_{1/\bar{\varphi}^m\chi_M}f=\frac{e^{2m}}{\varphi^m}T_{\frac{\chi_M}{\bar{\varphi}^m}}f; \tag{1.21}$$

как видим, правые части (1.19) и (1.21) совпадают. □

Обсудим, для каких односвязных ограниченных областей D верна теорема 1.3. При ее доказательстве существенную роль играла теорема М. Рисса — неравенство (1.14). Кроме того, при доказательстве леммы 1.8 была применена формула, комплексно-сопряженная к интегральной формуле Коши для круга $U(0,\ 1)$, записанной в виде интегральной формулы с *ядром Сеге*

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U}\frac{f(z)}{1-a\bar{z}}\,\frac{dz}{z}. \tag{1.22}$$

В отличие от формулы Коши интегральная формула (1.22) с ядром Сеге не является универсальной (верной для любых областей с достаточно хорошей границей). Для других областей D есть своя формула с ядром Сеге

$$f(a)=\int\limits_{\partial D}f(z)\,S(a,\bar{z})\,d\sigma, \tag{1.23}$$

где ядро Сеге $S(a,\bar{z})$ по a входит в класс Харди $H^2(D)$, а $\bar{S}$ входит в тот же класс по z, здесь $d\sigma$ — элемент длины дуги ∂D. Формула (1.23) верна для $f\in H^2(D)$. И при доказательстве аналога леммы 1.8 для области D нужно использовать не функции $e_a(z)$, а $S(a,\bar{z})$. Но на этом пути можно надеяться получить обобщение теоремы 1.3 лишь для класса $H^2(D)$. Однако можно вместо (1.23) рассмотреть формулу, полученную из (1.22) с помощью конформного отображения $z=\psi(w)$ области D на круг $U(0, 1)$:

$$f(\psi(b))=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\psi(w))\,\psi'(w)\,dw}{[1-\psi(b)\,\overline{\psi(w)}]\,\psi(w)}. \tag{1.24}$$

Это интегральное представление верно для $f\in H^1(D)$ и можно в аналоге леммы 1.8 для области D вместо $e_a(z)$ взять $[1-\overline{\psi(b)}\psi(z)]^{-1}$.

Наконец, при доказательстве леммы 1.8 существенную роль играло описание пространства, сопряженного к H^p. Данное описание опирается на следующий факт:

$$L^p(\partial U)=H^p+H^p_-, \tag{1.25}$$

где H^p_- — пространство Харди для внешности единичного круга. Этот факт имеет место тогда и только тогда, когда для рассматриваемой области D проекция P: $L^p\to H^p$ непрерывна (см., например, [37]). Таким образом, все упирается в непрерывность P. Известно, что P непрерывна в случае, когда ∂D является регулярной кривой (см. [203]).

Итак, можно доказать следующее утверждение:

Теорема 1.11. *Если D — односвязная ограниченная область с регулярной границей ∂D, а $f\in H^p(D)$, $1<p<\infty$, то верно* (1.13).

2. МЕТОД М. М. ЛАВРЕНТЬЕВА

Пусть на множестве $\partial D\setminus M$ ядро Коши $\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\zeta-z}$ (здесь $z\in D$ фиксированна) удалось в какой-то подходящей метрике (чтобы можно было сделать предельный переход под знаком указанного ниже интеграла (2.1)) аппроксимировать функциями $g_{z,m}(\zeta)\in H^\infty(D)$. Эти функции ортогональны рассматриваемым голоморфным функциям $f\in H^1(D)$ при интегрировании по ∂D. Кроме того,

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_{\partial D\setminus M}f(\zeta)\left[\frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{\zeta-z}-g_{z,m}(\zeta)\right]d\zeta=0, \tag{2.1}$$

и мы приходим к следующей формуле:

$$f(z)=\lim_{m\to\infty}\int\limits_{M}f(\zeta)\left[\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\zeta-z}-g_{z,m}(\zeta)\right]d\zeta. \tag{2.2}$$

В формулу (2.2) в качестве параметра под знаком интеграла входит z. Если функции $g_{z,m}(\zeta)$ голоморфно зависят от параметра z, то в формуле (2.2) получается голоморфное ядро. Эта идея получения формулы Карлемана с помощью аппроксимации ядра Коши может быть описана с помощью введенного М. М. Лаврентьевым понятия функции Карлемана. Функция двух комплексных переменных z, ζ и положительного переменного α, которую обозначим $G(z, \zeta, \alpha)$, называется *функцией Карлемана* множества M в области D, если:

1) $G(z, \zeta, \alpha) = \dfrac{1}{\zeta - z} + \widetilde{G}(z, \zeta, \alpha)$, где $\widetilde{G}$ по ζ является функцией класса $H^\infty(D)$;

2) $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_{\partial D \setminus M} |G(z, \zeta, \alpha)|\,|d\zeta| \leqslant C(z)\alpha$, где постоянная $C(z)$ зависит от z.

Примером функции Карлемана является ядро в формуле Карлемана (1.3)

$$G(z, \zeta, \alpha) = \left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^{1/\alpha} \frac{1}{\zeta - z}.$$

И вообще, если дана функция Карлемана G, то верна и формула Карлемана

$$f(z) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_M f(\zeta)\, G(z, \zeta, \alpha)\, d\zeta. \tag{2.3}$$

Очевидно, что формулы (2.2) и (2.3) эквивалентны.

Метод М. М. Лаврентьева получил важные приложения в теории некорректных задач анализа и математической физики [111]. Покажем, что и в нашем случае этот метод приводит к очень общим результатам.

Теорема 2.1. *Пусть D — ограниченная область, граница которой состоит из конечного числа замкнутых кусочно-гладких жордановых непересекающихся кривых, и M — открытое подмножество ∂D. Тогда существует для функции f из класса $H^1(D)$ формула Карлемана (2.2) с голоморфным по $z \in D$ ядром, которое строится с помощью цепочки интегралов и разложений в ряды.*

Доказательство. Из обобщенной теоремы Рунге (см., например, [165, с. 20]) вытекает, что компакт $\partial D \setminus M$ является при малых $\varepsilon > 0$ компактом $A(D_\varepsilon)$-выпуклым. Рассмотрим последовательность компактов K_m, $m = 1, 2, \ldots$, $K_{m+1} \supset K_m$, $\bigcup\limits_m K_m = D$, каждый K_m является $A(D_\varepsilon)$-выпуклым. Функция $(1/2\pi i) \cdot 1/(\zeta - z)$ голоморфна на $(\partial D \setminus M) \times K_m$, а каждая функция из $A((\partial D \setminus M) \times K_m)$ равномерно на этом компакте приближается функциями из $A(D_\varepsilon \times D_\varepsilon)$. Действительно, из $A(D_\varepsilon)$-выпуклости $\partial D \setminus M$ и K_m вытекает $A(D_\varepsilon \times D_\varepsilon)$-выпуклость $(\partial D \setminus M) \times K_m$, что легко доказать с помощью двойной интегральной формулы Коши (см. разд. 12), примененной к окрестности $(\partial D \setminus M) \times K_m$, и того, что интеграл является пределом интегральных сумм. Итак, равномерно на $(\partial D \setminus M) \times K_m$

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\zeta - z} = \lim_{n \to \infty} f_{m,n}(\zeta, z),$$

где $f_{m,n}(\zeta, z) \in A(D_\varepsilon \times D_\varepsilon)$. Положим $g_{z,m}(\zeta) = f_{m,n(m)}(\zeta, z)$, где $n = n(m)$ выбрано так, чтобы на рассматриваемом компакте

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\zeta - z} - f_{m,n(m)}(\zeta, z) \right| < \frac{1}{m}.$$

Функция $g_{z,m}(\zeta)$ голоморфна на $D_\varepsilon \times D_\varepsilon$ и верна формула Карлемана (2.2). □

В этом доказательстве мы на самом деле использовали не открытость M, а только тот факт, что M содержит окрестность некоторой точки из ∂D, поэтому верно

Следствие 2.2. *Утверждение теоремы* 2.1 *сохраняется, если M содержит хотя бы одну точку из ∂D вместе с ее окрестностью на ∂D.*

Наконец, отметим, что голоморфное ядро в формуле Карлемана из теоремы 2.1 или следствия 2.2 строится столь же конструктивно, насколько конструктивно можно построить приближение в теореме Рунге, т. е. с помощью цепочки интегралов и разложений в ряды.

3. МЕТОД КЫТМАНОВА

Этот метод появился применительно к однородным областям в $\mathbf{C}^n$. Проиллюстрируем его в случае простейшей однородной области — круга $U(0, 1) \subset \mathbf{C}^1$. Пусть M — множество положительной меры Лебега на ∂U. Рассмотрим фиксированную точку $a \in U$ и образы $w(M) = M_a$ множества M при автоморфизмах круга

$$w = (a - \zeta)/(1 - \bar{a}\zeta), \quad w(a) = 0, \quad w(0) = a.$$

Предположим, что для каждого $w(M)$ существует последовательность функций $\varphi_m^a = \varphi_m^{M_a} \in L^\infty(M_a)$ такая, что для всякой $f \in H^1(U)$

$$f(0) = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{M_a} f(\zeta) \varphi_m^a(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{3.1}$$

Теорема 3.1 (Кытманов). *Если $f \in H^1(U)$ и множество $M \subset \partial U$ положительной меры Лебега, то для любой точки $a \in U$ верна формула*

$$f(a) = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_M f(\zeta) \varphi_m^a(w(\zeta)) \frac{d\zeta}{\zeta - a}. \tag{3.2}$$

Доказательство. При автоморфизме $w = w(\zeta)$ справедливо равенство

$$\frac{dw}{w} = \frac{1 - |a|^2}{1 - \bar{a}\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta - a},$$

где $\dfrac{1-|a|^2}{2\pi|\zeta-a|^2}=\mathscr{P}$ — ядро Пуассона для круга $U(0,\ 1)$. Пусть $f_a(\zeta)=f(w(\zeta))$, тогда $f_a\in H^1(U)$ и согласно (3.1)

$$f(a)=f_a(0)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{M_a}f_a(w)\,\varphi_m^a(w)\,\frac{dw}{w},$$

откуда

$$f(a)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{M}f(\zeta)\,\varphi_m^a(w(\zeta))\,\frac{1-|a|^2}{1-\bar{a}\zeta}\,\frac{d\zeta}{\zeta-a}. \tag{3.3}$$

Применяя формулу (3.3) к функции $f(\zeta)(1-\bar{a}\zeta)$, получаем (3.2). □

Пример 1. Пусть

$$\varphi_m^M(z)=\exp\left[m\left(h_M(z)-h_M(0)\right)\right], \tag{3.4}$$

где
$$h_M(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{M}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,\frac{d\zeta}{\zeta},$$

тогда верно (3.1), так как здесь $\varphi_m^M(z)$ — та же «гасящая» функция, что и в разд. 1, но рассматриваемая только для точки 0. Далее

$$h_M(z)-h_M(0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{M}\frac{2z}{\zeta-z}\,\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Если теперь сделать замену переменных $z\to w(z)$, $\zeta\to w(\zeta)$, то

$$\frac{2z}{\zeta-z}\,\frac{d\zeta}{\zeta}\to\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}-\frac{\zeta+a}{\zeta-a}\right)\frac{d\zeta}{\zeta},$$

поэтому $\varphi_m^a(w(z))=\exp\left[m\left(h_M(z)-h_M(a)\right)\right]$, следовательно,

$$f(a)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{M}f(\zeta)\exp\left[m\left(h_M(\zeta)-h_M(a)\right)\right]\frac{d\zeta}{\zeta-a}$$

и получилась формула Карлемана (1.3) для круга $U(0,\ 1)$. Однако последовательность φ_m не обязательно строить по формуле (3.4).

Пример 2. Пусть M — дуга из ∂U, но не вся окружность ∂U. Можно построить многочлен $P_a(\zeta)$ такой, что $P_a(0)=1$ и $|P_a(\zeta)|<1$ при $\zeta\in w(M)$. Тогда

$$f(0)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{M_a}f(\zeta)\left[P_a(\zeta)\right]^m\frac{d\zeta}{\zeta},$$

поэтому согласно теореме 3.1 имеет место формула

$$f(a)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_M f(\zeta)\,[P_a(w(\zeta))]^m\,\frac{d\zeta}{\zeta-a}.$$

Рассмотренный метод Кытманова позволил в случае однородных областей $\mathbf{C}^n$ получить наиболее простые многомерные формулы Карлемана (см. гл. 6).

4. ГРАНИЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ИНТЕГРАЛА КАРЛЕМАНА — ГОЛУЗИНА — КРЫЛОВА

Речь пойдет о вычислении

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_M f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m\frac{d\zeta}{\zeta-z}=J(z) \tag{4.1}$$

правой части формулы Карлемана (1.3) не для $z\in D$, как в этой формуле, а для $z\in\partial D$. Пусть M — замкнутое подмножество $\partial U(0,\,1)$ положительной меры Лебега, а $D=U(0,\,1)$.

Лемма 4.1. *Если $f\in A(\overline{U})$, то для $z\in\partial D\setminus M$ имеет место равенство $J(z)=f(z)$, а для $z\in M$ почти всюду $J(z)=\frac{1}{2}f(z)$, при этом интеграл в (4.1) понимается в смысле главного значения по Коши.*

Доказательство. Пусть $z\in\partial D\setminus M$, т. е. z лежит на некоторой дуге γ из открытого подмножества $\partial D\setminus M$. Рассмотрим область $D_1=D\cup U(z,\,\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$ выбрано так, чтобы $f\in A(\overline{D}_1)$. В границу D_1 вместо части $\gamma\cap U(z,\,\varepsilon)$ входит $\partial U(z,\,\varepsilon)\setminus\overline{D}$. Из формулы (1.16) следует, что при малых $\varepsilon>0$ для $\zeta\in\overline{U(z,\,\varepsilon)}\setminus\overline{D}$ верно неравенство $|\varphi(\zeta)|<1$. Поэтому можно повторить доказательство теоремы 1.1 для данного z и области D_1, и получим, что в этом случае $J(z)=f(z)$.

Далее рассмотрим $z\in M$. Почти для всех таких z

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_M f(\zeta)\,\varphi^m(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D\setminus M} f(\zeta)\,\varphi^m(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{2}f(z)\,\varphi^m(z), \tag{4.2}$$

где первый интеграл в (4.2) нужно понимать в смысле главного значения по Коши. Разделим (4.2) на $\varphi_m(z)$. Учитывая, что $|\varphi(\zeta)|=1$ при $\zeta\in\partial D\setminus M$ и $|\varphi(z)|=e$ для $z\in M$, получим, что второе слагаемое в новом равенстве стремится к нулю при $m\to\infty$. Следовательно, $J(z)=\frac{1}{2}f(z)$ почти при всех $z\in M$. □

Теорема 4.2. *Если $f\in A^\alpha(U)$, то сохраняется утверждение леммы 4.1.*

Доказательство. Случай $z\in M$ рассматривается так же, как при доказательстве леммы 4.1. Пусть $z\in\partial D\setminus M$. Тогда из (1.16) получаем, что $|\varphi(z)|=1$, а

$$\arg\varphi(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_M \operatorname{ctg}\frac{\theta-\psi}{2}\,d\psi, \tag{4.3}$$

где $\psi=\arg\zeta$, $\theta=\arg z$. На каждом из открытых интервалов из $\partial D\setminus M$ функция (4.3) строго убывает, является гладкой с отрицательной (по θ) производной. Поэтому на каждом из них

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_{E_j}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\varphi^m(\zeta)\,d\zeta=0, \tag{4.4}$$

что сразу следует из леммы Римана — Лебега после замены переменных, при которой в качестве новой переменной следует взять функцию (4.3). В (4.4) E_j — один из интервалов $\partial D\setminus M=\bigcup\limits_j E_j$.

Кроме того,

$$\sum_j\left|\int\limits_{E_j}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\varphi^m(\zeta)\,d\zeta\right|\leqslant\sum_j\int\limits_{E_j}\left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\right||d\zeta|\leqslant C,$$

где C не зависит от m. Отсюда и из (4.4) вытекает, что

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_{\partial D\setminus M}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\varphi^m(\zeta)\,d\zeta=0. \tag{4.5}$$

Далее интеграл из (4.1) равен

$$\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m d\zeta-\int\limits_{\partial D\setminus M}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m d\zeta+$$
$$+f(z)\int\limits_M\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m\frac{d\zeta}{\zeta-z}. \tag{4.6}$$

Функция $(f(\zeta)-f(z))/(\zeta-z)$ принадлежит $H^1(U)$, так как $f\in A^\alpha(U)$. Значит, первый интеграл в (4.6) равен нулю по теореме Коши. Отсюда, учитывая (4.5) и лемму 4.1, получаем $J(z)=f(z)$. □

Утверждения леммы 4.1 и теоремы 4.2 для $z\in M$ легко распространяются на случай $f\in H^1(U)$, при этом используются формулы Сохоцкого для интеграла типа Коши от функции из $L^1(\partial U)$ (см. [134]). Что же касается случая $z\in\partial D\setminus M$, то ограничимся $f\in H^p(U)$, $p>1$.

Теорема 4.3. *Если $f\in H^1(U)$, то почти всюду на M имеет место равенство $J(z)=\frac{1}{2}f(z)$. При $f\in H^p(U)$, $p>1$, почти для всех $z\in\partial D\setminus M$ верно $J(z)=f(z)$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций $f_m \in H^p(U)$ из теоремы 1.3. При $z \in \partial U \backslash M$ интеграл в (4.1) равен $f_m(z)$. Согласно теореме 1.3

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} f_m(z), \quad z \in \partial U,$$

в смысле L^p. Поэтому почти всюду на $\partial D \backslash M$ верно $J(z) = f(z)$. □

В этой теореме можно и при $z \in \partial D \backslash M$ рассматривать случай $f \in H^1(U)$, но доказательство значительно сложнее, и мы его не приводим. Заметим еще, что результаты этого раздела можно распространить на тот же класс областей, для которого верна теорема 1.11. На этом пути получается следующий результат.

Теорема 4.4. *Пусть D — односвязная ограниченная область с регулярной границей ∂D. Если $f \in H^1(D)$, то почти всюду на M имеет место $J(z) = \frac{1}{2} f(z)$. Если $f \in H^p(D)$, $p > 1$, тогда почти всюду на $\partial D \backslash M$ верно $J(z) = f(z)$.*

И в этой теореме при $z \in \partial D \backslash M$ можно рассматривать случай $f \in H^1(D)$, но доказательство уже не может использовать теорему 1.11 и становится значительно сложнее.

5. СЛУЧАЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Полуплоскость Π не является ограниченной областью, но формулы Карлемана для нее играют важную роль в дальнейшем изложении. Пусть множество $M \subset \mathbf{R}^1 = \partial \Pi$ имеет положительную меру Лебега (не обязательно конечную). Рассмотрим интеграл Пуассона

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi_M(t)\, y\, dt}{(x-t)^2 + y^2}, \tag{5.1}$$

который определяет гармоническую положительную функцию u в Π, граничные значения которой на $\mathbf{R}^1$ во всех точках непрерывности χ_M совпадают с χ_M (см. [100, с. 138]).

Если

$$\int_M \frac{dt}{1 + |t|} < \infty, \tag{5.2}$$

то функцию v, сопряженную к u, можно построить следующей формулой:

$$v(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-t)\, \chi_M(t)\, dt}{(x-t)^2 + y^2}.$$

Если же (5.2) не выполняется, то нужно применить несколько более сложную формулу (см. [100, с. 135]):

$$v(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x-t}{(x-t)^2 + y^2} + \frac{t}{t^2+1} \right) \chi_M(t)\, dt.$$

В любом случае мы получим голоморфную функцию $\varphi(z) = \exp(u + iv)$, являющуюся «гасящей» функцией для осуществления идеи Карлемана. Отметим, что $\varphi \in H^\infty(\Pi)$ и $1 < |\varphi(z)| < e$ при $z \in \Pi$.

Теорема 5.1. *Если $f \in H^p(\Pi)$, $1 \leqslant p < \infty$, и $M \subset \mathbf{R}^1 = \partial\Pi$ имеет положительную меру Лебега, то для любой точки $z \in \Pi$ верна формула Карлемана с равномерной сходимостью на компактах из* Π

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_M f(t) \left[\frac{\varphi(t)}{\varphi(z)} \right]^m \frac{dt}{t-z}. \tag{5.3}$$

Доказательство проводится так же, как доказательство теоремы 1.1, и сводится к оценке интеграла

$$J_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}^1 \setminus M} f(t) \left[\frac{\varphi(t)}{\varphi(z)} \right]^m \frac{dt}{t-z}. \tag{5.4}$$

На множестве $\mathbf{R}^1 \setminus M$ функция $|\varphi(t)|$ почти везде равна 1; поэтому, применяя неравенство Гёльдера, получим для модуля интеграла (5.4) оценку для $1/p + 1/q = 1$, $p > 1$:

$$|J_m| \leqslant \frac{1}{2\pi |\varphi(z)|^m} \left[\int_{\mathbf{R}^1 \setminus M} |f(t)|^p\, dt \right]^{1/p} \left[\int_{\mathbf{R}^1 \setminus M} \frac{dt}{|t-z|^q} \right]^{1/q}. \tag{5.5}$$

Отсюда следует, что $J_m \to 0$ при $m \to \infty$ равномерно на компактах из Π. Если же $p = 1$, то

$$|J_m| \leqslant \frac{1}{2\pi |\varphi|^m \inf\limits_{t \in \mathbf{R}^1 \setminus M} |t-z|} \int_{\mathbf{R}^1 \setminus M} |f(t)|\, dt, \tag{5.6}$$

и вновь получаем равномерное на компактах из Π стремление J_m к 0 при $m \to \infty$. □

Эта теорема не распространяется на случай $p = \infty$ не только потому, что в этом случае нет оценок вида (5.5) или (5.6), но прежде всего потому, что для функций класса $H^\infty(\Pi)$ нет интегральной формулы Коши. Но в этом случае зато верна формула Пуассона: если $f \in H^p(\Pi)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то для $z \in \Pi$

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y f(t)\, dt}{(x-t)^2 + y^2}. \tag{5.7}$$

(см. [100, с. 142]). Ядро Пуассона абсолютно интегрируемо на $\mathbf{R}^1$, поэтому тем же способом, идущим от Карлемана, легко получается

Теорема 5.2. *Пусть $f \in H^p(\Pi)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и M имеет положительную меру Лебега, тогда для $z \in \Pi$ справедлива следующая формула, предел в которой достигается равномерно на компактах из* Π,

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_M f(t) \left[\frac{\varphi(t)}{\varphi(z)}\right]^m \frac{y\,dt}{(x-t)^2 + y^2}. \tag{5.8}$$

Для рассмотрения многомерных аналогов формул Карлемана желательно расширить класс функций, для которых верны эти формулы в полуплоскости Π. Пусть $f \in A(\Pi)$. Заметим, что $f\left(i\frac{1-w}{1+w}\right) \in H^p(U(0, 1))$ тогда и только тогда, когда (см. [100, с. 147])

$$\frac{f(z)}{(z+i)^{2/p}} \in H^p(\Pi), \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{5.9}$$

Теорема 5.3. *Если функция $f \in A(\Pi)$ удовлетворяет условию* (5.9) *и множество $M \subset \mathbf{R}^1$ имеет положительную меру Лебега, то верна следующая формула, предел в которой достигается равномерно на компактах из* Π,

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{z+i}{2\pi i} \int_M f(t) \left[\frac{\varphi(t)}{\varphi(z)}\right]^m \frac{dt}{(i+t)(t-z)}. \tag{5.10}$$

Доказательство. Пусть функция $F(w) = f\left(i\frac{1-w}{1+w}\right)$, тогда $F(w) \in H^p(U)$ и по теореме 1.1 для нее справедлива формула Карлемана

$$F(w) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\widetilde{M}} F(\zeta) \left[\frac{\widetilde{\varphi}(\zeta)}{\widetilde{\varphi}(w)}\right]^m \frac{d\zeta}{\zeta - w}, \tag{5.11}$$

где $\widetilde{M}$ — образ M при конформном отображении $w = (i-z)(i+z)^{-1}$ полуплоскости Π на круг $U(0, 1)$, а $\widetilde{\varphi}$ играет роль φ для множества $\widetilde{M}$. По теореме М. А. Лаврентьева (см. [134, с. 293]) множество $\widetilde{M}$ — тоже положительной меры Лебега. Далее сделаем обратное отображение в формуле (5.11)

$$\zeta = (i-t)/(i+t), \quad w = (i-z)/(i+z)$$

и учтем, что при этом гармоническая мера $\widetilde{M}$ переходит в гармоническую меру M (подробнее о гармонической мере множеств см. в [126, 147]), следовательно, $\widetilde{\varphi}$ перейдет в φ, и мы приходим к формуле (5.10). □

Для случая $D = \Pi$ верна и теорема 4.2 с соответствующими изменениями.

Теорема 5.4. *Пусть M — замкнутое подмножество $\mathbf{R}^1$ положительной меры Лебега. Рассмотрим*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{z+i}{2\pi i} \int_M f(t) \left[\frac{\varphi(t)}{\varphi(z)}\right]^m \frac{dt}{(i+t)(t-z)} = J(z). \tag{5.12}$$

Если $f \in \tilde{A}^\alpha(\Pi)$, то для $z \in \mathbf{R}^1 \backslash M$ имеет место $J(z) = f(z)$, а для $z \in M$ почти всюду $J(z) = \frac{1}{2} f(z)$, при этом интеграл в (5.12) нужно понимать в смысле главного значения по Коши.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.2.

Следствие 5.5. *Если выполнены условия теоремы 5.4 и множество M ограничено, то*

$$f(\infty) = \lim_{m\to\infty} \frac{i}{2\pi} \int_M f(t) [\varphi(t)]^m \frac{dt}{t+i}. \tag{5.13}$$

Доказательство формулы (5.13) сразу вытекает из теоремы 5.4 и того факта, что для ограниченного множества M

$$\varphi(z) = \exp \frac{i}{\pi} \int_M \frac{dt}{z-t} \tag{5.14}$$

(см. [100, с. 158]). Действительно, достаточно заметить, что из (5.14) следует $\varphi(\infty) = 1$. □

В двух следующих примерах рассматривается случай, когда $M \subset \mathbf{R}^1$ есть некоторый отрезок $[a, b]$ (интервал (a, b)).

Пример 1. Пусть $M = [a, b]$. Тогда (см. (5.14))

$$\frac{i}{\pi} \int_M \frac{dt}{z-t} = \frac{1}{\pi i} \ln \frac{z-b}{z-a} = \psi(z).$$

Отметим, что гармоническая мера отрезка $[a, b]$, т. е. $\operatorname{Re} \psi(z)$, равна углу, под которым виден этот отрезок из точки z, деленному на π. Далее

$$\varphi(z) = \exp \psi(z) = \left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{1/\pi i},$$

и мы получаем для $f \in H^p(\Pi)$, $1 \leqslant p < \infty$, следующую формулу Карлемана:

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_a^b f(t) \left[\frac{(t-b)(z-a)}{(t-a)(z-b)}\right]^{\frac{m}{\pi i}} \frac{dt}{t-z}. \tag{5.15}$$

Выбор ветви логарифма в $\psi(z)$ не играет роли для формулы (5.15), так как не меняет множитель $[\varphi(t)/\varphi(z)]^m$.

Пример 2 (Крейн — Нудельман). Опираясь на спектральную теорию усеченного оператора Гильберта, можно получить для функций класса H^2 совсем иную формулу, нежели (5.15) (см. [98, 99]). Приведем ее в том виде, в каком она дана в [98, 99], где $M=(-1, 1)$, а $D=\Pi_-$ — нижняя полуплоскость. Тогда для всякой функции из $H^2(\Pi_-)$

$$f(z)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-z^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(i\lambda\ln\frac{1+z}{1-z}\right)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}\frac{x}{2}}e^{-i\lambda x}dx\right]d\lambda, \tag{5.16}$$

где голоморфные в Π_- ветви $\ln[(1+z)(1-z)^{-1}]$ и $\sqrt{1-z^2}$ выделяются условиями, что при $z\to t\in(-1, 1)$ первая стремится к действительному, а вторая — к положительному числу. Формула (5.16) легко распространяется на случай, когда M — любой конечный интервал.

ГЛАВА 2

ОБОБЩЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ФОРМУЛ КАРЛЕМАНА

6. ФОРМУЛА ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ВЫЧЕТА В ДУХЕ КАРЛЕМАНА

Пусть D — ограниченная область в $\mathbf{C}^1$ с кусочно-гладкой границей ∂D. Рассмотрим функцию $f\in A_c(D)$ и множество $M\subset\partial D$ положительной меры Лебега и предположим, что $A(f(\bar D))$ — выпуклая оболочка $\overline{f(\partial D\setminus M)}$ не содержит начало координат. Тогда существует функция $F\in A(f(\bar D))$ такая, что $F(0)=1$, а

$$\sup_{w\in\overline{f(\partial D\setminus M)}}|F(w)|<1. \tag{6.1}$$

Эту функцию F можно использовать в качестве «гасящей» для получения формулы логарифмического вычета, основанной на той же идее Карлемана введения «гасящей» функции.

Теорема 6.1 (Айзенберг). *Для всякой функции* $\varphi\in A_c(D)$ *справедлива формула*

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_M\varphi(\zeta)F^m(f(\zeta))\frac{df(\zeta)}{f(\zeta)}=\sum_{a\in E_f}\varphi(a), \tag{6.2}$$

где E_f — *множество нулей* f *в* D, *в формуле* (6.2) *каждый нуль считается столько раз, какова его кратность.*

Доказательство. По классической формуле логарифмического вычета имеем

$$\sum_{a\in E_f} \varphi(a) F^m(f(a)) = \sum_{a\in E_f} \varphi(a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \varphi(\zeta) F^m(f(\zeta)) \frac{df(\zeta)}{f(\zeta)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{M} \varphi F^m \frac{df}{f} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D\setminus M} \varphi F^m \frac{df}{f},$$

и последний интеграл стремится к нулю при $m\to\infty$ в силу (6.1). □

Если полиномиально-выпуклая оболочка $\overline{f(\partial D\setminus M)}$ не содержит нуля, то в качестве F можно взять полином P.

Наложенные в теореме 6.1 требования на $\overline{f(\partial D\setminus M)}$ означают, что M должно быть достаточно большим. Но это дало возможность получить формулу (6.2), в которой, как и в классической формуле логарифмического вычета, в левой части равенства не фигурируют нули функции f.

Следствие 6.2:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{M} F^m(f(\zeta))\frac{df(\zeta)}{f(\zeta)} = N,$$

где N — число нулей функции f в D (с учетом кратности).

7. ФОРМУЛЫ КАРЛЕМАНА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОТ МАТРИЦ ИЛИ ОТ ЭЛЕМЕНТОВ БАНАХОВОЙ АЛГЕБРЫ

Обозначим $G\subset\mathbf{C}^{n^2}$ ограниченное множество $n\times n$ матриц w. По теореме Гершгорина (см. [114, с. 198]) существует ограниченная односвязная область $D\subset\mathbf{C}^1$ с кусочно-гладкой границей, содержащая все собственные значения всех матриц $W\in G$. Тогда для всякой функции $f\in A_C(D)$ определена $f(W)$, где $W\in G$ (см. [114, § 5.8]), с помощью формулы Коши

$$f(W) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} f(z)(zI - W)^{-1}\,dz. \tag{7.1}$$

Определение (7.1) легко распространяется на класс $H^1(D)$. Теперь можно получить матричный аналог теоремы 1.1.

Теорема 7.1 (Худайберганов). *Если $f\in H^1(D)$ и множество $M\subset\partial D$ положительной лебеговой меры, то для любой матрицы $W\in G$ верна формула Карлемана*

$$f(W) = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{M} f(\zeta)(\zeta I - W)^{-1}\{\varphi(\zeta)[\varphi(W)]^{-1}\}^m\,d\zeta. \tag{7.2}$$

где функция φ — та же, что и в формуле (1.3).

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ — различные собственные значения матрицы W с кратностями $m_1, m_2, \ldots, m_s$ соответственно. В силу формулы Коши для функций от матриц (7.1) и теоремы о спектральном разложении (см. [114, с. 163]) получаем

$$2\pi i f(W) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta)(\zeta I - W)^{-1}\,d\zeta = \sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k}(j-1)!\,Z_{kj}\int\limits_{\partial D} f(\zeta)\frac{d\zeta}{(\zeta-\lambda_k)^j} =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\int\limits_{M} f(\zeta)\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k}\frac{d^{j-1}}{d\lambda^{j-1}}\left[\frac{\varphi^{-m}(\lambda)}{\zeta-\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_k} Z_{kj}\varphi^m(\zeta)\,d\zeta =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\int\limits_{M} f(\zeta)(\zeta I - W)^{-1}\left[\varphi(\zeta)\left[\varphi(W)\right]^{-1}\right]^m d\zeta,$$

где Z_{kj} — компоненты матрицы W. Здесь мы воспользовались тем, что

$$(j-1)!\int\limits_{\partial D} f(\zeta)\frac{d\zeta}{(\zeta-\lambda_k)^j} = 2\pi i f^{(j-1)}(\lambda_k) =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\int\limits_{M} f(\zeta)\frac{d^{j-1}}{d\lambda^{j-1}}\left[\frac{\varphi^{-m}(\lambda)}{\zeta-\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_k}\varphi^m(\zeta)\,d\zeta,$$

и возможностью дифференцировать формулу Карлемана (1.3) под знаком интеграла. □

Для обобщенного единичного круга τ_0 в качестве D можно взять (см. [167, с. 109]) обычный круг $U(0, 1)$, поэтому верно

Следствие 7.2. *Если $G = \tau_0$, то справедлива формула* (7.2), *где $M \subset \partial U(0, 1)$.*

Следствие 7.3. *Если $m_1 = m_2 = \ldots = m_s = 1$, то*

$$f(W) = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{s}\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{s}\frac{W-\lambda_k I}{\lambda_k-\lambda_\nu}\int\limits_{M} f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(\lambda_k)}\right]^m\frac{d\zeta}{\zeta-\lambda_k}. \quad (7.3)$$

Доказательство следует из теоремы 7.1 и теоремы 5.5.2 из [114, с. 167]. □

Из (7.3) в силу (7.2) получаем

Следствие 7.4 (интерполяционная формула Сильвестра).

$$f(W) = \sum_{k=1}^{s} f(\lambda_k)\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{s}\frac{W-\lambda_k I}{\lambda_k-\lambda_\nu}.$$

Пусть далее D — односвязная ограниченная область, $D \subset \mathbb{C}^1$, и A — банахова алгебра с единицей (не обязательно коммутативная). Обозначим

$$\Omega_D = \{x\colon x \in A,\ \mathrm{sp}\,x \subset D\}.$$

Для любой функции $f \in A(D)$ определим $f(x)$, $x \in \Omega_D$, так, как это принято в теории банаховых алгебр ([48, § 4]).

Теорема 7.5 (Елин). *Для всех $x \in \Omega_D$, любой функции $f \in H^1(D)$ и множества $M \subset \partial D$ положительной лебеговой меры справедлива формула Карлемана*

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_M f(\zeta)(\zeta - x)^{-1} \varphi^m(\zeta)[\varphi(x)]^{-m} d\zeta, \tag{7.4}$$

в которой предел достигается равномерно на компактах $K \subset \Omega_D$, удовлетворяющих условию

$$\overline{\bigcup_{x\in K} \operatorname{sp} x} \subset D. \tag{7.5}$$

Доказательство. Заметим, что в формуле (7.4) элементы алгебры A $[\varphi(x)]^{-m}$ и $(\zeta - x)^{-1}$ перестановочны как значения голоморфных функций на одном и том же элементе x. Выберем простую замкнутую гладкую кривую $\gamma \subset D$ так, чтобы множество $\overline{\bigcup_{x\in K} \operatorname{sp} x}$ лежало внутри γ. Тогда для любого $x \in K$ справедлива формула Коши (см. [48, с. 56])

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)(z - x)^{-1} dz.$$

Отсюда и из теоремы 1.1, используя обозначение f_m из теоремы 1.3, получим

$$\left\| f(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_M f(\zeta) \varphi^m(\zeta)[\varphi(x)]^{-m} (\zeta - x)^{-1} d\zeta \right\| =$$

$$= \left\| f(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_M f(\zeta) \varphi^m(\zeta) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma [\varphi(z)]^{-m} (\zeta - z)^{-1} (z - x)^{-1} dz \right] d\zeta \right\| =$$

$$= \left\| f(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left[\frac{1}{2\pi i} \int_M f(\zeta) \varphi^m(\zeta)[\varphi(z)]^{-m} (\zeta - z)^{-1} d\zeta \right] (z - x)^{-1} dz \right\| =$$

$$= \left\| f(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f_m(z)(z - x)^{-1} dz \right\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (f(z) - f_m(z))(z - x)^{-1} dz \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{z\in\gamma} |f(z) - f_m(z)| \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \|(z - x)^{-1}\| \, |dz|.$$

В силу теоремы 1.1

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{z\in\gamma} |f(z) - f_m(z)| = 0.$$

Осталось показать, $\|(z - x)^{-1}\| < \infty$ при $(z, x) \in \{(z, x) : z \in \gamma, x \in K\}$. Предположим противное, тогда существует последовательность

$\{x_j\} \subset K$, сходящаяся к точке $x_0 \in K$ и такая, что

$$\lim_{j\to\infty} \max_{z\in\gamma} \left\| (z - x_j)^{-1} \right\| = \infty. \tag{7.6}$$

Так как $\operatorname{sp} x_0$ лежит внутри γ, резольвента $R(z, x_0) = (z - x_0)^{-1}$ голоморфна в окрестности γ (см. [48, с. 25]), следовательно, ее норма достигает на компакте γ своего максимума C. Обозначим $y_j = x_j - x_0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\|y_j\| \leqslant \leqslant (2C)^{-1}$. Тогда

$$z - x_j = (z - x_0 - y_j) = [1 - y_j(z - x_0)^{-1}]\,(z - x_0).$$

Далее

$$\left\| (z - x_j)^{-1} \right\| = \left\| (z - x_0)^{-1} \left[1 - y_j (z - x_0)^{-1}\right]^{-1} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| (z - x_0)^{-1} \right\| \sum_{n=0}^{\infty} \| y_j \|^n \left\| (z - x_0)^{-1} \right\|^n \leqslant C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2C,$$

что противоречит (7.6). □

Из утверждения теоремы 7.5 вытекает поточечная сходимость для $x \in \Omega_D$. Условие (7.5) справедливо для любых компактов $K \subset \subset \Omega_D$, если, например, A — алгебра квадратных матриц, или пространство непрерывных на компакте функций на локально компактной абелевой группе. В частности, верно

Следствие 7.6. *В формуле Карлемана для голоморфных функций от матриц* (7.2) *сходимость равномерна на всяком компакте* $K \subset G$.

8. АБСТРАКТНАЯ ФОРМУЛА КАРЛЕМАНА

Примененный здесь метод позволяет выяснить условия существования абстрактной формулы Карлемана не только в случае голоморфных функций. Практически почти без изменения он распространяется на решения общих эллиптических систем дифференциальных уравнений с коэффициентами, удовлетворяющими условию Гёльдера.

Пусть P — эллиптический $(k \times l)$-матричный дифференциальный оператор порядка p, заданный в ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, коэффициенты которого входят в класс $C^{0,\lambda}(\Omega)$, $0 < \lambda < 1$.

Для компакта $K \subset \Omega$ через $[C^m(K)]^l$ обозначим векторное пространство ростков на K вектор-функций (l-столбцов) класса C^m в окрестности K, т. е. множество классов эквивалентности вектор-функций класса C^m в окрестности K, где две вектор-функции считаются эквивалентными, если их производные до порядка m совпадают на K. Мы сделаем это пространство нормированным, положив для $f \in [C^m(K)]^l$

$$\| f \|_K^m = \sup_{\substack{|\alpha| \leqslant m \\ x \in K}} \left| D^{\alpha} f(x) \right|.$$

Если при этом $[C^m(K)]^l$ — банахово пространство, то *компакт* K называют *m-регулярным* (см. [233, с. 207]). Таковы, например, замыкания ограниченных областей с границей класса C^∞ (см. [233, с. 215]). Всякий компакт 0-регулярен.

В $[C^m(\Omega)]^l$, как обычно, вводится топология проективного предела банаховых пространств $[C^m(K)]^l$, $K\subset\Omega$, так, что $[C^m(\Omega)]^l$ является пространством Фреше. Далее обозначим $[C^{m,\lambda}(\Omega)]^l$ множество вектор-функций $f\in[C^m(\Omega)]^l$, производные порядка m которых удовлетворяют на каждом компакте K из Ω условию Гёльдера с показателем λ. Это векторное пространство, наделенное семейством полунорм (здесь $K\subset\Omega$)

$$\|f\|_K^{m+\lambda}=\|f\|_K^m+\sup_{\substack{|\alpha|=m\\ x,y\in K}}\frac{|D^\alpha f(x)-D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\lambda},$$

также является пространством Фреше.

Пусть $\mathcal{O}(\Omega)$ — векторное пространство решений системы уравнений

$$Pf=0 \tag{8.1}$$

в Ω. Известно, что $\mathcal{O}(\Omega)\subset[C^{p,\lambda}(\Omega)]^l$ (см. [205]). Из теоремы Арцела — Асколи и внутренних оценок шаудеровского типа для решений системы (8.1) (см. [205]) следует, что $\mathcal{O}(\Omega)$ с топологией, индуцированной вложением в $[C(\Omega)]^l$, является пространством Фреше — Шварца, и эта топология совпадает с индуцированной из $[C^{p,\lambda}(\Omega)]^l$.

Рассмотрим $(k_j\times l)$-матричные дифференциальные операторы P_j порядка $p_j\leqslant m$, где $0\leqslant m\leqslant p-1$, с коэффициентами класса C^{m-p_j} в окрестности K, $j=1,\ldots,s$. Многие краевые задачи для эллиптических систем включаются в следующую схему: даны $g_j\in\in\left[C^{m-p_j}(K)\right]^{k_j}$, где $j=1,\ldots,s$, найти $f\in\mathcal{O}(\Omega)\cap\left[C^m(\overline{\Omega})\right]^l$, удовлетворяющую условию

$$P_jf=g_j \text{ в } \left[C^{m-p_j}(K)\right]^{k_j},\quad j=1,\ldots,s. \tag{8.2}$$

Компакт K назовем *множеством единственности* (задачи (8.2)), если соответствующая однородная ($g_j=0$) задача имеет только нулевое решение.

Пример 1 (задача Дирихле). Эта задача соответствует случаю $p=2(m+1)$, $K=\partial\Omega\in C^{m+1}$, $s=1$, причем $P_1=I_l$ — единичная $(l\times l)$-матрица. K является множеством единственности, если, например, $P=\Delta$ — оператор Лапласа, и не является таковым для некоторых классов сильно связанных систем (см. [44, с. 171]).

Пример 2 (задача Коши). Эта задача соответствует случаю $m=p-1$, $s=1$, $P_1=I_l$. Если $n=2$ и $P=\dfrac{\partial}{\partial\bar z}$, то множеством единственности является любой компакт $K\subset\Omega$, имеющий предельную точку, или любой компакт $K \subset \partial\Omega$ положительной меры Лебега, если $\partial\Omega$ спрямляема. В случае, когда дифференциальные операторы P вещественно-аналитические в Ω, примером множества единственности задачи Коши является всякий замкнутый кусок гладкой гиперповерхности, лежащей в Ω.

В этом последнем случае задача (8.2) относится к задачам аналитического продолжения, поэтому, она, вообще говоря, некорректна по Адамару (об этом случае см. [148]).

Формулы, дающие решение задач вида (8.2), назовем *формулами Карлемана*. Цель раздела — доказать существование формулы Карлемана для решения общей задачи (8.2).

Компакт $K \subset \overline{\Omega}$ назовем *множеством устойчивости* (задачи (8.2)), если для каждой точки $x \in \Omega$ существует такая постоянная $c = c(K, x)$, что

$$|f(x)| \leqslant c \sum_{j=1}^{s} \|P_j f\|_K^{m-p_j} \tag{8.3}$$

для всех $f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap [C^m(\overline{\Omega})]^l$. Очевидно, каждое множество устойчивости является и множеством единственности.

Из теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в пространстве $C(K)$ следует (сравни с [233, с. 259]), что для компакта устойчивости K существуют такие $(l \times k_j)$-матрицы $\mathfrak{M}_{j\alpha}(x, y)$ (где $x \in \Omega$, $y \in K$) регулярных мер на K с конечной полной вариацией, $j = 1, \ldots, s$, $\|\alpha\| \leqslant m - p_j$, что для $f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap [C^m(\overline{\Omega})]^l$ и любой точки $x \in \Omega$ справедливо интегральное представление

$$f(x) = \int_K \sum_{j=1}^{s} \sum_{\|\alpha\| \leqslant m-p_j} \mathfrak{M}_{j\alpha}(x, y) D^\alpha (P_j(u, \partial) f(y)). \tag{8.4}$$

Пример 3. Среди компактов устойчивости выделим те, для которых существует постоянная $c = c(K)$ (не зависящая от x), для которой верно (8.3). Иначе говоря,

$$\|f\|_{\overline{\Omega}}^m \leqslant c \sum_{j=1}^{s} \|P_j f\|_K^{m-p_j}.$$

Такие компакты назовем *множествами полной устойчивости*. Если $\partial\Omega \in C^{m+1}$ и является множеством единственности в задаче Дирихле для эллиптического уравнения порядка $2(m+1)$ с коэффициентами из $C^\infty(\Omega)$, то $\partial\Omega$ — множество полной устойчивости в силу соответствующего принципа максимума ([233, с. 203]). Множества полной устойчивости в задаче Коши для голоморфных функций многих переменных — это компакты, содержащие границу Шилова области Ω, которая есть наименьшая из таких множеств.

В обоих примерах пересечение любого числа множеств полной устойчивости снова является таким же множеством. Неизвестно, верно ли это в общем случае.

Развивая теорию решений системы (8.1) со значениями в локально выпуклом пространстве в духе работы Глисона [208], можно получить дальнейшую информацию о матрицах $\mathfrak{M}_{j\alpha}$ для компактов полной устойчивости. Для более общих компактов единственности можно гарантировать существование более сложных интегральных формул, чем (8.4). Компакт $K\subset\overline{\Omega}$ назовем *множеством условной устойчивости* (задачи (8.2)) если из того, что

$$f_j\in \mathcal{O}(\Omega)\cap\left[C^m(\overline{\Omega})\right]^l,\quad \|f_i\|_{\overline{\Omega}}^m\leqslant M,\quad i=1,2,\ldots,$$

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{j=1}^{s}\|P_jf_i\|_K^{m-p_j}=0,$$

следует для всех $x\in\Omega$ равенство $\lim\limits_{i\to\infty}f_i(x)=0$. Из следующей теоремы вытекает, что если компакт $K\subset\Omega$ и однородная задача (8.2) имеет только нулевое решение в классе вектор-функций $f\in\mathcal{O}(\Omega)$ с ограниченной нормой $\|f\|_{\overline{\Omega}}^m$, то K — множество условной устойчивости.

Теорема 8.1 (аналог теоремы Витали). *Пусть компакт $K\subset\Omega$ и однородная задача* (8.2) *имеет только нулевое решение в* $\mathcal{O}(\Omega)$. *Если последовательность $f_i\in\mathcal{O}(\Omega)$ равномерно ограничена на каждом компакте из Ω и $D^\alpha P_jf_i$ сходится на K для $\|\alpha\|\leqslant m-p_j$, $j=1,\ldots,s$, то f_i сходится в топологии $[C^{p,\lambda}(\Omega)]^l$.*

Доказательство. Допустим, что последовательность $f_i(x)$ не сходится в некоторой точке $a\in\Omega$. Тогда из последовательности $f_i(a)\in\mathbb{C}^l$ можно выделить две подпоследовательности, сходящиеся к различным пределам A_1 и A_2. Пусть соответствующие подпоследовательности вектор-функций будут $f_{i,1}(x)$ и $f_{i,2}(x)$. Они ограничены в топологии $\mathcal{O}(\Omega)$, индуцированной из $[C(\Omega)]^l$, поэтому из них можно выделить новые подпоследовательности $f^*_{i,1}(x)$ и $f^*_{i,2}(x)$, сходящиеся в топологии $[C^{p,\lambda}(\Omega)]^l$ к вектор-функциям f_1^* и f_2^* из $\mathcal{O}(\Omega)$ соответственно. Получаем $A_1=f_1^*(a)\neq f_2^*(a)=A_2$. Но последовательности $D^\alpha P_jf^*_{i,1}(x)$ и $D^\alpha P_jf^*_{j,2}(x)$, как и подпоследовательности $D^\alpha P_jf_i$, сходятся во всех точках K к равным пределам при $\|\alpha\|\leqslant m-p_j$, $j=1,\ldots,s$. Отсюда $P_j(f_1^*-f_2^*)=0$ в $\left[C^{m-p_j}(K)\right]^{k_j}$ для $j=1,\ldots,s$, поэтому по условию теоремы $f_1^*\equiv f_2^*$ в Ω. Получили противоречие с тем, что $f_1^*(a)\neq f_2^*(a)$. □

Теорема 8.2 (Айзенберг — Тарханов). *Пусть K — компакт условной устойчивости задачи* (8.2) *в $\overline{\Omega}$. Тогда существуют такие $(l\times k_j)$-матрицы $\mathfrak{M}^i_{j\alpha}(x,y)$ (где $x\in\Omega$, $y\in K$) регулярных с конечной полной вариацией мер на K, где $\|\alpha\|\leqslant m-p_j$, $j=1,\ldots,s$, что для всякой вектор-функции $f\in\mathcal{O}(\Omega)\cap[C^m(\overline{\Omega})]^l$ и любой точки*

$x \in \Omega$ справедлива абстрактная формула Карлемана

$$f(x)=\lim_{i\to\infty}\int_K\sum_{j=1}^{s}\sum_{\|\alpha\|\leqslant m-p_j}\mathfrak{M}^i_{j\alpha}(x, y)\,D^\alpha(P_j(y, \partial)f(y)), \tag{8.5}$$

причем предел в правой части (8.5) достигается в том смысле, что для любого $\varepsilon>0$ существует $N=N(\varepsilon)$ такое, что для всех $i>N$

$$\sup_{\substack{f\in\mathcal{O}(\Omega)\cap[C^m(\overline{\Omega})]^l\\ \|f\|^m_{\overline{\Omega}}\leqslant 1}}\left|\int_K\sum_{j=1}^{s}\mathfrak{M}^i_{j\alpha}(x, y)\,D^\alpha(P_j(y, \partial)f(y))-f(x)\right|<\varepsilon. \tag{8.6}$$

Обратно, из существования формулы (8.5) с указанными свойствами вытекает, что K — компакт условной устойчивости задачи (8.2).

Доказательство. Наделим векторное пространство $X=\mathcal{O}(\Omega)\cap[C^m(\overline{\Omega})]^l$ топологией так называемого двунормового пространства. Именно, пусть на X имеются две нормы $\|f\|=\|f\|^m_{\overline{\Omega}}$ и $\|f\|^*=\sum_{j=1}^{s}\|P_jf\|_K^{m-p_j}$. Последняя действительно норма, поскольку компакт K условной устойчивости является, очевидно, компактом единственности задачи (8.2). Норма $\|\cdot\|$ сильнее, чем $\|\cdot\|^*$, т. е. если $\|f_i\|\to 0$, то и $\|f_i\|^*\to 0$. Будем говорить, что последовательность $\{f_i\}$ из X является γ-сходящейся к $f_0\in X$, если $\sup_i\|f_i\|<\infty$ $\lim_{i\to\infty}\|f_i-f_0\|^*=0$. Если последовательность $\{f_i\}$ из X γ-сходится к $f_0\in X$, то $\|f_i-f_0\|\leqslant M$, поэтому по теореме 8.1 имеет место $f_i\to f_0$ в топологии $[C^{p,\lambda}(\Omega)]^l$, следовательно, $\|f_0\|\leqslant\varliminf_{i\to\infty}\|f_i\|$. В этих условиях в работе Алексеевича и Семадени [189] показано, что на X можно определить такую локально выпуклую векторную топологию μ, что γ-сходимость совпадает с μ-сходимостью, а топологическое сопряженное пространство $(X, \mu)'$ состоит из таких линейных функционалов F на X, которые γ-непрерывны, т. е. если $f_i\xrightarrow{\gamma}f_0$, то $F(f_i)\to F(f_0)$, причем топология μ с такими свойствами неединственна.

Из определения множества условной устойчивости вытекает, что линейный функционал $\delta_r(y-x)$ на X, ставящий в соответствие вектор-функции $f\in X$ значение ее r-й $(1\leqslant r\leqslant l)$ компоненты в точке $x\in\Omega$, является γ-непрерывным. В силу результата из [189] общая форма γ-непрерывного линейного функционала F на X есть

$$F=\lim_{i\to\infty}F_i, \tag{8.7}$$

где $F_i\in(X, \|\cdot\|^*)'$, а предел в (8.7) понимается по норме $(X, \|\cdot\|)'$. Здесь $(X, \|\cdot\|^*)'$ — векторное подпространство $(X, \|\cdot\|)'$. Остается воспользоваться стандартными рассуждениями с использованием теоремы Рисса для описания общего вида непрерывных линейных функционалов на $(X, \|\cdot\|^*)$.

Обратно, пусть теперь справедлива формула (8.5), где сходимость понимается в смысле (8.6). Рассмотрим последовательность $f_i \in \mathcal{O}(\Omega) \cap [C^m(\bar{\Omega})]^l$, $\|f_i\|_{\Omega}^m \leqslant M$, $i = 1, 2, \ldots$, такую, что

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{s} \|P_j f_i\|_K^{m-p_j} = 0.$$

Отсюда и из (8.5) с учетом (8.6) получаем, что для всех $x \in \Omega$ верно равенство $\lim\limits_{i\to\infty} f_i(x) = 0$. Следовательно, компакт K является компактом условной устойчивости задачи (8.2). □

Пример 4 (задача Дирихле). При условиях примера 3 на скалярный дифференциальный оператор P множество условной устойчивости на $\partial\Omega$ только одно — вся граница $\partial\Omega$. Если коэффициенты дифференциального оператора P вещественно аналитичны, то по теореме 8.1 всякий компакт $K \subset \Omega$ с непустой внутренностью является множеством условной устойчивости задачи, так как в этом случае все решения однородного уравнения $Pf = 0$ будут вещественно-аналитическими в Ω (см. [166, с. 412]).

Пример 5 (задача Коши). Оценки условной устойчивости задачи Коши для (скалярного) эллиптического уравнения второго порядка с коэффициентами класса $C^2(\Omega)$ получены Ландисом [113] и Лаврентьевым [108]. Из их результатов, в частности, следует, что множествами условной устойчивости на границе шара являются компакты с непустой (в смысле топологии границы) внутренностью. В задаче Коши для голоморфных функций одного переменного множества условной устойчивости — это компакты, имеющие предельную точку внутри области, или компакты положительной лебеговой меры на границе односвязной области.

Примеры компактов условной устойчивости задачи Коши для голоморфных функций многих комплексных переменных или, в силу теоремы 8.2, примеры компактов, для которых есть формула Карлемана для голоморфных функций многих комплексных переменных, см. в гл. 5. С помощью многомерного аналога теоремы Хинчина — Островского (для компактов $(2n-1)$-мерной меры из $\partial\Omega \subset \mathbf{C}^n$ об этой теореме см. [4]) легко показать, что полномерные компакты единственности, лежащие на $\partial\Omega$, являются компактами условной устойчивости. При этом можно рассматривать и более широкий класс $H^\infty(\Omega)$ голоморфных функций. Используя методы работы [141], теорему Хинчина — Островского можно распространить на компакты, лежащие на порождающих многообразиях $M \in C^3$, $M \subset \partial\Omega \in C^1$, положительной меры на M. Эти компакты, следовательно, тоже являются множествами условной устойчивости.

Возникает вопрос, будет ли любой компакт единственности для голоморфных функций компактом условной устойчивости. Ниже дается отрицательный ответ на этот вопрос и построены соответствующие контрпримеры для компактов, лежащих на границе поликруга или шара в $\mathbf{C}^n$. Оба примера основаны на построении в области D неприводимого гладкого аналитического множества A, содержащегося в множестве нулей ограниченной голоморфной функции и такого, что $\bar{A}$ содержит порождающее многообразие $M \subset \partial D$, а в окрестности некоторой точки $z_0 \in \partial D$ пересекает ∂D по гладкому максимально комплексному многообразию. В случае шара этот пример интересен еще и с точки зрения граничного поведения аналитических множеств.

Предложение 8.3 (Красикова — Хурумов). *Пусть $D \subset \mathbf{C}^n$ — выпуклая область, $A \subset D$ — неприводимое аналитическое множество такое, что*

1) $A = \{z\colon F(z) = 0\}$, *где $F \not\equiv 0$ — ограниченная голоморфная в D функция;*

2) $\bar{A} \cap \partial D$ *содержит порождающее C^1-многообразие $M \subset \mathbf{C}^n$;*

3) *в ε-окрестности некоторой точки $z_0 \in A \cap \partial D$ множество $\bar{A}$ — C^1-многообразие с краем $L = \bar{A} \cap \partial D \cap \{z\colon |z - z_0| < \varepsilon\}$, и F непрерывно продолжается на $D \cup \bar{L}$.*

Тогда $\bar{L}$ является компактом единственности, но не компактом условной устойчивости.

Доказательство. По граничной теореме единственности Пинчука для порождающих многообразий M — множество единственности для $A_C(D)$ (см. [133] в случае M, $\partial D \in C^2$ и [164] или [170] для указанных в предложении условий гладкости). Покажем, что и $\bar{L}$ — множество единственности. Предположим, что $f \in A_C(D)$ и $f = 0$ на $\bar{L}$. Применяя граничную теорему единственности в проекции $\bar{A}$ на комплексно $(n-1)$-мерную касательную плоскость к $\bar{A}$, проведенную в точке z_0, получим, что $f = 0$ на M и, следовательно, $f \equiv 0$, т. е. $\bar{L}$ — компакт единственности. С другой стороны, $\bar{L}$ не является компактом условной устойчивости, поскольку последовательность функций $f_n(z) = F(\tilde{z} + (1 - 1/n)(z - \tilde{z}))$, где $\tilde{z}$ — произвольная фиксированная точка в D, равномерно стремится к нулю на $\bar{L}$, но $f_n(z) \to F(z) \not\equiv 0$ в D. □

Построим аналитические множества с указанными в предложении свойствами для поликруга и шара в $\mathbf{C}^n$.

Пример 6. Рассмотрим произвольную последовательность $\{\alpha_k\} \subset (-\pi/2, \pi/2)$, всюду плотную на этом интервале, и последовательность $\{t_k\}$, $0 < t_k < 1$, такую, что ряд $\sum t_k$ сходится $(1 \leqslant k < \infty)$. Пусть $B(\zeta)$ — произведение Бляшке в круге $U^1 = U(0, 1)$ с нулями $a_k = (1 - t_k)e^{i\alpha_k}$. В единичном поликруге U^n рассмотрим множество $A = \{z\colon z \in U^n,\ F(z) = z_2 - B(z_1) = 0\}$. Тогда A удовлетворяет условиям предложения. При этом $\bar{A}$ содержит порождающее многообразие $M = \{z\colon |z_1| = 1,\ \operatorname{Re} z_1 > 0,\ |z_2| < 1, \ldots, |z_n| < 1\}$, а $\bar{L} = \bar{A} \cap \partial U^n \cap \{z: \operatorname{Re} z_1 \leqslant -1/2\}$ будет компактом единственности, но не компактом условной устойчивости.

То, что граничное поведение множества A удовлетворяет условиям предложения, непосредственно вытекает из следующего известного свойства произведения Бляшке (выполнение остальных условий очевидно).

Лемма 8.4. *Пусть $B(\zeta)$ — произведение Бляшке в единичном круге U^1 с нулями $\{a_k\}$ и пусть $\zeta_0 \in \partial U^1$. Тогда имеет место один из двух случаев*: а) *если точка ζ_0 — предельная для $\{a_k\}$, то предельное множество для $B(\zeta)$ в точке ζ_0 совпадает с $\overline{U^1}$*; б) *если ζ_0 не является предельной для $\{a_k\}$, то $B(\zeta)$ голоморфно продолжается в окрестность ζ_0.*

Доказательство. Утверждение а) см., например, в [88, с. 133]; утверждение б) вытекает из равномерной сходимости $B(\zeta)$ в окрестности точки ζ_0, которая доказывается стандартным образом. □.

Из тех же соображений, которые использованы в примере 6, можно построить аналогичный пример для единичного шара B^n. Заметим, что шар вписан в область $G = \{z: |z_1| \cdot \ldots \cdot |z_n| < n^{-n/2}\}$ и ∂B^n пересекается с ∂G по тору $\dfrac{\Delta}{\sqrt{n}} = \{z: |z_1| = \ldots = |z_n| = 1/\sqrt{n}\}$. После замены $w_1 = n^{n/2} z_1 \cdot \ldots \cdot z_n$, $w_2 = \sqrt{n} z_2$, ..., $w_n = \sqrt{n} z_n$ область G преобразуется (биголоморфно вне плоскостей $\{z: z_i = 0\}$) в область $G_1 = \{w: |w_1| < 1\}$, а B^n — в область $B_1 \subset G_1$, причем ∂G_1 и ∂B_1 пересекаются лишь по остову Δ единичного круга. Как и в примере 6, в G_1 можно рассмотреть график A_1 отображения $w_2 = B(w_1)$ и взять его прообраз в B^n. Но, вообще говоря (в зависимости от скорости стремления $\{|a_k|\}$ к единице), при пересечении $A_1 \cap B_1$ множество A_1 может разбиваться на счетное число компонент связности, каждая из которых будет гладкой вплоть до ∂B_1. Мы укажем такую скорость стремления $\{|a_k|\}$ к единице, при которой одна из компонент $A_1 \cap B_1$ не «обрывается» вблизи Δ, а достигает в качестве предельного множества открытой области $M_1 = \{w: \operatorname{Re} w_1 > 0\} \cap \Delta$ на Δ.

Пример 7. Пусть $\{\alpha_k\} \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ — произвольная последовательность, плотная на этом интервале. Рассмотрим последовательность $t_k = 2^{-8^k}$ и произведение Бляшке $B(\zeta)$ с нулями $a_k = (1 - t_k) e^{i\alpha_k}$, $k \geqslant 2$. Пусть A — неприводимая компонента множества $\left\{z: z \in B^n,\ F(z) = z_2 - B\left(n^{\frac{n}{2}} z_1 \cdot \ldots \cdot z_n\right) \Big/ \sqrt{n} = 0\right\}$ в единичном шаре B^n, замыкание которой содержит точку $z_0 = \{-1/(\sqrt{n} B(-1)),\ B(-1)/\sqrt{n},\ 1/\sqrt{n},\ \ldots,\ 1/\sqrt{n}\}$. Тогда множество A удовлетворяет условиям предложения. При этом $\bar{A}$ содержит область $M = \{z: |\arg(z_1 \cdot \ldots \cdot z_n)| < \pi/2,\ |z_1| = \ldots = |z_n| = 1/\sqrt{n}\}$ на торе $\Delta/\sqrt{n}$, и для достаточно малых ε замыкание множества $L = \bar{A} \cap \partial B^n \cap B(z_0, \varepsilon)$, являющегося вещественно-аналитическим $(2n-3)$-мерным многообразием, будет компактом единственности, но не компактом условной устойчивости. (Мы рассматриваем ветвь $\arg \zeta$ со значениями на $(-\pi, \pi]$.)

Доказательство. Для краткости ограничимся случаем $n = 2$ (в общем случае доказательство аналогично). Отметим, что вещественная аналитичность пересечения A и ∂B^2 вблизи z_0 следует из соотношения $\partial F \cap \partial(|z_1|^2 + |z_2|^2) \neq 0$, которое проверяется прямым вычислением. Рассмотрим в круге $U = \{w_1\colon |w_1| < 1\}$ области $V_k = R_k \cap S_k$ (здесь и далее $k = 2, 3, \ldots$), где R_k — кольцо $\{w_1\colon 1 - \sqrt{t_k} < |w_1| < 1 - t_k^2/256\}$, а S_k — сектор $\left\{w_1\colon w_1 \in U, \left|\arg \frac{w_1}{a_k}\right| < \frac{\pi}{2}\right\}$. Нам достаточно установить включение $A_0 = \left\{w\colon w_2 = B(w_1),\ w_1 \in U \setminus \bigcup\limits_k V_k\right\} \subset B_1$. Действительно, тогда нужное граничное поведение компоненты связности множества $A_1 \cap B_1$, содержащей A_0, будет следовать из леммы. Поскольку $B_1 = \{w\colon \varphi_1(w_1) < |w_2| < \varphi_2(w_1)\}$, где $\varphi_{1,2} = (1 \mp \sqrt{1 - |w_1|^2})^{1/2}$, достаточно доказать, что $\varphi_1(w_1) < |B(w_1)|$ при $w_1 \in U \setminus \bigcup\limits_k V_k$. Для этого нам потребуется несколько простых неравенств. Из неравенства $\sqrt{1-\delta} < 1 - \delta/2$ $(0 < \delta \leqslant 1)$ получаем, что

$$\varphi_1(w_1) < 1 - \frac{\sqrt{1 - |w_1|}}{2}. \tag{8.8}$$

С помощью свойств автоморфизмов круга нетрудно получить следующую оценку для сомножителей $b(\zeta) = (|a|/a)(a - \zeta)/(1 - \bar{a}\zeta)$ произведения Бляшке в круге U:

$$|b(\zeta)| > 1 - 2\min\left\{\frac{1 - |\zeta|}{1 - |a|}, \frac{1 - |a|}{1 - |\zeta|}\right\}; \tag{8.9}$$

$$|b(\zeta)| > 1 - 4(1 - |\zeta|)(1 - |a|), \text{ если } \left|\arg \frac{\zeta}{a}\right| > \frac{\pi}{2}. \tag{8.10}$$

Обозначим $b_k(w_1) = b(w_1)$ с $a = a_k$. Для оценки произведения Бляшке нам потребуется элементарное неравенство

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - \delta_k) > 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k, \quad 0 < \delta_k < 1. \tag{8.11}$$

Круг U разбивается на объединение областей $R_1' = \{w_1\colon |w_1| < 1 - \sqrt[4]{t_2}\}$ и $R_k = \{w_1\colon 1 - \sqrt[4]{t_k} \leqslant |w_1| < 1 - t_k^4\} \supset V_k \ni a_k$. Докажем неравенство $\varphi_1 < |B|$ в R_1'.

1. Покажем, что $|b_k| > 1 - (1 - \varphi_1)/2^{k-1}$ при $w_1 \in R_1'$. В силу неравенств (8.8) и (8.9) достаточно доказать, что $1 - \sqrt{1 - |w_1|}/2^k <$

$< 1-2t_k/(1-|w_1|)$ или $2^{k+1}t_k<(1-|w_1|)^{3/2}$. Поскольку $1-|w_1|>$ $>\sqrt[4]{t_2}=2^{-16}$, это следует из неравенства $2^{-8^k}\times 2^{k+1}<2^{-24}$, эквивалентного очевидному неравенству $-8^k+k+1<-24$. Из оценки 1 в силу (8.11) находим $\varphi_1(w_1)<|B(w_1)|$ при $w_1\in R_1'$. Следующие оценки 2 и 3 получаются аналогично 1.

2. $|b_{k+j}|>1-(1-\varphi_1)/2^{j+2}$, где $-k+2<j<\infty$, $j\neq k$ и $1-\sqrt[4]{t_k}<|w_1|$ или $|w_1|<1-t_k^4$, т. е. $w_1\in R_k'$.

3. $|b_k|>1-(1-\varphi_1)/2$, если $|w_1|<1-\sqrt{t_k}$ или $1-t_k^2/256<$ $<|w_1|<1$, т. е. $w_1\in U\setminus R_k$.

Из (8.8) и (8.10) легко следует оценка

4. $|b_k|>1-(1-\varphi_1)/2$ на $U\setminus S_k$.

Оценки 3 и 4 дают $|b_k|>1-(1-\varphi_1)/2$ в $U\setminus V_k$. Из этой оценки и оценки 2 с помощью неравенства (8.11) имеем, что $\varphi_1<|B|$ в $R_k'\setminus V_k$. □

9. ОБЩИЙ ПОДХОД ВИДЕНСКОГО — ГАВУРИНОЙ — ХАВИНА

Пусть D — область в $\mathbf{C}^1$ с достаточно хорошей границей, E — множество из замыкания $\overline{D}$ области D. Рассмотрим некоторый класс A функций из $A(D)$, имеющих угловые граничные значения почти всюду на ∂D. Множество E назовем множеством единственности класса A, если из $f\in A$, $f|_E=0$ следует, что f равна нулю тождественно. Пусть $\{\Phi_\lambda\}$ — семейство функций из $A(D)$, $\lambda>0$, все нули которых простые, имеющих угловые граничные значения почти всюду на ∂D и таких, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\Phi_\lambda(\zeta)(\zeta-z)}=\frac{f(z)}{\Phi_\lambda(z)}+\sum_{\zeta\in\Phi_\lambda^{-1}(0)}\frac{f(\zeta)}{\Phi_\lambda'(\zeta)(\zeta-z)}. \tag{9.1}$$

Иначе говоря, мы предполагаем, что к интегралу (9.1) можно применить теорему Коши о вычетах, ряд в правой части (9.1) абсолютно сходится. Обозначим для $K\subset\overline{D}$

$$\mu_{\lambda,z}(K)=\frac{1}{2\pi i}\int_K\frac{d\zeta}{\Phi_\lambda(\zeta)(\zeta-z)}-\sum_{\zeta\in K\cap\Phi_\lambda^{-1}(0)}\frac{1}{\Phi_\lambda'(\zeta)(\zeta-z)},$$

тогда (9.1) можно записать в виде равенства, в котором фигурирует интеграл по мере $\mu_{\lambda,z}$:

$$f(z)=\Phi_\lambda(z)\int_{\overline{D}}f(\zeta)\,d\mu_{\lambda,z}(\zeta)=\Phi_\lambda(z)\int_E f(\zeta)\,d\mu_{\lambda,z}(\zeta)+$$
$$+\Phi_\lambda(z)\int_{\overline{D}\setminus E}f(\zeta)\,d\mu_{\lambda,z}(\zeta).$$

Отсюда вытекает

Теорема 9.1 (Виденский — Гаврина — Хавин). *Если для всякого* $z \in D$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \Phi_\lambda(z) = 0, \tag{9.2}$$

и

$$\sup_{\lambda>0} \left| \int_{\overline{D}\setminus E} f d\mu_{\lambda,z} \right| < \infty,$$

то для $z \in D$ *при условии* $\Phi_\lambda(z) \neq 0$ *верна формула*

$$f(z) = \lim_{\lambda\to\infty} \Phi_\lambda(z) \int_E f d\mu_{\lambda,z}. \tag{9.3}$$

Очевидно, формула Карлемана (1.3) есть частный случай общей интерполяционной формулы (9.3). Приведем еще один известный

Пример. Пусть $A = H^\infty(D)$, $D = U(0, 1)$, E — счетное подмножество круга U такое, что

$$\sum_{z\in E} (1 - |z|) = +\infty.$$

Точки множества E занумеруем в порядке возрастания модулей. Обозначим Φ_m — конечное произведение Бляшке, построенное по первым m точкам E. Тогда (9.2) выполнено и из теоремы 9.1 получаем

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} \Phi_m(z) \sum_{\zeta\in\Phi_m^{-1}(0)} \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)\,\Phi_m'(\zeta)}.$$

Далее укажем приложение общей формулы (9.3) к задаче восстановления голоморфной функции, удовлетворяющей условию Липшица, по ее следу на граничном множестве единственности, которое может иметь нулевую меру Лебега. Пусть Λ_α — множество голоморфных в круге $U(0, 1)$ функций, удовлетворяющих в $\overline{U}$ условию Липшица порядка α, где $0 < \alpha \leqslant 1$. Рассмотрим множество $E \subset \overline{U}$, не имеющее предельных точек в круге U. Положим для $\zeta \in \partial U$

$$\rho_E(\zeta) = \inf\{|\zeta - z|:\ z \in E\}.$$

Введем следующий класс голоморфных в круге U функций $\Lambda = \bigcup_{0<\alpha\leqslant 1} \Lambda_\alpha$. Множество E является множеством единственности для Λ, если выполнено условие (см. [200])

$$\int_{\partial U} \ln \rho_E(e^{i\theta})\, d\theta = -\infty. \tag{9.4}$$

Если же верно

$$\int_{\partial U} \ln \rho_E(e^{i\theta})\, d\theta > -\infty, \quad \sum_{z\in E\cap U} (1 - |z|) < +\infty.$$

то существует нетривиальная функция из Λ_1, равная нулю на E (см. [90]), значит, E не является множеством единственности ни для Λ_1, ни для Λ. Важный частный случай $E\subset\partial U$; тогда, для того чтобы E было множеством единственности для Λ, необходимо и достаточно выполнение условия (9.4). При этом E может иметь нулевую меру Лебега.

Определим $E_t=\{z\colon\ z\in\partial U,\ \rho_E(z)<t\}$, где $t>0$. Построим внешнюю функцию $\Phi_{\lambda,\alpha}$, модуль которой равен 1 почти везде на $\partial U\setminus E_1$, равен ρ_E^{α} почти везде на $E_1\setminus E_\mu$ и равен μ^a почти везде на E_μ, где $\lambda>0$, $\lambda\mu=1$. Так же, как в разд. 1, эту функцию можно найти в виде $\exp(u+iv)$, где u — решение соответствующей задачи Дирихле. Рассмотрим еще проекцию окружности ∂U в множество E, т. е. функцию Π_E, удовлетворяющую условию $|z-\Pi_E(z)|=\rho_E(z)$, $\Pi_E(z)\in E$ при всяком $z\in\partial U$. Нетрудно показать, что эта проекция существует и $\Pi_E(z)=z$ при $z\in E\cap\partial U$, а на $\partial U\setminus E$ функция $\Pi_E(z)$ непрерывна, за исключением не более чем счетного множества.

Теорема 9.2 (Виденский — Гавурина — Хавин). *Если верно* (9.4), *то для всякой* $f\in\Lambda_\alpha$ *и любого* $z\in U$ *справедлива формула*

$$f(z)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\Phi_{\lambda,\alpha}(z)}{2\pi i}\int\limits_{E_1}\frac{f(\Pi_E(\zeta))\,d\zeta}{(\zeta-z)\,\Phi_{\lambda,\alpha}(\zeta)}. \tag{9.5}$$

Доказательство. Применяя формулу Пуассона, получим

$$\ln|\Phi_{\lambda,\alpha}(z)|=\alpha\cdot\int\limits_{E_1\setminus E_\mu}\mathscr{P}\left(e^{i\theta},z\right)\ln\rho_E\left(e^{i\theta}\right)d\theta-\alpha\ln\lambda\int\limits_{E_\mu}\mathscr{P}\left(e^{i\theta},z\right)d\theta\leqslant$$
$$\leqslant C(\alpha,z)\left[\int\limits_{E_1\setminus E_\mu}\ln\rho_E\left(e^{i\theta}\right)d\theta-m\left(E_\mu\right)\ln\lambda\right].$$

Если $mE=0$, то в силу (9.4)

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_{E_1\setminus E_\mu}\ln\rho_E\left(e^{i\theta}\right)d\theta=-\infty.$$

Если же $mE>0$, тогда

$$\lim_{\lambda\to\infty}m\left(E_\mu\right)\ln\lambda=\lim_{\lambda\to\infty}m\left(E_{\frac{1}{\lambda}}\right)\ln\lambda=+\infty;$$

в обоих случаях верно (9.2). Если $f\in\Lambda_\alpha$ и $\min\limits_{\overline{U}}|\Phi_{\lambda,\alpha}|>0$, то функция $f(\Phi_{\lambda,\alpha})^{-1}$ представима интегралом Коши

$$\frac{f(z)}{\Phi_{\lambda,\alpha}(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\Phi_{\lambda,\alpha}(\zeta)(\zeta-z)}. \tag{9.6}$$

Представим правую часть в (9.6) в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{E_1} f(\Pi_E(\zeta))\frac{d\zeta}{(\zeta-z)\,\Phi_{\lambda,\alpha}(\zeta)}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{E_1}\frac{f(\zeta)-f(\Pi_E(\zeta))}{(\zeta-z)\,\Phi_{\lambda,\alpha}(\zeta)}\,d\zeta+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U\setminus E}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)\,\Phi_{\lambda,\alpha}(\zeta)}$$

и обозначим J_1 и J_2 второе и третье слагаемое соответственно. Далее из неравенств

$$|f(\zeta)-f(\Pi_E(\zeta))|\leqslant C_f|\zeta-\Pi_E(\zeta)|^\alpha=C_f(\rho_E(\zeta))^\alpha,$$

$|\Phi_{\lambda,\alpha}(\zeta)|\geqslant(\rho_E(\zeta))^\alpha$ почти всюду при $\zeta\in E_1$ следует, что

$$\lim_{\lambda\to\infty} J_1<\infty. \tag{9.7}$$

И, наконец, очевидно

$$\lim_{\lambda\to\infty} J_2<\infty. \tag{9.8}$$

Теперь из (9.7) и (9.8) получаем (9.5). □

Далее рассмотрим класс $H_1^1(U)$, он не входит ни в один класс Λ_α, $0<\alpha\leqslant 1$. Однако множество E является множеством единственности и для этого класса (см. [54]), если верно (9.4). Сохраняется и восстанавливающая формула (9.5), а именно, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 9.3. (Виденский — Гавурина — Хавин). *Если верно* (9.4), *то справедлива и формула* (9.5) *для всяких* $f\in H_1^1$, $z\in U$, $0<\alpha<1$.

Отметим, в частности, что при выполнении условий теоремы 9.2 или 9.3 формула (9.5) восстанавливает соответствующую функцию и в случае, когда множество единственности $E\subset\partial U$ имеет нулевую меру Лебега.

Часть II

ФОРМУЛЫ КАРЛЕМАНА В МНОГОМЕРНОМ КОМПЛЕКСНОМ АНАЛИЗЕ

ГЛАВА 3

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ВЫЧЕТ

10. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАРТИНЕЛЛИ — БОХНЕРА И ФОРМУЛА ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ВЫЧЕТА ЮЖАКОВА — РУСА

1°. Теорема 10.1. *Пусть $f \in A_C(D)$, где область $D \subset \mathbf{C}^n$ ограничена и имеет кусочно-гладкую границу ∂D, тогда справедлива формула Мартинелли — Бохнера*:

$$\int\limits_{\partial D} f(\zeta)\, \omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z}) = \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ 0, & z \notin \overline{D}, \end{cases} \tag{10.1}$$

где

$$\omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z}) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k)\, d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta}{|\zeta - z|^{2n}}. \tag{10.2}$$

Доказательство. 1. Прямым подсчетом легко установить замкнутость ядра Мартинелли — Бохнера ω относительно ζ на множестве $\mathbf{C}^n \setminus \{z\}$. Отсюда и из формулы Стокса (0.1) вытекает (10.1) для случая $z \notin \overline{D}$. Если же $z \in D$, то в силу той же формулы Стокса интегрирование по ∂D можно заменить интегрированием по сфере $\partial B_r(z)$ достаточно малого радиуса r.

2. В достаточно малой окрестности точки $z \in D$ функция $f(\zeta)$ разлагается в кратный степенной ряд по мономам вида $(\zeta - z)^\beta$, поэтому для доказательства (10.1) достаточно показать, что

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i r^2)^n} \int\limits_{\partial B_r} (\zeta - z)^\beta \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k)\, d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta \neq 0, \\ 1, & \text{если } \beta = 0. \end{cases} \tag{10.3}$$

3. Заметим, что при замене переменных $\zeta_k - z_k = e^{it_k}(\zeta'_k - z_k)$, где t_k действительны, $k = 1, \ldots, n$, множество $\partial B_r(z)$ переходит в себя, а подынтегральная форма в (10.3) умножается на $e^{it_1\beta_1} \ldots \ldots e^{it_n\beta_n}$, поэтому верно (10.3) для случая $\beta \neq 0$.

4. Если $\beta = 0$, то левая часть (10.3) по формуле Стокса равна

$$\frac{n!}{(2\pi i r^2)^n} \int\limits_{B_r(z)} d\bar{\zeta} \wedge d\zeta = \frac{n! 2^n}{r^{2n}} \int\limits_{B_r(z)} |\zeta_1 - z_1| \ldots |\zeta_n - z_n| \, d|\zeta_1 - z_1| \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge d|\zeta_n - z_k| = n! \int\limits_{\substack{\tau_1 + \ldots + \tau_n < 1 \\ \tau_i > 0}} d\tau_1 \wedge \ldots \wedge d\tau_n = 1. \ \square$$

Следствие 10.2. *Пусть $f \in H^1(D)$, где область D ограничена и $D \in H$, тогда верна формула Мартинелли — Бохнера* (10.1).

2°. Пусть в области $D \subset \mathbf{C}^n$ задано голоморфное отображение

$$w = f(z), \tag{10.4}$$

где $w = (w_1, \ldots, w_n)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Точка $a \in D$ называется *нулем отображения* (10.4), если $f(a) = 0$. Множество нулей отображения (10.4) обозначим E_f. Если в изолированной точке $a \in E_f$ якобиан отображения $\left.\frac{df}{dz}\right|_a \neq 0$, то a называют *простым нулем отображения* (10.4). Верно следующее утверждение, которое мы докажем несколько позднее.

Предложение 10.3. *Если замыкание окрестности U_a нуля a отображения (10.4) не содержит других нулей этого отображения, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что почти при всех $\zeta \in B_\varepsilon$ отображение*

$$w = f(z) - \zeta \tag{10.5}$$

имеет в U_a лишь простые нули, причем число их не зависит ни от ζ, ни от выбора окрестности U_a.

Указанное в этом предложении число нулей отображения (10.5) в U_a назовем *кратностью нуля a отображения* (10.4) и обозначим $\mu_a(f)$ (динамическое определение кратности).

Пример. Для отображения $w_1 = z_1$, $w_2 = z_1^2 + z_2^2$ точка $(0, 0)$ является нулем кратности 2. Действительно, отображение $w_1 = z_1 - \zeta_1$, $w_2 = z_1^2 + z_2^2 - \zeta_2$ при малых $|\zeta|$ и $\zeta_1 \neq \zeta_2^2$ в окрестности этой точки имеет два простых нуля $\left(\zeta_1, \sqrt{\zeta_2 - \zeta_1^2}\right)$ и $\left(\zeta_1, -\sqrt{\zeta_2 - \zeta_1^2}\right)$

Из локальной обратимости голоморфного отображения в точках, где его якобиан $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$, следует

Предложение 10.4. *Кратность простого нуля равна* 1.

Рассмотрим случай нуля, не являющегося простым.

Предложение 10.5. *Если a — изолированный нуль отображения* (10.4) *и $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_a = 0$, то его кратность $\mu_a(f) > 1$.*

В силу предложения 10.5 естественно называть изолированный нуль отображения (10.4) *кратным*, если $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_a = 0$.

Подобно тому, как в теории функций одного комплексного переменного логарифмический вычет выражает число нулей голоморфной функции, его многомерные аналоги связаны с числом нулей голоморфного отображения. Следующий многомерный аналог классического логарифмического вычета Коши основан на интегральном представлении Мартинелли — Бохнера (10.1).

Теорема 10.6. *Пусть отображение $f \in A^n(\bar{D})$, где область D ограничена, граница ∂D кусочно-гладкая и не содержит нулей этого отображения. Тогда отображение f имеет в D только изолированные нули и число их, если считать каждый нуль столько раз, какова его кратность *, выражается формулой*

$$N = N(f, D) = \int_{\partial D} \omega(f(z), \overline{f(z)}), \tag{10.6}$$

где

$$\omega(f, \bar{f}) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{1}{|f|^{2n}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \bar{f}_j d\bar{f}[j] \wedge df.$$

Теорема 10.7 (принцип Руше). *Пусть отображение* (10.4) *и область D удовлетворяют условиям теоремы* 10.6, *а отображение $g \in A^n(\bar{D})$. Если при $z \in \partial D$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, справедливо условие*

$$f(z) + tg(z) \neq 0, \tag{10.7}$$

то отображение (10.4) *и отображение*

$$w = f(z) + g(z) \tag{10.8}$$

имеют в D одинаковое число нулей.

Замечание. Условие (10.7) выполняется, например, в следующих случаях: 1) $|g| < |f|$ на ∂D; 2) $\|g\| < \|f\|$ на ∂D; 3) для каждой точки $z \in \partial D$ хотя бы для одного индекса j, $j = 1, \ldots, n$, выполняется неравенство $|g_j(z)| < |f_j(z)|$; 4) для каждой точки $z \in \partial D$ хотя бы для одного индекса j справедливо неравенство $\operatorname{Re} g_j(z) < \operatorname{Re} f_j(z)$ либо $\operatorname{Im} g_j(z) < \operatorname{Im} f_j(z)$ и т. д. ...

Для доказательства указанных утверждений нам потребуются некоторые леммы.

Лемма 10.8. *Если отображение $f \in A^n(D)$, то для любого кусочно-гладкого цикла $\gamma \in Z_{2n-1}(D \backslash E_f)$ интеграл $\int_\gamma \omega(f, \bar{f})$ есть целое число.*

Доказательство. Так как (10.4) отображает область $D \backslash E_f$ в $\mathbf{C}^n \backslash \{0\}$, а в $\mathbf{C}^n \backslash \{0\}$ базу $(2n-1)$-мерных гомологий образует сфера ∂B_r, то образ цикла γ при отображении (10.4) гомологичен $N \partial B_r$, где N — целое число. Отсюда и из формулы Мартинелли —

* Впредь всюду, где речь идет о числе нулей, каждый нуль считается столько раз, какова его кратность. Аналогично, если происходит суммирование по множеству E_f.

Бохнера (10.1) получим

$$\int_{\gamma} \omega(f, \bar{f}) = \int_{f(\gamma)} \omega(\zeta, \bar{\zeta}) = N \int_{\partial B_r} \omega(\zeta, \bar{\zeta}) = N. \ \square$$

Лемма 10.9. *Пусть отображение* (10.4) *и область D удовлетворяют условиям теоремы* 10.6. *Если при этом все нули отображения* (10.4) *в области D простые, то для любой функции $\varphi \in A_c(D)$ имеет место формула*

$$\int_{\partial D} \varphi\omega(f, \bar{f}) = \sum_{a \in E_f} \varphi(a). \tag{10.9}$$

В частности (при $\varphi \equiv 1$), справедливо (10.6).

Доказательство. Форма $\varphi\omega(f, \bar{f})$ замкнута в $\bar{D} \setminus E_f$, что можно проверить так же непосредственно, как при доказательстве замкнутости формы Мартинелли — Бохнера (10.2). Далее

$$\int_{\partial D} \varphi\omega(f, \bar{f}) = \sum_{a \in E_f} \int_{\partial U_a} \varphi\omega(f, \bar{f}), \tag{10.10}$$

где U_a — достаточно малая окрестность точки a. Возьмем в качестве U_a связную компоненту множества $\{z\colon z \in D,\ |f(z)| < \varepsilon\}$, содержащую a. Так как $\left.\frac{df}{dz}\right|_a \neq 0$, то при достаточно малом ε отображение f биголоморфно в $\bar{U}_a$, поэтому по формуле Мартинелли — Бохнера (10.1)

$$\int_{\partial U_a} \varphi\omega(f, \bar{f}) = \int_{\partial B_\varepsilon} \varphi\left(f^{-1}(\zeta)\right) \omega(\zeta, \bar{\zeta}) = \varphi\left(f^{-1}(0)\right) = \varphi(a).$$

Отсюда и из (10.10) следует (10.9). $\square$

Лемма 10.10. *При выполнении условий теоремы* 10.7 *справедливо равенство*

$$\int_{\partial D} \omega(f, \bar{f}) = \int_{\partial D} \omega(f + g, \overline{f + g}). \tag{10.11}$$

Доказательство. Согласно (10.7) интеграл

$$J(t) = \int_{\partial D} \omega(f + tg, \overline{f + tg})$$

есть непрерывная функция t на отрезке $[0, 1]$, которая по лемме 10.8 принимает только целые значения. Поэтому $J(t)$ постоянна и, значит, $J(0) = J(1)$, т. е. верно (10.11). $\square$

Доказательство предложения 10.3. Возьмем $\varepsilon > 0$ такое, чтобы $\varepsilon \leqslant \min\limits_{z \in \partial U_a} |f(z)|$. Тогда по лемме 10.10

$$\int_{\partial U_a} \omega(f, \bar{f}) = \int_{\partial U_a} \omega(f - \zeta, \overline{f - \zeta}) \tag{10.12}$$

для $\zeta \in B_\varepsilon$. По теореме Сарда 0.6 $\operatorname{mes} f\left(\left\{z\colon z \in D, \frac{\partial f}{\partial z} = 0\right\}\right) = 0$, следовательно, почти при всех $\zeta \in B_\varepsilon$ отображение (10.5) имеет только простые нули. Для таких ζ согласно лемме 10.9 интеграл в правой части (10.12) равен $N(f-\zeta,\ U_a)$. Из равенства (10.12) вытекает, что

$$N(f-\zeta, U_a) = \int_{\partial U_a} \omega(f, \bar{f}),$$

и, значит, $N(f-\zeta,\ U_a)$ не зависит от выбора $\zeta \in B_\varepsilon$. Если U_a' — другая окрестность точки a, то по следствию из формулы Стокса

$$\int_{\partial U_a'} \omega(f, \bar{f}) = \int_{\partial U_a} \omega(f, \bar{f}). \quad \square$$

Попутно доказано, что кратность изолированного нуля голоморфного отображения (10.4) выражается формулой

$$\mu_a(f) = \int_{\partial U_a} \omega(f, \bar{f}). \tag{10.13}$$

Доказательство теоремы 10.6.

1. Предположим сначала, что $\frac{\partial f}{\partial z} \not\equiv 0$. Прежде всего покажем, что отображение (10.4) может иметь в D лишь изолированные нули. Возьмем ε так, чтобы $0 < \varepsilon \leqslant \min\limits_{\partial D} |f|$. Из теоремы Сарда 0.6 и леммы 10.10 следует, что почти при всех $\zeta \in B_\varepsilon$ система (10.5) имеет в D лишь простые нули, причем их число $k \geqslant 0$, не зависит от $\zeta \in B_\varepsilon$.

Если $E_f \neq \varnothing$, то для любой точки $a^{(1)} \in E_f$ можно выбрать последовательность точек $\zeta^{(m)} \to 0$, $\zeta^{(m)} \in B_\varepsilon$ так, чтобы при $\zeta = \zeta^{(m)}$ отображение (10.5) имело простые нули $\{z^{m,1}, \ldots, z^{m,k}\}$, $k \geqslant 1$, и $z^{m,1} \to a^{(1)}$ при $m \to \infty$. Действительно, так как $\frac{\partial f}{\partial z} \not\equiv 0$, то в любой окрестности точки $a^{(1)}$ найдется точка $z^{m,1}$, в которой $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$. Возьмем $\zeta^{(m)} = f(z^{m,1})$, тогда $z^{m,1}$ — простой нуль отображения (10.5) при $\zeta = \zeta^{(m)}$. Согласно теореме Сарда 0.6 можно добиться, немного изменяя $\zeta^{(m)}$, чтобы и остальные нули этого отображения были простыми. Ясно, что $\zeta^{(m)} \to 0$ при $z^{m,1} \to a^{(1)}$.

С другой стороны, покажем, что при любом выборе $\zeta^{(m)} \to 0$ простые нули $\{z^{m,1}, \ldots, z^{m,k}\}$ дают в качестве предельных точек одно и то же конечное множество* $\{a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}\} \subset D$, следовательно, $E_f = \{a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}\}$. Действительно, заменяя последовательности $\{z^{(m,j)}\}_{m=1}^{\infty}$, $j = 1, \ldots, k$, подпоследовательностями, можно сделать

* При этом некоторые из точек $a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}$ могут совпадать.

их сходящимися к некоторым точкам $a^{(j)} \in D$, $j = 1, \ldots, k$ (так как на ∂D нет нулей). Множество E_f состоит только из этих точек. Предположим противное, что существует точка $b^{(1)} \in E_f$, $b^{(1)} \neq a^{(j)}$, $j = 1, \ldots, k$. Тогда аналогично предыдущему получим последовательность точек $\xi^{(m)} \to 0$ таких, что при $\zeta = \xi^{(m)}$ система (10.5) имеет лишь простые нули $\{w^{m,1}, \ldots, w^{m,k}\}$, причем $w^{m,j} \to b^{(j)}$, $j = 1, \ldots, k$, при $m \to \infty$. Выберем полином φ так, чтобы $\varphi(a^{(1)}) = \ldots \ldots = \varphi(a^{(k)}) = \varphi(b^{(2)}) = \ldots = \varphi(b^{(k)}) = 0$, а $\varphi(b^{(1)}) = 1$. Согласно лемме 10.9

$$\int_{\partial D} \varphi\omega\left(f - \zeta^{(m)}, \overline{f - \zeta^{(m)}}\right) = \sum_{j=1}^{k} \varphi\left(z^{m,j}\right);$$

$$\int_{\partial D} \varphi\omega\left(f - \xi^{(m)}, \overline{f - \xi^{(m)}}\right) = \sum_{j=1}^{k} \varphi\left(w^{m,j}\right).$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получим противоречие

$$\int_{\partial D} \varphi\omega(f, \bar f) = \sum_{j=1}^{k} \varphi\left(a^{(j)}\right) = 0, \quad \int_{\partial D} \varphi\omega(f, \bar f) = \sum_{j=1}^{k} \varphi\left(b^{(j)}\right) = 1.$$

Таким образом, множество E_f конечно.

Докажем формулу (10.6). Окружим каждую точку $a \in E_f$ окрестностью U_a так, чтобы $\overline{U}_a \subset D$, $\overline{U}_a \cap \overline{U}_b = \varnothing$ при $a \neq b$, $a, b \in E_f$. Учитывая замкнутость формы $\omega(f, \bar f)$ в $D \setminus E_f$ и формулу (10.13), найдем

$$\int_{\partial D} \omega(f, \bar f) = \sum_{a \in E_f} \int_{\partial U_a} \omega(f, \bar f) = \sum_{a \in E_f} \mu_a(f) = N(f, D).$$

При этом, если $E_f \neq \varnothing$, то $N(f, D) = k > 0$.

2. Пусть теперь $\frac{\partial f}{\partial z} \equiv 0$. В этом случае интеграл в правой части (10.6) равен нулю, так как в форму $\omega(f, \bar f)$ входит $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz$. Покажем, что $N(f, D)$ также равно нулю, т. е. f не имеет нулей в D. Предположим противное, что $f(a) = 0$ для некоторой точки $a \in D$. Так как $f|_{\partial D} \neq 0$, то найдется голоморфное отображение g: $\overline{D} \to \mathbf{C}^n$ такое, что $g(a) = 0$, $|g| < |f|$, на ∂D и $\frac{\partial (f+g)}{\partial z} \not\equiv 0$ (можно, например, взять линейное отображение $g(z) = \lambda(z - a)$, где $\lambda = \|\lambda_{jk}\|$ — матрица с достаточно малыми элементами такая, что

$$\operatorname{rang}\left\| \frac{\partial f_j(a)}{\partial z_k} + \lambda_{jk} \right\| = n.$$

По лемме 10.10 и п. 1 этого доказательства

$$\int_{\partial D} \omega(f, \bar f) = \int \omega(f + g, \overline{f + g}) > 1.$$

Противоречие. □

Доказательство теоремы 10.7 следует из сопоставления теоремы 10.6 и леммы 10.10. □

Доказательство предложения 10.5. Согласно определению кратности изолированного нуля, $\mu_a(f) \geqslant 0$. Отметим, что $\frac{\partial f}{\partial z} \not\equiv 0$, иначе бы не было вообще изолированных нулей (см. п. 2 в доказательстве теоремы 10.6). Найдется точка $z_0 \in U_a$ такая, что $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z_0} \neq 0$ и $|f(z_0)| < \min\limits_{\partial U_a} |f|$. Теперь из предложения 10.4, примененного к отображению $w = f(z) - f(z_0)$, и теоремы 10.7 следует, что $\mu_a(f) \geqslant 1$. Если $\mu_a(f) = 1$, то для любого $\zeta \in B_\varepsilon$, где ε достаточно мало, отображение (10.5) имеет в U_a ровно один нуль, т. е. отображение (10.4) взаимно-однозначно в окрестности точки a. Тогда по теореме Осгуда это отображение биголоморфно в окрестности a и $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_a \neq 0$. □

Выясним геометрический смысл формулы (10.6). Пусть в $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ задана $(n-1)$-мерная замкнутая кусочно-гладкая поверхность (цикл) $S = \{x\colon x = x(t),\ t \in I^{n-1}\}$, $I^{n-1} = \{t\colon t = (t_1, \ldots, t_{n-1}),\ 0 \leqslant t_j \leqslant 1,\ j = 1, \ldots, n-1\}$, $x(t_1, \ldots, \underset{j}{0}, \ldots, t_{n-1}) = x(t_1, \ldots, \underset{j}{1}, \ldots$ $\ldots, t_{n-1})$, $j = 1, \ldots, n-1$.

Индексом поверхности S относительно начала координат называется число

$$J_0(S) = \frac{1}{\Sigma_n} \int\limits_S \frac{1}{|x|^n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x_j dx[j] =$$

$$= \frac{1}{\Sigma_n} \int\limits_{I^{n-1}} \frac{1}{|x(t)|^n} \begin{vmatrix} x_1(t) & \ldots & x_n(t) \\ x'_{11}(t) & \ldots & x'_{n1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x'_{n1}(t) & \ldots & x'_{nn}(t) \end{vmatrix} dt, \qquad (10.14)$$

где $\Sigma_n = \dfrac{n\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ — мера (объем) единичной сферы в $\mathbf{R}^n$. Подынтегральная форма в (10.14) выражает меру проекции элемента поверхности на единичную сферу с центром в нуле (телесный угол, под которым «виден» этот элемент из начала координат). Интеграл (10.14) можно представить в виде

$$\int\limits_{\partial D} \omega(f, \bar f) = \int\limits_\gamma \omega(\zeta, \bar\zeta) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_\gamma \frac{1}{|\zeta|^{2n}} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \bar\zeta_j\, d\bar\zeta[j] \wedge d\zeta =$$

$$= \frac{1}{\Sigma_{2n}} \int\limits_\gamma \frac{1}{|\zeta|^{2n}} \left[\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} u_j du[j] \wedge dv + \sum_{j=1}^n (-1)^{j+n-1} v_j du \wedge dv[j] + \right.$$

$$\left. + i \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} v_j du[j] \wedge dv + \sum_{j=1}^n (-1)^{j+n-1} u_j du \wedge dv[j] \right) \right] = J_0(S),$$

где $\gamma = f(\partial D)$; $\zeta_j = u_j + iv_j$, $j = 1, \ldots, n$; здесь

$$\int\limits_{\gamma} \frac{1}{|\zeta|^{2n}}\left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}v_j du\,[j] \wedge dv + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+n-1}u_j du \wedge dv\,[j]\right) =$$

$$= \int\limits_{\gamma} d\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} du\,[j] \wedge dv\,[j]}{(2n-2)\,|\zeta|^{2n-2}}\right) = 0$$

согласно следствию из формулы Стокса. Таким образом, можно считать обоснованным следующее утверждение.

Теорема 10.11 (Принцип аргумента). *При выполнении условий теоремы* 10.6 *число нулей отображения* (10.4) *в области* D *равно индексу относительно начала координат образа* $f(\partial D)$ *границы области* D *при отображении* (10.4) (*числу «обходов» поверхности* $f(\partial D)$ *вокруг* 0).

Этот факт нетрудно получить и из топологических соображений.

Теорема 10.12 (Южаков — Рус). *Пусть* D — *ограниченная область с кусочно-гладкой границей, отображение* $f \in A^n(\bar{D})$ *и не имеет нулей на* ∂D, *тогда для любой функции* $\varphi \in A_c(D)$ *справедлива формула* *

$$\int\limits_{\partial D} \varphi\omega(f, \bar{f}) = \sum_{a \in E_f} \varphi(a). \tag{10.15}$$

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\varepsilon < \min\limits_{\partial D}|f|$. Почти при всех $\zeta \in B_\varepsilon$ отображение (10.5) имеет в D лишь простые нули и по лемме 10.9

$$\int\limits_{\partial D} \varphi\omega(f-\zeta, \overline{f-\zeta}) = \sum_{a_\zeta \in E_{f-\zeta}} \varphi(a_\zeta). \tag{10.16}$$

Теперь устремим ζ к нулю, при этом (см. п. 1 доказательства теоремы 10.6) нули отображения (10.5) стремятся к нулям отображения (10.4), причем к каждому нулю f стремится столько простых нулей $f - \zeta$, какова его кратность. Переходя в (10.16) к пределу при $\zeta \to 0$, получаем (10.15). □

11. ОСНОВНАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА ЛЕРЕ — КОППЕЛЬМАНА И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

1°. Рассмотрим следующую, важную для дальнейшего, внешнюю дифференциальную форму, зависящую от голоморфного отображения f, непрерывной вектор-функции $w^{(0)}$ и непрерывно-диф-

---

* Напомним, что в формуле (10.15) каждый нуль считается столько раз, какова его кратность.

ференцируемых вектор-функций $w^{(1)}, \ldots, w^{(n-1)}$

$$\Omega\left(w^{(0)}, w^{(1)}, \ldots, w^{(n-1)}, f\right) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \frac{\langle w^{(0)}, df\rangle}{\langle w^{(0)}, f\rangle} \wedge d\frac{\langle w^{(1)}, df\rangle}{\langle w^{(1)}, f\rangle} \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge d\frac{\langle w^{(n-1)}, df\rangle}{\langle w^{(n-1)}, f\rangle}, \qquad (11.1)$$

Теорема 11.1 (Основная интегральная формула). *Пусть D — ограниченная область с кусочно-гладкой границей, отображение $f \in A^n(\bar{D})$ не имеет нулей на ∂D, вектор-функции $w^{(0)} \in C(\partial D)$ и $w^{(j)} \in C^1(\partial D)$, $j = 1, \ldots, n-1$, удовлетворяют условию*

$$\langle w^{(j)}(z), f(z)\rangle \neq 0, \quad z \in \partial D, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad (11.2)$$

Тогда для любой функции $\varphi \in A_C(D)$ имеет место формула

$$\int_{\partial D} \varphi\Omega\left(w^{(0)}, w^{(1)}, \ldots, w^{(n-1)}, f\right) = \sum_{a \in E_f} \varphi(a). \qquad (11.3)$$

Укажем другие формы записи ядра Ω. Обозначим

$$u^{(j)} = \frac{w^{(j)}}{\langle w^{(j)}, f\rangle}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

тогда из (11.1) следует

$$\Omega = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \langle u^{(0)}, df\rangle \wedge d\langle u^{(1)}, df\rangle \wedge \ldots \wedge d\langle u^{(n-1)}, df\rangle, \qquad (11.4)$$

а условие (11.2) переходит в условие

$$\langle u^{(j)}(z, \bar{z}), f(z)\rangle = 1, \quad z \in \partial D, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad (11.5)$$

Далее, из (11.4) находим

$$\Omega = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{(i_1, \ldots, i_{n-1})} \begin{vmatrix} u_1^{(0)} u_{1i_1}^{(1)} \ldots u_{1i_{n-1}}^{(n-1)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ u_n^{(0)} u_{ni_1}^{(1)} \ldots u_{ni_{n-1}}^{(n-1)} \end{vmatrix} d\bar{z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{i_{n-1}} \wedge df, \qquad (11.6)$$

где

$$u_{ji_l}^{(k)} = \frac{\partial u_j^{(k)}}{\partial \bar{z}_{i_l}},$$

суммирование происходит по всевозможным наборам $(i_1, \ldots, i_{n-1})$ чисел, взятых из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Отметим еще, что $\Omega(\bar{f}, \ldots, \bar{f}, f) = \omega(f, \bar{f})$, т. е. формула (10.15) является частным случаем формулы (11.3), при этом условие (11.2) означает, что $|f| \neq 0$ на ∂D.

Для доказательства теоремы 11.1 нам потребуются некоторые простые свойства ядра Ω.

Лемма 11.2. *$\Omega(w^{(0)}, w^{(1)}, \ldots, w^{(n-1)}, f)$ не зависит от вектор-функции $w^{(0)}$.*

Доказательство. Пусть Ω_1 и Ω_2 — две формы вида (11.4), зависящие от $u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots, u^{(n-1)}$ и $v^{(0)}, u^{(1)}, \ldots, u^{(n-1)}$ соответственно. Нужно показать, что $\Omega_1 = \Omega_2$. Обозначим $s^{(0)} = u^{(0)} - v^{(0)}$, тогда

$$\langle s^{(0)}(z, \bar{z}), f(z)\rangle = 0, \quad z \in \partial D. \tag{11.7}$$

Используя представление Ω_1 и Ω_2 в виде (11.6), получим, что форма $\Omega_1 - \Omega_2$ имеет в качестве коэффициентов определители

$$\begin{vmatrix} s_1^{(0)} u_{1i_1}^{(1)} \ldots u_{1i_{n-1}}^{(n-1)} \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ s_n^{(0)} u_{ni_1}^{(1)} \ldots u_{ni_{n-1}}^{(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{11.8}$$

Далее, из (11.5) находим

$$\left\langle \frac{\partial u^{(j)}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}_{i_k}}, f(z) \right\rangle = 0, \quad z \in \partial D, \quad j = 1, \ldots, n-1,$$

отсюда и из (11.7) вытекает обращение в нуль определителей (11.8). □

Лемма 11.3. *Если вектор-функции $w^{(1)}, \ldots, w^{(n-1)}, p^{(1)}, \ldots$ $\ldots, p^{(n-1)}$ входят в класс $C^2(\partial D)$, то разность*

$$\Omega(w^{(0)}, w^{(1)}, \ldots, w^{(n-1)}, f) - \Omega(p^{(0)}, p^{(1)}, \ldots, p^{(n-1)}, f) \tag{11.9}$$

есть $\bar{\partial}$-точная форма.

Доказательство. Разность (11.9) представляется в виде суммы аналогичных разностей форм, у которых отличается только один из аргументов, поэтому достаточно доказать, что $\bar{\partial}$-точна разность $\Omega(w^{(0)}, w^{(1)}, \ldots, w^{(n-1)}, f) - \Omega(w^{(0)}, p^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(n-1)}, f)$. Действительно,

$$\bar{\partial}\left\{\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \frac{\langle w^{(1)}, df\rangle}{\langle w^{(1)}, df\rangle} \wedge \frac{\langle p^{(1)}, df\rangle}{\langle p^{(1)}, f\rangle} \wedge d\frac{\langle w^{(2)}, df\rangle}{\langle w^{(2)}, f\rangle} \wedge \ldots\right.$$

$$\left. \ldots \wedge d\frac{\langle w^{(n-1)}, df\rangle}{\langle w^{(n-1)}, f\rangle}\right\} = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \left\{\left(d\frac{\langle w^{(1)}, df\rangle}{\langle w^{(1)}, f\rangle}\right) \wedge \right.$$

$$\left. \wedge \frac{\langle p^{(1)}, df\rangle}{\langle p^{(1)}, f\rangle} \wedge \ldots - \frac{\langle w^{(1)}, df\rangle}{\langle w^{(1)}, f\rangle} \wedge d\frac{\langle p^{(1)}, df\rangle}{\langle p^{(1)}, f\rangle} \wedge \ldots\right\} =$$

$$= \Omega\left(p^{(1)}, w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(n-1)}, f\right) - \Omega\left(w^{(1)}, p^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(n-1)}, f\right) =$$

$$= \Omega\left(w^{(0)}, w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(n-1)}, f\right) - \Omega\left(w^{(0)}, p^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(n-1)}, f\right),$$

где при переходе к последнему равенству использована лемма 11.2. □

Отметим ближайшие следствия формулы (11.3).

Следствие 11.4 (Лере — Коппельман). *Если* $w^{(0)}, \ldots, w^{(n-1)}$ *удовлетворяет условию*

$$\langle w^{(j)}(z, a), z-a\rangle \neq 0,\ z \in \partial D,\ a \in D,\ j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

то для всякой функции $\varphi \in A_C(D)$ *имеет место обобщенная формула Коши — Фантаппье*

$$\int\limits_{\partial D} \varphi\Omega\left(w^{(0)}, w^{(1)}, \ldots, w^{(n-1)}, z-a\right) = \varphi(a). \tag{11.10}$$

Следствие 11.5 (Лере). *Если вектор-функция* $w \in C^1(\partial D)$ *и* $\langle w(z, a), z-a\rangle \neq 0$, *где* $z \in \partial D$, $a \in D$, *то всякая функция* $\varphi \in A_C(D)$ *представима формулой Коши — Фантаппье*

$$\int\limits_{\partial D} \varphi\omega(z-a, w) = \varphi(a), \tag{11.11}$$

где

$$\omega(z-a, w) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} w_k dw\,[k] \wedge dz}{\langle w, z-a\rangle^n},$$

Доказательство. Из (11.4) получаем, что

$$\Omega(w, \ldots, w, z-a) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} u_k\, du\,[k] \wedge dz,$$

где

$$u = \frac{w}{\langle w, z-a\rangle}. \tag{11.12}$$

Далее, учитывая (11.6), находим

$$\Omega(w, w, \ldots, w, z-a) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} u_1 & u_{11}' \ldots u_{1n}' \\ \ldots & [k] \ldots \\ u_n & u_{n1}' \ldots u_{nn}'\end{vmatrix} d\bar z[k] \wedge$$

$$\wedge\, dz = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n\langle w, z-a\rangle^n}\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} w_1 & w_{11}' \ldots w_{1n}' \\ \ldots & [k] \quad \ldots \\ w_n & w_{n1}' \ldots w_{nn}'\end{vmatrix} d\bar z\,[k] \wedge dz = \omega(z-a, w). \quad \square$$

Заметим, что вектор-функция (11.12) удовлетворяет условию

$$\langle u, z-a\rangle = 1,\ z \in \partial D,\ a \in D. \tag{11.13}$$

Придадим формуле (11.11) более абстрактный вид. Зафиксируем точку $a \in D$ и будем рассматривать в пространстве $\mathbb{C}^{2n}$ комплексных переменных (z, u) поверхность $M_a = \{(z, u)\colon \langle u, z-a\rangle = 1, z \in \partial D\}$.

Следствие 11.6 (Лере). *Пусть вектор-функция* $u(z, a)$, $z \in \partial D$, $a \in D$, *принадлежит по* z *классу* $C^1(\partial D)$ *и удовлетворяет ус-*

ловию (11.13). *Обозначим* α — *цикл на* M_a, *который описывает точка* (z, u), *когда* z *пробегает* ∂D. *Цикл* α *входит в некоторый класс* $h \in H_{2n-1}(M_a)$. *Для любой функции* $\varphi \in A_C(D)$ *и любого цикла* $\beta \in h$ *имеет место формула Коши — Фантаппье*

$$\varphi(a) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\beta} \varphi(z) \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} u_j \, du\,[j] \wedge dz. \qquad (11.14)$$

Доказательство. Заметим, что (11.14) есть (11.11) для $\beta = \alpha$. Для того чтобы получить (11.14) с любым $\beta \in h$ из (11.11), достаточно убедиться в том, что форма $\varphi(z)\omega(z-a, u)$ замкнута на поверхности M_a. Действительно, на M_a среди $dz_1, \ldots, dz_n$, $du_1, \ldots, du_n$ только $2n-1$ независимых дифференциалов, а указанная форма имеет максимальную размерность $2n-1$, поэтому она замкнута. □

Отметим, что формула Коши — Фантаппье (тем более обобщенная формула Коши — Фантаппье) — это есть не одно интегральное представление для функций $\varphi \in A_C(D)$, а целое множество таких представлений, зависящих от выбора вектор-функции w. Для различных классов областей D удается выбрать так w, чтобы выполнялись условия следствия 11.5 и w было голоморфно по a в D. Таким образом, получаются интегральные представления с голоморфными ядрами.

Классическая формула Коши для голоморфных функций одного комплексного переменного

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(z)\,dz}{z-a} \qquad (11.15)$$

обладает двумя замечательными свойствами, вызвавшими большое число ее приложений:

1) она *универсальна*, т. е. верна для любой области D с достаточно хорошей границей ∂D, и ядро Коши $1/2\pi i(z-a)$ не зависит от вида D;

2) ядро Коши голоморфно по $a \in D$ при фиксированном $z \in \partial D$.

Для голоморфных функций многих комплексных переменных нет интегрального представления с двумя аналогичными свойствами, а существуют либо универсальные формулы, но с неголоморфным ядром (например, формула Мартинелли — Бохнера (10.1)), либо неуниверсальные, но обладающие голоморфными ядрами.

Аналогично следствию 11.5 получается следующее утверждение.

Следствие 11.7. *Если область* D *и отображение* f *удовлетворяют условиям теоремы* 11.3 *и вектор-функция* $w \in C^1(\partial D)$ *такова, что* $\langle w, f\rangle \neq 0$ *на* ∂D, *то справедлива для всякой* $\varphi \in A_C(D)$ *формула*

$$\int\limits_{\partial D} \varphi\omega(f, w) = \sum_{a \in E_f} \varphi(a), \qquad (11.16)$$

где

$$\omega(f, w) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} w_j \, dw[j] \wedge df}{\langle w, f \rangle^n}.$$

Заметим в заключение, что формулам (11.3), (11.10) и (11.16) можно придать более абстрактный вид, подобно тому, как формулу (11.11) мы привели к виду (11.14).

2°. При $n = 1$ формула Коши — Фантаппье (11.11) или обобщенная формула Коши — Фантаппье (11.10) превращаются в классическую формулу Коши. Однако для голоморфных функций одного комплексного переменного можно получить и другие интегральные представления, восстанавливающие значения функции в точках $z \in D$ по ее значениям на ∂D, не совпадающие с формулой Коши, например, с помощью конформного отображения.

Пусть $w = \psi(z)$ есть конформное отображение замкнутой области $\bar{D}$ на замкнутую область $\bar{G}$ (здесь $w = w_1$, $z = z_1$). Рассмотрим обратное отображение $z = \theta(w)$, $z \in \bar{D}$, $w \in \bar{G}$. Теперь из классической формулы Коши (11.15) получим

$$f(\theta(w)) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} f(\theta(\eta)) \frac{\theta'(\eta)\, d\eta}{\theta(\eta) - \theta(\eta)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} f(\theta(\eta)) \frac{\theta'(\eta)(\eta - w)}{\theta(\eta) - \theta(w)} \frac{d\eta}{\eta - w}$$

или в других обозначениях

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} f(\zeta) \frac{\varphi(\zeta, z)}{\zeta - z} d\zeta, \tag{11.17}$$

где функция φ непрерывна по совокупности переменных при $z \in D$, $\zeta \in \bar{D}$, голоморфна по ζ в $\bar{D}$ и $\varphi(z, z) \equiv 1$. Формула (11.17) не получается сразу из общих формул (11.10) и (11.11). Естественно обобщить соответствующим образом формулы (11.10) и (11.11).

Предложение 11.8. *Пусть* $w^{(j)}(\zeta, z)$ *удовлетворяют условиям следствия* 11.4, *функция* $\varphi(\zeta, z)$ *при фиксированном* $z \in D$ *принадлежит* $A_c(D)$ *по* ζ *и* $\varphi(z, z) \equiv 1$. *Тогда для всякой* $f \in A_c(D)$ *и любой точки* $z \in D$ *верны модификации формул* (11.10) *и* (11.11):

$$\int\limits_{\partial D} f\varphi\Omega\left(w^{(0)}, w^{(1)}, \ldots, w^{(n-1)}, \zeta - z\right) = f(z), \tag{11.18}$$

$$\int\limits_{\partial D} f\varphi\omega\left(\zeta - z, w^{(1)}\right) = f(z). \tag{11.19}$$

Доказательство. Применяя (11.10) к функции $f(\zeta)\varphi(\zeta, z)$ при фиксированном $z \in D$, получим

$$\int\limits_{\partial D} f\varphi\Omega = f(z)\,\varphi(z, z) = f(z). \quad \square$$

При $n = 1$ формулы (11.18) и (11.19) содержат все возможные интегральные представления — аналоги интеграла Коши. Очевидно, что формула (11.17) содержится в формулах (11.18) и (11.19), которые при $n=1$ имеют вид (11.17), но от функции $\varphi(\zeta, z)$ требуется лишь, чтобы при фиксированном $z \in D$ она входила по ζ в класс $A_C(D)$ и чтобы $\varphi(z, z) \equiv 1$. Пусть теперь дано некоторое интегральное представление для функций $f \in A_C(D)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} f(\zeta) H(\zeta, z)\, d\zeta, \tag{11.20}$$

где ядро $H(\zeta, z)$ по ζ непрерывно на ∂D при фиксированном $z \in D$. Вычитая из (11.20) классическую формулу Коши, получим

$$\int\limits_{\partial D} f(\zeta) \left[H(\zeta, z) - \frac{1}{\zeta - z}\right] d\zeta = 0$$

для всех $f \in A_C(D)$. Отсюда следует (см., например, [134, гл. III; 124, с. 131]), что разность $H(\zeta, z) - (\zeta - z)^{-1}$ продолжается с ∂D в D как функция класса $A_C(D)$, которую обозначим $g(\zeta, z)$. Тогда

$$H(\zeta, z) = \frac{1 + (\zeta - z)\, g(\zeta, z)}{\zeta - z} = \frac{\varphi(\zeta, z)}{\zeta - z},$$

где φ удовлетворяет указанным требованиям. Формула (11.19) и при $n > 1$ обладает известной законченностью.

Предложение 11.9. 1. *При биголоморфном отображении замкнутой области $\overline{D}$ ядро $\varphi\omega(z - a, w^{(1)})$ преобразуется в ядро того же вида.* 2. *Если $n = 2$, функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ принадлежат $A_C(D)$ и $F_1 + F_2 \neq 0$ в D, то воспроизводящее ядро*

$$\frac{F_1 \varphi_1 \omega(z - a, w^{(1)}) + F_2 \varphi_2 \omega(z - a, w^{(2)})}{F_1 + F_2}$$

есть снова ядро того же вида, как и (11.19).

Можно поставить и более общий вопрос об общем виде формулы логарифмического вычета

$$\int\limits_{\partial D} \varphi(\zeta)\, \chi(\zeta) = \sum_{a \in E_f} \varphi(a), \tag{11.21}$$

справедливой для всех $\varphi \in A_C(D)$, отображений $f \in A^n(\overline{D})$ и не имеющих нулей на ∂D; здесь $\chi \in C_{2n-1}(\partial D)$.

Будем рассматривать случай $n > 1$. Выясним, при каких условиях любая форма, удовлетворяющая (11.21), имеет вид $\Omega(w^{(0)}, w^{(1)}, \ldots, w^{(n-1)}, f)$ при подходящих $w^{(0)}, w^{(1)}, \ldots, w^{(n-1)}$. В форму Ω множителем входит произведение $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz$, поэтому если якобиан отображения f вырождается в точке $z^0 \in \partial D$, то и все формы вида (11.1) вырождаются в этой точке. Добавляя $\bar\partial$-точное слагаемое типа $(n, n-1)$ к форме Ω, всегда можно найти χ, удовлетворяющую (11.21) и невырожденную в точке z_0. Поэтому естественным условием на f является следующее: $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ на ∂D.

Любые две формы вида (11.1) для одного и того же отображения f отличаются друг от друга на $\bar\partial$-точное слагаемое (см. лемму 11.3). Отсюда следует, что если любая форма, для которой выполняется (11.21), имеет вид (11.1), то любая форма, ортогональная голоморфным функциям при интегрировании по границе области D, продолжается в D как $\bar\partial$-точная. При $n = 2$ из одного результата Даутова (см. [25, теорема 26.10]) получаем, что D — псевдовыпуклая область. Мы потребуем несколько больше: D — строго псевдовыпуклая.

Теорема 11.10 (Даутов). *Пусть D — строго псевдовыпуклая область в $\mathbf{C}^n$, $n \geqslant 2$, отображение $f \in A^n(\bar D)$, причем $\dfrac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ на ∂D. Тогда любая форма χ степени $2n-1$ на ∂D, удовлетворяющая условию Гёльдера с показателем $\tau > 1/2$ и условию (11.21), имеет вид $\Omega(w^{(0)}, w^{(1)}, \ldots, w^{(n-1)}, f)$ для подходящих вектор-функций $w^{(j)} \in C^1(\partial D)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, если: 1) $n = 2$, либо 2) $n \geqslant 3$ и комплексные касательные к поверхности* $f(\partial D)$ не заходят в начало координат.*

Следствие 11.11 (Даутов). *Пусть D — строго псевдовыпуклая область в $\mathbf{C}^2$ либо строго псевдовыпуклая и линейно-выпуклая область в $\mathbf{C}^n$, $n \geqslant 3$, и $\chi_a(z)$ — форма по $z \in \partial D$ степени $2n-1$, удовлетворяющая условию Гёльдера с показателем $\tau > 1/2$ и такая, что для всех $a \in D$ и для всех $\varphi \in A_C(D)$*

$$\varphi(a) = \int_{\partial D} \varphi(z)\,\chi_a(z).$$

Тогда существует гладкая по $z \in \partial D$ вектор-функция $w_a(z)$, для которой $\langle w_a(z), z - a\rangle \neq 0$ на ∂D и

$$\chi_a(z) = \Omega(\bar z - \bar a, w_a(z), \bar z - \bar a, \ldots, \bar z - \bar a, z - a).$$

Это следствие утверждает, что для указанного класса областей при $n > 1$ любое интегральное представление для голоморфных функций с ядром, удовлетворяющим условию Гёльдера с показателем $\tau > 1/2$, есть обобщенная формула Коши — Фантаппье (формула (11.10)). Доказательства теоремы 11.10 и следствия 11.11 можно найти в [25, § 26].

Отметим еще одно формальное обобщение формулы Коши — Фантаппье (11.11), состоящее в том, что в знаменателе ядра $\omega(z - a, w)$ вместо скалярного произведения $\langle w, \zeta - z\rangle$ рассматривается $\langle w, Q(\zeta) - Q(z)\rangle$, где $Q \in A^n(\bar D)$. По теореме Гефера

$$Q_i(\zeta) - Q_i(z) = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}(\zeta_j - z_j), \quad i = 1, \ldots, n,$$

* $f(\partial D)$ — гладкая поверхность (возможно, с самопересечением), так как ∂D — гладкая и $\dfrac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ на ∂D.

где $q_{ij}(\zeta, z) \in A^n(\bar{D} \times \bar{D})$. Обозначим $\Omega = \det \|q_{ij}\|$. Из (11.11) следует

Предложение 11.12 (Айзенберг). *Для всякой $f \in A_c(D)$ и любой точки $z \in D$ справедлива формула*

$$\int_{\partial D} f\varphi\Omega\tilde{\omega}(Q(\zeta) - Q(z), w) = f(z), \tag{11.22}$$

где

$$\tilde{\omega}(F, w) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} w_j \, dw\,[j] \wedge d\zeta}{\langle w, F \rangle^n}.$$

Хотя формула (11.22) является формально более общей, чем формула Коши — Фантаппье (11.11), но тем не менее каждая из них является простым следствием другой.

3°. Формула Мартинелли — Бохнера (10.1) получается из формулы Коши — Фантаппье (11.11), если взять $w = \bar{\zeta} - \bar{z}$.

4°. Область $D = \{z: \rho(z, \bar{z}) < 0\}$ называют *регулярной линейно-выпуклой*, если действительная функция ρ принадлежит классу C^2 в окрестности $\bar{D}$, причем $\operatorname{grad} \rho \neq 0$ на ∂D и для всякой $\zeta \in \partial D$ касательная аналитическая плоскость $\{z: \langle z - \zeta, \operatorname{grad} \rho(\zeta) \rangle = 0\}$ не пересекает D. Для такой области в качестве w в формуле (11.11) можно рассмотреть $\operatorname{grad} \rho$, в этом случае для $f \in A_c(D)$ получаем

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta) \sum_{j=1}^{n} \delta_j \, d\bar{\zeta}\,[j] \wedge d\zeta}{\left[(\zeta_1 - z_1)\rho'_{\zeta_1} + \ldots + (\zeta_n - z_n)\rho'_{\zeta_n}\right]^n}, \tag{11.23}$$

где

$$\delta_j = \begin{vmatrix} \rho'_{\zeta_1} & \ldots & \rho'_{\zeta_n} \\ \rho''_{\zeta_1\bar{\zeta}_1} & \ldots & \rho''_{\zeta_n\bar{\zeta}_1} \\ \ldots & [j] & \ldots \\ \rho''_{\zeta_1\bar{\zeta}_n} & \ldots & \rho''_{\zeta_n\bar{\zeta}_n} \end{vmatrix}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

В (11.23) так же, как в формуле Коши при $n = 1$, внешнее переменное z входит только в знаменатель ядра, и этот знаменатель является линейной функцией от z, взятой в степени n. Такая хорошая структура ядра повлекла за собой ряд красивых приложений формулы (11.23).

Представим ∂D в виде объединения непересекающихся множеств Γ_m, $m = 1, \ldots, n$, так, чтобы $\rho'_{\bar{\zeta}_m} \neq 0$ на Γ_m. При этом на Γ_m

$$d\bar{\zeta}\,[j] \wedge d\zeta = (-1)^{m-1} \frac{\rho'_{\bar{\zeta}_j}}{\rho'_{\bar{\zeta}_m}} d\bar{\zeta}\,[m] \wedge d\zeta,$$

поэтому формулу (11.23) можно записать в виде

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \int\limits_{\Gamma_m} \frac{f(\zeta)\, L(\rho)\, d\bar{\zeta}[m] \wedge d\zeta}{\rho'_{\bar{\zeta}_m} \langle \operatorname{grad} \rho(\zeta), \zeta - z\rangle^n}, \qquad (11.24)$$

где $L(\rho)$ — *определитель Леви*:

$$L(\rho) = -\begin{vmatrix} 0 & \rho'_{\zeta_1} & \dots & \rho'_{\zeta_n} \\ \rho'_{\bar{\zeta}_1} & \rho''_{\zeta_1\bar{\zeta}_1} & \dots & \rho''_{\zeta_n\bar{\zeta}_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho'_{\bar{\zeta}_n} & \rho''_{\zeta_1\bar{\zeta}_n} & \dots & \rho''_{\zeta_n\bar{\zeta}_n} \end{vmatrix}.$$

Точка $\zeta \in \partial D$ называется *точкой строгой псевдовыпуклости*, если форма Леви

$$\sum_{j,i=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(\zeta)}{\partial \zeta_j \partial \bar{\zeta}_i} \eta_j \bar{\eta}_i$$

положительна для всех таких η, что

$$\left\{\eta : \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial \zeta_j} \eta_j = 0\right\}. \qquad (11.25)$$

Предложение 11.13. *Определитель Леви $L(\rho)$ равен произведению собственных чисел формы Леви на гиперплоскости* (11.25), *умноженному на* $|\operatorname{grad} \rho(\zeta)|^2$.

Из этого предложения следует, что интегрирование в формуле (11.23) производится по замыканию множества точек строгой псевдовыпуклости ∂D. Из теоремы 14.10 вытекает, что указанное замыкание в рассматриваемом случае регулярной линейно-выпуклой области D содержит границу Шилова $S(D)$. В этом утверждении требование линейной выпуклости D можно отбросить, а именно, верна следующая

Теорема 11.14 (Росси — Базнер). *Пусть D — ограниченная область, $\partial D \in C^2$. Тогда $S(D)$ содержится в замыкании строго псевдовыпуклых точек ∂D.*

Отметим, что всякая регулярная выпуклая область является и регулярной линейно-выпуклой, поэтому для нее верно интегральное представление (11.23). В частности, для эллипсоида $D = \{z\colon \alpha_1|z_1|^2 + \ldots + \alpha_n|z_n|^2 < R^2\}$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, получаем

$$f(z) = \frac{\alpha_1 \ldots \alpha_n (n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta) \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \bar{\zeta}_j\, d\bar{\zeta}[j] \wedge d\zeta}{\left[R^2 - \alpha_1 \bar{\zeta}_j z_1 - \ldots - \alpha_n \bar{\zeta}_n z_n\right]^n}. \qquad (11.26)$$

Формула (11.26) при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = R = 1$ называется формулой

Бохнера для функций, голоморфных в единичном шаре. Ядро в (11.26) голоморфно по z и антиголоморфно по ζ (т. е. голоморфно по $\bar{\zeta}$). Такие воспроизводящие ядра при интегрировании по ∂D называются *ядрами Сеге* (см. разд. 14).

В следующем разделе мы осветим и некоторые другие следствия интегрального представления Коши — Фантаппье.

12. КРАТНАЯ ФОРМУЛА КОШИ, ФОРМУЛА БЕРГМАНА — ВЕЙЛЯ, ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ СТРОГО ПСЕВДОВЫПУКЛОЙ И n-КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ

1°. Пусть $D_i \Subset \mathbf{C}^1_{z_i}$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей, $i = 1, \ldots, n$; область $D = D_1 \times \ldots \times D_n \subset \mathbf{C}^n$ называется *полицилиндрической областью* (в частности, *поликругом* или *полидиском*, если все D_i — круги). Множество $\Gamma = \partial D_1 \times \ldots \times \partial D_n$, снабженное естественной ориентацией, индуцированной ориентацией области D, назовем *остовом области* D.

Теорема 12.1. *Пусть D — полицилиндрическая область, z — любая точка D, функция $f \in A_c(D)$, тогда справедлива формула Коши*

$$f(a) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)\, dz}{z - a}. \qquad (12.1)$$

Заметим, что в формуле Коши (12.1) остов Γ играет ту же роль, какую играет вся граница области в классической формуле Коши при $n = 1$. Из наличия интегрального представления по остову следует, что для функций из $A_c(D)$ справедлив относительно остова принцип максимума модуля (см. теорему 14.10).

Кратная формула Коши (12.1) является примером формулы с голоморфным ядром, но неуниверсальной (верна только для полицилиндрических областей).

Доказательство. Формулу (12.1) легко получить повторным применением классической формулы Коши для $n = 1$, однако мы приведем другое доказательство, показав, что (12.1) вытекает из формулы Коши — Фантаппье (11.14) при подходящем выборе цикла интегрирования β. Этот же способ нам потребуется далее при выводе формулы Вейля.

Представим ∂D в виде $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \gamma_i$, где $\gamma_i = \{z\colon z \in \bar{D},\ z_i \in \partial D_i\}$. Над каждой гранью γ_i рассмотрим вектор-функцию $u^{(i)} = \left(u_1^{(i)}, \ldots, u_n^{(i)}\right)$, где $u_j^{(i)} = \delta_{ij}(z_i - a_i)^{-1}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Очевидно, $u^{(i)}$ удовлетворяют условию (11.13). Теперь рассмотрим в пространстве $\mathbf{C}^{2n}$ ориентированную поверхность $\beta_i = \{(z, u^{(i)}),\ z \in \gamma_i\}$, $i = 1, \ldots, n$.

Объединение $\bigcup_{i=1}^{n} \beta_i$ не является циклом, так как над каждой гранью γ_i вектор функция $u^{(i)}$ своя. В то же время ∂D — цикл и множество $\{(z, u): z \in \partial D\}$ также было бы циклом, если бы u была непрерывной по $z \in \partial D$.

В множестве $\bigcup_{i=1}^{n} \beta_i$ имеются «дырки», расположенные над теми точками, где пересекаются грани γ_i, т. е. над ребрами. Эти «дырки» мы «заклеим» следующим образом: если к ребру $\gamma_{i_1 \ldots i_j}$ сходится j граней $\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_j}$, то над таким ребром построим множество $\beta_{i_1 \ldots i_j} = \left\{(z, u): z \in \gamma_{i_1 \ldots i_j}, \quad u = \sum_{l=1}^{i} \lambda_l u^{(i_l)}, \quad \lambda_l \geqslant 0, \sum_{l=1}^{j} \lambda_l = 1\right\}$. Все поверхности $\beta_{i_1 \ldots i_j}$ добавим к $\bigcup_{i=1}^{n} \beta_i$; полученная (ориентированная) поверхность β является циклом. К β применим формулу (11.14). Заметим, что все $u^{(i)}$ голоморфны по z, поэтому $du^{(i)}[j] \wedge dz = 0$, $i, j = 1, \ldots, n$, значит, интеграл (11.14) по каждому β_i равен нулю. Если $j < n$, то на $\beta_{i_1 \ldots i_j}$ все $du[k] \wedge dz = 0$, так как u голоморфно зависит от z и от $(j-1)$ независимого параметра λ, т. е. всего есть $n + j - 1 < 2n - 1$ независимых дифференциалов. Поэтому интеграл (11.14) по $\beta_{i_1, \ldots i_j}$ тоже равен нулю. Осталось вычислить этот интеграл по $\beta_{i_1 \ldots i_n}$.

На $\Gamma = \gamma_{1 \ldots n}$ компоненты u_j вектор-функции u имеют вид

$$u_j = \sum_{l=1}^{n} \lambda_l u_j^{(l)} = \frac{\lambda_j}{z_j - a_j}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

следовательно,

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\beta_{1 \ldots n}} f(z) \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} u_j \, du[j] \wedge dz =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} f(z) \frac{dz}{z-a} \int_{\substack{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1 \\ \lambda_i \geqslant 0}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \lambda_j \, d\lambda[j] = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-a},$$

где мы использовали элементарное равенство

$$\int_{\substack{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1 \\ \lambda_i \geqslant 0}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \lambda_j \, d\lambda[j] = \frac{1}{(n-1)!}. \qquad (12.2)$$

Чтобы убедиться в правильности (12.2), достаточно заметить, что левая часть в (12.2) по формуле Стокса равна

$$n \int\limits_{\substack{\lambda_1+\ldots+\lambda_n<1 \\ \lambda_i \geqslant 0}} d\lambda = \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}. \quad \square$$

Следствие 12.2. *При условиях теоремы* 12.1

$$D^{\alpha} f(a) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)\, dz}{(z-a)^{\alpha+1}}.$$

2°. Пусть в области $D \subset \mathbf{C}^n$ задан набор голоморфных функций $\chi_1(z), \ldots, \chi_N(z)$, $N \geqslant n$, и набор плоских областей $D_1, \ldots, D_N$, причем $D_i \subset \chi_i(D)$, $i = 1, \ldots, N$. Множество $\tilde{\Delta} = \{z\colon z \in D,\ \chi_i(z) \in D_i,\ i = 1, \ldots, N\}$ называется *аналитическим полиэдром.* Связная компонента аналитического полиэдра называется *полиэдром Вейля*, если границы ∂D_i кусочно-гладкие и пересечение j граней $\gamma_i = \{z\colon z \in D,\ \chi_i \in \partial D_i,\ \chi_k \in D_k,\ k \neq i\}$ имело размерность не более $2n - j$ (чтобы грани пересекались в общем положении). Обозначим $\gamma_{i_1 \ldots i_n} = \bigcap\limits_{j=1}^{n} \gamma_{i_j}$. Эти n-мерные ребра мы снабдим естественной ориентацией, определяемой порядком граней $\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_n}$. Объединение всех таких n-мерных ребер назовем *остовом полиэдра* $\tilde{\Delta}$ и обозначим σ. По теореме Гефера

$$\chi_i(\zeta) - \chi_i(z) = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}(\zeta_j - z_j), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Определитель $\det \|q_{ij}\|$, $i = i_1, \ldots, i_n$; $j = 1, \ldots, n$, обозначим $\Omega_{i_1 \ldots i_n}$.

Теорема 12.3 (Вейль). *Пусть $\tilde{\Delta}$ — полиэдр Вейля и $f \in A_c(D)$, тогда для $z \in \tilde{\Delta}$ верна формула*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{i_1 < \ldots < i_n} \int\limits_{\gamma_{i_1 \ldots i_n}} \frac{f(\zeta)\, \Omega_{i_1 \ldots i_n}(\zeta, z)\, d\zeta}{\prod\limits_{j=1}^{n} \left[\chi_{i_j}(\zeta) - \chi_{i_j}(z)\right]}. \tag{12.3}$$

Формула (12.3) называется *интегральным представлением Бергмана — Вейля.* Она обобщает интегральную формулу Коши (12.1) для полицилиндрических областей и превращается в нее, если $N = n$, $\chi_i = z_i$, $i = 1, \ldots, n$. Формула (12.3) восстанавливает значения голоморфной функции f в $\tilde{\Delta}$ по ее значениям на n-мерном остове σ и имеет голоморфное по z ядро, причем вид ядра зависит от области.

Доказательство в основном повторяет доказательство теоремы 12.1. Над каждой гранью γ_i рассмотрим вектор-функцию

$u^{(i)} = \left(u_1^{(i)}, \ldots, u_n^{(i)}\right)$, где

$$u_k^{(i)} = q_{ik} \Big| \sum_{j=1}^{n} q_{ij} (\zeta_j - z_j),$$

над каждым ребром $\gamma_{i_1 \ldots i_n}$ множество $\beta_{i_1 \ldots i_n} = \Big\{(\zeta, u)\colon \quad \zeta \in \gamma_{i_1 \ldots i_n}$, $u = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j u^{(i_j)},\ \lambda_j \geqslant 0,\ \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j = 1\Big\}$. Так же, как при доказательстве теоремы 12.1, устанавливается, что

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{i_1 < \ldots < i_n} \int\limits_{\beta_{i_1 \ldots i_n}} f(\zeta) \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} u_j \, du\,[j] \wedge d\zeta =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{i_1 < \ldots < i_n} \int\limits_{\gamma_{i_1 \ldots i_n}} \frac{f(\zeta)\, \Omega_{i_1 \ldots i_n}(\zeta, z)\, d\zeta}{\prod\limits_{j=1}^{n} \left[\chi_{i_j}(\zeta) - \chi_{i_j}(z)\right]} \times$$

$$\times \int\limits_{\substack{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1 \\ \lambda_i \geqslant 0}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \lambda_j \, d\lambda\,[j] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{i_1 < \ldots < i_n} \int\limits_{\gamma_{i_1 \ldots i_n}} \frac{f(\zeta)\, \Omega_{i_1 \ldots i_n}(\zeta, z)\, d\zeta}{\prod\limits_{j=1}^{n} \left[\chi_{i_j}(\zeta) - \chi_{i_j}(z)\right]}.$$

Для простоты проделаем указанные вычисления для $n = 2$:

$$\int\limits_{\beta_{i_1 i_2}} f(\zeta)(u_1\, du_2 - u_2\, du_1) \wedge d\zeta = \int\limits_0^1 d\lambda_1 \int\limits_{\gamma_{i_1 i_2}} f(\zeta) \times$$

$$\times \Big[\left(\lambda_1 u_1^{(i_1)} + (1-\lambda_1) u_1^{(i_2)}\right)\left(u_2^{(i_1)} - u_2^{(i_2)}\right) - \left(\lambda_1 u_2^{(i_1)} - (1-\lambda_1) u_2^{(i_2)}\right) \times$$

$$\times \left(u_1^{(i_1)} - u_1^{(i_2)}\right)\Big] d\zeta = \int\limits_0^1 d\lambda_1 \int\limits_{\gamma_{i_1 i_2}} f(\zeta)\left(-u_1^{(i_1)} u_2^{(i_2)} + u_1^{(i_2)} u_2^{(i_1)}\right) d\zeta =$$

$$= \int\limits_{\gamma_{i_1 i_2}} \frac{f(\zeta)\, \Omega_{i_1 i_2}(\zeta, z)\, d\zeta}{\prod\limits_{j=1}^{2} \left[\chi_{i_j}(\zeta) - \chi_{i_j}(z)\right]}. \ \square$$

3°. Строго псевдовыпуклые области играют важную роль в многомерном комплексном анализе. Этими областями (так же, как и полиэдрами Вейля) можно аппроксимировать изнутри всякую область голоморфности. Для того чтобы получить из формулы Коши —

Фантаппье интегральное представление функций, голоморфных в строго псевдовыпуклых областях, нам потребуются некоторые вспомогательные предложения. Обозначим $D_\delta = \{z\colon\ z \in Q,\ \rho(z) < \delta\}$, где $D = \{z\colon\ z \in Q,\ \rho(z) < 0\}$, $\bar{D} \subset Q$, $\rho \in C^2(Q)$, $\operatorname{grad}\rho \neq 0$ на ∂D и функция ρ строго плюрисубгармонична в Q; далее $V_\delta = \{z\colon\ z \in Q,\ |\rho(z)| < \delta\}$, $U_{\varepsilon,\delta} = \{(\zeta,\ z)\colon\ \zeta \in V_\delta,\ z \in D_\delta,\ |\zeta - z| < \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$. Пусть $C^1(V_\delta,\ H)$ — пространство функций класса C^1 в V_δ со значениями в пространстве H.

Лемма 12.4. *Для всякой строго псевдовыпуклой области D существуют положительные постоянные ε, δ, σ и функции $F \in C^1(U_{\varepsilon,\delta})$, $G \in C^1(U_{\varepsilon,\delta})$, $\Phi \in C^1(V_\delta,\ A(D_\delta))$ такие, что:*

1) $\Phi = FG$ *на* $U_{\varepsilon,\delta}$; $F(z,\ z) = 0$; $|G| > \delta$ *на* $U_{\varepsilon,\delta}$; $|\Phi| > \delta$ *вне* $U_{\varepsilon,\delta}$;

2) *на* $U_{\varepsilon,\delta}$ *имеет место неравенство*

$$2\operatorname{Re} F(\zeta,\ z) \geqslant \rho(\zeta) - \rho(z) + \sigma|\zeta - z|^2;$$

3) $d_\zeta F(\zeta,\ z)|_{\zeta=z} = -d_z F(\zeta,\ z)|_{\zeta=z} = \partial\rho(z)$.

Доказательство. Пусть вначале область D строго выпукла, точнее, пусть функция ρ строго выпукла в Q, тогда введем

$$\Phi = F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\rho(\zeta)}{\partial\zeta_i}(\zeta_i - z_i).$$

Из формулы Тейлора следует, что существует $\sigma > 0$ такая, что для $\zeta \in D_{\delta'}$, $z \in D_{\delta'}$ имеет место неравенство $2\operatorname{Re} F(\zeta,\ z) \geqslant \rho(\zeta) - \rho(z) + \sigma|\zeta - z|^2$ и в этом случае утверждения леммы справедливы.

В общем случае для всякой точки $\tilde{\zeta} \in \partial D$ существует (см. лемму 12.5) такое биголоморфное отображение $w(z,\ \tilde{\zeta})$ некоторой окрестности $\tilde{U}_{\tilde{\zeta}}$ точки $\tilde{\zeta}$ на некоторую окрестность нуля B в пространстве $\mathbb{C}^n_w$, что обратное отображение $z(w,\ \tilde{\zeta})$ переводит строго плюрисубгармоническую функцию $\rho(z)$ в строго выпуклую функцию $\rho_{\tilde{\zeta}}(w) = \rho\big(z(w, \tilde{\zeta})\big)$переменного w в области B. По формуле Тейлора существуют $\tilde{\varepsilon}' > 0$, $\tilde{\sigma}' > 0$ такие, что для $|w'| < \tilde{\varepsilon}'$, $|w - w'| < \tilde{\varepsilon}'$

$$2\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\rho_{\tilde{\zeta}}(w')}{\partial w_j}(w'_j - w_j) \geqslant \rho_{\tilde{\zeta}}(w') - \rho_{\tilde{\zeta}}(w) + \tilde{\sigma}'\,|w' - w|^2,$$

поэтому существуют такие $\varepsilon' > 0$, $\sigma' > 0$, что

$$2\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\rho_{\tilde{\zeta}}(w(\zeta, \tilde{\zeta}))}{\partial w_j}\left[w_j(\zeta, \tilde{\zeta}) - w_j(z, \tilde{\zeta})\right] \geqslant$$
$$\geqslant \rho(\zeta) - \rho(z) + \sigma'\,|\zeta - z|^2, \tag{12.4}$$

если $|\zeta-\tilde{\zeta}|<\varepsilon'$, $|\zeta-z|<\varepsilon'$. Обозначим

$$F_{\tilde{\zeta}}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\rho_{\tilde{\zeta}}(w(\zeta,\tilde{\zeta})}{\partial w_j}[w_j(\zeta,\tilde{\zeta})-w_j(z,\tilde{\zeta})]=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\rho(\zeta)}{\partial\zeta_j}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial z_j(w(\zeta,\tilde{\zeta}))}{\partial w_i}[w_i(\zeta,\tilde{\zeta})-w_i(z,(z,\tilde{\zeta})]\right]. \qquad (12.5)$$

Здесь $|\zeta-\tilde{\zeta}|<\varepsilon'$, $|\zeta-z|<\varepsilon'$. Рассмотрим такие точки $\tilde{\zeta}^1,\ldots,\tilde{\zeta}^N$ на ∂D, чтобы

$$\partial D=\bigcup_{j=1}^{N}B_{\varepsilon_j'}(\tilde{\zeta}^j).$$

Пусть функции $\{\varphi_i\}_{i=1,\ldots,N}$ образуют разбиение единицы в $V_{\delta'}$ и носитель φ_i содержится в $B_{\varepsilon_j'}(\tilde{\zeta}^j)$. Обозначим

$$F(\zeta,z)=\sum_{j=1}^{n}F_{\tilde{\zeta}^j}(\zeta,z)\,\varphi_j(\zeta), \qquad (12.6)$$

где $\zeta\in V_{\delta'}$, $|\zeta-z|<2\varepsilon=\min\limits_j\varepsilon_j'$.

Теперь из (12.4)—(12.6) получаем

$$2\operatorname{Re}F(\zeta,z)\geqslant\rho(\zeta)-\rho(z)+\sigma|\zeta-z|^2,\ (\zeta,z)\in U_{2\varepsilon,\delta}. \qquad (12.7)$$

Здесь $\sigma=\min\limits_j\sigma_j'$. Тем самым доказано утверждение 2), утверждение 3) проверяется непосредственно.

При малых $\delta'>0$ из (12.7) следует, что при $\zeta\in V_{\delta'}$, $z\in D_{\delta'}$, $\varepsilon<|\zeta-z|<2\zeta$

$$\operatorname{Re}F(\zeta,z)>0. \qquad (12.8)$$

Зафиксируем непрерывную однозначную ветвь $\ln F$ в области $\{F\colon \operatorname{Re}F>0\}$ и рассмотрим вещественнозначную финитную функцию $\chi(z)$ класса C^∞ с носителем в шаре $\overline{B_{2\varepsilon}(0)}$, причем $\chi(z)=1$ в $\overline{B_\varepsilon(0)}$. Введем внешнюю дифференциальную форму $A(\zeta,z)$ типа $(0,1)$, гладко зависящую от параметра $\zeta\in V_{\delta'}$:

$$A(\zeta,z)=\begin{cases}\bar{\partial}_z[\chi(\zeta-z)\ln F], & \text{если } z\in\operatorname{supp}\operatorname{grad}_z\chi(\zeta-z),\\ 0, & \text{если } z\notin\operatorname{supp}\operatorname{grad}_z\chi(\zeta-z).\end{cases} \qquad (12.9)$$

Форма $A(\zeta,z)\in C^1(V_\delta, C(\bar{D}_\delta))$, где $0<\delta<\delta'$, поэтому из известных результатов о решении $\bar{\partial}$-задачи (см., например, [34, теорема 25.3]) следует существование функции $B(\zeta,z)\in C^1(V_\delta, C(\bar{D}_\delta))$ такой, что

$$\bar{\partial}_zB(\zeta,z)=A(\zeta,z). \qquad (12.10)$$

Положим

$$\Phi(\zeta,z)=\begin{cases}F(\zeta,z)\exp[-B(\zeta,z)] & \text{при } \zeta\in V_\delta, z\in D_\delta, |\zeta-z|\leqslant\varepsilon,\\ \exp[\chi(\zeta-z)\ln F-B(\zeta,z)] & \text{при } \zeta\in V_\delta, z\in D_\delta, |\zeta-z|\geqslant\varepsilon.\end{cases} \qquad (12.11)$$

Это определение корректно, так как при $|\zeta - z| = \varepsilon$ справедливо $F \exp[-B(\zeta, z)] = \exp[\ln F - B(\zeta, z)]$. Теперь из (12.9)—(12.11) вытекает утверждение 1) леммы. □

Лемма 12.5. *Пусть $D = \{z\colon z \in Q, \rho(z) < 0\}$ — строго псевдовыпуклая область. Для любой точки $\tilde{\zeta} \in \partial D$ существует такое биголоморфное отображение некоторой окрестности $\widetilde{U}_{\tilde{\zeta}}$ точки $\tilde{\zeta}$ на некоторую окрестность нуля в пространстве $\mathbb{C}^n_w$, что при этом отображении область $D \cap \widetilde{U}_{\tilde{\zeta}}$ биголоморфно эквивалентна выпуклой области в $\mathbb{C}^n_w$, а обратное отображение переводит строго плюрисубгармоническую функцию $\rho(z)$ в строго выпуклую функцию.*

Доказательство. Параллельным переносом можно добиться, чтобы точка $\tilde{\zeta}$ была нулем, тогда в некоторой окрестности нуля

$$\rho(z) = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\rho(0)}{\partial z_j} z_j + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\rho(0)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} z_i \bar{z}_j + \mathrm{Re}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\rho(0)}{\partial z_i \partial z_j} z_i z_j + o(|z|^2).$$

По теореме о неявной функции в меньшей окрестности нуля за локальные координаты можно принять функцию

$$w_1(z) = 2\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\rho(0)}{\partial z_j} z_j + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\rho(0)}{\partial z_i \partial z_j} z_i z_j$$

и любые линейные функции $w_2, \ldots, w_n$, являющиеся координатами в гиперплоскости $\left\{z\colon \frac{\partial\rho(0)}{\partial z_1} z_1 + \ldots + \frac{\partial\rho(0)}{\partial z_n} z_n = 0\right\}$. Строгая псевдовыпуклость в точке 0 теперь означает, что

$$\sum_{j,i=1}^{n} a_{ji}\xi_j\bar{\xi}_i \geqslant \gamma\,|\xi|^2,$$

где $\gamma > 0$; $a_{ji} = \dfrac{\partial^2\rho(0)}{\partial w_j \partial \bar{w}_i}$. В новых локальных координатах

$$\rho = x_1 + \sum_{j,i=1}^{n} a_{ji} w_j \bar{w}_i + o(|w|^2). \tag{12.12}$$

Здесь $x_1 = \mathrm{Re}\, w_1$. Функция (12.12) строго выпукла в координатах w. Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то $B_\varepsilon(0) \cap D$ — выпуклая область в координатах w, где $B_\varepsilon(0) = \{w\colon |w| < \varepsilon\}$. □

Лемма 12.6. *При условиях леммы 12.4*

$$\Phi(\zeta, z) = \sum_{i=1}^{n} P_i(\zeta, z)(\zeta_i - z_i),$$

где $P_i(\zeta, z) \in C^1(V_\delta, A(D_\delta))$, $i = 1, \ldots, n$, $\zeta \in V_\delta$, $z \in D_\delta$.

Доказательство. Обозначим $C(\zeta, z, w) = \Phi(\zeta, z) - \Phi(\zeta, w)$, $C(\zeta, z, w) \in C^1(V_\delta, A(D_\delta \times D_\delta))$. При фиксированном $\zeta \in V_\delta$ функция C входит в идеал J голоморфных функций, равных нулю на множестве $\{(z, w): z \in D_\delta, w \in D_\delta, z = w\}$. По теореме Гефера идеал J имеет образующие $w_1 - z_1, \ldots, w_n - z_n$, и разложение $C(\zeta, z, w)$ по этим образующим можно сделать непрерывно дифференцируемым по параметру ζ (см. [34, теорема 25.2′]), т. е. существуют $Q_i(\zeta, z, w) \in C^1(V_\delta, A(D_\delta \times D_\delta))$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что

$$C(\zeta, z, w) = \sum_{i=1}^{n} Q_i(\zeta, z, w)(w_i - z_i).$$

Отметим, что $F(\zeta, \zeta) = 0$, значит, и $\Phi(\zeta, \zeta) = 0$ (см. доказательство леммы 12.4), поэтому

$$\Phi(\zeta, z) = C(\zeta, z, \zeta) = \sum_{i=1}^{n} P_i(\zeta, z)(\zeta_i - z_i),$$

где $P_i(\zeta, z) = Q_i(\zeta, z, \zeta)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. □

Используя вектор-функцию $P = P(\zeta, z) = (P_1(\zeta, z), \ldots, P_n(\zeta, z))$, существование которой доказано в лемме 12.6, теперь из формулы Коши — Фантаппье получаем следующее утверждение.

Теорема 12.7 (Хенкин — Рамирез). *При условии леммы 12.4 для всякой $f \in A_C(D)$ и любой точки $z \in D$ имеет место формула*

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta)\, \omega(\zeta - z, P(\zeta, z)). \tag{12.13}$$

Ядро в интегральном представлении (12.13) не выписано явно, однако оценки из леммы 12.4 позволяют получить информацию об особенностях этого ядра, что оказалось достаточным для многочисленных важных приложений (см. обзор [163]).

4°. Пусть D — полная ограниченная n-круговая область с центром в нуле (какая-либо гладкость ∂D не предполагается), M — множество векторов k с целыми неотрицательными взаимно простыми координатами. Для каждого $k \in M$ возьмем точку $\zeta(k)$, в которой достигает максимума на ∂D моном $|\zeta^k|$ (такую точку можно выбрать не единственным способом, возьмем одну из них). Соответствующий остов $\Delta_{\zeta(k)} = \{z: |z_i| = |\zeta_i(k)|, i = 1, \ldots, n\}$ обозначим просто $\Delta(k)$. Наконец, рассмотрим любой остов, входящий в ∂D, и обозначим его $\Delta(0)$.

Теорема (Леу — Айзенберг — Гиндикин). *Для всякой $f \in A_C(D)$ справедливо интегральное представление: при $z \in D$*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\left[\int_{\Delta(0)} f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} + \sum_{k \in M} z^k \int_{\Delta(k)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^k - z^k}\frac{d\zeta}{\zeta}\right], \tag{12.14}$$

ряд в (12.14) сходится абсолютно и равномерно на каждом компакте в D.

Доказательство. Можно считать, что $f \in A(\overline{D})$, так как вместо D можно рассмотреть гомотетию D_r, $0 < r < 1$, а затем сделать предельный переход при $r \to 1$. Представим $f(z)$ в D степенным рядом

$$f(z) = \sum_k c_k z^k = c_0 + \sum_{k \in M} \sum_{j=1}^{\infty} z^{kj} c_{kj} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \left[\int\limits_{\Delta(0)} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + \sum_{k \in M} \sum_{j=1}^{\infty} z^{kj} \int\limits_{\Delta(k)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{kj}} \frac{d\zeta}{\zeta} \right] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \left[\int\limits_{\Delta(0)} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + \sum_{k \in M} \int\limits_{\Delta(k)} \frac{f(\zeta)\, z^k}{\zeta^k - z^k} \frac{d\zeta}{\zeta} \right],$$

где $k_j = (k_1 j, \ldots, k_n j)$ и

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{z^k}{\zeta^k} \right)^j = \frac{\zeta^k}{\zeta^k - z^k},$$

так как $|z^k| < |\zeta^k|$ при $z \in D$, $\zeta \in \Delta(k)$. □

Отметим, что формула (12.14) универсальна для рассматриваемого класса областей.

5°. Пусть область $D = D_1 \times \ldots \times D_n$ — такая, как в 1°. Функции $\psi_j(z_j)$ голоморфны соответственно на $\overline{D}_j$ и не имеют нулей на ∂D_j, $j = 1, \ldots, n$.

Предложение 12.9. *Пусть $D \in H$, а $f \in H^1(D)$, тогда справедлива следующая формула логарифмического вычета:*

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} f(z) \frac{d\psi(z)}{\psi(z)} = \sum_{a \in E\psi} f(a), \tag{12.15}$$

где в правой части формулы (12.15) каждый нуль вектор-функции $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ считается столько раз, какова его кратность.

Формула (12.15) сразу получается n-кратным применением формулы логарифмического вычета из теории функций одного комплексного переменного. Здесь использован специальный вид ψ, у которой каждая координата есть функция одного переменного. Для произвольной голоморфной вектор-функции ψ формула (12.15), вообще говоря, неверна (см. [171]).

13. ФОРМУЛА АНДРЕОТТИ — НОРГЕ И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ

1°. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где все α_i — целые неотрицательные числа. Обозначим $\langle w, f^{(\alpha)} \rangle = w_1 f_1^{\alpha_1} + \ldots + w_n f_n^{\alpha_n}$. Здесь $w = (w_1, \ldots, w_n)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$; далее,

$$\omega_\alpha(f, w) = \frac{(n-1)!\,\alpha!}{(2\pi i)^n} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} w_j\, dw[j] \wedge df}{\langle w, f^{(\alpha+1)} \rangle^n}.$$

Теорема 13.1 (Андреотти — Норге). *Пусть функция $\varphi \in A_c(D)$, где D — ограниченная область с кусочно-гладкой границей, тогда для всякой точки $z \in D$ и любого α*

$$\int_{\partial D} \varphi(\zeta)\, \omega_\alpha\left(\zeta - z, (\bar\zeta - \bar z)^{\alpha+1}\right) = D^\alpha \varphi(z). \tag{13.1}$$

Отметим, что ядро в формуле (13.1) имеет вид

$$\frac{(n-1)!\,\alpha!}{(2\pi i)^n} \frac{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \left(\bar\zeta_j - \bar z_j\right)^{\alpha_j+1} d(\bar\zeta - \bar z)^{\alpha+1}[j] \wedge d\zeta}{\left(|\zeta_1 - z_1|^{2(\alpha_1+1)} + \ldots + |\zeta_n - z_n|^{2(\alpha_n+1)}\right)^n}.$$

Формула Андреотти — Норге (13.1) обобщает формулу Мартинелли — Бохнера (10.1) на случай, когда речь идет о вычислении не значения голоморфной функции в заданной точке, а значения любой ее производной. При $\alpha = 0$ из (13.1) получается (10.1). Заметим, что при $n > 1$ ядро ω_α не является производной от ядра ω, и только в случае $n = 1$ формула (13.1) превращается в формулу, получающуюся простым дифференцированием формулы Коши.

Доказательство основано на той же идее, что и доказательство теоремы 10.1.

1. Легко проверяется, что форма $\omega_\alpha(\zeta - z, (\bar\zeta - \bar z)^{\alpha+1})$ замкнута. Зафиксируем точку $z \in D$; в силу следствия из формулы Стокса интегрирование по ∂D можно заменить интегрированием по $\partial B_r^{(\alpha)}(z)$.

2. В достаточно малой окрестности точки z голоморфная функция $\varphi(\zeta)$ разлагается в кратный степенной ряд с центром в точке z, значит, для доказательства (13.1) достаточно установить, что

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i r^2)^n} \int_{\partial B_r^{(\alpha)}(z)} (\zeta - z)^\beta \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \left(\bar\zeta_j - \bar z_j\right)^{\alpha_j+1} d\left(\bar\zeta - \bar z\right)^{\alpha+1}[j] \wedge d\zeta =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha \neq \beta, \\ 1, & \text{если } \alpha = \beta. \end{cases} \tag{13.2}$$

3. Заметим, что при замене переменных $\zeta_j - z_j = e^{it_j}\left(\zeta_j' - z_j\right)$, $0 \leqslant t_j \leqslant 2\pi$, $j = 1, \ldots, n$, множество $\partial B_r^{(\alpha)}(z)$ переходит в себя, а подынтегральная форма в (13.2) умножается на $e^{it_1(\beta_1-\alpha_1)} \ldots$ $\ldots e^{it_n(\beta_n-\alpha_n)}$, поэтому верна та часть (13.2), которая касается случая $\alpha \neq \beta$.

4. Если $\alpha = \beta$, то интеграл в (13.2) по формуле Стокса равен

$$\frac{n!\,(\alpha+1)^1}{(2\pi i r^2)^n} \int_{B_r^{(\alpha)}(z)} |\zeta_1 - z_1|^{2\alpha_1} \ldots |\zeta_n - z_n|^{2\alpha_n} d\bar\zeta \wedge d\zeta =$$

$$= \frac{n!\,(\alpha+1)^1\,2^n}{r^{2n}} \int\limits_{B_r^{(\alpha)}(z)} |\zeta_1 - z_1|^{2\alpha_1+1} \ldots |\zeta_n - z_n|^{2\alpha_n+1}\, d|\zeta_1 - z_1| \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge d|\zeta_n - z_n| = n! \int\limits_{\substack{\tau_1+\ldots\tau_n<1\\ \tau_i>0}} d\tau = 1. \quad \square$$

Формулу Андреотти — Норге можно обобщить в духе формулы Коши — Фантаппье.

Теорема 13.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 13.1 *и вектор-функция* $w \in C^1_\zeta(\partial D)$ *удовлетворяет условию*

$$\langle w(\zeta, z),\ (\zeta - z)^{(\alpha+1)}\rangle \neq 0,\ z \subset D,\ \zeta \in \partial D,$$

тогда

$$\int\limits_{\partial D} \varphi(\zeta)\,\omega_\alpha(\zeta - z, w) = D^\alpha \varphi(z). \tag{13.3}$$

Доказательство можно дать либо тем же способом, каким доказана теорема 11.1 (способ Коппельмана аналитический), либо геометрическим, который мы и изложим (способ Хенкина). Каждый из интегралов (13.1), (13.3) представляет собой интеграл от одной и той же внешней дифференциальной формы

$$\varphi(\zeta) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} v_j dv\,[j] \wedge d\zeta \tag{13.4}$$

по циклам

$$\gamma_0 = \Bigg\{(\zeta, v):\ \zeta \in \partial D,\ v_j = v_j^0 =$$

$$= \frac{(\bar\zeta_j - \bar z_j)^{\alpha_j+1}}{|\zeta_1 - z_1|^{2(\alpha_1+1)} + \ldots + |\zeta_n - z_n|^{2(\alpha_n+1)}},\ j = 1, \ldots, n\Bigg\},$$

$$\gamma = \left\{(\zeta, v):\ \zeta \in \partial D,\ v = v^1 = \frac{w}{\langle w,\ (\zeta - z)^{(\alpha+1)}\rangle}\right.$$

соответственно, которые лежат в пространстве $\mathbb{C}^{2n}_{\zeta,v}$ на поверхности

$$M_z^{(\alpha)} = \{(\zeta, v):\ \zeta \in \partial D,\ \langle v,\ (\zeta - z)^{(\alpha+1)}\rangle = 1\}.$$

На этой поверхности форма (13.4) замкнута и для доказательства того, что интеграл (13.3) равен интегралу (13.1), достаточно установить, что циклы γ_0 и γ гомологичны на $M_z^{(\alpha)}$. Рассмотрим множество $Q = \{(\zeta,\ v):\ \zeta \in \partial D,\ v = \lambda v^0 + (1-\lambda) v^1,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$. Ясно, что $\gamma - \gamma_0 = \partial Q$. Далее

$$\langle \lambda v^0 + (1-\lambda) v^1,\ (\zeta - z)^{(\alpha+1)}\rangle =$$

$$= \lambda \langle v^0,\ (\zeta - z)^{(\alpha+1)}\rangle + (1+\lambda)\langle v^1,\ (\zeta - z)^{(\alpha+1)}\rangle = 1,$$

т. е. $Q \subset M_z^{(\alpha)}$. Итак. на $M_z^{(\alpha)}$ циклы γ_0 и γ_1 гомологичны. □

Наконец, можно сделать дальнейшее обобщение формулы (13.1) аналогично теореме 11.1. Обозначим

$$\Omega_\alpha\left(w^{(0)}, w^{(1)}, \ldots, w^{(n-1)}, f\right) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2\pi i)^n} \frac{\langle w^{(0)}, df\rangle}{\langle w^{(0)}, f^{(\alpha)}\rangle} \wedge$$

$$\wedge\, d\frac{\langle w^{(1)}, df\rangle}{\langle w^{(1)}, f^{(\alpha)}\rangle} \wedge \ldots \wedge d\frac{\langle w^{(n-1)}, df\rangle}{\langle w^{(n-1)}, f^{(\alpha)}\rangle}.$$

Теорема 13.3. *Если выполнены условия теоремы* 13.1 *и вектор-функции* $w^{(0)} \in C_\zeta(\partial D)$ *и* $w^{(i)} \in C_\zeta^1(\partial D)$, $i = 1, \ldots, n-1$, *удовлетворяют условию*

$$\langle w^{(j)}(\zeta, z), (\zeta - z)^{(\alpha+1)}\rangle \neq 0,\ z \in D,\ \zeta \in \partial D,\ j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

то
$$\int_{\partial D} \varphi(\zeta)\,\Omega_\alpha\left(w^{(0)}, \ldots, w^{(n-1)}, \zeta - z\right) = D^\alpha \varphi(z). \tag{13.5}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 11.1.

2°. Возникает задача: нельзя ли построить формулу многомерного логарифмического вычета, опираясь не на интегральное представление Мартинелли — Бохнера (10.1), а на более общее интегральное представление Андреотти — Норге (13.1), т. е. поставлен вопрос о вычислении интеграла

$$\int_{\partial D} \varphi\omega_\alpha(f, \bar f), \tag{13.6}$$

где $f \in A^n(\bar D)$ и не имеет нулей на ∂D, или, что то же самое (сравните (10.16) и (11.3), (13.1) и (13.5)),

$$\int_{\partial D} \varphi\Omega_\alpha\left(w^{(0)}, \ldots, w^{(n-1)}, f\right). \tag{13.7}$$

Мы не знаем ответа в общем случае, поэтому перечислим частные случаи, когда интегралы (13.6), (13.7) удалось сосчитать.

1. При $n = 1$ интегралы (13.6) и (13.7) принимают вид

$$\frac{\alpha_1!}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{\varphi(\zeta)\, df(\zeta)}{f(\zeta)^{\alpha+1}} = \sum_{z \in E_f} \frac{\alpha_1!}{[\mu_z(f)(\alpha_1+1)-1]!} \frac{d^{\mu_z(f)(\alpha_1+1)-1}}{dz^{\mu_z(f)(\alpha_1+1)-1}} \frac{\varphi(z) f'(z)}{\psi_z^{\alpha_1+1}(z)}. \tag{13.8}$$

Здесь $\mu_z(f)$, как обычно, кратность нуля z функции f, которая, следовательно, в окрестности этого нуля имеет вид $f(z') = \psi_z(z') \times$ $\times (z'-z)^{\mu_z(f)}$, где ψ_z голоморфна в данной окрестности, $\psi_z(z) \neq$ $\neq 0$; наконец, каждый нуль в правой части (13.8) считается столько раз, какова его кратность.

2. Если $\alpha=(0, \ldots, 0)$, то см. формулы (10.16) и (11.3).

3. Пусть все корни системы $f=0$ в D простые, т. е. в окрестности каждого корня якобиан $\frac{\partial f}{\partial z}$ отличен от нуля. Тогда $\eta_j=f_j(z)$, $j=1, \ldots, n$, образуют в этой окрестности систему локальных координат. В силу замкнутости ω_α и Ω_α интеграл (13.6) (соответственно (13.7)) равен сумме интегралов по границам достаточно малых окрестностей корней системы $f=0$, а в каждой из них заменой переменных сводится к интегралу (13.1). Таким образом, в этом случае интеграл (13.6) (соответственно (13.7)) равен

$$\sum_{a\in E_f} \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi(z)}{\partial f_1^{\alpha_1}\ldots\partial f_n^{\alpha_n}}\bigg|_{z=a}.$$

4. Если функцию φ можно разделить на f^α, т. е. $\varphi f^{-\alpha}\in A_c(D)$, то интеграл (13.6) можно записать в виде

$$\frac{(n-1)!\,\alpha!}{(2\pi i)^n(\alpha+1)^1}\int\limits_{\partial D}\frac{\varphi\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\bar f_j^{\alpha_j+1}d\bar f^{(\alpha+1)}[j]\wedge df^{(\alpha+1)}}{f^\alpha\left[|f_1|^{2(\alpha_1+1)}+\ldots+|f_n|^{2(\alpha_n+1)}\right]^n},$$

т. е. получается интеграл вида (10.16), но не для отображения f, а для отображения $f^{(\alpha+1)}=\left(f_1^{\alpha_1+1}, \ldots, f_n^{\alpha_n+1}\right)$, нули которого отличаются от нулей f только своими кратностями. Поэтому интеграл (13.6) (соответственно (13.7)) равняется

$$\sum_{a\in E_{f^{(\alpha+1)}}}\frac{\varphi(z)}{f(z)^\alpha(\alpha+1)^1}\bigg|_{z=a}=\sum_{a\in E_f}\frac{\varphi(z)}{f(z)^\alpha}\bigg|_{z=a}.$$

5. Рассмотрим теперь общий случай $f\in A^n(\bar D)$ и f не имеет нулей на ∂D. Введем цикл $\Gamma=\{z\colon z\in\partial D, |f_2(z)|=\ldots=|f_n(z)|=\varepsilon\}$, где $\varepsilon<\min\limits_{\partial D}\|f(z)\|$. Можно показать, что интегралы (13.6) и (13.7) равны

$$\frac{\alpha!}{(2\pi i)^n}\int\limits_\Gamma\frac{\varphi\,df}{f^{(\alpha+1)}},\tag{13.9}$$

а интеграл (13.9) в очень общей ситуации равен (сравните [34, § 4])

$$\sum_{a\in E_f}\frac{\alpha!}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma_a}\frac{\varphi\,df}{f^{(\alpha+1)}}.\tag{13.10}$$

Здесь $\Gamma_a=\{z\colon z\in U_a, |f_i(z)|=\varepsilon_i, i=1, \ldots, n\}$.

Поскольку функция z_j-a_j обращается в нуль в точке a, то по теореме Гильберта о нулях $(z_j-a_j)^{N_j(a)}$ принадлежит идеалу, порожденному функциями $f_1, \ldots, f_n$ (если все f_j — полиномы, то

$N_j \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \deg f_i + 1 - n$, а в общем случае $N_j \leqslant \mu_a(f)$), т. е.

$$g_j^a = (z_j - a_j)^{N_j(a)} = \sum_{i=1}^{n} f_i b_{ji}^a(z),$$

$b_{ji}^a(z)$ голоморфны в окрестности U_a *точки* $a \in E_f$. Обозначим $B_a = \det \| b_{ji}^a \|$.

Применяя обобщенную формулу преобразования вычета Гротендика [102], получим, что выражение (13.10) равно

$$\sum_{a \in E_f} \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \sum_{\substack{k_{sj} \geqslant 0 \\ \sum\limits_{s=1}^{n} k_{sj} = \alpha_j}} \frac{\prod\limits_{s=1}^{n} \left(\sum\limits_{j} k_{sj} \right)!}{\prod\limits_{s,j=1}^{n} k_{sj}!} \int\limits_{\Gamma_{a,g}} \frac{\varphi \frac{\partial f}{\partial z} B_a \prod\limits_{s,j=1}^{n} b_{sj}^{k_{sj}} dz}{g^{(\beta+1)}}.$$

Далее обозначим $\beta_s = \sum\limits_{j=1}^{n} k_{sj}$ и мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 13.5 (Кытманов). *Интегралы* (13.6) *и* (13.7) *равны*

$$\alpha! \sum_{a \in E_f} \sum_{\substack{k_{sj} \geqslant 0 \\ \sum\limits_{s=1}^{n} k_{sj} = \alpha_j}} \frac{\prod\limits_{s=1}^{n} \beta_s!}{\prod\limits_{s,j=1}^{n} k_{sj}! \prod\limits_{j=1}^{n} \left(N_j^a \beta_j + N_j^a - 1 \right)!} \times$$

$$\times \left. \frac{\partial^{\sum\limits_{j=1}^{n} \left(N_j^a \beta_j + N_j^a - 1 \right)} \left(\varphi \frac{\partial f}{\partial z} B_a \prod\limits_{s,j=1}^{n} b_{sj}^{k_{sj}} \right)}{\partial z_1^{N_1^a \beta_1 + N_1^a - 1} \ldots \partial z_n^{N_n^a \beta_n + N_n^a - 1}} \right|_{z=a}.$$

Рассмотрим далее случай, когда все нули f лежат внутри области D. Пусть теперь $\varphi, f_1, \ldots, f_n$ — полиномы $f_j = P_j + Q_j$, где P_j — старшие однородные части f_j, $j = 1, \ldots, n$. Предположим, что система $P_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$, имеет только один общий корень — начало координат, тогда все корни системы $f_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$, дискретны. По теореме Гильберта о нулях получаем

$$z_j^{N_j} = \sum_{i=1}^{n} P_i(z) b_{ji}(z), \quad j = 1, \ldots, n,$$

где b_{ji} — некоторые полиномы, а степени $N_j \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \deg f_i + 1 - n$.

Рассмотрим функции

$$g_j(z) = \sum_{i=1}^{n} f_i b_{ji} = z_j^{N_j} + \sum_{i=1}^{n} Q_i b_{ji} = z_j^{N_j} + R_j,$$

где $\deg R_j < N_j$. К глобальному вычету (13.10) применим обобщенную формулу преобразования вычета Гротендика (см. [102]), тогда выражение (13.10) можно записать в виде

$$\frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \sum_{a\in E_g} \sum_{\substack{k_{sj}\geqslant 0\\ \sum\limits_{s=1}^{n} k_{sj}=\alpha_j}} \frac{\prod\limits_{s=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} k_{sj}\right)!}{\prod\limits_{s,j=1}^{n} k_{sj}!} \int\limits_{\Gamma_{g,a}} \frac{\varphi B \prod\limits_{s,j=1}^{n} b_{sj}^{k_{sj}} dz}{g^{(\beta+1)}}. \tag{13.11}$$

где $\beta_s = \sum\limits_{j=1}^{n} k_{sj}$, $s = 1, \ldots, n$; $B = \det\| b_{ji}\|_{j,i=1}^{n}$.

Сумма циклов $\sum\limits_{a\in E_g} \Gamma_{g,a}$ гомологична циклу $\Gamma_g = \{g\colon |g_j| = r_j, j = 1, \ldots, n\}$, если r_j достаточно велики, а Γ_g по теореме Южакова (см. [34, § 4]) гомологичен циклу $\widetilde{\Gamma} = \{z\colon |z_j| = r_j,\ j = 1, \ldots \ldots, n\}$, так как $\left|z_j^{N_j}\right| > |R_j|$ на $\widetilde{\Gamma}$, если r_j достаточно велики. Тогда (13.11) преобразуется к виду

$$\frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \sum_{\substack{k_{sj}\geqslant 0\\ \sum\limits_{s=1}^{n} k_{sj}=\alpha_j}} \frac{\prod\limits_{s=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} k_{sj}\right)!}{\prod\limits_{s,j=1}^{n} k_{sj}!} \int\limits_{\widetilde{\Gamma}} \frac{\varphi B \prod\limits_{s,j=1}^{n} b_{sj}^{k_{sj}} dz}{g^{(\beta+1)}}. \tag{13.12}$$

Далее

$$\frac{1}{g^{(\beta+1)}} = \frac{1}{\left(z_1^{N_1}+R_1\right)^{\beta_1+1}\ldots\left(z_n^{N_n}+R_n\right)^{\beta_n+1}} =$$
$$= \sum_{\gamma\geqslant 0} \frac{(\beta+\gamma)!\,(-1)^{|\gamma|}}{\beta!\,\gamma!} \frac{R^{\gamma}}{z_1^{N_1(\gamma_1+\beta_1+1)}\ldots z_n^{N_n(\gamma_n+\beta_n+1)}},$$

где $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $R^{\gamma} = R_1^{\gamma_1}\ldots R_n^{\gamma_n}$, причем этот ряд на $\widetilde{\Gamma}$ сходится равномерно, поэтому его можно почленно интегрировать, при этом (13.12) примет вид

$$\frac{\lambda!}{(2\pi i)^n} \sum_{\substack{k_{sj}\geqslant 0\\ \sum\limits_{s=1}^{n} k_{sj}=\alpha_j}} \frac{1}{\prod\limits_{s,j=1}^{n} k_{sj}!} \sum_{0\leqslant|\gamma|\leqslant M+n-\sum\limits_{j=1}^{n} m_j(\alpha_j+1)} \frac{(\beta+\gamma)!}{\gamma!}\times$$
$$\times\int\limits_{\widetilde{\Gamma}} \frac{\varphi B \prod\limits_{s,j=1}^{n} b_{sj}^{k_{sj}} R^{\gamma} dz}{z_1^{N_1(\gamma_1+\beta_1+1)}\ldots z_n^{N_n(\gamma_n+\beta_n+1)}},$$

где $m_j = \deg f_j$, $j = 1, \ldots, n$, $\deg \varphi = M$. Мы получаем следующее утверждение.

Теорема 13.6 (Кытманов). *Если все нули отображения f лежат в области D, то интегралы* (13.6) *или* (13.7) равны

$$\alpha! \sum_{\substack{k_{sj} \geq 0 \\ \sum_{s=1}^{n} k_{sj} = \alpha_j}} \; \sum_{0 \leq |\gamma| \leq M + n - \sum_{j=1}^{n} m_j(\alpha_j + 1)} \frac{(\beta + \gamma)!}{\partial! \prod_{s,j=1}^{n} k_{sj}! \, (N_1(\gamma_1 + \beta_1 + 1) - 1)! \ldots} \times$$

$$\times \frac{1}{\ldots (N_n(\gamma_n + \beta_n + 1) - 1)!} \left. \frac{\partial^{\sum_{j=1}^{n} N_j(\gamma_j + \beta_j + 1) - n} \varphi B \prod_{s,j=1}^{n} b_{sj}^{k_{sj}} R^{\gamma}}{\partial z_1^{N_1(\gamma_1 + \beta_1 + 1) - 1} \ldots \partial z_n^{N_n(\gamma_n + \beta_n + 1) - 1}} \right|_{z=0}. \tag{13.13}$$

В этой теореме содержится важный случай $\alpha = (0, \ldots, 0)$, т. е. случай вычисления глобального логарифмического вычета, построенного на основе формулы Мартинелли—Бохнера (10.1), если φ, $f_1, \ldots, f_n$ — полиномы. С другой стороны, мы знаем по формуле Южакова — Руса (10.16) (см. также (11.3), (11.16)), что этот вычет равен

$$\sum_{a \in E_f} \varphi(a). \tag{13.14}$$

Сравнивая (13.14) и (13.13) при $\alpha = (0, \ldots, 0)$, можно получить ряд следствий, которые нашли применение при решении систем нелинейных алгебраических уравнений и в математических задачах химической кинетики (см. [34, § 21], а также [102, 101, 23, 49, 50]). Рассмотрим систему алгебраических уравнений

$$f_j = P_j(z) + Q_j(z) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{13.15}$$

где $P_j(z)$ — однородные полиномы старшей степени по совокупности переменных, имеющие только один нуль — начало координат; степени P_j обозначим через k_j, тогда $\deg Q_j < k_j$, $j = 1, \ldots, n$. По теореме Руше 10.7 система (13.15) имеет конечное число нулей. Пусть $m_1, \ldots, m_n$ — такие натуральные числа, что уравнение

$$\sum_{j=1}^{n} w_j P_j(z) = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^{2m_j} \tag{13.16}$$

имеет решение вида

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}(z) \bar{z}_i^{m_i}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{13.17}$$

где a_{ji} — полиномы от z. Указанному условию заведомо удовлетворяют $m_j = |k| + 1 - n$, $j = 1, \ldots, n$ (см теорему Мэколея [216]). Решение (13.17) (вообще говоря, не единственное) уравнения

(13.16) можно найти методом ноопределенных коэффициентов, т. е. $a_{ji}(z)$ определяются после решения соответствующей системы линейных уравнений.

Следствие 13.7 (Айзенберг). *Пусть $\varphi(z)$ — полином степени M, тогда*

$$\sum_{a \in E_f} \varphi(a) = \mathfrak{M}\left[\varphi \Delta_1 \Delta_2 \sum_{j=0}^{M} \frac{(-1)^j}{j!} \langle w, Q\rangle^j\right], \tag{13.18}$$

где Δ_1 — *якобиан системы* (13.15), *а* $\Delta_2 = \det\|a_{ji}\|$, *суммирование в левой части* (13.18) *производится по всем корням системы* (13.15), $\mathfrak{M}$ — *линейный функционал на полиномах от* $z_1, \ldots, z_n, z_1^{-m_1}, \ldots$ $\ldots, z_n^{-m_n}$, *заданный равенством*

$$\mathfrak{M}\left[z^{\beta} z_1^{-m_1\alpha_1} \ldots z_n^{-m_n\alpha_n}\right] = \begin{cases} \alpha! \text{ если } \beta_j = m_j\alpha_j + m_j - 1, & j = 1, \ldots, n, \\ 0 & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Особенно простой вид система (13.15) имеет в случае

$$f_j = z_j^{k_j} + Q_j(z) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{13.19}$$

где $\deg Q_j < k_j$, $j = 1, \ldots, n$. Здесь можно взять $m_i = k_i$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, n$, тогда $w_i = z_i^{-k_i}$, определитель $\Delta_2 = 1$, и мы приходим к следующему утверждению.

Следствие 13.8 (Айзенберг). *Для системы* (13.19) *и полинома $\varphi(z)$ степени M справедлива формула*

$$\sum_{a \in E_f} \varphi(a) = \mathfrak{N}\left[\varphi \Delta_1 \frac{z_1 \ldots z_n}{z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}} \sum_{|\alpha|=0}^{M} (-1)^{|\alpha|} \left(\frac{Q_1}{z_1^{k_1}}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{Q_n}{z_n^{k_n}}\right)^{\alpha_n}\right], \tag{13.20}$$

где $\mathfrak{N}$ — линейный функционал на полиномах от $z_1, \ldots, z_n, \frac{1}{z_1}, \ldots$ $\ldots, \frac{1}{z_n}$, *который каждому такому полиному сопоставляет его свободный член.*

6. Укажем на связь между интегралом (13.6) и тонятием следа функции относительно отображения. Предположим, что отображение $f \in A^n(\overline{D})$ обладает тем свойством, что для каждого $\eta \in f(D)$ система уравнений $f(z) = \eta$ имеет в D одно и то же конечное число корней с учетом их кратностей. Обозначим эти корни $z^{(\nu)}(\eta)$. *Следом голоморфной функции $\varphi \in A(\overline{D})$ относительно отображения f называется функция*

$$\mathrm{Tr}_f(\varphi) = \sum_{\nu} \varphi\left(z^{(\nu)}(\eta)\right), \tag{13.21}$$

голоморфно зависящая от η.

Предложение 13.9 (Цих). *Интеграл* (13.6) *и след* $\mathrm{Tr}_f(\varphi)$ *связаны формулой*

$$\int_{\partial D} \varphi\omega_\alpha(f, \bar{f}) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\eta^\alpha} \mathrm{Tr}_f(\varphi)\,|_{\eta=0}.$$

Определенный по формуле (13.21) след допускает следующую алгебраическую интерпретацию. Пусть $\mathcal{O}_z$ и $\mathcal{O}_\eta$ — кольца голоморфных функций в D и $f(D)$ соответственно. В наших предположениях относительно f кольцо $\mathcal{O}_z$ является конечным расширением кольца $\mathcal{O}_\eta$ в следующем смысле: существует конечный набор функции $\{e_\alpha(z)\} \subset \mathcal{O}_z$ такой, что всякую функцию $\varphi \in \mathcal{O}_z$ можно представить в виде

$$\varphi(z) = \sum_\alpha c_\alpha(f(z))\, e_\alpha(z), \quad c_\alpha(\eta) \in \mathcal{O}_\eta.$$

В таком случае след элемента φ расширения $\mathcal{O}_z \supset \mathcal{O}_\eta$ определяется как след матрицы (сумма диагональных элементов) $\|c_{\alpha\beta}(\eta)\|$, заданной системой равенств

$$\varphi(z)\, e_\alpha(z) = \sum_\beta c_{\alpha\beta}(f(z))\, e_\beta(z).$$

Причем след $\sum\limits_\alpha c_{\alpha\alpha}(\eta)$ этой матрицы совпадает со следом (13.21) (см. [171, § 6]). Заметим, что в качестве набора $\{e_\alpha(z)\}$ может служить базис фактор-кольца $\mathcal{O}_z/I(f)$, где $I(f)$ — идеал в $\mathcal{O}_z$, порожденный компонентами $f_1, \ldots, f_n$ отображения f. Если f полиномиально, то $\mathcal{O}_z$ можно заменить на кольцо многочленов $\mathbf{C}[z]$. Например если $f_j(z) = z_j^{k_j} + \{$члены степени $< k_j\}$, то базис в $\mathbf{C}[z]/I(f)$ составляют мономы $z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}$, $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant k_1 - 1, \ldots, 0 \leqslant \alpha_n \leqslant \leqslant k_n - 1$. Об отысканиях базиса в других ситуациях см. монографию [171].

3°. Для получения многомерных аналогов формулы Карлемана для производной голоморфной функции желательно использовать не формулу Андреотти — Норге (13.1), а похожую формулу, но с однородным ядром. Введем вектор $P = (p, \ldots, p)$, где p — натуральное число.

Теорема 13.10 (Косбергенов). *Пусть функция* $\varphi \in A_C(D)$, *где* D — *ограниченная область с кусочно-гладкой границей, тогда для всякой точки* $z \in D$ *и любого* α

$$\int_{\partial D} \varphi(\zeta)(\zeta - z)^{P-\alpha-1}\, \omega_{P-1}\left(\zeta - z, (\bar{\zeta} - \bar{z})^P\right) = D^\alpha\varphi(z), \quad (13.22)$$

где $p > |\alpha + 1|$.

Доказательство почти полностью повторяет доказательство теоремы 13.1, поэтому мы его не приводим. И в этом случае нетрудно получить аналоги утверждений 13.2—13.5, используя указанные соображения.

14. КЕРНФУНКЦИЯ БЕРГМАНА, ЯДРО СЕГЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ С ГОЛОМОРФНЫМ ЯДРОМ ПО ГРАНИЦЕ ШИЛОВА

1°. Пусть Q — компакт в $\mathbf{C}^n$, а $\mathscr{E}$ — некоторая совокупность действительно значных функций, полунепрерывных на Q. Множество $S_{\mathscr{E}}(Q)\subset Q$ называется *границей Шилова множества Q относительно $\mathscr{E}$, если*: 1) $S_{\mathscr{E}}(Q)$ является *определяющим множеством* для совокупности $\mathscr{E}$ на компакте Q, т. е. оно замкнуто и для любой функции $\varphi\in\mathscr{E}$:

$$\sup_{z\in Q}\varphi(z)=\sup_{z\in S_{\mathscr{E}}(Q)}\varphi(z); \tag{14.1}$$

2) $S_{\mathscr{E}}(Q)$ *минимально*, т. е. никакое собственное подмножество не является определяющим.

Аналогично вводится понятие границы Шилова в случае, когда $\mathscr{E}$ — совокупность комплекснозначных функций, при этом нужно (14.1) заменить равенством

$$\sup_{z\in Q}|\varphi(z)|=\sup_{z\in S_{\mathscr{E}}(Q)}|\varphi(z)|.$$

Теорема 14.1 *Если совокупность $\mathscr{E}$ действительных полунепрерывных сверху на компакте Q функций удовлетворяет условию: из $\varphi\in\mathscr{E}$ следует, что все функции вида $[\varphi(z)+\ln|z_i-c|]\in\mathscr{E}$, $i=1,\ldots,n$, где c — любое комплексное число, то граница Шилова $S_{\mathscr{E}}(Q)$ существует и единственна.*

Доказательство. Множество определяющих множеств не пусто, например, Q — определяющее. Пусть $\{\Gamma_j\}$ — последовательность вложенных определяющих множеств: $\Gamma_j\supset\Gamma_{j+1}$, $j=1,2,\ldots$. Тогда $\Gamma=\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\Gamma_j$ — определяющее, так как для полунепрерывных функций φ

$$\lim_{j\to\infty}\sup_{z\in\Gamma_j}\varphi(z)=\sup_{z\in\Gamma}\varphi(z).$$

Теперь из леммы Цорна следует, что существует минимальное определяющее множество — граница Шилова.

Докажем единственность $S_{\mathscr{E}}(Q)$. Пусть существуют две границы Шилова $S^1=S^1_{\mathscr{E}}(Q)$ и $S^2=S^2_{\mathscr{E}}(Q)$; тогда найдется такая точка $z^\circ\in S^1\setminus S^2$ и такое $r>0$, что поликруг $U(z^\circ,r)$ не пересекаются с S^2. Существует функция $\varphi\in\mathscr{E}$, достигающая максимального на S^1 значения M в пределах $U(z^\circ,r)\cap S^1$ и остающаяся меньше этого M на множестве $S^1\setminus U(z^\circ,r)$ (иначе бы S^1 не было минимальным определяющим множеством). Положим

$$m=\sup_{z\in S^1\setminus U(z^0,r)}\varphi(z),$$

тогда $m<M$.

С другой стороны, существует точка $z^1 \in S^2 \setminus S^1$ такая, что $\varphi(z^1) = M$. Так как $z^1 \notin U(z^\circ, r)$, то найдется такое i, что $|z_i^1 - z_i^0| > r$. Пусть $R = \sup\limits_{z \in S^1} |z_i - z_i^1|$, выберем $\lambda > 1$ так, чтобы $m + \ln\left(R + \lambda |z_i^0 - z_i^1|\right) < M + \ln\left(\lambda |z_i^0 - z_i^1|\right)$.

Рассмотрим функцию $\psi(z) = \left[\varphi(z) + \ln |z_i - z_i^1 - \lambda (z_i^0 - z_i^1)|\right] \in \in \mathscr{E}$. Очевидно, $\psi(z^1) = M + \ln\left(\lambda |z_i^0 - z_i^1|\right)$; если $z \in S^1 \setminus U(z^0, r)$ то $\psi(z) \leqslant m + \ln |z_i - z_i^1 - \lambda (z_i^0 - z_i^1)| \leqslant m + \ln\left(R + \lambda |z_i^0 - z_i^1|\right) < < M + \ln\left(\lambda |z_i^0 - z_i^1|\right)$; если же $z \in S^1 \cap U(z^0, r)$, то $\psi(z) \leqslant M + + \ln |z_i - z_i^0 + (1 - \lambda)(z_i^0 - z_i^1)| < M + \ln\left(\lambda |z_i^0 - z_i^1| - |z_i^0 - z_i^1| + + |z_i - z_i^0|\right) < M + \ln\left(\lambda |z_i^0 - z_i^1|\right)$. Итак, для $z \in S^1$ верно неравенство $\psi(z) < \psi(z^1)$, что невозможно, так как S^1 — граница Шилова множества Q относительно $\mathscr{E}$. □

Следствие 14.2. *Пусть некоторая совокупность $\mathscr{E}$ комплекснозначных функций, модуль которых полунепрерывен сверху на компакте Q, удовлетворяет условию: из $\varphi \in \mathscr{E}$ следует, что $\varphi(z)(z_i - c) \in \mathscr{E}$, $i = 1, \ldots, n$, где c — любое комплексное число. Тогда $S_{\mathscr{E}}(Q)$ существует и единственна.*

Доказательство сводится к проверке того факта, что совокупность $\{\ln|\varphi(z)|\}$, где $\varphi \in \mathscr{E}$, удовлетворяет условиям теоремы 14.1. □

Если D — ограниченная область, а $\mathscr{E} = A_C(D)$, то $S_{\mathscr{E}}(\overline{D})$ называют просто *границей Шилова области D* и обозначают $S(D)$. Если $\mathscr{E} = A(\overline{D})$ то $S_{\mathscr{E}}(\overline{D})$ называют *границей Бергмана области D* и обозначают $B(D)$. Если $\mathscr{E}$ — множество всех полиномов, то $S_{\mathscr{E}}(\overline{D})$ называется *полиномиальной границей области D* и обозначается $P(D)$.

Следствие 14.3 *Пусть D — ограниченная область в $\mathbf{C}^n$. Границы $S(D)$, $B(D)$, $P(D)$ существуют, единственны и $P(D) \subset \subset B(D) \subset S(D) \subset \partial D$.*

Примеры. 1. Если D — шар, то $S(D) = B(D) = P(D) = \partial D$.

2. Если D — поликруг, то $S(D) = B(D) = P(D) = \Gamma$, где Γ — его остов.

3. *Пример области голоморфности, для которой границы Шилова и Бергмана имеют разную размерность* (*Айзенберг*). Пусть

$$D = \left\{z \colon\ z \in \mathbf{C}^2,\ |z_2| < |z_1|^{-\ln|z_1|},\ 0 < |z_1| < 1\right\}.$$

Функции $f_{m,j} = z_1^{-m} z_2^j$, $m, j = 1, 2, \ldots,$ принадлежат $A_C(D)$, их модули $|f_{m,j}|$ достигают максимума на $\overline{D}$ в точке (z_1, z_2), где $|z_1| = \exp\left(-\dfrac{m}{2j}\right)$, $|z_2| = |z_1|^{-\ln|z_1|}$. Отсюда нетрудно видеть, что $S(D) = \{z \colon |z_1| \leqslant 1,\ |z_2| = R(|z_1|)\}$, где

$$R(|z_1|) = \begin{cases} |z_1|^{-\ln|z_1|}, & \text{если } 0 < |z_1| \leqslant 1, \\ 0, & \text{если } |z_1| = 0. \end{cases}$$

Всякая функция из $A(\overline{D})$ голоморфна и в замкнутом бикруге $\overline{U(0, 1)}$, поэтому $B(D) = S(U) = \Gamma = \{z\colon |z_1| = |z_2| = 1\}$. Итак, для области D граница Шилова $S(D)$ трехмерна, а граница Бергмана $B(D)$ двумерна.

2°. Пусть D — ограниченная область в $\mathbf{C}^n$, функция $h(z, \bar{z}) \in C(\overline{D})$ и положительна в D. Обозначим $L_h^2 = L_h^2(D)$ совокупность всех функций $f \in A(D)$ с конечной нормой

$$\|f\| = \|f\|_D^h = \left(\int_D |f|^2 h dv\right)^{1/2}, \tag{14.2}$$

где dv — элемент объема, интеграл в (14.2) понимается как несобственный; L_h^2 является гильбертовым пространством со скалярным произведением $(f, g) = \int_D f\bar{g}hdv$. Легко видеть, что если поликруг $U(z^\circ, r) \Subset D$, то для всякой функции $f \in L_h^2$ справедливо неравенство

$$|f(z^0)| < c\|f\|_D^h, \tag{14.3}$$

где постоянная c зависит от r, h, но не от f и не от z°.

В L_h^2, как в гильбертовом пространстве, существуют полные ортонормальные системы. Пусть $\{\varphi_m(z),\ m = 0, 1, 2, \ldots\}$ — одна из них, а a_m — коэффициенты Фурье относительно этой системы функции $f \in L_h^2$. тогда ряд

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \varphi_m(z) \tag{14.4}$$

сходится по норме, а значит, в силу (14.3) сходится равномерно и абсолютно внутри D, т. е. на компактах из D. Далее рассмотрим ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(z)\overline{\varphi_m(\zeta)} = K(z, \bar{\zeta}). \tag{14.5}$$

Теорема 14.4 (Бергман). *Ряд* (14.5) *сходится абсолютно и равномерно внутри $D \times D$. При фиксированном $\zeta \in D$ этот ряд сходится относительно z по норме пространства L_h^2.*

Доказательство. Пусть $a \in D$, тогда, учитывая ортонормальность системы $\{\varphi_m\}$ и неравенство (14.3), получаем

$$\sum_{m=0}^{M} |\varphi_m(a)|^2 = \int_D \left|\sum_{m=0}^{M} \varphi_m(z)\overline{\varphi_m(a)}\right|^2 hdv \geqslant c\left(\sum_{m=0}^{M} |\varphi_m(a)|^2\right)^2,$$

отсюда

$$\sum_{m=0}^{M} |\varphi_m(a)|^2 \leqslant \frac{1}{c}. \tag{14.6}$$

Рассмотрим точки $z \in D$ и $\zeta \in D$, и пусть поликруги $U(z, r)$ и $U(\zeta, \rho)$ входят в D вместе со своими замыканиями. Тогда

$$\left(\sum_{m=0}^{M} \left|\varphi_m(z)\overline{\varphi_m(\zeta)}\right|\right)^2 \leqslant \sum_{m=0}^{M} |\varphi_m(z)|^2 \sum_{m=0}^{M} |\varphi_m|(\zeta)|^2 \leqslant \frac{1}{c(r)\,c(\rho)},$$

отсюда следует равномерная и абсолютная сходимость ряда (14.5) внутри $D \times D$. Наконец, из (14.6) вытекает, что равенство (14.5) является при фиксированном $\zeta \in D$ разложением $K(z, \bar{\zeta})$ по полной ортонормальной системе $\{\varphi_m(z)\}$. □

$K(z, \bar{\zeta})$ называют *кернфункцией Бергмана для области D относительно веса h или просто кернфункцией*. Заметим, что $K(z, \bar{\zeta}) = \overline{K(\zeta, \bar{z})}$ и $K(z, \bar{\zeta})$ голоморфна по z и антиголоморфна по ζ в $D \times D$.

Теорема 14.5 (Бергман). *Если $f \in L_h^2(D)$, то для $z \in D$*

$$f(z) = \int_D f(\zeta)\,K(z, \bar{\zeta})\,h(\zeta, \bar{\zeta})\,dv_\zeta. \tag{14.7}$$

Доказательство. Представим f и K по формулам (14.4) и (14.5), тогда

$$\int_D f(\zeta)\,K(z, \bar{\zeta})\,h(\zeta, \bar{\zeta})\,dv_\zeta = \int_D \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m\varphi_m(\zeta)\right) \times$$

$$\times \left(\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(z)\overline{\varphi_j(\zeta)}\right) h(\zeta, \bar{\zeta})\,dv_\zeta = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\varphi_m(z) = f(z). \quad \square$$

Отметим без доказательства следующие результаты Бергмана.

1. Кернфункция $K(z, \bar{\zeta})$ не зависит от выбора полной ортонормальной системы $\{\varphi_m\}$, а зависит лишь от области D и весовой функции h.

2. Если $h \equiv 1$, то положительно определенная дифференциальная форма

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 \ln K(z, \bar{z})}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}\,dz_\alpha d\bar{z}_\beta$$

задает в области D эрмитову метрику, инвариантную при биголоморфных отображениях. Ее называют *метрикой Бергмана*.

Приведем примеры вычисления кернфункции, ограничиваясь полными n-круговыми областями D и весовой функцией $h \equiv 1$.

В качестве полной ортонормальной системы удобно взять мономы $\{a_k z^k\}$, $k = (k_1, \ldots, k_n)$ $k_j = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots, n$, где

$$a_k^2 = \left[\int_D |z^k|^2\,dv\right]^{-1}. \tag{14.8}$$

Полнота этой системы следует из того, что в рассматриваемом классе областей голоморфные функции разлагаются в ряд Тейлора, а ортонормальность — из (14.8) и

$$\int_D z^k \bar{z}^{k'} dv = 0, \quad k \neq k'.$$

Пример 1. Поликруг. Для поликруга $U(0, r)$, $r = (r_1, \ldots, r_n)$, из (14.8) получим

$$a_k^2 = \frac{1}{\pi^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{k_j + 1}{r_j^{2k_j+2}}.$$

Далее по формуле (14.5) (здесь $x_j = z_j \bar{\zeta}_j r_j^{-2}$)

$$K(z, \bar{\zeta}) = \sum_k \frac{1}{\pi^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{k_j + 1}{r_j^{2k_j+2}} z^k \bar{\zeta}^k = \frac{1}{\pi^n r_1^2 \ldots r_n^2} \sum_k \frac{\partial^n x^k}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} =$$

$$= \frac{1}{\pi^n r_1^2 \ldots r_n^2} \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} \frac{1}{(1 - x_1) \ldots (1 - x_n)} =$$

$$= \frac{1}{\pi^n r_1^2 \ldots r_n^2} \frac{1}{(1 - x_1)^2 \ldots (1 - x_n)^2} = \frac{1}{\pi^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{r_j^2}{\left(r_j^2 - z_j \bar{\zeta}_j\right)^2}.$$

Пример 2. Шар. Для шара $B(0, R)$ по формуле (14.18)

$$a_k^2 = \frac{(k_1 + \ldots + k_n + n)!}{k_1! \ldots k_n! \pi^n R^{2(k_1 + \ldots + k_n + n)}},$$

поэтому $\left(\text{здесь } x = \dfrac{z_1 \bar{\zeta}_1 + \ldots + z_n \bar{\zeta}_n}{R^2}, \quad |x| < 1\right)$

$$K(z, \bar{\zeta}) = \frac{1}{\pi^n R^{2n}} \sum_k \frac{(k_1 + \ldots + k_n + n)!}{k_1! \ldots k_n! R^{2(k_1 + \ldots + k_n)}} z^k \bar{\zeta}^k =$$

$$= \frac{1}{\pi^n R^{2n}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1) \ldots (m+n)}{R^{2m}} \sum_{k_1 + \ldots + k_n = m} \frac{m!}{k_1! \ldots k_n!} z^k \bar{\zeta}^k =$$

$$= \frac{1}{\pi^n R^{2n}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n} x^m = \frac{1}{\pi^n R^{2n}} \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{1 - x} = \frac{n!}{\pi^n R^{2n} (1 - x)^{n+1}} =$$

$$= \frac{n! R^2}{\pi^n \left(R^2 - z_1 \bar{\zeta}_1 - \ldots - z_n \bar{\zeta}_n\right)^{n+1}}.$$

3°. Пусть D — ограниченная область в $\mathbf{C}^n$ с кусочно-гладкой границей ∂D. Для функции $f \in A_C(D)$ запишем формулу Мартинелли — Бохнера (10.1) в виде

$$f(\zeta) = \int_{\partial D} f(\eta) M(\eta, \zeta) d\sigma_\eta,$$

где $\zeta \in D$, а $d\sigma$ — элемент поверхности ∂D. Далее по формуле (14.7)

$$f(z)=\int\limits_D\left[\int\limits_{\partial D} f(\eta)\, M(\eta,\zeta)\, d\sigma_\eta\right] K(z,\bar\zeta)\, h(\zeta,\bar\zeta)\, dv_\zeta =$$

$$=\int\limits_{\partial D}\left[\int\limits_D M(\eta,\zeta)\, K(z,\bar\zeta)\, h(\zeta,\bar\zeta)\, dv_\zeta\right] f(\eta)\, d\sigma_\eta = \int\limits_{\partial D} f(\eta)\, B(z,\eta)\, d\sigma_\eta.$$

Здесь ядро

$$B(z,\eta)=\int\limits_D M(\eta,\zeta)\, K(z,\bar\zeta)\, h(\zeta,\bar\zeta)\, dv_\zeta \tag{14.9}$$

голоморфно по $z\in D$ и непрерывно по $\eta\in\partial D$, если интеграл (14.9) равномерно сходится на каждом множестве вида $\{(z,\eta)\colon z\in Q, \eta\in\partial D\}$, где Q — произвольный компакт из D. Для этого чтобы это было верно, достаточно чтобы по переменному ζ имело место $\|M(\eta,\zeta)\|_D^h\leqslant C$ и C не зависело от η Указанное неравенство верно, если, например, $h=[\rho(\zeta,\partial D)]^{4n-2}$. Таким образом, комбинируя интегральное представление Мартинелли — Бохнера (10.1) и формулу Бергмана (14.7) (со специально выбранной весовой функцией), мы доказали, следуя идее Г. М. Хенкина, следующий результат.

Теорема 14.6 (Бангарт). *Для всякой ограниченной области D с кусочно-гладкой границей ∂D существует интегральное представление функций $f\in A_C(D)$*

$$f(z)=\int\limits_{\partial D} f(\zeta)\, B(z,\zeta)\, d\sigma_\zeta, \tag{14.10}$$

где $z\in D$; ядро $B(z,\zeta)$ голоморфно по $z\in D$ и $B(z,\zeta)\in C\{(z,\zeta)\colon z\in D, \zeta\in\partial D\}$. Если же область $D\in H$, то (14.10) *верно для функций из $H^1(D)$.*

Верно и такое утверждение:

Теорема 14.7 (Бангарт). *При условиях теоремы* 14.6 *существует интегральное представление* (14.10) *с ядром $B(z,\bar\zeta)\in A\{(z,\bar\zeta)\colon z\in D, \zeta\in D,\}$ и класса $H^2_{d\sigma_\zeta}$ при всяком $z\in D$.*

Ядро, о котором идет речь в этой теореме, голоморфное по z и антиголоморфное по ζ, называют, как мы уже отмечали в разд. 11, ядром Сеге. Интегральное представление вида (14.10) с ядром Сеге существует и в случае, когда интегрирование происходит не по всей границе ∂D, а лишь по границе Шилова $S(D)$. Приведем без доказательства соответствующий результат для случая, когда D — полная ограниченная n-круговая область с центром в 0, на $|\partial D|$ задана конечная мера λ. *Мера* λ называется *массивной на границе Шилова* области D, если для всякого $E\subset|\partial D|$ нулевой меры λ имеет место включение $\overline{|\partial D|\setminus E}\supset|S(D)|$.

Теорема 14.8 (Айзенберг). *Пусть на $|\partial D|$ задана конечная мера λ. Для того чтобы существовало интегральное представление*

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{|\partial D|} d\lambda \int\limits_{\Delta_\zeta} f(\zeta)\,h(z\bar\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta}$$

для любой $f\in A_C(D)$ и $z\in D$, где ядро Сеге $h(z\bar\zeta)=h(z_1\bar\zeta_1, \ldots, z_n\bar\zeta_n)$ при фиксированном $z\in D$ входит по $\bar\zeta$ в $A(\bar D)$, а при фиксированном $\zeta\in\partial D$ входит по z в $A(D)$, причем h не зависит от f, необходимо и достаточно, чтобы мера λ была массивной на границе Шилова области D.

Ядро Сеге разлагается при $z\in D$, $\zeta\in\partial D$ в кратный степенной ряд

$$h(z\bar\zeta)=\sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\\ \alpha_i\geqslant 0}} a_\alpha z^\alpha\bar\zeta^\alpha,$$

где

$$a_\alpha=\left[\int\limits_{|\partial D|}|\zeta^{2\alpha}|\,d\lambda\right]^{-1}.$$

Приведем несколько примеров вычисления ядер Сеге, ограничившись случаем $n=2$. Если граница области D имеет вид $\partial D=\{z\colon |z_2|=\Phi(|z_1|),\ 0\leqslant|z_1|<r\}$, где функция Φ убывающая, то интегрирование на $|\partial D|$ по мере λ можно заменить интегрированием на отрезке $[0, r]$ по некоторой мере λ', которая может быть, в частности, задана с помощью возрастающей непрерывной функции.

1. Рассмотрим последовательность областей $D_p=\{z\colon |z_2|^2+|z_1|^{2/p}<1,\ 0\leqslant|z_1|<1\}$, $p=1, 2, \ldots$, а в качестве меры λ' на $[0, 1]$ возьмем меру, порожденную функцией $|z_1|^2$. Ядра Сеге h_p для областей D_p будут иметь вид

$$h_p(z_1\bar\zeta_1, z_2\bar\zeta_2)=\sum_{j_1,j_2\geqslant 0} a_j^{(p)}(z_1\bar\zeta_1)^{j_1}(z_2\bar\zeta_2)^{j_2},$$

где

$$a_j^{(p)}=\left[\int\limits_0^1|\zeta_1|^{2j_1}\left(1-|\zeta_1|^{2/p}\right)^{j_2}d|\zeta_1|^2\right]^{-1}=\frac{[p(j_1+1)+j_2]!}{p\,[p(j_1+1)-1]!\,j_2!}.$$

Остается найти в конечном виде функции

$$h_p(x_1, x_2)=\frac{1}{p}\sum_{j_1,j_2\geqslant 0}\frac{[p(j_1+1)+j_2]!}{[p(j_1+1)-1]!\,j_2!}x_1^{j_1}x_2^{j_2},$$

где $x_1=z_1\bar\zeta_1$, $x_2=z_2\bar\zeta_2$. Заметим, что $z\in D_p$, $\zeta\in\partial D_p$, поэтому

$|x_2| < 1$, $|x_1(1-x_2)^{-p}| < 1$. Далее

$$\frac{1}{(1-x_2)^p - x_1} = \frac{1}{(1-x_2)^p}\,\frac{1}{1-\dfrac{x_1}{(1-x_2)^p}} = \sum_{m=0}^{\infty} x_1^m\left(\frac{1}{1-x_2}\right)^{p(m+1)} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x_1^m}{[p(m+1)-1]!}\,\frac{d^{p(m+1)-1}}{dx_2^{p(m+1)-1}}\,\frac{1}{1-x_2} =$$

$$= \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty}\frac{[p(j_1+1)+j_2-1]!}{[p(j_1+1)-1]!\,j_2!}\,x_1^{j_1}x_2^{j_2}.$$

Теперь получаем

$$h_p(x_1, x_2) = \frac{1}{p}\,\frac{d}{dx_2}\,\frac{1}{(1-x_2)^p - x_1} = \frac{(1-x_2)^{p-1}}{\left[(1-x_2)^p - x_1\right]^2}.$$

Итак, для $f \in A_C(D_p)$ и $z \in D_p$ справедлива формула

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_0^1 d\,|\zeta_1|^2 \int_{\Delta_\zeta}\frac{f(\zeta)\,(1-z_2\bar\zeta_2)^{p-1}}{\left[(1-z_2\bar\zeta_2)^p - z_1\bar\zeta_1\right]^2}\,\frac{d\zeta}{\zeta}. \qquad (14.11)$$

Здесь $|\zeta_2|^2 = 1 - |\zeta_1|^{\frac{2}{p}}$. В случае $p=1$ для шара $D_1 = B_1(0)$ получаем

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_0^1 d\,|\zeta_1|^2 \int_{\Delta_\zeta}\frac{f(\zeta)}{(1-z_1\bar\zeta_1 - z_2\bar\zeta_2)^2}\,\frac{d\zeta}{\zeta}. \qquad (14.12)$$

(14.12) — интегральное представление Бохнера (см. формулу (11.26) при $n=2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = R = 1$).

2. Пусть $D = \{z\colon |z_1| + |z_2| < 1,\ 0 \leqslant |z_1| < 1\}$, а в качестве меры λ' на $[0, 1]$ рассмотрим обычную меру Лебега. Тогда

$$a_j = \left[\int_0^1 |\zeta_1|^{2j_1}(1-|\zeta_1|)^{2j_2}\,d\,|\zeta_1|\right]^{-1} = \frac{(2j_1+2j_2+1)!}{(2j_1)!\,(2j_2)!},$$

а ядро Сеге для данного случая имеет вид

$$h(x_1, x_2) = \sum_{j_1, j_2 \geqslant 0}\frac{(2j_1+2j_2+1)!}{(2j_1)!\,(2j_2)!}\,x_1^{j_1}x_2^{j_2},$$

где снова $x_i = z_i\bar\zeta_i$, $i = 1, 2$. Так как $|z_1| + |z_2| < 1$ и $|\zeta_1| + |\zeta_2| =$

$= 1$, то $\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|} < 1$, поэтому

$$\sum_j \frac{(2j_1+2j_2+1)!}{(2j_1)!\,(2j_2)!} x_1^{j_1} x_2^{j_2} = \frac{1}{4}\Bigg[\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty} \frac{(m_1+m_2+1)!}{m_1!\,m_2!} (\sqrt{x_1})^{m_1} (\sqrt{x_2})^{m_2} +$$

$$+ \sum_{m_1,m_2=0}^{\infty} \frac{(m_1+m_2+1)!}{m_1!\,m_2!} (\sqrt{x_1})^{m_1} (-\sqrt{x_2})^{m_2} + \sum_{m_1,m_2=0}^{\infty} \frac{(m_1+m_2+1)!}{m_1!\,m_2!} \times$$

$$\times (-\sqrt{x_1})^{m_1} (\sqrt{x_2})^{m_2} + \sum_{m_1,m_2=0}^{\infty} \frac{(m_1+m_2+1)!}{m_1!\,m_2!} \times$$

$$\times (-\sqrt{x_1})^{m_1} (-\sqrt{x_2})^{m_2}\Bigg] = \frac{1}{4}\Bigg[\frac{1}{(1-\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2} +$$

$$+ \frac{1}{(1-\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^2} + \frac{1}{(1+\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2} + \frac{1}{(1+\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^2}\Bigg] =$$

$$= \frac{(1-x_1-x_2)\left(1+2x_1x_2-x_1^2-x_2^2\right)+8x_1x_2}{\left[(1-x_1-x_2)^2-4x_1x_2\right]^2}.$$

3. Более общий случай представляют собой области $D_{p,q} = \left\{z\colon |z_1|^{\frac{2}{p}} + |z_2|^{\frac{2}{q}} < 1\right\}$, $p, q = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим ту же меру, что и в п. 1, тогда можно показать, что

$$h_{p,q}(x_1, x_2) = \frac{1}{pq} \frac{\partial}{\partial x_1} \sum_{j_1=1}^{p} \sum_{j_2=1}^{q} \frac{1}{1-y_{j_1 1}-y_{j_2 2}},$$

где $y_{j_1 1} = x_1^{1/p}\varepsilon_{j_1}$, $y_{j_2 2} = x_2^{1/q}\varepsilon_{j_2}$; ε_{j_1}, ε_{j_2} — все корни степени p, q из единицы, $j_1 = 1, \ldots, p$; $j_2 = 1, \ldots, q$. Ядра Сеге $h_{p,q}$ рациональны [76]).

4°. Теперь поставим вопрос об интегральных представлениях по границе Шилова для функций, голоморфных в произвольных областях. Соответствующий результат приведем без доказательства.

Теорема 14.9 (Глиссон). *На границе Шилова $S(D)$ ограниченной области $D \subset \mathbb{C}^n$ существуют положительная мера μ и μ-измеримая функция $Q(z, \zeta)$, $z \in D$, $\zeta \in S(D)$, такая, что:*

а) *при фиксированном $\zeta \in S(D)$ функция $Q \in A(D)$ по z;*

б) *$Q(z, \zeta)$ интегрируема по мере μ_ζ при фиксированном $z \in D$;*

в) *функция*

$$\int_{S(D)} |Q(z, \zeta)|\, d\mu_\zeta$$

непрерывна в D;

г) *для всякой* $f \in A_c(D)$ *и* $z \in D$

$$f(z) = \int\limits_{S(D)} f(\zeta)\, Q(z, \zeta)\, d\mu_\zeta. \tag{14.13}$$

Таким образом, граница Шилова играет в теории функций многих комплексных переменных ту же роль, какую играет вся граница области в теории функций одного комплексного переменного. На границе Шилова не только достигают максимума все функции из $A_c(D)$, но и значения этих функций внутри области восстанавливаются с помощью интегрального представления (14.13) по значениям на границе Шилова. Заметим, что если D — круговая сильно звездная область, то в дополнение к утверждению теоремы 14.9 ядро $Q(z, \zeta)$ можно взять из $C(D \times S)$.

Дополним теорему 14.9 простым, но часто полезным утверждением, в некотором смысле обратным к этой теореме.

Теорема 14.10. *Если M — компакт из ∂D и для всяких $f \in A_c(D)$ и $z \in D$*

$$f(z) = \int\limits_{M} f(\zeta)\, R(z, \zeta)\, d\mu_\zeta, \tag{14.14}$$

где μ — положительная мера на M, функция R при фиксированном $z \in D$ абсолютно интегрируема по мере μ_ζ, то $M \supset S(D)$.

Доказательство. Пусть $f \in A_c(D)$, тогда для любого натурального m

$$|f(z)|^m = \left| \int\limits_M f(\zeta)^m R(z, \zeta)\, d\mu_\zeta \right| \leqslant \left(\sup_M |f(\zeta)|\right)^m \int\limits_M |R(z, \zeta)|\, d\mu_\varepsilon.$$

Теперь, извлекая корень степени m и устремив $m \to \infty$, получим, что M — определяющее множество. Значит, $M \supset S(D)$. $\square$

15. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В КЛАССИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

Классическими областями называют области в $\mathbb{C}^n$ следующих четырех типов (см. [167]).

1. Область D_{I}, образованная матрицами z из m строк и k столбцов (с комплексными элементами), удовлетворяющими условию

$$I^{(m)} - zz^* > 0,$$

где $I^{(m)}$ — единичная матрица порядка m; z^* — матрица, комплексно-сопряженная с транспонированной матрицей z'.

2. Область D_{II}, образованная симметрическими матрицами порядка k, удовлетворяющими условию $I^{(k)} - z\bar{z} > 0$.

3. Область D_{III}, образованная кососимметрическими матрицами порядка k, удовлетворяющими условию $I^{(k)} + z\bar{z} > 0$.

4. Область D_{IV}, образованная n-мерными векторами $(z_1, \ldots$ $\ldots, z_n) = z$, $n > 2$, при условии $(zz')^2 + 1 - 2\bar{z}z' > 0$, $|zz'| < 1$.

Все эти области являются полными ограниченными круговыми выпуклыми областями комплексной размерности n, равной соответственно mk, $\frac{k(k+1)}{2}$, $\frac{k(k-1)}{2}$, n. Укажем остов (границу Шилова) каждой из этих областей:

1. Остов S_{I} области D_{I} состоит из матриц u с m строками и k столбцами, удовлетворяющими условию $uu^* = I^{(m)}$. В частности, при $m = k$ многообразие S_{I} совпадает с множеством всех унитарных матриц.

2. Остов S_{II} области D_{II} состоит из всех симметрических унитарных матриц порядка k.

3. Остов S_{III} области D_{III} определяется по-разному в зависимости от четности k. При k четном S_{III} состоит из всех кососимметрических унитарных матриц порядка k. При k нечетном S_{III} совпадает с множеством матриц вида uFu', где u — любая унитарная матрица, а

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dotplus \ldots \dotplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dotplus 0.$$

4. Остов S_{IV} области D_{IV} состоит из всех векторов вида $e^{i\varphi}x$, где $x \in \mathbf{R}^n$ и $xx' = 1$, а φ удовлетворяет условию $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

Все эти остовы $S_{\mathrm{I}} - S_{\mathrm{IV}}$ являются порождающими многообразиями. Для классических областей справедливы интегральные представления с ядрами Сеге для функций из $A_C(D)$:

$$f(z) = \int_S f(\zeta) H(z, \bar{\zeta}) \, d\mu, \tag{15.1}$$

где $z \in D_J$; $S = S_J$; $J = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}$; $d\mu$ — мера Хаара многообразия S. Она является в рассматриваемом случае нормированной мерой Лебега $d\mu = d\sigma / V(S)$. Отметим, что μ инвариантна относительно поворотов, т. е. $\mu E = \mu(e^{i\varphi}E)$ для всякого μ-измеримого множества $E \subset S$.

Приведем конкретный вид ядра Сеге $H(z, \bar{\zeta})$ для классических областей:

1) для области D_{I}

$$H(z, \bar{\zeta}) = \det(I^{(m)} - z\zeta^*)^{-k};$$

2) для области D_{II}

$$H(z, \bar{\zeta}) = \det(I^{(k)} - z\bar{\zeta})^{-(k+1)/2};$$

3) для области D_{III}

$$H(z, \bar{\zeta}) = \det(I^{(k)} + z\bar{\zeta})^{-\left[\frac{k}{2} - \frac{1}{4} - (-1)^k \frac{1}{4}\right]};$$

4) для области D_{IV}

$$H(z, \bar{\zeta}) = H(z, \varphi, x) = [(x - e^{-i\varphi}z)(x - e^{-i\varphi}z)']^{-(n/2)}.$$

Подробное доказательство (15.1) можно найти в [167]. Здесь ограничимся простыми соображениями, исходящими от Митчел [221] и позволяющими быстро доказать формулу (15.1) для классических областей D_{I} при $k = m$, D_{II}, D_{III} при четном k, D_{IV}. В этих случаях перепишем (15.1) в виде интегрального представления с ядром Коши

$$f(z) = \int_S K(z, \zeta) f(\zeta)\, \dot{\zeta}, \tag{15.2}$$

где
$$K(z, \zeta) = V^{-1} \det{}^{-p}(\zeta - z),$$

для D_{I} $p = m$, для D_{II} $p = \frac{k+1}{2}$, для D_{III} $p = \frac{k-1}{2}$;

$$K(z, \zeta) = V^{-1} [(\zeta - z)'(\zeta - z)]^{-(n/2)}$$

для D_{IV};

$$\dot{\zeta} = c_{m1} \bigwedge_{j,i=1}^{m} d\zeta_{ji} \quad \text{для } D_{\mathrm{I}},$$

$$\dot{\zeta} = c_{k2} \bigwedge_{\substack{j=1\\ j\leqslant k}}^{k} d\zeta_{jk} \quad \text{для } D_{\mathrm{II}},$$

$$\dot{\zeta} = c_{k3} \bigwedge_{\substack{j=1\\ j<k}}^{k-1} d\zeta_{jk} \quad \text{для } D_{\mathrm{III}},$$

$$\dot{\zeta} = c_{n4} \bigwedge_{j=1}^{n} d\zeta_{j} \quad \text{для } D_{\mathrm{IV}};$$

постоянные и порядок следования дифференциалов выбраны так, чтобы

$$\int_S K^{-1}(0, \zeta)\, \dot{\zeta} = V,$$

где $V = V(S)$ — объем остова S.

Теорема 15.1. *Для $f \in A_c(D)$, где D — классическая область D_{I} при $k = m$, D_{II}, D_{III} при четном k или D_{IV}, справедливо интегральное представление с ядром Коши* (15.2).

Доказательство. Ограничимся случаем D_{I} при $k = m$, другие случаи рассматриваются аналогично. Известно, что множество аналитических автоморфизмов D_{I}, переводящих z в 0, и обратных автоморфизмов можно записать в виде (см. [75])

$$\begin{gathered} w = a(\zeta - z)(d - dz^*\zeta)^{-1}, \\ \zeta = \sigma(w) = (a + wdz^*)^{-1}(wd + az) = \\ = (a^*w + zd^*)(d^* + z^*aw)^{-1}, \end{gathered} \tag{15.3}$$

при условиях

$$a(I^{(m)} - zz^*)a^* = I^{(m)},\ d(I^{(m)} - z^*z)d^* = I^{(m)},$$
$$z^*a^*a = d^*dz^*, \tag{15.4}$$
$$a^*a - zd^*dz^* = I^{(m)},\ d^*d - z^*a^*az = I^{(m)}.$$

Эти преобразования не меняют остов S_{I}. Предположим, что $f \in A(\overline{D}_{\text{I}})$, и рассмотрим выражение

$$F(z, \zeta, \zeta^*, \dot{\zeta}) = f(\zeta)\det{}^{-m}(I^{(m)} - \zeta^*z)\,dv_\zeta,$$

где dv_ζ — элемент объема остова S_{I}, $dv_\zeta = \det{}^{-m}\zeta\dot{\zeta}$. При отображении (15.3) $\dot{\zeta} = \frac{\partial\zeta}{\partial w}\dot{w}$ и

$$\frac{\partial\zeta}{\partial w} = \det{}^{-m}(a + wdz^*)\det{}^{-m}(d^* + z^*a^*w).$$

Далее, так как $w^*w = I^{(m)}$,

$$dv_\zeta = \det{}^{-m}(d + w^*az)\det{}^{-m}(d^* + z^*a^*w)\,dv_w$$

и

$$I^{(m)} - \zeta^*z = (d + w^*az)^{-1}d(I^{(m)} - z^*z).$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\dot{S}_{\text{I}}} F(z, \zeta, \zeta^*, \dot{\zeta}) = \det{}^{-m} d\det{}^{-m}\left(I^{(m)} - z^*z\right)\int\limits_{\dot{S}_{\text{I}}} f_0(w)\,dv_w,$$

где
$$f_0(w) = \det{}^{-m}(d^* + z^*a^*w)f(\sigma(w)) \in A(\overline{D}_{\text{I}}). \tag{15.5}$$

По классической теореме Картана функция из $A(\overline{D}_{\text{I}})$ разлагается на $\overline{D}_{\text{I}}$ в равномерно сходящийся ряд однородных полиномов

$$f_0(w) = \sum_{j=0}^{\infty} a_jP_j(w),$$

где $P_j(w)$ — однородные полиномы степени j, в частности, $a_0P_0 = f_0(0)$. Так как множество S_{I} круговое, то (сравни с доказательствами теорем 10.1 и 13.1) для $j > 0$ верно равенство

$$\int\limits_{\dot{S}_{\text{I}}} P_j(w)\,dv_w = 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\dot{S}_{\text{I}}} f_0(w)\,dv_w = V(S_{\text{I}})f_0(0),$$

и из (15.4) и (15.5) получаем

$$\frac{1}{V(S_{\text{I}})}\int\limits_{\dot{S}_{\text{I}}} F(z, \zeta, \zeta^*, \dot{\zeta}) = f(z).$$

Теперь, учитывая $\zeta^*\zeta = I^{(m)}$, находим

$$\det{}^{-m}(I^{(m)} - \zeta^* z)\, dv_\zeta = \det{}^{-m}(\zeta - z)\dot{\zeta},$$

т. е. для функций $f \in A(\bar{D}_\mathrm{I})$ верно (15.2).

Пусть теперь $f \in A_C(D_\mathrm{I})$, тогда $f(tz)$ при $0 \leqslant t < 1$ входит в класс $A(\bar{D}_\mathrm{I})$, поэтому

$$f(tz) = \int_{S_I} K(z, \zeta) f(t\zeta)\dot{\zeta}$$

и остается сделать предельный переход при $t \to \infty$. □

Отметим теперь связь интегрального представления с ядром Сеге (15.1) с решением некоторой минимальной проблемы. Рассмотрим подкласс $Q \subset A(\bar{D})$ функций таких, что $f(z) = 1$, где z — фиксированная точка D. Предположим, что существует функция $M(z, \zeta) \in Q$, которая минимизирует интеграл

$$\int_S |f(\zeta)|^2\, dv_\zeta,\quad f \in Q. \tag{15.6}$$

Положим

$$H^*(z, \bar{\zeta}) = \frac{M(z, \zeta)\, V(S)}{\int_S M(z, w)\, dv_w}, \tag{15.7}$$

тогда

$$\frac{H^*(z, \bar{\zeta})}{H^*(z, \bar{z})} = \frac{M(z, \zeta)}{\int_S M(z, w)\, dv_w} \int_S \frac{M(z, w)\, dv_w}{M(z, z)} = M(z, \zeta).$$

Доказательство того, что указанная экстремальная проблема имеет решение, аналогично хорошо известному доказательству похожего факта для интегрирования по всей области D и ядра Бергмана (см. [195]). Для рассматриваемых классических областей ядро Сеге из (15.7) имеет указанный выше вид (короткое доказательство этого факта см. в [220]). Далее из минимального свойства имеем для любого $\varepsilon > 0$ и $f \in A(\bar{D})$

$$\int_S |M|^2\, dv \leqslant \int_S |M + \varepsilon[f(\zeta) - f(z)]|^2\, dv_\zeta,$$

откуда

$$2\operatorname{Re}\left[\varepsilon \int_S M^*[f(\zeta) - f(z)]\, dv_\zeta\right] + |\varepsilon|^2 \int_S |f(\zeta) - f(z)|^2\, dv_\zeta \geqslant 0.$$

Теперь из произвольности $|\varepsilon|$ и $\arg \varepsilon$ следует, что

$$\int_S M^*[f(\zeta) - f(z)]\, dv_\zeta = 0,$$

т. е. верно (15.1). Одновременно мы получили, что минимальное значение интеграла (15.6) равно

$$\frac{1}{H(\zeta,\bar{\zeta})},$$

так как

$$\int\limits_S |M(z,\zeta)|^2\,dv_\zeta = \frac{1}{|H(z,\bar{z})|^2}\int\limits_S H(z,\bar{\zeta})\,H^*(z,\bar{\zeta})\,dv_\zeta = \frac{1}{H(z,\bar{z})}.$$

Теперь осталось, как и при доказательстве теоремы 15.1, сделать переход от класса $A(D)$ к классу $A_C(D)$. Таким образом, интегральное представление (15.1) для функций, голоморфных в классических областях, нетрудно получить, либо опираясь на алгебраическую структуру этих областей, либо решая соответствующую экстремальную задачу на минимум интеграла (15.6) (в последнем случае тоже приходится при вычислении явного вида решения использовать указанную алгебраическую структуру).

ГЛАВА 4

МНОГОМЕРНЫЕ АНАЛОГИ ФОРМУЛЫ КАРЛЕМАНА С ИНТЕГРИРОВАНИЕМ ПО ГРАНИЧНЫМ МНОЖЕСТВАМ МАКСИМАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

16. ФОРМУЛА КАРЛЕМАНА НА ОСНОВЕ ЯДРА МАРТИНЕЛЛИ — БОХНЕРА ИЛИ КОШИ — ФАНТАППЬЕ

1°. Первоначальная идея Карлемана построить «гасящую» функцию, позволяющую из интегрального представления голоморфных функций с интегрированием по всей границе ∂D области D получить интегральное представление с интегрированием по множеству $M \subset \partial D$, сводилась к необходимости располагать функцией $\varphi(z)$ класса $H^\infty(D)$, удовлетворяющей двум условиям (см. 1):

1) $|\varphi(\zeta)| = 1$ почти всюду на $\partial D \setminus M$,

2) $|\varphi(z)| > 1$ в D.

Однако в случае области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, такой функции не существует уже для строго псевдовыпуклых областей, если, например, $\partial D \setminus M$ содержит хотя бы одну внутреннюю точку a границы ∂D. Действительно, рассмотрим для простоты выпуклую область $D \subset \mathbb{C}^2$ с гладкой границей, и пусть α_a — касательная комплексная прямая к ∂D в точке a. Будем сдвигать α_a параллельно внутрь D. При малых сдвигах пересечение сдвинутой комплексной прямой $\tilde{\alpha}_a$ и ∂D будет лежать в окрестности $U_a \subset \partial D \setminus M$ точки a на ∂D. Найдутся такие сдвиги, что $\varphi|_{\tilde{\alpha}_a}$ будет на $\tilde{\alpha}_a \cap \partial D$ почти всюду по модулю равна 1, но на $\tilde{\alpha}_a \cap D$ — больше 1, что невозможно.

Правда, доказано существование функций класса $H^\infty(D)$ со свойством 1) (для шара см. [36]), но этого мало для осуществления идеи Карлемана. Можно применить идею Карлемана в сечениях области D комплексными прямыми.

Рассмотрим ядро Мартинелли — Бохнера $\omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z})$ (см. разд. 10) и зафиксируем точку $z \in D$. Все комплексные прямые, проходящие через z, не лежащие в гиперплоскости $\{\zeta\colon \zeta_1 = z_1\}$, можно записать в виде $\alpha = \alpha(v, z) = \{\zeta\colon \zeta_1 = z_1 + t,\ \zeta_2 = z_2 + v_2 t, \ldots, \zeta_n = z_n + v_n t,\ t \in \mathbf{C}^1\}$, где $v = (v_2, \ldots, v_n)$. Важную роль для дальнейшего играет следующий факт.

Лемма 16.1.

$$\omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z}) = \frac{1}{2\pi i}\frac{dt}{t} \wedge \lambda(v), \tag{16.1}$$

где

$$\lambda(v) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^{n-1}}\frac{d\bar{v} \wedge dv}{\left(1 + |v_2|^2 + \ldots + |v_n|^2\right)^n};$$

$$\int\limits_{\{\alpha\}} \lambda(v) = 1. \tag{16.2}$$

Доказательство. Сделаем сдвиг в $\mathbf{C}^n$ так, чтобы гиперплоскость $\{\zeta\colon \zeta_1 = z_1\}$ перешла в гиперплоскость $\{\zeta\colon \zeta_1 = 0\}$, тогда ядро Мартинелли — Бохнера $\omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z})$ перейдет в ядро $\omega(\zeta, \bar{\zeta})$. Далее, произведем замену переменных $\zeta_1 = t$, $\zeta_2 = v_2 t, \ldots$ $\ldots, \zeta_n = v_n t$, получим

$$d\zeta = d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n = \begin{vmatrix} -t^2 & 0 & \ldots & 0 \\ -v_2 t^2 & t & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -v_n t^2 & 0 & \ldots & t \end{vmatrix} d\frac{1}{t} \wedge dv = -t^{n+1}\, d\frac{1}{t} \wedge dv.$$

Заметим, что

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1}\bar{\zeta}_j d\bar{\zeta}[j] = \bar{\Delta}_1 d\bar{v} + \sum_{j=2}^{n} \bar{\Delta}_j\, d\frac{1}{t} \wedge d\bar{v}[j],$$

где

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \ldots & \zeta_n \\ \zeta'_{11/t} & \zeta'_{21/t} & \ldots & \zeta'_{n1/t} \\ \zeta'_{1v_2} & \zeta'_{2v_2} & \ldots & \zeta'_{nv_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [j] & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \zeta'_{1v_n} & \zeta'_{2v_n} & \ldots & \zeta'_{nv_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & v_2 t & \ldots & v_n t \\ -t^2 & -v_2 t^2 & \ldots & v_n t^2 \\ 0 & t & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [j] & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & t \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{cases} t^n, & \text{если } j = 1, \\ 0, & \text{если } j > 1. \end{cases}$$

Поэтому верно равенство (16.1). Для доказательства (16.2) используем формулу Мартинелли — Бохнера (10.1) и формулу Коши в сечениях $\alpha(v, z) \cap D$ (кроме комплексных прямых, лежащих в гиперплоскости $\{\zeta: \zeta_1 = z_1\}$, и кроме таких α, что сечение $\alpha \cap \partial D$ не является кусочно-гладким, т. е. формулу Коши применяем почти во всех сечениях $\alpha \cap D$)

$$\int_{\partial D} f(\zeta)\,\omega(\zeta - z, \bar\zeta - \bar z) = f(z) \int_{\{\alpha\}} \lambda(v), \tag{16.3}$$

откуда и из (10.1) вытекает (16.2). □

Отметим, что форма $\lambda(v)$ есть форма Фубини — Штуди, записанная в локальных координатах в $\mathbf{C}^{n-1}$. Интеграл (16.2) можно вычислить непосредственно (см., например, лемму 19.2 или [175, с. 20]), тогда (16.3) даст новое доказательство формулы Мартинелли — Бохнера (10.1) с использованием почти во всех сечениях классической формулы Коши для голоморфных функций одного комплексного переменного.

В этом пункте будем в дальнейшем считать, что область D принадлежит одному из следующих классов: 1) классу выпуклых ограниченных областей с кусочно-гладкой границей, 2) классу линейно-выпуклых областей с гладкой границей. Обозначим $N = N(z, M)$ множество таких v, что пересечение $\alpha(v, z) \cap M$ имеет положительную меру Лебега. Если множество $M \subset \partial D$ имеет положительную $(2n-1)$-мерную меру Лебега, то

$$0 < \int_N \lambda(v) \leqslant 1 \tag{16.4}$$

(форма $\lambda(v)$ имеет постоянный знак, из (16.2) следует положительность интеграла (16.4)). Для каждой $\alpha(v, z)$ при $v \in N$ рассмотрим голоморфную по t функцию $\varphi_{z,v}(t) = \exp \psi_{z,v}(t)$, построенную по методу разд. 1 с помощью формулы, аналогичной (1.16), что возможно в нашем случае, так как сечение $\alpha \cap D$ выпукло, если D из класса 1), и связно и односвязно, если D из класса 2) (см. [182]). В обоих случаях $D \in H$.

При интегрировании по M формы Мартинелли — Бохнера $\omega(\zeta - z, \bar\zeta - \bar z)$ можно в силу (16.1) интегрировать сначала по t, затем по v. На этом пути приходим к следующему *многомерному аналогу формулы Карлемана.*

Теорема 16.2 (Айзенберг). *Для множества $M \subset \partial D$ положительной $(2n-1)$-мерной меры Лебега, голоморфной функции $f \in H^1(D)$ и точки $z \in D \subset \mathbf{C}^n$, $n > 1$, справедливо интегральное представление*

$$f(z) = \frac{1}{\int\limits_N \lambda(v)} \lim_{m\to\infty} \int_M f(\zeta) \left[\frac{\varphi_{z,v}(t)}{\varphi_{z,v}(0)}\right]^m \omega(\zeta - z, \bar\zeta - \bar z). \tag{16.5}$$

Доказательство. По построению

$$\varphi_{z,v}(t)=\exp\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha(v,z)\cap M}\frac{\tau+t}{\tau-t}\frac{d\tau}{\tau}. \tag{16.6}$$

Из (16.6) следует голоморфность функции $\varphi_{z,v}(t)$ по t при фиксированных z, v. Обозначим

$$Q=\bigcup_{\substack{\alpha=\alpha(v,z)\\ v\in N}}(\alpha\cap\partial D).$$

Используя формулу (16.1) и формулу Коши в почти всех сечениях $\alpha(v, z)\cap D$ (в которых функция f входит в класс H^1 как функция одного комплексного переменного t) в точке $t=0$, получаем для любого натурального m

$$f(z)=\frac{1}{\int\limits_N\lambda(v)}\int\limits_Q f(\zeta)\left[\frac{\varphi_{z,v}(t)}{\varphi_{z,v}(0)}\right]^m\omega\left(\zeta-z,\bar\zeta-\bar z\right). \tag{16.7}$$

Положим

$$f_m(z)=\frac{1}{\int\limits_N\lambda(v)}\int\limits_M f(\zeta)\left[\frac{\varphi_{z,v}(t)}{\varphi_{z,v}(0)}\right]^m\omega\left(\zeta-z.\bar\zeta-\bar z\right), \tag{16.8}$$

отсюда и из (16.7) вытекает

$$|f(z)-f_m(z)|\leqslant\frac{1}{\int\limits_N\lambda(v)}\int\limits_{Q\setminus M}\frac{|f|\,|\omega(\zeta-z,\bar\zeta-\bar z)|}{|\varphi_{z,v}(0)|^m}, \tag{16.9}$$

так как на множестве $Q\setminus M$ имеем $|\varphi_{z,v}(t)|=1$.

Если $m_{2n-1}(Q\setminus M)=0$, то из неравенства (16.9) следует, что $f(z)=f_m(z)$ для всех m, т. е. в этом случае (для такой точки z) формула (16.5) верна и без предельного перехода. Если же $m_{2n-1}(Q\setminus M)>0$, то введем множество $\tilde N$ таких v, что $v\in N$, $m_1(\alpha(v, z)\cap(Q\setminus M))>0$; тогда из (16.9) получаем

$$|f(z)-f_m(z)|\leqslant\frac{C_z}{2\pi\int\limits_N\lambda(v)}\int\limits_{\tilde N}\frac{\lambda(v)}{|\varphi_{z,v}(0)|^m}\int\limits_{\alpha(v,z)\cap(Q\setminus M)}|f|\left|\frac{dt}{t}\right|, \tag{16.10}$$

где постоянная C_z оценивает сверху модуль ядра Мартинелли — Бохнера $\omega(\zeta-z,\ \bar\zeta-\bar z)$ при данной фиксированной точке $z\in D$ и любом $\zeta\in\partial D$. Заметим, что из (16.6) следует, что при $v\in\tilde N$ справедливо

$$\varphi_{z,v}(0)=\exp\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha(v,z)\cap(Q\setminus CM)}\frac{d\tau}{\tau}>1,$$

поэтому из (16.10) вытекает формула (16.5). □

Возможно, что сходимость в (16.5) равномерна на каждом компакте, лежащем в области D. В частности, постоянная C_z может быть выбрана одной и той же для z из такого компакта.

Задача аналитического продолжения, решаемая формулой Карлемана или ее многомерными аналогами, не является, как известно, корректной. Однако она будет условно устойчивой, если ограничиваться классом голоморфных функций $f \in A_C(D)$, удовлетворяющих неравенству $|f| \leqslant C$ с фиксированной постоянной C. Данный факт следует из соответствующей теоремы о двух константах. Например, для кольца $D = \{z\colon \rho < |z| < r\} \subset \mathbf{C}^1$ и множества $M = \gamma_r$, рассмотренных в примере 3 из разр. 1, нужно воспользоваться классическим утверждением Адамара: если $f \in A_C(D), m_\rho = \max\limits_{\gamma_\rho} |f|$, $m_r = \max\limits_{\gamma_r} |f|$, тогда верно неравенство

$$|f(z)| \leqslant m_\rho^{(\ln r - \ln |z|)/(\ln r - \ln \rho)} m_r^{(\ln |z| - \ln \rho)/(\ln r - \ln \rho)}. \tag{16.11}$$

Действительно, в рассматриваемом классе функций $m_\rho \leqslant C$, и если $m_r(f_j) \to 0$, то из (16.11) вытекает, что $|f_j(z)| \to 0$, т. е. задача, решаемая формулой (1.8), устойчива в этом классе.

В случае односвязной области $D \subset \mathbf{C}^1$ можно рассмотреть гармоническую меру множества $M \subset \partial D$, $m_1(M) > 0$, в области D относительно точки z, т. е. функцию $\omega(z)$, являющуюся решением соответствующей задачи Дирихле ($\omega(z)$ — это функция $u(x, y)$ в формуле (1.2) из разр. 1), тогда вместо (16.11) справедливо (см., например, [147, 111])

$$|f(z)| \leqslant C^{1-\omega(z)} m^{\omega(z)}, \tag{16.12}$$

где $m = \max\limits_M |f|$. Из (16.12) также следует устойчивость задачи, решаемой формулой Карлемана, в соответствующем классе функций.

Понятие гармонической меры обобщено для множеств в $\mathbf{C}^n$, $n > 1$, Садуллаевым [141]. Пусть $D \subset \mathbf{C}^n$ — область с гладкой границей ∂D, обозначим $A_\alpha(\zeta) = \{z\colon z \in D, |z - \zeta| \leqslant \alpha\delta_\zeta(z)\}$, где $\zeta \in \partial D$, $\alpha \geqslant 1$, $\delta_\zeta(z)$ — расстояние от точки z до касательной плоскости к ∂D в точке ζ. Для множества $K \subset \overline{D}$ рассмотрим $H(K, D)$ — класс неотрицательных плюрисупергармонических в D функций u таких, что $u_*(z) \geqslant 1$ для $z \in K$, где $u_*(z) = u(z)$, если $z \in D$, и

$$u_*(z) = \inf_{\alpha > 1} \varliminf_{\substack{\zeta \to z \\ \zeta \in A_\alpha(z)}} u(\zeta),$$

если $z \in \partial D$. Функция

$$\omega^*(z, K, D) = \varliminf_{\zeta \to z} \omega(\zeta, K, D) = \varliminf_{\zeta \to z} \left\{ \inf_{u \in H(K,D)} u(\zeta) \right\}$$

называется *P-мерой множества K относительно области D*. Эта функция плюрисупергармонична в D и для всех $z \in D$ справедливо неравенство $0 \leqslant \omega^*(z, K, D) \leqslant 1$. Из результатов Садуллаева [141, 142] следует, что если $f \in A_C(D)$, $|f| \leqslant C$ в D и $|f| \leqslant m$ на M, то для всех $z \in D$ имеет место неравенство

$$|f(z)| \leqslant C^{1-\omega^*(z,K,D)} m^{\omega^*(z,K,D)}, \tag{16.13}$$

обобщающее неравенство (16.12). Из (16.13) будет следовать условная устойчивость задачи, решаемой формулой Карлемана, если множество $M \subset \partial D$ таково, что его P-мера $\omega^*(z, M, D) \neq 0$ (и значит, $\omega^*(z, M, D) > 0$). Нужная нам информация о неравенстве нулю P-меры множества $M \subset \partial D$ содержится в следующей теореме (ее доказательство см. в [141]).

Теорема 16.3 (Садуллаев). *Если область $D \subset \mathbb{C}^n$ имеет гладкую границу и $Q \subset \partial D$ является порождающим многообразием класса C^3, а M — подмножество Q, имеющее положительную меру Лебега на Q, то $\omega^*(z, M, D) \neq 0$ для всех $z \in D$.*

Так как вся граница ∂D области D является порождающим многообразием, то из теоремы 16.3 вытекает условная устойчивость задачи аналитического продолжения, решаемой формулой (16.5), если $\partial D \in C^3$. Однако для рассматриваемого в этом пункте класса областей D, у которых сечения комплексными прямыми односвязны, можно обойтись и без указанного дополнительного требования $\partial D \in C^3$. Нужно для каждой точки $z \in D$ выбирать некоторую комплексную прямую $\alpha(v, z)$, для которой $v \in N$, и к сужению $f|_\alpha$ применить одномерную теорему о двух константах (16.12). Другой способ состоит в том, чтобы применить (16.12) для всех комплексных прямых $\alpha(v, z)$, $v \in N$, затем проинтегрировать соответствующее неравенство по множеству N.

Заметим, что если рассмотреть оператор $R_m f = f_m$, где f_m определена равенством (16.8), то семейство $\{R_m\}$ будет регуляризирующим семейством для данной задачи аналитического продолжения при подходящем выборе пространства (см. примеры из [111]). Точность приближенного решения оценивается неравенствами (16.9) или (16.10). Указанные неравенства позволяют получить оценки для точек z, лежащих в области D.

Далее обсудим вопрос о граничных значениях многомерного интеграла Карлемана (16.5), т. е. о вычислении следующего выражения:

$$\frac{1}{\int\limits_N \lambda(v)} \lim_{m \to \infty} \int\limits_M f(\zeta) \left[\frac{\varphi_{z,v}(t)}{\varphi_{z,v}(0)}\right]^m \omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z}) = J(z) \tag{16.14}$$

— правой части формулы (16.5) не для $z \in D$, а для $z \in \partial D$. При $z \in \partial D \setminus M$ интеграл в (16.14) собственный, а при $z \in M$ он рассматривается в смысле главного значения по Коши. Пусть (как в разд. 4) M — замкнутое множество.

Теорема 16.4. *Если $f \in A^\alpha(D)$, то для $z \in \partial D \setminus M$ имеет место равенство $J(z) = f(z)$, а для $z \in M$ почти всюду $J(z) = \frac{1}{2} f(z)$.*

Доказательство. Утверждение этой теоремы получается из леммы 16.1, теоремы 4.2, обобщенной для почти всех сечений $\alpha \cap D$ (что возможно, если D — области, которые рассматриваются в настоящем пункте, см. разр. 4), а также того факта, что интеграл (16. 14) при $z \in M$ (понимаемый в смысле главного значения по Коши) почти при всех z из M можно в силу (16.1) представить в виде повторного интеграла: одномерного интеграла типа Коши по сечению $\alpha(v, z) \cap \partial D$ (который почти для всех $v \in N$ понимается тоже в смысле главного значения) и собственного интеграла по переменным v. □

Аналогично получается следующее утверждение, опирающееся на теорему 4.4 почти во всех сечениях $\alpha(v, z) \cap D$, $v \in N$.

Теорема 16.5. *Если $f \in H^1(D)$, то почти всюду на M имеет место $J(z) = \frac{1}{2} f(z)$. Если $f \in H^p(D)$, $p > 1$, тогда почти всюду на $\partial D \setminus M$ верно $J(z) = f(z)$.*

Здесь и при $z \in \partial D \setminus M$ можно рассматривать случай $f \in H^1(D)$. Утверждение теоремы 16.5 сохранится и в этом случае, но доказательство станет значительно сложнее.

2°. Приведем еще один результат, тоже опирающийся на интегральное представление Мартинелли — Бохнера,— формулу Карлемана для конуса (в некотором смысле этот результат напоминает самый первый результат самого Карлемана, см. пример 5 в разд. 1). Рассмотрим область D_0, ограниченную частью поверхности T конуса с вершиной в точке z^0

$$T = \Big\{\zeta:\ \tau^2 (\xi_{2n} - x_{2n}^0)^2 = \sum_{j=1}^{2n-1} (\xi_j - x_j^0)^2,\ \zeta_j = \xi_j + i\xi_{j+n},$$
$$z_j^0 = x_j^0 + i x_{j+n}^0,\ j = 1, \ldots, n\Big\},$$

где $\tau = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2\rho}$, $\rho > 1$, и гладким куском поверхности S, лежащим внутри T.

Пусть

$$K(id + \xi_{2n}) = E_\rho \left[\frac{\sigma^{1/\rho}}{r} (i\alpha\tau + \tau\xi_{2n} - \tau x_{2n} - \alpha_0\right],\ \sigma > 0,$$

$$K(x_{2n}) = E_\rho(\sigma^{1/\rho}) \approx \rho e^\sigma \text{ при } \sigma \to \infty,$$

где $r = -\alpha_0 + \tau(x_{2n} - x_{2n}^0) > 0$; $z_j = x_j + i x_{j+n}$, $j = 1, \ldots, n$;

$$\alpha_0^2 = \sum_{j=1}^{2n-1} (x_j - x_j^0)^2;$$

E_ρ — целая функция Миттаг — Лефлера $E_\rho(u) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{\Gamma\left(1 + \frac{j}{\rho}\right)}$.

Далее при $n \geqslant 2$ положим

$$s = \sum_{j=1}^{n} (\xi_j - x_j)^2 + \sum_{\nu=1}^{n-2} (\xi_{\nu+n} - x_{\nu+n})^2, \quad \alpha^2 = s + (\xi_{2n-1} - x_{2n-1})^2.$$

Введем дифференциальную форму

$$\Omega_\sigma(\zeta, z) = \frac{(-1)^n}{(2\pi i)^n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial \Phi(\zeta, z)}{\partial \zeta_j} d\bar{\zeta}[j] \wedge d\zeta,$$

где

$$\Phi(\zeta, z) = \frac{1}{K(x_{2n})} \frac{\partial^{n-2}}{\partial s^{n-2}} \operatorname{Im}\left[\frac{K(i\alpha + \xi_{2n})}{\alpha(i\alpha + \xi_{2n} - x_{2n})}\right].$$

Теорема 16.6 (Ярмухамедов). *Для всякой функции* $f \in A_C(D_0)$ *и точки* $z \in D_0 \subset \mathbf{C}^n$, $n > 1$, *справедливо интегральное представление*

$$f(z) = \lim_{\sigma \to \infty} \int_S f(\zeta) \Omega_\sigma(\zeta, z). \tag{16.15}$$

Если $|f(z)| \leqslant C$ *при* $z \in D$ *и* $m \leqslant \max\limits_S |f|$, *то для всякой точки* $z \in D_0$ *верно неравенство*

$$|f(z)| \leqslant C^{1-(r/R)^\rho} m^{(r/R)^\rho}, \tag{16.16}$$

где
$$R = R(z) = \max_{\zeta \in S} |i\tau\alpha + \tau\xi_{2n} - \tau x_{2n}^0 - \alpha_0|.$$

Заметим, что неравенство (16.16) (аналог теоремы о двух константах для данного случая) влечет условную устойчивость задачи аналитического продолжения, решаемой формулой Карлемана (16.15).

3°. Идею, примененную в п. 1° («гасящая» функция строится в сечениях области комплексными прямыми), можно использовать и для других ядер — частных случаев ядра Коши — Фантаппье, а не только для ядра Мартинелли — Бохнера. Продемонстрируем это на одном характерном примере. Для того чтобы избежать громоздких выражений, ограничимся случаем $n = 2$. Тогда из формулы (11.23) с помощью замены переменных получаем так называемый *интеграл Темлякова II рода* для $f \in H^1(D)$ и $z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_{|\xi|=1} \frac{\xi f\left(r_1(\tau)\xi, r_2(\tau)\xi e^{it}\right)}{(\xi - u)^2} d\xi, \tag{16.17}$$

где D — двоякокруговая выпуклая область пространства $\mathbf{C}^2$ с центром в нуле, граница которой $\partial D \in C^2$ и строго логарифмически выпукла. Из этих свойств границы следует, что ее можно задать в виде $\partial D = \{z\colon |z_1| = r_1(\tau),\ |z_2| = r_2(\tau),\ 0 \leqslant \tau \leqslant 1\}$, где $r_1(0) = 0$,

$0 < r_1'(\tau) \leqslant r_1(\tau)/\tau,\ r_1(1) < \infty;$

$$r_2(\tau) = \exp\left[-\int_0^\tau \frac{\tau}{1-\tau}\, d\ln r_1(\tau)\right].$$

Наконец, u в (16.17) имеет вид

$$u = \tau\frac{z_1}{r_1(\tau)} + (1-\tau)\frac{z_2}{r_2(\tau)} e^{-it}.$$

Пусть далее $L(f) = f + z_1 f'_{z_1} + z_2 f'_{z_2}$. Если $f \in A(D)$, то $L(f)$ тоже входит в $A(D)$ и, следовательно, представима в D степенным рядом

$$F(z_1, z_2) = \sum_{j_1, j_2 \geqslant 0} a_{j_1 j_2} z_1^{j_1} z_2^{j_2},$$

то существует единственное голоморфное в D решение f уравнения $L(f) = F$, и это решение разлагается в области D в степенной ряд

$$f(z_1, z_2) = \sum_{j_1, j_2 \geqslant 0} \frac{a_{j_1 j_2}}{(j_1 + j_2 + 1)} z_1^{j_1} z_2^{j_2}.$$

Заметим, что

$$L\left[\frac{1}{\xi - u}\right] = \frac{\xi}{(\xi - u)^2},$$

поэтому, если от обеих частей формулы Темлякова (16.17) взять оператор L^{-1}, то получим *интеграл Темлякова I рода для* $F \in H^1(D)$ и $z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_{|\xi|=1} \frac{F\left(r_1(\tau)\,\xi,\ r_2(\tau)\,\xi e^{it}\right)}{\xi - u}\, d\xi. \qquad (16.18)$$

Эта формула удобна тем, что внутренний интеграл в ней имеет ядро Коши; это обстоятельство помогает при некоторых приложениях интегралов Темлякова. Одним из таких приложений и является своеобразная формула Карлемана с голоморфным ядром. В каждом сечении области D комплексной прямой, проходящей через нуль, мы будем строить «гасящую» функцию по методу разд. 1, т. е. функцию $\varphi_{t,\tau}(u)$. Пусть $E \subset \partial D$ — измеримое множество, а $\chi_E(t, \tau, \xi)$ — его характеристическая функция. Тогда из формулы (16.18) получается:

Теорема 16.7 (Шейнов). *Если функция*

$$\omega(t, \tau) = \int_{|\xi|=1} \chi_E(t, \tau, \xi)\, |d\xi|$$

почти при всех (t, τ) *отлична от нуля, то для* $F = L(f) \in \overset{\circ}{H}{}^1(D)$ *и* $z \in D$ *справедлива формула*

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_{E(t,\tau,\xi)} \frac{F\left(r_1(\tau)\xi, r_2(\tau)\xi e^{it}\right)}{\xi - u} \left[\frac{\varphi_{t,\tau}(\xi)}{\varphi_{t,\tau}(u)}\right]^m d\xi.$$

17. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

1°. Теоремы о существовании многомерных аналогов формулы Карлемана с интегрированием по граничным множествам максимальной размерности можно получать двумя способами: либо используя идеи М. М. Лаврентьева (см. разд. 2), либо опираясь на результаты разд. 8. Обсудим первый подход. При $n > 1$ ядро интегрального представления голоморфных функций, в котором интегрирование производится по ∂D, т. е. соответствующую внешнюю дифференциальную форму типа $(n, n-1)$ нужно аппроксимировать на $\partial D \setminus M$ (где $M \subset \partial D$, $m_{2n-1}(M) > 0$) $\bar\partial$-замкнутыми в $\bar D$ внешними дифференциальными формами того же типа. Эти формы по своим свойствам очень напоминают голоморфные функции одного комплексного переменного (см. [25], где указанные свойства подробно изложены). В частности, имеет место следующий *аналог теоремы Рунге.*

Предложение 17.1. *Пусть* $\Omega_1 \subset \Omega_2$ — *открытые множества в* $\mathbb{C}^n$. *Следующие условия эквивалентны:*

1. *Всякую форму из* $Z^m_{n,n-1}(\Omega_1)$ *можно приблизить в метрике* $C^m_{n,n-1}(\Omega_1)$ *формами из* $Z^\infty_{n,n-1}(\Omega_2)$.

2. *Любая ограниченная связная компонента множества* $\mathbb{C}^n \setminus \Omega_1$ *пересекается с множеством* $\mathbb{C}^n \setminus \Omega_2$.

Доказательство этого утверждения в той его части, где речь идет о приближении, можно проделать столь же конструктивно, как и доказательство теоремы Рунге для голоморфных функций одного комплексного переменного, т. е. с помощью цепочки интегралов и разложений в ряды (см. [25, § 9]). Это же замечание относится и к следующему утверждению об аппроксимации на компактах.

Предложение 17.2. *Пусть* K — *компакт в* $\mathbb{C}^n$ *у которого* $2n$-*мерная мера* $m_{2n}(K) = 0$. *Тогда пространство форм типа* $(n, n-1)$, *бесконечно дифференцируемых и* $\bar\partial$-*замкнутых в окрестности* K, *плотно в* $C_{n,n-1}(K)$.

Наконец, отметим еще, что если в предложении 17.1 (в той его части, где речь идет о приближении форм) и в предложении 17.2 соответствующие внешние дифференциальные формы голоморфно зависят от параметра, то и аппроксимирующие формы можно выбрать такими, чтобы они тоже голоморфно зависели от данного параметра. Это следует из конструктивных доказательств указанных предложений (см., например, [25, § 9, 11]) с помощью цепочки интегралов и разложений в ряды.

Далее для данной ограниченной области $D \subset \mathbf{C}^n$ с кусочно-гладкой границей ∂D рассмотрим интегральное представление (14.10) с голоморфным по z ядром

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) B(z, \zeta)\, d\sigma_\zeta, \tag{17.1}$$

где $f \in A_C(D)$, ядро $B(z, \zeta)$ по переменному z входит в $A(D)$ и $B(z, \zeta) \in C(\{(z, \zeta)\colon z \in D, \zeta \in \partial D\})$. Пусть множество $M \subset \partial D$ не просто имеет положительную меру $m_{2n-1}(M)$, но и содержит хотя бы одну внутреннюю точку границы ∂D. Соответствующую окрестность этой точки на ∂D обозначим $\widetilde{M} \subset M$. Форму $B(z, \zeta)\,d\tau_\zeta$ на компакте $K = \partial D \setminus \widetilde{M}$ можно согласно предложению 17.2 и сделанному замечанию аппроксимировать на K формами из $Z^\infty_{n,n-1}(U)$, голоморфно зависящими от z, где U — окрестность K. А эти последние формы можно аппроксимировать формами из $Z^\infty_{n,n-1}(U_1)$, где U_1 — некоторая окрестность замкнутой области $\bar{D}$, т. е. на компакте K можно получить равномерно сходящуюся последовательность форм $\alpha_j \in Z^\infty_{n,n-1}(U_1)$ по ζ и $\alpha_j \in A(D)$ по z такую что

$$\lim_{j\to\infty} \alpha_j(z, \zeta) = B(z, \zeta)\, d\sigma_\zeta \tag{17.2}$$

для всех $\zeta \in K$. С другой стороны,

$$\int_{\partial D} f(\zeta)\, \alpha_j(z, \zeta) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots; \tag{17.3}$$

вычитая теперь из равенства (17.1) равенство (17.3) и учитывая (17.2), приходим к следующему интегральному представлению:

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} \int_{\widetilde{M}} f(\zeta)\, [B(z, \zeta)\, d\sigma_\zeta - \alpha_m(z, \zeta)]. \tag{17.4}$$

Если теперь вспомнить, что $\widetilde{M} \subset M$, то из (17.4) получаем многомерный аналог теоремы 2.1.

Теорема 17.3 (Айзенберг). *Пусть D — ограниченная область в $\mathbf{C}^n$ с кусочно-гладкой границей ∂D и множество $M \subset \partial D$ содержит хотя бы одну точку из ∂D вместе с ее окрестностью на ∂D. Тогда для функций из $A_C(D)$ существует формула Карлемана*

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} \int_{M} f(\zeta)\, (B(z, \zeta)\, d\sigma_\zeta - \alpha_m(z, \zeta)] \tag{17.5}$$

с голоморфным по z ядром, которое строится с помощью цепочки интегралов и разложений в ряды. Если же область $D \in H$, то (17.5) верно для функций из $H^1(D)$.

Рассмотрим теперь вопрос: можно ли избавиться от требования, чтобы множество M содержало хотя бы одну внутреннюю точку ∂D? Покажем, что это возможно; что если просто $m_{2n-1}(M) > 0$, то существует формула Карлемана вида (17.5), хотя и без утверждения о голоморфности ядра по z. При этом потребуется еще одно утверждение про аппроксимацию форм (см. [25], разд. 11).

Предложение 17.4. *Если D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с кусочно-гладкой границей и $z^0 \in D$ — произвольная фиксированная точка, то формы вида $\alpha_1 + \alpha_2$ где $\alpha_1 \in Z^\infty_{n,n-}(\overline{D})$ и $\alpha_2 \in Z^\infty_{n,n-1}(\mathbb{C}^n \setminus z^0\}$, плотны в $C_{n,n-1}(\partial D)$.*

Введем несколько подпространств пространства $C(\partial D)$. Будем говорить, что функция $\varphi \in C(\partial D)$ ортогональна голоморфным функциям при интегрировании по ∂D, если

$$\int_{\partial D} f(z)\,\varphi(z)\,d\sigma_z = 0$$

для всех $f \in A(\overline{D})$. Подпространство $C(\partial D)$, состоящее из таких функций, обозначим $O(\partial D)$. Обозначим $O_1(\partial D)$ подпространство функций $\varphi \in C(\partial D)$ таких, что существует форма $\beta \in Z^\infty_{n,n-1}(\overline{D})$, для которой $\beta|_{\partial D} = \varphi d\sigma$. Далее, обозначим $O_2(\partial D)$ пространство функций $\varphi \in C(\partial D)$ таких, что существует форма $\gamma \in C^\infty_{n,n-2}(\overline{D})$, для которой $\overline{\partial}\gamma|_{\partial D} = \varphi d\sigma$. Очевидно включение $O_2(\partial D) \subset O_1(\partial D) \subset$ $\subset O(\partial D)$.

Поставим нужную для дальнейшего задачу описания мер, ортогональных при интегрировании на ∂D пространствам $O(\partial D), O_1(\partial D)$ или $O_2(\partial D)$. При $n = 1$ и $D = U$ — единичный круг функции из $O(\partial D)$ сами голоморфно продолжаются внутрь D, поэтому результаты, решающие указанную задачу, можно рассматривать как обобщение классической теоремы Риссов (см., например, [134; 34, с. 73]:

Пусть μ — комплекснозначная борелевская мера на единичной окружности ∂U.

$$\int_{\partial U} z_1^j\,d\mu = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{17.6}$$

тогда и только тогда, когда мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и существует такая функция $f \in H^1(U)$, что $\mu(E) = \int_E f(z_1)\,dz_1$ для любого борелевского подмножества $E \subset \partial U$.

Поставленную задачу решает следующее утверждение.

Теорема 17.5 (Айзенберг). I. *Пусть $D \in H$, а μ — комплекснозначная борелевская мера на ∂D.*

$$\int_{\partial D} \varphi\,d\mu = 0 \tag{17.7}$$

для всех $\varphi \in O(\partial D)$ тогда и только тогда, когда существует такая функция $f \in H^1(D)$, что $\mu(E) = \int_E f(z)\,d\sigma_z$ для любого борелевского подмножества $E \subset \partial D$.

II. *Равенство* (17.7) *справедливо для всех* $\varphi \in O_1(\partial D)$ *тогда и только тогда, когда мера* μ *порождается формой* $f d\sigma$, *где* $f \in H^1(D)$.

III. *Если* $n > 1$ *и граница* ∂D *связна, то* (17.7) *верно для всех* $\varphi \in O_2(\partial D)$ *в том и только том случае, когда мера* μ *порождена формой* $f d\sigma$, *где* $f \in H^1(D)$.

Итак, теорема 17.5 — обобщение классической теоремы Риссов, однако ее можно трактовать и иначе. Естественно назвать меру μ слабым решением касательных уравнений Коши — Римана, если верно (17.7) для всех $\varphi \in O(\partial D)$. Тогда из части *I* теоремы 17.5 получается, что комплекснозначная борелевская мера μ на ∂D тогда и только тогда порождена формой $f d\sigma$, где $f \in H^1(D)$, когда μ является слабым решением касательных уравнений Коши — Римана.

Доказательство теоремы 17.5 проведем для части II, а часть I — следствие части II. Для иллюстрации метода сначала проводится доказательство для $n = 1$, а затем указываются изменения, необходимые для доказательства при $n > 1$.

1. Если $\varphi \in C(\partial U)$ и

$$\int_{\partial U} \varphi(z_1) z_1^j \, dz_1 = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{17.8}$$

то $\varphi \in A_c(D)$, что можно показать различными элементарными способами. Например, это сразу следует из классической теоремы Фейера о равномерной сходимости последовательности средних арифметических частичных сумм ряда Фурье непрерывной функции φ к этой функции, если только записать ряд Фурье в комплексной форме.

Пусть далее X — банахово пространство, X^* — сопряженное к X, а Γ — линейное множество в X^*. Рассмотрим два свойства замкнутости Γ:

а) если $x_m^* \in \Gamma$ и $\lim\limits_{m\to\infty} x_m^*(x) = x^*(x)$ для всех $x \in X$, то $x^* \in \Gamma$;

б) если $x_0^* \notin \Gamma$, то существует такой элемент $x \in X$, что $x_0^*(x) = 1$ и $x^*(x) = 0$ для $x^* \in \Gamma$.

Для сепарабельного банахова пространства X из свойства а) множества Γ вытекает свойство б) (см. теорему Банаха [41, с. 108] или [72, с. 473, упр. 16] о том, что в рассматриваемом случае свойства а) и б) эквивалентны).

Переходим к доказательству теоремы Риссов. Пусть C^* — пространство, сопряженное к $C(\partial U)$, тогда $\Gamma \subset C^*$, где Γ — множество мер ν вида $d\nu = f(z_1) dz_1$, где $f(z_1) \in H^1(U)$. Нужно показать, что $\mu \in \Gamma$. Сначала установим, что Γ замкнуто в смысле а). Пусть

$$d\nu_m = f_m(z_1) dz_1, \quad f_m(z_1) \in H^1(U),$$

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\partial U} \psi(z_1) \, d\nu_m = \int_{\partial U} \psi(z_1) \, d\nu_0 \tag{17.9}$$

для всех $\psi(z_1)\in C(\partial U)$. Если применить (17.9), где в качестве ψ взято ядро Коши, и использовать ограниченность по норме слабо сходящейся последовательности функционалов, то получим, что последовательность $f_m(z_1)$ равномерно сходится внутри круга U. Предельная функция $f_0(z_1)$, очевидно, входит в класс $H^1(U)$. Для доказательства равенства $d\nu_0 = f_0(z_1)\,dz_1$ достаточно показать, что

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\partial U}\psi(z_1)\,d\nu_m = \int_{\partial U}\psi(z_1)f_0(z_1)\,dz_1$$

для всех $\psi\in C(\partial U)$ или для множества функций ψ, всюду плотного в $C(\partial U)$. В качестве такого множества рассмотрим множество всех полиномов $P(z_1,\ 1/z_1)$. Каждый из них представим в виде $P_1(z_1)+P_2(1/z_1)$, а полином P_1 ортогонален функциям класса $H^1(U)$ в смысле интегрирования по окружности ∂U. Следовательно, надо выяснить, справедливо ли равенство

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\partial U}P_2\left(\frac{1}{z_1}\right)f_m(z_1)\,dz_1 = \int_{\partial U}P_2\left(\frac{1}{z_1}\right)f_0(z_1)\,dz_1. \qquad (17.10)$$

Интегралы в (17.10) равны некоторой линейной комбинации от соответствующих функций и их производных в нуле. Теперь (17.10) следует из равномерной сходимости f_m к f_0 в U.

Итак, Γ обладает свойством а), значит, и свойством б). Пусть $\mu\notin\Gamma$, тогда существует функция $\varphi\in C(\partial U)$ такая, что

$$\int_{\partial U}\varphi(z_1)f(z_1)\,dz_1 = 0 \qquad (17.11)$$

для всех $f\in H^1(U)$, но

$$\int_{\partial U}\varphi(z_1)\,d\mu = 1. \qquad (17.12)$$

Из (17.11) вытекает (17.8), поэтому $\varphi\in A_c(D)$, а всякая функция из $A_c(D)$ может быть аппроксимирована на окружности ∂U полиномами от z_1, поэтому (17.12) противоречит (17.6).

2. При $n>1$ доказательство проводится точно так же, но с заменой ядра Коши на ядро Мартинелли — Бохнера, с использованием результатов об условиях продолжимости функций из $C(\partial D)$ до функций класса $A_c(D)$ (см., например, [25, § 3]), с заменой разложения $P(z_1,\ 1/z_1)=P_1(z_1)+P_2(1/z_1)$ на разложение из предложения 17.4. □

Предложение 17.6. *Пусть $D\in H$, а множество $M\subset\partial D$, $m_{2n-1}(M)>0$, то M — множество единственности функций класса $H^1(D)$, т. е. если угловые граничные значения функции $f\in H^1(D)$ равны на M нулю, то $f\equiv 0$.*

Это предложение легко доказывается, например, методом сечений множества M пучком комплексных прямых, проходящих через фиксированную точку $a\in D$, или пучком параллельных комплексных прямых. Тогда почти во всех сечениях $f \in H^1(D)$ входит и в соответствующий класс H^1 для этого сечения (см. предложение 0,8). И нужный нам факт будет вытекать из аналогичной граничной теоремы единственности для функций одного комплексного переменного (см., например, [134]) и элементарной теоремы единственности для голоморфных функций многих комплексных переменных (в которой из равенства $f = 0$ на достаточно густом множестве пересечений комплексных прямых с областью D делается вывод о том, что $f \equiv 0$ в D). □

Следствие 17.7. *При условиях предложения* 17.6 *сужения функций из $O(\partial D)$ на $\partial D \backslash M$ плотны в пространстве $L^q_{d\sigma}(\partial D \setminus M)$, где $1 < q < \infty$.*

Доказательство. Действительно, в противном случае существуют функции $g \in L^q_{d\sigma}(\partial D \setminus M)$ и $\varphi \in L^p_{d\sigma}(\partial D \setminus M)$, $1/p + 1/q = 1$, такие, что

$$\int\limits_{\partial D \setminus M} g\varphi \, d\sigma = 1, \tag{17.13}$$

но

$$\int\limits_{\partial D \setminus M} \varphi f \, d\sigma = 0 \tag{17.14}$$

для всех $f \in O(\partial D)$. Доопределим φ нулем на M и рассмотрим меру $\mu = f\sigma$, тогда из (17.14) и теоремы 17.5 получаем, что существует функция $F \in H^1(D)$ такая, что $\mu = F\sigma$. Далее из $F|_M = 0$ следует, что $F \equiv 0$ и

$$\int\limits_{\partial D \setminus M} g\varphi \, d\sigma = \int\limits_{\partial D \setminus M} gF \, d\sigma = 0,$$

что противоречит (17.13). □

Заметим, что если множество $M \subset \partial D$ открыто в топологии ∂D, то также нетрудно показать, что сужения функций из $O(\partial D)$ на M плотны в $C(\partial D \backslash M)$. Следствие 17.7 и данное замечание приводят нас к следующей теореме существования многомерного аналога формулы Карлемана.

Теорема 17.8 (Айзенберг). *Пусть $D \in H$ и множество $M \subset \partial D$ имеет положительную $(2n-1)$-мерную меру Лебега. Тогда для функций из $H^p(D)$, $p > 1$, существует формула Карлемана вида* (17.5). *Если множество M открыто в топологии ∂D, то это же верно для функций из $H^1(D)$.*

Впрочем, последнее утверждение этой теоремы можно было и не приводить, так как для открытого множества $M \subset \partial D$ теорема 17.3 дает более сильный результат.

2°. Из теоремы 8.2 сразу следует

Следствие 17.9 (Айзенберг — Тарханов). *Если $M \subset \partial D$ — компакт условной устойчивости для пространства $A_C(D)$, где D — ограниченная область в* $\mathbb{C}^n$, *то для $f \in A_C(D)$ и $z \in D$ справедлива* *формула Карлемана*

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} \int_M f(\zeta)\, d\mu_{z,m}(\zeta), \tag{17.15}$$

где $\mu_{z,m}(\zeta)$ — *меры (регулярные) с конечной полной вариацией на* M, $z \in D$, $m = 1, 2, \ldots$, *причем предел в правой части* (17.15) *достигается в том смысле, что для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $N = N(\varepsilon)$ *такое, что для всех* $m > N$ *и фиксированном* $z \in D$

$$\sup_{\substack{f\in A_C(D)\\ |f|\,|_{\overline{D}}\leqslant 1}} \left| \int_M f(\zeta)\, d\mu_{z,m}(\zeta) - f(z) \right| < \varepsilon. \tag{17.16}$$

Обратно, из существования формулы Карлемана (17.15) *со сходимостью в смысле* (17.16) *вытекает, что компакт* $M \subset \partial D$ *является компактом условной устойчивости для голоморфных функций из* $A_C(D)$.

Заметим, что если $m_{2n-1}(M) > 0$, то компакт M является компактом условной устойчивости (см. пример 5 из разд. 8). Но и среди компактов меньшей размерности тоже есть такие. Наконец, отметим еще, что сходимость в смысле (17.16) есть и в ранее построенных формулах Карлемана (см. разд. 1—3, 5, 7, 16 и, например, неравенство (16.9)).

18. ФОРМУЛА МНОГОМЕРНОГО ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ВЫЧЕТА В ДУХЕ КАРЛЕМАНА

Применим ту же идею, которая уже демонстрировалась при $n = 1$ в разд. 6. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с кусочно-гладкой границей ∂D, отображение $f \in A^n(\overline{D})$ не имеет нулей на ∂D, вектор-функции $w^{(0)} \in C(\partial D)$ и $w^{(i)} \in C^1(\partial D)$, $i = 1, \ldots, n-1$, удовлетворяют условию (11.2). Рассмотрим множество $M \subset \partial D$, $m_{2n-1}(M) > 0$, и предположим, что $A(f(\overline{D}))$ — выпуклая оболочка $\overline{f(\partial D \setminus M)}$, не содержит начало координат. Тогда существует функция $F \in A(f(\overline{D}))$ такая, что $F(0) = 1$, но верно (6.1). Эту функцию используем в качестве «гасящей» для получения формулы логарифмического вычета в духе Карлемана, основанной на основной интегральной формуле (11.3).

Теорема 18.1 (Айзенберг). *Для всякой функции* $\varphi \in A_C(D)$ *справедлива формула*

$$\lim_{m\to\infty} \int_M \varphi F^m(f)\, \Omega\left(w^{(0)}, \ldots, w^{(n-1)}, f\right) = \sum_{a\in E_f} \varphi(a). \tag{18.1}$$

Следствие 18.2. *При выполнении условий следствия* 11.7 *верна формула*

$$\lim_{m\to\infty} \int_M \varphi F^m(f)\, \omega(f, w) = \sum_{a\in E_f} \varphi(a). \tag{18.2}$$

Следствие 18.3. *Если выполнены условия теоремы* 10.12, *тогда справедлива интегральная формула, основанная на формуле Южакова — Руса* (10.16),

$$\lim_{m\to\infty}\int_M \varphi F^m(f)\,\omega(f,\bar f)=\sum_{a\in E_f}\varphi(a). \tag{18.3}$$

Следствие 18.4. *При условиях теоремы* 18.1

$$\lim_{m\to\infty}\int_M F^m(f)\,\Omega(w^{(0)},\ldots,w^{(n-1)},f)=N, \tag{18.4}$$

где N — число нулей отображения f в D (с учетом кратности).

Если полиномиально-выпуклая оболочка $\overline{f(dD\setminus M)}$ не содержит нуля, то в качестве F можно взять некоторый полином. Требования на M в теореме 18.1 и ее следствиях означают, что M должно быть достаточно большим. Можно обойтись и без этого требования, но тогда нужно заранее знать нули в области D отображения f. В формулах же (18.1)—(18.4) этого не требуется. В некотором смысле эти формулы строятся значительно проще, чем сами многомерные формулы Карлемана (интегральные представления, а не формулы логарифмического вычета). Дело в том, что они восстанавливают функцию φ не во всех точках некоторой области, а лишь в нулях отображения f. Если же нужно получить интегральное представление в духе Карлемана только для какой-то одной точки, то это значительно проще.

19. ФОРМУЛА КАРЛЕМАНА НА ОСНОВЕ ЯДРА АНДРЕОТТИ — НОРГЕ

Будем рассматривать тот же класс областей $D\subset\mathbf{C}^n$, что и в разд. 16, п. 1°. Возьмем ядро формулы (13.12). Тогда аналогично лемме 16.1 получается

Лемма 19.1.

$$(\zeta-z)^{P-\alpha-1}\omega_{P-1}\left(\zeta-z,(\bar\zeta-\bar z)^P\right)=\frac{\alpha!}{2\pi i}\frac{dt}{t^{|\alpha|+1}}\wedge\lambda_{P,\alpha}(v), \tag{19.1}$$

где

$$\lambda_{P,\alpha}(v)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!\,p^{n-1}}{(2\pi i)^{n-1}}\frac{\bar v^{P-1}v^{P-\alpha'-1}\,d\bar v\wedge dv}{\left(1+|v_2|^{2p}+\ldots+|v_n|^{2p}\right)^n}; \tag{19.2}$$

$$v^{P-\alpha'-1}=v_2^{p-\alpha_2-1}\ldots v_n^{p-\alpha_n-1}.$$

Заметим, что при $\alpha=(0,\ldots,0)$, $p=1$, форма $\lambda_{P,\alpha}(v)$ превращается в формулу $\lambda(v)$ из леммы 16.1, а равенство (19.1) — в равенство (16.1). Итак, однородное ядро Андреотти — Норге на комплексных прямых, проходящих через фиксированную точку $z\in D$ и не лежащих в гиперплоскости $\{\zeta : \zeta_1 = z_1\}$, есть производная ядра Коши, умноженная на форму $\lambda_{p,\alpha}(v)$, заданную на множестве этих прямых. Далее обозначим

$$\lambda_1(v, m) = (-1)^m \frac{m!\, p^m}{(2\pi i)^m} \frac{|v|^{2p-2}\, d\bar{v} \wedge dv}{\left(1 + |v_1|^{2p} + \ldots + |v_m|^{2p}\right)^{m+1}}. \qquad (19.3)$$

Лемма 19.2. *Интеграл от $\lambda_1(v, m)$ по $\mathbf{C}^m$ равен 1, т. е.*

$$\int\limits_{\mathbf{C}^m} \lambda_1(v, m) = 1. \qquad (19.4)$$

Доказательство. При $m = 1$ положим $v_1 = re^{i\theta}$, тогда

$$\int\limits_{\mathbf{C}^1} \lambda_1(v_1 1) = \frac{ip}{2\pi} \frac{|v_1|^{2p-2}\, d\bar{v}_1 \wedge dv_1}{\left(1 + |v_1|^{2p}\right)^2} = \frac{p}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\infty} \frac{r^{2p-1} dr}{(1 + r^{2p})^2} = 1.$$

В случае произвольного натурального числа m будем интегрировать форму (19.3) сначала по $v_m = re^{i\theta}$ при фиксированном $v^* = (v_1, \ldots, \ldots, v_{m-1})$, получим

$$J_m = \int\limits_{\mathbf{C}^m} \lambda_1(v, m) = (-1)^m \frac{m!\, p^m}{(2\pi i)^m} \int\limits_{\mathbf{C}^{m-1}} |v^*|^{2p-2}\, d\bar{v}^* \wedge dv^* \times$$

$$\times \frac{2}{i} \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\infty} \frac{r^{2p-1}\, dr}{(1 + |v^*|^{2p} + r^{2p})^{m+1}} =$$

$$= (-1)^{m-1} \frac{(m-1)!\, p^{m-1}}{(2\pi i)^{m-1}} \int\limits_{\mathbf{C}_{m-1}} \frac{|v^*|^{2p-2}\, d\bar{v}^* \wedge dv^*}{(1 + |v^*|^{2p})^m} = J_{m-1}.$$

Этот интеграл, следовательно, не зависит от m. Теперь из $J_1 = 1$ следует (19.4). □

Отметим, что при $p = 1$ из (19.4) вытекает равенство (16.2). Рассмотрим далее множество $N(z, M)$, где z — фиксированная точка области D, а множество $M \subset \partial D$, $m_{2n-1}(M) > 0$. Будем для простоты предполагать, что $n = 2$, т. е. $D \subset \mathbf{C}^2$, а M — любое множество из ∂D положительной трехмерной меры Лебега. Очевидно, что $m_2(N(z, M)) > 0$.

Лемма 19.3. *Существуют различные точки $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \mathbf{C}^1$, такие, что множество $E = \{v : v \in \mathbf{C}^1,\ v\gamma_i \in N(z, M),\ i = 1, \ldots, m\}$ имеет положительную двумерную меру Лебега.*

Доказательство проведем от противного. Пусть для любых различных $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \mathbf{C}^1$ множество E такое, что $m_2(E) = 0$. Перепишем условие $\{v\gamma_i \in N,\ i = 1, \ldots, m\}$ в виде $v\gamma \in N^m$, где $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in \mathbf{C}^m$, $N^m = N \times \ldots \times N$. Теперь по теореме Фубини для внешних дифференциальных форм (см., например, [173, с. 246]) имеем

$$\int\limits_{N^m} dV = \int\limits_{\mathbf{CP}^{m-1}} \left(\int\limits_E d\mu_\gamma \right) dV_P. \tag{19.5}$$

Здесь dV — евклидов объем в $\mathbf{C}^m$; dV_P — форма пространства $\mathbf{CP}^{m-1}$ для метрики Фубини — Штуди; $d\mu_\gamma$ — мера, абсолютно непрерывная относительно двумерной меры Лебега. Поскольку $m_{2m}(N^m)>0$, то левая часть равенства (19.5) отлична от нуля. С другой стороны, по предположению для различных $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \mathbf{C}^1$ внутренний интеграл в правой части равенства (19.5) равен нулю. Множество комплексных прямых $\mathbf{CP}^{m-1}$, задаваемых такими γ, у которых хотя бы две координаты совпадали, имеет нулевую $(2m-2)$-мерную меру. Следовательно, правая часть в (19.5) равна нулю. Противоречие. □

Обозначим

$$v^{(j)} = \gamma_j v, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ |\alpha|+1. \tag{19.6}$$

Рассмотрим следующее конечное семейство множеств прямых: $l_j = l_j(z,\ v^{(j)}) = \{\zeta : \zeta \in \mathbf{C}^2,\ \zeta_1 = z_1 + t,\ \zeta_2 = z_2 + v^{(j)}t,\ t \in \mathbf{C}^1,\ v \in E\}$, $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ |\alpha|+1$, и пусть $M_j = M \cap l_j$. Ясно, что $M_j \subset M$ и $m_3(M_j) > 0$. Теперь для каждой прямой l_j (соответствующее $v \in N(v,\ M)$), $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ |\alpha|+1$, определим срез-функцию

$$f_{v(j)} = f_{v(j)}(t) = f\left(z_1 + t, z_2 + v^{(j)}t\right),$$

а также голоморфную по t «гасящую» функцию $\varphi_{z,v(j)}(t) = \exp\psi_{z,v(j)}(t)$ (см. разд. 1, 16). Кроме того, при дифференцировании формулы Карлемана (1.3) можно получить следующее равенство:

$$f^{(j)}(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_M \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{j+1}} H\left(m, \zeta, \psi, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(j)}\right) \left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m d\zeta, \tag{19.7}$$

где

$$H = \left(\frac{\partial^j}{\partial z^j} \frac{e^{-m\psi(z)}}{\zeta - z}\right) e^{m\psi(z)} (\zeta - z)^{j+1}.$$

Обозначим

$$H_{v(j),z} = H\left(m, t, \psi_{z,v(j)}(0), \ldots, \psi^{(|\alpha|)}_{z,v(j)}(0)\right).$$

Далее находим производные до порядка $|\alpha|$ включительно от $f_{v(j)}(t)$ по t в точке $t=0$. Для всякой прямой из l_j рассмотрим систему

$$\left.\frac{\partial^{|\alpha|} f_{v(j)}}{\partial t^{|\alpha|}}\right|_{t=0} = \left(\frac{\partial}{\partial z_1} + v^{(j)} \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{|\alpha|} f(z),$$

$j = 1,\ 2,\ \ldots,\ |\alpha|+1$. Отсюда получаем выражение для $D^\alpha f(z)$, которое с учетом (19.6) имеет вид

$$Bv^{\alpha_2}D^{\alpha}f(z)=C(\alpha)\sum_{j=1}^{|\alpha|+1}(-1)^{j+\alpha_2+1}B_j\left.\frac{\partial^{|\alpha|}f_{v(j)}(t)}{\partial t^{|\alpha|}}\right|_{t=0},\qquad(19.8)$$

где $C(\alpha)=\alpha_1!\alpha_2!(|\alpha|!)^{-1}$;

$$B_j=\begin{vmatrix}1 & \gamma_1 & \dots\gamma_1^{\alpha_2-1} & \gamma_1^{\alpha_2+1} & \dots\gamma_1^{|\alpha|}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ & & [j] & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & \gamma_{|\alpha|+1} & \gamma_{|\alpha|+1}^{\alpha_2-1} & \gamma_{|\alpha|+1}^{\alpha_2+1} & \dots\gamma_{|\alpha|+1}^{|\alpha|}\end{vmatrix};$$

$$B=\begin{vmatrix}1 & \gamma_1 & \dots\gamma_1^{|\alpha|}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & \gamma_{|\alpha|+1} & \dots\gamma_{|\alpha|+1}^{|\alpha|}\end{vmatrix}=\prod_{m>j}^{|\alpha|+1}(\gamma_m-\gamma_j).$$

Определитель Вандермонда B по выбору чисел γ_j отличен от нуля. Равенство (19.8) в силу (19.7) можно переписать в следующем виде:

$$Bv^{\alpha_2}D^{\alpha}f(z)=\frac{\alpha_1!\,\alpha_2!}{2\pi i}\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{|\alpha|+1}(-1)^{j+\alpha_2+1}B_j\int\limits_{M_j\cap\beta_j}\frac{f_{v(j)}(t)}{t^{|\alpha|+1}}\Phi\left(v^{(j)},z,m,t\right)dt,\qquad(19.9)$$

где β_j — произвольная прямая из l_j и

$$\Phi\left(v^{(j)},z,m,t\right)=\frac{e^{m\psi_{z,v(j)}(t)}}{e^{m\psi_{z,v(j)}(0)}}H_{v(j),z}.$$

Умножим равенство (19.9) на форму $\lambda_{P,\alpha}(v)$ при $n=2$ и проинтегрируем по множеству E из леммы 19.3

$$BD^{\alpha}f(z)\int\limits_E\lambda_1(v,1)=\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{|\alpha|+1}(-1)^{j+\alpha_2+1}B_j\int\limits_E\lambda_{P,\alpha}(v)\times$$
$$\times\int\limits_{M_j\cap\beta_j}\frac{f_{v(j)}(t)}{t^{|\alpha|+1}}\Phi\left(v^{(j)},z,m,t\right)dt.$$

Далее заметим, что для рассматриваемого множества E (см. (19.2) и (19.4)) $0<\int\limits_E\lambda_{P,\alpha}(v)\leqslant 1$. Теперь с помощью леммы 19.1 получаем следующее утверждение:

Теорема 19.4 (Косбергенов). *Для всякой функции $f \in A_c(D)$ и точки $z \in D$ справедлива формула*

$$D^{\alpha} f(z) = \frac{1}{B \int\limits_E \lambda_{P,\alpha}(v)} \lim_{m \to \infty} \sum_{j=1}^{|\alpha|+1} (-1)^{j+\alpha_2+1} B_j \times$$

$$\times \int\limits_{M_j} f(\zeta)(\zeta - z)^{P-\alpha-1} \omega_{P-1}\left(\zeta - z, (\bar{\zeta} - \bar{z})^P\right) \Phi\left(v^{(j)}, z, m, t\right). \quad (19.10)$$

Отметим, что при выводе формулы (19.10) мы фиксировали z, поэтому числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{|\alpha|+1}$ зависят, вообще говоря, от z. Если в (19.10) положить $\alpha = (0, 0)$ и $p = 1$, то получится формула (16.5) для $n = 2$, $f \in A_c(D)$. Опираясь на формулу (19.10) для функций $f \in A_c(D)$, нетрудно распространить ее на функции класса Харди.

Следствие 19.5. *Формула* (19.10) *верна для* $f \in H^1(D)$.

Обозначим правую часть в (19.10) при фиксированном m (без предельного перехода) через $R_m D^{\alpha} f$. Семейство $\{R_m\}$ является регуляризирующим для рассматриваемой задачи при подходящем выборе пространства.

Аналогично доказательству неравенства (16.9) можно обосновать следующую оценку, дающую информацию о точности приближенного решения:

$$|D^{\alpha} f(z) - R_m D^{\alpha} f(z)| \leqslant \frac{1}{|B| \int\limits_E \lambda_{P,\alpha}(v)} \sum_{j=1}^{|\alpha|+1} |B_j| \times$$

$$\times \int\limits_{Q \setminus M_j} \frac{|f| \left|(\zeta - z)^{P-\alpha-1} \omega_{P-1}\right| \left|H_{v^{(j)}, z}\right|}{\left|\varphi_{z, v^{(j)}}(0)\right|^m}.$$

ГЛАВА 5

МНОГОМЕРНЫЕ ФОРМУЛЫ КАРЛЕМАНА ДЛЯ МНОЖЕСТВ МЕНЬШЕЙ РАЗМЕРНОСТИ

20. ПРОСТЕЙШИЕ ПОДХОДЫ

1°. Обобщим формулу Карлемана (1.3) на функции, голоморфные в поликруге $U^j = U(0, 1) = \{z\colon z \in \mathbf{C}^j, |z_i| < 1, i = 1, \ldots, j\}$, остов которого обозначим Δ^j. Переменное $z \in \mathbf{C}^j$ будем записывать $z^{(j)}$. Через $H_j^1 = H_j^1(U^j)$ обозначим класс Харди функций из $A(U^j)$ таких, что при

$$\int\limits_{\Delta^j} |f(r\zeta^{(j)})|\, dm_j < C.$$

Известно, что $f(\zeta^{(j)}) = \lim\limits_{r\to 1-0} f(r\zeta^{(j)})$ существует почти всюду на Δ^j и определяет функцию из $L^1(\Delta^j)$ (см., например, [138, с. 43]). Пусть M — измеримое множество из Δ^j. Обозначим $M_{\zeta^{(j-1)}} = M \cap \{w^{(j)}: w^{(j)} \in \Delta^j,\ w^{(j-1)} = \zeta^{(j-1)}\}$. *Существенной проекцией* M назовем множество

$$\operatorname{ess} pr_j M = \left\{\zeta^{(j-1)}:\ \zeta^{(j-1)} \in \Delta^{j-1},\ m_1\left(M_{\zeta^{(j-1)}}\right) > 0\right\}.$$

Введем функцию

$$g_{j,M,m}\left(z^{(j)}\right) = \exp\left\{m \int\limits_M \prod_{i=1}^{n} \mathscr{P}(z_i, \zeta_i)\, S(z_j, \zeta_j)\, dm_j\right\},$$

где *ядро Пуассона*

$$\mathscr{P}(z_i, \zeta_i) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |z_i|^2}{|\zeta_i - z_i|^2}$$

и *ядро Шварца*

$$S(z_j, \zeta_j) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + \bar{\zeta}_j z_j}{1 - \bar{\zeta}_j z_j}.$$

Лемма 20.1. А. $1 \leqslant |g_{j,M,m}(z^{(j)})| \leqslant e^m$ *для* $z^{(j)} \in U^j$.

Б. *Существует множество* $A \subset \Delta^{j-1}$, $m_{j-1}(A) = (2\pi)^{j-1}$, *такое, что для всех* $\zeta^{(j-1)} \in A$ *и* $z_j \in U^1$ *предел*

$$\lim_{r\to 1-0} g_{j,M,m}\left(r\zeta^{(j-1)}, z_j\right) = g_{j,M,m}\left(\zeta^{(j-1)}, z_j\right)$$

существует; для каждого $\zeta^{(j-1)} \in A$ *функция* $g_{j,M,m}(\zeta^{(j-1)}, z_j)$ *голоморфна по* z_j *в* U^1.

В. *Для всех* $\zeta^{(j-1)} \in A$ *предел*

$$\lim_{r\to 1-0} g_{j,M,m}\left(\zeta^{(j-1)}, r\zeta_j\right) = g_{j,M,m}\left(\zeta^{(j)}\right)$$

существует почти для всех $\zeta_j \in \Delta^1$. *Таким образом,* $g_{j,M,m}$ *определена почти всюду на* Δ^j *(в смысле лебеговой меры* m_j*).*

Г. *Почти всюду на* Δ^j

$$|g_{j,M,m}(\zeta^{(j)})| = 1 + (e^m - 1)\chi_M(e^{(j)}).$$

Мы не приводим доказательство этой леммы. Оно нетрудно и использует хорошо известную технику теории функций в поликруге. Для $n = 2$ его можно найти в [229].

Лемма 20.2. *Пусть* $f \in H^1_n$ *и* $j = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда*:

а) *для всех* $(z_{j+1}, \ldots, z_n) \in U^{n-j}$ *функция* $f(\cdot, z_{j+1}, \ldots, z_n) \in H^1_j$;

б) *существует множество* $A_1 \subset \Delta^j$, $m_j(A_1) = (2\pi)^j$, *такое, что для всех* $\zeta^{(j)} \in A_1$ и $(z_{j+1}, \ldots, z_n) \in U^{n-j}$ *предел*

$$\lim_{r \to 1-0} f\left(r\zeta^{(j)}, z_{j+1}, \ldots, z_n\right) = f\left(\zeta^{(j)}, z_{j+1}, \ldots, z_n\right)$$

существует. Для каждого $\zeta^{(j)} \in A_1$ *функция* $f\left(\zeta^{(j)}, \cdot\right) \in H^1_{n-j}$;

в) *для почти всех* $\zeta \in \Delta^n$

$$f(\zeta) = \lim_{r \to 1-0} f\left(\zeta^{(j)}, r\zeta_{j+1}, \ldots, r\zeta_n\right).$$

Доказательство. По формуле Пуассона для поликруга

$$f(z) = \int_{\Delta^n} f(\zeta) \prod_{j=1}^{n} \mathscr{P}(z_j, \zeta_j)\, dm_n(\zeta) =$$

$$= \int_{\Delta^j} \left[\int_{\Delta^{n-j}} f(\zeta) \prod_{i=j+1}^{n} \mathscr{P}(z_i, \zeta_i)\, dm_{n-j} \right] \prod_{i=1}^{j} \mathscr{P}(z_i, \zeta_i)\, dm_j.$$

При всех $(z_{j+1}, \ldots, z_n) \in U^{n-j}$ внутренний интеграл — функция из $L^1(\Delta^j)$ по $\zeta^{(j)}$. Функция, представимая интегралом Пуассона, входит в класс Харди H^1, если она голоморфна (это хорошо известное при $n = 1$ утверждение без труда обобщается на случай $n > 1$, см., например, [229, теорема 2.1.3]). Отсюда получаем утверждение а), остальные доказываются так же легко. □

Рассмотрим оператор

$$J_{j,M}(h)\left(w^{(j-1)}, z_j\right) = \lim_{r \to 1-0} \lim_{m \to \infty} \frac{1}{2\pi} \times$$

$$\times \int_M \frac{h(\zeta) \prod_{i=1}^{j-1} \mathscr{P}(rw_i, \zeta_i)\, g_{j,M,m}\left(\zeta^{(j)}\right) dm_j(\zeta)}{\left(1 - \bar{\zeta}_j z_j\right) g_{j,M,m}\left(\zeta^{(j-1)}, z_j\right)}, \tag{20.1}$$

где $h \in L^1(M)$, $w^{(j-1)} \in \Delta^{j-1}$, $z_j \in U^1$.

Лемма 20.3. *Если* $h = f|_M$, *где* $f \in H^1_j$, *то для почти всех* $z_j \in U^1$ *и почти всех* $w^{(j-1)} \in \Delta^{j-1}$ *предел в* (20.1) *существует и*

$$J_{j,M}(h)\left(w^{(j-1)}, z_j\right) = \begin{cases} f\left(w^{(j-1)}, z_j\right), & w^{(j-1)} \in \operatorname{ess\,pr}_j M, \\ 0, & w^{(j-1)} \notin \operatorname{ess\,pr}_j M. \end{cases} \tag{20.2}$$

Равенство (20.2) *тоже верно для всех* $z_j \in U^1$ *и почти всех* $w^{(j-1)} \in \Delta^{j-1}$.

Заметим, что если $f \equiv 1$, то почти при любом $z_j \in U^1$ правая часть в (20.2) — характеристическая функция $\operatorname{ess\,pr}_j M$, следовательно, $\operatorname{ess\,pr}_j M$ измеримо и характеристическая функция этого множества эффективно (с помощью интегралов и предельных переходов) выписывается по множеству M.

Доказательство леммы 20.3. Рассмотрим интеграл

$$J_{r,m}\left(\zeta^{(j-1)}, z_j\right) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{M_{\zeta^{(j-1)}}} \frac{h(\zeta)\, g_{j,M,m}\left(\zeta^{(j)}\right) dm_1(\zeta_j)}{\left(1-\bar{\zeta}_j z_j\right) g_{j,M,m}\left(\zeta^{(j-1)}, z_j\right)}, \quad (20.3)$$

множество M измеримо и $h \in L^1(M)$, поэтому из теоремы Фубини следует, что почти для всех $\zeta^{(j-1)} \in \Delta^{j-1}$ интеграл в (20.3) существует. Кроме того, $J_{r,m}(\zeta^{(j-1)}, z_j) \equiv 0$ для почти всех $\zeta^{(j-1)} \notin \operatorname{ess\,pr}_j M$. Из лемм 20.1 и 20.2 получаем, что $f\left(\zeta^{(j-1)}, \cdot\right) g_{j,M,m}\left(\zeta^{(j-1)}, \cdot\right) \in H_1^1$. Следовательно, по формуле Коши (или Сеге)

$$J_{r,m}\left(\zeta^{(j-1)}, z_j\right) = f\left(\zeta^{(j-1)}, z_j\right) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Delta \setminus M_{\zeta^{(j-1)}}} \frac{f(\zeta)\, g_{j,M,m}\left(\zeta^{(j)}\right) dm_1(\zeta_j)}{\left(1-\bar{\zeta}_j z_j\right) g_{j,M,m}\left(\zeta^{(j-1)}, z_j\right)}.$$

Используя п. Г леммы 20.1, находим, что

$$\left| J_{r,m}\left(\zeta^{(j-1)}, z_j\right) - f\left(\zeta^{(j-1)}, z_j\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\int\limits_{\Delta} |f(\zeta)|\,|d\zeta|}{2\pi\left(1-|z_j|\right)\left|g_{j,M,m}\left(\zeta^{(i-1)}, z_j\right)\right|}, \quad (20.4)$$

$g_{j,M,m}(\zeta^{(j-1)}, z_j) \neq 1$ при $\zeta^{(j-1)} \in \operatorname{ess\,pr}_j M$, поэтому $|g_{j,M,m}(\zeta^{(j-1)}, z_j)| > {} > 1$ и

$$\lim_{m\to\infty} J_{r,m}\left(\zeta^{(j-1)}, z_j\right) = f\left(\zeta^{(j-1)}, z_j\right) \chi_{\operatorname{ess\,pr}_j M}.$$

С другой стороны, из (20.4) следует, что для почти всех $\zeta \in \Delta^{j-1}$

$$\left| J_{r,m}\left(\zeta^{(j-1)}, z_j\right) \right| \leqslant \left| f\left(\zeta^{(j-1)}, z_j\right) \right| + \frac{1}{2\pi\left(1-|z_j|\right)} \int\limits_{\Delta} |f(\zeta)|\, dm_1(\zeta_j). \quad (20.5)$$

По теореме Фубини правая часть в (20.5) — функция из $L^1(\Delta^{j-1})$ для всех $z_j \in U^1$. Применение теоремы Лебега доказывает равенство

$$J_{j,M}(h)\left(w^{(j-1)}, z_j\right) = \lim_{r\to 1-0} \lim_{m\to\infty} \int\limits_{\Delta^{j-1}} J_{r,m}\left(\zeta^{(j-1)}, z_j\right) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{j-1} \mathcal{P}(rw_i, \zeta_i)\, dm_{j-1} = \lim_{r\to 1-0} \int\limits_{\Delta^{j-1}} f\left(\zeta^{(j-1)}, z_j\right) \times$$

$$\times \chi_{\operatorname{ess\,pr}_j M}\left(\zeta^{(j-1)}\right) \prod_{i=1}^{j-1} P(rw_i, \zeta_i)\, dm_{j-1}\left(\zeta^{(j-1)}\right).$$

Теперь утверждение леммы 20.3 следует из свойства ядра Пуассона для поликруга (см., например, [138, с. 27]).

Пусть теперь $M \subset \Delta^n$. Введем множества M_j, $j = 1, \ldots, n$; $M_n = M$ и $M_j = \operatorname{ess\,pr}_{j-1} M_{j+1}$, $j = 1, \ldots, n-1$. Для функции $h \in L^1(M)$ рассмотрим оператор

$$L_M(h) = J_{1,M_1}\left(J_{2,M_2}\left(\ldots\left(J_{n,M_n}(h)\right)\ldots\right)\right).$$

Теорема 20.4 (Даутов — Мкртчян). *Если* $m_n(M) > 0$ *и* $h = f|_M$, где $f \in H_n^1$, *то для всех* $z \in U^n$ *верна многомерная формула Карлемана*

$$f = L_M(h). \tag{20.6}$$

Доказательство. По теореме Фубини $m_j(M_j) > 0$. При $n = 1$ утверждение теоремы — это формула (1.3). Для $n > 1$ теорема доказывается индукцией по n с применением леммы 20.3. Отметим, что формула (20.6) при $n > 1$ имеет неголоморфное ядро. □

2°. Пусть D — полицилиндрическая область в $\mathbb{C}^n$, т. е. $D = D_1 \times \ldots \times D_n$, где D_j — плоские односвязные ограниченные области со спрямляемыми границами ∂D_j, $j = 1, \ldots, n$. Пусть множество $M = M_1 \times \ldots \times M_n$, где $m_1(M_i) > 0$, $M_i \subset \partial D_i$, $i = 1, \ldots, n$. Рассмотрим ту же задачу, которая решалась в предыдущем пункте. Поскольку в данном случае множество M является топологическим произведением, осуществить конструктивное аналитическое продолжение с M в D легче.

Обозначим $\omega_j(z_j)$ гармоническую меру множества M_j относительно области D_j а $\widetilde{\omega}_j(z_j)$ — функцию, гармоническую в D_j, которая сопряжена с $\omega_j(z_j)$. Пусть далее $q(z) = (1, q_2, \ldots, q_n)$ — некоторая вектор-функция с положительными компонентами, причем q_j, $j = 2, \ldots, n$, зависит только от $z_1, \ldots, z_j$. Кроме того, обозначим $M^{(j)} = M_1 \times \ldots \times M_j$,

$$G^j_{\sigma q_i}(\zeta_j, z_j) = \frac{1}{\zeta_j - z_j} \exp\left\{\sigma\left[\omega_j(\zeta_j) - \omega_j(z_j) + i\left(\widetilde{\omega}_j(\zeta_j) - \widetilde{\omega}_j(z_j)\right)\right] q_i(z)\right\},$$

где σ — положительный параметр. В дальнейшем важную роль будут играть неравенства ($q_0 = 0$)

$$\sum_{i=0}^{j} q_i\left[1 - \omega_i(z_i)\right] - q_{j+1}\omega_{j+1}(z_{j+1}) < 0, \quad j = 0, \ldots, n-1. \tag{20.7}$$

Теорема 20.5 (Ишанкулов). *Если во всех точках* $z \in D$ *выполняются неравенства* (20.7), *то для всякой функции* $f \in A_C(D)$ *верна многомерная формула Карлемана*

$$f(z) = \lim_{\sigma \to \infty} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_M f(\zeta) \prod_{j=1}^{n} G^j_{\sigma q_j}(\zeta_j, z_j)\, d\zeta. \tag{20.8}$$

Если неравенства (20.7) *выполняются равномерно на компактах из* D, *то и предел в правой части формулы* (20.8) *достигается равномерно на этих компактах.*

Доказательство. Пусть $|f(z)| \leqslant C$ в $\overline{D}$, обозначим

$$c_j = c_j(z_j) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{M_j} \frac{|d\zeta_j|}{|\zeta_j - z_j|}, \; j = 1, \ldots, n-1; \; c_0 = 1,$$

$$d_j = d_j(z_j) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial D_j \setminus M_j} \frac{|d\zeta_j|}{|\zeta_j - z_j|}, \; j = 1, \ldots, n;$$

$$f_\sigma(z, q) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_M f(\zeta) \prod_{j=1}^n G^j_{\sigma q_j}(\zeta_j, z_j)\, d\zeta.$$

Оценим разность для

$$|f_\sigma(z,q) - f(z)| = \Bigl| f_\sigma(z,q) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{(2\pi i)^j} \int\limits_{M^{(j)}} f\left(\zeta^{(j)}, z_{j+1}, \ldots, z_n\right) \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{j} G^k_{\sigma q_k}(\zeta_k, z_k)\, d\zeta^{(j)} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{(2\pi i)^j} \int\limits_{M^{(j)}} f\left(\zeta^{(j)}, z_{j+1}, \ldots, z_n\right) \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{j} G^k_{\sigma q_k}(\zeta_k, z_k)\, d\zeta^{(j)} - f(z)\Bigr| \leqslant$$

$$\leqslant \Biggl| \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int\limits_{M^{(n-1)}} \prod_{k=1}^{n-1} G^k_{\sigma q_k}(\zeta_k, z_k) \Biggl[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{M_n} G^n_{\sigma q_n}(\zeta_n, z_n) f(\zeta)\, d\zeta_n -$$

$$- f\left(\zeta^{(n-1)}, z_n\right) \Biggr] d\zeta^{(n-1)} \Biggr| + \Biggl| \frac{1}{(2\pi i)^{n-2}} \int\limits_{M_{(n-2)}} \prod_{k=1}^{n-2} G^k_{\sigma q_k}(\zeta_k, z_k) \times$$

$$\times \Biggl[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{M_{n-1}} G^{n-1}_{\sigma q_{n-1}}(\zeta_{n-1}, z_{n-1}) f\left(\zeta^{(n-1)}, z_n\right) d\zeta_{n-1} -$$

$$- f\left(\zeta^{(n-2)}, z_{n-1}, z_n\right) \Biggr] d\zeta^{(n-2)} \Biggr| + \ldots + \Biggl| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{M_1} G^1_\sigma(\zeta_1, z_1) \times$$

$$\times \Biggl[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{M_2} G^2_{\sigma q_2}(\zeta_2, z_2) f\left(\zeta^{(2)}, z_3, \ldots, z_n\right) d\zeta_2 - f(\zeta_1, z_2, \ldots, z_n) \Biggr] d\zeta_1 \Biggr| +$$

$$+ \Biggl| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{M_1} G^1_\sigma(\zeta_1, z_1) f(\zeta_1, z_2, \ldots, z_n)\, d\zeta_1 - f(z) \Biggr| \leqslant$$

$$\leqslant C\, d_n \left(\prod_{j=0}^{n-1} c_j \right) \exp\left\{ \sigma \left[\sum_{j=0}^{n-1} q_j [1 - \omega_j(z_j)] - q_n \omega_n(z_n) \right] \right\} +$$

$$+ C\, d_{n-1} \left(\prod_{j=0}^{n-2} c_j \right) \exp\left\{ \sigma \sum_{j=0}^{n-2} q_j [1 - \omega_j(z_j)] - q_{n-1} \omega_{n-1}(z_{n-1}) \right]\Biggr\} + \ldots$$

$$\ldots + C\, d_2 c_1 \exp\{\sigma[1-\omega_1(z_1)) - q_2\omega_2(z_2)]\} + C\, d_1 \exp[-\sigma\omega_1(z_1)] =$$
$$= C \sum_{j=0}^{n-1} d_{j+1} \left(\prod_{i=0}^{j} c_i\right) \exp\left\{\sigma\left[\sum_{i=0}^{j} q_i [1-\omega_i(z_i)] - q_{j+1}\omega_{j+1}(z_{j+1})\right]\right\}.$$

Полученная оценка доказывает оба утверждения теоремы. □

Отметим, что при $n=1$ формула (20.8) превращается в формулу Карлемана (1.3), а при $n>1$ представление (20.8) имеет неголоморфное ядро.

Два следующих пункта посвящены многомерным аналогам формулы Карлемана с голоморфным ядром.

Отметим, что напрашивающийся вариант формулы Карлемана с голоморфным ядром — повторный интеграл в духе Карлемана — для полицилиндрических областей вполне очевиден. Речь идет о формуле (20.8) при $n>1$ и $q\equiv 1$, т. е. об интегральном представлении

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_M \frac{f(\zeta)\exp\left[m\sum_{j=1}^{n}(\psi_j(\zeta_j) - \psi_j(z_j))\right]}{(\zeta_1 - z_1)\ldots(\zeta_n - z_n)}\, d\zeta, \qquad (20.9)$$

где $\psi_j = \omega_j + i\tilde{\omega}_j$ или, другими словами, $\exp\psi_j = \varphi_j$ — «гасящая» функция из формулы Карлемана (1.3). В действительности, как легко видеть, φ-«гасящие» не во всей области D, а лишь в ее подобласти $\left\{z\colon \sum_{j=1}^{n}\omega_j(z_j) > n-1\right\}$.

3°. Пусть D — n-круговая область в $\mathbf{C}^n$. Требование $0\in D$ не накладывается, т. е. голоморфные в D функции представимы, вообще говоря, рядом Лорана, а не Тейлора. Обозначим Δ_r — тор (остов) из $\bar{D}$. В этом пункте предполагается, что функция $f\in A(D)$ и $f\in C(D\cup\Delta_r)$, если $\Delta_r\subset\partial D$.

Предложение 20.6 (Аграновский — Айзенберг). *Для* $z\in D$

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Delta_r} f(\zeta) \prod_{j=1}^{n} \frac{(\zeta_j^m/z_j^m) - (z_j^m/\zeta_j^m)}{\zeta_j - z_j}\, d\zeta, \qquad (20.10)$$

если в D есть точки z, у которых координата $z_j = 0$, то в (20.10) *нужно вместо $\zeta_j^m z_j^{-m}$ писать* 1.

Доказательство сводится к разложению $f(z)$ в D в ряд Лорана и использованию формулы для его коэффициентов

$$a_k = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Delta_r} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta_1^{k_1+1}\ldots\zeta_n^{k_n+1}}, \qquad (20.11)$$

где $k=(k_1, \ldots, k_n)$. Для дальнейшего полезна запись (20.10) в виде формулы с ядром Сеге

$$f(z)=\lim_{m\to\infty}\int_{\Delta_r} f(\zeta)\prod_{j=1}^{n}\frac{1-\left(\frac{z_j\bar{\zeta}_j}{r_j^2}\right)^m}{1-\frac{z_j\bar{\zeta}_j}{r_j^2}}\,d\mu, \tag{20.12}$$

где $0\in D$, $r=(r_1, \ldots, r_n)$, а мера

$$d\mu=\frac{1}{(2\pi i)^n}\frac{d\zeta}{\zeta_1\ldots\zeta_n}$$

положительна.

Пусть теперь Q — круговая область в $\mathbf{C}^n$, $0\in Q$. Голоморфные в Q функции раскладываются в ряды Картана по однородным полиномам и можно применить ту же идею, что и в предложении 20.6, с использованием следующего вспомогательного утверждения, которое нетрудно доказать индукцией по числу переменных n.

Лемма 20.7. *Для целых k_i верно тождество*

$$\sum_{\substack{|k|=l\\ k_j\geqslant 0}} x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^{l+n-1}}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(x_j-x_i)}.$$

Следствие 20.8:

$$\sum_{l=0}^{m}\sum_{\substack{|k|=l\\ k_j\geqslant 0}} x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^{m+n}-x_j^{n-1}}{(x_j-1)\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(x_j-x_i)}. \tag{20.13}$$

Теперь из разложения функции $f\in A(Q)$ в ряд Картана, (20.11) и (20.13) следует, если $\Delta_r\subset\bar{Q}$, утверждение.

Предложение 20.9 (Аграновский — Айзенберг). *Для всякой точки $z\in Q$*

$$f(z)=\lim_{m\to\infty}\int_{\Delta_r} f(\zeta)\sum_{j=1}^{n}\frac{\left(\frac{z_j\bar{\zeta}_j}{r_j^2}\right)^{n-1}-\left(\frac{z_j\bar{\zeta}_j}{r_j^2}\right)^{m+n}}{\left(1-\frac{z_j\bar{\zeta}_j}{r_j^2}\right)\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\left(\frac{r_j\bar{\zeta}_j}{r_j^2}-\frac{z_i\bar{\zeta}_i}{r_i^2}\right)}\,d\mu, \tag{20.14}$$

где мера μ — та же, что и в формуле (20.12).

Интересно сравнить формулы (20.10), (20.14) с формулой, в которой предельный переход отсутствует, но появляется несобственный интеграл. Мы приведем ее без доказательства.

Предложение 20.10 (Мкртчян). *Для всякой точки z из многомерного многоугольника Бореля $\Omega=\{z\colon K_z\subset G\}$*, где *$G$ — об-*

ласть, в которой $f(z)$ голоморфна, а $K_z=\{\zeta\colon\ \zeta=\tau z,\ |\tau-1/2|\leqslant 1/2,$ $\tau\in\mathbf{C}^1\}$, *справедлива формула*

$$f(z)=\int\limits_0^\infty dt\int\limits_{\Delta_r} f(\zeta)\sum_{i=1}^n\frac{\exp t\left(\dfrac{z_i\bar{\zeta}_i}{r_i^2}-1\right)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n\left(\dfrac{z_i\bar{\zeta}_i}{r_i^2}-\dfrac{z_j\bar{\zeta}_j}{r_j^2}\right)}\,d\mu. \tag{20.15}$$

Отметим, что формула (20.15) верна для более широкой области, чем Q (но не чем D).

4°. В этом пункте рассмотрим некоторые общие соображения о построении формул Карлемана с голоморфными ядрами. Пусть D — ограниченная область в $\mathbf{C}^n$ с кусочно-гладкой границей ∂D. Потребуем, чтобы ∂D являлась объединением конечного числа кусков гиперповерхностей, либо аналитических, или имеющих голоморфный «барьер», гладко зависящий от точки из этого куска (например, такой «барьер» есть для выпуклых, линейно-выпуклых или строго псевдовыпуклых гиперповерхностей, см. разд. 11, 12). Тогда существует для функций из $A_C(D)$ интегральное представление с голоморфным ядром, которое можно явно выписать в виде суммы интегралов по некоторым граням и некоторым ребрам на ∂D с помощью интегральной формулы Коши — Фантаппье (11.14) и идеи Норге получения из этой формулы интегрального представления с голоморфным ядром для функций, голоморфных в аналитических полиэдрах (см. разд. 12 и обзор [163]). Подчеркнем, что речь идет о явно выписанных интегральных представлениях с голоморфными ядрами, а не о теоремах существования типа теорем 14.6 и 14.7. Пусть N — объединение упомянутых граней и ребер, по которым ведется интегрирование в интегральном представлении с голоморфным ядром. Отметим, что по теореме 14.10 граница Шилова $S(D)$ обязана содержаться в N. Запишем указанное интегральное представление коротко в виде

$$f(z)=\int\limits_N f(\zeta)\,R\left(z,\zeta,d\zeta,d\bar{\zeta}\right), \tag{20.16}$$

где $R=R(z,\ \zeta,\ d\zeta,\ d\bar{\zeta})$ — соответствующая внешняя дифференциальная форма по ζ с коэффициентами, зависящими от ζ и голоморфно зависящими от z. Напомним, что (20.16) — просто краткая запись; в действительности N состоит, вообще говоря, из граней и ребер разной размерности, а форма R на каждой грани или каждом ребре имеет свой вид (для $n=2$ явный вид (20.16) можно сразу получить из формулы, приведенной в [5]). Пусть для множества $M\subset N$ выполняются условия 1) и 2), аналогичные соответствующим условиям разд. 1: 1) существует функция $\varphi(z)\in H^\infty(D)$, для которой $|\varphi|=1$ почти всюду на $N\backslash M$ (на каждом ребре и грани термин «почти всюду» означает, что речь идет о лебеговой мере той размерности, которую имеет это ребро или грань); 2) $|\varphi| > 1$ в D. Иначе говоря, для точек $N \setminus M$ существует *единый голоморфный «барьер»*.

Применим теперь формулу (20.16) к функции $f\varphi^m$ (предельным переходом изнутри области D можно показать, что она верна не только для класса $A_C(D)$, но и для $H^\infty(D)$; впрочем, в примерах достаточно требования $\varphi \in A_C(D)$), разделим обе части полученной формулы на $\varphi^m(z)$ и перейдем к пределу при $m \to \infty$. Ядро R в (20.16) равномерно ограничено по модулю, когда z принадлежит компакту из D. Поэтому интеграл по $N \setminus M$ в рассматриваемой формуле стремится к 0 при $m \to \infty$. Приходим к следующему утверждению.

Предложение 20.13 (Айзенберг — Назарян). *Для функций $f \in A_C(D)$ и точек $z \in D$ справедлив многомерный аналог формулы Карлемана с голоморфным ядром*

$$f(z) = \lim_{m \to \infty} \int_M f(\zeta) \left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m R. \tag{20.17}$$

Приведем примеры конкретных реализаций формулы (20.17).

Пример 1. Пусть $D = \{z\colon r_1 < |z_1| < R_1,\ r_2 < |z_2| < R_2\}$ — топологическое произведение колец в $\mathbf{C}^2$. Для функций $f \in A_C(D)$ верна кратная формула Коши (12.1), в которой интегрирование производится по четырем остовам. Из предложения 20.10 легко получается аналог формулы Карлемана для этой области, в котором интегрирование происходит только по двум остовам

$$f(z) = \lim_{m \to \infty} \int_M \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} \left(\frac{\zeta_1}{z_1}\right)^m d\zeta,$$

где $M = \Delta_{R_1, r_2} \cup \Delta_{R_1, R_2}$, $\Delta_{r,\rho} = \{z\colon |z_1| = r,\ |z_2| = \rho\}$.

Пример 2. Рассмотрим область $D \subset \mathbf{C}^2$, ограниченную гиперповерхностями $\Gamma_1 = \{z\colon |z_2| = r\}$ и $\Gamma_2 = \{z\colon |z_2| = A|z_1|^\alpha\}$, а также некоторой выпуклой гиперповерхностью класса $\mathbf{C}^2$, кусок которой, входящий в ∂D, обозначим S; пусть S гладко сопряжен с Γ_1 и Γ_2. В данном случае N состоит из S и остова $\Delta_{\rho,r}$, где $r = A\rho^\alpha$. Однако по $\Delta_{\rho,r}$ можно не интегрировать, так как из предложения 20.10 следует (см. также формулу (11.23)):

$$f(z) = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_S \left(\frac{\zeta_1}{z_1}\right)^m \frac{f(\zeta)\left(\delta_1 d\bar{\zeta}_2 + \delta_1 d\bar{\zeta}_n\right) \wedge d\zeta}{\left[\rho'_{\zeta_1}(\zeta_1 - z_1) + \rho'_{\zeta_2}(\zeta_2 - z_2)\right]^2},$$

где $S = \{(z_1, z_2)\colon \quad \rho = 0\}$; $\quad \delta_1 = \rho'_{\zeta_1}\rho''_{\zeta_2\bar{\zeta}_2} - \rho'_{\zeta_2}\rho''_{\zeta_1\bar{\zeta}_2}$; $\quad \delta_2 = \rho'_{\zeta_1}\rho''_{\zeta_2\bar{\zeta}_1} - \rho'_{\zeta_2}\rho''_{\zeta_1\bar{\zeta}_1}$.

Пример 3. Для полиэдра Вейля $D = \{z\colon z \in D_1,\ |\chi_i(z)| > 1,$ $i = 1, \ldots, N\}$, где $\chi_i(z)$ голоморфны в области $D_1 \subset \mathbf{C}^n$, $\bar{D} \subset D_1$, $i =$

$=1, \ldots, n$, в интегральном представлении Бергмана — Вейля (12.3) интегрирование происходит по остову σ — объединению n-мерных ребер $\gamma_{i_1\ldots i_n} = \bigcap\limits_{j=1}^{n} \gamma_{i_j}$, где грани $\gamma_i = \{z\colon z \in D_i, |\chi_i(z)| = 1\}$. Можно выбросить из остова σ ребра, принадлежащие какой-то фиксированной грани. Пусть, например, $M = \sigma \setminus \gamma_1$, тогда

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{\gamma_{i_1\ldots i_n} \subset M} \int\limits_{\gamma_{i_1\ldots i_n}} \left[\frac{\chi_1(\zeta)}{\chi_1(z)}\right]^m \frac{f(\zeta)\, \Omega_{i_1\ldots i_n}(\zeta, z)\, d\zeta}{\prod\limits_{j=1}^{n} \left[\chi_{i_j}(\zeta) - \chi_{i_j}(z)\right]}.$$

Пример 4. Если область D лежит в части пространства $\mathbf{C}^n$, задаваемой неравенством $\operatorname{Re}\psi(z) < 0$, где $\psi \in A(\overline{D})$, то ребра из N, лежащие на поверхности $\{z\colon \operatorname{Re}\psi(z) = 0\}$, можно не включать в M, если в качестве $\varphi(z)$ в формуле (20.14) взять $\varphi(z) = \exp[-\psi(z)]$.

21. ФОРМУЛЫ КАРЛЕМАНА С ИНТЕГРИРОВАНИЕМ ПО ОДНОМЕРНЫМ МНОЖЕСТВАМ

Обсудим вопрос о восстановлении голоморфных функций в области $D \subset \mathbf{C}^n$ по их значениям на некотором одномерном множестве положительной линейной меры на границе ∂D.

1°. Зафиксируем набор положительных чисел $B = (b_1, \ldots, b_n)$ такой, что π, $\ln b_1, \ldots, \ln b_n$ положительны и линейно независимы над кольцом целых чисел. Пусть $\{q_r\}_{r=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность всевозможных конечных произведений элементов B. Тогда равенство $f\left(b_1^{\zeta}, \ldots, b_n^{\zeta}\right) = \varphi(\zeta)$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между функциями, голоморфными в окрестности нуля в $\mathbf{C}^n$, и функциями, представимыми рядом Дирихле с показателем $\ln q_j$:

$$\sum_{\alpha} a_\alpha b_1^{\alpha_1\zeta} \ldots b_n^{\alpha_n\zeta} = \sum_{\alpha} a_\alpha \left(b_1^{\alpha_1} \ldots b_n^{\alpha_n}\right)^{\zeta} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j q_j^{\zeta}. \tag{21.1}$$

Если ряд Тейлора функции f сходится в единичном поликруге $U = U(0, 1)$, то ряд (21.1) сходится в левой полуплоскости $\widetilde{\Pi}$, причем граничные значения f и φ подчинены известной связи между периодическими функциями n переменных и почти периодическими функциями одного переменного, изученной Бохнером (см. [140]). Из его результатов, в частности, вытекает, что если $f \in A_C(U)$, то

$$\sup_{\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0} |\varphi| = \max_{\overline{U}} |f|, \tag{21.2}$$

$$M_y\left(\varphi(y) \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - \zeta_j b_j^{-iy}}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)\, dz}{z - \zeta} = f(\zeta) \tag{21.3}$$

при $\zeta \in U$ (см. кратную формулу Коши (12.1)). Здесь использовано следующее обозначение Бохнера:

$$M_y(g(y)) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A} g(y)\,dy.$$

Формулу (21.3) (точнее, ту ее часть, в которой речь идет о равенстве M_y функции $f(\zeta)$) можно рассматривать как своеобразный аналог кратной формулы Коши в поликруге U, но для одномерного множества интегрирования. Можно получить аналогичную формулу для восстановления функции по ее значениям на некоторой последовательности точек остова Г.

Теорема 21.1 (Знаменский). *Для всякой функции $f \in A_c(U)$ и любой точки $z \in \overline{U}$ справедлива формула*

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=-m}^{m} \frac{1}{2m} \frac{f\left(b_1^{ij}, \ldots, b_n^{ij}\right)}{\left(1 - z_1 b_1^{\delta(j)}\right) \ldots \left(1 - z_n b_n^{\delta(j)}\right)}, \tag{21.4}$$

где последовательность $\delta(j)$ зависит от выбора B. При $\delta(j) = -ij$ формула (21.4) верна для $z \in U$.

Отметим, что размерности «множества интегрирования» в формулах (21.3) и (21.4) не зависят от числа переменных.

Всякая функция из $A_C(U)$ может быть равномерно на $\overline{U}$ приближена полиномами $P(z)$. В этом случае последовательность соответствующих полиномов Дирихле $P(b^\zeta)$ сходится равномерно на замыкании левой полуплоскости $\overline{\overline{\Pi}} = \{\zeta\colon \operatorname{Re}\zeta \leqslant 0\}$. Используя свойство (21.2) и неравенство Коши для коэффициентов полинома, нетрудно заметить, что при наложенных на b_j ограничениях эта функция раскладывается в абсолютно сходящийся в полуплоскости $\widetilde{\Pi}$ ряд Дирихле $\sum_{j=1}^{\infty} a_j q_j^\zeta$. И наоборот, если функция равномерно на $\overline{\overline{\Pi}}$ приближается полиномами Дирихле указанного вида, то она есть сужение некоторой функции из $A_C(U)$ на аналитическую кривую $\{(b_1^\zeta, \ldots, b_n^\zeta)\colon \zeta \in \mathbf{C}^1\}$. Таким образом, установлен изоморфизм между $A_C(U)$ и алгеброй функций из $A(\widetilde{\Pi})$, равномерно на $\overline{\overline{\Pi}}$ приближаемых полиномами от b^ζ.

Пусть $a(\nu)$ определено для всех целых $\nu \in Z$. Введем

$$S_\nu[a(\nu)] = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2m} \sum_{j=-m}^{m} a(j).$$

Лемма 21.2. *Если x/π иррационально, то $S_\nu(e^{i\nu x}) = 0$.*

Доказательство:

$$|S_\nu(e^{i\nu x})| = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2m} \left| \sum_{j=-m}^{m} (e^{ix})^j \right| \leqslant \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m\,|e^{ix} - 1|} = 0. \qquad \square$$

Доказательство теоремы 21.1. Пусть сначала $f(z)=z^j$, тогда для любых $N>\max\limits_i j_i$, $z\in U$, $\alpha<0$

$$S_\nu\left[f\left(b^{i\nu}\right)\prod_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\left(z_m b_m^{\alpha-i\nu}\right)^k\right]=$$

$$=\sum_{k_1,\dots,k_n=1}^{N}S_\nu\left[e^{-i\nu[(k_1-j_1)\ln b_1+\dots+(k_n-j_n)\ln b_n]}\right]\prod_{m=1}^{n}\left(z_m b_m^{\alpha}\right)^{k_m}=$$

$$=f(z\,b^\alpha),\qquad(21.5)$$

где $zb^\alpha=\left(z_1b_1^\alpha,\dots,z_nb_n^\alpha\right)$. Переходя в обеих частях равенства (21.5) к пределу при $N\to\infty$, получаем для любого монома, а следовательно, и для любого полинома

$$S_\nu\left[f\left(b^{i\nu}\right)\prod_{m=1}^{n}\left(1-z_m b^{\alpha-i\nu}\right)^{-1}\right]=f\left(zb^\alpha\right).$$

Тем самым формула (21.4) доказана для полиномов при $\delta(j)=-ij$ и $z\in U$. Поскольку всякая функция $f\in A_c(U)$ равномерно аппроксимируется полиномами, то (21.4) верно и для таких функций. Остается показать, что можно так выбрать $\delta(j)$, чтобы формула (21.4) имела место и для точек $z\in\overline{U}$. Положим $j_0=0$. Пусть j_{N-1} определено. Найдется $j_N>Nj_{N-1}$ такое, что для всех $f(z)=z^l$, $\max\limits_i l_i<N$

$$\left|\frac{1}{2\left(j_N^*-j_N\right)}\sum_{\substack{\nu\in Z\\ j_N\leqslant|\nu|<j_N^*}}f\left(b^{i\nu}\right)\prod_{m=1}^{n}\left(1-z_m b^{-(1/N)-i\nu}\right)^{-1}-f\left(zb^{1/N}\right)\right|<\frac{1}{N},\qquad(21.6)$$

где $j_N^*>\dfrac{N+1}{N}j_N$. Положим $\delta(\nu)=-\dfrac{1}{N-1}-i\nu$, $j_{N-1}\leqslant|\nu|<j_N$, тогда формула (21.4) получается для полиномов из (21.6). Поскольку полиномы плотны в $A_c(D)$, а обе части равенства (21.4) и неравенства (21.6) при фиксированном z непрерывны по f в естественной топологии равномерной сходимости, приходим к утверждению теоремы. □

Пусть теперь D — полная n-круговая область в $\mathbf{C}^n$, $c\in\partial D$.

Следствие 21.3. *Всякую функцию $f\in A_c(D)$ можно конструктивно восстановить по ее значениям на множестве*

$$M=\left\{z:\ z_j=c_jb_j^{\zeta},\ j=1,\dots,n,\ -i\zeta\in M'\right\},$$

где $M'\subset\mathbf{R}^1$ — произвольное множество положительной линейной меры.

Доказательство. Функция $\varphi(\zeta)=f\left(c_1b_1^{\zeta},\dots,c_nb_n^{\zeta}\right)$ голоморфна в $\widetilde{\Pi}$, ограничена в ней, непрерывна на $\overline{\widetilde{\Pi}}$, и ее значения на множестве $iM'=\{\zeta:\ -i\zeta\in M'\}$ определяются значениями f на M. Затем функцию $\varphi(\zeta)$ можно восстановить в $\widetilde{\Pi}$ с помощью формулы Карлемана (5.3). Далее по формуле (21.4) функция f восстанавливается в некотором поликруге с центром в нуле. Теперь можно вычислить значение f в любой точке из области D, раскладывая ее в ряд Тейлора с центром в нуле или используя формулы преобразования Бореля функций многих комплексных переменных (см., например, [136, с. 251]).

2°. Пусть D — звездная область, $0 \in D \subset \mathbf{C}^n$; всякая функция $f \in A(D)$ раскладывается в некотором поликруге $U(0, r) \subset D$ в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{\alpha} d_\alpha z^\alpha. \tag{21.7}$$

Пусть кривая $\tilde{\gamma} = \{z\colon z_i = r_i b_i^\zeta,\ i = 1, \ldots, n, \zeta \in \gamma\} \subset \partial D$, где γ — отрезок $[0, ic]$, лежащий на мнимой оси в $\mathbf{C}^1$, где $c > 0$.

Теорема 21.4 (Болотов). *Коэффициенты Тейлора функции $f \in A_C(D)$ определяются по значениям f на $\tilde{\gamma}$ формулой*

$$d_\alpha = \frac{1}{2\pi i} \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m} b_1^{-\alpha_1(ij-1)} \ldots b_n^{-\alpha_n(ij-1)} \times$$

$$\times \lim_{p\to\infty} \exp\left(ip \ln \frac{ij-1}{i(j-c)-1}\right) \int_\gamma \frac{f(rb^\zeta)}{t+1-ij} \exp\left(ip\frac{t-ic}{t}\right) dt,$$

где $rb^\zeta = (r_1 b_1^\zeta, \ldots, r_n b_n^\zeta)$, ветвь логарифма выбирается так, чтобы

$$\ln\left(1 - i\frac{c}{\zeta}\right)\Big|_{\zeta=2ic} = -i\pi.$$

Доказательство этой теоремы легко получается применением методов предыдущего пункта и формулы Карлемана из разд. 5 (но не для верхней полуплоскости Π, а для левой полуплоскости $\tilde{\Pi}$). □

Заметим, что, зная коэффициенты d_α ряда (21.7), можно восстановить $f(z)$ в поликруге $U(0, r) \subset D$, а значение f в любой точке $a \in D$ можно получить с помощью разложения Миттаг — Лефлера функции $\psi(\zeta) = f(\zeta a)$.

Теорема 21.4 не укладывается в результаты разд. 17, поэтому заранее не ясно, есть ли условная устойчивость рассматриваемой задачи аналитического продолжения с кривой $\tilde{\gamma} \subset \partial D$ в область D. Для $n = 2$ соответствующая оценка условной устойчивости этой задачи приведена в [47]. Мы ее не приводим ввиду громоздкости.

22. ГРАНИЧНЫЕ МНОЖЕСТВА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ПЛЮРИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЭТИХ ФУНКЦИЙ

1°. Пусть D — ограниченная односвязная область в $\mathbf{C}^n$, а $S = S(D)$ — ее граница Шилова. Рассмотрим следующие задачи.

1. Какие замкнутые множества $M \subset S$ являются множествами единственности для плюригармонических в D функций?

2. Описать класс $\mathscr{E}$ замкнутых множеств M на S, для которых из того факта, что функция $f \in A_C(D)$, $f \neq 0$ в D и $|f| = 1$ на M, следует $f \equiv \text{const}$.

Эти задачи по существу эквивалентны: от второй к первой можно перейти логарифмированием, а от первой ко второй — рассмотрением функции $\exp(u+iv)$, где u — плюригармоническая функция из первой задачи, а v — сопряженная к ней плюригармоническая функция. Следовательно, указанная эквивалентность действительно есть, если в первой задаче имеются в виду не функции из $\mathrm{Ph}_c(D)$, а такие функции $u \in \mathrm{Ph}_c(D)$, что сопряженные к ним плюригармонические функции тоже непрерывны на $\bar{D}$. Будем обсуждать вторую задачу.

Сама граница Шилова $S \in \mathscr{E}$. В самом деле, пусть $f \neq 0$ на $\bar{D}$ и $|f| = 1$ на S; тогда $|1/f| \leqslant 1$ и $|f| \leqslant 1$ в D, значит, $|f| \equiv 1$ в D, поэтому $f \equiv \mathrm{const}$. Если $M \in \mathscr{E}$, то M — множество единственности для алгебры $A_c(D)$. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть вместо f функцию $\exp f$.

Теорема 22.1 (Кытманов — Никитина). *Если $M \in \mathscr{E}$, функция $F \in A_c(D)$, $|F| < 1$ на D и $|F| = 1$ на M, то $F(M) = \gamma_1$ — окружность радиуса 1 с центром в нуле.*

Доказательство. Пусть $F(M) \neq \gamma_1$, тогда множество $\gamma_1 \setminus F(M)$ открыто в γ_1. Рассмотрим на γ_1 функцию $\varphi \in C^\infty$, равную нулю на $F(M)$ и положительную на $\gamma_1 \setminus F(M)$. Продолжим φ в единичный круг U как гармоническую и пусть $f \in A(U)$, $\operatorname{Re} f = \varphi$. Очевидно $f \in A_c(U)$, положим $g(z) = f(F(z))$, тогда $g \in A_c(D)$. Кроме того, $\operatorname{Re} g = \operatorname{Re} f(F(z)) = 0$ на M и $\operatorname{Re} g > 0$ в D. Отсюда следует, что $|\exp g| = 1$ на M и $|\exp g| > 1$ в D. □

Рассмотрим аналитические диски ψ с границей на S, т. е. ψ: $U \to D$, $\psi \in A_c(U)$ и $\psi(\gamma_1) \subset S$. Пусть B — объединение некоторого числа таких дисков, а M — объединение их границ $\psi(\gamma_1)$. Множество M назовем счетно-линейно связным, если для любых точек z, $w \in M$ существует непрерывное отображение σ: $[0, 1] \to B \cup M$ такое, что $\sigma(0) = z$, $\sigma(1) = w$ и $\sigma([0, 1])$ можно представить в виде объединения не более чем счетного числа подмножеств дисков из $B \cup M$.

Теорема 22.2. (Кытманов — Никитина). *Пусть M — замкнутое множество единственности для функций из $A_c(D)$ и $M \subset S$ является объединением границ аналитических дисков. Если M счетно-линейно связно, то $M \in \mathscr{E}$.*

Доказательство. Пусть $f \in A_c(D)$, $f \neq 0$ на $\bar{D}$ и $|f| = 1$ на M и пусть ψ — аналитический диск, причем $\psi(\gamma_1) \subset M$. Тогда $|f| = 1$ на $\psi(\gamma_1)$, следовательно, $f \equiv c_\psi$ на $\psi(U)$. В силу счетной линейной связности M для любых z, $w \in M$ существует отображение σ с указанными свойствами. Тогда $f(\sigma)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$, а $f(\sigma([0, 1]))$ есть не более чем счетное множество. Кроме того, $f(\sigma([0, 1]))$ компактно и связно, поэтому $f(z) = f(w)$. Итак, $f \equiv \mathrm{const}$ на M, следовательно, $f \equiv \mathrm{const}$ в D. □

Заметим, что в случае поликруга $U = U^n = \{z\colon |z_j| < 1,\ j = 1, \ldots, n\}$ рассматриваемые аналитические диски ψ имеют вид $z_j = b_j(t)$, где $j = 1, \ldots, n$, а $b_j(t)$ — конечные произведения Бляшке.

Внутренние функции $F \in A_C(U)$ представимы в форме (см. [138, с. 97])

$$F(z) = \frac{P(z)\widetilde{Q}(1/z)}{Q(z)},$$

где Q — полином без нулей в $\overline{U}$, а P — моном с коэффициентом, который по абсолютной величине равен 1, далее $\widetilde{Q}$ — полином, коэффициенты которого комплексно-сопряжены с коэффициентами полинома Q, и $P(z)\widetilde{Q}(1/z)$ тоже является полиномом. В работе [60] построен широкий класс рациональных внутренних функций для обобщенного единичного круга τ_0. Это позволяет построить достаточно большое семейство множеств из классов $\mathscr{E}$ для данных областей.

Обсудим вопрос о восстановлении плюригармонической функции U в D по ее значениям на множестве $M \in \mathscr{E}$. Удобнее даже восстанавливать голоморфную функцию $f \in A_C(D)$, действительная часть которой задана на M. Пусть M удовлетворяет условиям теоремы 22.2, тогда $M = \bigcup\limits_{\alpha} \psi_\alpha(\gamma_1)$, где ψ_α — аналитические диски. С помощью классической формулы Шварца получим значения f на $\psi_\alpha(U)$, а затем с помощью формулы Сохоцкого — значения f на $\psi_\alpha(\gamma_1)$ (почти везде). Эти значения необходимо согласовать между собой, поскольку формула Шварца восстанавливает функцию f только с точностью до аддитивной постоянной. Для этого нужно воспользоваться счетной линейной связностью M. Особенно просто провести указанное согласование, когда все диски ψ_α имеют общую точку. После того как мы таким образом получим на M значения голоморфной функции (почти везде в смысле меры той же размерности, какова размерность границы Шилова), необходимо воспользоваться подходящей формулой Карлемана для восстановления f уже во всей области D. Приведем примеры реализации данной идеи.

Пример 1. Пусть $D = U^2 = \{z\colon |z_1| < 1,\ |z_2| < 1\}$ и $M = \bigcup\limits_{t \in E} \psi_t$, где ψ_t задается системой уравнений $\zeta_1 = e^{i\tau}$, $\zeta_2 = te^{i\tau}$, $-\pi < \tau < \pi$, $E = \{t\colon t = e^{ic},\ a \leqslant c \leqslant b\}$. В силу теоремы 22.2 множество $M \in \mathscr{E}$. С помощью классической формулы Шварца получим значения функции $f(z_1, tz_1)$ для $|z_1| < 1$ и $t \in E$. Далее, зафиксировав z_1 (при $|z_1| < 1$), воспользуемся формулой Карлемана (1.3) по переменному z_2. Окончательно имеем

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_M u(\zeta) \left[\frac{\varphi\left(\dfrac{\zeta_2}{\zeta_1}\right)}{\varphi\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)} \right]^m \frac{\zeta_1 + z_1}{\zeta_1 - z_1} \, \frac{z_1\zeta_2}{z_1\zeta_2 - z_2\zeta_1} \, \frac{d\zeta_1}{\zeta_1} \wedge$$

$$\wedge \frac{d\zeta_2}{\zeta_2} + i \operatorname{Im} f(0),$$

где
$$\varphi(a)=\varphi(a,E)=\exp\frac{1}{2\pi i}\int\limits_E\frac{\tau+a}{\tau-a}\frac{d\tau}{\tau}.$$

Пример 2 (Ишанкулов). Снова $D=U^2$, а $M=A\cup B$, где $A=\{\zeta\colon \zeta_1=e^{i\alpha},\ |\zeta_2|=1\}$, $B=\{\zeta\colon |\zeta_1|=1,\ \zeta_2\in E\}$, $E=\{\zeta_2\colon |\zeta_2|=1,\ a\leqslant\arg\zeta_2\leqslant b\}$. С помощью классической формулы Пуассона получим значения $u(z_1,\zeta_2)$ для $|z_1|<1$ и $\zeta_2\in E$. Далее, зафиксировав z_1 (при $|z_1|<1$), воспользуемся формулой Карлемана (1.3) для голоморфной функции $\frac{\partial u(z_1,\zeta_2)}{\partial z_1}$. Зная производную, легко найти функцию u:

$$u(z)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_B u(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta_2)}{\varphi(z_2)}\right]^m\left[\frac{1}{\zeta_1-z_1}-\frac{1}{\zeta_1-e^{i\alpha}}\right]+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_A u(\zeta)\frac{1-|z_2|^2}{|\zeta_2-z_2|^2}\frac{d\zeta_2}{\zeta_2}. \qquad (22.1)$$

Формула (22.1) верна для функций $u\in \mathrm{Ph}(D)\cap C^2(\bar D)$. В работе [85] можно найти оценку условной устойчивости для рассматриваемой задачи.

Пример 3. Пусть D — полная круговая область с центром в нуле, M — множество, лежащее на ∂D, и $m_{2n-1}(M)>0$. Кроме того, $M=\bigcup\limits_\alpha \psi_\alpha$, где ψ_α задается системой уравнений $\zeta_1=\rho e^{i\tau}$, $\zeta_2=\alpha_1\rho e^{i\tau}$, ..., $\zeta_n=\alpha_{n-1}\rho e^{i\tau}$, $0\leqslant\tau\leqslant 2\pi$. С помощью классической формулы Шварца получим значение функции $f(z_1,\alpha_1 z_1,\ldots,\alpha_{n-1}z_1)$, а затем, применяя формулу Сохоцкого, найдем

$$f(\zeta_1,\alpha_1\zeta_1,\ldots,\alpha_{n-1}\zeta_1)=u(\zeta_1,\alpha_1\zeta_1,\ldots,\alpha_{n-1}\zeta_1)+$$
$$+\ \mathrm{p.v.}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi_1|=|\zeta_1|}u(\xi_1,\alpha_1\xi_1,\ldots,\alpha_{n-1}\xi_1)\frac{\xi_1+\zeta_1}{\xi_1-\zeta_1}\frac{d\xi_1}{\xi_1}+i\,\mathrm{Im}\,f(0).$$

Итак, мы получили на множестве M значения голоморфной функции $f\in A_c(D)$. Для восстановления f в области D можно воспользоваться формулой Карлемана, в которой интегрирование происходит по множеству M (например, если D удовлетворяет условиям п. 1° разд. 16, то годится формула (16.5)).

2°. Приведем два результата о граничных множествах единственности для плюригармонических функций, которые формально не вытекают из общей теоремы 22.2 хотя бы потому, что относятся к неограниченным областям. Пусть $D=\{z\colon y_j=\mathrm{Im}\,z_j>0,\ j=1,\ldots,n\}$ — произведение верхних полуплоскостей и $u(z)=u(x,y)\in\mathrm{Ph}_c(D)$. Рассмотрим функцию $\psi(x)=u(x,0)$, $x\in M$, на множестве

$$M=\{x\colon a_j<x_j<b_j,\ j=1,\ldots,n-1,\ -\infty<x_n<\infty\}.$$

Ставится вопрос, определяет ли функцию $u(x, y)$ в D задание функции $\psi(x)$? Пусть сопряженная к u плюригармоническая функция v тоже входит в класс $\mathrm{Ph}_c(D)$.

Предложение 22.3 (Ишанкулов). *Если*

$$\lim_{|z|\to\infty} u(z) = 0, \tag{22.2}$$

то из $\psi(x) \equiv 0$ *следует, что* $u(z) \equiv 0$ *в области* D.

Заметим, что область D биголоморфно отображается на единичный поликруг U, но из (22.2) еще не следует, что после такого отображения функция $u + iv$ перейдет в функцию класса $A_c(U)$. Однако доказательство этого (и следующего) предложения легко получить с помощью преобразования Фурье по переменным x (см. [85]). Оценку условной устойчивости для рассматриваемой задачи (но уже в случае ограниченной полицилиндрической области) также можно найти в работе [85].

Рассмотрим далее биполосу в пространстве $\mathbf{C}^2$, являющуюся произведением двух полос: $D = \{z\colon 0 < y_j < 1,\ j = 1, 2\}$. В данном случае остов области D — объединение четырех плоскостей $P_1 = \{z\colon y_1 = y_2 = 0\}$, $P_2 = \{z\colon y_1 = 0,\ y_2 = 1\}$, $P_3 = \{z\colon y_1 = y_2 = 1\}$ и $P_4 = \{z\colon y_1 = 1,\ y_2 = 0\}$. Для того чтобы единственным образом определить плюригармоническую в области D функцию, достаточно задать ее граничные значения только на двух из указанных четырех плоскостей (сравните с примером 1 из разд. 20).

Предложение 22.4 (Ишанкулов). *Пусть функция* $u(z_1, z_2) \in ph_c(D)$ *и удовлетворяет условию* (22.2). *Если* $u = 0$ *на двух из четырех плоскостей* P_1, P_2, P_3, P_4, *то* $u = 0$ *в области* D.

3°. В этом пункте D — n-круговая область в $\mathbf{C}^n$, $0 \in D$, Q — круговая область в $\mathbf{C}^n$, $0 \in Q$, а Ω — многомерный многоугольник Бореля. Эти области рассматривались в разд. 20, п. 3°. Там были получены формулы Карлемана с ядрами Сеге (20.12), (20.14) и (20.15). Эти ядра мы обозначим $h_m(z, \bar\zeta)$, $h_m(z, \bar\zeta)$ и $H_t(z, \bar\zeta)$ соответственно. Заметим, что

$$h_m(0, \bar\zeta) = \tilde h_m(0, \bar\zeta) = 1, \quad \int_0^\infty H_t(0, \bar\zeta) = 1. \tag{22.3}$$

Относительно функций f сохраним условия разд. 20, п. 3°.

Предложение 22.5 (Аграновский — Айзенберг). Для всякой функции $u = \operatorname{Re} f$

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} \int_{\Delta_r} u(\zeta)\,[2h_m(z, \bar\zeta) - 1]\,d\mu + i \operatorname{Im} f(0), \quad z \in D,$$

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} \int_{\Delta_r} u(\zeta)\,[2\tilde h_m(z, \bar\zeta) - 1]\,d\mu + i \operatorname{Im} f(0), \quad z \in Q, \tag{22.4}$$

$$f(z) = \int_0^\infty dt \int_{\Delta_r} u(\zeta)\,[2H_t(z, \bar\zeta) - 1]\,d\mu + i \operatorname{Im} f(0), \quad z \in \Omega.$$

Докажем, например, первую из формул (22.4). Ядро Шварца в ней обозначим $S_m(z, \bar{\zeta})$; из (22.3) следует, что $S_m(0, \bar{\zeta})=1$. Кроме того, из (20.12) получаем

$$f(0)=\int\limits_{\Delta_r} f(\zeta)\,d\mu. \tag{22.5}$$

Из действительности меры μ вытекает, что (22.5) верно и для антиголоморфных функций. Далее для всякой точки $z\in D$

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_{\Delta_r}\frac{f(\zeta)+\overline{f(\zeta)}}{2}S_m(z, \bar{\zeta})\,d\mu=f(z)+\overline{f(0)}-\frac{f(0)+\overline{f(0)}}{2}=$$

$$=f(z)-i\operatorname{Im}f(0).\ \square$$

Наконец, если воспользоваться очевидным равенством для ядра Пуассона $P(z, \zeta)=\operatorname{Re}S(z, \bar{\zeta})$ и возможностью в рассматриваемых областях функции $u\in \mathrm{Ph}_c(D)$ аппроксимировать на $\bar{D}$ функциями $u=\operatorname{Re}f$, где $f\in A_c(D)$, то из предложения 22.5 получим

Предложение 22.6 (Аграновский — Айзенберг). *Для плюригармонических функций из классов* $\mathrm{Ph}_c(D)$, $\mathrm{Ph}_c(Q)$ *и* $Ph_c(\Omega)$ *соответственно верны формулы*

$$u(z)=\lim_{m\to\infty}\int\limits_{\Delta_r}u(\zeta)\operatorname{Re}[2h_m(z, \bar{\zeta})-1]\,d\mu,\quad z\in D,$$

$$u(z)=\lim_{m\to\infty}\int\limits_{\Delta_r}u(\zeta)\operatorname{Re}[2\tilde{h}_m(z, \bar{\zeta})-1]\,d\mu,\quad z\in Q, \tag{22.6}$$

$$u(z)=\int\limits_0^\infty dt\int\limits_{\Delta_r}u(\zeta)\operatorname{Re}[2H_t(z, \bar{\zeta})-1]\,d\mu,\quad z\in\Omega.$$

Заметим, что если не требовать (как это мы и делали в предложении 20.6), чтобы $0\in D$, то тор Δ_r не будет множеством единственности для плюригармонических функций (окружность — множество единственности для функций, гармонических в круге, но не в кольце!), поэтому в этом случае не могут существовать аналоги в духе Карлемана формул Пуассона или Шварца. Кроме того, интересно отметить, что аналоги формул Пуассона (22.6) и Шварца (22.4) в духе Карлемана значительно проще, чем аналоги этих формул в классическом духе для рассматриваемых областей (см., например, [92, 94]).

23. СУЩЕСТВОВАНИЕ ФОРМУЛ КАРЛЕМАНА ДЛЯ ПОДМНОЖЕСТВ ГРАНИЦЫ ШИЛОВА

1°. Пусть D — ограниченная круговая сильно звездная область в $\mathbb{C}^n$, а $S=S(D)$ — ее граница Шилова. Подпространство следов на S функций из $A_c(D)$ обозначим A_S. Рассмотрим на S положительную меру μ, инвариантную относительно поворотов $z\to e^{i\varphi}z$ (где

$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$), для которой имеет место интегральное представление (см. теорему 14.9 и замечание, сделанное после ее формулировки) для $f \in A_c(D)$ и $z \in D$

$$f(z) = \int_S h(z, \zeta) f(\zeta)\, d\mu_\zeta, \tag{23.1}$$

здесь $h(z, \zeta) \in C(D \times S)$. Обозначим через $O_\mu(S)$ подпространство функций $\varphi \in C(S)$, ортогональных голоморфным функциям при интегрировании по S в том смысле, что

$$\int_S \varphi f d\mu = 0$$

для всех $f \in A_s$. Для рассматриваемого класса областей D пространства Харди $H^p(D)$ вводятся следующим образом: $f \in H^p(D)$, если $f \in A(D)$ и при любом r, $0 < r < 1$,

$$\int_S |f(r\zeta)|^p d\mu \leqslant C_f.$$

Лемма 23.1. *Пусть $f \in H^p(D)$, $p \geqslant 1$, тогда предел*

$$\lim_{r \to 1-0} f(r\zeta) = f(\zeta) \tag{23.2}$$

существует почти всюду на S (в смысле меры μ), функция f интегрируема на S и для $z \in D$ верна формула (23.1). Сужение $f_z(t) = f(zt)$ функции f на комплексную прямую, проходящую через 0 и z, принадлежит $H^p(U)$ (где U — единичный круг) для почти всех $z \in S$.

Доказательство. Из свойств инвариантности меры μ относительно поворотов следует

$$\int_S |f(r\zeta)|^p d\mu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_S \left|f\left(r\zeta e^{i\varphi}\right)\right|^p d\mu = \frac{1}{2\pi}\int_S d\mu \int_0^{2\pi} \left|f\left(r\zeta e^{i\varphi}\right)\right|^p d\varphi,$$

отсюда вытекает

$$\frac{1}{2\pi}\int_S d\mu \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\varphi}\zeta\right)\right|^p d\varphi \leqslant C_f. \tag{23.3}$$

Внутренний интеграл в левой части (23.3) не убывает с возрастанием r, поэтому он является ограниченной функцией от r для почти всех $\zeta \in S$. Поскольку существуют радиальные граничные значения (и даже угловые граничные значения) у функций из $H^p(U)$ почти всюду на ∂U, то предел

$$\lim_{r \to 1-0} f\left(re^{i\varphi}\zeta\right) = f\left(e^{i\varphi}\zeta\right)$$

существует почти при всех $(\zeta, \varphi) \in \{(\zeta, \varphi) : \zeta \in S, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$. Граница Шилова круговой области инвариантна относительно поворотов, поэтому предел в (23.2) существует почти всюду на S. □

Следующее утверждение распространяет на рассматриваемый класс областей теорему 17.5.

Теорема 23.2 (Знаменская). *Для того чтобы для заданной на S меры ν и для любой функции $\varphi \in O_\mu(S)$ имело место равенство*

$$\int_S \varphi d\nu = 0, \tag{23.4}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $f \in H^1(D)$ такая, что $\nu \in f_\mu$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\Gamma \subset C^*(S)$ — совокупность мер $\theta = f\mu$, где $f \in H^1(D)$. Нужно показать, что мера ν принадлежит Γ.

Докажем, что Γ — слабо секвенциально замкнуто, т. е. для любой последовательности мер $\{\theta_m = f_m\mu\}$, $m = 1, 2, \ldots$, из Γ, которая *-слабо сходится к θ_0, сама мера θ_0 также принадлежит Γ. Для всех $\psi \in C(S)$

$$\lim_{m\to\infty} \int_S \psi d\theta_m = \int_S \psi d\theta_0.$$

Возьмем в качестве функции ψ ядро $h(z, \zeta)$. Так как *-слабо сходящаяся последовательность функционалов ограничена по норме

$$\left| \int_S h(z, \zeta)\, d\theta_m \right| \leqslant C_1 \|h\|,$$

то из (23.1) получаем

$$|f_m(z)| = \left| \int_S h(z, \zeta) f_m(\zeta)\, d\mu_\zeta \right| \leqslant C_1 \max_{\zeta\in S} |h(z, \zeta)| \leqslant C_1 \max_{\zeta\in S,\, z\in K} |h(z, \zeta)|,$$

где K — компакт из области D. Следовательно, $|f_m(z)| \leqslant C_2(K)$, поэтому из последовательности $\{f_m\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{f_{m_j}\}$, равномерно сходящуюся на компактах в D. Остается показать, что предельная функция f_0 этой подпоследовательности тоже входит в класс Харди $H^1(D)$. Это вытекает из неравенства

$$\int_S |f_m(r\zeta)|\, d\mu \leqslant \int_S |f_m(\zeta)|\, d\mu \tag{23.5}$$

и ограниченности нормы θ_m:

$$\|\theta_m\| = \int_S |f_m(\zeta)\, d\mu \leqslant C. \tag{23.6}$$

Неравенство (23.1) следует из свойства меры (см. доказательство леммы 23.1) и следующего неравенства:

$$\int_0^{2\pi} |f_m(re^{i\varphi}\zeta)|\,d\varphi \leqslant \int_0^{2\pi} |f_m(e^{i\varphi}\zeta)|\,d\varphi$$

почти при всех $r \in S$. В силу равномерной сходимости подпоследовательности $\{f_{m_j}\}$ на компактах из D можно переходить к пределу под знаком интеграла в левой части неравенства (23.5). Поэтому из (23.6) получаем

$$\int_S |f_0(r\zeta)|\,d\mu \leqslant C$$

при любом r, $0 < r < 1$. Покажем, что $\theta_0 = f_0\mu$. Для этого достаточно доказать, что

$$\int_S \psi d\theta_0 = \lim_{m\to\infty} \int_S \psi f_m d\mu = \int_S \psi f_0 d\mu \tag{23.7}$$

для всех $\psi \in C(S)$ или для множества функций, всюду плотного в $C(S)$. Рассмотрим в качестве такого множества совокупность всех полиномов $P(\zeta, \bar{\zeta})$ и покажем, что верно (23.7) для любого монома $\zeta^j\bar{\zeta}^l$, если $f_m \in A_c(D)$.

Имеем

$$\int_S (r\zeta)^j (r\bar{\zeta})^l f_m(r\zeta)\,d\mu = \frac{1}{2\pi}\int_S (r\zeta)^j (r\bar{\zeta})^l d\mu \int_0^{2\pi} f_m(re^{i\varphi}\zeta)\,e^{i\varphi(|j|-|l|)}d\varphi. \tag{23.8}$$

Разложением f_m в ряд по однородным полиномам P_q степени q для внутреннего интеграла из правой части (23.8) получаем равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_m(re^{i\varphi}\zeta)\,e^{i\varphi(|j|-|l|)}d\varphi = \sum_{|q|=|l|-|j|-1} P_q(r\zeta)\left.\frac{\partial^{|q|} f_m(z)}{\partial z^q}\right|_{z=0}.$$

Следовательно, интегралы в (23.8) есть линейные комбинации от значений соответствующих функций и их производных в нуле. Для функций класса $H^1(D)$ этот факт легко доказать, опираясь на только что установленное и лемму 23.1, с помощью предельного перехода.

Далее так же, как при доказательстве теоремы 17.5, получаем, что если $\nu \notin \Gamma$, то существует функция $\varphi \in C(S)$ такая, что для любой $f \in H^1(D)$

$$\int_S \varphi f d\mu = 0, \tag{23.9}$$

но

$$\int_S \varphi d\nu = 1. \tag{23.10}$$

Из равенства (23.9) вытекает, что $\varphi \in O_\mu(S)$, поэтому равенство (23.10) противоречит условию (23.4).

Достаточность. Пусть $\nu = f\mu$, где $f \in H^1(D)$. В силу леммы 23.1 имеем

$$\lim_{r \to 1-0} \int_S \varphi(\zeta) f(r\zeta)\, d\mu = \int_S \varphi(\zeta) f(\zeta)\, d\mu = 0$$

для всех $\varphi \in O_\mu(S)$. □

Борелевское множество $M \subset S$ положительной меры $\mu(M) > 0$ назовем *множеством единственности функций класса* $H^1(D)$ *относительно меры* μ, если для любой $f \in \mathbf{H}^1(D)$ из условия $f(z) = 0$ почти всюду на M следует, что $f \equiv 0$. Следующая лемма позволяет описать введенные множества единственности.

Лемма 23.3. *Для того чтобы множество $M \subset S$ было множеством единственности функций класса $H^1(D)$ относительно меры μ, необходимо и достаточно, чтобы ни один ненулевой однородный полином не был равен нулю почти всюду на M.*

Для доказательства этой леммы потребуется следующее утверждение.

Лемма 23.4. *Пусть $M_\zeta = \{t\colon t \in \mathbf{C}^1,\ t\zeta \in M\}$ и $\alpha(M) = \{\zeta\colon \zeta \in S,\ m_1(M_\zeta) > 0\}$, где в данном случае m_1 — лебегова мера на единичной окружности. Тогда $\mu(M \setminus \alpha(M)) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\chi = \chi_{M \setminus \alpha(M)}$, тогда

$$\mu(M \setminus \alpha(M)) = \int_S \chi(\zeta)\, d\mu_\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_S d\mu_\zeta \int_0^{2\pi} \chi(e^{i\varphi}\zeta)\, d\varphi = 0,$$

так как внутренний интеграл равен нулю.

Доказательство леммы 23.3. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть $f \in H^1(D)$ и $f(z) = 0$ почти всюду на M. Тогда из леммы 23.1 и классической теоремы единственности (см., например, [67, с. 413]) получаем $f(z) = 0$ почти всюду на $\alpha(M)$. Если $f \not\equiv 0$, то для некоторого j

$$f(z) = \sum_{m=j}^{\infty} P_m(z),$$

где P_m — однородные полиномы степени m и $P_j(z) \not\equiv 0$. Поэтому

$$P_j(z) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tz)}{t^j}. \tag{23.11}$$

Далее, учитывая, что $\alpha(M)$ состоит из окружностей, лежащих на комплексных прямых, проходящих через начало координат, получаем, что $P_j(z) = 0$ на $\alpha(M)$. По лемме 23.4 этот полином равен нулю и на M. □

Теперь распространим на рассматриваемый класс областей следствие 17.7 и теорему 17.8.

Следствие 23.5 (Знаменская). *Если $M \subset S$ — борелевское множество единственности функций класса $H^1(D)$ относительно меры μ, то сужения функций из $O_\mu(S)$* на *$S \setminus M$ плотны в $L^q_\mu(S \setminus M)$, $1 < q < \infty$.*

Теорема 23.6 (Знаменская). *Пусть множество $M \subset S$ удовлетворяет условиям следствия 23.5. Тогда существует последовательность $\varphi_{m,z}(\zeta) \in O_\mu(S)$, $m = 1, 2, \ldots$, аппроксимирующая ядро $h(z, \zeta)$ при каждом фиксированном $z \in D$ в смысле сходимости в $L^q_\mu(S \setminus M)$ и для всякой функции $f \in H^p(D)$, где $1/p + 1/q = 1$, и любой точки $z \in D$ справедлива формула Карлемана*

$$f(z) = \lim_{m \to \infty} \int_M f(\zeta)\,[h(z, \zeta) - \varphi_{m,z}(\zeta)]\,d\mu. \tag{23.12}$$

Если множество M открыто, то сужения функций из $O_\mu(S)$ на $S \setminus M$ плотны в $C(S \setminus M)$ и интегральное представление (23.12) верно для функций класса $H^1(D)$.

Доказательства этих утверждений, по существу, не отличаются от доказательств упомянутых следствия 17.7 и теоремы 17.8.

2°. Поставим вопрос, нельзя ли в результатах предыдущего пункта отказаться от требования, чтобы область D была круговой? В этом пункте рассматриваются ограниченные сильно звездные (относительно нуля) области D с границей Шилова $S \in C^2$. Кроме того, предполагается, что все сечения ∂D комплексными прямыми, проходящими через 0 и точку на S, целиком лежат на S. Отметим, что из этого условия не следует, что сама область D является круговой. Например, у области

$$D = \{z\colon\ z \in \mathbb{C}^2,\ |z_1 + 1| < \sqrt{2},\ |z_2| < |z_1 - 1|\}$$

граница Шилова $S = \{z\colon\ |z_1 + 1| = \sqrt{2},\ |z_2| = \sqrt{2}\,|z_1|\}$ обладает требуемым свойством, но сама область D не круговая.

Пусть $a \in \mathbb{C}^n$ и $a \neq 0$, обозначим $\beta_a = \{z\colon\ z = at,\ z \in \mathbb{C}^n,\ t \in \mathbb{C}^1\}$ и $D_a = \left\{t\colon\ t \in \mathbb{C}^1, \dfrac{at}{|a|} \in D\right\}$. По теореме Римана существует функция $\varphi_a(\lambda)$, отображающая круг $U = U(0,\ 1)$ на область D_a, причем $\varphi_a(0) = 0$, $\varphi_a'(0) > 0$.

Предложение 23.7. *Функция $\tau(a, \lambda) = \arg \varphi_a'(\lambda)$ непрерывна на множестве $S \times \overline{U}$.*

Для доказательства этого утверждения нам потребуется ряд лемм. Зададим вектор-функцию $F(u)$, отображающую единичный шар B на нашу область D,

$$z = F(u) = \begin{cases} \dfrac{u\varphi_u(|u|)}{|u|}, & \text{если } u \neq 0, \\ 0, & \text{если } u = 0. \end{cases}$$

Лемма 23.8. *Отображение F — гомеоморфизм единичного шара B на область D. При $a \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$, $\lambda \in U$ выполняется равенство*

$$F\left(\frac{a\lambda}{|a|}\right) = \frac{a\varphi_a(\lambda)}{|a|}. \qquad (23.13)$$

Мы опускаем доказательство этой леммы. Рассмотрим семейство функций $J_a(\lambda) = i \ln \varphi_a'(\lambda)$, $a \in S$, здесь можно выбрать однозначную ветвь логарифма, так как область D_a односвязна и отображение φ конформно. Для данного семейства функций справедлива следующая

Лемма 23.9. *Если $u_a(\lambda) = \operatorname{Re} J_a(\lambda) = \arg \varphi_a'(\lambda)$, а для $0 < t \leqslant 2\pi$, $0 < t' \leqslant 2\pi$ и $0 < \alpha \leqslant 1$ выполнены условия $|u_a(e^{it})| \leqslant M$, $\left|u_a\left(e^{it}\right) - u_a\left(e^{it'}\right)\right| \leqslant K|t - t'|^\alpha$ при любом $a \in S$, то $|J_a(\lambda)| \leqslant Q$, где Q — некоторая постоянная, не зависящая от $a \in S$ и $\lambda \in U$.*

Доказательство. По формуле Шварца

$$J_a(\lambda) - u_a\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U} \left[u_a(\tau) - u_a\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}\right)\right] \frac{\tau + \lambda}{\tau - \lambda} \frac{d\tau}{\tau} + iC_a. \qquad (23.14)$$

Из равенства (23.14) найдем оценку для C_a: $|C_a| \leqslant |J_a(\lambda)| + 3M$ для всех $\lambda \in U \setminus \{0\}$, а по непрерывности $J_a(\lambda)$ и в точке 0

$$|C_a| \leqslant |J_a(0)| + 3M. \qquad (23.15)$$

Заметим, что $\left|u_a(\tau) - u_a\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}\right)\right| \leqslant \min\left\{2M,\ K\left|\arg\tau - \arg\frac{\lambda}{|\lambda|}\right|^\alpha\right\}$; пусть $\varepsilon = (2M/K)^{1/\alpha}$, тогда, разбивая интеграл в (23.14) в сумму интегралов по кривым $\gamma_1 = \{\tau\colon \tau = e^{it},\ \arg(\lambda/|\lambda| - \varepsilon) \leqslant t \leqslant \arg(\lambda/|\lambda| + \varepsilon)$ и $\gamma_2 = \partial U \setminus \gamma_1$, получаем оценку

$$J_a(\lambda) - u_a\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}\right)\Bigg| \leqslant \frac{K}{2\pi} \int\limits_{\gamma_1} \left|\arg\tau - \arg\frac{\lambda}{|\lambda|}\right|^\alpha \left|\frac{\tau + \lambda}{\tau - \lambda}\right| \left|\frac{d\tau}{\tau}\right| + \frac{4M}{\sin\varepsilon} + |C_a|. \qquad (23.16)$$

Рассмотрим отображение $w = -i\dfrac{\tau - \lambda/|\lambda|}{\tau + \lambda/|\lambda|}$ круга U на верхнюю полуплоскость. Из (23.16) имеем

$$\left|J_a(\lambda) - u_a\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}\right)\right| \leqslant \frac{K}{2\pi} \int\limits_{\gamma} |2 \operatorname{arctg} w|^\alpha \left|\frac{1 + w\eta}{w - \eta}\right| \frac{dw}{1 + w^2} + \frac{4M}{\sin\varepsilon} + |C_a|,$$

где $\eta = -i\dfrac{|\lambda| - 1}{|\lambda| + 1}$; $2 \operatorname{arctg} w = -i \ln \tau + i \ln \dfrac{\lambda}{|\lambda|}$; γ — отрезок действительной оси, соединяющий точки

$$w^{\pm\varepsilon} = -i\,\frac{e^{\pm i\varepsilon} - 1}{e^{\mp i\varepsilon} + 1}.$$

Далее из неравенств $|\operatorname{arctg} w| \leqslant |w|$ и $|w-\eta| > |w|$ получаем

$$\left|J_a(\lambda) - u_a\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}\right)\right| \leqslant \frac{2^\alpha K}{\pi} \int_\gamma \frac{dw}{w^{1-\alpha}} + \frac{4M}{\sin\varepsilon} + |C_a|. \qquad (23.17)$$

Несобственный интеграл в правой части (23.17) сходится, так как $0 < \alpha \leqslant 1$. Покажем, что оценка $|C_a|$ не зависит от a. Заметим, что $\varphi_a'(0) = R_a$ — конформный радиус отображения φ_a и, в силу ограниченности области D, существует такое $R > 0$, что $D \subset B_R(0)$, поэтому из (23.15) следует $|C_a| \leqslant 3M + |\ln R|$. Окончательно имеем оценку

$$|J_a(\lambda)| \leqslant Q = \frac{2^\alpha KL}{\pi} + \frac{4M}{\sin\varepsilon} + 4M + |\ln R|. \quad \square$$

Заметим, что области D, рассматриваемые в данном пункте, удовлетворяют условиям леммы 23.9: ограниченность $u_a(e^{it})$ вытекает из сильной звездности области D, а условие Липшица — из дважды гладкости границы Шилова. Из этой леммы получаем оценку $|\varphi_a'(\lambda)| \leqslant \exp Q$, верную для всех $a \in S$ и $\lambda \in U$, так как $\varphi_a' \in C(\overline{U})$ при фиксированном a (см., например, [67, с. 411]). Далее

$$|\varphi_a(\lambda_1) - \varphi_a(\lambda_2)| \leqslant \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} |\varphi_a'(\lambda)|\, d\lambda \leqslant e^Q |\lambda_2 - \lambda_1|, \qquad (23.18)$$

т. е. условие Липшица в $\overline{U}$ верно с постоянной, не зависящей от $a \in S$. Теперь можно усилить лемму 23.8.

Лемма 23.10. *Функция* $f(a, \lambda) = F(a\lambda/|\lambda|)$ *непрерывна в* $S \times \overline{U}$.

Доказательство. Предположим, что существуют последовательности $a^m \to a$, $\lambda_m \to \lambda$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что для любого N найдутся $m, j > N$, для которых

$$|f(a^m, \lambda_m) - f(a^j, \lambda_j)| \geqslant \varepsilon_0,$$

где $\lambda_m, \lambda_j \in \partial U$ (так как из леммы 23.8 вытекает непрерывность функции $f(a, \lambda)$ в $S \times U$). Можно выбрать

$$\delta < \varepsilon_0/4e^a$$

так, чтобы (см. неравенство (23.18))

$$|f(a^m, \lambda_m) - f(a^m, (1-\delta)\lambda_m)| \leqslant e^Q \delta < \frac{\varepsilon_0}{4},$$

тогда

$$\varepsilon_0 \leqslant |f(a^m, \lambda_m) - f(a^j, \lambda_j)| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2} + |f(a^m, (1-\delta)\lambda_m) - f(a^j, (1-\delta)\lambda_j)|.$$

Получаем, что $|f(a^m, (1-\delta)\lambda_m) - f(a^j, (1-\delta)\lambda_j)| > \varepsilon_0/2$, что противоречит непрерывности $f(a, \lambda)$ в $S \times U$.

Доказательство предложения 23.7. При фиксированном $a \in S$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, функция

$$u(a, \lambda, t) = \arg \frac{\varphi_a(\lambda e^{it}) - \varphi_a(\lambda)}{\lambda e^{it} - \lambda}$$

является гармонической по $\lambda \in U$ и, в силу гладкости ∂D_a, равномерно по t ограниченной при фиксированном $a \in S$ (см. [67, с. 409]), т. е. для некоторого $K(a) > 0$ $|u(a, \lambda, t)| \leqslant K(a)$.

Докажем непрерывность функции $\tau(a, \lambda)$ в точке (a^0, λ_0), где $\lambda_0 \in \partial U$. Заметим, что угол наклона хорды гладкой дуги равен углу наклона касательной в некоторой внутренней точке дуги, стягиваемой этой хордой, т. е. $u(a, \lambda, t) = \tau(a, \lambda e^{i\theta t})$ при некотором $0 < \theta < 1$. Рассмотрим точку $z^0 = f(a^0, \lambda_0)$. Из условий, наложенных на границу Шилова S, следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\gamma = \gamma(\varepsilon)$ и $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, для которых из $|f(a, \lambda_0) - z^0| < \gamma$ и $\tau = \sigma$ вытекает: угол $u(a, \lambda_0, t)$, образованный касательными к ∂D_a в точке $\varphi_a(\lambda_0 e^{it})$ и к ∂U в точке $\lambda_0 e^{i\theta t}$, отличается от угла θ_0, образованного касательными к ∂D_a в точке $\varphi_{a^0}(\lambda_0)$ и к ∂U в точке λ_0, на величину, меньшую $\varepsilon/2$, для любого θ, $0 < \theta < 1$. Получаем, что $|u(a, \lambda_0, t) - \theta_0| < \varepsilon/2$ при $|f(a, \lambda_0) - z^0| < \gamma$. По лемме 23.10 можно указать такие $\delta = \delta(\gamma)$, $\eta = \eta(\gamma)$, что $|f(a, \lambda) - z^0| < \gamma$ как только $|a - a^0| < \delta$ и $|\arg \lambda - \arg \lambda_0| < \eta$, следовательно,

$$|u(a, \lambda, t) - \theta_0| < \varepsilon/2. \tag{23.19}$$

Покажем, что это неравенство (23.19) имеет место и в той части Δ некоторой окрестности λ_0, которая лежит в U. Положим $v(a, \lambda, t) = u(a, \lambda, t) - \theta_0$, тогда при каждом t и a, $|t| < \tau$, $|a - a^0| < \delta$, по формуле Пуассона

$$v(a, \lambda, t) = \int_0^{2\pi} v\left(a, l^{is}, t\right) \mathscr{P}\left(e^{is}, \lambda\right) ds.$$

Разбивая интеграл в сумму интегралов по дуге $(\arg \lambda_0 - \eta, \arg \lambda_0 + \eta)$ и оставшейся части окружности l, получаем оценку

$$|v(a, \lambda, t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{K(a) + \theta_0}{2\pi} \int_e \mathscr{P}\left(e^{is}, \lambda\right) ds.$$

Последний интеграл равномерно стремится к нулю при $\lambda \to \lambda_0$, $\lambda \in U$. Значит, можно указать такое η_1, что при $|\lambda - \lambda_0| < \eta_1$ и $\lambda \in \partial U$ будет $|v(a, \lambda, t)| < \varepsilon$, т. е. $|u(a, \lambda, t) - \theta_0| < \varepsilon$ при всех t и a, $|a - a^0| < \delta$, $|t| < \tau$. Если Δ — указанная часть окрестности λ_0, то для $\lambda \in \Delta$, $t \to 0$ имеем $(a, \lambda, t) \to \arg \varphi_a'(\lambda)$, поэтому $|\arg \varphi_a'(\lambda) - \theta_0| < \varepsilon$. Итак, $\tau(a, \lambda) \in C(S \times \overline{U})$. □

Наложим на область D дополнительное требование: существование формулы (23.1) с ядром $h \in C(D \times S)$. Будем обозначать $S^r = \{z\colon\ z = a\varphi_a(\lambda)/|a|,\ a \in S,\ |\lambda| = r\}$, $0 < r < 1$. Если ν — положительная мера на S, то определим положительные меры μ и μ^r на S и S^r соответственно равенствами:

$$\int_{S^r} f d\mu^r = \int_S d\nu \int_{|\lambda|=r} f\left(a\frac{\varphi_a(\lambda)}{|a|}\right)|\varphi_a'(\lambda)||d\lambda|, \tag{23.20}$$

$$\int_S f d\mu = \int_S d\nu \int_{|\lambda|=1} f\left(a\frac{\varphi_a(\lambda)}{|a|}\right)|\varphi_a'(\lambda)||d\lambda|, \tag{23.21}$$

где $f \in C(\bar{D})$.

Определим класс $H^p(D) = H^p_\nu(D)$, $p > 0$, как класс тех $f \in A(D)$, для которых при всех r, $0 < r < 1$,

$$\int_{S^r} |f|^p d\mu^r \leqslant C_f. \tag{23.22}$$

Определенную почти всюду на S (в смысле меры μ) функцию f^* назовем *предельным* (*граничным*) *значением функции* $f \in H^p(D)$, если

$$f^*\left(a\frac{\varphi_a(\lambda)}{|a|}\right) = \lim_{r\to1-0} f\left(a\frac{\varphi_a(\lambda r)}{|a|}\right)$$

для почти всех $a \in S$ и $\lambda \in \partial U$.

Предложение 23.11. *Если f — функция класса $H^p(D)$, то для почти всех $\zeta \in S$ существуют ее предельные значения f^*, причем f^* интегрируема по мере μ и*

$$f(z) = \int_S f^*(\zeta) h(z, \zeta) d\mu_\zeta. \tag{23.23}$$

Доказательство. Введем обозначение

$$g(a, r) = \int_{|\lambda|=r} \left|f\left(a\frac{\varphi_a(\lambda)}{|a|}\right)\right|^p |\varphi_a'(\lambda)||d\lambda|, \quad 0 < r \leqslant 1.$$

Функция $g(a, r)$ не убывает с ростом r (см., например, [134, с. 204]), а из (23.20) и (23.22) имеем

$$\int_S g(a, r) d\nu \leqslant C_f,$$

следовательно, для почти всех $a \in S$ существует предел $g(a, 1) = \lim\limits_{r\to1-0} g(a, r)$, функция $g(a, 1)$ интегрируема

$$\int_S g(a, 1) d\nu = \lim_{r\to1-0} \int_S g(a, r) d\nu \leqslant C_f$$

и $g(a, r) \leqslant g(a, 1)$. Тогда почти всюду на ∂U существует предел (см. [134, с. 203])

$$f_a(\lambda) = \lim_{t \to 1-0} f\left(a \frac{\varphi_a(\lambda t)}{|a|}\right).$$

В каждом сечении границы Шилова S комплексной прямой, проходящей через 0, выберем по одной точке a, у которой существует функция f_a, и обозначим это множество $\tilde{S}$. Для $a \in \tilde{S}$ положим $f^*(a\varphi_a(\lambda)/|a|) = f_a(\lambda)$. Покажем, что f^* — предельное значение функции f. Если $a \in \tilde{S}$, то это очевидно. Пусть $b \in S \setminus \tilde{S}$, тогда выберем такую точку $a \in \tilde{S}$, что $\varphi_a(\lambda_1) = \varphi_b(\lambda_2)$. Автоморфизм круга $\varphi_a^{-1}\varphi_b$ переводит 0 в 0, а λ_1 в λ_2, поэтому $\varphi_b(\lambda) = \varphi_a(\lambda_1\lambda/\lambda_2)$. При всех t, $0 < t < 1$, имеем $\varphi_b(\lambda_2\lambda t) = \varphi_a(\lambda_1\lambda t)$ и $f(a\varphi_b(\lambda_2\lambda t)/|a|) = f(a\varphi_a(\lambda_1\lambda t)/|a|)$. Переходя к пределу, получим

$$f_a(\lambda_1\lambda) = \lim_{t \to 1-0} f\left(a \frac{\varphi_b(\lambda_2\lambda t)}{|a|}\right).$$

Покажем, что $f^* \in L^p(S) = L^p_\mu(S)$:

$$\int_S |f^*(z)|^p d\mu = \int_S d\nu \int_{|\lambda|=1} \left| f^*\left(a \frac{\varphi_a(\lambda)}{|a|}\right)\right|^p |\varphi_a'(\lambda)|\,|d\lambda| =$$
$$= \int_S d\nu \int_{|\lambda|=1} |f_a(\lambda)|^p |\varphi_a'(\lambda)|\,|d\lambda| = \int_S g(a, 1)\, d\nu \leqslant C_f.$$

Докажем равенство (23.23). Для всех $z \in \left\{z\colon z = a\frac{\varphi_a(\lambda)}{|a|},\ a \in D, |\lambda| = r\right\}$, $0 < r < 1$, имеем

$$f(z) = \int_{S^r} f(\zeta) h(z, \zeta)\, d\mu^r = \int_S d\nu \int_{|\lambda|=1} f\left(a\frac{\varphi_a(r\lambda)}{|a|}\right) h\left(z, a\frac{\varphi_a(r\lambda)}{|a|}\right) \times$$
$$\times |\varphi_a'(r\lambda)|\,|d(r\lambda)|,$$

остается перейти к пределу при $r \to 1$. □

Теперь распространим на рассматриваемый случай теорему 17.5.

Теорема 23.12 (Знаменская). *Пусть ν — положительная мера на S, а μ — мера, определенная равенством* (23.21). *Рассмотрим $\varkappa$ — произвольную меру на S. Равенство для всех $\varphi \in O_\mu(S)$ $\int_S \varphi\, d\varkappa = 0$ верно тогда и только тогда, когда существует такая функция $f \in H^1(D)$, что $\varkappa = f\mu$.*

Доказательство этой теоремы в основном повторяет доказательство теоремы 23.2, только вместо полиномов $P(z, \bar{z})$ рассматриваются полиномы $P(z, w(z))$, где $w_j(z) = \bar{z}_j/|z|^2$, $j = 1, \ldots, n$. Эти полиномы плотны в $C(S)$ (см. [25, с. 52]). Точно говоря, используется плотность в $C(S)$ произведений $P(z, w(z))g(z)$, где

$$g(z) = g\left(a\frac{\varphi_a(\lambda)}{|a|}\right) = \frac{\varphi_a'(\lambda)\,d\lambda}{|\varphi_a'(\lambda)|\,|d\lambda|} = \exp\left(i\arg\varphi_a'(\lambda)\right)\frac{d\lambda}{|d\lambda|},$$

а плотность таких произведений следует из непрерывности функции $g(z)$ (см. предложение 23.7).

И, наконец, так же, как следствие 23.5 и теорему 23.6, получаем следующий результат.

Теорема 23.13 (Знаменская). *Пусть $M \subset S$ — борелевское множество единственности для функций класса $H^1(D)$ относительно меры μ. Тогда сужения функций из $O_\mu(S)$ на $S \setminus M$ плотны в $L^q(S \setminus M)$, $1 < q < \infty$. Для всякой функции $f \in H^p(D)$, $p > 1$, и любой точки $z \in D$ верна формула Карлемана* (23.12). *Если множество M открыто, то сужения функций из $O_\mu(S)$ на $S \setminus M$ плотны в $C(S \setminus M)$ и интегральное представление* (23.12) *справедливо для функций класса $H^1(D)$.*

Сделаем в заключение два замечания.

1. Результаты этого пункта справедливы и без требования, чтобы сечения $\partial D \cap \alpha_a$, где $a \in S$, целиком лежали в S. Вместо этого на область D можно наложить следующее требование: множество $S' = \left\{z\colon z = a\frac{\varphi_a(\lambda)}{|a|},\ a \in S,\ |\lambda| = 1\right\}$ дважды гладкое. Тогда сохраняются теоремы 23.12 и 23.13, но переформулированные для множества S' вместо границы Шилова S.

2. Можно ослабить условие $S \in C^2$, заменив его следующим: 1) множество ∂D_a есть гладкая кривая для всех $a \in S$; 2) касательная к ∂D_a непрерывно зависит от точки касания $\varphi_a(\lambda)$ при $a \in S$ и фиксированном $\lambda \in \partial U$; 3) если $\theta_a(\lambda)$ — угол между касательной к ∂D_a в точке $\varphi_a(\lambda)$ и действительной прямой, то $|\theta_a(\lambda) - \theta_a(\lambda')| \leqslant K|\lambda - \lambda'|^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, для всех $a \in S$.

Второе замечание сохраняется, если в нем всюду вместо S писать S'.

3°. Если подмножество $M \subset S(D)$, где D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$, является компактом условной устойчивости, то справедлива формула Карлемана (17.15) (см. следствие 17.9). В этом случае не нужно налагать на область D условий предыдущих пунктов. Но верно и обратное: из существования формулы Карлемана (17.15) со сходимостью в смысле (17.16) вытекает, что компакт $M \subset S(D)$ является компактом условной устойчивости для голоморфных функций из $A_C(D)$. Поэтому верно

Следствие 23.14. *Если область D удовлетворяет условиям пункта 1° или 2°, а компакт $M \subset S(D)$ является множеством единственности для функций класса $H^1(D)$, то M является компактом условной устойчивости для функций из $A_C(D)$.*

ГЛАВА 6

ФОРМУЛЫ КАРЛЕМАНА В ОДНОРОДНЫХ ОБЛАСТЯХ

24. ФОРМУЛЫ КАРЛЕМАНА В КЛАССИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

1°. Пусть D — классическая область в $\mathbf{C}^n$, а S — ее остов (граница Шилова). Определим классы Харди $H^p(D)$ следующим образом: функция $f \in A(D)$ входит в класс $H^p(D)$, $0 < p < \infty$, если

$$\sup_{0 \leqslant r < 1} \int_S |f(r\zeta)|^p d\mu < \infty, \tag{24.1}$$

где мера μ — та же, что и в формуле (15.1). Для любой функции f, заданной в D, и для любой точки $\zeta \in S$ введем *срез-функцию* $f_\zeta(\lambda)$, $\lambda \in U = U^1$, по формуле $f_\zeta(\lambda) = f(\lambda\zeta)$. Эту срез-функцию можно рассматривать как след функции f на круге U, вложенном в D. Данное понятие дает возможность связать некоторые многомерные свойства f с соответствующими одномерными свойствами f_ζ с помощью леммы, которая была нами уже фактически доказана при доказательстве леммы 23.1.

Лемма 24.1. *Если $f \in L^p(S)$, $p \geqslant 1$, то*

$$\int_S d\mu \int_{\partial U} f(\lambda\zeta)\, dm_1 = \int_S f(\zeta)\, d\mu,$$

где $dm_1 = \frac{1}{2\pi i} \frac{d\lambda}{\lambda}$ — нормированная мера Лебега на окружности ∂U.

Далее отметим, что при почти всех $\zeta \in S$ функция $f_\zeta(\lambda) \in H^p(U)$, если $f \in H^p(D)$ (см. лемму 23.1), поэтому $f_\zeta(\lambda)$ имеет радиальные граничные значения при почти всех λ. Итак, для почти всех $\zeta \in S$ существует предел $\lim\limits_{r \to 1-0} f(r\zeta) = f^*(\zeta)$. Кроме того, по лемме 24.1

$$\int_S d\mu \int_{\partial U} |f(r\lambda\zeta)|^p dm_1 = \int_S |f(r\zeta)|^p d\mu, \tag{24.2}$$

где $0 \leqslant r < 1$. Внутренний интеграл в левой части равенства (24.2) не убывает с возрастанием r, поэтому из (24.1) и (24.2) вытекает

$$\lim_{r \to 1-0} \int_S |f(r\zeta)|^p d\mu = \int_S |f^*(\zeta)|^p d\mu,$$

т. е. $f^* \in L^p(S)$. Обратно, пусть теперь $f \in A(D)$, срез-функция $f_\zeta \in H^p(U)$ для почти всех $\zeta \in S$, а радиальные граничные значения $f^* \in L^p(S)$. Тогда

$$\int_S |f(r\zeta)|^p d\mu = \int_S d\mu \int_{\partial U} |f(r\lambda\zeta)|^p dm_1 \leqslant \int_S d\mu \int_{\partial U} |f_\zeta^*(\lambda)|^p dm_1 =$$

$$= \int_S |f^*(\zeta)|^p d\mu,$$

значит, функция $f(z)$ входит в класс Харди $H^p(D)$. Мы доказали для $0<p<\infty$ (случай $p=\infty$ очевиден) следующее утверждение.

Предложение 24.2. *Для того, чтобы функция $f\in A(D)$ входила в класс Харди $H^p(D)$, $0<p\leqslant\infty$, необходимо и достаточно, чтобы срез-функция $f_\zeta\in H^p(U)$ для почти всех $\zeta\in S$ и радиальные граничные значения $f^*\in L^p(S)$.*

В дальнейшем f^* также обозначим f.

Предложение 24.3. *Пусть $E\subset S$ и $\mu E>0$, тогда E — множество единственности для каждого класса $H^p(D)$, $0<p\leqslant\infty$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $f\in H^p(D)$, для которой $f|_E=0$. Проведем комплексную прямую $l_\zeta=\{z\colon z=\lambda\zeta,\ \lambda\in\mathbf{C}^1\}$ через точки $\zeta\in S$ и начало координат. Тогда $l_\zeta\cap S=\{z\colon z=\lambda\zeta,\ |\lambda|=1\}$. Обозначим через $L(E)$ множество таких l_ζ, что $l_\zeta\cap E$ измеримо и $m_1(l_\zeta\cap E)>0$. По теореме Фубини $L(E)$ — множество положительной меры в $L(S)$ (поскольку $L(S)\subset\mathbf{CP}^{n-1}$, то на $L(S)$ есть соответствующая мера). Согласно предложению 24.2 срез-функция $f_\zeta\in H^p(U)$ для почти всех $\zeta\in S$. По классической граничной теореме единственности (см., например, [134, 67]) $f_\zeta=0$ в U почти для всех $\zeta\in S$, для которых $l_\zeta\in L(E)$.

Пусть $M=\{z\colon z\in rS\}\subset D$, $0\leqslant r<1$. Мы получили, что на множестве положительной меры из M функция f равна нулю. По теореме 0.7 $f\equiv 0$. □

Для дальнейшего введем инвариантное ядро Пуассона для классической области .

$$\mathscr{P}(z,\zeta)=|H(z,\bar\zeta)|^2/H(z,\bar z).$$

Если $f\in L^1(S)$, то через $P[f]$ обозначим ее *преобразование Пуассона*

$$P[f](z)=\int_S f(\zeta)\,\mathscr{P}(z,\zeta)\,d\mu_\zeta. \tag{24.3}$$

Можно показать (для шара см. [140, с. 52]), что для любого автоморфизма ψ области D

$$P[f\circ\psi]=P[f]\circ\psi. \tag{24.4}$$

О понятии M-гармоничности см. также в [140].

Лемма 24.4. *Функция $f\in A(D)$ принадлежит классу $H^1(D)$ тогда и только тогда, когда $|f|$ обладает в области D M-гармонической мажорантой. При этом на S существует такая положительная мера $\tilde\mu$, что $f=P[\tilde\mu]$.*

Доказательство. Пусть $z\in D$, рассмотрим автоморфизм ψ такой, что $\psi(0)=z$. Тогда при $0\leqslant r<1$ функция $f(r\psi(\zeta))\in A(\bar D)$, следовательно, $|f(r\psi(\zeta))|$ субгармонична на $\bar D$. Применяя лемму 24.1 и (24.4), получим, что

$$|f(rz)|=|f(r\psi(0))|\leqslant\int_S|f(r\psi(\zeta))|\,d\mu=P[\,|f(r\psi)|\,](0)=P[\,|f(r\zeta)|\,](z).$$

Если $f \in H^1(D)$, то в силу слабой компактности $C^*(S)$ найдется возрастающая последовательность $r_j \to 1$ при $j \to \infty$, такая, что $|f(r_j\zeta)| \to \tilde{\mu}$ в слабой топологии $C^*(S)$. Ясно, что $\|\tilde{\mu}\| \leqslant \int\limits_S |f|\,d\mu$ и $|f(z)| \leqslant P[\tilde{\mu}](z)$; отсюда следует, что $P[\tilde{\mu}]$ является M-гармонической мажорантой $|f|$ и $\|\tilde{\mu}\| = \int\limits_S |f|\,d\mu$. Обратное очевидно. □

Из этой леммы вытекает следующее утверждение.

Предложение 24.5. *Пространство $H^1(D)$ инвариантно относительно биголоморфных автоморфизмов D.*

2°. Пусть D — классическая область, множество $M \subset S$ и $\mu M > 0$. Применим для построения соответствующей формулы Карлемана идею, уже обсуждавшуюся для случая круга U^1 в разд. 3: сначала восстанавливаем значение функции в точке 0, а затем «разносим» ее по всей области D с помощью автоморфизмов.

1. Пусть $D = D_{\mathrm{I}}$ и $m = k$. Параметризуем S_{I} следующим образом: $\zeta = e^{i\varphi}u$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $u \in SU(k)$, где $SU(k)$ — группа специальных унитарных матриц, т. е. $\det u = 1$. Поскольку $\det \zeta = e^{ik\varphi} \det u = e^{ik\varphi}$, то множество $\{\zeta\colon\ \zeta = \lambda u,\ |\lambda| = 1\}$, $u \in SU(k)$ пересекает множество элементов группы $SU(k)$ ровно в k точках, соответствующих корням из единицы $e^{ik\varphi} = 1$.

Лемма 24.6. *Мера Хаара $d\mu$ многообразия S_{I} может быть записана в виде*

$$d\mu = h(u)\,d\varphi\,d\mu_0(u),$$

где $d\mu_0$ — нормированная мера Лебега на $SU(k)$, а h — гладкая положительная функция на $SU(k)$.

Доказательство. По теореме Фубини $d\mu = h(u, \varphi)\,d\varphi\,d\mu_0$. Пусть $E \subset S_{\mathrm{I}}$ и имеет вид

$$E = \{\zeta\colon\ \zeta \in S_{\mathrm{I}},\ \zeta = e^{i\varphi}u,\ \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,\ u \in E_1 \subset SU(k)\},$$

тогда в силу инвариантности меры μ относительно поворотов получаем, что для всякого φ_0 интеграл

$$\int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{E_1} h(u, \varphi + \varphi_0)\,d\mu_0 = \int\limits_\alpha^\beta h_1(\varphi + \varphi_0)\,d\varphi$$

не зависит от φ_0, поэтому для всех α и β

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_0} \int\limits_\alpha^\beta h_1(\varphi + \varphi_0)\,d\varphi = 0. \tag{24.5}$$

Из (24.5) следует, что h_1 не зависит от φ. Точно так же доказывается, что h не зависит от φ.

Пусть $f \geqslant 0$ на $SU(k)$, продолжим ее на S_I как постоянную по φ функцию. Тогда

$$\int\limits_{S_I} f d\mu = \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_{SU(k)} fh d\mu_0 = 2\pi \int\limits_{SU(k)} fh d\mu_0 \geqslant 0,$$

следовательно, $h \geqslant 0$ на $SU(k)$. Итак,

$$d\mu = \frac{1}{2\pi i} \frac{d\lambda}{\lambda} d\mu_1(u),$$

где $\lambda = e^{i\varphi}$, а мера μ_1 положительна на многообразии $SU(k)$. □

Обозначим

$$M_{0,u} = \{\zeta\colon\ \zeta \in M,\ \zeta = \lambda u,\ \lambda = e^{i\varphi},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\},\ u \in SU(k),$$
$$M_0' = \{u\colon\ u \in SU(k),\ m_1 M_{0,u} > 0\}.$$

По теореме Фубини $\mu_0(M_0') > 0$. Обозначим

$$\psi_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{M_{0,u}} \frac{\eta + \lambda}{\eta - \lambda} \frac{d\eta}{\eta}, \quad \varphi_0 = \exp \psi_0.$$

Лемма 24.7. *Пусть $f \in H^1(D_I)$, тогда справедлива формула*

$$f(0) = \frac{k}{\int\limits_{M_0'} d\mu_1} \lim_{j \to \infty} \int\limits_M f(\zeta) \left[\frac{\varphi_0(\zeta)}{\varphi_0(0)}\right]^j d\mu_\zeta. \tag{24.6}$$

Доказательство. В сечении области D_I комплексной прямой l_u, $u \in M_0'$, воспользуемся классической формулой Карлемана (1.3)

$$f(0) = \lim_{j \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{M_{0,u}} f(\lambda u) \left[\frac{\varphi_0(\zeta)}{\varphi_0(0)}\right]^j \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Умножая обе части этого равенства на $d\mu_1$ и интегрируя по M_0' получим (24.6). Предельный переход под знаком интеграла здесь возможен в силу теоремы Лебега, так как

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{M_{0,u}} f(\zeta) \left[\frac{\varphi_0(\zeta)}{\varphi_0(0)}\right]^j \frac{d\lambda}{\lambda} \right| \leqslant |f(0)| +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial U^1 \setminus M_{0,u}} |f(\zeta)| \left| \frac{\varphi_0(\zeta)}{\varphi_0(0)} \right|^j d\varphi \leqslant |f(0)| + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial U^1} |f(\zeta)|\, d\varphi.$$

Мы воспользовались тем, что $\operatorname{Re}[\psi_0(\zeta) - \psi_0(0)] = -\operatorname{Re}\psi_0(0) < 0$. Функция $\int\limits_{\partial U^1} |f(\zeta)|\, d\varphi$ интегрируема по M_0'. Множитель k в (24.6) появился за счет того, что $SU(k)$ инвариантна при вращениях $u \to u \exp i \frac{2\pi}{k} j$. □

Пусть далее $\varphi_A(z)$ — автоморфизм области D_{I}, переводящий точку A в 0. Обозначим

$$\mu_A(K) = \mu_1\left(\varphi_A^{-1}\right)(K)\right), \quad M_{A,w} = \{\zeta\colon\ \zeta \in M,\ \zeta = \\ = \varphi_A^{-1}\left(\lambda\varphi_A^{-1}(w)\right),\ |\lambda| = 1\}, \quad w \in S_A = \varphi_A(SU(k)),$$

$$M_A' = \{w\colon\ w \in S_A,\ m_1 M_{A,w} > 0\},$$

$$\psi_A(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{M_{A,w}} \frac{\eta+\lambda}{\eta-\lambda}\frac{d\eta}{\eta}, \quad \varphi_A = \exp\psi_A$$

(мы пишем, что ψ_A зависит от ζ, поскольку λ и w — функции ζ).

Теорема 24.8 (Кытманов — Никитина). *Пусть $f \in H^1(D_{\mathrm{I}})$, $m = k$, тогда для любой точки $A \in D_{\mathrm{I}}$*

$$f(A) = \frac{k}{\int\limits_{M_A'} d\mu_A} \lim_{j\to\infty} \int\limits_M f(\zeta)\left[\frac{\varphi_A(\zeta)}{\varphi_A(A)}\right]^j H(A, \bar\zeta)\, d\mu_\zeta. \tag{24.7}$$

Доказательство. Для $A = 0$ формула (24.7) — это уже доказанное равенство (24.6). Положим $f_A(\zeta) = f\left(\varphi_A^{-1}(\zeta)\right)$, тогда $f_A(0) = f(A)$ и $f_A \in H^1(D_{\mathrm{I}})$ в силу предложения 24.5. Применим к f_A лемму 24.7, а затем сделаем обратное преобразование, тогда получим

$$f(A) = \frac{k}{\mu_A\left(M_A'\right)} \lim_{j\to\infty} \int\limits_M f(\zeta)\left[\frac{\varphi_A(\zeta)}{\varphi_A(A)}\right]^j d\mu(\varphi_A(\zeta)). \tag{24.8}$$

Размерность S_{I} равна половине размерности пространства $\mathbf{C}^n$, а $d\mu$ — нормированная мера Лебега на S_{I}, поэтому

$$d\mu(\varphi_A(\zeta)) = |\det J(\zeta, A)|\, d\mu_\zeta,$$

где $J(z, A)$ — матрица Якоби преобразования $\varphi_A(z)$.

С другой стороны (см. [167, с. 98])

$$|\det J(\zeta, A)| = \mathscr{P}(A, \zeta).$$

Далее, используя соотношение

$$\mathscr{P}(A, \zeta) = H(A, \bar\zeta) H(\zeta, \bar A)/H(A, A)$$

и применяя (24.8) к функции $f(\zeta)H^{-1}(\zeta, \bar A) \in H^1(D)$, получаем (24.7). □

2. Пусть $D = D_{\mathrm{I}}$ и $m < k$.

Теорема 24.9 (Кытманов — Никитина). *Для всякой функции $f \in H^1(D_{\mathrm{I}})$, $m < k$, и точки $A_1 \in D_{\mathrm{I}}$ верна формула Карлемана*

$$f(A_1) = \frac{k}{\mu_A\left(\widetilde{M}'_A\right)} \lim_{j\to\infty} \int\limits_M f(\zeta_1) \left[\frac{\varphi_A\begin{pmatrix}\zeta_1\\ 0\end{pmatrix}}{\varphi_A(A)}\right]^j H(A_1, \zeta_1)\, d\mu_{\zeta_1},$$

где $A = \begin{pmatrix}A_1\\ 0\end{pmatrix}$ *— матрица порядка* $k \times k$,

$$\widetilde{M} = \left\{\begin{pmatrix}\zeta_1\\ V\end{pmatrix}\colon\ \zeta_1 \in M,\ V \in E\right\},$$

где E — множество всех $(k-m)\times k$-матриц, удовлетворяющих условиям $VV^* = I^{(k-m)}$, $\zeta_1 V^* = 0$.

Доказательство. Идея доказательства этой теоремы состоит в том, чтобы продолжить функцию f на множество $\widetilde{M} \in D^1_k$ где D^k_{I}— область типа D_{I} в пространстве квадратных матриц Z порядка k. Затем нужно применить теорему 24.8 к области D^k_{I} и далее вернуться к D_{I}. Пусть $Z = \begin{pmatrix}Z_1\\ T\end{pmatrix}$ — матрица порядка k, где Z_1 — это $(m\times k)$-матрица. Очевидно, что $\overline{D}_{\mathrm{I}} = \overline{D^k_{\mathrm{I}}} \cap \{Z\colon\ T = 0\}$. Положим $f_1(Z) = f_1\left[\begin{pmatrix}Z_1\\ 0\end{pmatrix}\right] = f(Z_1)$, тогда $f_1 \in H^1\left(D^k_{\mathrm{I}}\right)$. Применим (24.7) для $M = \widetilde{M}$, $A = \begin{pmatrix}A_1\\ 0\end{pmatrix}$, $\zeta = \begin{pmatrix}\zeta_1\\ 0\end{pmatrix}$.

Так как $M \subset S_{\mathrm{I}}$, то $\widetilde{M} \subset S^k_{\mathrm{I}}$, поскольку $\zeta\zeta^* = I^{(k)}$, причем $\widetilde{M}$ имеет положительную меру на S_{I}. Получаем

$$f_1(A) = f(A_1) = \frac{k}{\mu_A\left(\widetilde{M}'_A\right)} \lim_{j\to\infty} \frac{1}{V\left(S^k_{\mathrm{I}}\right)} \times$$
$$\times \int\limits_M \left[\det\left(I^{(m)} - A_1\zeta_1^*\right)^{-k}\right] d\sigma_{\zeta_1} \int\limits_E f_1\left[\begin{pmatrix}\zeta_1\\ V\end{pmatrix}\right] \left[\frac{\varphi_A\begin{pmatrix}\zeta_1\\ V\end{pmatrix}}{\varphi_A(A)}\right]^j d\sigma_V, \qquad (24.9)$$

где $d\sigma_{\zeta_1}$, $d\sigma_V$ — мера Лебега соответственно на S_{I} и E.

В ([167, с. 94]) показано, что для фиксированной матрицы ζ_1 найдутся две унитарные матрицы: $(m\times m)$-матрица P и $(k\times k)$-матрица Q такие, что $P\zeta_1 Q = (I^{(m)},\ 0)$. Отсюда следует, что $VQ = (0,\ T)$, где T — унитарная матрица порядка $(k-m)$. Поэтому

$$\int\limits_E f_1\left[\begin{pmatrix}\zeta_1\\ V\end{pmatrix}\right] \left[\frac{\varphi_A\begin{pmatrix}\zeta_A\\ V\end{pmatrix}}{\varphi_A(A)}\right]^j d\sigma_V = \int\limits_{S^{k-m}_{\mathrm{I}}} f_1\left[\begin{pmatrix}\zeta_1\\ (0,\ T)\end{pmatrix}\right] \left[\frac{\varphi_A\begin{pmatrix}\zeta_1\\ (0,\ T)\end{pmatrix}}{\varphi_A(A)}\right]^j d\sigma_T.$$

Если ψ_A голоморфна по T при фиксированном $\zeta_1 \in M$, то последний интеграл в силу формулы (15.1) равен

$$V\left(S_{\mathrm{I}}^{k-m}\right) f_1\left[\begin{pmatrix}\zeta_1\\0\end{pmatrix}\right]\left[\frac{\varphi_A\left[\begin{pmatrix}\zeta_1\\0\end{pmatrix}\right]}{\varphi_A(A)}\right]^j. \tag{24.10}$$

Теперь из (24.10) получим утверждение теоремы, так как (см. [167, с. 110])

$$V(S_{\mathrm{I}}) = V\left(S_{\mathrm{I}}^{k}\right)/V\left(S_{\mathrm{I}}^{k-m}\right).$$

Осталось проверить голоморфность функции $\psi_A\begin{pmatrix}\zeta_1\\(0,\ T)\end{pmatrix}$ по T. Покажем, что ψ_A не зависит от T. Действительно, функция ψ_A получается при интегрировании по $\widetilde{M}_{A,w}$ ядра Шварца, но это множество не зависит ни от V, ни от T, так как $\zeta \in \widetilde{M}$ только в том случае, когда $\zeta_1 \in M$. Легко показывается, что автоморфизм φ_A для $A = \begin{pmatrix}A_1\\0\end{pmatrix}$ «не смешивает» матрицы ζ_1 и V. □

3. Случай областей D_{II} и для четного $k - D_{\mathrm{III}}$ аналогичен случаю 1. При этом формула (24.7) полностью сохраняет свой вид.

4. Пусть $D = D_{\mathrm{III}}$ и k нечетно.

Теорема 24.10 (Кытманов — Никитина). *Для голоморфной функции $f \in H^1(D_{\mathrm{III}})$ при нечетном k и всякой точки $A_1 \in D_{\mathrm{III}}$ справедлива формула Карлемана*

$$f(A_1) = \frac{k+1}{\mu_A\left(\widetilde{M}'_A\right)} \lim_{j\to\infty} \int_M f(\zeta_1) H(A, \bar{\zeta}_1)\left[\frac{\varphi_A\left[\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & \zeta_1\end{pmatrix}\right]}{\varphi_A(A)}\right]^j d\mu_{\zeta_1},$$

где $A = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & A_1\end{pmatrix}$ — матрица порядка $(k+1)$,

$$\widetilde{M} = \left\{\begin{pmatrix}0 & P\\-P' & \zeta_1\end{pmatrix}:\ \zeta_1 \in M,\quad P \in E\right\},$$

E состоит из k-векторов, удовлетворяющих условиям $PP^* = 1$, $P\zeta_1^* = 0$, $P'\overline{P} + \zeta_1\zeta^* = I^{(k)}$.

Доказательство проводится так же, как доказательство предыдущей теоремы. Нужно продолжить $f(\zeta_1)$ до функции $f(\zeta) \in \in A\left(D_{\mathrm{III}}^{k+1}\right)$, где

$$\zeta = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & \zeta_1\end{pmatrix},$$

применить к f формулу из п. 3 и вычислить интеграл по «лишним» переменным (ср. [167, с. 96, 97]). □

5. Пусть $D = D_{\mathrm{IV}}$.

Лемма 24.11. *Нормированная мера Лебега на S_{IV} может быть записана в виде $d\mu = d\varphi d\mu_0(x)$, где $d\mu_0(x)$ — положительная мера на сфере $S^n = \{x\colon x \in \mathbf{R}^n, xx' = 1\}$.*

Доказательство сразу следует из вида $S_{\mathrm{IV}} = \{\zeta\colon \zeta = e^{i\varphi}x, x \in S^n\}$. □

Пусть $M \subset S_{\mathrm{IV}}$ и $\mu M > 0$. Рассмотрим автоморфизм φ_a области D_{IV}, переводящий точку $a \in D_{\mathrm{IV}}$ в 0. Введем множества $M_{a,y} = \{\zeta\colon \zeta \in M,\ \zeta = \varphi_a^{-1}(\lambda\varphi_a^{-1}(y)),\ |\lambda| = 1\},\ y \in \varphi_A(S^n),\ M'_a = \{y\colon y \in \varphi_A(S^n),\ m_1 M_{a,y} > 0\}$.

Следующее утверждение доказывается аналогично теореме 24.8.

Теорема 24.12 (Кытманов — Никитина). *Для всякой функции $f \in H^1(D_{\mathrm{IV}})$ и точки $a \in D_{\mathrm{IV}}$*

$$f(a) = \frac{2}{\mu_0\left(\varphi_A^{-1}M'_A\right)} \lim_{j\to\infty} \int_M f(\zeta)\left[\frac{\varphi_a(\zeta)}{\varphi_a(a)}\right]^j H(a, \bar\zeta)\, d\mu_\zeta,$$

где $\varphi_a = \exp\psi_a$,

$$\psi_a(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{M_{a,y}} \frac{\eta+\lambda}{\eta-\lambda}\frac{d\eta}{\eta}.$$

25. СЛУЧАЙ ШАРА И ПОЛИКРУГА

Идея использования однородности области D позволяет получить новые формулы Карлемана для шара и полукруга, более простые, чем приведенные для этих областей в разд. 16, 20.

1°. Пусть $U^n = \{z\colon |z_j| < 1,\ j = 1, \ldots, n\}$ — единичный поликруг в $\mathbf{C}^n$, а Δ^n — его остов. Рассмотрим множество $M \subset \Delta^n$, $m_n M > 0$. Обозначим $'\zeta = (\zeta_2, \ldots, \zeta_n) \in \Delta^{n-1}$, $\lambda \in \mathbf{C}^1$ и $a \in U^n$. Рассмотрим множество

$$M_{a,'\zeta} = \left\{z\colon\ z \in M,\ z_1 = \frac{\lambda + a_1}{1 + \bar a_1\lambda},\quad z_j = \frac{\zeta_j\left(\lambda - |a_j|^2\right) + a_j(1-\lambda)}{\bar a_j\zeta_j(\lambda - 1) + 1 - \lambda\,|a_j|^2},\right.$$
$$j = 2, \ldots, n,\ |\lambda| = 1\},$$

измеримое относительно меры m_1 для почти всех a и $'\zeta$. Через M'_a обозначим множество $\{'\zeta\colon\ '\zeta \in \Delta^{n-1}, m_1 M_{a,'\zeta} > 0\}$. Из теоремы Фубини следует, что $m_{n-1}M'_a > 0$. Положим

$$\psi_a(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{M_{a,'\zeta}} \frac{z_1(1-\bar a_1\eta) + \eta - a_1}{\eta + a_1 - z_1(1+\bar a_1\eta)}\frac{d\eta}{\eta},\quad \varphi_a = \exp\psi_a,$$

где z и $'\zeta$ связаны так же, как в определении $M_{a,'\zeta}$.

Так же, как теорема 24.8, доказывается и следующее утверждение.

Теорема 25.1 (Кытманов). *Пусть* $f \in H^1(U^n)$, $M \subset \Delta^n$, $m_n M > 0$, *тогда для* $a \in U^n$

$$f(a) = \frac{1}{\int\limits_{M_a'} \prod\limits_{j=2}^{n} \mathcal{P}(\zeta_j, a_j)\, dm_{n-1}} \lim_{j\to\infty} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_M f(z) \left[\frac{\varphi_a(z)}{\varphi_a(a)}\right]^j \frac{dz}{z-a}. \tag{25.1}$$

Формула (25.1) значительно проще формулы (20.6).

2°. Пусть теперь $B = B_1(0)$ — единичный шар в $\mathbf{C}^n$. Обозначим через μ нормированную меру Лебега (меру Хаара) на ∂B:

$$d\mu = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \bar{z}_j d\bar{z}[j] \wedge dz.$$

Рассмотрим $\Phi_a(z)$ — автоморфизм шара B, переводящий точку $a \in B$ в 0, а точку 0 — в a, где $a \neq 0$, причем $\Phi_a(\Phi_a(z)) \equiv z$. Такой автоморфизм имеет вид (см., например, [140, с. 34])

$$\Phi_a(z) = \frac{a - \langle z, \bar{a}\rangle \frac{a}{|a|} - \sqrt{1-|a|^2}\left(z - \langle z, \bar{a}\rangle \frac{a}{|a|}\right)}{1 - \langle z, \bar{a}\rangle}.$$

Пусть множество $M \subset \partial B$, $\mu M > 0$. Определим множества

$$M_{a,\zeta} = \{z\colon\ z \in M,\ z = \Phi_a(\lambda\Phi_a(\zeta)),\ |\lambda| = 1\}, \quad \zeta \in S_a^+ =$$

$$= \{\zeta\colon\ \zeta \in \partial B,\ \operatorname{Im}\Phi_{a,1}(\zeta) = 0,\ \operatorname{Re}\Phi_{a,1}(\zeta) > 0\}, \quad \Phi_a = (\Phi_{a,1}, \ldots \Phi_{a,n}),$$

$$M_a' = \{\zeta\colon\ \zeta \in S_a^+,\ m_1 M_{a,\zeta} > 0\}.$$

Отметим, что $(2n-2)$-мерная мера Лебега множества M_a' положительна. Введем функцию

$$\psi_a(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{M_{a,\zeta}} \frac{\eta+\lambda}{\eta-\lambda} \frac{d\eta}{\eta},$$

где

$$\lambda = \frac{|\Phi_a(z)|\,\Phi_{a,1}(z)}{|\Phi_{a,1}(z)|};$$

$$\zeta = \Phi_a\left(\frac{|\Phi_{a,1}(z)|}{|\Phi_a|}, \frac{\Phi_{a,2}(z)\,|\Phi_{a,1}|}{|\Phi_a|\,\Phi_{a,1}(z)}, \ldots, \frac{\Phi_{a,n}(z)\,|\Phi_{a,1}|}{|\Phi_a|\,\Phi_{a,1}(z)}\right).$$

Аналогично доказательству теоремы 24.8 получаем результат.

Теорема 25.2 (Кытманов). *Если $f \in H^1(B)$, множество $M \subset \subset \partial B$, $\mu M > 0$, тогда для всякой точки $a \in B$*

$$f(a) = \frac{1}{\int\limits_{M'_a} \omega_a} \lim_{j\to\infty} \int\limits_M \frac{f(z)}{(1 - \langle a, z\rangle)^n} \left[\frac{\varphi_a(z)}{\varphi_a(a)}\right]^j d\mu_z, \qquad (25.2)$$

где
$$\omega_a = \omega_0(\Phi_a); \quad \omega_0 = 2\pi \frac{d\mu}{d\varphi}; \quad \lambda = e^{i\varphi}.$$

Отметим, что формула (25.2) проще формулы (16.5), рассматриваемой для $D = B$.

26. ФОРМУЛЫ КАРЛЕМАНА В ОБЛАСТЯХ ЗИГЕЛЯ

Важную роль в характеризации однородных ограниченных областей играют области Зигеля. Пусть V — выпуклый открытый острый конус в пространстве $\mathbf{R}^n$ с вершиной в начале координат. Функция $F(u, v)\colon \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^k$ является V-эрмитовой невырожденной формой, если: а) $F(u, v) = \overline{F(v, u)}$, б) F линейна по u, в) $F(u, u) \in \overline{V}$ и г) $F(u, u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$.

Областью Зигеля (второго рода) называют область $D \subset \mathbf{C}^n = \mathbf{C}^k \times \mathbf{C}^m$ вида

$$D = \{(z, u)\colon z \in \mathbf{C}^k, \ u \in \mathbf{C}^m, \ \operatorname{Im} z - F(u, u) \in V\}. \qquad (26.1)$$

Всякая область Зигеля вида (26.1) биголоморфно эквивалентна ограниченной области. Фундаментальная теорема Винберга — Гиндикина — Пятецкого-Шапиро (см. [53]) утверждает, что обратно: всякая ограниченная однородная область в $\mathbf{C}^n$ биголоморфно эквивалентна однородной области Зигеля вида (26.1).

Остовом области Зигеля (26.1) назовем множество (границу Шилова)

$$S = \{(z, u)\colon \operatorname{Im} z = F(u, u)\}.$$

Оно является гладким порождающим многообразием в $\mathbf{C}^n$. Действительно, для каждой точки $(z^0, u^0) \in S$ комплексная касательная плоскость имеет вид

$$T_S^c(z^0, u^0) = \{(z, u)\colon z - z^0 = 2i\,[F(u, u^0) - F(u^0, u^0)]\},$$

комплексная коразмерность T_S^c равна k и совпадает с действительной коразмерностью многообразия S. Следовательно, многообразие S является порождающим (см., например, [164, с. 34]).

Мера Лебега μ на S задается (с точностью до постоянного множителя) дифференциальной формой $\omega = dx \wedge du \wedge d\overline{u}$, где $x = \operatorname{Re} z$. Поскольку D — биголоморфно эквивалентна ограниченной области, мы можем определить класс $A^\alpha(D)\subset A(D)$ так же, как в случае полуплоскости.

Пусть M — замкнутое ограниченное множество в S такое, что $\mu M>0$. По теореме Садуддаева 0.7 M — множество единственности для $A^\alpha(D)$. Поэтому так же, как и для классических областей (см. разд. 24), естественно возникает задача построения для множества M формулы Карлемана. Но в отличие от классических областей в области Зигеля D нет, вообще говоря, точки, через которую можно провести достаточно мощное семейство комплексных прямых, пересекающих остов S по кривой. Действительно, проводя через точку $(z^0,\ u^0)\in D$ комплексную прямую $\{(z,\ u)\colon\ z=z^0+at,\ u=u^0+bt,$ $a\in \mathbf{C}^k,\ b\in \mathbf{C}^m,\ t\in \mathbf{C}^1\}$, получим, что ее пересечение с S задается уравнениями $\operatorname{Im} z^0-F(u^0,\ u^0)=-\operatorname{Im} at+\bar{t}F(a^0,\ b)+tF(b,\ a^0)+|t|^2F(b,\ b)$. Для того чтобы данное множество являлось окружностью (или прямой), нужны жесткие ограничения на a и b (например, при $b=0$ вектор a должен быть таким $a=\lambda[\operatorname{Im} z^0-F(u^0,\ u^0)]$). Поэтому методы разд. 24 автоматически не переносятся на области Зигеля.

Мы поступим следующим образом: сначала восстановим значение функции f в одной из бесконечно удаленных точек S, затем с помощью автоморфизмов «разнесем» его на S, а далее функцию f можно аналитически продолжить с S в область D с помощью любого интегрального представления (например, из [65]) для этой области.

Рассмотрим семейство комплексных прямых

$$\begin{cases}\zeta=at+z\\ \eta=u,\end{cases}$$

где $(z,\ u)\in S$, $t\in\mathbf{C}^1$, a — точка из конуса V. Эти прямые пересекают S по прямой $\{t\colon\ \operatorname{Im} t=0\}$, а область D — по полуплоскости $\Pi=\{t\colon\ \operatorname{Im} t>0\}$. Действительно, $\operatorname{Im}\zeta-F(\eta,\ \eta)=\operatorname{Im} z-F(u,\ u)+\operatorname{Im} at=a\operatorname{Im} t$. Если $\operatorname{Im} t>0$, то $a\operatorname{Im} t\in V$. Без ограничения общности можно считать, что $a=(1,\ \ldots,\ 1)\in V$, а $z=x+iy$, $'x=(0,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$. Тогда остов S расслаивается на прямые $l_{'x,u}=\{(\zeta,\eta)\colon \zeta=t+z,\ \eta=u,\ t\in\mathbf{R}^1\}$, $(z,\ u)\in S$. Если компакт $M\subset S$, $\mu M>0$, то обозначим $M_{'x,u}=M\cap l_{'x,u}$, $M'=\{('x,\ u)\colon m_1M_{'x,u}>0\}\subset\mathbf{R}^{k-1}\times\mathbf{C}^m$. Множество M' измеримо относительно меры m_{2m+k-1} и по теореме Фубини $m_{2m+k-1}M'>0$. Комплексные прямые $l_{'x,u}$ определяют одну бесконечно удаленную точку на замыкании $\tilde{S}$ остова S в $\mathbf{CP}^{k+m}$, которую обозначим символом ∞.

Теорема 26.1 (Кытманов — Никитина). *Пусть* $f\in A^\alpha(D)$, $\alpha>0$, *тогда*

$$f(\infty)=\frac{1}{2\pi i\int\limits_{M'} d\mu_{'x,u}}\lim_{j\to\infty}\int\limits_M \frac{f(z,\ u)\,\varphi^j(z,\ u)\,d\mu_{z,u}}{z_1+i-iF(u,\ u)},\tag{26.2}$$

где $\varphi = \exp \psi$;

$$\psi(z, u) = \frac{i}{\pi} \int\limits_{M'_{x,u}} \frac{dt}{t - z_1 + iF_1(u, u)}.$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(t) = f(t + z, u)$, тогда $F \in A^{\alpha}(\Pi)$, поэтому (см. следствие 5.5)

$$f(\infty) = F(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{M'_{x,u}} F(t)\, \varphi^j(t) \frac{dt}{t + i}. \tag{26.3}$$

Отметим, что $dz \wedge du \wedge d\bar{u} = dx \wedge du \wedge d\bar{u} = dt \wedge d'x \wedge du \wedge d\bar{u}$. Умножая (26.3) на $d'x \wedge du \wedge d\bar{u}$ и интегрируя по M', получаем (26.2). Возможность предельного перехода под знаком интеграла по M' обосновывается тем, что интегралы по $M'_{x,u}$ равномерно ограничены при всех j. □

Пусть теперь область Зигеля D однородна. Каждый биголоморфный автоморфизм D является рациональной вектор-функцией. Среди всех автоморфизмов можно выделить аффинные, они составляют транзитивную подгруппу автоморфизмов, которая транзитивна и на S. Но аффинные автоморфизмы не переводят бесконечно удаленные точки в конечные. Поэтому сначала с помощью некоторого автоморфизма переведем нашу бесконечно удаленную точку ∞ в некоторую конечную точку на S, а уже затем сможем применять аффинные автоморфизмы. И тем самым точку ∞ мы можем отобразить в любую точку S. Полученный автоморфизм имеет, вообще говоря, особые точки на S, но множество таких точек имеет меру (μ), равную нулю, так как многообразие S порождающее. Следовательно, можно считать (в случае необходимости немного уменьшив M), что M не пересекается с этим множеством.

Итак, пусть $(\Phi(z, u), \Psi(z, u))$ — автоморфизм D, переводящий фиксированную точку $(z^0, u^0) \in S \setminus M$ в точку ∞, где $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_k)$, $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_m)$.

Теорема 26.2 (Кытманов — Никитина). *Если* $f \in A^{\alpha}(D)$, *то*

$$f(z^0, u^0) = \frac{1}{C} \lim_{j \to \infty} \int\limits_{M} f(z, u) \frac{g^j(z, u)\, d\Phi \wedge d\Psi \wedge d\bar{\Psi}}{\Phi_1(z, u) + i - iF_1(\Psi, \Psi)}, \tag{26.4}$$

где $C = 2\pi i \int\limits_{M'} d'\Phi \wedge d\Psi \wedge d\bar{\Psi}$; $\qquad g(z, u) = \varphi(\Phi(z, u), \Psi(z, u))$.

Доказательство сразу следует из теоремы 26.1. □

В разд. 24 для классических областей D использовалось выражение меры $\mu(\varphi_{\alpha}(z))$ через ядро Пуассона. В областях Зигеля такая связь неизвестна. Приведем два примера на изложенные результаты.

Пример 1. *Пусть* $D = \{(z, u)\colon z \in \mathbb{C}^1, u \in \mathbb{C}^m, \operatorname{Im} z - |u_1|^2 - \ldots - |u_m|^2 > 0\}$. Эта область биголоморфно эквивалентна шару. Для того чтобы явно выписать в этом случае ядро в формуле (26.4), можно биголоморфно отобразить D на шар B, в B сделать поворот, а затем произвести обратное отображение B на D. При этом получим автоморфизм области D, переводящий единственную бесконечно удаленную точку S в любую другую точку S. Вычисления показывают, что для D ядро в (26.4) имеет вид

$$\frac{i\,|z^0+i|^{2m+2} \quad \wedge \quad \wedge d\bar{u}}{\rho(z,\,u,\,z^0,\,u^0)},$$

где $\rho(z,\ u,\ z^0,\ u^0)=|i(\bar{z}^0-z)-2\langle u,\ \bar{u}^0\rangle|^{2m}\{2|i(\bar{z}^0-z)-2\langle u,\ \bar{u}^0\rangle|^2+i[(|z|^2-1)(z^0+\bar{z}^0)-(|z^0|^2-1)(z+\bar{z})+4i(z-i)\langle u,\ \bar{u}^0\rangle\times \times \operatorname{Im}(\bar{z}^0-i)]\}$.

Пример 2. Пусть $D=\tau^+$ — труба будущего (см. [57]), т. е. трубчатая область над конусом будущего $\tau^+=\{z\colon z\in\mathbf{C}^n,\ y_1^2>y_2^2+\ldots\ldots+y_n^2,\ y_1>0\}$. Остов S этой области совпадает с $\mathbf{R}^n$ (в данном случае V — эрмитова форма $F=0$). Если $z^0=x^0\in S$, то ее можно перевести в бесконечно удаленную точку так: сначала сдвинуть ее в 0 с помощью параллельного переноса $x\to x-x^0$, а затем сделать инверсию $x\to-(x/x^2)$, где $x^2=x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2$. Ядро в (26.4) примет вид

$$\frac{dx}{[(x-x^0)^2]^{n-1}\left[x_1-x_1^0+i(x-x^0)^2\right]}.$$

Итак, для функций f из $A^\alpha(\tau^+)$ и точек $x^0\in S$ справедлива формула

$$f(x_0)=\frac{1}{C}\lim_{j\to\infty}\int\limits_M\frac{f(x)\,\varphi_{x0}^j(x)\,dx}{[(x-x^0)^2]^{n-1}\left[x_1-x_1^0+i(x-x^0)^2\right]},$$

где φ_{x_0} получается из φ после соответствующей замены переменных. Можно считать, что $(x-x^0)^2\neq 0$ на множестве M.

В заключение обсудим вопрос, как восстановить значения f на остове S, если область Зигеля D не является однородной. Зафиксируем точку $(z^0,\ u^0)\in S$. Рассмотрим те комплексные прямые, проходящие через эту точку, которые пересекают область D. Такие прямые составляют два класса:

1) $l_a=\{(z,\ u)\colon\ z=at+z^0,\ u=u^0,\ t\in\mathbf{C}^1\}$, $a\in V\subset\mathbf{R}^n$, множество $l_a\cap D$ является полуплоскостью Π относительно t;

2) $l_{b,p}=\{(z,\ u)\colon\ z=2i[F(b,\ u^0)-pF(b,\ b)]\,t+z^0,\ \ u=bt+u^0,\ t\in\mathbf{C}^1\}$, $b\in\mathbf{C}^m$, $p\in\mathbf{C}^1$, $F(b,\ b)\in V$, в этом случае $l_{b,p}\cap D$ — круг радиуса p с центром в точке $t=-\bar{p}$.

В самом деле, если $z=at+z^0$, $u=bt+u^0$, то $\operatorname{Im}z-F(u,\ u)= =\operatorname{Im}z_0+\operatorname{Im}at-F(u^0,\ u^0)-tF(b,\ u^0)-\bar{t}F(u^0,\ b)-|t|^2F(b,\ b)= =\operatorname{Im}at-tF(b,\ u^0)-\bar{t}F(u^0,\ b)-|t|^2F(b,\ b)\in V$. Если $F(b,\ b)=0$, т. е. $b=0$, то получаются прямые первого класса. Если же $F(b,\ b)\neq 0$, то

$$\operatorname{Im} a_j t - tF_j(b, u^0) - \bar{t}F_j(u^0, b) - |t|^2 F_j(b, b) =$$

$$= F_j(b, b)\left[\left|t + \frac{F_j(u^0, b) - \frac{i}{2}\bar{a}_j}{F_j(b, b)}\right|^2 - \left|\frac{F(u^0, b) - \frac{i}{2}\bar{a}_j}{F_j(b, b)}\right|^2\right], \ j = 1, 2, \ldots, k,$$

Следовательно, для того чтобы область D пересекалась с такой прямой, нужно, чтобы $F(b, b) \in V$ и $\dfrac{F_j(u^0, b) - \frac{i}{2}a_j}{F_j(b, b)} = p$ для всех $j = 1, 2, \ldots, k$. Это соответствует прямой второго класса.

Пусть $(z^0, u^0) \in S$ и конус $V_{x^0, u^0} = \{(x, u^0)\colon x = x^0 + \tilde{x}, \tilde{x} \in V\}$ пересекает M по множеству положительной меры m_k. Тогда в точке (z^0, u^0) можно следующим образом восстановить значение функции $f \in A^\alpha(D)$. Рассмотрим прямые l_a первого класса; можно считать, что $a_1 = 1$. Учитывая, что $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k = t^{k-1}dt \wedge da_2 \wedge \ldots \wedge da_k$, получаем

$$(x_1 - x_1^0)^{-k} dx = t^{-1} dt \wedge da_2 \wedge \ldots \wedge da^k.$$

Обозначим $M_a = l_a \cap M$ и $\tilde{M} = \{a\colon a_1 = 1, m_1 M_a > 0\}$. Применяя метод доказательства теоремы 26.1, находим, что

$$f(z^0, u^0) = \frac{1}{2\pi i \int\limits_{\tilde{M}} d'a} \lim_{j\to\infty} \int\limits_{M \cap V_{x^0, u^0}} \frac{f(z, u^0) h^j(z, u^0)\, dx}{(x_1 - x_1^0)^n}.$$

Таким образом, мы аналитически продолжаем функцию f на некоторое большее множество M_1. Применяя этот метод снова, получаем продолжение f на множество M_2, обладающее свойством: если $(z^0, u^0) \in S$ и $V_{x^0, u^0} \cap M$ имеет положительную меру m_k, то точки $(x + iy^0, u^0) \in M_2$, где $x \in \mathbf{R}^n$. Пусть теперь (z^0, u^0) — произвольная точка S. Рассмотрим прямую $l_{b,p}$ второго класса. Если $F_1(b, b) \neq 0$ (это предположение не снижает общности), то положим

$$p = [F_1(b, u^0) + i/2]\,[F_1(b, b)]^{-1},$$

тогда $z_1 = t + z_1^0$, для $z \in l_{b,p}$. Обозначим $M_b = M_2 \cap l_{b,p}$, $M' = \{b\colon b \in \mathbf{C}^m, m_1 M_b > 0\}$. Последнее множество имеет положительную $2m$-мерную меру Лебега. Далее $dz_1 \wedge du \wedge d\bar{u} = |t|^{2m} dt \wedge db \wedge d\bar{b}$, т. е.

$$\left[(z_1 - z_1^0)\,|z_1 - z_1^0|^{2m}\right]^{-1} \partial z_1 \wedge \partial u \wedge \partial\bar{u} = t^{-1} dt \wedge db \wedge d\bar{b}.$$

Теперь можно восстановить значение функции $f(at + z^0, bt + u^0)$ в точке $t = 0$ по теореме 4.2, а затем, умножая полученное выражение на $db \wedge d\bar{b}$ и интегрируя по M', получить формулу

$$f(z^0, u^0) = \frac{1}{2\pi i \int\limits_{M'} db \wedge d\bar{b}} \lim_{j\to\infty} \int\limits_{M_3} f(z, u) \frac{\varphi^j(z, u)\, dz_1 \wedge du \wedge d\bar{u}}{(z_1 - z_1^0)\,|z_1 - z_1^0|^{2m}},$$

где M_3 — проекция множества M_2 на плоскость переменных (z_1, u).

Часть III

ПЕРВЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ГЛАВА 7

ПРИЛОЖЕНИЯ В КОМПЛЕКСНОМ АНАЛИЗЕ

27. О КРИТЕРИЯХ ГОЛОМОРФНОЙ ПРОДОЛЖИМОСТИ В ОБЛАСТЬ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ЧАСТИ ЕЕ ГРАНИЦЫ

1°. Известно следующее классическое утверждение. Пусть D — ограниченная плоская область с гладкой границей ∂D, функция $f \in C(\partial D)$, тогда

$$\int_{\partial D} f(z_1)\varphi(z_1)\,dz_1 = 0 \tag{27.1}$$

для всех функций $\varphi \in A_C(D)$ в том и только том случае, если $f(z)$ продолжается в область D как голоморфная функция класса $A_C(D)$ (см., например, [124, с. 131]).

Это утверждение имеет целый ряд важных следствий в теории функций одного комплексного переменного. Оно обобщалось на многомерный случай, при этом роль голоморфной формы $\varphi(z_1)\,dz_1$ в (27.1) играют внешние дифференциальные формы класса $Z^{\infty}_{n,n-1}(\overline{D})$. Следующее предложение приведено с доказательством в [25, с. 35—37].

Предложение 27.1 (Вайнсток — Аронов — Даутов). *Пусть D — область в $\mathbf{C}^n$ с гладкой границей и $f \in C(\partial D)$. Тогда для того, чтобы существовала функция $F \in A_C(D)$ такая, что $F|_{\partial D} = f$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_{\partial D} f\alpha = 0 \tag{27.2}$$

для любой формы $\alpha \in Z^{\infty}_{n,n-1}(\overline{D})$.

Аналогичное утверждение справедливо и при описании следов на ∂D функций класса Харди (см. [164, с. 17—19]).

Предложение 27.2. *Пусть D — область Ляпунова в $\mathbf{C}^n$. Функция $f \in L^p(\partial D)$, $1 \leqslant p < \infty$, голоморфно продолжается в область D как функция класса $H^p(D)$ тогда и только тогда, когда верно* (27.2).

Иногда вместо условий ортогональности вида (27.1), (27.2) рассматривают условия ортогональности лишь счетному семейству функций (форм). Например, при $n = 1$ и односвязной области D

условие (27.1) можно заменить на ортогональность всем мономам:

$$\int\limits_{\partial D} f z_1^m \, dz_1 = 0, m = 0, 1, 2, \ldots \tag{27.3}$$

Рассмотрим теперь вопрос об описании функций, заданных на части границы области, которые могут быть аналитически продолжены в заданную область. Этот вопрос до недавнего времени оставался без ответа. Можно показать, что решения этой задачи в виде обращения в нуль некоторого семейства линейных непрерывных функционалов (как в (27.1)—(27.3)) не существует.

Приведенные в данном пункте результаты опираются на некоторое утверждение из функционального анализа. Пусть A: $X \to Y$ — непрерывное линейное отображение топологического векторного пространства X в пространство Y. Введем ядро этого оператора $\ker A = \{x\colon\ x \in X,\ Ax = 0\}$ и его образ $\operatorname{im} A = \{y\colon\ y \in Y,\ y = Ax,\ x \in X\}$. Обозначим через A^*: $Y^* \to X^*$ сопряженный оператор, где X^*, Y^* — сопряженные к X, Y пространства. Оператор A^* определяется равенством $(A^*f)(x) = f(Ax)$ для $x \in X$, где $f \in Y^*$. Будем предполагать, что Y — банахово пространство, а P — непрерывный проектор в Y. Тогда $Z = \ker P$ — векторное подпространство Y, которое наделяется индуцированной нормой. Норму в сопряженном пространстве Z^* обозначим $\|\cdot\|_{Z^*}$. Каждый непрерывный линейный функционал на Y посредством сужения определяет непрерывный линейный функционал на Z. В частности, $\ker A^*$ можно рассматривать как векторное подпространство $(\ker P)^*$, поэтому для всякого функционала $f \in \ker A^*$ определена норма $\|f\|_{(\ker P)^*}$.

Предложение 27.3 (Тарханов). *Пусть A: $X \to Y$ — непрерывное линейное отображение локально выпуклого пространства X в рефлексивное банахово пространство Y с замкнутым образом, а P — непрерывный проектор в Y, причем* $\ker(P \circ A) = 0$. *Тогда $y \in \in \operatorname{im}(P \circ A)$ в том и только том случае, когда $Py = y$ и для всякой последовательности $\{f_j\} \in \ker A^*$ такой, что $\|f_j\|_{(\ker P)^*} \to 0$, имеет место*

$$\lim_{j \to \infty} f_j(y) = 0. \tag{27.4}$$

Лемма 27.4. $\operatorname{im} A = \{y\colon\ y \in Y,\ f(y) = 0$ *для всех* $f \in \ker A^*\}$.

Доказательство. Действительно, из теорем 4.7(а) и 4.12 (см. [139]) вытекает, что $\overline{\operatorname{im} A} = \{y\colon\ y \in Y,\ f(y) = 0$ для всех $f \in \in \ker A^*\}$ (в [139] требуется, чтобы X и Y были банаховыми, однако в той части этих утверждений, которую мы используем, достаточно требовать лишь локальную выпуклость). По условию $\operatorname{im} A$ замкнут, поэтому $\overline{\operatorname{im} A} = \operatorname{im} A$. □

Лемма 27.5. *Подпространство* $\ker A^*$ *плотно в* $(\ker P)^*$ *по норме пространства* $(\ker P)^*$.

Доказательство. Так как оператор P непрерывен, то $Z = = \ker P$ — замкнутое подпространство Y, поэтому Z — рефлексивное банахово пространство (с индуцированной нормой, см. [139, с. 126]). Для доказательства леммы по теореме Хана — Банаха достаточно проверить, что если F — непрерывный линейный функционал на Z^*, равный нулю на $\ker A^*$, то $F \equiv 0$. Однако из рефлексивности Z заключаем, что существует вектор $z \in Z$ такой, что $F(f) = f(z)$ для всех $f \in Z^*$. В частности, $f(z) = 0$ для любого функционала $f \in \ker A^*$. Теперь по лемме 27.4 заключаем, что найдется вектор $x \in X$ такой, что $z = Ax$. Далее $P \circ Ax = 0$, так как $Pz = 0$. По условию предложения 27.3 заключаем, что $x = 0$. Поэтому $z = 0$, откуда $F \equiv 0$. □

Лемма 27.6. *Условие* (27.4) *эквивалентно следующему: существует постоянная* $C > 0$, *зависящая от* y, *такая, что для всех* $f \in \ker A^*$ *справедливо неравенство*

$$|f(y)| \leqslant C\|f\|_{\ker P^*} \tag{27.5}$$

Доказательство. Снабдим векторное пространство $\ker A^*$, рассматриваемое как подпространство $(\ker P)^*$, индуцированной нормой. Тогда условие (27.4) означает, что функционал $f \to f(y)$ на $\ker A^*$ непрерывен в нуле, а условие (27.5) есть условие ограниченности этого функционала. Из функционального анализа хорошо известно, что эти два условия для линейного функционала на метризуемом топологическом векторном пространстве являются равносильными. □

Доказательство предложения 27.3. Необходимость. Пусть $y = P \circ Ax$ для некоторого вектора $x \in X$. Тогда из $P^2 = P$ следует $Py = P^2 \circ Ax = y$. С другой стороны, если последовательность $\{f_j\} \in \ker A^*$ такова, что $\|f_j\|_{(\ker P)^*} \to 0$, то

$$f_j(y) = f_j(P \circ Ax) = f_j(Ax - (1-P) \circ Ax) = (A^* f_j)(x) - f_j((1-P) \circ Ax).$$

Поскольку $A^* f_j = 0$, а вектор $z = (1-P) \circ Ax \in \ker P$, то

$$|f_j(y)| \leqslant \|f_j\|_{(\ker P)^*} \|(1-P) \circ Ax\|_{\ker P},$$

откуда следует (27.4).

Достаточность. Пусть вектор $y \in Y$ и такой, что $y = Py$ и выполняется условие (27.4). Рассмотрим следующий линейный функционал F на пространстве $(\ker P)^*$. Пусть $f \in (\ker P)^*$. По лемме 27.5 найдется последовательность $\{f_j\} \in \ker A^*$ такая, что $\|f - f_j\|_{(\ker P)^*} \to 0$ при $j \to 0$. Положим

$$F(f) = -\lim_{j \to \infty} f_j(y). \tag{27.6}$$

Покажем, что предел в (27.6) существует для всякого $f \in (\ker P)^*$. Для этого достаточно проверить, что числовая последовательность $\{f_j(y)\}$ является фундаментальной. Однако по условию (27.5)

$$|f_i(y) - f_j(y)| \leqslant C\|f_i - f_j\|_{(\ker P)^*}. \tag{27.7}$$

Так как последовательность $\{f_j\}$ сходится по норме $(\ker P)^*$, то она фундаментальна относительно этой нормы, поэтому из оценки (27.7) вытекает и фундаментальность $\{f_j(y)\}$.

Докажем теперь, что предел в правой части (27.6) не зависит от выбора последовательности $\{f_j\} \subset \ker A^*$, аппроксимирующей f по норме $(\ker P)^*$. Действительно, если $\{g_j\}$ — другая последовательность с этим же свойством, то $\| f_j - g_j \|_{(\ker P)^*} \to 0$, откуда по условию (27.4) $f_j(y) - g_j(y) \to 0$ при $j \to \infty$. Итак, F — линейный функционал на $(\ker P)^*$, корректно определенный равенством (27.6). Убедимся в его ограниченности. В самом деле, используя неравенство (27.5), получаем для всех $f \in (\ker P)^*$

$$|F(f)| = \lim_{j\to\infty} |f_j(y)| \leqslant C \lim_{j\to\infty} \| f_j \|_{(\ker P)^*} = C \| f \|_{(\ker P)^*}.$$

Поскольку Z рефлексивно, то найдется вектор $z \in \ker P$ такой, что для всех $f \in (\ker P)^*$

$$F(f) = f(z). \tag{27.8}$$

Если $f \in \ker A^*$, то в качестве аппроксимирующей последовательности $\{f_j\}$ в (27.6) можно взять стационарную последовательность $\{f\}$. Тогда из (27.6) и (27.8) получаем, что для всех $f \in \ker A^*$

$$-f(y) = f(z). \tag{27.9}$$

Наконец, (27.9) означает, что $f(y+z) = 0$ для всех $f \in \ker A^*$. Отсюда по лемме 27.4 заключаем, что существует такой вектор $x \in X$, что $y + z = Ax$. Поэтому $y = Py = p \circ Ax$, т. е. $y \in \operatorname{im} P \circ A$. □

Заметим, что в приведенных утверждениях пространство $\ker A^*$ можно заменить на любое плотное в нем подпространство.

Теперь применим предложение 27.3 для решения задачи, поставленной в начале этого раздела.

Теорема 27.7 (Тарханов). *Пусть D — область Ляпунова в $\mathbb{C}^n$ и $M \subset \partial D$ — измеримое множество, $m_{2n-1}(M) > 0$. Для функции $f \in L^p(M)$, $1 < p < \infty$, существует функция $F \in H^p(D)$ такая, что нормальные предельные значения F почти всюду на M совпадают с f в том и только том случае, когда*

$$\lim_{j\to\infty} \int_M f g_j = 0$$

для всякой последовательности $\{g_j\} \subset Z^\infty_{n,n-1}(\overline{D})$, для которой

$$\lim_{j\to\infty} \left\| \frac{g_j}{d\sigma} \right\|_{L^q(\partial D \setminus M)} = 0.$$

Здесь $d\sigma$ — элемент поверхности ∂D, а $1/p + 1/q = 1$.

Доказательство. Положим $X = H^p(D)$, а $Y = L^p(\partial D)$ — рефлексивное банахово пространство. Далее, оператор сужения A: $H^p(D) \to L^p(\partial D)$ имеет замкнутый образ, что вытекает из предложения 27.2. Пространство $L^p(M)$ будем считать подпространством

$L^p(\partial D)$, продолжая каждую функцию из $L^p(M)$ нулем на $\partial D\backslash M$. Тогда проекция P: $L^p(\partial D)\to L^p(M)$ является непрерывным проектором и $\ker P = L^p(\partial D\backslash M)$. При этом отображение $P\circ A$: $H^p(D)\to \to L^p(M)$ задается сужением на M угловых граничных значений функций из $H^p(D)$ и является взаимно-однозначным, так как M — множество единственности для класса $H^p(D)$ (что легко показать с помощью предложения 0.8).

Можно проверить, что функционалы вида

$$f\to\int_{\partial D} fg, \tag{27.10}$$

где $g\in Z^\infty_{n,n-1}(\overline{D})$, плотны в пространстве $\ker A^*$. Действительно, обозначим через Φ семейство функционалов на $L^p(\partial D)$ вида (27.10). По теореме Хана — Банаха достаточно проверить, что если $G\in(\ker A^*)^*$ и $G(\varphi)=0$ для всех $\varphi\in\Phi$, то $G=0$. По той же теореме G можно продолжить до непрерывного линейного функционала на $L^q(\partial D)\supset\ker A^*$, после чего G по теореме Никодима представляется в виде $G(\varphi)=\varphi(f)$ для всех $\varphi\in(L^p(\partial D))^*$, где $f\in \in L^p(\partial D)$. Условие $G(\varphi)=0$ для всех $\varphi\in\Phi$ означает выполнение условия (27.2), следовательно, согласно предложению 27.2 $f=AF$ для некоторой функции $F\in H^p(D)$. Если $\varphi\in\ker A^*$, то $G(\varphi)= =\varphi(AF)=(A^*\circ\varphi)(F)=0$, так что $G\equiv 0$ на $\ker A^*$. Теперь утверждение теоремы вытекает из предложения 27.3 и замечания, сделанного после его доказательства. □

Случай $p=\infty$ в теореме 27.7 формально не удается исследовать, опираясь на предложение 27.3, так как пространство $L^\infty(\partial D)$ не является рефлексивным. Однако небольшие изменения в доказательстве позволяют распространить теорему 27.7 и на этот вариант.

Теорема 27.8 (Тарханов). *Утверждение теоремы* 27.7 *верно и при* $p=\infty$.

Рассмотрим более трудный случай $p=1$.

Теорема 27.9 (Тарханов). *Пусть M — множество с непустой внутренностью на границе области Ляпунова $D\subset\mathbb{C}^n$, а μ — комплекснозначная борелевская мера на M такая, что $|\mu|(M\backslash\operatorname{int}M)=0$. Тогда для существования функции $f\in H^1(D)$ такой, что на множестве $\operatorname{int}M$ мера μ порождается угловыми граничными значениями f, т. е. $d\mu=f d\sigma$, необходимо и достаточно, чтобы для всякой последовательности $\{g_j\}\subset Z^\infty_{n,n-1}(\overline{D})$ такой, что*

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\frac{g_j}{d\sigma}\right\|_{C(\overline{\partial D\setminus M})}=0, \tag{27.11}$$

имело место равенство

$$\lim_{j\to\infty}\int_M\frac{g_j}{d\sigma}\,d\mu=0. \tag{27.12}$$

Это утверждение обобщает часть II теоремы 17.5.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $d\mu = f d\sigma$ на $\operatorname{int} M$ для некоторой функции $f \in H^1(D)$, а последовательность $\{g_j\}$ удовлетворяет условию (27.11). Далее из $|\mu|(M \setminus \operatorname{int} M) = 0$ получаем

$$\left| \int\limits_M \frac{g_j}{d\sigma} d\mu \right| = \left| \int\limits_{\partial D} f g_j - \int\limits_{\partial D \setminus M} f \frac{g_j}{d\sigma} d\sigma \right| \leqslant \|f\|_{L^1(\overline{\partial D \setminus M})} \left\| \frac{g_j}{d\sigma} \right\|_{C(\overline{\partial D \setminus M})}.$$

Следовательно, верно (27.12).

Достаточность. Заметим (ср. с леммой 27.6), что условие (27.12) эквивалентно следующему: существует постоянная $C > 0$, зависящая от μ и M, такая, что для всех $g \in Z^\infty_{n,n-1}(\overline{D})$ справедливо неравенство

$$\left| \int\limits_M \frac{g}{d\sigma} d\mu \right| \leqslant C \left\| \frac{g}{d\sigma} \right\|_{C(\overline{\partial D \setminus M})}. \tag{27.13}$$

Далее, если $\operatorname{int} M \neq \varnothing$, то подпространство $C(\overline{\partial D \setminus M})$, образованное функциями вида $\left.\frac{g}{d\sigma}\right|_{\overline{\partial D \setminus M}}$, где $g \in Z^\infty_{n,n-1}(\overline{D})$, плотно в $C(\overline{\partial D \setminus M})$ (ср. с замечанием после доказательства следствия 17.7).

Рассмотрим теперь следующий линейный функционал F на пространстве $C(\overline{\partial D \setminus M})$. Пусть $\psi \in C(\overline{\partial D \setminus M})$. Найдется последовательность $\{\psi_j\} \subset Z^\infty_{n,n-1}(\overline{D})$ такая, что

$$\lim_{j \to \infty} \left\| \frac{\psi_j}{d\sigma} - \psi \right\|_{C(\overline{\partial D \setminus M})} = 0.$$

Положим

$$F(\psi) = -\lim_{j \to \infty} \int\limits_M \frac{\psi_j}{d\sigma} d\mu. \tag{27.14}$$

С помощью оценки (27.13) нетрудно показать, что предел в (27.14) существует для всякой функции $\psi \in C(\overline{\partial D \setminus M})$. Из условия (27.12) вытекает, что этот предел не зависит от выбора последовательности $\{\psi_j\} \subset Z^\infty_{n,n-1}(\overline{D})$, для которой $\{\psi_j/d\sigma\}$ аппроксимирует ψ. Таким образом, функционал F определен корректно, и вновь, применяя оценку (27.13), получаем, что F ограничен на $C(\overline{\partial D \setminus M})$.

Следовательно, по теореме Рисса существует такая комплексно-значная борелевская мера μ_1 конечной полной вариации на компакте $\overline{\partial D \setminus M} = \partial D \setminus \operatorname{int} M$, что для всех $\psi \in C(\overline{\partial D \setminus M})$

$$F(\psi) = \int\limits_{\overline{\partial D \setminus M}} \psi d\mu_1. \tag{27.15}$$

С другой стороны, из определения функционала F равенством

(27.14) вытекает, что для всех $g \in Z^{\infty}_{n,n-1}(\overline{D})$

$$F\left(\frac{g}{d\sigma}\right) = -\int_M \frac{g}{d\sigma}\, d\mu, \qquad (27.16)$$

причем интегрирование здесь производится фактически по множеству $\operatorname{int} M$.

Наконец, обозначим через $\tilde{\mu}$ меру, совпадающую с μ на $\operatorname{int} M$ и с μ_1 на $\partial D \setminus \operatorname{int} M$. Тогда $\tilde{\mu}$ имеет конечную полную вариацию на ∂D, а из равенств (27.15) и (27.16) следует, что для всех $g \in Z^{\infty}_{n,n-1}(\overline{D})$ верно

$$\int_{\partial D} \frac{g}{d\sigma}\, d\tilde{\mu} = \int_{\partial D \setminus M} \frac{g}{d\sigma}\, d\mu_1 + \int_M \frac{g}{d\sigma}\, d\mu = F\left(\frac{g}{d\sigma}\right) - F\left(\frac{g}{d\sigma}\right) = 0.$$

По теореме 17.5 существует функция $f \in H^1(D)$ такая, что на множестве $\operatorname{int} \mathrm{M}$ имеет место равенство $d\mu = f d\sigma$. □

Отметим следующий результат, который приведем без доказательства.

Теорема 27.10 (Тарханов). *Пусть D — область Ляпунова в $\mathbb{C}^n$, а M — замкнутый кусок границы ∂D такой, что $\overline{\partial D \setminus M}$ имеет связное дополнение в $\mathbb{C}^n$. Для функции $f \in C(M)$ существует функция $F \in H^1(D) \cap C(D \cup M)$ такая, что $F|_M = f$, в том и только в том случае, если выполняются условия теоремы* 27.9 (см. (27.12)).

Приведем в заключение этого пункта уточнение теоремы 27.8. Пусть D — ограниченная область с гладкой границей ∂D, точку $z^0 \in \partial D$ назовем точкой Лебега суммируемой функции $f \in L^1(\partial D)$, если

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{m_{2n-1}(B(z^0, r) \cap \partial D)} \int_{B(z^0, r) \cap \partial D} |f(z) - f(z^0)\, d\sigma = 0.$$

Точка $z^0 \in E \subset \partial D$ называется *точкой плотности множества E*, если

$$\lim_{r \to 0} \frac{m_{2n-1}(E \cap B(z^0, r))}{m_{2n-1}(\partial D \cap B(z^0, r))} = 1.$$

Теорема 27.11 (Шаимкулов). *Если M — замкнутое множество на границе ∂D области Ляпунова $D \subset \mathbb{C}^n$ и $m_{2n-1}(M) > 0$, функция f непрерывна на M, то для существования такой функции $F \in H^{\infty}(D)$, угловые граничные значения которой в каждой точке z плотности множества M совпадают с $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы для всякой последовательности $\{g_j\} \subset Z^{\infty}_{n,n-1}(\overline{D})$ такой, что*

$$\lim_{j \to \infty} \left\| \frac{g_j}{d\sigma} \right\|_{L^1(\partial D \setminus M)} = 0,$$

имело место равенство

$$\lim_{j\to\infty}\int\limits_M fg_j = 0. \tag{27.17}$$

Для доказательства этой теоремы потребуется вспомогательный результат, имеющий и самостоятельный интерес.

Предложение 27.12. *Пусть D — ограниченная область с гладкой границей ∂D и $f\in L^1(\partial D)$. Для всякой точки Лебега z^0 функции f верно*

$$\lim_{z^{\pm}\to z^0}\int\limits_{\partial D} f(\zeta)\left[\omega\left(\zeta-z^+, \bar\zeta-\bar z^+\right)-\omega\left(\zeta-z^-, \bar\zeta-\bar z^-\right)\right]=f(z^0), \tag{27.18}$$

где точки $z^+\in D$ и $z^-\in\mathbf{C}^n\setminus\bar D$ лежат внутри прямого конуса с вершиной z^0, осью которого является нормаль к ∂D в точке z^0, а угол β между осью и образующей меньше $\pi/2$, причем $a|z^0-z^+|\leqslant\leqslant|z^0-z^-|\leqslant b|z^0-z^+|$, $0<a\leqslant b<+\infty$.

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\lim_{z^{\pm}\to z^0}\int\limits_{\partial D}[f(\zeta)-f(z^0)]\left[\omega\left(\zeta-z^+, \bar\zeta-\bar z^+\right)-\omega\left(\zeta-z^-, \bar\zeta-\bar z^-\right)\right]=0. \tag{27.19}$$

С помощью унитарного преобразования и сдвига переведем точку z^0 в точку 0, а гиперплоскость, касательную к ∂D в точке z^0, в гиперплоскость $\alpha=\{w\colon \operatorname{Im} w_n=0\}$. При этом ядро Мартинелли — Бохнера не изменится, а ∂D в окрестности U точки 0 будет задаваться системой уравнений $\zeta'=w'$, $\zeta_n=u_n+i\rho(w)$, здесь $w=(w', u_n)\in\alpha$, функция $\rho(w)\in C^1(U\cap\alpha)$. Обозначим через $\tilde z^{\pm}$ проекцию точек $z^{\pm}$ на ось $\operatorname{Im} w_n$.

Зафиксируем $\varepsilon>0$ и возьмем в гиперплоскости α шар B с центром в 0, такой, что для любого $w\in B$

1°. $\dfrac{1}{m_{2n-1}(B)}\displaystyle\int\limits_B |f(\psi(w))-f(0)|\,d\sigma_w<\varepsilon.$

2°. $|w-\tilde z^{\pm}|\leqslant C|\psi(w)-z^{\pm}|$, где $\psi(w)=(w', u_n+i\rho(w))$.

Такой шар, удовлетворяющий условию 1°, существует, так как z^0 — точка Лебега функции f. Можно его выбрать так, чтобы было верно и 2° (см., например, [73]). Отметим, что радиус шара B и постоянную C можно выбрать независимо от z^0.

Пусть $B'=\{\zeta\colon \zeta\in\partial D,\ \zeta=\psi(w),\ w\in B\}$, тогда

$$\lim_{z^{\pm}\to z^0}\int\limits_{\partial D\setminus B'}[f(\zeta)-f(0)]\left[\omega\left(\zeta-z^+, \bar\zeta-\bar z^+\right)-\omega\left(\zeta-z^-, \bar\zeta-\bar z^-\right)\right]=0,$$

и этот предел достигается равномерно по z^0. Остается оценить интеграл (27.19) по множеству B'. Имеем

$$\omega(\zeta - z^+, \bar\zeta - \bar z^+) - \omega(\zeta - z^-, \bar\zeta - \bar z^-) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\frac{\bar\zeta_k - \bar z_k^+}{|\zeta - z^+|^{2n}} - \frac{\bar\zeta_k - \bar z_k^-}{|\zeta - z^-|^{2n}} \right) d\bar\zeta[k] \wedge d\zeta.$$

В силу 2°

$$\left| \frac{\bar\zeta_k}{|\zeta - z^+|^{2n}} - \frac{\bar\zeta_k}{|\zeta - z^-|^{2n}} \right| \leqslant \frac{d\,|\tilde z^+|}{|w - a_1 \tilde z^+|^{2n}},$$

$$\left| \frac{\bar z_k^+}{|\zeta - z^+|^{2n}} - \frac{\bar z_k^-}{|\zeta - z^-|^{2n}} \right| \leqslant \frac{d_1\,|\tilde z^+|}{|w - a_1 \tilde z^+|^{2n}},$$

где d, d_1 и $a_1 < 1$ — некоторые постоянные. После замены переменных $\zeta = \psi(w)$ получим (здесь J — соответствующий якобиан)

$$\left| \int_{B'} [f(\zeta) - f(0)] \left[\omega(\zeta - z^+, \bar\zeta - \bar z^+) - \omega(\zeta - z^-, \bar\zeta - \bar z^-) \right] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(n-1)!}{(2\pi)^n} (d + d_1) \int_B |f(\psi(w)) - f(0)| \frac{|\tilde z^+|\,|J|}{|w - a_1 \tilde z^+|^{2n}}\, d\sigma_w,$$

в этом последнем интеграле ядро с точностью до постоянного множителя есть ядро Пуассона для полупространства (см., например, [145, с. 75]). Теперь из 1° и свойства интеграла Пуассона (см. [145, с. 238]) находим

$$\int_B |f(\psi(w)) - f(0)| \frac{|\tilde z^+|}{|w - a_1 \tilde z^+|^{2n}}\, d\sigma_w \leqslant \tilde C \varepsilon,$$

где постоянная $\tilde C$ не зависит от z^0. □

Отметим еще следующее простое утверждение.

Лемма 27.13. *Пусть $M \subset \partial D$ и $f \in L^\infty(\partial D) \cap C(M)$, тогда все точки плотности множества M являются точками Лебега функции f.*

Доказательство теоремы 27.11. Необходимость. Пусть M' — совокупность точек плотности множества M (заметим, что $m_{2n-1}M = m_{2n-1}M'$). Предположим, что $F \in H^\infty(D)$ и на M' верно равенство $F = f$, а последовательность $\{g_j\}$ удовлетворяет условиям теоремы, тогда

$$\int_M f g_j = \int_M F g_j = \int_{\partial D} F g_j - \int_{\partial D \setminus M} F g_j = - \int_{\partial D \setminus M} F g_j.$$

Отсюда получаем

$$\left| \int_M f g_j \right| \leqslant \| F \|_{L^\infty(\partial D \setminus M)} \left\| \frac{g_j}{d\sigma} \right\|_{L^1(\partial D \setminus M)},$$

поэтому верно (27.17).

Достаточность. По теореме 27.8 существует функция $F \in H^\infty(D)$, такая, что почти всюду на M имеет место равенство $F = f$. Функцию F можно представить через свои угловые граничные значения на ∂D интегралом Мартинелли — Бохнера, точнее

$$\int_{\partial D} F(\zeta)\,\omega(\zeta - z, \bar\zeta - \bar z) = \begin{cases} F(z), & z \in D, \\ 0, & z \notin \bar D. \end{cases} \tag{27.20}$$

Положим для $z \notin \partial D$ $\Phi(z) = \int_{\partial D} f(\zeta)\,\omega(\zeta - z, \bar\zeta - \bar z)$. Пусть $z^0 \in M'$, тогда по лемме 27.13 z^0 является точкой Лебега функции f. Рассмотрим предел

$$\lim_{z^{\pm} \to z^0} \left[\Phi(z^+) - \Phi(z^-)\right],$$

где z^+, z^- удовлетворяют условиям предложения 27.12. Согласно (27.20) и (27.18) получаем

$$\lim_{z^{\pm} \to z^0} \left[\Phi(z^+) - \Phi(z^-)\right] = \lim_{z^+ \to z^0} F(z^+) = f(z^0),$$

причем этот предел достигается равномерно в достаточно малой окрестности z^0 в M'. Отсюда вытекает, что $F = f$ на M'. □

Отметим, что если область D имеет связное дополнение, то во всех формулировках этого пункта пространство $Z^\infty_{n,n-1}(\bar D)$ можно заменить на $Z^\infty_{n,n-1}(\mathbb{C}^n)$.

2°. Распространим основной результат п. 1° на подмножества границы Шилова $S = S(D)$ для ограниченных круговых сильно звездных областей D. Будем использовать обозначения и предположения разд. 23, п. 1°. Здесь также μ — мера на S, инвариантная относительно поворотов. Нам потребуется интегральное представление вида (23.1), где $h(z, \bar\zeta)$ — ядро Сеге.

Теорема 27.14 (Знаменская). *Пусть $M \subset S$ — измеримое множество. Функция $f \in L^p_{d\mu}(M)$, $1 < p < \infty$, голоморфно продолжается в D в том смысле, что существует функция $F \in H^p(D)$, у которой радиальные предельные значения почти всюду на M совпадают с f, в том и только в том случае, когда для любой последовательности $\{\varphi_j\} \subset O_\mu(S)$, такой, что*

$$\lim_{j \to \infty} \|\varphi_j\|_{L^q_{d\mu}(S \setminus M)} = 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

имеет место

$$\lim_{j \to \infty} \int_M f \varphi_j \, d\mu = 0. \tag{27.21}$$

Предварительно докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 27.15. *Функция* $f \in L^p_{d\mu}(S)$, $1 \leqslant p < \infty$, *голоморфно продолжается в область* D *в том и только в том случае, когда*

$$\int\limits_S fg\,d\mu = 0 \tag{27.22}$$

для любого полинома $g(z, \bar z) \in O_\mu(S)$.

Заметим, что общий вид указанных полиномов приведен в [24].

По ядру Сеге $h(z, \bar\zeta)$ стандартным образом (см. [167]) строится *ядро Пуассона*

$$\mathcal{P}(\zeta, z) = \frac{|h(z, \bar\zeta)|^2}{h(z, z)}. \tag{27.23}$$

Ядро Пуассона (27.23) является *аппроксимативной единицей*, т. е. обладает свойствами:

а) $\mathcal{P}(\zeta, z) \geqslant 0$,

б) $\int\limits_S \mathcal{P}(\zeta, z)\,d\mu_\zeta = 1$,

в) $\lim\limits_{\substack{z\to z^0\\ z\in D}} \int\limits_{S\setminus U(z^0)} \mathcal{P}(\zeta, z)\,d\mu_\zeta = 0$

для всякой окрестности $U(z^0)$ точки $z^0 \in S$. Отсюда получаем (ср. [34, с. 36] и [24]), что для $f \in L^p_{d\mu}(S)$, $1 \leqslant p < \infty$, и

$$F(z) = \int\limits_S f(\zeta)\,\mathcal{P}(\zeta, z)\,d\mu_\zeta \tag{27.24}$$

имеет место равенство

$$\lim_{r\to 1-0} \|F_r - f\|_p = 0, \tag{27.25}$$

где $F_r(z) = F(rz)$ *и* $\|\cdot\|_p$ — *норма в* $L^p_{d\mu}$.

Доказательство леммы 27.15. Необходимость очевидна и вытекает из существования предельных значений функций класса $H^p(D)$.

Достаточность. Если $\varphi \in A_C(D)$, то для $z \in D$ справедливо интегральное представление Пуассона

$$\varphi(z) = \int\limits_S \varphi(\zeta)\,\mathcal{P}(\zeta, z)\,d\mu_\zeta. \tag{27.26}$$

Рассмотрим оператор $\dfrac{\partial}{\partial \bar z_i}$, $i = 1, \ldots, n$, и пусть T — произвольный дифференциальный оператор конечного порядка с постоянными коэффициентами. Из (27.26) следует, что для всякой $\varphi \in A_C(D)$

$$\int\limits_S \varphi(\zeta)\,T_z\left(\frac{\partial}{\partial \bar z_i}\mathcal{P}(\zeta, z)\right)d\mu_\zeta \equiv 0, \tag{27.27}$$

где индекс z у оператора T означает, что его надо применять по переменным z. Из (27.27) вытекает, что $T_z\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\mathcal{P}(\zeta, z)\right) \in O_\mu(S)$. Отметим, что для рассматриваемого класса областей

$$h(z, \bar{\zeta}) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k} \varphi_j^k(z)\,\overline{\varphi_j^k(\zeta)},$$

где $\{\varphi_j^k\}$ — полная в $H^2(D)$ ортонормальная относительно меры μ на S система однородных полиномов, здесь j — степень полинома, а k — его номер среди однородных полиномов данной степени j. Отсюда и из (27.23) следует, что $T_z\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\mathcal{P}(\zeta, z)\right)\Big|_{z=0}$ — полином от ζ, $\bar{\zeta}$, поэтому

$$T\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}F(z)\right)\Big|_{z=0} = \int_S f(\zeta)\, T_z\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\mathcal{P}(\zeta, z)\right)\Big|_{z=0} d\mu_\zeta = 0,$$

т. е. $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}F(z)$, $i = 1, \ldots, n$, и все ее производные в точке $z = 0$ обращаются в нуль. Функция $F(z)$ действительно аналитическая, так как $\mathcal{P}(\zeta, z)$ является действительно аналитической по z. Следовательно, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} F(z) \equiv 0$, $i = 1, \ldots, n$, что и означает включение $F(z) \in A(D)$. Из (27.25) находим, что $\|F_r\|_p \leqslant C\|f\|_p$, где C — постоянная, не зависящая от r. Таким образом, $F(z) \in H^p(D)$.

Теперь из (27.25) и леммы 23.1 следует, что для почти всех $z \in S$ радиальные предельные значения функции $F(z)$ совпадают с $f(z)$. □

Доказательство теоремы 27.14 можно получить, опираясь на предложение 27.3, но мы приведем другое доказательство. Будем рассматривать $L^q_{d\mu}(M)$ как подпространство в $L^q_{d\mu}(S)$, состоящее из функций, равных нулю в точках $S\setminus M$. Тогда $L^q(S) = L\ (M) \oplus \oplus L^q(S\setminus M)$. Обозначим π — проектор на $L^q(M)$, а π_1 — проектор на $L^q(S\setminus M)$, и пусть P — совокупность всех полиномов из $O_\mu(S)$. Функция $f \in L^p(M)$ естественно задает линейный непрерывный функционал T на $L^q(M)$.

Из леммы 27.15 вытекает, что существование голоморфного продолжения эквивалентно существованию такой функции $f_1 \in \in L^p(S\setminus M)$, что определенный ею функционал $T_1 \in (L^q(S\setminus M))^*$ удовлетворяет соотношению

$$T_1(\pi_1(\varphi)) + T(\pi(\varphi)) = 0 \tag{27.28}$$

для любого $\varphi \in P$.

Если продолжение существует, то из (27.28) и непрерывности T_1 следует (27.21). Обратно, пусть выполнено условие (27.21).

Тогда $T(\pi(\varphi))=0$ при $\varphi\in P$ и $\pi_1(\varphi)=0$, что означает следующее: если $\pi_1(\varphi')=\pi_1(\varphi'')$ и $\varphi', \varphi''\in P$, то $T(\pi(\varphi'))=T(\pi(\varphi''))+ + T(\pi(\varphi'-\varphi''))=T(\pi(\varphi''))$, т. е. на $\pi_1(P)$ функционал T_1 однозначно определяется из условия (27.28). Непрерывность так определенного на $\pi_1(P)$ функционала в нуле (а, следовательно, и на $\pi_1(P)$) получаем из (27.21). Теорема Хана — Банаха гарантирует существование продолжения T_1 на все $L^q(S\setminus M)$. Таким образом, функция f голоморфно продолжается в область D. □

Отметим в заключение, что если указанное в теореме 27.14 голоморфное продолжение существует, то оно единственно в том и только том случае, когда сужения функций из $O_\mu(S)$ на $S\setminus M$ плотны в $L^q(S\setminus M)$.

3°. Приведем более обозримые критерии голоморфной продолжимости функций, заданных на части границы области, для случая $n=1$. Вернемся к единичному кругу $U=U(0, 1)$ и функциям

$$f_m(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_M f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

из теоремы Патила 1.3.

Теорема 27.16 (Патил). *Пусть $M\subset\partial U$ и $0<m_1(M)< < m_1(\partial U)$. Если $1<p<\infty$, то $f\in L^p(M)$ есть сужение на M некоторой функции $f\in H^p$ тогда и только тогда, когда $\sup\limits_m\|f_m\|_p<\infty$. Функция $f\in L^\infty(M)$ есть сужение на M некоторой функции $f\in H^\infty$ тогда и только тогда, когда $\sup\limits_{p>1}\varlimsup\limits_{m\to\infty}\|f_m\|_p<\infty$.*

Доказательство. Необходимость очевидно вытекает из теоремы 1.3. Докажем достаточность в случае $1<p<\infty$. Из $*$-слабой замкнутости замкнутых шаров в H^p следует существование подпоследовательности $m_j\to\infty$ такой, что f_{m_j} $*$-слабо сходится к некоторой функции $f^0\in H^p$. Пусть $F\in L^p(\partial U)$ определена равенством $F=f\chi_M$. Обозначим $\tilde f=PF$ (напоминаем, что P: $L^p\to \to H^p$ — естественная проекция, см. разд. 1), тогда согласно (1.18)

$$f_m=e^{2m}(I+e^{2m}S)^{-1}\tilde f.$$

Для каждой $g\in H^q(0)$ имеем

$$\left(e^{2m_j}\left[I+e^{2m_j}S\right]^{-1}S\tilde f, g\right)=\left(f_{m_j}, \quad Sg\right)\xrightarrow{m_j\to\infty}(f^0, Sg)=(Sf^0, g).$$

По лемме 1.10 первое из этих скалярных произведений сходится к $(\tilde f, g)$. Следовательно, $\tilde f=Sf^0$. Это значит, что $P((f-f^0)\chi_M)=0$, поэтому в силу (1.25) $(f-f^0)\chi_M$ есть граничные значения на окружности ∂U некоторой функции из H^p_-. По теореме единственности для функций класса Харди (см. [134]) почти всюду на M функции f и f^0 совпадают.

Рассмотрим случай $p=\infty$. Тогда для всякого p, $1<p<\infty$, выполнены условия уже доказанного случая, следовательно, функция

f почти всюду на M совпадает с некоторой функцией $f^0 \in \bigcap\limits_{1<p<\infty} H^p$ и из предыдущего доказательства вытекает, что

$$\|f^0\|_p = \left(\int\limits_{\partial U} |f^0|^p \, |d\zeta|\right)^{1/p} < C \tag{27.29}$$

для всех p, причем постоянная C не зависит от p. Устремив в (27.29) $p \to \infty$, получим, что $|f^0| \leqslant C$ почти для всех точек окружности ∂U. Отсюда по теореме Смирнова (см. [134, с. 260]) получаем, что $f^0 \in H^\infty$ и $\|f^0\|_\infty \leqslant C$. □

Заметим, что это утверждение так же, как в разд. 1, распространяется на случай более общих областей.

Теорема 27.17. *Если D — односвязная ограниченная область в $\mathbb{C}^1$ с регулярной границей, $M \subset \partial D$, $0 < m_1(M) < m_1(\partial D)$, то сохраняется утверждение теоремы* 27.16.

Отметим, что требование $m_1(M) < m_1(\partial D)$ в теоремах 27.16 и 27.17 существенно. Например, пусть $D = U$ и $M = \partial U$, тогда по формуле (1.16)

$$\varphi(z) = \exp \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} \equiv e$$

и каждая из функций f_m равна просто интегралу типа Коши от f:

$$f_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_M f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} = F(z).$$

Очевидно, $\|f_m\|_p < \infty$, но F не обязана совпадать (почти всюду на ∂U) с f.

4°. Еще более простое решение рассматриваемой задачи принадлежит В. А. Фоку и Ф. М. Куни [156]. Оно опирается на очень простые формулы (1.11) и (1.12) из разд. 1 пример 6. Пусть (как и в упомянутом примере) область D_0 ограничена контуром, состоящим из отрезка действительной оси и гладкой кривой M, лежащей в верхней полуплоскости П. Идея Фока — Куни состоит в применении формул «типа» (1.11) и (1.12).

Обозначим

$$J_\sigma(f) = \int\limits_M f(\zeta) \exp(-i\sigma\zeta) \, d\zeta,$$

пусть $\mathring{M}$ — внутренняя часть кривой M (т. е. эта кривая без концов).

Если освободиться от лишних ограничений, которые были в работе [156] и не позволяли получить необходимое и достаточное условие существования аналитического продолжения, но сохранить основную идею этой работы, то получится следующий результат.

Теорема 27.18 (Фок — Куни). *Пусть* $f \in L(M) \cap C(\overset{\circ}{M})$. *Для того чтобы существовала функция* $F \in A(D_0) \cap C(D_0 \cup \overset{\circ}{M})$ *такая, что ее сужение на* $\overset{\circ}{M}$ *совпадает с* f, *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\lim_{\sigma\to\infty} \frac{\ln^+ |J_\sigma(f)|}{\sigma} = 0. \tag{27.30}$$

Доказательство. Вначале отметим, что условие (27.30) эквивалентно следующему: для всякого $\tau > 0$ существует $c = c(\tau)$ такая, что для всех $\sigma > 0$

$$|J_\sigma(f)| \leqslant c e^{\tau\sigma}. \tag{27.31}$$

Иначе говоря, условие (27.30) означает, что $|J_\sigma(f)|$ растет медленнее любой экспоненты $\exp(\tau\sigma)$, где $\tau > 0$.

Необходимость. Пусть функция F, указанная в формулировке теоремы, существует. Обозначим $M_\tau = M \setminus \{z\colon \operatorname{Im} z < \tau\}$, где $\tau > 0$, $D_{0,\tau} = D_0 \setminus \{z\colon \operatorname{Im} z \leqslant \tau\}$. Граница области $D_{0,\tau}$ состоит из гладкой кривой M_τ и отрезка P_τ, параллельного действительной оси. Пусть $M_{1,\tau}$ и $M_{2,\tau}$ — части кривой M, не вошедшие в M_τ (так сказать, «отрезанные» ее концы). Тогда по интегральной теореме Коши

$$\int_M f(\zeta)\exp(-i\sigma\zeta)\,d\zeta = \int_{M_{1,\tau}} + \int_{M_\tau} + \int_{M_{2,\tau}} = \int_{M_{1,\tau}} - \int_{P_\tau} + \int_{M_{2,\tau}}. \tag{27.32}$$

Оценим интегралы, стоящие в правой части равенства (27.32):

$$\left| \int_{M_{1,\tau}} f(\zeta)\exp(-i\sigma\zeta)\,d\zeta \right| \leqslant \int_{M_{1,\tau}} |f| \exp(\sigma \operatorname{Im}\zeta)\,|d\zeta| \leqslant e^{\tau\sigma} \int_{M_{1,\tau}} |f|\,|d\zeta|,$$

аналогично оценивается интеграл по множеству $M_{2,\tau}$. Далее

$$\int_{P_\tau} f(\zeta)\exp(-i\sigma\zeta)\,d\zeta = e^{\tau\sigma} \int_{a_\tau}^{b_\tau} f(x + i\tau)\exp(-i\sigma x)\,dx,$$

где $a_\tau + i\tau$, $b_\tau + i\tau$ — концы отрезка P_τ. Последний интеграл стремится к нулю при $\sigma \to \infty$ по теореме Римана — Лебега, следовательно, он ограничен по абсолютной величине. Итак, верно (27.31).

Достаточность. Пусть для всякого $\tau > 0$ верно неравенство (27.31). Рассмотрим функцию $F(z)$, заданную двумя эквивалентными формулами вида (1.11) и (1.12)

$$F(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_M f(\zeta) \frac{\exp[-im(\zeta - z)]}{\zeta - z}\,d\zeta, \tag{27.33}$$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_M \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \exp(i\sigma z) \left(\int_M f(\zeta)\exp(-i\sigma\zeta)\,d\zeta \right) d\sigma. \tag{27.34}$$

Первое слагаемое в (27.34) задает две функции, голоморфные соответственно в областях D_0 и $\Pi\setminus\bar{D}_0$ такие, что разность их предельных значений по нормалям (или по углам определенного ограниченного раствора, а соответствующие точки $z^+\in D_0$ и $z^-\in\Pi\setminus\bar{D}_0$ при стремлении к точке $\zeta\in\mathring{M}$ находятся на равных расстояниях от ζ) на $\mathring{M}$ равна $f(\zeta)$ (см. [124, с. 67—69]), причем если одна из этих функций непрерывна в соответствующей области вплоть до $\mathring{M}$, то другая тоже обладает данным свойством. Второе слагаемое в (27.34) в силу (27.31) голоморфно в полуплоскости П. Итак, правая часть формулы (27.34) задает две функции $F_1(z)\in A(D_0)$ и $F_2(z)\in A(\Pi\setminus\bar{D}_0)$ такие, что для всякой точки $\zeta\in\mathring{M}$ верно (в указанном смысле) равенство

$$F_1(\zeta)-F_2(\zeta)=f(\zeta), \tag{27.35}$$

причем если одна из этих функций непрерывна в соответствующей области вплоть до $\mathring{M}$, то другая тоже обладает этим свойством.

Далее заметим, что из формулы (27.33) вытекает, что $F_2(z)=0$ при $\operatorname{Im} z>\max\limits_{M}\operatorname{Im}\zeta$, поэтому $F_2(z)\equiv 0$. Теперь из (27.35) получается утверждение теоремы. □

Следствие 27.19. *Если заданная на M функция имеет вид*

$$\varphi(\zeta)=\frac{A}{\zeta-\zeta_0}+f(\zeta),\quad \zeta_0\in\mathring{M},$$

где A — постоянная, а функция $f\in L(M)\cap(C\mathring{M})$, то для существования функции

$$\Phi(z)=\frac{A}{z-\zeta_0}+F(z),$$

где $F\in A(D_0)\cap C(D_0\cup\mathring{M})$ и $\Phi|_{\mathring{M}}=\varphi$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\sigma\to\infty}\frac{1}{\sigma}\ln^+\left|\int\limits_M\varphi(\zeta)\exp(-i\sigma\zeta)\,d\zeta-i\pi A(-i\sigma\zeta_0)\right|=0. \tag{27.36}$$

В (27.36) интеграл следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Обобщим теорему 27.18 следующим образом. Пусть M — дуга гладкой границы ∂D односвязной ограниченной области D. Соединим концы M гладкой кривой l, лежащей вне $\bar{D}$, и обозначим D_1 область, ограниченную контуром $l\cup(\partial D\setminus M)$, причем кривая l выбрана так, чтобы $D_1\supset D$. Пусть l_1 — дуга l, лежащая в l вместе со своей окрестностью (относительно l). Рассмотрим голоморфную функцию $\psi(z)\in A(D_1)$, у которой $\operatorname{Re}\psi(z)$ — гармоническая мера дуги l_1 относительно точки z в D_1. Предположим, что кривая $(\partial D\setminus M)\cup l$ настолько гладкая, что функция ψ входит в класс $C^1(\bar{D})$.

Заметим, что функция ψ однолистна на множестве D_1. Это легко проверить, если рассмотреть полуплоскость П и гармоническую меру отрезка действительной оси (см. разд. 5, пример 1). Далее нужно сделать конформное отображение D_1 на П и воспользоваться инвариантностью гармонической меры при таком отображении (см. [126]). Теперь из формулы (11.17) получаем для области D обобщенную формулу Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)\,\psi'(\zeta)\,d\zeta}{\psi(\zeta)-\psi(z)}. \tag{27.37}$$

Действительно, формулу (27.37) можно записать в виде

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)\,\varphi(\zeta,z)\,d\zeta}{\zeta-z},$$

где функция $\varphi(\zeta,z)=\dfrac{\psi'(\zeta)(\zeta-z)}{\psi(\zeta)-\psi(z)}$ удовлетворяет условиям, положенным для справедливости формулы (11.17). Далее на основе формулы (27.37) строятся два варианта формулы Карлемана, аналогичные формулам (1.11) и (1.12),

$$f(z)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{M}\frac{f(\zeta)\,\psi'(\zeta)\exp\left[m\,(\psi(\zeta)-\psi(z))\right]}{\psi(\zeta)-\psi(z)}\,d\zeta, \tag{27.38}$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{M}\frac{f(\zeta)\,\psi'(\zeta)}{\psi(\zeta)-\psi(z)}\,d\zeta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\exp\left[-\sigma\psi(z)\right]\left(\int\limits_{M}f(\zeta)\,\psi'(\zeta)\exp\left[\sigma\psi(\zeta)\right]d\zeta\right)d\sigma. \tag{27.39}$$

Обозначим

$$\mathscr{T}_\sigma(f)=\int\limits_{M}f(\zeta)\,\psi'(\zeta)\exp\left[\sigma\psi(\zeta)\right]d\zeta.$$

Теперь, используя формулы Карлемана (27.38) и (27.39), аналогично доказательству теоремы 27.18 получим доказательство следующего утверждения.

Теорема 27.20 (обобщенная теорема Фока — Куни). *Пусть* $f\in L(M)\cap C(\overset{\circ}{M})$. *Для того чтобы существовала функция* $F\in A(D)\cap C(D\cup\overset{\circ}{M})$ *такая, что* $F|_{\overset{\circ}{M}}=f$, *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\lim_{\sigma\to\infty}\frac{\ln^+|\mathscr{T}_\sigma(f)|}{\sigma}=0. \tag{27.40}$$

Отметим, что утверждения, аналогичные теоремам 27.18 и 27.20, можно получить и для случая $f\in L^p(M)$, $p>1$ (без требования

$f \in C(\mathring{M})$). Как и в п. 1°—3°, соответствующая функция F (аналитическое продолжение f) будет входить в класс Харди $H^p(D)$.

5°. Можно усилить результаты, приведенные в п. 4°, избавившись от каких-либо условий гладкости $\partial D \setminus M$ и от требования, чтобы $f \in L(M)$. Пусть D — односвязная область с жордановой границей ∂D, в которую входит гладкая открытая дуга M. Соединим концы M кривой l, лежащей вне $\bar{D}$, и обозначим D_1 — область, ограниченную контуром $l \cup (\partial D \setminus M)$, который тоже предполагаем жордановым. Пусть $\omega = \omega(z, l_1, D_1)$ — гармоническая мера дуги l_1 относительно точки z в D_1 (здесь l_1 — связная часть l, лежащая в l вместе со своей окрестностью). Рассмотрим голоморфную функцию $\psi(z) \in A(D_1)$, у которой $\operatorname{Re} \psi = \omega$. Как известно (см. [126, с. 40]), ψ конформно отображает D_1 на полосу $Q = \{w\colon\ 0 < \operatorname{Re} w < 1\}$, причем l_1 переходит в прямую $\{w\colon \operatorname{Re} w = 1\}$, а $\partial D_1 \setminus \bar{l}_1$ — в прямую $\{w\colon \operatorname{Re} w = 0\}$. Обозначим $M_\varepsilon = M \cap \{z\colon\ z \in D_1,\ \omega(z) < \varepsilon\}$, где $0 < \varepsilon < 1$. Рассмотрим следующее условие: для всякого ε, $0 < \varepsilon < 1$, существует такая постоянная $C = C(\varepsilon)$, что для $\sigma > 0$

$$\left| \int_{M_\varepsilon} f(\zeta)\, \psi'(\zeta) \exp[\sigma \psi(\zeta)]\, d\zeta \right| \leqslant C e^{\varepsilon\sigma}, \tag{27.41}$$

где $f \in C(M)$ — некоторая фиксированная функция. Рассмотрение условия (33.1) не требует (в отличие от (27.40)) ни гладкости ∂D_1, ни интегрируемости f на всей дуге M. Теми же методами, которые применялись в п. 4°, с использованием указанного конформного отображения D_1 на полосу Q, получаем результат.

Теорема 27.21. *Пусть $f \in C(M)$. Для того чтобы существовала функция $F \in A(D) \cap C(D \cup M)$ такая, что $F|_M = f$, необходимо и достаточно выполнения условия* (27.41).

Отметим, что эта теорема допускает обобщение. В действительности использовались лишь жордановость ∂D_1 (но не ∂D), поэтому дуга M может быть и типа кривой $y = \sin(1/x)$, лишь бы каждая M_ε состояла из гладких дуг общей конечной длины.

Применим полученный результат к следующей *задаче*: дана односвязная область D с жордановой границей и гладкая открытая дуга $M \subset D$, которая делит D на две области $D = D_1 \cup D_2$; нужно описать функции $f \in C(M)$, которые аналитически продолжаются до функций, голоморфных в D. Таким образом, речь идет об изучении возможности аналитического продолжения уже с внутренней дуги (а не с граничной, как в п. 1°—4°). На $\partial D \cap \partial D_1$ выберем дугу l_1, лежащую в $\partial D \cap \partial D_1$ вместе со своей окрестностью, а на $\partial D \cap \partial D_2$ — аналогичную дугу l_2. Рассмотрим функции $\psi_i(z) \in A(D)$, $\operatorname{Re} \psi_i(z) = \omega(z, l_i, D_i)$, $i = 1, 2$. Условие (27.41), где $\psi = \psi_i$, необходимо и достаточно для возможности аналитического продолжения функции $f \in C(M)$ в области D_i, $i = 1, 2$. Если же выполнены оба таких условия, то f продолжается аналитически и в D_1, и в D_2, и мы получаем функцию $F \in A(D_1) \cap A(D_2) \cap C(D)$ такую, что

$F|_M = f$. Очевидно, что F голоморфна и во всей области D. Таким образом, приходим к следующему утверждению:

Следствие 27.22. *Пусть* $f \in C(M)$. *Для того чтобы существовала функция* $F \in A(D)$, *такая, что* $F|_M = f$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия вида* (27.41), *где* $\psi = \psi_i$, $i = 1, 2$.

Заметим, что в пределе (если l_1 стремится к $\partial D \cap \partial D_1$, а l_2 — к $\partial D \cap \partial D_2$) получается равенство $\psi_1 + \psi_2 \equiv 1$, поэтому указанные два условия можно записать в виде одного.

В заключение укажем, что методы п. 4° не только позволяют получить необходимые и достаточные условия существования аналитического продолжения непрерывной на гладкой дуге функции, но и осуществить такое аналитическое продолжение с помощью формул (27.38) и (27.39), в которых в качестве множества интегрирования следует взять M_ε при всяком ε, $0 < \varepsilon < 1$.

6°. Теми же методами, которыми была найдена формула (5.16) из примера 2 (см. разд. 5), можно дать критерий голоморфной продолжимости как функции $H^2(\Pi_-)$ некоторой функции $f \in L^2([-1, 1])$.

Теорема 27.23 (Крейн — Нудельман). *Для того чтобы функция* $f \in L^2[(-1, 1)]$ *совпадала почти всюду на* $(-1, 1)$ *с некоторой функцией* $F \in H^2(\Pi_-)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\exp(\pi\lambda)\Phi_f(\lambda) \in L^2[(-\infty, \infty)]$, *где*

$$\Phi_f(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}\frac{x}{2}} e^{-i\lambda x} dx. \tag{27.42}$$

Приведем еще решение следующей задачи. Через $a(\beta)$ обозначим класс сужений на множество $\{t\colon |t| > \beta\}$ граничных значений функций, ограниченных и голоморфных в полуплоскости Π. Здесь $\beta > 0$. В каком случае функция из $L^\infty[\{t\colon |t| > \beta\}]$ аналитически продолжается до функции из $a(\beta)$? Ответ на этот вопрос содержится в утверждении, которое мы приводим без доказательства (см. [239]).

Теорема 27.24 (Штейнер). *Пусть* $f \in L^\infty[\{t\colon |t| > \beta\}]$, $\beta > 0$. *Рассмотрим функции*

$$g_1(z) = \int_{\beta}^{\infty} f(t) e^{izt} dt, \quad g_2(z) = -\int_{-\infty}^{-\beta} f(t) e^{izt} dt$$

голоморфные соответственно в Π *и* Π_-. *Для того чтобы* $f \in a(\beta)$, *необходимо и достаточно, чтобы*:

1) *существовали пределы* $g_1(x) = \lim g_1(x + iy)$, $g_2(x) = \lim g_2(x - iy)$ *при* $y \to \infty$ *равномерно в каждом интервале луча* $\{x\colon x > 0\}$ *и функция* $g(x) = g_1(x) - g_2(x) \in L^2[(0, \infty)]$;

2) *интегральное уравнение*

$$g(x) = \int_{-\beta}^{\beta} f(t)\, e^{ixt} dt, \quad x > 0, \tag{27.43}$$

имело ограниченное в $(-\beta, \beta)$ *решение.*

Решение интегрального уравнения (27.42) и восстанавливает $f \in a(\beta)$ в интервале $(-\beta, \beta)$.

7°. Наконец, упомянем самый первый результат, полученный в направлении решения задачи, рассматриваемой в настоящем разделе (см. [134, с. 138]).

Теорема 27.25 (Тумаркин). *Необходимым и достаточным условием для того чтобы* $f(e^{i\theta})$ — *измеримая функция, заданная на множестве* $M \subset \partial U(0, 1)$, *почти всюду на* M *совпадала с граничными значениями* $F(e^{i\theta})$ *некоторой функции класса* H^p, *является существование последовательности многочленов* $\{p_m(z)\}$ *таких, что:*

1) $\{p_m(e^{i\theta})\}$ *почти всюду на* M *сходится к* $f(e^{i\theta})$;

2) $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \int_0^{2\pi} |p_m(e^{i\theta})|^p d\theta < \infty$.

Доказательство. Достаточность. Из условия 2) и теоремы Хинчина — Островского (см. [134, с. 118]) вытекает, что последовательность $\{p_m(z)\}$ сходится равномерно на компактах из U к некоторой функции $F \in H^p$, причем на множестве M последовательность $\{p_m(e^{i\theta})\}$ почти всюду сходится к $F(e^{i\theta})$ — угловым граничным значениям функции $F(z)$. Необходимость легко получить, аппроксимируя функцию $F(z)$ функциями $F(rz)$, $r \to 1-0$, а затем приближая $F(rz)$ в замкнутом круге $\overline{U}$ многочленами Тейлора. □

Эту теорему можно, очевидно, распространить на более широкий класс областей, а также рассмотреть ее многомерные аналоги, например, для звездных (сильно звездных) областей $D \subset \mathbb{C}^n$, $D \in H$.

28. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ С «ОСТРИЯ КЛИНА»

1°. Пусть область $D = D_1 \times \ldots \times D_n$ такова, что все D_j ограничены простыми кривыми ∂D_j, $j = 1, \ldots, n$. Рассмотрим открытые подмножества E_j границы ∂D_j и обозначим $F_j = D_j \cup E_j$, $j = 1, \ldots, n$; $E = E_1 \times \ldots \times E_n$; $F = F_1 \times \ldots \times F_n$; $V_j = E_1 \times \ldots \times E_{j-1} \times F_j \times \times E_{j+1} \times \ldots \times E_n$; $V_j^0 = E_1 \times \ldots \times E_{j-1} \times D_j \times E_{j+1} \times \ldots \times E_n = V_j \setminus E$; $V = \bigcup\limits_{j=1}^{n} V_j$; $V^0 = \bigcup\limits_{j=1}^{n} V_j^0 = V \setminus E$. Гармоническую меру множества $\partial D_j \setminus E_j$ относительно области D_j обозначим h_j. Гармоническая в области D_j функция h_j будет непрерывной на F_j, если положить $h_j|_{E_j} = 0$. Пусть далее $h(z) = h_1(z_1) + \ldots + h_n(z_n)$, $z \in F$, $W = \{z\colon z \in F, h(z) < 1\}$, $W^0 = W \setminus E$, $H = \operatorname{int} W$. Отметим, что E — «острие клина» W — является пересечением границ всех V_j^0, $j =$

$=1, \ldots, n$. В следующем утверждении $|f|_E$ — sup-норма функции f на множестве E.

Теорема 28.1 (Гончар). *Пусть $f \in C(V) \cap CR(V^0)$. Тогда существует $\tilde{f} \in C(W) \cap CR(W^0)$ такая, что $\tilde{f}|_V = f$. Если $|f|_V < +\infty$, то для $z \in W$ верна оценка*

$$|\tilde{f}(z)| \leqslant |f|_E^{1-h(z)} |f|_V^{h(z)}. \tag{28.1}$$

Первое утверждение этой теоремы означает, что из существования CR-продолжения функции $f \in C(E)$ с «острия» E в V вытекает существование и CR-продолжения в «клин» W. Здесь речь идет об аналитическом продолжении в «клин» W, так как $\tilde{f} \in C(W) \cap CR(W^0)$ в том и только в том случае, если $f \in C(W) \cap A(H)$. Второе утверждение теоремы (неравенство (28.1)) является вариантом теоремы «о двух константах» для данного случая.

Если каждое E_j спрямляемо, то можно рассмотреть функции

$$f_m(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_E \frac{\exp[-m(g(t) - g(z))] f(t)\, dt}{(t_1 - z_1) \cdots (t_n - z_n)},$$

где $g(z) = g_1(z_1) + \ldots + g_n(z_n)$, $g_j \in A(D_j)$, $\operatorname{Re} g_j = h_j$, $j = 1, \ldots, n$. Для $f \in A_C(D)$ справедлива формула Карлемана, если $z \in D$,

$$f(z) = \lim_{m \to \infty} f_m(z) \tag{28.2}$$

(ср. с замечанием по поводу формулы (20.9), у нас $h_j = 1 - \omega_j$, $j = 1, \ldots, n$, и $\left\{z\colon \sum_{j=1}^{n} \omega_j(z_j) > n - 1\right\} = \{z\colon h(z) < 1\}\Big)$.

Справедливы следующие вспомогательные утверждения, которые приведем без доказательства.

Лемма 28.2. *Если $f \in C(V) \cap CR(V^0)$ и $|f|_E < +\infty$, то формула*

$$\tilde{f}(z) = \lim_{m \to \infty} f_m(z), \quad z \in H, \tag{28.3}$$

определяет голоморфную в области H функцию $\tilde{f}$.

Отметим существенное различие формул (28.2) и (28.3): первая восстанавливает в области H функцию $f \in A_C(D)$ по ее значениям на E, вторая осуществляет голоморфное продолжение функции $f(t)$, $t \in E$, в область H, если f допускает CR-продолжение в $V^0 \subset \partial H$ — часть границы H с минимальной комплексной структурой.

Лемма 28.3. *Пусть $f \in CR(W^0)$, $|f|_{W^0} = M < +\infty$, для некоторого фиксированного j и всякого $t \in E$ $\varlimsup\limits_{z \to t \in V_j^0} |f(z)| \leqslant m$, тогда* *для* $z \in W^0$ *имеет место неравенство* $|f(z)| \leqslant m^{1-h(z)} M^{h(z)}$.

Наметим доказательство теоремы 28.1. С помощью формулы (28.3) определяется голоморфная в области H функция $\tilde{f}$. Далее используем аналогичные формулы Карлемана для областей меньших размерностей и полагаем $\tilde{f} = f$ на V. С помощью тех же формул можно доказать непрерывность $\tilde{f}$ на W^0 и равенство $|\tilde{f}|_{W^0} = |f|_{V^0}$. Наконец, непрерывность $\tilde{f}(z)$, $z \in W$, в точках E устанавливаем с помощью леммы 28.3. □

2°. Отметим следствия результата п. 1° и разд. 27, п. 4°.

Пусть область $D = D_{01} \times \ldots D_{0n} \subset \mathbf{C}^n$ такова, что все области D_{0j} имеют вид области D_0, указанный в разд. 27, п. 4° (кривая M_j для каждой области D_{0j} своя, $j = 1, \ldots, n$). Обозначим $\mathring{M} = \mathring{M}_1 \times \ldots \times \mathring{M}_n$ и рассмотрим для функции $f \in C(\mathring{M})$, интегрируемой по каждому переменному на $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ при фиксированных остальных переменных,

$$J_{\sigma,j}(f) = \int_{M_j} f \exp(-i\sigma\zeta_j)\, d\zeta_j.$$

Следствие 28.4. *Если*

$$\lim_{\sigma\to\infty} \frac{1}{\sigma} \ln^+ |J_{\sigma,j}(f)| = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

то существует функция $\tilde{f} \in C(W) \cap CR(W^0)$ *такая, что* $\tilde{f}|_V = f$, *где* W *и* V *определены так же, как в п.* 1°, *с заменой множества* E *на* $\mathring{M}$.

Наконец, пусть область $D = D_1 \times \ldots \times D_n$ такова, что все D_j имеют вид, рассмотренный в разд. 27, п. 4°. Снова для $f \in C(\mathring{M})$ вводим величины (предполагая, что указанные далее интегралы существуют ввиду интегрируемости f на M по каждому переменному)

$$\mathcal{J}_{\sigma,j}(f) = \int_{M_j} f(\zeta)\, \psi_j'(\zeta_j) \exp[\sigma\psi_j(\zeta)]\, d\zeta_j.$$

Следствие 28.5. *Если*

$$\lim_{\sigma\to\infty} \frac{1}{\sigma} \ln^+ |\mathcal{J}_{\sigma,j}(f)| = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

то верно утверждение следствия 28.4.

В духе разд. 27, п. 5° нетрудно усилить и эти следствия.

ГЛАВА 8

ПРИЛОЖЕНИЯ В ФИЗИКЕ И ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

29. ПРИМЕРЫ ПРИЛОЖЕНИЙ ФОРМУЛ КАРЛЕМАНА В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

1°. Рассмотрим пример введения «гасящей» функции в дисперсионные соотношения вперед (Фок — Куни). Сделаем переход от переменной ω — энергия рассеиваемой частицы — к переменной z по формуле

$$\omega = 2mz/(1+z^2), \tag{29.1}$$

где m — масса покоя рассеиваемой частицы. Функция (29.1) производит конформное отображение единичного полукруга $U \cap \Pi$ на верхнюю полуплоскость Π так, что отрезок $[-1, 1]$ переходит в отрезок $[-m, m]$, а полуокружность — в два луча $[-\infty, -m]$ и $[m, +\infty]$. При этом задача аналитического продолжения в верхнюю полуплоскость функции $F(\omega)$, заданной в «физической» области энергии $[-\infty, -m]$ и $[m, +\infty]$, равносильна задаче аналитического продолжения в полукруг функции

$$f(z) = F\left(\frac{2mz}{1+z^2}\right),$$

заданной на соответствующей полуокружности. Тогда, применяя формулу (1.11), получаем значение амплитуды рассеяния (функции F) в верхней полуплоскости Π через ее значения в «физической» области энергии

$$F\left(\frac{2mz}{1+z^2}\right) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{F(m\sec\varphi)}{1 - z\exp(-i\varphi)} \exp\left[ij\left(z - e^{i\varphi}\right)\right] d\varphi.$$

Далее из (27.30) находим условие аналитической продолжимости в верхнюю полуплоскость энергии амплитуды рассеяния, заданной в «физической» области энергии

$$\lim_{\sigma\to\infty} \frac{1}{\sigma} \ln^+ \left| \int_0^\pi F(m\sec\varphi)\, e^{i\varphi} \exp\left(-i\sigma e^{i\varphi}\right) d\varphi \right| = 0. \tag{29.2}$$

Если же существует такое аналитическое продолжение, которое непрерывно вплоть до границы, то необходимо выполнение более сильного условия, чем (29.2)

$$\lim_{\sigma\to\infty} \left| \int_0^\pi F(m\sec\varphi)\, e^{i\varphi} \exp\left(-i\sigma e^{i\varphi}\right) d\varphi \right| = 0. \tag{29.3}$$

2°. Приведем принадлежащий Фоку и Куни [156] пример рассеяния вперед протонов на протонах, как можно с помощью равенства (27.36) выразить константу взаимодействия π-мезонов с нуклонами f^2 через значения усредненной по поляризации амплитуды рассеяния вперед протонов на протонах $\alpha_{PP}(\omega)$ в «физической» области энергии или в некоторой ее части $[m, \omega_0]$ (например, из фазового анализа экспериментальных данных при упругом рассеянии $\alpha_{PP}(\omega)$ известна в $[m, 1, 32\ m]$). $\alpha_{PP}(\omega)$ имеет в точке $\omega = m_\pi = m - \mu^2/2m$ (где μ — масса покоя π-мезона) простой полюс с вычетом $f^2/16\pi$ и $\operatorname{Im} \alpha_{PP}(\omega) = 0$ при $m_{2\pi} < \omega < m_\pi$ (где $m_{2\pi} = m - 2\mu^2/m$).

Пусть функция $z(\omega)$ — преобразование Кристоффеля — конформно отображает полуплоскость Π на прямоугольник с основанием на действительной оси так, что точки $m_{2\pi}$ и m переходят в лежащие на мнимой оси точки B и C — нижнюю правую и верхнюю правую вершины этого прямоугольника, а отрезок $[m, \omega_0]$ переходит в верхнюю и левую его стороны. Нижнюю левую вершину прямоугольника обозначим A, а верхнюю левую — D. Рассмотрим обратную к $z(\omega)$ функцию $\omega(z)$. Функция $\alpha_{PP}(\omega(z))$ голоморфна внутри прямоугольника $ABCD$ и имеет на его стороне BC простой полюс в точке $\zeta_\pi = z(m_\pi)$ с вычетом $iz'(m_\pi) f^2/16\pi$. Тогда из (27.36) получаем

$$\lim_{\sigma\to\infty} \frac{1}{\sigma} \ln^+ \left| \int\limits_{BCDA} \alpha_{PP}(\omega(\zeta))\, e^{-i\sigma\zeta} d\zeta + \frac{f^2}{16} |z'(m_\pi)|\, e^{-i\sigma\zeta_\pi} \right| = 0. \quad (29.4)$$

Интеграл в (29.4) (и ниже) следует понимать в смысле главного значения по Коши. Заметим, что (27.36) — необходимое и достаточное условие соответствующего аналитического продолжения — было найдено в разд. § 27 при предположении, что часть границы области, лежащая в Π, гладкая. Однако эта гладкость использовалась лишь при доказательстве достаточности. Здесь же мы используем необходимость, поэтому (29.4) верно и для кусочно-гладкой ломаной $BCDA$. Так же, как от (29.2), мы перешли к (29.3), можно, считая, что соответствующее аналитическое продолжение непрерывно вплоть до границы области, заменить необходимое условие (29.4) на более сильное:

$$\lim_{\sigma\to\infty} \left| \int\limits_{BCDA} \alpha_{PP}(\omega(\zeta))\, e^{-i\sigma\zeta} d\zeta + \frac{f^2}{16} |z'(m_\pi)|\, e^{-i\sigma\zeta_\pi} \right| = 0. \quad (29.5)$$

Далее, учитывая, что $\operatorname{Im} f^2 = 0$ и

$$\lim_{\sigma\to\infty} \exp(-i\sigma\zeta_\pi) = +\infty,$$

$$\operatorname{Re} \int\limits_{BC} \alpha_{PP}(\omega(\zeta)) \exp[i\sigma(\zeta - \zeta_\pi)]\, d\zeta = 0,$$

получаем из (29.5) $f^2 = \lim\limits_{\sigma\to\infty} f_\sigma^2$, где

$$f_\sigma^2 = -16\,|z'(m_\pi)|^{-1}\,\mathrm{Re}\int\limits_{CDA} \alpha_{PP}(\omega(\zeta))\exp[i\sigma(\zeta_\pi-\zeta)]\,d\zeta.$$

3°. В работе [125] рассматривалась задача экстраполяции амплитуды рассеяния адронов, основанная на ее голоморфности, и отмечалось, что экспериментальные данные задают $f(x_j)$ в ряде дискретных точек $x_j \in [-1,\ 1]$ (отрезок $[-1,\ 1]$ в этом случае является «физической» областью). Функция $f(z)$ голоморфна в плоскости с разрезами $(-\infty,\ a)$ и $(a,\ \infty)$ вдоль действительной оси, $a>1$. Нужно аналитически продолжить f в точку b, где $1<b<a$. В предшествующих работах (см. библиографию в [125]) для решения такой задачи строились формулы Карлемана, но эти формулы дают комплексное значение $f(b)$ даже в тех случаях, когда оно должно быть действительно (в частности, действительны все $f(x_j)$). В этом случае вся мнимая часть $f(b)$ является дополнительной ошибкой, возникающей при экстраполяции.

Чтобы избавиться от этого недостатка, в [125] построена формула экстраполяции Карлемана для гармонической функции $\mathrm{Re}\,f$. Однако эта формула достаточно сложна. Учитывая, что в рассматриваемой задаче ставится не «граничная» проблема аналитического продолжения (т. е. как в формулах Карлемана, где речь идет об аналитическом продолжении с части границы области, в которой голоморфна соответствующая функция), а «внутренняя» (т. е. аналитическое продолжение с множества, лежащего внутри области голоморфности функции), более простое решение можно получить, заменяя формулу Карлемана ее дискретным аналогом (ср. п. 5° с п. 1° — 4° из разд. 30). При этом будет выполнено и требование, чтобы $f(b)$ было действительным, если действительны все $f(x_j)$.

Пусть $M=\{x_j\}$ — множество различных точек, расположенных в круге $U(0,\ r)$, не имеющее предельных точек на окружности $\partial U(0,\ r)$. Тогда тем же методом, идущим от идеи Карлемана (ср. с разд. 30), или с помощью интерполяционных методов (см. [155]) получим формулу

$$f(z) = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m} f(x_k)\frac{r^2-|x_k|^2}{r^2-zx_k}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}\frac{\left(r^2-\bar{x}_jx_k\right)(z-x_j)}{\left(r^2-\bar{x}_jz\right)(x_k-x_j)}, \qquad (29.6)$$

в которой сходимость равномерна на компактах из $U(0,\ r)$. Очевидно, что если z, все x_j и $f(x_j)$ действительны, то правая часть в (29.6) тоже действительна.

Выпишем формулу Эрмита для остаточного члена в (29.6) (ср. с (30.8))

$$r_m(z) = \frac{B_m(z)}{2\pi i}\int\limits_{\partial U}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{B_m(\zeta)\,(\zeta-z)}, \qquad (29.7)$$

где B_m — произведение Бляшке для круга $U = U(0, r)$:

$$B_m(z) = \prod_{j=1}^{m} \frac{z - x_j}{r^2 - zx_j} r;$$

(29.7) получена в предположении, что функция $f \in H^1(U)$ (в случае необходимости можно уменьшить радиус r, тогда f будет даже голоморфной на $\overline{U(0, r)}$). Из (29.7) получается оценка для описанной задачи экстраполяции с отрезка $[-1, 1]$ в точку b, $1 < b < r$,

$$|r_m(b)| \leqslant \left(r \frac{b+1}{b+r^2}\right)^m \frac{\|f\|_{H^1}}{2\pi(r-b)}. \tag{29.8}$$

Неравенство (29.8) означает, что соответствующий экстраполяционный процесс быстро сходится при $m \to \infty$. Однако нужно иметь в виду, что задача аналитического продолжения с отрезка $[-1, 1]$ в точку $b > 1$ является некорректной (она условно устойчива, см. разд. 30), поэтому для успешной экстраполяции нужна большая точность $f(x_j)$.

Подобных примеров можно изложить довольно много. Ограничимся указанными тремя случаями применения идей и формул Карлемана в теоретической и математической физике. Надеемся, что многочисленные серьезные приложения впереди.

30. ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В ПРОИЗВЕДЕНИИ ПОЛУПЛОСКОСТЕЙ ИЛИ ПОЛОС. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ СПЕКТРА

1°. Рассмотрим класс Винера W_α^n функций из $L^2(\mathbf{R}^n)$, имеющих преобразование Фурье (спектр)

$$g(\omega) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) e^{-2\pi i\langle\omega, x\rangle} dx, \tag{30.1}$$

носитель которого сосредоточен в параллелепипеде $\{\omega\colon |\omega_j| \leqslant \alpha_j, j = 1, \ldots, n\} \subset \mathbf{R}^n$. Кроме того, введем класс $W_{\alpha,+}^n$ функций из $L^2(\mathbf{R}^n)$, у которых носитель спектра входит в $\{\omega\colon 0 \leqslant \omega_j \leqslant \alpha_j, j = 1, \ldots, n\} \subset \mathbf{R}_+^n = \{\omega\colon \omega_j \geqslant 0, j = 1, \ldots, n\}$.

Отметим, что иногда преобразование Фурье (30.1) записывают без множителя (-2π) в показателе степени. Но стандартные программы для ЭВМ относятся к виду (30.1) преобразования Фурье, поэтому мы и используем этот вариант данного преобразования.

Рассмотрим далее класс Харди $H^2(D_\sigma)$ функций, голоморфных в произведении полуплоскостей $D_\sigma = \{z\colon \operatorname{Im} z_j > -\sigma, j = 1, \ldots, n\} \subset \mathbf{C}^n$. Здесь и далее σ — фиксированная положительная постоянная. $H^2(D_\sigma)$ выделяется из $A(D_\sigma)$ условием

$$\int_{\mathbf{R}^n} |f(x+iy)|^2\,dx \leqslant C, \tag{30.2}$$

где $-\sigma < y_j < \infty$, $j=1, \ldots, n$. Этот класс содержит, в частности, класс $W^n_{\alpha,+}$. Действительно, по теореме Винера — Пэли (см. [116, 137]) функция из $W^n_{\alpha,+}$ является целой функцией экспоненциального типа и, легко видеть, входит в класс $H^2(D_\sigma)$ при любом $\sigma > 0$ (см. [146, гл. III, § 2, 4]).

Известно, какую большую роль играет преобразование Фурье в математической физике (см., например, [56, 58]). Иногда оно задано лишь на части действительного подпространства $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{C}^n$ и возникает задача аналитического продолжения на все $\mathbf{R}^n$ или даже на D_σ. Пусть N_l — ограниченная последовательность различных точек полуплоскости $\{z_l\colon \operatorname{Im} z_l > -\sigma\}$, не имеющая предельных точек на ее границе, $l=1, \ldots, n$. Кратная последовательность $M = N_1 \times \ldots \times N_n$ содержится в области D_σ. Множество M является, очевидно, множеством единственности для функций из $A(D_\sigma)$.

Итак, рассмотрим следующую задачу экстраполяции в классе $H^2(D_\sigma)$: нужно восстановить $f(z)$ в D_σ по значениям на M. В частности, для M из действительного подпространства $\mathbf{R}^n$ будет решена задача аналитического продолжения $f(z)$ с M на все $\mathbf{R}^n$. При этом нужно, чтобы экстраполирующие функции сходились к $f(z)$ в смысле $L^2(\mathbf{R}^n)$ (последнее требование важно, чтобы можно было делать преобразование Фурье). Укажем метод экстраполяции со сходимостью в $H^2(D_\sigma)$ (и тем более в $L^2(\mathbf{R}^n)$).

Пусть $N = \{x_{l,j}\}$, $j=1, 2, 3, \ldots$, $l=1, 2, \ldots, n$. Обозначим

$$\omega(m, u, p, l) = \frac{x_{lp} - \bar{x}_{lp} + 2i\sigma}{u - \bar{x}_{lp} + 2i\sigma} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{m} \frac{(u - x_{lj})(x_{lp} - \bar{x}_{lj} + 2i\sigma)}{(u - \bar{x}_{lj} + 2i\sigma)(x_{lp} - x_{lj})},$$

где $x_k = (x_{1k_1}, \ldots, x_{nk_n})$; мультииндекс $k = (k_1, \ldots, k_n)$; черта над x означает, как обычно, взятие комплексно-сопряженного (здесь x — не обязательно действительно; но применяется это в случае действительных x, см. разд. 32, 33, поэтому мы не стали вводить новое обозначение).

Теорема 30.1 (Айзенберг). *Для всякой функции $f(z) \in H^2(D_\sigma)$ справедливо равенство*

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k_1, \ldots, k_n = 1}^{m} f(x_k) \prod_{l=1}^{n} \omega(m, z_l, k_l, l). \tag{30.3}$$

Сходимость в (30.3) равномерна на компактах из D_σ, и, более того, есть сходимость по норме $H^2(D_\sigma)$.

Приведем два частных случая формулы (30.3) в более обозримой записи, считая для простоты, что $M \subset \mathbf{R}^n$.

Следствие 30.2. *При $n=1$*

$$f(z)=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m} f(x_k)\frac{2i\sigma}{z-x_k+2i\sigma}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}\frac{(z-x_j)(x_k-x_j+2i\sigma)}{(z-x_j+2i\sigma)(x_k-x_j)}. \tag{30.4}$$

Следствие 30.3. *При $n=2$*

$$f(z_1, z_2)=\lim_{m\to\infty}\sum_{k_1,k_2=1}^{m} f\left(x_{1k_1}, x_{2k_2}\right)\frac{(2i\sigma)^2}{\left(z_1-x_{1k_1}+2i\sigma\right)\left(z_2-x_{2k_2}+2i\sigma\right)}\times$$
$$\times\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k_1}}^{m}\frac{(z_1-x_{1j})\left(x_{1k_1}-x_{1j}+2i\sigma\right)}{(z_1-x_{1j}+2i\sigma)\left(x_{1k_1}-x_{1j}\right)}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k_2}}^{m}\frac{(z_2-x_{2j})\left(x_{2k_2}-x_{2j}+2i\sigma\right)}{(z_2-x_{2j}+2i\sigma)\left(x_{2k_2}-x_{2j}\right)}. \tag{30.5}$$

Доказательство теоремы 30.1 можно провести двумя способами: либо на идеях интерполяции, либо на идее Карлемана построения интегрального представления голоморфной функции по части границы области, много раз применявшейся в этой книге. При первом подходе получается некоторая дополнительная информация: сумма в правой части (30.3) дает наилучшее приближение к $f(z)$ в смысле метрики $H^2(D_\sigma)$ среди функций вида

$$\sum_{k_1,\ldots,k_n=1}^{m}\frac{A_k}{\prod\limits_{j=1}^{n}\left(z_j-\bar{x}_{jk_j}+2i\sigma\right)}. \tag{30.6}$$

Лемма 30.4. *При $n=1$ и $f\in H^2(D_\sigma)$, $f(u)=0$, где $u\in D_\sigma$, функция f ортогональна на $\mathbf{R}^1-i\sigma$ функции $(z-\bar{u}+2i\sigma)^{-1}$.*

Доказательство. Для функций из $H^2(D_\sigma)$ справедлива формула Коши, в которой интегрирование производится по прямой $\mathbf{R}^1-i\sigma$ (см. [100, с. 145]), поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x-i\sigma)\,dx}{\overline{x-i\sigma-\bar{u}+2i\sigma}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x-i\sigma)\,dx}{x-i\sigma-u}=2\pi i f(u)=0.$$

(Аналогичное утверждение для круга см. в [155, с. 274].) □

Лемма 30.5. *Пусть $n=1$ и $f\in H^2(D_\sigma)$, $N_1=\{x_j\}$, $x_j\in D_\sigma$, $|x_j|<C$, $\operatorname{Im} x_j>-i(\sigma-\varepsilon)$, $j=1, 2, \ldots$*
Обозначим

$$B_m(z)=\prod_{j=1}^{m}\frac{z-x_j}{z-\bar{x}_j+2i\sigma},$$

$$\varphi_k(z)=\frac{x_k-\bar{x}_k+2i\sigma}{z-x_k}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}\frac{x_k-\bar{x}_j+2i\sigma}{x_k-x_j}.$$

Тогда для $z \in D_\sigma$ *справедливо равенство*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{m} f(x_k)\, \varphi_k(z)\, B_m(z) + r_m(z), \tag{30.7}$$

где для остаточного члена $r_m(z)$ *имеет место формула Эрмита*

$$r_m(z) = \frac{B_m(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x - i\sigma)\, dx}{B_m(x - i\sigma)(x - i\sigma - z)} \tag{30.8}$$

и равномерно на каждом компакте из D_σ

$$\lim_{m \to \infty} r_m(z) = 0, \tag{30.9}$$

следовательно, при $n = 1$ *верно* (30.3).

Первая идея доказательства. Простая, но плодотворная идея Карлемана состояла в построении вспомогательной функции $F_m(z)$, которая бы была голоморфной в заданной области D, достаточно хорошо вела себя при подходе к границе ∂D, удовлетворяла условию $|F_m(z)| = 1$ на куске L границы ∂D и условию в D $\lim\limits_{m \to \infty} F_m(z) = 0$. Наличие такой «гасящей» функции позволяет убрать при интегрировании в формуле Коши указанное множество L из множества интегрирования ∂D (см. разд. 1). Несколько видоизменяя эту идею, построим функцию $F_m(z)$ с условием $|F_m| = 1$ на всей границе области D_σ, т. е. на прямой $\mathbf{R}^1 - i\sigma$. В качестве F_m можно взять произведение Бляшке B_m.

Вторая идея доказательства. Изучение известных фактов об интерполяции и приближении в смысле средних квадратичных голоморфных в круге функций (см. [155, § 9.1 и 10.7]) подсказывает, что и в случае полуплоскости D_σ полезно использовать произведение Бляшке $B_m(z)$. Если после доказательства леммы 30.5 повторить рассуждения из [155, § 9.1] с использованием леммы 30.4 и соответствующими очевидными изменениями для полуплоскости, то дополнительно к утверждениям леммы 30.5 получится, что сумма в правой части (30.7) дает наилучшее приближение в смысле метрики $L^2(\mathbf{R}^1 - i\sigma)$ (а значит, в смысле метрики пространства $H^2(D_\sigma)$) $f(z)$ среди функций вида

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{A_j}{z - \bar{x}_j + 2i\sigma}.$$

Доказательство леммы 30.5. Обозначим $\tilde{\gamma}_r$ полуокружность, лежащую в D_σ, радиуса r с центром в точке $-i\sigma$, а Γ_r — ее диаметр, лежащий на прямой $\mathbf{R}^1 - i\sigma$. По теореме Коши о вычетах получаем (считая r достаточно большим, чтобы точки z и x_j, $j = 1, 2, \ldots$, лежали внутри контура $\Gamma_r \cup \tilde{\gamma}_r$, а Γ_r и $\tilde{\gamma}_r$ ориентированными соответствующим образом) для $z \neq x_j$, $j = 1, 2, \ldots$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_r}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{B_m(\zeta)(\zeta - z)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_r}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{B_m(\zeta)(\zeta - z)} =$$

$$= \frac{f(z)}{B_m(z)} - \sum_{k=1}^{m} f(x_k)\,\varphi_k(z). \tag{30.10}$$

Далее с помощью известной оценки для функций класса Харди $H^2(D_\sigma)$ и равенства $\lim\limits_{\zeta\to\infty}|B_m(\zeta)| = 1$ получаем (ср. [100, VI C]), что при $r \to \infty$ второй интеграл в (30.10) стремится к нулю. Поэтому при $r \to \infty$ из (30.10) следует (30.7) и (30.8). Замыкание $\bar{N}_1$ последовательности N_1 компактно в D_σ, значит, равномерно на любом компакте из $D_\sigma \lim\limits_{m\to\infty} B_m(z) = 0$, отсюда приходим к (30.9). □

Пусть $I_p = (i_1, \ldots, i_p)$ — упорядоченный по возрастанию набор p различных чисел из $(1, 2, \ldots, n)$, а $z(I_p)$ — вектор, у которого координаты с номером i_l есть z_{i_l}, $l = 1, \ldots, p$, а остальные координаты ζ_j, $j \in (1, \ldots, n)$, $j \notin I_p$. Через JI_p обозначим упорядоченный набор чисел из $(1, 2, \ldots, n)$, которые не вошли в I_p. Наконец, обозначим $R_\sigma I_p$ — произведение прямых $\{\zeta_j\colon \zeta_j \in \mathbf{R}^1 - i\sigma,\ j \in JI_p\}$ и I_0 — пустое множество.

Лемма 30.6 *Для остаточного члена r_m в формуле* (30.3) *имеет место многомерный аналог формулы Эрмита*:

$$r_m(z) = \sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-p-1}}{(2\pi i)^{n-p}}\sum_{I_p}\prod_{j\in JI_p} B_{mj}(z_j)\int\limits_{R_\sigma I_p}\frac{f(z(I_p))\bigwedge\limits_{j\in JI_p} d\zeta_j}{\prod\limits_{j\in JI_p} B_{mj}(\zeta_j)(\zeta_j - z_j)}. \tag{30.11}$$

Доказательство проводим по индукции. При $n = 1$ формула (30.11) есть просто формула (30.8), уже установленная в лемме 30.5. Пусть (30.11) верно для всех пространств $\mathbf{C}^k$, $k \leqslant n - 1$. Докажем аналогичное равенство для $\mathbf{C}^n$. Каждую область D_j, $j = 1, \ldots, n$, в соответствующей полуплоскости построим так же, как область, ограниченную контурами Γ_r и γ_r в доказательстве леммы 30.5. Обозначим $zx_k(I_p)$ вектор, у которого координата с номером i_l есть z_{i_l}, $l = 1, \ldots, p$, а остальные координаты: x_j, $j \notin I_p$, $j \in (1, \ldots, n)$. Затем повторяя рассуждения этого доказательства и применяя формулу (12.15), получим

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{R_\sigma I_0}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\prod\limits_{j=1}^{n} B_{mj}(\zeta_j)(\zeta_j - z_j)} = \frac{f(z)}{\prod\limits_{j=1}^{n} B_{mj}(z_j)} +$$

$$+ \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^{n-p}\sum_{I_p}\sum_{\substack{k_j=1\\ j\in JI_p}}^{m} f(zx_k(I_p))\frac{\prod\limits_{j\in JI_p}\varphi_{k_j j}(z_j)}{\prod\limits_{j\in I_p} B_{mj}(z_j)}. \tag{30.12}$$

Умножим (30.12) на $\prod_{j=1}^{n} B_{mj}(z_j)$ и вместо каждой суммы

$$\sum_{\substack{k_j=1\\ j\in JI_p}}^{m} f(zx_k(I_p)) \prod_{j\in JI_p} \varphi_{k_j j}(z_j) B_{mj}(z_j)$$

при $p>0$ напишем, согласно индуктивному предположению, $f(z)-r_m(z)$, где $r_m(z)$ имеет вид (30.11) (для пространств $\mathbf{C}^{n-p}$, $p=1, \ldots, n-1$). Наконец, все интегралы и оставшуюся интерполяционную сумму (соответствующую I_p при $p=0$) перенесем в одну часть полученного равенства, а все слагаемые с $f(z)$ — в другую. Суммируя все эти слагаемые и учитывая, что

$$\sum_{p=1}^{n-1} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} + 1 = (-1)^{n+1},$$

находим, что

$$f(z) = \sum_{k_1,\ldots,k_n=1}^{m} f(x_k) \prod_{j=1}^{n} \varphi_{k_j j}(z_j) B_{mj}(z_j) + r_m(z),$$

где $r_m(z)$ — из формулы (30.11). □

Равенство (30.11) является многомерным аналогом формулы (30.8). Такого вида выражение для остаточного члена обычно называют формулой Эрмита (см. [144]).

Далее укажем многомерный аналог леммы 30.4, который доказывается аналогично.

Лемма 30.7. *Пусть $f(z)\in H^2(D_\sigma)$ и для $u\in D_\sigma$ имеет место равенство $f(u)=0$, тогда f ортогональна на произведении прямых $\{z\colon z_j\in \mathbf{R}^1 - i\sigma,\ j=1, \ldots, n\}$ функции*

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{z_j - \bar u_j + 2i\sigma}.$$

Доказательство теоремы 30.1 в части, касающейся равномерной сходимости на компактах из D_σ, сразу вытекает из леммы 30.6, так как на $R_\sigma I_p$

$$\left| \prod_{j\in JI_p} B_{mj}(\zeta_j) \right| = 1$$

и равномерно на каждом компакте из D_σ

$$\lim_{m\to\infty} \prod_{j\in JI_p} B_{mj}(z_j) = 0,$$

где $p=0, 1, \ldots, n-1$. Осталось установить сходимость в формуле (30.3) по норме пространства $H^2(D_\sigma)$. Здесь следовало бы получить подходящую оценку для $\|r_m\|_{H^2(D_\sigma)}$, но это сделать трудно.

В теореме 30.10 приведена оценка для функций из $H^2(D_{\sigma+h})$, $\sigma > h > 0$. Она достаточна для приложений к аналитическому продолжению функций из $\overset{\circ}{\overline{W}}{}^n_{\alpha,+}$, Таким образом, теорема 30.1 полностью доказана для $f(z) \in H^2(D_{\sigma+h})$. Однако можно установить нужную сходимость и без упомянутой оценки. Из леммы 30.7 обычными для теории интерполяции рассуждениями (см. [155, § 9.1]) можно вывести, что сумма в правой части (30.3) дает наилучшее приближение $f(z)$ в смысле метрики $H^2(D_\sigma)$ среди функций вида (30.6). Далее, перегруппировывая, можно заменить предел сумм в (30.3) интерполяционным рядом (ср. с [155, § 9.1]) разложения $f(z)$ по ортогональным на $\{z\colon z_j \in \mathbf{R}^1 - i\sigma,\ j = 1, \ldots, n\}$ функциям, полученным в результате ортогонализации дробей вида (30.6). Поэтому сходимость в (30.3) имеет место в смысле L^2 на указанном произведении прямых, а значит, по свойствам функций H^2 и в смысле $H^2(D_\sigma)$ (см. [34, гл. 8]). □

Аналитическое продолжение по формуле (30.3) и преобразование Фурье можно записать в виде одной формулы, поскольку от дробей в правой части (30.3) преобразование Фурье легко вычисляется с помощью вычетов (здесь x_k действительны). Обозначим

$$a(m, u, p, q, l) = 4\pi\sigma e^{-4\pi u\sigma} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{m} \frac{1}{x_{lp} - x_{lj}} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq q}}^{m} \frac{(x_{lp} - x_{lj} - 2i\sigma)(x_{lq} - x_{lj} + 2i\sigma)}{x_{lq} - x_{lj}},$$

$$\Omega(m, u, q, l) = \sum_{p=1}^{m} e^{-2\pi i u x_{lp}} a(m, u, p, q, l).$$

Следствие 30.8. *При условиях теоремы* 30.1 *в* $L^2(\operatorname{supp} g)$ *верна формула*

$$g(\omega) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k_1, \ldots, k_n = 1}^{m} f(x_k) \prod_{l=1}^{n} \Omega(m, \omega_l, k_l, l). \tag{30.13}$$

Следствие 30.9. *При* $n = 1$ *формула* (30.13) *имеет вид*

$$g(\omega) = \lim_{m\to\infty} 4\pi\sigma e^{-4\pi\omega\sigma} \sum_{k=1}^{m} f(x_k) \sum_{l=1}^{m} \frac{e^{-2\pi i\omega x_k}}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq l}}^{m} (x_l - x_j)} \times$$
$$\times \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{m} \frac{(x_l - x_j - 2i\sigma)(x_k - x_j + 2i\sigma)}{(x_k - x_j)}.$$

Остаточный член в формуле (30.13) обозначим $\tilde{r}_m(\omega)$. По теореме Планшереля

$$\| r_m(z) \|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \| \tilde{r}_m(\omega) \|_{L^2(\operatorname{supp} g)}.$$

С другой стороны,

$$\|r_m(z)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leqslant \|r_m(z)\|_{H^2(D_\sigma)},$$

поэтому для оценки остатков r_m и $\tilde{r}_m$ достаточно оценить r_m в норме пространства $H^2(D_\sigma)$. Мы сделаем эту оценку для функций из $H^2(D_{\sigma+h})$, где $0 < h < \sigma$ (функции из $W^n_{\alpha,+}$ входят в каждый из этих классов). Обозначим $R^n(\sigma+h) = \{z\colon \operatorname{Im} z_j = -\sigma - h,\ j = 1, \ldots, n\}$, $R^{n-1}(\sigma+h, l) = \{(z_1, \ldots, z_{l-1}, z_{l+1}, \ldots, z_n)\colon \operatorname{Im} z_j = -\sigma - h,\ j = 1, \ldots, l-1, l+1, \ldots, n\}$, $1 \leqslant l \leqslant n$. Пусть

$$S(A) = \max_{1 \leqslant l \leqslant n} \int\limits_{R^{n-1}(\sigma+h,l)} \left(\int\limits_{\substack{\operatorname{Im} z_l = -\sigma-h \\ |\operatorname{Re} z_l| \geqslant A}} |f|^2 |dz_l| \right) |dz|\ [l],$$

где $|dz|[l] = |dz_1| \wedge \ldots \wedge |dz_{l-1}| \wedge |dz_{l+1}| \wedge \ldots \wedge |dz_n|$; далее обозначим

$$\max_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m,\ 1 \leqslant l \leqslant n \\ |\operatorname{Re} z_l| \leqslant A,\ \operatorname{Im} z_l = -\sigma-h}} \frac{|z - \bar{x}_{lj} + 2i\sigma|}{|z_l - x_{lj}|} = P(A),$$

$P(A) < 1$. Положим $A = S^{-1}(\varepsilon^2/2)$.

Теорема 30.10. *Если* $f \in H^2(D_{\sigma+h})$ *и*

$$m > \frac{2 \ln \|f\|_{L^2(R^n(\sigma+h))} - 2 \ln \varepsilon - \ln 2}{-2 \ln P(A)}, \tag{30.14}$$

то справедлива оценка остаточного члена в формуле (30.3)

$$\|r_m\|_{H^2(D_\sigma)} \leqslant \varepsilon 2^n. \tag{30.15}$$

Из этой теоремы следует, что если $S(A)$ убывает достаточно быстро, то процесс экстраполяции (аналитического продолжения), указанный в теореме 30.1, быстро сходится. Для доказательства теоремы 30.10 нам потребуется связь того факта, что $f \in H^2(D_\sigma)$, с принадлежностью f классу H^2 в сечениях. Если $f \in H^p(D_\sigma)$, то f входит в аналогичный класс почти во всех сечениях (ср. с предложением 0.8). При $p = 2$ ситуация улучшается. Действительно, из теоремы Планшереля (см. о пространстве H^2 в трубчатой области в связи с этой теоремой в [146, гл. III, § 2]) легко следует

Лемма 30.11. *Пусть* $f \in H^2(D_{\sigma+h})$ *и* I_p *фиксирован (здесь* $1 \leqslant p \leqslant n-1$). *Тогда для всех* ζ_j, $j \in (1, \ldots, n)$, $j \notin I_p$, *функция* $f(z(I_p))$ *входит по* z *в аналогичный класс Харди, а ее норма там не превосходит* $\|f\|_{H^2(D_\sigma)} (2\pi h)^{(p-n)/2}$.

Доказательство теоремы 30.10. В формуле (30.11) содержится $2^n - 1$ интеграл. Оценим, например, интеграл

$$\frac{B_{m1}(z_1)}{2\pi i} \int\limits_{R^1 - i\sigma} \frac{f(\zeta_1, z_2, \ldots, z_n)\, d\zeta_1}{B_{m1}(\zeta_1)(\zeta_1 - z_1)}, \tag{30.16}$$

остальные интегралы оцениваются аналогично. Норма (30.16) в $H^2(D_\sigma)$ не превосходит нормы функции

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{R^1-i\sigma}\frac{f(\zeta_1, z_2, \ldots, z_n)\,d\zeta_1}{B_{m1}(\zeta_1)(\zeta_1-z_1)}. \tag{30.17}$$

В силу свойств функций класса $H^2(D_{\sigma+h})$ интеграл (30.17) равен

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{R^1-i\sigma-ih}\frac{f(\zeta_1, z_2, \ldots, z_n)\,d\zeta_1}{B_{m1}(\zeta_1)(\zeta_1-z_1)}. \tag{30.18}$$

Далее воспользуемся тем, что интеграл типа Коши от функции φ из L^2 на прямой задает в соответствующей полуплоскости функцию класса H^2 с нормой, не превосходящей нормы φ в L^2 (ср. [34, с. 192, упр. 10, 11]). Отсюда и из леммы 30.11 получаем, что норма функции (30.18) в $H^2(D_\sigma)$ не превосходит нормы в $H^2(D_{\sigma+h})$, а эта последняя не больше, чем

$$\left\|\frac{f(z)}{B_{m1}(z_1)}\right\|_{L^2(R^n(\sigma+h))}, \tag{30.19}$$

где $R^n(\sigma+h)=\{z\colon\ \operatorname{Im} z_l=-\sigma-h,\ l=1, \ldots, n\}$. Далее, выделяя при интегрировании по прямой $\{z_1\colon\ \operatorname{Im} z_1=-\sigma-h\}$ множество $\{z_1\colon\ |\operatorname{Re} z_1|\geqslant A\}$, разбиваем интеграл, задающий квадрат нормы (30.19), на два интеграла и находим для этого квадрата нормы оценку сверху

$$[P(A)]^{2m}\|f\|^2_{L^2(R^n(\sigma+h))}+S(A),$$

откуда и из (30.14) следует (30.15). □

2°. В задаче экстраполяции голоморфных на $\mathbf{R}^n$ функций естественнее рассматривать не класс $H^2(D_\sigma)$, а класс $H^2(Q_\sigma)$, где $Q_\sigma=\{z\colon\ |\operatorname{Im} z_j|<\sigma,\ j=1, \ldots, n\}$ — произведение полос. Действительно, класс $H^2(D_\sigma)$ содержит $W^n_{\alpha,+}$, в то время как $H^2(Q_\sigma)$ содержит W^n_α. Приведем результат для $\sigma=\pi/2$, так как в этом случае ядро экстраполяционной формулы при аналитическом продолжении в $\mathbf{R}^n$ действительно (общий случай сводится к данному соответствующей гомотетией). Пусть

$$\tilde\omega(m, u, p, e)=\frac{\left(e^{x_{lp}}+e^{\bar x_{lp}}\right)\left(e^u-e^{x_{lp}}\right)}{\left(e^u+e^{\bar x_{lp}}\right)(u-x_{lp})\,e^{x_{lp}}}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{m}\frac{\left(e^{x_{lp}}+e^{\bar x_{lj}}\right)\left(e^u-e^{x_{lj}}\right)}{\left(e^{x_{lp}}-e^{x_{lj}}\right)\left(e^u+e^{\bar x_{lj}}\right)}.$$

Теорема 30.12 (Айзенберг). *Для* $f(z)\in H^2(Q_{\pi/2})$ *верно*

$$f(z)=\lim_{m\to\infty}\sum_{k_1, \ldots, k_n=1}^{m} f(x_k)\prod_{j=1}^{n}\tilde\omega(m, z_j, k_j, j), \tag{30.20}$$

где предел нужно понимать в смысле нормы пространства $H^2(Q_{\pi/2})$.

Следствие 30.13. *При* $n=1$

$$f(z)=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m} f(x_k)\frac{\left(e^{x_k}+e^{\bar{x}_k}\right)\left(e^z-e^{x_k}\right)}{\left(e^z+e^{\bar{x}_k}\right)(z-x_k)\,e^{x_k}}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}\frac{\left(e^{x_k}+e^{\bar{x}_j}\right)\left(e^z-e^{x_j}\right)}{\left(e^{x_k}-e^{x_j}\right)\left(e^z+e^{\bar{x}_j}\right)}.$$

Следствие 30.14. *Если M и z из действительного подпространства $\mathbf{R}^n\subset\mathbf{C}^n$, то* (30.20) *справедливо для плюригармонических функций из класса* $\operatorname{Re}H^2(Q_{\pi/2})$. *Сходимость в* (30.20) *в этом случае понимается в смысле* $L^2(\mathbf{R}^n)$, *кроме того, она равномерна на компактах в* $\mathbf{R}^n$.

Доказательство теоремы 30.12 повторяет доказательство теоремы 30.1 с заменой произведения Бляшке для полуплоскости на произведение Бляшке для полосы $\{z\colon |\operatorname{Im} z|<\pi/2\}$

$$\prod_{j=1}^{m}\frac{e^z-e^{x_j}}{e^z+e^{\bar{x}_j}}.\quad\square$$

Заметим, что из свойств преобразования Фурье сразу следует утверждение.

Лемма 30.15. *Если* $f\in W^n_\alpha$, *то* $f(z)\exp[2\pi i\langle\alpha, z\rangle]\in W^n_{2\alpha,+}\subset H^2(D_\sigma)$, *и обратно, если* $f\in W^n_{2\alpha,+}$, *то* $f(z)\exp[-2\pi i\langle\alpha, z\rangle]\in W^n_\alpha$.

Данный факт позволяет для экстраполяции класса Винера $W_\alpha{}^n$ указать более простую формулу, чем (30.20), сведением к ситуации, уже рассмотренной в теореме 30.1.

Следствие 30.16. *Если* $f\in W^n_\alpha$, *то имеет место формула со сходимостью в пространстве* $H^2(Q_\sigma)$ *при всех* $\sigma>0$

$$f(z)=\lim_{m\to\infty}e^{-2\pi i\langle\alpha,z\rangle}\sum_{k_1,\dots,k_n=1}^{m} f(x_k)\,e^{2\pi i\langle\alpha,x_k\rangle}\prod_{j=1}^{n}\omega(m, z_j, k_j, j).\quad(30.21)$$

Следствие 30.17. *При* $n=1$ *и действительных* x_k *формула* (30.21) *принимает вид*

$$f(z)=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{f(x_k)\,e^{2\pi i\alpha(x_k-z)}\,2i\sigma}{z-x_k+2i\sigma}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}\frac{(z-x_j)(x_k-x_j+2i\sigma)}{(z-x_j+2i\sigma)(x_k-x_j)}.\quad(30.22)$$

3°. Отметим, что задачи аналитического продолжения, рассмотренные в этом разделе, не являются корректными, но они условно устойчивы в силу принципа компактности голоморфных функций, если наложить дополнительное условие вида $|f(z)|\leqslant C$ или $\|f\|_{H^2(D_\sigma)}\leqslant C$.

В двух предыдущих пунктах речь шла об аналитическом продолжении функций с финитным спектром Фурье (классы Винера). Заменяя прямое преобразование Фурье на обратное, можно из результатов данного раздела извлечь результаты об аналитическом продолжении спектров Фурье (преобразований Фурье) финитных сигналов (т. е. функций с носителем на компакте и класса L^2 на этом компакте). Формулы (30.3) и (30.21) при этом сохранят свой вид, но в них нужно σ заменить на $-\sigma$. В литературе по обработке сигналов рассматривается важная для «сверхразрешимости» физических приборов задача аналитического продолжения спектра с части $\mathbf{R}^n$ на все $\mathbf{R}^n$ (см. [169, 51, 135]). Для решения этой задачи Д. Слепян предложил метод разложения в ряд по системе функций с двойной ортогональностью — так называемых «волновых вытянутых сфероидальных функций» (см. [236, 159, 169, 51, 135]). Другой метод принадлежит Гершбергу — Папулису (см. [207, 227]). В этом разделе предложен более простой метод.

При приложениях указанных формул к задаче аналитического продолжения спектра Фурье сигнала, сосредоточенного на компакте $K \subset \mathbf{R}^n$, нужно учитывать, что обычно $f(x_j)$ известны неточно. На самом деле, мы будем рассматривать $f(x_j)+\delta_j+\varepsilon_j$, где δ_j — ошибка, возникающая за счет неточного знания функции $g(t)$ (т. е. δ_j — преобразование Фурье в точках x_j от «шума» $n_1(t)$ на K; мы считаем, что $n_1(t) \in L^2(K)$), а ε_j — случайная ошибка в вычислении преобразования Фурье. Если $\int\limits_K |n_1(t)|^2 dt < \nu^2$, то по теореме Планшереля ошибка в спектре в смысле средних квадратичных тоже $<\nu$. Иначе обстоит дело с «вычислительным шумом» $n_2(x_j) = \varepsilon_j$. Пусть

$$\mu(m, k) = \left\| \prod_{j=1}^{n} \omega(m, z_j, k_j, j) \right\|_{H^2(D_\sigma)},$$

тогда дополнительная ошибка в смысле средних квадратичных при применении формулы (30.3) или (30.21) (кроме ошибки экстраполяции, о которой речь идет в теореме 30.10, и ошибки от шума $n_1(t)$) не больше, чем

$$\sum_{k_1, \ldots k_n = 1}^{m} |\varepsilon_k| \mu(m, k). \tag{30.23}$$

Обозначим $\varepsilon = \max\limits_k |\varepsilon_k|$, $\mu(m) = \max\limits_k \mu(m, k)$, тогда (30.23) не превосходит $m^n \varepsilon \mu(m)$. Учитывая случайный характер ε_k, эту оценку можно уточнить (ср. с [87]), существенно ее улучшив. Однако нужно иметь в виду, что $\mu(m)$ растет с ростом m, поэтому при применении указанных формул экстраполяции необходим обычный в таких случаях (см. [169, 51, 135, 236, 159]) компромисс между необходимостью взять m достаточно большим, чтобы обеспечить точность экстраполяции, но не столь большим, чтобы «вычислительный шум» n_2 существенно мешал. Поскольку этот последний шум зависит только от алгоритма приближенного вычисления преобразования Фурье и от точности вычисления на ЭВМ, он может быть сделан очень малым. Вычислительный эксперимент на аналитическое продолжение спектра и «сверхразрешение» см. в разд. 32.

4°. Рассмотрим обобщение результатов п. 1° на случай кратной экстраполяции. Пусть $n=1$, $N_1=\{x_j\}$, $\operatorname{Im} x_j > -(\sigma-\varepsilon)$, а α_j — кратность точки x_j, $j=1, 2, \ldots$. Пусть дано *кратное произведение Бляшке*

$$B_m^{\alpha}(z)=\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{z-x_j}{z-\bar{x}_j+2i\sigma}\right)^{\alpha_j}.$$

Аналогично лемме 30.5 доказывается следующая

Теорема 30.18 (Айзенберг — Худайберганов). *Для $f\in H^2(D_\sigma)$ и $z\in D_\sigma$ справедлива формула со сходимостью в смысле пространства $H^2(D_\sigma)$*

$$f(z)=\lim_{m\to\infty} B_m^{\alpha}(z)\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{(\alpha_l-1)!}\sum_{j=0}^{\alpha_l-1}\binom{\alpha_l-1}{j}\sum_{i=1}^{\alpha_l-j-1}\binom{\alpha_l-j-1}{i}\times$$
$$\times f^{(j)}(x_l)A_{lji}(z-x_l)^{-(i+1)},$$

где

$$A_{lji}=\frac{d^{\alpha_l-j-i-1}}{d\zeta^{\alpha_l-j-i-1}}\left[(\zeta-\bar{x}_l+2i\sigma)^{\alpha_l}\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{m}\left(\frac{\zeta-\bar{x}_k+2i\sigma}{\zeta-x_k}\right)^{\alpha_k}\right]_{\zeta=x_l}.$$

Этот результат можно распространить на голоморфные функции многих комплексных переменных, а также на голоморфные функции от одной или нескольких матриц (см. [31]).

5°. Отметим в заключение этого раздела более общую задачу экстраполяции: дана функция $f\in H^2(\Pi)$ на отрезке, например, $[-1, 1]$, нужно найти ее на всей действительной оси. Эта задача более трудная, чем рассматриваемая в п. 1° — 3°, так как здесь речь идет об аналитическом продолжении функции класса Харди H^2 не внутри соответствующей области, а на ее границе. Решение для $H^2(\Pi_-)$ было приведено в формуле (5.16). Оно было найдено М. Г. Крейном и П. Я. Нудельманом (см. [98, 99]) и предназначалось для аналитического продолжения спектров Фурье. Результат, содержащийся в формуле (5.16), безусловно, значительно более трудный и тонкий, чем приведенные, хотя у них есть одно преимущество — простота, позволяющая надеяться на приложения.

Формулы предыдущих пунктов этого раздела можно рассматривать как дискретные аналоги формулы Карлемана, когда ставится не «граничная», а «внутренняя» задача аналитического продолжения.

М. Г. Крейн и П. Я. Нудельман решили и другую задачу: для функции $f\in L^2[(-1, 1)]$ найти функцию $F\in H^2(\Pi_-)$ так, чтобы

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}|f(x)-F(x)|^2dx\leqslant\varepsilon^2,$$

где ε — заданное фиксированное число,

$$0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2\pi} \| f \|_{L^2[(-1,1)]},$$

и F имела минимальную норму в $L^2[(-\infty, \infty)]$ (ср. с замечанием после формулы (31.6) в разд. 31). Пусть g и G — обратные преобразования Фурье от f и F соответственно.

Теорема 30.19 (Крейн — Нудельман). *Задача отыскания функции F имеет единственное решение. Функцию G можно найти из интегрального уравнения*

$$\mu G(t) + \int_0^{\infty} \frac{\sin(t-s)}{\pi(t-s)} G(s)\, ds = g(t), \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{30.24}$$

где $\mu = \mu(\varepsilon)$ — некоторая положительная функция аргумента ε, определяемая из интегрального уравнения

$$\frac{2\mu^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_f^2(\lambda)\, d\lambda}{1 - \operatorname{th} \pi\lambda + 2\mu} = \varepsilon^2,$$

а $\Phi_f(\lambda)$ задана формулой (27.42). *Верно асимптотическое равенство*

$$\mu = \frac{\sqrt{2\pi}\, \varepsilon}{\| f \|_{L^2}} + O(\varepsilon^2).$$

Если в интегральном уравнении (30.24) верхний предел ∞ заменить конечным числом $a > 0$, то получится уравнение, в связи с решением которого и была получена система функций с двойной ортогональностью.

31. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА ВИНЕРА. АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ КОТЕЛЬНИКОВА ДЛЯ НЕРАВНОМЕРНЫХ ОТСЧЕТОВ

1°. Классическая теорема Котельникова (см. [95, 169, 174]) утверждает, что для функций f из класса Винера $W_\alpha{}^1$ справедливо следующее интерполяционное разложение:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta) \frac{\sin 2\pi\alpha(x - k\Delta)}{2\pi\alpha(x - k\Delta)}, \tag{31.1}$$

где $\Delta = 1/2\alpha$, а ряд (31.1) равномерно сходится на компактах в $\mathbf{R}^1$ и в смысле $L^2(\mathbf{R}^1)$ (в смысле средних квадратичных). Функция $f(x)$ аналитически продолжается на всю комплексную плоскость

$\mathbf{C}^1$ как целая функция конечной степени* $\leqslant 2\pi\alpha$ (например, с помощью той же формулы (31.1)). Теорема Котельникова имеет важное значение для теории связи. Есть ее обобщения на многомерный случай (см. [82, 187]). В (31.1) использованы равномерные отсчеты $\{k\Delta\}$, что не всегда удобно (см., например, [169]), поэтому (31.1) обобщалось на случай неравномерных отсчетов, но при этом либо отсчеты распределялись некоторым регулярным образом, либо использовался интерполяционный ряд Лагранжа (при некоторых ограничениях на множество точек отсчета [169, 116, 64]) с канонической функцией этого множества (бесконечным произведением), что неудобно для приложений [169].

Оказалось, что метод из разд. 30 работает в значительно более общей ситуации по сравнению с рассмотренной в этом разделе.

Обсудим вначале случай, когда *M — множество единственности для класса Харди* $H^2(D_\sigma)$, т. е. если $f \in H^2(D_\sigma)$ и $f|_M = 0$, то $f \equiv 0$. Соответствующие условия на $M = N_1 \times \ldots \times N_n$ можно извлечь из результатов о произведениях Бляшке в $H^2(D_\sigma)$ при $n = 1$ (см., например, [100, с. 150]) и следующего утверждения.

Предложение 31.1. *Для того чтобы M было множеством единственности в $H^2(D_\sigma)$, необходимо и достаточно, чтобы каждое множество N_l, $l = 1, \ldots, n$, являлось множеством единственности для класса H^2 в соответствующей полуплоскости.*

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим функции $f_j(z_j) \in H^2(\{z_j\colon \operatorname{Im} z_j > -\sigma\})$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда их произведение $f = f_1, \ldots f_n$ входит в класс Харди $H^2(D_\sigma)$. Фиксируем функции $f_2, \ldots, f_n$, отличные от тождественного нуля, и пусть функция f_1 равна нулю на множестве N_1. Тогда $f = 0$ на множестве M, следовательно, $f \equiv 0$; поэтому $f_1 \equiv 0$. Итак, мы доказали, что N_1 — множество единственности для соответствующего класса Харди H^2. Аналогично показывается, что $N_2, \ldots, N_n$ являются множествами единственности для классов H^2 в соответствующих полуплоскостях.

Достаточность легко получается применением метода сечений области D_σ комплексными прямыми и леммы 30.11. □

Следствие 31.2. *Для того чтобы $M = N_1 \times \ldots \times N_n \subset \mathbf{R}^n$ было множеством единственности в $H^2(D_\sigma)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{j=1}^{\infty}{}' \frac{1}{x_{lj}^2} = \infty, \quad l = 1, \ldots, n, \tag{31.2}$$

где $N_l = \{x_{lj}\}$, $j = 1, 2, \ldots$; штрих означает, что в сумме отсутствуют слагаемые, у которых $x_{lj} = 0$.

Теорема 31.3 (Айзенберг). *Если M — множество единственности для $H^2(D_\sigma)$, то для всякой $f \in H^2(D_\sigma)$ верна формула* (30.3) *со сходимостью в $H^2(D_\sigma)$. В частности, это верно для функций из*

---

* Мы используем вид (30.1) преобразования Фурье, поэтому эта оценка отличается от привычной.

класса $W^n_{\alpha,+}$. Для функций же из класса Винера W^n_α справедливо равенство (30.21) *со сходимостью в пространстве $H^2(Q_\sigma)$ при всяком $\sigma>0$.*

Доказательство приведем для простоты в случае $n=1$, т. е. вместо громоздкой многомерной формулы Эрмита (30.11) будем пользоваться простой формулой (30.8). Оценим остаточный член r_m в интерполяционной формуле (30.3). По формуле (30.8)

$$|r_m(z)| \leqslant \frac{|B_m(z)|}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|f|^2dx}{|B_m|^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{|x-i\sigma-z|^2}\right]^{1/2} =$$

$$= \frac{|B_m(z)|}{2\sqrt{\pi(\sigma+y)}}\,\|f(x-i\sigma)\|_{L^2_x}, \qquad (31.3)$$

где $y=\operatorname{Im} z$. Так как M — множество единственности для H^2, то предел соответствующего произведения Бляшке $B_m(z)$ при $m\to\infty$ должен быть равен нулю. В противном случае можно было бы построить функцию из H^2, равную нулю на M, но не равную тождественно нулю (ср. с [100, с. 149]). Поэтому из (31.3) следует равномерная сходимость на компактах в D_σ в формуле (30.3). Относительно сходимости в смысле $H^2(D_\sigma)$ следует повторить конец доказательства теоремы 30.1. □

Формулы (30.3) и (30.21) и являются аналогами теоремы Котельникова (31.1) для множества M неравномерных отсчетов, которое есть множество единственности в $H^2(D_\sigma)$. Отметим связь формул (31.1) и (30.22) в случае, когда множество отсчетов является равномерным. Функции

$$\sin 2\pi\alpha(x-k\Delta)/2\pi\alpha(x-k\Delta), \qquad (31.4)$$

по которым раскладывается в ряд в формуле (31.1) любая функция класса Винера $W_\alpha{}^1$, сами входят в этот класс, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Поэтому формула (30.22) верна и для функций (31.4). Следовательно (для этих функций в правой части (30.22) останется только одно слагаемое),

$$\frac{\sin 2\pi\alpha(z-k\Delta)}{2\pi\alpha(z-k\Delta)} = \lim_{m\to\infty}\frac{2i\sigma e^{2\pi i(k\Delta-z)}}{z-k\Delta+2i\sigma}\prod_{\substack{j=-m\\ j\neq k}}^{m}\frac{(z-j\Delta)(k\Delta-j\Delta+2i\sigma)}{(z-j\Delta+2i\sigma)\Delta(k-j)}. \qquad (31.5)$$

В (31.5) есть сходимость, равномерная на компактах из Q_σ, и, кроме того, в смысле $H^2(Q_\sigma)$ при всяком $\sigma>0$.

Итак, в случае равномерных отсчетов коэффициенты в формуле (30.22) стремятся к коэффициентам в формуле Котельникова (31.1). В реальных применениях (31.1) используется для конечного числа отсчетов, тогда задача восстановления $f\in W_\alpha{}^1$ имеет много решений, а формула (31.1) в этом случае дает единственное решение с минимальной энергией

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx. \tag{31.6}$$

Аналогично формулы (30.4), (30.22) (и их многомерные аналоги (30.3), (30.21)) с конечным числом отсчетов (уже не обязательно равномерных) дают единственное решение, минимизирующее интеграл уже не по $\mathbf{R}^1$, как в (31.6), а по прямой $\mathbf{R}^1 - i\sigma$ (соответственно в многомерном случае по произведению аналогичных прямых).

2°. В рассмотренной задаче хотелось бы в качестве M брать множество единственности не для всего класса H^2, а для класса Винера W^n_α. Иначе говоря, в теореме 30.3 множество M гуще, чем нужно для задачи интерполяции функций класса Винера. Однако соответствующий результат для множества единственности W^n_α или $W^n_{\alpha,+}$ не верен. Мы будем говорить о множествах единственности класса $W^n_{\alpha,+}$ так как в силу леммы 30.15 достаточно получить результат для этих множеств единственности (классы множеств единственности для W^n_α и $W^n_{2\alpha,+}$ совпадают).

Не уменьшая общности, можно считать, что в $M \in \mathbf{R}^n$ не входят точки, у которых $x_{lj} = 0$. Тогда штрих в условии (31.2) можно не писать. Обозначим через A множество тех чисел из $\{1, 2, \ldots, n\}$, для которых из $l \in A$ следует

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{x_{lj}^2} < \infty.$$

Построим для $l \in A$ произведение Бляшке для полуплоскости $\{z_l\colon \operatorname{Im} z_l > -\sigma\}$:

$$B_\sigma^l(z_l) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{z_l - x_{lj}}{z_l - x_{lj} + 2i\sigma}. \tag{31.7}$$

Наша цель состоит в том, чтобы расширить возможности применения формулы (30.3) или (30.21) путем дополнительного предельного перехода при $\sigma \to \infty$ (т. е. граничная прямая в соответствующих полуплоскостях отодвигается в бесконечность). Вначале приведем следующий результат, в котором множество M характеризуется скоростью убывания произведения Бляшке (31.7) при $\sigma \to \infty$.

Теорема 31.4 (Айзенберг). *Если для всех $x \in \mathbf{R}^n$ и $l \in A$ выполняется условие*

$$\varliminf_{\sigma\to\infty} \frac{e^{2\pi\sigma\alpha_l}}{\sqrt{\sigma}} \left| B_\sigma^l(x_l) \right| = 0, \tag{31.8}$$

то M — множество единственности для класса $W^n_{\alpha,+}$ и существуют *такие последовательности* $\{\sigma_p\}$ *и* $\{m_p^0\}$ *(зависящие, вообще говоря, от* x*),* $p = 1, 2, \ldots$, *что для всякой* $f \in W^n_{\alpha,+}$ *и* $m_p \geqslant m_p^0$ *имеет место**

$$f(x) = \lim_{p\to\infty} \sum_{k_1,\ldots,k_n=1}^{m_p} f(x_k) \prod_{l=1}^{n} \omega(\sigma_p, m_p, x_l, k_l, l). \tag{31.9}$$

При этом если (31.8) *достигается равномерно по* x *на компактах в* $\mathbf{R}^n$, *то сходимость в* (31.9) *тоже равномерна на тех же компактах (выбор* σ_p *и* m_p^0 *зависит, вообще говоря, от данного компакта). Если* (31.8) *достигается равномерно на всем* $\mathbf{R}^n$, *то вместо* (31.9) *можно пользоваться формулой, в которой сходимость тоже равномерна на* $\mathbf{R}^n$ *и еще в смысле* $L^2(\mathbf{R}^n)$

$$f(x) = \lim_{p\to\infty} \lim_{m\to\infty} \sum_{k_1,\ldots,k_n=1}^{m} f(x_k) \prod_{l=1}^{n} \omega(\sigma_p, m, x_l, k_l, l). \tag{31.10}$$

Доказательство. Так же, как при доказательстве предыдущей теоремы, рассмотрим, для простоты, случай $n = 1$. Пусть $f \in W^1_{\alpha,+}$, тогда

$$f(u - i\sigma) = \int_0^\alpha g(t)\, e^{2\pi i t(u - i\sigma)} dt,$$

отсюда и из теоремы Планшереля

$$\| f(u - i\sigma)\|^2_{L^2_u} = \int_0^\alpha |g(t)|^2 e^{4\pi t\sigma} dt \leqslant e^{4\pi\alpha\sigma} \|g\|^2_{L^2},$$

поэтому

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u - i\sigma)\, du}{B_{\sigma,m}(u - i\sigma)(u - i\sigma - x)} \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f|^2 du}{|B_{\sigma,m}|^2} \times \right.$$

$$\left. \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{|u - i\sigma - x|^2} \right]^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\sigma}} \|f(u - i\sigma)\|_{L^2_u} \leqslant \frac{C}{\sqrt{\sigma}} e^{2\pi\alpha\sigma}.$$

Теперь из (31.8) и (30.8) вытекают первые утверждения теоремы, при этом бесконечное произведение Бляшке B_{σ_p} равномерно на компактах в $\mathbf{R}^1$ аппроксимируем конечными произведениями Бляшке B_{σ_p, m_p^0}. Аналогично получается последнее утверждение этой теоремы, только нужно сначала сделать предельный переход по m, а потом по p. □

* В обозначении ω из разд. 30 теперь добавляется аргумент σ, в котором не было нужды ранее, так как в разд. 30 σ было фиксировано.

Дополним еще теорему 31.4 замечанием, что если выполняется условие (31.8), в котором вместо нижнего предела рассматривается обычный предел, то и в утверждениях теоремы не нужно рассматривать последовательность $\{\sigma_p\}$ и вместо, например, формулы (31.10) следует писать формулу

$$f(x) = \lim_{\sigma\to\infty} \lim_{m\to\infty} \sum_{k_1,\ldots,k_n=1}^{m} f(x_k) \prod_{l=1}^{n} \omega(\sigma, m, x_l, k_l, l). \tag{31.11}$$

Чтобы выяснить, насколько условие (31.8) близко к необходимому, наложим на M дополнительные условия. Пусть для $l \in A$ мы иначе нумеруем точки множества $N_l = \{x_{lj}\}$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, и существует

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j=-m}^{m} \frac{1}{x_{lj}}. \tag{31.12}$$

Построим для $l \in A$ канонические целые функции

$$\psi_l(z_l) = \lim_{m\to\infty} \prod_{j=-m}^{m} \left(1 - \frac{z_l}{x_{lj}}\right) \tag{31.13}$$

с нулями на множествах N_l соответственно. Тогда функции Бляшке (31.7) можно выразить через канонические функции (31.13)

$$B_\sigma^l(z_l) = \frac{\psi_l(z_l)}{\psi_l(z_l + 2i\sigma)},$$

а условие (31.8) примет вид

$$\varliminf_{\sigma\to\infty} \frac{e^{2\pi\sigma\alpha_l} \, |\psi_l(x_l)|}{\sqrt{\sigma}\, |\psi_l(x_l + 2i\sigma)|} = 0. \tag{31.14}$$

Теперь можно сформулировать утверждение о том, насколько условие (31.14) близко к необходимому.

Предложение 31.5. *Если для* $l \in A = \{1, 2, \ldots, n\}$, $x \in \mathbf{R}^n$ *и достаточно больших* $\sigma > 0$

$$e^{2\pi\sigma\alpha_l} / |\psi_l(x_l + 2i\sigma)| \geqslant C \neq 0 \tag{31.15}$$

и $\psi_l \in L^2(\mathbf{R}^n)$, *то* M *не является множеством единственности для класса* $W^n_{\alpha,+}$.

Доказательство. Из (31.15) вытекает оценка

$$|\psi_l(x_l + 2i\sigma)| \leqslant C_1 e^{2\pi\sigma\alpha_l} \tag{31.16}$$

для достаточно больших $\sigma > 0$. Каноническая функция (31.13) действительна на действительной оси (в этом пункте все x_{lj} действительны), следовательно, в симметричных относительно этой оси точках она принимает одинаковые по модулю значения, поэтому из (31.16) следует, что $\psi_l \in W^1_{\alpha/2}$. Получаем, что произведение $\psi_1(z_1)\ldots\psi_n(z_n) \in W^n_{\alpha/2}$, значит, множество M не является множеством единственности для класса Винера $W^n_{\alpha/2}$, поэтому не является множеством единственности для класса $W^n_{\alpha,+}$.

Об условиях, при которых каноническая функция ψ входит в L^2, см. работу [160]. При некоторых ограничениях на нули можно указать асимптотику канонической функции (см. [116]), что позволяет нижний предел в (31.8) или (31.14) заменить на просто предел.

До сих пор предполагалось, что спектр Фурье рассматриваемых функций из класса Винера входит в $L^2(K)$, где K — компакт в $\mathbf{R}^n$. Если это условие заменить на более сильное требование: спектр Фурье входит в $L^p(K)$, где $2 \leqslant p \leqslant \infty$, то вместо $\sqrt{\sigma}$ в (31.8) или (31.14) нужно писать $\sigma^{1-1/p}$. Заметим, что в прикладных задачах спектр Фурье ограничен по модулю ($p = \infty$). В этом случае вместо (31.14) будет справедливо более слабое достаточное условие

$$\lim_{\sigma\to\infty} \frac{e^{2\pi\sigma\alpha_l}\,|\psi_l(x_l)|}{\sigma\,|\psi_l(x_l+2i\sigma)|} = 0. \tag{31.17}$$

3°. Рассмотрим, для простоты, случай $n = 1$ и множество $M = \{j\Delta\}$, $j = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, равномерных отсчетов — множество единственности для W^1_α, если $\Delta \leqslant 1/2\alpha$. *Множество единственности* назовем *минимальным*, если из него нельзя выбросить ни одной точки без нарушения свойства быть множеством единственности. *Множество единственности* назовем *избыточным*, если оно остается множеством единственности при выбрасывании любого своего конечного подмножества. Обычно в пространствах голоморфных функций множества единственности избыточны. Однако в классах Винера W^1_α и $W^1_{\alpha,+}$ есть и минимальные. Например, в классе $W^1_{1/2}$ множество целых точек $\{j\}$ есть минимальное множество единственности, что доказывается примером функции $\sin \pi x/(x - j_0)$, у которой нули — все целые точки, кроме j_0.

Чтобы понять причину минимальности, рассмотрим для множества M каноническую функцию

$$\psi(z) = \lim_{z\to\infty} z \prod_{j=-m}^{m}\left(1 - \frac{z}{\Delta j}\right) = \Delta \sin\frac{\pi}{\Delta} z.$$

Далее

$$|\psi(x+2i\sigma)| = (\Delta/2)\,e^{2\pi\sigma/\Delta}\,[1 + o(\sigma)],$$

и равенство (31.14) принимает вид

$$\lim_{\sigma\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\left|\sin\frac{\pi}{\Delta} x\right| \exp 2\pi\sigma\left(\alpha - \frac{1}{\Delta}\right) = 0. \tag{31.18}$$

В силу теоремы 31.4 выполнение (31.18) есть достаточное условие, чтобы M было множеством единственности для $W^1_{\alpha,+}$. Отсюда получаем аналогичное достаточное условие для W_α^1:

$$\lim_{\sigma\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \left|\sin\frac{\pi}{\Delta}x\right| \exp 2\pi\sigma\left(2\alpha - \frac{1}{\Delta}\right) = 0. \tag{31.19}$$

Каноническая функция $\psi(z) = \Delta \sin\frac{\pi}{\Delta} z$ не входит в класс $L^2(\mathbf{R}^1)$. Однако если выбросить из M какую-нибудь точку $j_0\Delta$, то новая каноническая функция уже входит в $L^2(\mathbf{R}^1)$. Согласно предложению 31.5 получаем достаточное условие на то, чтобы $M\setminus\{j_0\Delta\}$ не было множеством единственности в W_α^1,

$$\sigma \exp 2\pi\sigma\left(2\alpha - \frac{1}{\Delta}\right) \geqslant C \neq 0. \tag{31.20}$$

(31.20) должно выполняться для достаточно больших $\sigma > 0$. Отсюда, сравнивая (31.19) и (31.20), находим, что одновременно M и $M\setminus\{j_0\Delta\}$ являются множествами единственности для W_α^1 тогда и только тогда, когда $\Delta < 1/2\alpha$. Если же $\Delta = 1/2\alpha$, то M является множеством единственности, а $M\setminus\{j_0\Delta\}$ нет. Более того, выбросить из M какое-то конечное число l точек — это значит каноническую функцию $\psi(x + 2i\sigma)$ разделить на многочлен степени l от σ, т. е. умножить левую часть в (31.19) на этот многочлен. Как видим, что при $\Delta < 1/2\alpha$ это делать можно, не нарушая (31.19), а при $\Delta = 1/2\alpha$ нельзя даже при $l = 1$. Если же при $\Delta = 1/2\alpha$ выбросить l точек и вставить l новых, то условие (31.19) не нарушается.

Предложение 31.6. *Множество $M = \{j\Delta\}$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, при $\Delta < 1/2\alpha$ является избыточным множеством единственности для W_α^1, а при $\Delta = 1/2\alpha$ в M можно передвигать на свободное место любое конечное число точек, не нарушая свойства M быть минимальным множеством единственности для W_α^1. В обоих случаях верна формула*

$$f(x) = \lim_{\sigma\to\infty} \sum_{k=-m(\sigma)}^{m(\sigma)} \frac{f(x_k)\, e^{2\pi i\alpha(x_k - x)}\, 2i\sigma}{x - x_k + 2i\sigma} \prod_{\substack{j=-m(\sigma)\\ j\neq k}}^{m(\sigma)} \frac{(x - x_j)(x_k - x_j + 2i\sigma)}{(x - x_j + 2i\sigma)(x_k - x_j)}, \tag{31.21}$$

где $m(\sigma) > 0$ — любая функция при условии

$$\sup_\sigma \frac{\sigma^2}{m(\sigma)} < \infty. \tag{31.22}$$

Сходимость в (31.21) равномерна на компактах в $\mathbf{R}^1$.

Доказательство. Почти все уже обосновано перед формулировкой этого предложения. Нуждается в доказательстве только тот факт, что в (31.21) можно брать любую функцию $m(\sigma)$ положительного аргумента σ при условии (31.22). Верна формула типа (31.21), но с двумя пределами, как в (31.11). При оценке остаточного члена с помощью формулы (30.8) нам нужна не (31.14), а оценка, аналогичная (31.14), в которой вместо

$$|\psi(x+2i\sigma)| = \lim_{m\to\infty}\left|(x+2i\sigma)\prod_{\substack{j=-m\\ j\neq 0}}^{m}\left(1-\frac{x+2i\sigma}{\Delta j}\right)\right|$$

стоит

$$\left|(x+2i\sigma)\prod_{\substack{j=-m\\ j\neq 0}}^{m}\left(1-\frac{x+2i\sigma}{\Delta j}\right)\right|,$$

т. е. нужно в (31.14) отбросить

$$A_m = \lim_{k\to\infty}\left|\prod_{m<|j|\leqslant k}\left(1-\frac{x+2i\sigma}{\Delta j}\right)\right|.$$

Далее

$$\ln A_m = \lim_{k\to\infty}\sum_{j=m+1}^{k}\ln\left|1-\left(\frac{x+2i\sigma}{\Delta j}\right)^2\right| \leqslant \lim_{k\to\infty}\sum_{j=m+1}^{k}\ln\left(1+\left|\frac{x+2i\sigma}{\Delta j}\right|^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=m+1}^{\infty}\frac{|x+2i\sigma|^2}{\Delta^2 j^2} = \frac{|x+2i\sigma|^2}{\Delta^2}O\left(\frac{1}{m}\right),$$

поэтому

$$A_m \leqslant \exp\frac{C}{\Delta^2}\frac{x^2+4\sigma^2}{m}, \quad |\psi(x+2i\sigma)| = \Delta\left|\sin\frac{(x+2i\sigma)\pi}{\Delta}\right| =$$

$$= A_m\left|(x+2i\sigma)\prod_{\substack{j=-m\\ j\neq 0}}^{m}\left(1-\frac{x+2i\sigma}{\Delta j}\right)\right| \leqslant \left|(x+2i\sigma)\prod_{\substack{j=-m\\ j\neq 0}}^{m}\left(1-\frac{x+2i\sigma}{\Delta j}\right)\right| \times$$

$$\times \exp\frac{C}{\Delta^2}\frac{x^2+4\sigma^2}{m},$$

откуда

$$\left|\left(x+2i\sigma\right)\prod_{\substack{j=-m\\ j\neq 0}}^{m}\left(1-\frac{x+2i\sigma}{\Delta j}\right)\right|^{-1} \leqslant \frac{\exp\dfrac{C}{\Delta}\dfrac{x^2+4\sigma^2}{m}}{\Delta\left|\sin\dfrac{\pi(x+2i\sigma)}{\Delta}\right|}. \qquad (31.23)$$

Таким образом, нужная оценка выполняется равномерно на компактах из $\mathbf{R}^1$, если $m = m(\sigma)$ удовлетворяет условию (31.22). □

Аналогичное предложению 31.6 утверждение верно и при $n > 1$. В этом случае *множество единственности* $M = N_1 \times \ldots \times N_n$ назовем *минимальным*, если ни в одном N_l, $I = 1, \ldots, n$, нельзя выбросить ни одной точки, не нарушая свойства M быть множеством единственности.

Обсудим теперь возможность передвигать в равномерной сетке Котельникова все точки. Пусть $x_{lj} = j\Delta_l + c_{lj}$, где $|c_{lj}| \leqslant L_l$, $l = 1, \ldots$

..., n. Используя точную оценку Левина [115] снизу для $|\psi_l|$, докажем следующее утверждение.

Предложение 31.7. *Для всякой функции $f \in W^{1}_{\alpha}$ верна формула со сходимостью в $\mathbf{R}^n$ (равномерной на компактах)*

$$f(x) = \lim_{\sigma\to\infty} \sum_{k_1, \ldots, k_n = -m(\sigma)}^{m(\sigma)} f(x_k) \exp[2i\langle\alpha, x_k - x\rangle] \prod_{l=1}^{n} \omega(\sigma, m(\sigma), x_k, k_l, l), \tag{31.24}$$

где в каждое ω входят соответствующие дроби при j от $-m(\sigma)$ до $m(\sigma)$ и $j \neq k_l$, а $m(\sigma)$ удовлетворяет условию (31.22), в следующих случаях:

1) *при любых L_l, если $\Delta_l < 1/2\alpha_l$, $l = 1, \ldots, n$,*
2) *при условии*

$$L_l < \frac{1}{8\alpha_l}, \quad l = 1, \ldots, n, \tag{31.25}$$

если $\Delta_l = 1/2\alpha_l$, и конечное число точек x_{lj} передвинуто на любое свободное место.

Если спектр Фурье функции $f(x)$ ограничен по модулю, то условие (31.25) можно заменить на

$$L_l < \frac{1}{4\alpha_l}, \quad l = 1, \ldots, n. \tag{31.26}$$

Доказательство. Для канонической функции ψ_l, построенной по точкам $x_{lj} = j\Delta_l + c_{lj}$, где $|c_{lj}| \leqslant L_l$, $l = 1, \ldots, n$, верна *оценка Б. Я. Левина*

$$|\psi_l(x_l + iy_l)| \geqslant C \frac{\left(\exp\frac{\pi}{\Delta_l}|y_l|\right)|y_l|^{2L_l/\Delta_l}}{|x_l + iy_l|^{4L_l/\Delta_l}}. \tag{31.27}$$

Аналогично (31.23) получаем при $m > L_l + 1$, $l = 1, \ldots, n$,

$$\left|\prod_{j=-m}^{m}\left(1 - \frac{x_l + 2i\sigma}{x_{lj}}\right)\right|^{-1} \leqslant C_1 \frac{\exp C_2 \dfrac{x_l^2 + 4\sigma^2}{m - L_l - 1}}{\exp\dfrac{\pi}{\Delta_l}2\sigma}\left(\frac{x_l^2 + 4\sigma^2}{2\sigma}\right)^{2L_l/\Delta_l},$$

а из (31.22) и $\Delta_l < 1/2\alpha_l$ вытекает (31.14) при любом L_l. Если же $\Delta_l = 1/2\alpha_l$ (максимальное расстояние по Котельникову), то (31.14) верно при условии (31.25). В случае, когда спектр Фурье функции $f(x)$ ограничен по модулю, то вместо (31.14) нужно рассматривать (31.17), что справедливо при условии (31.26). Соответствующие оценки достигаются равномерно на действительных компактах. □

Следствие 31.8 (Левинсон). *В случаях 1) и 2) из предложения 31.7 множество M есть множество единственности (в пер-*

вом случае — избыточное, во втором — минимальное) для класса Винера W_α^n. При этом оценка (31.26) *точна.*

Доказательство. Большая часть утверждений этого следствия сразу вытекает из предложения 31.7, так как в этом предложении не просто доказано, что M — множество единственно, а дан способ восстановления функции $f \in W_\alpha{}^n$ по значениям на M с помощью формулы (31.24). Докажем точность оценки (31.26). Например, при $n = 1$ и $L = 1/4\alpha = \Delta/2$ можно следующим образом выбрать c_j:

$$c_j = \begin{cases} \dfrac{\Delta}{2}, & j \geqslant 0, \\ -\dfrac{\Delta}{2}, & j < 0. \end{cases}$$

Тогда получится множество $\widetilde{M} = \left\{\left(j + \frac{1}{2}\right)\Delta\right\}$, $j = 0, 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ $\widetilde{M} = M \setminus \left\{-\frac{1}{2}\Delta\right\}$, где $M = \left\{\left(j + \frac{1}{2}\right)\Delta\right\}$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 3, \ldots$ — минимальное множество единственности для W_α^1, значит, $\widetilde{M}$ уже не является множеством единственности. Противоречие. □

4°. Предыдущие результаты (см. пп. 2°, 3°) показывают, что указанные интерполяционные формулы позволяют восстанавливать функции класса Винера $W_{\alpha,+}^n$ по значениям на множествах единственности M при выполнении некоторых достаточных условий на то, чтобы множество было множеством единственности для класса $W_{\alpha,+}^n$, весьма близких к необходимым (аналогично для функций класса Винера W_α^n). Возникает гипотеза, что, например, формула (31.11) верна для любой функции $f \in W_{\alpha,+}^n$ и любого множества M единственности этого класса $W_{\alpha,+}^n$. Не имея пока доказательства этой гипотезы, приведем результат, показывающий, что это действительно так при некоторых дополнительных условиях на множество M. Для простоты ограничимся случаем $n = 1$.

Множество M назовем *картрайтовским* для класса $W_{\alpha,+}^1$, если из $|f(x_k)| \leqslant \varepsilon$ для $f \in W_{\alpha,+}^1$, $x_k \in M$, следует $|f(x)| \leqslant C_M \varepsilon$ для всех $x \in \mathbf{R}^1$, где постоянная C_M зависит лишь от множества M и не зависит от f (о теореме Картрайт, утверждающей, что для равномерной сетки при $\Delta < 1/2\alpha$ это верно, и ее обобщениях см. [116, 115, 117, 119, 154]).

Левин ввел понятие некоторой регулярности распределения точек $x_k \in M$, назвав множество M в случае выполнения условий этой регулярности R-множеством (см. [116, с. 611]). Пусть $h_f(\theta)$ — индикатор целой функции f, а $H(\theta)$ — индикатор множества M (т. е. индикатор канонической функции этого множества), $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Оказалось, что требование, чтобы M было R-множеством (или несколько более слабое требование, чтобы M было «правильным множеством», см. [116]), а также, чтобы $h_f(\theta) < H(\theta)$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, является широким достаточным условием представимости целой функции интерполяционным рядом Лагранжа с узлами интерполяции из множества M (см. [116, гл. IV, § 4]).

Наконец, ниже будет указано еще одно дополнительное условие. Не всякое множество единственности для класса Винера содержит минимальное множество единственности; следовательно, требование, чтобы M содержало минимальное множество единственности, является дополнительным условием. Наконец, запишем формулу (31.11) при $n = 1$ в виде

$$f(x) = \lim_{\sigma\to\infty} \varphi_\sigma(x), \tag{31.28}$$

где

$$\varphi_\sigma(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{f(x_k)\, 2i\sigma}{x - x_k + 2i\sigma} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m} \frac{(x - x_j)(x_k - x_j + 2i\sigma)}{(x - x_j + 2i\sigma)(x_k - x_j)}. \tag{31.29}$$

Если M — множество единственности для класса Харди $H^2(D_\sigma)$, то для всякой функции $f \in W^1_{\alpha,+}$ каждая $\varphi_\sigma(x)$ совпадает с f, поэтому (31.28) верно тривиальным образом. Если же M не является таковым, то $\varphi_\sigma(x)$ есть наилучшее приближение к $f(x)$ в метрике $H^2(D_\sigma)$.

Теорема 31.9 (Айзенберг). 1. *Если множество M является картрайтовским для класса $W^1_{\alpha,+}$ с соответствующей постоянной C_M, то (31.28) верно для всякой функции $f \in W^1_{\alpha,+}$ с равномерной сходимостью на $\mathbf{R}^1$, при этом*

$$|f(x) - \varphi_\sigma(x)| \leqslant \frac{C_M + 1}{2\sqrt{\sigma\pi\alpha}} \|f\|_{L^2}. \tag{31.30}$$

2. *Если множество M содержит минимальное множество единственности для $W^1_{\alpha,+}$, то для $f \in W^1_{\alpha,+}$ справедливо равенство (31.28) с равномерной сходимостью на компактах.*

3. *Если для множества M и функции $f \in W^1_{\alpha,+}$ выполняются достаточные условия Левина для представимости f интерполяционным рядом Лагранжа, то верно (31.28) равномерно на компактах.*

Доказательство. Ограничимся доказательством первого утверждения теоремы. Пусть $f \in W^1_{\alpha,+}$, значит (см. (30.1))

$$f(x) = \int_0^\alpha g(\omega)\, e^{2\pi i x\omega} d\omega, \tag{31.31}$$

а $\psi_\sigma(\omega)$ — преобразование Фурье функции $\varphi_\sigma(x)$ из (31.29). Носитель $\psi_\sigma(\omega)$ лежит на положительном луче $\mathbf{R}^1_+$ (ср. [100, с. 162]). Представим $\psi_\sigma(\omega)$ в виде $\psi_\sigma^1(\omega) + \psi_\sigma^2(\omega)$, где $\operatorname{supp}\psi_\sigma^1 \subset [0, \alpha]$, а $\operatorname{supp}\psi_\sigma^2 \subset [\alpha, +\infty)$. Соответственно, функцию $\varphi_\sigma(x)$ представим в виде $\varphi_\sigma^1(x)+\varphi_\sigma^2(x)$, где φ_σ^i — обратное преобразование Фурье вида (31.31) от ψ_σ^i, $i=1, 2$. Тогда $\varphi_\sigma^1 \in W^1_{\alpha,+}$, а $\varphi_\sigma^2 \in \mathrm{H}^2(D_\sigma)$ при всяком $\sigma>0$. Далее

$$\|\varphi_\sigma(x-i\sigma)\|^2_{L^2_x} \leqslant \|f(x-i\sigma)\|^2_{L^2_x} =$$

$$= \int\limits_0^\alpha |g(\omega)|^2 e^{4\pi\sigma\omega}\, d\omega \leqslant e^{4\pi\sigma\alpha} \|g\|^2_{L^2} = e^{4\pi\sigma\alpha}\|f(x)\|^2_{L^2},$$

поэтому, отмечая, что преобразование Фурье от $\varphi_\sigma(x)$ есть преобразование Фурье от $\varphi_\sigma(x-i\sigma)$, умноженное на $\exp(-2\pi\omega\sigma)$,

$$|\varphi_\sigma^2(x)| \leqslant \int\limits_\alpha^\infty |\psi_\sigma^2(\omega)|\, d\omega = \int\limits_\alpha^\infty \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\sigma(x-i\sigma)\, e^{-2\pi i\omega x}\, dx \right| e^{-2\pi\omega\sigma}\, d\omega \leqslant$$

$$\leqslant \left[e^{4\pi\sigma\alpha} \|f(x)\|^2_{L^2} \int\limits_\alpha^\infty e^{-4\pi\omega\sigma}\, d\omega \right]^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sigma}} C_f,$$

где

$$C_f = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} \|f\|_{L^2}.$$

По построению в каждой точке $x_j \in M$ имеет место равенство $f(x_j) = \varphi_\sigma(x_j) = \varphi_\sigma^1(x_j) + \varphi_\sigma^2(x_j)$, откуда получаем

$$|f(x_j) - \varphi_\sigma^1(x_j)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\sigma}} C_f,$$

следовательно, для всех $x \in \mathbf{R}^1$ верно

$$|f(x) - \varphi_\sigma^1(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\sigma}} C_M C_f,$$

так как $f - \varphi_\sigma^1 \in W^1_{\alpha,+}$. И, наконец,

$$|f(x) - \varphi_\sigma(x)| \leqslant |f(x) - \varphi_\sigma^1(x)| + |\varphi_\sigma^2(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\sigma}} C_M C_f + \frac{1}{\sqrt{\sigma}} C_f. \quad \square$$

5°. В случае равномерных отсчетов множество функций (31.4) является ортогональной системой при интегрировании на $\mathbf{R}^1$. Если же отсчеты неравномерны, то множество

$$\sin 2\pi\alpha(x-x_k)/2\pi\alpha(x-x_k), \quad k=1, 2, 3, \ldots, \tag{31.32}$$

уже таковым не будет, но его можно ортогонализовать обычным способом (см., например, [86]) и получить уже ортогональную систему

$$\varphi_k(x) = \sum_{j=1}^k a_{jk} \frac{\sin 2\pi\alpha(x-x_j)}{2\pi\alpha(x-x_j)}, \quad k=1, 2, 3, \ldots.$$

Предложение 31.10. *Если M — множество единственности для $W_\alpha{}^1$, то для всякой функции $f \in W_\alpha{}^1$ верна формула со сходимостью в смысле $H^2(Q_\sigma)$ при всяком $\sigma > 0$ (и тем более равномерной на компактах из $\mathbf{R}^1$ и в смысле $L^2(\mathbf{R}^1)$*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} a_{jk} f(x_j) \right) \varphi_k(x). \qquad (31.33)$$

Нетрудно получить и многомерное обобщение (31.33). В случае равномерных отсчетов (т. е. в случае, когда вместо (31.32) рассматривается (31.4)) каждая φ_k — одна из функций (31.4) и из (31.33) получается классическая формула Котельникова (31.1). Однако для неравномерных отсчетов (31.33) не имеет простоты формула (31.1), коэффициенты a_{jk} вычисляются довольно громоздко (нужно считать определители порядка k) и для приложений, видимо, удобнее пользоваться формулами из п. 1° — 4°. Для конечного числа отсчетов m и σ фиксированы, и эти формулы хорошо интерполируют даже для неравномерных отсчетов с большими пропусками (см. разд. 33).

6°. Заметим, что для экстраполяции спектров Фурье финитных сигналов (множество M — на компакте) нужно знать $f(x_k)$ с высокой точностью (см. разд. 32), а для интерполяции между отсчетами высокая точность $f(x_k)$ уже не обязательна (см. разд. 33). Дело в том, что задача экстраполяции не является корректной, а лишь условно устойчивой (об этих понятиях см. в [111]). Задача же интерполяции обычно корректна. Для равномерной сетки Котельникова при $\Delta < 1/2\alpha$ это следует из теоремы Картрайт, которая доказана и для многих случаев неравномерных отсчетов (см. [116, 115, 117, 119, 154]), но всегда для избыточных множеств единственности. Обратное неверно: опираясь на пример из работы [212] можно, как любезно сообщил автору Б. Я. Левин, построить избыточное множество единственности, для которого рассматриваемая задача интерполяции некорректна.

7°. Рассмотрим имеющую физический смысл задачу экстраполяции амплитуды (модуля) спектра Фурье f финитного сигнала. Пусть $\varphi(z) = f(z)\overline{f(\bar{z})}$, где в наше случае $f(z)$ и $\overline{f(\bar{z})}$ входят в класс $H^2(Q_\sigma)$, поэтому $\varphi(z) \in H^1(Q_\sigma) \cap H^\infty(Q_\sigma) \subset H^2(Q_\sigma)$, так как

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\varphi|^2\, dx \leqslant \max_{\mathbf{R}^n} |\varphi| \int_{\mathbf{R}^n} |\varphi|\, dx.$$

На действительном подпространстве $\mathbf{R}^n$ функция $\varphi(x) = |f(x)|^2$. Итак, для экстраполяции или интерполяции $|f(x)|^2$ можно использовать формулы (30.20), (30.21). Еще более просто это обосновывается, если $f(x)$ действительна, тогда $|f(x)|^2 = (f(x))^2$ — спектр автокорреляции исходного сигнала.

Физический смысл имеет и задача экстраполяции фазы (аргумента) спектра Фурье финитного сигнала. Рассматриваемые методы можно применять при дополнительном условии $\ln f(z) \in \mathring{H}^2(Q_\sigma)$; в частности, спектр не должен иметь нулей в Q_σ. Тогда $\arg f = \operatorname{Im} \ln f(z)$ и применимо следствие 30.14.

8°. В связи с проблемами вычислительной томографии [204, 232], при восстановлении пространственной картины землетрясений [222] и в других прикладных задачах встречается необходимость обращения преобразования Радона по неполным данным. Этому вопросу посвящена работа [226], в которой указанное обращение сведено к восстановлению спектра Фурье на прямой, если значения его известны на всей прямой, кроме некоторого интервала $(-\rho, \rho)$, т. е. к задаче интерполяции спектра Фурье. В этом случае применимы методы этого раздела и можно обойтись более простым вариантом, рассмотренном в п. 1°, т. е. формулой (30.22).

С другой стороны, возможно, что лучше использовать формулу (31.21), следующим образом выбирая множество отсчетов: $M_\rho = \{j\Delta\} \setminus (-\rho, \rho)$, где $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $\Delta < 1/2\alpha$. Согласно предложению 31.6 M_ρ есть такое множество единственности для W_α^1, для которого верна формула (31.21). Но можно утверждать большее: задача интерполяции, в которой рассматриваются $f(x_k)$, $x_k \in M_\rho$, корректна при любом ρ. Пусть на интервале $(-\rho, \rho)$ содержится p точек вида $j\Delta$. Число p нечетно.

Предложение 31.11. *Если целая функция конечной степени f типа $\leqslant 2\pi\alpha$ и для $x \in M_\rho$ верно неравенство $|f(x)| \leqslant \varepsilon$, то для любого $x \in \mathbf{R}^1$*

$$|f(x)| \leqslant C_p \varepsilon, \tag{31.34}$$

где

$$C_p = \frac{(p+1)^{p+1}}{p^p \cos^2 \pi\Delta\alpha \sin \dfrac{\pi(1-2\alpha\Delta)}{2} \prod\limits_{k=1}^{(p-1)/2} \sin^2 \dfrac{\pi(1-2\alpha\Delta)}{2p}(2k-1)} \tag{31.35}$$

Доказательство основано на следующей *оценке Бернштейна* (см. [43, с. 448, 607]): пусть $M^\mu = \{x_j\}$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $0 < x_{j+1} - x_j \leqslant 1/2\alpha\mu$, где $\mu > 1$ — целое число, тогда

$$|f(x)| \leqslant \varepsilon / \cos \frac{\pi}{2\mu} \tag{31.36}$$

для $x \in \mathbf{R}^1$. Оценка (31.36) точна хотя бы для некоторых μ. Рассмотрим целую функцию

$$g(x) = f(x) \prod_{j=-[(p-1)/2]}^{(p-1)/2} \sin 2\pi\sigma(x - j\Delta),$$

где число $\sigma > 0$ выбрано так, чтобы $2\Delta(p\sigma + \alpha) < 1$. Тип этой функции $\leqslant 2\pi(p\sigma + \alpha)$. Согласно (31.36) для $x \in \mathbf{R}^1$

$$|f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\cos \pi\Delta(p\sigma + \alpha) \left| \prod\limits_{j=-[(p-1)/2]}^{(p-1)/2} \sin 2\pi\sigma(x - j\Delta) \right|}.$$

На множестве $\widetilde{M}=\left\{\frac{\Delta}{2}+j\Delta\right\}$, $j=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\frac{p-1}{2}, -\frac{p+1}{2}$, справедливо неравенство

$$\left|\prod_{j=-(p-1)/2}^{(p-1)/2} \sin 2\pi\sigma(x-j\Delta)\right| \geqslant \sin p\pi\sigma\Delta \prod_{j=1}^{(p-1)/2} \sin^2 \pi\Delta\sigma(2j-1),$$

поэтому для $x \in M_\rho \cup \widetilde{M}$

$$|f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\cos \pi\Delta(p\sigma+\alpha) \sin p\pi\Delta\sigma \prod\limits_{k=1}^{(p-1)/2} \sin^2 \pi\Delta\sigma(2k-1)}.$$

Далее вновь применяем неравенство (31.36) и, учитывая, что

$$p\pi\Delta\alpha < \pi(1-2\alpha\Delta), \quad \cos\pi\Delta(\alpha+p\sigma) \geqslant \left(1-\frac{2p\Delta\sigma}{1-2\alpha\Delta}\right)\cos\pi\Delta\alpha,$$

$$\sin j\pi\Delta\sigma \geqslant \frac{2\pi\sigma\Delta}{1-2\alpha\Delta} \sin\frac{j}{2p}\pi(1-2\alpha\Delta), \quad j=1, 3, \ldots, p,$$

получаем

$$|f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\left(\frac{2p\Delta\sigma}{1-2\alpha\Delta}\right)^p \left(1-\frac{2p\Delta\sigma}{1-2\alpha\Delta}\right)\cos^2 \pi\alpha\Delta \sin\frac{\pi(1-2\alpha\Delta)}{2}} \times$$
$$\times \left[\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \sin^2 \frac{\pi(1-2\alpha\Delta)}{2p}(2k-1)\right]^{-1}. \tag{31.37}$$

Знаменатель правой части (31.37) достигает своего максимума при

$$\sigma = (1-2\alpha\Delta)/2(p+1)\Delta. \tag{31.38}$$

При указанном выборе σ из (31.37) получаем неравенство (31.34). Вычислительный эксперимент, связанный с предложением 31.11 описан в разд. 33.

Укажем без доказательства два многомерных обобщения этого предложения. Обозначим через M произведение n равномерных (по отсчетам) множеств вида $\{j\Delta\}$ где $\Delta < 1/2\alpha$. Пусть $M_\rho^n = M \setminus \{x\colon\ x_j \in (-\rho, \rho),\ j=1, \ldots, n\}$, $\widetilde{M}_\rho^n = M \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} \{x\colon\ x_j \in (-\rho, \rho),\ j=1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n\}$. В следующем предложении f — целая функция конечной степени по каждому переменному типа $\leqslant 2\pi\alpha$ (т. е. мы для простоты рассматриваем случай $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \alpha$, в общем случае оценки более громоздки).

Предложение 31.12 (Айзенберг — Кравцов — Шаимкулов). *Если для* $x \in M_\rho^n$ (*для* $x \in \widetilde{M}_\rho^n$) *верно* $|f(x)| \leqslant \varepsilon$, *то для* $x \in \mathbf{R}^n$

$$|f(x)| \leqslant \frac{(p+n)^{p+n}\,\varepsilon}{n^n p^p \cos^{2n}\pi\Delta\alpha \sin\frac{\pi(1-2\alpha\Delta)}{2} \prod\limits_{k=1}^{(p-1)/2} \sin^2\frac{\pi(1-2\alpha\Delta)}{2p}(2k-1)} \tag{31.39}$$

(*соответственно*

$$|f(x)| \leqslant C_p^n \varepsilon, \tag{31.40}$$

где C_p *задано в* (31.35)).

Заметим, что из (31.39) и (31.40) при $n = 1$ получается (31.34) и что C_p растет с возрастанием ρ или Δ.

В заключение этого раздела упомянем более тонкую оценку Бернштейна, чем (31.36) (см. [43, с. 454]). Если взять σ из (31.38) и применить к функции $g(x)$ эту оценку, то вместо (31.34) можно получить

$$|f(x)| \leqslant \frac{L_N \varepsilon}{\cos\pi\Delta\alpha \sin\frac{\pi(1-2\alpha\Delta)}{2} \prod\limits_{k=1}^{(p-1)/2} \sin^2\frac{\pi(1-2\alpha\Delta)}{2p}(2k-1)}, \tag{31.41}$$

где $L_N = \frac{1}{N}\left[\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2N}} + \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{2N}} + \ldots + \frac{1}{\sin\frac{2N-1}{2N}\pi}\right]$; N — целое число, не меньшее, чем $(p+1)(1-2\alpha\Delta)^{-1}$. Можно дать и многомерные обобщения (31.41), рассматривая множества M_ρ^n или $\widetilde{M}_\rho^n$ как в предложении 31.12.

ГЛАВА 9

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

32. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ СПЕКТРА ФУРЬЕ ОДНОМЕРНЫХ ФИНИТНЫХ СИГНАЛОВ. СВЕРХРАЗРЕШЕНИЕ

1°. При проведении вычислительного эксперимента по экстраполяции спектра Фурье одномерных финитных сигналов использовалась формула (30.4), в которой $\sigma > 0$ заменено на $-\sigma$ (см. соответствующее замечание в разд. 30). Все вычисления делались с двойной точностью. Вначале рассматривалась простейшая функция $f = (x - 2 - 2i)^{-1}$ из класса Харди H^2 и точки x_k из отрезка [0, 1]. Для функций этого класса формула (30.4) (с заменой σ на $-\sigma$) верна для $0 < \sigma \leqslant 2$. Оказалось, что при $\sigma = 1/2$, $m = 22$ функция f была аналитически продолжена с хорошей точностью (ошибка менее 0,1 %) с отрезка [0, 1] на отрезок [0, 30].

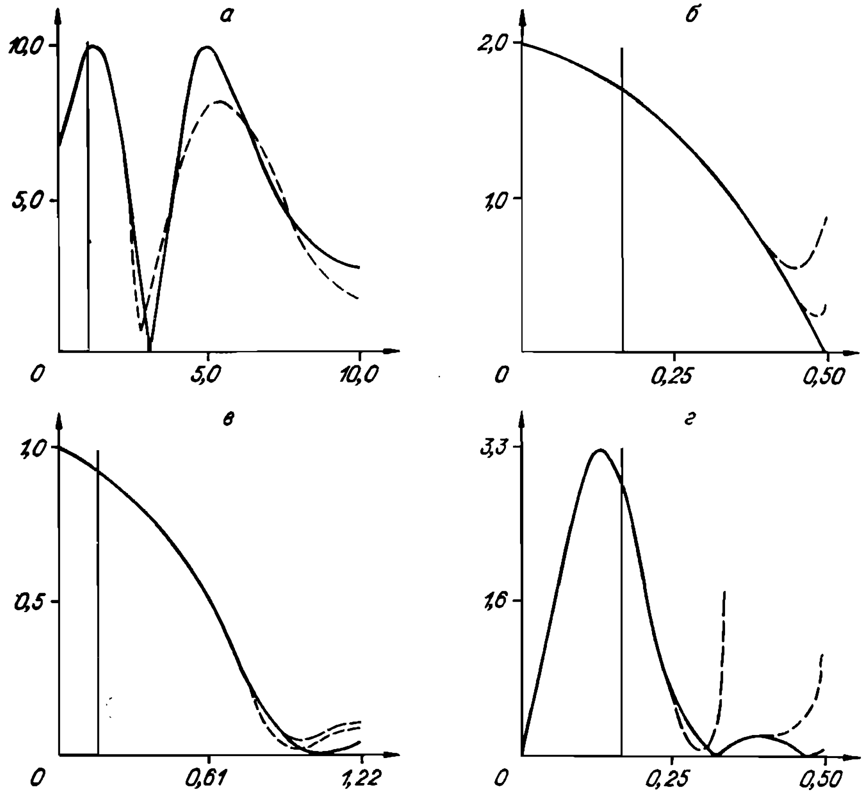

Рис. 1.

Далее взяли более сложную функцию

$$f(x) = 10\left(\frac{1-i}{x-2-i} + \frac{1+i}{x-4-i}\right),$$

точки x_k — опять из $[0, 1]$, программа оптимизации аналитического продолжения (сравнивающая продолжение, выданное ЭВМ, с точной формулой) выдала оптимальные значения $m = 11$, $\sigma = 1{,}12$. Результаты экстраполяции см. на рис. 1, *а*. Здесь и далее показана экстраполяция амплитуды функции (спектра), аналогичные рисунки можно было бы привести и для фазы. Вертикальной чертой на графике указан тот участок (начинающийся от нуля), на котором брали точки x_k. Далее рассматривался прямоугольный сигнал (результаты оптимизации $m = 14$, $\sigma = 0{,}59$), треугольный сигнал ($m = 10$, $\sigma = 0{,}42$), сигнал — кусок синусоиды от 0 до 2π ($m = 10$, $\sigma = 0{,}23$). Экстраполяцию спектров этих сигналов см. на рис. 1, *б*, 1, *в* и 1, *г* соответственно. На тех же рисунках показана экстраполяция (естественно, несколько худшая) тех же спектров при «среднеоптимальных» параметрах m и σ (одинаковых для всех трех спектров) $m = 11$, $\sigma = 0{,}41$ (сплошная линия — точная функция, штриховая — оптимальная экстраполяция, длинноштриховая — среднеоптимальная экстраполяция).

Во всех указанных вычислениях значения $f(x_k)$ вводились в ЭВМ с двойной точностью. Если же вводить их с одинарной точностью, то полоса частот, на которую удается сделать аналитическое продолжение, уменьшается в 5—6 раз. Этот факт, а также то, что в реальных вычислениях m нельзя брать слишком большим, объясняется следующей особенностью формулы (30.4): при росте m или x слагаемые в (30.4) растут по абсолютной величине (это обычное свойство интегральных формул Карлемана и их дискретных аналогов, например формулы (30.4)). Если бы $f(x_k)$ были введены в ЭВМ точно и все вычисления были сделаны абсолютно точно, то чем больше m, тем на больший отрезок можно было бы аналитически продолжить $f(x)$. Но в реальных вычислениях на ЭВМ это невозможно и неточность в $f(x_k)$ (а также неточность в подсчете значений дробей в (30.4)) приводит к тому, что слагаемые в (30.4) перестают друг друга гасить и далее экстраполяция уже не получается.

Если же вводить значения $f(x_k)$ в ЭВМ с большой точностью, то следует ожидать, что полоса возможной экстраполяции значительно возрастет.

2°. Рассматриваемый метод аналитического продолжения спектра может применяться двумя принципиально разными способами:

1) спектр Фурье в x_k вычисляется на ЭВМ;

2) спектр Фурье в x_k сразу измеряется на физическом приборе.

Данный раздел посвящен только первому способу.

Обычно при вычислении спектра Фурье на ЭВМ непрерывное преобразование Фурье заменяют дискретным. В нашем случае это нежелательно. Дело в том, что дискретное преобразование Фурье хотя и является голоморфной функцией, но не входит в класс Харди H^2. В частности, оно неинтегрируемо с квадратом (не входит в класс $L^2[(-\infty, \infty)]$). И если применять данный метод, то надо брать очень много точек сигнала, чтобы вычислить $f(x_k)$ с очень большой точностью и этим компенсировать указанный недостаток. И еще надо иметь в виду, что алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ) сходится медленно (см. [89]).

Предполагается вычислять спектр Фурье иначе: ввиду дискретизации сигнала применять не дискретное преобразование Фурье, а заменять дискретный сигнал непрерывным ступенчатым или ломаным, т. е. сигнал будет или суммой прямоугольных сигналов, или ломаной линией. От каждого звена такого сигнала спектр Фурье можно задать точной формулой, а ЭВМ будет поручено только сложить эти элементарные спектры. Данное сложение можно сделать, в частности, применив несколько раз БПФ. При не очень большом числе точек (так обычно и бывает на реальных физических приборах) сложение не внесет существенной погрешности, поэтому $f(x_k)$ удастся ввести очень точно.

Задача экстраполяции спектра Фурье финитного сигнала не является корректной, но условно устойчива. Если точные значения $f(x_k)$ заменить точными же значениями другого спектра $f_1(x_k)$ так, чтобы соответствующие сигналы $g(t)$ и $g_1(t)$ мало отличались в смысле средних квадратичных то и весь спектр $f_1(x)$ будет в силу равенства Парсеваля мало отличаться в смысле средних квадратичных от спектра $f(x)$. Если же просто заменять $f(x_k)$ какой-то зашумленной функцией $f(x_k)+ + n_k$, то ошибка при экстраполяции может стать очень большой. На рис. 2 показана экстраполяция спектра треугольного сигнала, представленного как сумма 9 прямоугольных сигналов ($m = 12$, $\sigma = 0{,}44$).

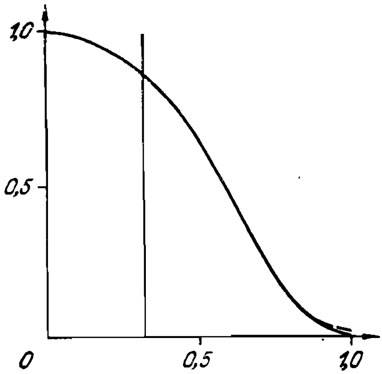

Рис. 2.

3°. Был проведен вычислительный эксперимент на сверхразрешимость. Рассматривались два прямоугольных сигнала, на их суммарном спектре «отрезаны» частоты, начиная с 0,25. Затем (моделируя плохую разрешимость прибора из-за узкой полосы пропускания частот) сделано обратное преобразование Фурье и показано, что в этом случае два прямоугольных сигнала сливаются в один (разрешения нет). После этого полоса частот с помощью формулы (30.4) была расширена в два раза до 0,50, а затем сделано обратное преобразование Фурье, в результате разрешение появилось (рис. 3).

Для задачи аналитического продолжения спектра Слепян предложил метод разложения в ряд по системе функций с двойной ортогональностью — так называемых «волновых вытянутых сфероидальных функций» (см. [169, 51, 135, 236, 159]). Однако реального приложения этот метод не получил, по-видимому, из-за того, что метод сложен и при его применении было очень трудно (несмотря на использование современных ЭВМ) справиться с некорректностью задачи (см. [129]). Был проведен лишь вычислительный эксперимент на сверхразрешение (см. [206]), но «разрешались» не два реальных сигнала, а две δ-функции. Другой (итерационный) метод предложили Гершберг и Папулис (см. [207, 227]). Формула (30.4) дает более простое решение задачи аналитического продолжения спектра, что позволяет надеяться на более успешное применение метода. И метод Слепяна и рассматриваемый метод являются аналитическим продолжением в его чистом виде. Ряд методов

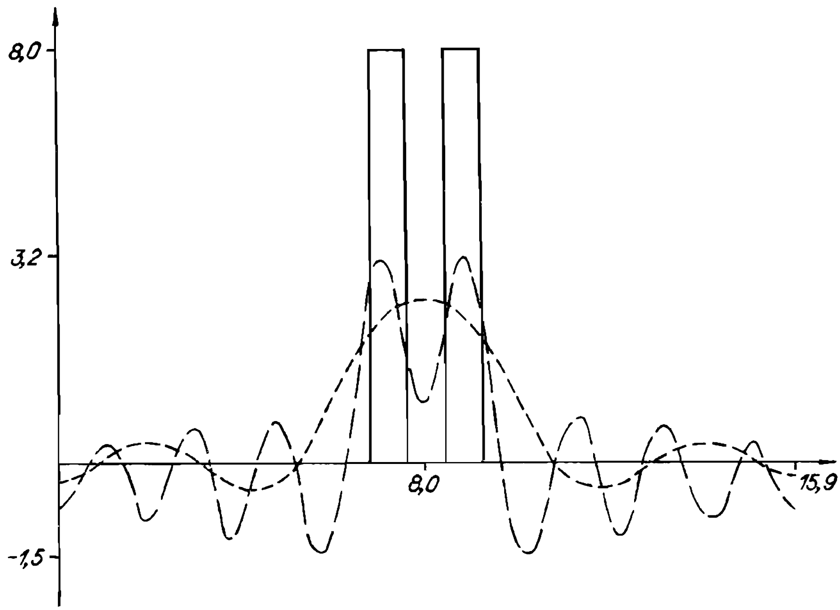

Рис. 3.

(в том числе — нелинейные) направлены на регуляризацию данной задачи, что, естественно, «ограничивает возможности экстраполяции спектра» ([51, с. 176]), но зато делает эту экстраполяцию более помехоустойчивой. Вероятно, можно получить хорошие результаты, если сочетать рассматриваемый метод с регуляризацией.

Обычно предполагают, что большинство физических приборов работают как свертка (см. [169, 51, 135, 159, 111])

$$F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,h(y-x)\,dx, \tag{32.1}$$

где $f(x)$ — входной сигнал; $F(y)$ — сигнал, выдаваемый прибором на выходе; $h(x)$ — отклик прибора на воздействие, описываемое δ-функцией Дирака ($h(x)$ называют импульсной переходной функцией или аппаратной функцией рассматриваемого прибора).

В различных областях физики и техники возникают задачи, приводящие к необходимости решения интегрального уравнения (32.1). Так, в оптике это нужно при попытке исключить влияние дифракции в телескопе, микроскопе или спектрографе, в радиоастрономии — при устранении сглаживающего воздействия антенны, в радиотехнике — при необходимости восстановления формы входного импульса по импульсу на выходе фильтра, в антенной технике — при восстановлении диаграммы направленности по данным измерений и т. д.

Пусть $\tilde{f}(\omega)$, $\tilde{F}(\omega)$ и $\tilde{h}(\omega)$ — преобразования Фурье функций $f(x)$, $F(x)$ и $h(x)$ соответственно. Тогда из (32.1) следует $\tilde{F}(\omega) = \tilde{h}(\omega)\tilde{f}(\omega)$, откуда

$$\tilde{f}(\omega) = \tilde{F}(\omega)/\tilde{h}(\omega). \quad (32.2)$$

Равенство (32.2) позволяет вычислить спектр Фурье $\tilde{f}$ там, где $\tilde{h}(\omega) \neq 0$. И возникает задача аналитического продолжения спектра $\tilde{f}$, что позволило бы с помощью обратного преобразования Фурье найти по спектру $\tilde{f}(\omega)$ входной сигнал $f(x)$.

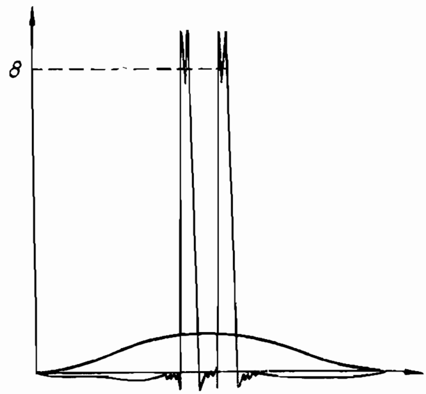

Рис. 4.

Для успешной экстраполяции нужно знать $\tilde{f}(\omega)$ на некотором участке как можно точнее. Числитель в формуле (32.2) мы можем вычислить на ЭВМ с любой разумной точностью, поэтому весь вопрос заключается в возможности вычисления знаменателя в (32.2) с хорошей точностью. Для применения рассматриваемого метода в физике или технике желательно взять случай, когда передаточная функция $\tilde{h}(\omega)$ (спектр Фурье аппаратной функции) известна точно (и такие случаи бывают, см. [164]) или с очень хорошей точностью. Тогда можно надеяться, что действительно удастся расширить полосу частот, которую «видит» данный прибор.

Упомянем еще один вычислительный эксперимент, моделирующий ситуацию, когда разрешимости нет из-за действия внешней помехи («паразитной осцилляции»). Вновь входной сигнал — два прямоугольника аппаратная функция $h(x) = c_1 \exp(c_2 x)$, где $c_1 > 0$, $c_2 < 0$. Паразитная осцилляция $n(t) = A(\sin 2\pi\omega_1 t + \sin 2\pi\omega_2 t)$, где $A = 5 \cdot 10^{-3}$, $\omega_1 = 0{,}3125$, $\omega_2 = 0{,}3750$. Иначе говоря, в спектре Фурье есть помехи при частотах 0,3125 и 0,3750. По формуле (30.4) было сделано аналитическое продолжение с незашумленного участка [0, 0,250] на отрезок [0, 0,375], после чего разрешение появилось (рис. 4). Но еще большего эффекта в этом случае можно добиться, если использовать не экстраполяцию, а интерполяцию спектра Фурье.

Сделаем еще следующее замечание: если на интересующем нас участке (полосе частот) передаточная функция $\tilde{h}(\omega)$ имеет конечное число нулей, то, выбрасывая каждый нуль с некоторой его окрестностью, мы приходим к задаче уже не экстраполяции, а интерполяции спектра Фурье, заданного формулой (32.2). Для интерполяции уже не нужна большая точность $\tilde{f}$ в точках отсчетов (задача корректна, сравни с разд. 33). Следовательно, в этой ситуации метод должен работать успешно.

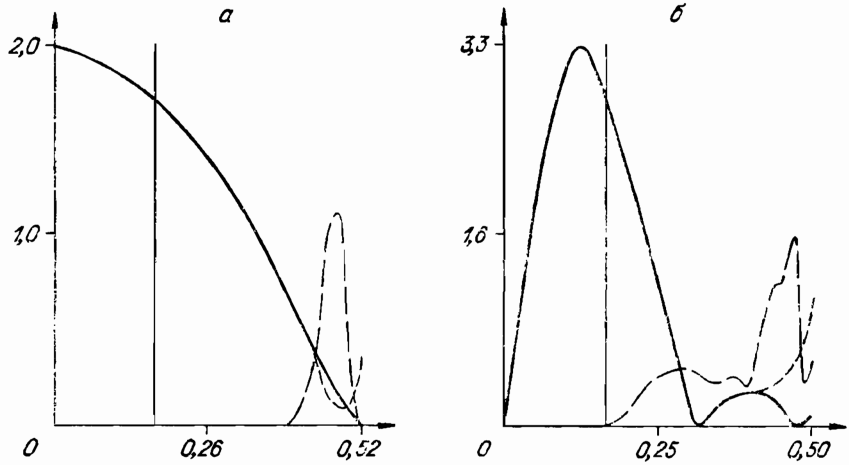

Рис. 5.

4°. Особенно простой вид формула (30.4) (с заменой σ на $-\sigma$) принимает в случае, когда точки x_k берутся с постоянным шагом Δ. В частности, при экстраполяции на один отсчет получаем приближенную формулу

$$f(m\Delta) \approx \sum_{j=1}^{m} a_j f(m-j)\Delta), \tag{32.3}$$

где мы считаем $x_1 = 0$, а

$$a_{m-k} = \frac{\rho}{k-m+\rho} \prod_{j=0}^{m-1} \frac{j(j-k-m)+km+\rho(j-m)}{j(j-k-m)+km+\rho(j-k)}, \quad \rho = \frac{2\sigma i}{\Delta}.$$

Разностное соотношение (32.3) можно использовать для экстраполяции на один отсчет, а затем повторить всю процедуру снова и т. д. .... При этом нет необходимости вычислять коэффициенты a_j для каждой точки экстраполяции, время работы программы (и так небольшое) сильно сокращается, а алгоритм экстраполяции по формуле (32.3) легко реализовать аппаратно. При вычислительном эксперименте на тех же спектрах, что и выше (см. п. 1°), было отмечено, что способ, заданный формулой (32.3), несколько уступает в «дальности» экстраполяции, чем непосредственное применение (30.4). Объясняется это ухудшением при итерациях, по-видимому, некорректностью задачи аналитического продолжения. Однако (32.3) можно использовать иначе. Проводя экстраполяцию двумя способами с помощью формул (30.4) и (32.3) в случае, когда ответ неизвестен, мы можем сравнивать полученные результаты и пока различие небольшое считать, что имеется хорошая экстраполяция. В частности, рассматривалась величина

$$\left| f(\Delta m) - \sum_{j=1}^{m} a_j f((m-j)\Delta) \right| \tag{32.4}$$

и сравнивалась с отличием экстраполяции спектров прямоугольного сигнала и отрезка синусоиды по формуле (30.4) от точных спектров (соответственно рис. 5, *а*, *б*, где величина (32.4) дана в увеличенном масштабе). Там, где начинается существенное отличие экстраполяции от точного спектра, начинает расти и величина (32.4). Этот факт позволяет подбирать оптимальные m и σ в отсутствие точной формулы спектра. Их нужно подбирать так, чтобы величина (32.4) не росла как можно дальше от того отрезка, с которого производится экстраполяция.

33. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СИГНАЛОВ С ФИНИТНЫМ СПЕКТРОМ ФУРЬЕ

Вычислительный эксперимент был проведен с помощью формулы (30.4) с двумя сигналами с финитным спектром Фурье:

1) спектр — отрезок синусоиды от 0 до 2π,

2) спектр — прямоугольник с носителем на отрезке [3, 5]. Эти сигналы относятся к классам $W_{2\pi,+}$ и $W^1_{5,+}$ соответственно. Для вычислений использовалась конечная сумма из (30.4) с $m = 20$ и $\sigma = 1$. Если ранее при вычислительном эксперименте на экстраполяцию нужно было подбирать оптимальные m и σ (см. разд. 32), то в данном случае это делать не нужно (задача корректна), хорошие результаты получились при первых же взятых m и σ. Графики разбиты вертикальными линиями на три участка: на первом и третьем было взято по 10 точек отсчета, нужно восстановить сигнал на втором. При введении сигналов в точках отсчета с 7, 6, 5, 4 точными знаками восстановленный сигнал на графопостроителе не отличался от точного. Отличие началось, когда взяли сигнал с 3 точными знаками (т. е. допускался случайный шум, возникающий при отбрасывании остальных знаков, до 1 %; рис. 6, *а*, *б*).

Далее второй интервал был вдвое сокращен (выброшено 4 отсчета вместо 9). Тогда при 3 точных знаках в точках отсчета восстановленный в выброшенном из шкалы отсчетов интервале сигнал не отличался на графике от точного. И различие началось только при 2 точных знаках (шум до 9 %; рис. 7, *а*, *б*).

Обсудим теперь вопрос об изменении постоянной C_p из формулы (31.4) (см. также (31.35)), если вместо интервала $(-\rho, \rho)$, содержащего p точек отсчета, взять меньший интервал, содержащий q таких точек. Тогда из (31.35) можно получить

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{p+1}{p}\right)^p \frac{p}{q+1}\frac{C_q}{A(p,q)} < C_p < \left(\frac{p+1}{p}\right)^p \frac{p}{q+1}\frac{C_q}{A(p,q)}, \tag{33.1}$$

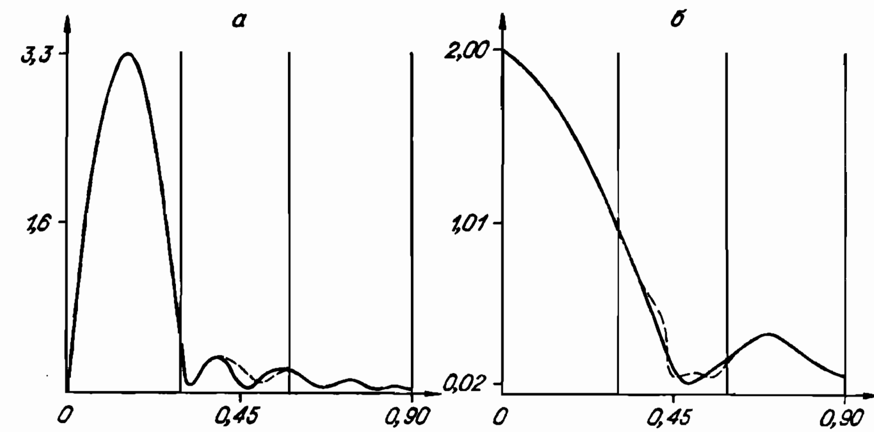

Рис. 6.

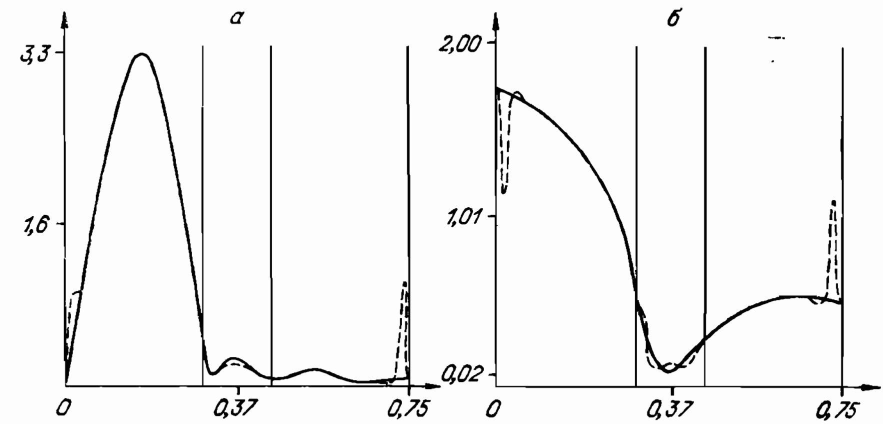

Рис. 7.

где при q нечетном

$$A(p, q) = \prod_{k=1}^{(p-q-2)/2} \sin^2 \frac{\pi(1 - 2\alpha\Delta)(2k + q)}{2p},$$

а при q четном

$$A(p, q) = \sin \frac{\pi(1 - 2\alpha\Delta)}{2} \prod_{k=0}^{(p-q-3)/2} \sin^2 \frac{\pi(1 - 2\alpha\Delta)(2k + q + 1)}{2p}.$$

В разд. 31 из шкалы равномерных отсчетов выбрасывался интервал $(-\rho, \rho)$. Аналогичные оценки нетрудно получить при выбрасывании любого интервала. В вычислительном эксперименте рассматривались интервалы, не симметричные относительно начала

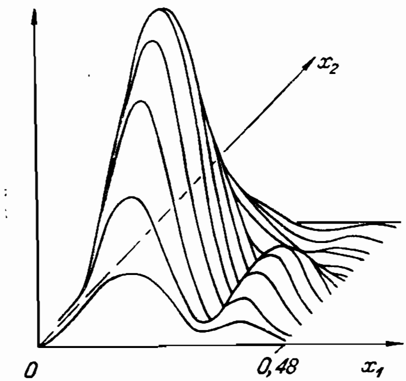

Рис. 8.

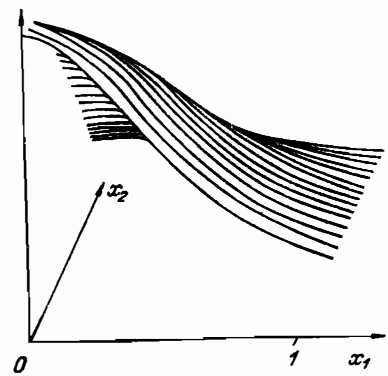

Рис. 9.

координат. В нашем случае $p = 9$, а $q = 4$, тогда из (33.1) получаем для первого сигнала

$$68C_4 < C_9 < 422C_4 \tag{33.2}$$

и для второго

$$50C_4 < C_9 < 307C_4. \tag{33.3}$$

При указанных вычислениях (с 7, 6, 5, 4, 3 точными знаками в точках отсчета) постоянная C_9 для первого сигнала в среднем равна 505,04172, для второго — 198,42594. При выбрасывании 4 точек отсчета в проведенном эксперименте (с 3, 2 точными знаками) постоянная C_4 для первого сигнала в среднем равна 2,8674228, а для второго — 1,3967844. Отношение C_9/C_4 в первом случае равно 176,1327, во втором — 142,05914, что согласуется с неравенствами (33.2) и (33.3).

На рис. 7 видны «выбросы» в самом левом и в самом правом участке рассматриваемого графика, что связано с особенностями формулы (30.4) и не может служить препятствием для ее применения, так как эти «выбросы» находятся не там, где сигнал нужно восстановить, а там, где мы его знаем.

Данный вычислительный эксперимент показывает, что рассматриваемый метод может успешно применяться в тех случаях, когда необходима интерполяция сигналов с финитным спектром Фурье: при борьбе с узкополосным шумом в заданной полосе, при необходимости обращения преобразования Радона по неполным данным в вычислительной томографии и в других ситуациях.

Наконец, начался вычислительный эксперимент на интерполяцию двумерных сигналов с финитным спектром. Отметим два случая, приведенных соответственно на рис. 8 и 9, где, как и выше, изображена амплитуда сигнала. В первом — сигнал имеет вид

$$f(x_1, x_2) = (u_1 + u_2)\frac{e^{2\pi u_1} - 1}{1 + u_1^2}\frac{1 - e^{2\pi u_2}}{1 + u_2^2},$$

во втором

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{u_1 u_2}\left[\left(e^{u_2} - 1\right)\left(e^{u_1} - \frac{e^{u_1}}{u_1} + \frac{1}{u_1}\right) + \left(e^{u_1} - 1\right)\left(e^{u_2} - \frac{e^{u_2}}{u_2} + \frac{1}{u_2}\right)\right],$$

где $u_1 = 2\pi i x_1$, $u_2 = 2\pi i x_2$. В первом случае рассматривался квадрат со стороной [0, 0,48], в его углах брались квадраты со стороной длины 0,15 и в каждом из них — по 36 точек, в которых сигнал считался известным, т. е. мы знали сигнал на 39 % площади. Во втором случае рассматривался квадрат со стороной [0, 1], а длина сторон четырех маленьких квадратов была равна 0, 1, в каждом из них рассматривалось 9 точек, в которых сигнал считался известным, т. е. мы знали сигнал на 4 % площади. В точках отсчета сигналы задавались с одинарной точностью, восстановленные сигналы (в больших квадратах) на графиках не отличались от точных (ошибка в четвертом знаке).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аграновский М. Л., Айзенберг Л. А.** Восстановление голоморфных и плюригармонических функций в круговых областях по значениям на торе // Сиб. мат. журн.— 1989.— Т. 30, № 1.— С. 175—177.
2. **Айзенберг Л. А.** Об интегралах Темлякова и граничных свойствах аналитических функций двух комплексных переменных // Докл. АН СССР.— 1958.— Т. 120, № 5.— С. 935—938.
3. **Айзенберг Л. А.** Интегральные представления функций, голоморфных в кратно-круговых областях // Докл. АН СССР.— 1961.— Т. 138, № 1.— С. 9—12.
4. **Айзенберг Л. А.** Некоторые граничные свойства аналитических функций многих комплексных переменных // Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1961.— С. 239—241.
5. **Айзенберг Л. А.** Интегральные представления голоморфных функций двух комплексных переменных // Докл. III Сибпр. конф. матем. и мех.— Томск; Том. ун-т, 1964.— С. 31—32.
6. **Айзенберг Л. А.** Интегральные представления голоморфных функций многих комплексных переменных // Докл. АН СССР.— 1964.— Т. 155, № 1.— С. 9—12.
7. **Айзенберг Л. А.** Интегральные представления функций, голоморфных в n-круговых областях // Мат. сб.— 1964.— Т. 65, № 1.— С. 104—143.
8. **Айзенберг Л. А.** Об одной теореме о границе Шилова для функций многих комплексных переменных // Учен. зап. МОПИ.— М., 1966.— Т. 166.— С. 175—176.
9. **Айзенберг Л. А.** Линейная выпуклость в C^n и разделение особенностей голоморфных функций // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. math.— 1967.— V. 19, N 7.— P. 487—493.
10. **Айзенберг Л. А.** О разложении голоморфных функций многих комплексных переменных на простейшие дроби // Сиб. мат. журн.— 1967.— Т. 8, № 5.— С. 1124—1142.
11. **Айзенберг Л. А.** Интегральные представления голоморфных функций многих комплексных переменных // Труды Моск. мат. об-ва.— М., 1970.— Т. 21.— С. 3—26.
12. **Айзенберг Л. А.** Полиномы, ортогональные голоморфным функциям многих комплексных переменных и аналог теоремы Риссов // Докл. АН СССР.— 1971.— Т. 199, № 2.— С. 255—257.
13. **Айзенберг Л. А.** Об одной формуле обобщенного многомерного логарифмического вычета и решения систем нелинейных уравнений // Докл. АН СССР.— 1977.— Т. 234, № 3.— С. 505—508.
14. **Айзенберг Л. А.** Многомерный аналог формулы Карлемана // Докл. АН СССР.— 1984.— Т. 277, № 6.— С. 1289—1291.
15. **Айзенберг Л. А.** Многомерные аналоги формулы Карлемана с интегрированием по граничным множествам максимальной размерности // Многомерный комплексный анализ.— Красноярск, 1985.— С. 11—21.— (Сб. научн. трудов/ИФ СО АН СССР).
16. **Айзенберг Л. А.** Применение многомерных формул Карлемана // Мат. вестн. (Югослав.).— 1986.— Т. 38.— С. 365—374.

17. **Айзенберг Л. А.** Экстраполяция функций, голоморфных в произведении полуплоскостей или полос. Аналитическое продолжение спектра // Докл. АН СССР.— 1986.— Т. 290, № 2.— С. 265—268.
18. **Айзенберг Л. А.** Множества единственности для классов Винера. Аналог теоремы Котельникова для неравномерных отсчетов. Обращение преобразования Радона по неполным данным.— Красноярск, 1987.— 24 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т физики; № 38М).
19. **Айзенберг Л. А.** Аналог теоремы Котельникова для неравномерных отсчетов. Экстраполяция и интерполяция амплитуды спектра Фурье финитных сигналов // Докл. АН СССР.— 1988.— Т. 300, № 2.— С. 338—341.
20. **Айзенберг Л. А.** Множества единственности для классов Винера. Аналог теоремы Котельникова для неравномерных отсчетов. Обращение преобразования Радона по неполным данным // Мат. вестн. (Югослав.).— 1988.— Т. 4.— С. 175—180.
21. **Айзенберг Л. А.** О возможности аналитического продолжения в область функции, заданной на дуге границы этой области. Обобщенная теорема Фока — Куни // Комплексный анализ и математическая физика.— Красноярск, 1988.— С. 5—11.— (Сб. научн. трудов/ИФ СО АН СССР).
22. **Айзенберг Л. А.** Экстраполяция функций, голоморфных в произведении полуплоскостей или полос. Аналитическое продолжение спектра // Сиб. мат. журн.— 1988.— Т. 29, № 4.— С. 3—11.
23. **Айзенберг Л. А., Быков В. И., Кытманов А. М., Яблонский Г. С.** Определение всех стационарных решений химической кинетики с помощью модифицированного метода исключения. I. Алгоритм. II. Приложения // Физика горения и взрыва.— 1983.— № 1.— С. 60—73.
24. **Айзенберг Л. А., Даутов Ш. А.** Голоморфные функции многих комплексных переменных с неотрицательной действительной частью. Следы голоморфных и плюригармонических функций на границе Шилова // Мат. сб.— 1976.— Т. 99, № 3.— С. 342—355.
25. **Айзенберг Л. А., Даутов Ш. А.** Дифференциальные формы, ортогональные голоморфным функциям или формам, и их свойства.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1975.— 114 с.
26. **Айзенберг Л. А., Кравцов Б. А.** Вычислительный эксперимент по сверхразрешению физических приборов экстраполяцией спектра Фурье одномерных финитных сигналов // Письма в ЖТФ.— 1987.— Т. 13, в. 19.— С. 1193—1197.
27. **Айзенберг Л. А., Кравцов Б. А.** Вычислительный эксперимент по аналитическому продолжению спектра Фурье одномерных финитных сигналов. Сверхразрешение // Автометрия.— 1989.— № 1.— С. 60—64.
28. **Айзенберг Л. А., Кравцов Б. А., Шаимкулов Б. А.** Об интерполяции сигналов с финитным спектром Фурье. Вычислительный эксперимент // Там же.— № 4.— С. 23—29.
29. **Айзенберг Л. А., Назарян Э. О.** О многомерном аналоге формулы Карлемана с голоморфным ядром // Изв. вузов. Математика.— 1984.— № 9.— С. 3—5.
30. **Айзенберг Л. А., Тарханов Н. Н.** Абстрактная формула Карлемана // Докл. АН СССР.— 1988.— Т. 298, № 6.— С. 1292—1296.
31. **Айзенберг Л. А., Худайберганов Г.** О кратной экстраполяции голоморфных функций от матриц и функций, голоморфных в произведении полуплоскостей // Изв. вузов. Математика.— 1988.— № 6.— С. 3—10.
32. **Айзенберг Л. А., Цих А. К.** О применении многомерного логарифмического вычета к системам нелинейных алгебраических уравнений // Сиб. мат. журн.— 1979.— Т. 20, № 4.— С. 699—707.
33. **Айзенберг Л. А., Цих А. К., Южаков А. П.** Многомерные вычеты и их приложения // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики (фундаментальные направления).— М.: ВИНИТИ, 1985.— Т. 8.— С. 6—64.
34. **Айзенберг Л. А., Южаков А. П.** Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1979.— 366 с.

35. **Александров А. Б.** Аппроксимация рациональными функциями и аналог теоремы М. Рисса о сопряженных функциях для пространств L^p с $p \in \in (0, 1)$ // Мат. сб.— 1978.— Т. 107, № 1.— С. 3—19.
36. **Александров А. Б.** Существование внутренних функций в шаре // Мат. сб.— 1982.— Т. 118, № 2.— С. 147—163.
37. **Александров А. Б.** Два аналога теоремы М. Рисса о сопряженных функциях для пространств Смирнова E^p, $0 < p < 1$ // Теория операторов и теория функций.— Л., 1983.— С. 9—20.— (Сб. научн. трудов/Ленингр. у-нт).
38. **Аниконов Ю. Е., Узаков М. М.** Оценки устойчивости в многомерных задачах аналитического продолжения // Неклассические уравнения математической физики.— Новосибирск, 1985.— С. 3—7.— (Сб. научн. трудов/ВЦ СО АН СССР).
39. **Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн — Заде С. М.** Особенности дифференцируемых отображений. Т. 2. Монодромия и асимптотика интегралов.— М.: Наука, 1984.— 336 с.
40. **Аронов А. М., Даутов Ш. А.** Об одном результате Б. Вайнстока // Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных.— Красноярск, 1973.— С. 193—195.— (Сб. научн. трудов/ИФ СО АН СССР).
41. **Банах С. С.** Курс функционального анализа.— Киев: Наук. думка, 1948.— 216 с.
42. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц.— М.: Наука, 1969.— 367 с.
43. **Бернштейн С. Н.** Перенесение свойств тригонометрических полиномов на целые функции конечной степени // Собр. соч. Т. II.— М.: Изд-во АН СССР, 1957.— С. 446—467.
44. **Бицадзе А. В.** Некоторые классы уравнений в частных производных.— М.: Наука, 1981.— 448 с.
45. **Благовещенский А. С.** О восстановлении функции по известным интегралам от нее, взятым вдоль линейных многообразий // Мат. заметки.— 1986.— Т. 39, № 6.— С. 841—849.
46. **Болотов В. А.** О восстановлении голоморфных функций по значениям на некоторых одномерных множествах // Многомерный комплексный анализ.— Красноярск, 1985.— С. 223—226.— (Сб. научн. трудов/ИФ СО АН СССР).
47. **Болотов В. А.** О восстановлении голоморфных функций многих переменных по значениям на некоторых одномерных кривых // Изв. вузов. Математика.— 1986.— № 12.— С. 64—67.
48. **Бурбаки Н.** Спектральная теория.— М.: Мир, 1972.— 184 с.
49. **Быков В. И., Кытманов А. М., Лазман М. З., Яблонский Г. С.** Кинетический полином для одномаршрутной n-стадийной каталитической реакции // Химическая кинетика в катализе.— Черноголовка, 1985.— С. 69—74.— (Сб. научн. трудов/АН СССР. Ин-т хим. физики).
50. **Быков В. И., Кытманов А. М., Лазман М. З., Яблонский Г. С.** Результат системы уравнений квазистационарности для одномаршрутного n-стадийного механизма // Хим. физика.— 1987.— № 11.— С. 1549—1553.
51. **Василенко Г. И., Тараторин А. М.** Восстановление изображений.— М.: Радио и связь, 1986.— 303 с.
52. **Виденский И. В., Гавурин Е. М., Хавин В. П.** Аналоги интерполяционной формулы Карлемана — Голузина — Крылова // Теория операторов и теория функций.— Л., 1983.— С. 21—32.— (Сб. научн. трудов/Ленинград. у-нт).
53. **Винберг Э. Б., Гиндикин С. Г., Пятецкий-Шапиро И. И.** О классификации и канонической реализации комплексных однородных ограниченных областей // Труды Моск. мат. об-ва.— 1963.— Т. 12.— С. 359—388.
54. **Виноградов С. А., Широков Н. А.** Нули аналитических функций с производной из H^1 // Записки научн. семин. Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР.— 1972.— № 30.— С. 154—157.
55. **Владимиров В. С.** Методы теории функций многих комплексных переменных.— М.: Наука, 1964.— 410 с.
56. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1967.— 436 с.

57. **Владимиров В. С.** Голоморфные функции с положительной мнимой частью в трубе будущего. I // Мат. сб.— 1974.— Т. 93.— С. 3—17.
58. **Владимиров В. С.** Обобщенные функции в математической физике.— М.: Наука, 1976.— 280 с.
59. **Владимиров В. С.** Функции многих комплексных переменных в математической физике // Проблемы математики и механики.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983.— С. 15—32.
60. **Владимиров В. С.** Произведение Бляшке в «обобщенном» единичном круге и полная ортонормированная система в трубе будущего // Труды Матем. ин-та АН СССР.— 1984.— Т. 166.— С. 44—51.
61. **Владимиров В. С., Сергеев А. Г.** Комплексный анализ в трубе будущего // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики (фундаментальные направления).— М.: ВИНИТИ. 1985.— Т. 8.— С. 191—266.
62. **Ганнинг Р., Росси Х.** Аналитические функции многих комплексных переменных.— М.: Мир, 1969.— 396 с.
63. **Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.** Коммутативные нормированные кольца.— М.: Наука. 1960.— 316 с.
64. **Гельфонд А. О.** Проблема представления и единственности целой аналитической функции первого порядка // Успехи мат. наук.— 1937.— № 3.— С. 144—147.
65. **Гиндикин С. Г.** Анализ в однородных областях // Успехи мат. наук.— 1964.— Т. 19, № 4.— С. 3—92.
66. **Гиндикин С. Г.** Об универсальной интегральной формуле для краткокруговых областей в n-мерном комплексном пространстве // Сиб. мат. журн.— 1966.— Т. 7, № 3.— С. 708—712.
67. **Голузин Г. М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1966.— 628 с.
68. **Голузин Г. М., Крылов В. И.** Обобщенная формула Carleman'a и ее приложение к аналитическому продолжению функций // Мат. сб.— 1933.— Т. 40, № 2.— С. 144—149.
70. **Гриффитс Ф., Харрис Дж.** Принципы алгебраической геометрии. Т. I.— М.: Мир. 1982.— 496 с.
71. **Даджион Д., Мерсеро Р.** Цифровая обработка многомерных сигналов.— М.: Мир, 1988.— 488 с.
72. **Данфорд Н., Шварц Дж.** Линейные операторы. Общая теория.— М.: Изд-во иностр. лит., 1962.— 895 с.
73. **Даутов Ш. А., Кытманов А. М.** О граничных значениях интеграла типа Мартинелли — Бохнера // Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных.— Красноярск, 1973.— С. 49—54.— (Сб. научн. трудов/ИФ СО АН СССР).
74. **Даутов Ш. А., Мкртчян Е. С.** Восстановление функций из H^1 в поли-цилиндре // О голоморфных функциях многих комплексных переменных.— Красноярск, 1976.— С. 39—45.— (Сб. научн. трудов/ИФ СО АН СССР).
75. **Зигель К.** Автоморфные функции нескольких комплексных переменных.— М.: Изд-во иностр. лит., 1954.— 167 с.
76. **Зиновьев Б. С.** О воспроизводящих ядрах для кратно-круговых областей голоморфности // Сиб. мат. журн.— 1974.— Т. 15. № 1.—С. 35—48.
77. **Знаменская Л. Н.** Обобщение теоремы Ф. и М. Риссов и существование многомерной формулы Карлемана // Сиб. мат. журн.— 1988.— Т. 29, № 4.— С. 75—79.
78. **Знаменская Л. Н.** Многомерные аналоги теоремы Ф. и М. Риссов и формулы Карлемана // Изв. вузов. Математика.— 1989.— № 7.— С. 67—69.
79. **Знаменский С. В.** Связь аналитических функций многих комплексных переменных с рядами Дирихле одного переменного // Докл. АН СССР.— 1975.— Т. 223. № 3.— С. 544—547.
80. **Знаменский С. В., Мкртчян Е. С.** Определяющие наборы функций.— Красноярск, 1979.— 18 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т физики; № 11М).

81. **Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения.— М.: Наука, 1978.— 206 с.
82. **Игнатьев Н. К.** Оптимальная дискретизация двумерных сообщений // Изв. вузов. Радиотехника.— 1961.— № 6.— С. 684—691.
83. **Ишанкулов Т.** Об одной задаче аналитического продолжения для функций двух комплексных переменных // Некорректные математические задачи и проблемы геофизики.— Новосибирск, 1979.— С. 71—76.— (Сб. науч. трудов/ВЦ СО АН СССР).
84. **Ишанкулов Т.** Об одной задаче аналитического продолжения для плюригармонической функции // Неклассические проблемы математической физики.— Новосибирск, 1981.— С. 84—92.— (Сб. науч. трудов/ВЦ СО АН СССР).
85. **Ишанкулов Т.** О двух задачах аналитического продолжения для функций многих переменных // Сиб. мат. журн.— 1984.— Т. 25, № 3.— С. 89—94.
86. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ.— М.: Наука, 1977.— 742 с.
87. **Кахан Ж.-П.** Случайные функциональные ряды.— М.: Мир, 1984.— 366 с.
88. **Коллингвуд Э., Ловатер А.** Теория предельных множеств.— М.: Мир, 1971.— 312 с.
89. **Компьютеры** в оптических исследованиях.— М.: Мир, 1983.— 486 с.
90. **Коренблюм Б. И.** О функциях, голоморфных в круге и гладких вплоть до его границы // Докл. АН СССР.— 1977.— Т. 200, № 1.— С. 24—27.
91. **Коробейник Ю. Ф.** Об одной задаче аналитического продолжения в $\mathbf{C}^p$ // Сиб. мат. журн.— 1988.— Т. 29, № 1.— С. 80—88.
92. **Косбергенов С.** Обобщение формул Шварца и Пуассона в относительно полных n-круговых областях // Сиб. мат. журн.— 1986.— Т. 27, № 5.— С. 198.
93. **Косбергенов С., Кытманов А. М.** Обобщение формул Шварца и Рисса — Херглотца в областях Рейнхардта // Изв. вузов. Математика.— 1984.— № 10.— С. 60—63.
94. **Косбергенов С., Никитина Т. Н.** О двух аналогах формулы Пуассона для функций, голоморфных или плюригармонических в n-круговых областях // Изв. вузов. Математика.— 1984.— № 8.— С. 21—23.
95. **Котельников В. А.** О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи // Материалы к I Всесоюзн. съезду вопр. техн. реконстр. связи.— 1933.— (Сб. науч. трудов/Управл. связи РККА).
96. **Кравцов Б. А., Миненкова Р. Ф.** Реставрация сигналов и сверхразрешение.— Красноярск, 1987.— 24 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т физики; № 467Ф).
97. **Красносельский М. А., Забрейко П. П.** Геометрические методы нелинейного анализа.— М.: Наука, 1975.— 512 с.
98. **Крейн М. Г., Нудельман П. Я.** О некоторых новых задачах для функций класса Харди и континуальных семействах функций с двойной ортогональностью // Докл. АН СССР.— 1973.— Т. 209, № 3.— С. 537—540.
99. **Крейн М. Г., Нудельман П. Я.** Аппроксимация функций из $L_2(\omega_1, \omega_2)$ передаточными функциями линейных систем с минимальной энергией // Пробл. передачи информ.— 1975.— Т. 11, № 2.— С. 37—60.
100. **Кусис П.** Введение в теорию пространств H^p.— М.: Мир, 1984.— 366 с.
101. **Кытманов А. М.** Об одной системе алгебраических уравнений, возникшей в химической кинетике // Многомерный комплексный анализ.— Красноярск, 1985.— С. 97—108.— (Сб. науч. трудов/ИФ СО АН СССР).
102. **Кытманов А. М.** О формуле преобразования вычета Гротендика и некоторых ее приложениях // Сиб. мат. журн.— 1988.— Т. 29, № 3.— С. 198—202.
103. **Кытманов А. М., Никитина Т. Н.** О множествах единственности для плюригармонических функций // Многомерный комплексный анализ.— Красноярск, 1985.— С. 235—238.— (Сб. науч. трудов/ИФ СО АН СССР).

104. **Кытманов А. М., Никитина Т. Н.** О граничных множествах единственности для плюригармонических функций // Изв. вузов. Математика.— 1988.— № 1.— С. 25—28.
105. **Кытманов А. М., Никитина Т. Н.** Аналоги формулы Карлемана для классических областей // Мат. заметки.— 1989.—
106. **Лаврентьев М. М.** К вопросу об обратной задаче потенциала // Докл. АН СССР.— 1956.— Т. 106, № 3.— С. 389—390.
107. **Лаврентьев М. М.** О задаче Коши для уравнения Лапласа // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1956.— Т. 20.— С. 819—842.
108. **Лаврентьев М. М.** О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка // Докл. АН СССР.— 1957.— Т. 112, № 2.— С. 195—197.
109. **Лаврентьев М. М.** О некоторых некорректных задачах математической физики.— Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962.— 92 с.
110. **Лаврентьев М. М.** Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений.— Новосибирск: Новосибирск, ун-т, 1973.— 72 с.
111. **Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.** Некорректные задачи математической физики и анализа.— М.: Наука, 1980.— 286 с.
112. **Лаврентьев М. М.** Некоторые вопросы аналитического продолжения с внутренних множеств // Сиб. мат. журн.— 1983.— Т. 24, № 5.— С. 123—128.
113. **Ландис Е. М.** О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений // Докл. АН СССР.— 1956.— Т. 107, № 5.— С. 640—643.
114. **Ланкастер П.** Теория матриц.— М.: Наука, 1978.— 280 с.
115. **Левин Б. Я.** О функциях конечной степени, ограниченных на последовательности точек // Докл. АН СССР.— 1949.— Т. 65, № 3.— С. 265—268.
116. **Левин Б. Я.** Распределение корней целых функций.— М.: Гостехиздат, 1956.— 632 с.
117. **Левин Б. Я.** Обобщение теоремы Картрайт о целой функции конечной степени, ограниченной на последовательности точек // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1957.— Т. 21, № 4.— С. 549—558.
118. **Лере Ж.** Дифференциальное и интегральное исчисления на комплексном аналитическом многообразии.— М.: Изд-во иностр. лит., 1961.— 140 с.
119. **Логвиненко В. Н.** Теоремы М. Картрайт и вещественные множества единственности для целых функций многих комплексных переменных // Теория функ., функ. анализ и их прилож.— 1957.— № 22.— С. 85—100.
120. **Логвиненко В. Н.** Условия ограниченности и условия медленного роста вдоль вещественной гиперплоскости целых функций экспоненциального типа // Сиб. мат. журн.— 1988.— Т. 29, № 1.— С. 126—138.
121. **Матвиенко А. П.** Об аналитическом продолжении образов Фурье финитных функций // Вестн. МГУ. Сер. 15, Вычисл. математика и кибернетика.— 1988.— № 2.— С. 8—15.
122. **Милнор Д.** Особые точки комплексных гиперповерхностей.— М.: Мир, 1972.— 127 с.
123. **Мкртчян Е. С.** Восстановление голоморфных функций по значениям на некоторых множествах единственности // Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа.— Красноярск, 1980.— С. 95—114.— (Сб. научн. трудов/ИФ СО АН СССР).
124. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Физматгиз, 1962.— 600 с.
125. **Мухамеджанов А. М., Ярмухамедов Р., Ярмухамедов Ш.** Об аналитическом продолжении сечений реакций // Теорет. и мат. физика.— 1988.— Т. 74, № 2.— С. 270—280.
126. **Неванлинна Р.** Однозначные аналитические функции.— М.: Гостехиздат, 1941.— 388 с.
127. **Никитина Т. Н.** Об одной некорректной задаче в многомерном комплексном анализе // Изв. вузов. Математика.— 1984.— № 6.— С. 43—46.
128. **Никольский Н. К.** Лекции об операторе сдвига.— М.: Наука, 1980.— 384 с.
129. **Обработка** изображений при помощи цифровых вычислительных машин: Сб. переводов.— М.: Мир, 1973.— 204 с.

130. **Одвирко-Будко Б. И.** Об оценках условий устойчивости в задаче аналитического продолжения с подобласти регулярности // Изв. вузов. Математика.— 1986.— № 12.— С. 67—69.
131. **Павлоцкий И. П.** Обобщение теоремы Фока — Куни «о введении гасящей функции в дисперсионные соотношения» // Вестн. МГУ. Сер. физики, астрономия.— 1960.— № 3.— С. 10—12.
132. **Папулис А.** Теория систем и преобразований в оптике.— М.: Мир, 1971.— 496 с.
133. **Пинчук С. И.** Граничная теорема единственности для голоморфных функций нескольких комплексных переменных // Мат. заметки.— 1974.— Т. 15, № 2.— С. 205—212.
134. **Привалов И. И.** Граничные свойства аналитических функций.— М.: Гостехиздат, 1950.— 336 с.
135. **Прэтт У.** Цифровая обработка изображений. Кн. 2.— М.: Мир, 1982.— 792 с.
136. **Ронкин Л. И.** Введение в теорию целых функций многих переменных.— М.: Наука, 1971.— 430 с.
137. **Ронкин Л. И.** Элементы теории аналитических функций многих переменных.— Киев: Наук. думка. 1977.— 168 с.
138. **Рудин У.** Теория функций в поликруге.— М.: Мир, 1974.— 160 с.
139. **Рудин У.** Функциональный анализ.— М.: Мир, 1975.— 445 с.
140. **Рудин У.** Теория функций в единичном шаре из $\mathbf{C}^n$.— М.: Мир, 1984.— 456 с.
141. **Садуллаев А.** Граничная теорема единственности в $\mathbf{C}^n$ // Мат. сб.— 1976.— Т. 101, № 4.— С. 568—583.
142. **Садуллаев А.** Плюрисубгармонические функции // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики (фундаментальные направления).— М.: ВИНИТИ, 1985.— Т. 8.— С. 65—114.
143. **Седлецкий А. М.** О полноте и неминимальности систем экспонент в $L^p(-\pi, \pi)$ // Сиб. мат. журн.— 1988.— Т. 29, № 1.— С. 159—170.
144. **Смирнов В. И., Лебедев Н. А.** Конструктивная теория функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1964.— 438 с.
145. **Стейн И.** Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.— М.: Мир, 1973.— 342 с.
146. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.— М.: Мир, 1974.— 332 с.
147. **Стоилов С.** Теория функций комплексного переменного. Т. 2.— М.: Изд-во иностр. лит., 1962.— 416 с.
148. **Тарханов Н. Н.** О матрице Карлемана для эллиптических систем // Докл. АН СССР.— 1985.— Т. 284, № 2.— С. 294—297.
149. **Тарханов Н. Н.** Метод параметрикса в теории дифференциальных комплексов.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.— 200 с.
150. **Тарханов Н. Н.** Ряд Лорана для решения эллиптических систем.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990.— 300 с.
151. **Темляков А. А.** Интегральное представление функций двух комплексных переменных // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1957.— Т. 21.— С. 89—92.
152. **Темляков А. А.** Интегральные представления функций двух комплексных переменных // Докл. АН СССР.— 1958.— Т. 120, № 5.— С. 976—979.
153. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1979.— 288 с.
154. **Трибель Х.** Теория функциональных пространств.— М.: Мир, 1986.— 448 с.
155. **Уолш Дж. Л.** Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области.— М.: Изд-во иностр. лит., 1961.— 508 с.
156. **Фок В. А., Куни Ф. М.** О введении «гасящей» функции в дисперсионные соотношения //Докл. АН СССР.— 1959.— Т. 127, № 6.— С. 1195—1198.
157. **Фукс Б. А.** Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных.— М.: Наука, 1962.— 419 с.
158. **Фукс Б. А.** Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных.— М.: Наука, 1963.— 427 с.

159. **Функции** с двойной ортогональностью.— М.: Сов. радио, 1971.— 276 с.
160. **Хейфиц А. И.** Характеристика нулей некоторых специальных классов целых функций конечной степени // Теория функ., функ. анализ и их прилож.— 1969.— № 9.— С. 3—13.
161. **Хенкин Г. М.** Банаховы пространства аналитических функций в шаре и в бицилиндре неизоморфны // Функцион. анализ — 1968.— Т. 2, № 4.— С. 82—91.
162. **Хенкин Г. М.** Интегральное представление функций, голоморфных в строго псевдовыпуклых областях и некоторые приложения // Мат. сб.— 1969.— Т. 78, № 4.— С. 611—632.
163. **Хенкин Г. М.** Метод интегральных представлений в комплексном анализе // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики (фундаментальные направления).— М.: ВИНИТИ, 1985.— Т. 7.— С. 23—124.
164. **Хенкин Г. М., Чирка Е. М.** Граничные свойства голоморфных функций нескольких комплексных переменных // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики (фундаментальные направления).— М.: ВИНИТИ, 1975.— Т. 4.— С. 13—142.
165. **Хермандер Л.** Введение в теорию функций нескольких переменных.— М.: Мир, 1968.— 279 с.
166. **Хермандер Л.** Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. I.— М.: Мир, 1986.— 462 с.
167. **Хуа Локен.** Гармонический анализ функций многих комплексных переменных.— М.: Изд-во иност. лит., 1959.— 163 с.
168. **Худайберганов Г.** Формула Карлемана для функций от матриц // Сиб. мат. журн.— 1988.— Т. 29. № 1.— С. 207—208.
169. **Хургин Я. И., Яковлев В. П.** Финитные функции в физике и технике.— М.: Наука, 1971.— 408 с.
170. **Хурумов Ю. В.** Существование предельных значений и граничная теорема единственности для функций, мероморфных в клине в $\mathbf{C}^n$.— Красноярск, 1982.— 20 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т физики; № 20М).
171. **Цих А. К.** Многомерные вычеты и их применения.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.— 240 с.
172. **Чандрасекхаран К.** Введение в аналитическую теорию чисел.— М.: Мир, 1974.— 187 с.
173. **Чирка Е. М.** Комплексные аналитические множества.— М.: Наука, 1985.— 272 с.
174. **Шабат Б. В.** Введение в комплексный анализ.— М.: Наука, 1976.— Ч. I.— 320 с.
175. **Шабат Б. В.** Распределение значений голоморфных отображений.— М.: Наука, 1982.— 288 с.
176. **Шабат Б. В.** Введение в комплексный анализ.— М.: Наука, 1985.— Ч. II.— 464 с.
177. **Шаимкулов Б. А.** Восстановление голоморфных функций по их значениям на некоторых множествах единственности // Докл. АН УзССР.— 1988.— № 8.— С.
178. **Шаимкулов Б. А.** О критерии разрешимости некорректной задачи Коши для голоморфных функций // Тезисы докл. Всесоюзн. конф. по геометр. теории функций.— Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988.— С. 109.
179. **Шейнов В. П.** Распространение формулы Голузина — Крылова на случай двух комплексных переменных // Учен. зап. МОПИ.— М., 1962.— Т. 110.— С. 133—140.
180. **Южаков А. П.** О логарифмическом вычете // Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных.— Красноярск, 1973.— С. 181—191.— (Сб. научн. трудов/ИФ СО АН СССР).
181. **Южаков А. П.** Элементы теории многомерных вычетов.— Красноярск: Краснояр. ун-т, 1975.— 182 с.

182. **Южаков А. П., Кривоколеско В. П.** Некоторые свойства линейно-выпуклых областей с гладкими границами в $\mathbf{C}^n$ // Сиб. мат. журн.— 1971.— Т. 12, № 2.— С. 452—458.
183. **Ярмухамедов Ш.** О задаче Коши для уравнения Лапласа // Мат. заметки.— 1975.— Т. 18, № 1.— С. 57—61.
184. **Ярмухамедов Ш.** О задаче Коши для уравнения Лапласа // Докл. АН СССР.— 1977.— Т. 235, № 2.— С. 281—283.
185. **Ярмухамедов Ш.** Интегральная формула Мартинелли — Бохнера и принцип Фрагмена — Линделефа // Докл. АН СССР.— 1978.— Т. 243, № 6.— С. 1414—1417.
186. **Ярмухамедов Ш.** Об аналитическом продолжении голоморфного вектора по его граничным значениям на куске границы // Изв. АН УзССР. Сер. физ.мат.— 1980.— № 6.— С. 34—40.
187. **Ярославский Л. П.** Введение в цифровую обработку изображений.— М.: Сов. радио, 1979.— 312 с.
188. **Aizenberg L. A., Bykov V. I., Kytmanov A. M., Yablonskii G. S.** Search for steady-states of chemical kinetic equations with the modified method of elimination. I. Algorithm. II. Application // Chem. Eng. Sci.— 1983.— V. 38, N 9.— P. 1555—1567.
189. **Alexiewicz A., Semadeni Z.** Linear functionals on two-norm spaces // Studia math.— 1958.— V. 17, N 2.— P. 121—140.
190. **Andreotti A., Norguet F.** Probléme de Levi pour les cla'sses de cohomologie // C. r. Acad. Sci.— 1964.— V. 258.— P. 778—781.
191. **Baouendi M. S., Treves F.** A property of the functions and distributions annihilated by a locally integrable system of complex vector fields // Ann. of Math.— 1981.— V. 113, N 2.— P. 387—421.
192. **Baouendi M. S., Treves F.** About the holomorphic extension of CR-functions on real hypersurfaces in complex spaces // Duke math. J.— 1984.— V. 51, N 1.— P. 77—107.
193. **Bergman S.** Über die ausgezeichneten Randflächen in der Theorie der Funktionen von zwei komplexer Veränderlichen // Math. Ann.— 1931.— Bd 104.— S. 611—636.
194. **Bergman S.** Über eine Integraldarstellung von Funktionen von zwei Komplexen Veränderlichen // Мат. сб.— 1936.— Т. I.— С. 242—257.
195. **Bergman S.** The kernel function and conformal mapping.— New York: Amer. Math. Soc., 1950.— 161 p.
196. **Boehner S.** Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula // Ann. Math.— 1943.— V. 44.— P. 652—673.
197. **Bungart L.** Boundary kernel functions for domains on complex manifolds // Pacif. J. Math.— 1964.— V. 14, N 4.— P. 1151—1164.
198. **Bungart L.** Holomorphic functions with values in locally convex spaces and applications to integral formulas // Trans. Amer. Math. Soc.— 1964.— V. 111, N 2.— P. 317—344.
199. **Carleman T.** Les fonctions qussianalytiques.— Paris, 1926.— 116 p.
200. **Carleson L.** Sets of uniquenness for function regular in the circule // Acta Math.— 1952.— V. 87.— P. 325—345.
201. **Coifman R., David G., Meyer Y.** La solution des conjectures de Calderon // Adv. Math.— 1983.— V. 48, N 2.— P. 144—148.
202. **Coifman R., McIntosh A., Meyer Y.** L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les courbes lipschitziennes // Ann. Math.— 1982.— V. 116, N 2.— P. 361—387.
203. **David G.** Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe // Ann. Sci. Ec. norm. Supér.— 1984.— V. 17, N 1.— P. 157—189.
204. **Davison M. E., Grünbaum F. A.** Tomographic reconstruction with arbitrary directions // Comm. Pure Appl. Math.— 1982.— V. 34.— P. 77—119.
205. **Douglis A., Nirenberg L.** Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations // Comm. Pure Appl. Math.— 1955.— V. 8.— P. 503—538.
206. **Frieden B. R.** Band-unlimited reconstruction of optical objects and spectra // J. Opt. Soc. Amer.— 1967.— V. 57.— P. 1013—1019.

207. **Gershberg R. W.** Superresolution through error energy reduction // Optica Acta.— 1974.— V. 21, N 9.— P. 709—720.
208. **Gleason A. M.** The abstract theorem of Cauchy — Weil // Pacific J. Math.— 1962.— V. 12, N 2.— P. 511—525.
209. **Gleason A. M.** The Cauchy — Weil theorem // J. Math. Mech.— 1963.— V. 12.— P. 429—444.
210. **Gonchar A. A.** On analytic continuation from the "edge of wedge" // Ann. Acad. Sci. Finnical. Ser. AI: Mathem.— 1985.— V. 10.— P. 221—225.
211. **Henkin G. M., Leiterer J.** Theory of Functions on Complex Manifolds.— Berlin: Akademie-Verlag, 1984.— 226 p.
212. **Koosis P.** Functions de type exponentiel, presque bornées et de croissance irréguliére sur l'axe réce // C. r. Acad. Sci. Sér. A.— 1977.— V. 285, N 5.— P. 345—346.
213. **Koppelman W.** The Cauchy integral for functions of several complex variables // Bull. Amer. Math. Soc.— 1967.— V. 73, N 3.— P. 373—377.
214. **Leeuw de K.** Functions on circular subsets of the space of n complex variables // Duke Math. J.— 1957.— V. 24, N 3.— P. 415—431.
215. **Levinson N.** Cap. and density theorems.— New York: Amer. Math. Soc, 1940.
216. **Macaulay F. S.** Algebraic Theory of Modular Systems.— Cambridge, 1916.
217. **Martinelli E.** Alcuni teoremi integrali per le funzioni analitiche di piú variabili complesse // Mem. r. Acad. Ital.— 1938.— V. 9.— P. 269—283.
218. **Martinelli E.** Contributi alla teoria dei residui per le funzioni di due variabili complesse // Ann. mat. pura ed. appl.— 1955.— V. 39, N 4.— P. 335—343.
219. **Martinelli E.** Sopra una formula di Andreotti-Norguet // Boll. unione math. ital.— 1975.— V. 11, N 3.— P. 455—457.
220. **Mitchell J.** The kernel function in the geometry of matrices // Duke Math. J.— 1952.— V. 19.— P. 575—584.
221. **Mitchell J.** Remarks of Cauchy's integral formula in matric spaces // Proc. Amer. Math. Soc.— 1960.— V. 11.— P. 299—304.
222. **Natterer F.** Some ill-posed problems arising in connection with Radon's integral equation // Publ. Instit. analis. appl.— 1983.— N 8.— P. 21—39.
223. **Norguet F.** Representations intégrales des fonctions de plusieurs varisbles complexes // C. r. Acad. Sci.— 1960.— V. 250, N 10.— P. 1780—1782.
224. **Norguet F.** Problémes sur les formes differentielles et les courants // Ann. Inst. Fourier.— 1961.— V. 11.— P. 1—82.
225. **Norguet F.** Introduction aux fonctions de plusieurs variables complexes representations integrales // Lect. Not. Math.— 1974.— V. 409.— P. 1—97.
226. **Palamodov V., Denisijuk A.** Inversion de transformation de Radon d'apres les donnée in completes // C. r. Acad. Sci. Sér. A.— 1988.— V. 307.— P. 181—183.
227. **Papoulis A.** A new algoritm in spectrum analysis and bandlimited extrapolation // IEEE Trans.— 1975.— V. CAS-22.— P. 735—742.
228. **Patil D. I.** Representation of H^p-functions // Bull. Amer. Math. Soc.— 1972.— V. 78, N 4.— P. 617—620.
229. **Patil D. I.** Recapturing H^2-function on a polydisc // Trans. Amer. Math. Soc.— 1974.— V. 188.— P. 97—103.
230. **Ramires de Arellano E.** Ein Divisionsproblem and Randintegraldarstellungen in der komplexen Analysis // Math. Ann.— 1970.— Bd 184, N 3.— S. 172—187.
231. **Roos G.** L'intégrale de Cauchy daus C^n // Lect. Not. Math.— 1974.— V. 409.— P. 176—195.
232. **Ruff L. T.** Tomographic imaging of the larthquake rupture process // Geophys. res. letters.— 1984.— V. 11, N 7.— P. 629—632.
233. **Schulze B., Wieldenhain G.** Metoden der Potentialtheorie für elliptische Differentialgleichungen bebiebiger Ordnung.— Berlin: Academie-Verlag, 1977.— 408 s.
234. **Segre B.** Sull'estensione formula di Cauchy e sui residui degli integrali n-pli nella teoria della funzioni di n-variabili complesse // Atti Congres. Union. matem. ital.— Bologna, 1938.— P. 174—180.

235. **Severi F.** Funzioni analitiche e forme differenziali // Atti Congres. Union. matem. ital.— Roma, 1953.— P. 125—140.
236. **Slepian D.** Prolate spheroidae wave functions, Fourier analysis and uncertainty. IV. Extention to many dimensions; generalized prolate s'pheroidal functions // Bell. Syst. Techn. J.— 1964.— V. 43, N 6.— P. 3009—3057.
237. **Stein E. M.** Boundary behaviour of holomorphic function of several complex variables.— Princeton: Princ. Univ. Press, 1972.— 72 p.
238. **Steiner A.** Zum Mechanismus der Quasianalytizitat gewisser Randfunktionen auf endlichen Intervallen // Ann. Acad. Sci. Finnicae. Ser. AI: Mathem.— 1970.— V. 459, N 1.— S. 1—33.
239. **Steiner A.** Abschnitte von Randfunktionen beschränkter analytischer Funktionen // Lect. Notes Math.— 1974.— V. 419.— P. 342—351.
240. **Weil A.** L'integrale Cauchy et les fonctions de plusieurs variables // Math. Ann.— 1935.— Bd 111.— S. 178—182.
241. **Weinstock B. M.** Continious boundary values of analitic function of several complex variables // Proc. Amer. Math. Soc.— 1969.— V. 21, N 2.— P. 463—466.
242. **Youla D. C.** Image restoration by the method of convex projections // IEEE Trans.— 1982.— V. M1-1, N 2.— P. 81—95.
243. **Young L. C.** On D. I. Patil's remarkable generalization of Cauchy formula // Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser.— 1974.— V. 12.— P. 137—138.
244. **Zin G.** Esistenza e reppresentazione di funzioni analitiche, le quali, su una curva di Jordan, si riducono a una funzione assegnata // Ann. Mat. pura ed appl.— 1953.— V. 34.— P. 365—405.

ПРИМЕЧАНИЯ

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Теорема 0.7 — частный случай результата Садуллаева [141]. Предложение 0.8 в более сильной формулировке (условия 1) и 2) необходимы и достаточны для $f \in H^p(D)$) отмечалось для n-круговых областей автором [2].

ГЛАВА 1

1. Теорема 1.1 принадлежит Голузину и Крылову [68]. В этой же работе содержались примеры 1—4. Пример 5 взят из работы Карлемана [199]. Формула (1.9) привела к названию «формулы Карлемана». Пример 6 был в статье Фока и Куни [156]. Патил [228], не зная о работах Карлемана и Голузина — Крылова, вновь открыл формулу (1.3), но доказал больше, чем было в [68], а именно: получил теорему 1.3. В [243] опубликован восторженный комментарий к работе [228], но не упоминаются ни статьи [199, 68], ни книга Привалова [134], в которой приведена теорема Голузина — Крылова 1.1. Заключительное замечание этого раздела о возможности обобщения результата Патила (теорема 1.11) принадлежит автору.

2. Идея получения формул Карлемана, изложенная в данном разделе, и понятие функции Карлемана принадлежат Лаврентьеву [107, 109—111], а замечание о том, что этим методом можно получить теорему 2.1,— автору.

3. Метод отыскания формул Карлемана, использующий однородность области $D \subset \mathbf{C}^n$, придумал Кытманов (см., например, [105]).

4. Теорема 4.2 доказана Кытмановым и Никитиной, а теоремы 4.3 и 4.4 — автором.

5. Теоремы 5.3 и 5.4 взяты из статьи Кытманова и Никитиной, пример 2 принадлежит Крейну и Нудельману [98, 99].

ГЛАВА 2

6. Теорема 6.1 получена автором.

7. Теорема 7.1 принадлежит Худайберганову [168], а теорема 7.5 — Елину.

8. Результаты этого раздела найдены Тархановым и автором [30], кроме предложения 8.3, примеров 6 и 7, которые принадлежат Красиковой и Хурумову.

9. Данный раздел написан на основе работы Виденского — Гавуриной — Хавина [52].

ГЛАВА 3

10. Формулу (10.1) вывели Мартинелли [217] и Бохнер [196] независимо друг от друга и разными методами. Понятие индекса поверхности относительно точки принадлежит Пуанкаре. Динамическое определение кратности нуля встречалось в работах Сегре [234], Севери [235], Мартинелли [218]. В основном мы здесь следуем монографиям [122, 176], однако при выводе свойств кратности нуля и доказательстве дискретности компактного множества нулей голоморфного отображения не опираемся на локальную теорию аналитических

функций (Южаков). Теорема 10.7 (принцип Руше) является частным случаем теоремы Пуанкаре — Боля (см. [97, с. 14]). Формула (10.15) выведена Южаковым [181, 180] и Русом [231]. П. 2 написан А. П. Южаковым [34] и помещается здесь с его согласия. Обзор новых результатов о многомерном логарифмическом вычете см. [33, гл. 2].

11. Формула Коши — Фантаппье (11.11) получена Лере [118] (см. также [6, 11, 162, 213]). Формула Лере — Коппельмана (11.10) отмечалась Русом [231], однако фактически содержалась еще в работе Коппельмана [213]. Формула (11.16) тоже принадлежит Русу [181]. Формула (11.3), обобщающая формулу Лере — Коппельмана (11.10), выписана в работе [13]. Предложения 11.8, 11.9 и 11.12 взяты из статей автора [6, 11]. Теорема 11.10 и следствие 11.11 получены Даутовым [34]. Формула (11.23) для выпуклых областей принадлежит Лере [118], она была распространена на регулярные линейно-выпуклые области автором [9, 10]. Формула Бохнера (11.26) отмечалась в работе [196].

12. Интегральное представление для функций, голоморфных в аналитическом полиэдре весьма общего вида, было опубликовано в ряде статей Бергмана (см., например, [194]). Формула (12.3) принадлежит Вейлю [240], а идея приведенного доказательства — Норге [223, 224]. Теорема 12.7 сформулирована Хенкиным [161, 162], близкий результат независимо, но несколько позднее получен Рамирезом де Ареллано [230]. Формула (12.14) в неявном виде содержалась в статье Леу [214]. Точнее, там говорилось о существовании такой формулы, но ее ядра не были выписаны. Это было сделано при $n = 2$ и некоторых условиях на границу ∂D (обеспечивающих однозначный выбор $\Delta(k)$) автором [7], а затем для любого n и без всяких условий на границу ∂D — Гиндикиным [66]. Он же выяснил, что имеется задача интегральной геометрии, приводящая к формуле (12.4). Нужно восстановить функцию на n-мерном торе, если известны ее интегралы по замкнутым вполне геодезическим гиперповерхностям на этом торе. Эта задача так же связана с рядами Фурье, как известная задача Радона — с интегралами Фурье. Обзор новых результатов об интегральных представлениях голоморфных функций многих комплексных переменных и их приложениях см. в статье Хенкина [163].

13. Формула Андреотти — Норге (13.1) опубликована в [190, 225] (см. также [219]), она имеет важные применения в теории q-псевдовыпуклых областей. Приведенное доказательство, формулы (13.3), (13.5), задача в п. 2° и случаи 1—4 принадлежат автору [13]. Теоремы 13.5 и 13.6 доказаны Кытмановым, следствия 13,7 и 13,8 — автором [13], предложение 13.9 — Цихом, а теорема 13.10 — Косбергеновым.

14. Понятие границы Бергмана, кернфункции Бергмана (при $h \equiv 1$) встречалось в ряде работ Бергмана (о границе Бергмана см., например, [193]). Понятие кольцевой границы было введено Шиловым (см., например, [63]), он же доказал существование и единственность этой границы для пространства максимальных идеалов нормированного кольца. Теорема 14.1, следствие 14.2 и пример области голоморфности, для которой границы Шилова и Бергмана имеют разную размерность, принадлежат автору (см. [158, § 15, 16; 8]). Теоремы 14.6 и 14.7 сформулировал Бангарт [197, 198], 14.8 — автор [7, 3], теорему 14.9 — Глисон [208]. Очень общие результаты о существовании интегральных представлений см. в работе Глисона [209]. Наконец, теорема 14.10 отмечалась автором [34].

15. Доказательства этого параграфа изложены исходя из работы Митчел [221, 220], а сами интегральные представления функций, голоморфных в классических областях, принадлежат (за исключением некоторых частных случаев, например, для шара) Хуа Локену [167].

ГЛАВА 4

16. Лемма 16.1 независимо отмечалась Гриффитсом — Харрисом [70] и Кытмановым (см. [34, с. 262—263]), теоремы 16.2, 16.4 и 16.5 принадлежат автору [14, 15], теорема 16.3 — Садуллаеву [141]. Теорема 16.6 получена Ярмуха-

медовым [185], а теорема 16.7 — Шейновым [179]. Формулы (16.17) и (16.8) найдены Темляковым [151, 152].

17. Предложения 17.1, 17.2 и 17.4 доказаны Даутовым (см. [25, гл. 3)], следствие 17.9 вытекает из результата Тарханова и автора [30], остальные результаты этого параграфа принадлежат автору [15, 12, 25].

18. Теорема 18.1 предложена автором.

19. Результаты этого параграфа принадлежат Косбергенову.

ГЛАВА 5

20. Теорема 20.4 доказана Даутовым и Мкртчяном [74], а теорема 20.5 — Ишанкуловым [84, 85]; предложения 20.6, 20.9 принадлежат Аграновскому и автору [1], а предложение 20.10 — Мкртчяну [123]. Результаты п. 4^0 взяты из работы Назаряна и автора [29].

21. Теорема 21.1 принадлежит Знаменскому [80], а теорема 21.4 — Болотову [47].

22. Теорема 22.1, 22.2, примеры 1, 3 найдены Кытмановым и Никитиной [104], пример 2, предложения 22.3 и 22.4 — Ишанкуловым [85]. Предложения 22.5 и 22.6 отмечались Аграновским и автором [1].

23. Результаты этого раздела принадлежат Знаменской [78, 79].

ГЛАВА 6

24. Результаты этого раздела принадлежат Кытманову и Никитиной [105].

25. Формулы (25.1) и (25.2) найдены Кытмановым.

26. Утверждения этого раздела получены Кытмановым и Никитиной.

ГЛАВА 7

27. Предложение 27.1 доказано Вайнстоком [241] для случая, когда ∂D удовлетворяет большим требованиям, чем гладкость, например, если D — область Ляпунова. А в приведенной формулировке оно принадлежит Аронову и Даутову [40]. Предложение 27.2 взято из обзора Хенкина и Чирки [164]. Предложение 27.3, теоремы 27.7, 27.8, 27.9 и 27.10 принадлежат Тарханову, а теорема 27.11 — Шаимкулову [178]. Предложение 27.12 также получено Шаимкуловым, оно усиливает результат Даутова и Кытманова [73]. Знаменская распространила результаты Тарханова на подмножества границы Шилова круговых сильно звездных областей (теорема 27.14). Теорема 27.16 принадлежит Патилу [228], а теорема 27.17 сформулирована автором. Теорема 27.18, по существу, содержалась в работе Фока — Куни [156], нужно было только освободиться от лишних ограничений. Теорема 27.20 (обобщенная теорема Фока — Куни) и результаты п. 5^0 получены автором [21]. Теорема 27.21 найдена Крейном — Нудельманом [98, 99], а теорема 27.22 — Штейнером [239]. В п. 6^0 приведен самый первый результат, полученный в направлении решения задачи, рассмотренной в 27. Он принадлежит Тумаркину (см. [134, с. 138]). Более сложное решение аналогичной задачи см в [244].

28. Теорема 28.1 получена Гончаром [210]. По поводу теоремы Боголюбова «об острие клина», ее обобщений и уточнений см. обзор Владимирова [59]. Следствия 28.4 и 28.5 отмечены автором [21].

ГЛАВА 8

29. Результаты пунктов 1^0 и 2^0 принадлежат Фоку — Куни [156]. а результаты п. 3^0 — автору и Шаимкулову (они сделаны под влиянием работы Мухамеджанова — Р. Ярмухамедова — Ш. Ярмухамедова [125]).

30. Результаты п. 1^0— 3^0 получены автором [17, 22], а п. 4^0— Худайбергановым и автором [31]. Теорема 30.19 принадлежит Крейну — Нудельману [98, 99].

31. Формула (31.1) представляет собой классическую теорему Котельникова (см. [95, 169, 174]), она была обобщена на многомерный случай в [82, 187]. Следствие 31.8 было найдено Левинсоном еще в [215], оценка (31.35) — Бернштейном (см. [43, с. 448, 607]). Предложения 31.11, 31.12 взяты из работ [27, 28]. Остальные утверждения этого раздела принадлежат автору [18—20].

ГЛАВА 9

32. Результаты принадлежат Кравцову и автору [26, 27], кроме вычислительного эксперимента (см. рис. 4), взятого из работы Кравцова — Миненковой [96].

33. Соответствующий вычислительный эксперимент опубликован в работе Кравцова — Шаимкулова — автора (см. [28, 27]). Вычислительный эксперимент для двумерных сигналов (см. конец разд. 33) принадлежит Миненковой и автору.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ