АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ

Ф. А. Медведев

ФРАНЦУЗСКАЯ ШКОЛА ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И МНОЖЕСТВ

на рубеже XIX—XX вв.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1976

УДК 517 5(091)

Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX—XX вв. Медведев Ф. А. М, «Наука», 1976

В книге прослежены пути формирования французской школы теории функций и множеств на рубеже XIX—XX вв, выявлен вклад представителей этой школы (Борель, Бэр, Лебег и др.) в создание новой научной дисциплины, охарактеризовано воздействие их научных представлений на развитие функционального анализа, топологии, теории вероятностей и других математических наук.

Книга представляет интерес для математиков и историков науки

Библиогр 303 назв

Ответственный редактор

доктор физико-математических наук

А П. ЮШКЕВИЧ

М $\frac{20201-250}{055(02)-76}$ БЗ—78—16—1975

ВВЕДЕНИЕ

Термин «математическая школа» четко не определен. Его применяют в разных смыслах, поэтому будут не лишними несколько замечаний. Под словами, стоящими в названии настоящей работы, мы понимаем группу французских математиков периода 1895—1915 гг. — Э. Бореля, Р. Бэра, А. Лебега, М. Фреше, А. Данжуа и некоторых других. Каждый из названных ученых резко индивидуален, и их объединение в нечто цельное, вопреки различиям их творческих методов, их общенаучных установок, их стилей жизни и многих других факторов, объясняется тем, что они в указанный период создали большую математическую дисциплину, оказавшую заметное влияние на все развитие математики первой половины XX в. Они в общем-то не были учениками или даже последователями друг друга; более того, они почти не создали вокруг себя окружения молодых французских ученых, группы или групп учеников — таковыми, скорее, являлись многочисленные продолжатели их дела за пределами Франции; их, пожалуй, правильнее следовало бы назвать соперниками, причем соперничество порой доходило до почти открытой враждебности, проявлявшейся во взглядах как на принципиальные вопросы науки, так и на терминологию; но вместе с тем оно способствовало общему делу — более глубокому проникновению в новую область знаний.

Границы рассматриваемого периода в известной степени условны. По теории функций действительного переменного во Франции имелись работы до 1895 г., продолжались они и после 1915 г. Но ни до начала этого промежутка времени, ни после него труды французских ученых не определяли лица этой науки в целом, как это было в 1895—1915 гг. Если начальный рубеж не требует особого обоснования, то относительно второго следует сказать несколько слов, поскольку в известном упадке теоретико-функциональных исследований во Франции после 1915 г. сильно сказались нематематические факторы.

Главным из этих факторов явилась первая мировая война. В отличие, например, от Германии, где бóльшая часть молодых ученых были освобождены от непосредственного участия в войне, во Франции сложилась иная ситуация. В 1913 г. Высший военный совет единогласно высказался «в пользу трехлетней воинской повинности, для всех абсолютно одинаковой и без всяких льгот» («История Франции», с. 564). Результатом этого было то, что во время войны «молодые ученые, как и все остальные французы, выполняли свой долг на передовой» (*Дьёдонне* [1, с. 44]). А это привело к тому, что, например, две трети преподавательского состава Нормальной школы — места, где, главным образом, культивировалась теория функций,— погибли на войне (там же, с. 45). Но война сказалась и на оставшихся в живых: Борель после участия в войне и работы в Службе изобретений в период войны фактически перестал заниматься теорией функций, переключив свои интересы на теорию вероятностей и математическую физику; Лебег, тоже оторванный войной от основных своих исследований ради работы в той же Службе изобретений, занялся в основном другими вопросами; Бэр к этому времени вообще прекратил свои занятия из-за болезни; Фреше, у которого, кстати, теория функций всегда стояла на втором плане, а главным образом Данжуа продолжали разрабатывать вопросы теории функций, но, лишенные прежней творческой обстановки, они не могли сохранить былое реноме французской школы.

Мы полагаем, что вся история теории функций действительного переменного делится на три больших периода: от опубликования работы Римана «О возможности представления функции посредством тригонометрического ряда» (1867 г.) до первых работ Бореля (1895 г.); от первых исследований Бореля, Бэра и Лебега до 30-х годов нашего столетия; от 30-х годов, характеризуемых работами Банаха, Сакса, Штейнгауза и др., до настоящего времени. Из этих трех периодов именно второй выделяется достаточно самостоятельным развитием теории функций; в первом она слишком тесно переплеталась с классическим анализом, а в третьем — с функциональным анализом и топологией. Верхняя граница второго периода выходит за пределы 1915 г., тем не менее весь он может быть охарактеризован как период развития, проходившего под знаменем, поднятым французскими учеными. И как бы велики ни были достижения итальянских, английских, советских, японских ученых и ученых некоторых других стран, в целом они не выходили за рамки идей и методов французов, и лишь поляки в 30-х годах, когда они ввели в теорию функций методы функционального анализа, прорвали круг идей французов, но тем самым они нанесли удар и по самой теории функций, лишив ее самостоятельности, в некотором смысле первичности по отношению к другим математическим дисциплинам.

Отмеченная выше индивидуальность отдельных представителей французской школы во многом определила характер настоящей работы, ее в некотором смысле персонифицированный облик, относительно большое внимание, уделяемое автором биографическим аспектам. А то обстоятельство, что теория функций рассматриваемого периода была одной из фундаментальных математических наук, вынудило обратиться к полемике по основаниям математики, в которой названные французские ученые приняли самое активное участие. Их общие установки, отчасти выработанные в ходе этой полемики, существенно повлияли на работы собственно в теории функций.

Разумеется, работу подобного рода следовало бы писать человеку, лучше знакомому с условиями научной жизни Франции. Однако собранный нами материал позволяет, хотя и в первом приближении, набросать картину становления теории функций на рубеже столетий — пусть не совсем полную и, конечно, не столь яркую, как хотелось бы сделать для этого очень интересного фрагмента истории математики, но все же основанную на анализе большого количества источников.

Настоящую книгу можно рассматривать как непосредственное продолжение наших «Очерков истории теории функций действительного переменного» [4]. Первоначально она была главой названных очерков. Однако собранный для этой главы материал перерос рамки, в которые его можно было вместить разумным образом, и позволил подготовить самостоятельную книгу. Как и в [4], мы по-прежнему не претендуем на исчерпывающую полноту в отношении избранной темы, а тем более в отношении общей истории теории функций.

Рукопись книги внимательно прочитали доктор физико-математических наук профессор К. А. Рыбников и ее ответственный редактор доктор физико-математических наук профессор А. П. Юшкевич. Они сделали много ценных замечаний и предложений, которые автор постарался учесть и за которые выражает им искреннюю благодарность.

Глава первая

УСЛОВИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ФРАНЦУЗСКОЙ ШКОЛЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И МНОЖЕСТВ

§ 1. Коротко о французской математике в XIX в.

Первую половину XIX в. в развитии математики можно с известной натяжкой охарактеризовать как период, когда математика была по преимуществу французской. Достаточно назвать таких корифеев, как Лагранж, Лежандр, Монж, основные творения которых относились, правда, к XVIII столетию, но которые еще жили в первой четверти XIX в.; за ними последовали Лаплас, Фурье, Ампер, Пуассон, Понселе, Коши, Галуа; вокруг них группировались ученые несколько меньшего ранга — Бине, Дюпен, Карно, Ламе, Лоран, Пуансо, Шаль, Штрум, каждый из которых, однако, внес существенный вклад в развитие математики; к ним можно добавить еще несколько десятков известных математиков — таких, как Лакруа, Сервуа, Серре, Дюамель и др., — чтобы иметь право сказать, что ни одна другая страна этого периода не располагала столь большим числом первоклассных математиков.

Французскими математиками определялись тогда и основные направления исследований: алгебра и анализ, теория вероятностей и математическое естествознание, в значительной мере теория чисел и геометрия, если говорить о больших отделах математики; проективная, начертательная и дифференциальная геометрии, теория групп, обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения математической физики, теория тригонометрических рядов и теория функций комплексного переменного, классический анализ в узком смысле, если перечислять менее общие подразделения.

Были, конечно, исключения, вроде Гаусса и Якоби в Германии, Лобачевского и Остроградского в России, Абеля в Норвегии, Бойяи в Венгрии и т. д., но это — исключения такого типа, о которых говорят, что они подтверждают правило.

Напротив, со второй половины XIX в. начинается закат французской математики, и такие исключения, как Дарбу или Жордан, являются исключениями того же вида, как Гаусс или Лобачевский в первой половине. Имелись, разумеется, и первоклассные математики — Бонне, Лиувилль, Эрмит, Лагерр, Френе и др., но уже не они определяли облик математики в целом. Идеи французов предшествующего поколения подхватили и развили ученые других стран (Германии, Англии, России, Италии); они же стали создателями и новых направлений исследований.

Причины относительного упадка математического творчества во Франции во второй половине XIX в., видимо, сложны и многогранны, и мы выскажем лишь несколько общих соображений, отнюдь не претендуя на сколько-нибудь полный перечень их. Отметим, прежде всего, свое несогласие со следующим высказыванием Клейна: «Причина, которой я приписываю это своеобразное явление, заключается, как мне кажется, в общем психологическом законе, справедливом и для отдельных индивидуумов, и для целых народов: за периодами подъема неумолимо следуют периоды покоя и непродуктивности. И, как в жизни отдельных людей, большей частью оказывается налицо молодая, крепкая смена, если только дать ей место, где она могла бы подрасти и развиваться, так и в жизни народов другие нации становятся на место уставших, достижения которых они кладут в основу собственной работы, приносящей новые плоды» (*Клейн* [1, с. 122]).

В качестве доводов против этого утверждения выскажем те соображения, что, во-первых, неизвестен такой общий закон, относящийся к целым народам, а во-вторых, развитие математики в той или иной стране определяется не имманентными законами развития самой математики, а, в конечном счете, общими условиями экономической и политической жизни страны. Один пример такого определения мы уже назвали во введении, когда говорили о физическом уничтожении большей части молодого поколения французских математиков в первой мировой войне. Вряд ли можно также говорить, что период подъема немецкой математики в первой трети XX в. сменился периодом упадка во второй трети из-за усталости национальных кадров, — дело обстояло проще (а вместе с тем и сложнее): пришедший к власти фашизм положил конец бурному цветению немецкой математики. Третьим примером, наконец, является расцвет польской математики перед второй мировой войной, погубленный как физическим уничтожением большой группы польских ученых, так и эмиграцией многих из них. Но и без таких больших катаклизмов, как войны или фашизм, ясно, что экономически бедная страна не может позволить себе роскошь содержать большую группу математиков и обеспечить подготовку соответствующих кадров, без чего немыслимо создание значительных математических школ.

Влияние же политических условий на развитие науки во Франции в XIX в. особенно наглядно.

Великая французская революция 1789 г. явилась важнейшим условием развития во Франции науки вообще и математики в частности. «Под влиянием растущих запросов капиталистического производства и обмена, а также государственных потребностей наука приобретает все большее значение в различных областях человеческой деятельности. Если ранее математизации подвергалась главным образом механика, то теперь математические методы находят все более широкое применение во всей физике, во многих вопросах техники, экономической и финансовой деятельности» («История математики», т. 3, с. 472). Эти слова, относящиеся к концу XVIII в., применимы и к началу XIX в., причем особенно к науке во Франции. Отмеченный в начале параграфа взлет французской математики неразрывно связан с выходом на арену мощного класса буржуазии. В свою очередь, развитие французской науки во многом способствовало укреплению этого класса.

Разгром наполеоновской Франции и последовавший за этим период Реставрации изменили отношение к науке. Пришедшие к власти Бурбоны, вернее их идеологи, видели, что корни французской науки скрывались в освободительных идеях энциклопедистов XVIII столетия, и свою ненависть к вольнодумным мыслям переносили на науку, а вследствие отмеченной ее математизации — особенно на математику. Один из реакционных мракобесов Жозеф де Местр, «ополчаясь против просветительной философии XVII—XVIII вв., высказываясь за ограничение развития науки, за передачу воспитания детей в руки служителей церкви, ...утверждал, что общество не может существовать без религии ..» («История Франции», т. II, с. 194). Духовенство постепенно захватывало в свои руки не только начальное и среднее образование, но и высшую школу. Прошла радикальная чистка педагогического состава университетов, были уволены республиканские и многие либеральные профессора, открылись специальные иезуитские колледжи.

Любопытно видеть, как это отразилось на настроениях и взглядах поэтов и писателей. В 20—30-х годах XIX в. на науку вообще и на математику в особенности ополчились госпожа Сталь, Шатобриан, Ламартин и др. Ламартин, в частности, писал в 1833 г.: «Геометрическим душам (les hommes géométriques), которым единственно принадлежало слово, удалось иссушить и убить всю моральную, божественную, мелодичную часть человеческой мысли... Все было организовано против возрождения морального и поэтического чувства. Допускалась, была в чести, ценилась только цифра. С тех пор я ненавижу цифру — это отрицание всякой мысли... Математика была цепями человеческой мысли; надеюсь, что они разорваны» [1].

Такое отношение к науке сказалось и на образовании, изуродованном к тому же поповщиной. В частности, упадок Политехнической школы [2], видимо, в значительной мере объясняется этой реакцией. И Франция дорого поплатилась за такое отношение к науке и просвещению. Значительную долю истины заключает в себе афоризм, имевший хождение в последней трети XIX в., что

---

[1] Цитируется по Пикару [5, с. 22—23].
[2] См § 3.

победой во франко-прусской войне Германия обязана ее школе.

Характеристика французской математики второй половины XIX в. как математики заметного спада научной активности неточна в том отношении, что в самом конце века произошел довольно значительный всплеск. Удивительным образом случилось так, что почти одновременно в науку вошли, по крайней мере, четыре больших французских ученых: Пуанкаре (1854—1912), Пикар (1856—1941), Адамар (1865—1963), Пенлеве (1863—1933), к которым через некоторое время присоединились Картан (1869—1951), Борель (1871—1956), Бэр (1874—1932), Лебег (1875—1941), Монтель (р. в 1876 г.), Фреше (1878—1973). Этот всплеск тоже был связан с социально-экономическими условиями жизни Франции, в частности с постепенным освобождением от засилья клерикалов. На рубеже веков названные ученые при содействии других своих соотечественников вновь сделали заявку на лидерство в математических исследованиях. Если говорить о математике в целом, то восстановить то положение, в котором французская математика находилась в первой половине века, французам не удалось. Однако в отношении отдельных направлений исследований успех был несомненным. Так произошло с теорией функций действительного переменного.

Наша схема: расцвет математических исследований во Франции в начале XIX в., упадок в середине века и новый взлет, но на относительно узких, хотя в некотором смысле и определяющих направлениях, — относится, вероятно, не только к математике. Вполне аналогичная ситуация характерна для развития физики, что мы можем подтвердить ссылкой на статью Иваненко [1, с. 157—158], и, по-видимому, для развития во Франции других наук [3].

§ 2. О первом этапе развития теории функций действительного переменного

Ограничивая термин «теория функций действительного переменного» значением: учение о функциях, задаваемых на произвольных множествах точек евклидова пространства любого конечного числа измерений и принимающих вещественные значения, мы можем сказать следующее. Классический анализ тоже является учением о функциях, что с полной определенностью высказал Эйлер еще в 1748 г., однако функции в нем рассматриваются заданными на нерасчлененном геометрическом объекте — отрезке прямой, куске плоскости или криволинейной поверхности, участке пространства (включая всю прямую, плоскость, по-

---

[3] Некоторое отступление от этой схемы, состоящее в переносе на более ранний период двух первых экстремумов у линии развития географии и отмеченное Александровской [1, с 6], можно объяснить тем, что автора больше интересовало не развитие географии в целом, а выработка общих взглядов на эту науку.

верхность, пространство), и такой способ задания функций был очень во многом обусловлен применявшимся в XVII—XVIII вв. аналитическим аппаратом представления функций степенными рядами, позволявшими выделить в аргументе функции самое большее ограниченные, неограниченные, открытые и замкнутые промежутки.

Введение нового аналитического аппарата — тригонометрических рядов с их подчинением принципу локализации — постепенно привело к разрыву нерасчленявшейся ранее области задания функции на составляющие ее части — точки. Область задания превратилась в точечное множество, и изучение функций, заданных на множествах, потребовало создания новых математических наук: теории множеств и теории функций действительного переменного, являющейся прямым обобщением классического анализа и основанной на теоретико-множественном методе.

Математический фундамент новой теории функций был заложен главным образом в трудах французских ученых первой половины XIX в. — Фурье, Пуассона и Коши. Они во многом создали и применили аппарат тригонометрических рядов; довели до логического завершения основные понятия классического анализа — понятия предела, функции, производной, интеграла, суммы ряда; существенно расширили область приложений анализа бесконечно малых [4].

Казалось бы, что во Франции сложились все условия для строительства на этой основе следующего «этажа» учения о функциях. История, однако, распорядилась по-иному. Отмеченный выше спад математической активности во второй половине XIX в. охватил и исследования в области теории функций. Последняя стала создаваться учеными других стран, главным образом немецкими математиками.

Дирихле, Риман, Ганкель, Гейне, Кантор, Дюбуа-Реймон, Дедекинд, Вейерштрасс, Гарнак, Штольц, Гёльдер, Паш, Томе, Прингсгейм в Германии; Дини, Асколи, Арцела, Вольтерра, Пеано в Италии; Лобачевский и Чебышев в России; Смит в Англии — трудами этих ученых было создано и учение о множествах — теоретическая основа новой науки, и сама теория функций действительного переменного [5].

Конечно, существен вклад и двух великих французов — Дарбу и Жордана; можно отметить также Бертрана, Мере, Альфана, Югоньо, Ж. Таннери и некоторых других. Однако в целом их вклад не столь велик.

---

[4] Относительно проделанной ими работы см книгу Граттен-Гюиннеса [1]. К ним следует присоединить чеха Больцано, хотя его работы и не оказали столь прямого воздействия на развитие математики.

[5] Их труды освещены во многих исторических работах; из сравнительно недавних ограничимся указанием книг Паплаускаса [1], Песина [1], Медведева [1, 2] и Хокинса [1]; относительно исследований Чебышева по конструктивной теории функций укажем, например, книгу Юшкевича [1, с. 405—426].

Трудами названных выше ученых была создана большая математическая дисциплина — теория функций действительного переменного XIX в. Были решены многие вопросы, поставленные развитием классического анализа. Но вместе с тем в исследованиях по теории функций возникло еще больше проблем, не решавшихся разработанными методами. Коротко остановимся на некоторых из них.

В XIX столетии утвердилась концепция функции, известная под не совсем адекватным наименованием понятия функции по Дирихле, как произвольного однозначного соответствия между элементами двух множеств [6]. Однако в такой общности это понятие было, и в значительной мере остается сегодня, чисто номинальным понятием: наименовывалось некоторое, в общем не очень-то ясное представление, с которым в этой общности нечего было делать — не хватало (не хватает и теперь) математических средств для его изучения. В процессе развития математики на общее понятие функции всегда накладывались те или иные ограничения, обусловленные наличным математическим арсеналом средств, пригодных для его изучения. Наиболее характерным для XIX в. ограничением, накладывавшимся на понятие функции, было ограничение быть непрерывной, за исключением, разве, конечного числа отдельных точек и, реже, относительно простого бесконечного (главным образом приводимого) множества. Но мир разрывных функций был открыт и требовал своего изучения.

Как мы сказали, в XIX в. был создан аппарат тригонометрических рядов. К ним были вскоре присоединены другие ортогональные разложения. Основным приемом изучения функций, представляемых тем или иным разложением, было изучение вопроса о сходимости ряда или последовательности, ассоциируемых с функцией. При этом имелась в виду сходимость в каждой точке или, в крайнем случае, при пренебрежении некоторыми относительно простыми множествами точек. Обнаружилось, однако, что при таком взгляде на изображение функции рядом аппарат ортогональных разложений недостаточен: даже непрерывная функция не всегда может быть представлена рядом Фурье, сходящимся к ней в каждой точке [7]. Для сохранения ортогональных разложений как средства аналитического изображения функций требовалось изменить понимание представления функции рядом.

Интеграл Коши — Римана помог решить многие задачи классического анализа: дать формулы для выражения длины кривой и площади поверхности, найти примитивную функцию по ее производной, определить коэффициенты ортогонального разложения

[6] Такое представление о функции, восходящее к Эйлеру (1755 г.), является итогом длительного развития, самая общая дефиниция этого представления принадлежит Дедекинду (1887 г.).

[7] Пример Дюбуа-Реймона (1873 г.); о нем см. Паплаускас [1, с. 150—155].

и т. д. для классов функций, достаточно широких, чтобы удовлетворить нужды тогдашней математики и математического естествознания. Но вместе с тем была установлена и его недостаточность. Вольтерра в 1881 г. построил пример ограниченной производной, неинтегрируемой по Риману [8]; Шеффер в 1884 г. показал недостаточность интеграла Римана для выражения длины кривой; поскольку имелись примеры относительно простых неинтегрируемых функций, то не могло быть и речи о представлении их рядами Фурье. Словом, назрела потребность в обобщении понятия интеграла.

Аналогично обстояло дело с понятием производной. Функцию считали дифференцируемой, если она имеет производную в каждой точке, за исключением, возможно, относительно простого множества точек, в которых производная может отсутствовать. При таком подходе к понятию производной не удавалось выделить сколько-нибудь общего класса дифференцируемых функций (помимо аналитических) и связать друг с другом операции дифференцирования и интегрирования. Так что и в вопросах дифференциального исчисления возникла нужда в соответствующих обобщениях.

В течение XIX в. разрабатывалась преимущественно теория функций одного действительного переменного. Распространение некоторых ее результатов на функции нескольких переменных сталкивалось с существенными затруднениями. Между тем для нужд математического естествознания более важным был именно случай нескольких переменных. Достаточно заметить, что до XX столетия в математике практически не существовало понятия, адекватно описывающего естественно-научные представления дифференциального характера, вроде плотности тела, напряженности поля и т. п., когда число измерений пространства превышало единицу. Предвосхищения Коши и Пеано [9], выразившиеся во введении понятий функции множества, дифференцирования одной функции множества по другой и интегрирования функции точки по функции множества, оставались неизвестными не только для представителей математического естествознания, но и для математиков, а если о них и знали, то не понимали сути дела. Для решения давно поставленной задачи недоставало многих представлений, выработка которых стала возможной в конце столетия после создания теории множеств, и изучение таких представлений, связанных с понятием функции множества, стало на повестку дня.

Мы самым общим образом описали отдельные из больших проблем, возникших в теории функций к концу XIX столетия: необходимость введения и изучения широких классов разрывных функций, расширения взглядов на аналитическое представление

---

[8] О нем см., например, Лебег [40, с. 87—88].
[9] О них см., например, Медведев [1, с. 140—144].

таких функций рядами, обобщения операций дифференцирования и интегрирования, распространения на многомерный случай отдельных теоретико-функциональных концепций и введения фундаментального понятия функции множества. К ним можно было бы добавить много задач более частного характера, но будет, пожалуй, целесообразнее рассмотреть их позднее. Именно за их решение взялась на рубеже веков группа французских математиков, труды которых предполагается рассмотреть в настоящей работе. То, что эти проблемы были злободневными, подтверждается необычайно широким резонансом, вызванным во всем математическом мире трудами французских ученых.

§ 3. О Политехнической и Нормальной школах в XIX в.

Великая французская революция конца XVIII столетия знаменовала собой и новый этап в постановке образования в стране. Вышедшему на мировую арену классу буржуазии нужны были новые кадры, вооруженные передовыми наукой и техникой. До этого основную роль в подготовке научно-технических кадров играли университеты. Однако университеты Франции предшествующего периода «отстали во всем, что касается науки и техники, на несколько столетий. Перипатетические в то время, когда ученый мир вместе с Декартом отказывается от философии Аристотеля, они делаются картезианскими, когда все становятся ньютонианцами» [10]. Поэтому очень важным моментом революционных преобразований во Франции явилась перестройка высшего образования. Эта перестройка производилась в разных направлениях. Мы коротко остановимся только на создании и деятельности двух новых учреждений — Политехнической и Нормальной школ, да и то лишь в той мере, в какой это касается высшего математического образования.

Созданные почти одновременно в 1794—1795 гг., они имели разное назначение, и судьба их в XIX столетии была в ряде отношений различной [11]. Политехническая школа предназначалась для подготовки и отбора претендентов на высшие технические должности в государстве и офицеров артиллерии и инженерных войск. После тщательного отбора абитуриентов и двухлетнего обучения выпускники, в зависимости от успехов во время пребывания в школе и других факторов, направлялись в более специальные учебные заведения (институт путей сообщения, горный институт, военно-инженерную школу, артиллерийскую школу и т. д.). Нормальная школа была создана для подготовки преподавателей средних учебных заведений.

[10] *J.-B. Biot.* Essai sur l'histoirt générale des sciences pendant la Révolution française. Paris, an XI, p. 137. Цит. по книге Александровской [1, с. 24].

[11] Большой материал по истории этих школ содержится в книгах Калло [1] и «Le centaire de l'École Normale, 1795—1895» Paris, 1895.

С момента создания и примерно до середины XIX в. в смысле математического образования и математических исследований Политехническая школа стояла на несравненно более высоком уровне, чем Нормальная [12]. Одним из фактов, подтверждающих это, является то, что Клейн, говоря об истории математики в указанный период, большое место в своей книге отвел первой и ее деятелям (Клейн [1, с. 96—127]), даже не вспомнив о второй. Другим таким фактом является результат сопоставления преподавательских кадров по математическим дисциплинам этих школ в тот же период:

Политехническая школа	Нормальная школа
Прони (Riche de Prony G. C.)	Леруа (Leroy Ch. F.)
Лагранж (Lagrange J. L)	Дефлер (Deflers)
Фурье (Fourier J. B.)	Леви (Lévy L.)
Лакруа (Lacroix S F.)	Дюамель * (Duhamel J-M. C.)
Пуассон (Poisson S. D.)	Вьей (Vielle P)
Ампер (Ampère A. M.)	
Коши (Cauchy A. L)	
Пуансо (Poinsot L)	
Монж (Monge G.)	
Лиувилль (Liouville J)	

* Дюамель преподавал и в Политехнической школе.

И наконец, укажем, что Политехническая школа с самого своего возникновения располагала органом для научных публикаций — «Журналом Политехнической школы», тогда как Нормальная школа очень долго не имела вообще никакого печатного органа.

Начиная со второй половины XIX в. положение начинает изменяться в сторону повышения роли Нормальной школы и постепенного упадка математического престижа Политехнической школы. Изменения в преподавательском составе по математическим дисциплинам во второй половине века характеризуются таблицей на стр. 15.

Здесь налицо определенное равновесие, причем преимущество постепенно переходит к Нормальной школе. А если учесть, что на рубеже веков в последнюю приходят Борель, Лебег и др., то перемещение центра математического образования достаточно явно.

В 1864 г. был основан «Научный ежегодник Высшей Нормальной школы», довольно быстро приобретший широкую известность.

Это изменение престижа Нормальной школы нашло некоторое отражение даже в ее наименовании: с 1845 г. она стала называться Высшей Нормальной школой.

[12] Это относится не только к математической стороне вопроса.

Политехническая школа	Нормальная школа
Дюамель (Duhamel J.-M. C.)	Бертран * (Bertrand J. L. F.)
Штурм (Sturm J. Ch. F.)	Пюизё (Puiseaux V.)
Бертран (Bertrand J. L. F.)	Брио (Briot Ch. A. A.)
Эрмит (Hermite Ch.)	Эрмит ** (Hermite Ch.)
Жордан (Jordan C.)	Буке (Bouquet J. C.)
Гумберт (Humbert M.-G)	Бонне (Bonnet O.)
Гурнери (Gournerie J. A. R)	Дарбу (Darboux G)
Маннгейм (Mannheim A.)	Таннери (Tannery J.)
	Аппель (Appel P.)
	Пикар (Picard É.]
	Гурса (Goursat E.)

* Бертран бóльшую часть своей преподавательской работы провел в Политехнической школе (1856—1894 гг.), частично совмещая ее с преподаванием в Нормальной школе (1846—1852, 1858—1862 гг.).

** Эрмит примерно поровну поделил преподавание в этих школах· 1862—1869 гг. — в Нормальной школе, а 1869—1877 гг. — в Политехнической.

Соответственно по-разному обстояло дело с преподаванием математики. Довольно значительная математическая подготовка в средних учебных заведениях существенно расширялась в Политехнической школе как благодаря большому числу лекций по математическим дисциплинам, читавшимся блестящими учеными, так и хорошо поставленному репетиторству [13]. На основе этих лекций писались первоклассные учебники. Так, в 1927 г. Клейн писал: «Бóльшая часть фундаментальных трактатов по высшей математике в начале XIX в. выросла из преподавания в Политехнической школе, и это в некотором роде исток, из которого выросли все наши современные трактаты» [14].

Напротив, в первые десятилетия существования Нормальной школы преподавание в ней стояло на невысоком уровне. Конечно, Ж. Таннери сильно преувеличивал, когда писал об этом периоде: «Тогда охотно повторяли, что Нормальная школа создана для подготовки преподавателей, но при этом умаляли роль преподавателя. Он считался достаточно хорошим, если умел научить сокращенному делению» [15], приписав заслугу хорошей постановки преподавания математики в этой школе Бертрану, приступившему к работе там в 1846 г. Что дело обстояло далеко не так, свидетельствует хотя бы такой факт, что в школе учились Фурье и Галуа (сколь бы ни были они способными сами по себе, без основательной подготовки они вряд ли стали бы такими большими учеными). Тем не менее вряд ли можно сомневаться, что в целом математическая подготовка выпускников школы первой половины XIX в. была слабой.

---

[13] См. Клейн [1, с. 98—99].
[14] Цитируется по книге Калло [1, с. 197]
[15] Ж. Таннери [3, с. 387].

Начиная же со второй половины столетия, картина математического образования в этих школах становится иной: в Политехнической школе оно ухудшается, а в Нормальной школе становится неизмеримо лучше. Не случайно, что из последней вышли в этот период такие первоклассные ученые, как Мере (1854 г.), Шаль (1860 г.), Дарбу (1861 г.), Тиссеран (1863 г.), Аппель (1873 г.), Пикар (1874 г.), Гурса (1876 г.), Пенлеве (1883 г.), Адамар (1884 г.), Борель (1889 г.), Э. Картан (1891 г.), Бэр (1892 г.), Лебег (1894 г.), Монтель (1894 г.), Ланжевен (1894 г.) и др.

§ 4. Исследования по теории функций во Франции в XIX в. (до работ Бореля, Бэра и Лебега)

В § 2 настоящей главы было отмечено, что теория функций действительного переменного XIX в. создавалась в основном не французскими учеными и что, хотя несколько математиков Франции приняли участие в этом деле, их вклад невелик, если его сравнивать с вкладом немцев и даже итальянцев. Тем не менее французскими учеными были получены существенные результаты, и, что более важно, в известной мере именно они подготовили тот взлет теоретико-функциональных изысканий, которому, главным образом, и посвящена настоящая работа. Поэтому целесообразно остановиться подробнее на характеристике трудов французских математиков в области теории функций до интересующего нас периода подъема.

По принятой нами квалификации теории функций как новом этапе математического анализа, воздвигнутом на фундаменте теории точечных множеств в n-мерных евклидовых пространствах, многие из указываемых далее результатов принадлежат собственно классическому анализу. Однако большинство из них послужило столь мощными истоками будущих теоретико-функциональных идей, в частности во Франции, что обойти их молчанием в настоящем параграфе вряд ли целесообразно. Здесь мы совсем коротко опишем отдельные идеи и результаты французских ученых, предшествующие появлению теории функций в интересующем нас аспекте.

Понятие предела в некотором смысле является очень давним понятием, восходящим еще к Древней Греции. Однако только в работах Коши, особенно начиная с его «Алгебраического анализа» (1821 г.), оно в трех его важнейших для XIX столетия вариантах — предел последовательности, предел функции и предел интегральных сумм — заняло то центральное положение, которое стало характерным для него как в анализе, так и в теории функций. Через него Коши определил производную (1821 г.), сумму ряда (1821 г.), интеграл [16] и ряд других основополагающих по-

[16] О понятии интеграла у Коши см. Медведев [2, с. 174—181].

нятий. Упомянем важный признак сходимости рядов, известный под наименованием признака Больцано—Коши [17], который продолжает широко использоваться не только в теории функций, но и в современных исследованиях по функциональному анализу; четкое различение Коши между сходимостью функционального ряда вообще и сходимостью к данной функции («Лекции по дифференциальному исчислению», 1829 г.) [18]; введение им понятия непрерывной функции (1821 г.) и идеи функции множества; изучение равномерной сходимости рядов. К этому можно было бы добавить многочисленные теоремы об интегралах, производных, рядах и т. д., уточнение, обобщение или опровержение которых потребовало большого труда следующего поколения математиков.

Пожалуй, не менее велика роль Фурье. Однако если влияние Коши на развитие математики XIX в. в общем признано (и даже в некоторых отношениях переоценивается), то, как все чаще и чаще отмечается в историко-математической литературе, воздействие Фурье порой умаляется. Для подтверждения последнего приведем только один факт.

Дьёдонне, рассматривая развитие гармонического анализа и отмечая, что Фурье был инициатором его [2, с. 32][19], тем не менее квалифицирует Фурье как математика XVIII столетия (с. 32) и пишет, что рождение гармонического анализа в современном смысле можно датировать мемуаром Дирихле 1829 г. (с. 34), а не книгой Фурье «Аналитическая теория теплоты» (1822 г.); точно так же общее понятие функции он связывает только с именем Дирихле (с. 33—34), хотя у Фурье оно было сформулировано более общим образом, нежели у Дирихле.

Книга Фурье «Аналитическая теория теплоты» оказала на развитие математики XIX в., пожалуй, большее влияние, чем вся совокупность работ Дирихле. Действительно, теория рядов Фурье — одна из центральных проблем математики и математического естествознания XIX—XX вв.; то, что Фурье имел здесь предшественников [20], не только не умаляет его заслуг, а скорее наоборот — на их фоне становится виднее, насколько он выше их в этом вопросе. То же самое (кроме предшественников) можно сказать и о теории интеграла Фурье. Далее, с его именем можно связать зарождение теории интегральных уравнений; в названной его книге содержатся зачатки теории решений бесконечного числа линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных; в ней высказаны идеи того перехода от конечного к бесконечно-

---

[17] Подробнее о нем см Граттен-Гюиннес [1, с. 71—78; 2]. Хотя Больцано и принадлежит несомненный приоритет в установлении этого признака, но распространение и признание он получил благодаря Коши

[18] См. Вилейтнер [1, с. 384].

[19] В русском переводе французское слово «l'initiateur», употребленное Дьёдонне, переведено словом «основоположник», что не совсем соответствует содержанию мысли автора

[20] См. Паплаускас [1, с. 7—38].

му, от дискретного к непрерывному, которыми затем руководствовались Вольтерра и Гильберт при построении теории интегральных уравнений и функционального анализа [21].

Не менее важна роль книги Фурье и в формировании отдельных понятий будущей теории функций. На протяжении всей книги подчеркивается произвольный характер функциональной зависимости и даже дается формальное определение понятия функции [1, с. 500], по своей четкости превосходящее последующие определения Лобачевского и Дирихле; то, что фактически Фурье работал с менее общим понятием функции, вполне объяснимо отсутствием соответствующего математического аппарата [22]. Уже сама роль определенного интеграла в его соображениях наводила на мысль о первостепенной важности этого понятия в противовес господствовавшему ранее представлению об интеграле, как о некоей частности, как просто о разности значений примитивной. В книге можно вычитать понятия предела (с. 151), функции распределения (с. 437), даже обобщенной функции (с. 439).

Конечно, этой книге недостает очень часто той четкости и строгости, которую сегодня хотелось бы видеть там. Удивительно, однако, то, что многие «нестрогие» утверждения Фурье в конце концов оказывались в общем-то верными. Это мы продемонстрируем единственным примером, хотя число подобных примеров можно было бы увеличить.

Одним из центральных пунктов книги Фурье была мысль, что произвольная функция одного действительного переменного представима тригонометрическим рядом. Его доказательство этого утверждения не удовлетворит не только современного читателя; оно не убедило и его современников. Не очень-то ясно было, что означает в этом предложении термин «произвольная функция», какой смысл следует вкладывать в слово «представима». Уточнение и углубление смысла данных выражений происходило на протяжении почти всего XIX и первой половины XX в. От первых успехов, вроде теоремы Дирихле (1829 г.), что всякая функция, имеющая конечное число точек экстремумов и разрывов, действительно представима сходящимся всюду к этой функции рядом Фурье [23], и примера Дюбуа-Реймона (1877 г.) непрерывной функции, не выражающейся сходящимся всюду рядом Фурье [24], через уточнения и расширения терминов «функция» и «представление» правильность основной мысли Фурье кульминировала в теореме Меньшова (1950 г.), что всякая измеримая конечная почти всюду или принимающая бесконечные значения одного знака на мно-

---

[21] То, что эти идеи высказывались ранее Д. Бернулли и Эйлером (см. Дорофеева [1, с. 67]), не слишком умаляет заслугу Фурье.

[22] Нельзя согласиться с Хокинсом [1, с. 5—8], который прилагает большие усилия к тому, чтобы убедить, что общее понятие функции не следует связывать с именем Фурье

[23] См Паплаускас [1, с. 85—94].

[24] См. там же, с. 150—155

жестве положительной меры функция изображается рядом Фурье, сходящимся к ней по мере.

В общем, о влиянии Фурье на развитие теории функций можно было бы говорить очень много, но это скорее уместно в отдельной работе, а не в кратком обзоре, посвященном вкладу французских математиков в теорию функций в XIX в. Поэтому мы ограничимся в заключение оценкой книги Фурье [1], данной Дарбу в первых строках его предисловия к изданию 1888 г. этой книги: «Этот замечательный труд, который поистине можно поставить в один ряд с самыми совершенными научными творениями всех времен, характеризуется интересным и оригинальным изложением основных принципов. Он бросает самый живой и наиболее глубоко проникающий свет на все основные идеи, которыми мы обязаны Фурье и на которых отныне должна покоиться натуральная философия» (см. Фурье [1, с. V]).

Меньшее, чем Коши или Фурье, но все же очень заметное влияние на развитие теории функций оказали исследования их современника Пуассона. Особенно следует подчеркнуть его достижения в теории тригонометрических рядов и по теории суммирования расходящихся рядов [25].

Несомненно влияние Лиувилля, главным образом в связи с идеями разложения функции по собственным функциям, обобщениям интеграла Фурье и дробного дифференцирования. Нельзя не упомянуть теорему Бонне, известную под наименованием второй теоремы о среднем интегрального исчисления (1849 г.); исследования Лагерра по преобразованию расходящихся рядов в сходящиеся непрерывные дроби [26] и по полиномам его имени; создание теории действительных чисел Мере (1869 г.) до появления соответствующих работ Вейерштрасса, Дедекинда и Кантора [27]. Из более поздних можно напомнить некоторые результаты Югоньо и Альфана, почему-то почти не замеченные в историко-научной литературе, но представляющие определенный интерес. Первый в 1882 г. установил, хотя и не совсем точно, сходимость в среднем разложения функции с интегрируемым квадратом по любой системе ортонормальных функций [28]. Второй [1] обнаружил, что из сходимости ряда в среднем вообще не следует его сходимость в каждой точке; ему же принадлежат исследования по дробному дифференцированию; он ввел полиномы, известные под наименованием полиномов Аппеля. Последний лишь более глубоко изучил свойства этих полиномов [29].

Наряду с этими, принадлежащими по своей форме классическому анализу, или теоретико-функциональными, но разроз-

---

[25] См. Паплаускас [1, с. 68—74, 139—140, 241—242]. О вкладе Пуассона в метод суммирования Абеля см. Туччьяроне [1, с. 3].
[26] См. Борель [21, с. 55—56].
[27] См. Дюгак [1].
[28] Югоньо [1]. Его в этом несколько опередил Гарнак, чего Югоньо не знал.
[29] См. Пинкерле [1, с. 785].

ненными, результатами, имелись и более систематические исследования по теории функций.

Здесь, прежде всего, необходимо остановиться на нескольких работах одного из крупнейших французских математиков — Гастона Дарбу. Самой важной из них для развития теории функций был, несомненно, его «Мемуар о разрывных функциях» [1], опубликованный в 1875 г. Этот мемуар в целом можно охарактеризовать как классическое математическое произведение, не столь уж частое в математической литературе, в котором соединены совершенная четкость и строгость (разумеется, уровня 70-х годов прошлого столетия) и которое дало ясные ответы на многие вопросы того времени, опровергло многочисленные распространенные тогда заблуждения.

Начинается он с определения произвольной функции. Затем вводится понятие непрерывной функции; дается определение и доказывается существование точных верхней и нижней граней значений функции на интервале; проводится различие между конечностью и ограниченностью с соответствующим простым и вместе с тем совершенно убедительным примером. Доказывается, что непрерывная на сегменте функция принимает все промежуточные значения, заключенные между двумя заданными ее значениями, и вместе с тем указывается (с соответствующим примером), что это свойство непрерывной функции, принимавшееся порой за самое ее определение, не является характеристическим для нее, ибо существуют разрывные функции, обладающие тем же свойством (получившим впоследствии наименование свойства Дарбу). Доказывается также, что непрерывная функция принимает свои максимальное и минимальное значения на сегменте. Сформулирован и доказан ряд основных свойств интеграла Римана [30]. Введены понятия абсолютно и условно сходящихся рядов и изучено понятие равномерной сходимости; установлено, что равномерно сходящийся ряд непрерывных функций имеет суммой непрерывную же функцию, и вместе с тем на примере продемонстрировано, что условие равномерной сходимости для непрерывности суммы лишь достаточно. Установлены достаточные условия почленного дифференцирования рядов. Большое внимание уделено построению примеров непрерывных функций, не имеющих производной на том или ином множестве значений аргумента, а также примерам разрывных, но интегрируемых по Риману функций.

Не все введенные Дарбу понятия и доказанные теоремы были новыми. Изложенные, однако, строго и систематически, более четко и общо, они вскоре стали общим достоянием математиков, а позднее вошли во все солидные курсы анализа.

Другой важной для развития теории функций работой Дарбу была его статья «Добавление к мемуару о разрывных функ-

---

[30] О вкладе Дарбу в изучение интеграла Римана см Медведев [2, с 196—199].

циях» [3], появившаяся в 1879 г., в которой построен бесконечный класс непрерывных функций, не имеющих производной ни в одной точке. Правда, в этом его опередил Дини, но и статья Дарбу имела немаловажное значение для крушения укоренившегося в то время предрассудка, что всякая непрерывная функция дифференцируема всюду, за исключением отдельных значений аргумента. Некоторые примеры недифференцируемых функций, данные Риманом и Вейерштрассом, до этого еще могли рассматриваться как досадные исключения; после результатов Дини и Дарбу эти исключения уже нельзя было игнорировать.

Наконец, третьей работой Дарбу является «Мемуар об аппроксимации функций от очень больших чисел и об одном широком классе разложений в ряды» [2], вышедший в свет в 1878 г. Здесь он, отталкиваясь от идей Лапласа, развил метод асимптотических оценок членов разложения функции по весьма общим ортогональным многочленам и воспользовался им для исследования таких разложений.

Достижения Дарбу в теории функций существенно умаляются в одном отношении. Годы появления его перечисленных работ характеризовались в истории теории функций все возрастающими применениями теоретико-множественного метода (Ганкель, Кантор, Дюбуа-Реймон, Смит, Дини и др.) [31]. Дарбу не захотел или не сумел увидеть в этом методе важного инструмента исследования свойств функций. К тому же вскоре он переключился на другие области исследований (геометрия и теория дифференциальных уравнений в частных производных), а его изыскания в теории функций остались изолированным эпизодом в его научной деятельности. Более того, на рубеже веков он перешел в стан недоброжелателей рассматриваемой нами научной дисциплины, когда его молодые соотечественники начали поднимать ее на новую ступень развития.

В создании благоприятных условий для начала творчества Бореля, Бэра и, особенно, Лебега большую роль сыграли труды по теории функций другого большого французского ученого — Камилла Жордана, соединившего четкость стиля Дарбу с теоретико-множественным методом. Его результаты в анализе и теории функций стали тем фундаментом, на который опирались создатели нового периода теории функций, а его поддержка начинаний молодых исследователей помогла им выдержать нападки. Введение и первые шаги в изучении важнейшего класса функций действительного переменного — функций с ограниченным изменением [1]; рассмотрение вслед за Пеано основного для XIX в. определения меры точечных множеств, а главное — установление связи этого понятия с другими понятиями теории функций, особенно с понятием интеграла [2] [32]; новая концепция кривой линии

[31] См. Медведев [1, с. 97—102].
[32] См. Медведев [2, с. 222—227].

(кривые Жордана), изучение целого ряда понятий теории точечных множеств и топологии (диаметра множества и расстояния между множествами, связности и т. п.) и установление их роли в изучении свойств функций [3], — все это делает Жордана одной из главных фигур истории теории функций в XIX столетии. Его роль особенно велика благодаря его «Курсу анализа» [3] — одному из основных учебных руководств конца прошлого века, на котором воспитывалось молодое поколение исследователей. Вот как Лебег [39, с. 98] оценивал его творчество в области теории функций: «Камилла Жордана следует рассматривать как первого мастера (artisan) того ренессанса изучения действительного, которое придало нашей науке новую силу. Он, конечно, имел многочисленных и ценных предшественников, но если до него имелись лишь искусные замечания, изолированные результаты, глубокие, но чаще скорее смутные, чем глубокие, концепции, то после него мы имеем ясную и скоординированную науку».

И хотя в этих словах имеется некоторое преуменьшение роли и значения предшественников и современников Жордана (особенно Дини) и определенное преувеличение в отношении ясности и скоординированности теории функций действительного переменного в трудах Жордана, все же в основном слова Лебега являются правильными.

§ 5. Распространение во Франции теоретико-множественных и теоретико-функциональных представлений

Сколь бы важными ни были для развития теории функций основополагающие идеи Коши и Фурье, какие бы значительные результаты ни получили Дарбу, Жордан и другие упомянутые в предыдущем параграфе ученые, один существенный недостаток исследований по теории функций во Франции во второй половине XIX в. бросается в глаза — их оторванность (если исключить некоторые работы Жордана) от теории множеств. Между тем в 70—80-х годах создается теория множеств; она соединяется с теоретико-функциональными изысканиями. Но проводится эта работа главным образом в Германии и Италии (Ганкель, Кантор, Дедекинд, Дюбуа-Реймон, Дини, Вольтерра и др.), а Франция остается в стороне. Это соединение приносит богатые плоды. Для того чтобы аналогичная работа могла выполняться и во Франции, нужна была популяризаторская деятельность ученых, как правило, меньшего ранга, но сумевших вырваться за рамки установившихся научных традиций, нередко сдерживавших поступательное развитие науки. Эта деятельность состоит в рецензировании появляющихся публикаций, в переводе их на другие языки, в чтении соответствующих курсов лекций, в издании популярных книг и статей, порой в не очень ясных спекуляциях философского толка. Неблагодарная зачастую для деятелей этого типа, такая работа все же полезна, и без нее нередко вряд ли возможно продвижение в новых направлениях научных исследований, особенно для страны со сложившимися традициями, с господством представлений признанных корифеев.

Нам нелегко нарисовать достаточно полную картину распространения теоретико-множественных представлений во Франции 70—80-х годов XIX столетия — для этого, в частности, требуется привлечение большого архивного материала. Однако поскольку популяризаторская работа явилась одним из важных условий перехода теории функций на новый этап ее развития и деятелями этого перехода явились именно французские ученые, то мы попытаемся хотя бы в первом приближении набросать эскиз такой картины.

Мы уже говорили, что середина прошлого столетия в развитии французской математики характеризовалась определенным упадком по сравнению со взлетом математических исследований в Германии. Время, когда французские математики могли обходиться отечественными математическими идеями, как это было в начале века, прошло. Встала проблема ознакомления французских ученых, особенно молодежи, с достижениями иностранцев. Одной из форм такого ознакомления является реферативная работа.

Необходимость в создании научного органа, в котором помещались бы рефераты выходящих работ, осознал Гастон Дарбу, который основал в 1870 г. журнал «Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques». В нем начали печататься, наряду с оригинальными работами (что еще было возможно в XIX в. в математическом реферативном органе), и более или менее пространные рефераты. Мы не собираемся делать обзор публиковавшихся там рефератов. Наша цель неизмеримо более скромна: проиллюстрировать на отдельных из них проникновение теоретико-множественных и теоретико-функциональных представлений во Францию и их возможное влияние на развитие новых идей в этой стране.

Работа Ганкеля «Исследования о бесконечно часто колеблющихся и разрывных функциях» находится, несомненно, у самых истоков теории функций и оказала очень существенное влияние на ее развитие. Ее содержание не раз освещалось в историко-научной литературе [33], и нет нужды останавливаться на нем. Отметим только, что в этой работе Ганкель получил много интересных и важных результатов и впервые в явном виде стал пользоваться элементами теоретико-множественного метода. Опубликована она была первоначально в 1870 г. в виде программы лекций в Тюбингенском университете [34], и в том же 1870 г. в первом номере «Бюллетеня..» Дарбу появился довольно простран-

---

[33] См., например, Медведев [1, с 97—99], Хокинс [1, с. 29—33].
[34] В 1882 г она была перепечатана в «Mathematische Annalen».

ный реферат Гюэля [1], в котором в благожелательном тоне излагалось ее содержание. Подчеркивалась, в частности, идея, что теперь уже нельзя считать дифференцируемость функции следствием ее непрерывности. Можно предполагать, что именно этот реферат сыграл определенную роль в ознакомлении Дарбу с работой Ганкеля, так как Дарбу уже в 1873 г. докладывал на заседании Французского математического общества содержание своего мемуара [1], о котором шла речь в предшествующем параграфе. В предисловии к нему Дарбу сообщил, что он не только изучил ганкелевскую работу, но и знаком с критикой ее бельгийским математиком Жильбером. То, что Дарбу не стал пользоваться в явном виде теоретико-множественным методом, видимо, отчасти объяснимо некоторыми ошибочными результатами статьи Ганкеля.

Следующий пример, который мы намереваемся привести, таков. В 1887 г. вышла книга Пеано «Геометрические приложения исчисления бесконечно малых». На ее содержании мы опять не останавливаемся [35], ограничившись упоминанием, что именно в ней впервые было введено мероопределение, известное под наименованием меры Пеано — Жордана. В том же году в «Бюллетене...» был опубликован реферат Ж. Таннери [2] этой книги. Несмотря на краткость реферата, Таннери все же отметил, что Пеано ввел понятия внутренней, внешней и граничной точек множества и различал внутренние и внешние длины, площади, объемы точечных множеств — понятия, игравшие фундаментальную роль в мемуаре Жордана [2]. Трудно судить о том, знал ли Жордан книгу Пеано, так как он обычно не ссылался на своих предшественников, но вполне допустимо, что он был знаком с рефератом Таннери, сообщавшего, хотя и глухо, об этих понятиях у Пеано.

Можно было бы привести и другие примеры. Но и приведенные достаточно свидетельствуют, что один канал для распространения во Франции теоретико-множественных представлений был открыт.

Ускорению этого процесса еще в большей мере способствовали переводы на французский язык работ зарубежных авторов и публикации иностранцев во французских журналах. Опять-таки ограничимся несколькими примерами.

Известна та большая роль, которую сыграла посмертная работа Римана «О возможности представления функции посредством тригонометрического ряда» [36], ознаменовавшая собой начало исследований по теории функций действительного переменного. Опубликованная Дедекиндом в 1868 г., она уже в 1873 г.

---

[35] О теоретико-множественном содержании этой книги см Медведев [1, с 137—144].

[36] О ней см , например, Медведев [1, с. 43—45, 2, с. 182—185], Паплаускас [1, с. 130—132, 140—141, 210—217], Граттен-Гюиннес [1, с. 123—129], Хокинс [1, с 17—20 и др.].

появляется во французском переводе Дарбу в незадолго до этого основанном последним журнале[37].

Дедекинд, наряду с Кантором, являлся одним из создателей теории множеств XIX в. Он шел к ней иным путем — через алгебру и теорию чисел, и его работы по проблемам названных дисциплин зачастую носили теоретико-множественный характер. На примерах множеств алгебраических чисел он разработал многие идеи и методы будущей теории множеств. Одной из его работ этого типа была большая статья «О теории целых алгебраических чисел», написанная им по предложению Дарбу для публикации в «Бюллетене...» в 1876—1877 гг. В ней не содержалось теоретико-функциональных идей, за исключением, разве, зародышевых форм идей функции множества и общего определения понятия функции, но вся эта работа проникнута теоретико-множественными соображениями и методом, демонстрируя их действенность в алгебре и теории чисел[38].

К создателям теории множеств и теории функций XIX в. относился и Дюбуа-Реймон. Свои исследования в этих областях он подытожил в книге «Общая теория функций», опубликованной в 1882 г. Написанная трудным языком, довольно путаная в общематематических и, особенно, философских установках, эта книга содержала очень богатый (для времени ее написания) материал по теории множеств и функций[39]. В 1887 г. она была переведена на французский язык. Как не лишенный интереса, отметим тот факт, что издана она была не в Париже, а в провинциальной Ницце, а ее переводчиками были малоизвестные Мильхо и Жиро. Книга Дюбуа-Реймона оказала большое влияние не только на чисто математические интересы Бореля и Лебега, но и на их общенаучные взгляды.

Остановимся еще на переводах и публикациях работ Кантора. В 1882 г. Миттаг-Леффлер основал новый математический журнал «Acta mathematica». Осознав большую значимость работ Кантора по теории множеств и желая сразу же поставить репутацию журнала на должную высоту, он предложил Кантору перевести его основные работы по теории множеств на французский язык и опубликовать их в основанном им журнале. Получив согласие Кантора, Миттаг-Леффлер организовал группу переводчиков, в состав которой вошли некоторые молодые тогда французские математики, в том числе Пуанкаре, и их переводы после прочтения и исправления их Кантором появились в «Acta...» в 1883 г. Кроме того, Кантор в том же журнале опубликовал в 1883—1885 гг. три оригинальные статьи на французском языке. То, что все эти работы появились за пределами страны, не столь существенно в рассматриваемом нами отношении. Изданные при

---

[37] «Bull. des sci. math et astron», 1873, 5, 20—48, 79—96.

[38] Коротко об этом см Медведев [1, с. 102—104].

[39] К сожалению, она еще не изучена должным образом историками математики.

участии молодых французских ученых, они скоро стали известными во Франции [40]. В 1895—1897 гг. появляется завершающий труд Кантора «К обоснованию учения о трансфинитных множествах» [41], а уже в 1889 г. он переводится на французский язык Мароттом и публикуется — опять-таки любопытный факт — в провинциальном научном журнале («Mémoires, de la Soc. des sci. phys. et nat. de Bordeaux», ser. 5, t. 3) [42].

Известное значение в ознакомлении французских ученых с теорией множеств имела популяризаторская работа, попытки общего осмысливания некоторых результатов новой теории. Во Франции эту работу начал известный историк математики Поль Таннери.

В начале 80-х годов выходит «Большая энциклопедия» и в 15-м томе ее (1883 г.) Таннери помещает статью «Множество» [1], в которой излагает основные понятия теории множеств, опираясь на только что появившиеся работы Кантора в «Acta mathematica», о которых речь шла несколько выше.

Вслед за тем он опубликовал статью [2], где сделал дерзкую, но, разумеется, обреченную тогда на неудачу попытку доказать, что с точки зрения мощности существуют только два вида бесконечных точечных множеств — счетные и несчетные, т. е. решить проблему континуума.

Еще через год П. Таннери публикует статью «Научная концепция континуума. Зенон Элейский и Георг Кантор» [3]. В ней он проанализировал парадоксы Зенона с точки зрения канторовской теории множеств. В связи с этим он изложил многие теоретико-множественные понятия и результаты.

В статье «О концепции трансфинитного» [4], вышедшей в 1894 г., он выступил как сторонник актуальной бесконечности. В ней небезынтересно обсуждение аксиомы Евдокса — Архимеда, рассмотрение возможности введения неархимедовых (трансфинитных, по терминологии автора) величин и анализ подхода к ним у Аристотеля; это, вероятно, было навеяно незадолго до этого (в 1891 г.) появившимися соображениями Веронезе, хотя П. Таннери о нем не упоминает.

В 80—90-х годах попытки общего осмысливания содержания теории множеств были предприняты рядом французских авторов. У нее во Франции были противники, начиная с видного философа-идеалиста Ренувье, но нашлись и защитники. В третьей главе мы рассмотрим некоторые аспекты полемики между ними, а сейчас ограничимся лишь замечанием, что сам факт обсуждения теоретико-множественных вопросов на страницах философской периодики возбудил интерес к ним и у математиков.

---

[40] Содержание этих работ описано в книге Медведева [1, с. 110—112, 116—125].

[41] См. о нем там же, с. 171—178

[42] Впрочем, этот перевод появился в виде оттиска и в Париже; см. Лебег [21, с. 214, сноска].

Значительный резонанс во Франции вызвало появление книги Кутюра «О математической бесконечности» [1], вышедшей в 1896 г. и защищенной в качестве докторской диссертации. В ней понятие бесконечности рассмотрено в разных аспектах и, в частности, значительное место отведено канторовской теории множеств. Впрочем, Ж. Таннери в рецензии [4, с. 138] на эту книгу упрекнул автора за неполноту изложения теории Кантора и сам отчасти пополнил описание теоретико-множественных результатов. Упрекнул он Кутюра и за то, что последний недостаточно подчеркнул значение теории множеств для развития математики. Правда, сам Ж. Таннери [4, с. 138] считал, что эта теория оказала математике пока очень ограниченные услуги и имела лишь большое философское значение для осмысливания ее принципов. Напротив, Пикар [1] в обзоре, появившемся в том же номере журнала, что и рецензия Ж. Таннери, несколько иронически отнесясь к философско-математическому аспекту теории множеств, ее изложению в книге Кутюра и в рецензии Ж. Таннери, настаивал на большой математической значимости этой теории для развития собственно математики и указал на естественность привлечения совершенных нигде не плотных множеств в работах Пуанкаре о фуксовых функциях и Адамара о геодезических линиях.

В заключение несколько слов о книге Ж. Таннери «Введение в теорию функций одного переменного» [1]. Ее первое издание (1886 г.) не отличалось богатством теоретико-множественных идей, и в предисловии ко второму изданию этой книги [6, с. IV] он признал, что ранее был «без надобности робок» в этом отношении. Однако если учесть, что первоначальный вариант книги писался в эпоху господства теории аналитических функций, то обращение в 1886 г. к теории функций действительного переменного представляло определенную заслугу автора. Ж. Таннери в это время был профессором Нормальной школы, его преподавание оказало значительное воздействие на улучшение уровня обучения в ней [43], а книга [1] выросла из его лекций в этой школе, постепенно обогащавшихся теоретико-множественными идеями и переросших в значительно расширенное второе, уже двухтомное издание названной книги ([6], 1904—1910).

Таким образом, в последней четверти XIX столетия во Франции был подготовлен тот взлет теоретико-функциональных исследований, который на рубеже веков был связан с именами Бореля, Бэра, Лебега, Фреше, Данжуа и др. Оригинальные работы Дарбу и Жордана, переводы и рефераты работ зарубежных авторов, популяризаторская работа и осмысливание новых достижений математики, лекции в высших учебных заведениях — все это подготовило ту почву, на которой выросла новая школа теории функций и множеств, причем не национального, а мирового масштаба.

---

[43] См. Пикар [5, с. 19—21].

Глава вторая

ВОЗНИКНОВЕНИЕ И РАСЦВЕТ ФРАНЦУЗСКОЙ ШКОЛЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И МНОЖЕСТВ

§ 1. Первые результаты Бореля

В 1889 г. в возрасте 18 лет Борель сдал вступительные экзамены и был одновременно зачислен в Политехническую и в Высшую Нормальную школы. Хотя в смысле последующей жизненной карьеры учеба в Политехнической школе сулила, казалось бы, больше успехов и многие советовали Борелю остановить свой выбор на ней, он предпочел Нормальную школу [1]. Причина была достаточно очевидной: как говорилось в предшествующей главе, Политехническая школа к этому времени представляла собой малоинтересное в научном отношении учреждение, тогда как Нормальная школа выходила на широкую арену научной деятельности; Бореля же «очень влекло к себе научное образование, в особенности математическое» (*Де Бройль* [1, с. 67]). Призыв на военную службу несколько помешал его нормальной учебе, хотя ему и было разрешено заниматься в университете в Монпелье, где он служил в армии. Затем он возвратился в Нормальную школу и окончил ее в 1892 г. В 1894 г. он защитил докторскую диссертацию и был назначен преподавателем Лилльского университета, где проработал до 1897 г.

Научные работы Бореля начали появляться с 1889 г. Он в течение всей жизни отличался большой научной плодовитостью. Только с 1889 по 1901 г. включительно он опубликовал 65 работ. Мы не намерены в какой-то мере характеризовать всю его научную деятельность, распространявшуюся на очень многие области математики, математического естествознания, философии и т. д. Наша цель гораздо скромнее: выделить те моменты ранних работ Бореля, которые подводили к новому периоду развития теории функций действительного переменного. Поэтому, лишь упомянув одну из его самых первых работ — «Об изменении порядка членов в полусходящемся ряде» [1], опубликованную в 1890 г. и свидетельствовавшую о его раннем интересе к теории рядов (не выходившем в то время за рамки классического анализа), мы основное внимание уделим нескольким его фундаментальным трудам конца прошлого века, изредка привлекая примыкающие к ним исследования.

---

[1] См. Де Бройль [1, с 67]

Первой такой фундаментальной работой явилась его докторская диссертация «О некоторых вопросах теории функций», защищенная в 1894 г. и вышедшая из печати в 1895 г. Большей частью она посвящена теории функций комплексного переменного, и нам нет нужды останавливаться на всем ее содержании. Выделим только несколько моментов.

Сколь бы многообразны и значительны ни были работы Римана, Ганкеля, Кантора, Дарбу, Вейерштрасса, Дини и др. по теории функций действительного переменного в XIX в., все же можно утверждать, что они даже в совокупности не определяли картину аналитических исследований. Главным объектом изучения являлись аналитические функции. Диссертация Бореля [2] интересна, в частности, тем, что в ней достаточно отчетливо намечен подход к изучению неаналитических функций (причем сам этот подход вырастал в рамках теории аналитических функций), а также тем, что и при изучении аналитических функций приходилось привлекать теоретико-множественные соображения.

И в том и другом Борель не был пионером. Привлечение теории множеств в теорию функций комплексного переменного началось раньше и в XIX в. в некотором смысле достигло кульминации в работах Миттаг-Леффлера начала 80-х годов [2]; во Франции аналогичные шаги предпринимал, например, Пуанкаре. В диссертации же Бореля началось обогащение теории множеств в ходе изучения аналитических функций.

Одним из самых важных результатов Бореля явилась его знаменитая теорема о конечном покрытии. Собственно, она тоже не была новой для 1895 г. Ею в несколько иной форме (и притом даже в более общем виде) пользовались математики XIX в., в частности Вейерштрасс; Пинкерле в 1882 г. выделил ее в качестве самостоятельной теоремы и указал на некоторые ее применения [3]. Однако ту прозрачную теоретико-множественную форму, в которой она прочно вошла в математику, ей придал именно Борель. Он сформулировал ее так: «Если на прямой имеется бесконечное множество таких частичных интервалов, что всякая точка этой прямой является внутренней, по крайней мере, для одного интервала, то можно эффективно определить ограниченное число интервалов, выбранных из заданных и обладающих тем же свойством (всякая точка прямой является внутренней по крайней мере для одного из них)» [2, с. 44]. Под «прямой» Борель разумел замкнутый отрезок прямой, включение понимал как строгое, а исходное множество интервалов мыслил счетным.

В рассматривавшихся Борелем вопросах нужна была не сама эта теорема о конечном покрытии [4], а доказываемая с ее помощью лемма, что если на сегменте задано бесконечное множе-

---

[2] См. Медведев [1, с. 197—203].
[3] См Медведев [3, с 89—91].
[4] О последующей истории этой теоремы см. Гильдебрандт [1].

ство интервалов, общая сумма длин которых меньше общей длины сегмента, то на последнем существует несчетное множество точек, не принадлежащих ни одному из указанных интервалов [2, с. 19]. Но Борель осознал и самостоятельный интерес теоремы, прямо указав на это [2, с. 44].

Любопытны и соображения Бореля по поводу указанной леммы. Он, в частности, писал: «Прежде всего, если определенно существует одна такая точка [не принадлежащая заданным интервалам.— *Ф. М.*], то таких точек имеется несчетное множество, так как если бы они образовывали счетное множество, то их можно было бы заключить в интервалы, сумма которых[5] была бы сколь угодно малой и которые можно было бы выбрать так, что, прибавляя эти интервалы к заданным интервалам, мы имели бы сумму, меньшую общего интервала» [2, с. 43]. Ясно, что речь здесь идет о заключении точечного множества в счетную совокупность интервалов, а отсюда не так уж далеко и до идеи борелевской меры, в основе которой лежит именно заключение в счетное множество интервалов, а не в конечное, как это было в предшествующих мероопределениях.

Что касается выхода за пределы теории аналитических функций, то и в этом у него были предшественники. Одним из них был Прингсгейм, который в 1894 г. рассмотрел вопрос о том, каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять функция действительного переменного, чтобы ее можно было представить рядом Тейлора. Для функций комплексного переменного этот вопрос был решен давно — таковым является условие моногенности. Для функций действительного переменного это условие далеко не достаточно. Прингсгейм показал, что существуют такие функции, которые имеют производные всех порядков и которые тем не менее не разложимы в ряд Тейлора.

Борель, естественно, при подготовке своей диссертации (напомним, что готовил он ее в 1893 г.) не знал этой работы Прингсгейма[6], поэтому особенно интересно, что они с разных сторон пришли к одинаковому (в некотором, конечно, смысле) результату — к необходимости изучения неаналитических функций действительного переменного. Эти функции естественно появлялись в рамках теории функций комплексного переменного. Но если Прингсгейм поставил и решил задачу нахождения необходимых и достаточных условий разложимости функции действительного переменного в ряд Тейлора и ограничился лишь отдельными примерами неаналитических функций, то Борель пошел дальше. Он выделил целый класс таких функций, нашел для функций этого класса аналитическое выражение в виде суммы степенного ряда и ряда Фурье:

$$f(x) = \Sigma (A_k x^k + B_k \cos kx + C_k \sin kx), \qquad (1)$$

[5] Имеется в виду сумма длин; то же и далее.

[6] В [2] Борель ссылался на другую работу Прингсгейма.

удобное тем, что производная любого порядка функции (1) получалась дифференцированием ряда надлежащее число раз.

Таким образом, если раньше неаналитические функции действительного переменного появлялись при исследовании аналитических функций комплексного переменного скорее в виде отдельных примеров, исследования которых, как писал Борель, «выполнялись с целью открыть у этих функций запутанные свойства или, скорее, установить, до какой степени осложнения могла бы привести идея функции, когда на нее налагается мало или не налагаются совсем надлежащие ограничения» [2, с. 40], то теперь выделен целый класс функций, не являющихся аналитическими и тем не менее в достаточной степени поддающихся изучению, класс функций с вполне определенными свойствами. Поэтому Борель в заключении своей диссертации в явной форме ставит вопрос о необходимости изучения общих свойств неаналитических функций действительного переменного. Следует, впрочем, отметить, что он еще выражал сомнение в наличии большого числа общих свойств у этих функций, «так как, имея данное свойство, умелый аналист часто может построить функцию, не обладающую им» [2, с. 40]. Но, несмотря на это, задача поставлена Борелем достаточно определенно. Более того, он ставит вопрос о том, насколько закономерно использование только аналитических функций в ряде вопросов физики, высказывая предположение, что некоторые из физических закономерностей могут быть лучше описаны функциями, не разлагаемыми в ряд Тейлора [2, с. 43].

Борель сделал и еще один шаг в ослаблении ограничения аналитичности. Вслед за диссертацией появилась его заметка [3], в которой он указал аналитическое выражение вида (1) для функций двух и более действительных переменных, а затем, основываясь на этом, построил [4] пример уравнения в частных производных:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \alpha\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \psi(x, y)$$

с аналитической правой частью, которое для некоторых значений α имеет неаналитическое решение $\varphi(x, y)$. В заключении последней заметки он с оправданной гордостью писал: «Не думаю, что известен такой пример функции двух переменных, которая была бы неаналитической в каждой точке и которая вводилась бы необходимо в связи с очень простой проблемой, в формулировку которой входит лишь аналитическая функция двух переменных» [4, с. 935].

Уже только три отмеченных момента диссертации Бореля — применение теоретико-множественных методов, доказательство теоремы о конечном покрытии, убедительный показ необходимости изучения неаналитических функций действительного переменного — давали бы право на отнесение Бореля к основоположникам теории функций действительного переменного. Но он сделал много больше.

Очередным его шагом в создании новой теории функций явилось глубокое изучение расходящихся рядов. Как и в указанных ранее вопросах, у него были предшественники. Расходящимися рядами и их суммированием занимались многие[7]. Трудно сказать, в какой мере Борель был первоначально знаком со своими предшественниками. В своих ранних работах он ссылался лишь на Пуанкаре и Стилтьеса в связи с изучением последними асимптотических разложений и лишь в конце первого своего фундаментального труда по расходящимся рядам [8] отметил, что во время, когда этот мемуар находился в печати, он ознакомился с одной заметкой Пинкерле и мемуаром Паде, связанных с расходящимися рядами. Скорее всего, он пришел к идее суммирования рядов независимо. Оснований у него для этого было достаточно, и опять-таки эти основания базировались на его исследованиях по теории функций комплексного переменного.

В своей первой работе по расходящимся рядам [5], в которой он ввел экспоненциальный метод суммирования, он сразу же предложил применить его для аналитического продолжения функций, а это — одна из основных проблем, занимавших его еще в диссертации. Постоянное обращение к теории функций комплексного переменного — вообще характерная черта почти всех работ Бореля по расходящимся рядам.

Специально экспоненциальному методу суммирования Борель посвятил уже упоминавшуюся работу «Основы теории расходящихся суммируемых рядов» [8][8]. Здесь он показал, что на суммируемые ряды распространяются многие предложения о сходящихся рядах, особенно подчеркнул, что расходящиеся суммируемые ряды являются столь же законным объектом изучения, как и сходящиеся, что при помощи его метода можно находить численные значения некоторых расходящихся функциональных рядов и что эти ряды имеют важные применения. В частности, он доказал, что ряд аналитических функций, равномерно суммируемый в области, имеет суммой аналитическую функцию [8, с. 142, 143]. Он установил также, что если равномерно суммируемый в некоторой односвязной области ряд сходится равномерно в некоторой порции области, то его сумма является той же самой аналитической функцией во всей области [8, с. 144]. Тем самым появлялась возможность производить аналитическое продолжение функции при помощи его метода суммирования.

В указанной работе Борель лишь намекнул на то, что можно ввести и интегральный метод суммирования [8, с. 136, 138], но не стал здесь говорить о нем.

---

[7] См., например, Туччьяроне [1].

[8] Мы не будем описывать содержания метода, отослав читателя к книге Харди [1, с. 10, 229] или статье Туччьяроне [1, с. 16].

В примыкающих к мемуару [8] заметках [6, 7, 9, 10] и статьях [11, 12] Борель уточнил и развил идеи этого мемуара. В частности, в заметке «Приложения теории расходящихся рядов» [7] он показал, что его экспоненциальный метод суммирования применим к некоторым видам асимптотических разложений, рассматривавшихся Стилтьесом и Пуанкаре. Особо отметим заметку «Об области суммируемости разложения Тейлора» [9], которая была опубликована в 1896 г. и в которой был введен важный метод аналитического продолжения функции путем построения борелевского многоугольника суммируемости [9].

Несомненно, работы Бореля по расходящимся рядам способствовали еще большему привлечению внимания математиков к этой области исследований. Видимо, не без воздействия изысканий Бореля Академия наук Франции в 1896 г. объявила конкурс на лучшую работу по изучению роли расходящихся рядов в анализе, предназначив победителю «Большую премию по математическим наукам» за 1898 г. [10] Естественно, что сам Борель откликнулся на этот конкурс, представив большой «Мемуар о расходящихся рядах» [15, 16], за который ему и была заслуженно присуждена премия. В этом мемуаре Борель расширил и углубил свои предшествующие результаты; здесь, в частности, был введен и применен в разных вопросах и борелевский интегральный метод суммирования [11], почти равносильный экспоненциальному методу, но удобный при изучении ряда новых вопросов.

Борель продолжал свои исследования по расходящимся рядам и после, о чем будет сказано несколько далее. Вместе с тем в рассматриваемый период он занимался и другими вопросами. Очень важным из них является вопрос о мере точечных множеств.

Мы уже говорили, что еще в диссертации Борель столкнулся с необходимостью заключения точечного множества в счетное множество интервалов. Однако тогда он не дошел до идеи обобщения понятия меры. С аналогичной ситуацией — и опять-таки в теории функций комплексного переменного — он встретился и в 1898 г. [14], когда ему потребовалось дать метрическую характеристику некоторых точечных множеств. Здесь он воспользовался идеей заключения множества в счетное множество интервалов для введения важнейшего понятия теории множеств и функций, да и вообще одного из основных математических понятий — понятия множества, измеримого (B), заложив основы теории борелевской меры. Нам нет нужды подробно останавливаться на этом, так как данные вопросы не раз обсуждались в историко-научной литературе. В частности, те вопросы, в которых появилась

[9] О нем см., например, указанную работу Туччьяроне [1, с. 26]. Однако там этот метод отнесен только к 1901 г., хотя фактически Борель ввел его на пять лет ранее.

[10] «Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris», 1896, **123**, p. 1216.

[11] О нем см. Харди [1, с 229], Туччьяроне [1, с. 18—19].

потребность во введении нового понятия меры точечных множеств, подробно рассмотрены в книге Хокинса [1, с. 97—106][12], само это мероопределение рассмотрено на указанных страницах книги Хокинса, в книгах Песина [1, с. 54—56], Медведева [2, с. 233, 280—282] и др. Отметим лишь, что в [14] Борель фактически ввел мероопределение Лебега[13], однако та методологическая установка, которой придерживался Борель и которая состояла в непризнании им несчетной бесконечности, видимо, помешала ему стать создателем теории лебеговской меры, которая, кстати, была не нужна в его тогдашних исследованиях; не исключено также, что, как заметил Данжуа [15, с. 191], Борель почувствовал тот недостаток лебеговской меры, что она неинвариантна при топологических преобразованиях.

Теоретико-множественное содержание книги Бореля [14] далеко не исчерпывается введением B-множеств. В ней вообще были изложены многие вопросы теории множеств и последняя нашла широкое применение в разнообразных проблемах теории функций. Вместе с тем в этой книге определенно выявилось критическое отношение к наивной теории множеств, созданной математиками XIX в. Это проявилось, например, в том, что трансфинитные числа Борель вводил не по способам, предложенным Кантором, а на основе теории роста функций Дюбуа-Реймона; что, как мы сказали, он отрицал несчетную бесконечность, и т. д. Эту критическую направленность уловили даже философы[14], и хотя Борель в статье «По поводу новой бесконечности» [17], как бы оправдываясь, дал высокую оценку творчеству Кантора, содержание статьи скорее поддерживало указанную критическую установку.

Занимался Борель и другими вопросами теории множеств и функций. Даже краткое описание его подходов и результатов заняло бы очень много места. Поэтому мы ограничимся лишь беглыми указаниями.

Борель интересовался вопросами конструктивной теории функций, и его работы в этом направлении начали появляться в 1897 г. В качестве примера назовем его статью «Об интерполяции непрерывных функций полиномами» [28], в которой он предложил интересную интерполяционную формулу, изучавшуюся затем рядом авторов[15]. К вопросам интерполяции он возвращался и в 1905 г., в книге «Лекции по теории функций действительного переменного и их разложениям в ряды полиномов» [29]. Его соображения несколько далее развил Фреше [6, 9, 11].

Из многочисленных других работ Бореля по теории функций и множеств следует также отметить заметку «Одна теорема об измеримых множествах» [27], в которой он, в частности, установ-

[12] См. также Данжуа [15].
[13] См Данжуа [15], Медведев [2, с. 280—282].
[14] См , например, Эвеллен [1].
[15] См. Фреше [17].

вил, что всякая B-функция обладает C-свойством Лузина; заметку «Некоторые замечания о множествах прямых и плоскостей» [25], где был намечен выход за рамки теории точечных множеств; заметку «Об эффективном представлении некоторых разрывных функций» [26], где наряду с прочим (кажется, впервые) был поставлен вопрос об исключении трансфинитных чисел из математических рассуждений; наконец, заметку «Об одном свойстве замкнутых множеств» [30], в которой установлено, что для того, чтобы некоторое множество удовлетворяло теореме о конечном покрытии, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым.

Мы перечислили не все работы Бореля по теории множеств и функций даже раннего периода его научной деятельности. К некоторым другим мы еще будем обращаться. Но и описанные работы показали, что перед математиками открылось новое необъятное поле исследований, интересных как сами по себе, так и многообразными их приложениями.

§ 2. Первые результаты Бэра

Достижения Бореля в теории функций действительного переменного, несомненно, велики. Однако почти все его результаты получались как бы с оглядкой на уже существовавшую математику, главным образом теорию функций комплексного переменного. Они появлялись у него при решении задач, поставленных в старых теориях, и после формулировки опять использовались в последних. Видимо, наиболее характерно в этом отношении введение борелевского мероопределения. Как мы отмечали ранее, понятие меры Борель ввел в 1898 г. в книге [14] с целью дать некую метрическую характеристику точечных множеств, появившихся в решавшихся им задачах теории функций комплексного переменного. Как справедливо заметил Песин [1, с. 54, 55], «примерно на трех страницах текста этой книги, не содержащих ни одного доказательства (с. 46—48), были высказаны идеи, которым суждено было стать основоположными в дальнейшем развитии теории функций действительного переменного». Сомнительно, однако, что Борель в 1898 г. видел важность этих идей для математики вообще и теории функций в частности. Понятие меры нужно было ему для решения конкретных задач, и после решения их он не стал заниматься проблематикой меры или теорией B-множеств. Более того, когда в 1905 г. он возвратился к этому вопросу [29, с. 15—20], то не добавил чего-либо существенно нового, а излагая классификацию функций Бэра [29, с. 93—100, 156—158], не заметил связи этой классификации с введенными им B-множествами. Это говорит, в частности, о том, что проблематика функций действительного переменного не была основной в трудах Бореля, а носила вспомогательный характер.

Иначе обстоит дело в случае Бэра. Он с первых своих шагов в науке без оглядки вступил в новый мир идей и методов и работал исключительно над ними. Даже тогда, когда ему пришлось — видимо, по долгу службы [16] — излагать вопросы теории функций комплексного переменного, он подчеркивал, что разделение анализа на действительный и комплексный имеет столь фундаментальный характер, что они образуют две совершенно различные науки [16, с. V].

Как и Борель, Бэр в 1892 г. был принят одновременно в Политехническую и Нормальную школы. Как и Борель, Бэр выбрал последнюю (видимо, руководствуясь теми же мотивами) и окончил ее в 1895 г., получив звание преподавателя математики средней школы.

Интерес Бэра к теории функций действительного переменного связывают иногда [17] с двумя факторами. Во время экзаменов на звание преподавателя Бэр занял первое место за письменную часть экзаменов, но в общем балле по математике он был поставлен только на третье место вследствие ошибки на устном экзамене при ответе на вопрос о непрерывности экспоненциальной функции. Бэр осознал, что то доказательство, с которым он ознакомился во время обучения в 1891 г. на математическом отделении лицея Генриха IV, неудовлетворительно в некоторых отношениях, и это направило его помыслы на понятие непрерывности функции и на понятие функции вообще.

Вторым (по-видимому, более важным) фактором явилось воздействие Вольтерры. По окончании Высшей Нормальной школы Бэр был послан в качестве степендиата (boursier d'étude) в Италию, где была сильна традиция теории функций действительного переменного и где он познакомился с Вольтеррой, внесшим существенный вклад в разработку этой теории. Последний оценил оригинальность мышления Бэра и оказал на него определенное влияние в смысле ориентации научных изысканий.

Не следует, однако, забывать, что во время обучения в Нормальной школе Бэр прослушал курс лекций Ж. Таннери по теории функций действительного переменного, так что у него были и другие стимулы заняться этой теорией.

Если не считать издания Бэром в 1895 г. лекций Пуанкаре по аналитической теории теплоты, то первой опубликованной его работой была, по-видимому [18], заметка 1897 г. «Относительно общей теории функций действительного переменного» [1]. Автор отправлялся в ней от восходящей к Дини проблемы взаимосвязи непрерывности функции двух переменных по каждому переменному отдельно с непрерывностью ее по совокупности переменных. Введя понятия полунепрерывной функции и колебания функции в точке (с. 694), он с их помощью решает поставленную проблему

---

[16] В это время Бэр преподавал математический анализ на Факультете наук в Дижоне.

[17] См. Костабель [1, с. 406—407].

[18] Полного перечня работ Бэра в известных нам его биографиях не имеется.

в том смысле, что всякая функция двух переменных, непрерывная по каждому переменному, является точечно разрывной относительно совокупности переменных, т. е. на всякой дуге из области задания функции существуют точки, в которых она непрерывна по совокупности переменных (с. 694). В частности, отсюда он получает, что функция, удовлетворяющая условиям предыдущей теоремы, на прямой $y=x$ сводится к функции одного переменного, которая будет точечно разрывной на этой прямой, и тут же задается вопросом о характеристике класса точечно разрывных функций одного переменного. Он показывает, что к этому классу принадлежат функции:

1) не имеющие разрывов первого рода или имеющие таковые только на конечном или бесконечном, но приводимом, множестве точек;

2) имеющие разрывы на совершенном нигде не плотном множестве, причем в точках этого множества функция принимает одно и то же значение;

3) являющиеся суммой конечного числа или бесконечного ряда таких функций.

Вместе с тем Бэр указывает, что перечисленные в пп. 1)—3) функции не исчерпывают всего класса точечно разрывных функций одного переменного.

То, что в [1] Бэру удается получить только частные результаты, видимо, объясняется недостаточно общим его подходом к понятиям полунепрерывности и колебания функции, которые он определял только по отношению к интервалам. Но уже в следующей работе «О разрывных функциях, разложимых в ряды непрерывных функций» [2], появившейся в 1898 г., он, введя понятия колебания функции по отношению к совершенному множеству, непрерывности по отношению к совершенному множеству и точечно разрывной функции, получил фундаментальный результат, известный под наименованием «теоремы Бэра о функциях первого класса»: «Если ряд, членами которого являются непрерывные функции от x, сходится для каждого значения x, то он представляет функцию, которая точечно разрывна относительно всякого совершенного множества. Обратно, если функция $f(x)$ является точечно разрывной относительно всякого совершенного множества, то существует последовательность непрерывных функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$, которая для каждого значения x_0 переменного x стремится к $f(x_0)$» [2, с. 886].

Так был выделен первый класс функций будущей классификации Бэра и дана структурная характеристика функций этого класса. Этой теоремой в некотором смысле завершалось изучение функций, являющихся пределами однократных или простых последовательностей непрерывных функций. Дини в 1878 г. нашел условия непрерывности в точке предела такой последовательности; Арцела в 1884 г. установил условия непрерывности ее на сегменте. Оставалось охарактеризовать пределы таких последовательностей в тех случаях, когда они не являлись непрерывными функциями, что и сделал Бэр.

Большое значение этой теоремы Бэра обусловливалось тем, что характеризуемый ею класс функций включает в себя наиболее употребительные функции анализа. По выражению Лузина [2, с. 75], «теорема Бэра о функциях класса 1 отличается такой красотой и настолько удобна для приложений, что ее можно считать за идеал для предложений теории функций». В [2] Бэр лишь наметил ее доказательство. Впоследствии к этой теореме обращались и он сам, и другие математики, к чему мы еще возвратимся.

В связи с выделением функций первого класса естественной была постановка следующей проблемы: однократный предельный переход по отношению к непрерывным функциям приводил к выделению интересного класса функций; что собой представляют пределы последовательностей функций этого нового класса? Другими словами, к чему приведет двукратный предельный переход всюду в применении к последовательностям непрерывных функций?

Так возникал вопрос о классификации разрывных функций, который был решен Бэром в том же году в заметке «О разрывных функциях, связанных с непрерывными функциями» [3]. Непрерывные функции он отнес в нулевой класс; функции, являющиеся пределами непрерывных, но не являющиеся непрерывными,— в первый класс; функции, представимые в виде

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \tag{1}$$

где $f_n(x)$ нулевого или первого класса, но не принадлежащие этим двум классам,— во второй класс, и т. д. до всех классов с конечными номерами. В [3] Бэр ограничился указанием, что эту классификацию можно продолжить, используя трансфинитные числа, и высказал убеждение, что, каково бы ни было трансфинитное число α второго числового класса, существуют функции, принадлежащие классу с индексом α (с. 1622). Здесь же Бэр поставил вопрос о характеристике функций высших классов, подобной той, которую он установил для функций первого класса. Вопрос этот оказался значительно сложнее, и Бэру удалось лишь наметить некоторый частный результат для функций второго класса, для чего ему пришлось, однако, ввести важные теоретико-множественные понятия множеств первой и второй категорий (с. 1623).

Соображения, аналогичные развитым в заметках [2, 3], позволили вслед за тем Бэру [4] найти необходимое условие интегрируемости уравнения в частных производных:

$$X(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + Y(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

более общее, чем дававшееся обычно, и состоящее в непрерывности $f(x, y)$ по совокупности переменных (x, y). Для этой цели ему пришлось ввести в одномерном случае понятие точечно переменной относительно всякого совершенного множества функции, аналогичного понятию точечно разрывной относительно всякого совершенного множества функции (функции Бэра первого класса по классификации Бэра), и доказать теорему, что всякая непрерывная и точечно переменная относительно всякого совершенного множества функция является константой.

Все эти предварительные понятия, предложения, соображения и наметки в развернутом виде были изложены Бэром в его основной работе — диссертации «О функциях действительного переменного» [5], вышедшей из печати в 1899 г. Эта диссертация оказалась одной из важнейших вех в развитии теории функций действительного переменного. Ее значение определялось многими факторами.

Прежде всего она была полностью посвящена функциям действительного переменного, причем главным ее предметом явились разрывные функции. Изучение последних потребовало привлечения и даже обогащения идей и методов теории множеств, а результаты такого изучения выявили интерес, представляемый функциями, рассмотренными Бэром. Бэр более, чем кто-либо из его предшественников, осознал неразрывность связей теории функций и теории множеств и прямо писал об этом, подводя итоги своих исследований [5, с. 121].

Далее, многие понятия, предложения и методы Бэра, содержавшиеся в его диссертации, послужили отправными пунктами многочисленных последующих исследований (вплоть до настоящего времени). Отдельные из них, вроде понятий полунепрерывной функции, множеств первой и второй категории, колебания функции в точке и т. п., теоремы о функциях первого класса, стали классическими и входят теперь в самые элементарные руководства по теории функций.

Наряду с такими вполне осознанно сформулированными результатами, диссертация Бэра богата зародышами отдельных идей, из которых впоследствии выросли важные методы. Укажем, к примеру, использование Бэром множеств вида $E[f(x) \geqslant \alpha]$, $E[f(x) \leqslant \alpha]$, получивших вскоре столь плодотворные применения в работах Лебега и его последователей; широкое использование принципа пренебрежения некоторыми типами множеств, особенно множеств первой категории; зачатки метода категорий, выросшего впоследствии в важный метод доказательства теорем существования, при помощи которого получены красивые теоретико-функциональные результаты [19].

По окончании диссертации Бэр задумал существенно обобщить ее основные положения. Наброски этих обобщений он из-

[19] К отдельным конкретным результатам, содержащимся в диссертации Бэра, мы еще возвратимся.

ложил в двух заметках [6, 7], в первой из которых он ввел топологическое пространство последовательностей натуральных чисел, известное под названием нуль-мерного пространства Бэра, а во второй дал наметки теории функций, заданных на множествах, образованных из элементов этого пространства и принимающих действительные значения. Однако болезнь помешала ему развить эти идеи, и он возвратился к ним только в 1909 г. До наступления болезни он успел лишь опубликовать в 1900 г. статью [8], в которой дал доказательство условий достаточности теоремы о функциях первого класса для случая n переменных, а затем в научной деятельности Бэра наступил длительный перерыв.

§ 3. Первые результаты Лебега

Третьим знаменитым выпускником Нормальной школы был Анри Лебег. Нормальную школу он окончил в 1897 г., когда Борель уже проявил себя в области теории функций многими важными работами, а Бэр только начал сообщать о своих фундаментальных результатах. Через год после окончания школы стали появляться работы Лебега.

Лебег дебютировал небольшой статьей [1], посвященной анализу и некоторым расширениям теорем Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций алгебраическими и тригонометрическими многочленами. Эти теоремы Вейерштрасса сыграли большую роль в становлении теории функций действительного переменного, так как они давали выражение произвольной непрерывной функции равномерно и абсолютно сходящимися рядами многочленов. «Таким образом, непрерывная функция, взятая без всяких ограничений, перестала быть чем-то недоступным и получила такое же математическое выражение в виде бесконечного ряда, как аналитическая функция; при этом нередко ряды, представляющие функции, не разлагаемые в строку Тейлора и даже не имеющие производных ни в одной точке, чрезвычайно просты и отличаются большим сходством с рядами, выражающими хорошо известные аналитические функции. Этого одного замечания было бы достаточно, чтобы понять, что чистый анализ не может более ограничиваться изучением только функций комплексной переменной... После открытия Вейерштрасса непосредственное изучение функций вещественной переменной сделалось одной из важнейших очередных задач» (*Бернштейн* [1, с. 182]).

Доказательства Вейерштрасса его теорем были довольно сложными и опирались на еще не разработанную в то время теорию сингулярных интегралов. Поэтому многие математики, понимая огромное значение теорем Вейерштрасса, предлагали различные варианты доказательств этих теорем. Один из таких вариантов и предложил Лебег в [1]. Однако эта статья любопытна и тем, что автор, опираясь на теорему Вейерштрасса, выходит за пределы непрерывных функций, доказав теорему, что всякая ограниченная на (a, b) функция, имеющая счетное множество точек разрыва, представима на этом интервале рядом полиномов, равномерно и абсолютно сходящимся на всяком интервале из (a, b), не содержащем точек разрыва функции. Другими словами, Лебега интересуют здесь и разрывные функции, хотя и менее общего типа, нежели те, к изучению которых уже приступил Бэр. И этот факт интересен, в частности, потому, что при подготовке своей статьи Лебег вряд ли знал о первых работах Бэра, появившихся незадолго до ее публикации. Однако вскоре Лебег знакомится с работами Бэра, осознает их большое значение и посвящает ряд своих исследований обобщению и углублению результатов Бэра. К этому циклу как раз и относится его следующая статья [2].

Бэр, охарактеризовав в своей диссертации функции одного переменного первого класса, не сумел распространить свою основную теорему на функции нескольких переменных, полагая, что для установления многомерного аналога этой теоремы его методами требуется предварительное изучение некоторых геометрических свойств множеств в n-мерных евклидовых пространствах, в частности свойств совершенных множеств [5, с. 88]. Лебег в [2] предложил метод сведения задач о функциях нескольких переменных к задачам о функциях одного переменного, основанный на применении кривых Пеано, заполняющих n-мерную область. При помощи этого метода он относительно просто распространил теорему Бэра о функциях первого класса на функции любого конечного числа переменных. Он отметил также, что аналогично распространяются некоторые другие результаты Бэра и что вообще указанный метод может служить во многих подобных случаях; это подтвердилось развитием теории функций.

Бэровская проблематика занимала значительное место в исследованиях Лебега, и к этому мы еще возвратимся в одном из следующих параграфов. После заметки [2] Лебег на некоторое время отошел от этой проблематики, занявшись подготовкой своей диссертации. Цикл его предварительных сообщений, содержание которых впоследствии вошло в диссертацию, состоит из заметок [3—7]. Перед тем как говорить о них, сделаем небольшой экскурс в историю.

В математике XIX в. существовали два типа определений длины кривой и площади поверхности. Один из них состоял в задании аналитической формулы для этих геометрических объектов. Так, если кривая параметрически задана выражениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, то длина $l(C)$ кривой C выражалась формулой

$$l(C) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right]^{1/2} dt. \tag{1}$$

Если параметрическое представление поверхности S задано функциями $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, $z=z(u, v)$, $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$, $v_1 \leqslant v \leqslant v_2$, и эти функции имеют непрерывные производные первого порядка, то площадь $A(S)$ поверхности S выражается формулой

$$A(S) = \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} \left[\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right)^2\right]^{1/2} du\, dv. \qquad (2)$$

Формулы (1), (2) порой и принимались за определения соответственно длины кривой и площади криволинейной поверхности.

Неудовлетворительность этого подхода проистекала из того, что геометрическим понятиям длины и площади отказывалось в самостоятельном существовании, вне зависимости от их аналитического одеяния (1) и (2). Между тем в XIX в. располагали достаточно общим представлением о функции, чтобы обнаружить существование таких функций, для которых интегралы (1) или (2) не существовали. Объявлять, что в этом случае не имеет смысла говорить о длине или площади поверхности, было бы слишком рискованно: история свидетельствовала, что геометрические объекты существовали и изучались обычно задолго до того, как им удавалось дать соответствующее аналитическое выражение.

Второй подход состоял в том, что длину кривой (площадь поверхности) определяли как предел длин вписанных в нее ломаных (площадей вписанных многогранных поверхностей), если каждый из элементов вписанной фигуры (длина звена ломаной, диаметр грани поверхности) стремится к нулю. Неудовлетворительный даже в случае длины кривой, этот подход в случае площади криволинейной поверхности оказался совершенно непригодным, как это показал известный пример Шварца поверхности цилиндра вращения, когда предел многогранных поверхностей, вписанных в столь простую геометрическую фигуру, просто не существует[20]. К тому же такое определение предполагало установление способа вычисления длины или площади; Шеффер же в 1889 г. показал, что существуют кривые с конечными длинами в смысле подобного определения, для которых интеграл (1) не существует.

Таким образом, перед математиками вставало несколько связанных друг с другом задач: дать определения длины кривой и площади поверхности, а также связать эти определения с формулами типа (1), (2) при надлежащем обобщении понятия интеграла.

Если в отношении понятия длины кривой вопрос был в известном смысле решен исследованиями Шеффера и Жордана (хотя из них, как упоминалось, вытекала необходимость обобщения

---

[20] Об этом примере см., например, Фихтенгольц [1, с. 248—251].

понятия интеграла), то с площадью поверхности дело обстояло неудовлетворительно[21]. После появления примера Шварца и вслед за тем аналогичного примера Пеано предлагались различные варианты определений второго типа. Так, например, площадь поверхности определялась как предел площадей вписанных в эту поверхность многогранных поверхностей, когда их грани бесконечно уменьшаются по всем направлениям так, что углы этих граней не стремятся к нулю; вместо ограничения, налагаемого на углы граней, требовали также стремления к нулю углов, образованных гранями с рассматриваемой поверхностью, и т. д. Однако такие ограничения искусственны в том отношении, что совершенно неочевидно, что при других простых ограничениях на грани вписываемых поверхностей не будет получаться другой предел.

Этот комплекс вопросов и составил предмет указанных выше заметок Лебега, а также его диссертации [8]. Первая из них [3] не имеет прямого отношения к описанным проблемам. В ней был введен класс поверхностей, наложимых на плоскость, более широкий, чем рассматривавшиеся обычно до этого. Вместе с тем она любопытна тем, что отправным пунктом для ее появления явилось, как вспоминает Монтель, юношеское открытие Лебега, иллюстрируемое скомканным листом бумаги, который он показывал своим однокашникам[22]. И хотя трудно согласиться с Монтелем, что именно оно привело Лебега к открытию своего интеграла, так как к последнему было много путей, тем не менее, видимо, верно то, что это событие сыграло определенную роль к пробуждению интереса Лебега к понятию поверхности вообще, а в связи с этим и к понятию интеграла. Действительно, вслед за заметкой [3] появляются его заметки [4, 5], где вводится знаменитое лебеговское определение площади поверхности, которое коротко можно описать так[23].

Пусть S — поверхность, задаваемая функциями $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, $z=z(u, v)$, $u_1\leqslant u\leqslant u_2$, $v_1\leqslant v\leqslant v_2$. Пусть, далее, π_n — последовательность многогранников, вписанных в S или описанных вокруг нее, которая стремится к S в том смысле, что функции $x_n=x_n(u, v)$, $y_n=y_n(u, v)$, $z_n=z_n(u, v)$, задающие многогранники последовательности π_n, равномерно стремятся к функциям $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, $z=z(u, v)$, задающим поверхность S. Тогда площадь $A(S)$ поверхности S определяется формулой

$$A(S) = \inf \underline{\lim}\, A(\pi_n),$$

где $A(\pi_n)$ — площадь поверхности многогранника π_n, а нижняя грань берется по всем последовательностям многогранников.

---

[21] Неудовлетворительно оно и в настоящее время, несмотря на усилия очень большого числа математиков.

[22] См. Данжуа, Феликс, Монтель [1, с. 13—14]. Эту иллюстрацию Лебег привел в заметке [3, с. 1505].

[23] См. Радо [1, с. 141].

Это определение является, по выражению крупнейшего специалиста в области теории поверхности Радо, «вероятно, наиболее плодотворным из предложенных определений» [1, с. 141],— небезынтересное для 1943 г. признание, если учесть, что вслед за лебеговской были предложены многочисленные дефиниции этого понятия (Тонелли, У. Г. Юнг, Бёркил, Радо и др.). Кроме приведенного определения, являющегося основным содержанием заметок [4—6], в них имелись еще некоторые интересные идеи, на двух из которых мы вкратце остановимся.

Одним из важных понятий функционального анализа является понятие полунепрерывного функционала[24], играющее фундаментальную роль, в частности, в вариационном исчислении. В общем виде его ввел в 1921 г. итальянский математик Тонелли. Однако достаточно прозрачно идея полунепрерывного функционала прослеживается и в работах [5, 6] Лебега, появившихся еще в 1900 г.

Вряд ли молодой Лебег был знаком тогда с понятием функционала, введенным ранее Вольтеррой. Но идея длины кривой как функции линии и площади как функции поверхности достаточно естественно возникала из лебеговских изысканий, и он смело ввел ее [5, с. 869; 6, с. 935—936], а затем, используя определение Бэра полунепрерывной функции действительного переменного, распространил ее на выражения, определяющие длины и площади, охарактеризовав их — по аналогии с бэровским определением — как полунепрерывные функционалы. Так, в последней из указанных работ Лебег писал: «В последующем я буду рассматривать функции

$$f(C) = \int\limits_{C} F(x, y, z)\, ds, \quad f(S) = \iint\limits_{S} F(x, y, z)\, da.$$

Кривая C и поверхность S будут удовлетворять некоторым граничным условиям; $F(x, y, z)$ непрерывна в области, где изменяется C, или на поверхности S, если C предписано оставаться на S. Если C спрямляема, а S квадрируема, то $f(C)$, $f(S)$ всюду равны их минимуму, т. е. если C_i (или S_i) равномерно стремятся к C (или S), то $f(C)$ (или $f(S)$) самое большее равна наименьшему из пределов[25] $f(C_i)$ (или $f(S_i)$)» [6, с. 936], т. е. $f(C)$ и $f(S)$ являются полунепрерывными функционалами.

Второй идеей, также тесно связанной с изысканиями Лебега, является, как уже отмечалось, идея обобщения интеграла. Лебег несколько раз указывал на необходимость этого обобщения [5, с. 870; 6, с. 937] и даже пытался в первой из этих заметок дать его, определяя обыкновенный интеграл через криволинейный, а двойной интеграл — через поверхностный [5, с. 869, 870]. Однако заканчивает он эту заметку указанием, что можно дать опреде-

---

[24] О нем см., например, Плеснер [1, с. 224].
[25] Т. е. нижнему пределу.

ление интеграла для функций одного переменного, не зависящее от криволинейного интеграла.

Реализацией последнего замечания явилась его заметка [7], в которой было предложено известное лебеговское определение интеграла от ограниченных измеримых функций. Кроме самого понятия интеграла, здесь содержалось много других фундаментальных идей теории функций: понятия меры и измеримой функции, ряд теорем об измеримых и интегрируемых функциях [26].

Соображения Лебега, высказанные в заметках [4—7], подробно развиты в его диссертации «Интеграл, длина, площадь» [8], увидевшей свет в 1902 г. в итальянском математическом журнале. Мы не будем останавливаться на ее содержании, так как в основных идеях оно было высказано в названных заметках; к тому же многое описано Хокинсом [1, с. 121—131] [27].

Из многих других работ Лебега раннего периода мы пока остановимся еще на двух заметках 1903 г. В первой из них [10] доказана одна из основных теорем теории функций, что всякая непрерывная функция с ограниченным изменением дифференцируема почти всюду. Во второй [11] впервые в общем виде сформулировано понятие измеримой функции [28] и высказаны — лишь с краткими указаниями на способы доказательства — две не менее фундаментальные теоремы теории функций, получившие впоследствии наименования «теоремы Егорова» и «теоремы Лузина». К некоторым другим работам Лебега мы возвратимся позднее.

Как и Бэр, Лебег посвятил себя почти полностью миру идей теории функций действительного переменного и связанных с ними геометрических и топологических представлений. Однако если Бэр после своей диссертации и пары последовавших за ней кратких предварительных заметок вынужден был прервать научную деятельность, у Лебега, наоборот, наступил период расцвета его исследований, часть которых будет рассмотрена в следующих параграфах.

§ 4. О работах других французских математиков по теории функций

Несомненно, что именно трудами Бореля, Бэра и Лебега закладывался фундамент новой теории функций действительного переменного в 90-х годах прошлого столетия и в самом начале XX в. Не нужно, однако, думать, что названные математики были единственными учеными Франции, из трудов которых выросла эта новая наука. Дело обстояло сложнее.

Во-первых, в трудах ряда других французских математиков этого периода разрабатывались многие идеи и методы, ставшие

---

[26] Подробнее об этой работе Лебега см. Медведев [2, с. 232—236].
[27] См. также Медведев [2, с. 237—240].
[28] До этого Лебег смешивал измеримые и суммируемые функции.

впоследствии неотъемлемой составной частью теории функций действительного переменного. Мы сознательно ограничились таким пониманием этой теории, чтобы в фундаменте ее лежали теоретико-множественные представления, с целью отличить ее от классического анализа. Но такое ограничение, разумеется, является довольно искусственным, поскольку в рамках анализа, без прямого обращения к теории множеств, вырастал поток исследований, влившихся затем в теорию функций.

Во-вторых, наряду с первоклассными учеными, как обычно, работали немало тружеников меньшего ранга. Они не получили столь блистательных результатов, но их труд был необходим и для возникновения новых концепций, и для их углубления и распространения.

Если подходить к истории теории функций во Франции с требованием включить в нее и исследования указанного типа, то написание такой истории оказалось бы трудноосуществимым делом. Потребовалось бы изучить слишком большое число работ в самых разнообразных областях математики, особенно в теории функций комплексного переменного, в теории дифференциальных уравнений, обыкновенных и в частных производных, в математической физике.

Поэтому мы ограничимся лишь краткими упоминаниями отдельных направлений исследований или результатов ряда математиков Франции указанного периода и чуть подробнее остановимся на работах нескольких ученых по теории расходящихся рядов, обычно не рассматривавшихся в историко-математической литературе.

Из исследований Адамара мы остановимся только на двух фактах.

При рассмотрении многих вопросов теории функций очень часто применяются понятия верхнего и нижнего пределов. Этими понятиями пользовался еще Коши; их заново ввел и неоднократно применял Дюбуа-Реймон, а затем и некоторые другие математики. Но только в 1892 г., когда Адамар воспользовался верхним пределом в столь важном тогда вопросе теории функций комплексного переменного, как вычисление радиуса сходимости ряда Тейлора, и дал для радиуса сходимости выражение

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}\, |a_n|^{1/n}},$$

где a_n — коэффициенты ряда, это понятие настолько прочно вошло в математику, что его нередко связывают только с именем Адамара[29], хотя последний и отмечал принадлежность этого понятия Дюбуа-Реймону.

Мы вкратце упоминали (с. 34) о роли теории роста функций

[29] См., например, Мандельбройт [1, с. 26].

в методике подхода к трансфинитным числам у Бореля[30]. С этой точки зрения интересна статья Адамара «О свойствах сходимости рядов с положительными членами и о неограниченно возрастающих функциях» [1], опубликованная в 1894 г. Ее основное содержание не так уж интересно в рассматриваемом нами аспекте истории теории функций, да к тому же в нем были отражены по большей части уже известные результаты, ранее полученные Дюбуа-Реймоном и Пинкерле, что признал и сам Адамар в дополнительном замечании к своей работе [1, с. 421]. Однако § 19—21 этой статьи (с. 334—336) любопытны, по крайней мере, в двух отношениях. Во-первых, для рассмотрения множеств функций, возрастающих до бесконечности все более медленно, Адамар привлек соображения о мощности множеств, опираясь на работы Кантора[31]. Во-вторых, он построил иерархию этих функций таким образом, что при введении понятия порядка роста и соответствующей символике (которых у Адамара не было) из этой иерархии получилась бы совокупность трансфинитных чисел второго числового класса. Как раз аналогичными соображениями и руководствовался Борель при введении трансфинитных чисел в 1898 г.

В качестве третьего примера укажем работы Пуанкаре 80-х годов по асимптотическим разложениям.

Асимптотические разложения появились в анализе с самого зарождения последнего[32]. На протяжении очень длительного времени математики смешивали бесконечные ряды и асимптотические разложения; у Бурбаки [1, с. 212] этот факт выглядит как упрек математикам прошлого. Однако такое смешение, имевшее место, в частности, и у Пуанкаре, оказалось очень полезным для развития теории суммируемых расходящихся рядов. Дело в том, что после работ Гаусса, Галуа и Коши расходящиеся ряды большинством математиков были признаны «незаконным» орудием анализа и их стремились изгнать оттуда. Однако при изучении некоторых вопросов очень часто приходилось сталкиваться с асимптотическими разложениями в форме расходящихся рядов. А поскольку такие разложения оказывались часто полезными, то тем самым поддерживался и побуждался интерес математиков к расходящимся рядам вообще. Общеизвестен факт, что именно Пуанкаре своими работами в этой области заложил основы асимптотических разложений. И как раз на них, в частности, ссылался, как мы отмечали, Борель при первых своих подходах к теории суммирования расходящихся рядов.

Пикар благожелательно относился к новым изысканиям по теории функций. В своем обзоре развития понятия функции, сделанном в 1899 г., он назвал теорию функций действительного переменного «истинной основой математического анализа»

[30] В следующей главе мы возвратимся к этому вопросу.
[31] Хотя прямой ссылки на работы последнего у Адамара здесь нет.
[32] См., например, Бурбаки [1, с. 209—212].

[2, с. 210] и высоко оценил некоторые результаты Бореля и Бэра. Сам он нередко подходил к проблеме введения неаналитических функций, например в работе [3], но, кажется, ограничивался лишь указаниями на интерес изучения таких функций. Даже при рассмотрении разложений функций в экспоненциальные ряды [4] в 1913 г., когда теоретико-функциональные методы были достаточно разработаны, он не пользовался ими. Это не означает, конечно, что его результаты не были интересными для теории функций. В той же работе [4], например, им построены примеры экспоненциальных рядов, суммы которых равны нулю всюду, кроме отдельных точек, где значение суммы отлично от нуля. Подобных результатов много не только у Пикара, но и у Пуанкаре, Адамара и др.; их изложение увело бы нас слишком далеко от нашей основной темы.

Перейдем поэтому к работам несколько иного характера. Здесь, по-видимому, следует начать со статьи Паде «О сходящихся или расходящихся целых рядах и рациональных непрерывных дробях» [2]. Ей предшествовала заметка в «Докладах Парижской академии наук» за 1893 г. [1], а еще за год до этого в Париже вышла его диссертация «О приближенном представлении функции рациональными дробями», где были изложены те же идеи, что и в [2].

С точки зрения предыстории теории суммирования расходящихся рядов работа Паде [2] заслуживает внимания по следующим соображениям.

Расходящиеся ряды появились чуть ли не вместе с рождением анализа; ими занимались многие математики и даже, начиная с Эйлера, предлагали различные методы их суммирования. Асимптотические разложения тоже, как мы сказали, внесли свой вклад в возбуждение интереса к ним.

Вместе с тем несомненно и то, что преобладающей тенденцией в изучении рядов в течение всего XIX в. было стремление избегать использования расходящихся рядов. Это в 1826 г. отчетливо выразил Абель: «Расходящиеся ряды иногда могут служить как символы для выражения того или иного предложения в сокращенном виде; но их никогда не следует ставить вместо определенных величин: таким путем можно доказать все, что угодно,— возможное и невозможное» [1, с. 220]. Еще более определенно он выразился в письме своему учителю Хольмбое: «Расходящиеся ряды вообще являются делом дьявола, и стыдно, что некоторые основывают на них свои доказательства, ...вследствие чего существенная часть математики оказывается необоснованной. Правда, результаты большей частью правильны, но это довольно странно» [33]. Подобные соображения высказывали и другие математики. Результатом явилась общая атмосфера подозри-

[33] Цитируется по Туччьяроне [1, с 2].

тельного отношения к расходящимся рядам, столь характерная для аналитиков прошлого столетия.

Сам Паде еще не совсем вырвался из этой атмосферы. В самом начале статьи [2] он упрекает авторов некоторых трактатов по анализу за «скандальную» нестрогость в отношении бесконечных рядов. Приведя затем слова Абеля [1, с. 219] о том, что произведение двух бесконечных рядов, образованное в соответствии с обычным правилом умножения, имеет смысл лишь тогда, когда все ряды сходятся, он солидаризуется с ним в случае произвольных числовых рядов. Вместе с тем он делает вполне осознанную попытку вырваться из столь жестко очерченных рамок. Общие соображения Паде [2, с. 98] в пользу обращения к расходящимся рядам и возможности узаконивания действий над ними не очень определенны. Но они основываются на определенных математических фактах.

Еще начиная с Ламберта было известно, что некоторые сходящиеся непрерывные дроби могут быть превращены в расходящиеся ряды. В 1879—1885 гг. Лагерр установил, что многие расходящиеся степенные ряды можно преобразовать в сходящиеся непрерывные дроби; в 1885—1888 гг. Альфан обнаружил, что непрерывная дробь может расходиться, а соответствующий ей степенной ряд будет сходящимся. Паде был знаком с их работами, и это привело его к мысли, что некоторые виды расходящихся степенных рядов могут оказаться предметом математического изучения. Более того, над расходящимися рядами можно производить операции сложения и умножения. Для оправдания своих соображений он разработал специальный аппарат разложения функций в цепные дроби и воспользовался им.

Паде не пришел к идее суммирования расходящихся рядов. Но тот факт, что такие ряды он сделал объектом изучения и поставил некоторые из них на один уровень со сходящимися рядами, с одной стороны, служил делу разрушения укоренившихся представлений, а с другой — способствовал привлечению математиков к их изучению. Мы упоминали (с. 32), что Борель узнал о работе Паде [2] уже после написания своего мемуара [8]. Однако Паде печатался и раньше; в 1891 г. он сообщил о некоторых своих результатах учителю Бореля Ж. Таннери, а его заметку [1] представил Академии наук Аппель — будущий деверь Бореля. Так что идеи Паде были достаточно распространены во Франции до первых работ Бореля по расходящимся рядам и могли сказаться неявно.

Иначе обстоит дело в случае еще двух французских математиков — Сервана и Леруа. Они к началу своих занятий расходящимися рядами уже были знакомы с основными работами Бореля, существенно опирались на них и в некоторых отношениях развивали их далее. Оба они решали злободневные тогда проблемы теории функций комплексного переменного: нахождение особых точек аналитических функций, вычисление значений функции в области ее существования, отыскание аналитических выражений для функций достаточно широких классов. Задача суммирования расходящихся рядов имела для них вспомогательный характер, но они по ходу дела вносили определенный вклад и в нее.

Так, например, хотя Борель с самого начала формально определил[34] сумму расходящегося ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \tag{1}$$

для любой целой функции

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{2}$$

действительного переменного x, удовлетворяющей при любом n условию $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{x^n}=\infty$, как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\varphi(x)}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n S_n, \tag{3}$$

где S_n — частные суммы ряда (1), тем не менее он фактически изучал и применял частный случай, когда $\varphi(x)=e^x$, а предел (3) имел вид

$$\lim_{n\to\infty} e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}S_n. \tag{4}$$

В этом случае при суммировании ряда Тейлора

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{5}$$

область суммируемости строилась относительно просто. Если z_i — особые точки функции, определяемой рядом (5), то эти точки соединялись прямыми с началом координат; к указанным прямым восстанавливались перпендикуляры в особых точках, а затем отбрасывались части плоскости, ограниченные построенными перпендикулярами и не содержащие начала координат. Получался выпуклый многоугольник, названный Борелем многоугольником суммируемости [9]. Для точек, расположенных внутри такого многоугольника, предел (4) существует и равен обычной сумме ряда (5), если он сходится, или значению аналитического продолжения этого ряда при его расходимости.

[34] См., например, Борель [5].

Несколько дальше пошел Серван [1]. Вместо борелевской функции e^x он брал [1, с. 152] функции e^{px}, где $p=1, 2, \ldots$, и определял сумму ряда (5) как

$$\lim_{n\to\infty} e^{-px} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{pn}}{(pn)!} S_{pn}.$$

Тогда многоугольник суммируемости оказывается криволинейным — борелевские перпендикуляры заменяются некоторыми кривыми (различными при выборе различных p), проходящими через особые точки аналитической функции, определяемой рядом (5), что позволяет вообще расширить область суммируемости по сравнению с борелевской. Применял Серван и другие виды суммирующих функций [2].

Большое внимание теории расходящихся рядов уделил Леруа [1—4], особенно в работе «О расходящихся рядах и функциях, определяемых разложением Тейлора» [2]. Если в методах Бореля сумма расходящегося ряда определялась путем некоторого «усреднения» последовательности $\{S_n\}$ частных сумм ряда (1), то Леруа пошел в направлении придания некоторых множителей самим членам ряда, причем эти множители брались такими, чтобы при $n\to\infty$ они стремились к 1. Вместо предела (3) Леруа рассматривал сумму расходящегося ряда (1) в виде предела при $t\to 1-0$, $0\leqslant t<1$, если такой предел существует, суммы ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n)} u_n,$$

где Γ — известная гамма-функция Эйлера. Этот метод суммирования оказался более трудным в аналитическом отношении и применялся, кажется, довольно редко [35].

Интересными в работе Леруа являются указания на связи теории расходящихся рядов с проблемой моментов, причем не только в смысле Стилтьеса, но и для конечных и двусторонне бесконечных интервалов, и с теорией интегральных уравнений [2, с. 414—415], а также включение расходящихся рядов, суммируемых его методом, в общую теорию асимптотических разложений Пуанкаре [2, с. 426—427].

В заметке [3], опубликованной в 1900 г., Леруа сформулировал то важное утверждение, что ряд Фурье, соответствующий произвольной непрерывной функции, суммируем одним из его методов в каждой точке к этой функции. Более общий результат Фейера (знавшего, кстати, работы Леруа) относительно суммируемости по Чезаро ряда Фурье ограниченных и интегрируемых по Риману функций в точках непрерывности и точках разрыва первого ряда появился на несколько месяцев позднее.

---

[35] См. Кнопп [1, с. 490—491], Харди [1, с. 107].

Мы очень коротко остановились только на нескольких работах различных французских авторов, занимавшихся расходящимися рядами помимо Бореля. Фактически число этих работ (да, видимо, и математиков, занимавшихся этой проблематикой в рассматриваемый период) было значительно большим.

§ 5. Лекции по теории функций

К началу XX столетия теория функций действительного переменного не была новой наукой. Она, как мы говорили, во многом была разработана в прошлом столетии, ее преподавали в высших учебных заведениях многих стран, и имелись превосходные для своего времени или, по крайней мере, интересные в ряде отношений монографии, посвященные ей. Укажем, например, книги Дини «Основы теории функций действительного переменного» (издание 1878 г., немецкий перевод со значительными дополнениями в 1892 г.) и «Ряды Фурье и другие аналитические представления функций действительного переменного» (1880 г.); Дюбуа-Реймона «Общая теория функций» (1882 г., французский перевод 1887 г.); трехтомный «Курс анализа» (второе издание 1893—1896 гг.) Жордана.

Однако после того как в разработку теории функций включились Борель, Бэр и Лебег, а позднее и многие другие, облик этой математической дисциплины существенно изменился. В нее более смело были введены теоретико-множественные идеи и методы, во многом обогащенные молодыми учеными. В частности, были предложены сильные методы изучения не только непрерывных, но и весьма широких классов разрывных функций. Наряду с решением многих давно поставленных проблем в рамках новых исследований возникало еще больше проблем другого рода, для решения которых нужно было привлечь новые силы.

Большую роль в утверждении обновленной теории функций как важной математической дисциплины сыграли курсы лекций, прочитанные на рубеже XIX—XX вв. Борелем, Лебегом и Бэром в различных высших учебных заведениях Франции. Значение этих лекций существенно возрастало благодаря тому, что они во многих случаях публиковались в виде отдельных книг, порой по записям слушателей, которые принимали участие в подготовке издания этих книг.

Цикл таких лекций в 1897 г. открыл Борель в Высшей Нормальной школе. В 1898 г. борелевские «Лекции по теории функций» вышли отдельной книгой [14]—первой из его знаменитой серии «Монографии по теории функций», охватившей затем пятьдесят книг различных авторов, как французских, так и зарубежных.

В 1899/1900 г. он прочел в той же школе лекции по расходящимся рядам, где, наряду с историческим очерком этой проблемы, были изложены борелевские методы суммирования и их применения. В 1901 г. эти лекции появились в виде книги [21].

В 1900/01 г. уже в Коллеж де Франс Борель изложил многие факты из теории рядов, и в 1902 г. вышли его «Лекции о рядах с положительными членами» [23].

В 1902/03 г. тоже в Коллеж де Франс дебютировал Лебег своими «Лекциями об интегрировании и отыскании примитивных функций» [13], опубликованными отдельной книгой в 1904 г.

В 1903/04 г. в Высшей Нормальной школе Борель прочел лекции о функциях действительного переменного и их разложении в ряды многочленов, а в следующем году они были напечатаны в виде книги [29].

В 1904/05 г. предметом лекций Лебега в Коллеж де Франс явилась теория тригонометрических рядов, а в 1906 г. была опубликована его книга «Лекции о тригонометрических рядах» [24].

В том же Коллеж де Франс прочел курс лекций по проблематике своих исследований Бэр, и результатом этого курса оказалась книга «Лекции о разрывных функциях» [10], опубликованная в 1905 г.

Укажем, наконец, еще лекции Бореля, прочитанные им на факультете наук Парижского университета в 1907/08 г. и появившиеся в 1910 г. в виде книги «Лекции по теории роста» [38].

Было бы слишком длинным да и не очень полезным делом подробно описывать содержание этих книг. Ограничимся несколькими общими замечаниями.

Прежде всего поражает интенсивность проделанной работы. Вряд ли можно назвать какую-либо другую отрасль математики, по которой в этот период в столь короткий срок и в одной стране появилось бы так много первоклассных монографий. Это, несомненно, свидетельствует о напряженности научных поисков и значительности результатов, полученных французскими учеными рассматриваемого периода в новой отрасли знания.

Разумеется, далеко не все в названных книгах было совершенно новым. Напротив, подавляющее большинство результатов уже было опубликовано в разнообразных математических изданиях, к тому же многие из них не принадлежали Борелю, Бэру или Лебегу. Изложенные, однако, в более или менее систематической форме, освещенные, как правило, с новой точки зрения, даже давние теоретико-функциональные результаты приобретали новое звучание. Проиллюстрируем последнее несколькими примерами.

Как мы говорили, расходящиеся ряды рассматривались математиками чуть ли не с самого начала изучения бесконечных рядов. В XIX в. было предложено несколько методов их суммирования. Однако до появления книги Бореля [21] они мало кого интересовали. Положение существенно изменилось после ее выхода, о чем свидетельствует такой, например, факт: за десятилетие 1890—1901 гг. по ним было опубликовано 28 работ, из которых почти половину составляют борелевские статьи; в следующем десятилетии расходящиеся ряды стали предметом 85 работ [36]. Конечно, неразумным было бы интерес к расходящимся рядам связывать только с появлением книги Бореля [21], опубликованной в 1901 г. Однако большое воздействие ее на усиление этого интереса вряд ли кто станет оспаривать.

Теория интегрирования привлекала многих математиков XIX в. Но не располагая достаточно общим понятием меры, они, как правило, оставались в рамках римановской концепции [37] и лишь делали отдельные попытки вырваться из них в теории несобственных интегралов (Гарнак, Гёльдер). Теория интегрирования по Риману и связанные с нею вопросы явились предметом шести из семи глав книги Лебега [13]. Но рассмотренная с новой точки зрения, она привела к новой теории интегрирования, которой после появления книги Лебега стало заниматься огромное число ученых.

Квазиравномерная сходимость последовательностей функций, введенная в 1884 г. Арцела и примененная им в нескольких последующих работах, оставалась, несмотря на обращение к ней в самом начале века У. Г. Юнга и Гобсона, малоизвестной. Когда же в 1905 г. это понятие и его применение к нахождению необходимых и достаточных условий непрерывности суммы ряда непрерывных функций изложил Борель в книге [29], то оно показалось столь новым, что само его введение порой связывалось с именем Бореля, хотя последний и указал на то, что оно, как и основанная на нем теорема, принадлежат Арцела.

Об интересе к этим книгам свидетельствуют переиздания и переводы их на другие языки. Так, книга Бореля [14] переиздавалась еще в 1914 и в 1926 гг.; в 1928 г. вышло второе издание книги Лебега [13]; в 1934 г. она была переведена на русский язык, а в 1966 г.— на английский; в 1930 г. появилось второе издание книги Бэра [10], а в 1932 г. был сделан ее русский перевод, и т. д. По этим книгам учились студенты и аспиранты не только Франции, но и многих других стран. Например, Млодзиевский и Бюшгенс использовали их в лекциях по теории функций в Московском университете и рекомендовали их своим слушателям. Наконец, все они служили отправными пунктами многочисленных исследований по теории функций во Франции и далеко за ее пределами, а также основой для последующих монографий и учебных руководств по этому предмету.

---

[36] Библиографические данные приведены в книге Целлера [1].

[37] Кроме Пеано и Стилтьеса с их, в некотором смысле преждевременными, идеями.

§ 6. *B*-множества и *B*-функции

Предыдущие параграфы настоящей главы были посвящены описанию отдельных работ. Продолжение нашего исследования в том же плане вряд ли реально осуществимо. За рассматриваемый период (1895—1915 гг.) Борель, помимо уже указанных, опубликовал около четырех десятков работ по теории множеств и функций; почти столько же принадлежит Лебегу; примерно два десятка появилось у Бэра; кроме того, к исследованиям по теории функций подключились другие французские математики — Фреше, Фату, Данжуа и др. Даже краткое их описание заняло бы очень много места, а если хотя бы в минимальной степени связать их с работами по этому предмету ученых других стран, что становится необходимым вследствие тесного переплетения исследований, задача еще более усложняется. Поэтому мы в дальнейшем будем рассматривать отдельные направления исследований, наиболее характерные, на наш взгляд, для выбранного предмета исторического изучения.

В этом отношении на первое место выдвигаются, несомненно, исследования по теории B-множеств и B-функций. Действительно, множества, измеримые по Борелю, или B-множества, и функции, входящие в классификацию Бэра, или B-функции, были введены почти одновременно и некоторое время изучались Борелем, Бэром и Лебегом вне связи друг с другом. Затем Лебег объединил их и получил фундаментальные результаты по тем и другим. Вместе с тем при их изучении возникло множество интересных нерешенных проблем, изучением которых занялись ученые других стран.

Как мы говорили (с. 33), B-множества ввел в 1898 г. Борель. Он очень кратко описал их, применил для решения конкретной задачи теории функций комплексного переменного, а затем не обращался к ним до 1905 г., но и тогда не добавил ничего нового по сравнению с первоначальным определением. Мы высказали (с. 35) в связи с этим предположение, что он не осознал тогда основоположности B-множеств для развития теории множеств и функций.

Напротив, Бэр, который ввел свою классификацию функций в том же 1898 г., основное внимание уделил именно изучению функций, входящих в эту классификацию.

Первым большим достижением в этом изучении явилась теорема о функциях первого класса. О ней мы тоже уже говорили (с. 37, 38) и к сказанному добавим следующее. В заметке [2] Бэр лишь наметил схему доказательства этой теоремы. В следующем году он посвятил ей почти всю вторую главу своей диссертации [5, с. 19—63], но ограничился лишь функциями одного переменного. Еще через год он дал ей другой вариант доказательства [8], приспособленный для многомерного случая. В 1905 г. Бэр посвятил этой теореме и необходимым для ее доказательства фактам из теории множеств и функций курс лекций в Коллеж де Франс, составивших содержание его книги [10]. Все предыдущие доказательства Бэра теоремы о функциях первого класса относились к функциям, заданным на сегментах или на замкнутых (даже совершенных) множествах. В 1906 г. Бэр [13, с. 12—21] изучил более общий вопрос задания функции на произвольном множестве n-мерного евклидова пространства и решил проблему нахождения необходимых и достаточных условий, при которых эту функцию можно пополнить так, чтобы она стала функцией первого класса на замкнутом множестве. Наконец, в 1909 г. Бэр доказал эту теорему для функций, заданных на множествах последовательностей пространства Бэра и принимающих действительные значения [17, с. 123—128].

По крайней мере четырежды к теореме Бэра обращался Лебег. О распространении им в 1899 г. этой теоремы на функции нескольких переменных уже говорилось (с. 41). В 1904 г. Борель готовил к печати свои «Лекции по теории функций действительного переменного и их разложениях в ряды многочленов» [29]. Здесь он лишь сформулировал (с. 98) без доказательства теорему Бэра, но зато поместил в виде приложения 2-е доказательство, предложенное Лебегом [38]. В предшествующих доказательствах Бэра существенно использовались трансфинитные числа. В [22] Лебег обошелся без них, введя понятие функции, непрерывной с точностью до ε на замкнутом множестве [39], и сформулировал теорему Бэра эквивалентным образом в виде утверждения: для того чтобы функция f была класса 0 или 1, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ область задания f можно было разложить на сумму счетного множества замкнутых множеств, на каждом из которых f непрерывна с точностью до ε. В другой статье, написанной вслед за тем, но опубликованной из-за задержки с печатанием книги Бореля несколько ранее [22], Лебег [14] распространил свое доказательство на функции любого числа переменных. Наконец, в 1905 г. Лебег [21, с. 181—182] получил эту теорему из более общих соображений, относящихся к B-множествам и B-функциям, о которых будет речь несколько далее.

К теореме о функциях первого класса обращались затем многие ученые [40] и не только вследствие уже отмечавшейся фундаментальной важности этой теоремы для анализа и теории функций (с. 38). Дело в том, что при поисках новых доказательств ее разрабатывались новые методы, пригодные во многих других вопросах. Ранее упоминался (с. 41) метод Лебега сведения n-мер-

---

[38] Лебег [22]

[39] Функцию f Лебег назвал непрерывной с точностью до ε на замкнутом множестве E, если существует непрерывная функция φ, определенная всюду на $[a, b]$ и такая, что $|f-\varphi| < \varepsilon$ в точках множества E.

[40] Например, У. Г Юнг не менее трех раз, затем Валле-Пуссен, Куратовский, Лузин и др.

ных проблем к одномерным. Укажем еще, что понятие непрерывной с точностью до ε функции хорошо послужило затем и самому Лебегу, и многим его последователям. К тому же некоторые виды рассуждений, использовавшиеся при доказательствах этой теоремы, вызывали сомнения методологического характера (например, рассуждения, опиравшиеся на трансфинитную индукцию), что также приводило к стремлению найти новое доказательство.

Изучение теоремы о функциях первого класса — лишь один пример исследований, связанный с бэровской классификацией функций.

Другим примером является рассмотрение вопроса о непустоте классов Бэра. Мы упоминали (стр. 38), что Бэр в первой же работе, в которой он ввел свою классификацию, выразил убеждение, что для всякого трансфинитного числа α второго числового класса существуют функции, принадлежащие классу с индексом α. Однако ни здесь, ни в последующих своих работах он не подтвердил это общее утверждение математическим рассуждением.

Вопрос о непустоте классов классификации Бэра тесно связан с проблемой существования математических объектов и способов доказательства этого существования. Эта проблема очень интересовала Бореля, Бэра и Лебега, и о ней мы более подробно будем вести речь в следующей главе. Сейчас же только отметим, что Бэр был склонен считать существование математического объекта доказанным, если это установлено при помощи некоторой конструкции, осуществляемой в конечное число шагов; не исключено, что именно такое умонастроение помешало ему подтвердить каким-либо математическим рассуждением его убеждение в непустоте классов.

Борель в вопросах существования придерживался менее жестких требований, допуская в математических рассуждениях счетную бесконечность. Это, видимо, облегчило ему поиски доказательства утверждения о непустоте бэровских классов с любым конечным индексом [29, с. 156—158].

Еще более либеральным был Лебег, считая, хотя и с некоторыми ограничениями, законной и несчетную бесконечность. Вероятно, как раз это и позволило ему в 1904 г. анонсировать [15], а в 1905 г. доказать [21, с. 208—211] существование функций во всяком классе классификации Бэра. О характере доказательства Лебега можно получить достаточное представление из книги Натансона [1, с. 431—433].

Если упомянутая общетеоретическая установка Бэра, возможно, и помешала ему дать общее доказательство непустоты классов своей классификации, она, однако, по-видимому, способствовала нахождению им арифметического примера функции третьего класса. Подобные примеры функций первого класса были известны давно. Известны были и примеры функций второго класса: в 1905 г Борель [29, с. 99] и Лебег [21, с. 140] указали, что функция, равная единице для рациональных чисел и нулю для остальных, т. е. характеристическая функция множества рациональных чисел, есть функция второго класса. Построение индивидуального примера функции третьего класса оказалось довольно хлопотливым делом и было осуществлено Бэром только в 1906 г. [13, с. 47][41]. Еще более сложным оказалось построение индивидуальных функций четвертого и более высоких классов — такое построение было предложено Л. В. Келдыш много лет спустя.

Следующим важным направлением исследований по классификации Бэра явилось нахождение характеристических свойств функций различных классов, когда индекс класса $\geqslant 2$. Мы упоминали (с. 38), что сразу же после установления теоремы о функциях первого класса Бэр попытался найти ее аналог для функций второго класса. Уже в 1898 г., введя понятие множества первой категории, Бэр анонсировал теорему, что функции второго класса необходимо точечно разрывны на всяком совершенном множестве, если пренебречь множеством первой категории на этом совершенном множестве [3, с. 1623]. В диссертации [5, с. 81—87] он доказал это утверждение. Вслед за тем он сформулировал [7] предложение, что это свойство необходимо присуще не только функциям второго класса, но и вообще всем функциям, входящим в его классификацию, и притом при более общих предположениях, когда рассматриваются функции, заданные на множествах введенного им здесь пространства, получившего затем наименование топологического пространства Бэра.

В 1905 г. к этому вопросу обратился Лебег, доказав [21, с. 187, 188], что все B-функции, заданные на множествах евклидовых пространств, необходимо обладают свойством Бэра, т. е. точечно разрывны на всяком совершенном множестве, если пренебречь некоторым множеством первой категории на этом совершенном множестве. В следующем году это же доказал другим способом сам Бэр [13, с. 27—29], а в 1909 г. опубликовал [17, с. 131, 132] доказательство этой теоремы в общности функций, заданных на множествах, элементами которых являются последовательности натуральных чисел, т. е. на множествах из пространства Бэра.

Вопрос о том, является ли это необходимое свойство B-функций вместе с тем и достаточным, ставили и Бэр [7, с. 1013] и Лебег. Последний, в частности, писал: «Теперь встает очень важный вопрос: является ли свойство, даваемое теоремой XVI [теоремой, что всякая В-функция обладает свойством Бэра.— *Ф. М.*], достаточным? И если это не так, то существуют ли функции, не удовлетворяющие ему? Я не буду пытаться отвечать на эти трудные вопросы...» [21, с. 188].

---

[41] Мы указали лишь страницу, где Бэр привел простейший пример такой функции. Фактически бо́льшая часть этого мемуара Бэра посвящена эффективному построению функций второго и третьего классов.

Они действительно оказались трудными. Лишь в 1914 г. Лузин при помощи гипотезы континуума построил функцию, обладающую свойством Бэра, но не являющуюся B-функцией, а в 1921 г.— другой пример с применением аксиомы выбора; наконец, в 1928 г. Лузин и Серпинский совместно построили эффективный пример подобного рода, для чего им пришлось привлечь многие результаты теории аналитических множеств, создание которой началось лишь с 1917 г., после того как Суслин ввел понятие аналитического множества.

Немалое место в исследованиях французских ученых заняла проблема объема класса B-функций. Различные классы B-функций получаются путем итерации предельного перехода всюду по отношению к последовательности непрерывных функций. К концу XIX в. предельный переход всюду фактически являлся наиболее общим типом предельных переходов, применявшихся в анализе и теории функций [42]; более того, в конкретных исследованиях использовались менее общие предельные переходы: равномерный, абсолютный и монотонный. Одной из больших заслуг Бэра явилось то, что он сразу же взял на вооружение наиболее общий для конца столетия переход к пределу и использовал его для выделения первого класса разрывных функций. Другой его важной идеей было использование итерации этого предела, причем не только конечной, но даже трансфинитной, которую он применил в 1898 г. для построения своей классификации [3]. С точки зрения аналитических исследований на рубеже столетий казалось, что тем самым достигнут предел общности: все функции, появлялись ли они естественно при решении тех или иных задач или строились специально, чтобы выявить те или иные сингулярности, оказывались представимыми в виде пределов (простых или кратных) последовательностей непрерывных функций. А поскольку сразу же после введения B-функций Бэр [3, с. 1622—1623; 5, с. 70] установил, что если последовательность $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x)$ есть B-функция какого угодно класса, сходится всюду к некоторой функции $f(x)$, то $f(x)$ также является B-функцией (множество B-функций замкнуто относительно любой итерации предельных переходов всюду, совершаемых над B-функциями), постольку были основания считать, что множество B-функций вообще исчерпывает все функции, изобразимые аналитически.

Правда, Бэр тотчас же обнаружил [3, с. 1623; 5, с. 71], что множество B-функций имеет мощность континуум, и на основании этого утверждал, что существуют функции, не входящие в его классификацию (Кантор еще в 1883 г. установил, что множество всех функций, заданных на отрезке, имеет бóльшую мощность).

---

[42] Верхний и нижний пределы последовательностей, тоже эпизодически рассматривавшиеся в XIX столетии (Коши, Дюбуа-Реймон, Адамар), оказались не слишком более общими: они сводились к двукратным предельным переходам всюду. Сходимости в среднем, почти всюду и по мере еще не были достаточно осознанными.

Но упоминавшееся выше критическое отношение французских математиков к теоремам существования, не подтвержденным эффективным в некотором смысле построением (а таковым было утверждение Кантора), приводило к иллюзорности представления о существовании подобных функций: самый общий тогда способ построения функций при помощи даже трансфинитного повторения наиболее мощной аналитической операции не выводил за пределы совокупности B-функций. Это дало повод к наименованию B-функций функциями, изобразимыми аналитически, вошедшему в обиход математиков со времени появления мемуара Лебега [21].

Однако общее определение функции как произвольного однозначного соответствия между элементами двух множеств существовало и не позволяло ограничиться только аналитически изобразимыми функциями. Поэтому одной из основных целей, которые поставил перед собой Лебег в своем мемуаре «О функциях, изобразимых аналитически», явилось построение функций, не входящих в классификацию Бэра. Применив очень сложную конструкцию и воспользовавшись совокупностью всех трансфинитных чисел второго числового класса, Лебег [21, с. 213—215] построил примеры таких функций. В качестве вспомогательного средства построения Лебег, по существу, воспользовался операцией решета, давшей ему аналитическое множество, неизмеримое по Борелю. Процесс получения Лебегом этого множества — по выражению Лузина [4, с. 579, 580] — «очень сложен и настолько темен, что в течение более тридцати лет математики не решались анализировать этот процесс, вероятно, считая, что расшифровка процесса слишком трудна и не стоит затраченного времени, так как дело может кончиться пустяками». Однако фактическая расшифровка этого процесса выявила его большой научный интерес[43].

Мы озаглавили настоящий параграф словами «B-множества и B-функции», однако до сих пор, лишь упомянув о введении Борелем B-множеств, пока все время вели речь только о B-функциях. Такой порядок описания соответствует ходу исторического развития, ибо ни Борель, введший B-множества, ни Бэр, изучивший B-функции, не заметили связи этих двух понятий друг с другом, хотя неявно и пользовались B-множествами при изучении B-функций. Ситуация была такой, что до появления в 1905 г. мемуара Лебега [21] B-множества, введенные Борелем в 1898 г., специально не изучались и в явном виде имели лишь очень ограниченное применение. На переднем плане стояло изучение B-функций. Напротив, со времени появления названной работы Лебега началось параллельное изучение B-множеств и B-функций, а затем предпочтение стало оказываться теории B-множеств.

[43] См Лузин [4, с. 580—585].

Мы упоминали (с. 39), что в своей диссертации Бэр ввел множества вида $E[f(x) \geqslant a]$ [44]. Однако ни в ней, ни в последующих работах Бэр не нашел этим множествам особенно плодотворных применений. Напротив, Лебег еще в 1901 г. [7], а затем в диссертации и ряде последующих работ положил эти множества как в основу конструкции нового понятия интеграла, так и вообще в основу изучения функций, определив, в частности, с их помощью само понятие измеримой функции. Тем самым он разработал весьма общий и чрезвычайно плодотворный метод теории функций.

Еще в диссертации [8, с. 257, 258], а затем в книге [13, с. 111, 112] Лебег установил, что всякая B-функция обладает тем свойством, что для нее множества $E[f(x) > a]$, где a — любое действительное число, являются B-множествами. Однако тогда это было для него, да и для других, видимо, простой констатацией некоторого математического факта. В работе же [21] этот факт перерос в глубокую связь между B-множествами и B-функциями. Остановимся вкратце на этой связи. В общем-то, основным предметом исследования Лебега являются B-функции, что видно из названия мемуара и многих результатов, содержащихся в нем. Но B-множества играют здесь столь большую роль, что становятся самостоятельным важным предметом исследования.

Первым шагом Лебега явились такие определения [21, с. 156, 157] [45]. Множество точек называется множеством F класса α, если его можно рассматривать как множество $E(a \leqslant f \leqslant b)$, соответствующее функции f класса α, причем это невозможно для функции, принадлежащей классу с меньшим индексом. Точечное множество является множеством O класса α, если его можно рассматривать как множество $E(a < f < b)$, соответствующее функции f класса α, причем это невозможно ни для какой функции, принадлежащей классу с меньшим индексом. Основанием для этих определений служит то, что в случае $\alpha = 0$, т. е. когда рассматриваемые функции непрерывны, множества F оказываются замкнутыми, а множества O — открытыми.

В соответствии с этими определениями получаются две классификации точечных множеств, соответствующие бэровской классификации функций. Однако Лебег тут же показывает, что дополнение множества F любого класса есть множество O того же класса, и наоборот (с. 157, 158), и это позволяет ему не различать эти классификации, а рассматривать лишь множества одного типа, в качестве которых он берет множества F [46].

---

[44] В некотором смысле применение этих множеств можно связать с римановским условием интегрируемости Подобными множествами до Бэра пользовался Гарнак.

[45] Далее страницы в тексте относятся к работе Лебега [21].

[46] В главе IV, посвященной классификации B-множеств, Лебег изучает и взаимосвязи F- и 0-множеств различных классов, на чем мы не будем останавливаться.

Рассматривая затем теоретико-множественные операции, Лебег показывает, что:

а) пересечение счетного множества множеств F самое большее класса α есть множество самое большее класса α (с. 159);

б) сумма счетного множества множеств F класса $\leqslant\alpha$ есть множество F класса $\leqslant\alpha+2$ (с. 160).

Обозначая затем через $\mathscr{E}$ множество множеств F и O, соответствующих различным бэровским функциям, Лебег устанавливает (с. 160—165), что $\mathscr{E}$ состоит из множеств, получаемых из интервалов повторным применением операций счетного суммирования и пересечения. А эти множества, как замечает Лебег (с. 165), и являются множествами, измеримыми по Борелю, или B-множествами.

Так, отправляясь от классификации Бэра, Лебег получает классификацию борелевских множеств. Построив и изучив ее, он далее применяет B-множества для изучения B-функций. Здесь отправным пунктом является новое определение последних.

Функцию f Лебег (с. 166) называет B-измеримой, если, каково бы ни было действительное число a, множества $E(f>a)$ являются B-измеримыми.

Опираясь на это определение, Лебег доказывает, что:

а) для того, чтобы определенная всюду функция f была класса α, необходимо и достаточно, чтобы при любом действительном a множество $E(f>a)$ было самое большее класса α и чтобы оно было эффективно класса α для некоторых значений a (с. 167);

б) для того, чтобы функция была представимой аналитически[47], необходимо и достаточно, чтобы она была B-измеримой (с. 168—170).

Следовательно, отправляясь от B-множеств, Лебег охарактеризовал B-функции, и связь между этими понятиями стала обоюдной.

В этом параграфе мы уже много говорили о значении теоремы Бэра о функциях первого класса. Упоминали мы и о поисках аналога этой теоремы для высших классов, приведших к введению свойства Бэра, но не доставивших искомого аналога для функций более высоких классов. Его нашел Лебег в рассматриваемой нами работе.

Для формулировки найденного Лебегом структурного свойства функций произвольного класса нам понадобятся, кроме уже приведенных, следующие определения.

Множеством ранга α называется, по Лебегу, всякое множество, которое можно рассматривать как пересечение конечного числа или счетного множества множеств F, принадлежащих классам с индексами, меньшими α, причем такое представление

---

[47] Напомним, что так Лебег назвал функции, охватываемые классификацией Бэра.

этого множества невозможно, если число α заменить меньшим числом (с. 161). Функция $f(x)$ называется B-функцией с точностью до ε, если существует такая B-функция $\varphi(x)$, что $|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$ для всех x. Если $\varphi(x)$ можно выбрать так, что она принадлежит классу α, но не является функцией класса с меньшим индексом, то $f(x)$ называется функцией класса α с точностью до ε; в частности, если $\alpha=0$, т. е. $\varphi(x)$ непрерывна, то $f(x)$ называется непрерывной с точностью до ε; когда же $\varphi(x)=\text{const}$, то $f(x)$ называется постоянной с точностью до ε (с. 170). Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $P\in E$ при пренебрежении множествами некоторого семейства множеств из E, если существует такое множество e этого семейства, что $f(x)$, непрерывна в P на множестве $E-eE$. Наконец, $f(x)$ называется точечно разрывной на E при пренебрежении множествами некоторого семейства множеств из E, если E является производным множеством тех точек из E, в которых $f(x)$ непрерывна при пренебрежении множествами указанного семейства (с. 185).

Теперь мы можем сформулировать определение и теорему Лебега, которые Лузин [2, с. 251] назвал кульминационными пунктами описываемой работы Лебега.

Функция $f(x)$ называется непрерывной (α) в точке P совершенного множества E, если всякому $\varepsilon<0$ можно поставить в соответствие интервал, содержащий точку P, на котором $f(x)$ можно рассматривать как сумму счетного множества множеств ранга не выше α, на каждом из которых $f(x)$ постоянна с точностью до ε; причем все последние множества, за исключением того из них, которое содержит P, нигде не плотны на E. Если E является производным множеством тех точек, в которых $f(x)$ непрерывна (α), то $f(x)$ называется точечно разрывной (α) на E (с. 191).

«Для того, чтобы функция f принадлежала самое большее классу α, необходимо и достаточно, чтобы она была точечно разрывна (α) на всяком совершенном множестве» (с. 191). Последняя теорема является точным аналогом теоремы Бэра о функциях первого класса. Однако сложные вспомогательные определения, видимо, привели к тому, что приведенная теорема Лебега не пользуется популярностью.

Описание результатов изучения французскими учеными свойств B-множеств и B-функций, приведенное в настоящем параграфе, еще неполно. К этому можно было бы добавить исследование Лебегом неявных функций (с. 191—201) и функций нескольких переменных, непрерывных по отношению к каждому переменному (с. 201—205); обобщение Бэром своих основных результатов на действительно-значные функции, заданные на множествах из топологического пространства последовательностей натуральных чисел [17]; многие более частные результаты, как содержащиеся в названных выше работах, так и в работах, которые не упоминались, вроде бэровской статьи [9] или статьи

Данжуа [1]. Тесно связаны с рассмотренными результатами общие установки авторов в отношении трансфинитных чисел и основанных на них методов доказательств, аксиомы Цермело, различных способов доказательств теорем существования, парадоксов теории множеств и т. д. Даже краткое их описание заняло бы много места. Имея в виду возвратиться к некоторым из этих вопросов в дальнейшем, особенно к последним из упомянутых, мы ограничимся сказанным и перейдем к рассмотрению проблем иного типа, в разработку которых французские ученые рассматриваемого периода внесли не меньший, если не больший вклад, нежели тот, о котором мы пока говорили.

§ 7. Дифференцирование и интегрирование

Хотя исследования французских ученых о дифференцировании и интегрировании функций неоднократно рассматривались в историко-научной литературе (Песин [1, с. 54—88, 97—99, 101—111, 119—121, 130, 131, 133—138, 143—145, 148—176]; Хокинс [1, с. 120—146]; Медведев [2, с. 228—294, 328—331]) [48], они должны найти место и в этой работе. Без этого мы обеднили бы картину становления и развития французской школы теории функций и не смогли бы достаточно ясно изложить далее историю разработки других проблем.

Проблемы дифференцирования и интегрирования интересовали математиков на протяжении всей истории анализа и теории функций. Интерес к ним особенно возрос на рубеже XIX—XX вв., и основными причинами этого были следующие.

Начиная с Ньютона и Лейбница операция дифференцирования стала рассматриваться как первичная операция анализа (а затем и теории функций), а интегрирование выступало как ее обращение. Связь между этими инфинитезимальными операциями явилась одним из наиболее плодотворных факторов в разработке анализа и его приложений. Введение интеграла Римана разрушило эту связь, и сложилось почти нетерпимое положение после того, как Вольтерра в 1881 г. построил пример ограниченной производной, неинтегрируемой по Риману: интегрирование не восстанавливало примитивную функцию по ее заведомо существующей и относительно простой производной. Естественно, возникла проблема обобщения понятия интеграла.

К такому обобщению необходимо приводили и исследования Бэра по разрывным функциям. Действительно, Бэр дал структурную характеристику функций первого класса. К этим функциям принадлежат, в частности, все производные. Но не все (даже ограниченные) производные интегрируемы по Риману, о чем свидетельствовал тот же пример Вольтерры. Существо-

[48] Мы указали лишь страницы, на которых речь идет непосредственно о трудах французских ученых, относящихся к рассматриваемому нами периоду.

вали неинтегрируемые функции и второго класса, например функция Дирихле. С введением разрывных функций высших классов запас подобных функций заведомо расширялся.

Наконец, необходимость в обобщении понятия интеграла диктовалась и такими традиционными задачами анализа, как вычисление длин кривых и площадей поверхностей, о чем уже говорилось (с. 41).

Так что потребность в новой концепции интегрирования определенно существовала и необходимо было удовлетворить ее. Вместе с тем появились и условия, способствовавшие ее созданию. Действительно, Жордан в 1892 г. прочно связал понятия меры точечного множества и интеграла Римана. Однако использованное им мероопределение было довольно ограниченным вследствие положенной в его основу конечной аддитивности меры. Между тем широкое распространение теоретико-множественных представлений, в частности многообразных счетных процессов, подсказывало возможность обобщения понятия меры точечного множества за счет введения в его определение счетной аддитивности. Это, как мы знаем, сделал в 1898 г. Борель, не воспользовавшись, однако, своим мероопределением для обобщения понятия интеграла. Теперь достаточно было соединить подход Жордана к мере и интегралу с борелевской идеей счетной аддитивности меры, чтобы прийти к новой концепции интегрирования, обобщающей римановскую.

Это и сделал Лебег в работах [7, 8, 13], разработав три подхода к новому понятию интеграла: геометрический — в виде меры ординатного множества подлежащей интегрированию функции [49], аналитический — через своеобразную конструкцию интегральных сумм [50] и аксиоматический [51], Лебег не только ввел новое, более общее понятие интеграла, но и разработал целую теорию нового интегрирования, а также применил свой интеграл для решения многих вопросов теории функций.

Наряду с проблемой обобщения понятия интеграла, в исследованиях по теории функций в XIX в. появилась потребность и в обобщении понятия производной. Интересен тот исторический факт, что обобщение производной всюду до производной почти всюду совершилось как-то незаметно в довольно длинном ряде работ различных математиков, начиная с Коши. Да и сам Лебег не вводил последней специальным определением, а принял ее как нечто само собой разумеющееся. Однако именно понятие производной почти всюду оказалось нужным, чтобы связать лебеговское интегрирование с обобщенной таким образом операцией дифференцирования, чтобы интеграл Лебега действительно оказался обращением дифференцирования. Решение последней

[49] См. Песин [1, с 75—79], Медведев [2, с. 236—238].
[50] См. Песин [1, с 71—72], Медведев [2, с. 232—236].
[51] См. Песин [1, с. 57—64], Медведев [2, с. 241—243].

задачи в ее полном объеме принадлежит, однако, не Лебегу, а Витали и Риссу [52]. Но Лебег, пользуясь новым понятием производной, доказал ряд фундаментальных теорем, из которых назовем лишь теорему о дифференцируемости почти всюду функции с ограниченным изменением [10; 13, с. 128].

С вопросами дифференцирования в многомерном случае дело обстояло еще сложнее. Мы уже упоминали (с. 12), что до начала XX столетия в математике практически не существовало понятия, соответствующего физическим понятиям плотности тела в точке, напряженности поля и другим аналогичным представлениям математического естествознания. Можно было вычислить линейную плотность тела в заданном направлении, но нечем было выразить процесс получения плотности тела в точке без задания определенного направления — дифференцировать массу тела по объему просто не умели, если не считать довольно расплывчатых представлений Коши и Пеано и если не считать за математические операции те манипуляции, которые совершали механики и физики при описании дифференциальных величин подобного рода.

И хотя теория интегрирования по Риману была во многом перенесена с одномерного на многомерный случай, многие факты одномерного интегрирования не распространялись на функции нескольких переменных; в частности, не существовало одного аналога важнейшей теоремы Лейбница — Ньютона. Лебег, приверженец идеи взаимосвязи операций дифференцирования и интегрирования, столкнулся с этим обстоятельством при попытках распространить свою одномерную теорию на случай нескольких переменных. И он, по-видимому, не зная тогда предшествовавших попыток Коши и Пеано, по-новому подошел к самим проблемам дифференцирования и интегрирования. А именно: он в 1910 г. [32] создал концепцию функции множества; неопределенный интеграл стал рассматривать как функцию множества и, построив теорию дифференцирования функции множества по мере множества, связал дифференцирование и интегрирование между собой подобно тому, как они были связаны для функций одного переменного, если, конечно, перевести соответствующие факты на язык теории функций множества. В частности, он доказал и аналог формулы Ньютона — Лейбница [53].

Борель долго не обращался к проблематике интегрирования функций. С 1910 г. он занялся ею, опубликовав несколько работ, в которых предложил свое определение понятия интеграла и даже претендовал на то, что его определение в ряде отношений предпочтительнее и более общо в некоторых случаях, нежели лебегово. Однако ни его первоначальные определения [39, 40], ни их дальнейшее развитие [43, 48] не оправдали этих претензий [54].

---

[52] См. Медведев [2, с. 251—257].
[53] Подробнее см. Медведев [2, с. 263—279].
[54] О подходе Бореля к понятию интеграла см. Песин [1, с. 101—111].

Зато в дифференциальном исчислении Борелю принадлежит интересное понятие, известное под наименованием «борелевской производной». Эту производную он ввел в 1912 г. [42] для характеристики функций, с которыми он столкнулся в статистической физике и которые оказались недифференцируемыми в обычном смысле. Сам он, кажется, не изучал свойства этой производной и не связывал ее с какой-либо операцией интегрирования. Это было сделано позднее Хинчиным (1923 г.), а затем Саржентом (1934 г.) и др.

Здесь же упомянем об обобщении Монтелем одной теоремы Лебега о производной почти всюду. Как мы уже говорили, Лебег в 1903 г. доказал, что всякая непрерывная функция с ограниченным изменением дифференцируема почти всюду. В частности, отсюда вытекало, что дифференцируема почти всюду и всякая функция с ограниченными производными числами. Монтель в 1912 г. [2] обобщил последнее предложение на функции с конечными производными числами.

Вслед за Лебегом и Борелем в разработку теорий дифференцирования и интегрирования включились их более молодые соотечественники Данжуа и Фреше и добились в этом новых значительных успехов.

Сколь бы общими для начала века ни были процессы дифференцирования и интегрирования, разработанные Лебегом, они вскоре оказались недостаточными. В частности, интеграл Лебега не решал одну из основных задач, ради которой он был создан,— проблему нахождения примитивной по ее производной (почти всюду) функции. Этот интеграл позволял восстанавливать примитивные по их ограниченным производным, а также для некоторого класса неограниченных — когда последние суммируемы.

Лебег еще в своей диссертации [8, с. 272] сделал первые попытки решить проблему примитивных для функций более широких классов, но не пошел далее некоторых наметок, о чем сожалел впоследствии [37, с. 205]. Этой проблемой занялся молодой тогда Данжуа, и в 1912 г. ему удалось решить ее для любой конечной производной функции путем обобщения интеграла Лебега до узкого интеграла Данжуа [4, 5] [55]. За этими двумя заметками последовала серия работ Данжуа [8—13], в которых изучались новый интеграл, производные числа функций и их связь с интегрированием, включая и еще более общие концепции дифференцирования и интегрирования — аппроксимативную производную и широкий интеграл Данжуа [56].

Несмотря на то что в начале столетия фронт работ французских математиков по теориям дифференцирования и интегриро-

---

[55] О попытках Лебега и об узком интеграле Данжуа см. Песии [1, с. 148—163].

[56] В изучении двух последних понятий его немного опередил Хинчин. См. Песин [1, с. 163—176].

вания и их взаимосвязям был очень широким и ими были получены глубочайшие результаты, вне сферы их интересов почему-то оставалось одно чрезвычайно важное обобщение понятия интеграла, введенное Стилтьесом еще в конце прошлого столетия. Изучение интеграла Стилтьеса и его применений проводилось до 1910 г. многими математиками других стран (Кёнигом, Марковым, Ляпуновым, Ковалевским, Гильбертом, Хеллингером, Ван-Флеком, Риссом [57]), но только в 1910 г. на него обратили внимание французские ученые. К исследованиям по теории этого интегрирования приступили Лебег [31] и Фреше [12, 13] [58], но полученные ими результаты не стали определяющими для ее дальнейшей разработки. До 1915 г. французские математики были в ней скорее последователями ученых других стран, а не создателями новых концепций, но в указанном году Фреше изменил ситуацию. На этом мы позволим себе остановиться несколько подробнее.

Понятие интеграла в том виде, в каком оно изложено в книге Сакса [1, с. 11—63], еще и до сегодняшних дней является важнейшим орудием исследований в самых разнообразных областях математики и математического естествознания. В математической литературе этот интеграл называют по-разному: просто интеграл Лебега, интеграл Лебега — Стилтьеса, абстрактный интеграл Лебега, интеграл Радона, и довольно редко его называют по имени Фреше. Между тем именно последний является подлинным его создателем, так как ему принадлежит наиболее существенный шаг в концепции интегрирования такой общности — рассмотрение измеримости множеств и функций относительно σ-кольца множеств.

Лебег, Радон и У. Г. Юнг рассматривали интегрирование только для функций точек, заданных на точечных множествах n-мерного евклидова пространства, причем первый в своих ранних работах ограничивался интегрированием функций только по введенной им мере. Радон и Юнг существенно обобщили понятие интеграла Лебега благодаря тому, что расширили лебеговскую меру до меры Лебега — Стилтьеса, однако последняя оставалась у них все же только мерой, хотя и более сложной, множеств точек того же евклидового пространства и строилась по образцу лебеговской.

Фреше, чуть ли не с первых своих шагов в математике ставший на более общую точку зрения функционального анализа, а потому вынужденный изучать действительно-значные функции, заданные на абстрактных множествах, которые он называл функционалами, в своих попытках создать теорию интегрирования для таких функционалов столкнулся с тем фактом, что процесс построения мер Лебега и Лебега — Стилтьеса в том виде,

---

[57] См. Медведев [2, с. 295—328].

[58] О содержании их работ см. Медведев [2, с. 328, 329, 332—334].

как его осуществляли Лебег, Радон и У. Г. Юнг, оказывался непригодным, если подходить к нему с той степенью общности, которую желал Фреше: в этих построениях привлекались свойства именно n-мерного евклидова пространства (нужно было, например, выделять интервалы, покрывающие рассматриваемое множество). Необходим был принципиально новый подход, который и был реализован им в 1915 г. в работах [15, 16].

Сущность его подхода состояла в следующем. Фреше отправлялся от совершенно абстрактных множеств и в качестве основного понятия ввел понятие аддитивного класса множеств или σ-кольца, как предпочитают говорить сегодня: класс M абстрактных множеств называется аддитивным, если из $E_i \in M$ следует, что $\sum\limits_i E_i \in M$ и $E_i - E_j \in M$, где суммирование может быть как конечным, так и счетным [16. с. 250, 251].

Для множеств аддитивного класса он сформулировал понятие счетно-аддитивной функции множества, определил понятие вариации и дал разложение такой функции на разность двух неубывающих функций [16, с. 251, 252]. Это дало ему возможность определить понятие интеграла от функционала по аддитивной функции множества, заданной на σ-кольце M[59]. Решающую роль в таком определении сыграло то, что мера рассматриваемых множеств вводилась не в виде специальной конструкции, а просто множество объявлялось измеримым или нет в зависимости от того, принадлежит ли оно исходному σ-кольцу или не принадлежит. Именно это позволило трактовать понятие интеграла столь общим образом, что в такой общности он применяется (и исследуется) до сегодняшнего дня. Разумеется, идею σ-кольца множеств теперь можно вычитать у Бореля и Лебега, а также у Радона, но впервые осознанно σ-кольцом стал пользоваться Фреше.

Давнишнюю идею интеграла от функции точки по функции множества как некоторой сумматорной конструкции Фреше довел до ее завершения в смысле общности, и дальнейшее продвижение требовало иных конструктивных решений. Вместе с тем названные работы Фреше оказались первыми ласточками нового этапа развития теории функций действительного переменного, когда исследования в этой теории стали проводиться с применением средств топологии и функционального анализа.

И Лебег, и Фреше, а особенно Данжуа продолжали заниматься теориями дифференцирования и интегрирования и в последующий период, однако после 1915—1916 гг. уже не их работы определяли общую картину исследований в этих областях.

---

[59] См. Песин [1, с. 143—145].

§ 8. Тригонометрические ряды

Теория тригонометрических рядов является одним из важнейших разделов анализа и теории функций, и ее разработка, начиная с XVIII столетия, неразрывно связана не только с развитием последних, но и во многом — со всем развитием математики и математического естествознания. Исследования по теории тригонометрических рядов, с одной стороны, требовали привлечения самых общих и самых тонких концепций и методов анализа и теории функций, а с другой — в ходе этих исследований возникали идеи и методы, имевшие значение, далеко выходившее за пределы собственно проблематики тригонометрических разложений. Недаром Лузин [1, с. 50] сравнивал положение тригонометрических функций в системе всевозможных ортогональных функций с положением множества целых чисел в системе всех действительных чисел.

Здесь нет нужды останавливаться на проблемах взаимосвязей теории множеств, теорий дифференцирования и интегрирования, общего понятия функции, многих более частных проблем разнообразных математических дисциплин с теорией тригонометрических рядов до начала XX столетия, так как эти взаимосвязи неоднократно характеризовались в не раз упоминавшихся книгах Медведева [1, 2], Песина [1], Хокинса [1], Граттен-Гюиннеса [1], особенно в книге Паплаускаса [1] и в приводимой в них литературе. Не менее прочными они оставались и в XX столетии, но их изучение историками математики, напротив, еще, по существу, не начато. Излагая далее историю разработки теории тригонометрических рядов в начале XX столетия в трудах французских ученых, мы постараемся отметить наиболее интересные, на наш взгляд, взаимосвязи.

Особенно тесными являются взаимосвязи теории тригонометрических рядов и интегрирования. Так, например, понятие ряда Фурье, коэффициенты которого определяются при помощи определенного интеграла, вообще неотделимо от понятия интеграла, поэтому с расширением одного из них почти автоматически происходит расширение другого. Известно, что само понятие интеграла Римана появилось в рамках теории тригонометрических рядов и что многие его свойства были установлены при разработке последней; так же обстояло дело с некоторыми обобщениями этого интеграла в XIX в.[60] В некотором смысле противоположная ситуация сложилась в начале XX столетия: интеграл Лебега первоначально вводился для решения задач из других областей, однако сразу же после его введения он был применен Лебегом, а вслед за ним и другими для изучения тригонометрических рядов. Все же последние сыграли свою роль в установлении некоторых свойств интеграла Лебега.

---

[60] Подробнее см. Паплаускас [2].

Цикл работ Лебега по тригонометрическим рядам был открыт заметкой 1902 г. «Одна теорема о тригонометрических рядах» [9], в которой он обобщил известную теорему единственности тригонометрического разложения в форме Дюбуа-Реймона [61], привлекши для этой цели только что введенный им интеграл вместо интеграла Римана. С точки зрения отмеченной взаимосвязи понятия интеграла с понятием ряда Фурье здесь интересно одно замечание Лебега. Напомним, что к этому времени его диссертация [8] еще не вышла из печати и он вынужден был сослаться в связи со своим интегралом лишь на заметку [7]. В то же время ему в его рассуждениях потребовалось приведение кратных интегралов к повторным, и по этому поводу он пишет: «Для преобразования этих интегралов я обобщаю понятие кратного интеграла так же, как и простого, и доказываю, что в широких случаях вычисление кратного интеграла эквивалентно вычислению простых интегралов» [9, с. 586]. Он, конечно, имел право заявлять так, поскольку в его диссертации он действительно доказал теорему Фубини для случая ограниченных функций, но в таком виде она была недостаточна для получения его основного результата о единственности тригонометрического разложения, что, вероятно, заставляло его думать о способах обобщения теоремы о сведении кратных интегралов к повторным. Этого Лебегу не удалось, и лишь Фубини в 1907 г. доказал эту теорему для интеграла Лебега в полной общности.

Указанную взаимосвязь Лебег особенно подчеркнул в своей следующей работе «О тригонометрических рядах» [12]. Ставя своей целью показать полезность в теории тригонометрических рядов введенного им понятия интеграла, он в то же время вынужден констатировать его недостаточность при рассмотрении некоторых вопросов этой теории и даже пытается набросать (с. 455) довольно неопределенную схему более общего определения понятия интеграла в виде разности значений примитивной. И если последнее Лебегу не удалось ни здесь, ни в ряде других аналогичных случаев, то целесообразность введения интеграла от суммируемых функций продемонстрирована им в [12] достаточно ярко.

Здесь он более подробно передоказал теорему единственности, исправив, в частности, свое предыдущее замечание [9, с. 587], что теорема остается справедливой, когда множеством единственности является произвольное замкнутое множество меры нуль, и заменив его приводимым множеством (с. 460—468). Затем он установил (с. 471—474), что коэффициенты Фурье суммируемых функций стремятся к нулю при $n \to \infty$, изучил условия сходимости рядов Фурье (с. 481) [62] и построил функ-

[61] О ней см. Паплаускас [1, с. 228—234].

[62] Более подробно этот вопрос Лебег рассмотрел в следующей работе, и мы остановимся на этом несколько далее.

цию, неинтегрируемую в смысле Римана, но представимую рядом Фурье в каждой точке (с. 481—482). В заключение доказана теорема о возможности почленного интегрирования рядов Фурье — Лебега (с. 483—485).

Лебеговская работа 1905 г. «Исследования о сходимости рядов Фурье» [18] интересна во многих отношениях. Если доказанные им ранее предложения о единственности тригонометрического разложения, о стремлении при $n \to \infty$ коэффициентов к нулю и о почленном интегрировании являлись обобщениями, получаемыми относительно простым применением новой концепции интегрирования и соответствующих модификаций прежних рассуждений, то в [18] содержатся, наряду с элементами подобного же типа, и некоторые совершенно новые интересные соображения.

Прежде всего, здесь доказан чрезвычайно общий критерий сходимости рядов Фурье. Если $f(x)$ — рассматриваемая функция,

$$\varphi(t) = f(x + 2t) + f(x - 2t) - 2f(x), \qquad \psi(t) = \frac{\varphi(t)}{\sin t},$$

то в формулировке Лебега (с. 463) этот критерий выглядит так: «Ряд Фурье сходится к функции в точке x, если интеграл от $|\varphi(x)|$ имеет производную, равную нулю при $t=0$, и если величина

$$\int\limits_{\delta}^{\alpha} |\psi(t+\delta) - \psi(t)|\, dt \qquad (\pi > \alpha > 0,\ \delta > 0)$$

стремится к нулю вместе с δ.

Для его получения Лебег глубоко проанализировал предшествующие признаки сходимости, предложенные в разное время Дирихле, Липшицем, Жорданом и Дини (с. 251—260), а затем показал, что все они содержатся как частные случаи в установленном им признаке (с. 267—269). Далее Лебег обобщил теорему Фейера о суммируемости методом среднего арифметического рядов Фурье, соответствующих R-интегрируемым функциям, в точках непрерывности и регулярности $f(x)$ [63], доказав ее в таком виде: «Ряд Фурье функции f суммируем методом среднего арифметического в точке x и позволяет вычислить $f(x)$, если соответствующая функция $|\varphi(t)|$ является производной своего неопределенного интеграла при $t=0$» (с. 274). Наконец, он получил аналогичный результат для метода суммирования Римана (с. 279—280).

Но сами эти фактические результаты образуют лишь одну сторону рассматриваемой работы. Чрезвычайно интересны неко-

---

[63] Точка x называется регулярной точкой функции $f(x)$, если $f(x-0)$, $f(x+0)$ существуют и выполняется равенство $f(x+0)+f(x-0)=2f(x)$.

торые тенденции, только намеченные в ней, но получившие затем значительное развитие. На двух из них мы остановимся.

Желая преобразовать условие равенства нулю производной от $\int_a^x |\varphi(t)|\,dt$ в точке $t=0$, фигурирующее в его критерии сходимости, Лебег ввел важное понятие плотности множества в точке (с. 266). В названной работе он воспользовался им только для того, чтобы для ограниченной функции $\varphi(t)$ заменить предыдущее условие таким: каково бы ни было $\varepsilon>0$, множество точек $E[|\varphi(t)|>\varepsilon]$ имеет в $t=0$ нулевую плотность. Однако впоследствии понятие плотности приобрело самостоятельный интерес и стало применяться далеко за пределами собственно теории тригонометрических рядов, например при введении нового очень общего понятия асимптотической или аппроксимативной производной Хинчина и Данжуа.

Второй идеей, которую мы охарактеризуем несколько подробнее, является следующая. При рассмотрении лебеговского мемуара «О функциях, изобразимых аналитически» мы говорили, что Лебег назвал функции, входящие в классификацию Бэра, функциями, изобразимыми аналитически. Смысл этого наименования заключался в том, что только такие функции можно представить в виде пределов (простых или повторных, причем повторение может быть продолжено трансфинитно) последовательностей непрерывных функций (или многочленов), если понимать сходимость в виде сходимости всюду или в каждой точке. Так что здесь Лебег еще связывал аналитическую изобразимость функции только с таким ее представлением. Интересно, что в статье «Исследования о сходимости рядов Фурье» [18], опубликованной в том же 1905 г., он наметил гораздо более общий подход, а именно: начал рассматривать аналитические выражения как представляющие функцию и в тех случаях, когда сходимость имеет место только почти всюду; более того, представимость была распространена на суммируемость и даже суммируемость почти всюду. Приведем одну цитату из этой его работы.

«Пусть $f(x)$ имеет интеграл — неважно, будет ли это интеграл в смысле Римана или моем. Пусть $F(x)$ — неопределенный интеграл от $f(x)$. Тогда по теореме, которую я упоминал и в связи с которой сослался на стр. 123 и 124 моих „Лекций об интегрировании“,

$$f(x)=\lim_{h=0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=F'(x),$$

за исключением множества значений x меры нуль. Это сводится к тому, чтобы сказать, что можно найти последовательность непрерывных функций, стремящуюся к $f(x)$ всюду, кроме исключительных значений x, или же что существует аналитическое выражение, представляющее $f(x)$, кроме этих значений, причем это выражение будет рядом многочленов от x. Впрочем, нельзя надеяться на лучшее, если обратиться к более общим аналитическим выражениям, так как не только существуют функции, не поддающиеся никакому представлению рядом многочленов, но существуют даже функции, не поддающиеся никакому аналитическому представлению [64]» [18, с. 272].

В приведенных словах Лебега много важных мыслей. Во-первых, здесь налицо формулировка — а практически и доказательство — теоремы, что всякая суммируемая функция $f(x)$ может быть представлена последовательностью многочленов, сходящейся к $f(x)$ почти всюду,— частного случая теоремы Фреше, в которой $f(x)$ является измеримой почти везде конечной функцией, доказанной последним первоначально для B-функций $f(x)$ [4], а затем в 1906 г. и в общем виде [8, с. 15—16]. Во-вторых, здесь определенно намечен отход от взгляда на аналитическую представимость функции только при помощи предельного перехода всюду— взгляда, которого придерживался Лебег совсем незадолго до этого. Более того, высказана даже неизбежность такого более общего подхода, поскольку в мемуаре, на который сослался Лебег, им, как уже говорилось, был построен пример функции, не входящей в классификацию Бэра, а значит не представимой аналитически в прежнем смысле, которая, однако, суммируема (и даже интегрируема по Риману), а значит, представима — в соответствии с формулировкой приведенной теоремы — в виде сходящейся почти всюду последовательности многочленов. И хотя лебеговские слова, что существуют функции, «не поддающиеся никакому аналитическому представлению», могли бы создать впечатление, что и в [18] Лебег еще придерживается прежнего взгляда, но последующее содержание этой работы убеждает, что он отказался от него бесповоротно. Действительно, когда он в заключительных разделах своей статьи перешел к рассмотрению методов суммирования тригонометрических рядов, то здесь аналитическая изобразимость функции понималась им не только в смысле суммируемости ряда в каждой точке, но и в смысле суммируемости почти всюду. Один из своих основных результатов он формулирует так: «Ряд Фурье, соответствующий любой суммируемой функции, суммируем методом среднего арифметического и позволяет распознать рассматриваемую функцию всюду, за исключением некоторого множества меры нуль» [18, с. 277]. Правда, здесь он не употребляет слов «аналитическое представление», но речь идет о ряде Фурье, позволяющем «распознать рассматриваемую функцию», так что имеется

---

[64] По этому вопросу я отошлю к моему мемуару в «Journal de Mathématiques» за 1905 г «О функциях, представимых аналитически» [сноска Лебега.— *Ф. М.*].

в виду именно обобщенный взгляд на представимость функции. В разделе же, посвященном методу суммирования Римана, он пользуется и словами «аналитическое выражение» (с. 279) в смысле представления функции суммируемым почти всюду рядом.

Таким образом, теперь для Лебега функция изобразима аналитически не только тогда, когда она может быть представлена в виде предела последовательности функций, сходящейся к ней всюду, или итерированных предельных переходов этого типа, но и тогда, когда представляющая последовательность сходится только почти всюду, а также когда ряд, изображающий функцию, суммируем каким-либо методом всюду или почти всюду. В последующей истории теории функций эта идея получила дальнейшее развитие, когда для аналитического изображения функций стали применять еще более общие виды сходимости последовательностей функций.

Отметим еще один любопытный момент. В своих предшествующих работах по теории интегрирования Лебег не установил еще формулы интегрирования по частям для своего интеграла. Однако при доказательстве теоремы о суммируемости ряда Фурье методом Чезаро эта формула ему понадобилась. Он ее применил (с. 274) и в сноске написал: «Если имеются какие-либо сомнения в законности применения этого метода, то можно будет заметить, что интегрирование по частям всегда может быть заменено применением двойных интегралов, а эти интегралы я изучил в своей диссертации». Ссылка на диссертацию в связи с общей формулой интегрирования по частям неудовлетворительна тем, что в ней он рассмотрел двойные интегралы только от ограниченных измеримых функций. Не удовлетворило это, видимо, и самого Лебега, поэтому через несколько лет он возвратился к указанной формуле [30, с. 40—43]. Мы не можем с определенностью утверждать, что потребность в ней в теории тригонометрических рядов вызвала необходимость ее более строгого обоснования, но одним из стимулов эта потребность, вероятно, была, так как ее применения при изучении тригонометрических рядов довольно часты.

Кульминационным пунктом в исследованиях Лебега явились его классические «Лекции о тригонометрических рядах» [24]. Здесь подытожены и развиты все упоминавшиеся идеи и результаты, а также добавлены новые. Характерным для этой книги является тесное переплетение общих теоретико-функциональных идей и методов с более конкретными соображениями теории тригонометрических рядов. Значительная ее часть посвящена изложению, нередко с новыми доказательствами, многих теорем теории функций, которыми автору пришлось воспользоваться при рассмотрении этих рядов. Укажем, в частности, теоремы: предел сходящейся почти всюду последовательности измеримых почти везде конечных функций является функцией той же природы (с. 9); сходящаяся почти всюду последовательность измеримых почти везде конечных функций сходится и по мере (с. 10); произведение суммируемой функции на суммируемую и ограниченную функцию суммируемо (с. 11); о возможности почленного интегрирования рядов с равномерно ограниченными остатками (с. 14, 15) и т. д.[65] Из новых результатов непосредственно по теории тригонометрических рядов упомянем изучение метода суммирования Пуассона, о котором в предыдущей работе Лебег лишь упомянул [18, с. 280, сноска]. В целом же эта книга заслуживает самостоятельного изучения, поэтому мы ограничимся сказанным и добавим лишь, что после ее выхода под рядами Фурье стали понимать ряды Фурье — Лебега и до появления новых концепций интегрирования — а во многом и до сегодняшнего дня — эти ряды рассматриваются именно в таком смысле.

Описанные работы Лебега и названные здесь идеи и результаты далеко не исчерпывают всего вклада Лебега в разработку теории тригонометрических рядов и связанных с этим вопросов теории функций. Помимо заметок [16, 17], являющихся предварительными сообщениями о результатах, в основном вошедших в [12] и [18], но содержащих и некоторые интересные соображения, Лебег опубликовал в 1910 г. большую статью «О приближенном тригонометрическом представлении функций, удовлетворяющих условию Липшица» [33], в которой он изучил вопросы скорости сходимости ряда Фурье функций, удовлетворяющих условиям Липшица разного вида[66], и порядка величины коэффициентов Фурье. Кроме того, в его упоминавшемся мемуаре «О сингулярных интегралах» [30] содержится много соображений, находящихся в тесной связи с теорией тригонометрических рядов[67]. Мы, однако, удовольствуемся сказанным и перейдем к рассмотрению работ других французских математиков.

Наиболее выдающейся из них является, несомненно, большая статья Фату «Тригонометрические ряды и ряды Тейлора» [4], опубликованная в 1906 г.[68] Несколько более молодой современник Лебега и друг последнего, он писал свою работу под его идейным воздействием, продолжив переработку ряда классиче-

---

[65] Мы несколько модифицировали оригинальные формулировки Лебега ради краткости.

[66] Обычному условию $|f(x+\delta)-f(x)|<\lambda\delta$, $\delta>0$; обобщенному условию Липшица $|f(x+\delta)-f(x)|<\lambda\delta^{\alpha}$, $\lambda>0$, $0<\alpha<1$; условию Дини — Липшица

$$\lim_{\delta\to 0}\left\{\ln\frac{1}{\delta}\,[f(x+\delta)-f(x)]\right\}=0.$$

[67] В качестве одного из примеров укажем на введение здесь так называемых констант Лебега ряда Фурье [30, с. 116—117], т. е. таких величин λ_n, что $|S_n(x)|\leqslant\lambda_n M$, где $S_n(x)$ — частная сумма ряда Фурье функции $f(x)$, а $M=\sup\limits_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}|f(x)|$.

[68] Несколько ранее появившиеся заметки [1, 2] являются лишь предварительными сообщениями о некоторых результатах, вошедших в эту работу.

ских результатов в духе новой теории функций, развив их далее и получив вместе с тем много новых результатов собственно в теории функций как действительного, так и комплексного переменных.

Исходным пунктом его работы явилось изучение интеграла Пуассона

$$F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - u) + r^2} f(u)\, du, \tag{1}$$

определяющего гармоническую функцию (регулярную внутри круга единичного радиуса и принимающую на окружности этого круга в точке с аргументом u_0 значение $f(u_0)$), который служит решением проблемы Дирихле для круга. До Фату интеграл (1) исследовался в случае римановского интегрирования. Расширение смысла интеграла до интеграла Лебега позволило, с одной стороны, сделать теорию интеграла Пуассона более стройной и полной, а с другой — получить многочисленные приложения расширенной таким образом теории.

Параллелизм своих исследований с лебеговскими Фату подчеркнул, например, тем, что прямо сопоставил (с. 336, 337) один из основных своих результатов — если гармоническая функция, регулярная внутри круга, ограничена там, то ее можно выразить при помощи интеграла Пуассона — Лебега — с результатом Лебега — тригонометрический ряд, сходящийся к ограниченной измеримой функции, является рядом Фурье — Лебега.

Столь общий для того времени подход позволил Фату добиться многого и в теории функций комплексного переменного, на чем мы не останавливаемся, и в теории тригонометрических рядов.

Перечислим сначала основные положения работы [4] в области теории тригонометрических рядов, располагая их в той последовательности, в которой они содержатся там.

Первым из них является новое доказательство и обобщение формулы замкнутости или равенства Парсеваля, которое имеет длинную историю, восходящую к 1800 г. [69] Для тригонометрических рядов Фату доказал его для случая, когда рассматриваемая функция интегрируема с квадратом в смысле Лебега (с. 350—352, 378, 379).

Вторым — известные теперь под наименованием признаков Фату признаки сходимости почти всюду тригонометрического разложения, положившие начало длинной цепи аналогичных признаков, предлагавшихся впоследствии (Ерош, Вейль, Гобсон, Паншерель, Харди и др.) [70]. Один из них — если a_n и b_n явля-

[69] Об истории этой формулы см. Паплаускас [1, с. 184—194], Дорофеева [1, с. 72—75].
[70] См. Лузин [1, с. 182—185].

ются константами Фурье и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n(a_n^2+b_n^2)$ сходится, то тригонометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{2}$$

сходится почти всюду — Фату отметил мимоходом как простое следствие доказанной им формулы замкнутости, сомневаясь в его практической полезности (сноска на с. 379). Другому — если $na_n\to 0$, $nb_n\to 0$, то ряд (2) сходится почти всюду — он дал пространное доказательство (с. 379—382).

Интересны формулировки Фату этих признаков, из которых приведем вторую: «Если na_n и nb_n стремятся к нулю вместе с $1/n$, то множество точек расходимости ряда

$$\sum_{1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$$

имеет меру нуль» (с. 379). Вместо того, чтобы сказать, как принято теперь, что если $na_n\to 0$, $nb_n\to 0$, то тригонометрический ряд сходится почти всюду, Фату формулирует заключение теоремы в виде утверждения о мере множества точек расходимости. Это, конечно, одно и то же, но сам способ выражения говорит о том, что хотя фактически здесь (как и в ряде аналогичных случаев) Фату ведет речь о новом виде сходимости — сходимости почти всюду, этот новый вид сходимости не очень осознан. Анализируя первый признак, Фату далее устанавливает (с. 385—389) необходимое и достаточное условие сходимости ряда (2) в точке, когда выполняются условия $na_n\to 0$, $nb_n\to 0$.

Чрезвычайно важным оказалось обращение Фату к абсолютно сходящимся рядам. Прежде всего, он установил, что точки сходимости, расходимости, абсолютной сходимости и непрерывности ряда (2) расположены симметрично относительно точек абсолютной сходимости (с. 398); в качестве следствия из этого он получил (с. 398), что если ряд (2) имеет две точки абсолютной сходимости, разность аргументов которых несоизмерима с π, то такие точки образуют всюду плотное множество. Далее он доказал, что если ряд (2) абсолютно сходится, то сходятся и ряды $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$, $\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|$ (с. 399). Свои исследования абсолютно сходящихся рядов Фату продолжил в 1913 г. [6], а еще несколько ранее ими заинтересовался и Данжуа [6].

Сказанное не исчерпывает содержания мемуара Фату даже в отношении тригонометрических рядов. Он своими методами получил заново ряд уже известных результатов (см. 387, 388, 397), нашел критерий суммируемости методом среднего арифметического (с. 384), поставил проблему связи вопроса об аппроксимации иррациональных чисел с вопросами сходимости и расходимости тригонометрических рядов (с. 395—398) и т. д.

В своих исследованиях Фату взял на вооружение чуть ли не весь арсенал лебеговской теории меры и интегрирования. Он широко пользовался теоремами о производной неопределенного интеграла, об интегрировании по частям, о предельном переходе под знаком интеграла для последовательностей ограниченных в совокупности функций и т. д. Более того, он установил (с. 375, 376) важную новую теорему о почленном интегрировании, известную теперь под его именем. И если, как мы видели, Лебег применял некоторые из этих теорем с соблюдением известных предосторожностей, поскольку они еще не были формально доказаны, то Фату порой не очень об этом беспокоится. Так, например, он безо всяких оговорок пользуется теоремой об интегрировании по частям (с. 348, 349), применяет понятие главного значения в смысле Коши для интеграла Лебега (с. 361), хотя последнее еще никем формально не вводилось. Вместе с тем исторически интересно и одно уточнение, которое Фату специально не сформулировал, но постоянно применял, и о котором мы скажем чуть подробнее.

Как мы уже говорили, Лебег первоначально не различал суммируемые и измеримые функции; к этому различию он пришел в 1903 г., но оно некоторое время имело для него смысл только для неограниченных функций. Когда же в формулировках его утверждений речь шла об ограниченных функциях, то он обычно считал их измеримыми, а значит, и суммируемыми, лишь отмечая, что ему неизвестны примеры ограниченных неизмеримых функций. Первый пример неизмеримого по Лебегу множества (а значит, и неизмеримой ограниченной функции) построил в 1905 г. Витали при помощи аксиомы Цермело.

В работе Фату [4] нет каких-либо упоминаний об этом, но интересно то, что в его формулировках измеримость и суммируемость отделены и для ограниченных функций. Так, он обычно пользовался термином «ограниченная и суммируемая функция» (например, с. 363) там, где Лебег сказал бы в то время просто «ограниченная» или просто «суммируемая» функция.

И, наконец, отметим еще, что в заметке 1906 г. «О разложении в тригонометрический ряд неинтегрируемых функций» [5] Фату, развив римановские необходимые и достаточные условия представимости функции тригонометрическим рядом, построил пример несуммируемой функции, для которой можно построить сходящийся тригонометрический ряд, если его коэффициенты вычислять, пользуясь определением интеграла как разности значений примитивной. Такие ряды Фату назвал «обобщенными рядами Фурье». Конечно, такой подход к понятию интеграла, а следовательно, и ряда Фурье, в том виде, в каком его изложил Фату в заметке [6], неудовлетворителен, но сам факт существования довольно простых функций, примитивные которых можно находить относительно простым вычислением и которые вместе с тем несуммируемы, был знаменателен для периода, когда понятие интеграла Лебега только что становилось прочно на ноги. Это лишний раз свидетельствовало, что требовалось дальнейшее обобщение интеграла.

Подведем некоторые итоги. В течение очень небольшого промежутка времени — по существу, за четыре года (1903—1906 гг.) — давняя теория тригонометрических рядов была поднята на новую ступень развития. Ряды Фурье превратились в ряды Фурье—Лебега; был существенно расширен класс функций, изобразимых тригонометрическими рядами; изменился взгляд на характер аналитического представления функции: к сходимости всюду были добавлены сходимость почти всюду, суммируемость всюду и почти всюду [71]; были найдены новые критерии сходимости и суммируемости. В ходе этой перестройки вырабатывались новые понятия и методы, имеющие большое значение не только в теории тригонометрических рядов, но и далеко за ее пределами; вместе с тем в отдельных пунктах выявились пробелы в других вопросах теории функций, а также недостаточность уже введенных понятий и методов. Перед исследователями открылось необозримое поле деятельности, к «обработке» которого начали прилагать свои усилия многие ученые, но уже преимущественно вне пределов Франции.

§ 9. Другие вопросы теории функций

В предыдущих параграфах описаны многие результаты, полученные французскими математиками в теории функций. Но они не исчерпывают круга вопросов, изучавшихся ими. Так как еще не рассмотренные достижения не образуют чего-то цельного, то мы решили посвятить настоящий параграф обзору некоторых более или менее изолированных, по крайней мере внешне, направлений исследований. Видимо, на первое место по своему значению следует поставить введение Лебегом понятия измеримой функции.

Общее понятие функции действительного переменного существовало в математике давно. С разной степенью осознанности и четкости оно использовалось Эйлером, Лакруа, Коши, Фурье, Лобачевским, Дирихле, Риманом и другими математиками, достигнув кульминации в общем определении Дедекинда (1887 г.)

---

[71] Метод суммирования Чезаро в теорию тригонометрических рядов ввел в 1900 г. Фейер. Он указывал, что к этой идее его привели работы Бореля по расходящимся рядам. Осознанное же введение сюда методов суммирования Римана и Пуассона было осуществлено Лебегом, который впервые стал их применять в смысле суммирования почти всюду.

и Кантора (1897 г.) как произвольного однозначного соответствия двух абстрактных множеств.

Вместе с тем, как заметил Ганкель в 1870 г., понятие такой общности является чисто номинальным в том смысле, что в предлагавшихся определениях давалось наименование некоторому объекту исследования, но отсутствовали математические средства для его изучения. И, как писал Лузин [1, с. 48], «понятие функции, ставящееся, таким образом, слишком общо, чтобы быть источником многих предложений. Почти не существует теорем, относящихся к этому общему определению функции. Поэтому для того, чтобы можно было идти вперед и строить различные теории, образующие математические дисциплины, теория функций действительного переменного вынуждена ограничить поле своих исследований и обратиться к рассмотрению более или менее широких классов функций».

И действительно, в ходе развития анализа и теории функций на общее понятие функции обычно накладывались те или иные ограничения, например: быть непрерывной, входить в классификацию Бэра и т. п. Наиболее общим ограничением, в рамках которого, по существу, развертывается вся теория функций с начала текущего столетия и до настоящего времени, является накладываемое на функцию условие быть измеримой.

К этому понятию Лебег фактически пришел еще в 1901 г. [7], исходя из своей конструкции интегральных сумм. Однако в [7] и в диссертации [8] он еще не различал измеримые и суммируемые функции, обозначая их последним термином. Это тогда имело определенный смысл, так как в указанных работах он занимался почти исключительно ограниченными функциями, а для них — если не признавать аксиомы Цермело, что имело место у Лебега тогда еще, вероятно, бессознательно, а очень скоро — и вполне осознанно,— эти понятия совпадают; к тому же неизмеримых функций в то время, как уже упоминалось, в математике просто не существовало. Однако уже в 1903 г. он вполне осознал, что свойство функции быть измеримой отнюдь не связано с ее интегрируемостью в его смысле, и ввел понятие измеримой функции независимо от понятия интеграла [11, с. 1228]. Именно этим понятием измеримой функции он стал пользоваться в своих последующих работах. Его же восприняло затем и большинство математиков [72].

Правда, в свое определение измеримой функции $f(x)$, заданной на измеримом множестве E, как такой функции, для которой измеримы в смысле Лебега множества $E[f(x)>a]$ при любом действительном a, Лебег, а за ним и все его последователи довольно долго неявно вкладывали еще одно ограничение — рассматривавшиеся функции обычно мыслились конечными почти

---

[72] Слова «большинство математиков» имеют здесь тот смысл, что иногда принимается другое определение измеримости функции.

всюду, однако в формальном определении последнего ограничения не было.

Видимо, первой общей теоремой об измеримых функциях была теорема Лебега, что последовательность измеримых почти везде конечных функций в случае ее сходимости почти всюду имеет пределом тоже измеримую почти везде конечную функцию. Он сформулировал ее в [7] и доказал в [8, с. 257]. По поводу этой теоремы можно сделать несколько замечаний. Во-первых, в формулировках Лебега по указанным выше причинам не делалась оговорка о конечности почти всюду. Во-вторых, он пользовался в приведенных работах термином «суммируемая», а не «измеримая» функция. В-третьих, наконец, содержащиеся в утверждении теоремы слова «сходимость почти всюду» относятся к новому виду сходимости, во многих отношениях отличному от сходимости всюду; однако введение этой сходимости произошло — подобно понятию производной почти всюду — очень постепенно, и в начале столетия эти два вида сходимости четко не различали. Так обстояло дело и у Лебега, когда он говорил просто о сходимости последовательности, хотя из контекста вытекало, что имеется в виду именно сходимость почти всюду. Это относилось не только к данной теореме, но и ко многим другим.

Указанной теоремой Лебега устанавливалось, что класс измеримых функций замкнут относительно самой общей операции теории функций того времени — операции перехода к пределу почти всюду. Введение впоследствии более общих предельных переходов, вроде предела по мере (Рисс, 1909 г.), также не вывело за рамки измеримых функций.

Теорема Лебега, устанавливая измеримость предельной функции сходящейся почти всюду последовательности измеримых функций, ничего не говорила о возможности представления этой предельной функции функциями более простой природы. В этом смысле существенна теорема Фреше 1906 г.: для всякой измеримой и почти везде конечной функции, заданной на сегменте, существует последовательность непрерывных функций, сходящаяся к ней почти всюду [8, с. 15, 16]. За год до этого Фреше доказал эту теорему для B-функций [4], а Лебег мимоходом высказал ее и наметил схему доказательства для произвольных суммируемых функций [18, с. 272]. Возможность же аппроксимации произвольной измеримой почти везде конечной функции непрерывными функциями устанавливалась теоремой Бореля 1912 г.: если на $[a, b]$ задана измеримая почти везде конечная функция $f(x)$, то для любых $\delta>0$, $\varepsilon>0$ существует непрерывная на $[a, b]$ функция $\Psi(x)$, для которой $mE(|f-\Psi|>\delta)<\varepsilon$ [41].

Наряду с этим очень общим классом функций, французские ученые рассматривали и более частные их классы. Мы уже довольно много говорили о B-функциях. Упомянем еще о классе суммируемых функций, введенном Лебегом в 1901—1902 гг. вместе с понятием своего интеграла. Для последних тоже было доказано много важных теорем, на которых мы не будем останавливаться. Борель, со своей стороны, вращаясь больше в рамках теории функций комплексного переменного, время от времени приходил к функциям действительного переменного. Мы говорили (с. 30) о введении им еще в 1895 г. неаналитических функций действительного переменного, описываемых достаточно простыми аналитическими средствами. В этом направлении он продолжал поиски и далее; в частности, в 1900 г., обобщая понятие аналитического продолжения, Борель [19, 20] выделил еще один класс функций действительного переменного, включающий в себя аналитические функции, причем функции этого класса полностью определялись заданием их значений и значений их производной в точке. Эти поиски привели его к выделению класса квазианалитических функций, изучавшихся и обобщавшихся впоследствии многими учеными (Данжуа, Бернштейн, Карлеман и др.) [73].

До сих пор, говоря о различных способах аналитического представления функций, мы не касались одного очень важного в теории функций аппарата сингулярных интегралов.

Если в квадрате ($a\leqslant t\leqslant b$, $a<x<b$) задана функция $\Phi_n(t, x)$ ($n=1, 2, \ldots$) такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\alpha}^{\beta}\Phi_n(t, x)\,dt = 1, \tag{1}$$

$a\leqslant\alpha<x<\beta\leqslant b$, и она суммируема по t при каждом фиксированном x, то эта функция называется ядром. Интеграл вида

$$f_n(x) = \int_a^b \Phi_n(t, x) f(t)\,dt, \tag{2}$$

в котором $\Phi_n(t, x)$ является ядром, называется сингулярным интегралом.

История таких интегралов, видимо, начинается с Фурье. Ими и их многообразными применениями в математике и математическом естествознании в XIX и в начале XX столетий занимались очень многие математики — Пуассон, Дирихле, Дарбу, Вейерштрасс, Пикар, Фейер, Валле-Пуссен, Ландау, Рисс, Гобсон и др. Выдающееся место в длинном ряду исследований по таким интегралам занимает работа Лебега «О сингулярных интегралах» [30].

Одним из главных приложений теории сингулярных интегралов является их применение для аналитического представления функций, а это связано с вопросом сходимости интегралов (2). Основной целью лебеговской работы [30] как раз явились поиски необходимых и достаточных условий такой сходимости.

---

[73] См Данжуа [14].

Остановимся лишь на некоторых моментах этой замечательной во многих отношениях работы.

Интересен вспомогательный аппарат лебеговской теории. Для ее разработки потребовалось привлечь некоторые основные свойства интеграла Лебега, вроде теорем о среднем значении, об интегрировании по частям и при помощи подстановки и т. п. Ко времени написания рассматриваемой работы большинство этих свойств уже было установлено или самим Лебегом, или другими учеными. В [30] Лебег разработал метод доказательства отдельных теорем указанного типа, основанный на представлении своего интеграла суммами Коши — Римана (с. 30—33). Это впоследствии послужило источником многих работ, в которых само определение интеграла Лебега вводилось при помощи сумм коши-римановского типа или же при посредстве подобных сумм получали даже более общие результаты.

Другим интересным моментом мемуара Лебега является то, что он фактически ввел в нем понятие слабой сходимости в пространстве функций с суммируемым квадратом [74]. Явно он это понятие не сформулировал [75], но оно содержалось в ряде доказанных им теорем, например такой.

Пусть f — произвольная функция из пространства функций с суммируемым квадратом и

$$I_n(f)=\int_a^b f(\alpha)\,\varphi(\alpha, n)\,d\alpha,$$

где $\varphi(\alpha, n)$ — ядро типа (1). Тогда, как доказал Лебег, для того чтобы $I_n(f)$ стремился к нулю вместе с $1/n$, какова бы ни была функция f с суммируемым квадратом, необходимо и достаточно, чтобы:

1) ядро $\varphi(\alpha, n)$ было суммируемым с квадратом, а интеграл $\int_a^b \varphi^2(\alpha, n)\,d\alpha$ не превосходил некоторого числа, которое не зависит от n;

2) $\int_\lambda^\mu \varphi(\alpha, n)\,d\alpha$ стремился к нулю вместе с $\frac{1}{n}$, каковы бы ни были λ и μ, взятые из (a, b) (с. 55).

Наконец, укажем еще одну из основных теорем Лебега — теорему о представлении суммируемой функции сингулярным интегралом в точках непрерывности [30, с. 69—71], которую можно сформулировать так: если при фиксированном x, $a<x<b$, и произвольном $\delta>0$ ядро $\varphi_n(t, x)$ слабо сходится к нулю в каждом

---

[74] О понятии слабой сходимости см. Натансон [1, с. 218].

[75] Это сделал Рисс в 1910 г., зная работу Лебега.

из промежутков $[a, x-\delta)$, $(x+\delta, b]$ и, кроме того,

$$\int_a^b |\varphi_n(t, x)|\, dt < H(x),$$

где функция $H(x)$ не зависит от n, то, какова бы ни была суммируемая $f(t)$, непрерывная в точке x, справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

где $f_n(x)$ определяется равенством (2).

Работа Лебега «О сингулярных интегралах» долго затем служила истоком многих изысканий.

Помимо введения и изучения разных классов функций и вопроса о представлении функций сингулярными интегралами, к другим вопросам истории теории функций во Франции следует отнести изучение Монтелем так называемых нормальных семейств функций, т. е. последовательностей функций, обладающих предельной функцией [76]. Его исследования в целом выходят за рамки рассматриваемого периода, и мы не будем подробно останавливаться на них, тем более потому, что они развертывались преимущественно в комплексной области. Однако их отправным пунктом послужила ранняя монтелевская работа «О бесконечных последовательностях функций» [1], опубликованная в 1907 г., содержание которой во многом примыкает к излагаемой теме.

Ограниченные множества n-мерного евклидова пространства обладают тем фундаментальным свойством, что во всяком таком бесконечном множестве имеется подмножество, содержащее по крайней мере одну предельную точку (теорема Больцано—Вейерштрасса). Это свойство имеет чрезвычайно большое число приложений в самых разнообразных вопросах анализа и теории функций. Для множеств более общего типа, в частности для множеств функций или кривых, это оказалось вообще не так.

Множества функций рассматривались в анализе чуть ли не с самого возникновения последнего. Однако до создания теории и точечных и абстрактных множеств множества функций не были объектом самостоятельных исследований. Такие исследования начались в 80-х годах прошлого века, и их пионерами были итальянцы Асколи и Арцела. Первый ввел важное понятие равностепенной непрерывности семейства функций и установил необходимые и достаточные условия компактности бесконечного множества в пространстве непрерывных функций с топологией равномерной сходимости. Второй вновь и более четко изложил эти результаты и дал им интересные приложения. На рубеже веков подобные соображения развивали многие, в том числе

[76] Общее описание характера этих исследований содержится в статье Монтеля [5].

Адамар, Гильберт, Фреше и др. В 1907 г. к ним обратился и Монтель.

Монтель объединил в своей работе [1] многочисленные результаты, полученные его предшественниками, многие из них передоказал заново, обобщил и распространил на функции комплексного переменного. В частности, он ввел понятие равностепенной непрерывности семейства функций в окрестности точки и доказал, что если функции семейства равностепенны в окрестности каждой точки из $[a, b]$, то они равностепенно непрерывны на всем $[a, b]$; распространил понятие равностепенной непрерывности на функции нескольких переменных и разработал своеобразный метод перенесения теорем об этом понятии, доказанных для функций одного переменного, на многомерный случай (с. 259—261); ввел верхнюю и нижнюю функции семейства равностепенно непрерывных функций, доказал несколько теорем о них и отметил некоторые применения (с. 261—264). Однако основные его результаты относились к теории комплексного переменного, и именно они затем привели к введению нормальных семейств функций, изучавшихся как самим Монтелем, так и его последователями.

На этом мы закончим обзор достижений французских ученых в области теории функций действительного переменного. Мы дополним его немного в заключительных параграфах книги, а сейчас перейдем к вопросам несколько иного рода.

Глава третья

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОСНОВАНИЙ МАТЕМАТИКИ

§ 1. Несколько вводных замечаний

Методологические проблемы математики очень многообразны. Прежде всего, это вопрос об отношении математического знания к реальной действительности, являющейся небольшой составной частью основного философского вопроса об отношении мышления к бытию. Далее, это вопросы о специфичности объектов, являющихся предметом изучения в математике, о методах математических исследований и о допустимых способах рассуждений в них, о стимулах научного творчества, о взаимоотношении математики с другими областями знания и т. д. Эти вопросы ставились и по-разному решались на протяжении всей истории математики как в конкретных исследованиях, так и в общеметодологической литературе, поскольку с изменением фактического содержания математики в ходе ее развития, с возникновением нового понятийного аппарата и иных методов исследования постоянно появляется нужда в критическом переосмыслении как новых результатов, так и отношения к ним, причем невозможно «разделить и, тем более, противопоставить друг другу научное творчество и научную критику» (*Рыбников* [1, с. 644]). Ставились и по-разному решались они также большим числом французских авторов рассматриваемого периода, причем не только в специальных работах, посвященных вопросам оснований математики, но и в ходе повседневных занятий научной работой.

Мы ни в коей мере не ставим перед собой целью рассказать, даже в первом приближении, о всей совокупности проблем подобного рода у называемых далее авторов. Характеристика, например, только взглядов на постановку и способы решения основных философских вопросов математики у таких корифеев, как Пуанкаре или Адамар, потребовало бы самостоятельных изысканий. А если к этому добавить взгляды на математику, ее проблемы и методы у нематематиков, то задача тем более усложняется.

Мы зададимся гораздо более скромной целью и рассмотрим отдельные, более или менее конкретные методологические вопросы, обсуждавшиеся во французской школе теории функций рассматриваемого промежутка времени, преимущественно у основных представителей школы. Такое рассмотрение представляется полезным потому, что соответствующие общие установки сказывались на решениях чисто математических проблем, примеры чего будут указаны далее, а также потому, что эти установки повлияли на некоторые последующие направления исследований не только во Франции, но и в других странах.

То, что мы ограничились только вопросами, связанными с теорией множеств и функций, и попытками их решения, предлагавшимися несколькими французскими учеными, обусловлено темой нашего исследования. Вследствие этого даже в рассматривавшихся нами проблемах последующее изложение будет довольно фрагментарным, так как воздействие теории множеств на развитие математики не сводится только к воздействию на перестройку теории функций действительного переменного в изучавшийся промежуток времени и у рассматриваемых ученых.

Как мы видели, Борель, Бэр, Лебег и другие французы внесли существенный вклад в разработку теории множеств. Вместе с тем многие французские математики, включая названных, были критически настроены или по отношению к теории множеств в целом, или же по отношению к отдельным ее разделам либо к некоторым ее положениям. Уже только сопоставление этих двух обстоятельств интересно: творцы выступают против своего детища.

Мы затрудняемся сказать, повлияло ли на такое критическое отношение то, что, начиная еще с 80-х годов, при первых шагах в создании теории множеств XIX в., некоторые французские философы, в том числе Ренувье, выступили с критикой ряда ее основных положений, в частности понятия актуальной бесконечности. С резко же критическими в адрес теории множеств замечаниями другого философа — Эвеллена, который во многом разделял взгляды Ренувье, Борель был хорошо знаком и даже выступал против них. Так что отрицательное отношение ряда французских философов к теории множеств, видимо, в какой-то мере оказывало влияние и на математиков. Но, конечно, сказывались и другие факторы: недоверие многих математиков к канторовской теории множеств, выявившиеся в конце века трудности этой теории и т. п.

К концу XIX в. в математике сложилось такое положение, что продолжение исследований по очень многим, казалось бы, чисто математическим проблемам стало невозможным без привлечения теоретико-множественных соображений. Более того, именно привлечение таких соображений позволило получить многие замечательные результаты в самых разнообразных областях математики. Приведем здесь некоторые из них, отчасти упоминавшиеся и ранее: теорема Кантора о единственности тригонометрического разложения (1872 г.); теории действительных чисел Дедекинда, Кантора и Вейерштрасса (1872 г.); изыскания Гарнака и Гёльдера (1883—1884 гг.) по несобственным интегралам; исследования Миттаг-Леффлера по представлению функций рядами аналитических функций (1884 г.); теорема Пуанкаре — Вольтерры — Виванти (1888 г.) о возможности регулярного счетного процесса аналитического продолжения и т. д.

Таким образом, ситуация была такой, что, с одной стороны, многие математики и философы нападали на теорию множеств, а с другой — эта теория оказывалась настоятельно необходимой в математических исследованиях.

Интересующие нас авторы заняли — с некоторыми отличиями — следующую позицию, достаточно четко определенную Борелем в его работе 1899 г. [17]: теория множеств в том виде, в каком ее построил Кантор, интересна сама по себе и необходима для приложений в разнообразных математических проблемах; однако та форма, которую ей придал Кантор, во многих отношениях неудачна, и целесообразно изменить ее [17, с. 383, 384]. Все они, кроме Пуанкаре, ставшего на путь отрицания теории множеств вообще, не только декларировали необходимость изменений, но и начали осуществлять их с бóльшим или меньшим успехом. Видимо, первой проблемой, потребовавшей, с их точки зрения, иного, чем у Кантора, подхода, была проблема трансфинитных чисел, рассмотрению которой и посвящается следующий параграф.

§ 2. Трансфинитные числа у Бореля, Бэра и Лебега

С трансфинитными числами Кантор впервые столкнулся в 1880 г. при построении производных множеств различных порядков. В это время они означали для него просто символы для обозначения последовательных производных заданного множества. В 1883 г. он становится на ту точку зрения, что порядковые трансфинитные числа являются естественным обобщением понятия порядкового натурального числа и делает попытку обосновать их введение при помощи некоторых принципов порождения. Наконец, в 1897 г. он предложил то построение теории, в котором порядковые числа вводятся как порядковые типы вполне упорядоченных множеств и которое теперь обычно излагается в учебных руководствах [1]. Из ранних применений трансфинитных чисел второго числового класса упомянем об использовании их при доказательстве классической теоремы Кантора — Бендиксона [2]: всякое несчетное замкнутое множество F представимо в виде $F=P+D$, где P — совершенное множество, а D — не более чем счетное. В современных доказательствах этой теоремы, благодаря понятию точки конденсации, введенному Линделёфом, обычно обходятся без трансфинитных чисел [3], однако первоначально она доказывалась с их помощью, причем — и это

[1] Подробнее см. Медведев [1, с. 112, 121—123, 177, 178] и указанную там литературу.
[2] О ней см. Медведев [1, с. 126—129].
[3] См., например, Натансон [1, с. 61].

следует подчеркнуть — применялся метод трансфинитной индукции[4]. Сущность обычной математической индукции состоит в том, что из истинности некоторого утверждения, в формулировку которого входит натуральное число n_0, и предположения, что из истинности этого утверждения для числа n следует справедливость его для $n+1$, делается заключение, что оно справедливо для любого $n \geqslant n_0$. В трансфинитной индукции в качестве n_0 может быть взято любое порядковое число α_0 первого или второго числового класса, за индуктивное предположение берется предположение, что из истинности предложения для всех α, $\alpha_0 \leqslant \alpha < \beta$ следует справедливость его для порядкового числа β, а заключение утверждает истинность его для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$. Одно из главных отличий обыкновенной и трансфинитной индукций состоит в том, что заключительные их утверждения относятся к множествам чисел разной мощности: в первой речь идет о счетном множестве натуральных чисел $n \geqslant n_0$, а во второй — о несчетном множестве порядковых чисел $\alpha \geqslant \alpha_0$.

Абстрактное построение теории порядковых чисел Кантором в 1897 г., особенно после открытия парадокса Бурали-Форти, вызвало недоверие к трансфинитным числам вообще. Однако в конце века при их помощи были получены некоторые существенные результаты. Так, в 1895 г. Борель [2, с. 45] применил их при доказательстве теоремы о конечном покрытии, с 1897 г. ими начинает пользоваться в своих исследованиях Бэр, а вскоре и Лебег. Естественно, возникла проблема иных подходов к трансфинитным числам.

Один из таких подходов был намечен давно: с 1872 г. Дюбуа-Реймон начал разрабатывать теорию роста функций, одним из основных результатов которой была теорема, что если задана последовательность возрастающих непрерывных функций, то существует непрерывная функция, порядок роста которой превосходит порядки роста каждой из функций заданной последовательности. Эта теория изучалась затем другими математиками, в частности, как мы уже отмечали, во Франции ею занимался Адамар. Достаточно было ввести определенную символику в построения того же Адамара, как получилась совокупность символов, вроде той, которой пользовался Кантор при введении обозначений для трансфинитных чисел, причем свойства объектов, выражаемых этими символами, в обоих случаях, почти полностью совпадали.

Как раз этой идеей и воспользовался Борель в 1898 г., когда он впервые приступил к изложению теории трансфинитных чисел. Это было сделано им во втором прибавлении к его «Лекциям по теории функций» [14, с. 121, 122]. Он отправляется от последовательности возрастающих функций:

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots \tag{1}$$

[4] О нем см. Натансон [1, с. 413].

и после доказательства теоремы Дюбуа-Реймона обозначает функцию, растущую быстрее всех функций последовательности (1), через $\varphi_\omega(x)$; затем, пользуясь замечанием, что порядок роста функции $\varphi[\varphi(x)]$ превосходит порядок роста функции $\varphi(x)$, строит функции $\varphi_{\omega+1}(x)$, $\varphi_{\omega+2}(x)$ и т. д. После этого вновь применяется теорема Дюбуа-Реймона и получается функция $\varphi_{\omega^2}(x)$ и т. д. Эти символы шкалы порядков роста и выполняют у Бореля роль трансфинитных чисел. Здесь же (с. 119—122) он критикует подход Кантора, основанный на принципах порождения.

Видимо, эта критика дала повод к тому, что у некоторых читателей борелевской книги [14] сложилось мнение, будто Борель не ценит труды Кантора. В частности, философ Эвеллен, резко выступивший против теории множеств в статье «О новой бесконечности» [1], сослался на книгу Бореля [14] как на пример математической работы, в которой канторовские идеи освобождены от таинственного смысла, наложенного на них понятием актуальной бесконечности (с. 481).

Чтобы опровергнуть подобные мнения, а вместе с тем привлечь внимание и философов к трансфинитным числам, Борель публикует в философском журнале статью «По поводу новой бесконечности» [17]. Здесь он высоко оценивает труды Кантора и подчеркивает их большое влияние на собственные исследования. Но вместе с тем он опять описывает содержание теоремы Дюбуа-Реймона и разъясняет применения ее для построения несчетной шкалы порядков роста функций. В заключение он сравнивает обыкновенную и трансфинитную индукции и ставит вопрос: «Нужно ли вводить новый вид индукции, имея в виду не только счетную последовательность целых чисел, но и несчетную последовательность функций со все бо́льшим и бо́льшим ростом?».

Борель пока не решается дать утвердительный или отрицательный ответ на этот вопрос, но определенно формулирует тезис, который впоследствии приведет его к отрицательному решению: «Трудность, которую приобретает эта концепция [несчетного множества.— *Ф. М.*], состоит в том, что всякий *определенный* [выделено Борелем.— *Ф. М.*] способ построения этой последовательности [возрастающих функций.— *Ф. М.*] благодаря только тому, что он выражается при помощи конечного числа слов, приводит к счетной последовательности; однако, с другой стороны, теорема Поля Дюбуа-Реймона позволяет нам выйти за пределы построенной последовательности. В этом кроется антиномия, которую анализ, видимо, не может решить; тем не менее мне кажется несомненным, что последующее развитие математики неизбежно приведет к выбору, т. е. к допущению или изгнанию трансфинитного (или несчетной бесконечности)» [17, с. 390]. Сам он, как мы увидим далее, выбрал последнее.

Названная статья Бореля была направлена отчасти против Эвеллена с его установкой на отрицание актуальной бесконечности. Для ответа Борелю Эвеллен призвал на помощь, по-видимому, математика, причем довольно сильного и вместе с тем противника канторовской теории множеств [5]. В их совместной работе, опубликованной в 1900 г. в том же журнале и под тем же наименованием [1], интересно рассмотрена проблема трансфинитных чисел. Авторы отрицают необходимость трансфинитных чисел в математике как символов, предназначенных для описания свойств актуально бесконечных множеств, поскольку они таковых не признают. С этой точки зрения они анализируют доказательство Бореля теоремы, что множество непрерывных возрастающих функций все более высоких порядков роста является несчетным, и приходят к выводу, что в своем доказательстве Борель сделал одно молчаливое допущение, а именно: что множество натуральных чисел он мыслит завершенным [6]. Сами они, отправляясь от положения, что натуральный ряд чисел представляет собой просто потенциальную бесконечность, а в остальном четко соблюдая ход рассуждений Бореля, получили, что и множество возрастающих функций, рассмотренное Борелем, тоже является только счетным в том смысле, что каждой такой функции можно поставить в соответствие определенное натуральное число. Само это множество оказывается, естественно, тоже потенциально бесконечным. Если принять их исходную посылку о потенциальности натурального ряда, то их интересные рассуждения кажутся безупречными, по крайней мере, на столько же, как и рассуждения Бореля.

Таким образом, Эвеллен и его соавтор правильно нащупали, пожалуй, самый важный пункт, отправляясь от которого, математики — сторонники актуальной бесконечности — приходят к трансфинитным числам. Правда, они не стали отрицать полезности этих чисел в математических рассуждениях (они уже познакомились с диссертацией Бэра, где эти числа нашли новые полезные применения), но для них они «только удобное систематическое обозначение и они полезны лишь после освобождения их от понятия бесконечности, которое им придал г. Кантор» [1, с. 139].

Следовательно, в этом, относительно частном вопросе теории множеств уже в начале века выявилось то общее положение, которое через несколько лет в полной мере раскроется при рассмотрении других вопросов: суть расхождений между спорящими сторонами заключалась в несходстве общетеоретических установок — в данном случае в признании или отрицании понятия актуальной бесконечности.

По сути дела, это был вынужден признать и Борель в ответной статье «Парадоксы теории множеств» [18]. Он только,

---

[5] Эта статья подписана «Evellin et Z.». Кто скрывается под этим «Z.», мне неизвестно. Что это был математик и притом незаурядный — это следует из характера статьи и прежних работ Эвеллена.

[6] Это сказано ими не такими словами, но вполне определенно (с. 438).

ссылаясь на математическую практику, потребовал права рассуждать об актуально бесконечных счетных множествах. Что касается несчетных множеств, то он даже наметил путь отступления с позиции, занятой им в его предшествующей статье [17]: если там он просто оставил открытым вопрос о существовании несчетных множеств, то теперь он склоняется к тому, чтобы отказаться от них. Правда, теорема Дюбуа-Реймона вынуждала его признать существование несчетного множества возрастающих непрерывных функций, поскольку доказательство его существования математически было безукоризненным, если признать существование актуально бесконечных счетных множеств. Но, с другой стороны, он соглашается с тем, что при помощи конечного числа слов можно определять только счетные множества. И в этом он видит парадоксальность теории множеств.

Возвращаясь к трансфинитным числам у Бореля, мы можем сказать, что борелевские обозначения $\omega, \ldots, \omega \cdot 2, \ldots, \omega^n, \ldots$ выступали просто как символы, выражающие характер роста функций, и он, кажется, не рассматривал их как обобщения порядковых натуральных чисел, чем они являлись у Кантора. Эти символы применялись им только в данном вопросе, и даже тогда, когда он значительно позднее наметил схемы операций над ними [38, с. 18—24], он старательно избегал как наименования «трансфинитное число», так и какого-либо сопоставления этих символов с порядковыми натуральными числами. Более того, он ограничивал совокупность таких символов знаками ω^n с конечным n (со всякими промежуточными знаками), не пользуясь произвольными числами второго числового класса Кантора, хотя и указывал [38, с. 26], что теорема Дюбуа-Реймона позволяет строить функции, порядок роста которых превосходит порядок роста функций, которым соответствует символ ω^n, каково бы ни было конечное n. «Эти функции останутся вне области нашего исследования. Они, быть может, появятся в будущих общих теориях, но мы не встретимся с ними в тех приложениях, которые мы дадим этим теориям» [38, с. 26]. Следовательно, борелевские символы — это просто знаки некоторых вполне конкретных аналитических построений, лишь выполняющие роль обозначений, аналогичную той, которую выполняют конечные числа в более простых случаях. И если, как мы видели, первоначально Борель еще придает своим символам более общий характер, задумываясь хотя бы о принципе трансфинитной индукции, то впоследствии он существенно сузил область их применения — узких у него и до этого,— ограничив их роль значением простых индексов в относительно частных случаях порядков роста достаточно простых функций. Более того, в 1903 г. он ставит вопрос об исключении трансфинитных чисел из математических рассуждений.

Высоко оценив теорему Бэра о функциях первого класса, Борель выражает неудовлетворенность тем, что при ее доказательстве применяются трансфинитные числа [26, с. 903], и ставит перед собой цель получить без них частный случай этой теоремы, когда разрывная функция, имеющая такое множество P точек разрыва, что P' счетно, представима в виде предела последовательности непрерывных функций. Достоинство своего доказательства он видит в том, что для него не требуется понятия трансфинитного числа, что оно «основано просто на понятии счетного множества» (с. 904). С этой же точки зрения Борель высоко оценивает (с. 904) доказательство Линделёфом и Лебегом теоремы Кантора — Бендиксона без применения трансфинитных чисел [7] и прямо пишет: «Эти примеры позволяют надеяться, что можно будет прийти к исключению этих чисел из многих вопросов, в которых это введение казалось до сих пор необходимым; действительно, кажется, что благодаря этому всегда выигрывают в простоте и ясности» (с. 904).

Небезынтересно, что Борель, ставя свое доказательство в один ряд с доказательством Линделёфа — Лебега, не захотел — или не сумел — заметить два обстоятельства. Одно из них состоит в том, что в теореме Кантора—Бендиксона содержатся два различных момента, по-разному связанных с проблемой трансфинитных чисел, о которых мы скажем несколько далее. Второе еще более поразительно: доказательство Линделёфа основано на понятии точки конденсации, т. е. точки, в любой окрестности которой содержится *несчетное* множество точек. Другими словами, это доказательство необходимо требует привлечения несчетной мощности, тогда как пафос рассуждения Бореля при доказательстве своей теоремы состоял в указании счетного процесса построения последовательности непрерывных функций. Казалось бы, что Борелю, ставшему на точку зрения признания только счетных процессов, нужно было отвергнуть рассуждения Линделёфа как обращающиеся к незаконному понятию. А он вместо этого отмечает его интерес ради того, чтобы подтвердить свой тезис о целесообразности исключения трансфинитных чисел из рассуждений.

В некотором смысле противоположный путь в отношении к трансфинитным числам проделал Бэр. В его исследованиях трансфинитные числа играли более существенную роль, чем в научном творчестве Бореля: они нужны были ему и при доказательстве теоремы о функциях первого класса, и при введении его классификации, и в ряде других вопросов. Поэтому, начиная с первых работ и кончая последним существенным исследованием, он постоянно пользуется ими как необходимым средством рассуждений. В первых своих заметках [2, 3] он вводит их в качестве символов для обозначения последовательных производных заданного множества (как это делал первоначально и Кантор) и последовательных классов своей классификации, просто

[7] К этому мы еще возвратимся несколько далее.

ссылаясь на работы Кантора и не выражая своего отношения к ним, кроме, разумеется, того косвенного указания, что он демонстрирует их полезность и даже необходимость в рассматриваемых им вопросах математики.

В диссертации [5] он более осторожен. После введения производных множеств трансфинитных порядков Бэр пишет: «Относительно этого я раз и навсегда замечу, что мы никогда не будем заниматься трудностями, к которым приводит абстрактное понятие трансфинитного числа само по себе, хотя мы и будем пользоваться им на протяжении этой работы. В настоящем случае, например, множество P^{α}, где α — определенное число второго числового класса, представляет собой вполне определенную вещь, независимо от любых абстрактных соображений, относящихся к символам г. Кантора; следовательно, в том применении, которое мы намереваемся дать этому выражению, нет ничего иного, кроме применения обычного языка» [5, с. 36]. Другими словами, трансфинитные числа вводятся здесь, как и у Бореля, в качестве символа, обозначающего, однако, не порядки роста функций, а порядки производных множеств или порядки классов классификации.

Но в отличие от Бореля, первоначально сомневавшегося в целесообразности введения несчетных множеств, в частности в целесообразности применения метода трансфинитной индукции, а затем отказавшегося от несчетных процессов и даже ограничившего применение трансфинитных чисел, Бэр не мог позволить себе поступить подобным образом. Без трансфинитных чисел и основанных на них принципе стационарности Кантора—Бэра[8] и трансфинитной индукции он не смог бы получить слишком многие из своих результатов, в частности теорему о функциях первого класса, поэтому они для него были важным вспомогательным орудием исследований.

Наиболее полно Бэр изложил свои взгляды на трансфинитные числа в «Лекциях о разрывных функциях» [10], прочитанных в 1904 г. в Коллеж де Франс. Свое отношение к ним он выразил в следующих словах. «В этих исследованиях мне пришлось ввести принадлежащее Кантору понятие трансфинитного числа. Это понятие, будучи новым в математике, уже подало повод к философским спорам; причиною этого, без сомнения, является то, что при известном способе его истолкования оно приобретает как бы несколько таинственный характер. Вспомним, что ведь нечто аналогичное произошло в свое время и с мнимыми числами. Я твердо верю, что в данном случае, как и в других подобных случаях, математик имеет полную возможность стать на твердую почву. Это я попытаюсь показать во второй главе, целиком посвященной этой теории. Принятое мною изложение в общем

[8] Впервые примененном Бэром в 1898 г. [2, с. 886, 887]. О нем см. Натансон [1, с 439].

плане соответствует тому, которому следовал Кантор в своих работах, я изменил его лишь в том смысле, что сохранил исключительно пункты, нужные для тех приложений, которые я имел в виду; с другой стороны, я старался пояснить изложение приведением конкретных примеров» [10, с. 5]. Действительно, во второй главе этой книги даются различные конкретные примеры, подводящие к понятию трансфинитного числа (с. 29—33); сами трансфинитные числа вводятся как порядковые типы вполне упорядоченных множеств, доказывается принцип трансфинитной индукции (с. 54, 55) и принцип стационарности (с. 70, 71), а затем эти числа широко применяются.

Однако в одном существенном пункте Бэр отступает от подхода Кантора. Для последнего трансфинитные числа являются прямым обобщением порядковых натуральных чисел; для них вводится специальная арифметика, и символы $\omega+1$, $\omega\cdot 2$, ω^{ω} и т. п. появляются в результате определенных операций над числами, подобных операциям над конечными натуральными числами. Этот аспект канторовской теории Бэр целиком отбрасывает: «Отнюдь не отрицая, что теория представляет интерес, но руководствуясь тем соображением, что для нашей цели трансфинитные числа нужны исключительно с точки зрения их взаимного расположения, мы избрали несколько иной способ изложения, в котором мы все внимание сосредоточиваем исключительно на этих порядковых взаимоотношениях между трансфинитными числами» [10, с. 50]. И те же символы, которые означали у Кантора результат некоторых операций, у Бэра относятся лишь к взаимному расположению элементов вполне упорядоченных множеств, что, впрочем, имелось и у Кантора.

Лебег занимал в отношении трансфинитных чисел в основном ту же позицию, что и Бэр. Как и последний, он не прибегал к арифметическому аспекту их теории, а пользовался только их порядковым смыслом. К канторо-бэровским рассуждениям, основанным на принципе стационарности и методе трансфинитной индукции, он добавил так называемый метод цепей интервалов [9], которым начал пользоваться в первом издании своих «Лекций по интегрированию и отысканию примитивных функций» [13, с. 63, 79, 121, 122, 126] и применял в ряде последующих работ, например [23, с. 5, 6; 25, с. 96, 97; 26, с. 286—288], для доказательства некоторых фундаментальных теорем своей теории интеграла. Вместе с тем в тех случаях, когда применения его можно было избегнуть, Лебег стремился сделать это. Так он поступил, например, при доказательстве теоремы о функциях первого класса [14] и теоремы Кантора—Бендиксона в «Лекциях по интегрированию и отысканию примитивных функций», подчеркивая, однако, различие результатов, получаемых при помощи трансфинитных чисел и без них. Лебег различает теорему Кан-

---

[9] О нем см Лебег [40, с 273—279].

тора — Бендиксона (всякое замкнутое множество есть сумма конечного или счетного множества и совершенного множества) и проблему Кантора—Бендиксона (заданное множество разложить на сумму совершенного и не более чем счетного множества), теорему Бэра (всякая функция первого класса точечно разрывна на каждом совершенном множестве и обратно) и проблему Бэра (для заданной функции первого класса найти последовательность непрерывных функций, сходящуюся к ней всюду) [10]. В доказательствах первых применения трансфинитных чисел можно избежать относительно просто; что же касается вторых, то в проблеме Кантора—Бендиксона исключение трансфинитов возможно лишь в предположении эффективной осуществимости операции, позволяющей определить точки конденсации заданного множества [11], а «оперативный процесс, предложенный Бэром для разрешения проблемы Бэра, есть трансфинитный процесс; оправдать его без трансфинитов невозможно» (Лебег, [42, с. 280]).

Наиболее полно свои взгляды на трансфинитные числа Лебег изложил в 1928 г. в прибавлении 1 «О трансфинитных числах» ко второму изданию названных выше лекций [40, с. 256—282], где, в частности, проанализировал рассуждения при помощи трансфинитной индукции и цепей интервалов, подчеркнув при этом несводимость этих рассуждений к конечной цепи силлогизмов. Вряд ли нужно излагать их здесь. Заметим лишь, что основные идеи названного дополнения были сформулированы Лебегом значительно ранее — в рукописи 1905 г., опубликованной только в 1971 г. [45, с. 33—37].

§ 3. Понятие функции у тех же математиков

О чисто математическом аспекте понятия функции у интересующих нас французских авторов мы, по существу, вели речь в большей части настоящей работы. Они, как мы говорили, осуществили глубокий прорыв в область неаналитических функций (Борель) и даже разрывных (Бэр и Лебег), создав концепции B-измеримых и измеримых по Лебегу функций, доказали ряд важных теорем о них, «выковали» многие орудия исследований этих математических объектов (методы суммирования расходящихся рядов, интегралы Лебега, Данжуа и Фреше, производная почти всюду и т. д.). Но понятие функции, являясь одним из самых основных понятий математики и математического естествознания, имеет и более общий аспект; оно связано с глубокими общефилософскими проблемами естественно-научного закона,

---

[10] См. Лебег [40, с. 279, 280]; в отношении теоремы Кантора — Бендиксона он указал на это различие еще в 1903 г. [11, с. 1230, сноска], а в отношении теоремы Бэра — в 1905 г. [21, с. 183].

[11] Напомним, что точкой конденсации множества E называется точка, в любой окрестности которой содержится несчетное множество точек из E.

причинности, взаимоотношения математики и естествознания; вследствие этого данное понятие давно — по крайней мере, с XVIII столетия — было объектом страстных споров. Естественно, что в период бурного обогащения этого понятия непосредственно в математике еще более проявились и расхождения представителей разных взглядов. Расхождения проявились не только при описании общих установок в специальных работах полуфилософского характера, но и в чисто математических трудах, посвященных решению отдельных относительно частных проблем.

Общие взгляды французских ученых на природу понятия функции уже описывались не раз. Укажем, к примеру, обстоятельную статью Лузина «Функция» [5, с. 331—341] и статью Монны [1], где, в частности, приведены многочисленные цитаты из трудов Бореля, Бэра и Лебега, относящиеся к представлениям их о функции и, особенно, к способам ее задания. Мы будем опираться и на них.

Разумеется, вследствие фундаментальности понятия функции следовало бы рассмотреть и взгляды других ученых на это понятие. Более того, последнее связано, как мы говорили, с целым комплексом других очень общих вопросов, без рассмотрения которых нередко становятся непонятными и взгляды на природу функции. Но тогда настоящий параграф перерос бы в описание совсем иной темы — истории понятия функции на рубеже веков — цель, которую мы не ставим перед собой. Поэтому, даже с риском оказаться неправыми в некоторых отношениях, мы ограничимся описанием только отдельных соображений о концепции функции у Бореля, Бэра и Лебега.

Первое, что следует заметить по поводу их взглядов, это то, что все они хорошо знали определение функции как произвольного однозначного соответствия между элементами двух абстрактных множеств, сводящегося в случае действительных функций действительного переменного к однозначному соответствию между двумя множествами действительных чисел, прямо ссылались на него в своих работах и даже использовали при получении фактических результатов. Далее, все они считали (как задолго до них полагали многие другие), что такое определение является слишком общим, чтобы оно в этом виде могло служить объектом математических исследований. Подтвердим это утверждение несколькими выдержками.

Борель (1898 г.): «Это множество [функций действительного переменного.— *Ф. М.*] является логически определенным. Но я задаю вопрос: имеем ли мы о нем какое-либо представление? Действительно, можем ли мы представить самую общую функцию действительного переменного (даже предполагая, что ее единственными значениями являются 0 и 1)? Чтобы задать такую функцию, нужно задать ее значение для *всех* действительных значений переменного. Но так как это множество несчетно, то невозможно указать метод, позволяющий иметь их все, т. е. получить любое из них в ограниченное время» [14, с. 108].

Бэр (1899 г.): «В этом определении [понятия функции.— *Ф. М.*] не интересуются вопросом о том, чтобы найти, какими средствами может быть эффективно установлено это соответствие; даже не пытаются решить, можно ли вообще его установить. Понятие функции, расширенное таким образом, полностью содержится в понятии *определения*; эта точка зрения противоречит взгляду, состоящему в том, чтобы отправляться от некоторых простых функций и рассматривать выражения, образованные из этих простых функций, сохраняя слово „функция" за полученными таким путем выражениями» [5, с. 1].

Лебег (1905 г.): «Общее определение функции столь смутно, что его не только недостаточно, чтобы передать идею функции тому, кто не имеет ее, но оно не дает точного ответа на такой вопрос: как можно назвать функцию?» [45, с. 37] [12].

Поэтому каждый из названных ученых считал необходимым указать то ограничение общего объема понятия функции (и не только функции), которое позволяло бы рассматривать это ограниченное понятие как законный объект математических исследований. В основном эти ограничения высказаны в приведенных словах: Борель признавал законными функции, определяющие соответствия которых задаются счетным множеством условий; Бэр относит к таковым функции, получаемые из некоторых простых функций (например, непрерывных или многочленов) при помощи некоторых аналитических выражений; Лебег — функции, которые можно «назвать», т. е. для которых можно логически определить некоторое характеристическое свойство, индивидуализирующее рассматриваемую функцию. Каждое из этих ограничений не очень-то определенно, и названные авторы неоднократно возвращались к детализации своих взглядов, порой отступая от первоначальных установок, что особенно характерно для Бореля.

Уточнения Бореля шли в направлении, близком тому, которое затем получило название конструктивизма. Проиллюстрируем это несколькими примерами. В 1905 г. он, как говорилось (с. 57), занялся вопросом о существовании функций, принадлежащих различным классам классификации Бэра. Он замечает, что поскольку множество всех действительных функций имеет мощность, бо́льшую мощности континуум, а множество B-функций, класс которых не превосходит заданное число (конечное или трансфинитное второго класса), всего мощности континуум, то определенно существуют функции, не входящие в бэровскую классификацию. А вслед за этим пишет: «Но это рассуждение, основанное на мощностях, имеет серьезный недостаток: нам вполне понятно, что существуют функции из F [множе-

[12] К вопросу о лебеговском термине «назвать» мы еще возвратимся.

ства всех действительных функций.— *Ф. М.*], не принадлежащие *E* [множеству *B*-функций.— *Ф. М.*], но мы не располагаем средством *определить одну из них*, т. е. выделить так, чтобы ее можно было отличить от других, другими словами, чтобы два различных лица, когда они говорят об этой функции, были уверены, что они говорят *об одной и той же функции.*

Предыдущее рассуждение не позволяет исключить гипотезу или теорему: всякая эффективно определимая функция необходимо принадлежит классу 0, 1, 2 или 3. Напротив, мы сейчас покажем, что можно эффективно определить функцию, класс которой превосходит заданное число [конечное.— *Ф. М.*]» (Борель, [29, с. 156]). И далее Борель, пользуясь счетными процессами, доказывает существование функций во всех конечных классах Бэра.

Еще дальше он пошел в 1912 г. В работе «Вычисление определенных интегралов» [43] он, наряду с прочим, высказал и новые соображения по поводу понятия функции.

Руководящей его идеей явилось различение вычислений, «которые могут быть реально осуществлены и которые не являются таковыми» [48, с. 218][13]. В содержание понятия «реальная осуществимость» он вкладывал следующий смысл: «Я намеренно оставляю в стороне бо́льшую или меньшую практическую длительность; суть здесь та, что каждая из этих операций осуществима в конечное время при помощи достоверного и недвусмысленного метода» (с. 219). После этого вводится понятие вычислимого числа: число α является вычислимым, если оно рационально; если α иррационально, то оно вычислимо только тогда, когда при любом натуральном n можно при помощи «реально осуществимых» вычислений получить рациональное число, отличающееся от α меньше, чем $1/n$ (с. 218). И наконец, вводится понятие вычислимой функции: «Мы скажем, что функция является вычислимой, если ее значение вычислимо для каждого вычислимого значения переменного. Другими словами, если α — вычислимое число, то мы должны уметь вычислить $f(\alpha)$ с точностью до $1/n$ при любом n. Не следует забывать, что, по определению, задать вычислимое число α — это просто дать средство получить α с любым приближением. Следовательно, функция может быть вычислимой лишь тогда, когда она непрерывна, по крайней мере для вычислимых значений переменного» (с. 222, 223).

Было бы слишком смелым сопоставлять эти соображения Бореля с рядом положений современной конструктивной теории функций, однако родство их несомненно, и последнее предложение небезынтересно, в частности, потому, что в современном конструктивном анализе всякая конструктивная функция непре-

---

[13] Далее мы цитируем и ссылаемся на вариант этой статьи, опубликованный Борелем в 1914 г [48, с. 217—256].

рывна. Такое сопоставление потребовало бы привлечения слишком большого материала как из творчества самого Бореля, так и из истории конструктивного направления в математике, а это могло бы быть темой самостоятельной работы хотя бы потому, что Борель не ограничивался общими декларациями, вроде приведенных, которых, кстати, у него было немало и в последующие годы [14], но и практически осуществлял их. К тому же намеченная эволюция представлений Бореля о понятии функции не была столь прямолинейной.

Бэр не оставил большого числа общих высказываний о понятии функции. Выше мы привели одно из них, так как оно, на наш взгляд, наиболее четко характеризует его отношение к этому понятию, проявившееся в действительном математическом творчестве, ибо главным содержанием бэровских работ было изучение функций, получаемых из непрерывных при помощи предельного перехода всюду. Что касается функций более общего вида, то он не касался вопросов их существования даже после лебеговского примера функции, не являющейся B-функцией.

Правда, некоторые места его работ кажутся противоречащими такому представлению. Так, в той же диссертации он намечает и другой подход: «После того, как определена самая общая функция по Дирихле, мы приходим к разделению функций на различные категории в зависимости от того, обладают ли они или нет некоторым свойством; так, например, функция может быть непрерывной или разрывной, интегрируемой или неинтегрируемой, точечно или тотально разрывной, может обладать или нет производной. Каждое из этих различений приводит к частному исследованию, и все эти исследования носят следующий характер: мы пытаемся наложить на самую общую функцию то или иное ограничение, выражаемое простым определением, чтобы получить другие простые следствия» [5, с. 1]. Столь же определенно он высказался и в книге «Теория разрывных функций» [10, с. 3] и даже указал (с. 11), что если стать на точку зрения, высказанную в приведенных ранее словах, т. е. рассматривать только функции, получаемые из простых функций при помощи некоторых аналитических операций, то рано или поздно придется прибегнуть ко второму подходу. Тем не менее это противоречие является лишь кажущимся. Второй подход Бэр только декларировал, первый же осуществлял на деле.

Из общих соображений Лебега, относящихся к концепции функции, здесь мы остановимся только на двух.

Первым является подчеркивание им связи математического понятия функции с понятием физического закона: «Именно физике обязана математика общим понятием функции; идея функции вытекает из идеи физического закона» [45, с. 3].

Лебег не первый высказал это соображение; несколько раньше его сформулировал Бутру на II конгрессе философов [1,

---

[14] Часть из них приведена в статье Монны [1, с. 79—81]

с. 909—910, 919]. Мы не будем касаться той полемики, которая возникла по поводу указанной статьи Бутру и относилась главным образом к вопросу о взаимосвязи понятия функции и логико-математического понятия отношения — интересной самой по себе, но не нашедшей отражения в творчестве Бореля, Бэра и Лебега. Бутру был, вероятно, прав, когда писал в 1905 г., что математики, занимавшиеся разработкой теории функций, «не пользуются логикой [математической.— *Ф. М.*] и совсем не знакомы с ее недавними достижениями» [2, с. 621]. Напротив, идея связи понятий функции и физического закона встретила поддержку не только у Лебега, но и у других ученых[15]. И Лебег попытался, хотя, на наш взгляд, не совсем удачно — напомним, что эта статья не была опубликована им,— проанализировать ее и проследить исторически [45, с. 3—11].

Непосредственно после приведенных слов Лебег продолжает: «Что содержит физический закон? Прежде всего одну часть, в некотором роде качественную: те или иные условия, оказывающие влияние только на такой-то факт; затем количественную часть: точную формулировку соответствия между изучаемым фактом и обстоятельствами, влияющими на него.

Длина железного прута при 0° и заданная температура являются единственными условиями, влияющими на его длину при этой температуре,— вот физический закон, сведенный к его количественной части. Конечно, этот закон неточен; он даже сомнителен, так как, вероятно, все влияет на все, и нельзя указать никакого закона, в который входит лишь конечное число условий. Однако это несущественно: достаточно, чтобы имелась... идея физических законов природы в том, что я рассматриваю, чтобы одновременно получить и идею функции. Указанный выше закон расширения на современном математическом языке формулируется так: длина железного прута в настоящий момент есть функция его температуры и его длины при 0°. Здесь идея закона и функции совпадают, да и всякий физический закон, относящийся к фактам и условиям, уточненным в числах, приводит к некоторой функции.

Знать количественную часть закона расширения железного прута — это значит сказать, какая функция его начальной температуры и его длины при 0° равна истинной длине железного прута.

Следует заметить, что ничто не позволяет нам утверждать до опыта, что эта функция будет выражаться с помощью аналитических знаков; другими словами, ничто не позволяет нам говорить заранее, является ли эта функция или нет одним из тех аналитических выражений, о которых говорил Лагранж» [45, с. 3].

---

[15] Укажем, к примеру, Вольтерру [2, с. 692], распространившего эту связь не только на понятие функции действительного переменного, но и на понятие функционала.

Мы не можем утверждать категорически, что такой взгляд на идею функции оказал непосредственное влияние на чисто математическое творчество Лебега. Однако заслуживает внимания то обстоятельство, что рукопись Лебега «По поводу некоторых недавних математических работ», выдержки из которой мы привели выше, и его фундаментальный мемуар «О функциях, представимых аналитически» [21], написанные примерно в одно и то же время, перекликаются в ряде существенных пунктов.

И там [45, с. 1], и здесь [21, с. 139] автор отправляется от общего определения функции действительного переменного; в обоих случаях [45, с. 3; 21, с. 139] сопоставляются идеи функции как соответствия и как аналитического выражения; в приведенных выше заключительных словах выражается сомнение в возможности аналитического представления любого физического закона, а одним из главных результатов работы [21] является построение примера функции, не могущей быть представленной при помощи наиболее мощных в то время аналитических операций; в [45, с. 37—38] он выражает сомнение в законности самого общего определения функции, а в [21] он вводит некоторое ограничение на общий объем понятия функции. Это ограничение и является тем вторым соображением Лебега, на котором мы предполагаем остановиться.

Его он сформулировал следующим образом: «Объект является определенным или заданным, когда мы произносим конечное число слов, применяющихся к этому объекту и только к нему, т. е. когда мы назвали характеристическое свойство объекта. Чтобы задать функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, мы вообще называем свойство, относящееся ко всем множествам чисел

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

и только к ним. Но это совсем не необходимо: можно назвать другое характеристическое свойство этой функции. Это, например, делают, когда для определенной каким-либо образом функции $f(x)$ утверждают, что $F(x)$ является той из примитивных для $f(x)$, которая обращается в нуль при $x=0$. Мы также называем функцию, говоря, что она равна нулю или единице в зависимости от того, является ли константа Эйлера C рациональной или нет.

Не следует, впрочем, думать, что функция обязательно определена лучше, когда мы задаем характеристическое свойство множества $y, x_1, \ldots, x_n$, так как такое свойство вообще не позволяет вычислить y. Например, функция $\chi(x)$ на с. 140[16], имеющая даже известное аналитическое представление, неизвестна для $x=C$, хотя мы умеем вычислять C с любым числом десятичных знаков, а если мы знаем ее для $x=\pi$, то не ее аналитическое выражение дает нам это знание» [21, с. 205, 206].

[16] $\chi(x)$ — известная функция Дирихле, равная 1 для рациональных значений x и 0 для иррациональных значений x.

Ясно, что задать функцию при помощи предельных переходов всюду — это значит не выйти за пределы тех функций, которые можно «назвать» (nommer) в смысле Лебега, т. е. B-функции относятся к «называемым» функциям. Чтобы показать, что последние образуют более обширную категорию, Лебег ввел особую операцию, которую он назвал «наложением на континуум» (application sur le continu), т. е. операцию сопоставления каждой точке t сегмента $[0, 1]$ самое большее одного элемента рассматриваемого множества (точек, функций и т. п.), причем в качестве существенного требования выставил требование «назвать» это наложение [21, с. 200—207]. Анализируя с этой точки зрения канторовское доказательство утверждения, что множество всех действительных функций имеет мощность, бо́льшую мощности континуума, Лебег [21, с. 207] перестраивает его следующим образом.

Допустим, что такое наложение возможно для какого-либо множества $\mathcal{F}$ функций одного действительного переменного, заданных на $0 \leqslant t \leqslant 1$. Определим функцию $F(t)$ так:

$$F(t) = \begin{cases} 1, & \text{если рассматриваемому значению } t \text{ в предположенном наложении соответствует функция, обращающаяся в нуль для этого } t, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Тогда функция F не может принадлежать множеству $\mathcal{F}$. Действительно, если бы она принадлежала $\mathcal{F}$, то в предположенном наложении ей отвечала бы некоторая точка t_0, в которой $F(t_0)$ было бы равно нулю или нет; предположение $F(t_0) = 0$ влечет $F(t_0) = 1$, а предположение $F(t_0) \neq 0$ влечет $F(t_0) = 0$ по самому построению $F(t)$ [17].

«Именно это рассуждение передают обычно словами, что *существует* функция, не принадлежащая $\mathcal{F}$, или что мощность множества функций превосходит мощность множества функций из $\mathcal{F}$. Чтобы быть точным, мы должны только сделать вывод: или невозможно назвать наложение множества $\mathcal{F}$ на континуум или же можно назвать функцию F, не принадлежащую $\mathcal{F}$.

Таким образом, если мы можем назвать наложение, то мы можем назвать функцию F; если мы знаем только, что существует наложение, то должны лишь заключить, что существует функция F» [21, с. 207].

Следовательно, в категорию «называемых» функций Лебег зачисляет функции, существование которых доказывается при помощи диагонали Кантора, но при условии, что график наложения можно «назвать». Приведенное выше его определение термина «назвать» достаточно неопределенно, и сам он конкретизировал его в рассматриваемой работе лишь тем, что для «на-

[17] Этот способ рассуждений известен как метод диагонали и очень часто применяется в приданном ему Лебегом виде.

зывания» функций, не входящих в классификацию Бэра, привлек совокупность всех трансфинитных чисел второго числового класса, т. е. множество мощности континуум (с. 213—215). И закончив доказательство утверждения, что построенная им функция аналитически непредставима, он написал: «Итак, можно назвать функцию, непредставимую аналитически, и то исследование, которое мы только что предприняли, не следует смешивать с изучением функций, *которые можно называть*, т. е. с исследованием, к которому было бы интересно приступить» (с. 215).

Смысл последних слов заключается, по-видимому, в том, что «называть» можно не только при помощи диагонального метода Кантора, да еще в сопровождении совокупности трансфинитов второго класса, но и в других случаях. Призыв Лебега к общему изучению «называемых» функций и множеств долго оставался безответным у математиков. Лишь в 30-х годах попытки в этом направлении были предприняты П. С. Новиковым и Н. Н. Лузиным, но, кажется, успеха не имели[18].

§ 4. Полемика по поводу аксиомы Цермело

Аксиома Цермело является одним из наиболее активно обсуждавшихся на протяжении почти всего нашего столетия предложений теории множеств. Имеются сотни работ, включая целые книги, посвященные специально этому предложению, и тысячи работ, в которых оно применяется или вообще затрагивается в той или иной мере. И это не случайно. После установления Гёделем в 1938 г. непротиворечивости, а в 1963 г. Коэном независимости этой аксиомы в наиболее распространенной аксиоматике теории множеств стало ясным, что вопрос о принятии или непринятии ее связан с ломкой традиционных представлений, быть может, более глубокой, чем та, которая была вызвана анализом аксиомы параллельности в геометрии.

Поэтому, даже с бо́льшим основанием, чем в отношении понятия функции, мы отказываемся здесь от сколько-нибудь полного описания борьбы вокруг названной аксиомы, опять-таки ограничиваясь в основном характеристикой отдельных соображений некоторых французских ученых в начале XX в.

Пуанкаре [4, с. 140] справедливо писал, что эту аксиому, не формулируя ее, применяли тысячи раз, но, как только она была сформулирована, она вызвала ряд сомнений. Непосредственным поводом, вызвавшим ее активное обсуждение во Франции, явились два следующих факта.

В 1904 г. на Международном конгрессе математиков в Гейдельберге венгерский математик Кёниг выступил с докладом, в котором утверждал, что континуум не может быть представлен в форме вполне упорядоченного множества[19]. В том же году

[18] См Лузин [4, с 598—616]
[19] Этот доклад он опубликовал в 1905 г.

Цермело опубликовал свою знаменитую работу «Доказательство предложения, что каждое множество можно сделать вполне упорядоченным» [1], в которой, основываясь на аксиоме выбора, доказывал, что вполне упорядочить можно любое множество. В его формулировке эта аксиома выглядит так: «Для бесконечной совокупности множеств всегда существует отображение (Zuordnung), в котором каждому множеству соответствует один из его элементов» [1, с. 516].

Естественно, что сопоставление этих двух противоречащих друг другу предложений о полном упорядочении не могло не вызвать недоумения. По-видимому, впервые в печати это недоумение было выражено в отчете о гейдельбергском конгрессе, помещенном в «Revue générale des sciences pure et appliques» 15 ноября 1904 г. В том же «Revue...» 30 марта 1905 г. появилась более развернутая заметка Адамара [3][20], в которой аксиома Цермело была подвергнута сомнению, сущность которого состояла в указании на неочевидность того, что операцию выбора элемента из каждого множества бесконечного семейства можно подчинить некоторому закону.

Любопытно, что автор указанной заметки отмечает (с. 241), что «многие из математиков думали найти пробел в самой отправной точке доказательства [теоремы о вполне упорядочении всякого множества.— *Ф. М.*], к которой, впрочем, привлек внимание сам автор [т. е. Цермело.— *Ф. М.*]»[21]. Ни один из этих «многих математиков» здесь не называется, но почти несомненно, что к их числу принадлежал и Борель, так как вскоре была опубликована его статья «Несколько замечаний о принципах теории множеств» [31], в которой он резко выступил против аксиомы Цермело. Редакция журнала «Mathematische Annalen», помещая на его страницах статью Цермело [1], видимо, все же сомневалась в убедительности рассуждений последнего и, кажется, обратилась к ряду специалистов по теории множеств с просьбой высказаться по этому поводу[22]. Ответом на эту просьбу и явилась заметка Бореля [31].

В ней он прежде всего высказал мысль, что Цермело фактически доказал не утверждение о возможности полного упорядочения любого множества, а предложение об эквивалентности этого утверждения и аксиомы выбора. Что же касается последней, то Борель выразил сомнение даже в применимости ее к слу-

[20] Эта заметка не подписана. Обычно ее, как и еще несколько заметок, помещенных в этом журнале, приписывают Адамару; так будем поступать и мы.

[21] Видимо, сообщение Кёнига вызвало споры и на самом конгрессе, так как Цермело присутствовал на нем. Возможно, что на это противоречие обратил внимание Гильберт, так как статья Цермело [1] представляет собой письмо, обращенное к нему. Из других математиков, присутствовавших на этом конгрессе, можно указать Кантора, Бореля, Каратеодори, Хаусдорфа, Адамара, каждый из которых мог заметить это противоречие.

[22] О такой просьбе к нему прямо пишет Борель [31, с. 194]. Авторы других работ на эту тему (Бернштейн, Журден, Шёнфлис), приславшие статьи в тот же номер журнала, об этом не говорят.

чаю, когда множества, из которых производится выбор определенного элемента, являются подмножествами континуума. Приведя затем такое рассуждение: чтобы вполне упорядочить произвольное множество M, достаточно выбрать в нем некоторый элемент, которому мы припишем ранг 1, потом отличный от него другой элемент, которому припишем ранг 2, и т. д. трансфинитно, т. е. до тех пор, пока не исчерпаем все элементы множества M последовательностью трансфинитных чисел,— Борель продолжал: «Но ни один математик не станет рассматривать это рассуждение как законное. Мне кажется, что возражения, которые можно выставить здесь, действительны и для всякого рассуждения, в котором предполагается *произвольный выбор*, совершенный несчетное множество раз; такие рассуждения находятся вне пределов математики» [31, с. 195]. В примечании на стр. 195 Борель привел выдержку из письма к нему Бэра, из которой следовало, что последний тоже сомневался в принципиальной возможности установить полное упорядочение континуума.

Вслед за тем Борель обратился с письмами к Адамару, Бэру и Лебегу с просьбой высказаться по поводу соображений, выдвинутых им в статье [31]. Их ответы вместе с новым письмом Бореля и составили знаменитые «Пять писем о теории множеств», опубликованные в 1905 г. в «Бюллетене Французского математического общества» (1905, **33**, с. 261—273) и перепечатанные во втором издании борелевских «Лекций по теории функций» [47], а также в их последующих изданиях.

Адамар [5] отверг борелевское сопоставление приведенного выше рассуждения о возможности полного упорядочения всякого множества с рассуждением Цермело при выборе элементов в множествах бесконечного семейства. Он указал на то, что в первом рассуждении производится ряд последовательных выборов, каждый из которых зависит от предыдущего, тогда как во втором эти выборы производятся независимо друг от друга. Далее он выразил мнение, что различие между счетным и несчетным множествами выборов, на котором настаивал Борель, является несущественным. Вместе с тем Адамар признал, что рассуждение Цермело «не дает никакого средства эффективно осуществить операцию, о которой он говорит [т. е. операцию выбора элементов.— *Ф. М.*], и что остается сомнительным, чтобы кто-либо смог указать это средство» [5, с. 262], но отметил, что в этом оно подобно традиционным доказательствам теорем существования в математике.

Получив письмо Адамара, Борель ознакомил с ним Бэра, и последний [12] в письме Адамару изложил свои взгляды. Бэр сообщил, что он в основном придерживается мнения Бореля и даже идет несколько дальше. «Как только мы говорим о бесконечности (даже счетной, и именно в этом я пытаюсь быть более радикальным, чем Борель), так уподобление, сознательное или бессознательное, с мешком монет, передаваемым из рук в руки, должно быть полностью отброшено, и мы, по моему мнению, приходим к потенциальности, т. е. вводим соглашения, позволяющие нам заранее, до того, как объект определен *при помощи нового соглашения*, делать утверждения о некоторых свойствах этого объекта. Но считать, что мы можем идти дальше, мне кажется незаконным. В частности, из того, что некоторое множество задано, ...было бы *ошибкой рассматривать части этого множества как заданные»* (с. 263, 264). Завершает свое письмо Бэр словами: «в конечном счете... все сводится к конечному».

В ответ на просьбу Бореля высказаться по поводу его заметки [31] и письма Адамара [5] Лебег [19] сообщил следующее. Он согласился с Борелем, что Цермело доказал только эквивалентность утверждения о вполне упорядочении всякого множества с аксиомой произвольного выбора (с. 264, 265); согласился он и с Адамаром в том, что различие между счетным и несчетным множествами выборов несущественно с теоретической точки зрения, хотя признал практическую полезность проведения этого различия (с. 268—269). Лебег присоединился к мнению Адамара, что в рассуждении Цермело речь идет о некоторой теореме существования, но сам термин «существование» истолковал (с. 266) как имеющий смысл только тогда, когда говорят о существовании объекта, который определен, понимая под словом «определить» слова «назвать характеристическое свойство определяемого объекта» (с. 266), т. е. то лебеговское «назвать», о котором говорилось в предыдущем параграфе.

В целом же к аксиоме Цермело он относился отрицательно. «Верно, что я пользуюсь словом „выбрать“ в смысле „ назвать“, а для рассуждения Цермело достаточно, быть может, что слово „выбрать“ означает „помыслить о“. Следует, однако, заметить, что не указывается тот, кто мыслит, и что в рассуждении г. Цермело тем не менее требуется, чтобы *определенное соответствие* ***мыслилось*** все время *одним и тем же*. Адамар полагает, как мне кажется, что необязательно, чтобы доказывалась возможность определить некоторый элемент (и только один); отсюда, по-моему, и проистекают расхождения в оценке. Имеется ...трудность, которую Вы указали, в связи с бесконечностью выборов..., и если хотят рассматривать рассуждение г. Цермело как совершенно общее, то нужно допустить, что речь идет о бесконечной совокупности выборов, бесконечности, быть может, весьма высокой мощности; при этом не дается ни закона этой совокупности, ни закона одного из выборов... Итак, когда я детально рассматриваю рассуждение г. Цермело, как, впрочем, и многие общие рассуждения о множествах, я нахожу слишком мало кронекеровского в нем, чтобы приписать ему смысл» (с. 267). Из таких общих рассуждений Лебег указал на теоремы, что всякое несчетное множество содержит подмножество мощности $\aleph_1$ и что всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество, и это явилось одним из первых указаний на применение аксиомы выбора в давних доказательствах[23].

Ознакомившись с письмом Лебега, Адамар [6] констатировал радикальное различие между взглядами Бореля, Бэра и Лебега, с одной стороны, и своими, с другой. Это различие он усмотрел в том, что первые в вопросах существования принимают «точку зрения Кронекера, которая, как я полагал до сих пор, была свойственна лишь ему» (с. 269) и которая заключается в том, что существование математического объекта ставится в зависимость от способа доказательства этого существования (с. 268). Адамар в письме к Борелю не согласился с такой концепцией, и особенно ему не понравились точки зрения Бэра и Бореля из-за их субъективности: «Основной вопрос — вопрос о том, может ли множество быть вполне упорядоченным — не имеет, очевидно, для Бэра (а также для Лебега и тебя) того же смысла, какой он имеет для меня. Я скорее скажу: возможно ли упорядочение? (даже не возможно ли упорядочить? — из-за боязни подумать: а что это означает?); Бэр спрашивает: можем ли мы упорядочить? — По-моему, вопрос совершенно субъективный» (с. 270). А говоря затем о множестве функций действительного переменного, Адамар продолжает: «Кантор рассматривал множество всех функций, которые на интервале (0, 1) принимают лишь значения 0 и 1. Это множество, по-моему, имеет ясный смысл и его мощность равна $2^{\aleph}$... Какой смысл имеет все это для тебя? Мне кажется очевидным, что это для тебя не имеет никакого смысла, так как на всякую функцию ты накладываешь дополнительное ограничение, не имеющее никакого математического смысла,— условие быть описуемой для нас» (с. 272). Сам Адамар признавал объективное существование математических объектов, но здесь он не конкретизировал, в каком смысле следует понимать эту объективность — в платоновском или каком-либо другом.

В заключительном письме рассматриваемой переписки Борель [32] в основном ограничился защитой от содержащегося в только что приведенных словах косвенного упрека Адамара в непоследовательности Бореля, который, вопреки своим неоднократно высказывавшимся взглядам, пользовался множеством всех действительных функций, да и вообще нередко применял довольно общие теоретико-множественные рассуждения. Здесь Борель указал, что такие рассуждения он рассматривает как удобное эвристическое средство, и считал, что они «могут навести на другие, более серьезные рассуждения» (с. 272).

В 1906 г. свое отношение к аксиоме Цермело выразил и Пуанкаре [4, с. 140—142]. Он, прежде всего, подчеркнул ее важность и распространенность в математических рассуждениях. Затем он

---

[23] Эти утверждения доказываются обычно с явным или неосознанным применением аксиомы Цермело. Этого Лебег прямо не говорит, но из контекста видно, что он имел в виду как раз это.

выразил мнение о безнадежности намерения Рассела доказать ее. А его собственное отношение к ней ясно выражено в таких словах: «Аксиома „самоочевидна“ для конечных классов; но если она недоказуема для бесконечных классов, то она, несомненно, недоказуема также для конечных классов, которых на этой стадии теории еще не отличили от первых; она, значит, есть синтетическое априорное суждение, без которого была бы невозможна „количественная теория“ как для конечных чисел, так и для бесконечных» [4, с. 142].

В отношении же к основанному на аксиоме произвольного выбора доказательству Цермело теоремы о полном упорядочении он занимал позицию, близкую к бореле-бэровской: «Возьмем для примера теорему Цермело, по которой континуум может быть преобразован во вполне упорядоченное множество. Канторианцы будут пленены строгостью, действительной или кажущейся, доказательства; прагматисты им ответят: „Вы говорите, что вы можете преобразовать континуум во вполне упорядоченное множество — хорошо, преобразуйте!“.— Это будет слишком длительно.— Тогда, по крайней мере, покажите нам, что кто-либо, имеющий достаточно времени и терпения, мог бы произвести это преобразование.— Нет, мы этого не можем, так как число операций, которые необходимо проделать, бесконечно, оно даже больше, чем алеф-нуль.— Можете ли вы показать, как можно выразить в конечном числе слов закон, который бы позволил упорядочить континуум?— Нет, и прагматисты заключают, что теорема лишена смысла или неверна, или, по крайней мере, не доказана» [7, с. 78, 79][24]. Несколько ранее (1906 г.) он, характеризуя взгляды Рассела в отношении аксиомы выбора, писал: «Таким образом, г. Рассел еще надеется, что можно доказать дедуктивно, исходя из других постулатов, что аксиома Цермело ложна или истинна. Бесполезно прибавлять, сколь малосбыточной представляется мне эта надежда» [4, с. 142],— интересное для 1906 г. утверждение, хотя его обоснование Пуанкаре, приведенное в первой из цитат, путем ссылки на то, что эта аксиома является априорным синтетическим суждением, и неубедительно. Спустя некоторое время Пуанкаре [5, с. 868] высказался еще категоричнее: по его словам, даже более ясные, чем наличные, логические понятия не решили бы вопрос об аксиоме Цермело.

Описанная полемика об аксиоме произвольного выбора является лишь небольшим отрывком более широкой и более интересной картины столкновения мнений по поводу этого и других кардинальных вопросов математики. Этот отрывок мы дополним еще лишь кратким описанием очень интересного мемуара Лебега «Вклад в изучение соответствий г. Цермело» [28], опубликованного в 1907 г.

---

[24] Мы несколько модифицировали русский перевод работы, на которую мы ссылаемся.

Основной результат этой работы Лебег сформулировал так: «Не существует никакой функции $y(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ счетного числа переменных $x_1, x_2, x_3, \ldots$, которая была бы представима аналитически или даже просто измерима и которая всякому счетному множеству $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ставила бы в соответствие выделенное число y этого множества, зависящее от множества $x_1, x_2, x_3, \ldots$, но не зависящее от порядка, в котором расположены точки, образующие это множество» [28, с. 209].

Для 1907 г., да и в значительной мере сейчас, это утверждение является чрезвычайно общим: речь идет о весьма сложном функционале в пространстве последовательностей действительных чисел. Поэтому изложению содержания работы Лебега предпошлем краткую справку по истории функционального анализа.

В 80-х годах прошлого столетия начались исследования Вольтерры и Пинкерле по функциональному анализу; к ним вскоре присоединилось много других математиков — Арцела, Леви-Чивита, Бурле, Адамар, Фреше, Гильберт и др. К 1907 г. в этой новой области математики были получены многие фундаментальные результаты, из которых назовем только следующие: были введены понятия линейного и метрического пространств, пространства сходящихся с квадратом последовательностей действительных чисел и некоторые другие виды функциональных пространств; изучены многие свойства функционалов и операторов в таких пространствах, в частности была получена общая форма линейного функционала в пространстве непрерывных функций; в работах Гильберта функционал стал явно рассматриваться как функция бесконечного числа переменных и т. д.

Трудно сказать, в какой мере Лебег был знаком с работами названных авторов. В сноске [28, с. 204] он лишь коротко упомянул имена Вольтерры, Адамара, Пинкерле и Бурле; исследования Гильберта тогда были ему, кажется, незнакомы. Характер его научных интересов, особенно стиль мышления, были далеки от соответствующих характерстик основных создателей функционального анализа того времени — Вольтерры, Пинкерле и Фреше. Ближе всего в этом отношении к Лебегу стоял молодой тогда Фреше, но его-то Лебег как раз и не упоминает. Можно предположить, что о новой математической науке Лебег знал только понаслышке по тем причинам, что, во-первых, за период 1904—1907 гг. он опубликовал свыше двух десятков работ, в том числе две книги и такие фундаментальные статьи, как [18, 21], и к тому же был загружен преподавательской работой, так что для чтения чужих работ, да еще казавшихся ему не относящимися к тематике собственных исследований, времени попросту не оставалось; во-вторых, работы тех же Вольтерры, Пинкерле и Гильберта могли представляться ему слишком частными в том смысле, что они не выходили в общем-то за пределы области непрерывных функций, а основные интересы Лебега были сосредоточены в области разрывных функций. Поэтому тем более интересно, что такая абстрактная вещь, как общая аксиома Цермело, в некотором смысле заставила Лебега сделать глубокий прорыв в новую область знания, причем, вероятно, независимо.

Ход мыслей Лебега был таким. Не принимая аксиомы Цермело в ее абстрактной формулировке, он задался целью показать, что даже если множества семейства, из которых выбирается элемент, являются множествами действительных чисел, то наличные аналитические методы не позволяют построить функцию множества, ставящую в соответствие каждому множеству семейства элемент этого множества [25].

«Назвать такое соответствие — это значит всякому множеству чисел E поставить в соответствие одно из чисел этого множества или же функции f, равной нулю в точках множества E и равной 1 в остальных точках, поставить в соответствие один из корней этой функции. Если y является этим корнем, то y выступает в виде функции, определенной для переменного, зависящего от формы и значения функции f на интервале. Функциональные операции, ставящие в соответствие числа формам функций, еще совсем не изучены, за исключением той функциональной операции, которую называют определенным интегрированием; будет, следовательно, преждевременным пытаться искать, за каким классом функциональных операций целесообразно зарезервировать наименование *аналитических операций*. Однако, если мы условимся говорить, что *функциональная операция определяется аналитическим процессом, если она всякой функции* $f(x, \lambda)$, *выразимой аналитически, ставит в соответствие число* $y(\lambda)$, *выразимое аналитически*, то мы, конечно, имеем определение достаточно широкое, чтобы было очень трудно найти операцию, которая не удовлетворяет этому определению» [28, с. 204].

Из этих слов видно, что Лебег знаком с общим понятием функционала. Далее, ему, очевидно, был известен результат Адамара о представлении линейного функционала в пространстве непрерывных функций в виде предела определенного интеграла (теорема Рисса еще не появлялась). Лебег считает недостаточным рассмотрение только линейных функционалов, и в сноске на той же странице он приводит примеры таких функционалов, как верхняя грань, полная вариация и внешняя мера значений функции на интервале, не являющихся линейными. Кроме того, для него слишком ограничительно рассмотрение лишь функционалов от непрерывных функций. Он желает рассматривать функционалы, заданные на семействе B-функций [26], зависящем от действительного параметра λ, да к тому же не непрерывные, а тоже B-измеримые [27]. Функционалы такой общности, насколько нам

[25] Такую функцию множества Лебег назвал «соответствием Цермело».

[26] Именно B-функции Лебег называл, как мы знаем, аналитически выразимыми

[27] Видимо, это означают его слова «ставит в соответствие число $y(\lambda)$, выразимое аналитически».

известно, не изучались до того времени. Правда, и сам Лебег отказывается от изучения столь общих функционалов. Он лишь доказывает, что если допустить существование функционала в пространстве ограниченных последовательностей действительных чисел, который каждой такой счетной последовательности ставит в соответствие определенное число этой последовательности, то такой функционал не только не будет непредставим аналитически в указанном смысле, но и не будет измеримым в смысле Лебега. Но для Лебега «неизвестно, можно ли будет когда-либо назвать неизмеримое множество, неизмеримую функцию» (с. 203), поэтому для него такой функционал «не существует». Следовательно, даже если ограничить применение аксиомы Цермело только счетными множествами действительных чисел, то и тогда она дает неприемлемый для Лебега результат [28].

Таким образом, с первых же шагов в вопросе об аксиоме Цермело выявились ее связи с кардинальными проблемами математического познания. Как выразился Лузин, «математики с изумлением констатировали отсутствие единомыслия в своей среде: все в математике до сих пор заставляло думать, что всякое наличие разногласия обусловлено либо недостаточностью сведений, либо плохой постановкой вопроса. Здесь же оказалось непримиримое различие взглядов при полной внутренней очевидности дела» [3, с. 510] [29]. Разногласия проявились не только в отношении аксиомы произвольного выбора, о чем мы отчасти говорили, но именно она в наибольшей мере привела французских (да и не только французских) математиков к высказыванию своих взглядов на проблемы общих оснований математики.

§ 5. Непредикативные определения

Вопрос о непредикативных определениях [30] является одним из наиболее сложных и спорных вопросов в исследованиях по основаниям математики. Здесь нет ни установившихся принципов, ни общепринятой терминологии. Зато налицо глубокие различия в концепциях непредикативности у различных представителей того или иного подхода к проблемам обоснования математики.

Непредикативные определения или определения, основанные на принципе порочного круга, на первый взгляд, не так уж затрагивают теорию функций, тем более рассматриваемого периода

---

[28] Кроме того, к аналогичным заключениям Лебег пришел и для достаточно простых, а не произвольных, счетных множеств действительных чисел (с. 209—211). Однако изложение этого потребовало бы довольно длинных пояснений. Следует также отметить, что сами рассуждения Лебега математически тоже очень интересны.

[29] Здесь же у Лузина (с. 510, 511) охарактеризована и полемика, о которой говорилось выше

[30] О них см., например, Чёрч [1, с. 331—337, 455—459]; Френкель, Бар Хиллел [1, с. 213—221].

ее истории. Полемика о них в начале XX в. в общем не касалась собственно теории функций, если не связывать последнюю с абстрактной теорией множеств и математической логикой. Тем не менее непредикативные определения играют существенную роль и в ней, хотя это обычно и не подчеркивается. Если, например, обратиться к определениям функции у Лобачевского и Дирихле, то в их формулировках порочный круг выступает достаточно явно. Менее очевиден, но вполне определен он в рассуждениях при доказательствах ряда теорем интегрального исчисления. Например, когда доказывают теоремы об аддитивности интеграла, то обычно опираются на аддитивность предела интегральных сумм, однако последняя до совсем недавнего времени не доказывалась, а просто предполагалась как естественный аналог аддитивности предела последовательности или функции. Следовательно, в этих доказательствах исходили из того, что требовалось доказать. Можно было бы указать много других подобных фактов, говорящих о существенности непредикативности и в теории функций, причем в наиболее важных ее частях. Поэтому мы посчитали целесообразным остановиться и на этом фрагменте истории математики во Франции, тем более что инициатором современной постановки проблемы непредикативности явился Пуанкаре.

Пуанкаре очень много писал по философским вопросам науки вообще и математики в частности [31]. Неоднократно обращался он к теории множеств и математической логике; его соображения часто не безупречны, порой очень спорны и даже неприемлемы, но они почти всегда интересны.

Если говорить об отношении Пуанкаре к теории множеств в целом, то ситуация такова. Первоначально он, в общем, был ее сторонником: он участвовал в переводе канторовских работ на французский язык и блестяще применил [1] отдельные положения теории множеств в теории автоморфных функций, а затем и в общей теории аналитических функций. В начале XX в. он стал ярым ее противником. По-видимому, главной причиной столь радикального изменения его взглядов послужило обнаружение на рубеже веков ряда парадоксов в абстрактной теории множеств. Пуанкаре отверг саму основу теории множеств — понятие актуальной бесконечности, считая последнее источником выявившихся парадоксов [4, с. 147]. Критика им теории множеств про-

---

[31] Его работы по этой теме составили три тома: «Наука и гипотеза» (1902 г.), «Ценность науки» (1905 г.), «Наука и метод» (1908 г.); задуманный им четвертый том остался неоконченным и вышел после его смерти в виде небольшой книги «Последние мысли» (1913 г.). Многие его соображения по философским вопросам математики описаны Бутру [3].

Общефилософские взгляды Пуанкаре вполне охарактеризованы Лениным [1, с. 39, 40, 142, 143, 158, 159, 222, 223, 257, 258, 261, 262]. Там же, особенно в главе «Новейшая революция в естествознании и философии», обрисована и общефилософская обстановка во Франции рассматриваемого периода водилась с этой позиции, и хотя убежденного сторонника концепции актуальной бесконечности такая критика не могла поколебать, но и его она заставляла задуматься, четче формулировать свои представления. Пуанкаре выступал против трансфинитных чисел (например, [4, с. 135; 6, с. 73]), против аксиоматики Цермело [6, с. 65—71, 74, 75], теории типов Рассела [6, с. 60—65] и т. д. Но особенно много внимания он уделял критике непредикативных определений.

Он, конечно, не был первым критиком. Ранее его на отдельные непредикативные определения и рассуждения в математике указывали, например, Больцано, Кантор и Фреге; на Международном конгрессе математиков в Гейдельберге в 1904 г. Гильберт [1, с. 325] общим образом указал на опасность порочных кругов при обосновании арифметики посредством логики, и Пуанкаре хорошо знал этот доклад Гильберта. Почти одновременно с Пуанкаре проблемой непредикативности занялся, хотя, вероятно, и не без воздействия последнего, но в некотором отношении более успешно, Рассел.

Первоначальный подступ Пуанкаре к этой проблеме был не очень удачным. Считая термин «petitio principii» общеизвестным, он решил в 1905 г. показать, что в определениях понятия числа, предлагавшихся тогда представителями математической логики, содержатся различные «petitio principii», или порочные круги. Его исходная позиция хорошо иллюстрируется следующими словами: «Определения числа весьма многочисленны и весьма различны; я отказываюсь перечислить даже имена их авторов. Не должно удивляться, что их много. Будь одно из них удовлетворительно, новых определений уже не давали бы. Если каждый философ, занимавшийся этим вопросом, считал своим долгом придумывать другое определение, то потому, что он не был удовлетворен определениями своих предшественников, а не удовлетворялся он ими потому, что усматривал в них какое-нибудь petitio principii.

Читая работы, посвященные этой проблеме, я всегда испытывал крайне тягостное ощущение. Я постоянно был начеку, ожидая, не наткнусь ли я на petitio principii, и когда я его сразу не замечал, то я боялся, что проглядел.

Дело в том, что невозможно дать определение, не употребив грамматического предложения, и трудно произнести предложение, не вставив в него название числа, или, по крайней мере, слово «несколько», или не употребив слова во множественном числе. А тогда становишься на скользкий путь и ежеминутно рискуешь впасть в petitio principii» [4, с. 9, 10].

С этой точки зрения он и попытался показать [4, с. 12, 13, 21, 28, 29, 40—45] наличие непредикативностей в работах Бурали-Форти, Рассела, Кутюра и Гильберта. Отвечая ему, Кутюра [2, с. 74, 76, 79, 80, 81, 95, 96, 99, 100] в основном успешно отразил нападки Пуанкаре по этому вопросу. Но возражения

Кутюра и ряда иностранных ученых (Бурали-Форти, Рассел, Пеано) отнюдь не снимали общий вопрос о непредикативных определениях, и некоторое время спустя Пуанкаре обратился к ним вновь.

Рассматривая парадоксы теории множеств, в частности парадокс Ришара [32], Пуанкаре воспользовался попыткой Ришара объяснить свой парадокс для выработки общего представления о непредикативных определениях. Ришар, сформулировав свой парадокс, попытался решить его в том смысле, что счетное множество E конечно определимых чисел становится противоречивым, лишь если в него включаются числа, определяемые посредством самого множества E; без включения таких чисел это множество он считал непротиворечивым.

Именно этот отказ от включения в рассматриваемое множество элементов, определение которых требует привлечения самого этого множества, Пуанкаре [4, с. 134, 135] и взял в качестве критерия непредикативности, правда, не формулируя его в общем виде, а лишь иллюстрируя на отдельных примерах (антиномий Бурали-Форти и Ришара (с. 129—131); определения Кантора первого трансфинитного кардинального числа (с. 134, 135); определения индуктивного числа у Уайтхэда (с. 137, 138); определения одного множества, рассмотренного Цермело при доказательстве теоремы эквивалентности Кантора — Бернштейна (с. 145).

Пуанкаре, рассматривая непредикативное определение как определение, содержащее порочный круг (с. 135), считает, что оно «не определяет ничего» (с. 138), что непредикативное множество — это не пустое множество, а множество, границы которого неопределенны (с. 138). Окончательный итог своим соображениям, высказанным в этой статье, Пуанкаре подвел в следующих словах: «Вера в существование актуальной бесконечности дала начало этим непредикативным определениям. Объяснюсь: в этих определениях фигурирует слово „все“, как это видно из приведенных выше примеров. Слово „все“ имеет вполне ясный смысл, когда дело идет о конечном числе предметов; для того, чтобы оно имело смысл, когда их бесконечное число, должна была бы существовать актуальная бесконечность. В противном случае нельзя представить себе *все* эти предметы данными раньше их определения, и тогда раз определение какого-нибудь понятия N зависит от всех предметов A, то оно может оказаться заключающим в себе порочный круг, если среди предметов A есть такие, которые нельзя определить, не прибегая к самому понятию N.

Не существует актуальной бесконечности. Канторовцы забыли об этом и они впали в противоречия. Нет спора, что канторизм оказал науке реальные услуги, но это было тогда, когда его при-

---

[32] Подробнее об этом в следующем параграфе.

меняли к истинной проблеме, так что можно было безбоязненно двигаться вперед.

Логисты забыли это, как и канторовцы, и они столкнулись с теми же трудностями» (с. 147).

Соображения Пуанкаре не убедили его идейных противников. Против него выступили Рассел, Пеано, Цермело и др. Поэтому он обращался к непредикативным определениям еще не раз. Наиболее полно свои взгляды на непредикативные определения он развил в статье «Логика бесконечности» [6], почти целиком посвященной им.

Здесь он прежде всего выделяет два вида классификаций рассматриваемых объектов: остающиеся неизменными или изменяющиеся в ходе рассуждения (с. 54, 55). Различие между ними имеет место и для конечных совокупностей, но особенно существенным оно оказывается для бесконечных множеств. Понимая бесконечность только как потенциальную (с. 56), он вводит понятия предикативных и непредикативных классификаций. Первые суть те, которые не нарушаются при введении новых элементов классификации, а вторые — это те, которые «без конца изменяются под влиянием введения новых элементов» (с. 56). Это различие он иллюстрирует двумя примерами (с. 56, 57).

При разбиении целых чисел на два класса в зависимости от того, больше или меньше некоторое число, чем число 10, налицо предикативная классификация, поскольку, во-первых, при рассмотрении любого конечного множества целых чисел однозначно решается вопрос, к какому из двух классов принадлежит каждое из чисел рассматриваемого множества, а, во-вторых, при введении новых целых чисел, не принадлежащих рассматриваемому множеству, каждое из них будет опять-таки однозначно входить в один из классов, причем, и это главное, не изменится отношение принадлежности к тому или иному классу чисел прежнего множества: числа, бывшие меньше 10, останутся меньше 10, а бывшие бóльшими также останутся бóльшими.

Напротив, если на два класса разбиваются точки континуума [33] в зависимости от того, можно ли их определить конечным числом слов или нет, то налицо непредикативная классификация. Пуанкаре рассуждает так. «Среди всевозможных высказываний [определяющих точку континуума конечным числом слов.— *Ф. М.*] будут такие, которые будут содержать указание на все множество, т. е. континуум, или на части континуума. Когда мы введем новые точки в континуум, эти высказывания изменят смысл и не будут определять ту же точку или же вовсе потеряют смысл, а то еще приобретут смысл, какого они не имели ранее. В таком случае точки, не поддававшиеся определению, окажутся определенными, а другие, которые были определены ранее, пере-

[33] В русском переводе термин «le continu» передан словом «пространство»; в соответствии с принятой теперь терминологией мы здесь и далее заменили его словом «континуум».

стануть быть таковыми; они должны будут переместиться из одной категории в другую. Классификация будет непредикативной» (с. 57) [34].

Считая, далее, всякое определение некоторой классификацией, поскольку каждое определение отделяет объекты, удовлетворяющие определению, от объектов, которые ему не удовлетворяют (с. 58), Пуанкаре распространяет предикативность и непредикативность на определения. Любопытно при этом то, что вслед за этим сам Пуанкаре впадает в некую разновидность порочного круга. Вновь возвращаясь к первому примеру, он продолжает: «Я определил [конечным числом слов. — *Ф. М.*] некоторые числа α, β, γ, ... и распределил их между классами *A* и *B*. Я определяю и ввожу новые целые числа. Я сказал, что распределение не изменится, и, следовательно, классификация будет предикативной.

Но, чтобы положение числа α в классификации не изменялось, недостаточно неизменности порядка классификации; необходимо еще, чтобы число α осталось тем же, т. е. чтобы его определение было предикативным. Поэтому не следует говорить, что классификация является абсолютно предикативной, но что она является предикативной относительно некоторого способа определения» (с. 58).

Следовательно, хотя, по Пуанкаре, всякое определение является классификацией и предикативность или непредикативность определения является следствием предикативности или непредикативности классификации, последняя, в свою очередь, обладает или нет свойством предикативности в зависимости от способа определения.

С точки зрения таких представлений о предикативности Пуанкаре рассматривает далее некоторые определения и способы рассуждений в математике: определение кардинальных чисел через взаимно-однозначное соответствие между элементами множеств, требуя предикативности закона соответствия (с. 58, 59); доказательства равномощности множеств целых чисел и четных целых чисел, а также неравномощности множества натуральных чисел и континуума (с. 59); расселовский способ избавления от непредикативности путем построения теории типов (с. 60—62) и его аксиому сводимости (с. 62—64); аксиоматику Цермело теории множеств (с. 65—71). Как и ранее, он полагает, что парадоксы логики являются результатом непредикативности некоторых понятий, используемых в их формулировке (с. 70).

В следующей своей работе 1909 г. «Математика и логика» [7], посвященной описанию двух точек зрения на бесконечность, как на актуальную или потенциальную, Пуанкаре особенно отчетливо связывает проблему предикативных определений именно с этими точками зрения. Называя канторианцами сторонников

[34] Здесь и далее мы несколько модифицировали русский перевод работы Пуанкаре [6], сделав его ближе к французскому оригиналу и современному русскому языку.

актуальной бесконечности, а прагматиками — сторонников потенциальной бесконечности, Пуанкаре выразил эту зависимость так: «...но существует третий вид определений[35], который является началом нового недоразумения между прагматистами и канторианцами. Это все еще определения через постулат, но постулатом здесь является некоторая зависимость между определяемым предметом и *всеми* индивидами рода, к которому, по предположению, принадлежит определяемый предмет (или же которые мы предполагаем принадлежащими к вещам, которые могут быть определены только через определяемый предмет). Это происходит, когда мы устанавливаем следующие два постулата:

X (определяемый предмет) как-то связан со *всеми* индивидами рода G,

X входит в состав рода G;

или же три следующие постулата:

X как-то связан со *всеми* индивидами рода G,

Y как-то связан с X,

Y входит в состав G.

С точки зрения прагматистов подобное определение вовлекает в порочный круг. Нельзя определить X, не зная всех индивидов рода G и, следовательно, не зная X, которое является одним из этих индивидов. Канторианцы смотрят иначе; род G нам дан; следовательно, мы знаем *все* индивиды, и определение имеет целью только *выделить* из этих индивидов тот, который находится со всеми своими товарищами в указанной зависимости. Нет, отвечают их противники, знание вида и рода не дает вам знания всех его индивидов, оно дает вам только возможность построить их все или лучше построить столько, сколько вы пожелаете. Они будут существовать не ранее, чем вы их построите, т. е. после того, как они будут определены; X существует только после определения, которое имеет смысл лишь после того, как мы наперед знаем все индивиды из G, и в частности X. Не имеет никакого значения, прибавляют они, утверждение, что определять X через его зависимость с G не будет порочным кругом и что эта зависимость в итоге не является постулатом, который может служить для определения X; необходимо предварительно доказать, что этот постулат не заключает в себе противоречия, но этого обыкновенно не делают в определениях такого рода» (с. 82).

Более того, в конечном счете проблема предикативности оказывается у Пуанкаре связанной с основным вопросом философии об отношении мышления к бытию (с. 84—86), причем сам он явно склоняется к субъективному идеализму.

Остановимся еще на одной работе Пуанкаре 1909 г. «Размышления о двух предыдущих заметках» [8], на части, относя-

---

[35] К первому виду Пуанкаре относил определение через ближайший род и видовое отличие (с. 80), ко второму — определения через постулаты при условии доказательства существования определяемого объекта (с. 81).

щейся к непредикативным определениям. В общем подходе к рассматриваемому вопросу здесь у Пуанкаре нет ничего существенно нового. Однако эта работа интересна, по крайней мере в двух отношениях, если ограничиться проблемой непредикативности. Во-первых, в ней, по-видимому, впервые указано на непредикативность определения такого фундаментального понятия анализа и теории функций, как понятие грани множества; во-вторых, любопытен предложенный Пуанкаре обход этой непредикативности.

Пуанкаре берет (с. 199) традиционное доказательство существования корня алгебраического уравнения $F=0$, общая схема которого такова. Так как значения $|F|$ всегда неотрицательны, то множество E этих значений ограничено снизу, а значит, имеет нижнюю грань e. Поскольку же функция непрерывна, то она в некоторой точке принимает значение, равное этой грани. Доказывается, что сама эта нижняя грань не может быть отличной от нуля, а следовательно, существует такая точка, для которой $|F|=0$, т. е. $F=0$ имеет, по крайней мере, один корень.

Приведя эту схему рассуждений, Пуанкаре продолжает: «В этом доказательстве говорится: 1) о множестве E значений $|F|$, 2) об одном из этих значений e, меньшем всех остальных значений из E, и 3) о соответствующем значении x. Определение e, в котором фигурирует множество E, является *непредикативным*, поскольку понятие множества E должно предшествовать понятию e, определение которого зависит от E, и одновременно должно следовать за понятием e, являющимся элементом множества E. Мы не можем, следовательно, отвергать применение непредикативных определений, не отвергая доказательства, принимаемого всеми математиками» (с. 199).

Он не желает, однако, отбрасывать удобный ход рассуждений, а предлагает модифицировать его следующим образом [36].

«Пусть x — независимое переменное, а y — значение x, действительная и мнимая части которого будут рациональными числами (для краткости я буду говорить, что y является рациональным значением x). Пусть E' — множество значений, которые может принимать $|F(y)|$. Пусть e — нижний предел или минимум различных значений множества E'.

Затем последовательно доказывается, что существует вообще нерациональное значение x — такое, что $|F(x)|=e$ и e не может быть отличным от нуля.

Порочный круг исчез, поскольку в определении e фигурирует только понятие множества E', а e вообще не принадлежит E'.

[36] Заметим, что для обозначения нижней грани множества Пуанкаре, следуя обычаю того времени, пользуется словами «нижний предел»; затем он говорит о нижнем пределе, или минимуме, что в данном случае законно, поскольку F непрерывна. Непонятно, почему Френкель и Бар-Хиллел [1, с 220, 221], указывая на соображения Пуанкаре, говорят о максимуме функции Конечно, для вопроса о непредикативности это несущественно, так как эти соображения одинаково применимы и к верхней грани, или максимуму, но вряд ли целесообразно было делать такую подмену.

Если мы с некоторым вниманием проверим подробности доказательства (впрочем, хорошо известного), общие линии которого мы напомнили, то увидим, что именно в этом состоит его подлинный смысл.

Вообще, если, например, мы рассматриваем множество E положительных действительных чисел, то можно доказать, что это множество имеет нижний предел e; этот нижний предел определяется *после* множества E, и порочного круга нет, поскольку e вообще не принадлежит E. В некоторых частных случаях может произойти, что e будет принадлежать E. В этих частных случаях уже нет порочного круга, поскольку e не принадлежит E *в силу его определения*, а значит, его нет и в доказательстве, производимом после одновременных определений E и e» (с. 199).

Мы, признаться, не поняли существа выхода из порочного круга, предложенного Пуанкаре, а также его описания Френкелем и Бар-Хиллелом [1, с. 220, 221]. Даже если забыть о том, что Пуанкаре отрицал понятие актуально бесконечного множества, а здесь он пользуется им как вполне законным понятием, можно заметить следующее.

Конечно, если значение x, для которого $|F(x)|=e$, является иррациональным, то это значение не принадлежит множеству E' по самому определению последнего, и порочного круга в определении нет.

Но, во-первых, Пуанкаре ведет речь о нижней грани e множества значений $|F(y)|$, нигде не формулируя определения этого понятия. Между тем понятие нижней грани *всякого* множества действительных чисел определяется как наибольшее из чисел, которые не превосходят ни одного из чисел этого множества [37]. В частности, если E' есть множество действительных чисел, образованное значениями $|F(x)|$ при рациональных x, то и его нижняя грань e подпадает под это определение, а значит, непредикативна в соответствии с рассуждением Пуанкаре. Он же в словах «пусть e — нижний предел или минимум значений множества E'» считает его допустимым. Так что, отвергая непредикативность в определении грани множества E, он сохраняет аналогичную непредикативность в определении грани множества E'.

Во-вторых, даже если допустить, что поскольку множество E' проще множества E (первое счетно, а второе нет), то с непредикативностью определения грани у E' расправиться легче, както согласиться с ней, все же остается один момент, уже отмеченный самим Пуанкаре. Действительно, если принять существование нижней грани e у E', то значение x, в котором $F(x)=e$, будет вообще иррациональным.. Но может случиться, что это x окажется рациональным, и тогда e принадлежит E'. Непонятно, из чего Пуанкаре заключает в последнем предложении, что «e не при-

---

[37] См., например, Валле-Пуссен [1, с. 12].

надлежит E в силу его определения», хотя в предыдущем предложении он говорил, что e принадлежит E.

Отметим, что последний абзац приведенной цитаты взял на вооружение Цермело [2, с. 193], чтобы отвергнуть упрек Пуанкаре в применении в доказательстве Цермело теоремы Кантора — Бернштейна непредикативного множества, о котором мы упоминали.

На этом мы закончим с вопросом о непредикативных определениях в трактовке Пуанкаре[38]. Как мы сказали, вопрос этот весьма сложен и его трудно осветить в правильной исторической перспективе в настоящее время.

§ 6. Отношение к парадоксам теории множеств

Парадоксы теории множеств начали сознательно формулироваться именно в рассматриваемый нами период. Первый из них, относящийся к множеству всех порядковых чисел, открыл около 1895 г. сам Кантор и сообщил о нем в письме Гильберту; через некоторое время его переоткрыл Бурали-Форти, опубликовав его содержание в 1897 г. В 1899 г. Кантор же открывает второй парадокс, связанный с мощностью множества всех множеств и письменно сообщает о нем Дедекинду. В 1902 г. Рассел открыл и в 1903 г. опубликовал свой парадокс множества всех множеств, не являющихся собственными элементами; его же независимо обнаруживают Фреге и Цермело. В 1905 г. публикуется письмо Ришара [1], содержащее парадокс, связанный с конечной определимостью[39], который, по существу, установил тогда же и Диксон[40]. На Международном конгрессе математиков в Гейдельберге (1904 г.) Гильберт поставил проблему разрешения этих антиномий как одну из первоочередных задач математиков.

Решение указанных и вновь появлявшихся парадоксов пытались найти как некоторые из названных выше ученых, так и многие другие (Пеано, Бернштейн, Шёнфлис, Журден и т. д.). Не остались в стороне и их французские коллеги. Конечно, как это видно из современного далека, их попытки не могли привести к успеху. Но соображения, высказанные при этом, представляют определенный исторический интерес.

Кажется, первым из больших математиков Франции свое отношение к парадоксам теории множеств высказал Адамар в уже упоминавшейся заметке [3]. Указав на парадокс Бурали-Форти, Адамар завершает эту заметку словами: «Значит, изучение трансфинитного приводит к некоторому числу противоречивых следствий. А почему бы и нет? Разве не появлялись парадоксальные заключения, когда начинали вводить иррациональные чис-

[38] Его работой, где он тоже рассматривал этот вопрос, помещенной в «Scientia», 1912, 12, мы не располагали.
[39] Вторично этот парадокс Ришар опубликовал в 1906 г. [2].
[40] Обо всех указанных парадоксах см., например, Клини [1, с. 40—43].

ла, числа отрицательные, числа мнимые? Быть может, мы находимся на одном из таких же поворотов науки, и следует предоставить будущему задачу выяснения этих неясностей, которые должны лишь заставить нас еще больше интересоваться понятиями, в связи с которыми они возникают» [3, с. 242].

В очередной заметке [4], включающей в себя письмо Ришара [1], а также упоминание о парадоксе Кантора множества всех множеств, Адамар вновь возвращается к проблеме парадоксов. Но прежде, чем говорить о ней, остановимся на парадоксе Ришара и предложенном им способе его решения.

Последний сформулировал свой парадокс следующим образом. Множество чисел, обозначенное им через E, он построил так. Выписываются все пары букв французского алфавита в алфавитном порядке; затем в том же порядке выписываются все тройки букв алфавита; затем все четверки и т. д., причем в записанных расположениях букв одна и та же буква может повторяться. Получается таблица расположений букв. Каково бы ни было целое число p, всякое расположение из двадцати шести букв французского алфавита по p букв в каждом окажется в указанной таблице. Поскольку определение всякого числа формулируется в словах, а слова образуются из букв, то некоторые из построенных расположений будут являться определениями чисел. Расположения, не являющиеся такими определениями, вычеркиваются из таблицы. Оставшиеся расположения букв будут в определенном порядке представлять последовательность чисел, определимых при помощи конечного числа слов, и их можно занумеровать в соответствии с местом, занимаемым в оставшейся таблице. Следовательно, такие числа образуют счетное множество E.

Теперь построим число a следующим образом. Берем в качестве целой части a значение 0; затем берем n-е число множества E, и если число p—n-я цифра десятичного разложения этого числа, не равная ни 8, ни 9, то полагаем, что n-я цифра у a равна $p+1$; если же p равно 8 или 9, то n-ю цифру у a полагаем равной 1. Построенное число a не принадлежит множеству E, поскольку оно отлично от каждого из чисел этого множества. Вместе с тем, беря в качестве определения числа a только что описанный способ его построения, мы вынуждены заключить, что оно должно принадлежать множеству E, ибо это определение содержит конечное число слов, а E включает в себя все числа, определимые при помощи конечного числа слов. Это и есть первоначальная форма парадокса Ришара.

Сам он предложил такое его решение. «Покажем, что это противоречие является лишь кажущимся. Возвратимся к нашим расположениям букв. Группа букв G — определение числа a — является одним из этих расположений; она, следовательно, содержится в моей таблице. Однако место, которое она занимает, не имеет смысла. Оно связано с множеством E, а последнее еще не определено. Значит, я должен буду вычеркнуть его. Группа G

имеет смысл лишь тогда, когда множество E является вполне определенным (est totalement défini), а это возможно лишь посредством бесконечного числа слов. Следовательно, противоречия нет» (Ришар, [1, с. 541]).

Если перевести это рассуждение на более поздний язык Пуанкаре, то можно сказать, что определение числа a непредикативно, поскольку a должно принадлежать E, а вместе с тем оно определяется через само множество E. Следовательно, Ришар в 1905 г., еще не располагая понятием непредикативности в смысле Пуанкаре[41], воспользовался ею в попытке разрешения указанного противоречия.

Статья Адамара «Принципы математики и проблема множеств» [4] является изложением и осторожной критикой программы Гильберта обоснования логики и арифметики, на чем мы не будем останавливаться. Но вместе с тем он говорит в ней и о парадоксах теории множеств. Включив в нее письмо Ришара [1], Адамар к ранее упоминавшемуся парадоксу Бурали-Форти присоединяет еще парадокс Кантора мощности множества всех множеств, о котором он узнал из сообщения Гильберта на Гейдельбергском конгрессе[42].

Адамар не считает полезным предложение Гильберта рассматривать понятие множества первичным по отношению к понятию элементов, образующих это множество, по крайней мере для разрешения парадоксов (с. 542). Приведенное соображение Ришара он полагает имеющим общее значение при рассмотрении парадоксов, но смысл его видит в том, что объявляет ришаровское множество E просто несуществующим, поскольку, «чтобы образовать множество из некоторых элементов, нужно еще, чтобы они существовали заранее» (с. 542). Аналогично он отказывает в существовании множеству всех порядковых чисел в парадоксе Бурали-Форти и не соглашается с его решением, только что предложенным Ф. Бернштейном, не приводя никаких доводов.

Лишь несколько подробнее, но совершенно в том же плане Адамар [6, с. 271] высказался по поводу парадоксов теории множеств в цитировавшейся выше переписке с Борелем, Бэром и Лебегом, а Борель [32, с. 273] просто согласился с мнением Адамара в связи с антиномией множества всех множеств. Бэр, кажется, вообще не высказывал своего мнения относительно парадоксов теории множеств; Лебег в рассматриваемый промежуток времени высказался о них, по-видимому, только один раз [28, с. 211, 212] в том смысле, что понятия, при помощи которых строятся парадоксы, плохо определены[43].

---

[41] Напомним, что Пуанкаре придал непредикативности этот смысл в 1906 г., опираясь как раз на приведенное соображение Ришара.

[42] Адамар присутствовал на этом конгрессе; к тому же перевод доклада Гильберта на французский язык появился в мартовском номере «L'Enseignement mathématique», на который ссылается Адамар

[43] К некоторым другим соображениям Адамара и Бореля мы возвратимся несколько далее.

Основное о взглядах Пуанкаре на парадоксы теории множеств и математической логики мы сказали в предыдущем параграфе: он отказал в праве на существование в математике понятию актуальной бесконечности, а все рассматриваемые парадоксы связаны с ним, поэтому они для него просто не должны существовать. Обсуждение же им этих парадоксов связано, главным образом, с критикой сторонников актуальной бесконечности. Обратимся к этому несколько подробнее.

В 1905 г. Пуанкаре [4], выступив против математической логики вообще, в частности указал (с. 11—14) на парадокс Бурали-Форти как на пример, подтверждающий бессильность ее. Он привел здесь мнение Адамара, что рассуждение Бурали-Форти небезупречно и что тот не имел права говорить о множестве всех порядковых чисел. Пуанкаре согласился с этим мнением (с. 13, 14).

Сопоставляя затем точки зрения Рассела и Гильберта, Пуанкаре [4, с. 30—32] выражает несогласие с Расселом в том, что переменное x в пропозициональной функции $\varphi(x)$ у последнего является «абсолютно неопределенным», что вместо x можно подставлять «не только уже известные объекты, но все, что угодно» (с. 31). Напротив, ему больше импонирует точка зрения Гильберта, который в своем гейдельбергском докладе высказался за то, чтобы — если воспользоваться языком Рассела — в качестве значений x пропозициональной функции допускать только объекты или комбинации объектов, которые или приняты за основные, исходные, неопределяемые, либо полностью определены[44]. И источник парадокса Бурали-Форти он видит как раз в том, что его автор не выполнил требования Гильберта относительно предварительной определенности элементов рассматриваемого им множества всех порядковых чисел.

В ответ на это Кутюра заметил [2, с. 82—85], что обвинение математической логики в бессилии из-за того, что она не помогла разрешить парадоксы, несправедливо, ибо «логисты не обязаны решать трудности, которые приводят в тупик всех математиков» (с. 85) и что, напротив, он видит ее достоинство в том, что она помогла обнаружить сам этот парадокс[45]. Для него парадокс Бурали-Форти представляется чисто логической трудностью, «коренящейся в принципе логики классов» (с. 83), и если разные ученые приходят к противоречащим заключениям, то это происходит не потому, что один из них ошибается, как полагал Пуанкаре, а потому, что они столкнулись с антиномией в самих этих

[44] Гильберт говорит не о значениях переменной у пропозициональной функции, а о встречающихся в аксиомах рассматриваемой аксиоматической системы понятиях «произвольный», «каждый», «все» [1, с 333] Пуанкаре считает это одним и тем же

[45] Мемуар Бурали-Форти, в котором устанавливалась названная антиномия, написан на символическом языке Пеано. Как мы говорили в начале параграфа, эту антиномию открыл и Кантор, не пользуясь языком символической логики

принципах (с. 84, сноска). Разрешение этой антиномии Кутюра, присоединяясь к мнению Бурали-Форти и Рассела, видит в ограничении понятия класса или даже вообще в отказе от него (с. 84).

Пуанкаре в связи с этим утверждает [4, с. 118—119], что поскольку логисты претендуют на то, чтобы дать безупречные правила умозаключений, то они не имеют права ошибаться. И если они приходят к противоречивым заключениям, то их аппарат негоден, он требует коренной перестройки: «Логистика существует, у нее есть свой свод условных законов, который выдержал уже четыре издания [46], или, правильнее, этот свод и есть сама логистика. Собирается ли г. Рассел показать, что, по крайней мере, одно из двух противоречивых рассуждений погрешает против логистического свода? Вовсе нет, он собирается изменить законы свода и даже вовсе упразднить некоторые из них. Если он преуспеет, я воздам должное интуиции г. Рассела, но не пеанийской логистике, которую он разрушает» (с. 119).

Все же в то, что удастся перестроить теорию множеств и математическую логику так, что в них не появлялись бы антиномии, Пуанкаре не верит (с. 134). Выход из теоретико-множественных и логических противоречий, по его мнению, заключается в отказе от использования непредикативных рассуждений [4, с. 134, 135; 6, с. 74].

В 1909 г. с критикой рассуждений Ришара в [2] при установлении им парадокса множества всех конечно определимых чисел выступил Шёнфлис. Он не согласился с тем, что при помощи конечного числа слов можно определять только счетные множества, а полагал, что при помощи одного и того же определения можно выделить бесконечное множество, даже мощности континуум, математических объектов, и в качестве примера привел слова «построим функцию $f(x)$ на интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$ так, что эта функция для каждого значения x имеет одно и то же значение». По его мнению, эти слова образуют вполне определенное предписание и определяют множество функций $f(x)=c$ мощности континуум, если придавать c всевозможные действительные значения [47].

Эти соображения Шёнфлиса вызвали возражения Пуанкаре [8, 9]. Для него слово «определение» характеризует то, что «оно позволяет отличить определяемый объект от всех других объектов; если оно применяется к бесконечному множеству объектов, то оно не дает возможности отличить их друг от друга; оно не определяет ни одного из них; оно уже не является определением» [8, с. 195]. В том же примере Шёнфлиса недостаточно положить $f(x)=c$, чтобы функцию считать определенной. Нужно еще определить саму константу c, и если только последняя определена

[46] Пуанкаре имеет здесь в виду четыре издания книги Пеано «Formulario matematica», пятое издание вышло в 1905—1906 гг.

[47] На других соображениях Шёнфлиса мы не останавливаемся.

при помощи конечного числа слов, то становится определенной и функция. Пуанкаре считает, что «множество, каждый элемент которого не может быть определен конечным числом слов, есть чистое ничто (est pur neant); о нем нечего сказать, нечего помыслить» [8, с. 196]. Рассуждения Ришара он считает правильными и делает вывод, что множеств, отличных от счетных, не существует.

Вместе с тем Пуанкаре согласен и со способом рассуждений, содержащимся в диагональном методе Кантора. Но при помощи последнего доказывается, что континуум несчетен, поэтому перед Пуанкаре возникает проблема истолкования утверждения о несчетности континуума. Его он понимает в том смысле, что какова бы ни была формула, задаваемая конечным числом слов, всегда при помощи конечного же числа слов можно определить действительное число, которое этой формулой не ставится в соответствие никакому целому числу (с. 196). Последующие слова Пуанкаре любопытны: «Как это согласуется с доказательством г. Ришара, показывающим нам, что всякое множество, элементы которого определяются конечным числом слов, является счетным? Рассмотрим формулу F, определяющую некоторое отношение между различными целыми числами и различными действительными числами (которые тем самым оказываются определенными конечным числом слов); множество E этих действительных чисел будет счетным. Мы можем затем определить другие действительные числа, не принадлежащие E; эти определения содержат конечное число слов, но среди этих слов будет фигурировать имя множества E. Пусть E' — множество этих новых действительных чисел. Доказательство Кантора учит нас, что множество E' не пусто, а доказательство Ришара учит, что множество $E+E'$ счетно. Следовательно, нельзя найти формулу F', определяющую отношение между различными целыми числами и различными числами множества $E+E'$.

Но тогда можно будет вновь найти другие числа, не принадлежащие $E+E'$, которым можно дать определение, содержащее лишь конечное число слов, среди которых содержатся имена множеств E и E'. Здесь множество E'' этих чисел также не будет пустым, но будет счетным и т. д.» (с. 197).

В том факте, что каждое из этих множеств счетно, но что они появляются все вновь и вновь, в силу рассуждения Кантора, Пуанкаре видит сущность парадокса Ришара и соглашается с его решением, предложенным последним.

Интерес приведенных слов заключается в том, что Пуанкаре, ранее отрицавший, как мы говорили, понятие актуального бесконечного множества, рассуждает здесь так, как будто множества E, E', E'' и т. д. существуют именно как бесконечные актуальные множества. И если еще утверждение об их счетности можно в какой-то мере истолковать как просто наличие взаимно-однозначного соответствия между двумя потенциально становящимися последовательностями, то говорить о сумме двух таких последовательностей, которые в общем случае не обязательно являются числовыми, затруднительно, с его точки зрения, по крайней мере до тех пор, пока не будет построена какая-то новая арифметика, даже намека на которую у Пуанкаре нет.

Более того, признавая диагональ Кантора, он еще определеннее становится, если можно так выразиться, актуалистом, ибо если множество E бесконечно, то строить элемент, не принадлежащий E, можно лишь тогда, когда это E мыслится в каком-то смысле завершенным, так как без такой завершенности нельзя решить, принадлежит ли рассматриваемый элемент множеству E или нет. Так что Пуанкаре, критикуя Шёнфлиса за актуализацию бесконечности, сам фактически опирался на такую актуализацию.

Борель был более последовательным в этом отношении, хотя тоже далеко не всегда. Отрицая несчетные множества, он сначала сомневался в правильности диагонального метода, а затем, по сути дела, отказался от применений его. К парадоксам теории множеств, в частности к парадоксу Ришара, он в 1908 г. [34] подошел следующим образом.

Помимо требования к определению быть формулируемым при помощи конечного числа слов, он добавил требование, чтобы определяемый объект характеризовался им «без возможной двусмысленности (sans ambiguïté possible). Последние слова означали для него, что «любые два математика, каждому из которых предложено это определение [некоторой десятичной дроби.— *Ф. М.*], построили бы одно и то же число, т. е. нашли бы одно и то же значение каждой десятичной цифры» [34, с. 444]. И рассматривая парадокс Ришара, в котором по заданной счетной последовательности конечно определимых чисел

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots \tag{1}$$

при помощи диагонального метода строится число β, не входящее в эту последовательность, он отказывает в существовании этому числу β, поскольку для его построения требуется предварительное знание чисел последовательности (1), множество которых бесконечно. Слова, описывающие число β, не имеют вследствие этого однозначного смысла «ввиду сомнительности того, принадлежит ли β последовательности чисел α или нет», а значит, «указанное противоречие не существует», так как β не удовлетворяет выставленному Борелем второму требованию, предъявленному им к математическим определениям. В этом он и видит решение парадокса Ришара (с. 445).

Из такого подхода Бореля сразу же вытекает, что не всякое счетное множество удовлетворяет борелевским требованиям—таким, например, является ришаровское множество E. Естественно, возникает вопрос: а, быть может, таковыми являются вообще все актуализированные счетные множества? Положительное решение этого вопроса было бы для Бореля слишком радикальным, так как зачеркивало бы очень многое из его предшествующих работ, и он торопится дать отрицательный ответ на него [34, с. 445].

Первоначально он приводит пример множества действительных алгебраических чисел, т. е. корней алгебраических уравнений с целочисленными коэффициентами, как счетного множества, удовлетворяющего обоим его требованиям [48], а затем вводит разделение счетных множеств на эффективно перечислимые и не являющиеся таковыми. Поскольку такое разделение играло существенную роль в последующих работах Бореля, да и не только его, а также потому, что в смешении этих двух видов множеств он видел источник парадоксов, мы позволим себе привести длинную выписку из его статьи, характеризующую, кстати, и некоторые его общие взгляды.

«Можно заключить, что эффективное построение множества E чисел, которые можно определить при помощи конечного числа слов, не реализуемо. Это не должно препятствовать нам утверждать, что множество это счетно в классическом смысле слова, так как оно принадлежит счетному множеству комбинаций, которые можно построить при помощи конечного числа букв и знаков препинания.

Но множество E не является эффективно перечислимым, т. е. нельзя указать при помощи конечного числа слов достоверный метод, позволяющий без двусмысленности приписать определенный ранг каждому из его элементов. Действительно, для некоторых элементов возникают специфические трудности, бо́льшая часть которых, а возможно и все, может быть легко обойдена при помощи соглашений; но множество необходимых соглашений, чтобы быть полностью сформулированным, потребовало бы бесконечного числа слов, так как эти трудности появляются, очевидно, бесконечное число раз в бесконечном множестве различных форм. Таков ответ, который следует дать на парадокс г. Ришара и на все аналогичные парадоксы: нельзя эффективно обсуждать проблему, все члены которой не определены явно, так как в случаях, когда явное определение потребовало бы бесконечного числа слов, оно находилось бы за пределами области математики. Предыдущие соображения направлены не меньше, как на отрицание множеств, не являющихся счетными... Из предыдущего, как мне кажется, ясно вытекает, что множество точек прямой, которые могут быть эффективно определены индивидуально, является *счетным* множеством, но *не эффективно перечислимым*.

---

[48] Рассуждения Бореля [34, с. 445], которыми он стремится показать это, представляются нам не очень убедительными: называя число $n+|a_0|+$ $+|a_1|+\ldots+|a_n|$ рангом уравнения $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots a_{n-1}x+a_n=0$, Борель считает очевидным существование алгебраического числа заданного ранга и из бесконечного множества уравнений, которым удовлетворяет рассматриваемое алгебраическое число, выбирает уравнение наинизшего ранга; ни то, ни другое он не рассматривает со своей точки зрения.

Нельзя указать способа зафиксировать на прямой одну вполне определенную точку, не принадлежащую этому множеству. Предположение, что существуют такие точки, является истинным или ложным в зависимости от того, примем мы или нет возможность счетного множества произвольных последовательных выборов; но это — метафизический вопрос в том смысле, что положительный или отрицательный ответ на него не будет иметь никогда никакого влияния на развитие науки: все точки, которые когда-либо потребуются в рассуждениях, будут определены конечным числом слов, они образуют *практический континуум* и их используют математики.

Различие между счетными и несчетными множествами мне кажется не имеющим практического значения, так как все множества, которые можно будет когда-либо рассматривать, являются счетными в *классическом смысле этого термина*, поскольку они являются правильными частями счетных множеств; но не все они эффективно перечислимы; для некоторых из них приписывание определенного ранга каждому из этих элементов потребовало бы бесконечного множества выборов, а следовательно, не могло бы быть эффективно реализованным при помощи ограниченного числа слов. Следовательно, с практической точки зрения нужно различать два класса множеств: эффективно перечислимые множества и не являющиеся таковыми. Правильная часть эффективно перечислимого множества не обязательно эффективно перечислима; рассмотренное выше множество E дает пример этого. Именно в этом состоит существенное различие между понятием эффективно перечислимого множества и классическим понятием счетного множества. Новое понятие мне кажется имеющим большое преимущество быть менее метафизичным, т. е. опирающимся на наблюдаемые реальности.

Все так называемые парадоксы теории множеств проистекают из того, что считается очевидным следующее предложение: всякое счетное множество является эффективно перечислимым. Однако из предыдущего ясно вытекает, что это предложение является неверным» [34, с. 446—448].

На этом мы заканчиваем изложение взглядов французских математиков на парадоксы теории множеств. И хотя Адамар оказался не совсем прав, когда в 1908 г. писал [10], что эра открытой полемики о теории множеств и ее парадоксах близка к завершению (эта полемика продолжается и поныне), тем не менее он был прав в том смысле, что сама эта полемика после реконструкции теории множеств Цермело, Расселом, Брауэром и многими другими приняла во многом иной вид. Конечно, по поводу парадоксов теории множеств продолжали высказывать свои соображения и французские математики, особенно Борель [49], но эти их соображения были, кажется, менее действенными, чем в рассмотренный нами период.

[49] Ограничимся указанием его книги [52].

§ 7. О связи общих установок с конкретными математическими результатами

Мы не предполагаем говорить здесь о влиянии общефилософских идей на математическое творчество французских ученых. Вопрос о мировоззрениях Адамара, Пуанкаре, Бореля, Лебега и т. д. достаточно самостоятелен, чтобы касаться его мимоходом. Заметим лишь, что в широком философском плане он не представляется нам особенно интересным, поскольку, как нам кажется, к названным французским ученым в полной мере применима знаменитая характеристика Энгельса: «Естествоиспытатели воображают, что они освобождаются от философии, когда игнорируют или бранят ее. Но так как они без мышления не могут двинуться ни на шаг, для мышления же необходимы логические категории, а эти категории они некритически заимствуют либо из обыденного общего сознания так называемых образованных людей, над которым господствуют остатки давно умерших философских систем, либо из крох прослушанных в обязательном порядке университетских курсов по философии (которые представляют собою не только отрывочные взгляды, но и мешанину из воззрений людей, принадлежащих к самым различным и по большей части к самым скверным школам), либо из некритического и несистематического чтения всякого рода философских произведений,— то в итоге они оказываются в подчинении у философии, но, к сожалению, по большей части самой скверной, и те, кто больше всех ругает философию, являются рабами как раз наихудших вульгаризованных остатков наихудших философских учений [1, с. 166, 167].

Вместе с тем в более специальных вопросах соображения названных математиков интересны и ценны, что мы и попытались показать в предшествующих параграфах настоящей главы. Здесь же мы намерены только проиллюстрировать на отдельных примерах воздействия описанных общематематических взглядов на конкретную деятельность в области математики.

Ряд подобных примеров был уже приведен. Мы упоминали (с. 114), что Пуанкаре, первоначально встретивший канторовскую теорию множеств доброжелательно и даже плодотворно применивший ее, под воздействием в значительной мере факта обнаружения в ней парадоксов перешел на позицию отрицания теории множеств и математической логики. Видимо, об этом можно лишь пожалеть, хотя переход его на эту позицию был в некотором смысле естественным: высшим критерием существования математической теории являлось для него ее непротиворечивость; раз в теории встретились противоречия, то он отказал ей в праве на существование. В период борьбы Пуанкаре с теорией множеств закладывался фундамент функционального анализа, и он больше, чем многие другие, мог бы способствовать созданию этой величественной математической дисциплины, требовавшей в то время безусловного признания теории множеств чуть ли не во всем ее тогдашнем объеме; отказ от теории множеств преградил ему путь к функциональному анализу. Напротив, позиция Адамара, несомненно, способствовала тому, что он стал одним из основоположников функционального анализа, а о том, что его отправным пунктом служила именно теория множеств, достаточно красноречиво свидетельствует его доклад «О некоторых возможных приложениях теории множеств» [2] на Первом конгрессе математиков в 1897 г. Та же позиция, воспринятая его учеником Фреше, помогла последнему занять соответствующее место в создании функционального анализа, рассматривавшегося им как прямое обобщение теории функций действительного переменного именно в той теоретико-множественной форме, которую ей придали французские ученые.

Быть может, не меньшее сожаление вызывает отрицательное отношение Пуанкаре к теории множеств в связи с созданием теоретико-множественной топологии. Он считается основоположником топологии вообще [50]; но, располагая, казалось бы, всеми необходимыми данными, он не связал ее с теорией множеств. Отчасти это сделал, как мы говорили, Бэр, но и ему, видимо, в какой-то мере мешала его позиция, и сделанное им скорее следует рассматривать как созданное вопреки его общим взглядам.

Но даже если оставить в стороне столь общие предположительные ситуации, многие более конкретные примеры тоже интересны.

Мы говорили о позиции Бореля в отношении трансфинитных чисел (с. 90—94) и привели там его высказывание об отказе изучать функции, порядок роста которых выражается большими трансфинитными числами; этот отказ был в значительной мере вызван его недоверием к трансфинитным числам вообще. Не стал Борель рассматривать и вопрос о существовании функций в классах Бэра с трансфинитными индексами, поскольку не мог «эффективно определить» такие функции; напротив, Лебег доказал существование функций для всех классов Бэра, ибо для него бесконечность мощности континуум была почти столь же законна, как и счетная. Общая направленность на отрицание трансфинитных чисел руководила Борелем и при доказательстве частного случая теоремы Бэра (см. с. 93,94). Установка Бэра на то, что законными функциями анализа являются только функции, получаемые из некоторых простых функций при помощи хотя и достаточно общего, но все же, как оказалось впоследствии, ограниченного запаса аналитических операций, наверно, ответственна за то, что в своих математических исследованиях он не выходил за пределы класса B-функций, хотя в это время и были введены более общие классы. Интересна эволюция подходов Бореля к понятию меры в связи с изменением его взглядов на понятие бесконечности. Первоначально Борель [14, с. 48] поступал так:

1) всякому интервалу приписывалась мера, равная его длине;

---

[50] См. Александров [1].

2) если каким-либо образом меры двух множеств E_1 и E_2 определены и $E_1 \subset E_2$, то мера $E_2 - E_1$ равна разности мер множеств E_2 и E_1;

3) если меры счетной последовательности попарно непересекающихся множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ определены, то мера этих множеств равна сумме их мер.

Тем самым, отправляясь от интервалов, можно получить все B-множества: к ним принадлежат всевозможные интервалы, а также множества, не являющиеся интервалами, но получаемые из них при помощи операций 2) и 3). Тогда Борель еще не задавался вопросом о том, что означают слова «всякий интервал» и «все B-множества». Однако после того, как в результате работ Бэра и Лебега выяснилось, что для изучения B-множеств недостаточно только счетных процессов, и особенно после того, как сам Борель пришел к мысли о необходимости ограничения общего понятия счетного множества, он посчитал нужным изменить свой подход к понятию меры. В 1912 г. он [43] поступил так [51].

Отправляется он уже не от произвольных интервалов, а от интервалов, абсциссы концов которых являются вычислимыми числами в смысле, указанном ранее (с. 100), и меру по правилу 1) приписывает только таким интервалам. Если некоторое множество состоит из конечного числа или счетного множества попарно непересекающихся интервалов с вычислимыми концами, то этому множеству приписывается мера, равная сумме мер составляющих его интервалов. Если два множества, меры которых определены, таковы, что все точки второго множества принадлежат первому множеству, то разность этих двух множеств имеет мерой разность их мер. Кроме ограничения на вычислимость концов интервалов, пока все обстоит, как и ранее. Но затем Борель ограничивает в некотором смысле и сам класс множеств, получаемых таким способом.

«Назовем открытым телом множеств бесконечное множество множеств A, обладающее следующими свойствами:

1. Всякое множество из A получается из других множеств этого A при помощи основных операций (сложения счетного множества множеств из A без общих точек; разности двух множеств из A, одно из которых содержит другое); таким образом, можно шаг за шагом свести каждое множество из A к тому, что оно определяется через элементарные множества (интервалы);

2. Каково бы ни было положительное число ε, всякое множество из A можно рассматривать как образованное из основной части (конечного числа интервалов) с точностью до положительных или отрицательных множеств, которые можно заключить в интервалы с общей длиной, не превосходящей ε.

3. Каждому множеству из A можно поставить в соответствие число, называемое его мерой, и это число получается из мер

[51] Далее мы цитируем по варианту этой работы, напечатанному в 1914 г. [48].

интервалов при помощи тех же конструктивных операций, которыми это множество получается из интервалов» (стр. 235).

Это тело множеств Борель называет открытым потому, что присоединение к нему разностей двух множеств, содержащихся в нем, или счетной суммы попарно непересекающихся множеств тела вновь приводит к телу множеств, обладающему теми же свойствами. Поскольку он теперь не признает существования всех трансфинитных чисел второго числового класса, то для него все такие тела не могут рассматриваться как завершенные, как замкнутые: «Понятие такого замкнутого тела, хотя оно непротиворечиво само по себе, мне не кажется настоящим математическим понятием, поскольку построение такого тела нельзя описать конечным числом слов. С другой стороны, мы не будем никогда иметь потребности обращаться в приложениях к чему-либо, кроме открытых тел, которые мы определили. Для математиков, допускающих существование всех трансфинитных чисел второго класса, те же соображения позволяют путем некоторого трансфинитного процесса получить замкнутое тело, обладающее теми же свойствами, что и открытое» (с. 236, сноска).

Аналогичную эволюцию Борель совершил и в отношении частного понятия своей теории меры — понятия множества меры нуль; к этому мы возвратимся несколько далее в другой связи.

Приведенные факты односторонни в том отношении, что в общем-то они характеризуют отрицательное воздействие общих установок на развитие математики. Но было воздействие и положительное. Прежде всего, сам факт острой полемики, критики обиходных представлений и рассуждений в огромной степени ответствен за тот необъятный цикл исследований по основаниям математики, который берет свое начало во многом из описанных выше столкновений мнений французских ученых и продолжается до наших дней. Эти исследования имели не только методологический характер. Они привели ко многим как общим математическим результатам — построению различных аксиоматических систем теории множеств, бурному развитию математической логики; разработке разнообразных конструктивных направлений в математике и т. п., — так и к многочисленным более или менее конкретным фактам.

Из последних мы уже отмечали (с. 57) построение Бэром арифметического примера функции третьего класса, идею Бореля об исключении трансфинитных чисел из математических рассуждений (с. 94) и т. д. Число подобных примеров можно было бы увеличить, но вряд ли в этом есть необходимость.

В общем же можно высказать лишь ту общеизвестную истину, что методологические установки ученых, несомненно, влияют не только на общие направления их исследований, но и на получение ими конкретных научных результатов [52].

---

[52] Впрочем, это не для всех очевидно; см., например, книгу Винтера [1].

Вместе с тем нельзя и переоценивать влияния общих установок на получение конкретных математических результатов. Логика развития самой математики часто оказывалась сильнее предубеждений, связанных с общеметодологическими взглядами, и математики нередко действуют вопреки своим принципам, по большей части, кстати, и не формулируемым явно. В заключение настоящего параграфа мы проиллюстрируем это несколькими примерами.

Видимо, наиболее показательным в этом отношении является пример Бэра. Если стать на ту точку зрения, которую он высказал в письме 1905 г. [12], то нужно или перечеркнуть все сделанное им в математике, или, по крайней мере, переделать заново с самого начала. Действительно, он, по его словам, пытается быть более радикальным, чем Борель, и не согласен считать законным даже понятие счетного множества, рассматриваемого как актуально бесконечное; для него все должно сводиться к конечному. Но свою теорему о функциях первого класса он доказывал, опираясь на совокупность всех трансфинитов второго числового класса, рассматривая ее именно как завершенную совокупность, как несчетное множество; введенное им множество B-функций он представлял себе как актуальное множество мощности континуум и даже привлекал множество всех действительных функций, имеющее еще бóльшую мощность, чтобы охарактеризовать место B-функций в системе всех функций.

Возможное возражение, что указанные взгляды он высказал в 1905 г., а приведенные результаты (количество которых можно увеличить) получил ранее, снимается тем, что в том же 1905 г. [10], а еще более в 1909 г. [17] он повторил почти все свои формулировки и методы рассуждений, притом в [17] в более общей ситуации. Можно даже сказать, что элементы актуализации в смысле Кантора в более поздних работах Бэра усилились. Последнее видно хотя бы на примере отмечавшегося ранее (с. 95, 96) изменения подхода к трансфинитным числам: если ранее они были для него просто символами последовательных производных заданного множества (рассматриваемых, кстати, именно как актуально бесконечные и в общем случае несчетные), то теперь они стали для него порядковыми типами вполне упорядоченных множеств.

Актуально бесконечные множества различных мощностей, трансфинитные числа, трансфинитная индукция и другие элементы теории множеств настолько существенны в математическом творчестве Бэра, что отказ от них потребовал бы, по меньшей мере, создания нового математического языка, попыток для построения которого Бэр даже не делал, если судить по его опубликованным работам.

Более последовательным в этом смысле был Борель. Эволюция его взглядов проходила, как мы видели, в направлении постепенного ограничения объема актуализируемых множеств:

сначала для него были допустимыми не только произвольные счетные, но и несчетные множества; затем он начал заявлять о законности только счетных множеств и счетных процессов; наконец, он пришел к понятию перечислимого множества. Во втором десятилетии XX в. он подготовил ряд работ, в которых попытался осуществить программу перестройки ряда теоретико-функциональных результатов в соответствии со своими последними взглядами, например в теории меры и интегрирования. В общем можно, по-видимому, сказать, что его усилия оказались напрасными, а полученные им результаты были малоинтересны, по крайней мере для последующего потока изысканий по теории функций. Но не это интересует нас. Мы хотим проиллюстрировать здесь лишь то соображение, что даже при конкретном осуществлении своей программы Борель, вопреки своим общим установкам, был вынужден прибегать к противоречащим им соображениям. В качестве примера мы рассмотрим его работу 1913 г. «О множествах меры нуль» [46].

В большинстве проблем метрической теории функций множество меры нуль выполняет роль некоего нерасчлененного целого, которым можно пренебречь, а потому оно неинтересно для изучения. Однако само по себе это понятие очень важно в теории функций и играет в ней фундаментальную роль: достаточно вспомнить, что множествами меры нуль являются такие обиходные множества, как множества рациональных и алгебраических чисел или множества единственности в теории тригонометрических рядов. Так что проблема изучения множеств меры нуль представляет немаловажный математический интерес.

Общее понятие множества меры нуль как точечного множества, все точки которого можно заключить в конечное или счетное множество интервалов со сколь угодно малой общей длиной, площадью или объемом, Борель ввел в 1898 г. В этом определении заранее ничего не предполагается о мощности множества; фактически оно может быть конечным, счетным в самом общем смысле этого слова, даже несчетным. Мало в нем ограничивается и характер покрытия множества интервалами: множество этих интервалов может быть любым счетным множеством, лишь бы их суммарная протяженность была меньше любого наперед заданного положительного числа.

Уже в 1908 г. он, как мы говорили (с. 130), пришел к убеждению, что законными в математике являются только эффективно перечислимые (не более, чем счетные) множества. Казалось бы, что теперь ему остается отвергнуть свое прежнее понятие множества меры нуль, перестроив его так, чтобы, во-первых, оно относилось только к эффективно перечислимым множествам, а, во-вторых, чтобы множества интервалов, заключающих точки множества, тоже были эффективно перечислимыми. В работе [46] он и наметил некую перестройку, но далеко не столь радикальную.

Отправляется Борель от первоначального, так сказать классического, определения понятия множества меры нуль. Затем выбирает перечислимое точечное множество, точки которого называет фундаментальными, и с его помощью строит понятие регулярного множества, заботясь о том, чтобы точки этого множества были покрыты некоторым множеством квадратов [53], которые можно пронумеровать вполне определенным образом и общая площадь которых сколь угодно мала. В соответствии с исходным определением построенное регулярное множество оказывается имеющим нулевую меру, что Борель мимоходом и отмечает (с. 2). Затем при помощи довольно нудного рассуждения (с. 2—4) доказывается, что всякое множество меры нуль в классическом смысле содержится в некотором регулярном множестве. Тем самым регулярное множество выступает в некотором смысле эрзацем обычного множества меры нуль.

Вообще-то, если быть до конца последовательным, нужно было совсем забыть о первоначальном определении, так как в нем участвуют произвольные счетные и несчетные множества. Но Борель, как мы говорили (с. 109), считал, что подобные соображения не очень опасны и могут рассматриваться как удобные эвристические приемы. Поэтому некоторую непоследовательность, допускаемую здесь Борелем, можно оправдать желанием сохранить прежние достижения, лишь переформулировав их на ином математическом языке. Впрочем, сохранение старых представлений все же сыграло с Борелем неприятную шутку. Доказав, что для произвольного множества A меры нуль существует регулярное множество E, содержащее его, он замечает, что оно не единственно и не обязательно является самым простым, а затем пишет любопытную фразу: «Тогда без противоречия можно рассмотреть *множество всех* [выделено нами.— *Ф. М.*] регулярных множеств меры нуль, которые содержат A, и в этом множестве можно выбрать если не самое простое (которое может не существовать так же, как не существует наименьшего рационального числа, большего $\sqrt{2}$), то, по крайней мере, множество E, простота которого сколь угодно близка к простоте самого простого из возможных» (с. 5). Не говоря уже о том, что Борель никак не поясняет здесь, что он понимает под простотой регулярного множества и что это за «самое простое регулярное множество», сам факт указания на множество всех регулярных множеств, содержащих заданное множество A, не согласуется с общей целью Бореля: а вдруг это множество регулярных множеств окажется нерегулярным?

Если все же отбросить все это [54], то дальнейшее изложение вызывает еще больше недоумений. В последующей части работы

[53] Борель рассматривает случай плоских множеств; в детали его построений мы входить не будем.

[54] Можно было бы привести и другие более мелкие непоследовательности, на чем мы не будем останавливаться.

Борель занимается только регулярными множествами. Казалось бы, что поводов для обращения к произвольным счетным, а тем более несчетным множествам теперь у него не имеется. Регулярное множество полностью определяется фундаментальными точками, образующими перечислимое множество. Но как только он переходит к изучению фундаментальных точек, так сразу же привлекает общее понятие производного множества, замкнутого множества и даже теорему Кантора — Бендиксона о представлении замкнутого множества в виде суммы совершенного и не более, чем счетного, множеств; при этом он прямо заявляет: «По-настоящему интересная часть регулярного множества меры нуль — это та, которая связана с точками множества A', образующими совершенное множество» (с. 5). Если вспомнить, что непустое совершенное множество имеет мощность континуум, что теорема Кантора — Бендиксона доказывалась с помощью всех трансфинитных чисел второго класса, и принять во внимание, что Борель в [46] не сделал даже попытки перевести все это на свой язык, то от последующего содержания его работы мало что остается в смысле реализации его основного замысла — тем более что дальше (с. 8) он пользуется аксиомой произвольного выбора, правда, указывая на возможность ее ограничения в избранном им направлении, но не осуществив этого на деле.

Таким образом, даже в работе, специально посвященной перестройке частных математических теорий в соответствии с общими принципами, мы сталкиваемся с пренебрежением этими принципами, когда они вступают в противоречие с реальным математическим содержанием.

§ 8. Несколько заключительных замечаний

Читатель, конечно, обратил внимание на то, что, излагая взгляды французских математиков начала века на отдельные принципиальные вопросы математики, мы слишком много приводили длинных цитат из их трудов и очень мало уделяли внимания историческим оценкам их соображений. Это не случайный недосмотр автора, так как, по нашему мнению, время подобных оценок еще не настало.

Дело в том, что все рассмотренные в настоящей главе вопросы — проблема трансфинитных чисел и связанных с ними способов математических рассуждений, общее определение понятия функции, аксиома Цермело, парадоксы теории множеств и математической логики, роль общих взглядов в конкретных математических исследованиях и т. п.— еще далеки от сколько-нибудь определенного решения [55]. Здесь не место для оправдания этого утверждения, и мы лишь бегло проиллюстрируем его одним примером.

[55] В значительной мере это видно, например, из книги Френкеля и Бар-Хиллела [1].

Из всех названных вопросов наиболее продвинутое решение имеет, по-видимому, вопрос об аксиоме Цермело. После фундаментальных результатов Гёделя (совместимость этой аксиомы с другими аксиомами теории множеств, 1938 г.) и Коэна (независимость ее в аксиоматике Цермело — Френкеля, 1963 г.), развитых затем в работах других авторов, дело, казалось бы, стало ясным: подобно аксиоме параллельности в геометрии, аксиома Цермело не может быть ни опровергнута, ни доказана, и возникает проблема построения нецермеловских теорий множеств, в некоторых отношениях подобных неевклидовым геометриям; эту проблему так порой и формулируют.

Однако это, вероятно, было бы слишком простым решением. Аксиома выбора связана с более фундаментальными положениями математики, нежели аксиома параллельности: исследования по неевклидовым геометриям оставляли незатронутым ряд натуральных чисел, и построенный с его помощью геометрический континуум — тот фундамент, на котором зиждется почти все здание математики. Создание же нецермеловских теорий множеств, по меньшей мере, сильно поколебало бы этот фундамент; последствия такого потрясения совершенно непредвидимы и определенно затронули бы далеко не только математику.

Конечно, то радикальное решение, которое неоднократно предлагалось и предлагается отдельными учеными и которое состоит в отказе от самой теории множеств вообще, полностью снимало бы проблему аксиомы произвольного выбора, а потому не подлежит обсуждению в данном месте. Но даже если не принимать столь радикального решения, все же следует заметить, что результаты Гёделя и Коэна неполны в некотором отношении: и тот и другой результаты относятся к теории множеств, описываемой аксиоматикой Цермело — Френкеля. Однако, помимо аксиоматической системы Цермело — Френкеля, имеется еще несколько десятков аксиоматик теории множеств, взаимоотношения между которыми еще далеко не изучены. На некоторые из них, но не на все, результаты Гёделя и Коэна распространены; как с ними будет обстоять дело в еще не изученных аксиоматиках, пока не ясно.

Но ситуация еще сложнее. Любая из имеющихся аксиоматизированных теорий множеств не охватывает собой всего здания теории множеств, построенного на протяжении XIX—XX вв. и все достраиваемого до сегодняшних дней независимо от какой-либо аксиоматики. В приложениях к другим математическим дисциплинам применяются главным образом результаты и методы именно неаксиоматизированной теории множеств. Вопрос о создании аксиоматики, в рамках которой это здание получило бы законченный вид (укрепились бы все необходимые компоненты и отброшены лишние детали), весьма проблематичен [56], особен-

[56] Целесообразно привести здесь следующие слова Мостовского: «Нам требу-

но если учесть возможность поставить под сомнение сами принципы аксиоматического метода. Но даже если такая аксиоматика когда-либо и будет создана, то вопрос о месте и роли аксиомы выбора — или какого-либо подобного ей утверждения — в ней неизбежно возникнет в той или иной форме. Так что фундаментальные результаты Гёделя, Коэна, Вопёнки и других в некотором смысле не решают вопроса.

Проблема же, например, парадоксов теории множеств еще менее ясна. Именно поэтому мы ограничились описательным изложением, быть может, даже излишне кратким.

Обратим внимание еще на одну, более техническую, сторону рассмотренной выше полемики. Как писал в 1909 г. Пуанкаре, эта полемика «затянулась не потому, что без конца приводились новые аргументы, но потому, что все время вертелись в одном и том же круге; каждый повторял то, что он уже говорил, как будто не слыша, что ему говорил противник» [7, с. 76]. В ней не оправдалась старая поговорка, что истина рождается в споре. Здесь, скорее, дело обстояло так, что каждый ждал очередной возможности высказаться, выдвинуть новые аргументы в пользу своей точки зрения. И поэтому в настоящей главе было относительно мало таких слов, как «доказал», «установил», «обнаружил», «показал», «опроверг», а, напротив, преобладали слова «он считал», «по его мнению», «с его точки зрения», «он отверг» и т. д.

Даже когда речь шла о конкретном рассуждении, его заключительный результат нередко выступал не как следствие этого рассуждения, а фактически оказывался преобразованной этим рассуждением исходной позицией. Очень ярким в этом отношении примером является рассмотренный выше (с. 92) факт доказательства Борелем несчетности порядков роста непрерывных функций и доказательства Эвелленом и Z. счетности того же множества. С чисто технической точки зрения их рассуждения чуть ли не тождественны, решающим доводом в первом случае было признание актуальной бесконечности, а во втором — признание только потенциальной бесконечности. Другим подобным примером являются рассуждения Лебега в его «Вкладе в изучение соответствий г. Цермело» [28]. Он не согласен с рассуждениями Цермело. Но вместо того, чтобы показать, где тот ошибается, Лебег устанавливает, что допущение аксиомы произвольного выбора приводит к неизмеримым множествам, функциям, функционалам; последние для него неприемлемы, а значит неприемлема сама аксиома, а тем самым и основанное на ней рассуждение Цермело.

Аналогично обстояло дело не только с рассуждениями, опирающимися на трансфинитные числа или аксиому произволь-

ются новые аксиомы, чтобы привести в систему (to codify) интуитивную теорию множеств. Тревожным фактом является то, что мы не знаем, где искать их» [1, с. 114].

ного выбора, но и с таким классическим рассуждением, как доказательство при помощи метода полной математической индукции. Спор об этом методе был начат, кажется, статьей Пуанкаре 1894 г. «О природе математического рассуждения» [2] [57], продолжался очень долго, и в нем приняло участие большое число математиков и философов, в частности сам Пуанкаре много раз обращался к рассмотрению роли принципа индукции в математике. Здесь не место для описания этой полемики, и мы упомянули о ней лишь с целью еще раз проиллюстрировать общую ситуацию, когда, казалось бы, сугубо математические факты поднимались до уровня принципиальных установок, когда в полемике применялись не доводы математического порядка, а некоторая общая убежденность, когда, наконец, даже манера выражаться перестала быть математической. Так, например, Адамар [7, с. 161], описывая спор между Пуанкаре и Кутюра по поводу метода полной математической индукции, приходит к выводу, что вопрос о нем связан с общим понятием числа, полагает «весьма вероятным», что само понятие полной математической индукции неопределимо, делает экскурс в психологию, а затем выставляет требование дать определение слова «определение» [9, с. 907].

Аналогично обстояло дело и с выражениями «конечное определение» или «определение при помощи конечного числа слов», столь часто употреблявшимися в рассматриваемый период — и не только французскими авторами. Это видно, например, из критики Адамара [8] рассуждений Кёнига.

Далее, все рассмотренные в настоящей главе вопросы обсуждались в это время не только во Франции, что мы уже не раз отмечали. И сама постановка их, и методы их решения были зачастую тесно связаны с соответствующими подходами ученых других стран. Так, например, проблемы непредикативных определений и парадоксов теории множеств и математической логики в то же время активно исследовались Расселом. Мы лишь в малой степени учитывали это, так как не ставили перед собой цели воссоздания полной исторической картины. Это, естественно, накладывало соответствующий отпечаток на самый ход изложения и, видимо, привело ко многим довольно субъективным выборам приведенных выше высказываний.

---

[57] Русский перевод ее названия мы изменили по сравнению с имеющимся; французское название таково: «Sur la nature du raisonnement mathématique».

Глава четвертая

ИСТОРИЧЕСКОЕ МЕСТО ФРАНЦУЗСКОЙ ШКОЛЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И МНОЖЕСТВ

§ 1. Введение

Воздействие рассмотренных трудов французских ученых на дальнейшее развитие теории функций было огромным. Действительно, понятия измеримой функции, интегралов Лебега, Данжуа и Фреше, производной почти всюду, суммируемого в разных смыслах ряда, сходимости почти всюду, функции множества, B-функций и B-множеств и т. д. были и остаются основными объектами изучения в теории функций. Многие разработанные ими методы, вроде того же метода категорий, верно служат до сегодняшних дней. Более того, даже там, где, на первый взгляд, исследования по теории функций вышли за рамки, намеченные французскими математиками, часто несложно обнаружить их корни в трудах последних.

Приведем несколько примеров.

В представлении интеграла как предела некоторых сумм наибольший отход от традиционных взглядов, видимо, был совершен Бёркилем (1924 г.) и Колмогоровым (1930 г.), а затем и другими: вместо интегрирования функций точки началось изучение интегрирования функций множества. Но последнее понятие в его четкой форме восходит, как мы видели, к Лебегу.

Вышедшая в 1930 г. книга Лузина «Лекции об аналитических множествах и их применениях» почти полностью основана на идеях Бореля, Бэра и Лебега, и бóльшая часть ее объема представляет собой их дальнейшее развитие. Фамилии названных французов фигурируют там постоянно, выступая как символы понятий, идей, методов, соображений.

Начиная с 1938 г., Каратеодори в ряде работ, подытоженных в опубликованной посмертно книге «Мера и интеграл и их алгебраизация» (1956), разработал теорию меры и интеграла на основе идей булевой алгебры. Если, однако, вникнуть в его соображения, то они оказываются немногим более, как переводом на другой, более абстрактный язык лебеговских теорий меры и интеграла. Это касается не только основных понятий, но и многих методов, вплоть до второстепенных.

Этот перечень можно было бы продолжить. Так что говорить о воздействии трудов французов на развитие теории функций и множеств в XX столетии — это значит говорить об истории теории функций и множеств вообще. Мы, разумеется, не ставим такой цели.

Воздействие идей и методов французских ученых осуществлялось разными путями. Основным из них было, конечно, ознакомление с их опубликованными работами. Почти все перечисленные в списке литературы труды Бореля, Бэра, Лебега, Фреше, Данжуа, за исключением очень небольшого числа предварительных сообщений, долго служили или отправными пунктами исследований других авторов или источниками, на которые ссылались при привлечении в рассуждениях тех или иных результатов, методов, соображений и т. п. Особенно выделяются в этом отношении книга Лебега «Лекции по интегрированию и отысканию примитивных функций» [13] и диссертация Бэра «О функциях действительного переменного» [5].

Вторым путем была преподавательская деятельность. Мы уже говорили, что в своих лекциях, читавшихся в высших учебных заведениях Франции, эти ученые излагали самые последние свои и чужие достижения, порой еще не опубликованные. А эти лекции слушали не только молодые французы, но и многочисленные иностранные гости. Не располагая полными данными, приведу несколько примеров.

В 1920 г. за границу поехал Егоров; там он, в частности, слушал лекции Лебега в Коллеж де Франс, легшие в основу упомянутой книги [13]. В 1905—1906 гг. и в 1912—1914 гг. в Париже жил Лузин, где посещал, в числе прочих, лекции Бореля, участвовал в работе семинара, руководителем которого был Адамар, завязал личное знакомство с Пикаром, Адамаром, Борелем, Лебегом, Данжуа и другими французскими математиками. В 1905—1906 гг. в Париже находился и Голубев. Во Франции же завершали свое математическое образование румыны Василеску, Помпейю, Стоилов, венгр Рисс.

Видимо, определенную роль сыграли и международные математические конгрессы. Так, например, на Первом конгрессе (1897 г.) присутствовали Борель, Хаусдорф, Гобсон, Валле-Пуссен, Пеано, Вольтерра и другие; на втором (1900 г.) — Адамар, Борель, Бэр, Вольтерра, Мур и т. д.; на третьем (1904 г.) — Борель, Каратеодори, Хаусдорф, Цермело, Вольтерра и т. д.; на четвертом (1908 г.) — Адамар, Фреше, Пинкерле и др.— мы назвали фамилии лишь отдельных математиков, работавших в области теории функций,— и вряд ли между участниками конгресса не происходило обмена мнениями по интересующим их вопросам. Борель в отчете о цюрихском конгрессе особенно подчеркивал их пользу для развития математики [13, с. 783, 784].

Существовала и обширная научная переписка между французскими учеными и их иностранными коллегами. Конечно, научная корреспонденция в XX в. играет уже не столь большую роль в развитии науки, как в прошлых столетиях. Тем не менее воздействие переписки между Адамаром, Борелем, Бэром и Лебегом, своевременно опубликованной, было очень сильным. Неопубликованные письма оказывали влияние на одного человека, но порой важно и это. К сожалению, научная переписка названных ученых еще не опубликована в ее большей части.

Но и такие формы воздействия мы отказываемся рассматривать. Мы ограничимся кратким обзором начальных этапов развития теории функций в трех странах — Италии, Англии и России, первые две из которых в известной мере характерны тем, что в них назревали условия к самостоятельному переводу теории функций на ее второй этап и были сделаны определенные шаги в этом направлении, лишь вмешательство французов нарушило это независимое развитие, а последняя — как страна, ученые которой надолго оказались, пожалуй, наиболее яркими последователями своих французских учителей.

Так как мы не предполагаем подробно останавливаться на успехах в теории функций итальянских, английских и русских ученых, то в отличие от предшествующих глав, где мы довольно скрупулезно ссылались на рассматриваемую литературу, мы решили совсем не указывать соответствующую литературу, а ограничиться лишь указанием необходимых дат. По большей части такие литературные данные было бы несложно установить, но многие сотни работ заняли бы слишком много места.

§ 2. Италия. Первый период

В Италии еще задолго до проникновения туда идей французов сложилась довольно значительная группа ученых, занимавшихся исследованиями по теории функций действительного переменного. Поэтому, прежде чем говорить о периоде, когда началось сказываться влияние французов, полезно оглянуться на предшествующий этап.

В отличие от Франции и Германии, представители теории функций которых опирались в значительной мере на труды своих предшественников в области анализа, на сложившиеся традиции, на существовавшие научные школы, положение в Италии было иным. Общественно-политические условия развития Италии в XVIII — первой половине XIX вв., когда эта страна представляла собой конгломерат зависимых от других стран или полусамостоятельных государств и когда происходили чуть ли не постоянные войны в разных частях страны, сказались и на уровне научной мысли вообще, и на уровне развития анализа в частности. Если исключить Фаньяно, Риккати и Маскерони, то трудно указать фамилию сколько-нибудь известного аналиста-итальянца названного периода [1]. Национальный подъем в Италии в середине

[1] Итальянские авторы иногда причисляют к своим соотечественникам Лагранжа. Француз по происхождению, он родился в 1736 г. в Турине, был одним из основателей Туринской академии Но уже в 1766 г он уехал в Германию, а затем в 1787 г. во Францию, где и остался до конца жизни. Основные его

прошлого столетия, приведший к превращению в 1859—1861 гг. Италии из географического понятия в национальное государство, объединение которого завершилось присоединением к нему Венецианской и Римской областей (соответственно в 1866 и 1870 гг.), был одним из главных факторов, обусловивших подъем исследований по анализу и по теории функций.

Основная заслуга в возрождении аналитических изысканий в Италии принадлежит трем ее видным математикам — Энрико Бетти (1823—1892), Франческо Бриоски (1824—1897) и Феличе Казорати (1835—1890). Именно они после совместной поездки в 1858 г. во Францию и Германию и установления там связей со многими учеными начали работать сами и привлекли к аналитическим изысканиям молодых ученых. «Именно благодаря их учебной работе, их трудам, их неустанным побуждениям своих учеников и молодых ученых к научным исследованиям, благодаря влиянию, которое они оказывали на организацию высшего образования, благодаря отношениям, которые они установили между нашей родиной и заграницей, мы и имеем молодую школу аналистов Италии» (*Вольтерра* [1, с. 1]).

В интересующей нас области математического знания особенно проявили себя три математика следующего поколения — Джулио Асколи (1843—1896), Уллис Дини (1845—1918) и Чезаре Арцела (1847—1912), являвшихся учениками трех названных выше ученых.

Из теоретико-функциональных результатов Асколи остановимся на следующих. Вопрос об условиях, накладываемых на функцию с тем, чтобы представляющий ее тригонометрический ряд был рядом Фурье, являлся в XIX веке одним из центральных вопросов теории тригонометрических рядов. Инициатором его постановки стал Асколи (1873 г.), сделавший первый шаг на пути к известной теореме Дюбуа-Реймона и ее обобщениям. Подход к интегралу Римана через совпадение граней интегральных сумм играл важную роль в теории интеграла. У истоков этого подхода мы опять-таки встречаем имя Асколи, который первым стал рассматривать само понятие интеграла как общее значение указанных граней (1875, 1895 гг.). Но наиболее существенным достижением Асколи явилось установление им условий компактности семейства функций или кривых (1883—1884, 1888 гг.) и введение в связи с этим понятия равностепенной непрерывности, часто не совсем правильно связываемых с именем Арцела. Именно Асколи впервые сформулировал и доказал необходимые и достаточные условия. Вряд ли следует подчеркивать важность этого результата для теории функций и функционального анализа. К сожалению, работы Асколи написаны на трудном математическом языке, их расшифровка еще полностью

работы не оказали в то время существенного влияния на развитие математической мысли в Италии.

не проделана, и не исключено, что в них скрываются другие интересные результаты.

Дини, пожалуй, был наиболее крупным специалистом в области теории функций действительного переменного в XIX столетии. Ему принадлежат несколько монографий по этой дисциплине, а также большое число статей. Его книга «Основы теории функций действительного переменного» (1878 г.) являлась лучшим трактатом по этому предмету в последней четверти прошлого столетия и в начале XX в. Ее он продолжил трактатом «Ряды Фурье и другие аналитические представления функций действительного переменного» (1880 г.). Подготовил Дини и второй том последней книги; его читали некоторые его современники (Вольтерра, Форд, Нильс Нильсен и др.); в 1880 г. книга начала было печататься, но затем уже набранные страницы были по неизвестным нам причинам уничтожены, и она так и не увидела света. Дини принадлежит также четырехтомный трактат по анализу.

Трудно назвать область теории функций действительного переменного, в которую Дини не внес бы существенный вклад. Он занимался вопросами дифференцирования и интегрирования, разными видами сходимости функциональных рядов, тригонометрическими и другими ортогональными разложениями, теорией сингулярных интегралов и т. д. Упомянем только о введении им целого класса нигде не дифференцируемых функций (1877 г.), понятия производных чисел (1878 г.), обобщенной равномерной сходимости (1878 г.), критериев сходимости тригонометрических рядов (1880 г.). Видимо, его наибольшим достижением в теоретико-функциональном плане является последовательное привлечение идей только что нарождавшейся теории множеств для переформулировки, обобщения, углубления и уточнения основных положений анализа; то, что сейчас это выглядит довольно скромно, не умаляет его исторической заслуги в этом. Были у Дини предшественники в этом отношении — Ганкель, Кантор, Дюбуа-Реймон, Смит, но каждый из них осуществлял такую перестройку в отдельных вопросах, тогда как он в своих «Основах теории функций действительного переменного» сделал это для всего анализа, фактически построив первый этаж здания новой науки. Правда, фундамент последней — теория точечных множеств — еще был тогда слишком слаб, тем не менее Дини сумел воспользоваться чуть ли не каждым выработанным его кирпичом.

В 80-х годах, когда теория точечных множеств получила дальнейшее мощное развитие и когда сложились более благоприятные условия для реализации замысла Дини, он надолго отошел от занятий математикой, и его намерения стали осуществлять другие. Когда же он в начале XX столетия вновь обратился к математике, то оказалось, что он практически безнадежно отстал и уже не сумел добраться до ее переднего края.

Третьим видным представителем итальянской школы теории функций, хотя и меньшего, чем Дини, ранга, был Арцела. Он ввел одно из важнейших понятий теории функций — понятие квазиравномерной сходимости последовательности функций (1883—1884 гг.), изучил отдельные свойства этой сходимости и применил ее в ряде вопросов, в частности для установления необходимых и достаточных условий непрерывности суммы ряда непрерывных функций, для нахождения условий интегрируемости рядов. Ему принадлежит достаточно общая форма одной из основных теорем теории интегрирования — теоремы о возможности почленного интегрирования рядов с равномерно ограниченными остатками (1885 г.); эту теорему впоследствии переоткрыл в более общем виде Лебег, не зная об этом результате Арцела, а лишь опираясь на более частную, к тому же и доказанную позднее, теорему Осгуда (1897 г.). К Арцела восходит и другая важная теорема Лебега (о чем Лебег тоже, по-видимому, не знал), что сходящаяся почти всюду последовательность измеримых почти везде конечных функций сходится и по мере; Арцела сформулировал и доказал ее в 1885 г. — правда, не в такой именно формулировке, но все же довольно близкой к ней.

Велика заслуга Арцела в переосмысливании условий компактности Асколи, в осознании значимости их для многих вопросов анализа, в частности для доказательства существования решения уравнения $dy/dx=f(x, y)$, для решения проблемы Дирихле и т. д. Цикл его исследований 80—90-х годов по этим вопросам послужил истоком многих последующих изысканий других авторов, что, как мы упоминали, явилось причиной того, что сами условия компактности стали связываться с фамилией Арцела, хотя он прямо и не раз указывал на принадлежность их Асколи. Ввел Арцела и одно из определений ограниченности вариации функций нескольких переменных (1904—1905 гг.) [2], занимался вопросами двойных интегралов Римана (1902—1904 гг.), взаимоотношениями между разного рода равномерными сходимостями последовательностей функций (1899—1900 гг.) и т. д.

Следующую группу итальянских аналистов образуют Сальваторе Пинкерле (1853—1936), Джузеппе Пеано (1858—1932), Эрнесто Чезаро (1859—1906), Вито Вольтерра (1860—1940), к которым можно причислить Джулио Виванти (1859—1949) и Родольфо Беттацци. Почти все они начинали свою математическую деятельность в области теории функций и лишь затем ушли в другие области математики.

Главные труды Пинкерле принадлежат теории функций комплексного переменного и функциональному анализу, но и в рас-

---

[2] Существует несколько определений понятия функции с ограниченным изменением в случае нескольких переменных (Харди, Фреше, Тонелли и др.); эти определения в общем не эквивалентны и применяются каждое к определенному кругу вопросов.

сматриваемой нами дисциплине он оставил заметный след. Следует отметить издание им в 1880 г. «Введения в теорию аналитических функций по принципам проф. К. Вейерштрасса». Их основное содержание относится к теории функций комплексного переменного, но теоретико-множественная основа вейерштрассовского подхода, его методы рассуждений, его ε, δ-язык стали затем обиходными и в теории функций действительного переменного. Заслуга Пинкерле состояла в том, что он в систематически отработанной форме довел до сведения ученых многие идеи и методы Вейерштрасса, который сам не любил публиковаться. Интересным результатом Пинкерле является формулировка и доказательство теоремы, тесно связанной с теоремой Бореля о конечном покрытии. Она в неявном виде восходит к Вейерштрассу (1880 г.), но явно ее ввел и указал на ряд ее применений Пинкерле в 1882 г. Впоследствии она нередко применялась в рассуждениях. Ему же принадлежат понятия равномерной ограниченности семейства функций на интервале и в точке (1882 г.) и одно из обобщений понятия сходимости в среднем (1913 г.).

Не определяющими в творчестве Пеано являются его теоретико-функциональные изыскания. Они, однако, занимают гораздо большее место в его трудах, да и значительно существеннее для развития теории функций. Укажем наиболее важные, на наш взгляд, его достижения. Среди них прежде всего выделяется его мероопределение (1887 г.), известное под наименованием мероопределения Пеано — Жордана, нередко связывавшееся только с именем последнего, хотя Жордан ввел его лишь через пять лет и не внес в это определение принципиально новых моментов.

Чрезвычайно интересной, хотя, быть может, и преждевременной, была попытка Пеано (1877 г.) начать общее изучение функций множества. Его подход был в некоторых отношениях значительно шире, чем подход Лебега (1910 г.), однако вследствие неразвитости теоретико-множественных и теоретико-функциональных представлений он не сумел заложить прочные основы новой области математических знаний. Все же в его несколько неопределенных соображениях можно усмотреть довольно отчетливое предвосхищение многих последующих идей теории функций множеств, в частности идей дифференцирования одной функции множества по другой и интеграла Лебега — Стильтеса.

Велика роль кривой Пеано, заполняющей квадрат (1890 г.); помимо существенного обогащения представлений о кривой, бытовавших до этого, помимо новых примеров нигде не дифференцируемых функций [3], эта кривая, устанавливающая непрерывное в одном направлении соответствие между точками квадрата и точками прямолинейного отрезка, применялась затем во многих

[3] Функции, задающие параметрическое представление кривой Пеано, нигде не дифференцируемы.

теоретико-функциональных рассуждениях; пользовался ею, как указывалось (с. 41), и Лебег.

Вместе с Асколи Пеано принадлежит заслуга установления определения интеграла Римана через совпадение граней интегральных сумм; к этому вопросу он обращался неоднократно (1883, 1893, 1895 гг.) и довел указанное определение, в некотором смысле, до окончательного завершения, высвободив его от предельных соображений, имевшихся в подходах других математиков.

Изучал Пеано возрастающие функции со всюду плотным множеством точек разрыва (1892 г.), предложил своеобразное определение производной в виде предела (1892 г.)

$$\lim_{\substack{x_1 \to x \\ x_2 \to x}} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

занимался выяснением идей предела и граней множества (1892, 1912 гг. и др.), вносил уточнения в доказательства ряда теорем о производных и дифференциалах (1884, 1890, 1912 гг. и др.), дал одно из доказательств теоремы эквивалентности теории множеств (1906 г.)

Исторически интересен факт, что Пеано, столкнувшись в 1890 г. с необходимостью применения аксиомы произвольного выбора при рассмотрении проблемы интегрируемости системы обыкновенных дифференциальных уравнений, усомнился в возможности применения бесконечного числа произвольных выборов элементов в множествах заданного семейства и потребовал некоторых ограничений на характер выбора. Возвратившись позднее (1905—1906 гг.) к этой аксиоме после ознакомления с полемикой французов о ней, он, во-первых, наметил программу устранения ее из тех рассуждений, где это возможно, а во-вторых, привел примеры рассуждений, в которых такое устранение затруднительно (например, в теореме, что всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество); предложения, установленные при помощи рассуждений второго типа, он считал не доказанными с необходимой математической строгостью.

Во многих своих работах Пеано обращался к общему понятию функции. Кульминационным пунктом этих обращений явилась его статья «Об определении функции» (1911 г.), в которой предложено становящееся все более и более обиходным общее определение функции как однозначного бинарного отношения в декартовом произведении двух абстрактных множеств.

Нельзя не упомянуть здесь о грандиозном «Математическом формуляре» («Formulario matematica»), написанном Пеано и его сотрудниками и неоднократно издававшемся на рубеже XIX—XX вв. Этот чрезвычайно трудно читаемый труд еще ожидает своих исследователей, и можно полагать, что в нем содержатся многие интересные теоретико-функциональные идеи.

Вольтерра лишь дебютировал в науке работами по теории функций действительного переменного. Затем он перешел в другие области математики и математического естествознания, занявшись главным образом теорией интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, а также функциональным анализом. Но и его дебют (на двадцать первом году жизни) оставил прочный след в истории рассматриваемой нами дисциплины.

Он, независимо от Смита, построил пример совершенного нигде не плотного множества положительной меры и опроверг утверждение Ганкеля об интегрируемости по Риману ограниченной точечно разрывной функции; независимо ввел верхние и нижние интегралы Римана и изучил ряд их свойств; доказал при некоторых ограничениях теорему Дюбуа-Реймона об интегрируемости суперпозиции непрерывной и интегрируемой функции; решил вопрос, поставленный Дини (1878 г.), о соотношении простой равномерной сходимости на интервале и обобщенной равномерной сходимости (в смысле Дини), построив пример функционального ряда, сходящегося во втором смысле и не сходящегося в первом. Интересовался Вольтерра теорией функций и в более поздний период своей деятельности. Так, в 1899 г. он доказал (но не опубликовал) теорему, что если $f(t)$ — функция одного действительного переменного класса n по классификации Бэра, то существует функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, непрерывная по каждому из переменных в отдельности и такая, что $\varphi(t, t, \ldots, t)$ совпадает с $f(t)$. Об этом свойстве знали Бэр и Лебег [4]. Кроме того, он построил первый эффективный пример функции третьего класса (тоже не опубликовав его) [5]. Наиболее значительным его достижением в теории функций явилось, по-видимому, построение им в 1881 г. примера ограниченной производной, неинтегрируемой в смысле Римана, что явилось сильным стимулом для пересмотра распространенного в XIX в. определения этого интеграла как разности значений примитивной, для переосмысливания соотношений между операциями дифференцирования и интегрирования, а особенно для поисков новых определений понятия интеграла.

Свое определение понятия функции Дедекинд предложил, без сомнения, вне связи с функциональным анализом. Но почти одновременное введение Вольтеррой понятия функционала (1887 г.) и глубокое его изучение было, по-видимому, немаловажным фактором в осознании математиками определения Дедекинда, в его принятии и распространении. Кстати, аналогичное замечание следовало бы сделать и о понятии оператора, глубоко изученного Пинкерле почти в то же время.

Большой заслугой Вольтерры перед теорией функций явилось уже упоминавшееся воздействие, оказанное им на Бэра

---

[4] См. Лебег [21, с 203, сноска].
[5] См. Ж Таннери [5, с. 297].

(с. 36). Вольтерра, вероятно, в большой мере способствовал приобщению последнего к кругу теоретико-функциональных идей итальянцев, и недаром Бэр посвятил свою диссертацию Дини и Вольтерре.

Другая троица названных выше математиков этого периода — Виванти, Чезаро и Беттацци — принадлежит к ученым меньшего ранга. Тем не менее в истории теории функций и множеств, особенно это касается Италии, их имена не следует забывать.

Виванти был активным распространителем теоретико-множественных идей Кантора и внес некоторый вклад в их разработку (например, в теорию n-кратно упорядоченных множеств, 1889—1890 гг.); он участвовал в написании упоминавшегося «Математического формуляра» (1895 г.); ему принадлежит одно из наиболее простых доказательств теоремы Арцела о непрерывности суммы сходящегося квазиравномерно ряда непрерывных функций (1910 г.). Видимо, следует упомянуть, что в 1888 г. он, независимо от Вольтерры и Пуанкаре, доказал, что множество значений, принимаемых аналитической функцией в точке, не более чем счетно; занимался он и векторным исчислением; ему принадлежит ряд работ по истории математики, в частности первая библиография работ по теории множеств. О его известности в начале столетия свидетельствует, например, тот факт, что Егоров в 1910 г. в инструкции Лузину для поездки за границу рекомендовал последнему познакомиться, наряду с такими первоклассными учеными, как Клейн, Гильберт, Пуанкаре, Пикар, Пенлеве, Борель, Адамар, Бэр, Цермело, Пеано и Пинкерле, также и с Виванти [6].

Математические интересы Чезаро были многообразными: он занимался теорией чисел, теорией функций комплексного переменного, геометрией, интегральными уравнениями, некоторыми вопросами теории вероятностей, исчислением конечных разностей. Ему принадлежит несколько учебных руководств, в том числе широко известный курс алгебраического анализа, неоднократно издававшийся в Италии и переведенный на немецкий и русский языки; этот курс имел не только большое методическое значение, но и служил отправным пунктом многих чисто научных исследований. Но наиболее знаменит Чезаро своими исследованиями по теории рядов, особенно расходящихся, начатыми в конце 80-х годов и интенсивно проводившимися им в 90-е годы прошлого столетия. Его метод суммирования расходящихся рядов, развитый им до появления первых работ Бореля по расходящимся рядам, благодаря его прозрачности и элегантности нашел чрезвычайно многочисленные применения, особенно после того, как в 1900—1904 гг. Фейер применил его в теории тригонометрических рядов, а Лебег расширил эти применения. Зани-

---

[6] Архив МГУ, 1906, д. № 562, л 32.

мался Чезаро и непрерывными функциями без производных (1897, 1906 гг.).

Беттацци известен, главным образом, его книгой «Теория величин» (1891 г.), содержавшей, в частности, изложение многих результатов теории множеств (кстати, Беттацци внес и собственный вклад в теорию упорядоченных множеств, и, например, хаусдорфовские скачки, сечения и пробелы в упорядоченном множестве [7] восходят к этой книге, если не считать самой работы Дедекинда (1872 г.). Интересна его работа «О концепциях дифференцирования и интегрирования функций нескольких переменных» (1884 г.), в которой предложено определение производной функции нескольких переменных в виде предела отношения

$$\frac{f(x+h,\, y+k)-f(x+h,\, y)-f(x,\, y+k)+f(x,\, y)}{hk}$$

(для функций двух переменных), указано на отличие этой производной от смешанных производных и на связь с кратным интегралом Римана. Здесь же содержится в известном смысле предвосхищение мероопределения Пеано — Жордана; понятие производного числа распространено на функции нескольких переменных (Дини вводил производные числа только для функций одного переменного); то же сделано для верхних и нижних интегралов Римана. Отметим также еще теорему Беттацци о множествах значений, принимаемых функцией $f(x)$ в точке x_0 при $x_n \to x_0$ по различным последовательностям $\{x_n\}$ (1892 г.). Можно еще указать на цикл его работ по теории множеств (1895—1898 гг.), на полемику об актуально бесконечно малых величинах и связанную с этим проблему трансфинитных чисел, активное участие в которой в 90-х годах принял Беттацци, склоняясь к своеобразным представлениям о трансфинитных числах, разработанным Веронезе (1891 г.) и развитым Леви-Чивитой (1892, 1898 гг.).

В заключение этого параграфа несколько слов еще о двух сотрудниках Пеано, участвовавших в написании «Математического формуляра»,— Чезаре Бурали-Форти (1861—1931) и Джованни Вайлати (1863—1909). Они, кажется, не занимались собственно теорией функций, и их основные интересы были сосредоточены в области теории множеств и математической логики; Бурали-Форти много трудился также над векторным исчислением. Чтение их работ, особенно работ Бурали-Форти, очень затрудняется тем, что многие из них написаны на языке «Формуляра». О знаменитом парадоксе теории множеств, открытом Бурали-Форти, мы уже много говорили; можно отметить, что в ряде своих работ 90-х годов он развивал в некоторых отношениях идеи теории функций множества, но выявить их реальное

[7] См. Хаусдорф [1, с. 56].

содержание довольно трудно без хорошего знания языка «Формуляра». Из исследований Вайлати упомянем его анализ различных способов упорядочения множеств (90-е годы).

§ 3. Италия. Второй период

Ученые Италии в ряде случаев опередили французов в теории функций. Начиная с Дини и Асколи, они стали строить теорию функций на основе теории множеств. Дини изучал признаки сходимости тригонометрических рядов в 1880 г., а Лебег в 1905 г., причем последний существенно опирался на работы первого; Вольтерра построил пример неинтегрируемой по Риману ограниченной производной в 1881 г., а Лебег, во многом отталкиваясь от этого примера, вводит новое понятие интеграла в 1901 г.; Пеано ввел свое мероопределение в 1887 г., а Жордан — в 1892 г.; Пинкерле открыл теорему о конечном покрытии в 1881 г., а Борель — в 1895 г; Чезаро начал заниматься расходящимися рядами за несколько лет до Бореля и Лебега; Пеано изучал функции множества в 1887 г., а Лебег приступил к их изучению только в 1910 г.; в аксиоме произвольного выбора Пеано усомнился в 1890 г., а французы стали спорить о ней только в 1905 г.; Бурали-Форти обнаружил первый парадокс теории множеств в 1897 г., а ученые Франции стали говорить о нем лишь с 1904 г.; Арцела изучал квазиравномерную сходимость начиная с 1884 г.; а Борель занялся ею в 1905 г., и т. д. Вообще, в конце XIX в. в Италии сложилась довольно сильная теоретико-функциональная школа со своими традициями, методами исследования, сформировались определенные шаблоны математического мышления, каноны преподавания в высших учебных заведениях. Когда ведущей школой стала французская школа, преодолеть установившуюся инерцию научного движения итальянцам было нелегко. И тот факт, что они ее преодолели, вошли в русло новых научных идей французов — правда, с отдельными, в общем-то неудачными попытками вырваться из этого потока (о чем несколько далее), говорит о силе воздействия именно французов.

В настоящем параграфе мы применим несколько иной тип изложения, чем в предыдущем,— постараемся проследить отдельные линии развития, представляющиеся нам интересными в рассматриваемом отношении.

Вопросы интегрирования функций интересовали итальянцев и ими, как мы уже говорили, занимались Асколи, Дини, Арцела, Пеано, Вольтерра и Беттацци. Они получили отдельные замечательные результаты, но для коренного переворота в развитии теории интегрирования нужно было более решительное привлечение в эту теорию теоретико-множественных представлений. Кроме того, требовалась дальнейшая разработка последних. В Италии были, несомненно, условия для такой разработки, но этому помешали разные обстоятельства, не последними из которых явились длительный отход Дини от занятий математикой, переключение интересов Арцела, Пинкерле, Пеано, Вольтерры на другие отрасли математики.

Как справедливо заметил Хокинс [1, с. X], понятие интеграла Римана казалось в XIX в. предельно общим и было трудно вырваться за рамки этой концепции. Упомянутые итальянцы разрабатывали в общем-то ее, и даже, когда Пеано в 1887 г. далеко вышел за ее пределы, фактически подойдя к интегрированию в смысле Лебега — Стилтьеса, он вряд ли осознавал это. В начале XX столетия римановской теорией интегрирования занялся и Джузеппе Витали (1875—1932). Он первоначально не был знаком с идеями Лебега [8] и изучал условия интегрируемости по Риману. В своих исследованиях он, независимо от Лебега, пришел в 1904 г. к понятию лебеговской меры [9], и, вероятно, если бы лебеговской теории интеграла не существовало, ему было бы тогда нетрудно приступить к построению аналогичной теории. Но в том же 1904 г. он познакомился с лебеговской диссертацией, и необходимость для него в таком построении не возникла. Подготовленный своими предшествующими работами, он быстро усвоил новые идеи и начал их энергичную разработку, опубликовав в 1904—1905 гг. около десятка работ по лебеговсой теории и продвинувшись в ряде существенных пунктов дальше Лебега. Так, в 1904—1905 гг. Витали более осознанно, чем Лебег, ввел понятие абсолютно непрерывной функции и доказал, что для того, чтобы заданная функция являлась неопределенным интегралом Лебега, необходимо и достаточно, чтобы она была абсолютно непрерывной; в 1905 г., опираясь на аксиому Цермело, он впервые установил существование неизмеримых по Лебегу множеств; в 1907 г. нашел необходимые и достаточные условия почленной интегрируемости последовательности суммируемых функций в терминах равностепенной непрерывности; в 1908 г. доказал знаменитую теорему о покрытии, известную под его именем, и мало какая другая теорема теории функций столько раз передоказывалась, обобщалась, уточнялась столь большим числом математиков, включая Лебега (1910 г.), и т. д. Так что в теории меры и интеграла Витали выступил не только как продолжатель идей и методов Лебега, но и как его достойный соперник.

Кроме Витали, этими проблемами занимались, и тоже с успехом, Беппо Леви (1875—1961), Гвидо Фубини (1879—1943), Леонида Тонелли (1885—1946), Пиа Налли (1886—1965), Джулио Андреоли (р. 1892 г.) и другие итальянские ученые. Упомянем лишь некоторые из их результатов: теорему Леви о по-

---

[8] Напомним, что Лебег опубликовал свое первое сообщение о новом понятии интеграла в 1901 г., а его диссертация появилась в самом известном итальянском математическом журнале в 1902 г.

[9] См. Хокинс [1, с. 146, 147].

членном интегрировании рядов суммируемых функций (1906 г.), теорему Фубини о сведении кратных интегралов к повторным (1907 г.), N-свойство измеримых функций и применение его для характеристики неопределенных интегралов Лебега (Леви, 1907 г.). Итальянскими учеными было предложено несколько оригинальных теорий интегрирования, как эквивалентных лебеговской, так и обобщающих ее, о двух из которых мы еще скажем несколько слов в конце параграфа.

Разложениями функций в ряды и различными видами сходимости занимались очень многие итальянцы, кроме упоминавшихся выше: Джузеппе Лоричелла, дель Ангола, Карло Северини, Витали, Тонелли, Налли, Санья, Сансоне и др. В их исследованиях своеобразно переплетались результаты трудов соотечественников предшествующего периода с достижениями французских коллег. Приведем несколько примеров.

Ранее было отмечено (с. 29), что Пинкерле за несколько лет до Бореля установил своеобразную форму теоремы о конечном покрытии и указал на применение ее для доказательства ряда теорем анализа. В 1895 г. ее в более привычной форме установил Борель для счетных покрытий, а затем У. Г. Юнг и Лебег распространили ее на несчетные покрытия. В 1907 г. дель Ангола (кажется, не зная о теореме Пинкерле) вновь сформулировал и доказал ее вариант и показал, что теорема Бореля и ее обобщение Лебегом получаются из теоремы Пинкерле как следствия. Тогда же он показал, что с ее помощью относительно просто получается доказательство теоремы Арцела, передоказанной незадолго до этого Борелем (1905 г.), относительно необходимых и достаточных условий непрерывности суммы ряда непрерывных функций. Свои исследования в этом направлении дель Ангола продолжил в 1908—1910 гг.

В § 3 второй главы мы говорили, что Лебег в заметке 1903 г. [11] сформулировал теорему Егорова, согласно которой сходящаяся почти всюду последовательность измеримых почти везде конечных функций, заданных на ограниченном измеримом множестве, сходится равномерно, если пренебречь множеством сколь угодно малой меры. Северини, опираясь на заметки Бореля [27] и Лебега [11], доказал эту теорему для того частного случая, когда сходящейся почти всюду последовательностью является последовательность ортогональных функций, причем в его рассуждения не входил сам факт ортогональности рассматривавшихся функций и его доказательство пригодно для общего случая. Теперь итальянские авторы обычно называют эту теорему теоремой Егорова — Северини или даже Северини — Егорова.

Ранее отмечалось (с. 35, 45), что Борель и Лебег сформулировали в 1903 г. без доказательства теорему, что всякая измеримая почти везде конечная функция является непрерывной, если пренебречь множеством сколь угодно малой меры; вместе с тем Лебег отметил, что это свойство является характеристическим для этого класса функций, т е. что и, наоборот, всякая функция, обладающая им, является измеримой почти везде конечной. Витали в 1905 г. доказал первую и основную часть этой теоремы и применил ее для получения другой важной теоремы, что всякая измеримая в этом смысле функция эквивалентна некоторой функции не выше второго класса по классификации Бэра. В 1922 г. и Тонелли изменил само определение измеримой функции, предложенное Лебегом, положив в основу его указанное выше характеристическое свойство, а затем воспользовался им для придания новой формы интегралу Лебега (1924 г.). Одним из основных стимулов к новому подходу Тонелли к лебеговским концепциям было желание избежать применения в рассуждениях аксиомы произвольного выбора, так как он присоединялся к своим французским коллегам в недоверчивом отношении к этой аксиоме.

Вообще в исследованиях итальянских математиков изучение аксиомы Цермело заняло большое место. Еще в 1890 г., как было уже замечено, Пеано усомнился в ее свободном применении. В 1902 г. ее довольно отчетливо применил Леви и даже указал на то, что ею можно пользоваться в тех случаях, когда множества рассматриваемого семейства являются вполне упорядоченными, связав тем самым — еще до Цермело — проблему полного упорядочения с аксиомой произвольного выбора. Дискуссия во Франции, несомненно, оказала сильное влияние на отношение итальянцев к аксиоме выбора и еще больше побудила их к изучению как самой аксиомы, так и ее связей с другими вопросами математики. В частности, они много занимались выявлением связей аксиомы выбора с понятием измеримого множества (функции) — Витали (1905 г.), Тонелли (1922, 1924 гг.); с понятием предела функции — Чиппола (1913 г.), Санья (1915 г.), Кассина (1928, 1931, 1936—1937 гг.) и др.; с теорией нормальных семейств функций по Монтелю — Минетти (1932 г.), Леви и Виола (1933 г.) и т. д. Ряд работ был посвящен ослабленной форме этой аксиомы, так называемому принципу аппроксимации Леви и его применениям в различных рассуждениях анализа и теории функций: Леви (1918, 1923, 1934 гг.), Виола (1931, 1932, 1934 гг.), Скорца Драгони (1936 г.), например, при доказательстве теоремы Лузина или ряда теорем теории функций множеств. Любопытно при этом то, что хотя Лебег, как мы говорили, не признавал аксиомы выбора, активно выступал против нее, тем не менее после этих выступлений довольно широко, правда по большей части неявно, применял ее позднее, что убедительно показал Виола (1934 г.),— это еще один пример того, что при проведении конкретных исследований математики очень часто «забывают» свои общие установки и действуют нередко вопреки им.

Большое внимание, конечно, уделялось и парадоксам теории множеств: Пеано (1906 г.), Леви (1908, 1949 гг.), Энрикес

(1917 г.), Кассина (1936 г.) и др. Как и французы, они не получили сколько-нибудь существенных результатов, но отдельные соображения итальянцев небезынтересны.

Мы перечислили далеко не все не только направления исследований, но даже самые существенные результаты работ итальянских математиков второго периода развития теории функций в Италии. Весь этот период характеризуется сильнейшим влиянием французских работ. В качестве примера длительного воздействия последних можно привести книгу Сансоне «Лекции по теории функций действительного переменного», вышедшую в 1952 г., в которой это влияние ощутимо весьма сильно. В рамках отмеченного воздействия находились многие из еще не упоминавшихся направлений исследований или отдельные теоретико-функциональные результаты, из которых мы коротко скажем еще о следующих. Итальянские математики изучали условия почленного дифференцирования функциональных рядов: Фубини (1915 г.), Тонелли (1916 г.); проблему представления функций нескольких переменных полиномами Чебышева: Тонелли (1907 г.), Сибирани (1909, 1916 гг.). Особо следует отметить цикл изысканий Тонелли по теории поверхностей, в которых он отправлялся от определения площади поверхности, предложенного Лебегом, в связи с чем он ввел, в частности, еще одно определение понятия функции с ограниченным изменением, когда число переменных равно двум и более (1926 г.), а также введение Пиконе понятия обобщенного предела или предела по фильтру (1923 г.), независимо от Шатуновского, Мура и Смита; последнее понятие затем широко применялось соотечественниками Пиконе, особенно Качьопполи. Упомянем еще результаты Налли (1911 г.) относительно необходимых и достаточных условий того, чтобы замкнутая кривая Шёнфлиса была кривой Жордана; Тонелли о спрямляемости кривых (1908 г. и др.); Тонелли и Фубини о смешанной производной двойного интеграла Лебега; Тонелли о существовании верхнего интеграла Бёркила (1922 г.) еще до введения последним своего интеграла (1924 г.); Витали о функциях с ограниченным изменением (1924 г.).

Видимо, с работ Ренато Качьопполи (1904—1959) можно датировать начало третьего периода развития теории функций в Италии, характеризуемого привлечением в теорию функций идей и методов функционального анализа, топологии и абстрактной алгебры. На нем мы останавливаться не будем.

В заключение настоящего параграфа немного о попытках итальянцев вырваться за рамки концепций французских ученых. Это мы проиллюстрируем на примере двух работ — «Об определении интеграла» Леви и «О понятии интеграла» Тонелли, вышедших одновременно в 1924 г.

Одной из основных концепций лебеговской теории интегрирования является концепция измеримости множества, на котором задана функция, и функции, подлежащей интегрированию.

Эта измеримость явно или неявно присутствует во всех более или менее тонких соображениях, используемых при изложении лебеговской теории. Даже в тех подходах Лебега к понятию интеграла, в которых, на первый взгляд, она незаметна, при более тщательном рассмотрении она всплывает наружу. Так, в своем дескриптивном определении интеграла 1904 г. [13, с. 98] [10] Лебег отправляется от произвольной ограниченной функции и формулирует дескриптивные свойства интеграла вроде без обращения к идее измеримости. Однако уже на следующей странице он вводит множества $E[\alpha<f(x)<\beta]$ и рассуждает о них, как об измеримых множествах, а сам интеграл оказывается соотнесенным только к измеримым ограниченным функциям; в частности, утверждавшаяся Лебегом идентичность между его дескриптивным и конструктивным определениями интеграла от ограниченной функции получалась у него только при неявном предположении ее измеримости. Если в 1904 г., когда аксиома Цермело еще не всплыла на поверхность, Лебег и имел некоторое право отождествлять измеримые ограниченные и просто ограниченные функции, то после полемики 1905 г., когда более или менее выявилось значение аксиомы произвольного выбора, особенно когда определилась позиция Лебега в отношении этой аксиомы, такой скачок мысли был явной непоследовательностью [11]. Между тем он и после полемики старательно «не замечал» этой непоследовательности; даже в 1928 г. во втором издании своих лекций об интегрировании [40, с. 91—95] он не говорит об этом ни слова, хотя и отмечает установление Банахом независимости условий проблемы интегрирования, который явно пользовался для этой цели аксиомой выбора.

Как Леви, так и Тонелли занимали в отношении аксиомы Цермело примерно ту же позицию, что и Лебег, видимо, не без влияния последнего. Оба они заметили указанную непоследовательность и поставили перед собой задачу построить теорию интегрирования, не обращающуюся к теории меры, но такую, чтобы численные значения интегралов, получаемых их методами, оказывались идентичными с численными значениями, получаемыми по методу Лебега [12]. И Леви, и Тонелли подчеркивали бо́льшую, по сравнению с лебеговской, простоту их теорий, отсутствие в них многих дидактических и логических трудностей, связанных с обычным изложением вопроса об интегрировании в форме Лебега, видимо, втайне надеясь на вытеснение лебеговской теории предложенными ими. Здесь не место останавливаться на последних. Но определенно можно сказать, что замыслы

---

[10] См. Песин [1, с. 57—64].

[11] Понятия измеримости и аксиомы выбора врывались и во многие другие аспекты лебеговской дескриптивной теории интеграла, например в вопрос о независимости аксиом, на чем мы не останавливаемся.

[12] Сама эта идентичность получалась, естественно, при помощи аксиомы Цермело.

названных авторов потерпели почти полную неудачу: до сегодня теория интегрирования (в смысле Лебега) излагается и применяется по-преимуществу в ее чуть ли не первозданном виде.

Это не значит, что сами попытки Леви и Тонелли неинтересны. Аналогичных им было много до и после выхода их работ; они не привели к вытеснению лебеговской теории, но способствовали выяснению многих существенных пунктов как теории интегрирования, так и других проблем теории функций, а также, вероятно, помогли самим авторам получить интересные результаты в других областях математики, например Тонелли в вариационном исчислении.

Можно было бы привести и другие подобные примеры. Но они лишь в малой степени характеризуют общую направленность работ итальянских ученых в области теории функций. Основной их вклад в эту науку состоял в том, что они сумели вырваться за пределы сложившихся в стране направлений исследований, подхватить идеи французов, развить их во многих отношениях и сочетать с идеями своих соотечественников, передав эстафету не только итальянским математикам следующего поколения, но и ученым других стран.

§ 4. Англия

В отношении истории теории функций действительного переменного положение в Англии отличалось от положения в Италии в нескольких существенных пунктах.

Во-первых, в XIX в., особенно в его первой половине, в Англии, в отличие от Италии, сложилась довольно солидная группа аналистов. Она была не столь мощной, как во Франции, но все же достаточно сильной, чтобы выработались определенные традиции аналитического характера.

Во-вторых, в отличие от итальянцев и немцев, англичане не прошли первого этапа развития теории функций, если не считать изолированной работы Смита, о которой несколько далее, и в этом они ближе к французам.

В-третьих, если в Италии в начале XX в. количество работ по теории функций и множеств значительно возросло по сравнению с предшествующим периодом, но в общем поток их, начиная с Дини и Асколи, не прерывался, то в Англии в самом начале века произошел как бы взрыв исследований в этой области.

В-четвертых, хотя воздействие идей французских ученых было и здесь довольно сильным, но все же англичане оказались менее подверженными этому влиянию, более самостоятельными.

Объединяет же английских математиков с итальянскими то, что некоторые представители тех и других в нескольких направлениях исследований независимо подошли к отдельным идеям второго периода развития теории функций, но, ознакомившись с работами французских ученых, они быстро перестроились в соответствии с новыми веяниями.

Общим для Англии и Италии является также то, что в этих странах практически одновременно начали разрабатываться идеи и методы теории функций и множеств второго этапа, причем как там, так и здесь сложились сильные группы ученых, получивших сравнимые в общей сложности результаты. Любопытны некоторые параллели личностного характера: Рассел и Пеано, У. Г. Юнг и Витали, Гобсон и Тонелли, Г. Юнг и Налли, Журден и Виванти и т. д.

Как и в случае с Италией, мы не ставим целью сколько-нибудь полное описание исследований по теории функций в Англии, а тем более относительно полной истории этих исследований; мы здесь, главным образом, будем говорить о них в той мере, в какой они связаны с исследованиями французов.

Сначала совсем коротко о предыстории теории функций в Англии.

В отдельных работах таких английских математиков, как Роберт Вудхауз (1773—1827), Георг Пикок (1791—1858), Георг Грин (1793—1841), Уильям Роберт Гамильтон (1805—1865), Август де Морган (1806—1871), Георг Габриель Стокс (1819—1903), Дж. Х. Вильбрагэм, Артур Кэли (1821—1895), Уильям Томпсон (1824—1907) и др., содержатся многочисленные результаты, идеи, соображения, намеки на ту проблематику, которая развивалась затем в теории функций.

Прежде всего следует сказать о большом цикле исследований Хаттона, Грегори, де Моргана, Вудхауза, Пикока, Д. Юнга по расходящимся рядам. Далеко не удовлетворяющие современным требованиям строгости, слишком прочно забытые вследствие их сильной преждевременности, они, тем не менее, содержат многие интересные соображения, и, главное, важен сам факт интереса англичан к этой проблематике; вряд ли можно согласиться с Харди, когда он писал, что «их вклад в основной фонд анализа ничтожно мал» [1, с. 33], ведь и сам он вслед за тем отмечает ряд интересных моментов этих исследований. Мы не будем останавливаться на данном вопросе, отослав читателя к статье Буркхардта [1, с. 174, 181—193]. К этому следует еще добавить, что расходящимися рядами занимался и Стокс (1847 г.).

Аналогично относительно изысканий Вильбрагэма, Ньюмена, Стокса, Гамильтона, Томпсона и Тэта по теории тригонометрических рядов мы отошлем к книге Паплаускаса [1, с. 103, 104, 118—120, 158—161, 249, 250].

Нельзя обойти молчанием замечательную работу Грина «Опыт применения математического анализа к теории электричества и магнетизма» (1828 г.), в которой были заложены первые кирпичи фундамента теории потенциала, введены функции Грина и знаменитое преобразование объемного интеграла в поверхностный. Она послужила одним из истоков последующих работ Стокса, Томпсона и Тэта, Максвелла по интегральным преобразованиям в 50—70-х годах.

Трудно переоценить в теории функций роль равномерной сходимости рядов. Один из этих видов сходимости — простую равномерную сходимость в окрестности точки — ввел и изучил Стокс в 1848 г.

Заслуживают также внимания исследования Айвори (1824 г.) и Кэли (1848 г.) по шаровым функциям, де Моргана по логарифмическим признакам сходимости рядов (1839 г.) и по элементам теории роста функций (1866 г.), одна из первых попыток построения теории действительных чисел Гамильтоном (1844 г.) и т. д.

Как мы уже сказали, заход в теорию функций ее первого этапа совершил Генри Д. Стефен Смит (1826—1883). Его основные работы относятся к теории чисел. Но его статья «Об интегрировании разрывных функций» (1875 г.) — одна из лучших работ этого периода — явилась важным вкладом в теорию функций и множеств. Здесь он, независимо от Кантора и Дюбуа-Реймона, ввел приводимые множества конечных порядков; впервые построил примеры совершенных нигде не плотных множеств положительной и нулевой меры; независимо от Дарбу, Асколи, Томе определил верхний и нижний интегралы Римана и доказал их существование; предложил любопытное определение интеграла от ограниченной функции как среднего арифметического значения ее верхнего и нижнего интегралов, содержащее как частный случай определение интеграла Римана через совпадение граней интегральных сумм; упрочил и развил связь между теорией множеств и интегрированием, продемонстрировав силу намеченного Ганкелем теоретико-множественного метода. Небезынтересным историко-математическим вопросом является то, почему сам Смит не продолжил изысканий в этом направлении и, особенно, почему в Англии, где, казалось бы, условия для разработки теории функций были более благоприятными, чем в Италии, ее не стали разрабатывать до самого начала XX столетия?

Зато начало столетия знаменуется в Англии мощным подъемом исследований по теории функций и множеств, характеризуемым трудами таких ученых, как Эрнст Уильям Гобсон (1856—1933), Уильям Генри Юнг (1863—1942), Бертран Артур Уильям Рассел (1872—1970), Готфрей Гарольд Харди (1877—1947) и многие другие.

Это был интересный в истории математики в Англии, да и не только в Англии, взрыв изысканий по теории множеств и функций. До 1900 г. там, кажется, не было опубликовано ни одной работы, кроме смитовской, по этой проблематике, и, например, основы интегрального исчисления, как отметил Гобсон в 1902 г., излагались в английских учебных руководствах так, как если бы Римана не существовало; за первое же десятилетие XX в. появилось более сотни оригинальных статей, мемуаров, книг. Этот взрыв происходил не только в развитии английской математики в целом, но и — странным образом — в научном развитии отдельных математиков: чаще всего свои основные идеи математики разрабатывают в относительно молодом возрасте, Гобсон же пришел к теории множеств и функций, когда ему было за сорок лет, У. Г. Юнг — в возрасте около сорока, Рассел — когда его возраст перевалил за тридцать, а Харди — около четверти века; они словно ждали определенного момента (и друг друга), копили для него (и для соревнования друг с другом) силы, и когда этот момент наступил, начался непрерывный поток их публикаций, достигший, например, свыше трехсот наименований у Харди и свыше двухсот у У. Г. Юнга (бо́льшая часть из которых относилась к теории функций и множеств).

Их исследования вместе с присоединившимися работами других ученых быстро охватили почти все разделы новой математической дисциплины: теории дифференцирования и интегрирования (Гобсон, У. Г. Юнг, Г. Юнг, Харди, Бромвич, Даниель, Поллард, Бёркил и др.), различные виды сходимостей функциональных рядов (Гобсон, У. Г. Юнг, Харди, Бромвич и др.), тригонометрические и другие разложения (Гобсон, У. Г. Юнг, Харди, Титчмарш и др.), расходящиеся ряды (Харди, Бромвич, Литлвуд и др.), теорию точечных и абстрактных множеств (Гобсон, У. Г. Юнг, Рассел, Харди, Журден, Уайтсайд, Уайтхэд, Диксон и др.). К названным ученым присоединились вскоре многие.

Отправные пункты исследований англичан были разные: ранние идеи французов (Коши, Борель, Бэр), итальянцев (Пеано, Арцела, Чезаро), немцев (Кантор, Шрёдер); они сразу же оценили мемуар своего соотечественника Смита и опирались на него в своих первых работах (Гобсон, У. Г. Юнг); заметное влияние оказали работы американца Осгуда. В некоторых вопросах английские математики независимо подошли к решениям, уже полученным французами; в некоторых они продвигались в русле идей последних; кое в чем опередили и развили далее. Последующее изложение имеет целью наметить лишь отдельные иллюстрации высказанных положений.

Еще в 1823 г. Коши предложил понятие интеграла в смысле главного значения. Математики XIX в. встретили это понятие в основном недоверчиво, и против него возражали Риман, Томе, Кронекер, Шлефли и др., а в наиболее распространенных трактатах по анализу (Жордана, Штольца, Гарнака и др.) о нем попросту не упоминалось [13]. Одной из тем первых исследований Харди по теории функций и явилось изучение понятия интеграла в смысле главного значения по Коши. В цикле работ 1901—1909 гг. он разработал детальную теорию этого интегра-

[13] Этого нельзя сказать о книге Дини по теории функций, где оно использовалось.

ла, сначала отправляясь от определения интеграла по Риману, а затем и по Лебегу. Интегрирование в смысле главного значения сделалось с тех пор важным орудием изучения свойств функций и функциональных рядов, особенно тригонометрических, и его применения все расширяются.

Проблема почленного интегрирования рядов, особенно деликатная в случае римановского интегрирования, заняла большое место в первых работах английских аналистов (Гобсон, У. Г. Юнг и др.). Наиболее существенные результаты по ней в XIX в. получил Арцела, но его результаты англичане первоначально не знали. Гобсон в 1901 г., приступая к этой проблеме, отправлялся от работы Осгуда 1897 г., но привлек для этой цели соображения Бэра о точечно разрывных функциях, благодаря чему ему удалось обобщить некоторые результаты Осгуда. Но к 1904 г. У. Г. Юнг и Гобсон ознакомились с важным мемуаром Арцела 1899—1900 гг., и теперь сочетание идей Осгуда, Бэра, Арцела, применение теоремы Бореля о конечном покрытии, незадолго до этого обобщенной У. Г. Юнгом (1902 г.) на нечетные покрытия [14], позволило и У. Г. Юнгу, и Гобсону получить ряд интересных результатов не столько по самой проблеме почленного интегрирования, сколько в изучении разных видов равномерной сходимости рядов (введение и изучение У. Г. Юнгом равномерной сходимости функционального ряда в точке, установление Гобсоном связи между обыкновенной и обобщенной равномерной сходимостями и т. д.).

В первом десятилетии XX в. многие английские математики заинтересовались трансфинитными числами. В их изучение включились Уайтхэд (1902—1904 гг.), Рассел (1902, 1903, 1906 гг.), Харди (1903, 1904, 1907 гг.), Журден (1904, 1905, 1907, 1908 гг.), Гобсон (1905, 1907 гг.) и др. Характер их работ довольно разнообразен — от построения Харди примера точечного множества мощности $\aleph_1$ (1903 г.) до анализа связи трансфинитных чисел с теорией отношений математической логики (Рассел, 1906 г.). Несколько слов о последнем вопросе.

Явное установление связи теории вполне упорядоченных множеств и трансфинитных чисел с теорией отношений восходит к Шрёдеру (1895 г.). В конце прошлого столетия главным образом итальянские авторы (Виванти, Вайлати, Бурали-Форти) переложили канторовскую теорию вполне упорядоченных множеств и порядковых чисел на символический язык Пеано. Получилась очень сложная система, малодоступная не только для дальнейшего изучения, но и даже для овладения ею. Рассел, занимаясь в начале века теорией отношений и находясь под сильным влиянием Пеано, поставил перед собой задачу упростить соображения названных авторов: развить теорию вполне упорядоченных множеств и порядковых чисел как частный случай теории отно-

[14] У. Г. Юнг предложил это обобщение раньше Лебега.

шений, выраженной в символике Пеано («Общая теория вполне упорядоченных рядов», 1906 г.).

Три приведенных примера показывают, что в самом начале столетия английские математики входили в теорию множеств и функций в значительной мере независимо от идей, развивавшихся тогда французами. Но вскоре влияние последних начинает сказываться все сильнее. Особенно это заметно в теории меры и интеграла, и это мы осветим несколько подробнее.

У. Г. Юнг был знаком с борелевским мероопределением (1898 г.). Как говорилось (с. 55), Борель сформулировал его тогда очень кратко и почти не воспользовался им; У. Г. Юнга оно не удовлетворило, поэтому с 1902 г. он начал разрабатывать собственную теорию меры[15]. В 1902—1904 гг. ему удалось построить теорию меры, эквивалентную лебеговской и основанную на определении меры точечного множества как общего значения верхней грани мер замкнутых его подмножеств и нижней грани открытых множеств, содержащих его. Следует, однако подчеркнуть, что к 1904 г. У. Г. Юнг ознакомился с работой Лебега [8], и именно она натолкнула его на окончательную форму определения понятия меры.

Аналогичная ситуация сложилась и в случае интеграла. Начинал У. Г. Юнг независимо от Лебега, вплотную подошел к понятию интеграла, эквивалентного лебеговскому, но опять-таки окончательный толчок юнговским формам определения дали соображения Лебега. Заметим, кстати, что один из юнговских способов определения — через совпадение граней интегральных сумм — оказался, в отличие от многих других подходов, довольно плодотворным в теории интегрирования. Он являлся развитием асколи-пеановского подхода к определению интеграла Римана, но сам У. Г. Юнг этого, кажется, не осознавал. Начиная с этих юнговских работ 1905 г. по теории интеграла, между французскими и английскими математиками происходило как бы своеобразное соревнование по развитию новых концепций интегрирования, по их углублению и обогащению.

В 1901—1904 гг. Лебег построил свою теорию одномерного интегрирования; в 1905 г. к той же теории, как сказано, пришел и У. Г. Юнг. Введенное ими понятие интеграла имело тот недостаток, что было применимо только к абсолютно интегрируемым функциям. Между тем гарнаковское обобщение интеграла Римана позволяло снять это ограничение во многих случаях и не вмещалось в рамки лебеговской концепции. В 1907 г. Гобсон определил интеграл Лебега — Гарнака, соединивший в себе достоинства обоих определений: в 1909 г. он продолжил изучение

---

[15] Напомним, что лебеговское мероопределение появилось в печати в 1902 г. [8]; краткие указания на него в заметке Лебега [7], даже если бы они были известны У. Г Юнгу, тогда было трудно еще воспринимать как новое мероопределение, а только, разве, как указание на важность понятия меры.

его свойств. Но в 1912 г. Данжуа предложил новую концепцию интегрирования, включившую в себя интегрирование в смысле Лебега — Гарнака как частный случай, и определение Гобсона было забыто. С 1916 г. Хинчин и Данжуа начали изучать еще более общий интеграционный процесс, зато в 1929 г. Титчмарш ввел концепцию A-интеграла, не вмещающуюся в интегралы Данжуа.

До 1910 г. французы игнорировали идею стилтьесовского интегрирования. В этом году Лебег заинтересовался ею, но сделал попытку свести интеграл Стилтьеса к своему интегралу. Тогда же Фреше обобщил интеграл Стилтьеса на многомерный случай, но в пределах римано-стилтьесовского подхода. В 1914 г. У. Г. Юнг разработал теорию интеграла Лебега — Стилтьеса, частным случаем которой (но не забытой) оказалась лебеговская концепция.

В 1910 г. Лебег по-новому подошел к многомерному интегрированию — через идею функции множества, но не дошел до многомерного интегрирования по Стилтьесу (это сделал Радон в 1913 г.), а в 1915 г. Фреше, отталкиваясь от соображений Лебега и Радона и привлекая некоторые черты юнговского подхода, предложил чрезвычайно общую теорию, охватившую собой теории Лебега — Радона — Юнга.

В рамках абстрактных соображений Фреше не нашлось места для операции дифференцирования, а тем более для ее связи с интегрированием. Между тем такая связь на протяжении столетий была очень плодотворной. В 1916 г. У. Г. Юнг и независимо в 1918 г. Даниель начали разработку операции дифференцирования функции по функции и ее связей со стилтьесовским интегрированием в одномерном случае, а затем в 1927 и 1930 гг. последний распространил эту связь и на многомерный случай.

Еще более радикальный отход от построений Фреше совершил Бёркил в 1924 г., введя интегрирование функций множества; его интегрирование, развитое затем им самим, Колмогоровым, Гливенко, Ионеску Тульчей и др., далеко превзошло по степени общности концепцию Фреше.

Подобное соревнование происходило не только в рамках столь общих представлений, а доходило до соперничества в довольно конкретных результатах. Лебег, разрабатывая свою теорию интегрирования, не сразу, например, установил ряд свойств интеграла, вроде вопроса о замене переменных, теорем о среднем значении и т. д. В 1909—1910 гг. Гобсон и Лебег почти одновременно обращаются к ним и по-разному устанавливают их.

В общем можно сказать, что в разработке теорий интегрирования англичане оказались достойными соперниками своих французских коллег. И если первоначально, примерно до 1916 г., пальму первенства следовало бы присудить французам, то в последующий период ее пришлось бы отдать англичанам.

Так обстояло дело не только с такими фундаментальными понятиями, как мера и интеграл, но и с отдельными вспомогательными предложениями или даже отдельными фактами. В качестве первого примера приведем такой. Начиная с 1885 г., Арцела в ряде работ пользовался леммой, которую можно сформулировать так: если задана последовательность измеримых множеств, мера каждого из которых превосходит фиксированное число m, то верхний предел этой последовательности есть измеримое множество меры $m-\varepsilon$, где ε сколь угодно мало. В 1903 г. Борель [27] сформулировал ее без доказательства как новое предложение и сделал из нее вывод о том, что всякая B-функция обладает C-свойством. Одновременно к этой же лемме пришел и У. Г. Юнг, причем с осознанием того, что она восходит к Арцела (который рассматривал последовательность множеств, образованных конечным числом интервалов).

Второй пример еще более любопытен. Шёнфлис в своем «Отчете о теории множеств» (1900 г.) неправильно изложил один результат Бэра, интерпретируя его так, будто проекция на прямую линию плоского нигде не плотного множества, не содержащего прямолинейных отрезков или отрезков кривых, является замкнутым нигде не плотным множеством. Бэр заметил эту ошибку Шёнфлиса и сообщил последнему контрпример. До 1905 г. бэровский пример не появлялся в печати, и У. Г. Юнг построил аналогичный пример (1905 г.), опровергающий утверждение Шёнфлиса. Только после публикации У. Г. Юнга Шёнфлис сообщил и пример Бэра.

Если У. Г. Юнг шел к идеям французских ученых в отношении меры и интеграла в значительной мере независимо, то исследования по расходящимся рядам и интегралам Харди начинал после того, как он полностью разобрался в трудах своих французских предшественников. Свои первые мемуары по этой проблематике (1904 г.) Харди начинает с указаний на работы Бореля, Сервана, Леруа и, например, один из мемуаров считает просто дополнением к третьей главе борелевских «Лекций о расходящихся рядах». Не забывает он и работ Чезаро по расходящимся рядам, сопоставляя методы суммирования последнего с методами Бореля.

Интересно вместе с тем, что в то время, как в 1904—1905 гг. У. Г. Юнг уже полностью овладел лебеговской теорией интегрирования, даже переделал ее на свой лад, Харди в 1906 г. о ней еще словно не знает. Это, возможно, объясняется тем, что к тому времени теория интегрирования в смысле Лебега была разработана почти исключительно для функций одного переменного, а Харди занялся теорией кратных рядов Фурье. Поэтому, вероятно, он обратился к интегралу Римана в форме, приданной ему в «Курсе анализа» Жордана. Введя понятие функции с ограниченным изменением для случая двух переменных, Харди распространил ряд результатов Жордана на двойные ряды Фурье.

Поскольку ранее много говорилось об отношении французских математиков к трансфинитным числам, то здесь нелишне отметить, что У. Г. Юнг и Г. Юнг, как бы осуществляя пожелание Бореля, в ряде работ 1909—1916 гг. проделали значительную работу по освобождению доказательств многих теорем теории функций от применения трансфинитных чисел. В частности, в 1911 г. они предложили соответствующее доказательство одной из основных теорем Лебега, что всякая функция с ограниченным изменением имеет производную почти всюду (им, кстати, принадлежит и формулировка этой теоремы в такой общности — ранее она формулировалась и доказывалась при предположении непрерывности функции).

Имелись, конечно, у англичан исследования, не связанные с непосредственным влиянием французов. Примером является цикл работ У. Г. Юнга (1909—1910 гг.) по понятию дифференциала функции нескольких переменных. Отталкиваясь от Штольца, У. Г. Юнг разработал настолько совершенную для того времени теорию дифференцирования, что Валле-Пуссен при подготовке третьего издания своего «Курса анализа бесконечно малых» (1914 г.) оказался вынужденным заново переписать весь раздел о частных производных и дифференциалах в свете изысканий У. Г. Юнга. Фреше [14] начал свои исследования о понятии дифференциала в 1911 г., кажется, независимо от У. Г. Юнга, но в последующем учитывал и результаты последнего.

Подобное описание можно было бы продолжать сколь угодно длинно: достаточно напомнить об исследованиях Гобсона (1908—1913 гг.) по рядам ортонормальных функций; о классификации разрывных функций У. Г. Юнга, основанной на итерации монотонных предельных переходов (1911 г.); о так называемой сверхсуммируемости У. Г. Юнга и связанной с этим сильной сходимостью (У. Г. Юнг, 1912, 1926 гг.; Бёркил, 1928 г.); о необъятном цикле работ по тригонометрическим рядам (Харди, У. Г. Юнг, Поллард, Титчмарш и многие другие) и т. д. Но это увело бы нас слишком далеко от нашей основной темы, поэтому мы скажем в заключение несколько подробнее лишь еще об одной стороне деятельности английских математиков в начале столетия, видимо, тоже связанной с влиянием французов.

Как мы говорили (с. 52), Борель основал серию книг по теории функций, в которых излагались новейшие достижения в этой области и которые принадлежали самому Борелю, Лебегу, Бэру, а затем и другим авторам. За аналогичную работу вскоре взялись и англичане, и мы коротко остановимся на нескольких их книгах раннего периода.

Теория точечных множеств энергично разрабатывалась в последней четверти прошлого столетия и в начале XX в. как в связи с разнообразными теоретико-функциональными применениями, так и независимо от них. Являясь фундаментом теории функций, она излагалась не раз, в частности в упоминавшихся книгах французов. Но обычно в последних ограничивались минимумом сведений, необходимых для рассматриваемых вопросов теории функций. Наиболее полное изложение теоретико-множественных сведений на начало века Шёнфлисом в «Ежегоднике Немецкого математического общества» (1900 г.) имело ряд серьезных недостатков как научного, так и методического характера. Бурное развитие теории функций в начале столетия рождало потребность в более систематическом и детальном изложении теории точечных множеств.

Откликом на эту потребность явилась книга супругов Г. Юнг и У. Г. Юнга «Теория точечных множеств», — вышедшая в 1906 г. первая монография по этому предмету, в которую были включены практически все основные результаты, полученные ко времени ее написания.

Богатая по содержанию, ценная многими имевшимися в ней идеями, особенно топологического характера, она, кажется, не сыграла большой роли в истории теории функций. Одной из причин этого явилась своеобразная форма изложения, вообще свойственная работам У. Г. Юнга и затрудняющая их чтение. Но, скорее всего, главной причиной оказалось появление в следующем году другой фундаментальной книги на английском языке.

Рассмотренные ранее книги Бореля, Лебега и Бэра были посвящены, хотя и большим, но все же частным вопросам теории функций. Более амбициозный замысел сложился у Гобсона: создать монографию, охватывающую все основные ответвления складывающейся науки, начиная с ее фундамента — теории точечных множеств с необходимыми сведениями из теории абстрактных множеств — и кончая ее последними достижениями, причем с достаточно полными библиографическими указаниями. В известном смысле это ему осуществить удалось. Его книга «Теория функций действительного переменного и теория рядов Фурье», вышедшая первым изданием в 1907 г., содержала изложение почти всех направлений исследований и результатов теории функций того времени. Менее оригинальная, чем книга Юнгов, монография Гобсона имела много достоинств дидактического характера и сразу же стала основным руководством по рассматриваемому предмету. Одной из характерных особенностей этой книги является ее историчность: автор стремился придерживаться исторического хода развития рассматриваемых им проблем и снабдил свое изложение огромным ссылочным материалом. Второе, уже двухтомное, издание трактата Гобсона (1921, 1926 гг.), хотя и преследовало ту же основную цель и имело ту же направленность в смысле энциклопедичности и историчности, оказалось не столь полным и по содержанию, и по историческим данным. В разработку теории функций включилось такое большое число ученых, было выдвинуто столько новых идей и получено новых результатов, что они уже не вмещались в рамки единого трактата. Еще более справедливо это для третьего издания.

Заслуживают также упоминания, даже в столь кратком изложении, книги Бромвича «Введение в теорию бесконечных рядов» (1908 г.) и Харди «Порядки бесконечности» (1910 г.), посвященные уже специальным темам теории функций. Первая из них, скромно названная «Введением» и содержащая свыше полутысячи страниц добротного текста, охватывала почти всю проблематику теории рядов, включая расходящиеся ряды, и до появления в 1921 г. книги Кноппа «Теория и применения бесконечных рядов» являлась основной монографией по этому предмету и переиздавалась в 1926 г. Вторая, вышедшая почти одновременно с борелевскими «Лекциями по теории роста», была посвящена в основном тем же вопросам и так же переиздавалась в 1924 г. К уже указывавшимся параллелям в исследованиях французских и английских математиков можно добавить и одновременное обращение Бореля и Харди к одной и той же теме.

За четырьмя названными книгами[16] вскоре последовали многие другие, и английская монографическая литература по теории функций вскоре превзошла французскую.

Заканчивая настоящий параграф, мы можем лишь еще раз повторить, что воздействие идей французских ученых на английских математиков было очень сильным, но последние вместе с тем проявили, пожалуй, бóльшую оригинальность, чем их итальянские коллеги.

§ 5. Россия

История теории функций и множеств в России во многом аналогична ее истории в Англии. Как там, так и здесь фактически выпал первый ее период; и в той и в другой стране, в отличие от Италии, имелся значительный, если можно так выразиться, задел теоретико-функциональных идей, выраставших из исследований по классическому анализу; в обеих странах начало работ по теории функций носило взрывной характер, причем в России этот взрыв произошел на десятилетие позднее, чем в Англии, несколько меньшей первоначальный мощи, но, пожалуй, с более сильным и продолжительным последействием. В отличие от Англии, где, по-видимому, подготовительная работа для перехода на новый уровень исследований не проводилась или про-

[16] Мы оставили в стороне книги, в которых теоретико-функциональная направленность выражена менее ярко, вроде книг Харди «Интегрирование функций одного переменного» (1905 г.) и «Курс чистой математики» (1908 г).

ходила довольно скрытно (возможно, такое впечатление складывается потому, что период второго полустолетия истории анализа в Англии просто не исследован), в России этому всплеску предшествовала довольно значительная подготовительная работа. Французские ученые оказали сильное воздействие на ученых и Англии, и России, но российские математики оказались, пожалуй, более верными приверженцами своих французских предшественников и современников. Идеи итальянских ученых повлияли и на английских, и на русских математиков, но в Англии их влияние, особенно на первых порах, было значительно более сильным; в Россию они проникли скорее в преломлении их в трудах французов, и, кажется, лишь, Г. М. Фихтенгольц начинал с некоторых идей Арцела да А. А. Адамов непосредственно отправлялся от идей Дини, а остальные российские математики пользовались теми соображениями итальянцев, которые претерпели французское воздействие.

Как и в предшествующем параграфе, начнем с краткого обзора некоторых идей и результатов теоретико-функционального характера, выраставших в работах по классическому анализу. Из числа авторов подобных работ назовем лишь Михаила Васильевича Остроградского (1801—1862), Николая Ивановича Лобачевского (1792—1856), Виктора Яковлевича Буняковского (1804—1889), Пафнутия Львовича Чебышева (1821—1894), Николая Яковлевича Сонина (1849—1915), Владимира Андреевича Стеклова (1864—1926), Пирса Георгиевича Боля (1865—1921), Георгия Феодосьевича Вороного (1868—1908).

Остроградский во время пребывания во Франции в 1822—1826 гг. овладел многими важнейшими аналитическими идеями французских ученых того времени и внес существенный вклад в их последующее развитие. Отметим лишь его исследования по разложениям функций в ряды по собственным функциям дифференциального оператора, в частности в тригонометрические ряды, по преобразованиям кратных интегралов и замене переменных в них [17]. Небезынтересен подход Остроградского к понятию интеграла через среднее значение функции (1841 г.), порой применявшийся и в XX столетии.

Значительны аналитические достижения и Лобачевского. Относительно его результатов в теории тригонометрических рядов отошлем к с. 95—102, 127—130, 170—171 книги Паплаускаса [1] и отметим лишь его доказательство тригонометрического разложения функции при иных условиях, чем у Дирихле, принцип локализации, почленное интегрирование рядов Фурье и обобщение интеграла Фурье. В работах по этой проблематике у Лобачевского сложилось общее понятие непрерывной функции, и он предложил его определение (1834 г.) за три года до

---

[17] Подробнее см Юшкевич [1, с 278—293]

появления соответствующего определения Дирихле [18].

В теории функций важную роль играет неравенство

$$\left[\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b \varphi^2(x)\,dx.$$

В подавляющем числе работ его называют неравенством Шварца, хотя за четверть века до соответствующей публикации последнего это неравенство было получено Буняковским (1859 г.) [19]. Заслуживает упоминания и некоторое развитие им (1846 г.) указанного выше подхода Остроградского к понятию интеграла.

Конструктивная теория функций в смысле Чебышева — Бернштейна является настолько самостоятельным разделом теории функций действительного переменного, что к ней неприменима та периодизация развития последней, которой мы пользовались в настоящей работе. Она тоже вырастала в рамках классического анализа, в малой мере прошла теоретико-множественный этап, чуть ли не сразу перейдя в период, когда в ней стали использоваться методы функционального анализа. Это, отчасти, естественно в силу ее проблематики, так как основным объектом ее изучения являются непрерывные функции.

Сама проблематика чебышевской теории восходит к трудам французов — Лапласа, Фурье, Понселе. Но именно начиная с работ Чебышева (1854—1882 гг.), продолженных трудами Е. И. Золотарева, А. А. Маркова, В. А. Маркова и др. [20], конструктивная теория функций выросла в ранг самостоятельной дисциплины. Здесь правильнее будет говорить о влиянии идей русских ученых на французов. Уже в 1864 г. Бертран включил в свой «Трактат по дифференциальному исчислению» ряд результатов Чебышева; от работ последнего отталкивались Борель (1905 г.), Фреше (1907—1908 гг.) и др. Один из новых сильных толчков развитию конструктивной теории функций дало своеобразное доказательство Лебегом (1898 г.) теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной функции многочленами, и после включения в эту проблематику Валле-Пуссена, Джексона, Бернштейна, а затем и других, эта ветвь анализа выросла в огромную самостоятельную доктрину.

Нельзя не сказать коротко о цикле исследований Чебышева (1874, 1888 гг.), А. А. Маркова (1884—1885, 1900 гг.) и К. А. Поссе (1886 г.) по теории предельных величин интегралов. Помимо их значения для самой этой теории, они сыграли существенную роль в подготовке введения интеграла Стилтьеса; отчасти отсю-

---

[18] Мы считаем, что и Лобачевский, и Дирихле сформулировали лишь определение понятия непрерывной функции, а не произвольной функции действительного переменного.

[19] См. Юшкевич [1, с. 299].

[20] См. Юшкевич [1, с. 405—426] и указанную там литературу.

да, а отчасти из других соображений выросли и работы А. А. Маркова, Г. Ф. Вороного и А. М. Ляпунова по теории интеграла Стилтьеса и его приложениям в период, когда математики в основном еще не были знакомы с этим понятием (1900—1905 гг.). В этой же проблеме предельных величин интегралов у Маркова, Чебышева и Поссе появились обобщенные функции.

Совсем коротко упомянем о дифференцировании с произвольным индексом у Сонина (1872 г.) и А. В. Летникова (1874 г.); об ортогональных многочленах Сонина (1880 г.) и его методе ортогонализации, предложенном за десятилетие до появления соответствующего метода Шмидта (1907 г.); о почти-периодических функциях Боля (1893 г.), от которых затем отталкивался Бор; о важных работах Стеклова по теории замкнутости ортогональных систем функций, выполненных на рубеже XIX—XX вв.; о методе суммирования расходящихся рядов Вороного (1902 г.), переоткрытом Нёрлундом в 1919 г.; об обобщенном пределе (пределе по фильтру) у С. О. Шатуновского (1906—1907 гг.), развитом также Д. А. Крыжановским (1913—1924 гг.).

Таким образом, в России, как и в Англии, сложился относительно большой задел теоретико-функциональных идей и методов. Но помимо этого здесь, в отличие от Англии, в начале XX в. была проведена, как уже упоминалось, заметная подготовительная работа, предшествовавшая подъему исследований непосредственно по теории функций. Эта работа состояла в просветительской и учебно-воспитательной деятельности (переводы на русский язык научной, учебной и научно-популярной литературы, включение в издававшиеся в России учебники сведений по теории множеств и функций, создание специальных семинаров и т. д.) большой группы ученых: А. В. Васильева (1853—1929), И. В. Слешинского (1854 — 1931), Б. К. Млодзиевского (1858 — 1923), Б. Я. Букреева (1859—1962), Д. А. Граве (1863—1934), В. Л. Некрасова (1864—1922), И. И. Жегалкина (1869—1947), Н. Н. Парфентьева (1877—1943), Г. А. Грузинцева и др. Особо следует сказать о книгах Некрасова «Строение и мера линейных точечных областей» (1907 г.) и Жегалкина «Трансфинитные числа» (1908 г.) — первых книгах в России и одних из первых в мире, посвященных специально теории множеств. Если Некрасова опередили только Юнги и их книга была написана на более высоком научном уровне, то монография Жегалкина, посвященная абстрактной теории множеств, не только не уступала в научном и методическом отношении первой монографии по этому предмету Гессенберга (1906 г.), но и превосходила ее во многих пунктах[21].

---

[21] Некоторые авторы считают, что Д. А. Граве еще до Лебега пришел к идее лебеговского интегрирования. Мы полагаем, что такое мнение ошибочно: функция Граве является монотонной и интегрируема по Риману, так что обобщения понятия интеграла она не требовала; способ Граве вычисления интеграла от нее являлся просто вычислительным приемом.

Тем не менее решающим фактором подъема теоретико-функциональных исследований в России — если исключить труды Бернштейна по конструктивной теории функций, явившиеся непосредственным продолжением чебышевского направления, — стало воздействие трудов французских ученых.

Это воздействие было непосредственным, так как основоположники московской школы теории функций и множеств — Дмитрий Федорович Егоров (1869—1931) и Николай Николаевич Лузин (1883—1950) — в работах по теории функций и множеств отталкивались от трудов французов. Егоров и Лузин сразу же включились в разработку, если можно так выразиться, французской тематики и увлекли за собой своих младших коллег и учеников: Вячеслава Васильевича Степанова (1889—1950), Ивана Ивановича Привалова (1891—1941), Дмитрия Евгеньевича Меньшова (р. 1892 г.), Александра Яковлевича Хинчина (1894—1959), Михаила Яковлевича Суслина (1894—1919), Павла Сергеевича Александрова (р. 1896 г.) [22]. Во втором десятилетии нынешнего века они опубликовали около полусотни интересных работ по теории функций и множеств, включая фундаментальную лузинскую диссертацию «Интеграл и тригонометрический ряд» (1915 г.).

Первыми знаменитыми результатами московской школы теории функций и множеств явились теоремы Егорова (1911 г.) и Лузина (1912 г.).

Мы уже отмечали (с. 155), что еще в 1903 г. Лебег сформулировал обе эти теоремы (а последнюю в том же году и даже двумя неделями ранее опубликовал Борель) и что их почти доказали соответственно Северини (1910 г.) и Витали (1905 г.). Тем не менее в математической литературе они называются по фамилиям русских математиков, и это во многом справедливо, так как Егоров и Лузин не только дали развернутые доказательства и глубже осознали значение этих теорем, но — и это главное — выявили чрезвычайно широкий диапазон их применений в самых разнообразных вопросах теории функций. Так, Егоров подсказал Лузину идею применения своей теоремы для установления C-свойства измеримых функций. В свою очередь, Лузин применил C-свойство для получения другого фундаментального результата, а именно: что для всякой измеримой конечной почти всюду функции $f(x)$ существует непрерывная функция, имеющая $f(x)$ своею производной почти всюду (1912 г.). Он же воспользовался теоремой Егорова для доказательства стремления к нулю коэффициентов тригонометрического ряда, сходящегося на множестве положительной меры, а также одновременной сходимости абсолютных величин членов тригонометрического ряда и абсолютных величин его коэффициентов (1912 г.), а из своей теоремы вывел обобщение на измеримые почти везде конечные функции те-

[22] Вместе с ними той же проблематикой занялся В. К. Серпинский.

оремы Вейерштрасса о представлении непрерывных функций многочленами (1912 г.) и т. д. С тех пор диапазон применений теорем Егорова и Лузина все рос как в исследованиях российских, так и иностранных ученых.

В какой мере Егоров и, особенно, молодой Лузин пришли независимо к этим фундаментальным положениям теории функций, сказать трудно. Можно предполагать, что Егоров знал о формулировках Лебегом этих теорем в заметке [11]. Действительно, указанная заметка Лебега выросла из лебеговских лекций 1902—1903 гг., которые как раз слушал Егоров; ее Лебег цитировал не раз в своих других работах, в частности в «Лекциях по тригонометрическим рядам» [24, с. 10], а Егоров, доказывая свою теорему, ссылался на названные «Лекции» и притом именно на ту же самую страницу, хотя и в другой связи — на теорему о сходимости по мере, но и Лебег сформулировал «теорему Егорова» как следствие той же теоремы [11, с. 1229].

На вопросы о том, почему Лебег, понимавший важность этих теорем, особенно теоремы Лузина, еще в 1903 г., не стал ни пользоваться ими в своих трудах, ни претендовать на приоритет, как это не раз делал в других случаях, можно (разумеется, предположительно) ответить так. Лекции Лебега 1902—1903 гг. знал Борель, о C-свойстве у них была переписка до публикации соответствующих их формулировок его, но Борель чуть опередил Лебега, и последнему при печатании заметки [11] пришлось сослаться на заметку Бореля [27], признав — быть может, против своего желания — первенство Бореля в установлении C-свойства. Но вскоре между ними сложились напряженные отношения, вылившиеся после 1910 г. в довольно непривлекательную полемику, в частности приоритетного характера в отношении меры и интеграла, в которой Борель, помимо прочего, упрекал Лебега и в том, что тот слишком часто выступает с приоритетными претензиями. Применять C-свойство и теорему Егорова со ссылкой на свою заметку [11] означало для Лебега вместе с тем необходимость признавать заслугу Бореля в установлении C-свойства. После же обвинения в пристрастии к приоритетным претензиям выставлять их еще раз и к новым авторам было бы не очень удобным. Так это было или нет — теперь судить трудно.

В начале 10-х годов XX в. в исследованиях по теории функций и множеств выявились многие нерешенные проблемы, одни из которых были явно сформулированы, а другие проявлялись при более тщательном анализе. Названные выше математики России решили немало таких проблем и в свою очередь поставили немало других. Укажем несколько примеров.

В 1906 г. Фату [4, с. 398], установив, что существуют тригонометрические ряды со стремящимися к нулю коэффициентами, которые расходятся на всюду плотном множестве нулевой меры, поставил вопрос о возможности существования подобных рядов, которые расходились бы на множестве положительной меры. Он высказал предположение, что такие ряды существуют, но доказать это не сумел. На вопрос Фату утвердительный ответ дал в 1912 г. Лузин, построив пример тригонометрического ряда со сходящимися к нулю коэффициентами, но расходящегося почти всюду. Тогда же Штейнгауз, преобразовав пример Лузина, получил пример подобного ряда, расходящегося уже в каждой точке. Интересно, что ни сам Лузин, ни Штейнгауз, и долгое время остальные математики, занимавшиеся этим вопросом, не заметили, что у построенного Лузиным в той же работе расходящегося всюду степенного ряда действительная и мнимая части представляют собой расходящиеся всюду тригонометрические ряды со стремящимися к нулю коэффициентами. Это только в 1951 г. обнаружил С. Б. Стечкин.

Знаменитый пример Меньшова тригонометрического ряда с отличными от нуля коэффициентами, но сходящегося всюду к нулю (1916 г.), на первый взгляд меньше связан с проблематикой французов. Действительно, проблемой единственности тригонометрического разложения, восходящей к Кантору (1870—1872 гг.), занимались многие математики [23], но преимущественно не французские. Лебег, как мы говорили (с. 71), высказав в 1902 г. неверное утверждение, что множествами единственности являются произвольные замкнутые множества нулевой меры, в следующем году исправил его, заменив указанные множества приводимыми. Интересно, однако, то, что предшествующее утверждение он считал тогда не неверным вообще, а рассматривал только как не доказанное [12, с. 466, сноска], полагая, по-видимому, что теорема единственности справедлива, если множеством исключительных точек является любое множество нулевой меры. Такого утверждения, кажется, не содержалось в работах Лебега, но уверенность, что оно справедливо, наверно, существовала и у Лебега, и у других математиков. Для этой уверенности основания были: исследования первых полутора десятилетий показали, что множествами меры нуль можно было пренебрегать в самых разных вопросах метрической теории функций, в том числе некоторыми классами их в проблеме представления функций тригонометрическими рядами, и Лузин в 1915 г., опираясь на результаты Кантора (1872 г.) и У. Г. Юнга (1909 г.) [24], прямо написал о маловероятности утверждения, что произвольное множество меры нуль не является множеством единственности. Тем неожиданнее был пример Меньшова. Этот пример, помимо связи его с указанными соображениями Лебега, примыкает к проблематике французов и потому, что в нем речь идет о сходящемся почти всюду три-

---

[23] См. Паплаускас [1, с. 215—235].

[24] К которым можно было бы добавить лебеговский результат 1903 г. о приводимых множествах, передоказанный в 1907 г. Гобсоном, хотя и перекрытый теоремой У. Г. Юнга о том, что всякое счетное множество является множеством единственности, но дававший лишний довод в пользу утверждения Лузина.

гонометрическом ряде, а подобная сходимость сложилась преимущественно в их трудах. Вместе с тем значение его заключалось и в том, что он приводил к мысли об ограничении некоторого засилья теоретико-мерного метода, столь широко применявшегося французами, особенно Лебегом: в такой важной задаче теории функций, как единственность разложения функции в тригонометрический ряд, метод меры не приводил к цели.

Еще более, пожалуй, чем в случае примера Меньшова, связь изысканий русских и французских ученых, а наряду с этим отход от некоторых общих установок последних проявились в изучении суслинских и проективных множеств.

Напомним предшествующую ситуацию. Борель и Бэр ограничились изучением B-множеств и B-функций. Подходы Лебега, Фату, Фреше, Данжуа были более общими, но их соображения очень во многом связаны с аксиомой Цермело и трансфинитными числами. В описанной ранее полемике применение рассуждений, основанных на этих допущениях, ставилось под сомнение, а полученные с их помощью результаты объявлялись неэффективными, и истинными функциями и множествами преимущественно считались только те, которые получались и изучались без них. Лебег, построив в 1905 г. первый пример функции, не входящей в классификацию Бэра, не убедил других (да, видимо, и себя), что подобные функции заслуживают детального изучения, поскольку его построение опиралось на совокупность всех трансфинитных чисел второго числового класса, и хотя такие функции и множества фактически интенсивно изучались [25], но у большинства математиков не было уверенности, что объекты этого изучения окажутся полезными. Истинными множествами и функциями считались B-множества и B-функции, а что сверх того, то в некотором смысле рассматривалось, как забава ума.

П. С. Александров в 1916 г. изучая вопрос о мощности борелевских множеств, ввел A-операцию над множествами, не опирающуюся на трансфиниты и являющуюся эффективной в указанном смысле. В следующем году М. Я. Суслин, анализируя ошибку Лебега 1905 г., состоящую в утверждении, что проекция плоского B-множества на прямую является линейным B-множеством, при помощи A-операции построил эффективный пример точечного множества, не являющегося B-множеством, и вместе с тем выделил класс A-множеств, включающий в себя B-множества как частный случай. Тем самым был открыт целый мир множеств (и функций), значительно более обширный и тем не менее доступный эффективному изучению, чем сразу же занялись Лузин, Серпинский, а затем и многие другие, но — и это любопытный факт — не французы.

Если A-множества оказались добропорядочными — почти сразу же было установлено, что в случае несчетности они имеют

[25] Ими были произвольные измеримые функции $f(x)$ и соответствующие им лебеговские множества $E[f(x) > \alpha]$.

мощность континуум, измеримы по Лебегу и обладают свойством Бэра (Суслин и Лузин, 1917 г.), то следующий класс множеств — проективных — оказался неизмеримо сложнее.

Операции проектирования и взятия дополнения множества применялись чуть ли не с самого возникновения теории множеств, однако длительное время они не изучались как самостоятельные операции теории множеств, а тем более не изучались множества, получаемые при их помощи. Вместе с тем известная обиходность этих операций создавала иллюзию простоты результата, получаемого при их применении, и порой приводила к довольно грубым ошибкам, две из которых — Шёнфлиса (1900 г.), исправленная Бэром и У. Г. Юнгом, и Лебега (1905 г.), исправленная Суслиным, — уже указывались. В 1905 г. Лебег [21, с. 191] общим образом ввел операцию проектирования и применил ее для изучения неявных функций, но, пользуясь ею наряду с операцией взятия дополнения, не дошел до мысли комбинированного применения этих двух способов образования новых множеств, что в значительной мере позволило бы ему расширить классы объектов, которые он характеризовал термином «называемые», сохраняя за ними свойство быть эффективными в требуемом им смысле. В 1917 г. Суслин, введя A-множества, показал, что в то время, как проектирование в применении к B-множествам может привести к неизмеримому по Борелю множеству, для введенных им A-множеств дело обстоит иначе: проекция A-множества всегда является тоже A-множеством, а значит, одна эта операция, позволяя выйти за пределы B-множеств, не дает возможности расширить класс A-множеств. Лебег, возвратившись в 1918 г. [37, с. 240—243] к этим вопросам, отметил, что операцию проектирования нельзя свести к традиционным операциям, которыми пользовались французские авторы для построения B-множеств (что, собственно, вытекало из результатов Суслина, Лузина и Серпинского относительно A-множеств), но ограничился лишь указанием этой операции, наряду с другими, позволяющими получать и изучать неизмеримые по Борелю множества, и по-прежнему не связал ее с операцией перехода к дополнению. Не сделали этого на первых порах Лузин и Серпинский, поскольку очередной задачей являлось изучение введенных Суслиным множеств.

После того как основные свойства A-множеств были изучены, возникла проблема расширения этого класса множеств, решающим шагом в постановке которой явилось открытие Лузиным того факта, что дополнение A-множества может оказаться множеством новой и очень сложной природы (1925 г.) [26]. Отсюда он пришел к идее проективных множеств [27], получаемых из B-множеств при

---

[26] Что дополнение A-множества может не быть A-множеством, установил еще Суслин в 1917 г. Но тогда этому не было придано надлежащего значения.

[27] Почти одновременно и независимо от Лузина к целесообразности введения проективных множеств пришел и Серпинский (1925 г.).

помощи конечного числа операций проектирования и взятия дополнения. Эти множества изучались затем самим Лузиным, Серпинским и др.

Проективные множества входят в категорию «называемых», по Лебегу, они эффективно задаются в том смысле, который этим словам придавали французские авторы, и, казалось бы, не выходят за пределы «хороших» множеств, доступных изучению традиционными теоретико-множественными методами. Оказалось, однако, что дело обстоит далеко не так. Вопросы об их мощности, измеримости и свойстве Бэра оказались необычайно сложными и привели к мнению, что для их изучения недостаточно средств теории множеств вообще. Во многом именно в связи с исследованием проективных множеств по-новому переосмысливались проблемы, волновавшие французских ученых, — аксиома Цермело, трансфинитные числа и т. д. Этим мы заниматься не предполагаем [28], а перейдем к следующему примеру взаимосвязи идей французских и русских ученых.

В предыдущем параграфе мы привели пример соревнования французских и английских математиков в разработке теории интегрирования. Аналогичную ситуацию целесообразно описать и здесь. Упомянутая выше теорема Лузина о существовании непрерывной примитивной у всякой измеримой почти везде конечной функции (1912 г.) не могла служить для определения понятия интеграла вследствие неоднозначности процесса, примененного автором для нахождения примитивной. Более того, как показал Егоров (1912 г.), для получения лузинской примитивной не может служить какой-либо интеграционный процесс, сохраняющий для интеграла такие естественные свойства, как аддитивность и неотрицательность при неотрицательной подынтегральной функции. Тем не менее сам факт существования примитивной у произвольной измеримой почти везде конечной функции, естественно, стимулировал поиски нового, по сравнению с лебеговским, гобсоновским и борелевским, определениями интеграла. Как бы в ответ на это — хотя и вне какой-либо связи с результатом Лузина — появляется определение интеграла, предложенное Данжуа в том же 1912 г. Лузин сразу же вводит понятие функции с обобщенным ограниченным изменением и показывает, что неопределенный интеграл Данжуа является такой функцией; находит необходимое и достаточное условие того, чтобы непрерывная и с обобщенным ограниченным изменением функция являлась неопределенным интегралом Данжуа от своей производной (существующей, как показал Лузин, и конечной почти всюду у всякой такой функции), а также доказывает справедливость второй теоремы о среднем значении для этого интеграла. Тогда же Лузин указал на целесообразность обобщения ряда Фурье до ряда Фурье — Данжуа.

---

[28] См. Л В. Келдыш [1].

Интеграл Данжуа помог решить ряд задач теории функций (отыскание примитивной по конечной производной, вычисление коэффициентов рядов Фурье при более широких условиях, чем при применении интеграла Лебега и т. д.), но вместе с тем оказался недостаточным в ряде других вопросов: не позволял восстанавливать примитивную в более общих ситуациях, не давал возможности определять коэффициенты сходящихся тригонометрических рядов, когда функция была не интегрируема по Данжуа и т. п. К тому же в конструкцию этого интеграла прочно входили «подозрительные» трансфинитные числа. В 1915 г. проблемой обобщения понятия интеграла занялся Лузин (фактически, конечно, раньше; мы, как и в других местах, приводим дату публикации соответствующей работы, если не оговорено противное), чему посвящена значительная часть его диссертации «Интеграл и тригонометрический ряд». В общем Лузину здесь не удалось сформулировать новое понятие интеграла, но в теории интегрирования (и далеко не только в ней) он получил весьма важные результаты, послужившие исходными пунктами многочисленных последующих изысканий большого числа математиков.

При анализе борелевского интеграла Лузин модифицировал его, заменив в предложенной Борелем конструкции римановские суммы лебеговскими. Он показал, что интеграл этого типа будет не общее интеграла Данжуа, но предположил, что он будет эквивалентным последнему. Это предположение импонировало ему тем, что, в то время как в конструкции интеграла Данжуа входят трансфинитные числа, в предложенной им модификации борелевского определения они не содержались. Поскольку же применение трансфинитных чисел осуждалось отдельными математиками, то в случае предположенной Лузиным эквивалентности определение типа Бореля приобретало бы немаловажный интерес. Однако в следующем году ученик Лузина, Д. Е. Меньшов, показал, что существуют функции, интегрируемые по Данжуа, но не интегрируемые по Борелю.

В том же 1916 г. другой ученик Лузина, А. Я. Хинчин, сделал нечто существенно большее. Проанализировав способ определения интеграла, предложенного Данжуа, и сняв некоторые ограничения, наложенные последним на условия существования, Хинчин получил чрезвычайно общее определение интеграла, включающее в себя интеграл Данжуа 1912 г. как весьма частный случай. В этом он несколько опередил Данжуа, который сам пришел к тому же понятию, называемому теперь часто интегралом Данжуа — Хинчина.

Опередил Хинчин Данжуа и во введении асимптотического или аппроксимативного дифференцирования. Свое определение асимптотической производной Хинчин предложил в 1914 г.; в 1915 г. его опубликовал Лузин; затем, введя новое определение интеграла в 1916 г., Хинчин связал эти две операции друг с другом, а еще через год изучил свойства нового дифференцирования более подробно. Соответствующую аппроксимативную производную Данжуа ввел в 1916 г., тут же связав ее со своим новым определением интеграла, а затем в 1916—1917 гг. детально изучил эти две операции в их взаимосвязи. Оба автора возвращались к тем же вопросам и впоследствии, но у них уже не было столь близкого совпадения в полученных ими научных результатах.

В начале столетия русские математики развивали и применяли понятие интеграла Стилтьеса. Французы не обращались к нему до 1910 г., но затем сразу поднялись до интеграла Фреше (1915 г.). На новый путь подхода к общему понятию интеграла как предела сумм вслед за Бёркилем, но в более абстрактной форме, вступили Колмогоров (1930 г.) и Гливенко (1936—1937 гг.), создав концепции интегрирования значительно более общие, чем интегрирование по Фреше.

Так что, как и в случае с английскими математиками, мы можем сказать, что в разработке теорий интегрирования математики России, а затем СССР не только стали достойными соперниками французов, но превзошли их в ряде отношений.

Подобное описание, как и для развития теории функций в Англии, можно было бы продолжать очень долго даже в пределах второго десятилетия XX века. Ограничимся лишь еще двумя примерами.

Мы не раз имели возможность отметить значительную роль, которую играла теорема Дюбуа-Реймона о существовании функции, растущей быстрее любой функции заданной последовательности все более быстро возрастающих функций, как в чисто математических исследованиях Бореля, так и в его общих взглядах. Вместе с тем указывалось на отрицательное отношение Бореля к аксиоме произвольного выбора. Вскрытие В. В. Степановым (1918 г.) того факта, что при действительном построении предельной функции Дюбуа-Реймона вообще приходится прибегать к аксиоме Цермело, явилось еще одним свидетельством неувязок общих установок Бореля с его конкретными математическими исследованиями.

И в заключение параграфа несколько слов о работе Фихтенгольца «Определенные интегралы, зависящие от параметра» (1913 г.). Она интересна, в частности, тем, что автор, зная о соответствующих результатах французских и английских авторов (Борель, Лебег, Харди, У. Г. Юнг, Гобсон), все же в большей мере отталкивался от работ Арцела более раннего периода. Основным вспомогательным средством для него явилась упоминавшаяся (с. 166) лемма Арцела, но не в той обобщенной форме, которую ей придали Борель и У. Г. Юнг, а в некотором промежуточном виде между формулировками Арцела и Бореля — Юнга. Здесь же (кажется, впервые) отмечено, что теорема о возможности почленного интегрирования функционального ряда с равномерно ограниченными остатками принадлежит Арцела (для интеграла в смысле Римана). Любопытна эта работа и тем, что даже в 1913 г. автор этой статьи, зная лебеговскую теорию интегрирования, все же предпочитает излагать свои результаты для римановских интегралов — отсюда и постоянное обращение к работам Арцела.

Приведенные примеры, число которых можно было бы значительно увеличить, показывают, что хотя воздействие идей французских ученых на развитие теории функций и множеств в России было на первых порах определяющим, но оно не помешало проявлению оригинальности новой, московской школы теории функций и множеств; вскоре математики нашей страны существенно обогатили идейный арсенал новой научной дисциплины и стали не только в один ряд с самими французскими учителями и последователями последних в Италии и Англии, но постепенно образовали наиболее мощный коллектив специалистов по теории функций и множеств, выделяющийся как числом его участников, так и значением результатов, идей и методов, полученных и развитых его членами.

§ 6. Совсем коротко об исследованиях в других странах

Воздействие трудов французских ученых в области теории функций и множеств сказалось, разумеется, не только в Италии, Англии и России. Оно в различное время, в разных формах, часто в специфическом виде, проявлялось и проявляется всюду, где занимались соответствующей математической проблематикой. Большие национальные коллективы сложились в Германии, США, Японии, Польше, Венгрии, Румынии; отдельные крупные ученые занимались и занимаются ею в Австрии, Бельгии, Голландии, Индии, Канаде, Чехословакии, Швеции, Югославии и в других странах, и в каждой из них это воздействие можно обнаружить. Интересной, кстати, спецификой построения теории функций как науки является то, что она в значительной мере представляет собой, если можно так выразиться, молодежную науку — в том смысле, что, как правило, наиболее существенный вклад в ее разработку ученые вносили в период своей молодости, а затем наиболее крупные из них чаще всего уходили из теории функций действительного переменного в другие области: в теорию функций комплексного переменного, в топологию, в функциональный анализ, в теорию дифференциальных и интегральных уравнений, в теорию вероятностей, в математическую логику и т. д. Так обстояло дело с Вольтеррой, Борелем, Муром, Ганом, Лузиным, Радоном, Риссом, Серпинским, Голубевым, Степановым, Александровым, Колмогоровым, Банахом и др. Они, словно испробовав здесь свои силы и отточив мастерство, использовали затем свои способности в несколько иных сферах деятельности. Это не означает, что не было больших математиков, посвятивших или посвящающих свою жизнь почти исключительно теории функций действительного переменного. Достаточно назвать Лебега, Данжуа, У. Г. Юнга, Меньшова, Зигмунда и др., чтобы понять, что и эта наука является достаточно обширным полем применения усилий самых выдающихся людей. Правда, и у них достаточно отчетливо намечены тенденции выхода за пределы собственно теории функций, но они вызваны, скорее, не стремлением сменить область деятельности, а желанием расширить круг применений идей и методов разрабатываемой ими науки.

В целом же теория функций и множеств остается глубоко интернациональной наукой. Ее история еще далеко не написана, и нижеследующие примеры, предназначенные для иллюстрации воздействия научной мысли французских ученых, носят довольно случайный характер.

Несколько неудачным дебютом венгра Ф. Рисса в теории функций (1905 г.) было обобщение теоремы Бореля о конечном покрытии [29] и применение ее для доказательства некоторых важных теорем анализа, а первые его существенные достижения — теорема Рисса — Фишера (1907 г.) и введение сходимости по мере (1909 г.) — не только опирались на основные идеи французов, но и доказывались при помощи техники, разработанной последними.

Говоря ранее о сходимости почти всюду, мы связывали введение этого вида сходимости функциональных последовательностей с именем Лебега, и это соответствует фактическому положению вещей, поскольку в его работах ее можно проследить, начиная с 1901 г. Однако в первом десятилетии нашего века она не была осознана достаточно полно как самостоятельный вид сходимости, и немец Вейль в 1909 г., отправляясь от лебеговских «Лекций об интегрировании и отыскании примитивных функций» (1904 г.), в которых она неоднократно использовалась, но не достаточно четко была отделена от обычной сходимости всюду, ввел ее как новый вид сходимости, назвав в основном равномерной, и дал ей новые важные применения. Пожалуй, лишь после этого, а особенно после теоремы Егорова (1911 г.), которой было установлено тождество вейлевской в основном равномерной сходимости и сходимости почти всюду для множеств конечной меры, лебеговская сходимость была отделена от обычной.

Фундаментальная работа австрийца Радона «Теория и применения абсолютно-аддитивных функций множества» (1913 г.) представляла собой соединение идеи стилтьесовского интегрирования с основными соображениями, изложенными Лебегом в 1910 г. [32]. При построении новой теории интегрирования Радон шаг за шагом следовал ходу мыслей Лебега в его мемуаре «Об интегрировании разрывных функций». Радону не удалось

[29] Неудачным мы назвали его только потому, что Рисс тогда не знал об аналогичных обобщениях У. Г. Юнга и Лебега, риссовы доказательства вполне оригинальны.

построить теорию дифференцирования, обобщавшую изложенную в лебеговском мемуаре, но зато он без нее сумел обобщить теорему Лебега о представлении вполне аддитивной и абсолютно непрерывной функции интегралом от ее производной, открыв тем самым новый подход к самому понятию производной функции множества.

Одна из основных теоретико-функциональных работ бельгийца Валле-Пуссена «Интеграл Лебега. Функции множества. Классы Бэра» (1916 г.), как показывает уже само ее название, являлась скорее методической обработкой идей французских ученых. Там же, где он выходил за их пределы, он оказывался не слишком оригинальным. Так, например, он построил более общую, чем лебеговская, теорию меры, но его в этом на три года опередил Радон, о чем тогда Валле-Пуссен не знал.

Каратеодори, грек по происхождению, в своих «Лекциях о функциях действительного переменного» (1918 г.), в отличие от традиционных тогда способов изложения теорий меры и интеграла, характеризовавшихся тем, что лебеговские обобщения излагались наряду с другими, предшествующими им, с самого начала вводил именно лебеговскую теорию, а факты теорий интегрирования по Риману и меры Пеано — Жордана преломлялись через призму лебеговского подхода. Такое расположение материала Каратеодори считал одним из важных достоинств своей книги.

Цикл работ румына Стоилова (1923—1925 гг.) по обращению непрерывных функций опирался, как он подчеркивал сам, целиком и почти единственно на теорему Лебега о дифференцируемости функции с ограниченным изменением, а отправлялся он от изучения бэро-лебеговских множеств $E[f(x)>\alpha]$ для рассматриваемых им функций.

Голландец Риддер, приступая к изучению аппроксимативно непрерывных функций нескольких переменных (1929 г.), исходил из соответствующих результатов Данжуа не только в отношении общих соображений, но и в технических средствах рассуждений.

Поляк Никодим строил в 1930 г. ту же самую теорию интегрирования, что и Фреше в 1915 г., лишь несколько модифицировав подход к ней. Для интеграла такой общности он доказал знаменитую теорему Радона — Никодима, установленную, как говорилось ранее, Радоном, а еще ранее Лебегом при менее общих предположениях.

Болгарин Тагамлицкий, изучая в 1947 г. вопрос об интегрировании последовательностей суммируемых по Лебегу функций, не только оставался в рамках основных концепций французской школы, но и привлекал для доказательства своих утверждений рассуждения Фату 1906 г.

Эти примеры лишь в слабой степени характеризуют непосредственное воздействие работ французских математиков на математическую мысль представителей самых разных стран. Но в сочетании со всем сказанным в настоящей главе, особенно учитывая опосредствованное воздействие через труды прямых продолжателей дела французов, они лишний раз свидетельствуют о мощи этого влияния. А если к этому присоединить то, что очень многие результаты, идеи и методы, разработанные французскими учеными при изучении точечных множеств евклидовых пространств и действительно-значных функций на таких множествах, были затем перенесены в топологию, функциональный анализ, абстрактную алгебру, даже кибернетику, то сила воздействия оказывается еще более зримой.

§ 7. Воздействие на развитие других математических дисциплин

Мы приняли ту точку зрения, что теория функций действительного переменного является обобщением на функции действительного переменного, заданные на множествах евклидова пространства, математического анализа в узком смысле, есть классический анализ на новом этапе его развития. А этот анализ был тесно связан не только со всевозможными его ответвлениями аналитического характера (теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения, аналитическая и дифференциальная геометрии, вариационное исчисление и т. д.), но и практически со всеми разветвлениями математической науки — от теории чисел и до математического естествознания.

Отсюда априори вытекает, что и теория функций действительного переменного необходимо должна быть связана со всей совокупностью математических наук. И на самом деле положение вещей именно таково: взаимосвязи и взаимовлияния теории функций и остальной математики необычайно многообразны. Мы, как и во всей настоящей главе, ограничимся отдельными примерами воздействия теоретико-функциональных идей и методов на развитие других математических дисциплин с естественным упором на работы французских ученых.

Яркий пример этого воздействия дается историей функционального анализа, что вполне понятно, так как последний тоже является учением о функциях (функционалах и операторах), только с более абстрактными областями задания (функциональными пространствами и множествами в таких пространствах) и областями значений.

Элементы функционального анализа складывались на протяжении XIX столетия, а с 80-х годов, главным образом в трудах Вольтерры и Пинкерле, он стал перерастать в большую самостоятельную науку. В то время преобладающей аналитической дисциплиной была теория функций комплексного переменного с римано-вейерштрассовскими подходами к ее построению. Поскольку функциональный анализ мыслился как непосредственное обобщение теории функций, то естественно, что планы построения последней стали прообразами планов создания функционального анализа. Вольтерра взял за образец риманову теорию, а Пинкерле — вейерштрассову. Ими, а также их учениками и последователями на протяжении примерно двух десятилетий была проделана большая работа по созданию новой науки, но все же исследования в этой области не получили тогда должного размаха.

Формирование на рубеже XIX—XX вв. теории функций действительного переменного с ее более абстрактным подходом, с более тонкими и строгими методами привело к пересмотру самих принципов построения функционального анализа: на передний план аналитических изысканий выступила теория функций и множеств в ее французской трактовке, поэтому естественным оказалось намерение взять за образец именно эту обновленную дисциплину с ее более абстрактным подходом.

Этот пересмотр начался в окружении Адамара и был вкратце очерчен им еще в 1897 г. на Международном математическом конгрессе [2], а новый план построения функционального анализа — по образу и подобию теории функций действительного переменного — начал с 1904 г. осуществлять его ученик Фреше. Его первый большой успех в этом направлении — докторская диссертация «О некоторых вопросах функционального исчисления» [8] [30], опубликованная в 1906 г.,— стал вместе с тем и триумфом французской школы теории множеств и функций: ее идеи и методы оказались плодотворными для развития новой большой науки, значение которой осознавалось уже многими математиками.

За предмет изучения Фреше взял прямое обобщение функции действительного переменного — понятия функционала, а в основу изучения положил, как и в теории функций, теорию множеств. Сам он, поставив задачу систематического исследования функционалов, писал: «С этой целью сначала нужно обобщить теорию линейных множеств, которая способствовала такому прогрессу теории функций одного переменного. Можно было бы возразить, что в течение долгого времени теория функций [31] могла обходиться без рассмотрения точечных множеств. Однако в функциональном исчислении предварительное изучение множеств еще более необходимо. Действительно, в нем (по крайней мере, вначале) нечему играть роль интервала, рассмотрение которого было так долго достаточным в теории функций» [8, с. 2]. И значительная часть его диссертации посвящена изучению множеств в метрических пространствах, а затем применению результатов такого изучения к рассмотрению функцио-

[30] Ей предшествовали его работы [1—5, 7].
[31] Мы бы сказали классический анализ.

налов. Многие свойства функций, незадолго до этого полученные французскими учеными, включая Фреше, переносятся в новую, более абстрактную ситуацию и становятся кирпичами здания новой науки.

После этой работы Фреше функциональный анализ стал развиваться главным образом в таком направлении, а более ранние подходы Вольтерры и Пинкерле, хотя они и продолжали развиваться, например, Гато и Леви во Франции и Фантаппье в Италии, отступили на второй план. Сам Фреше интенсивно продолжал свои исследования — правда, с уклоном в теоретико-множественную топологию; вскоре к нему присоединился Рисс, соединивший идеи французов с идеями школы Гильберта, а затем и другие; наконец, когда в 1922 г. Банах, Винер и Ган независимо друг от друга вступили в основном на тот же путь, функциональный анализ начал разрабатываться с необычайной интенсивностью преимущественно по плану, намеченному Фреше.

Так обстояло дело не только с общим планом построения новой науки, но и в бесчисленных деталях его осуществления. Мы проиллюстрируем это только небольшим эпизодом истории интегрирования векторозначных функций — одного из основных аналитических средств функционального анализа.

В 1927 г. Грейвс ввел абстрактный интеграл Римана. И хотя он ставил перед собой цель построить теорию интегрирования векторозначных функций, полностью параллельную классической теории интеграла Римана, он тем не менее брал за образец последнюю не в форме, которая сложилась в XIX в., а в форме, приданной ей Лебегом, вплоть до технических средств рассуждений и лишь с указанием необходимых модификаций их в более общей ситуации. Даже если бы он построил ее строго по образцу теории прошлого столетия, то и это было бы достаточным для подтверждения нашей основной мысли о воздействии теории функций на функциональный анализ; факт же ее преобразования в лебеговском смысле говорит именно о влиянии идей французских ученых. Еще больше это влияние проявилось у Гильдебрандта (1927 г.), который обобщил грейсовское интегрирование до интегрирования векторозначных функций по Лебегу; у него основная конструкция и методы рассуждений являются прямыми аналогами соответствующих лебеговских. Подобных иллюстраций можно привести сколько угодно и в том же вопросе интегрирования векторозначных функций, и во многих других вопросах функционального анализа.

Не менее яркий пример воздействия теории функций действительного переменного на другие области математики мы находим в истории теории вероятностей.

Если функциональный анализ в форме Вольтерры — Пинкерле в основном складывался или непосредственно перед созданием новой теории функций или в период ее построения, то теория вероятностей появилась задолго до теории функций даже XIX в. К началу XX столетия она выступала как большая самостоятельная наука со своеобразными понятиями и методами, своеобразными настолько, что ее нередко не считали собственно математической дисциплиной. В ней сложились определенные традиции, специфический склад мышления и языковые формы, изменение которых было более трудным делом, чем в случае функционального анализа Вольтерры — Пинкерле, тем более, что функциональный анализ просто самим фактом складывания его параллельно формированию теории функций не был полностью изолированным от последней, да к тому же имел своим предметом слишком аналогичные вещи. Тем не менее перестройка теории вероятностей в теоретико-функциональном плане, аналогичная той, которая совершалась с функциональным анализом, все же произошла и притом лишь с незначительным отставанием во времени.

Эта перестройка начата Борелем [33, 35] в 1905—1909 гг.[32] Уже в первой из указанных работ он говорит о необходимости введения в теорию вероятностей интеграла Лебега, отмечает целесообразность введения в нее B-множеств, а вероятность отождествляет с мерой множества. Во второй работе он ввел и изучил понятие счетной вероятности.

После него в том же направлении стали работать Кантелли, Ломницки, Штейнгауз, Слуцкий, Фреше и др. Первый период этой подготовительной работы завершился знаменитой книгой Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей» (1933 г.), в которой теория вероятностей стала рассматриваться просто как специальный случай теории аддитивных функций множеств. Для характеристики общего отношения теории вероятностей к теории множеств и функций приведем две цитаты.

В 1923 г. Ломницки писал: «Пытаясь объяснить себе основные понятия теории вероятностей и добраться до истоков, откуда берет свое происхождение беспокоящий поток парадоксов (например, парадокс Бертрана), я пришел к убеждению, что вся теория вероятностей является вполне определенной проблемой теории множеств, тесно связанной с теорией меры множеств и абсолютно независимой от какого-либо метафизического или эмпирического фактора. Понимаемая таким образом теория вероятностей делается, по крайней мере, столь же „математической“ наукой, как и теория множеств» [1, с. 35—36].

Развивая и конкретизируя эту мысль, Колмогоров в предисловии к названной выше книге высказался еще более определенно: «Целью предлагаемой работы является аксиоматическое

---

[32] Борель [33, с. 126] называет Вимана как первого автора, применившего борелевские множества в теории вероятностей еще в 1900 г; работой Вимана мы не располагали

обоснование теории вероятностей. Ведущей мыслью автора было при этом естественное включение основ теории вероятностей, считавшихся еще недавно совершенно своеобразными, в ряд общих понятий современной математики. До возникновения лебеговой теории меры и интеграла эта задача была почти безнадежна. После исследований Лебега стала ясной аналогия между мерой множества и вероятностью события, а также между интегралом от функции и математическим ожиданием случайной величины. Эта аналогия допускает и дальнейшее продолжение: так, например, многие свойства независимых случайных величин вполне аналогичны соответствующим свойствам ортогональных функций. Для того чтобы, исходя из этой аналогии, обосновать теорию вероятностей, следовало еще освободить теорию меры и теорию интегрирования от геометрических элементов, которые еще имелись у Лебега. Это освобождение было осуществлено Фреше» [1, с. 5][33].

Как и в случае с функциональным анализом, из теории множеств и функций в теорию вероятностей переносились не только общие идеи и методы, но и относительно частные понятия, приемы исследования, техника рассуждений. При этом, если при переносе их в функциональный анализ, как правило, требовалась значительная работа по переосмысливанию, обобщению, учету специфики рассматриваемых функциональных пространств — достаточно напомнить, например, переосмысливание теоремы Больцано — Вейерштрасса,— то в аналогичной работе для теории вероятностей нередко был достаточен простой перевод на другой математический язык. Так, после того, как случайные события были интерпретированы в виде множеств, теоретико-вероятностные понятия несовместимости событий, их одновременной реализации, наступления, по крайней мере, одного события из некоторой их совокупности, противоположного события, невозможного события, превратились соответственно в непересечение множеств, их пересечение, сумму, дополнение множества, его пустоту. Тем самым аппарат основных операций над множествами чуть ли не автоматически превращался в схемы теоретико-вероятностных рассуждений; аналогично сходимость почти всюду стала почти достоверной сходимостью, сходимость по мере — сходимостью по вероятности и т. д.

Это не означает, конечно, что указанная перестройка теории вероятностей была легким делом, заключавшимся лишь в подобного рода переводе. Трудностей при этом возникало, быть может, даже больше, чем при соответствующих обобщениях в функциональном анализе, но здесь не место говорить о них.

Очень сильным было воздействие теории множеств и функций на развитие теории функций комплексного переменного (например, методов суммирования расходящихся рядов на изуче-

[33] Имеется в виду работа Фреше [16] 1915 г.

ние вопроса об аналитическом продолжении, о чем уже говорилось); на теоретико-множественную топологию, которая, подобно функциональному анализу, создавалась в тесном взаимодействии с теорией функций и множеств; на исследования по основаниям математики и математической логики, новый и чрезвычайно мощный толчок которым дали, в частности, описанные в предшествующей главе полемические выступления французов; достигло оно и математической физики. Словом, подобно классическому анализу, теория функций и множеств связалась со всей совокупностью математических наук.

Конечно, движение идей не было односторонним. Как вновь создавшиеся, так и перестраивавшиеся математические дисциплины, в свою очередь, оказывали огромное обратное воздействие на теорию функций и множеств. Наиболее сильным было и остается обратное влияние функционального анализа. Его можно проследить, начиная с самых ранних работ Фреше, но особенно отчетливо оно стало проявляться в 30-х годах в исследованиях представителей польской математической школы — Банаха, Сакса, Мазуркевича и др. Началом 30-х годов мы датируем возникновение третьего этапа теории функций действительного переменного, когда наиболее сильные и красивые результаты в ней все чаще и чаще начали получаться с помощью методов функционального анализа.

Почти столь же эффективным оказалось и воздействие теоретико-множественной топологии, а несколько позже к этому присоединилось воздействие абстрактной алгебры и теории вероятностей; почти на всем протяжении истории теории множеств и функций имело место тесное взаимодействие ее с теорией функций комплексного переменного.

Заканчивая, мы можем сказать, что французские ученые, работавшие на рубеже XIX—XX вв., особенно Борель, Бэр, Лебег, Фреше, Данжуа, Фату, оказали добрую услугу развитию всей математики и математического естествознания, а через них и всему развитию человеческого мышления, делу познания человеком окружающей действительности. Теоретико-множественный образ мышления теперь все чаще и чаще ставится под сомнение [34], но он пока остается живым и действенным и успешно противостоит всем предлагавшимся до сих пор паллиативам, несмотря на все его недостатки, обнаруженные, кстати, во многом теми же французскими математиками. Последние не были пионерами теоретико-множественного метода, но они больше других способствовали распространению его вширь, и главным образом благодаря их усилиям математика приобрела теоретико-множественный аспект, который она не утрачивает и по сей день.

---

[34] Что, впрочем, не так уж ново. Даже не говоря о прямых противниках теории множеств и функций, которых всегда было много, можно указать на Рассела, который своей попыткой построить «no-classes theory» (1906 г.) предвосхитил многие из новейших сомнений.

П р и л о ж е н и е

БИОГРАФИЧЕСКИЕ СПРАВКИ

Эмиль Борель

Жизни и деятельности Бореля посвящен ряд статей и заметок [1]. Основные свои научные достижения до 1921 г он описал сам [45], [50].

Феликс Эдуард Жюстен Эмиль Борель родился 7 января 1871 г. в местечке Сент-Аффрик в Авейроне. Он был третьим ребенком в семье протестантского пастора и дочери крупного торговца. Начальное образование получил в протестантской школе, затем учился в лицее, в колледже, а в восемнадцатилетнем возрасте поступил в Высшую Нормальную школу в Париже. Через два года он выдержал кандидатские экзамены, а в 1893 г. после защиты докторской диссертации стал преподавателем Лилльского университета. Оттуда он возвратился в 1897 г. в Высшую Нормальную школу и с тех пор работал в различных высших учебных заведениях Парижа. В 1921 г. его избрали членом Парижской академии наук.

Эмиль Борель был очень многогранным человеком. Прежде всего, он один из крупнейших и талантливейших математиков конца XIX — начала XX вв., инициатор ряда направлений математических исследований, автор более трех сот научных работ, в том числе свыше трех десятков книг, переиздававшихся по нескольку раз и переведенных на многие иностранные языки.

Свою научную деятельность он совмещал с работой преподавателя в высших учебных заведениях, начатой им в 22-летнем возрасте и продолжавшейся почти полстолетия до выхода в отставку в 1940 г.

Вместе с тем Борель был видным организатором науки. В значительной мере благодаря его настойчивости и организаторским способностям были созданы такие научные учреждения Франции, как Институт имени А. Пуанкаре, Национальный центр научных исследований, Институт статистики. Во многих учебных и научных центрах Борель занимал руководящие посты: был директором Института имени Пуанкаре, председателем совета правления Института статистики и председателем Парижского статистического общества, президентом Математического общества Франции, вице-президентом Международного совета научных союзов, высшим советником общественного образования; в течение ряда лет руководил научными исследованиями в Высшей Нормальной школе, не говоря уже о заведовании разными кафедрами.

Развитию математики и математического естествознания Борель способствовал и своей энергичной издательской деятельностью.

---

[1] См., например, Монтель [4], Коллингвуд [1], Фреше [18], де Бройль [1].

Здесь прежде всего выделяется уже упоминавшаяся «Коллекция монографий по теории функций». Начатая в 1898 г. его книгой «Лекции по теории функций» [14], она включила пятьдесят монографий, десять из которых принадлежат самому Борелю, включая последнюю книгу этой серии «Недостижимые числа» (1951 г.). Авторами книг были, кроме Бореля, Лебег, Бэр, Стоилов, Неванлинна, Монтель, Лузин и другие большие математики.

Далее, заметной вехой в истории математики явилась борелевская «Коллекция монографий по теории вероятностей». Подготовленная в 1925—1926 гг. его трехтомным «Трактатом по теории вероятностей и ее применениям», она также превратилась в многотомную серию книг, авторами которых, помимо Бореля, были многие видные ученые.

Большое внимание Борель уделял популяризации науки и улучшению ее преподавания. С этой целью он организовал еще две серии изданий — «Новую научную коллекцию» и «Библиотеку научного образования»,— в которых сам опять-таки принял активное участие, начиная с книг «Авиация» (1910 г), «Случай» (1914 г.), «Геометрическое введение в некоторые физические теории» (1914 г) и кончая книгой «Мнимое и действительное в математике и физике» (1952 г.). Некоторые из книг этих двух серий переводились на разные языки, в том числе и на русский. Цель этого предприятия Борель характеризовал такими словами: «Математика является наукой, название которой известно почти всем культурным людям; можно даже сказать, что почти все эти люди относятся к ней с известным уважением. Однако это уважение... слишком часто проявляется, так сказать, с большого расстояния. Математику уважают в такой степени, что даже остерегаются открыть математическую книгу из боязни профанировать ее.

Мне казалось желательным заменить это почтение со слишком большого расстояния более близким знакомством и постараться указать пути, следуя которым образованные умы могли бы .. попытаться понять, что представляет собою математика и в чем состоит ее красота» [51, с. I—II].

Представляется актуальной и сегодня задача, поставленная Борелем перед последними двумя сериями,— дать читателю возможности приобрести научное образование, которое, как он считал, необходимо не в меньшей степени, чем образование литературное и художественное.

Наконец, говоря об издательской деятельности Бореля, нельзя не сказать об основанном им в 1906 г. журнале «Ежемесячное обозрение», просуществовавшем до 1920 г., двадцать два тома которого содержат много замечательных статей. К сотрудничеству в этом журнале Борель привлек ученых, писателей, политических деятелей — Эдуарда Эррио, Анри Пуанкаре, Поля Ланжевена, Эли Картана и многих других.

Был Борель и заметным политическим деятелем С 1924 по 1936 г. он депутат парламента, был там председателем комиссии по делам Эльзаса, вице-председателем финансовой комиссии и даже некоторое время министром военно-морского флота. В качестве парламентского деятеля он также способствовал развитию науки во Франции, добиваясь ассигнований на ее нужды, способствуя установлению тех или иных ее организационных форм, популяризируя ее представителей. В 1926 г. Борель был избран генеральным советником в Авейроне, а в 1927 г — мэром родного города; эти две должности он занимал почти до смерти, исключая период немецкой оккупации.

В период первой мировой войны он провел ряд научных исследований для целей национальной обороны После гибели на фронте усыновленного им племянника, которого он очень любил, Борель предпринял многочисленные демарши с требованием отправить его на фронт. Его просьба была удовлетворена, и он был назначен командиром тяжелой артиллерийской батареи, действовавшей на Сомме во Фландрии За участие в этой войне он был награжден Военным крестом.

Не обошла его стороной и вторая мировая война, хотя к началу ее Борелю исполнилось 68 лет. До оккупации Франции он директор отделения точных наук Организации исследований для нужд национальной обороны. В 1941 г. его вместе еще с тремя престарелыми членами Парижской академии наук гитлеровцы заключили в тюрьму. Возмущение общественности заставило немцев освободить его. Он уехал в Авейрон, где принял участие в движении Сопротивления, за что был награжден медалью Сопротивления.

Умер Борель в возрасте 85 лет 3 февраля 1956 г. Говоря словами де Бройля, «от нас ушел великий ученый и мыслитель, одаренный и сильный человек, который всегда делал честь французской науке и нашей академии» [1, с. 86].

Отмечавшаяся выше многогранность личности Бореля своеобразна в том отношении, что различные стороны его характера — талант преподавателя и организационные способности, деловая одаренность и качества политического деятеля — все имели единую ориентацию. Он прежде всего оставался математиком в широком смысле этого слова, и вся его жизнь имела назначением служение делу развития математики и математического естествознания.

Борель был талантливым преподавателем. Но он преподавал по преимуществу математику, и отдельные его курсы лекций стали большими вехами в развитии этой науки, о чем уже говорилось на с. 52—53 Ни одна из названных там монографий не была учебником в традиционном смысле слова, в котором излагались бы установившиеся научные факты с общепринятой точки зрения. Они были наполнены новыми научными теориями, содержали последние открытия — в значительной мере самого Бореля — или возрождали к новой жизни забытые и даже отвергнутые теории прошлого.

Видимо, не без влияния Бореля такую традицию затем поддержали Бэр, Лебег и др

Математические исследования Бореля чрезвычайно многообразны Ему принадлежат труды по теории чисел, алгебре, анализу, геометрии, теории вероятностей и их приложениям к механике, математической физике, статистике, у него много высказываний по философским вопросам науки и по ее преподаванию. Как писал Фреше, «потребовалось бы несколько томов, чтобы лишь резюмировать труды Бореля» [18, с. 43].

Довольно отчетливо выделяются два периода научной деятельности Бореля. С начала ее и до первой мировой войны он занимался преимущественно теорией функций и связанными с нею областями. Отмечавшаяся его работа во время войны в рамках Службы изобретений привела его к соприкосновению с различными вопросами физики, механики и теории вероятностей. Это вызвало переориентацию научных интересов, и с тех пор Борель работал главным образом в указанных направлениях.

Попытаемся вкратце указать отдельные достижения Бореля, не вдаваясь в специальные пояснения.

Хронологически первым большим открытием Бореля в математике явилось установление того факта, что функция комплексного переменного может быть моногенной в смысле Коши в некоторой области, не являясь аналитической в смысле Вейерштрасса. Взаимоотношению понятий моногенности и аналитичности он посвятил большое число работ, начиная с диссертации [2] и кончая итоговой монографией по этому вопросу «Лекции об однозначных моногенных функциях комплексного переменного» [49], вышедшей в 1917 г. Этот цикл работ Бореля открыл в математике обширную область исследований, в которой трудились и трудятся очень многие ученые.

Следующим его фундаментальным достижением стало введение понятия меры множества и выделение очень важного класса B-множеств. Его первая работа в этом направлении — уже называвшиеся «Лекции по теории функций» [14] — явилась одним из истоков современной математики; от этого истока можно провести нити до нынешних теории вероятностей, топологии и функционального анализа, не говоря уже о теории функций и множеств.

Велики заслуги Бореля в «узаконении» расходящихся рядов: можно сказать, что его статьи, начавшиеся публиковаться с 1896 г., и особенно его книга «Лекции о расходящихся рядах» [21], открыли зеленый свет перед глубоким изучением этого важного аппарата современной математики и его многообразными применениями.

Интересной теорией, с которой неразрывно связано имя Бореля, является и теория роста функций, являющаяся составной частью теории асимптотических разложений. Ей Борель, помимо отдельных статей, посвятил монографию [38].

Теоретико-множественный подход к теории вероятностей в настоящее время является основным в этой науке. Пионером такого подхода оказался тоже Борель: уже в 1905 г. он ввел в теорию вероятностей меру множеств, а в 1909 г.— понятие счетной вероятности; связь теории вероятностей с понятием меры множества он подчеркивал неоднократно.

Наконец, с именем Бореля связано возникновение одной из самых молодых математических дисциплин — теории игр. Соответствующие его работы относятся к 1921—1928 гг.; исследования же фон Неймана, отчасти независимо повторившего более ранние соображения Бореля, но развившего их глубже и шире, начались лишь с 1928 г.

Борелю принадлежат и отдельные результаты столь фундаментальной важности, что их влияние продолжает сказываться до наших дней, хотя некоторые из них были установлены еще в прошлом веке. Укажем только два примера.

Первым из них является теорема о конечном покрытии. То, что до открытия этой теоремы Борелем ею владели, как отмечалось ранее, Вейерштрасс, Пинкерле и др., не умаляет роль Бореля. Именно он придал ей тот удобный вид, в котором она применяется и изучается поныне. Доказанная Борелем в 1895 г., она затем передоказывалась, обобщалась и углублялась многими учеными.

Когда в 1926 г. видный американский математик Гильдербрандт [1] попытался проследить исторические судьбы этой теоремы и ее обобщений, то ему пришлось написать статью в полсотни страниц, рассмотреть несколько десятков работ сорока авторов, среди которых оказались Лебег, У. Г. Юнг, Данжуа, Фреше, Лузин, Урысон, Александров, Серпинский и др. Продолжение этого труда Гильденбрандта до сегодняшних дней, видимо, потребовало бы, по крайней мере, удвоения числа источников, а полная история названной теоремы потребовала бы написания целой книги.

В качестве второго примера можно указать следующий. В 1896 г Борель предложил элементарное доказательство теоремы Пикара о значениях, принимаемых аналитической функцией в окрестности существенно особой точки Для этого, казалось бы, простого передоказательства известного факта он разработал метод, развитый им далее в следующем году, который положил начало метрической теории распределения значений аналитических функций, оказавшейся темой трудов целого поколения аналистов, не закрытой и сегодня.

Эти два примера хорошо иллюстрируют резонанс, вызывавшийся открытиями Бореля в научном мире. Если попытаться перечислить имена математиков, которые в той или иной мере отталкивались от идей Бореля, углубляли и обобщали их или просто пользовались его результатами, то пришлось бы назвать имена чрезвычайно большого числа ученых XX столетия, работавших в самых разнообразных областях математики и математического естествознания «Мысль Эмиля Бореля долго будет продолжать оказывать свое влияние на исследования подобно свету погасших звезд, распространяющемуся в пространстве» (Монтель [4, с 850]).

Анри Лебег

На первый взгляд может показаться неуместным сопоставление Бореля и Лебега как ученых. Число публикаций первого почти в три раза превышает количество опубликованных работ второго; в несколько раз больше число областей науки, в которые Борель внес весомый вклад; Борель значительно превосходил Лебега в научно-организационной и издательской деятельности, первому при жизни досталось больше почестей и наград.

И все же общее влияние трудов Лебега на развитие математики и математического естествознания в XX столетии вряд ли уступает влиянию всей совокупности научных работ Бореля и его прочей деятельности. Здесь, возможно, уместна одна историческая параллель, как обычно, разумеется, весьма условная. По замечанию Бурбаки [1, с. 168], почти все работы Архимеда посвящены теории интегрирования. Однако это не помешало признанию его величайшим ученым всех времен. Основные труды Лебега относятся к теории интегрирования. Мы здесь не сравниваем гениальности Архимеда и Лебега и хотим только подчеркнуть, что лебеговская теория интегрирования оказала чрезвычайно мощное воздействие на все математическое мышление. А если к ней добавить его теории дифференцирования, функций множества, функций, представимых аналитически, тригонометрических рядов и т. д., то действенность лебеговских идей и методов становится столь большой, что вполне позволяет ставить Лебега в один ряд с Борелем и другими выдающимися учеными.

Чебышев в полушутливой форме заметил, что в древности науку создавали боги, позднее ею занялись полубоги, а теперь ее творцами являются обыкновенные люди. В этом замечании содержится рациональное зерно: такая эволюция представлений об ученых, действительно, имела место и в некоторой степени отразила реальный ход изменения общего склада мышления человечества — от авторитарного в древности и средние века до полуавторитарного XVII—XIX вв. и критического в XX столетии.

Лебег — ученый XX столетия, а тем самым (по предыдущей классификации) он — обыкновенный человек. Вместе с тем он был большим тружеником в области математики, ее истории и преподавания, сумел вырваться на передовые рубежи и далеко отодвинуть их, и, благодаря его трудам, математика получила большой импульс для дальнейшего развития. О его влиянии можно косвенно судить, например, по таким фактам. В первом томе «Топологии» К. Куратовского фамилия Лебега входит в первый десяток наиболее часто цитируемых авторов (по именному указателю); в книге Н. Данфорда и Дж. Шварца «Линейные операторы. Спектральная теория» его фамилия стоит даже среди пяти наиболее часто упоминавшихся фамилий математиков. А ведь Лебег специально не занимался вопросами топологии и функционального анализа, если не говорить об отдельных его экскурсах в эти области знания Он посвятил себя главным образом теории функций действительного переменного, и здесь им получены его основные научные достижения. Но введенные им понятия и методы оказались такими орудиями исследований, которыми с успехом пользуются в самых разнообразных отраслях математики и математического естествознания.

К Лебегу вполне применимы слова его младшего современника и коллеге по профессии, итальянского ученого Трикоми: «Научные труды являются его биографией». И, быть может, имело бы смысл сделать в отношении Лебега то, что Трикоми сделал в отношении себя, составив книгу «Моя жизнь в хронологии моих трудов», представляющую собой аннотированную библиографию его работ.

Конечно, внешне спокойную жизнь ученого и преподавателя нередко нарушали драматические события. Вероятно, немало огорчений молодому Лебегу доставило более чем прохладное отношение ряда французских ученых к его первому большому научному труду — докторской диссертации. Далее, например, ссора между Борелем и Лебегом, сколь бы она ни выглядела сейчас нелепой и не заслуживающей внимания, видимо, отравила немало мгновений их жизни, особенно у последнего; в ней столкнулись два разных человеческих характера, в некоторой мере два различных научных мировоззрения, а быть может и несхожие моральные кодексы. Были, разумеется, печальные и радостные события в личном плане. Но все это оказалось преходящим, нетленными оказались научные ценности, созданные Лебегом Нетленны они не в том смысле, что существуют в их первозданном виде до сегодняшних дней, они оказались лишь звеньями поступательного хода развития математики, но такими звеньями, которые были необходимы и без которых нельзя представить существования современной науки.

Чтобы оправдать последний тезис, воспользуемся одной цитатой. Винер, говоря об истоках кибернетики, настойчиво подчеркивал [1, с 25—26, 2, с. 64—66] роль Лебега, вернее его идей, в становлении этой науки. Он, в частности, писал: «Гиббс, хотя и был математиком, всегда считал математику подчиненной физике. Лебег был чистейшим аналитиком, выдающимся представителем современных, крайне суровых требований к математической строгости, и его работы, насколько мне известно, не содержат ни одного примера задач или методов, вытекающих непосредственно из физики. Тем не менее работы этих ученых образуют единое целое, и на вопросы, которые ставит Гиббс, мы находим ответ не в его собственных работах, а в работах Лебега» [2, с. 64]

К топологии, функциональному анализу и к только что упомянутой кибернетике можно было бы добавить немало других, на развитие которых результаты и методы Лебега оказали бо́льшее или меньшее воздействие. Но и сказанного достаточно, чтобы включить Лебега в плеяду самых выдающихся ученых нашего столетия.

Жизнь и деятельность Лебега явилась предметом небольшого числа работ [2], во многом повторяющих одна другую. В их совокупности и с некоторыми дополнениями вырисовывается следующая картина.

Анри Леон Лебег родился 28 июня 1875 г. в городке Бове в семье типографского рабочего, умершего очень рано. Уже в начальной школе были замечены блестящие способности Лебега, и по ходатайству одного из его учителей, при поддержке мэра Бове, ему были предоставлены муниципальные средства для продолжения учебы сначала в городском колледже, а затем в лицеях Парижа По окончании лицея Лебег в 1894 г. поступил в Высшую Нормальную школу Получив в 1897 г. звание преподавателя средней школы, он был назначен на работу в лицей в Нанси, где подготовил свою диссертацию [8] Затем он был приглашен для чтения лекций на Факультет наук в Ренн (1902—1906 гг) и в университет в Пуатье (1906—1910 гг.). С 1910 г. он преподавал в Сорбонне, где в 1919 г. стал профессором В 1920 г. он занял кафедру математики в Коллеж де Франс; в 1922 г. был избран членом Парижской академии наук.

Кроме научной и педагогической деятельности, заслуживает разве упоминания его работа в качестве председателя математической комиссии Службы изобретений, открытий и научных экспериментов, организованной во Франции в годы первой мировой войны. Он занимался решением задач по определению и коррекции траекторий артиллерийских снарядов, по распространению звука и т. п.; вместе с коллегами подготовил атлас траекторий, предназначавшийся для быстрейшего составления таблиц стрельбы. Он, по-видимому, с таким же правом мог сказать вместе с Борелем, что «внес некоторый вклад в важную совокупность работ, позволивших французской артиллерии добиться преобладания над вражеской артиллерией в 1918 г. по точности огня и распознаванию целей» (Борель [50, с. 381, сноска]).

Два рода деятельности характерны для Лебега — научная и педагогическая. Начнем с последней.

Свою преподавательскую работу он начал в 1897 г. и продолжал ее почти до конца жизни. Уже больной он закончил свой последний курс лекций о конических сечениях в Коллеж де Франс во время оккупации гитлеровцами Парижа. Вследствие того, что обычный транспорт тогда не работал, он приспособил свой трехколесный велосипед и ездил на нем на лекции. Этот факт Монтель привел в своих воспоминаниях о Лебеге для характеристики того, насколько у последнего было развито чувство долга [3].

В отличие от Бореля, который, читая отдельные курсы лекций, подбирал подходящего слушателя, готовившего затем этот курс к печати (чем, отчасти, объясняется его огромная плодовитость), Лебег, как правило, сам готовил к

[2] См., например, Монтель [3]; Бёркил [1]; Данжуа, Феликс, Монтель [1]; Перрен [1].

[3] См. Данжуа, Феликс, Монтель [1, с. 17].

опубликованию свои лекции. Лишь две его книги — «Конические сечения» (1942 г.) и «Лекции о геометрических построениях» (1950 г.) — были изданы без его ведома просто потому, что он уже ушел из жизни. Можно, вероятно, пожалеть, что некоторые его лекции не были опубликованы, особенно учитывая одну методическую установку, которой он старался следовать: не придерживаться стандартных схем изложения, определенных программами и учебниками, а как бы создавать науку заново в процессе преподавания, мыслить перед учащимися [4].

Много внимания, особенно в последние годы, Лебег уделял и школьному математическому образованию, принимал участие в редактировании франко-швейцарского журнала «Математическое просвещение». Именно в этом журнале впервые были опубликованы его статьи, объединенные в русских изданиях 1938 и 1960 гг. в виде книги «Об измерении величин» [5]. Их цель Лебег мыслил следующим образом: «В своих статьях я буду стараться давать по возможности более простое и конкретное изложение, без ущерба для логической строгости. Эта тенденция может показаться несколько архаичной в эпоху, когда абстракция укоренилась даже в прикладных науках. Однако не нужно забывать, что те, которым мы обязаны отвлеченной научной мыслью, могли, пребывая в абстракции, заниматься тем не менее полезными вещами именно потому, что они имели особенно заостренное чувство действительности. Это чувство как раз и нужно стараться пробудить у молодежи. Только тогда, когда научаются в абстрактном видеть конкретное, а в общей теории — по-настоящему полезные частные случаи, переход к абстракции может принести нужные плоды» [41, с. 14]. В том же журнале перепечатывались или публиковались посмертно многие историко-научные и методические работы Лебега.

Научная деятельность Лебега довольно четко делится на два периода. Первый из них начался в 1898 г. и продолжался до выхода второго издания его «Лекций об интегрировании и отыскании примитивных функций» (1928 г) [6]. В эти годы вышли все его важнейшие работы по теории функций и связанным с нею вопросам. Для последующего периода характерны работы по проблемам элементарной геометрии, историко-математические и методические исследования. Впрочем, историко-научный подход к рассматриваемым проблемам присущ большинству и собственно научных работ Лебега. Так, из семи глав в одной из важнейших книг Лебега «Лекции об интегрировании и отыскании примитивных функций» [13] шесть первых, по существу, представляют собой историко-критический анализ предшествующих понятий и методов и лишь в последней главе трактуется то новое, что внес в науку сам автор.

Видимо, самым большим научным подвигом Лебега явилось выделение им класса измеримых функций. Различные классы функций, вводившиеся в математику ранее — аналитические (Лагранж), непрерывные (Больцано, Коши), с ограниченным изменением (Жордан), измеримые B (Бэр), — каждый из которых, разумеется, был интересен как теоретически, так и в приложениях, все же обычно не удовлетворял аналитиков в том смысле, что одновременно с выделением соответствующего класса или некоторое время спустя оказывалось, что обычные операции анализа, как правило, выводили за пределы этого мно-

[4] См. Данжуа, Феликс, Монтель [1, с. 8—13].
[5] Во Франции такая книга появилась в 1956 г.
[6] Русский перевод сделан с этого издания.

жества функций. Ограниченность даже самого общего из названных классов — B-функций Бэра — была обнаружена вскоре после его введения. Уже предельный переход почти всюду, примененный к последовательностям многочленов, выводит за пределы B-измеримых функций. Но особенно это стало ясным после применения в 1917 г. A-операции Суслиным [7].

Не так обстоит дело с измеримыми в смысле Лебега функциями. Никакой самый общий вид сходимости, никакой самый мощный метод суммирования, ни одна из операций дифференцирования—словом, ни одна аналитическая операция не приводит к неизмеримым по Лебегу функциям. Построение неизмеримых функций связано с применением аксиомы Цермело или эквивалентного ей положения. Так что фактически дело обстоит так, что и сегодня, спустя много десятилетий после введения понятия измеримой функции, почти все аналитические изыскания — предельно абстрактные теории дифференцирования и интегрирования, общие разложения в ряды и т. п.— вращаются в рамках измеримых функций.

Еще в 1905 г. Витали, а в 1908 г. Ван-Флек построили первые примеры неизмеримых по Лебегу множеств (функций) и с тех пор подобных примеров появилось немало. Более того, имеется довольно много работ, авторы которых, разрабатывая те или иные проблемы, стараются избавиться в своих рассуждениях от ограничения измеримости у изучаемых функций. Все же эти исследования пока остаются вне рамок основного потока аналитических изысканий, и далеко не ясно, во что они выльются. Во всяком случае, класса функций, более общего, чем измеримые, до сих пор не выделено.

Знаменит Лебег главным образом исследованиями по теории интегрирования. Он разработал ее в столь законченном и совершенном виде, что после его работ стало чуть ли не анахронизмом изучать и применять предшествующую теорию. Появившиеся вскоре новые более общие теории не имеют такого диапазона применений. Но не меньшей известности он заслуживает своими работами по теории дифференцирования. Здесь прежде всего выделяется понятие производной почти всюду, заменившее прежнюю производную. Именно для него Лебег доказал теорему о производной монотонной функции; именно оно фигурирует в большинстве важнейших подходов к проблемам интегрирования и дифференцирования. Не менее важно лебеговское дифференцирование функций множеств.

Такое же превращение, как и теория интегрирования, претерпела в руках Лебега и теория тригонометрических рядов. После появления его «Лекций о тригонометрических рядах» [24] ряд Фурье стал, по преимуществу, рядом Фурье—Лебега, и лишь в тех случаях, когда речь идет о применении для вычисления коэффициентов Фурье более общего понятия интеграла, это требовало специальной оговорки.

Существенно изменились после работ Лебега понятия суммируемости и сходимости. Основными видами, наиболее обиходными в аналитических изысканиях, стали сходимость и суммируемость почти всюду.

О лебеговских исследованиях по B-функциям и B-множествам мы говорили довольно много (с. 55—64). Здесь, видимо, целесообразно еще раз повторить,

[7] Фактически эту операцию ввели в 1916 г. Александров и Хаусдорф, но именно Суслин воспользовался ею для эффективного построения множеств (функций), неизмеримых B.

что, хотя еще Бэр прочно связал изыскания о функциях с учением о множествах, лишь Лебег в его мемуаре «О функциях, представимых аналитически» [21] сделал эту связь неразрывной, положив в основу ее характеристику функций множествами $E(f<a)$. Когда же в 1916 г. Валле-Пуссен начал широко пользоваться понятием характеристической функции множества, то переход от функций к множествам и наоборот стал одним из важнейших инструментов исследования.

Упомянутую законченность лебеговских исследований по теориям интегрирования, тригонометрических рядов и B-функций (множеств) не следует понимать в том смысле, что он исчерпал какой-то определенный круг проблем. Слово «законченный» относилось, скорее, не к предмету, а к методам изучения соответствующих вопросов. Законченными и совершенными были методы Лебега, они стали наиболее употребительными инструментами аналитических изысканий, широко применяемыми и до сегодняшних дней.

Если говорить о Лебеге как инициаторе новых больших направлений, то, кроме указанных, нужно назвать еще, по крайней мере, три области — теорию площадей поверхностей, теорию сингулярных интегралов и теорию функций множеств. Во всех этих областях Лебег имел знаменитых предшественников, но именно с его работ «Интеграл. Длина. Площадь» [8], «О сингулярных интегралах» [30], «Об интегрировании разрывных функций» [32] эти теории стали развиваться как систематические исследования, и он обычно считается их основоположником.

Важные результаты менее общего характера принадлежат Лебегу в вопросах поверхностей, наложимых на плоскость, порядка наилучшего приближения функций, общих принципов критериев сходимости рядов Фурье, проблемы Дирихле, инвариантности числа измерений при топологических преобразованиях и т. д.

В заключение несколько слов о Лебеге как историке математики. Часть его трудов в этом направлении собрана и издана в виде небольшой книги [44], содержащей шесть очерков о жизни и деятельности Виета, Вандермонде, Жордана, Бэра, Ампера, Гумберта, Роберваля и Рамуса и выдержки из некоторых его писем Кроме того, Лебегу принадлежит интересная статья «О развитии понятия интеграла» (1926), а также многочисленные исторические экскурсы в книгах «Интегрирование и отыскание примитивных функций», «Об измерении величин», «Лекции о геометрических построениях». К работам исторического типа следует причислить и его большую статью «Замечания о теориях меры и интегрирования», в которой дан исторический и критический анализ подходов Бореля и Лебега к проблематике мероопределения множеств и интегралов. Даже рефераты чужих работ, написанные Лебегом, порой содержат интересные исторические экскурсы; в качестве примера можно указать его реферат [27] книги Юнгов по теории точечных множеств, где содержится исторический анализ теоремы о конечном покрытии. Наконец, следует указать его большую статью, опубликованную только в 1971 г. «По поводу некоторых недавних математических работ», которая посвящена преимущественно истории понятия функции. В совокупности всех названных работ Лебег выступает как крупный историк науки, методологические установки которого хорошо иллюстрируются следующими словами, обращенными им к одной из своих корреспонденток. «На что я хотел бы обратить Ваше внимание — это на получение математического факта. Он всегда является результатом медленной и длительной коллективной работы. Когда мы сообщаем некоторое историческое сведение, то оно состоит из фамилии, даты, при нужде из названия мемуара — это все. Мы представляем дело так, как будто бы истина появилась из пены во всей ее ясности и лучезарной красоте, в полном вооружении Дело обстоит, однако, не так: истина сияет лишь перед глазами того, кто долго ее искал — достаточно долго, чтобы заслужить увидеть ее. И лишь тот осознает ее мощь, ее действенность, ее творческие возможности, кто долго и с любовью изучал ее; часто эти длительные усилия мысли не оставляют никакого материального следа, мы можем лишь подозревать о них, не больше. Для особенно плодотворных истин, которые всегда очень трудно завоевываются, это справедливо тем более. В предшествующих работах можно проследить разные подходы, увидеть успехи и неудачи, вдруг понять причины этих успехов и неудач, выявить ошибочную идею, часто предубеждение, которые мешали обнаружить правильную и разумную перспективу, открывающую правильный путь. Попытаться сделать это для особенно важного предложения, для фундаментального понятия — это, по-моему, и означает создание подлинной истории наук, подлинной философии наук, так как это заинтересовало бы и сослужило бы хорошую службу тем, кто занимается математикой, а не только философов-профессионалов; и я полагаю, что именно это является единственным критерием для распознания подлинной истории, подлинной философии науки» [44, с. 104].

Рене Бэр

Бэр, по-видимому, был не менее талантливым человеком, чем Борель и Лебег. Однако ему в жизни очень не повезло: болезнь, мучившая его с юношеских лет, позволила ему посвятить научной работе, проводившейся в перерывах между отрезками педагогической деятельности, немногим более десяти лет и так непродолжительной его жизни. Все же Бэр сумел оставить столь прочный след в науке, что его имя неразрывно связано с очень большим числом проблем и методов математики — с классификацией разрывных функций, с фундаментальной теоремой о функциях первого класса, с важным необходимым свойством B-функций и B-множеств, с интересным топологическим пространством последовательностей натуральных чисел, с понятиями множеств первой и второй категории, полунепрерывности функций и т. д. Это по праву делает его одним из основоположников второго этапа развития теории функций действительного переменного, начавшегося во Франции на рубеже XIX—XX вв.; его труды стоят также у истоков теоретико-множественной топологии.

Рене Луи Бэр родился в Париже 21 января 1874 г. третьим ребенком в семье скромного ремесленника. Его родители многим пожертвовали, чтобы дать ему широкое образование. По окончании одной из парижских школ он учился до 1890 г. в лицее Ляканал, а затем на математическом отделении лицея Генриха IV. В 1892 г. он был принят в Высшую Нормальную школу, которую окончил в 1895 г. со званием преподавателя математики средней школы. Для подготовки диссертации он в 1898 г. был ненадолго послан на стажировку в Италию, где, главным образом под воздействием Вольтерры, разглядевшего незаурядные способности Бэра, последний окончательно выбрал областью своих научных исследований теорию функций действительного переменного, заинтересовавшую его еще во время учебы в Нормальной школе благодаря лекциям Жюля Таннери.

Затем началась его преподавательская работа, сначала в средних учебных заведениях, а затем, после защиты в 1899 г. докторской диссертации [5] и перерыва, вызванного болезнью, начавшейся еще в студенческие годы,— в университетах Монпейе и Дижона.

Если не считать издания Бэром в 1895 г. лекций Пуанкаре по аналитической теории теплоты, то начало его научной деятельности приходится датировать 1897 г. Первый ее период продолжался всего около трех лет, в течение которых он опубликовал наиболее важные работы, включая диссертацию «О функциях действительного переменного». Затем последовал пятилетний перерыв, и лишь с 1904 г. он вновь смог заняться научной работой. В 1904—1909 гг. появилась еще серия его исследований, посвященных главным образом уточнению и углублению идей, высказанных в трудах предшествующего периода активности. К этому времени известность Бэра во Франции достигла зенита. Его приглашают прочесть курс лекций в Коллеж де Франс, результатом которых явилась книга «Лекция о разрывных функциях» [10]; ему поручается обзор по теории множеств во французской энциклопедии математических наук [18]; выходит двухтомный курс анализа по лекциям в Дижонском университете [15, 16]; публикуется фундаментальная статья «О представлении разрывных функций», первая часть которой (1906 г.) посвящена распространению результатов, полученных ранее для функций одного переменного, на функции нескольких переменных и пополнению их, вторая (1909 г.)— их обобщению на функции, заданные на множествах из топологического пространства последовательностей натуральных чисел.

Возможно, что напряженный труд в эти годы привел к окончательному подрыву его здоровья, вскоре приведшему к прекращению и преподавательской работы. В 1914 г. он взял отпуск для лечения и уехал в Швейцарию. Там его захватила первая мировая война, и он вынужден был жить в чужой стране, испытывая большие финансовые затруднения. По состоянию здоровья он не мог заниматься научной деятельностью, находя некоторое утешение в изучении проблемы реформы календаря — на эту тему он опубликовал статью в 1921 г.

В 20-х годах к Бэру пришло и запоздалое официальное признание. За научные заслуги он был награжден орденом Почетного легиона; в 1922 г. его избрали членом-корреспондентом Парижской академии наук, а в 1925 г. установили пенсию; эта пенсия вместе с присужденной ему в 1926 г. одной из академических премий за совокупность математических работ позволила жить Бэру некоторое время без финансовых осложнений. Однако последовавшая вскоре девальвация франка вновь привела к трудностям, и его последние годы жизни в Швейцарии были тяжелыми. Умер Бэр 5 июля 1932 г.

Относительно общей направленности научных интересов Бэра Лебег [42, с. 29, 30] писал: «Если до Бэра ученые и интересовались действительными переменными, то это мимоходом и для комплексных переменных, которыми с начала XIX в. занимались почти исключительно. Бэр первым посвятил всю свою научную деятельность теории функций действительного переменного. Более того, он научил и нас плодотворно посвящать ей свои труды».

О его первом большом достижении — теореме о функциях первого класса — мы уже говорили (с. 37) Здесь добавим, что для ее доказательства Бэру пришлось привлечь новый способ рассуждений — трансфинитную индукцию, до этого использованную только в 1883 г. при доказательстве теоремы Кантора—Бендиксона о представлении несчетного замкнутого множества в виде суммы совершенного и не более чем счетного множеств. Этим методом Бэр пользовался затем в ряде работ, и после них трансфинитная индукция заняла прочное место в арсенале математических рассуждений.

Много говорилось и о бэровских функциях (с 38, 55—59), поэтому здесь не будем повторяться. Зато на введении им нуль-мерного пространства следует остановиться подробнее. Бэр ввел это пространство в 1899 г. Это представляется удивительным для того времени: ведь теоретико-множественной топологии тогда практически не существовало, а Фреше еще не приступил к построению функционального анализа. И хотя бэровские заметки [6, 7] по необходимости очень кратки, его широкий замысел очерчен в них достаточно четко: ввести пространство последовательностей натуральных чисел, изучить множества, элементами которых являются такие последовательности, и исследовать действительнозначные функции, заданные на таких множествах. Трудно сказать, помогла или нет ему такая общность в формулировке известного свойства Бэра, но именно в заметке [7] он сформулировал его в общем виде, а до этого вводил его только для функций второго класса (для функций нулевого и первого классов это свойство очевидно). Даже новое обращение Бэра к детальному изучению этого цикла вопросов в 1909 г. [17] выглядит опережающим время, хотя к этому времени и появились работы Фреше, в которых были развиты многие идеи функционального анализа и теоретико-множественной топологии

Это пространство Бэр [17, с. 105, 106] определил следующим образом. Рассматривается множество R всевозможных последовательностей

$$a = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots) \qquad (1)$$

натуральных чисел [8]. Это множество Бэр назвал основным множеством; мы будем называть его пространством Бэра, а каждую последовательность (1) — точкой этого пространства [9]. Окрестностью в R или интервалом Бэра порядка k [10] является множество тех точек из R, у которых фиксированы первые k чисел n_k, а остальные изменяются произвольно.

Это определение позволило Бэру ввести понятие предельной точки для множеств из R (с. 107), а затем и перенести на такие множества основные понятия и предложения теории точечных множеств, связанные с ним.

В пространстве Бэра можно ввести расстояние между двумя точками (x, y): если первые k чисел соответствующих последовательностей одинаковы, а $k+1$ числа различны, то

$$\rho(x, y) = 1/k \text{ [11]}.$$

---

[8] Нуль исключается.

[9] Сам Бэр тоже называл R пространством, а последовательность (1) — точкой этого пространства [17, с. 134].

[10] Бэр называл их группами порядка k [17, с. 106].

[11] У Бэра это выражено так: «Две различные последовательности — элемента рассматриваются как тем более близкие друг к другу, чем больше они имеют одинаковых последовательных членов, начиная с первого» (с. 106).

Пространство Бэра с этой метрикой является полным метрическим пространством, а так как такое пространство является множеством второй категории на самом себе [17, с 116], то это позволяет пользоваться методом категорий для доказательства многих теорем существования. Его, например, и применяет Бэр [17, с 125] при доказательстве теоремы о функциях первого класса, заданных на замкнутом множестве из R.

Пространство Бэра использовалось затем очень часто. Укажем, например, что все изложение теории B- и A-множеств в фундаментальной книге Лузина «Лекции об аналитических множествах» [2] построено в применении к множествам, заданным в пространстве иррациональных точек евклидова пространства, являющегося частным случаем пространства R.

Из топологических работ Бэра можно также указать статью «О неналожимости двух континуумов n и $n+p$ измерений», в которой он попытался доказать давнишнюю теорему, восходящую к Кантору и Дедекинду [12], что между двумя континуумами различного числа измерений невозможно установить взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие. Для этой цели он установил цепь топологических теорем, ведущих к ней, но самого утверждения о невозможности такого соответствия он здесь не доказал, пообещав [14, с. 94] сделать это в специальном мемуаре, который, кажется, так и не появился.

Остановимся еще на бэровских «Лекциях по общим теориям анализа» — двухтомном курсе математического анализа. Лебег [44, с. 29] назвал его «прекрасной книгой» [13] Мы придерживаемся более осторожной оценки, помещая «Лекции» Бэра в разряд рядовых курсов анализа того времени и мотивируя это тем, что книги Бэра не использовались сколько-нибудь широко в последующих исследованиях по математике, как это было, например, с вышедшими ранее курсами анализа Гурса или Валле-Пуссена.

Разумеется, Бэр был большим математиком, и в указанных двух его книгах можно обнаружить интересные идеи Так, в его принципе продолжения функции $f(x, y)$ двух рациональных аргументов, равномерно непрерывной во всякой замкнутой области, до непрерывной функции $F(x, y)$, заданной при любых действительных x, y и такой, что $F(x, y)=f(x, y)$ в рациональных точках [15, с. 25—28], можно увидеть намек на принцип продолжения Гана—Банаха. В его расширении алгебраического исчисления на множества функций [15, с. 30, 31] вычитывается предвосхищение понятия линейного функционального пространства [14]. Несколько своеобразно введение Бэром понятия дифференциала [15, с. 71, 72, 119, 120]. Содержатся там и некоторые, по-видимому, новые теоремы, вроде такой, что монотонная функция, принимающая один раз всякое значение, заключенное между верхней и нижней гранями ее значений на ограниченном интервале, является непрерывной (с. 50). Однако в целом «Лекции по общим теориям анализа» Бэра, видимо, не оказали существенного влияния на развитие математики. То же самое можно сказать и о его небольшой книге «Теория иррациональных чисел, пределов и непрерывности» [11], хотя она издавалась во Франции трижды — в 1905, 1912 и 1920 гг.

---

[12] См Медведев [1, с 107—110].

[13] Высоко оценил его и Костабель [1, с 407].

[14] Более четко оно было сформулировано Пинкерле еще в 1901 г.

Морис Фреше

Морис Рене Фреше скончался совсем недавно, его жизнь и научная деятельность еще ожидают своих исследователей. Мы далее опираемся на краткие заметки Мандельбройта [1] и Дюге [1, 2], да на относительно небольшое число работ самого Фреше.

Родился Фреше в 1878 г. в местечке Малиньи департамента Ионны четвертым ребенком в семье учителя небольшой протестантской школы. После переезда семьи в Париж он поступил в лицей Бюффона, где в то время преподавал Жак Адамар. Последний вскоре заметил склонность молодого Фреше к математике, начал читать для него специальные лекции, давал решать интересные задачи.

После прохождения военной службы Фреше — по совету Адамара — поступил в Высшую Нормальную школу. По окончании ее он преподавал некоторое время математику в средних школах Безансона и Нанта. В 1906 г. вышла в свет его знаменитая диссертация «О некоторых вопросах функционального исчисления» [8], представленная им на соискание ученой степени доктора математических наук и ставшая отправным пунктом нового периода развития функционального анализа.

После получения звания доктора Фреше работал преподавателем на факультете наук в Ренне, а затем в университете в Пуатье, где в 1910 г. он стал профессором механики.

Первая мировая война оборвала его преподавательскую деятельность. Призванный в армию, он служил сначала простым солдатом, затем стал переводчиком в английской армии на северном флоте, а к концу 1917 г. был назначен атташе авиационной миссии Франции в Лондоне.

После перемирия Фреше, еще не демобилизованный, был послан в Страссбург (Эльзас), чтобы принять участие в реорганизации университета, с 1870 г. находившегося под управлением немцев. Здесь он в 1919 г. стал профессором высшего анализа, директором Института математики и провел десять лет кипучей научной, преподавательской и организационной деятельности.

1928 г. оказался новым переломным пунктом в жизни Фреше. Он по приглашению Бореля переехал в Париж и начал преподавание в Институте имени Пуанкаре, на факультете наук Парижского университета и в Высшей Нормальной школе. Произошла и смена областей математических исследований: от занятий главным образом функциональным анализом и топологией он перешел преимущественно к исследованиям по теории вероятностей и математической статистике. В 1931 г. он был избран членом Международного института статистики, в 1959 г.— его почетным членом, а в 1960 г.— вице-президентом. Вместе с тем Фреше был членом Парижской академии наук по секции геометрии, действительным и почетным членом многих научных учреждений и организаций Франции и других стран.

Жизнь и научная деятельность Фреше тесно переплеталась с жизнью и научным творчеством двух других больших математиков Франции — Адамара и Бореля.

Встретившись с Адамаром еще в двенадцатилетнем возрасте, Фреше поддерживал с ним связь в течение очень длительного времени (оба отличились почти вековой продолжительностью жизни: Адамар прожил с 1865 по 1963 г., Фреше — с 1878 по 1973 г.). Адамар не только способствовал математическому образованию Фреше, но и в очень сильной степени воздействовал на его становление и развитие как ученого. Еще в 1897 г. Адамар [2] сформулировал задачу построения теории множеств функций в виде аналога теории точечных множеств, высказав предположение, что она окажется полезной в теории уравнений в частных производных, в вариационном исчислении и других областях математики. Проблемой построения такой теории в это время уже занимались некоторые математики, главным образом итальянские (Асколи, Арцела, Вольтерра, Пинкерле и др.), однако уровень абстрактности их исследований не был достаточно высоким. Почти достоверно, что Адамар поставил эту задачу и своему ученику. Действительно, Фреше, начиная с его первых работ 1904 г., реализует замысел Адамара в значительно большей общности и с бо́льшим успехом, чем его итальянские предшественники (на труды которых он, кстати, существенно опирался). О прямом влиянии работ Адамара на направление исследований Фреше свидетельствуют неоднократные ссылки последнего на результаты первого, как, например, в статьях [3, с. 496; 10, с. 1414]. Во введении к своей диссертации Фреше [8, с. 3] выражает благодарность Адамару за большой интерес к работе и критические замечания, способствовавшие ее улучшению. Многие соображения, высказанные Адамаром [11] и Фреше [16a] в их выступлениях на VI Международном конгрессе математиков по поводу функционального анализа, переплетаются настолько тесно, что доклад второго оказывается непосредственным продолжением первого. Фреше, кстати, в своем выступлении [16a] прямо утверждал, что разработка функционального анализа явилась реализацией замысла Адамара.

Адамар, со своей стороны, высоко ценил и пропагандировал работы Фреше. В частности, он говорил (в докладе Парижской академии наук в 1934 г.), что отвага, проявленная Фреше при создании функционального анализа, взлет его абстрагирующей мысли при этом были беспрецедентными со времени работ Галуа (см. Мандельбройт [2, с. 74]).

Одной из характерных особенностей творчества Фреше в области функционального анализа и теоретико-множественной топологии является то, что он, в отличие от других математиков того времени, сразу же начал привлекать для построения этих наук (которые он, впрочем, почти не отделял друг от друга) новейшие идеи и методы теории множеств и теории функций действительного переменного, и это, в основном, предопределило его бо́льшие, по сравнению с достижениями других, успехи. Приведем лишь один факт, подтверждающий сказанное. В 1904 г. Фреше [3] занялся проблемой аналитического представления функционалов в пространстве непрерывных функций. Для ее решения он привлек только что введенный интеграл Лебега и только что примененный Фейером метод Чезаро суммирования тригонометрических рядов. Правда, полученный им результат не был столь законченным, как несколько более поздний результат Рисса, воспользовавшегося интегралом Стилтьеса, но обращение Фреше к новейшим достижениям теории функций действительного переменного (интеграл Стилтьеса тогда еще оставался вне поля зрения подавляющего большинства математиков) иллюстрируется здесь достаточно ярко.

Вместе с тем — и это особенность трудов Фреше в области теории функций — свои основные теоретико-функциональные результаты он получал, как правило, не для действительно-значных функций, заданных на множествах n-мерного евклидова пространства, а сразу для функционалов. Об основных из них мы уже упоминали: это — введение им очень общего понятия интеграла (с 68, 69); доказательство теоремы о представлении измеримой функции сходящейся почти всюду последовательностью непрерывных функций (с. 82); изучение свойств интеграла Стилтьеса (с. 68), для чего он, в частности, ввел своеобразное определение ограниченности вариации функции нескольких переменных (Фреше, [12, с. 241, 242]); разработка им проблем интерполяции и аппроксимации функций (с 34), в частности обобщение чебышевских методов аппроксимации (Фреше, [11]) Связь его исследований по теории функций и функциональному анализу особенно наглядна в его работах о понятии дифференциала Уже в первой заметке по этому вопросу Фреше, введя определение дифференциала функции нескольких переменных через выделение главной части, линейной по отношению к приращению функции, подчеркивает [14, с. 846] как существенное преимущество такого определения то, что оно непосредственно обобщается на функционалы В последующих работах этого цикла (о них см. Тейлор, [1]) он изучал преимущественно такое обобщение.

Пожалуй, не меньшее воздействие на научные интересы Фреше оказал Борель. Если влияние Адамара начало сказываться еще с детского возраста Фреше и продолжалось в первые десятилетия его научной деятельности, то роль Бореля в переориентации его исследовательских интересов начала проявляться тогда, когда Фреше находился в расцвете своих сил и способностей, когда он своими блестящими результатами в функциональном анализе и топологии добился славы и признания во всем мире. Тем выше следует оценивать влияние Бореля. Конечно, у Фреше имелись отдельные работы по теории вероятностей еще до непосредственных контактов с Борелем. Но лишь после своего переезда в Париж Фреше начал определенно переходить к теоретико-вероятностной и статистической тематике, особенно после привлечения его к участию в борелевской серии книг по теории вероятностей, о которой мы уже упоминали (с. 191).

И не случайно Фреше [18, с. 1] называл Бореля одним из своих великих учителей. Помимо посвященной Борелю статьи [18], он опубликовал большую книгу «Эмиль Борель — философ и человек действия» (1967 г.), в которой охарактеризовал многогранную личность этого большого ученого.

Вклад Фреше в теорию вероятностей и математическую статистику очень велик, и значение его трудов здесь двоякое Во-первых, многие идеи и методы, разработанные им в теории функций и функциональном анализе, независимо от теоретико-вероятностных соображений, оказались существенно необходимыми для развития последних как самим Фреше, так и другими математиками. Например, высвобождение понятий меры и интеграла от геометрических элементов явилось необходимым условием построения теории вероятностей на новых аксиоматических основаниях, что подчеркнул Колмогоров в приведенных на с. 188 словах. Во-вторых, сам Фреше входит в число главных создателей современных теории вероятностей и математической статистики.

Фреше принадлежит к числу наиболее продуктивных математиков XX в Дюге [2, с 401] указал, что он является автором около трехсот публикаций;

мы полагаем, что число их достигает четырех сотен Среди них около двух десятков книг, одни из которых представляют собой монографии по тем или иным вопросам математики, вроде книги «Абстрактные пространства и их теория, рассматриваемая как введение в общий анализ» (1928 г.); другие являются учебниками или учебными пособиями, например «Курс номографии» (1928 г.) или «Представление эмпирических законов приближенными формулами» (1930 г.); книга «Математика и действительность» (1955 г.) отражает философские воззрения Фреше.

Умер Фреше 4 июня 1973 г.

Краткие сведения о некоторых других французских математиках

Нижеследующие краткие биографические очерки имеют целью несколько дополнить четыре предыдущих параграфа сведениями о нескольких ученых, в той или иной мере участвовавших в подготовке или в разработке идей и методов теории функций действительного переменного во Франции. Размеры заметок, конечно, не соответствуют значимости работ этих ученых для развития математики; они скорее обусловлены вкладом каждого из них в разбираемую научную дисциплину.

Камилл Жордан. Мари Эннемон Камилл Жордан родился 5 января 1838 г. в Лионе. В одном из пригородов Лиона он получил среднее образование, затем окончил специальный математический класс в Лионском лицее и в 1855 г. поступил в Политехническую школу. По окончании ее он продолжил обучение в Горной школе (École des mines).

По выходе из Горной школы в 1861 г. он в течение ряда лет работал в качестве инженера и лишь в 1873 г. был приглашен на должность экзаменатора по анализу в Политехническую школу. Через три года его назначили профессором анализа; с 1875 г он начал читать лекции и в Коллеж де Франс. Обе эти должности он занимал до выхода в отставку в 1912 г.

С 1885 по 1922 г. он был директором одного из основных математических органов Франции — «Журнала чистой и прикладной математики», основанного в 1836 г. и существующего до настоящего времени. Умер Жордан в ночь с 21 на 22 января 1922 г.

Научной работой Жордан начал заниматься со времени пребывания в Горной школе. Круг его интересов был очень многообразным: кинематика в трехмерном пространстве и в пространствах большего числа измерений, проблема устойчивости, геометрическая вероятность, теория чисел, теория групп, дифференциальные уравнения, общий анализ. Небезынтересно, что, консерватор по воспитанию и убеждениям, Жордан был подлинным революционером в науке. Характерен эпизод из переписки Жордана с Эрмитом, описанный Лебегом [39, с. 92]. В одном из писем Жордан упрекнул Эрмита за то, что последний не прочел его мемуар, представленный Академии наук. Эрмит на это ответил, что труды Жордана слишком трудны, чересчур абстрактны и что он готов подать в отставку, если ему вменят в обязанность читать их. Действительно, Эрмиту, воспитанному на традициях математики первой половины XIX в., трудно было воспринимать то, что создавалось во многом в результате трудов Жордана Мы привели этот факт лишь для характеристики в некотором смысле направленности Жордана на будущее в науке

Традиционный, восходящий к Ньютону и Лейбницу, особенно развитый Эйлером, взгляд на интегрирование как на обращение операции дифференцирования был, несомненно, преобладающим в XIX столетии. Отход от этого взгляда можно в какой-то мере заметить у Коши, у Дирихле, у Римана и у ряда других математиков прошлого века. Но он был выражен слишком робко, чтобы стать устойчивой системой взглядов. В некотором смысле он не стал таковым и сегодня, но тенденция к превращению операции интегрирования в первичную по отношению к дифференцированию операции анализа в настоящее время достаточно очевидна, и одним из предвестников этой тенденции был Жордан. Как писал Лебег [39, с. 101], «размышления заставили его признать интеграл за самое простое, самое интуитивное, самое первоначальное понятие из всех понятий анализа».

О вкладе Жордана в разработку теории функций мы уже говорили (с. 21, 22). Здесь добавим лишь, что его одобрение, высказанное зачинателям французской школы теории функций, в частности Лебегу, было очень важным, и последний писал, что Жордан «оказал новой школе неоценимую поддержку, с лихвой компенсировавшую немногие нападки, которые ей пришлось перенести» [15]. Новаторский дух его собственных трудов, видимо, способствовал правильному пониманию новаторства молодого поколения, пошедшего дальше по пути, намеченному во Франции самим Жорданом.

Гастон Дарбу. Жан Гастон Дарбу родился в г. Ниме 14 августа 1842 г. После окончания лицеев в Ниме и Монпейе он в 1861 г. сдал экзамены одновременно в Политехническую и Нормальную школы, получив в обеих самые высокие оценки. Для продолжения образования Дарбу выбрал последнюю, которую и окончил через три года. С 1867 по 1872 г. преподавал математику в средних учебных заведениях, затем до 1881 г. вел преподавательскую работу в Нормальной школе. Кроме того, с 1873 по 1878 г. он заведовал кафедрой теоретической механики в Сорбонне; в 1878 г. он перешел там на кафедру высшей геометрии и через два года стал заведующим этой кафедрой, которую сохранил за собой до самой смерти, последовавшей 23 февраля 1917 г. В 1884 г. Дарбу был избран членом Парижской академии наук, а с 1900 г. стал ее непременным секретарем. Был он также членом большого числа научных обществ как во Франции, так и за рубежом.

Наиболее известен Дарбу своими геометрическими работами и исследованиями по дифференциальным уравнениям, как обыкновенным, так и в частных производных. Его четырехтомный трактат «Лекции по общей теории поверхностей и геометрическим применениям анализа бесконечно малых» (1887—1896 гг.) стал классическим произведением математической литературы. Широко известны также его книги «Лекции об ортогональных системах и криволинейных координатах» (1898, 1910 гг.) и «Принципы аналитической геометрии» (1917 г.). Работал Дарбу в области теоретической механики и теории функций, а также занимался историей науки. В 1888—1890 гг. он издал труды Фурье, предпослав им высокую оценку научного творчества последнего. Его перу принадлежат биографии ряда ученых Франции. Мы уже упоминали (с. 23) о создании Дарбу первого во Франции полуреферативного журнала «Бюллетень математических и астрономических наук», который

---

[15] Цитируется по книге Сакса [1, с. 7].

вскоре перешел на чисто математическую тематику. Дарбу долго руководил этим журналом.

Многие из его результатов по теории функций мы вкратце охарактеризовали выше (с 20, 21). Добавим к сказанному там, что в «Мемуаре об аппроксимации функций очень больших чисел и о широком классе разложений в ряды» [2] он разработал метод оценки порядка величины членов разложения функции по весьма общим ортогональным полиномам и применил его для изучения сходимости и нахождения сумм указанных разложений, включающих как частные случаи ряды по полиномам Лежандра. Свои результаты, установленные сначала для функций действительного переменного, он распространил и на функции комплексного переменного, а также набросал [2, с. 411—416] схему изучения разложений по более общим ортогональным функциям.

Кроме называвшихся ранее работ [1—3], Дарбу опубликовал в 70-х годах еще ряд статей, посвященных изучению разложений по ортогональным функциям, в частности по полиномам Лежандра. Эти его аналитические исследования непосредственно приводили к теории функций в том смысле, в каком мы ее рассматриваем здесь. Однако характерным для работ Дарбу по этому предмету является то, что он, если можно так выразиться, виртуозно избегал зарождавшихся в то время теоретико-множественных представлений. Быть может, после построения теории множеств в 70—80-х годах он и сумел бы преодолеть свое предубеждение в отношении теории множеств [16], но к этому времени он занялся другими вопросами математики и механики, в которых применение теоретико-множественных идей и методов еще не стало на повестку дня.

Жюль Таннери. Жюль Таннери родился в Манте 24 марта 1848 г. После начального образования в семье и церковно-приходской школе, он учился в лицее в Кане, а в 1866 г. поступил в Нормальную школу. В последней на его математические интересы, во многом пробужденные ранее его старшим братом Полем Таннери, оказали влияние Пюизё, Эрмит и Буке. По окончании Нормальной школы в 1869 г. Таннери в течение трех лет преподавал в средних учебных заведениях, а в 1872 г. стал аспирантом (agrégé-préparateur) в Нормальной школе. В 1875 г. он дебютировал в высшем образовании в качестве помощника Буке в Сорбонне. Через несколько лет он перешел в Нормальную школу, где вскоре стал директором отдела научных исследований. В 1907 г. он был избран членом Парижской академии наук. Умер Таннери 11 ноября 1911 г.

Помимо упоминавшейся книги «Введение в теорию функций действительного переменного», Таннери совместно с Мольком написал трактат по теории эллиптических функций и популярную книгу «Основные понятия математики» [7], в которую включил очерки истории математики и астрономии, написанные его братом [17]. Чисто математические результаты Таннери незначительны [18]; он больше интересовался вопросами философии науки и методикой пре-

---

[16] Мы не располагаем данными, определенно подтверждающими наличие такого предубеждения, однако такой вывод вытекает, как нам кажется, из контекста некоторых его работ.

[17] С. 360—406 русского перевода.

[18] О них см. Пикар [5, с. 16, 17].

подавания математики. Однако его преподавательская и административная деятельность в Нормальной школе оказала значительное влияние на развитие математики во Франции вообще и на развитие теории функций в частности. Мы уже упоминали о воздействии Таннери на формирование научных интересов Бэра; учеником Таннери считал себя и Борель, высоко ценивший его преподавательский талант, ему он посвятил свою первую книгу [14]; другой его ученик — Ж. Адамар — называл его «научным, интеллектуальным и моральным руководителем» (Леви [1, с. 2]).

Анри Пуанкаре. Об этом одном из самых больших ученых Франции мы вели речь на многих страницах настоящей книги Но сказанное там ни в коей мере не отражает величия научного подвига Пуанкаре, а скорее умаляет его роль в развитии научной мысли, что в нашем изложении было обусловлено характером рассмотренных вопросов Не предполагаем мы и здесь сколько-нибудь исправлять сложившееся положение О жизни и научной деятельности Пуанкаре имеется довольно обширная литература [19]; о нем писали Адамар, Александров, Аппель, Борель, Вольтерра, Ланжевен, Стеклов и др. Мы ограничимся предельно скромной задачей: привести очень краткие общие сведения о его жизни и деятельности да отметить несколько малоизвестных штрихов его многогранной мысли, относящихся к теории функции и множеств.

Жюль Анри Пуанкаре родился в Нанси 29 апреля 1854 г. Там же в лицее он получил среднее образование, увлекаясь в то время историей и литературой. В 1873 г. он выдержал экзамены одновременно в Политехническую и Нормальную школы, выбрал для продолжения образования первую и окончил ее в 1875 г Затем четыре года проучился в Высшей национальной школе рудников, по окончании которой некоторое время проработал горным инженером, но вскоре занялся исключительно научной деятельностью. В 1879 г. он защитил докторскую диссертацию «О некоторых свойствах функций, определяемых уравнениями в частных производных» и начал чтение лекций по математическому анализу на факультете наук в Кане, затем на факультете наук Парижского университета (1881—1885 гг). В последнем он читал разнообразные курсы лекций до конца жизни. Преподавал он и в других учебных заведениях. В 1887 г. Пуанкаре избирается в Парижскую академию наук по секции геометрии. Он был действительным и почетным членом очень большого числа научных учреждений и организаций (перечень их см Пуанкаре [11, с 261—264]). Умер он 17 июля 1912 г

Первая публикация Пуанкаре датируется 1874 г. и за три с половиной десятка лет научной деятельности он подготовил около 500 работ по математике, физике, механике, астрономии, философским вопросам науки.

На с. 114, 115 отмечалось отрицательное отношение Пуанкаре к теории множеств. В связи с этим интересно фактическое применение им теоретико-множественных соображений в своих работах, правда, несколько более раннего времени О некоторых из них мы вкратце упоминали (с 114), а сейчас добавим к сказанному следующее.

Большое место в изысканиях по теории функций в двадцатом столетии заняла так называемая эргодическая теория, т. е. учение о преобразованиях, сохраняющих меру. В ней находят себе применение наиболее абстрактные

[19] Ограничимся указанием лишь двух публикаций: Пуанкаре [11] и Александров [1].

и тонкие идеи теории множеств и функций. Одним из интереснейших фактов истории эргодической теории является то, что у истоков современных подходов к ней находятся исследования Пуанкаре по небесной механике: он в 1899 г. доказал [10, с. 130—144] теорему о возвращении, положившую начало нынешнему учению о взаимно однозначных и взаимно непрерывных преобразованиях множеств, инвариантных относительно меры. Мы не будем приводить формулировку и говорить что-либо о доказательстве этой теоремы ни в том виде, как это сделано Пуанкаре, ни в современной форме, так как это потребовало бы длинных пояснений [20]. Заметим лишь, что формулировка теоремы и ее доказательство у Пуанкаре фактически опираются — если перевести их на современный язык — на понятия меры в смысле Лебега и категории в смысле Бэра. Затрудняемся сказать, имелось ли в данном случае какое-либо взаимодействие мыслей Бореля, Бэра, Лебега и Пуанкаре, но сам факт, что почти в одно и то же время и в одном и том же месте, но в разных ответвлениях науки, на первый взгляд так далеко отстоящих друг от друга, мысли различных ученых шли в одинаковом направлении, представляется нам очень интересным.

Второе обстоятельство связано с теоремой Лузина. Мы говорили о ней неоднократно (см с. 155, 173, 174) и относили первую ее формулировку к Борелю и Лебегу (1903 г.). Но вот что мы можем прочесть в работе Пуанкаре 1897 г. [3, с. 861]: «*Произвольная функция* всегда сколь угодно мало отличается от некоторой разрывной функции и, одновременно, *сколь угодно мало отличается от некоторой непрерывной функции* (курсив наш.— *Ф. М.*)» Выделенные слова выражают собой неформальную сущность теоремы Лузина. Ход мыслей Пуанкаре в указанной работе очень далек от тех теоретико-функциональных соображений, которые могли привести к формулировке теоремы Лузина как предложению теории функций,— он рассуждал здесь как естествоиспытатель, пользующийся математическим понятием функции. Для него это не предложение, требующее доказательства, а некоторая очевидная истина, которую он высказывает мимоходом Как и в предшествующем случае, трудно сказать, имеется ли прямая связь между интуитивным убеждением естествоиспытателя, в качестве которого здесь выступает Пуанкаре, и абстрактным теоретико-функциональным подходом Бореля и Лебега к одному из важнейших предложений теории функций.

Можно предполагать, что в трудах Пуанкаре можно найти и другие аналогичные неожиданности.

Пьер Фату. Луи Жозеф Пьер Фату родился 28 февраля 1878 г. С 1898 по 1901 г. учился в Высшей Нормальной школе. Одаренный математик, он после окончания Нормальной школы и защиты в 1907 г. докторской диссертации «Тригонометрические ряды и ряды Тейлора» [4], оказавшей значительное влияние на развитие теории функций, не сумел подыскать себе место в Париже, где он мог бы работать в качестве профессионала-математика Поэтому он согласился поступить на работу в Парижскую обсерваторию, где до самой смерти работал в области практической астрономии. Умер Фату 10 августа 1929 г.

---

[20] Сошлемся в этой связи на книгу Окстоби [1, с. 113—119] и на указанную там литературу.

Несмотря на занятость в основной работе, Фату получил много замечательных результатов в математике и больше известен как ученый этой области знания. О его значительных достижениях в теории функций действительного переменного мы уже говорили (с. 76—80). Отметим еще некоторые: обобщение интегральной теоремы Коши; решение проблемы Дирихле в случае круга для суммируемых функций; важное условие сходимости ряда Тейлора во всякой точке голоморфности функции, расположенной на окружности круга сходимости; стремление почти всюду интеграла Пуассона к подынтегральной функции при $\rho \to 1$; решение проблемы единственности определения аналитической функции по ее предельным значениям на некотором множестве и т. д. Ряд важных работ он посвятил теории итерации функций комплексного переменного, различным функциональным уравнениям и другим вопросам математики.

ЛИТЕРАТУРА [1]

Абель (*Abel N H.*)

1. Recherches sur la série $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots$ (1826).— «Oeuvres complètes», t. 1. Christiania, 1881, p 219—250.

Адамар (*Hadamard J*)

1 Sur les charactères de convergence des séries à termes positifs et sur les fonctions indéfiniment croissantes.— Acta math., 1894, **18**, 319—336.
2 Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles.— Verh. der ersten intern. Math.-Kongr. (1897). Leipzig, 1898, 201, 202.
3 La theorie des ensembles.— Revue gén. des sci. pures et appl., 1905, **16**, **241**, **242**.
4. Les principes des mathématiques et le problème des ensembles.— Ibid , 541—543.
5. Lettre de M. Hadamard à M. Borel.— Bull. de la Soc. math. France, 1905, **33**, 261—263.
6. Lettre de M. Hadamard à M. Borel.— Ibid., 269—272.
7. La logistique et l'induction complète.— Revue gén. des sci. pures et appl., 1906, **17**, 161—162.
8. Les principes de la théorie des ensembles.— Ibid., 209.
9. La logistique et la notion de nombre entier.— Ibid., 906—909.
10. Les paradoxes des mathématiques et le problème des ensembles.— Revue gén. des sci. pures et appl., 1908, **19**, 681.
11. Le développement et le rôle scientifique du calcul fonctionnel.— Atti del Congresso internazionale dei Matematici. Bologna 3—10 settembre 1928, t. 1. Bologna, 1929, p. 143—161.

Александров П С.

1. Пуанкаре и топология —УМН, 1972 **27** . 1 (163), 147—158

Александровская О. А.

1 Французская географическая школа конца XIX — начала XX века. М , «Наука», 1972.

Альфан (*Halphen G.*)

1. Sur la série de Fourier.— C R, 1882, 95, 1217—1219.

Бернштейн С. Н.

1. Исторический обзор развития понятия о функции.— Вестник опытной физики и математики, 1912, **47**: 7 177—184.

Бёркил (*Burkill J. C.*)

1. Henry Lebesgue.—J. L. M. S., 1944, **19**, 55—65.

Борель (*Borel É*)

1. Sur le changement de l'ordre des termes d'une série semi-convergente.— Selecta. Jubilé scientifique de M. Emile Borel. Paris, 1940, 127—132. Далее Selecta.
2. Sur quelques points de la théorie des fonctions (1895).— Selecta, 3—48.
3. Sur les fonctions de deux variables réelles et sur la notion de fonction arbitraire.— C. R., 1895, **121**, 811, **812**.

[1] Сокращения названий журналов те же, что и в нашей книге [4].

4. Sur les équations différentielles à coefficients constants et les fonctions non analytiques.— Ibid., 933—935.
5 Sur la sommation des séries divergentes.— Ibid., 1125—1127.
6. Sur la généralisation de la notion de limite et sur l'extension aux séries divergentes sommables du théorème d'Abel sur les séries entières — C. R.. 1896, **122**, 73, 74.
7. Applications de la théorie des séries divergentes.— Ibid., 805—807.
8 Fondament de la théorie des séries divergentes sommables (1896).— Selecta, 144—150.
9. Sur la région de sommabilité d'un développement de Taylor.— C. R., 1896, **123**, 548, 549.
10. Sur les séries de Taylor.— Ibid., 1051, 1052.
11 Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure.—J. de math. pures et appl., sér. 5, 1896, **2**, 441—451.
12 Sur les séries de Taylor — Acta math., 1897, **21**, 243—247.
13. Congrès international des mathématiciens de Zürich — Revue gén. des. sci. pures et appl., 1897, **8**, 783—789.
14. Leçons sur la théorie des fonctions. Paris, 1898.
15. Mémoire sur les séries divergentes — Ann. sci. de l'École Norm. sup., sér. 3, 1899, **16**, 9—131.
16. Addition au mémoire sur les séries divergentes.— Ibid., 132—136.
17. A propos de l'infini nouveau.— Revue philos. de la France et de l'étranger, 1899, 48, 383—390.
18 L'antinomie du transfini.— Revue philos de la France et de l'étranger, 1900, **49**, 378—383.
19. Sur la généralisation du prolongement analytique (1900).— Selecta. 56—59.
20. Les séries absolument sommables, les séries (*M*) et le prolongement analytique.— C. R., 1900, **131**, 830, 831.
21. Leçons sur les séries divergentes. Paris, 1901.
22. Le prolongement analytique et les séries sommables — M. A., 1901, **55**, 74—80.
23 Leçons sur les séries à termes positifs. Paris, 1902.
24 Contribution à l'analyse arithmétique du continu — J. de math pures et appl., sér 5, 1903, **9**, 329—375.
25 Quelques remarques sur ensembles de droites et de plans.— Bull. de la Soc. math. France, 1903, **31**, 272—275.
26. Sur la représentation effective de certaines fonctions discontinues, comme limites de fonctions continues — C. R., 1903, **137**, 903—905.
27. Un théorème sur les ensembles mésurables.— Ibid., 966, 967.
28. L'interpolation des fonctions continues par des polynomes.— Verh. des III Intern. Math.-Kongr. (1904). Leipzig, 1905, 229—232.
29. Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en série de polynomes. Paris, 1905.
30. Sur une propriété des ensembles fermés.— C. R., 1905, **140**, 298—300.
31 Remarques sur les principes de la théorie des ensembles.— M. A., 1905, **60**, 194, 195.
32 Lettre de M. Borel à M. Hadamard — Bull de la Soc math. France, 1905, **33**, 272, 273.
33. Remarques sur certaines questions de probabilités.— Ibid., 123—128.
34 Les paradoxes de la théorie des ensembles.— Ann. sci. de l'École Norm sup., sér. 3, 1908, **25**, 443—448.
35 Les probabilités dénombrables et leur applications arithmétiques (1909).— Selecta, 266—301.
36. La théorie des ensembles et les progrès récents de la théorie des fonctions — Revue gén. des sci. pures et appl., 1909, **20**, 315—324.
37. Le continu mathématique et le continu physique.— Scientia, 1909, **6**, 21—35.
38. Leçons sur la théorie de la croissance Paris, 1910.
39. Sur la définition de l'intégrale définie.— C. R., 1910, **150**, 375—377.
40. Sur une condition générale d'intégrabilité.— Ibid., 508—511.
41. Sur les théorèmes fondamentaux de la théorie des fonctions de variables réelles.— C R., 1912, **154**, 413—415.
42. Modèles arithmétiques de l'irreversibilité apparente.— C. R., 1912, 154, 1048—1050.
43. Le calcul des intégrales définies.— J. de math. pures et appl., sér. 6, 1912, **8**, 159—210.
44 Les fonctions monogènes non analytiques (1912).— Selecta, 60—74.
45. Notice sur les travaux scientifiques. Paris, 1912.

46. Les ensembles de mesure nulle.— Bull. de la Soc. math France, 1913, **41**, 1—19.
47 Leçons sur la théorie des fonctions, 2-e éd., augmentée. Paris, 1914.
48 La théorie de la mesure et la théorie d'intégration. Note VI dans un livre [47, p. 217—256].
49. Leçons sur les fonctions monogênes uniformes d'une variable complexe, d'après un cours professé en 1913—1914. Paris, 1917.
50 Supplement à la Notice de 1912 sur les travaux scientifiques de M. Émile Borel (1921).— Selecta, 381—387.
51. Основные идеи алгебры и анализа (1924). М.— Л, Госиздат, 1927.
52. Les paradoxes de l'infini. Paris, 1946.

Бройль де (*de Broglie L.*).

1. Жизнь и труды Эмиля Бореля (1957).— В кн.: *Луи де Бройль.* По тропам науки М., ИЛ, 1962, с. 66—86.

Бурбаки (Bourbaki N.)

1. Очерки по истории математики М., ИЛ, 1963.

Буркхардт (*Burkhardt H.*)

1 Über Gebrauch divergenter Reihen in der Zeit von 1750—1860.—M. A., 1911, **70**, 169—206.

Бутру (*Boutroux P.*)

1 Sur la notion de correspondance dans l'analyse mathématique.— Revue de métaph. et de morale, 1904, **12**, 909—920.
2. Correspondance mathématique et relation logique.— Revue de métaph. et de morale, 1905, **13**, 620—637.
3 L'oeuvre philosophique.— Dans un livre: *Henri Poincaré.* L'oeuvre scientifique, l'oeuvre philosophique. Paris, 1914, p. 205—259.

Бэр (*Baire B.*)

1. Sur la théorie générale des fonctions de variables réelles.— C. R, 1897, **125**, 691—694
2. Sur les fonctions discontinues développables en séries de fonctions continues — C. R., 1898, **126**, 884—887.
3 Sur les fonctions discontinues qui se rattachent aux fonctions continues.— Ibid., 1621—1623.
4. Sur le problème d'intégration au point de vue des variables réelles.— Ibid., 1700—1703
5. Sur les fonctions de variables réelles.—Ann. di mat. pura ed appl., sér. 3, 1899, **3**, 1—123.
6. Sur la théorie des ensembles.— C. R., 1899, **129**, 946—949
7. Sur la théorie des fonctions discontinues.— Ibid., 1010—1013.
8. Nouvelle démonstration d'un théorème sur les fonctions discontinues.— Bull de la Soc. math France, 1900, **28**, 173—179.
9 Sur les séries à termes continues et tous de même signe.— Bull de la Soc math. France, 1904, **32**, 125—128.
10. Теория разрывных функций (1905). М — Л, Гостехиздат, 1932
11. Théorie des nombres irrationnels, des limites et de la continuité Paris, 1905
12. Lettre de M. Baire à M. Hadamard.— Bull. de la Soc. math France, 1905, **33**, 263—264.
13. Sur la représentation des fonctions discontinues.— Acta math., 1906, **30**, 1—47.
14. Sur la non-applicabilité de deux continus à n et $n+p$ dimensions.— Bull. de la Soc math. France, 1907, **31**, 94—99.
15. Leçons sur les théories générales de l'analyse, t. I. Principes fondamentaux. Variables réelles. Paris, 1907.
16. Leçons sur les théories générales de l'analyse, t. II. Variables complexes. Applications géométriques. Paris, 1908
17. Sur la représentation des fonctions discontinues — Acta math, 1909, **32**, 97—136
18. Théorie des ensembles — Encyklopédie des Sci math., t. I_1 Paris, 1909.

Валле-Пуссен (*Vallée Poussin Ch de la*)

1. Курс анализа бесконечно малых, т. I. М.— Л., Гостехиздат, 1933.

Вилейтнер (*Wieleitner H.*)

1. История математики от Декарта до середины XIX столетия М, Физматгиз. 1960

Винер (Wiener N.)

1. Кибернетика и общество. М, ИЛ, 1958.
2. Кибернетика. М, «Советское радио», 1958.

Винтер (Winter M.)

1. La méthode dans la philosophie des mathématiques. Paris, 1911.

Вольтерра (Volterra V.)

1. Betti, Brioschi, Casorati, trois analystes italiens et trois manière d'envisager les questions d'analyse (1902).— Opere mat., v. 3. Roma, 1957, 1—13.
2. Sur les fonctions qui dépendent d'autres fonctions.— C. R., 1906, 142, 691—695.

Гильберт (Hilbert D.)

1 Об основаниях логики и арифметики.— В кн.: Основания геометрии. М.—Л, Гостехиздат, 1948, с. 322—337.

Гильдебрандт (Hildebrandt T. H.)

1. The Borel theorem and its applications — Bull. A. M. S, 1926, **32**, 423—474

Граттен-Гюиннес (Grattan-Guinness I.)

1. The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann. Cambridge (Massachusetts)—London (England), 1970.
2. Bolzano, Cauchy and the «New Analysis» of the early nineteenth century.— Arch. hist. exact. sci., 1970, **6**, 372—400.

Гюэль (Hoüel J.)

1. Hankel, Untersuchungen über die unendlich oft oscillierenden und unstetigen Functionen. Ein Beitrag zur Feststellung des Begriffs der Function überhaupt.— Bull. des sci. math. et astron., 1970, **1**, 117—124.

Данжуа (Denjoy A.)

1. Sur quelques propriétés des fonctions de variables réelles.— Bull. de la Soc. math. France, 1905, **33**, 98—114.
2. Sur les ensembles parfaits discontinus à deux dimensions.— C. R., 1909, **149**, 726
3. Sur les ensembles parfaits discontinus.— Ibid., 1048.
4. Une extension de l'intégrale de M. Lebesgue.— C. R., 1912, **154**, 859—862.
5. Calcul de la primitive de fonction dérivée la plus générale.— Ibid., 1075—1078.
6. Sur l'absolu convergence des séries trigonométriques. — C. R., 1912, **155**, 135, 136
7. Sur quelques propriétés des séries à termes positifs.— Bull. de la Soc. math. France, 1912, **40**, 223—228.
8. Sur une propriété des fonctions à nombres dérivés finis.— C. R., 1914, **158**, 99—101
9. Sur la théorie descriptive des nombres dérivés d'une fonction continue.— C. R., 1915, **160**, 707, 708.
10. Sur les nombres dérivés.— Ibid, 763—765.
11. Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues. J. de math. pures et appl, sér. 7, 1915, **1**, 105—240.
12. Mémoire sur les fonctions dérivés sommables.— Bull. de la Soc. math. France, 1915, **43**, 161—248.
13. Mémoire sur la totalisation des nombres dérivés non sommables.— Ann. sci de l'École Norm. sup., sér. 3, 1916, **33**, 127—222.
14. Commentaire sur la théorie des fonctions monogénes non analytiques.—Selecta de Borel, 75—78.
15. Commentaire sur la mesure des ensembles.— Ibid., 189—191.

Данжуа, Феликс, Монтель (Denjoy A., Felix L., Montel P.)

1. Henri Lebesgue, le savant, le professeur, l'homme. L'Enseignement math., sér. 2, 1957, **3**, 1—18.

Дарбу (Darboux G.)

1. Mémoire sur les fonctions discontinues.— Ann. sci. de l'École Norm. sup., sér. 2, 1875, **4**, 57—112.
2. Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et une classe étendue de développements en séries.— J. de math. pures et appl., 1878, **4**, 5—56, 377—416.
3. Addition au mémoire sur les fonctions discontinues.— Ann. sci. de l'École Norm. sup., sér. 2, 1879, 8, 195—202.

Дорофеева А. В.

1. Создание классической теории интегральных уравнений с симметрическим ядром.— В кн.: История

и методология естественных иаук, в. XVI. Математика и механика. М., Изд-во МГУ, 1974, стр. 63—77.

Дьёдонне (Dieudonné J.)

1. Дело Никола Бурбаки.— В кн.: Очерки о математике. М., «Знание», серия Математика, Кибернетика, 1973, стр. 63—77.
2. История гармонического анализа.— ИМИ, 1973, **XVIII**, 31—70.

Дюгак (Dugac P.)

1. Понятие предела и иррациональные числа. Концепция Шарля Мере и Карла Вейерштрасса.— ИМИ, 1973, **XVIII**, 176—180.

Дюге (Dugué D.)

1. Maurice Fréchet, 1878—1973 — Intern. Statistical Rev., 1974, **42**, 113, 114.
2. Fréchet, Maurice René. Scienziati e tecnologi contemporanei, v. 1. Ed. A. Mondadori, Milano, 1974, p 400, 401.

Жордан (Jordan C.)

1. Sur la série de Fourier (1881).— Oeuvres, t. IV. Paris, 1964, 393—395.
2. Remarques sur les intégrales définies. (1892).— Ibid., 427—457.
3. Cours d'analyse de l'Ecole polytechnique, t. 1—3. Paris, 1893—1896.

Иваненко Д. Д.

1. Французская школа теоретической физики.— В кн.· Из истории французской науки. М., Изд-во АН СССР, 1960, стр. 156—181.
   История математики, т. 3. М, «Наука», 1972
   История Франции, т. 2. М., «Наука», 1973.

Калло (Callot J. P.)

1. Histoire de l'École Polytechnique depuis sa fondation jusqu'en 1958. Ses légendes, ses traditions, sa gloire. Paris, 1959.

Келдыш Л. В.

1. Идеи Н. Н Лузина в дескриптивной теории множеств.— УМН, 1974, **29**, 5, 183—196.

Клейн (Klein F.)

1. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.— Л., ОНТИ, 1937.

Клини (Kleene S. C.)

1. Введение в метаматематику (1952). М., ИЛ, 1957.

Кнопп (Knopp K.)

1. Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Berlin, Heidelberg, 1947.

Коллингвуд (Collingwood E. F.)

1. Émile Borel.— J. L. M. S., 1959, **34**, 488—512.

Колмогоров А. Н

1. Основные понятия теории вероятностей (1933). М., «Наука», 1974.

Костабель (Costabel P.)

1 Baire, René Louis. Dictionary of Scientific biography, v. 1. Ch. C. Gillispie, editor in chief. N. Y., 1970, p. 406—408.

Кутюра (Couturat L.)

1 De l'infini mathématique. Paris, 1896.
2. В защиту логистики (1906).— В кн.· Новые идеи в математике, № 10, Пг., 1915, стр. 53—115.
3. Философские принципы математики. Спб., 1912.

Лебег (Lebesgue H.)

1. Sur l'approximation des fonctions.— Bull. des Sci. math., sér. 2, 1898, **22**, 278—287.
2. Sur les fonctions de plusieurs variables.— C. R., 1898, **128**, 811-813.
3 Sur quelque surfaces non reglées applicables sur le plan.— Ibid, 1502—1505.
4. Sur la définition de l'aire d'une surface.— C. R., 1899, **129**, 870—873
5. Sur la définition de certaines intégrales de surface.— C. R., 1900, **131**, 867—870.
6. Sur le minimum de certaines intégrales.— Ibid., 935—937.
7. Sur une généralisation de l'intégrale définie.— C. R., 1901, **132**, 1025—1028.
8. Intégrale. Longueur. Aire.— Ann. di mat. pura ed appl., (3), 1902, **7**, 231—359.
9. Un théorème sur les séries trigonométriques.— C R, 1902, **134**, 585—587
10. Sur l'existence des dérivées — C. R., 1903, **136**, 659—661

11. Sur une propriété des fonctions.— C. R., 1903, **137**, 1228—1230.
12. Sur les séries trigonométriques — Ann. sci. de l'École Norm. sup., sér. 3, 1903, **20**, 453—485.
13. Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. Paris, 1904.
14. Une propriété caractéristique des fonctions de classe 1.— Bull. de la Soc. math. France, 1904, **32**, 229—242.
15. Sur les fonctions représentables analytiquement.— C. R., 1904, **139**, 29—31.
16. Sur une condition de convergence des séries de Fourier —C. R., 1905, **140**, 1378—1381.
17. Sur la divergence et convergence non uniforme des séries de Fourier.— C. R, 1905, **141**, 875—877.
18. Recherches sur la convergence des séries de Fourier.— M. A., 1905, **61**, 251—280.
19. Lettre de M. Lebesgue à M. Hadamard.— Bull de la Soc. math. France, 1905, **33**, 264—269
20. Remarques sur la définition de l'intégrale.— Bull. des sci. math., sér. 2, 1905, **29**, 272—275.
21. Sur les fonctions représentables analytiquement.— J. de math pures et appl., sér. 6, 1905, **1**, 139—216.
22. Démonstration d'un théorème de M. Baire. Note II dans un livre de Borel [29].
23. Sur les fonctions dérivées.— Atti della R. Acc. dei Lincei, Rend., Cl. d. Sci., fis., mat. e nat., ser. 5, 1906, $\mathbf{15}_2$, 3—8.
24. Leçons sur les séries trigonométriques. Paris, 1906.
25. Encore une observation sur les fonctions dérivées.— Atti della R. Acc. dei Lincei, Rend., Cl d. Sci fis., mat. nat., (5), 1907, $\mathbf{16}_1$, 92—100.
26. Sur la recherche des fonctions primitives par l'intégration.— Ibid., 283—290.
27. Young (W. H.) et Chisholm Young (Grace). The theory of sets of points. XII—316 pages. Cambridge, Univ. Press, 1906.— Bull. des Sci. math., sér. 2, 1907, **31**, 129—135.
28. Contribution à l'étude des correspondances de M. Zermelo — Bull de la Soc. math. France, 1907, **35**, 202—214.
29. Sur la représentation approchée des fonctions.— Rend. del circ. mat. di Palermo, 1908, **26**, 325—328.
30. Sur les intégrales singulières.— Ann. de la Faculté des Sci. de l'univ. de Toulouse pour les Sci. math. et les Sci. phys., sér. 3, 1909, **1**, 25—117.
31. Sur les intégrales de Stieltjes et sur les opérations fonctionnelles linéaires.— C. R., 1910, **150**, 86—88.
32. Sur l'intégration des fonctions discontinues.— Ann. sci. de l'École Norm. sup., sér. 3, 1910, **27**, 361—450.
33. Représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz.— Bull. de la Soc. math. France, 1910, **38**, 184—210.
34. Sur la non-applicabilité de deux domaines appartenant respectivement à des espaces à n et $n+p$ dimensions.— M. A., 1911, **70**, 166—168.
35. Sur l'invariance du nombre de dimensions et sur le théorème de M. Jordan relatif aux variétés fermées.— C. R., 1911, **152**, 841—843.
36. Sur certaines démonstrations d'existence.— Bull. de la soc. math. France, 1917, **45**, 132—144.
37. Remarques sur les théories de la mesure et de l'intégration.— Ann. sci. de l'École Norm. sup., ser. 3, 1918, **35**, 191—250.
38. Sur les correspondances entre les points de deux espaces.— F. M., 1921, **2**, 256—285.
39. Notice sur la vie et les travaux de Camille Jordan (1926).— L'Enseign. math., sér. 2, 1957, **3**, 81—106.
40. Интегрирование и отыскание примитивных функций (1928) М —Л., Гостехиздат, 1934.
41. Об измерении величин (1931—1935). М, Учпедгиз, 1938.
42. Notice necrologique sur M. René Louis Baire.— C. R., 1932, **195**, 86—88.
43. Les controverses de la théorie des ensembles et la question de fondaments. Les entretiens de Zurich sur les fondaments et les méthodes des sciences mathématiques, 8—9 Decembre 1938. Exposés et discussions publiés par le président des debats P. Gonseth. Zurich, 1941, 109—122.

44 Notices d'histoire des mathématiques. Genève, 1958.
45. A propos de quelques travaux mathématiques récents (1905).— L'Enseign. math., sér. 2, 1971, **17**, 1—48.

Леви (Lévy P.)

1. Jacques Hadamard, sa vie et son oeuvre. Calcul fonctionnel et questions diverses.—Enseign math., 1967, **13**, 1—24

Ленин В. И.

1. Материализм и эмпириокритицизм. М., Госполитиздат, 1945.

Леруа (Le Roy E.)

1 Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor.— C. R., 1898, **127**, 654—657.
2. Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor.— Ann. de la Faculté des Sci. de l'univ. de Toulouse pour les Sci. math. et les Sci. phys., sér. 2, 1900, **2**, 317—430.
3. Sur les séries divergentes.— C. R., 1900, **130**, 1293—1296.
4. Sur les séries divergentes: rectification à une note précedent.— Ibid., 1535—1536.

Ломницки (Lomnicki A.)

1. Nouveau fondaments du calcul des probabilités.— F. M., 1923, **4**, 34—71.

Лузин Н. Н.

1. Интеграл и тригонометрический ряд (1915).— Собр. соч., т. I. М., Изд-во АН СССР, 1953, с. 48—212.
2. Лекции об аналитических множествах и их приложениях (1930).— Собр. соч., т. II. М., АН СССР, 1958, с. 9—269.
3. Современное состояние теории функций действительного переменного (1933).— Там же, с. 494—536.
4. О некоторых новых результатах дескриптивной теории функций (1935).— Там же, с. 552—616.
5. Функция (1935).— Собр. соч., т. III. М., Изд-во АН СССР, 1959, с. 318—341.

Мандельбройт (Mandelbrojt S.)

1. Théorie des fonctions et théorie des nombres dans l'oeuvre de Jaques Hadamard. Monogr. Enseign math., 1967, **16**, 25—34.
2. Notice nécrologique sur Maurice Fréchet.— C. R , sér A et B, 1973, **277**, 73—76.

Медведев Ф. А.

1. Развитие теории множеств в XIX в. М., «Наука», 1965.
2. Развитие понятия интеграла. М., «Наука», 1974.
3 К истории понятия равномерной сходимости рядов.— ИМИ, 1974, **19**, стр. 75—93.
4. Очерки истории теории функций действительного переменного. М., «Наука», 1975.

Монна (Monna A. F.)

1 The concept of function in the 19th and 20th centuries, in particular with regard to the discussions between Baire, Borel and Lebesgue — Arch. hist. exact. sci., 1972, **9**, 57—84.

Монтель (Montel P.)

1. Sur les suites infinies des fonctions — Ann. sci. de l'École Norm. sup., sér. 3, 1907, **24**, 233—334.
2. Sur l'existence des dérivées.— C. R., 1912, **155**, 1478—1480.
3. Notice nécrologique sur M. Henri Lebesgue.— C. R., 1941, **213**, 197—200.
4. Notice nécrologique sur M. Émile Borel.— C. R., 1956, **242**, 845—850.
5 Le rôle des familles de fonctions dans l'analyse mathématique. Les grands courants de la pensée mathematique. Paris, 1962, 173—178.

Мостовский (Mostowski A.)

1 Cohen's independence proof and the second order formalisation. Problems of philos. of math. Amsterdam, 1967, 113—114.

Натансон И. П.

1. Теория функций вещественной переменной М., Гостехиздат, 1957.

Нормальная школа (Le centaire de l'École Normale. 1795—1895). Paris, 1895.

Окстоби (Oxtoby J. C.)

1. Мера и категория (1971). М, «Мир», 1974.

Паде (Padé H.)

1. Sur une possibilité de définir une fonction par un série divergente.— C. R., 1893, **116**, 686, 687.

2 Sur les séries entières convergentes ou divergentes et les fractions continues rationnelles.— Acta math., 1894, **18**, 97—111.

Паплаускас А. Б.

1 Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега М., «Наука», 1966.
2 L'influence de la théorie des séries trigonométriques sur le développement du calcul intégral.— Arch. d'hist. des sci., 1968, **21**, 248—260.

Перрен (Perrin L.)

1. Henri Lebesgue rénovateur de l'analyse moderne Les grands courants de la pensée mathématique. Paris, 1962, 286—292.

Песин И. Н.

1. Развитие понятия интеграла. М., «Наука», 1966.

Пикар (Picard É.)

1. Revue de quelques travaux mathématiques récents.— Revue gén. des sci. pures et appl., 1897, **8**, 957—961.
2. L'evolution de l'idée de fonction pendant le XIX siècle (1899). Discours et notices. Paris, 1936, 189—225.
3. Sur un exemple d'approximations successives divergentes.— Bull. de la Soc. math. France, 1900, **28**, 137—143.
4. Sur les développements de Cauchy en séries d'exponentielles et sur certaines identités remarquables.— Bull. de la Soc. math. France, sér. 2, 1913, **37**, 152—159.
5. La vie et l'oeuvre de Jules Tannery. Paris, 1926.

Пинкерле (Pincherle S.)

2. Funktionaloperationen und Gleichungen.— Encykl. des Math. Wiss., II A 1, S. 761—817.

Плеснер А. И.

1. Спектральная теория линейных операторов. М., «Наука», 1965.

Пуанкаре (Poincaré H.)

1. Mémoire sur les groups kleinéens.— Acta math., 1883, **3**, 49—92.
2 О природе математических доказательств (1894). Казань, 1898.
3. Les rapports de l'analyse et de la physique mathématique.— Revue gén. des sci. pures et appl., 1897, **8**, 857—861.
4. Математика и логика (1905—1906).— В кн.: Новые идеи в математике, № 10, Пг., 1915, с. 1—52, 116—148
5. A propos de la logistique.— Revue de métaph. et de morale, 1906, **14**, 866—868.
6. Логика бесконечности. Последние мысли. Пг., 1923, с. 54—75.
7 Математика и логика — Там же, с 76—86.
8 Reflexions sur les deux notes précedentes.— Acta math., 1909, **32**, 195—200.
9. Über transfinite Zahlen (1910). Oeuvres, XI, Paris, 1956, 120—124
10. Новые методы небесной механики, III (1899).— Избранные труды, т. 2. М., «Наука», 1972, с. 9—356.
11. Henri Poincaré. L'oeuvre scientifique, l'oeuvre philosophique. Par Vito Volterra, Jacques Hadamard, Paul Langevin, Pierre Boutroux. Paris, 1914.

Радо (Radó T.)

1. What is the area of a surface?— Amer. math. monthly, 1943, **50**, 139—141.

Ришар (Richard J.)

1. [Lettre à M. le rédacteur] [2].— Revue gén. des sci. pures et appl., 1905, **16**, p. 541.
2. Lettre à Monsieur le rédacteur de la Revue générale des sciences.— Acta math., 1906, **30**, 295, 296

Рыбников К. А.

1. О так называемых творческих и критических периодах в истории математического анализа.— ИМИ, 1954, **7**, 643—665.

Сакс (Saks S.)

1. Теория интеграла (1933, 1937). М., ИЛ, 1949.

---

[2] Название условно Текст письма включен в обзор Адамара [4]. Вторая публикация Ришара — перепечатка этого письма.

Серван (Servant M.)

1. Essai sur les séries divergentes — Ann. de la Faculté des Sci. de l'univ. de Toulouse pour les Sci math et les Sci phys, sér 2, 1900, **2**, 317—430

Таннери Ж. (Tannery J.)

1. Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. Paris, 1886.
2. G. Peano. Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale.— Bull. des sci math., sér. 2, 1887, **11**, 237—239.
3. L'Enseignement mathèmatique à l'École. Le centaire de l'École Normale. 1795—1895. Paris, 1895, 387—394.
4. De l'infini mathématique.— Revue gén. des sci pures et appl, 1897, **8**, 129—143.
5. Baire R. Sur les fonctions de variables réelles Thèse présentée à la Faculté des sciences de Paris. Milan, Rebeschini, 1899.— Bull. des sci. math, sér 2, 1903, **27**, 293—298
6. Введение в теорию функций с одной вещественной переменной (1904—1910). М., 1912.
7. Основные понятия математики. Спб., 1914.

Таннери П. (Tannery P.)

1. Ensemble. Mémoire scientifique, t. VI. Paris, 1926, 356—359.
2. Note sur la théorie des ensembles (1884). Mémoires scientifiques, t. VI. Paris, 1926, 23—30.
3. Le concept scientifique du continu. Zenon d'Élée et Georg Cantor.— Revue philos. de la France et de l'étranger, 1885, **20**, 385—416.
4. Sur le concept du transfini.—Rev. de métaph. et de morale, 1894, **2**, 465—472

Тейлор (Taylor A. E.)

1. The differential: nineteeth and twentieth century developments.— Arch. hist. exact sci., 1974, **12**, 355—383.

Туччьяроне (Tucciarone J.)

1. The development of the theory of sommable divergent series from 1880 to 1925.—Arch. hist. exact. sci., 1973, **10**, 1—40.

Фату (Fatou P.)

1. La série de Fourier et la série de Taylor sur son cercle de convergence — C R., 1904, **139**, 850—852.
2. Sur l'intégrale de Poisson et les lignes singulières des fonctions analytiques — C. R, 1905, **140**, 359, 360.
3. Sur quelques théorèmes de Riemann — Ibid, 569—570.
4. Séries trigonométriques et séries de Taylor.— Acta math., 1906, **30**, 335—400.
5. Sur le développement en séries trigonométriques des fonctions non intégrables.— C R, 1906, **142**, 765—767.
6. Sur la convergence absolue des séries trigonométriques.— Bull. de la Soc. math. France, 1913, **41**, 45—53.

Фихтенгольц Г. М.

1. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III М., Физматгиз, 1963

Френкель, Бар-Хиллел (Fraenkel A. A., Bar-Hillel J.)

1. Основания теории множеств (1958). М., «Мир», 1966.

Фреше (Fréchet M.)

1. Généralisation d'un théorème de Weierstrass.— C. R., 1904, **139**, 848—850
2. Sur les fonctions de lignes fermées.— Ann. sci. de l'Ecole Norm. sup., sér. 3, 1904, **21**, 557—571.
3. Sur les opérations lineáres.— Trans. A. M. S. 1904, **5**, 493—499.
4. Sur les fonctions limites et les opérations fonctionnelles.— C. R., 1905, **140**, 27—29.
5. La notion d'écart dans le calcul fonctionnel.— Ibid., 772—774.
6. Formule d'interpolation des fonctions periodiques continues.— C. R., 1905, **141**, 818, 819.
7. Sur deux propriétés remarquables des polynomes et de courbes.— Nouv. ann. de math., sér. 4, 1905, **5**, 253—257.
8. Sur quelques points du calcul fonctionnel.— Rend. del circolo mat. di Palermo, 1906, **22**, 1—74.
9. Sur l'approximation des fonctions par des suites trigonométriques limitées.— C. R., 1907, **144**, 124, 125.

10. Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires.— C. R., 1907, **144**, 1414—1416
11. Sur l'approximation des fonctions continues périodiques par les sommes trigonométriques limitées — Ann. sci. de l'École Norm. sup., sér, 3, 1908, **25**, 43—56.
12. Extension au cas des intégrales d'une définition de l'intégrale due à Stieltjes.— Nouv. ann. de math., sér. 4, 1910, **10**, 241—256.
13. Sur les fonctionnelles continues.— C. R., 1910, **150**, 1231—1233.
14. Sur la notion de différentielle.— C. R., 1911, **152**, 845—847.
15. Définition de l'intégrale sur un ensemble abstrait.— C. R., 1915, **160**, 839, 840
16. Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait — Bull. de la Soc. math. France, 1915, **43**, 248—265.
16a. L'analise générale et les espaces abstraits — Atti del Congresso internazionale dei Matematici. Bologna, 3—10 settembre 1928, t. **1**. Bologna, 1929, p. 267—274.
17. Commentaire sur les formules d'interpolation.— Selecta de Borel, 197, 198.
18. La vie et l'oeuvre d'Émile Borel.— L'Enseign math., sér. 2, 1965, **11**, 1—97.

Фурье (Fourier J. B. J.)

1. Théorie analytique de la chaleur (1822).— Oeuvres, t. 1. Paris, 1888, 1—563.

Харди (Hardy G. H.)

1. Расходящиеся ряды. М., ИЛ, 1951.

Хаусдорф (Hausdorff F.)

1. Теория множеств. М., ОНТИ, 1937.

Хокинс (Hawkins T.)

1. Lebesgue's theory of integration Its origins and development Madison, Milwauke and London, 1970.

Целлер (Zeller K.)

1. Theorie der Limitirungsverfahren. Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1958.

Цермело (Zermelo E.)

1. Beweis, das jede Menge wohlgeordnet werden kann.— M. A., 1904, **59**, 514—516.
2. Sur les ensembles finis et le principe d'induction complète.— Acta math., 1909, **32**, 185—193.

Чёрч (Church A.)

1. Введение в математическую логику (1958). М., ИЛ, 1960.

Эвеллен (Evellin F.)

1. L'infini nouveau.— Revue philos. de la France et de l'étranger, 1898, **45**, 113—119.

Эвеллен (Evellin F. et Z.)

1. L'infini nouveau.— Revue philos. de la France et de l'étranger, 1900, **49**, 135—143.

Энгельс (Engels F.)

1. Диалектика природы. М., Госполитиздат, 1946.

Югоньо (Hugoniot P. H.)

1. Sur le développement des fonctions en séries d'autres fonctions.— C. R., 1882, **95**, 907—909.

Юшкевич А. П.

1. История математики в России. М., «Наука», 1968.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ